O Problema Inverso

Teoria da inversão:

Definição: A Teoria da Inversão é simplesmente um conjunto de métodos matemáticos usados para se extrair inferências úteis sobre um conjunto de medidas observacionais de algum fenômeno físico.

Fundamental Atribuição da Teoria da Inversão: A principal atribuição da Teoria da Inversão é lidar com uma importante e fundamental questão relacionada ao limite da informação que pode ser extraída de qualquer conjunto de dados. Virtualmente todos os problemas têm dois elementos comuns: os dados e uma pergunta. Para responder uma pergunta o solucionador do problema (que pode ser um método de inversão) combina os dados do problema com algum raciocínio lógico. É intuitivo que os dados devem conter informações suficientes para responder a pergunta estabelecida caso contrário, o problema geofísico está "incorretamente formulado", matematicamente, dizemos que o problema é mal-posto (ill posed problem).

O problema inverso em Geofísica: Similarmente, no problema inverso em geofísica também estes dois elementos estão presentes: os dados e uma pergunta. Os dados geofísicos, geralmente, são entidades físicas medidas na Terra. Estas grandezas físicas podem ser (1) campos: gravimétricos, magnéticos, eletromagnéticos, elétricos; (2) transmissão térmica; (3) perturbações elásticas; (4) radiações nucleares. Por outro lado, a pergunta geralmente envolve as propriedades físicas que estão relacionadas às grandezas físicas (dados) medidos ou observados da Terra. As propriedades físicas, por sua vez, podem ser subdivididas em duas classes: a) propriedades físicas que podem ser descritas por parâmetros discretos; e b) propriedades físicas que devem ser descritas por funções contínuas

A teoria da inversão emprega diferentes técnicas matemáticas para estas duas classes distintas de parâmetros: a) a teoria de equações matriciais para os parâmetros discretos; e b) a teoria das equações integrais para as funções contínuas dos parâmetros.

Neste curso iremos abordar apenas a "Teoria de Inversão Discreta", ou seja, à parte da teoria da inversão interessada nos parâmetros que são genuinamente discretos ou podem ser adequadamente aproximados como discretos. Além de abordarmos a teoria da inversão na sua forma discreta, também nos limitaremos a trabalhar com dados e questões que podem ser representados numericamente. Assim, os dados observados consistirão de uma tabulação de medidas de alguma grandeza física coletadas na superfície da Terra ou em poço de sondagem. Estes dados chamaremos de dados geofísicos. A pergunta (questão) que queremos responder será formulada em termos de valores numéricos de uma propriedade física específica da subsuperfície da Terra. Estas propriedades chamaremos de parâmetros (na literatura alguns autores chamam de modelo de parâmetros). Então no problema inverso em geofísico temos: 1) Dados Observados: que são um conjunto de valores numéricos de alguma grandeza física medidos na superfície da Terra; e 2) Parâmetros desconhecidos: que são valores numéricos contendo informações sobre alguma propriedade física da subsuperfície da Terra.

Por simplicidade iremos assumir o conhecimento a priori das equações que relacionam a grandeza física medida na superfície da Terra (dados observados) com a propriedade física (parâmetros). Por exemplo, a lei de Newton da gravitação estabelece a relação entre o campo gravimétrico (dados observados) e a densidade da subsuperfície da Terra (parâmetros). Um segundo exemplo, a lei de Coulomb estabelece a relação entre o campo magnético estacionário (dados observados) e a susceptibilidade magnética da subsuperfície da Terra (parâmetros).

Objetivo Principal: A teoria da inversão, em uma visão ampla, objetiva fornecer informações sobre os parâmetros numéricos desconhecidos de um sistema físico a partir de dados observados deste sistema. Naturalmente, há os parâmetros e os dados observados de um sistema físico estão relacionados através de alguma equação, ou seja, alguma lei física.

Podemos dizer que o problema inverso (inverse problem) geralmente inicia com os dados conhecidos e uma lei física objetivando estimar os parâmetros do sistema físico (modelo). Portanto o problema inverso se ocupa em fazer inferências sobre um sistema físico a partir de dados observados deste sistema.

Se existe um problema inverso existe então um problema direto (forward problem) que é definido como um processo de predizer os resultados das medidas de uma grandeza física (exemplo campo gravimétrico) a partir do conhecimento do sistema físico (lei de Newton da gravitação) e dos parâmetros do modelo ou sistema físico (como por exemplo densidade da subsuperfície).

Medidas de temperatura em um poço de sondagem: Vamos apresentar um exemplo simples do fenômeno de variação da temperatura como uma função da profundidade no interior da Terra. Vamos assumir que a temperatura cresce linearmente com a profundidade (z) da Terra. Em outras palavras, a temperatura T_i está relacionada com a profundidade z_i pela lei:

$$T_i = az_i + b$$

onde a e b são valores numéricos constantes.

O problema Direto: Se estabelecermos que a e b são variáveis conhecidas do sistema físico linear acima (por exemplo a =1 e b= 5), então podemos resolver o problema direto simplesmente avaliando a equação acima para qualquer valor de profundidade z_i

O problema Inverso: Suponha que fizemos N medidas de temperatura $[T_1, T_2, \ldots, T_N]$ em N diferentes profundidades $[z_1, z_2, \ldots, z_N]$ de um poço de sondagem. Neste caso queremos determinar as variáveis a e b do sistema físico linear $T_i = az_i + b$. Então as variáveis a e b são os parâmetros do nosso problema inverso.

Veja então que este problema inverso consiste em ajustar uma reta a um conjunto de pontos (dados de temperatura em diferentes profundidades da Terra). Por outro lado, o problema direto é simplesmente um problema de avaliação de um polinômio de primeiro grau. Note que neste exemplo o problema inverso é muito mais complexo que o direto e esta observação é quase sempre uma regra nos problemas inversos.

Outros Objetivo da Teoria da Inversão: Embora o principal teoria da inversão é fornecer estimativas dos parâmetros de um sistema físico (modelo físico), a Teoria da inversão abrange outros importantes objetivos. Ainda nos casos em que os parâmetros são os únicos resultados desejados existe uma grande quantidade de informações relacionadas aos parâmetros que podem ser extraídas para auxiliar a determinação da <u>qualidade da solução estimada do problema inverso.</u> Algumas informações são as seguintes:

1) A solução estimada é única ?
2) A solução estimada é estável ?
3) Quais são as semelhanças e diferenças entre dois diferentes métodos inversos ?

<u>O problema inverso Bem-Posto X Mal-Posto:</u>

Já vimos que um problema inverso temos dois elementos: os dados observados de um sistema físico (modelo) que são medidas de uma grandeza física e uma pergunta que são os parâmetros do sistema físico (modelo) a serem estimados. A solução do problema inverso consiste em estimar os parâmetros de um sistema físico (modelo) a partir dos dados observados deste sistema. A solução do problema inverso equivale a combinação dos dados disponíveis com algum raciocínio lógico objetivando responder a pergunta levantada. Se os dados contém informação suficiente para responder a pergunta estabelecida dizemos que o problema está “corretamente formulado” o que matematicamente chamamos de problema inverso BEM-POSTO (well posed). Por outro lado, se os dados NÃO contém informação suficiente para responder a pergunta estabelecida dizemos que o problema está "incorretamente formulado" o que matematicamente chamamos de problema inverso MAL-POSTO (ill posed). De acordo com Hadamard (1902) um problema é mal-posto quando sua solução NÃO OBEDECE a pelo menos uma das 3 condições:

1) EXISTÊNCIA
2) UNICIDADE
3) ESTABILIDADE

Vejamos alguns exemplos muito simples:

(1) N1 e N2 são números naturais. Estime N1 e N2 tal que:

$$N1 + N2 = 8.3$$

Este problema é matematicamente mal-posto uma vez que NÃO EXISTE SOLUÇÃO já que todo número natural m tem um sucessor que é igual a m+1

(2) N1 e N2 são números naturais. Estime N1 e N2 tal que:

$$N1 + N2 = 10$$

Neste problema a solução EXISTE porém, a solução NÃO É ÚNICA logo o probelma é matematicamente mal-posto. Vejamos as possíveis soluções deste sistema físico:

N1 =	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N2 =	9	8	7	6	5	4	3	2	1

(3) Vamos considerar um sistema físico qualquer que é descrito pela seguinte equação

$$0.000001\, p = y$$

em que y é o dado observado e p é o parâmetro a ser estimado deste sistema físico. Neste sistema físico notamos uma componente muito pequena de uma propriedade física (p) está relacionada a grandeza física medida (y). Se os dados (y) fossem livres de ruído experimental [1], ou seja, se os dados fossem "DADOS EXATOS", o parâmetro exato será dado por

$p_{exato} = y / 0.000001$

No entanto, no mundo real os dados observados (medidos) de uma grandeza física estão contaminados por ruído experimental δ. Então a equação deste sistema físico deverá ser reescrita como:

$$0.000001\, p = y + \delta$$

Note então que o parâmetro a ser estimado é dado por

$$\hat{p} = \frac{y}{0.000001} + \frac{\delta}{0.000001}$$

Portanto, em dados com ruído a solução estimada é:

$$\hat{p} = p_{\text{exato}} + 10^6\ \delta$$

Note que em dados com ruído há uma segunda parcela que é uma amplificação do ruído ($10^6\ \delta$).

Neste caso a solução EXISTE porém é uma solução INSTÁVEL, logo o problema é matematicamente mal-posto.

Caracterização do problema mal-posto como aquele em que não há suficiência de informação:

Um problema é mal-posto no sentido de Hadamard (1902) se sua solução ou NÃO EXISTE, OU NÃO É ÚNICA, OU NÃO É ESTÁVEL. Vimos através dos três exemplos anteriores que um problema mal-posto não guarda relação com um problema complexo. Um problema de estimar dois números naturais tal que a soma seja 8.3 é um problema extremamente simples porém mal-posto pois a solução não existe. O problema mal-posto também não guarda relação com o grau de quantificação da área científica em que o problema foi formulado. Na Geologia há inúmeros exemplos de problemas mal-postos, e mesmo em áreas muito pouco quantificadas, como a Arqueologia, por exemplo, podemos ter

[1] Ruído experimental é tudo aquilo que não é considerado sinal

problemas mal-postos e bem-postos. Por exemplo, em uma jazida Paleolítica, ao desenterrar objetos com forma de ponta de flecha, o arqueólogo se coloca o seguinte problema bem-posto: os habitantes da região eram caçadores ? A resposta é sim e certamente é única já que não é razoável supor que nossos antepassados da Idade da Pedra Lascada necessitavam de produzir armas para a caça. Por outro lado, ao desenterrar uma urna funerária contendo a ossada de um homem, o arqueólogo se coloca o seguinte problema mal-posto: os habitantes desta região acreditavam na existência de vida após a morte? A resposta pode ser sim, já que a existência de um funeral poderia indicar a preocupação de preservação do corpo para a vida pós morte, mas a resposta pode ser não e a urna funerária poderia apenas indicar um ato de higiene daqueles habitantes. Neste segundo caso a solução deste problema não é única.

O que leva um problema ser mal-posto não é a complexidade nem o grau de quantificação, mas a tentativa de se extrair mais informações do que aquela contida nos dados do problema. Há portanto um desbalanceamento entre as informações desejadas e a informações contidas nos dados observados (medidos). Em outras palavras, caracteriza-se um problema mal-posto como aquele em que os dados observados não são suficientes para responder a informação demandada no problema inverso. Desse modo só há duas maneiras de transformar um problema mal-posto em bem-posto:

1) Reduzir a demanda de informação
2) Introduzir informação a priori sobre os parâmetros a serem estimados.

<u>A Redução da Demanda de Informação:</u>

A tentativa de se resolver um problema mal-posto é despropositada porque a solução ou não existe, ou não é única ou não é estável. Nas décadas de 60 e 70 houve um verdadeiro boom na geofísica devido ao considerável aumento do volume dos dados geofísicos coletados (levantamentos aerotransportados), aumento do volume dos dados geológicos (mapeamentos sistemáticos governamentais) e disseminações dos computadores. Então os geofísicos começaram a formular problemas envolvendo a resolução de sistemas grandes na tentativa de estimar, simultaneamente, a propriedade física e o volume das fontes geológicas (forma geométrica). Na interpretação geofísica a propriedade física de um corpo geológico e o volume deste corpo é chamada de uma ambigüidade clássica, uma vez que há infinitas variações de propriedade física X volume das fontes geológicas que podem explicar os dados geofísicos observados. Em outras palavras, os geofísicos começaram neste período a tentar extrair mais informações do que aquela contida nos dados medidos, levando ao aparecimento de problemas mal-postos, caracterizados principalmente por soluções instáveis na presença de ruído. Nesta época os geofísicos introduziram modelos complexos originando métodos de inversão que apenas funcionavam em dados sintéticos e sem ruído. Em dados com ruído esses métodos não produziam soluções únicas e estáveis.

Neste período foi desenvolvido uma análise de Backus and Gilbert (1967; 1968) que classificou o problema geofísico inverso, na sua forma mais ampla, como um problema matematicamente mal-posto. Backus e Gilbert sugeriram reduzir a demanda de informação ao nível compatível com a quantidade de informação existente nos dados, ou seja, extrair dos dados apenas o que eles podem resolver. Este conceito de Backus e Gilbert pode ser ilustrado com um exemplo simples de se estimar dois números N1 e N2 a partir da equação

$$N1 + N2 = 10$$

Embora este problema seja muito simples, ele não difere do problema geofísico, uma vez que uma medida geofísica é uma combinação linear ou não linear de vários parâmetros e o número de observações geofísicas independentes (número de equações LI) é, sempre menor que o número de parâmetros a serem estimados. Então, este problema de estimar N1 e N2 a partir da equação N1+ N2 =10 pode ser visto como um paradigma do problema geofísico inverso em que temos apenas uma equação (uma única observação) para estimar 2 parâmetros. Neste problema a solução NÃO é ÚNICA. Assim seguindo a linha de Backus e Gilbert para obtermos solução com unicidade devemos reduzir a demanda de informação a ser estimada ao nível compatível a quantidade de informação contida nos dados. Uma possibilidade seria abrir mão de se estimar N1 e N2 e determinar apenas a média destes dois números, o que seria obtido de modo único e estável através da equação acima dividindo-se ambos os lados por dois.

$$\frac{N1+N2}{2}=\frac{10}{2}$$

$$\text{Média}_{\text{N1eN2}}=5$$

De um modo geral, esta teoria de Backus e Gilbert de redução da demanda de informação a ser extraída dos dados Geofísicos levou a resultados modestos e de pouca aplicação prática.

Por outro lado, a segunda abordagem de transformar um problema mal-posto em bem-posto via a introdução de informação a priori adicional sobre os parâmetros tem permitido o desenvolvimento de métodos estáveis e de grande aplicabilidade prática.

<u>A introdução de informação a priori sobre os parâmetros a serem estimados</u>

Também na década de 60 Tikhonov (1963) classificou como um problema geofísico inverso como um problema matematicamente mal-posto e desenvolveu um método chamado de Regularização de Tikhonov para transformar um problema mal-posto em bem-posto. O método de Regularização de Tikhonov, em uma visão muito simplificada, permite incorporar uma classe bastante ampla de informações a priori sobre os parâmetros a serem estimados no problema geofísico inverso. Usando o mesmo problema simples de se estimar dois números N1 e N2 a partir da equação

N1 + N2 = 10,

Já vimos que este problema é matematicamente mal-posto porque admite várias possíveis soluções. Dentro da abordagem de introdução de informações a priori sobre os parâmetros a serem estimados, vamos transformar este problema inverso matematicamente mal-posto em um problema bem-posto, ou seja, com uma única solução. Relembrando, o nosso problema consiste em estimar dois números N1 e N2 a partir da equação N1 + N2 = 10. Vimos que a solução deste problema existe porém não é única. Vejamos as possíveis soluções:

N1 =	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N2 =	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Vejamos agora dois casos distintos em que introduziremos informações a priori sobre os parâmetros:

<u>Caso 1 de introdução de informação a priori:</u>

Conhecer o valor de um dos parâmetros a priori para se estimar o outro.

Exemplo 1 :

Assim, por exemplo, se sabemos que N1=8 então a estimativa de N2= 2, desta forma conseguimos uma solução única.

Note, no entanto, que neste primeiro caso estamos com uma situação muito restritiva em que necessitamos o conhecimento a priori do valor de um dos parâmetros para se estimar o outro parâmetro. Na verdade, a introdução de informação a priori objetivando transformar um problema mal-posto em bem-posto não se limita a este caso restritivo. Vejamos o segundo caso de introdução de informação a priori.

<u>Caso 2 de introdução de informação a priori:</u>

Conhecer algumas características dos parâmetros a serem estimados.

Exemplo 2.1:

Usando o mesmo problema simples de se estimar dois números N1 e N2 a partir da equação N1 + N2 = 10, supondo as seguintes informações a priori.

(1) N1 e N2 são dois números naturais

(2) N1 e N2 estão o mais próximo possível um do outro

N1 =	1	2	3	4	$\boxed{5}$	6	7	8	9
	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
N2 =	9	8	7	6	$\boxed{5}$	4	3	2	1

Veja que a solução é única e igual a N1=N2=5

Exemplo 2.2:

Usando o mesmo problema simples de se estimar dois números N1 e N2 a partir da equação N1 + N2 = 10, supondo as seguintes informações a priori.

(1) N1 e N2 são dois números naturais

(2) N1 $\leq$ N2

(3) Um e somente um dos números é primo

N1 =	1	$\boxed{2}$	3	4	5	6	7	8	9
	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
N2 =	9	$\boxed{8}$	7	6	5	4	3	2	1

Veja que a solução é única e igual a N1=2 e N2=8

Em resumo observe através do segundo caso que a introdução de informação a priori não significa necessariamente ter-se o conhecimento do valor verdadeiro dos parâmetros que serão estimados. É suficiente conhecermos apenas algumas características dos parâmetros.

<u>A introdução de informação a priori no problema Geofísico Inverso</u>

Na década de 70, as poucas tentativas de transformação um problema mal-posto em bem-posto via método da regularização de Tikhonov usavam informações adicionais puramente matemáticas. De fato, o método da regularização de Tikhonov é um método matemático de obtenção de soluções estáveis através da construção de um operador regularizador. De modo simplificado, a construção de um operador regularizador reduz-se a um problema de extremo condicional: Minimizar um funcional estabilizante sujeito a explicar os dados observados dentro de uma precisão imposta pelos erros (ruídos) que contaminam os dados geofísicos observados.

O funcional estabilizante, ou simplesmente estabilizador, apresenta as seguintes propiedades matemáticas: 1) contínuo; 2) não negativo; 3) definido em um sub-espaço compacto do espaço dos parâmetros ao qual pertence a solução teórica. Veja que o funcional estabilizante é bastante genérico no sentido de permitir incorporar uma classe bastante ampla de informações a priori sobre os parâmetros do problema inverso. Na geofísica a partir da década de 80, ampliou-se a definição de diferentes funcionais estabilizantes para a introdução de informação a priori sobre os parâmetros de um problema inverso. No entanto, inicialmente, os funcionais estabilizantes desenvolvidos e empregados no método da regularização de Tikhonov eram interpretados como simples restrições matemáticas necessárias para a obtenção de soluções estáveis do problema geofísico inverso. Um exemplo de um funcional estabilizante amplamente empregado na geofísica como um simples procedimento matemático de estabilização da solução estimada pelo problema geofísico inverso é a norma L2 do vetor de parâmetros a ser estimado.

Durante a década de 70, a regularização foi empregada de modo implícito através dos métodos “Ridge Regression “ (Hoerl and Kennard, 1970) e da “Inversa Generalizada” (Braile et al., 1974; Pedersen, 1977). Matematicamente estes métodos para a estabilização da solução minimizam a norma L2 dos parâmetros a serem estimados sujeito a anomalia geofísica ser ajustada (explicada) dentro da precisão imposta pelos erros experimentais (ruídos). Este funcional estabilizante é conhecido como a “<u>Norma Euclideana Mínima dos parâmetros”</u> pois impõe no sentido dos mínimos quadrados que todos os parâmetros estimados estejam próximos de zero. Note que fisicamente, a informação introduzida por este funcional estabilizador é inconsistente com a própria existência da anomalia geofísica. Isto caracteriza claramente que este funcional estabilizante (norma L2 dos parâmetros) é apenas uma ferramenta matemática para a estabilização da solução do problema geofísico inverso.

O conceito que o método da Regularização de Tikhonov permite introduzir, ao problema geofísico inverso, informação a priori sobre as fontes anômalas causadoras das anomalias geofísicas através da definição de funcionais estabilizantes, somente foi empregado a partir da década de 80. Em outras palavras, para a estabilização de um problema geofísico inverso os funcionais estabilizantes empregados pela regularização de Tikhonov foram traduzidos em termos de características geológicas específicas, representando, portanto, vínculos geológicos. Em resumo, a partir da década de 80 os funcionais estabilizantes empregados pelo método de regularização de Tikhonov não eram apenas condições matemáticas abstratas mais vínculos geológicos e físicos refletindo as características dos diferentes ambientes geológicos.

1) Entregue dia 05/06/2007

Tópico 1: O problema inverso

Tópico 2: Revisão de álgebra linear:

Tópicos (3) Estágios do processo de inversão e **(4)** Exemplo dos estágios do processo de inversão

Anexo 1 – 4: Conceitos Básicos de Estatística

2) Trabalho para o Lar:

1) Leitura do Tópico 2: Revisão de Álgebra Linear
2) Fazer os exercícios do Tópico 2

3) Recomendações :

1) Ler Introdução Menke (1984)
2) Ler Capítulo 1 Scales et all. (2000)
3) Ler item 1.1 de Aster et al (2003)

Todos os materiais acima foram entregues dia 05/06/07