Exemplos numérico:

Casos numéricos simples de uma tomografia simplificada.

Vamos agora ilustrar com exemplos numéricos simples, a análise de um sistema linear usando a decomposição em valores singulares e os estimadores IG. Considere um problema inverso linear discreto em sísmica (tomografia sísmica simplificada da Terra). Nosso problema inverso é estimar a variação espacial da vagarosidade das ondas sísmicas, a partir da medida de tempos de trânsito de uma onda elástica gerada por fontes e registrada nos geofones, ambos localizados na superfície da Terra. Presumimos as seguintes simplificações: 1) conhecemos a forma da Terra que é um quadrado; 2) conhecemos as localizações Fonte – Geofone; 3) eliminamos o efeito da refração, logo a onda elástica percorre a distância Fonte-Geofone em linha reta e; 4) presumimos que a vagarosidade é constante dentro de uma célula quadrada e que de uma célula para outra a vagarosidade pode variar.

Vamos considerar as seguintes hipóteses de acordo com o posto (r), numero de parâmetros (M) e número de tempo de trânsito (N):

(1) Caso 1: r = N < M (r = 1, N = 1 e M=2)

Neste primeiro caso temos dois blocos e apenas uma única medida do tempo de trânsito (Figura 1). Há portanto uma única equação

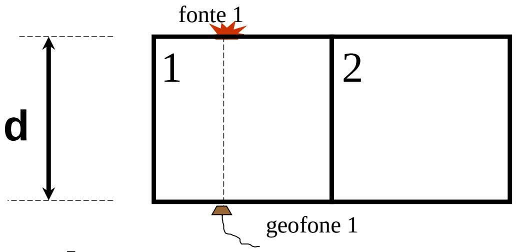
$$t_1 = d \; p_1 + 0 \, p_2$$

ou ainda em notação matricial temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = t_1 / d$$

Exemplos Numéricos

Tomografia simplificada para dois blocos justapostos



$$t_1 = d \; p_1 + 0 \; p_2$$

Figura 1

A decomposição em valores singulares da matriz $\bar{\bar{\mathbf{A}}}$ fornece

$$\underset{(1\times2)}{\bar{\bar{\mathbf{A}}}} = \underset{(1\times1)}{\bar{\bar{\mathbf{U}}}}\;\underset{(1\times2)}{\bar{\bar{\mathbf{S}}}}\;\underset{(2\times2)}{\bar{\bar{\mathbf{V}}}^{T}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Veja que a matriz $\bar{\bar{\mathbf{A}}}$ pode ser reescrita como

$$\underset{(1\times2)}{\bar{\bar{\mathbf{A}}}_r} = \underset{(1\times1)}{\bar{\bar{\mathbf{U}}}_r}\;\underset{(1\times1)}{\bar{\bar{\mathbf{S}}}_r}\;\underset{(1\times2)}{\bar{\bar{\mathbf{V}}}_r^{T}}$$

isto é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Desse modo vemos que o posto de $\bar{\bar{\mathbf{A}}}$ é um (r=1), portanto, há somente uma combinação linear dos parâmetros p_1 e p_2 que pode ser completamente determinada.

Esta combinação é

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}_r = \bar{\bar{\mathbf{V}}}_r^{\mathrm{T}} \bar{\mathbf{p}}$$

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}_1 = p_1$$

Esta combinação linear pode ser determinada

Por outro lado, veja que há uma combinação linear dos parâmetros p_1 e p_2 que não pode ser determinada.

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}_{M-r} = \bar{\bar{\mathbf{V}}}_{M-r}^{\mathrm{T}} \bar{\mathbf{p}}$$

$$\alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_2 = p_2$$

Esta combinação linear NÃO pode ser determinada

Veja então que o parâmetro p_1 pode ser determinado, enquanto o parâmetro p_2 não pode ser determinado, o que reforça o que a intuição física já predizia: a onda só atravessa o bloco número 1. Este exemplo caracteriza a insuficiência de informação nas observações. As observações existentes não são suficientes para fornecerem informações sobre a vagarosidade dos dois blocos, mas apenas de um dois blocos (p_1).

Caracterizada a insuficiência de informação nas observações há duas alternativas: 1) reparametrização e 2) introdução de informação a priori.

Reparametrização: A equação do sistema é redefinida como:

$$t_1 = d\ p_1$$

$$[1][p_1] = t_1 / d$$
$$[p_1] = t_1 / d$$

Neste caso foi reduzida a demanda da informação, ou seja, a determinação do parâmetro p_2 foi abandonada.

Introdução de informação a priori:

Se insistirmos em estimar todos os dois parâmetros, então será necessário introduzir informação a priori. Vejamos o caso do IG

$$\bar{\mathbf{p}}^{+} = \bar{\bar{\mathbf{V}}}_r \bar{\bar{\mathbf{S}}}_r^{-1} \bar{\bar{\mathbf{U}}}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T}} \bar{\mathbf{y}}^{o}$$

$$\bar{\mathbf{p}}^{+} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [1]^{-1} [1] [t_1 / d]$$

$$\bar{\mathbf{p}}^{+} = \begin{bmatrix} t_1 / d \\ 0 \end{bmatrix}$$

Note que a solução $p_2 = 0$ foi obtida totalmente da informação a priori de uma solução com menor norma Euclideana. Lembre-se que o estimador IG, introduz a informação a priori que $\bar{\boldsymbol{\alpha}}_{M-r} = \bar{\mathbf{0}}$, neste caso é a informação que $\alpha_2 = 0$ como $\alpha_2 = p_2$ então o estimador IG introduz a informação que $p_2 = 0$. Neste exemplo, em particular, o parâmetro $p_1 = 0$ não é afetado pela informação a priori, mas em geral isto não ocorre, a informação a priori afeta a todos os parâmetros.

(1.2) Caso 1: r = N < M (r = 2, N = 2 e M = 4)

Ainda dentro do primeiro caso em que temos r = N < M, i.e, posto (r) é igual ao número de medidas observacionais (N) e o número de parâmetros (M) vamos considerar quatro blocos e duas medidas do tempo de trânsito (Figura 2).

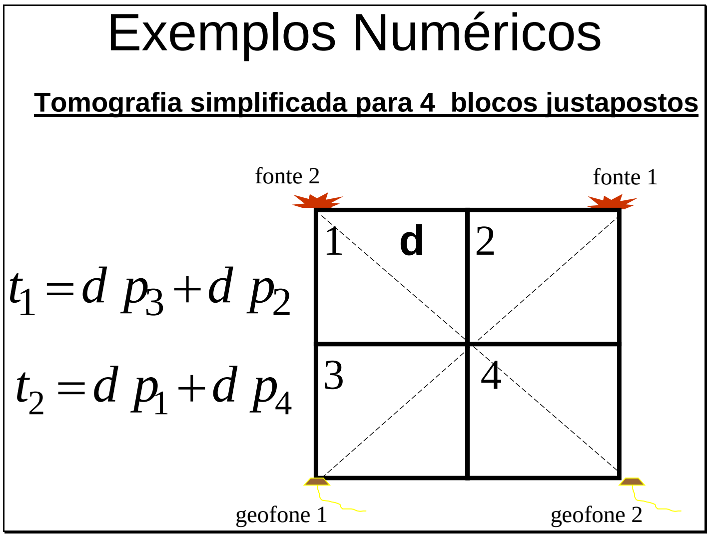


Figura 2

Neste caso temos duas observações do tempo

$$t_1 = d\ p_3 + d\ p_2$$

$$t_2 = d\ p_1 + d\ p_4$$

ou ainda em notação matricial temos

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1/d \\ t_2/d \end{bmatrix}$$

A decomposição em valores singulares da matriz $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$ fornece

$$\underset{(2\times4)}{\overline{\overline{\mathbf{A}}}} = \underset{(2\times2)}{\overline{\overline{\mathbf{U}}}}\,\underset{(2\times4)}{\overline{\overline{\mathbf{S}}}}\,\underset{(4\times4)}{\overline{\overline{\mathbf{V}}}}^T$$

$$\underset{(2\times2)}{\overline{\overline{\mathbf{U}}}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\overline{\mathbf{S}}} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{(4\times4)}{\overline{\overline{\mathbf{V}}}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Veja que há apenas 2 valores singulares logo a matriz $\overline{\overline{\mathbf{V}}}_r$ é formada pelas duas primeiras colunas da matriz $\overline{\overline{\mathbf{V}}}$ (matriz pontilhada acima).

Veja que a matriz $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$ pode ser reescrita como

$$\underset{(2\times4)}{\overline{\overline{\mathbf{A}}}_r} = \underset{(2\times2)}{\overline{\overline{\mathbf{U}}}_r}\,\underset{(2\times2)}{\overline{\overline{\mathbf{S}}}_r}\,\underset{(2\times4)}{\overline{\overline{\mathbf{V}}}_r^T}$$

isto é

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Vale ressaltar que as matrizes $\overline{\overline{\mathbf{U}}}$ e $\overline{\overline{\mathbf{V}}}$ não são únicas. As matrizes $\overline{\overline{\mathbf{U}}}$ e $\overline{\overline{\mathbf{V}}}$ são matrizes ortogonais cujas colunas são os autovetores associados a autovalores das matrizes $\overline{\overline{\mathbf{A}}}\,\overline{\overline{\mathbf{A}}}^T$ e $\overline{\overline{\mathbf{A}}}^T\overline{\overline{\mathbf{A}}}$, respectivamente. Assim, podemos ter vários conjuntos $\begin{bmatrix}\overline{\mathbf{u}}_1 & \overline{\mathbf{u}}_2 & \ldots & \overline{\mathbf{u}}_N\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}\overline{\mathbf{v}}_1 & \overline{\mathbf{v}}_2 & \ldots & \overline{\mathbf{v}}_M\end{bmatrix}$ formando bases[1] ortogonais[2] que geram os espaços de observações e parâmetros, respectivamente. Como um conjunto de vetores que constituem uma base de um espaço vetorial NÃO é único, então podemos ter vários vetores $\begin{bmatrix}\overline{\mathbf{u}}_1 & \overline{\mathbf{u}}_2\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}\overline{\mathbf{v}}_1 & \overline{\mathbf{v}}_2 & \overline{\mathbf{v}}_3 & \overline{\mathbf{v}}_4\end{bmatrix}$ desde que formem bases ortogonais. Assim há outras possibilidades para a decomposição em valores singulares da matriz $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$ como por exemplo

$$\underset{(2\times4)}{\overline{\overline{\mathbf{A}}}} = \underset{(2\times2)}{\overline{\overline{\mathbf{U}}}}\,\underset{(2\times4)}{\overline{\overline{\mathbf{S}}}}\,\underset{(4\times4)}{\overline{\overline{\mathbf{V}}}^T}$$

[1] <u>Base</u> de um espaço vetorial é um conjunto LI de vetores que geram o espaço vetorial

[2] <u>Base ortogonal</u> é uma base contendo vetores ortogonais, ou seja, $\overline{\mathbf{u}}_i^T\,\overline{\mathbf{u}}_k = 0$ em que $\overline{\mathbf{u}}_i$ e $\overline{\mathbf{u}}_k$ são respectivamente a i-ésima e k-ésima colunas da matriz ortogonal $\overline{\overline{\mathbf{U}}}$.

$$\underset{(2\times 2)}{\bar{\bar{\mathbf{U}}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\bar{\mathbf{S}}} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{(4\times 4)}{\bar{\bar{\mathbf{V}}}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Independentemente, das matrizes de autovetores vemos que o posto de $\bar{\bar{\mathbf{A}}}$ é dois (r = 2) isto porque há apenas dois valores singulares diferentes de zero. Portanto, há somente duas combinações lineares dos parâmetros p_1, p_2, p_3 e p_4 que podem ser completamente determinada. Estas combinações são

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}_r = \bar{\bar{\mathbf{V}}}_r^{\mathrm{T}} \bar{\mathbf{p}}$$

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}_r = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}_r = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{2}\left(p_1 + p_4\right)}{2} \\ \dfrac{-\sqrt{2}\left(p_2 + p_3\right)}{2} \end{bmatrix}$$ **Estas combinações lineares podem ser determinadas**

Assim, notamos que os parâmetros que podem ser determinados são, a menos que uma constante ($\sqrt{2}$ ou $-\sqrt{2}$), as MÉDIAS das vagarosidades dos blocos 1 e 4 e 2 e 3 já que $\alpha_1 = \dfrac{\sqrt{2}\left(p_1 + p_4\right)}{2}$ e $\alpha_2 = \dfrac{-\sqrt{2}\left(p_2 + p_3\right)}{2}$. Este resultado é razoável de se supor apenas observando a configuração dos transmissores e receptores.

Agora analisaremos as combinações lineares dos parâmetros p_1, p_2, p_3 e p_4 que não podem ser determinadas. Estas combinações são

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}_{M-r} = \bar{\bar{\mathbf{V}}}_{M-r}^{\mathrm{T}} \bar{\mathbf{p}}$$

Vamos tomar a matriz $\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{M-r}$ formada pelas duas últimas colunas da matriz $\bar{\bar{\mathbf{V}}}$ (colunas pontilhadas abaixo)

$$\underset{(4\times4)}{\bar{\bar{\mathbf{V}}}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}_{M-r} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 & 0 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}_{M-r} = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{2}(p_4 - p_1)}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}(p_2 - p_3)}{2} \end{bmatrix}$$ **Estas combinações lineares não podem ser determinadas**

Assim, notamos que os parâmetros que não podem ser determinados são, a menos que uma constante multiplicativa ($\sqrt{2}$), <u>os CONTRASTES das vagarosidades</u> entre os blocos 1 e 4 e 2 e 3 já que $\alpha_3 = \dfrac{\sqrt{2}(p_4 - p_1)}{2}$ e $\alpha_4 = \dfrac{\sqrt{2}(p_2 - p_3)}{2}$.

Este exemplo também caracteriza a insuficiência dos dados observados. Vamos também solucionar este problema via reparametrização e introdução de informação a priori.

Reparametrização:

Definiremos um novo vetor de parâmetros

$$\bar{\mathbf{p}}' = \begin{bmatrix} p_1' \\ p_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{(p_2 + p_3)}{2} \\ \dfrac{(p_1 + p_4)}{2} \end{bmatrix}$$

Então, nosso sistema que originalmente era

$$t_1 = d\ p_3 + d\ p_2$$

$$t_2 = d\ p_1 + d\ p_4$$

Agora, com a reparametrização se transformará em

$$t_1 = 2d\left(p_1'\right)$$

$$t_2 = 2d\left(p_2'\right)$$

O resultado é

$$\frac{t_1}{2d} = p_1'$$

$$\frac{t_2}{2d} = p_2'$$

Veja que com a reparametrização reduzimos a demanda de informação. Inicialmente pretendíamos estimar 4 parâmetros (p_1, p_2, p_3 e p_4). Após a reparametrização temos que estimar dois parâmetros (p_1' e p_2') que são, repectivamente as médias entre os blocos 2-3 e 1-4.

Introdução de informação a priori:

Se insistirmos em estimar todos os dois parâmetros, então será necessário introduzir informação a priori. Vejamos o caso do IG

$$\bar{\mathbf{p}}^{+} = \bar{\bar{\mathbf{V}}}_r \bar{\bar{\mathbf{S}}}_r^{-1} \bar{\bar{\mathbf{U}}}_\mathrm{r}^\mathrm{T} \bar{\mathbf{y}}^o$$

$$\bar{\mathbf{p}}^{+} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1/d \\ t_2/d \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{p}}^{+} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1/d \\ t_2/d \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{p}}^{+} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_2/\sqrt{2}\,d \\ -t_1/\sqrt{2}\,d \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{p}}^{+} = \begin{pmatrix} t_2/2d \\ t_1/2d \\ t_1/2d \\ t_2/2d \end{pmatrix}$$

Observe que o estimador IG, introduz a informação a priori que $\bar{\boldsymbol{\alpha}}_{M-r} = \bar{\mathbf{0}}$, neste caso

é a informação que $\alpha_3 = 0$ e $\alpha_4 = 0$ como $\alpha_3 = \dfrac{\sqrt{2}(p_4 - p_1)}{2}$ e $\alpha_4 = \dfrac{\sqrt{2}(p_2 - p_3)}{2}$

então o estimador IG introduz a informação que

$$\alpha_3 = \frac{\sqrt{2}(p_4 - p_1)}{2} = 0$$

implicando que $p_4^{+} = p_1^{+}$

e

$$\alpha_4 = \frac{\sqrt{2}(p_2 - p_3)}{2} = 0$$

o que implica $p_2^{+} = p_3^{+}$

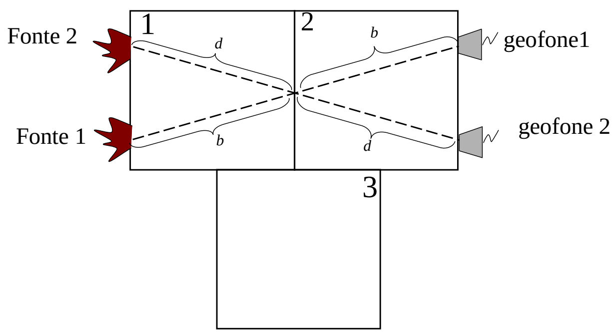
O que é exatamente o resultado que obtemos para o vetor $\bar{\mathbf{p}}^{+}$.

(2) Caso 2: r < N < M (r = 1, N = 2 e M = 3)

Neste segundo caso temos r < N < M, i.e, posto (r) é menor ao número de medidas observacionais (N) e este é menor que o número de parâmetros (M). Vamos considerar três blocos e duas medidas do tempo de trânsito (Figura 3).

Exemplos Numéricos

<u>Tomografia simplificada para 3 blocos justapostos</u>



$$t_1 = b\ p_1 + b\ p_2 \qquad t_2 = d\ p_1 + d\ p_2$$

Figura 3

Neste caso temos duas observações do tempo

$$t_1 = b\ p_1 + b\ p_2$$

$$t_2 = d\ p_1 + d\ p_2$$

ou ainda em notação matricial temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1/b \\ t_2/d \end{bmatrix}$$

A decomposição em valores singulares da matriz $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$ fornece

$$\underset{(2\times3)}{\overline{\overline{\mathbf{A}}}} = \underset{(2\times2)}{\overline{\overline{\mathbf{U}}}}\,\underset{(2\times3)}{\overline{\overline{\mathbf{S}}}}\,\underset{(3\times3)}{\overline{\overline{\mathbf{V}}}}^{T}$$

$$\underset{(2\times2)}{\overline{\overline{\mathbf{U}}}} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\overline{\mathbf{S}}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{(3\times3)}{\overline{\overline{\mathbf{V}}}} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Veja que há apenas um valor singular logo as matrizes $\overline{\overline{\mathbf{V}}}_r$ e $\overline{\overline{\mathbf{U}}}_r$ é formada pela primeira coluna da matriz $\overline{\overline{\mathbf{V}}}$ e $\overline{\overline{\mathbf{U}}}$, respectivamente. Veja que a matriz $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$ pode ser reescrita como

$$\underset{(2\times3)}{\overline{\overline{\mathbf{A}}}_r} = \underset{(2\times1)}{\overline{\overline{\mathbf{U}}}_r}\,\underset{(1\times1)}{\overline{\overline{\mathbf{S}}}_r}\,\underset{(1\times3)}{\overline{\overline{\mathbf{V}}}_r^{T}}$$

isto é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} (2) \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, há somente uma combinação linear dos parâmetros p_1, p_2 e p_3 que pode ser completamente determinada. Esta combinação é

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}_r = \bar{\bar{\mathbf{V}}}_r^{\mathrm{T}} \bar{\mathbf{p}}$$

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}_r = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}_r = \alpha_1 = \sqrt{2}\,\frac{(p_1 + p_2)}{2}$$

Notamos que a única combinação de parâmetros que pode ser determinada é a MÉDIA das vagarosidade dos blocos 1-2 (a menos de uma constante multiplicativa $\sqrt{2}$), já que $\alpha_1 = \dfrac{\sqrt{2}(p_1 + p_2)}{2}$. Como era esperado, uma vez que nos dois eventos a onda sísmica só atravessa os blocos 1 e 2, simultaneamente.

Analisando as combinações lineares dos parâmetros p_1, p_2 e p_3 que não podem ser determinadas. Estas combinações são

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}_{M-r} = \bar{\bar{\mathbf{V}}}_{M-r}^{\mathrm{T}} \bar{\mathbf{p}}$$

Vamos tomar a matriz $\bar{\bar{\mathbf{V}}}_{M-r}$ formada pelas duas últimas colunas da matriz $\bar{\bar{\mathbf{V}}}$ (colunas pontilhadas abaixo)

$$\underset{(3\times3)}{\bar{\bar{\mathbf{V}}}} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, notamos que os parâmetros que não podem ser determinados são,

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}_{M-r} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}_{M-r} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}(p_2 - p_1)}{2} \\ p_3 \end{pmatrix}$$

Isto é, a menos que uma constante multiplicativa ($\sqrt{2}$), <u>os CONTRASTES das vagarosidades</u> entre os blocos 1-2, já que $\alpha_2 = \dfrac{\sqrt{2}(p_2 - p_1)}{2}$, e o parâmetro p_3, , já que $\alpha_3 = p_3$.

Introdução de informação a priori:

Se queremos estimar todos os três parâmetros, então será necessário introduzir informação a priori. Vejamos o caso do IG

$$\bar{\mathbf{p}}^{+} = \bar{\bar{\mathbf{V}}}_r \bar{\bar{\mathbf{S}}}_r^{-1} \bar{\bar{\mathbf{U}}}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T}} \bar{\mathbf{y}}^{o}$$

$$\bar{\mathbf{p}}^{+} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{2} \right) \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1/b \\ t_2/d \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{p}}^{+} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\left(\frac{t_1}{b} + \frac{t_2}{d}\right) \\ \frac{1}{4}\left(\frac{t_1}{b} + \frac{t_2}{d}\right) \\ 0 \\ \end{bmatrix}$$

Observe que o estimador IG, introduz a informação a priori que $\bar{\boldsymbol{\alpha}}_{M-r} = \bar{\mathbf{0}}$, neste caso é a informação que $\alpha_2 = 0$ e $\alpha_3 = 0$ como $\alpha_2 = \frac{\sqrt{2}(p_2 - p_1)}{2}$ e $\alpha_3 = p_3$ então o estimador IG introduz a informação que

$$\alpha_2 = \frac{\sqrt{2}(p_2 - p_1)}{2} = 0$$

implicando $p_2^{+} = p_1^{+}$

De fato $p_2^{+} = p_1^{+} = \frac{1}{4}\left(\frac{t_1}{b} + \frac{t_2}{d}\right)$

e

$$\alpha_3 = p_3 = 0$$

o que implica $p_3^{+} = 0$

O que é exatamente o resultado que obtemos para o vetor $\bar{\mathbf{p}}^{+}$.