

Лабораторна робота 2

ЧИСЛОВІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ.

Завдання: знайти розв'язок звичайного диференціального рівняння аналітично і за допомогою метода Рунге-Кутти. Порівняти аналітичний та наближений результати. Визначити порядок точності формули методу.

При виконанні роботи дозволено використовувати бібліотеки SymPy та SciPy.

Вимоги до виконання роботи

1. Напишіть код для розв'язування звичайного диференціального рівняння у формі $y' = f(x, y)$ з початковою умовою $y(x_0) = y_0$ методом Рунге-Кутти 2-го порядку. Ваш код повинен містити такі параметри: x_0 , x_n - початкове та кінцеве значення незалежної змінної відповідно; y_0 - початкове значення шуканої функції, h - розмір кроку розбиття відрізка $[x_0, x_n]$.
2. Перевірте, чи задовольняє наведений у вашому варіанті загальний розв'язок відповідне диференціальне рівняння. Визначте частинний аналітичний розв'язок рівняння, що відповідає початковій умові вашого варіанту.
3. Побудуйте таблицю значень аналітичного та наближеного розв'язків рівняння на відрізку $[x_0, x_n]$ з кроком $h = 0.1$.
4. Дослідіть, як впливає величина кроку h на точність розв'язку задачі. Для цього побудуйте таблицю значень аналітичного та наближеного розв'язків у точці x_n при різних значеннях $h : 0.1, 0.05, 0.025, 0.01$. Зробіть висновки.
5. Побудуйте графіки залежності фактичної та теоретичної (аналітичний вираз для оцінки похибки) похибок розв'язку у точці x_n від величини кроку h . На основі графіків поясніть характер отриманої залежності, визначте порядок похибки формули Рунге – Кутти відносно кроку h та порівняйте його з теоретичним значенням.
6. ^{3 pts} (Бонус) Виконайте завдання 1 – 5 для методу Рунге-Кутти 4-го порядку. Зробіть порівняльний аналіз методів.

Контрольні запитання

1. ^{0.5 pts} Що являє собою загальний і частинний розв'язки диференціального рівняння?
2. ^{0.5 pts} В якому вигляді знаходиться числовий розв'язок задачі Коші?
3. ^{0.5 pts} Що таке порядок точності методу?
4. ^{1.5 pts} Зробіть порівняльний аналіз методів Ейлера, Тейлора та Рунге-Кутти однакових порядків. У чому полягають їх переваги та недоліки один відносно одного?

Варіанти індивідуальних завдань

Варіант	Диференціальне рівняння	x_0	y_0	x_n	Аналітичний розв'язок
1	$y' = \frac{y-3}{x(3x+1)}$	0.3	0.7	1.3	$y = \frac{Cx}{3x+1} + 3$
2	$y' = 2xe^{x^2-y}$	0	1	1	$y = \ln(e^{x^2} + C)$
3	$y' = \frac{y}{x} \left(\ln \frac{y}{x} + 1 \right)$	1	1.1	2	$y = xe^{Cx}$
4	$y' = y + e^x$	-1	-1.5	0	$y = (x+C)e^x$
5	$y' = y - e^{-x}$	-1	1.38	0	$y = Ce^x + \frac{e^{-x}}{2}$
6	$y' = 2xy + 2x^3$	0	-0.8	1	$y = Ce^{x^2} - x^2 - 1$
7	$y' = -2xy + xe^{-x^2}$	-1.5	0.1	-0.5	$y = \left(\frac{x^2}{2} + C \right) e^{-x^2}$
8	$y' = -\frac{y}{x} + 3x$	0.1	1	1.1	$y = x^2 + \frac{C}{x}$