

## Anexo 1: Conceitos Básicos de Estatística

### O Ruído experimental:

A premissa básica da teoria da inversão é que os dados observados  $\bar{y}^o$  e os parâmetros desconhecidos  $\bar{p}$  estão relacionadas. Existe portanto uma relação funcional  $f(\bar{p}, \bar{y}^o)$  que representa uma lei DETERMINÍSTICA advinda da resolução de um sistema de equações diferenciais da física-matemática, de modo que

$$\bar{y}^o = f(\bar{p})$$

Portanto, é através de  $f$  que estabelecemos uma relação entre os parâmetros e os dados observados de um sistema físico. Ressalto que  $f(p)$  pode envolver a solução de uma equação diferencial ordinária ou uma equação diferencial parcial ou a avaliação de uma integral. De qualquer forma  $f$  envolve relações de causa e efeito obtidas da resolução de um sistema de equações diferenciais advindas da física-matemática (equação de Poisson, equação de Laplace, equações de Maxwell, equações da onda). Iremos adotar a convenção de denominar a relação  $f$  de um “modelo direto” ou “sistema físico” que nada mais é que uma ou mais equações que relacionam os dados geofísicos observados com os parâmetros desconhecidos.

No entanto, em problemas práticos não conhecemos  $\bar{y}^o$  com total precisão, em geral, conhecemos uma medida aproximada de  $\bar{y}^o$  que contem componentes aleatórias que não são explicadas por estas equações determinísticas  $f(\bar{p})$ . Portanto, os dados observados  $\bar{y}^o$  podem ser “aproximados” por uma componente determinística  $f(\bar{p}, \bar{y}^o)$ , porém esta proximidade não é precisa isto porque há uma componente aleatória  $\bar{\varepsilon}$  que não são explicadas pelo sistema físico de equações, i.e.:

$$\bar{y}^o = f(\bar{p}) + \bar{\varepsilon}$$

Então para cada observação geofísica  $y_i^o$  presumimos a existência de um erro (ruído experimental)  $\varepsilon_i$  que é uma variável aleatória (v.a.). Mas o que é uma variável aleatória ?

**Variável aleatória:**

Variável aleatória é uma variável resultante de uma realização de um fenômeno aleatório.

**Fenômeno aleatório:**

Um fenômeno aleatório é um fenômeno empírico em que não há regularidade determinística, ou seja, é um fenômeno cujo resultado não pode ser previsto exatamente. Então, se o fenômeno se repetir, sob condições similares, o resultado não será sempre o mesmo.

**Experimento aleatório:**

Uma variável é chamada de aleatória se ela descreve os resultados de um experimento aleatório. Um experimento aleatório é qualquer fenômeno aleatório que possa ser executado e quando repetido, um grande número de vezes sob condições similares, o resultado que é uma v.a. NÃO pode ser previsto.

**Variável aleatória Discreta:**

Seja  $\mathcal{E}$  uma variável aleatória. Se o número de possíveis valores de  $\mathcal{E}$  for finito numerável, então  $\mathcal{E}$  é uma v.a. discreta, i.e., os valores de  $\mathcal{E}$  podem ser postos em lista como  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N$ .

Como dissemos anteriormente, associada a um v.a. NÃO há leis ou propriedades determinísticas. No entanto, há propriedades probabilísticas. A cada possível resultado  $\varepsilon_i$ , associaremos um número real  $p(\varepsilon_i) = P(\mathcal{E} = \varepsilon_i)$  denominado de probabilidade de  $\varepsilon_i$  (ou função de probabilidade no ponto  $\varepsilon_i$ ).

$p(\varepsilon_i), i = 1, \dots, N$  devem satisfazer as seguintes condições:

1)  $p(\varepsilon_i) \geq 0, \forall i$

$$2) \sum_{i=1}^N p(\varepsilon_i) = 1$$

Variável aleatória Contínua:

Se  $\mathcal{E}$  uma variável aleatória contínua, existirá uma função  $f(\varepsilon)$  denominada FDP (função densidade de probabilidade) de  $\mathcal{E}$  que satisfaz as seguintes condições:

$$1) f(\varepsilon_i) \geq 0, \forall \varepsilon$$

$$2) \int_{-\infty}^{+\infty} f(\varepsilon) d\varepsilon = 1$$

**Função de uma variável aleatória:**

Seja  $\mathcal{E}$  uma variável aleatória então se tenho uma função  $y^o = y + \varepsilon$ , dizemos portanto que  $y^o$  é função de uma v.a. ( $\mathcal{E}$ ) então  $y^o$  também é uma variável aleatória com FDP e com os parâmetros associados a uma v.a. i.e., terá então  $y^o$  terá FDP e obedecerá a leis probabilísticas como veremos mais adiante.

$$E(y^o) \text{ e } V(y^o).$$

Portanto uma Variável que é função de uma variável aleatória é uma variável aleatória.

**Estimador e Estimativa :**

Seja  $y^o$  uma observação de um fenômeno físico que envolve o parâmetro  $p$ . Existe portanto uma relação funcional  $f(p)$  que representa uma lei determinística associando a observação do fenômeno físico com o parâmetro, de modo que

$$y^o = f(p)$$

Em geral, em problemas reais, conhecemos uma medida imprecisa de  $y^o$  contendo componentes aleatórias que não são explicadas por estas equações determinísticas  $f(p)$ . Então para cada observação deste fenômeno físico  $y_i^o$  presumimos a existência de um erro (ruído experimental)  $\varepsilon_i$  que é uma variável aleatória. Desta forma matematicamente o fenômeno físico é descrito como

$$y_i^o = f_i(p) + \varepsilon_i.$$

Veja que o parâmetro ( $P$ ) deste modelo é função de uma v.a.  $\varepsilon_i$ .

Portanto, a **função** empregada para obter  $P$  é chamada de **ESTIMADOR** de  $P$ . De acordo com o conceito que acabamos de estabelecer sobre Função de uma variável aleatória, então o ESTIMADOR de  $P$  é uma v.a. porque é uma função de uma variável aleatória (ruído contido nos dados observados).

**Estimador:** É uma função de uma v.a., sendo portanto uma v.a, que é empregada na obtenção de parâmetros desconhecidos de um fenômeno físico.

**Estimativa:** É o valor real do estimador. É portanto um número que denominaremos  $\hat{p}$ .

Se o estimador é uma v.a., então ele terá FDP e obedecerá a leis probabilísticas como veremos mais adiante.

### **Parâmetros Associados a um Fenômeno Aleatório:**

Já vimos que uma v.a. está relacionada a um fenômeno aleatório (fenômeno não-determinístico). Vimos que se um experimento aleatório deste fenômeno for realizado sob um dado conjunto de circunstâncias (condições) não há garantia que o

resultado (v.a.) deste experimento vá se reproduzir sob as mesmas condições. Não há, portanto, uma reprodutibilidade determinística do resultado do experimento.

No entanto, no fenômeno aleatório o resultado de um experimento que é uma v.a., há apenas uma “lei probabilística” do resultado. Portanto, apesar de não haver uma lei física associada a um fenômeno aleatório há, no entanto, número reais chamados probabilidades que são determinados por uma função de probabilidade definida sobre o espaço amostral. Em resumo, associado a uma v.a. há uma função de probabilidade (caso discreto) ou FDP (caso contínuo).

Por outro lado, em um fenômeno determinístico, há uma relação determinística em que parâmetros nos fornecem informações sobre o fenômeno em questão. Assim, por exemplo, seja um fenômeno expresso pela relação linear  $y = ax + b$  em que os parâmetros  $a$  e  $b$  são os parâmetros desta relação. Note que para qualquer escolha particular destes parâmetros ( $a$  e  $b$ ) obtemos o fenômeno determinístico (relação linear). Se um fenômeno determinístico é descrito integralmente por seus parâmetros então o inverso também é válido, i.e, a simples análise dos parâmetros de um fenômeno determinístico podemos descrever o fenômeno. Neste exemplo,  $\frac{\partial y}{\partial x} = a$  representa a declividade da reta havendo portanto uma relação linear entre  $x$  e  $y$ .

Tal como nos fenômenos determinísticos, nos fenômenos aleatórios há parâmetros que podem ser empregados para caracterizar a distribuição de probabilidade. Estes parâmetros são Esperança e Variância de uma v.a.

### **Esperança de uma Variável aleatória:**

Seja  $\mathcal{E}$  uma variável aleatória discreta com valores  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_N$ . Seja  $p(\mathcal{E}_i), i = 1, \dots, N$  a função de probabilidade em  $\mathcal{E}_i, i = 1, \dots, N$ , então a Esperança de  $\mathcal{E}$  é dada por:

$$E(\varepsilon) = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i p(\varepsilon_i)$$

$E(\varepsilon)$  é uma media ponderada dos valores possíveis de  $\varepsilon_i, i = 1, \dots, N$

Se  $\mathcal{E}$  uma variável aleatória contínua

$$E(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon f(\varepsilon) d\varepsilon$$

Veja no Anexo 2 as propriedades da Esperança de uma v.a.

#### Significado Físico da Esperança de um v.a.

O significado físico do valor esperado de uma v.a. pode ser feito em analogia ao conceito de “centro de gravidade” em mecânica. Se uma unidade de massa for distribuída sobre uma reta, em pontos discretos,  $x_1, x_2, \dots, x_N$  e  $p(x_i)$  representa a massa do ponto  $x_i$  então  $\sum_{i=1}^N x_i p(x_i)$  representa o centro de gravidade desta distribuição de massa.

Analogamente, a  $E(\varepsilon)$  representa o “centro” da distribuição de probabilidade da v.a.  $\mathcal{E}$ .

#### Significado da Esperança do ruído que contamina as observações geofísicas

Suponhamos que uma v.a.  $\mathcal{E}$  represente o ruído experimental que contamina os dados gravimétricos cuja  $E(\varepsilon) = 0$  mGal. Isto significa dizer que a maioria do ruído está distribuído entorno de 0 mGal. Mas o que significa entorno? Veja que poderia significar que a maioria do ruído deve estar compreendida entre 0.01 mGal e -0.01 mGal. Mas poderia também significar que a maioria do ruído deveria estar compreendida entre 1 mGal e -1 mGal. Como distinguir entre estes dois casos distintos? Há portanto a necessidade de atribuímos um segundo parâmetro para

caracterizar uma distribuição de probabilidade (FDP) de uma v.a.. Este parâmetro é a variância da v.a.

**Variância de uma Variável Aleatória:**

Seja  $\mathcal{E}$  uma variável aleatória discreta com valores  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_N$ , então a Variância de  $\mathcal{E}$  é dada por:

$$V(\mathcal{E}) = \sigma_{\mathcal{E}}^2 = E[\mathcal{E} - E(\mathcal{E})]^2$$

e o desvio padrão  $(\sigma_{\mathcal{E}})$  é a raiz quadrada positiva da variância  $V(\mathcal{E})$ .

$$\sigma_{\mathcal{E}} = \left| \sqrt{V(\mathcal{E})} \right|$$

Veja que usando as propriedades da esperança (Anexo 2) temos que

$$V(\mathcal{E}) = E[\mathcal{E} - E(\mathcal{E})]^2$$

$$V(\mathcal{E}) = E[\mathcal{E}^2 - 2\mathcal{E}E(\mathcal{E}) + (E(\mathcal{E}))^2]$$

$$V(\mathcal{E}) = E(\mathcal{E}^2) - 2E(\mathcal{E})E(\mathcal{E}) + [E(\mathcal{E})]^2$$

$$V(\mathcal{E}) = E(\mathcal{E}^2) - [E(\mathcal{E})]^2$$

Se  $\mathcal{E}$  uma variável aleatória contínua

$$V(\mathcal{E}) = \sigma_{\mathcal{E}}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{E} - E(\mathcal{E}))^2 f(\mathcal{E}) d\mathcal{E}$$

Veja no Anexo 2 as propriedades da Variância de uma v.a.

### Significado Físico da Variância de um v.a.

A variância mede a dispersão de uma v.a., em relação do seu valor esperado. A analogia com a mecânica, se interpretarmos  $E(x)$  como o “centro de gravidade” da unidade de massa distribuída sobre uma reta, em pontos discretos,  $x_1, x_2, \dots, x_N$  em que  $p(x_i)$  representa a massa do ponto  $x_i$ , então interpretamos  $V(x)$  como o Momento de inércia (momento de ordem 2). Se  $E(\mathcal{E})$  representa o “centro” da distribuição de probabilidade da v.a.  $\mathcal{E}$  então  $V(\mathcal{E})$  representa o quanto a v.a.  $\mathcal{E}$  se dispersa em relação ao seu valor esperado  $E(\mathcal{E})$ .

Quando dizemos que a variância de uma v.a é pequena, então esperamos que o valor da v.a. tende a ser próximo do seu valor esperado (centro da distribuição).

### Covariância:

Seja  $x$  e  $y$  duas v.a. aleatórias. A definição de Covariância de  $x$  e  $y$  é

$$Cov(x, y) = E\{ [x - E(x)] [y - E(y)] \}$$

$$Cov(x, y) = E\{xy - xE(y) - E(x)y + E(x)E(y)\}$$

$$Cov(x, y) = E(xy) - 2E(x)E(y) + E(x)E(y)$$

$$Cov(x, y) = E(xy) - E(x)E(y)$$

Se  $x=y$  então temos que

$$Cov(x, x) = E[x - E(x)]E[x - E(x)]$$

$$Cov(x, x) = E[x - E(x)]^2$$

$$Cov(x, x) = V(x)$$



**Correlação:**

Seja  $x$  e  $y$  duas v.a. aleatórias. A definição de Corelação de  $x$  e  $y$  é

$$\rho(x, y) = \frac{Cov(x, y)}{\sqrt{V(x)V(y)}}$$

**Vetor Esperança de uma Variável aleatória:**

Seja  $\mathcal{E}$  uma variável aleatória discreta com valores  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N$ . Logo esta v.a. pode ser expressa na forma vetorial como  $\bar{\mathbf{\varepsilon}} \in R^N$ , surgindo o conceito do vetor esperança de  $\bar{\mathbf{\varepsilon}} \in R^N$ :

$$E(\bar{\mathbf{\varepsilon}}) = \begin{bmatrix} E(\varepsilon_1) \\ \vdots \\ E(\varepsilon_N) \end{bmatrix} \in R^N$$

**Matriz de Covariância de uma Variável Aleatória:**

Seja  $\mathcal{E}$  uma variável aleatória discreta com valores  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N$ . Logo esta v.a. pode ser expressa na forma vetorial como  $\bar{\mathbf{\varepsilon}} \in R^N$ . Então a covariância do vetor  $\bar{\mathbf{\varepsilon}} \in R^N$  é:

$$\text{cov}(\bar{\mathbf{\varepsilon}}) = E \left\{ [\bar{\mathbf{\varepsilon}} - E(\bar{\mathbf{\varepsilon}})] [\bar{\mathbf{\varepsilon}} - E(\bar{\mathbf{\varepsilon}})]^T \right\}$$
$$\text{cov}(\bar{\mathbf{\varepsilon}}) = E \left\{ \begin{bmatrix} \varepsilon_1 - E(\varepsilon_1) \\ \vdots \\ \varepsilon_N - E(\varepsilon_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 - E(\varepsilon_1) & \dots & \varepsilon_N - E(\varepsilon_N) \end{bmatrix} \right\}$$

$$\text{cov}(\bar{\mathbf{\varepsilon}}) = E \left\{ \begin{array}{cccc} [\varepsilon_1 - E(\varepsilon_1)]^2 & \cdots & [\varepsilon_1 - E(\varepsilon_1)][\varepsilon_k - E(\varepsilon_k)] & \cdots & [\varepsilon_1 - E(\varepsilon_1)][\varepsilon_N - E(\varepsilon_N)] \\ \vdots & \ddots & & & \\ [\varepsilon_1 - E(\varepsilon_1)][\varepsilon_k - E(\varepsilon_k)] & & [\varepsilon_k - E(\varepsilon_k)]^2 & & [\varepsilon_k - E(\varepsilon_k)][\varepsilon_N - E(\varepsilon_N)] \\ \vdots & & & \ddots & \\ [\varepsilon_1 - E(\varepsilon_1)][\varepsilon_N - E(\varepsilon_N)] & \cdots & [\varepsilon_k - E(\varepsilon_k)][\varepsilon_N - E(\varepsilon_N)] & \cdots & [\varepsilon_N - E(\varepsilon_N)]^2 \end{array} \right\}$$

Portanto a covariância do vetor  $\bar{\mathbf{\varepsilon}} \in R^N$  é uma matriz  $\text{cov}(\bar{\mathbf{\varepsilon}}) \in R^{N \times N}$ . Note que a matriz de covariância é uma matriz simétrica cujo k-ésimo elementos da diagonal é a variância da k-ésima v.a. ( $\varepsilon_k$ ), i.e.,  $V(\varepsilon_k) = E[\varepsilon_k - E(\varepsilon_k)]^2$  e o (j,k)-ésimo elemento fora da diagonal é a covariância entre as variáveis  $\varepsilon_j$  e  $\varepsilon_k$  i.e.,  $\text{cov}(\varepsilon_j, \varepsilon_k) = E\left\{ [\varepsilon_j - E(\varepsilon_j)] [\varepsilon_k - E(\varepsilon_k)] \right\}$ .

Portanto, poderíamos escrever a matriz de covariância como:

$$\text{cov}(\bar{\mathbf{\varepsilon}}) = \begin{pmatrix} \text{var}(\varepsilon_1) & \text{cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) & \cdots & \text{cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_N) \\ \text{cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) & \text{var}(\varepsilon_2) & & \text{cov}(\varepsilon_2, \varepsilon_N) \\ \vdots & & \ddots & \\ \text{cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_N) & \text{cov}(\varepsilon_2, \varepsilon_N) & \cdots & \text{var}(\varepsilon_N) \end{pmatrix}$$

### **Caso particular:**

No caso particular em que as variáveis aleatórias  $\varepsilon_j$  e  $\varepsilon_k$ ,  $j \neq k$  são NÃO correlacionadas  $\text{cov}(\varepsilon_j, \varepsilon_k) = 0, \forall j \neq k$  e a variância é constante para todas as variáveis aleatórias e igual a  $\sigma^2$ , i.e.  $V(\varepsilon_k) = \sigma^2, \forall k = 1 \dots N$  então neste caso particular a matriz de covariância é expressa como:

$$\text{COV}(\bar{\mathbf{E}}) = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \sigma^2 \end{pmatrix} = \sigma^2 \bar{\mathbf{I}}$$

### **A estimativa e as leis probabilísticas:**

Já vi mos que **Estimador** é uma função de uma v.a., sendo portanto uma v.a., que é empregada na obtenção de parâmetros desconhecidos de um fenômeno físico. Vimos também que o valor real do estimador, é um número que denominaremos de **Estimativa** (  $\hat{p}$  ).

Se o estimador  $\hat{p}$  é uma v.a., então ele terá FDP e os parâmetros Esperança e Variância.

Veja que se dizemos que  $\hat{p}$  é uma estimativa de  $p$ , não esperamos que  $\hat{p}$  seja igual a  $p$  uma vez que  $\hat{p}$  é uma v. a., podendo assumir diferentes valores. Então, se  $\hat{p}$  pode assumir diferentes valores surge, por consequência, uma importante questão: “*Como podemos avaliar se a estimativa  $\hat{p}$  é uma boa estimativa de  $p$  ?* “ Em outras palavras, “*Quais são as características que desejamos que uma estimativa apresente ?* “ Além disso, queremos saber como avaliar duas estimativas, ou seja, dado duas estimativas como podemos decidir qual é a melhor estimativa. Observe que, em geral, não faz sentido dizer que a nossa estimativa  $\hat{p}$  é “correta” isto porque (exceto em testes controlados) não conhecemos os valor verdadeiro de  $p$ . Então, em situações realísticas podemos no máximo dizer que uma estimativa  $\hat{p}$  é uma boa estimativa de  $p$ . Por isto, temos que estabelecer critérios de avaliação de uma estimativa. Adicionalmente, tais critérios devem

estabelecer alguma diretriz para se decidir se uma estimativa deve ser preferida à outra. Vejamos a seguir dois critérios importantes.

Critérios estatísticos para avaliação de uma estimativa:

1) Não tendenciosidade:

Seja  $\bar{\mathbf{p}} \in R^M$  um vetor de parâmetros desconhecido de um fenômeno físico.

Em estatística, a tendenciosidade de um estimador  $\hat{\mathbf{p}}$  do parâmetro desconhecido  $\bar{\mathbf{p}}$  é definido como a esperança da diferença entre o estimador ( $\hat{\mathbf{p}}$ ) e o parâmetro  $\bar{\mathbf{p}}$ , ou seja

$$B(\hat{\mathbf{p}}) = E[\hat{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{p}}]$$

em que  $\hat{\mathbf{p}}$  é o estimador de  $\bar{\mathbf{p}}$ .

Usando as propriedades da Esperança de uma v.a. temos:

$$B(\hat{\mathbf{p}}) = E[\hat{\mathbf{p}}] - E[\bar{\mathbf{p}}]$$

Lembrando da propriedade  $E[c] = c$  em que  $c$  é uma constante (não é uma v.a.), então temos que

$$B(\hat{\mathbf{p}}) = E[\hat{\mathbf{p}}] - \bar{\mathbf{p}}$$

Dizemos que o estimador  $\hat{\mathbf{p}}$  é um estimador não tendencioso de  $\bar{\mathbf{p}}$ , se

$$E[\hat{\mathbf{p}}] = \bar{\mathbf{p}}$$

o que implica

$$B(\hat{\mathbf{p}}) = \bar{\mathbf{0}}$$

A luz da estatística, diz-se que  $\hat{\mathbf{p}}$  é uma boa estimativa de  $\bar{\mathbf{p}}$  se  $E[\hat{\mathbf{p}}] = \bar{\mathbf{p}}$ , ou seja, se  $\hat{\mathbf{p}}$  for um estimador NÃO TENDENCIOSO de  $\bar{\mathbf{p}}$ .

Mas será que sempre desejamos uma estimativa NÃO Tendenciosa? Em que situação devemos abrir mão do critério de NÃO tendenciosidade do estimador  $\hat{\mathbf{p}}$ ? Por último perguntamos, se temos dois diferentes estimadores  $\hat{\mathbf{p}}$  que produzem

estimativas NÃO tendenciosas do parâmetro desconhecido  $\bar{p}$ , então: como podemos julgar qual das duas estimativas é a “melhor” estimativa de  $\bar{p}$ ?

Para responder as questões acima formuladas, a estatística introduziu mais um critério de avaliação de uma estimativa que é o critério de não tendenciosidade de variância mínima.

## 2) Não tendenciosidade de variância mínima:

Por definição a variância de uma v.a. mede a dispersão da v.a. em relação ao seu valor esperado. Estatisticamente, um bom estimador  $\hat{p}$  é aquele que o valor esperado do estimador  $\hat{p}$  é igual ao parâmetro  $\bar{p}$  (ou seja, se  $E[\hat{p}] = \bar{p}$ , ou seja, se  $\hat{p}$  for um estimador não tendencioso de  $\bar{p}$ ) e adicionalmente seja um estimador com variância pequena.

Definição de um estimador não tendencioso e de variância mínima. Seja  $\hat{p}$  e  $\bar{p}^*$  dois estimadores não tendenciosos de  $\bar{p}$ , então  $E[\hat{p}] = \bar{p}$  e  $E[\bar{p}^*] = \bar{p}$ . Dizemos que  $\hat{p}$  é um estimador não tendencioso de variância mínima de  $\bar{p}$  se  $V(\hat{p}) < V(\bar{p}^*)$  para todo  $\bar{p}$ .

## Anexo 2:

### Propriedades da Variância e Esperança

#### Propriedade da Esperança:

Seja  $x, y, x_1, \dots, x_N$  variáveis aleatórias e  $c$  uma constante .

$$E(c) = c$$

$$E(cx) = cE(x)$$

$$E(x_1 + x_2 + \dots + x_N) = E(x_1) + E(x_2) + \dots + E(x_N)$$

$$E(xy) = E(x)E(y) \quad \text{se } x \text{ e } y \text{ forem independentes}$$

#### Propriedade da Variância :

Seja  $x$  uma variável aleatória a variância de  $x$  é

$$V(x) = E[x - E(x)]^2$$

portanto

$$V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

Seja  $x, y$  variáveis aleatórias e  $c$  uma constante .

$$V(c) = 0$$

$$V(cx) = c^2V(x)$$

$$V(x + y) = V(x) + V(y) \quad \text{se } x \text{ e } y \text{ forem v.a. independentes}$$

## Anexo 3

### Premissas Estatísticas padrões

#### 1. Erro aditivo

- 0 Não aditivo
- 1 Aditivo

#### 2. Erro com média nula

- 0 A média não é nula
- 1 A média é nula

#### 3. Erros com variância constante

- 0 A variância não é constante
- 1 A variância é constante

#### 4. Erros não correlacionados

- 0 Os erros são correlacionados
- 1 Os erros não são correlacionados

#### 5. Distribuição normal para os erros

- 0 A distribuição não é normal
- 1 A distribuição é normal

#### 6. Conhecimento a priori dos parâmetros estatísticos da variável que descreve os erros

- 0 A matriz de covariância dos erros é conhecida a menos de um fator constante multiplicativo
- 1 A matriz de covariância dos erros é conhecida

#### 7. Variáveis independentes sem erro

- 0 As variáveis independentes contém erros
- 1 As variáveis independentes não contém erros

#### 8. Parâmetros não aleatórios e não há informação a priori sobre eles

- 0 Parâmetros aleatórios e sem informação a priori
- 1 Parâmetros não aleatórios e sem informação a priori
- 2 Parâmetros aleatórios, normalmente distribuídos, com média e matriz de covariância conhecida
- 3 Parâmetros não aleatórios, mas a informação a priori disponível é subjetiva

## **Anexo 4**

### **Contaminação dos dados geofísicos com ruído aleatório**

Some a cada elemento do vetor dos dados observados a realização de uma variável aleatória com uma determinada distribuição (uniforme, Gaussiana, Laplace, Cauchi) especificando a média e o desvio padrão. Estas  $N$  realizações de uma variável aleatória estão representando o ruído experimental dos dados. Desse modo, obtém-se o vetor de observações sintéticas com ruído aditivo  $\bar{y}^0$ . A realização da variável aleatória acima referida pode ser obtida através de um gerador de números pseudo-aleatórios. Existem várias rotinas em Fortran para gerar esses números e muitos aplicativos atualmente já dispõem de funções internas que operam com números pseudo-aleatórios. Os números pseudo-aleatórios formam seqüências que podem ser reproduzidas sempre que se desejar, ao passo que uma seqüência de números aleatórios nunca se repete. Uma seqüência específica de números pseudo-aleatórios depende apenas de uma “semente”, que é um número (em geral inteiro) especificado pelo usuário. Assim, diferentes sementes geram seqüências diferentes de números pseudo-aleatórios, que podem ser reproduzidas exatamente, bastando especificar a mesma semente.