

Prelucrarea semnalelor

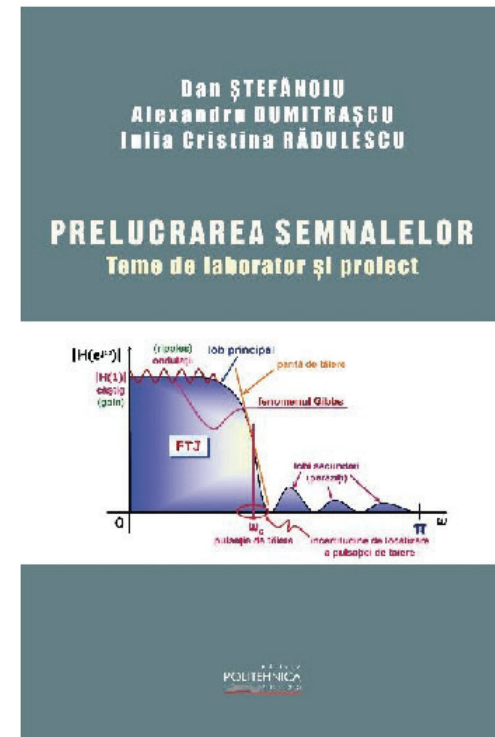
Laborator 2 - Transformata Fourier

<https://curs.upb.ro>

Profesor Dan ȘTEFĂNOIU
dan.stefanoiu@upb.ro

Conferențiar Alexandru DUMITRAȘCU
alexandru.dumitrascu@upb.ro

Șef de lucrări Vasilică VOINEA
vasilica.voinea@upb.ro



Semnale utilizate

În afară de semnalele precizate în Laboratorul 1, vor fi utilizate și semnale de pe platforma Moodle <https://curs.upb.ro>, enumerate în Tabelul 2.1.

Tabelul 2.1 Fișiere suplimentare utilizate în cadrul Laboratorului 2

Nume fișier	Conținut	Frecvența de eșantionare
lynx.m	Număr de râși vânați	1 an
sunspot.dat	Număr de pete solare	1 an

Obiective

Utilizarea Transformatei Fourier (TF) a semnalelor discrete. Studiul spectrelor unor semnale naturale sau generate artificial și extragerea unor informații referitoare la proprietățile semnalelor respective.

Suport teoretic

Definiții și proprietăți de bază

Definiție Transformata Fourier

Transformata Fourier (TF) a unui semnal discret x este funcția $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$X(\omega) = \mathcal{F}(x)(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n] e^{-j\omega n}, \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

unde $\omega \in \mathbb{R}$ se numește pulsație normalizată, măsurată în radiani

Amplitudine și fază

TF X este o funcție complexă și se poate exprima prin amplitudinea $|X|$ și faza $\arg(X)$

- semnale deterministe : $|X|^2$ se mai numește și spectru al semnalului x
- semnale nedeterministe : TF se aplică secvenței de auto-corelație și nu semnalului în sine (pentru a împiedica zgomotul alb aditiv să se transfere spectrului). În acest caz, TF coincide cu spectrul semnalului (faza este nulă) și se mai numește densitate spectrală de putere

Perioada

TF are perioada egală cu $2\pi \Rightarrow$ reprezentarea se poate restrânge la banda $[-\pi, +\pi]$

Definire

Dacă semnalul x este stabil (absolut sumabil), atunci TF are valori definite pentru orice pulsație normalizată $\omega \in \mathbb{R}$. Seria va converge uniform către o funcție continuă în ω .

Unele semnale de energie finită (dar nu toate) admit TF aproape peste tot (apt).

Energia unui semnal discret :

$$\mathcal{E}(x) = \|x\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x[n]|^2. \quad (2.2)$$

Dacă x este un semnal de energie finită, atunci TF este definită aproape peste tot. Mai precis, fie următorul semnal frecvențial parțial :

$$X_N(\omega) = \sum_{n=-N}^N x[n]e^{-j\omega n}, \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (2.3)$$

unde N este un număr natural arbitrar fixat.

Atunci :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{+\pi} |X(\omega) - X_N(\omega)|^2 d\omega = 0, \quad (2.4)$$

ceea ce înseamnă că energia erorii de aproximare a lui X prin X_N tinde la zero, chiar dacă eroarea nu se anulează neapărat peste tot. În acest caz :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} X_N \stackrel{\text{apt}}{=} X. \quad (2.5)$$

Inversabilitatea TF

TF inversă, care asociază unui semnal frecvențial X semnalul (temporal) x (având-o ca TF chiar pe X) are următoarea expresie :

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(\omega) e^{+j\omega n} d\omega, \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (2.6)$$

Simetrii ale TF pentru semnale reale

Proprietăți de simetrie ale TF pentru semnale reale :

$$\left[\begin{array}{l} X(-\omega) = \overline{X(\omega)} \\ |X(-\omega)| = |X(\omega)| \\ \arg(X)(-\omega) = -\arg(X)(\omega), \forall \omega \in \mathbb{R} \cdot \\ \operatorname{Re}(X)(-\omega) = \operatorname{Re}(X)(\omega) \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Conservarea energiei (M.A. Parseval)

TF conservă energia până la o constantă multiplicativă independentă de semnale (Conservarea energiei - Parseval) :

$$\mathcal{E}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |X(\omega)|^2 d\omega. \quad (2.8)$$

TF pentru semnale armonice elementare complexe

Semnalul armonic elementar complex $x[n] = e^{j\omega_0 n}, \forall n \in \mathbb{Z}$, cu $\omega_0 \in [-\pi, +\pi]$ nu este nici stabil și nici de energie finită, dar i se poate totuși asocia o TF (Teoria distribuțiilor-Laurent Schwartz) :

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_0(\omega - \omega_0 + 2k\pi), \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (2.9)$$

unde $\delta_0(\cdot)$ este impulsul Dirac centrat în origine.

Semnalul armonic elementar complex are un spectru nenul într-o singură frecvență (în care se concentrează toată energia sa). Un spectru de acest tip se numește și *spectru de linii* (una singură în cazul de față).

Densitatea spectrală de putere, periodograma

Densitatea spectrală de putere, periodograma se poate defini în două moduri ((2.10) și (2.11)) :

$$\Phi_x(\omega) = \mathcal{F}(r_x)(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} r_x[k] e^{-j\omega k}, \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (2.10)$$

$$\Phi_x(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \left| \sum_{n=-N}^N x[n] e^{-j\omega n} \right|^2, \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (2.11)$$

Estimarea cu ajutorul operației de trunchiere :

$$\hat{\Phi}_x(\omega) = \frac{1}{2N+1} \left| \sum_{n=-N}^N x[n] e^{-j\omega n} \right|^2, \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (2.12)$$

Teorema *Wiener-Kintchine* demonstrează că cele două definiții sunt echivalente.

Pentru semnale cu suport finit, de exemplu $\overline{0, N-1}$, densitatea spectrală de putere se mai numește și periodogramă :

$$\hat{\Phi}_x(\omega) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\omega n} \right|^2 = \frac{1}{N} |X(\omega)|^2, \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (2.13)$$

Ghid MATLAB

Transformata Fourier

Transformata Fourier a unui semnal x de suport $\gg n=0:M-1$; se poate calcula prin :

$\gg X=x*\exp(-j*n'*w);$

$\gg X=freqz(x,1,w);$

$\gg X = \text{fft}(x);$

unde $\gg w = 0 : pas : \pi$ este grila de frecvențe, de exemplu cu $pas=0.01$.

Amplitudine și fază

Amplitudinea (spectrul) :

$\gg \text{plot}(w, \text{abs}(X));$

Energia spectrală este concentrată într-o vecinătate îngustă în jurul originii. Pentru ca liniile spectrale de putere mai mică ce corespund frecvențelor medii și înalte să poată fi vizualizate, spectrul se reprezintă în dB :

$$\left|X(\omega)\right|_{dB} = 20\lg \left|X(\omega)\right| = 10\lg \left|X(\omega)\right|^2, \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (2.14)$$

Faza :

$\gg \text{plot}(w, \text{angle}(X));$

Tema 1 (TF a unei sinusoide complexe cu suport finit)

Fie $x[n] = e^{j\omega_0 n}, \forall n \in \overline{0, N-1}$ o sinusoidă complexă de frecvență precizată, având suport finit. (Pentru teste, alegeți, de exemplu, $\omega_0 = \pi/8$ și N suficient de mare pentru ca suportul să conțină cel puțin 5 perioade ale sinusoidei.)

- a. Arătați că TF a sinusoidei are următoarea expresie :

$$X(\omega) = \frac{e^{-j(\omega-\omega_0)N/2} \sin \frac{(\omega-\omega_0)N}{2}}{e^{-j(\omega-\omega_0)/2} \sin \frac{(\omega-\omega_0)}{2}}, \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (2.15)$$

Observând că spectrul are următoarea expresie (derivată din (2.15)) :

$$|X(\omega)| = \left| \frac{\sin \frac{(\omega-\omega_0)N}{2}}{\sin \frac{(\omega-\omega_0)}{2}} \right|, \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (2.16)$$

determinați punctul de maxim al acestuia și indicați valoarea maximă. Interpretați rezultatul obținut.

- b. Trasați graficul spectrului (2.16) cu ajutorul funcției **freqz**, pe o grilă de frecvențe ce acoperă intervalul $[-\pi, +\pi]$. Observați că deși graficul are un vârf pronunțat, spectrul nu conține doar o linie, conform relației (2.9). Care credeți că este explicația pentru acest fenomen ?
- c. Se verifică grafic egalitatea $|X(\omega_0)| = N$? Dacă da, vi se pare o proprietate normală ? Dacă nu, care credeți că este cauza ?

Tema 2 (TF a unei sinusoide reale cu suport finit)

Considerați acum semnalul $x[n] = \cos(\omega_0 n + \varphi)$, $\forall n \in \overline{0, N-1}$, cu ω_0 ales ca mai sus și $\varphi \in [0, 2\pi]$.

- a. Trasați graficul spectrului semnalului pe o grilă de frecvențe ce acoperă intervalul $[-\pi, +\pi]$. Observați că graficul acestuia este simetric față de axa verticală, așa cum sugerează relațiile (2.7).
- b. Justificați forma graficului ținând seama de formula lui Euler :

$$\cos \alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}. \quad (2.17)$$

- c. Alegeți mai multe valori ale lui φ și observați ce se schimbă în graficul spectrului. Oferiți toate explicațiile pe care le considerați plauzibile pentru acest fenomen.

Tema 3 (TF a două sinusoide reale cu suport finit, însumate)

Considerați suma a două sinusoide reale :

$$x[n] = \cos(\omega_1 n) + \cos(\omega_2 n), \forall n \in \overline{0, N-1}, \quad (2.18)$$

cu $\omega_1, \omega_2 \in [0, \pi]$ și N suficient de mare, astfel încât suportul să includă cel puțin 5 perioade ale semnalului. Alegeți ω_1 suficient de departe de ω_2 , de exemplu $\omega_1 = \pi/8$ și $\omega_2 = \pi/3$.

- Trasați graficul semnalului x pe suportul desemnat. Care este perioada acestuia ?
- Trasați graficul spectrului semnalului, pe o grilă de frecvențe ce acoperă intervalul $[-\pi, +\pi]$. Ați obținut desenul pe care îl așteptați ? Justificați răspunsul.
- Alegeți un semnal exprimat ca o sumă de două sinusoide cu amplitudini diferite și repetați operațiile de mai sus.
- Alegeți frecvențele sinusoidelor foarte aproape una de alta, de exemplu, astfel încât diferența lor să fie : $\omega_1 - \omega_2 = 0.01$. Repetați operațiile de mai sus și explicați fenomenele.

Tema 4 (TF și detectarea periodicității unui semnal)

Din exemplele de mai sus ați observat că TF are valori mari în frecvențele corespunzătoare componentelor sinusoidale ale unui semnal. Așadar, TF poate fi utilizată pentru analiza semnalelor (cvasi-periodice).

- a. Fișierul **sunspot.dat** conține numărul de pete solare înregistrate anual, timp de aproape 300 de ani. Cercetările din domeniu par a acredita ipoteza că activitatea solară are un ciclu de aproximativ 11 ani. Încărcați datele cu ajutorul funcției **load**, trasați graficul numărului de pete solare, apoi calculați TF a acestuia și găsiți frecvența corespunzătoare celui mai înalt vârf al ei (excluzând $\omega = 0$, care dă componenta continuă). Calculați perioada corespunzătoare acestei frecvențe ($T = 2\pi/\omega$) și verificați dacă are valoarea 11. Repetați aceste operații pentru durate mai scurte, de 50-100 de ani. Ce efect observabil are scăderea duratei semnalului?
- b. Repetați aceleași operații pentru datele din fișierul **lynx.m** (care trebuie rulat pentru încărcarea acestor date în MATLAB). Relația pradă-prădător este caracterizată de periodicitate (aici râsul joacă rol de pradă în raport cu omul, deși, prin natura sa, el este un prădător). (În pescuitul oceanic se petrec fenomene asemănătoare). Perioada oscilațiilor este însă specifică fiecărui ecosistem.
- c. Semnalul **xilo** este aproape periodic în partea lui finală. Extrageți eșantioanele de la 8.000 la 10.000 și repetați operațiile de mai sus. (Cei care sunt dotați cu ureche fină pot confirma rezultatul). Observați armonicile.

Tema 5 (Zgomot alb)

Zgomotul alb a fost definit în Laboratorul 1. Dispersia λ^2 din relația (1.28) este asociată cu puterea zgomotului. Din definiția (2.10) rezultă că, teoretic, densitatea spectrală de putere a zgomotului alb este constantă și egală chiar cu λ^2 . Folosind funcția **randn**, generați un pseudo-zgomot alb e de lungime N (de ordinul sutelor) și estimați Φ_e cu relația (2.13). Observați că graficul densității spectrale de putere are un aspect tipic, care nu se modifică măbind N în cadrul aceleiași realizări. Totuși, dacă se repetă operația pentru alte realizări ale zgomotului, se poate constata că nicio frecvență nu e favorizată (Comentariu : cele de mai sus nu pun în discuție nici corectitudinea formulei $\Phi_e(\omega) = \lambda^2$, nici calitatea generatorului **randn** ; explicația fundamentală rezidă în slaba calitate a periodogramei (2.13), ca estimator al densității spectrale de putere. Estimarea spectrală este un subcapitol al PS, care propune metode mult mai precise decât cea din spatele relației (2.13).

Tema 6 (Sinusoidă scufundată în zgomot alb)

Considerați procesul :

$$x[n] = \cos(\omega_0 n) + e[n], \forall n \in \overline{0, N-1}, \quad (2.19)$$

unde e desemnează un zgomot alb direct generat cu funcția **randn**. Ne propunem să determinăm pulsația ω_0 a sinusoidei, cu o anumită eroare. (Evident, se presupune că, în acest semnal, sinusoida este purtătoarea de informație, iar zgomotul o alterează).

- a. Generați o realizare a semnalului pentru N de ordinul sutelor. Trasați graficul semnalului și observați că este greu de estimat vizual o periodicitate a semnalului. Așadar, acest grafic oferă puțină informație referitoare la ω_0 .
- b. Calculați densitatea de putere spectrală ca în (2.13) și trasați graficul acesteia. Observați maximul din ω_0 . (Deoarece TF este o transformare liniară, în cazul semnalului (2.19), ea rezultă din suma TF ale celor două semnale componente. Deși spectrul nu mai verifică această proprietate, termenul încrucișat care se adaugă sumei celor două spectre este proporțional cu partea reală a TF aferente sinusoidei. Așadar, trebuie într-adevăr să existe un maxim în ω_0).

- c. Modificați semnalul adăugând zgomotului alb o amplitudine variabilă nenulă ($a \in \mathbb{R}^*$) :

$$x[n] = \cos(\omega_0 n) + a \cdot e[n], \forall n \in \overline{0, N-1}. \quad (2.20)$$

Alegeți mai multe valori pentru a și repetați operațiile de mai sus. Care ar fi valoarea maximă a amplitudinii a pentru care puteți determina ω_0 cu precizie suficientă ? (Această valoare maximă poate fi justificată cu mijloace de statistică matematică de nivel superior cunoștințelor predate la cursul de PS).

- d. Punctele anterioare (în special c.) au pus în evidență faptul că anumite caracteristici ale semnalelor nu pot fi determinate dacă puterea zgomotului care le corupe depășește o anumită valoare. În PS, există preocuparea de a determina raportul dintre puterea semnalului util distorsionat și cea a zgomotului care îl distorsionează, chiar dacă nu se cunoaște maniera de combinare a acestuia cu semnalul util. Acesta se numește *raport semnal-zgomot* SNR (*signal-to-noise ratio*) și poate fi definit astfel :

$$SNR \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{r_x[0]}{r_v[0]} \right|_{dB}, \quad (2.21)$$

unde v este zgomotul (nu neapărat alb), de regulă necunoscut. Observați că SNR se exprimă în dB. În cazul semnalului (2.20), partea utilă pură este reprezentată de sinusoidă. Folosind semnalul de la punctul c., trasați graficul SNR al acestuia pentru valori ale amplitudinii a între 0.01 și valoarea maximă găsită la punctul precedent (adică valoarea pentru care se mai poate determina ω_0 cu precizie suficientă din graficul densității spectrale). Comentați variația acestui grafic.