Teoria da Reconstituição Compacta:

O estimador de Inversão Compacta (Last and Kubik, 1983)

O estimador que apresentaremos agora introduz uma informação a priori qualitativa de compacidade da fonte anômala, i.e, fonte com mínimo volume (Last and Kubik, 1983). Matematicamente, esta informação será introduzida através da minimização do funcional estabilizante.

$$\mathrm{H}(\bar{\mathbf{p}}) = \left(\bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{p}}^{\mathbf{o}}\right)^{\mathbf{T}} \overline{\overline{\mathbf{W}}}_p \left(\bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{p}}^{\mathbf{o}}\right), \qquad (1)$$

em que $\bar{\mathbf{p}}^{\mathbf{o}} = \bar{\mathbf{0}}$ e $\overline{\overline{\mathbf{W}}}_p$ é uma matriz diagonal de dimensão M x M cujo j-ésimo elemento é dado por

$$W_{p\,j} = \frac{1}{p_j^2 + \varepsilon} \qquad (2)$$

em que ε é um número positivo pequeno.

Interpretação do funcional $\mathrm{H}(\bar{\mathbf{p}})$ a ser minimizado

Considerando que $\bar{\mathbf{p}}^{\mathbf{o}} = \bar{\mathbf{0}}$, veja que temos que minimizar o funcional $\mathrm{H}(\bar{\mathbf{p}})$ dado por:

$$\min \quad \mathrm{H}(\bar{\mathbf{p}}) = \min \quad \left\{ \bar{\mathbf{p}}^{\mathbf{T}} \, \overline{\overline{\mathbf{W}}}_p \, \bar{\mathbf{p}} \right\} \qquad (3)$$

Considerando a matriz $\overline{\overline{\mathbf{W}}}_p$ definida na equação (2), a minimização do funcional (3) é equivalente a minimizar

$$\mathrm{H}(\overline{\mathbf{p}}) = \sum_{j=1}^{M} W_{p\,j}\, p_j^2 \tag{4}$$

$$H(\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^{M} \frac{p_j^2}{p_j^2 + \varepsilon} = \begin{cases} 0, & \text{se } p_j = 0 \\ 1, & \text{se } p_j \neq 0 \end{cases} \tag{5}$$

Veja então que $H(\mathbf{p})$ é o número de parâmetros não nulos. Por exemplo, se tenho 5 parâmetros e o mínimo do funcional $H(\mathbf{p})$ é igual a 3 parâmetros estimados, isto significa dizer que há 3 parâmetros estimados não nulos e 2 parâmetros nulos. Desse modo o mínimo de $H(\mathbf{p})$ ocorrerá quando houver um número mínimo de parâmetros estimados não nulos, sujeito a explicar as observações geofísicas.

Veja que se os parâmetros são propriedades físicas da subsuperfície, por exemplo, a densidade e o nosso problema inverso consiste estimar a variação espacial da densidade a partir dos dados gravimétricos, presumindo-se como simplificação que a nossa subsuperfície foi discretizada em M bloquinhos (Figura 1)

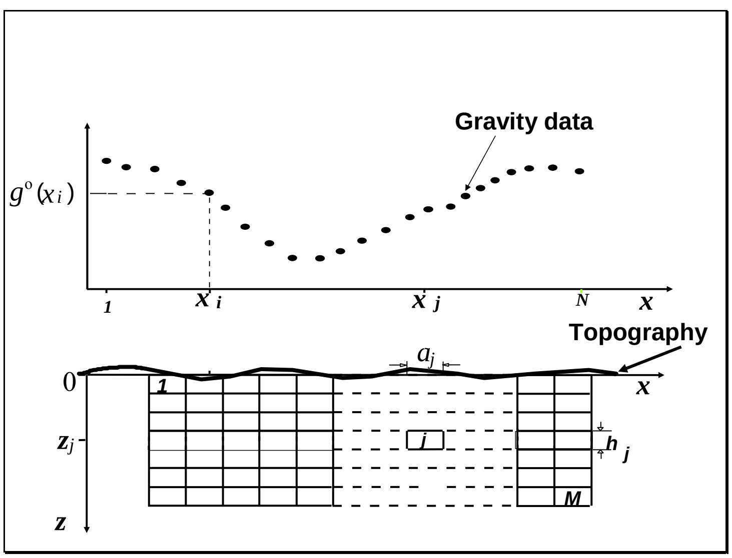

Figura 1

em que p_j é a densidade do j-ésimo bloquinho.

Neste caso o funcional $H(\mathbf{p})$ será o número de bloquinhos com densidades não nulas. Desse modo o mínimo de $H(\mathbf{p})$ ocorrerá quando for estimada uma fonte anômala com o mínimo número de bloquinhos com densidades estimadas diferentes de zero, ou seja, uma fonte anômala com <u>mínimo volume,</u> sujeito a explicar os dados gravimétricos observados. Alternativamente, dizemos que a fonte tem <u>compacidade máxima.</u>

<u>Formulação Matemática do Problema da Inversão Compacta</u>

Matematicamente a Inversão compacta pode ser formulada como um problema vinculado de

$$\begin{cases} \min \quad H\left(\bar{\mathbf{p}}\right) \\ \text{sujeito} \quad a \quad \left\|\boldsymbol{\varepsilon}\right\|_2^2 = \delta \end{cases} \qquad (6)$$

em que δ é o ruído contido nos dados observados. O problema vinculado (6) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} \min \quad H\left(\bar{\mathbf{p}}\right) = \min \quad \left\|\bar{\bar{\mathbf{W}}}_p^{1/2}\,\bar{\mathbf{p}}\right\|_2^2 \\ \text{sujeito} \quad a \quad \left\|\bar{\mathbf{y}}^{\mathbf{o}} - \bar{\bar{\mathbf{A}}}\,\bar{\mathbf{p}}\right\|_2^2 = \delta \end{cases} \qquad (7)$$

ou ainda

$$\begin{cases} \min \; H\left(\bar{\mathbf{p}}\right) = \min \left\{\bar{\mathbf{p}}^{\mathbf{T}}\,\bar{\bar{\mathbf{W}}}_p\,\bar{\mathbf{p}}\right\} \\ \text{sujeito} \;\; a \left(\bar{\mathbf{y}}^{\mathbf{o}} - \bar{\bar{\mathbf{A}}}\,\bar{\mathbf{p}}\right)^{\mathbf{T}}\left(\bar{\mathbf{y}}^{\mathbf{o}} - \bar{\bar{\mathbf{A}}}\,\bar{\mathbf{p}}\right) = \delta \end{cases} \qquad (8)$$

em que $\overline{\overline{\mathbf{W}}}_p$ é uma matriz diagonal (M x M) cujo j-ésimo elemento é

$$W_{p_j} = \frac{1}{p_j^2 + \varepsilon} . \tag{9}$$

onde ε é um número positivo da ordem de 10^{-7}. Veja que estamos considerando que a relação funcional entre a i-ésima observação geofísica e os parâmetros a serem estimados (vetor $\overline{\mathbf{p}}$) é uma função linear em relação aos parâmetros, que em notação matricial é

$$\overline{\mathbf{y}} = \overline{\overline{\mathbf{A}}}\ \overline{\mathbf{p}} . \tag{10}$$

Então a matriz de sensibilidade $\overline{\overline{\mathbf{A}}}\ (N \times M)$ não depende dos parâmetros. A princípio o nosso problema inverso geofísico é linear. Agora vamos analisar o funcional estabilizante a ser minimizado

$$\min \ \mathrm{H}\left(\overline{\mathbf{p}}\right) = \min \ \left\| \overline{\overline{\mathbf{W}}}_p^{1/2}\ \overline{\mathbf{p}} \right\|_2^2 \tag{11}$$

Veja que estamos minimizando a norma Euclideana do vetor $\overline{\overline{\mathbf{W}}}_p^{1/2}\overline{\mathbf{p}}$, cujo j-ésimo elemento é

$$. W_{p_j}^{1/2} \ p_j = \frac{1}{\left(p_j^2 + \varepsilon\right)^{1/2}} p_j$$

Derivando este elemento em relação ao j-ésimo termo temos

$$\frac{\partial}{\partial p_j}\left\{W_{p_j}^{1/2}\, p_j\right\} = \frac{\partial}{\partial p_j}\left\{\left(p_j^2+\varepsilon\right)^{-1/2} p_j\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial p_j}\left\{W_{p_j}^{1/2}\, p_j\right\} = -\frac{1}{2}\left(p_j^2+\varepsilon\right)^{-3/2}(2\,p_j)\,p_j + \left(p_j^2+\varepsilon\right)^{-1/2}$$

$$\frac{\partial}{\partial p_j}\left\{W_{p_j}^{1/2}\, p_j\right\} = \frac{1}{\left(p_j^2+\varepsilon\right)^{1/2}} - \frac{p_j^2}{\left(p_j^2+\varepsilon\right)^{-3/2}}$$

Como podemos verificar a derivada da informação a priori introduzida NÃO é uma constante. É uma função dos parâmetros como mostra a equação acima. Logo nós estamos diante de uma função não linear. Rigorosamente, o nosso problema inverso vinculado (8) é um problema não linear. No entanto, os autores formularam este problema inverso como um problema linear iterativo reponderado (reweighted least-squares minimization). Matematicamente, o problema que resolvemos iterativamente é o problema linear vinculado de

$$\begin{cases} \min\ H(\bar{\mathbf{p}}) = \min\left\{\left(\bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{p}}^{\mathbf{o}}\right)^{\mathbf{T}} \overline{\overline{\mathbf{W}}}_p \left(\bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{p}}^{\mathbf{o}}\right)\right\} \\ \text{sujeito a}\left(\bar{\mathbf{y}}^{\mathbf{o}} - \overline{\overline{\mathbf{A}}}\,\bar{\mathbf{p}}\right)^{\mathbf{T}}\left(\bar{\mathbf{y}}^{\mathbf{o}} - \overline{\overline{\mathbf{A}}}\,\bar{\mathbf{p}}\right) = \delta \end{cases} \qquad (12)$$

em que $\overline{\overline{\mathbf{W}}}_p$ e $\bar{\mathbf{p}}^{\mathbf{o}}$ serão considerados constantes em cada iteração (i.e., não dependentes do vetor de parâmetros). Este problema vinculado (12) pode ser resolvido via Multiplicadores de Lagrange. Então a função não vinculada a ser minimizada pode ser escrita como

$$\text{Min}\left\{\Gamma(\bar{\mathbf{p}})\right\} = \text{Min}\left\{\frac{1}{\lambda}\left(\bar{\mathbf{y}}^{\mathbf{o}} - \bar{\bar{\mathbf{A}}}\,\bar{\mathbf{p}}\right)^{\mathbf{T}}\left(\bar{\mathbf{y}}^{\mathbf{o}} - \bar{\bar{\mathbf{A}}}\,\bar{\mathbf{p}}\right) - \delta + \left(\bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{p}}^{\mathbf{o}}\right)^{\mathbf{T}}\bar{\bar{\mathbf{W}}}_p\left(\bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{p}}^{\mathbf{o}}\right)\right\}, \quad (13)$$

Vamos considerar que a matriz $\bar{\bar{\mathbf{W}}}_p$ é uma matriz constante (i.e. é uma matriz que não depende dos parâmetros) e o vetor $\bar{\mathbf{p}}^{\mathbf{o}}$ também não é função dos parâmetros, sob estas considerações a solução da equação (13) é obtida tomando o gradiente da função $\Gamma(\bar{\mathbf{p}})$ e igualando o resultado ao vetor nulo:

$$\nabla_{\mathrm{p}}\left\{\Gamma(\bar{\mathbf{p}})\right\} = \nabla_{\mathrm{p}}\left\{\left(\bar{\mathbf{y}}^{\mathbf{o}} - \bar{\bar{\mathbf{A}}}\,\bar{\mathbf{p}}\right)^{\mathbf{T}}\left(\bar{\mathbf{y}}^{\mathbf{o}} - \bar{\bar{\mathbf{A}}}\,\bar{\mathbf{p}}\right) - \delta\right\} + \lambda\nabla_{\mathrm{p}}\left\{\left(\bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{p}}^{\mathbf{o}}\right)^{\mathbf{T}}\bar{\bar{\mathbf{W}}}_p\left(\bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{p}}^{\mathbf{o}}\right)\right\}$$

Calculando os gradientes e igualando o resultado ao vetor nulo temos:

$$2\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}}\bar{\bar{\mathbf{A}}}\,\tilde{\bar{\mathbf{p}}} - 2\,\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}}\bar{\mathbf{y}}^{\mathbf{o}} + 2\lambda\,\bar{\bar{\mathbf{W}}}_p\tilde{\bar{\mathbf{p}}} + 2\lambda\,\bar{\bar{\mathbf{W}}}_p\bar{\mathbf{p}}^{\mathbf{o}} = \bar{\mathbf{0}}$$

$$\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}}\bar{\bar{\mathbf{A}}}\,\tilde{\bar{\mathbf{p}}} + \lambda\,\bar{\bar{\mathbf{W}}}_p\tilde{\bar{\mathbf{p}}} - \lambda\,\bar{\bar{\mathbf{W}}}_p\bar{\mathbf{p}}^{\mathbf{o}} = \bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}}\bar{\mathbf{y}}^{\mathbf{o}}$$

Vamos somar nos dois lados da equação o termo $-\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}}\bar{\bar{\mathbf{A}}}\bar{\mathbf{p}}^{\mathbf{o}}$ então teremos:

$$\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}}\bar{\bar{\mathbf{A}}}\,\tilde{\bar{\mathbf{p}}} - \bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}}\bar{\bar{\mathbf{A}}}\bar{\mathbf{p}}^{\mathbf{o}} + \lambda\,\bar{\bar{\mathbf{W}}}_p\tilde{\bar{\mathbf{p}}} - \lambda\,\bar{\bar{\mathbf{W}}}_p\bar{\mathbf{p}}^{\mathbf{o}} = \bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}}\bar{\mathbf{y}}^{\mathbf{o}} - \bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}}\bar{\bar{\mathbf{A}}}\bar{\mathbf{p}}^{\mathbf{o}}$$

$$\left[\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}}\bar{\bar{\mathbf{A}}} + \lambda\,\bar{\bar{\mathbf{W}}}_p\right]\left(\tilde{\bar{\mathbf{p}}} - \bar{\mathbf{p}}^{\mathbf{o}}\right) = \bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}}\left(\bar{\mathbf{y}}^{\mathbf{o}} - \bar{\bar{\mathbf{A}}}\bar{\mathbf{p}}^{\mathbf{o}}\right)$$

$$\left(\tilde{\bar{\mathbf{p}}} - \bar{\mathbf{p}}^{\mathbf{o}}\right) = \left[\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}}\bar{\bar{\mathbf{A}}} + \lambda\,\bar{\bar{\mathbf{W}}}_p\right]^{-1}\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}}\left(\bar{\mathbf{y}}^{\mathbf{o}} - \bar{\bar{\mathbf{A}}}\bar{\mathbf{p}}^{\mathbf{o}}\right)$$

$$\tilde{\bar{\mathbf{p}}} = \bar{\mathbf{p}}^{\mathbf{o}} + \left[\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}}\bar{\bar{\mathbf{A}}} + \lambda\,\bar{\bar{\mathbf{W}}}_p\right]^{-1}\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}}\left(\bar{\mathbf{y}}^{\mathbf{o}} - \bar{\bar{\mathbf{A}}}\bar{\mathbf{p}}^{\mathbf{o}}\right) \quad (14)$$

Lembre-se que a matriz de peso $\bar{\bar{\mathbf{W}}}_p$ foi considerada, por simplificação, uma matriz diagonal com elementos constantes (não dependentes dos parâmetros). No entanto, mostramos anteriormente que a matriz $\bar{\bar{\mathbf{W}}}_p$ não é constante, logo é função dos parâmetros ($\overline{\mathbf{p}}$). Desta forma a solução será estimada em um processo iterativo, em que na iteração K+1 estimaremos:

$$\tilde{\overline{\mathbf{p}}}^{(k+1)} = \overline{\mathbf{p}}^{(k)} + \left[\overline{\overline{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}} \overline{\overline{\mathbf{A}}} + \lambda \ \overline{\overline{\mathbf{W}}}_p^{(k)} \right]^{-1} \overline{\overline{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}} \left(\overline{\mathbf{y}}^{\mathbf{o}} - \overline{\overline{\mathbf{A}}}\,\overline{\mathbf{p}}^{(k)} \right) \quad (15)$$

Usando a identidade $\overline{\overline{\mathbf{C}}}\left(\overline{\overline{\mathbf{D}}}\,\overline{\overline{\mathbf{C}}} + \overline{\overline{\mathbf{I}}}_n\right)^{-1} = \left(\overline{\overline{\mathbf{C}}}\,\overline{\overline{\mathbf{D}}} + \overline{\overline{\mathbf{I}}}_m\right)^{-1}\overline{\overline{\mathbf{C}}}$ em que sendo $\overline{\overline{\mathbf{C}}}$ uma matriz com dimensão M x N e $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$ uma matriz com dimensão N x M, ambas não singulares (invertíveis) temos que a equação (15) pode ser reescrita como

$$\tilde{\overline{\mathbf{p}}}^{(k+1)} = \overline{\mathbf{p}}^{(k)} + \left[\left(\overline{\overline{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}} \overline{\overline{\mathbf{A}}} \frac{1}{\lambda} \overline{\overline{\mathbf{W}}}_p^{(k)-1} + \overline{\overline{\mathbf{I}}}_{\mathrm{M}} \right) \lambda \ \overline{\overline{\mathbf{W}}}_p^{(k)} \right]^{-1} \overline{\overline{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}} \left(\overline{\mathbf{y}}^{\mathbf{o}} - \overline{\overline{\mathbf{A}}}\,\overline{\mathbf{p}}^{(k)} \right)$$

$$\tilde{\overline{\mathbf{p}}}^{(k+1)} = \overline{\mathbf{p}}^{(k)} + \frac{1}{\lambda} \overline{\overline{\mathbf{W}}}_p^{(k)-1} \left[\overline{\overline{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}} \overline{\overline{\mathbf{A}}} \frac{1}{\lambda} \overline{\overline{\mathbf{W}}}_p^{(k)-1} + \overline{\overline{\mathbf{I}}}_{\mathrm{M}} \right]^{-1} \overline{\overline{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}} \left(\overline{\mathbf{y}}^{\mathbf{o}} - \overline{\overline{\mathbf{A}}}\,\overline{\mathbf{p}}^{(k)} \right) \quad (16)$$

Vamos chamar:

$\overline{\overline{\mathbf{C}}} = \overline{\overline{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}}$ e

$\overline{\overline{\mathbf{D}}} = \overline{\overline{\mathbf{A}}}\left(\frac{1}{\lambda}\overline{\overline{\mathbf{W}}}_p^{(k)-1}\right).$

Agora vamos usar a identidade $\overline{\overline{\mathbf{C}}}\left(\overline{\overline{\mathbf{D}}}\,\overline{\overline{\mathbf{C}}} + \overline{\overline{\mathbf{I}}}_n\right)^{-1} = \left(\overline{\overline{\mathbf{C}}}\,\overline{\overline{\mathbf{D}}} + \overline{\overline{\mathbf{I}}}_m\right)^{-1}\overline{\overline{\mathbf{C}}}$ na equação (16)

$$\tilde{\overline{\mathbf{p}}}^{(k+1)} = \overline{\mathbf{p}}^{(k)} + \frac{1}{\lambda} \overline{\overline{\mathbf{W}}}_p^{(k)-1} \ \overline{\overline{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}} \left[\overline{\overline{\mathbf{A}}} \frac{1}{\lambda} \overline{\overline{\mathbf{W}}}_p^{(k)-1} \overline{\overline{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}} + \overline{\overline{\mathbf{I}}}_{\mathrm{N}} \right]^{-1} \left(\overline{\mathbf{y}}^{\mathbf{o}} - \overline{\overline{\mathbf{A}}}\,\overline{\mathbf{p}}^{(k)} \right)$$

Colocando o termo $\frac{1}{\lambda}$ para dentro do termo a ser invertido temos:

$$\tilde{\overline{\mathbf{p}}}^{(k+1)} = \overline{\mathbf{p}}^{(k)} + \overline{\overline{\mathbf{W}}}_p^{(k)-1} \overline{\overline{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}} \left[\left(\overline{\overline{\mathbf{A}}} \frac{1}{\lambda} \overline{\overline{\mathbf{W}}}_p^{(k)-1} \overline{\overline{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}} + \overline{\overline{\mathbf{I}}}_{\mathrm{N}} \right) \lambda \right]^{-1} \left(\overline{\mathbf{y}}^{\mathbf{o}} - \overline{\overline{\mathbf{A}}}\,\overline{\mathbf{p}}^{(k)} \right)$$

$$\tilde{\overline{\mathbf{p}}}^{(k+1)} = \overline{\mathbf{p}}^{(k)} + \overline{\overline{\mathbf{W}}}_p^{(k)-1}\overline{\overline{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}}\left[\overline{\overline{\mathbf{A}}}\,\overline{\overline{\mathbf{W}}}_p^{(k)-1}\overline{\overline{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}} + \lambda\,\overline{\overline{\mathbf{I}}}_{\mathrm{N}}\right]^{-1}(\overline{\mathbf{y}}^{\mathbf{o}} - \overline{\overline{\mathbf{A}}}\,\overline{\mathbf{p}}^{(k)}) \qquad (17)$$

O estimador de Inversão compacta [equação (17)] usa na iteração k = 0 $\overline{\overline{\mathbf{W}}}_p = \overline{\overline{\mathbf{I}}}_M$ e

$\overline{\mathbf{p}}^{\mathbf{o}} = \mathbf{0}$. Com isto o estimador (17) no primeiro passo (em que k = 0) reduz-se a:

$$\tilde{\overline{\mathbf{p}}}^{(1)} = \overline{\overline{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}}\left[\overline{\overline{\mathbf{A}}}\;\overline{\overline{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}} + \lambda\;\overline{\overline{\mathbf{I}}}_{\mathrm{N}}\right]^{-1}\overline{\mathbf{y}}^{\mathbf{o}} \qquad (18)$$

Veja que a inversão compacta, parte do estimador de Ridge Regression (regularizador de Tikhonov de ordem zero), onde λ é um escalar não negativo. Quanto maior o valor de λ, o menor a norma Euclideana de $\tilde{\overline{\mathbf{p}}}^{(1)}$. Então, o parâmetro estimado é iterativamente atualizado por

$$\tilde{\overline{\mathbf{p}}}^{(\mathrm{k}+1)} = \tilde{\overline{\mathbf{p}}}^{(k)} + \Delta\tilde{\overline{\mathbf{p}}}^{(k)} \qquad (19)$$

em que

$$\Delta\tilde{\overline{\mathbf{p}}}^{(k)} = \overline{\overline{\mathbf{W}}}_p^{(k)-1}\overline{\overline{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}}\left[\overline{\overline{\mathbf{A}}}\,\overline{\overline{\mathbf{W}}}_p^{(k)-1}\overline{\overline{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}} + \lambda\,\overline{\overline{\mathbf{I}}}_{\mathrm{N}}\right]^{-1}(\overline{\mathbf{y}}^{\mathbf{o}} - \overline{\overline{\mathbf{A}}}\,\overline{\mathbf{p}}^{(k)}) \qquad (20)$$

Para evitar que o volume colapse em um único bloco com densidade extremamente alta, é necessário impor um limite superior e um limite inferior as estimativas das densidades. Estes limites são impostos da seguinte forma. Na k-ésima iteração, os blocos cujas densidade estimadas foram acima do limite superior (ou inferior) o peso da matriz $\overline{\overline{\mathbf{W}}}_p$, correspondente a tais blocos, i.e. os elementos da matriz $\overline{\overline{\mathbf{W}}}_p$, ao invés de serem calculados via equação (9) serão atribuídos valores muito elevados para garantir que $\tilde{p}_{\mathrm{j}}^{(k+1)} \approx \tilde{p}_{\mathrm{j}}^{(k)}$ para tais blocos (i.e, se atribuirmos um valor extremamente grande para $W_{p\,\mathrm{j}}^{(k)}$ estamos forçando $\Delta\tilde{p}_{\mathrm{j}}^{(k)} \to 0$ para garantir a minimização do funcional $H(\bar{\mathbf{p}})$). Além disso, neste caso, o j-ésimo elemento de $\hat{\mathbf{p}}^{(k)}$ (equação 19) é substituído pelo limite de densidade violado (limite inferior ou superior) .

Desse modo, haverá a tendência do algoritmo buscar uma fonte homogênea com densidade igual ao limite superior introduzido no algoritmo.

Assim alem da informação de MENOR VOLUME, o método introduz as informações sobre: HOMOGENEIDADE e VALOR DA PROPRIEDADE FÍSICA.

Reconstituição Compacta (Guillen and Menichetti, 1984)

O estimador que apresentarei agora introduz uma informação a priori qualitativa de CONCENTRAÇÃO DA FONTE ANÔMALA EM TORNO DE UM EIXO (Guillen and Menichetti, 1984). Similarmente estes autores presumiram que os parâmetros são propriedades físicas da subsuperfície, por exemplo, a densidade e o problema inverso consiste estimar a variação espacial da densidade a partir dos dados gravimétricos, presumindo-se como simplificação que a nossa subsuperfície foi discretizada em M bloquinhos (Figura 2) e o conhecimento a priori sobre direção (eixo) de concentração de fonte.

Matematicamente, a informação a priori sobre concentração de fontes em torno de eixo será introduzida através do mesmo problema vinculado acima estabelecido, i.e.,

$$\begin{cases} \min\ H(\bar{\mathbf{p}}) = \min \left\{ \left(\bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{p}}^{\mathbf{o}}\right)^{\mathbf{T}} \overline{\overline{\mathbf{W}}}_p \left(\bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{p}}^{\mathbf{o}}\right) \right\} \\ \text{sujeito a} \left(\bar{\mathbf{y}}^{\mathbf{o}} - \overline{\overline{\mathbf{A}}}\,\bar{\mathbf{p}}\right)^{\mathbf{T}} \left(\bar{\mathbf{y}}^{\mathbf{o}} - \overline{\overline{\mathbf{A}}}\,\bar{\mathbf{p}}\right) = \delta \end{cases} \qquad (21)$$

em que $\overline{\overline{\mathbf{W}}}_p$ é uma matriz diagonal (M x M) cujo j-ésimo elemento é

$$W_{p\,j} = \frac{(d_j^2 + k_j^2)\,v_j}{\left|p_j\right| + \varepsilon}\,. \qquad (22)$$

onde ε é um número positivo da ordem de 10^{-7}, v_j é o volume da j-ésima célula (ou bloco), d_j é a distância do centro da j-ésima célula ao eixo (informação a priori introduzida) e k_j é uma constante que iremos discutir a seguir .

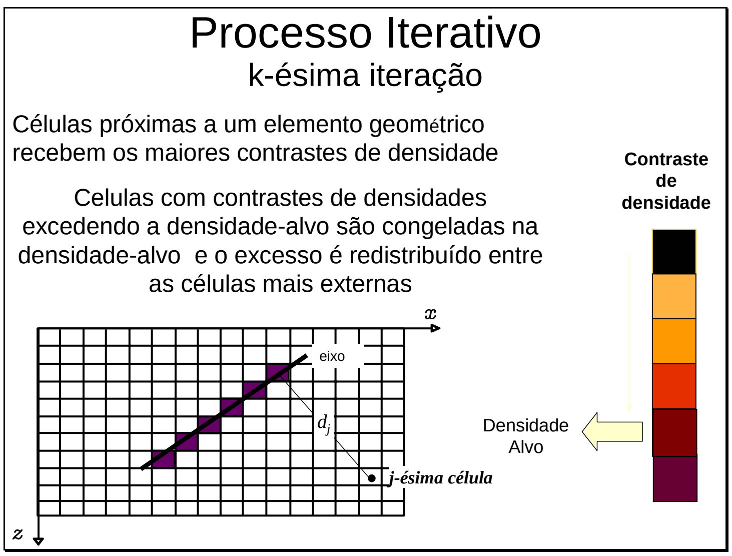

Figura 2

Interpretação do funcional $\mathrm{H}(\overline{\mathbf{p}})$ **a ser minimizado**

Considerando que $\overline{\mathbf{p}}^{\mathbf{o}} = \overline{\mathbf{0}}$,equação (21), veja que temos que minimizar o funcional $\mathrm{H}(\overline{\mathbf{p}})$ dado por:

$$\min \quad \mathrm{H}\left(\overline{\mathbf{p}}\right) = \min \quad \left\{\overline{\mathbf{p}}^{\mathbf{T}}\, \overline{\overline{\mathbf{W}}}_p\, \overline{\mathbf{p}}\right\} \qquad (23)$$

Considerando a matriz $\overline{\overline{\mathbf{W}}}_p$ definida na equação (22), a minimização do funcional (23) é equivalente a minimizar

$$\mathrm{H}(\overline{\mathbf{p}}) = \sum_{j=1}^{M} W_{p\,j}\, p_j^2 \qquad (24)$$

$$\mathrm{H}(\overline{\mathbf{p}}) = \sum_{j=1}^{M} p_j^2 \frac{(d_j^2 + k_j^2)\ v_j}{\left|p_j\right| + \varepsilon} \begin{cases} 0, \quad \text{se } p_j = 0 \\ \left|p_j\right|(d_j^2 + k_j^2)\ v_j, \quad \text{se } p_j \neq 0 \end{cases} \qquad (25)$$

A constante k_j é escolhida de modo que seja igual ao momento de inércia em relação ao eixo dado. Minimizar $H(\mathbf{p})$ é equivalente a encontrar um fonte compacta (com o menor número de parâmetros não nulos, i.e, com menor número de blocos com propriedade física diferente de zero) e que também tenha o menor momento de inércia em relação ao eixo dado. Desse modo, a solução tenderão a apresentar uma concentração da propriedade física no entorno do eixo.

As mesmas observações sobre o processo iterativo e a introdução de limites sobre a propriedade física, feitas no caso da inversão compacta, são válidas aqui também. Assim além de introduzir informações sobre compacidade da fonte e de homogeneidade (com o valor da propriedade física igual ao limite superior estabelecido), este método introduz informação a priori sobre direção preferencial de concentração da propriedade física.

Outros estimadores que exploram a reconstituição compacta

Barbosa and Silva (1994) generalizaram a metodologia de Guillen e Menichetti (1983) para admitir a concentração de fontes no entorno de múltiplos eixos e pontos.

A adaptação do método de Last and Kubik (1983) para o caso 3D gravimétrico e magnético foi desenvolvido por Portniaguine and Zhdanov (1999) e (2000), respectivamente. Portniaguine and Zhdanov (1999) usaram o mesmo functional estabilizante originalmente desenvolvido por Last and Kubik (1983) para inversão gravimétrica compacta 2D e atribuíram um novo nome para este método (focusing inversion method).

Portniaguine and Zhdanov (2000) explicitamente estabeleceram que usaram um funcional estabilizante similar aquele desenvolvido por last and Kubik (1983), referindo-se a este functional como um "funcional estabilizante de mínimo suporte (MS)". Enfatizo que a principal diferença entre a abordagem de Portniaguine and Zhdanov (1999) usando o funcional MS e aquele desenvolvido por Last and Kubik (1983) é a implementação computacional do algoritmo. Por outro lado, ressalto que um dos resultados interessantes obtidos por Portniaguine and Zhdanov (1999) foi a prova que o funcional estabilizantes introduzido por Last and Kubik (1983) pode ser considerado como um estabilizador de regularização de Tikhonov (veja Appendix A on Portniaguine and Zhdanov, 1999).

Referências

Barbosa, V. C. F., and Silva, J. B. C, 1994, Generalized compact gravity inversion: Geophysics, **59**, 57-68.

Guillen, A., and Menichetti, V., 1984, Gravity and magnetic inversion with minimization of a specific functional: Geophysics, **49** , 1354-1360.

Last, B. J., and Kubik, K., 1983, Compact gravity inversion: Geophysics, **48** , 713-721

Portniaguine, O. and Zhdanov, M. S., 1999, Focusing geophysical inversion images: Geophysics, **64**, 874-887.

Portniaguine, O. and Zhdanov, M. S., 2000, 3-D magnetic inversion with data compression and image focusing: Geophysics, **67**, 1532-1541.