SVD: Decomposição em Valores Singulares

Autovalores (eigenvalues) e Autovetores (eigenvectors):

Considere um sistema linear do tipo:

$$\bar{\mathbf{y}} = \bar{\bar{\mathbf{A}}}\,\bar{\mathbf{b}}\,, \tag{1}$$

em que $\bar{\bar{\mathbf{A}}}$ é uma matriz arbitrária N x N que transforma o vetor $\bar{\mathbf{b}}$ de dimensão N no vetor $\bar{\mathbf{y}}$ também de dimensão N. Vamos considerar que o nosso objetivo seja resolver este sistema linear sendo que o vetor $\bar{\mathbf{y}}$ é o vetor contendo os dados conhecidos e o nosso problema consiste em achar o vetor $\bar{\mathbf{b}}$. No entanto, nesta seção nós não iremos nos preocupar com nenhum método para a solução deste sistema, ao contrário iremos nos concentrar no estudo das propriedades básicas deste sistema.

Considerando que $\bar{\bar{\mathbf{A}}}$ é uma matriz arbitrária N x N e $\bar{\mathbf{x}}$ um vetor em R^n, então geralmente não há uma relação geométrica comum entre o vetor $\bar{\mathbf{x}}$ e o vetor $\bar{\bar{\mathbf{A}}}\bar{\mathbf{x}}$ (Figura 1a). No entanto, há geralmente certos vetores $\bar{\mathbf{x}}$ tal que $\bar{\mathbf{x}}$ e $\bar{\bar{\mathbf{A}}}\bar{\mathbf{x}}$ são múltiplos escalares de um no outro (Figura 1b).

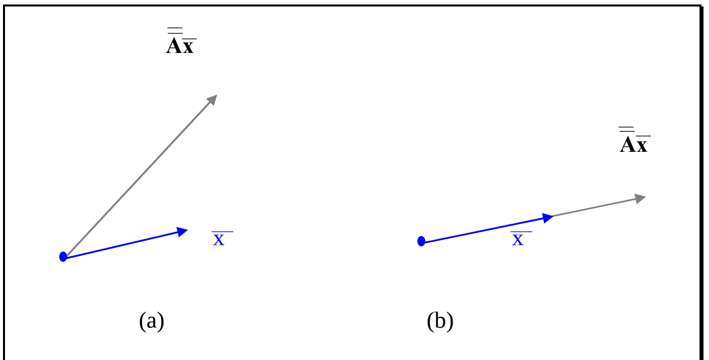


Figura 1

DEFINIÇÃO: se $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$ é uma matriz arbitrária N x N, então um vetor não nulo $\overline{\mathbf{x}}$ em R^n é chamado **autovetor** (**eigenvector**) de $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$ se o vetor $\overline{\overline{\mathbf{A}}}\,\overline{\mathbf{x}}$ é um escalar múltiplo do vetor $\overline{\mathbf{x}}$, ou seja,

$$\overline{\overline{\mathbf{A}}}\,\overline{\mathbf{x}} = \lambda\ \overline{\mathbf{x}} \tag{2}$$

para algum escalar λ. O escalar λ é chamado de **autovalor** (**eigenvalue**) de $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$, e $\overline{\mathbf{x}}$ é o autovetor de $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$ correspondente (associado) ao autovalor λ .

Autovalores e autovetores têm uma interpretação geométrica em R^2. Se o escalar λ é o autovalor de $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$ correspondente ao autovetor $\overline{\mathbf{x}}$, então dependendo do valor do autovalor λ , a multiplicação por $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$ levará há uma dilatação, contração ou mudança de direção de $\overline{\mathbf{x}}$ (Figura 2).

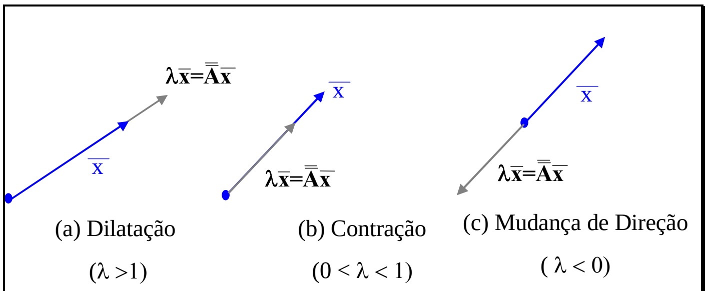


Figura 2

Para acharmos os autovalores da matriz $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$ (N x N) temos que escrever a equação $\overline{\overline{\mathbf{A}}}\,\overline{\mathbf{x}} = \lambda\ \overline{\mathbf{x}}$ como :

$$\overline{\overline{\mathbf{A}}}\,\overline{\mathbf{x}} = \lambda\ \overline{\overline{\mathbf{I}}}\ \overline{\mathbf{x}} \tag{3}$$

ou seja:

$$\left(\overline{\overline{\mathbf{A}}} - \lambda\ \overline{\overline{\mathbf{I}}} \right) \overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{0}} \tag{4}$$

Para λ ser um autovalor deve existir uma solução não nula para esta equação, ou seja, deve existir uma solução não trivial $\bar{\mathbf{x}} \neq \bar{\mathbf{0}}$ que satisfaça esta equação homogênea. Uma solução não trivial ($\bar{\mathbf{x}} \neq \bar{\mathbf{0}}$) para esta equação homogênea ocorre se a matriz $\left(\bar{\bar{\mathbf{A}}} - \lambda \bar{\bar{\mathbf{I}}} \right)$ for singular e isto ocorre se e somente se

$$\text{DET} \left(\bar{\bar{\mathbf{A}}} - \lambda \bar{\bar{\mathbf{I}}} \right) = 0 \tag{5}$$

Esta equação acima é chamada de **equação característica** de $\bar{\bar{\mathbf{A}}}$; os escalares que satisfazem a esta equação são os autovalores de $\bar{\bar{\mathbf{A}}}$. Os autovalores de $\bar{\bar{\mathbf{A}}}$ devem satisfazer ao polinômio de ordem N chamado de **polinômio característico** em que o coeficiente de λ^N é 1 e tem a seguinte forma:

$$\text{DET} \left(\lambda \bar{\bar{\mathbf{I}}} - \bar{\bar{\mathbf{A}}} \right) = \lambda^N + c_1 \lambda^{N-1} + \ldots + c_N = 0 \tag{6}$$

Teorema: Se a matriz $\bar{\bar{\mathbf{A}}} \in R^{N \times N}$ tem N autovalores distintos ($\lambda_1, \ldots, \lambda_N$) então existe um conjunto LI (linearmente independente) de N autovetores ($x_1, \ldots, x_N$).

Auto-Sistemas

Se a matriz $\bar{\bar{\mathbf{A}}} \in R^{N \times N}$ tem N autovalores distintos ($\lambda_1, \ldots, \lambda_N$) então existe um conjunto LI (linearmente independente) de N autovetores ($\bar{\mathbf{x}}_1, \ldots, \bar{\mathbf{x}}_N$), sendo que cada autovetor está associado a um autovalor, levando as seguintes equações;

$$\bar{\bar{\mathbf{A}}}\bar{\mathbf{x}}_1 = \lambda_1 \bar{\mathbf{x}}_1, \quad \bar{\bar{\mathbf{A}}}\bar{\mathbf{x}}_2 = \lambda_2 \bar{\mathbf{x}}_2, \quad \cdots, \quad \bar{\bar{\mathbf{A}}}\bar{\mathbf{x}}_N = \lambda_N \bar{\mathbf{x}}_N .$$

Das equações acima $\bar{\bar{\mathbf{A}}}\bar{\mathbf{x}}_i = \lambda_i \bar{\mathbf{x}}_i$, para $1 \leq i \leq N$ obtemos a seguinte forma compacta:

$$\left[\bar{\bar{\mathbf{A}}}\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\bar{\mathbf{A}}}\bar{\mathbf{x}}_2, \ldots, \bar{\bar{\mathbf{A}}}\bar{\mathbf{x}}_N \right] = \left[\lambda_1 \bar{\mathbf{x}}_1, \lambda_2 \bar{\mathbf{x}}_2, \ldots, \lambda_N \bar{\mathbf{x}}_N \right]$$

$$\bar{\bar{\mathbf{A}}}\ [\bar{\mathbf{x}}_1\ \bar{\mathbf{x}}_2\ \ldots\ \bar{\mathbf{x}}_N] = [\bar{\mathbf{x}}_1\ \bar{\mathbf{x}}_2\ \ldots\ \bar{\mathbf{x}}_N]\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_N \end{bmatrix}$$

Para escrever de uma forma mais compacta, façamos

$$\bar{\bar{\mathbf{P}}} = [\bar{\mathbf{x}}_1\ \bar{\mathbf{x}}_2\ \ldots\ \bar{\mathbf{x}}_N] \text{ e } \bar{\bar{\mathbf{\Lambda}}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_N \end{bmatrix}$$

Desta forma a equação $\left[\bar{\bar{\mathbf{A}}}\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\bar{\mathbf{A}}}\bar{\mathbf{x}}_2, \ldots, \bar{\bar{\mathbf{A}}}\bar{\mathbf{x}}_N\right] = \left[\lambda_1\bar{\mathbf{x}}_1, \lambda_2\bar{\mathbf{x}}_2, \ldots, \lambda_N\bar{\mathbf{x}}_N\right]$ pode ser escrita como:

$$\bar{\bar{\mathbf{A}}}\ \bar{\bar{\mathbf{P}}} = \bar{\bar{\mathbf{P}}}\ \bar{\bar{\mathbf{\Lambda}}}$$

Note que é $\bar{\bar{\mathbf{P}}}$ uma matriz N x N cujas colunas são os autovetores da matriz $\bar{\bar{\mathbf{A}}}$ como consideramos que há N autovalores distintos ($\lambda_1, \ldots, \lambda_N$) então existe um conjunto LI de N autovetores de $\bar{\bar{\mathbf{A}}}$. Como o conjunto de colunas de é LI, então ela é Não-Singular (i.e., inversível); portanto pós-multiplicando os dois lados da equação acima por $\bar{\bar{\mathbf{P}}}^{-1}$ temos:

$$\bar{\bar{\mathbf{A}}}\ \bar{\bar{\mathbf{P}}}\bar{\bar{\mathbf{P}}}^{-1} = \bar{\bar{\mathbf{P}}}\ \bar{\bar{\mathbf{\Lambda}}}\bar{\bar{\mathbf{P}}}^{-1}$$

$$\bar{\bar{\mathbf{A}}} = \bar{\bar{\mathbf{P}}}\ \bar{\bar{\mathbf{\Lambda}}}\bar{\bar{\mathbf{P}}}^{-1}$$

Assim, a existência de N autovalores distintos ($\lambda_1, \ldots, \lambda_N$) da matriz $\bar{\bar{\mathbf{A}}} \in R^{N \times N}$ leva a existência de um conjunto LI de N autovetores ($\bar{\mathbf{x}}_1, \ldots, \bar{\mathbf{x}}_N$) que formam os vetores colunas de uma matriz $\bar{\bar{\mathbf{P}}} \in R^{N \times N}$, permitindo decompor a matiz por um tipo especial de produto $\bar{\bar{\mathbf{A}}} = \bar{\bar{\mathbf{P}}}\ \bar{\bar{\mathbf{\Lambda}}}\bar{\bar{\mathbf{P}}}^{-1}$

Teorema: Uma matriz $\overline{\overline{\mathbf{A}}} \in R^{N \times N}$ tem conjunto LI de N autovalores se somente existe uma matriz não singular $\overline{\overline{\mathbf{P}}} \in R^{N \times N}$ e uma matiz diagonal $\overline{\overline{\mathbf{\Lambda}}}$ para a qual

$$\overline{\overline{\mathbf{A}}} = \overline{\overline{\mathbf{P}}}\ \overline{\overline{\mathbf{\Lambda}}}\,\overline{\overline{\mathbf{P}}}^{-1}.$$

As colunas da matriz $\overline{\overline{\mathbf{P}}} = [\overline{\mathbf{x}}_1\ \ \overline{\mathbf{x}}_2\ \ \ldots\ \ \overline{\mathbf{x}}_N]$ são os autovetores de $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$ associados respectivamente com os autovalores λ_i, onde λ_i é o (i,i)-ésimo elemento da matriz diagonal $\overline{\overline{\mathbf{\Lambda}}}$.

Teorema: Se a matriz $\overline{\overline{\mathbf{A}}} \in R^{N \times N}$ é real e simétrica[1], então $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$ pode ser decomposta como

$$\overline{\overline{\mathbf{A}}} = \overline{\overline{\mathbf{Q}}}\ \overline{\overline{\mathbf{\Lambda}}}\,\overline{\overline{\mathbf{Q}}}^{T}$$

em que $\overline{\overline{\mathbf{Q}}}$ é uma matriz real orthogonal[2] cujas coluna são os autovetores de $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$ e $\overline{\overline{\mathbf{\Lambda}}}$ é uma matiz real diagonal dos autovalores de $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$.

Uma Informação:
No MATLAB há um commando " eig " que pode fornecer os autovalores e autovetores de uma matriz quadrada qualquer. Digite no matlab "help eig" para obter informações sobre este comando. Veja um exemplo

```
» a=[4 0 ; 0 4]
a =  4    0
     0    4
» [P,S]=eig(a)
P = 1    0
    0    1
S = 4    0
    0    4
```

Neste exemplo acima a matriz é a variável "a" os autovetores são as colunas da matriz P e os valores singulares estão na diagonal da matriz S

---

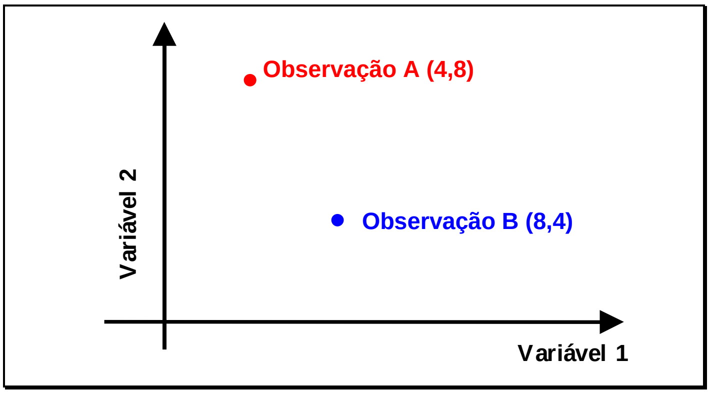
[1] Matriz simétrica é uma matriz quadrada tal que $\overline{\overline{\mathbf{A}}}^{T} = \overline{\overline{\mathbf{A}}}$.

Interpretação Geométrica de autovalor e autovetor:

Considere a matriz simétrica

$$\overline{\overline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$$

Esta matriz simétrica pode ser interpretada como uma matriz de dados em estatística, em que as colunas representam variáveis e as linhas representam observações. Assim o conteúdo de informação desta matriz pode ser visualizado geometricamente em R^2 (e também em R^3 matriz 3 x 3), representando-se as observações num espaço definido por eixos de variáveis (ou vice-versa):



Assim os pontos A (vermelho) e B (azul) representam as duas observações (linhas da matriz) num espaço de duas variáveis (colunas da matriz)

Os autovalores da matriz $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$ são dados resolvendo-se a equação característica. Assim temos que

$$\mathrm{DET}\begin{bmatrix} 4-\lambda & 8 \\ 8 & 4-\lambda \end{bmatrix} = (4-\lambda)^2 - 64 = 0$$

Portanto a equação característica de $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$ é:

---

[2] Uma matriz quadrada $\overline{\overline{\mathbf{Q}}} \in R^{N \times N}$ é ortogonal se $\overline{\overline{\mathbf{Q}}}^T \overline{\overline{\mathbf{Q}}} = \overline{\overline{\mathbf{Q}}}\,\overline{\overline{\mathbf{Q}}}^T = \overline{\overline{\mathbf{I}}}_N$, logo $\overline{\overline{\mathbf{Q}}}^{-1} = \overline{\overline{\mathbf{Q}}}^T$

$$\lambda^2 - 8\lambda - 48 = 0$$

A solução desta equação são $\lambda_1 = 12$ e $\lambda_2 = -4$; estes são os autovalores da matriz $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$.

Por definição temos que $\left(\lambda\, \overline{\overline{\mathbf{I}}} - \overline{\overline{\mathbf{A}}}\right)\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{0}}$ portanto os autovetores respectivos são:

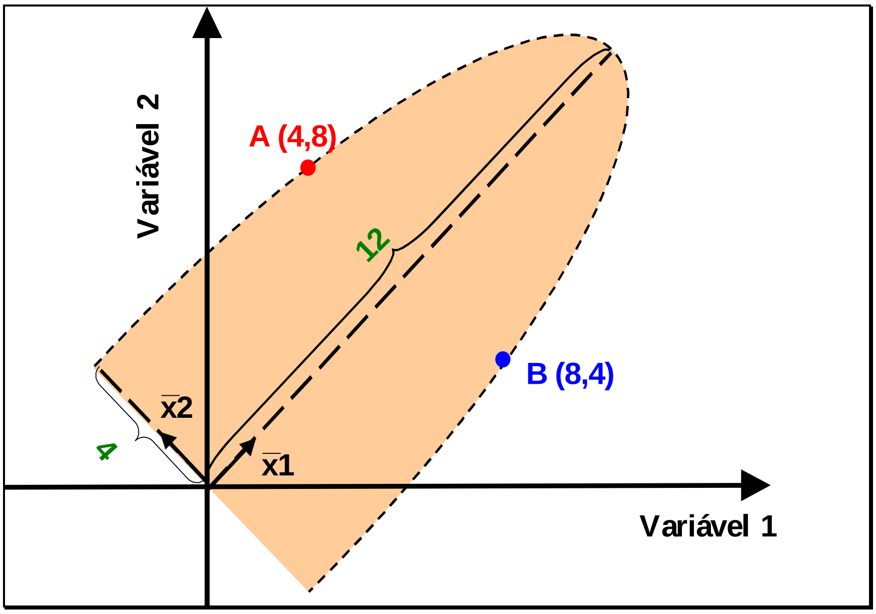
$$\begin{bmatrix} 4 - \lambda_1 & 8 \\ 8 & 4 - \lambda_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x1_1 \\ x1_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tomando-se $\lambda_1 = 12,$ assim temos o vetor normalizado $\overline{\mathbf{x}}1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e

$$\begin{bmatrix} 4 - \lambda_2 & 8 \\ 8 & 4 - \lambda_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x2_1 \\ x2_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tomando-se $\lambda_1 = -4,$ assim temos o vetor normalizado $\overline{\mathbf{x}}2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Introduzindo-se os autovetores e autovalores no gráfico acima temos:



Vemos que os autovetores tomados com módulos iguais ao valores absolutos dos respectivos autovalores caracterizam uma elipse com centro na origem e que passa pelos pontos A e B. A forma elíptica indica a existência de um autovalor próximo a zero. Mas o que significa um autovalor próximo de zero ? Ou ainda. O que significa um autovalor igual a zero ? Veremos, a seguir, que na direção do autovetor associado a este autovalor próximo a zero há um mal-condicionamento do sistema, ou seja, há uma dependência linear.

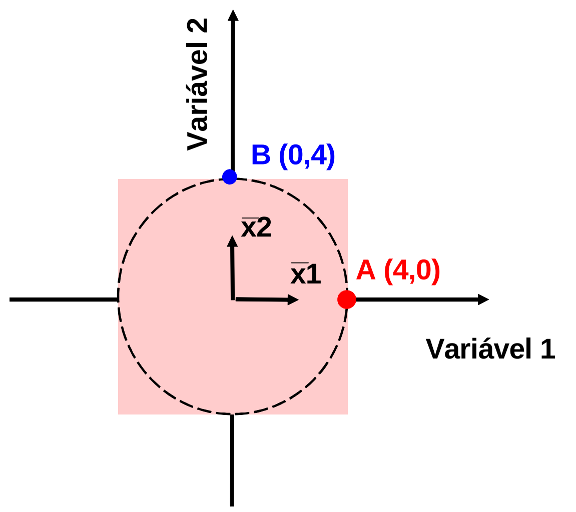
Vamos considerar agora dois casos extremos:

CASO (a) - Neste primeiro caso temos

$$\overline{\overline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Neste primeiro caso os autovalores são $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 4$; e os autovetores da matriz $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$ associada a estes autovalores são indeterminados: quaisquer dos vetores satisfazem a equação $\left(\lambda\ \overline{\overline{\mathbf{I}}} - \overline{\overline{\mathbf{A}}}\right)\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{0}}$.

Graficamente podemos constatar que este caso representa uma situação ideal em que as observações A e B são o mais diferentes possível (são informações não redundantes) e os autovalores são idênticos.



Os autovalores são $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 4$, portanto o Raio da esfera

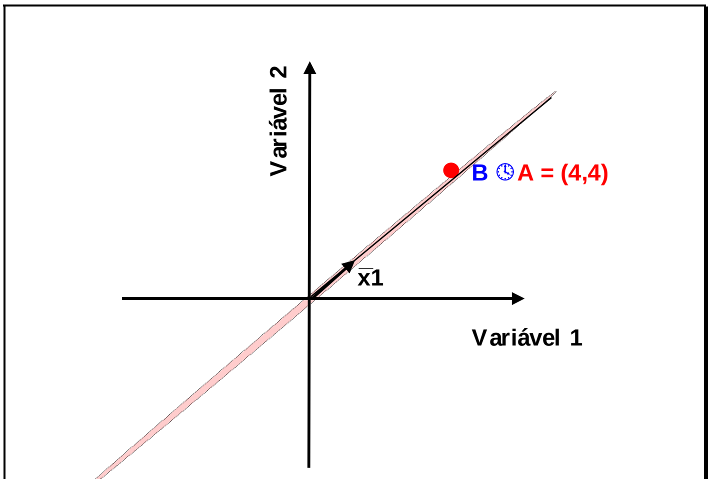
A forma circular indica uma independência linear do sistema.

CASO (b) - O segundo caso extremo temos:

$$\overline{\overline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Neste segundo caso os autovalores são $\lambda_1 = 8$ e $\lambda_2 = 0$; e os autovetores da matriz $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$ associada a estes autovalores são $\overline{\mathbf{x}}1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\overline{\mathbf{x}}2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Graficamente podemos constatar que as observações são idênticas (redundantes), ou seja a observação A é idêntica a observação B = (4,4).



Os autovalores são $\lambda_1 = 8$ e $\lambda_2 = 0$,

Concluímos que o caso (a) representa uma situação ideal: as observações A e B são o mais diferente possível e os autovalores são valores idênticos. Note que neste o número de condição (razão entre o maior e menor valor singular) é igual a 1.No caso (b), ao contrário, as observações A e B são idênticas (redundantes), neste caso o numero de condição tende para o infinito (razão extrema).

Os três casos que estudados podem ser sintetizados de acordo com o número de condição [3]:

	COND = $\|\lambda_1\| / \|\lambda_2\|$, $\|\lambda_1\| > \|\lambda_2\|$
Observações completamente independentes	COND = 4 / 4 = 1
Observações parcialmente independentes	COND = 12 / 4 = 3
Observações redundantes	COND = 8 / 0 = ζ ∞

Note que a presença de um autovalor NULO ou muito próximo a zero aumenta a razão (em valor absoluto) entre os módulos dos autovalores extremos e indica observações redundantes.

Podemos constatar que um autovalor nulo ou muito próximo de zero é um medidor da não unicidade e da instabilidade, respectivamente, já que a redundância de observações leva a problema subdeterminado, contendo mais incógnitas do que observações (equações), e caracterizando portanto uma demanda de informação maior que aquela contida nos dados observados **problema mal-posto**.

Então, para caracterizarmos se um problema é mal-posto, basta então analisarmos os autovalores da matriz associada com o sistema linear correspondente.

Vale lembrar que para determinarmos os autovalores e autovetores a matriz arbitrária $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$ é obrigatoriamente quadrada de dimensão N x N. Infelizmente, a análise acima não pode ser aplicada diretamente porque em geral o número de observações difere do número de parâmetros (incógnitas), de modo que os autovalores e os autovetores de matriz não quadrada (N x M) não são definidos. Veremos abaixo como este problema é contornado.

[3] Numero de condição de uma matriz $\overline{\overline{\mathbf{A}}}\,(N \times N)$ é dado pela razão entre o módulo do maior autovalor ($|\lambda_{\max}|$) e o módulo do menor autovalor ($|\lambda_{\min}|$) da matriz $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$, i.e., o numero de condição da matriz $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$ é $cond = |\lambda_{\max}| / |\lambda_{\min}|$

Decomposição em Valores Singulares

Sistema linear Arbitrário:

Agora iremos investigar um sistema linear arbitrário N X M

$$\bar{\mathbf{y}} = \bar{\bar{\mathbf{A}}}\,\bar{\mathbf{p}}\,, \tag{7}$$

em $\bar{\bar{\mathbf{A}}}$ é uma matriz arbitrária N x M, o vetor $\bar{\mathbf{p}}$ de dimensão M e o vetor $\bar{\mathbf{y}}$ de dimensão N. Portanto a matriz $\bar{\bar{\mathbf{A}}}$ transforma o vetor $\bar{\mathbf{p}}$ de dimensão M no vetor $\bar{\mathbf{y}}$ de dimensão N. É evidente que a matriz $\bar{\bar{\mathbf{A}}}$ está associada com dois espaços em que um é de N dimensão e o outro de M dimensão. Se o vetor $\bar{\mathbf{p}}$ do espaço M-dimensional é dado, o operador $\bar{\bar{\mathbf{A}}}$ opera e o transplanta dentro do espaço N-dimensional. Por outro lado, se o nosso objetivo é resolver este sistema linear, em que foi nos dado o vetor $\bar{\mathbf{y}}$ do espaço N-dimensional (vetor contendo os dados geofísicos), então o nosso problema consiste em achar o vetor $\bar{\mathbf{p}}$ do espaço M-dimensional que o produza por meio do operador $\bar{\bar{\mathbf{A}}}$. No entanto, nesta seção nós também não iremos nos preocupar com nenhum método para a solução deste sistema, ao contrário iremos nos concentrar no estudo das propriedades básicas deste sistema

A idéia central que será a base para toda as nossas discussões do comportamento do operados linear é a seguinte. Nós não consideraremos o sistema linear $\bar{\mathbf{y}} = \bar{\bar{\mathbf{A}}}\,\bar{\mathbf{p}}$ isoladamente mas expandido pelo sistema adjunto (M x N)

$$\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{T}\,\bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{x}} \tag{8}$$

A matriz $\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{T}$ tem M linhas e N colunas (M x N) e adequadamente os vetores $\bar{\mathbf{q}}$ e $\bar{\mathbf{x}}$ estão em uma relação de reciprocidade (intercâmbio) com os vetores $\bar{\mathbf{p}}$ e $\bar{\mathbf{y}}$. Concretamente, $\bar{\mathbf{y}}$ e $\bar{\mathbf{q}}$ são vetores que pertencem ao espaço N-dimensional, enquanto $\bar{\mathbf{p}}$ e $\bar{\mathbf{x}}$ são vetores que pertencem ao espaço M-dimensional.

Tomaremos o sistema adjunto $\overline{\overline{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}}\ \overline{\mathbf{q}} = \overline{\mathbf{x}}$ como um sistema auxiliar para formarmos um sistema aumentado. Assim combinaremos o sistema $\overline{\overline{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}}\ \overline{\mathbf{q}} = \overline{\mathbf{x}}$ com o sistema $\overline{\overline{\mathbf{A}}}\ \overline{\mathbf{p}} = \overline{\mathbf{y}}$ dentro do esquema aumentado:

$$\overline{\overline{\mathbf{T}}}\ \overline{\mathbf{z}} = \overline{\mathbf{a}} \qquad (9)$$

em que introduzimos uma nova matriz quadrada $\overline{\overline{\mathbf{T}}}$ de dimensões (N+M X N+M) e definida como segue:

$$\overline{\overline{\mathbf{T}}} = \begin{array}{c} \mathrm{N} \\ \hline \mathrm{M} \end{array} \begin{bmatrix} \overline{\overline{\mathbf{0}}} & \overline{\overline{\mathbf{A}}} \\ \overline{\overline{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}} & \overline{\overline{\mathbf{0}}} \end{bmatrix} \qquad (10)$$
$$\qquad\qquad \mathrm{N} \qquad \mathrm{M}$$

$$\overline{\mathbf{z}} = \begin{array}{c} \mathrm{N} \\ \hline \mathrm{M} \end{array} \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{q}} \\ \overline{\mathbf{p}} \end{bmatrix} \qquad (11)$$

e

$$\overline{\mathbf{a}} = \begin{array}{c} \mathrm{N} \\ \hline \mathrm{M} \end{array} \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{y}} \\ \overline{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \qquad (12)$$

O sistema linear pode ser então definido como

$$\begin{array}{c} \mathrm{N}\left\{ \vphantom{\overline{\overline{\mathbf{0}}}} \right. \\ \mathrm{M}\left\{ \vphantom{\overline{\overline{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}}} \right. \end{array} \left[\begin{array}{c:c} \overbrace{\overline{\overline{\mathbf{0}}}}^{\mathrm{N}} & \overbrace{\overline{\overline{\mathbf{A}}}}^{\mathrm{M}} \\ \hdashline \overline{\overline{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}} & \overline{\overline{\mathbf{0}}} \end{array} \right] \begin{array}{c} \mathrm{N}\{ \\ \mathrm{M}\{ \end{array} \left[\begin{array}{c} \overline{\mathbf{q}} \\ \hdashline \overline{\mathbf{p}} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \overline{\mathbf{y}} \\ \hdashline \overline{\mathbf{x}} \end{array} \right] \begin{array}{c} \}\mathrm{N} \\ \}\mathrm{M} \end{array}$$

isto é no sistema:

$$\begin{bmatrix} \bar{\bar{\mathbf{0}}} & \bar{\bar{\mathbf{A}}} \\ \bar{\bar{\mathbf{A}}}^T & \bar{\bar{\mathbf{0}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}} \\ \bar{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{y}} \\ \bar{\mathbf{x}} \end{bmatrix}$$

Vale ressaltar que o sistema adjunto $\bar{\bar{\mathbf{A}}}^T \bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{x}}$ não exerce nenhum efeito no sistema linear principal $\bar{\bar{\mathbf{A}}}\,\bar{\mathbf{p}} = \bar{\mathbf{y}}$. Assim os vetores $\bar{\mathbf{q}}$ e $\bar{\mathbf{x}}$ são completamente independente dos vetores $\bar{\mathbf{p}}$ e $\bar{\mathbf{y}}$, e vice-versa. Porém a adição do sistema adjunto ao sistema linear principal amplia o nosso conhecimento sobre as propriedades do sistema linear arbitrário N x M.

Como a matriz $\bar{\bar{\mathbf{T}}}$ é quadrada podemos definir agora seus autovalores e autovetores. Para tanto vamos tomar a equação fundamental dos autovalores

$$\bar{\bar{\mathbf{T}}}\,\bar{\mathbf{w}} = s\,\bar{\mathbf{w}} \tag{13}$$

ou seja,

$$\left(\bar{\bar{\mathbf{T}}} - s\,\bar{\bar{\mathbf{I}}}\right)\bar{\mathbf{w}} = \bar{\mathbf{0}} \tag{14}$$

Em vista das características da nossa matriz $\bar{\bar{\mathbf{T}}}$ de dimensões (N+M X N+M) o vetor $\bar{\mathbf{w}}$ é um vetor de dimensão N+M. Vamos considerar então que o vetor $\bar{\mathbf{w}}$ seja particionado nos vetores $\bar{\mathbf{u}}$ e $\bar{\mathbf{v}}$ de dimensões N e M, respectivamente

$$\bar{\mathbf{w}}_{(N+M\times 1)} = \begin{array}{c} N\{ \\ \hline M\{ \end{array} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \hline \bar{\mathbf{v}} \end{bmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{w}} = \begin{matrix} N \\ M \end{matrix} \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{u}} \\ \\ \overline{\mathbf{v}} \end{bmatrix}$$

Então o sistema $\overline{\overline{\mathbf{T}}}\ \overline{\mathbf{w}} = s\ \overline{\mathbf{w}}$ pode ser desdobrado na seguinte forma:

$$\begin{cases} \overline{\overline{\mathbf{A}}}\ \overline{\mathbf{v}} = s\,\overline{\mathbf{u}} \\ \overline{\overline{\mathbf{A}}}^{T}\ \overline{\mathbf{u}} = s\,\overline{\mathbf{v}} \end{cases} \tag{15}$$

Este par de equações chamaremos de "problema de autovalor deslocado" uma vez que os vetores do lado direito $\overline{\mathbf{u}}$ e $\overline{\mathbf{v}}$ estão deslocados quando comparando com o problema de autovalor já estudado em que temos $\overline{\overline{\mathbf{A}}}\,\overline{\mathbf{x}} = \lambda\ \overline{\mathbf{x}}$.

Vamos então pré multiplicar a primeira equação do sistema acima por $\overline{\overline{\mathbf{A}}}^{T}$ e a segunda equação por $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$. Temos então o seguinte sistema

$$\begin{cases} \overline{\overline{\mathbf{A}}}^{T}\ \overline{\overline{\mathbf{A}}}\ \overline{\mathbf{v}} = s\ \overline{\overline{\mathbf{A}}}^{T}\ \overline{\mathbf{u}} \\ \overline{\overline{\mathbf{A}}}\,\overline{\overline{\mathbf{A}}}^{T}\ \overline{\mathbf{u}} = s\ \overline{\overline{\mathbf{A}}}\ \overline{\mathbf{v}} \end{cases} \tag{16}$$

Da primeira equação do sistema (15) temos que $\overline{\overline{\mathbf{A}}}\ \overline{\mathbf{v}} = s\,\overline{\mathbf{u}}$. Substituindo na segunda equação do sistema (16) temos que

$$\overline{\overline{\mathbf{A}}}\,\overline{\overline{\mathbf{A}}}^{T}\ \overline{\mathbf{u}} = s^{2}\ \overline{\mathbf{u}} \tag{17}$$

Da segunda equação do sistema (15) temos que $\overline{\overline{\mathbf{A}}}^{T}\ \overline{\mathbf{u}} = s\,\overline{\mathbf{v}}$. Substituindo na primeira equação do sistema (16) temos que

$$\overline{\overline{\mathbf{A}}}^{T}\ \overline{\overline{\mathbf{A}}}\ \overline{\mathbf{v}} = s^{2}\ \overline{\mathbf{v}} \tag{18}$$

As equações (17) e (18) definem dois problemas de autovalores-autovetores. O primeiro problema é associado a matriz simétrica N x N $\overline{\overline{\mathbf{A}}}\,\overline{\overline{\mathbf{A}}}^{T}$ e o segundo problema está associado a matriz M x M $\overline{\overline{\mathbf{A}}}^{T}\ \overline{\overline{\mathbf{A}}}$, ambos problemas com os mesmos autovalores não nulos s^2. Os vetores $\overline{\mathbf{u}}$ e $\overline{\mathbf{v}}$ são, respectivamente, os autovetores de $\overline{\overline{\mathbf{A}}}\,\overline{\overline{\mathbf{A}}}^T$ e $\overline{\overline{\mathbf{A}}}^T\,\overline{\overline{\mathbf{A}}}$, portanto são vetores ortogonais que geram, respectivamente espaços de N e M dimensões.

Existirão, no máximo, min (M,N) autovalores diferentes de zero, todos os outros autovalores serão nulos. Assim se N > M a equação (18) comportará M autovalores que poderão ser diferentes de zero. Por outro lado, a equação (17) comportará os mesmos M autovalores que poderão ser diferentes de zero e também comportará N - M autovalores nulos. As mesmas observações se aplicam, mutatis mutandis, para o caso M > N.

Presumindo, sem perda da generalidade, que N > M a primeira equação do sistema (15) aplicado a cada par de autovalor-autovetor leva ao sistema:

$$\begin{cases} \overline{\overline{\mathbf{A}}}\,\overline{\mathbf{v}_1} = s_1 \overline{\mathbf{u}_1} \\ \overline{\overline{\mathbf{A}}}\,\overline{\mathbf{v}_2} = s_2 \overline{\mathbf{u}_2} \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \overline{\overline{\mathbf{A}}}\,\overline{\mathbf{v}_M} = s_M \overline{\mathbf{u}_M} \end{cases} \qquad (19)$$

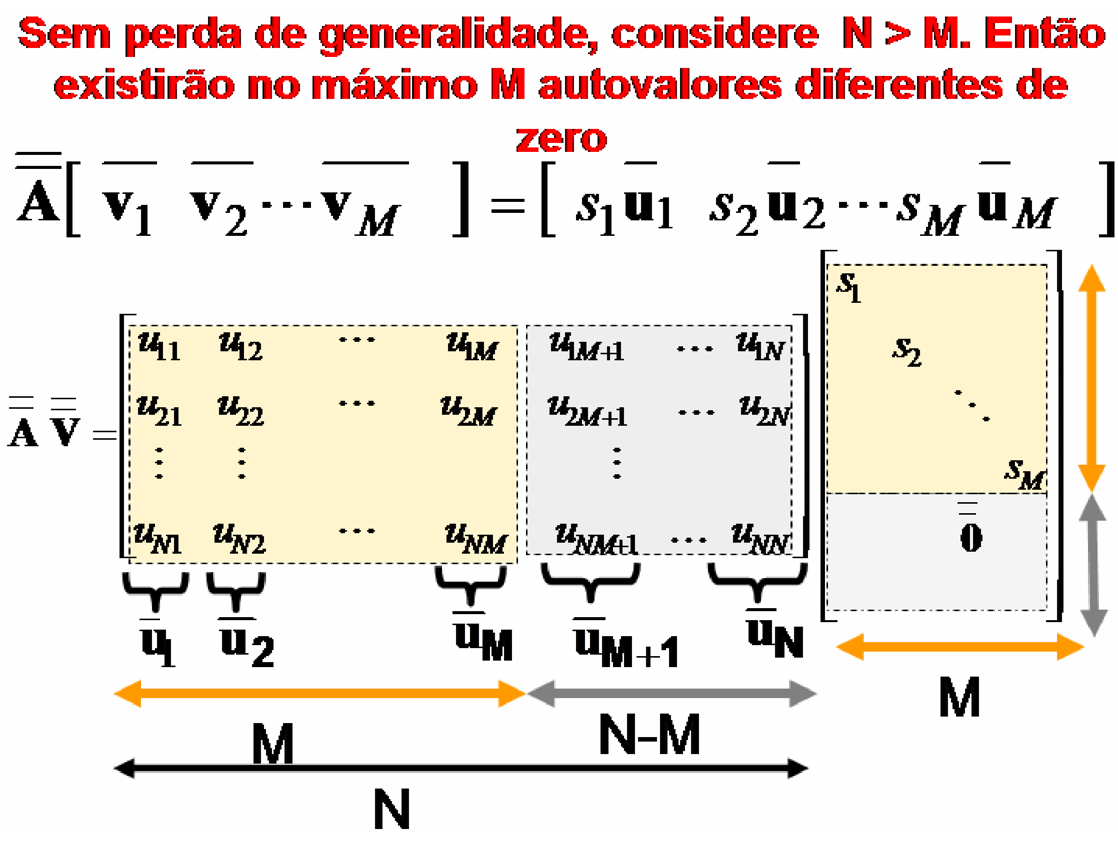
Em notação matricial podemos escrever o sistema acima como:

$$\overline{\overline{\mathbf{A}}}\begin{bmatrix}\overline{\mathbf{v}_1} & \overline{\mathbf{v}_2} & \dots & \overline{\mathbf{v}_M}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1\overline{\mathbf{u}_1} & s_2\overline{\mathbf{u}_2} & \dots & s_M\overline{\mathbf{u}_M}\end{bmatrix} \qquad (20)$$

ou ainda

$$\bar{\bar{\mathbf{A}}}\;\bar{\bar{\mathbf{V}}} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1M} & u_{1M+1} & \cdots & u_{1N} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2M} & u_{2M+1} & \cdots & u_{2N} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \\ u_{N1} & u_{N2} & \cdots & u_{NM} & u_{NM+1} & \cdots & u_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 & & \\ & s_2 & \\ & & \ddots \; s_M \\ & \bar{\bar{\mathbf{0}}} & \end{bmatrix}$$

Veja na Figura abaixo o mesmo sistema linear de equações (19) em sua forma matricial dado pela equação (20). Nesta Figura destacamos a relação dos M autovalores diferentes de zero $[s_1\ ,\ s_2\ , \ldots\ ,\ s_M]$ e os M autovetores $[\bar{\mathbf{u}}_1\ \ \bar{\mathbf{u}}_2\ \ \ldots\ \ \bar{\mathbf{u}}_M]$. Note neste caso particular, em que N>M que há N-M autovetores que $[\bar{\mathbf{u}}_{M+1}\ ,\bar{\mathbf{u}}_{M+2},\ \ldots\ \ \bar{\mathbf{u}}_N]$ associados com N-M autovalores iguais a de zero



Finalmente podemos escrever:

$$\overline{\overline{\mathbf{A}}}\ (\mathrm{N} \times \mathrm{M})\ \overline{\overline{\mathbf{V}}}\ (\mathrm{M} \times \mathrm{M}) = \overline{\overline{\mathbf{U}}}\,(\mathrm{N} \times \mathrm{N})\ \overline{\overline{\mathbf{S}}}\,(\mathrm{N} \times \mathrm{M}) \qquad (21)$$

as matrizes $\overline{\overline{\mathbf{U}}}$ e $\overline{\overline{\mathbf{V}}}$ são definidas como

$$\overline{\overline{\mathbf{V}}} = \left[\overline{\mathbf{v}_1} \quad \overline{\mathbf{v}_2} \quad \dots \quad \overline{\mathbf{v}_{\mathrm{M}}}\right]$$

e

$$\overline{\overline{\mathbf{U}}} = \left[\overline{\mathbf{u}_1} \quad \overline{\mathbf{u}_2} \quad \dots \quad \overline{\mathbf{u}_{\mathrm{N}}}\right]$$

Isto é $\overline{\overline{\mathbf{U}}}$ e $\overline{\overline{\mathbf{V}}}$ são matrizes cujas colunas são os autovalores de $\overline{\overline{\mathbf{A}}}\,\overline{\overline{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}}$ e $\overline{\overline{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}}\,\overline{\overline{\mathbf{A}}}$, respectivamente. Como os autovetores são ortogonais, concluímos que os conjuntos $\left[\overline{\mathbf{u}_1} \quad \overline{\mathbf{u}_2} \quad \dots \quad \overline{\mathbf{u}_{\mathrm{N}}}\right]$e $\left[\overline{\mathbf{v}_1} \quad \overline{\mathbf{v}_2} \quad \dots \quad \overline{\mathbf{v}_{\mathrm{M}}}\right]$ formam bases ortogonais que geram os espaços de observações e parâmetros, respectivamente. Assim as matrizes $\overline{\overline{\mathbf{U}}}$ e $\overline{\overline{\mathbf{V}}}$ tendo colunas que são vetores ortogonais, são matrizes ortogonais. As matrizes $\overline{\overline{\mathbf{U}}}$ e $\overline{\overline{\mathbf{V}}}$ são normalizadas de modo que $\overline{\overline{\mathbf{U}}}$ e $\overline{\overline{\mathbf{V}}}$ sejam ortonormais, isto é:

$$\overline{\overline{\mathbf{V}}}^{\mathbf{T}}\,\overline{\overline{\mathbf{V}}} = \overline{\overline{\mathbf{V}}}\,\overline{\overline{\mathbf{V}}}^{\mathbf{T}} = \overline{\overline{\mathbf{I}}}_{\,(M \times M)} \quad \text{e}$$

$$\overline{\overline{\mathbf{U}}}^{\mathbf{T}}\,\overline{\overline{\mathbf{U}}} = \overline{\overline{\mathbf{U}}}\,\overline{\overline{\mathbf{U}}}^{\mathbf{T}} = \overline{\overline{\mathbf{I}}}_{\,(N \times N)}$$

Pós multiplicando a equação (21) por $\overline{\overline{\mathbf{V}}}^{T}$:

$$\overline{\overline{\mathbf{A}}}\ \overline{\overline{\mathbf{V}}}\ \overline{\overline{\mathbf{V}}}^{\,T} = \overline{\overline{\mathbf{U}}}\ \overline{\overline{\mathbf{S}}}\ \overline{\overline{\mathbf{V}}}^{\,T}$$

portanto;

$$\underset{(N\times M)}{\overline{\overline{\mathbf{A}}}} = \underset{(N\times N)}{\overline{\overline{\mathbf{U}}}}\ \underset{(N\times M)}{\overline{\overline{\mathbf{S}}}}\ \underset{(M\times M)}{\overline{\overline{\mathbf{V}}}^{\,T}} \qquad (22)$$

A equação 22 representa a **DECOMPOSIÇÃO EM VALORES SINGULARES** da matriz $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$, assim chamada porque os valores S_i que compõe a diagonal da matriz $\overline{\overline{\mathbf{S}}}$, são a raiz quadrada positiva dos autovalores das matrizes $\overline{\overline{\mathbf{A}}}^T\overline{\overline{\mathbf{A}}}$ ou $\overline{\overline{\mathbf{A}}}\,\overline{\overline{\mathbf{A}}}^T$ e são denominados de **valores singulares** de $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$.

A importância da decomposição de uma matriz em valores singulares está na obtenção dos valores singulares, cuja análise, como já vimos, permite detectar se um problema é mal-posto quando pelo menos um valor singular for NULO ou PRÓXIMO DE ZERO. Veremos a seguir uma análise detalhada da relação entre a não unicidade e da instabilidade com os valores singulares nulo ou próximo do valor zero.

SVD da matriz $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$ e os r valores singulares não–nulos

Um sistema linear arbitrário N X M

$$\overline{\mathbf{y}} = \overline{\overline{\mathbf{A}}}\,\overline{\mathbf{p}},$$

sendo $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$ uma matriz arbitrária N x M, $\overline{\mathbf{p}}$ um vetor de dimensão M e $\overline{\mathbf{y}}$ um vetor de dimensão N. A matriz $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$ (matriz de sensibilidade) transforma o vetor $\overline{\mathbf{p}}$ de dimensão M no vetor $\overline{\mathbf{y}}$ de dimensão N e portanto esta matriz está associada com dois espaços diferentes: um espaço N dimensional e o outro M dimensional. Nesta seção iremos nos concentrar em examinar as propriedades da matriz $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$ deste sistema linear e a ferramenta para fazermos esta análise é a decomposição em valores singulares (SVD) da matriz $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$.

Se $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$ (M x N) é real a decomposta em:

$$\underset{(N\times M)}{\overline{\overline{\mathbf{A}}}} = \underset{(N\times N)}{\overline{\overline{\mathbf{U}}}}\ \underset{(N\times M)}{\overline{\overline{\mathbf{S}}}}\ \underset{(M\times M)}{\overline{\overline{\mathbf{V}}}}^{T}$$

em que $\bar{\bar{\mathbf{S}}}$ é uma matriz diagonal de dimensão N x M, $\bar{\bar{\mathbf{U}}}$ e $\bar{\bar{\mathbf{V}}}$ são matrizes ortogonais[4] de dimensões N x N e M x M, respectivamente. Esta equação representa a **DECOMPOSIÇÃO EM VALORES SINGULARES (SVD)** da matriz $\bar{\bar{\mathbf{A}}}$, sendo assim chamada porque os valores S_i que compõe a diagonal da matriz $\bar{\bar{\mathbf{S}}}$, são a raiz quadrada positiva dos autovalores das matrizes $\bar{\bar{\mathbf{A}}}^T \bar{\bar{\mathbf{A}}}$ ou $\bar{\bar{\mathbf{A}}}\bar{\bar{\mathbf{A}}}^T$ e são denominados de **valores singulares** de $\bar{\bar{\mathbf{A}}}$. As matrizes $\bar{\bar{\mathbf{U}}}$ e $\bar{\bar{\mathbf{V}}}$ são matrizes ortogonais cujas colunas são os autovalores de $\bar{\bar{\mathbf{A}}}\bar{\bar{\mathbf{A}}}^T$ e $\bar{\bar{\mathbf{A}}}^T \bar{\bar{\mathbf{A}}}$, respectivamente. Como os autovetores são ortogonais, concluímos que os conjuntos $\left[\bar{\mathbf{u}}_1 \quad \bar{\mathbf{u}}_2 \quad \cdots \quad \bar{\mathbf{u}}_N\right]$ e $\left[\bar{\mathbf{v}}_1 \quad \bar{\mathbf{v}}_2 \quad \cdots \quad \bar{\mathbf{v}}_M\right]$ formam bases[5] ortogonais[6] que geram os espaços de observações e parâmetros, respectivamente. Assim, $\bar{\bar{\mathbf{U}}}$ é uma matriz ortogonal (N x N) cujas os vetores colunas são bases do espaço R^N (espaço das observações) e $\bar{\bar{\mathbf{V}}}$ é uma matriz ortogonal (M x M) cujas os vetores colunas são bases do espaço R^M (espaço dos parâmetros). As matrizes $\bar{\bar{\mathbf{U}}}$ e $\bar{\bar{\mathbf{V}}}$ são normalizadas de modo que $\bar{\bar{\mathbf{U}}}$ e $\bar{\bar{\mathbf{V}}}$ sejam ortonormais, isto é:

---

[4] Uma matriz $\bar{\bar{\mathbf{U}}}$ real N x N é chamada de matriz ortogonal se $\bar{\bar{\mathbf{U}}}^T \bar{\bar{\mathbf{U}}} = \bar{\bar{\mathbf{U}}}\bar{\bar{\mathbf{U}}}^T = \bar{\bar{\mathbf{I}}}\ (NxN)$. Cada coluna e cada linha de uma matriz ortogonal é um vetor ortonormal, ou seja, $\bar{\mathbf{u}}_i^T \bar{\mathbf{u}}_i = 1$ em que $\bar{\mathbf{u}}_i$ é a I-ésima coluna da matriz ortogonal $\bar{\bar{\mathbf{U}}}$

[5] Base de um espaço vetorial é um conjunto LI de vetores que geram o espaço vetorial

[6] Base ortogonal é uma base contendo vetores ortogonais, ou seja, $\bar{\mathbf{u}}_i^T \bar{\mathbf{u}}_k = 0$ em que $\bar{\mathbf{u}}_i$ e $\bar{\mathbf{u}}_k$ são respectivamente a i-ésima e k-ésima colunas da matriz ortogonal $\bar{\bar{\mathbf{U}}}$

$$\bar{\bar{\mathbf{V}}}^{\mathbf{T}}\,\bar{\bar{\mathbf{V}}} = \bar{\bar{\mathbf{V}}}\,\bar{\bar{\mathbf{V}}}^{\mathbf{T}} = \bar{\bar{\mathbf{I}}}_{(M\times M)} \quad \text{e}$$

$$\bar{\bar{\mathbf{U}}}^{\mathbf{T}}\,\bar{\bar{\mathbf{U}}} = \bar{\bar{\mathbf{U}}}\,\bar{\bar{\mathbf{U}}}^{\mathbf{T}} = \bar{\bar{\mathbf{I}}}_{(N\times N)}$$

A matriz $\bar{\bar{\mathbf{S}}}$ (N x M) de valores singulares é uma matriz diagonal com valores positivos. Em geral, as rotinas que realizam a SVD de uma matriz N x M, usualmente ordenam de forma decrescente os valores singulares ao longo da diagonal da matriz $\bar{\bar{\mathbf{S}}}$, tal que

$$S_1 \geq S_2 \geq \ldots \geq S_{\text{Min}\,(M\,,N\,)} \geq 0 \;.$$

Veja que alguns dos valores singulares podem ser ZERO. Vamos supor que temos r valores singulares não-nulos. Neste caso a matriz $\bar{\bar{\mathbf{S}}}$ pode ser particionada da seguinte forma:

$$\underset{(N\text{x}M)}{\bar{\bar{\mathbf{S}}}} = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c|c} \bar{\bar{\mathbf{S}}}_r & \bar{\bar{\mathbf{0}}} \\ \hline \bar{\bar{\mathbf{0}}} & \bar{\bar{\mathbf{0}}} \end{array}\right] & \begin{array}{l} \updownarrow r \\ \updownarrow N-r \end{array} \; \updownarrow N \\ \begin{array}{cc} \xleftrightarrow{\;r\;} & \xleftrightarrow{M-r} \end{array} & \\ \xleftrightarrow{\quad M \quad} & \end{array}$$

Em que $\bar{\bar{\mathbf{S}}}_r$ é uma matriz diagonal de dimensão r x r composta dos r valores singulares positivos. Fazendo a decomposição da matriz temos:

$$\bar{\bar{\mathbf{A}}} = \bar{\bar{\mathbf{U}}}\;\bar{\bar{\mathbf{S}}}\;\bar{\bar{\mathbf{V}}}^{T}$$

$$\bar{\bar{\mathbf{A}}} = \bar{\bar{\mathbf{U}}}\begin{bmatrix} \bar{\bar{\mathbf{S}}}_r & \bar{\bar{\mathbf{0}}} \\ \bar{\bar{\mathbf{0}}} & \bar{\bar{\mathbf{0}}} \end{bmatrix}\bar{\bar{\mathbf{V}}}^{T}$$

$$\overline{\overline{\mathbf{A}}} = \left[\overline{\mathbf{u}}_1 \quad \overline{\mathbf{u}}_2 \quad \cdots \quad \overline{\mathbf{u}}_r \quad \ldots \quad \overline{\mathbf{u}}_N \right] \begin{bmatrix} \overline{\overline{\mathbf{S}}}_r & \overline{\overline{\mathbf{0}}} \\ \overline{\overline{\mathbf{0}}} & \overline{\overline{\mathbf{0}}} \end{bmatrix} \left[\overline{\mathbf{v}}_1 \, \overline{\mathbf{v}}_2 \ldots \overline{\mathbf{v}}_r \ldots \overline{\mathbf{v}}_M \right]^T$$

Considerando as matrizes particionadas:

$$\overline{\overline{\mathbf{V}}} = \left[\overline{\overline{\mathbf{V}}}_r \quad \overline{\overline{\mathbf{V}}}_{M-r} \right]$$

$$\overline{\overline{\mathbf{U}}} = \left[\overline{\overline{\mathbf{U}}}_r \quad \overline{\overline{\mathbf{U}}}_{N-r} \right]$$

em que a matriz $\overline{\overline{\mathbf{U}}}_r = \left[\overline{\mathbf{u}}_1 \, \overline{\mathbf{u}}_2 \ldots \overline{\mathbf{u}}_r \right]$ é uma matriz (N x r) , a matriz $\overline{\overline{\mathbf{U}}}_{N-r} = \left[\overline{\mathbf{u}}_{r+1} \, \overline{\mathbf{u}}_{r+2} \ldots \overline{\mathbf{u}}_N \right]$ é uma matriz (N x N-r), a matriz $\overline{\overline{\mathbf{V}}}_r = \left[\overline{\mathbf{v}}_1 \, \overline{\mathbf{v}}_2 \ldots \overline{\mathbf{v}}_r \right]$ é uma matriz (M x r) e a matriz $\overline{\overline{\mathbf{V}}}_{M-r} = \left[\overline{\mathbf{v}}_{r+1} \, \overline{\mathbf{v}}_{r+2} \ldots \overline{\mathbf{v}}_M \right]$ é uma matriz (M x M-r), decomposição da matriz de sensibilidade $\overline{\overline{\mathbf{A}}} = \overline{\overline{\mathbf{U}}} \; \overline{\overline{\mathbf{S}}} \; \overline{\overline{\mathbf{V}}}^T$ pode ser escrita como:

$$\overline{\overline{\mathbf{A}}} = \left[\overline{\overline{\mathbf{U}}}_r \quad \overline{\overline{\mathbf{U}}}_{N-r} \right] \begin{bmatrix} \overline{\overline{\mathbf{S}}}_r & \overline{\overline{\mathbf{0}}} \\ \overline{\overline{\mathbf{0}}} & \overline{\overline{\mathbf{0}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\overline{\mathbf{V}}}_r^T \\ \overline{\overline{\mathbf{V}}}_{M-r}^T \end{bmatrix}$$

Neste caso a matriz é escrita como

$$\overline{\overline{\mathbf{A}}} = \overline{\overline{\mathbf{U}}}_{\mathbf{r}} \; \overline{\overline{\mathbf{S}}}_{\mathbf{r}} \; \overline{\overline{\mathbf{V}}}_{\mathbf{r}}^{\mathbf{T}}$$

Exemplo numérico simples:

Uma Informação:
No MATLAB há um commando " svd " que calcula a decomposição em valores singulares de uma matriz retangular N x M fornecendo a matriz de valores singulares e as matrizes ortogonais (N x N) e (M x M) cujas os vetores colunas são bases do espaço R^N (espaço das observações) e R^M respectivamente.
Veja um exemplo

```
» a=[1 1 0; 1 1 0]
a =
    1     1     0
    1     1     0

» [U, S, V] =svd(a)

U =
   0.7071   -0.7071
   0.7071    0.7071
S =
    2     0     0
    0     0     0
V =
   0.7071   -0.7071        0
   0.7071    0.7071        0
        0         0      1.0
```

Neste exemplo acima $\overline{\overline{\mathbf{A}}} \in R^{N \times M}$ é uma matriz expressa como $\overline{\overline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (N=2 e M=3). Note que o posto desta matriz é igual a 1 (há apenas uma vetor LI). A decomposição em valores singulares de $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$ mostra exatamente que o posto é igual a 1 uma vez que a matriz dos valores singulares $\overline{\overline{\mathbf{S}}}$, é uma matriz diagonal contendo apenas um valor não nulo (r=1) $\overline{\overline{\mathbf{S}}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Logo $\overline{\overline{\mathbf{S}}}_r = [2]$ tem dimensão (1 x 1). Como neste caso as matrizes ortogonais $\overline{\overline{\mathbf{U}}}$ e $\overline{\overline{\mathbf{V}}}$ que expressas respectivamente como:

$$\overline{\overline{\mathbf{U}}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \overline{\overline{\mathbf{V}}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

as suas formas particionadas são

$\overline{\overline{\mathbf{U}}} = \left[\overline{\overline{\mathbf{U}}}_r \quad \overline{\overline{\mathbf{U}}}_{N-r} \right]$ e $\overline{\overline{\mathbf{V}}} = \left[\overline{\overline{\mathbf{V}}}_r \quad \overline{\overline{\mathbf{V}}}_{M-r} \right]$.

Como temos apenas um valor singular diferente de zero (r = 1) então temos que:

$$\underset{(N\times r)}{\overline{\overline{\mathbf{U}}}_r} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \text{ e } \underset{(M\times r)}{\overline{\overline{\mathbf{V}}}_r} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Veja que a matriz $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$ pode ser escrita como

$$\overline{\overline{\mathbf{A}}} = \overline{\overline{\mathbf{U}}}_\mathbf{r} \overline{\overline{\mathbf{S}}}_\mathbf{r} \overline{\overline{\mathbf{V}}}_\mathbf{r}^\mathbf{T}$$

Veja o resultado no Matlab

» Ur=U(:,1) (comando para extrair a primeira coluna da matriz U)

```
Ur =

   0.7071
   0.7071
```

» Vr=V(:,1) (comando para extrair a primeira coluna da matriz V)

```
Vr =

   0.7071
   0.7071
        0
```

» Sr=S(1,1) (comando para extrair o único valor singular diferente se zero)

```
Sr =
     2
```

*» Ur*Sr*Vr'* (comando que faz o calculo da matriz $\overline{\overline{\mathbf{A}}} = \overline{\overline{\mathbf{U}}}_\mathbf{r} \overline{\overline{\mathbf{S}}}_\mathbf{r} \overline{\overline{\mathbf{V}}}_\mathbf{r}^\mathbf{T}$

```
ans =

   1.0000    1.0000         0
   1.0000    1.0000         0
```