

Решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

Написать программу для решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на отрезке $[a, b]$:

$$y'' = f(x, y, y') \quad (1)$$

с начальными условиями:

$$y(a) = q_0, \quad y'(a) = q_1. \quad (2)$$

1. В выражении для $f(x, y, y')$ положить $n = m = 1$.
2. Свести решение задачи Коши для дифференциального уравнения второго порядка к решению задачи Коши для системы двух дифференциальных уравнений первого порядка.
3. Реализовать следующие методы:
 - метод Эйлера;
 - метод Эйлера с пересчетом;
 - метод Рунге-Кутты второго порядка;
 - метод Рунге-Кутты четвертого порядка;
 - метод Адамса (явная схема третьего порядка).
4. При отладке и тестировании программы использовать отрезок $[0, 1]$, начальные условия выбирать из диапазона $-5 \leq q_0, q_1 \leq 5$.
5. Постоянный шаг сетки h для каждого метода определить в ходе вычислительных экспериментов с использованием теоретических оценок и практических способов оценки погрешности.
6. Вычислить абсолютное и относительное отклонение численного решения, полученного на сетке с шагом h от решений, полученных этим же методом на сетках с шагом $2h$ и $h/2$; использовать нормы векторов $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_\infty$ отдельно для y_h и y'_h . Результаты вычислений для всех методов для удобства анализа и сравнения оформить в виде одной таблицы.
7. Визуализировать полученные численные решения: построить отдельно рисунки для $y_h(x)$ и $y'_h(x)$, на каждом рисунке по пять кривых, соответствующих указанным выше методам.

1. $f(x, y, y') = (y')^n e^x + y^m x^2 + \sin x$;
2. $f(x, y, y') = (y')^n \operatorname{tg} x + y^m (x^3 - 1) + x + 2$;
3. $f(x, y, y') = (y')^n \ln(x+1) + y^m \sqrt{x} + e^x - 1$;
4. $f(x, y, y') = (y')^n x^2 + y^m \operatorname{tg} x + (x-1)^2$;
5. $f(x, y, y') = (y')^n (x^2 + 2) + y^m \ln(x+1) + \sin(x-1)$;
6. $f(x, y, y') = (y')^n \sqrt{x} + y^m e^{x+1} + \cos x$;
7. $f(x, y, y') = (y')^n \cos x + y^m x^3 + \operatorname{tg} x$;
8. $f(x, y, y') = (y')^n \sin x + y^m x^4 + e^{x-1}$;
9. $f(x, y, y') = (y')^n e^{x-1} + y^m \sin x + x^3$;
10. $f(x, y, y') = (y')^n x^3 + y^m \cos x + \operatorname{tg}(x+1)$;
11. $f(x, y, y') = (y')^n e^{x+1} + y^m \sin(x-1) + \sqrt{x}$;
12. $f(x, y, y') = (y')^n \sin x^2 + y^m e^{x-1} + \operatorname{tg} x$;
13. $f(x, y, y') = (y')^n \cos x + y^m \sqrt{x+1} + x^2 - 1$;
14. $f(x, y, y') = (y')^n x^2 + y^m \ln(x+2) + e^{x-1}$;
15. $f(x, y, y') = (y')^n \sin x + y^m \operatorname{tg} x + x^3$;
16. $f(x, y, y') = (y')^n e^{x+2} + y^m \sin x + \operatorname{tg}(x+1)$;
17. $f(x, y, y') = (y')^n \cos x + y^m e^{x-1} + \sin x$;
18. $f(x, y, y') = (y')^n \sqrt{x} + y^m x^2 + \sin x$;
19. $f(x, y, y') = (y')^n \ln(x+2) + y^m e^x + x^3$;
20. $f(x, y, y') = (y')^n \sin x + y^m \ln(x+1) + \operatorname{tg} x$.