

Лабораторна робота 1

ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ДАНИХ. ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИЙ ПОЛІНОМ ЛАГРАНЖА

Завдання: апроксимувати функцію $f(x)$ поліномом Лагранжа, використовуючи глобальну та кускову інтерполяції. Дослідити величину похибки наближення в залежності від числа вузлів.

Вимоги до виконання роботи

1. Запрограмуйте мовою Python побудову інтерполяційного поліному Лагранжа $L(x)$ довільного степеню.
2. Для побудови поліноміального наближення оберіть функцію $f(x)$ згідно з вашим варіантом. Оберіть самостійно межі інтервалу інтерполяції $[a, b]$, на якому функція $f(x)$ є неперервною та обмеженою.
3. Зафіксуйте на $[a, b]$ деяку кількість рівновіддалених вузлів $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$: $x_0 = a, x_n = b, x_i = x_0 + ih \ (i = \overline{1, n-1})$, де $h = \frac{b-a}{n}$. Почніть з невеликої кількості вузлів ($n < 5$) та передбачте у програмі можливість призначати інші значення n та x_i . Обчисліть у вузлах x_i значення функції $y_i = f(x_i)$.
4. Виведіть на екран графіки функції $f(x)$ та поліному $L(x)$, побудованого на вузлах $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ (для побудови графіків ви можете використати бібліотеку Matplotlib). Окремо побудуйте графік похибки інтерполяції $f(x) - L(x)$ та зафіксуйте найбільшу абсолютну величину Δ_n відхилення інтерполяційного поліному від функції (дефект наближення).
5. Побудуйте кусково-лінійну інтерполяцію на вузлах $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ та побудуйте графіки функції $f(x)$ та інтерполяційної ламаної $g(x)$. Окремо побудуйте графік похибки інтерполяції $f(x) - g(x)$ та зафіксуйте дефект наближення Δ_1 - найбільшу абсолютну величину відхилення апроксимуючої ламаної від функції.
6. Збільшуючи поступово число вузлів n до 10, 15, 20, дослідіть залежність дефектів наближення Δ_1 та Δ_n від кількості вузлів. Поясніть закономірності, що спостерігаються. Чи прямує Δ до нуля, якщо кількість точок n зростає? Для зручності аналізу побудуйте таблицю значень Δ_1 та Δ_n в залежності від кількості вузлів n

n	Δ_n	Δ_1
4		
8		
...		

7. Екстраполуйте значення функції $f(x)$ на відрізки $[b, 2b-a]$ та $[2a-b, a]$. Виведіть на екран графіки на відрізку $[2a-b, 2b-a]$ функції $f(x)$ та поліному $L(x)$, побудованого у п. 4. Побудуйте графіки похибок екстраполяції $f(x) - L(x)$ на відрізках $[b, 2b-a]$ та $[2a-b, a]$, зафіксуйте її найбільшу абсолютну величину та порівняйте з Δ_n .

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що являє собою задача поліноміальної інтерполяції? Опишіть загальну постановку такої задачі. Скільки розв'язків вона має?
2. Що таке похибка інтерполяції?
3. Чим відрізняється глобальна інтерполяція від кускової?
4. Що являє собою екстраполяція?

ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

Варіант 1. $f(x) = \exp(2x^3 + 3x^2 - 5)$;

Варіант 2. $f(x) = \sin(\cos x)$;

Варіант 3. $f(x) = x^2 \exp(-x^2)$;

Варіант 4. $f(x) = \exp(\sin x)$;

Варіант 5. $f(x) = x \sin x - \cos x$;

Варіант 6. $f(x) = \ln(x^4 - 2x^2 + 3)$;

Варіант 7. $f(x) = \exp(x) \sin(x^3)$;

Варіант 8. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.