Análise dos estimadores MQ e MQ-SUB via Estimador Genérico:

Apresentaremos neste tópico a dedução dos estimadores MQ e MQ-sub através dos estimadores genéricos. Em seguida apresentaremos as medidas de eficiências, i.e. Esperança, Covariância. Matriz de Resolução, Matriz Dendidade de Informação, dos estimadores MQ e MQ-sub a partir das genéricas destas medidas (equações deduzidas no tópico 30).

REVISÃO:

Obtemos, no Tópico 20 as duas equações dos estimadores gerais $\tilde{\bar{\mathbf{p}}}$ que chamamos de **estimador genérico** são:

$$\tilde{\bar{\mathbf{p}}} = \bar{\mathbf{p}}^{\mathbf{o}} + \left(\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}} \bar{\bar{\mathbf{W}}}_y \bar{\bar{\mathbf{A}}} + \mu(\delta) \bar{\bar{\mathbf{W}}}_p \right)^{-1} \bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}} \bar{\bar{\mathbf{W}}}_y \left(\bar{\mathbf{y}}^{\mathbf{o}} - \bar{\bar{\mathbf{A}}}\, \bar{\mathbf{p}}^{\mathbf{o}} \right) \qquad (1)$$

e

$$\tilde{\bar{\mathbf{p}}} = \bar{\mathbf{p}}^{\mathbf{o}} + \bar{\bar{\mathbf{W}}}_p^{-1} \bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}} \left[\bar{\bar{\mathbf{A}}} \bar{\bar{\mathbf{W}}}_p^{-1} \bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}} + \mu(\delta) \bar{\bar{\mathbf{W}}}_y^{-1} \right]^{-1} \left(\bar{\mathbf{y}}^{\mathbf{o}} - \bar{\bar{\mathbf{A}}}\, \bar{\mathbf{p}}^{\mathbf{o}} \right) \qquad (2)$$

Note que os estimadores genérico (1) e (2) podem ser escritos na forma geral

$$\boxed{\tilde{\bar{\mathbf{p}}} = \bar{\mathbf{p}}^{\mathbf{o}} + \bar{\bar{\mathbf{H}}} \left(\bar{\mathbf{y}}^{\mathbf{o}} - \bar{\bar{\mathbf{A}}}\, \bar{\mathbf{p}}^{\mathbf{o}} \right)} \qquad (3)$$

com

$$\bar{\bar{\mathbf{H}}} = \left(\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}} \bar{\bar{\mathbf{W}}}_y \bar{\bar{\mathbf{A}}} + \mu(\delta) \bar{\bar{\mathbf{W}}}_p \right)^{-1} \bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}} \bar{\bar{\mathbf{W}}}_y \qquad (4)$$

no caso do estimador (1) e com

$$\bar{\bar{\mathbf{H}}} = \bar{\bar{\mathbf{W}}}_p^{-1} \bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}} \left[\bar{\bar{\mathbf{A}}} \bar{\bar{\mathbf{W}}}_p^{-1} \bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}} + \mu(\delta) \bar{\bar{\mathbf{W}}}_y^{-1} \right]^{-1} \qquad (5)$$

no caso do estimador (2) .

Posteriormente, deduzimos no Tópico 21 expressões genéricas `dos medidores de eficiência e desempenho dos estimadores $\tilde{\bar{\bar{\mathbf{p}}}}$.

Especificamente estes medidores gerais são

1) A esperança de $\tilde{\bar{\bar{\mathbf{p}}}}$;

$$\boxed{E\left\{\tilde{\bar{\bar{\mathbf{p}}}}\right\} = \bar{\bar{\mathbf{H}}}\,\bar{\bar{\mathbf{A}}}\,\bar{\mathbf{p}} + \left(\bar{\bar{\mathbf{I}}} - \bar{\bar{\mathbf{H}}}\,\bar{\bar{\mathbf{A}}}\right)\bar{\mathbf{p}}^{\mathbf{o}}} \qquad (6)$$

2) A matriz de covariância de $\tilde{\bar{\bar{\mathbf{p}}}}$;

$$\boxed{\mathrm{COV}\left\{\tilde{\bar{\bar{\mathbf{p}}}}\right\} = \bar{\bar{\mathbf{H}}}\ \mathrm{cov}\left\{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\right\}\ \bar{\bar{\mathbf{H}}}^{\mathbf{T}}} \qquad (7)$$

3) A esperança da distância $\left(\tilde{\bar{\bar{\mathbf{p}}}} - \bar{\mathbf{p}}\right)^{\mathbf{T}}\left(\tilde{\bar{\bar{\mathbf{p}}}} - \bar{\mathbf{p}}\right)$

$$\boxed{E\left\{\left\|\tilde{\bar{\bar{\mathbf{p}}}} - \bar{\mathbf{p}}\right\|_2^2\right\} = tr\{\mathrm{cov}(\tilde{\bar{\bar{\mathbf{p}}}})\} + \left\|E\left\{\tilde{\bar{\bar{\mathbf{p}}}}\right\} - \bar{\mathbf{p}}\right\|_2^2} \qquad (8)$$

4) A matriz de resolução associada a $\tilde{\bar{\bar{\mathbf{p}}}}$; e

$$\boxed{\underset{(M \times M)}{\bar{\bar{\mathbf{R}}}} = \bar{\bar{\mathbf{H}}}\ \bar{\bar{\mathbf{A}}}} \qquad (9)$$

5) A matriz de densidade de informação associada a $\tilde{\bar{\bar{\mathbf{p}}}}$;

$$\boxed{\underset{(N \times N)}{\bar{\bar{\mathbf{F}}}} = \bar{\bar{\mathbf{A}}}\ \bar{\bar{\mathbf{H}}}} \qquad (10)$$

1) ANÁLISE DO ESTIMADOR MQ SOBRE (r = M) VIA ESTIMADOR GENÉRICO

Vimos anteriormente que o estimador de MQ sobredeterminado é dado pela equação

$$\hat{\bar{\mathbf{p}}} = \left(\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}}\bar{\bar{\mathbf{A}}}\right)^{-1}\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}}\bar{\mathbf{y}}^{\mathbf{o}} \tag{1.1}$$

Comparando a equação (1.1) com a equação (3) concluímos que no estimador MQ sobredeterminado

$$\bar{\bar{\mathbf{H}}} = \left(\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}}\bar{\bar{\mathbf{A}}}\right)^{-1}\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}} \tag{1.2}$$

$$\bar{\mathbf{p}}^{\mathbf{o}} = \bar{\mathbf{0}} \tag{1.3}$$

$$\bar{\bar{\mathbf{W}}}_y = \bar{\bar{\mathbf{I}}} \tag{1.4}$$

$$\bar{\bar{\mathbf{W}}}_p = \bar{\bar{\mathbf{0}}} \tag{1.5}$$

$$\mu = 0 \tag{1.6}$$

Logo no estimador MQ sobre temos que

$$\hat{\bar{\mathbf{p}}} = \bar{\bar{\mathbf{H}}}\ \bar{\mathbf{y}}^{\mathbf{o}} \tag{17}$$

1.1) Análise Estatística do Estimador MQ Sobre (R = M) Via Estimador Genérico

1.1.1) A esperança de $\hat{\bar{\mathbf{p}}}$ sob as premissas estatísticas 1 1 — — — — 1 1

Vimos na equação (6) que

$$\mathrm{E}\left\{\tilde{\bar{\mathbf{p}}}\right\} = \bar{\bar{\mathbf{H}}}\bar{\bar{\mathbf{A}}}\bar{\mathbf{p}} + \left(\bar{\bar{\mathbf{I}}} - \bar{\bar{\mathbf{H}}}\bar{\bar{\mathbf{A}}}\right)\bar{\mathbf{p}}^{\mathbf{o}}$$

Como no estimador MQ sobre $\overline{\mathbf{p}}^{o} = \overline{\mathbf{0}}$ e $\overline{\overline{\mathbf{H}}} = \left(\overline{\overline{\mathbf{A}}}^{T}\overline{\overline{\mathbf{A}}}\right)^{-1}\overline{\overline{\mathbf{A}}}^{T}$ temos que a equação acima é dada por

$$E\left\{\hat{\overline{\mathbf{p}}}\right\} = \left(\overline{\overline{\mathbf{A}}}^{T}\overline{\overline{\mathbf{A}}}\right)^{-1}\overline{\overline{\mathbf{A}}}^{T}\overline{\overline{\mathbf{A}}}\,\overline{\mathbf{p}}$$

$$\boxed{E\{\hat{\overline{\mathbf{p}}}\} = \overline{\mathbf{p}}} \tag{1.8}$$

Portanto o estimador MQ sobre é um estimador não tendencioso.

1.1.2) A Matriz de Covariância de $\hat{\overline{\mathbf{p}}}$ sob as premissas estatísticas 1 1 1 1 — — 1 1

Vimos na equação (7) que

$$\mathrm{COV}\left\{\tilde{\overline{\mathbf{p}}}\right\} = \overline{\overline{\mathbf{H}}}\ \mathrm{cov}\left\{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\right\}\ \overline{\overline{\mathbf{H}}}^{T}$$

Como no estimador MQ sobre e $\overline{\overline{\mathbf{H}}} = \left(\overline{\overline{\mathbf{A}}}^{T}\overline{\overline{\mathbf{A}}}\right)^{-1}\overline{\overline{\mathbf{A}}}^{T}$ temos que a equação acima é dada por

$$\mathrm{COV}\left\{\hat{\overline{\mathbf{p}}}\right\} = \left(\overline{\overline{\mathbf{A}}}^{T}\overline{\overline{\mathbf{A}}}\right)^{-1}\overline{\overline{\mathbf{A}}}^{T}\ \mathrm{cov}\left\{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\right\}\ \overline{\overline{\mathbf{A}}}\left(\overline{\overline{\mathbf{A}}}^{T}\overline{\overline{\mathbf{A}}}\right)^{-1}$$

Usando a premissa 3 que os erros tem variância constante e a premissa 4 que os erros não são correlacionáveis temos que

$$\mathbf{COV}\left\{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\right\} = \sigma^{2}\,\overline{\overline{\mathbf{I}}}$$

$$\mathbf{COV}\left\{\hat{\overline{\mathbf{p}}}\right\} = \sigma^{2}\left(\overline{\overline{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}}\overline{\overline{\mathbf{A}}}\right)^{\mathbf{-1}}\overline{\overline{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}}\overline{\overline{\mathbf{A}}}\left(\overline{\overline{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}}\overline{\overline{\mathbf{A}}}\right)^{\mathbf{-1}}$$

$$\boxed{\mathbf{COV}\left\{\hat{\overline{\mathbf{p}}}\right\} = \sigma^{2}\left(\overline{\overline{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}}\overline{\overline{\mathbf{A}}}\right)^{\mathbf{-1}}} \tag{1.9}$$

Sob as mesmas condições N ≥ M = r que estabelecemos para a garantia da unicidade da solução MQ, a decomposição em valores singulares da matriz de sensibilidade é igual a $\overline{\overline{\mathbf{A}}} = \overline{\overline{\mathbf{U}}}_{\mathbf{r}}\ \overline{\overline{\mathbf{S}}}_{\mathbf{r}}\ \overline{\overline{\mathbf{V}}}_{\mathbf{r}}^{\mathbf{T}}$ em que r = M, logo temos que

$$\mathrm{COV}\left\{\hat{\overline{\mathbf{p}}}\right\} = \sigma^{2}\left(\overline{\overline{\mathbf{V}}}_{M}\overline{\overline{\mathbf{S}}}_{M}\overline{\overline{\mathbf{U}}}_{M}^{T}\overline{\overline{\mathbf{U}}}_{M}\overline{\overline{\mathbf{S}}}_{M}\overline{\overline{\mathbf{V}}}_{M}^{T}\right)^{-1}$$

$$\text{COV}\left\{\hat{\mathbf{p}}\right\} = \sigma^2 \left(\overline{\overline{\mathbf{V}}}_{M} \overline{\overline{\mathbf{S}}}_{M}^{2} \overline{\overline{\mathbf{V}}}_{M}^{T} \right)^{-1}$$

como r = m temos que $\overline{\overline{\mathbf{V}}}_{M}^{-1} = \overline{\overline{\mathbf{V}}}_{M}^{T}$. Então a matriz de covariância do estiamdor MQ (N ≥ M = r) é

$$\text{COV}\left\{\hat{\mathbf{p}}\right\} = \sigma^2 \overline{\overline{\mathbf{V}}}_{M} \overline{\overline{\mathbf{S}}}_{M}^{-2} \overline{\overline{\mathbf{V}}}_{M}^{T}$$

Veja que a covariância do kj-ésimo elemento da matriz $\text{COV}\left\{\hat{\mathbf{p}}\right\}$ é

$$\text{cov}\left\{\hat{\mathbf{p}}_{kj}\right\} = \sigma^2 \sum_{j=1}^{M} \frac{v_{kj} v_{kj}}{S_j^2} \qquad k = 1, \ldots, M$$

Como a variância de $\hat{\mathbf{p}}$ são os elementos da diagonal da matriz de covariância ($\text{COV}\left\{\hat{\mathbf{p}}\right\}$) então temos que a variância do k-ésimo parâmetro é

$$\text{var}\left\{\hat{\mathbf{p}}_{k}\right\} = \sigma^2 \sum_{j=1}^{M} \frac{v_{kj}^2}{S_j^2}$$

Note que a variância do k-ésimo parâmetro estimado via estimador MQ (N≥M= r) é inversamente proporcional aos valores singulares da matriz de sensibilidade $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$. Os elementos da matriz de autovetores (v_{kj}) não exercem influência na variância dos parâmetros pois $\sum_{j=1}^{M} v_{kj}^2 = 1$. Concluímos, também, através da matriz de covariância de $\hat{\mathbf{p}}$ que a presença de valores singulares próximos a zero causam a instabilidade da solução estimada via estimador MQ pois haverá uma amplificação do ruído contido nos dados (variável σ^2 que é a variância do ruído dos dados).

1.1.3) A esperança da distância $\left(\hat{\mathbf{p}} - \overline{\mathbf{p}}\right)^{\mathbf{T}} \left(\hat{\mathbf{p}} - \overline{\mathbf{p}}\right)$

Vimos na equação (8) que

$$E\left\{\left\|\tilde{\mathbf{p}} - \overline{\mathbf{p}}\right\|_2^2\right\} = tr\{\text{cov}(\tilde{\mathbf{p}})\} + \left\|\mathrm{E}\left\{\tilde{\mathbf{p}}\right\} - \overline{\mathbf{p}}\right\|_2^2$$

Na equação (1.9) deduzimos que no estimador MQ sobre

$$\mathbf{COV}\left\{\hat{\mathbf{p}}\right\} = \sigma^2\left(\overline{\overline{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}}\overline{\overline{\mathbf{A}}}\right)^{\mathbf{-1}}$$

e n a equação (1.8) deduzimos que

$$E\{\hat{\mathbf{p}}\} = \overline{\mathbf{p}}$$

Logo temos que a esperança da distância $\left(\hat{\mathbf{p}} - \overline{\mathbf{p}}\right)^{\mathbf{T}}\left(\hat{\mathbf{p}} - \overline{\mathbf{p}}\right)$ é dada por

$$E\{[\hat{\mathbf{p}} - \overline{\mathbf{p}}]^{\mathrm{T}}[\hat{\mathbf{p}} - \overline{\mathbf{p}}]\} = \mathrm{tr}\{\sigma^2(\overline{\overline{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}}\overline{\overline{\mathbf{A}}})^{-1}\} + \cancel{\left\|\overline{\mathbf{p}} - \overline{\mathbf{p}}\right\|_2^2}$$

$$\boxed{E\{[\hat{\mathbf{p}} - \overline{\mathbf{p}}]^{\mathrm{T}}[\hat{\mathbf{p}} - \overline{\mathbf{p}}]\} = \sigma^2 \;\mathrm{tr}\{(\overline{\overline{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}}\overline{\overline{\mathbf{A}}})^{-1}\}} \qquad (1.10)$$

Sob as mesmas condições N ≥ M = r que estabelecemos para a garantia da unicidade da solução MQ, a decomposição em valores singulares da matriz de sensibilidade é igual a $\overline{\overline{\mathbf{A}}} = \overline{\overline{\mathbf{U}}}_{\mathbf{r}}\,\overline{\overline{\mathbf{S}}}_{\mathbf{r}}\,\overline{\overline{\mathbf{V}}}_{\mathbf{r}}^{\mathbf{T}}$ em que r = M, logo temos que

$$E\{[\hat{\mathbf{p}} - \overline{\mathbf{p}}]^{\mathrm{T}}[\hat{\mathbf{p}} - \overline{\mathbf{p}}]\} = \sigma^2 \;\mathrm{tr}\left\{\left(\overline{\overline{\mathbf{V}}}_{\mathrm{M}}\overline{\overline{\mathbf{S}}}_{\mathrm{M}}\overline{\overline{\mathbf{U}}}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{T}}\overline{\overline{\mathbf{U}}}_{\mathrm{M}}\overline{\overline{\mathbf{S}}}_{\mathrm{M}}\overline{\overline{\mathbf{V}}}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\right\}$$

$$E\{[\hat{\mathbf{p}} - \overline{\mathbf{p}}]^{\mathrm{T}}[\hat{\mathbf{p}} - \overline{\mathbf{p}}]\} = \sigma^2 \;\mathrm{tr}\left\{\left(\overline{\overline{\mathbf{V}}}_{\mathrm{M}}\overline{\overline{\mathbf{S}}}_{\mathrm{M}}^{2}\overline{\overline{\mathbf{V}}}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\right\}$$

como r = m temos que $\overline{\overline{\mathbf{V}}}_{M}^{-1} = \overline{\overline{\mathbf{V}}}_{M}^{\mathrm{T}}$. Então temos que a esperança da distância $\left(\hat{\mathbf{p}} - \overline{\mathbf{p}}\right)^{\mathbf{T}}\left(\hat{\mathbf{p}} - \overline{\mathbf{p}}\right)$ é dada por

$$E\{[\hat{\mathbf{p}} - \overline{\mathbf{p}}]^{\mathrm{T}}[\hat{\mathbf{p}} - \overline{\mathbf{p}}]\} = \sigma^2 \;\mathrm{tr}\left\{\overline{\overline{\mathbf{V}}}_{\mathrm{M}}\overline{\overline{\mathbf{S}}}_{\mathrm{M}}^{-2}\overline{\overline{\mathbf{V}}}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{T}}\right\}$$

Lembrando da propriedade do traço do produto de matrizes

$$tr\left\{\overline{\overline{\mathbf{C}}}\,\overline{\overline{\mathbf{B}}}\right\} = tr\left\{\overline{\overline{\mathbf{B}}}\,\overline{\overline{\mathbf{C}}}\right\}$$

Então podemos escrever que

$$E\{[\hat{\mathbf{p}}-\bar{\mathbf{p}}]^{\mathrm{T}}[\hat{\mathbf{p}}-\bar{\mathbf{p}}]\}=\sigma^2\ \mathrm{tr}\left\{\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{M}}\bar{\bar{\mathbf{S}}}_{\mathrm{M}}^{-2}\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{T}}\right\}=\sigma^2\ \mathrm{tr}\left\{\bar{\bar{\mathbf{S}}}_{\mathrm{M}}^{-2}\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{T}}\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{M}}\right\}$$

Como $\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{T}}\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{M}}=\bar{\bar{\mathbf{I}}}$ temos que

$$E\{[\hat{\mathbf{p}}-\bar{\mathbf{p}}]^{\mathrm{T}}[\hat{\mathbf{p}}-\bar{\mathbf{p}}]\}=\sigma^2\ \mathrm{tr}\left\{\bar{\bar{\mathbf{S}}}_{\mathrm{M}}^{-2}\right\}$$

$$\boxed{E\{[\hat{\mathbf{p}}-\bar{\mathbf{p}}]^{\mathrm{T}}[\hat{\mathbf{p}}-\bar{\mathbf{p}}]\}=\sigma^2\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{M}}\frac{1}{S_i^2}} \qquad (1.11)$$

em que $S_i, i=1,2,...,M$ são os valores singulares da matriz de sensibilidade $\bar{\bar{\mathbf{A}}}$ (caso MQ sobre N≥M= r). Note que basta a presença de um único valor singular próximo a zero para haver uma amplificação do ruído contido nos dados (variável σ^2 que é a variância do ruído dos dados). Isto faz com que a esperança da distância entre os parâmetros estimados via MQ sobre ($\hat{\mathbf{p}}$) e os parâmetros $\bar{\mathbf{p}}$, que explicam os dados geofísicos exatos (dados sem ruído), seja um valor muito grande.

1.1.4) A matriz de resolução associada a $\hat{\mathbf{p}}$

Vimos na equação (9) que

$$\bar{\bar{\mathbf{R}}}=\bar{\bar{\mathbf{H}}}\ \bar{\bar{\mathbf{A}}}$$

Como no estimador MQ sobre $\bar{\bar{\mathbf{H}}}=\left(\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}}\bar{\bar{\mathbf{A}}}\right)^{-1}\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}}$ temos que a equação acima é dada por

$$\bar{\bar{\mathbf{R}}}=\left(\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}}\bar{\bar{\mathbf{A}}}\right)^{-1}\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}}\ \bar{\bar{\mathbf{A}}}$$

$$\boxed{\underset{(M\times M)}{\bar{\bar{\mathbf{R}}}}=\bar{\bar{\mathbf{I}}}} \qquad (1.12)$$

Veja que a matriz de resolução estimador MQ sobre (N ≥ M = r) é igual a matriz identidade. Isto significa dizer que cada elemento é estimado de modo ÚNICO (i.e., $\hat{p}_j, j = 1,2,...,M$ são estimados independentemente). Dizemos que cada elemento de $\hat{\overline{\mathbf{p}}}$ é perfeitamente resolvido (RESOLUÇÃO MÁXIMA).

Se os dados não tiverem ruído ($\overline{\mathbf{y}}^{\mathbf{o}} = \overline{\overline{\mathbf{A}}}\,\overline{\mathbf{p}}$), neste caso em que $\overline{\overline{\mathbf{R}}} = \overline{\overline{\mathbf{I}}}_M$ a solução estimada via MQ sobre ($\hat{\overline{\mathbf{p}}}$) será igual aos parâmetros $\overline{\mathbf{p}}$, i.e., parâmetros que explicam os dados geofísicos exatos (dados sem ruído). No entanto, se houver ruído, isto não ocorre. Veja se partirmos da equação (3), i.e.,

$$\tilde{\overline{\mathbf{p}}} = \overline{\mathbf{p}}^{\mathbf{o}} + \overline{\overline{\mathbf{H}}}\left(\overline{\mathbf{y}}^{\mathbf{o}} - \overline{\overline{\mathbf{A}}}\,\overline{\mathbf{p}}^{\mathbf{o}}\right)$$

considerando os dados com ruído, temos que o estimador acima pode ser escrito como

$$\tilde{\overline{\mathbf{p}}} = \overline{\mathbf{p}}^{\mathbf{o}} + \overline{\overline{\mathbf{H}}}\left(\overline{\overline{\mathbf{A}}}\,\overline{\mathbf{p}} + \overline{\boldsymbol{\varepsilon}} - \overline{\overline{\mathbf{A}}}\,\overline{\mathbf{p}}^{\mathbf{o}}\right)$$

$$\boxed{\tilde{\overline{\mathbf{p}}} = \overline{\overline{\mathbf{H}\mathbf{A}}}\,\overline{\mathbf{p}} + \overline{\overline{\mathbf{H}}}\;\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} + (\overline{\overline{\mathbf{I}}} - \overline{\overline{\mathbf{H}\mathbf{A}}})\overline{\mathbf{p}}^{\mathbf{o}}} \qquad (1.13)$$

Como no estimador MQ sobre $\overline{\mathbf{p}}^{\mathbf{o}} = \overline{\mathbf{0}}$ então temos que o estimador MQ sobre pode ser escrito como

$$\hat{\overline{\mathbf{p}}} = \overline{\overline{\mathbf{H}\mathbf{A}}}\,\overline{\mathbf{p}} + \overline{\overline{\mathbf{H}}}\;\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

Veja que como $\overline{\overline{\mathbf{R}}} = \overline{\overline{\mathbf{H}}}\;\overline{\overline{\mathbf{A}}}$ e que no caso do MQ sobre $\overline{\overline{\mathbf{R}}} = \overline{\overline{\mathbf{I}}}_M$, então a solução estimada via MQ sobre ($\hat{\overline{\mathbf{p}}}$) para caso com ruído é dado por

$$\boxed{\hat{\overline{\mathbf{p}}} = \overline{\mathbf{p}} + \overline{\overline{\mathbf{H}}}\;\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \qquad (1.14)$$

Como no estimador MQ sobre $\overline{\overline{\mathbf{H}}} = \left(\overline{\overline{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}}\overline{\overline{\mathbf{A}}}\right)^{-1}\overline{\overline{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}}$ temos que a equação acima é dada por

$$\hat{\overline{\mathbf{p}}} = \overline{\mathbf{p}} + \left(\overline{\overline{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}}\overline{\overline{\mathbf{A}}}\right)^{-1}\overline{\overline{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}}\;\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

Usando a decomposição em valores singulares da matriz de sensibilidade é igual a $\overline{\overline{\mathbf{A}}} = \overline{\overline{\mathbf{U}}}_{\mathbf{r}}\;\overline{\overline{\mathbf{S}}}_{\mathbf{r}}\;\overline{\overline{\mathbf{V}}}_{\mathbf{r}}^{\mathbf{T}}$ em que r = M, logo temos que

$$\hat{\bar{\mathbf{p}}} = \bar{\mathbf{p}} + \left(\bar{\bar{\mathbf{V}}}_M \bar{\bar{\mathbf{S}}}_M \bar{\bar{\mathbf{U}}}_M^T \bar{\bar{\mathbf{U}}}_M \bar{\bar{\mathbf{S}}}_M \bar{\bar{\mathbf{V}}}_M^T \right)^{-1} \bar{\bar{\mathbf{V}}}_M \bar{\bar{\mathbf{S}}}_M \bar{\bar{\mathbf{U}}}_M^T \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

$$\hat{\bar{\mathbf{p}}} = \bar{\mathbf{p}} + \left(\bar{\bar{\mathbf{V}}}_M \bar{\bar{\mathbf{S}}}_M^2 \bar{\bar{\mathbf{V}}}_M^T \right)^{-1} \bar{\bar{\mathbf{V}}}_M \bar{\bar{\mathbf{S}}}_M \bar{\bar{\mathbf{U}}}_M^T \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

como r = m temos que $\bar{\bar{\mathbf{V}}}_M^{-1} = \bar{\bar{\mathbf{V}}}_M^{\,T}$ então

$$\hat{\bar{\mathbf{p}}} = \bar{\mathbf{p}} + \bar{\bar{\mathbf{V}}}_M \bar{\bar{\mathbf{S}}}_M^{-2} \bar{\bar{\mathbf{V}}}_M^T \bar{\bar{\mathbf{V}}}_M \bar{\bar{\mathbf{S}}}_M \bar{\bar{\mathbf{U}}}_M^T \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

$$\hat{\bar{\mathbf{p}}} = \bar{\mathbf{p}} + \bar{\bar{\mathbf{V}}}_M \bar{\bar{\mathbf{S}}}_M^{-1} \bar{\bar{\mathbf{U}}}_M^T \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

Chamando $\bar{\boldsymbol{\beta}}^{Ruido} = \bar{\bar{\mathbf{U}}}_M^T \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ então temos que

$$\hat{\bar{\mathbf{p}}} = \bar{\mathbf{p}} + \bar{\bar{\mathbf{V}}}_M \bar{\bar{\mathbf{S}}}_M^{-1} \bar{\boldsymbol{\beta}}^{Ruido}$$

$$\hat{\bar{\mathbf{p}}} = \bar{\mathbf{p}} + \sum_{j=1}^{M} \frac{\bar{\mathbf{v}}_j}{S_j} \beta_j^{Ruido} \qquad (1.15)$$

A equação (1.15) mostra que cada elemento é estimado de modo ÚNICO (i.e., $\hat{p}_j, j = 1,2,...,M$ são estimados independentemente), porém a solução estimada via MQ sobre ($\hat{\bar{\mathbf{p}}}$) pode ser muito distante dos parâmetros $\bar{\mathbf{p}}$ (parâmetros que explicam os dados geofísicos exatos), devido a segunda parcela da equação (1.15).

1.1.5) A matriz densidade de informação associada a $\hat{\bar{\mathbf{p}}}$

Vimos na equação (10) que

$$\underset{(N \times N)}{\bar{\bar{\mathbf{F}}}} = \bar{\bar{\mathbf{A}}} \; \bar{\bar{\mathbf{H}}}$$

Como no estimador MQ sobre $\bar{\bar{\mathbf{H}}} = \left(\bar{\bar{\mathbf{A}}}^T \bar{\bar{\mathbf{A}}} \right)^{-1} \bar{\bar{\mathbf{A}}}^T$ temos que a equação acima é dada por

$$\boxed{\bar{\bar{\mathbf{F}}} = \bar{\bar{\mathbf{A}}} \left(\bar{\bar{\mathbf{A}}}^T \bar{\bar{\mathbf{A}}} \right)^{-1} \bar{\bar{\mathbf{A}}}^T} \qquad (1.16)$$

Fazendo a decomposição em valores singulares da matriz de sensibilidade é igual a $\overline{\overline{\mathbf{A}}} = \overline{\overline{\mathbf{U}}}_{\mathbf{r}}\, \overline{\overline{\mathbf{S}}}_{\mathbf{r}}\, \overline{\overline{\mathbf{V}}}_{\mathbf{r}}^{\mathbf{T}}$ em que r = M, temos que equação (1.16) é dada por

$$\overline{\overline{\mathbf{F}}} = \overline{\overline{\mathbf{U}}}_M \overline{\overline{\mathbf{S}}}_M \overline{\overline{\mathbf{V}}}_M^T \left(\overline{\overline{\mathbf{V}}}_M \overline{\overline{\mathbf{S}}}_M \overline{\overline{\mathbf{U}}}_M^T \overline{\overline{\mathbf{U}}}_M \overline{\overline{\mathbf{S}}}_M \overline{\overline{\mathbf{V}}}_M^T \right)^{-1} \overline{\overline{\mathbf{V}}}_M \overline{\overline{\mathbf{S}}}_M \overline{\overline{\mathbf{U}}}_M^T$$

$$\overline{\overline{\mathbf{F}}} = \overline{\overline{\mathbf{U}}}_M \overline{\overline{\mathbf{S}}}_M \overline{\overline{\mathbf{V}}}_M^T \left(\overline{\overline{\mathbf{V}}}_M \overline{\overline{\mathbf{S}}}_M^2 \overline{\overline{\mathbf{V}}}_M^T \right)^{-1} \overline{\overline{\mathbf{V}}}_M \overline{\overline{\mathbf{S}}}_M \overline{\overline{\mathbf{U}}}_M^T$$

como r = m temos que $\overline{\overline{\mathbf{V}}}_M^{-1} = \overline{\overline{\mathbf{V}}}_M^{\;T}$ então

$$\overline{\overline{\mathbf{F}}} = \overline{\overline{\mathbf{U}}}_M \overline{\overline{\mathbf{S}}}_M \overline{\overline{\mathbf{V}}}_M^T \overline{\overline{\mathbf{V}}}_M \overline{\overline{\mathbf{S}}}_M^{-2} \overline{\overline{\mathbf{V}}}_M^T \overline{\overline{\mathbf{V}}}_M \overline{\overline{\mathbf{S}}}_M \overline{\overline{\mathbf{U}}}_M^T$$

$$\boxed{\overline{\overline{\mathbf{F}}} = \overline{\overline{\mathbf{U}}}_M \overline{\overline{\mathbf{U}}}_M^T} \qquad (1.17)$$

Lembre-se que no estimador MQ sobre M = r e N > M, neste caso

$$\overline{\overline{\mathbf{U}}}_N \overline{\overline{\mathbf{U}}}_N^T = \overline{\overline{\mathbf{U}}}_M \overline{\overline{\mathbf{U}}}_M^T + \overline{\overline{\mathbf{U}}}_{N\text{-}M} \overline{\overline{\mathbf{U}}}_{N\text{-}M}^T = \overline{\overline{\mathbf{I}}}_N$$

A equação (1.17) mostra que a matriz densidade de informação do estimador MQ Sobre é diferente da matriz identidade. Isto quer dizer que os dados observados e os dados ajustados via estimador MQ Sobre é diferente de zero ($\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} \neq \overline{\mathbf{0}}$).

2) ANÁLISE DO ESTIMADOR MQ SUB (r = N) VIA ESTIMADOR GENÉRICO

Vimos anteriormente que o estimador de MQ Subdeterminado é dado pela equação

$$\hat{\bar{\mathbf{p}}} = \bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}} \left(\bar{\bar{\mathbf{A}}}\, \bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}} \right)^{-1} \bar{\mathbf{y}}^{\mathbf{o}} \qquad (2.1)$$

Comparando a equação (2.1) com a equação (3) concluímos que no estimador MQ Subdeterminado

$$\bar{\bar{\mathbf{H}}} = \bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}} \left(\bar{\bar{\mathbf{A}}}\, \bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}} \right)^{-1} \qquad (2.2)$$

$$\bar{\mathbf{p}}^{\mathbf{o}} = \bar{\mathbf{0}} \qquad (2.3)$$

$$\bar{\bar{\mathbf{W}}}_y = \bar{\bar{\mathbf{I}}} \qquad (2.4)$$

$$\bar{\bar{\mathbf{W}}}_p = \bar{\bar{\mathbf{0}}} \qquad (2.5)$$

$$\mu = 0 \qquad (2.6)$$

Logo no estimador MQ Sub temos que

$$\hat{\bar{\mathbf{p}}} = \bar{\bar{\mathbf{H}}}\, \bar{\mathbf{y}}^{\mathbf{o}} \qquad (2.7)$$

<u>Dedução do Estimador de Mínimos Quadrados Subdeterminado via decomposição em valores singulares</u>:

A decomposição em valores singulares da matriz $\bar{\bar{\mathbf{A}}}$

$$\bar{\bar{\mathbf{A}}} = \bar{\bar{\mathbf{U}}}_r\, \bar{\bar{\mathbf{S}}}_r\, \bar{\bar{\mathbf{V}}}_r^T$$

Substituindo a equação acima na equação (2.1) e lembrando que o estimador MQ SUB o posto é igual ao número de observações $r = N \leq M$ temos

$$\hat{\overline{\mathbf{p}}} = \overline{\overline{\mathbf{V}}}_N \overline{\overline{\mathbf{S}}}_N \overline{\overline{\mathbf{U}}}_N^T \left(\overline{\overline{\mathbf{U}}}_N \overline{\overline{\mathbf{S}}}_N \overline{\overline{\mathbf{V}}}_N^T \overline{\overline{\mathbf{V}}}_N \overline{\overline{\mathbf{S}}}_N \overline{\overline{\mathbf{U}}}_N^T \right)^{-1} \overline{\mathbf{y}}^o$$

Como $\overline{\overline{\mathbf{V}}}_N^T \overline{\overline{\mathbf{V}}}_N = \overline{\overline{\mathbf{I}}}_N$

$$\hat{\overline{\mathbf{p}}} = \overline{\overline{\mathbf{V}}}_N \overline{\overline{\mathbf{S}}}_N \overline{\overline{\mathbf{U}}}_N^T \left(\overline{\overline{\mathbf{U}}}_N \overline{\overline{\mathbf{S}}}_N^2 \overline{\overline{\mathbf{U}}}_N^T \right)^{-1} \overline{\mathbf{y}}^o$$

como r = N temos que $\overline{\overline{\mathbf{U}}}_N^{-1} = \overline{\overline{\mathbf{U}}}_N^T$ então temos que

$$\hat{\overline{\mathbf{p}}} = \overline{\overline{\mathbf{V}}}_N \overline{\overline{\mathbf{S}}}_N \overline{\overline{\mathbf{U}}}_N^T \overline{\overline{\mathbf{U}}}_N \overline{\overline{\mathbf{S}}}_N^{-2} \overline{\overline{\mathbf{U}}}_N^T \overline{\mathbf{y}}^o$$

Como $\overline{\overline{\mathbf{U}}}_N^T \overline{\overline{\mathbf{U}}}_N = \overline{\overline{\mathbf{I}}}_N$ temos que o **Estimador Mínimos Quadrados SUBDETERMIBADO** pode ser expresso como

$$\hat{\overline{\mathbf{p}}} = \overline{\overline{\mathbf{V}}}_N \overline{\overline{\mathbf{S}}}_N^{-1} \overline{\overline{\mathbf{U}}}_N^T \overline{\mathbf{y}}^o$$

Vamos chamar: o vetor $\overline{\overline{\mathbf{U}}}_N^T \overline{\mathbf{y}}^o = \overline{\boldsymbol{\beta}}$ (N x 1) então

$$\hat{\overline{\mathbf{p}}} = \overline{\overline{\mathbf{V}}}_N \overline{\overline{\mathbf{S}}}_N^{-1} \overline{\boldsymbol{\beta}}$$

que pode ser escrito na forma de somatório como

$$\hat{\overline{\mathbf{p}}} = \sum_{i=1}^{N} \overline{\mathbf{v}}_i \frac{\beta_i}{S_i}$$

em que $\overline{\mathbf{v}}_i, i = 1,2,\ldots. N$ são os N vetores colunas que formam a matriz dos autovetores $\overline{\overline{\mathbf{V}}}_N (M \times N)$. Veja que o j-ésimo elemento de $\hat{\overline{\mathbf{p}}}$ é

$$\hat{p}_j = \sum_{i=1}^{N} \frac{\beta_i}{S_i} v_{ij}$$

Análise da Unicidade e Estabilidade do estimador de Mínimos Quadrados SUBDETERMINADO usando a SVD como ferramenta:

Unicidade da estimativa via Mínimos Quadrados SUBDETERMINADO:

A análise do estimador de Mínimos Quadrados Subdeterminado via decomposição em valores singulares considerando que a matriz de sensibilidade é de posto completo e a condição que r = N $\leq$ M resultou em

$$\hat{\overline{\mathbf{p}}} = \sum_{i=1}^{N} \overline{\mathbf{v}}_i \frac{\beta_i}{S_i}$$

Veja que para a garantia da unicidade da solução estimada $\hat{\mathbf{p}}$ via MQ SUB temos que ter, obrigatoriamente, N valores singulares diferentes de zero, caso contrário, teremos infinitas possíveis soluções produzindo o mesmo ajuste (mais adiante provaremos esta informação matematicamente).

Note no entanto que a condição de M $\geq$ N = r, garante a unicidade da solução $\hat{\mathbf{p}}$ (MQ SUB) porém a simples existência de N valores singulares diferentes de zero não garante a estabilidade da solução. Veja que o j-ésimo elemento de $\hat{\mathbf{p}}$ é

$$\hat{p}_j = \sum_{i=1}^{N} \frac{\beta_i}{S_i} v_{ij}$$

Note que a existência de valores singulares muito próximo a zero causará uma amplificação do ruído dos dados que está presente nos elementos do vetor $\overline{\boldsymbol{\beta}}$ uma vez que este vetor é $\overline{\boldsymbol{\beta}} = \overline{\overline{\mathbf{U}}}^T \overline{\mathbf{y}}^o$ [1]

---

[1] $\overline{\boldsymbol{\beta}} = \overline{\overline{\mathbf{U}}}^T \overline{\mathbf{y}}^o$ é a projeção dos dados observados nos autovetores da matriz $\overline{\overline{\mathbf{U}}}$

2.1) Análise Estatística do Estimador MQ Sub (r = N) Via Estimador Genérico

2.1.1) A esperança de $\hat{\mathbf{p}}$ sob as premissas estatísticas 1 1 — — — — 1 1

Vimos na equação (6) que

$$\mathrm{E}\left\{\tilde{\mathbf{p}}\right\} = \bar{\bar{\mathbf{H}}}\,\bar{\bar{\mathbf{A}}}\,\bar{\mathbf{p}} + \left(\bar{\bar{\mathbf{I}}} - \bar{\bar{\mathbf{H}}}\,\bar{\bar{\mathbf{A}}}\right)\bar{\mathbf{p}}^{\mathbf{o}}$$

Como no estimador MQ Sub $\bar{\mathbf{p}}^{\mathbf{o}} = \bar{\mathbf{0}}$ e $\bar{\bar{\mathbf{H}}} = \bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}}\left(\bar{\bar{\mathbf{A}}}\,\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}}\right)^{-1}$ temos que a equação acima é dada por

$$\boxed{E\{\hat{\mathbf{p}}\} = \bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}}\left(\bar{\bar{\mathbf{A}}}\,\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}}\right)^{-1}\bar{\bar{\mathbf{A}}}\;\bar{\mathbf{p}}} \qquad (2.8)$$

Portanto o estimador MQ Sub é um estimador tendencioso.

Sob as condições M ≥ N = r que estabelecemos para a garantia da unicidade da solução MQ Sub e usando a decomposição em valores singulares da matriz de sensibilidade é igual a $\bar{\bar{\mathbf{A}}} = \bar{\bar{\mathbf{U}}}_{\mathbf{r}}\,\bar{\bar{\mathbf{S}}}_{\mathbf{r}}\,\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathbf{r}}^{\mathbf{T}}$ em que r = N, temos que

$$E\{\hat{\mathbf{p}}\} = \bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{S}}}_{\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{U}}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\left(\bar{\bar{\mathbf{U}}}_{\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{S}}}_{\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{S}}}_{\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{U}}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\bar{\bar{\mathbf{U}}}_{\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{S}}}_{\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\;\bar{\mathbf{p}}$$

$$E\{\hat{\mathbf{p}}\} = \bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{S}}}_{\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{U}}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\left(\bar{\bar{\mathbf{U}}}_{\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{S}}}_{\mathrm{N}}^{2}\bar{\bar{\mathbf{U}}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\bar{\bar{\mathbf{U}}}_{\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{S}}}_{\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\;\bar{\mathbf{p}}$$

como r = N temos que $\bar{\bar{\mathbf{U}}}_{\mathrm{N}}^{-1} = \bar{\bar{\mathbf{U}}}_{\mathrm{N}}^{T1}$

$$E\{\hat{\mathbf{p}}\} = \bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{S}}}_{\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{U}}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\bar{\bar{\mathbf{U}}}_{\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{S}}}_{\mathrm{N}}^{-2}\bar{\bar{\mathbf{U}}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\,\bar{\bar{\mathbf{U}}}_{\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{S}}}_{\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\;\bar{\mathbf{p}}$$

$$\boxed{E\{\hat{\mathbf{p}}\} = \bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\;\bar{\mathbf{p}}} \qquad (2.9)$$

2.1.2) A Matriz de Covariância de $\hat{\mathbf{p}}$ sob as premissas estatísticas 1 1 1 1 — — 1 1

Vimos na equação (7) que

$$\mathrm{COV}\left\{\tilde{\mathbf{p}}\right\} = \bar{\bar{\mathbf{H}}}\;\;\mathrm{cov}\left\{\boldsymbol{\varepsilon}\right\}\;\bar{\bar{\mathbf{H}}}^{\mathbf{T}}$$

Como no estimador MQ Sub e $\bar{\bar{\mathbf{H}}} = \bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}}\left(\bar{\bar{\mathbf{A}}}\,\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}}\right)^{-1}$ temos que a equação acima é

$$\mathrm{COV}\left\{\hat{\mathbf{p}}\right\} = \bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}}\left(\bar{\bar{\mathbf{A}}}\;\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}}\right)^{-1}\;\mathrm{cov}\left\{\boldsymbol{\varepsilon}\right\}\;\left(\bar{\bar{\mathbf{A}}}\;\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}}\right)^{-1}\bar{\bar{\mathbf{A}}}$$

Usando a premissa 3 que os erros tem variância constante e a premissa 4 que os erros não são correlacionáveis temos que

$$\textbf{COV}\ \{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\} = \sigma^2 \,\overline{\overline{\mathbf{I}}}$$

$$\mathrm{COV}\ \left\{\hat{\overline{\mathbf{p}}}\right\} = \sigma^2 \overline{\overline{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}} \left(\overline{\overline{\mathbf{A}}}\,\overline{\overline{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}}\right)^{-1} \left(\overline{\overline{\mathbf{A}}}\,\overline{\overline{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}}\right)^{-1} \overline{\overline{\mathbf{A}}}$$

$$\boxed{\mathrm{COV}\ \left\{\hat{\overline{\mathbf{p}}}\right\} = \sigma^2 \overline{\overline{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}} \left(\overline{\overline{\mathbf{A}\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}}\right)^{-2} \overline{\overline{\mathbf{A}}}} \qquad (2.10)$$

Sob as mesmas condições M ≥ N = r que estabelecemos para a garantia da unicidade da solução MQ Sub, a decomposição em valores singulares da matriz de sensibilidade é igual a $\overline{\overline{\mathbf{A}}} = \overline{\overline{\mathbf{U}}}_{\mathbf{r}}\ \overline{\overline{\mathbf{S}}}_{\mathbf{r}}\ \overline{\overline{\mathbf{V}}}_{\mathbf{r}}^{\mathbf{T}}$ em que r = N, logo temos que

$$\mathrm{COV}\ \left\{\hat{\overline{\mathbf{p}}}\right\} = \sigma^2 \overline{\overline{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}} \overline{\overline{\mathbf{S}}}_{\mathrm{N}} \overline{\overline{\mathbf{U}}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} \left(\overline{\overline{\mathbf{U}}}_{\mathrm{N}} \overline{\overline{\mathbf{S}}}_{\mathrm{N}} \overline{\overline{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} \overline{\overline{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}} \overline{\overline{\mathbf{S}}}_{\mathrm{N}} \overline{\overline{\mathbf{U}}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\right)^{-2} \overline{\overline{\mathbf{U}}}_{\mathrm{N}} \overline{\overline{\mathbf{S}}}_{\mathrm{N}} \overline{\overline{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}$$

$$\mathrm{COV}\ \left\{\hat{\overline{\mathbf{p}}}\right\} = \sigma^2 \overline{\overline{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}} \overline{\overline{\mathbf{S}}}_{\mathrm{N}} \overline{\overline{\mathbf{U}}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} \left(\overline{\overline{\mathbf{U}}}_{\mathrm{N}} \overline{\overline{\mathbf{S}}}_{\mathrm{N}}^{2} \overline{\overline{\mathbf{U}}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\right)^{-2} \overline{\overline{\mathbf{U}}}_{\mathrm{N}} \overline{\overline{\mathbf{S}}}_{\mathrm{N}} \overline{\overline{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}$$

como r = N temos que $\overline{\overline{\mathbf{U}}}_{\mathrm{N}}^{-1} = \overline{\overline{\mathbf{U}}}_{\mathrm{N}}^{T1}$

$$\mathrm{COV}\ \left\{\hat{\overline{\mathbf{p}}}\right\} = \sigma^2 \overline{\overline{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}} \overline{\overline{\mathbf{S}}}_{\mathrm{N}} \overline{\overline{\mathbf{U}}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} \overline{\overline{\mathbf{U}}}_{\mathrm{N}} \overline{\overline{\mathbf{S}}}_{\mathrm{N}}^{-4} \overline{\overline{\mathbf{U}}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} \overline{\overline{\mathbf{U}}}_{\mathrm{N}} \overline{\overline{\mathbf{S}}}_{\mathrm{N}} \overline{\overline{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}$$

$$\mathrm{COV}\ \left\{\hat{\overline{\mathbf{p}}}\right\} = \sigma^2 \overline{\overline{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}} \overline{\overline{\mathbf{S}}}_{\mathrm{N}} \overline{\overline{\mathbf{S}}}_{\mathrm{N}}^{-4} \overline{\overline{\mathbf{S}}}_{\mathrm{N}} \overline{\overline{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}$$

$$\mathrm{COV}\ \left\{\hat{\overline{\mathbf{p}}}\right\} = \sigma^2 \overline{\overline{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}} \overline{\overline{\mathbf{S}}}_{\mathrm{N}}^{-2} \overline{\overline{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}$$

Veja que a covariância do kj-ésimo elemento da matriz $\mathrm{COV}\left\{\hat{\overline{\mathbf{p}}}\right\}$ é

$$\mathrm{cov}\ \left\{\hat{\mathbf{p}}_{\mathrm{kj}}\right\} = \sigma^2 \sum_{j=1}^{N} \frac{v_{kj}\, v_{kj}}{S_j^{\,2}}, \qquad k = 1,\ldots,\ M$$

Como a variância de $\hat{\overline{\mathbf{p}}}$ são os elementos da diagonal da matriz de covariância ($\mathrm{COV}\left\{\hat{\overline{\mathbf{p}}}\right\}$) então temos que a variância do k-ésimo parâmetro é

$$\text{var}\left\{ \hat{\mathbf{p}}_{\text{k}} \right\} = \sigma^2 \sum_{j=1}^{N} \frac{v_{kj}^2}{S_j^{\ 2}} \tag{2.11}$$

Note que a variância do k-ésimo parâmetro estimado via estimador MQ (M ≥ N= r) é inversamente proporcional aos valores singulares da matriz de sensibilidade $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$. O termo $\sum_{j=1}^{N} v_{kj}^2$ é sempre igual a 1 (um). No entanto, diferentemente do estimador MQ sobre, vemos que o somatório na equação (2.11) envolve apenas N valores singulares. Lembrando que o estimador MQ Sub, M ≥ N= r. Se r = N (posto é igual ao número de observações) isto significa dizer que há N valores singulares diferentes de zero, ou seja, há garantia da unicidade da solução estimada via MQ SUB. No entanto, veja que se as variâncias no MQ SUB é inversamente proporcional aos N valores singulares da matriz $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$, então se dentre estes N valores singulares próximos houver valores próximos a zero ($S_j \approx 0$, $j = 1,2,...,N$) haverá uma instabilidade na solução estimada via MQ SUB, uma vez que haverá uma amplificação do ruído contido nos dados (a variável σ^2 é a variância do ruído dos dados observados).

Note que, não há nenhuma garantia que estes N valores singulares sejam valores grandes e o estimador MQ SUB não permite a exclusão destes valores singulares próximos a zero. Então NÃO há garantia de estabilidade da solução estimada via MQ SUB.

Concluímos que há garantia de unicidade da solução estimada via estimador MQ SUB já que r = N, porém NÃO HÁ GARANTIA DE ESTABILIDADE. O estimador MQ SUB não é um regularizador de Tikhonov.

2.1.3) A esperança da distância $\left(\hat{\overline{\mathbf{p}}} - \overline{\mathbf{p}}\right)^{\mathbf{T}}\left(\hat{\overline{\mathbf{p}}} - \overline{\mathbf{p}}\right)$

Vimos na equação (8) que

$$E\left\{\left\|\tilde{\overline{\mathbf{p}}} - \overline{\mathbf{p}}\right\|_2^2\right\} = tr\{\text{cov}(\tilde{\overline{\mathbf{p}}})\} + \left\|\text{E}\left\{\tilde{\overline{\mathbf{p}}}\right\} - \overline{\mathbf{p}}\right\|_2^2$$

Na equação (2.10) deduzimos que no estimador MQ sobre

$$\mathrm{COV}\left\{\,\hat{\bar{\mathbf{p}}}\,\right\} = \sigma^{2}\,\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}}\left(\bar{\bar{\mathbf{A}}}\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}}\right)^{-2}\bar{\bar{\mathbf{A}}}$$

e n a equação (2.9) deduzimos que

$$E\{\hat{\bar{\mathbf{p}}}\} = \bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}}\left(\bar{\bar{\mathbf{A}}}\,\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\bar{\bar{\mathbf{A}}}\;\bar{\mathbf{p}}$$

Logo temos que no estimador MQ Sub a esperança da distância $\left(\hat{\bar{\mathbf{p}}}-\bar{\mathbf{p}}\right)^{\mathrm{T}}\left(\hat{\bar{\mathbf{p}}}-\bar{\mathbf{p}}\right)$ é dada por

$$E\{[\hat{\bar{\mathbf{p}}}-\bar{\mathbf{p}}]^{\mathrm{T}}[\hat{\bar{\mathbf{p}}}-\bar{\mathbf{p}}]\} = \mathrm{tr}\{\sigma^{2}\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}}\left(\bar{\bar{\mathbf{A}}}\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}}\right)^{-2}\bar{\bar{\mathbf{A}}}\;\} + \bar{\mathbf{p}}^{\mathrm{T}}\left(\bar{\bar{\mathbf{H}}}\bar{\bar{\mathbf{A}}}-\bar{\bar{\mathbf{I}}}\right)^{T}\left(\bar{\bar{\mathbf{H}}}\bar{\bar{\mathbf{A}}}-\bar{\bar{\mathbf{I}}}\right)\bar{\mathbf{p}}$$

$$E\{[\hat{\bar{\mathbf{p}}}-\bar{\mathbf{p}}]^{\mathrm{T}}[\hat{\bar{\mathbf{p}}}-\bar{\mathbf{p}}]\} = \sigma^{2}\;\mathrm{tr}\{\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}}\left(\bar{\bar{\mathbf{A}}}\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}}\right)^{-2}\bar{\bar{\mathbf{A}}}\;\} + \left\|\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}}\left(\bar{\bar{\mathbf{A}}}\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\bar{\bar{\mathbf{A}}}\bar{\mathbf{p}}-\bar{\mathbf{p}}\right\|_{2}^{2}$$

$$E\{[\hat{\bar{\mathbf{p}}}-\bar{\mathbf{p}}]^{\mathrm{T}}[\hat{\bar{\mathbf{p}}}-\bar{\mathbf{p}}]\} = \sigma^{2}\;\mathrm{tr}\{\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}}\left(\bar{\bar{\mathbf{A}}}\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}}\right)^{-2}\bar{\bar{\mathbf{A}}}\;\} + \left\|\left(\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}}\left(\bar{\bar{\mathbf{A}}}\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\bar{\bar{\mathbf{A}}}-\bar{\bar{\mathbf{I}}}\right)\bar{\mathbf{p}}\right\|_{2}^{2}$$

$$\begin{aligned}E\{[\hat{\bar{\mathbf{p}}}-\bar{\mathbf{p}}]^{\mathrm{T}}[\hat{\bar{\mathbf{p}}}-\bar{\mathbf{p}}]\} = \sigma^{2}\;\mathrm{tr}\{\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}}\left(\bar{\bar{\mathbf{A}}}\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}}\right)^{-2}\bar{\bar{\mathbf{A}}}\;\} \quad + \\ \bar{\mathbf{p}}^{\mathrm{T}}\left[\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}}\left(\bar{\bar{\mathbf{A}}}\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\bar{\bar{\mathbf{A}}}-\bar{\bar{\mathbf{I}}}\right]^{T}\left[\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}}\left(\bar{\bar{\mathbf{A}}}\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\bar{\bar{\mathbf{A}}}-\bar{\bar{\mathbf{I}}}\right]\bar{\mathbf{p}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E\{[\hat{\bar{\mathbf{p}}}-\bar{\mathbf{p}}]^{\mathrm{T}}[\hat{\bar{\mathbf{p}}}-\bar{\mathbf{p}}]\} = \sigma^{2}\;\mathrm{tr}\{\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}}\left(\bar{\bar{\mathbf{A}}}\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}}\right)^{-2}\bar{\bar{\mathbf{A}}}\;\} \quad + \\ \bar{\mathbf{p}}^{\mathrm{T}}\left[\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}}\left(\bar{\bar{\mathbf{A}}}\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\bar{\bar{\mathbf{A}}}\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}}\left(\bar{\bar{\mathbf{A}}}\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\bar{\bar{\mathbf{A}}}-2\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}}\left(\bar{\bar{\mathbf{A}}}\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\bar{\bar{\mathbf{A}}}+\bar{\bar{\mathbf{I}}}\right]\bar{\mathbf{p}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E\{[\hat{\bar{\mathbf{p}}}-\bar{\mathbf{p}}]^{\mathrm{T}}[\hat{\bar{\mathbf{p}}}-\bar{\mathbf{p}}]\} = \sigma^{2}\;\mathrm{tr}\{\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}}\left(\bar{\bar{\mathbf{A}}}\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}}\right)^{-2}\bar{\bar{\mathbf{A}}}\;\} \quad + \\ \bar{\mathbf{p}}^{\mathrm{T}}\left[\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}}\left(\bar{\bar{\mathbf{A}}}\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\bar{\bar{\mathbf{A}}}-2\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}}\left(\bar{\bar{\mathbf{A}}}\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\bar{\bar{\mathbf{A}}}+\bar{\bar{\mathbf{I}}}\right]\bar{\mathbf{p}}\end{aligned}$$

$$E\{[\hat{\bar{\mathbf{p}}}-\bar{\mathbf{p}}]^{\mathrm{T}}[\hat{\bar{\mathbf{p}}}-\bar{\mathbf{p}}]\}=\sigma^2 \ \mathrm{tr}\{\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}}\left(\overline{\overline{\mathbf{AA}}}^{\mathbf{T}}\right)^{-2}\bar{\bar{\mathbf{A}}}\ \} \ + \bar{\mathbf{p}}^{\mathrm{T}}\left[\bar{\bar{\mathbf{I}}}-\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}}\left(\overline{\overline{\mathbf{AA}}}^{\mathbf{T}}\right)^{-1}\bar{\bar{\mathbf{A}}}\right]\bar{\mathbf{p}} \quad (2.12)$$

Sob as mesmas condições M ≥ N = r que estabelecemos para a garantia da unicidade da solução MQ SUB, a decomposição em valores singulares da matriz de sensibilidade é igual a $\bar{\bar{\mathbf{A}}} = \bar{\bar{\mathbf{U}}}_{\mathbf{r}}\ \bar{\bar{\mathbf{S}}}_{\mathbf{r}}\ \bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathbf{r}}^{\mathbf{T}}$ em que r = N, temos que a

$$E\left\{\left\|\tilde{\bar{\mathbf{p}}}-\bar{\mathbf{p}}\right\|_2^2\right\}=tr\{\mathrm{cov}(\tilde{\bar{\mathbf{p}}})\}+\left\|\mathrm{E}\left\{\tilde{\bar{\mathbf{p}}}\right\}-\bar{\mathbf{p}}\right\|_2^2$$

considerando para o estimador MQ SUB que a $\mathrm{COV}\left\{\hat{\bar{\mathbf{p}}}\right\}=\sigma^2\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{S}}}_{\mathrm{N}}^{-2}\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}$ (como deduzimos acima) e que $E\{\hat{\bar{\mathbf{p}}}\}=\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\ \bar{\mathbf{p}}$ então temos que

$$E\{[\hat{\bar{\mathbf{p}}}-\bar{\mathbf{p}}]^{\mathrm{T}}[\hat{\bar{\mathbf{p}}}-\bar{\mathbf{p}}]\}=\sigma^2\ \mathrm{tr}\left\{\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{S}}}_{\mathrm{N}}^{-2}\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\right\}+\left\|\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\bar{\mathbf{p}}-\bar{\mathbf{p}}\right\|_2^2$$

$$E\{[\hat{\bar{\mathbf{p}}}-\bar{\mathbf{p}}]^{\mathrm{T}}[\hat{\bar{\mathbf{p}}}-\bar{\mathbf{p}}]\}=\sigma^2\ \mathrm{tr}\left\{\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{S}}}_{\mathrm{N}}^{-2}\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\right\}+\left\|\left(\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}-\bar{\bar{\mathbf{I}}}\right)\bar{\mathbf{p}}\right\|_2^2$$

$$E\{[\hat{\bar{\mathbf{p}}}-\bar{\mathbf{p}}]^{\mathrm{T}}[\hat{\bar{\mathbf{p}}}-\bar{\mathbf{p}}]\}=\sigma^2\ \mathrm{tr}\left\{\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{S}}}_{\mathrm{N}}^{-2}\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\right\}+\bar{\mathbf{p}}^{T}\left(\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}-\bar{\bar{\mathbf{I}}}\right)^{T}\left(\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}-\bar{\bar{\mathbf{I}}}\right)\bar{\mathbf{p}}$$

$$E\{[\hat{\bar{\mathbf{p}}}-\bar{\mathbf{p}}]^{\mathrm{T}}[\hat{\bar{\mathbf{p}}}-\bar{\mathbf{p}}]\}=\sigma^2\ \mathrm{tr}\left\{\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{S}}}_{\mathrm{N}}^{-2}\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\right\}+\left(\bar{\mathbf{p}}^{T}\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}-\bar{\mathbf{p}}^{T}\right)\left(\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\bar{\mathbf{p}}-\bar{\mathbf{p}}\right)$$

$$E\{[\hat{\bar{\mathbf{p}}}-\bar{\mathbf{p}}]^{\mathrm{T}}[\hat{\bar{\mathbf{p}}}-\bar{\mathbf{p}}]\}=\sigma^2\ \mathrm{tr}\left\{\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{S}}}_{\mathrm{N}}^{-2}\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\right\}+\bar{\mathbf{p}}^{T}\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\bar{\mathbf{p}}-2\bar{\mathbf{p}}^{T}\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\bar{\mathbf{p}}+\bar{\mathbf{p}}^{T}\bar{\mathbf{p}}$$

$$E\{[\hat{\bar{\mathbf{p}}}-\bar{\mathbf{p}}]^{\mathrm{T}}[\hat{\bar{\mathbf{p}}}-\bar{\mathbf{p}}]\}=\sigma^2\ \mathrm{tr}\left\{\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{S}}}_{\mathrm{N}}^{-2}\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\right\}+\bar{\mathbf{p}}^{T}\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\bar{\mathbf{p}}-2\bar{\mathbf{p}}^{T}\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\bar{\mathbf{p}}+\bar{\mathbf{p}}^{T}\bar{\mathbf{p}}$$

$$E\{[\hat{\bar{\mathbf{p}}}-\bar{\mathbf{p}}]^{\mathrm{T}}[\hat{\bar{\mathbf{p}}}-\bar{\mathbf{p}}]\}=\sigma^2\ \mathrm{tr}\left\{\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{S}}}_{\mathrm{N}}^{-2}\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\right\}-\bar{\mathbf{p}}^{T}\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\bar{\mathbf{p}}+\bar{\mathbf{p}}^{T}\bar{\mathbf{p}}$$

$$E\{[\hat{\bar{\mathbf{p}}}-\bar{\mathbf{p}}]^{\mathrm{T}}[\hat{\bar{\mathbf{p}}}-\bar{\mathbf{p}}]\}=\sigma^2\ \mathrm{tr}\left\{\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{S}}}_{\mathrm{N}}^{-2}\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\right\}+\bar{\mathbf{p}}^{T}\left[\bar{\bar{\mathbf{I}}}-\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\right]\bar{\mathbf{p}}$$

Lembrando da propriedade do traço do produto de matrizes

$$tr\left\{\bar{\bar{\mathbf{C}}}\bar{\bar{\mathbf{B}}}\right\}=tr\left\{\bar{\bar{\mathbf{B}}}\bar{\bar{\mathbf{C}}}\right\}$$

Então podemos escrever que

$$E\{[\hat{\bar{\mathbf{p}}} - \bar{\mathbf{p}}]^{\mathrm{T}}[\hat{\bar{\mathbf{p}}} - \bar{\mathbf{p}}]\} = \sigma^2 \ \mathrm{tr}\left\{\bar{\bar{\mathbf{S}}}_{\mathrm{N}}^{-2}\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}\right\} + \bar{\mathbf{p}}^{\mathrm{T}}\left[\bar{\bar{\mathbf{I}}} - \bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\right]\bar{\mathbf{p}}$$

$$E\{[\hat{\bar{\mathbf{p}}} - \bar{\mathbf{p}}]^{\mathrm{T}}[\hat{\bar{\mathbf{p}}} - \bar{\mathbf{p}}]\} = \sigma^2 \ \mathrm{tr}\left\{\bar{\bar{\mathbf{S}}}_{\mathrm{N}}^{-2}\right\} + \bar{\mathbf{p}}^{\mathrm{T}}\left[\bar{\bar{\mathbf{I}}} - \bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\right]\bar{\mathbf{p}}$$

Como no caso MQ Sub M ≥ N= r então temos que

$$\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{M}}\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{T}} = \bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} + \bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{M\text{-}N}}\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{M\text{-}N}}^{\mathrm{T}} = \bar{\bar{\mathbf{I}}}_{M}$$

então temos que $\bar{\bar{\mathbf{I}}}_{M} - \bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} = \bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{M\text{-}N}}\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{M\text{-}N}}^{\mathrm{T}}$

$$E\{[\hat{\bar{\mathbf{p}}} - \bar{\mathbf{p}}]^{\mathrm{T}}[\hat{\bar{\mathbf{p}}} - \bar{\mathbf{p}}]\} = \sigma^2 \ \mathrm{tr}\left\{\bar{\bar{\mathbf{S}}}_{\mathrm{N}}^{-2}\right\} + \bar{\mathbf{p}}^{\mathrm{T}}\left[\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{M\text{-}N}}\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{M\text{-}N}}^{\mathrm{T}}\right]\bar{\mathbf{p}}$$

Chamando $\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathrm{M\text{-}N}}^{\mathrm{T}}\bar{\mathbf{p}} = \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{M-N}$ temos que

$$E\{[\hat{\bar{\mathbf{p}}} - \bar{\mathbf{p}}]^{\mathrm{T}}[\hat{\bar{\mathbf{p}}} - \bar{\mathbf{p}}]\} = \sigma^2 \ \mathrm{tr}\left\{\bar{\bar{\mathbf{S}}}_{\mathrm{N}}^{-2}\right\} + \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{M-N}^{T}\,\bar{\boldsymbol{\alpha}}_{M-N}$$

Com a decomposição em valores singulares da matriz de sensibilidade é igual a $\bar{\bar{\mathbf{A}}} = \bar{\bar{\mathbf{U}}}_{\mathbf{r}}\ \bar{\bar{\mathbf{S}}}_{\mathbf{r}}\ \bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathbf{r}}^{\mathbf{T}}$ em que r = N, temos que esperança da distância $\left(\hat{\bar{\mathbf{p}}} - \bar{\mathbf{p}}\right)^{\mathrm{T}}\left(\hat{\bar{\mathbf{p}}} - \bar{\mathbf{p}}\right)$ do estimador MQ Subdeterminado é dado por

$$\boxed{E\{[\hat{\bar{\mathbf{p}}} - \bar{\mathbf{p}}]^{\mathrm{T}}[\hat{\bar{\mathbf{p}}} - \bar{\mathbf{p}}]\} = \sigma^2\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}}\frac{1}{S_i^2} + \sum_{\mathrm{i}=N+1}^{\mathrm{M}}\alpha_{\mathrm{i}}^2} \qquad (2.13)$$

em que $S_i, i = 1,2,...,M$ são os valores singulares da matriz de sensibilidade $\bar{\bar{\mathbf{A}}}$ (caso MQ Sub N≥M= r). Note que basta a presença de um único valor singular próximo a zero para haver uma amplificação do ruído contido nos dados (variável σ^2 que é a variância do ruído dos dados). Isto faz com que a esperânça da distância entre os parâmetros estimados via MQ Sub ($\hat{\bar{\mathbf{p}}}$) e os parâmetros $\bar{\mathbf{p}}$, que explicam os dados geofísicos exatos (dados sem ruído), seja um valor muito grande.

1.1.4) A matriz de resolução associada a $\hat{\bar{\mathbf{p}}}$

Vimos na equação (9) que

$$\bar{\bar{\mathbf{R}}} = \bar{\bar{\mathbf{H}}}\ \bar{\bar{\mathbf{A}}}$$

Como no estimador MQ Sub $\bar{\bar{\mathbf{H}}} = \bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}}\left(\bar{\bar{\mathbf{A}}}\,\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}}\right)^{-1}$ temos que a equação acima é dada por

$$\boxed{\bar{\bar{\mathbf{R}}} = \bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}}\left(\bar{\bar{\mathbf{A}}}\ \bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}}\right)^{-1}\ \bar{\bar{\mathbf{A}}}} \qquad (2.14)$$

Veja que a matriz de resolução estimador MQ Sub (M ≥ N = r) NÃO é igual a matriz identidade. Isto significa dizer que cada elemento NÃO é estimado de modo ÚNICO (i.e., $\hat{p}_j, j = 1,2,...,M$ NÃO são estimados independentemente). Dizemos que cada elemento de $\hat{\bar{\mathbf{p}}}$ NÃO é perfeitamente resolvido. Em outras palavras, se a matriz de resolução estimador MQ Sub é diferente da a matriz identidade, isto significa dizer que o j-ésimo parâmetro estimado via MQ SUB é obtido como uma combinação linear de TODOS os parâmetros. Logo no estimador MQ SUB a resolução não é máxima.

Embora a matriz de resolução do estimador MQ SUB não seja máxima é a que mais se aproxima da $\bar{\bar{\mathbf{I}}}_M$ (resolução máxima) no sentido de mínimos quadrados dentre a classe dos estimadores lineares inversos.

Usando a decomposição em valores singulares da matriz de sensibilidade é igual a $\bar{\bar{\mathbf{A}}} = \bar{\bar{\mathbf{U}}}_{\mathbf{r}}\ \bar{\bar{\mathbf{S}}}_{\mathbf{r}}\ \bar{\bar{\mathbf{V}}}_{\mathbf{r}}^{\mathbf{T}}$ em que r = N, logo temos que a equação (2.14) pode ser expressa como

$$\bar{\bar{\mathbf{R}}} = \bar{\bar{\mathbf{V}}}_N \bar{\bar{\mathbf{S}}}_N \bar{\bar{\mathbf{U}}}_N^T \left(\bar{\bar{\mathbf{U}}}_N \bar{\bar{\mathbf{S}}}_N \bar{\bar{\mathbf{V}}}_N^T \bar{\bar{\mathbf{V}}}_N \bar{\bar{\mathbf{S}}}_N \bar{\bar{\mathbf{U}}}_N^T\right)^{-1} \bar{\bar{\mathbf{U}}}_N \bar{\bar{\mathbf{S}}}_N \bar{\bar{\mathbf{V}}}_N^T$$

$$\bar{\bar{\mathbf{R}}} = \bar{\bar{\mathbf{V}}}_N \bar{\bar{\mathbf{S}}}_N \bar{\bar{\mathbf{U}}}_N^T \left(\bar{\bar{\mathbf{U}}}_N \bar{\bar{\mathbf{S}}}_N^2 \bar{\bar{\mathbf{U}}}_N^T\right)^{-1} \bar{\bar{\mathbf{U}}}_N \bar{\bar{\mathbf{S}}}_N \bar{\bar{\mathbf{V}}}_N^T$$

como r = N temos que $\bar{\bar{\mathbf{U}}}_N^{-1} = \bar{\bar{\mathbf{U}}}_N^{T}$

$$\bar{\bar{\mathbf{R}}} = \bar{\bar{\mathbf{V}}}_N \bar{\bar{\mathbf{S}}}_N \bar{\bar{\mathbf{U}}}_N^T \bar{\bar{\mathbf{U}}}_N \bar{\bar{\mathbf{S}}}_N^{-2} \bar{\bar{\mathbf{U}}}_N^T \bar{\bar{\mathbf{U}}}_N \bar{\bar{\mathbf{S}}}_N \bar{\bar{\mathbf{V}}}_N^T$$

$$\bar{\bar{\mathbf{R}}} = \bar{\bar{\mathbf{V}}}_N \bar{\bar{\mathbf{S}}}_N \bar{\bar{\mathbf{S}}}_N^{-2} \bar{\bar{\mathbf{S}}}_N \bar{\bar{\mathbf{V}}}_N^T$$

$$\boxed{\bar{\bar{\mathbf{R}}} = \bar{\bar{\mathbf{V}}}_N \bar{\bar{\mathbf{V}}}_N^T} \qquad (2.15)$$

Vamos analisar a equação (2.15). Veja que no caso MQ Sub M ≥ N= r então temos que $\bar{\bar{\mathbf{V}}}_M \bar{\bar{\mathbf{V}}}_M^T = \bar{\bar{\mathbf{V}}}_N \bar{\bar{\mathbf{V}}}_N^T + \bar{\bar{\mathbf{V}}}_{M-N} \bar{\bar{\mathbf{V}}}_{M-N}^T = \bar{\bar{\mathbf{I}}}_M$

então temos que

$$\bar{\bar{\mathbf{V}}}_N \bar{\bar{\mathbf{V}}}_N^T = \bar{\bar{\mathbf{I}}}_M - \bar{\bar{\mathbf{V}}}_{M-N} \bar{\bar{\mathbf{V}}}_{M-N}^T$$

Sabemos que

$$\hat{\bar{\mathbf{p}}} = \bar{\bar{\mathbf{R}}}\,\bar{\mathbf{p}}$$

então podemos escrever que o estimador MQ SUB é expresso como

$$\hat{\bar{\mathbf{p}}} = \bar{\bar{\mathbf{V}}}_N \bar{\bar{\mathbf{V}}}_N^T \bar{\mathbf{p}}$$

$$\hat{\bar{\mathbf{p}}} = \left(\bar{\bar{\mathbf{I}}}_M - \bar{\bar{\mathbf{V}}}_{M-N} \bar{\bar{\mathbf{V}}}_{M-N}^T \right) \bar{\mathbf{p}}$$

$$\hat{\bar{\mathbf{p}}} = \bar{\mathbf{p}} - \bar{\bar{\mathbf{V}}}_{M-N} \bar{\bar{\mathbf{V}}}_{M-N}^T \bar{\mathbf{p}}$$

Chamando $\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{M-N}^T \bar{\mathbf{p}} = \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{M-N}$ temos que

$$\hat{\bar{\mathbf{p}}} = \bar{\mathbf{p}} - \bar{\bar{\mathbf{V}}}_{M-N} \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{M-N}$$

Como $\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{M-N} \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{M-N} = \bar{\mathbf{p}}^{null}$ então o estimador MQ SUB é expresso como

$$\boxed{\hat{\bar{\mathbf{p}}} = \bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{p}}^{Null}} \qquad (2.16)$$

O resultado mostrado pela equação (2.16) diz que o estimador MQ SUB é uma solução que nunca contém qualquer solução nula ($\bar{\mathbf{p}}^{null}$)

2.1.5) A matriz densidade de informação associada a $\hat{\bar{\mathbf{p}}}$

Vimos na equação (10) que

$$\underset{(N \times N)}{\bar{\bar{\mathbf{F}}}} = \bar{\bar{\mathbf{A}}} \; \bar{\bar{\mathbf{H}}}$$

Como no estimador MQ Sub $\bar{\bar{\mathbf{H}}} = \bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}} \left(\bar{\bar{\mathbf{A}}} \bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}} \right)^{-1}$ temos que a equação acima é dada por

$$\bar{\bar{\mathbf{F}}} = \bar{\bar{\mathbf{A}}} \; \bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}} \left(\bar{\bar{\mathbf{A}}} \; \bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}} \right)^{-1}$$

$$\boxed{\bar{\bar{\mathbf{F}}} = \bar{\bar{\mathbf{I}}}_N} \qquad (2.17)$$

A equação (2.17) mostra que a matriz densidade de informação do estimador MQ Sub é igual a matriz identidade. Isto quer dizer que os dados observados e os dados ajustados via estimador MQ Sub é igual a zero ($\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \bar{\mathbf{0}}$).. Conclusão, no estimador MQ SUB o ajuste é EXATO.

<u>Análise do ajuste dos dados observados produzido pela solução estimada via Mínimos Quadrados SUBDETERMINADO</u>

Vamos analisar o ajuste dos dados observados produzido pela solução estimada via estimador MQ SUB. Considerando que os dados observados estão contaminados por ruído aleatório aditivo $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ e que em um problema linear a componente determinística (vetor dos dados ajustados ou calculados) é $\bar{\mathbf{y}}^{C} = \bar{\bar{\mathbf{A}}} \, \bar{\mathbf{p}}$. Então os dados geofísicos observados $\bar{\mathbf{y}}^{\mathbf{o}}$ pode ser expresso por

$$\bar{\mathbf{y}}^{\mathbf{o}} = \bar{\mathbf{y}}^{c} + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

$$\bar{\mathbf{y}}^{\mathbf{o}} = \bar{\bar{\mathbf{A}}} \, \bar{\mathbf{p}} + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

Como a estimativa do vetor de parâmetros via estimador MQ SUB é dado por

$$\hat{\bar{\mathbf{p}}} = \bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}} \left(\bar{\bar{\mathbf{A}}} \; \bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}} \right)^{-1} \bar{\mathbf{y}}^{\mathbf{o}}$$

então o ajuste o ajuste dos dados observados produzido pela solução estimada via estimador MQ SUB é um AJUSTE EXATO, isto porque $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \bar{0}$:

$$\overline{\mathbf{y}}^{\mathbf{o}} = \overline{\overline{\mathbf{A}}}\,\hat{\overline{\mathbf{p}}} + \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

$$\overline{\mathbf{y}}^{\mathbf{o}} = \overline{\overline{\mathbf{A}\,\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}} \left(\overline{\overline{\mathbf{A}}}\;\overline{\overline{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}} \right)^{-1} \overline{\mathbf{y}}^{\mathbf{o}} + \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

$$\overline{\mathbf{y}}^{\mathbf{o}} = \overline{\mathbf{y}}^{\mathbf{o}} + \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

$$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \overline{\mathbf{0}}$$

Esta mesma análise pode ser realizada via SVD considerando que o estimador de MQ SUB é dado por $\hat{\overline{\mathbf{p}}} = \overline{\overline{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}\,\overline{\overline{\mathbf{S}}}_{\mathrm{N}}^{-1}\,\overline{\overline{\mathbf{U}}}_{\mathrm{N}}^{T}\;\overline{\mathbf{y}}^{o}$ e que o r = N

$$\overline{\mathbf{y}}^{\mathbf{o}} = \overline{\overline{\mathbf{A}}}\,\hat{\overline{\mathbf{p}}} + \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

$$\overline{\mathbf{y}}^{\mathbf{o}} = \overline{\overline{\mathbf{U}}}_{\mathrm{N}}\,\overline{\overline{\mathbf{S}}}_{N}\,\overline{\overline{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} \left(\overline{\overline{\mathbf{V}}}_{\mathrm{N}}\,\overline{\overline{\mathbf{S}}}_{\mathrm{N}}^{-1}\,\overline{\overline{\mathbf{U}}}_{\mathrm{N}}^{T}\;\overline{\mathbf{y}}^{o} \right) + \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

$$\overline{\mathbf{y}}^{\mathbf{o}} = \overline{\overline{\mathbf{U}}}_{\mathrm{N}}\,\overline{\overline{\mathbf{U}}}_{\mathrm{N}}^{T}\;\overline{\mathbf{y}}^{o} + \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

como r = N então $\overline{\overline{\mathbf{U}}}_{\mathrm{N}}\,\overline{\overline{\mathbf{U}}}_{\mathrm{N}}^{T} = \overline{\overline{\mathrm{I}}}$

$$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \overline{\mathbf{0}}$$