

Notatki do Analizy I R

Na podstawie wykładu głoszonoego przez prof. Sołtana w 2023 r.

red. Filip Baciak

November 2023

1 Wstęp

1.1 Relacje

Definicja 1.1. Relacja

Relacją R ze zbioru A do zbioru B nazywamy podzbiór iloczynu kartezjańskiego tych dwu zbiorów:

$$R \subseteq A \times B. \quad (1)$$

Jeśli $(x, y) \in R$ to piszemy xRy .

Przykłady relacji:

- Relacja równości $R \subseteq A \times A$, zdefiniowana:

$$R = \{(a, a) | a \in A\}. \quad (2)$$

- Na zbiorze \mathbb{N} mamy relację wewnętrzną (tj. będącą podzbiorem \mathbb{N}^2):

$$R = \{(n, m) | n \leq m\}. \quad (3)$$

Definicja 1.2. Relacja równoważności

Relacją równoważności nazywamy relację $R \subseteq A \times A$, spełniającą następujące aksjomaty:

1. Zwrotność:

$$\forall_{x \in A} : xRx. \quad (4)$$

2. Symetryczność:

$$\forall_{x, y \in A} : xRy \implies yRx. \quad (5)$$

3. Przechodność:

$$\forall_{x, y, z \in A} : xRy \wedge yRz \implies xRz. \quad (6)$$

Przykładem relacji równoważności jest relacja R_f zadana przez funkcję $f : A \rightarrow B$:

$$xR_f y \iff f(x) = f(y). \quad (7)$$

Definicja 1.3. Częściowy porządek

Częściowym porządkiem na zbiorze A nazywamy relację $R \subseteq A^2$ (którą oznaczamy \leq i piszemy $x \leq y$ zamiast xRy), jeśli ma następujące cechy:

1. Zwrotność:

$$\forall_{x \in A} : x \leq x. \quad (8)$$

2. Antysymetryczność:

$$\forall_{x, y \in A} : x \leq y \wedge y \leq x \implies x = y. \quad (9)$$

3. Przechodność:

$$\forall_{x, y, z \in A} : xRy \wedge yRz \implies xRz. \quad (10)$$

Zbiór parę (A, \leq) nazywamy zbiorem częściowo uporządkowanym.

Na przykład relacja wewnętrzna na zbiorze \mathbb{N}^2 zdefiniowana następująco:

$$(a, b) \leq (a', b') \iff a \leq a' \wedge b \leq b',$$

zadaje częściowy porządek nad \mathbb{N}^2 .

Definicja 1.4. Porządek liniowy

Porządek częściowy \leq nad A nazywamy **liniowym**, jeśli:

$$\forall_{x, y \in A} : x \leq y \vee x \leq y. \quad (11)$$

Zbiór z określonym porządkiem liniowym nazywamy **uporządkowanym liniowo**. Jeśli $x \leq y \wedge x \neq y$ to piszemy $x < y$.

Zauważmy, że porządek częściowy - jak sama nazwa wskazuje - niekoniecznie określa relację wielkości między każdymi dwoma elementami zbioru na którym jest określony. Tę własność ma dopiero porządek liniowy.

Definicja 1.5. Ograniczenia

Podzbiór $X \subseteq A$ zbioru uporządkowanego liniowo (A, \leq) nazywamy **ograniczonym z góry**, jeśli:

$$\exists_{u \in A} \forall_{x \in X} : x \leq u. \quad (12)$$

Podobnie definiujemy **ograniczenie z dołu**:

$$\exists_{l \in A} \forall_{x \in X} : l \leq x. \quad (13)$$

Elementy u i l nazywamy odpowiednio **ograniczeniem górnym** i **ograniczeniem dolnym**.

Definicja 1.6. Kresy górne i dolne

Kresem górnym podzbioru $X \subseteq A$ uporządkowanego (A, \leq) nazwiemy najmniejsze jego ograniczenie górne, to znaczy taką liczbę $b \in A$, że:

- b jest ograniczeniem górnym X ,
- jeśli l jest ograniczeniem górnym X , to $b \leq l$.

Podobnie - jako największe ograniczenie dolne - definiujemy **kres dolny**. Kres górny zbioru X oznaczamy $\sup X$, a kres dolny $\inf X$

Zauważmy, że w ogólności zbiór nie musi mieć kresu górnego lub dolnego, a jeśli go ma to kres nie musi być elementem tegoż zbioru.

1.2 Liczby rzeczywiste

Definicja 1.7. \mathbb{R}

Liczby rzeczywiste nazywamy zbiór \mathbb{R} z określonymi działaniami dodawania $+$ i mnożenia \cdot , wyróżnionymi, różnymi elementami 0 i 1 i określoną relacją porządku liniowego \leq - w skrócie $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ - taki że:

1. \mathbb{R} jest ciałem, tzn. spełnia:

(a) Zamkniętość dodawania i mnożenia:

$$\forall_{a,b \in \mathbb{R}} : a + b \in \mathbb{R} \wedge a \cdot b \in \mathbb{R}; \quad (14)$$

(b) 0 jest elementem neutralnym dodawania:

$$\forall_{a \in \mathbb{R}} : a + 0 = a; \quad (15)$$

(c) Istnieją elementy odwrotne względem dodawania:

$$\forall_{a \in \mathbb{R}} \exists_{-a \in \mathbb{R}} : a + (-a) = 0; \quad (16)$$

(d) Dodawanie jest łączne:

$$\forall_{a,b,c \in \mathbb{R}} : (a + b) + c = a + (b + c); \quad (17)$$

(e) Dodawanie jest przemienne:

$$\forall_{a,b \in \mathbb{R}} : a + b = b + a; \quad (18)$$

(f) 1 jest elementem neutralnym mnożenia:

$$\forall_{a \in \mathbb{R}} : a \cdot 1 = a; \quad (19)$$

(g) Mnożenie jest łączne:

$$\forall_{a,b,c \in \mathbb{R}} : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c); \quad (20)$$

(h) Mnożenie jest przemienne:

$$\forall_{a,b \in \mathbb{R}} : a \cdot b = b \cdot a; \quad (21)$$

(i) Istnieją elementy przeciwne względem mnożenia (z wyjątkiem 0):

$$\forall_{a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \exists_{a^{-1} \in \mathbb{R}} : a \cdot a^{-1} = 1; \quad (22)$$

(j) Dodawanie jest rozdzielne względem mnożenia:

$$\forall_{a,b,c \in \mathbb{R}} : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c. \quad (23)$$

2. Porządek liniowy \leq spełnia:

(a) Możliwość dodawania "stronami":

$$\forall_{a,b,t \in \mathbb{R}} : a \leq b \implies a + t \leq b + t; \quad (24)$$

(b) Mnożenie dodatnich zachowuje dodatniość

$$\forall_{a,b \in \mathbb{R}} : 0 < a \wedge 0 < b \implies 0 < a \cdot b. \quad (25)$$

3. \mathbb{R} jest zwarty, tj. każdy niepusty zbiór ograniczony z góry ma kres górny w \mathbb{R} .

Można podać konstrukcję ciała o podanych własnościach (np. konstrukcja Dedekina, konstrukcja Riemana) i dowieść, że z dokładnością do izomorfizmu istnieje tylko jedno takie ciało.

Twierdzenie 1.1. Własność Archimedesesa

$$\forall_{x>0,y \in \mathbb{R}} \exists_{n \in \mathbb{N}} : nx > y. \quad (26)$$

Dowód

Twierdzenia dowiedzimy nie wprost:

Niech $X = nx | n \in \mathbb{N}$ i założmy, że X jest ograniczony z góry przez y . Zatem posiada supremum: $\alpha = \sup X$. Wiemy, że $\alpha - x < \alpha$, więc nie może to być ograniczenie górne. Zatem:

$$\exists_{n_0 \in \mathbb{N}} : n_0 x > \alpha - x.$$

Ale wtedy:

$$X \ni (n_0 + 1)x > \alpha = \sup X.$$

Sprzeczność! Istotnie więc, zbiór $nx | n \in \mathbb{N}$ nie może być ograniczony przez żadną liczbę, co dowodzi tezy.

Twierdzenie 1.2. Gęstość \mathbb{Q} w \mathbb{R}

$$\forall_{x,y \in \mathbb{R}, x < y} \exists_{r \in \mathbb{Q}} : x < r < y. \quad (27)$$

Dowód

Skoro $y - x > 0$, to $\exists n \in \mathbb{N} : n(y - x) > 1$. Ponadto, skoro $1 > 0$, to $\exists_{m_1, m_2 \in \mathbb{N}} : m_1 > nx \wedge m_2 > -nx$. Zatem $-m_2 < nx < m_1$, tzn. nx leży pomiędzy dwiema liczbami całkowitymi. Istnieje więc takie $m \in \mathbb{Z}$, takie że:

$$m - 1 \leq nx < m.$$

Stąd już prosto:

$$nx < m \leq nx + 1 < ny,$$

$$x < \frac{m}{n} < y.$$

Na koniec krótka notka - zbiór $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, to jest liczby rzeczywiste z dołączonymi symbolami (nie liczbami!) plus i minus nieskończoności, nazywamy **rozszerzonymi liczbami rzeczywistymi**.

2 Ciągi rzeczywiste

2.1 Pojęcie ciągu i ogólne rezultaty

Definicja 2.1. Ciąg

Ciągiem elementów z zbioru X nazywamy funkcję:

$$a : \mathbb{N} \rightarrow X \quad (28)$$

i zamiast $a(n)$ piszemy a_n . Cały ciąg oznaczamy $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. My w szczególności zajmować się będziemy ciągami rzeczywistymi i zespolonymi.

W sekcji tej, o ile nie powiedziano inaczej, zakładamy, że wszystkie ciągi są rzeczywiste.

Definicja 2.2. ZBIEŻNOŚĆ CIĄGU

Ciąg rzeczywisty $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nazywamy zbieżnym do granicy g , jeśli:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq N_\varepsilon : |a_n - g| \leq \varepsilon. \quad (29)$$

Piszemy wtedy: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$ lub $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g$.

Ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nazywamy **ograniczonym**, jeśli:

$$\exists C \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq C. \quad (30)$$

Obserwacja 1. Obserwacja

Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.

Twierdzenie 2.1. Arytmetyka granic

Niech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będą ciągami rzeczywistymi, takimi, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Wtedy:

$$1. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a + b_n = a + b \quad (31)$$

$$2. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a \cdot b_n = a \cdot b \quad (32)$$

$$3. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |a|_n = |a| \quad (33)$$

4. Jeśli $b_n \neq 0$ DDD n (dla dostatecznie dużych n) i $b \neq 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \quad (34)$$

Dowód

W dowodach wszystkich tych twierdzeń chcemy dla dowolnego ε skonstruować takie N , że dla wszystkich $n \geq N$ różnica między wyrazami ciągu po lewej a granicą po prawej stronie jest mniejsza od ε . Pamiętajmy tutaj, że:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq M_\varepsilon : |a_n - a| \leq \varepsilon, \quad (35)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq K_\varepsilon : |b_n - b| \leq \varepsilon, \quad (36)$$

1. Mamy:

$$|a_n + b_n - a - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b|, \quad (37)$$

więc dla $n \geq N = \max\{M_{\frac{\varepsilon}{2}}, K_{\frac{\varepsilon}{2}}\}$:

$$|a_n + b_n - a - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad (38)$$

2.

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n| |b_n - b| + |b| |a_n - a|. \quad (39)$$

Ale $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ograniczony, więc $a_n \leq C$ i mamy:

$$|a_n b_n - ab| \leq |a_n| |b_n - b| + |b| |a_n - a| \leq (|C| + 1) |b_n - b| + (|b| + 1) |a_n - a|. \quad (40)$$

Zatem dla $n \geq \max\{M_{\frac{\varepsilon}{2(|b|+1)}}, K_{\frac{\varepsilon}{2(|C|+1)}}\}$:

$$|a_n b_n - ab| \leq (|C| + 1) \frac{\varepsilon}{2(|b| + 1)} + (|b| + 1) \frac{\varepsilon}{2(|b| + 1)} = \varepsilon. \quad (41)$$

Dodaliśmy tutaj 1 do $|C|$ i $|b|$, żeby uniknąć ewentualnego dzielenia przez 0.

3. Jeśli $a > 0$, to ciąg od pewnego miejsca musi być dodatni: $|a_n| = a_n$ dla $n > M_{|a|}$, więc dla $n > N = \max\{M_{|x|}, M_\varepsilon\}$:

$$||a_n| - a| = |a_n - a| < \varepsilon.$$

Podobnie, jeśli $a < 0$, to ciąg od pewnego miejsca jest ujemny i $|a_n| = -a_n$ dla $n > M_{|a|}$, więc dla $n > N = \max\{M_{|x|}, M_\varepsilon\}$:

$$||a_n| - a| = |-a_n - a| = |a_n - a| < \varepsilon.$$

Dla $a = 0$, mamy prosto:

$$|a_n| < \varepsilon \implies ||a_n|| < \varepsilon.$$

4. Zakładamy, że $b_n \neq 0$ DDD n , więc istnieje takie K_0 , że dla $n \geq K_0$ $b_n \neq 0$. Wtedy:

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| = \left| \frac{a_n b - a b_n}{b_n b} \right| = \left| \frac{a_n b - ab + ab - a b_n}{b_n b} \right| = \left| \frac{b(a_n - a) + a(b - b_n)}{b_n b} \right| \quad (42)$$

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| \leq \left| \frac{a_n - a}{b_n} \right| + \left| \frac{a}{b_n b} \right| |b_n - b| \leq \left| \frac{a_n - a}{b_n} \right| + \left(\left| \frac{a}{b_n b} \right| + 1 \right) |b_n - b| \quad (43)$$

Zauważmy, że dla $n \geq K_{\frac{1}{2}|b|}$ mamy $|b_n - b| \leq \frac{1}{2}|b|$, więc $\frac{1}{2}|b| \leq |b_n|$, przez co:

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| \leq \left| \frac{a_n - a}{b_n} \right| + \left(\left| \frac{a}{b_n b} \right| + 1 \right) |b_n - b| \leq \left| \frac{2}{b} \right| |a_n - a| + \left(\left| \frac{2a}{b} \right| + 1 \right) |b_n - b| \quad (44)$$

Ostatecznie dla $n > \max\{K_0, K_{\frac{1}{2}|b|}, K_{\frac{\varepsilon}{2(|\frac{2a}{b}|+1)}}, M_{\frac{\varepsilon}{4|b|}}\}$:

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| \leq \left| \frac{2}{b} \right| \frac{\varepsilon}{4|b|} + \left(\left| \frac{2a}{b} \right| + 1 \right) \frac{\varepsilon}{2(|\frac{2a}{b}|+1)} = \varepsilon. \quad (45)$$

Powiemy teraz o mocnym twierdzeniu, pozwalającym stwierdzić, czy ciąg ma granicę, bez jej wyznaczania.

Twierdzenie 2.2. Twierdzenie o ciągu monotonicznym i ograniczonym

Każdy ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.

- Jeśli ciąg jest niemalejący, to jest on zbieżny do supremum zbioru wyrazów ciągu.
- Jeśli ciąg jest nierosnący, to jest on zbieżny do infimum zbioru wyrazów ciągu.

Uwaga - dla ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ supremum jego wyrazów - tj. $\sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ - oznaczamy $\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$.

Analogicznie piszemy $\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$ dla infimum jego wyrazów.

Dowód

Załóżmy, że $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest niemalejący. Zbiór $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ jest ograniczony, zatem posiada supremum. Oznaczmy je g . Zatem dla każdego $\varepsilon > 0$ liczba $g - \varepsilon$ nie jest ograniczeniem górnym:

$$\exists m : g - \varepsilon \leq a_m \leq g. \quad (46)$$

Ale wtedy, z racji monotoniczności $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\forall n \geq m : g - \varepsilon \leq a_m \leq a_n \leq g \leq g + \varepsilon. \quad (47)$$

Czyli:

$$\forall n \geq m : |a_n - g| \leq \varepsilon, \quad (48)$$

co chcieliśmy pokazać. Dla $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nierosnącego dowód jest zupełnie analogiczny (można też rozważać zbieżność niemalejącego ciągu $(-a_n)_{n \in \mathbb{N}}$).

Twierdzenie 2.3. Twierdzenie o trzech ciągach

Niech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będą dwoma ciągami zbieżnymi do wspólnej granicy g . Wtedy, jeśli dla ciągu $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ istnieje takie N , że:

$$\forall n \geq N : a_n \leq b_n \leq c_n, \quad (49)$$

to $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g$.

Dowód

Dowód jest bardzo krótki. Dla dowolnego ε bierzemy takie M_ε , że $\forall_{n \geq M_\varepsilon} : |a_n - g| \leq \varepsilon$ i takie K_ε , że: $\forall_{n \geq K_\varepsilon} : |c_n - g| \leq \varepsilon$. Wtedy dla $n \geq \max\{N, M_\varepsilon, K_\varepsilon\}$:

$$g - \varepsilon \leq a_n \leq b_n \leq c_n \leq g + \varepsilon, \quad (50)$$

więc $|b_n - g| \leq \varepsilon$.

Definicja 2.3. Rozbieżność do $\pm\infty$

Powiemy, że ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest rozbieżny do $+\infty$, jeśli:

$$\forall_C \exists_{N_C \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq N_C} : a_n \geq C. \quad (51)$$

Analogicznie, powiemy, że ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest rozbieżny do $-\infty$, jeśli:

$$\forall_C \exists_{N_C \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq N_C} : a_n \leq C. \quad (52)$$

Mówimy też o "zbieżności" do $\pm\infty$, tj. zbieżności w zbiorze $\overline{\mathbb{R}}$

Obserwacja 2.

Ciąg monotoniczny, nieograniczony jest rozbieżny do $\pm\infty$.

Definicja 2.4. Podciąg

Podciągiem ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nazywamy ciąg $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, gdzie $n \ni k \mapsto n_k \in \mathbb{N}$ jest funkcją ściśle rosnącą.

Obserwacja 3.

Jeśli $a_n \rightarrow g$, to każdy podciąg $a_{n_k} \rightarrow g$

2.2 \limsup i \liminf

Założmy, że mamy dany ciąg liczb rzeczywistych $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Zdefiniujmy wtedy następujące dwa ciągi: $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oraz $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, takie że:

$$\alpha_n = \inf\{a_k \mid k \geq n\} \quad (53)$$

$$\beta_n = \sup\{a_k \mid k \geq n\} \quad (54)$$

Wtedy, $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem niemalejącym, co wynika z faktu, że:

$$\inf\{a_k \mid k \geq n+1\} \subseteq \inf\{a_k \mid k \geq n\}$$

Podobnie, $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem nierosnącym. Z tego wynika więc, że są to ciągi zbieżne w $\overline{\mathbb{R}}$. Mamy więc:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \sup \alpha_n, \quad (55)$$

gdyż $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ to ciąg nierosnący oraz podobnie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta = \inf \beta. \quad (56)$$

Definicja 2.5. Granice górne i dolne ciągu

Wielkość:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \{a_k \mid k \geq n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \sup \alpha_n \quad (57)$$

nazywamy **granica dolną** ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i oznaczamy $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$. Podobnie, wielkość:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \{a_k \mid k \geq n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \inf \beta_n \quad (58)$$

nazywamy **granica górną** ciągu i oznaczamy $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Twierdzenie 2.4. Bolzano-Weierstrassa I

Niech L będzie zbiorem punktów skupienia zbioru $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, tzn. takich liczb, dla których istnieje podciąg $((a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}})$ zbieżny do tej liczby:

$$L = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid \exists \text{ podciąg } (a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} : \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = x\}. \quad (59)$$

Wtedy:

$$1. \quad L \neq \emptyset \quad (60)$$

$$2. \quad \liminf a_n \in L \quad \wedge \quad \limsup a_n \in L \quad (61)$$

$$3. \quad \liminf a_n = \inf L \quad \wedge \quad \limsup a_n = \sup L \quad (62)$$

Dowód

TODO

Nietrudnym wnioskiem z tego twierdzenia jest następujące:

Twierdzenie 2.5. Kryterium zbieżności

Ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny do $a \in \overline{\mathbb{R}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\liminf a_n = \limsup a_n. \quad (63)$$

Dowód

\Rightarrow Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, to także każdy podciąg $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ dąży do a , więc $L = \{a\}$. Ale $\liminf a_n \in L$ i $\limsup a_n \in L$, więc:

$$\liminf a_n = a = \limsup a_n. \quad (64)$$

⇐ Oczywiście zachodzi nierówność:

$$\alpha_n \leq a_n \leq \beta_n. \quad (65)$$

Skoro mamy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \liminf a_n = \limsup a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n, \quad (66)$$

więc z twierdzenia o trzech ciągach mamy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf a_n = \limsup a_n. \quad (67)$$

Twierdzenie 2.6. Warunek Cauchy'ego

Niech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem rzeczywistym. Wtedy następujące warunki są równoważne:

1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R} \quad (68)$$

2.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M_\varepsilon \forall n, m \geq M_\varepsilon |a_n - a_m| \leq \varepsilon. \quad (69)$$

Jeśli ciąg spełnia ten warunek, mówimy, że spełnia warunek Cauchy'ego.

Sprawdzając warunek Cauchy'ego, możemy dowodzić zbieżności ciągu do granicy rzeczywistej bez wyznaczania tej granicy.

Dowód

1. \implies 2. Skoro $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zbieżny do $a \in \mathbb{R}$, to dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $N_{\frac{\varepsilon}{2}}$, że:

$$\forall n, m \geq N_{\frac{\varepsilon}{2}} : |a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} \wedge |a_m - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad (70)$$

ale wtedy:

$$|a_n - a_m| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad (71)$$

2. \implies 1. Zauważmy, że $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem ograniczonym. Istotnie, weźmy $\varepsilon = 1$:

$$\exists M_1 \forall n \geq M_1 : |a_n - a_{M_1}| \leq 1, \quad (72)$$

więc:

$$\min\{a_{M_1} - 1; a_k \mid k < M_1\} \leq a_n \leq \max\{a_{M_1} + 1; a_k \mid k < M_1\}. \quad (73)$$

Weźmy teraz dowolny $\varepsilon > 0$. Z ograniczoności $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wynika: $\alpha = \liminf a_n \in \mathbb{R}$ i $\beta = \limsup a_n \in \mathbb{R}$. Oznacza to, że:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A_\varepsilon \forall n \geq A_\varepsilon : |\alpha_n - \alpha| \leq \varepsilon, \quad (74)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists B_\varepsilon \forall n \geq B_\varepsilon : |\beta_n - \beta| \leq \varepsilon, \quad (75)$$

Zauważmy, że:

$$|\alpha - \beta| \leq |\alpha - \alpha_n| + |\beta - \beta_n| + |\alpha_n - \beta_n|. \quad (76)$$

Dwa pierwsze czynniki po prawej potrafimy ograniczyć, zbadajmy więc ostatni wyraz:

$$\begin{aligned} |\alpha_n - \beta_n| &\leq |\alpha_n - a_n| + |\beta_n - a_n| = |\inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\} - a_n| + |\sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\} - a_n| \\ &= \inf\{|a_m - a_n| \mid m \geq n\} + \sup\{|a_m - a_n| \mid m \geq n\}. \end{aligned} \quad (77)$$

Możemy teraz skorzystać z warunku Cauchy'ego i znaleźć takie $M_{\frac{\varepsilon}{6}}$, że:

$$\forall m \geq n \geq M_{\frac{\varepsilon}{6}} : |a_m - a_n| \leq \frac{\varepsilon}{6}. \quad (78)$$

Zatem dla $n \geq M_{\frac{\varepsilon}{6}}$:

$$\inf\{|a_m - a_n| \mid m \geq n\} \leq \frac{\varepsilon}{6} \quad (79)$$

$$\sup\{|a_m - a_n| \mid m \geq n\} \leq \frac{\varepsilon}{6} \quad (80)$$

Ostatecznie otrzymujemy dla $n \geq \max\{A_{\frac{\varepsilon}{3}}, B_{\frac{\varepsilon}{3}}, M_{\frac{\varepsilon}{6}}\}$:

$$|\alpha - \beta| \leq |\alpha - \alpha_n| + |\beta - \beta_n| + |\alpha_n - a_n| + |\beta_n - a_n| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \varepsilon. \quad (81)$$

Pokazaliśmy, że różnica $|\liminf a_n - \limsup a_n|$ jest mniejsza od dowolnej liczby dodatniej, zatem musi być równa 0. Oznacza to, że $\liminf a_n = \limsup a_n \in \mathbb{R}$, a więc - co udowodniliśmy już wcześniej - ciąg jest zbieżny do rzeczywistej granicy.

3 Szeregi liczbowe

3.1 Szeregi o wyrazach dodatnich

Założmy, że $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest szeregiem o wyrazach dodatnich ($a_n > 0$). Ostatnio zauważyliśmy, że:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sup_{\substack{F \subset \mathbb{N} \\ |F| < +\infty}} \sum_{n \in F} a_n.$$

Wynikają z tego następujące wnioski:

Twierdzenie 3.1.

1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \iff \exists C > 0 \forall F \subset \mathbb{N}, |F| < +\infty \sum_{n \in F} a_n \leq C$$

(Zbiór wszystkich sum elementów o indeksach pochodzących ze SKOŃCZONEGO podzbioru \mathbb{N} jest ograniczony)

2. Jeśli $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ jest bijekcją (permutacją indeksów), to:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Oznacza to, że zmiana kolejności sumowania nie wpływa na wynik.

3. Jeśli:

$$\mathbb{N} = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad (\text{jest to suma rozłączna, tj. } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ dla } i \neq j)$$

i:

$$S_i = \sum_{n \in A_i} a_n,$$

to:

$$\sum_{i=0}^{\infty} S_i = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Jest to grupowania (łączności i przemienności) dla szeregu.

Dowód wniosków

1. Ograniczoność sum po prawej jest oczywiście równoważne istnieniu skończonego ich supremum, co równe jest sumie po lewej.
2. σ zachowuje klasę skończonych podzbiorów i wyznacza bijekcję:

$$\sigma : 2^{\mathbb{N}} \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$$

$$\sigma(F) = \{\sigma(n) | n \in F\},$$

która zachowuje moc zbioru F i przeprowadza zbiory skończone na skończone. Zatem:

$$\left\{ \sum_{n \in F} a_n \mid F \subset \mathbb{N}, |F| < \infty \right\} = \left\{ \sum_{n \in \sigma(F)} a_n \mid F \subset \mathbb{N}, |F| < \infty \right\},$$

więc:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sup \left\{ \sum_{n \in F} a_n \mid F \in 2^{\mathbb{N}} \right\} = \sup \left\{ \sum_{n \in \sigma(F)} a_n \mid F \subset \mathbb{N}, |F| < \infty \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$$

3. a) Jeśli $\exists j : S_j = \infty$, to:

$$\sum_{i=1}^{\infty} S_i = \infty$$

i:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \geq \sum_{n \in A_j} a_n = \infty.$$

Stąd:

$$\sum_{i=1}^{\infty} S_i = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

- b) Niech $\forall i : S_i < \infty$. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i weźmy dowolny:

$$K \subset \mathbb{N}, \quad |K| < \infty.$$

Przypomnijmy:

$$\sum_{i=1}^{\infty} S_i = \sup_{\substack{K \subset \mathbb{N}, \\ |K| < \infty}} \sum_{j \in K} S_j.$$

Niech $K = \{i_1, i_2, \dots, i_l\}$ i wybierzmy:

$$C_1 \subseteq A_{i_1}, C_2 \subseteq A_{i_2}, \dots, C_l \subseteq A_{i_l},$$

takie, że:

$$\forall j: \sum_{n \in C_j} a_n \geq S_{i_j} - \frac{\varepsilon}{l},$$

co jest możliwe, gdyż S_{i_j} jest supremum sum po skończonych podzbiorach. Jeśli A_{i_j} jest skończony, możemy przyjąć $C_j = A_{i_j}$.

Wtedy:

$$\sum_{i \in K} S_i = S_{i_1} + S_{i_2} + \dots + S_{i_l} \leq \left(\sum_{n \in C_1} a_n + \frac{\varepsilon}{l} \right) + \left(\sum_{n \in C_2} a_n + \frac{\varepsilon}{l} \right) + \dots + \left(\sum_{n \in C_l} a_n + \frac{\varepsilon}{l} \right) = \varepsilon + \sum_{n \in \bigcup_{j=1}^l C_j} a_n.$$

NB: $\bigcup_{j=1}^l C_j$ jest zbiorem skończonym, więc:

$$\sum_{i \in K} S_i \leq \varepsilon + \sup_{\substack{F \subset \mathbb{N} \\ |F| < +\infty}} \sum_{n \in F} a_n = \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Rozumowanie to przeprowadziliśmy dla dowolnego K i ε , więc:

$$\sum_{i=1}^{\infty} S_i = \sup_{\substack{K \subset \mathbb{N} \\ |K| < \infty}} \sum_{i \in K} S_i \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

W drugą stronę, weźmy $F \subset \mathbb{N}$, $|F| < \infty$ i niech:

$$K = \{i \in \mathbb{N} \mid A_i \cap F \neq \emptyset\},$$

wtedy $|K| < \infty$, bo F jest skończony, a A_j są rozłączne. Wtedy mamy:

$$\sum_{n \in F} a_n = \sum_{i \in K} \sum_{n \in A_i \cap F} a_n \leq \sum_{i \in K} \sum_{n \in A_i} a_n = \sum_{i \in K} S_i.$$

Z tego:

$$\sum_{n \in F} a_n \leq \sum_{i \in K} S_i \leq \sup_{\substack{K \subset \mathbb{N} \\ |K| < \infty}} \sum_{i \in K} S_i = \sum_{i=1}^{\infty} S_i,$$

co zachodzi dla dowolnego F skończonego. Zatem:

$$\sup_{\substack{F \subset \mathbb{N} \\ |F| < \infty}} \sum_{n \in F} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{i=1}^{\infty} S_i.$$

Porównując dwie otrzymane nierówności, otrzymujemy tezę.

3.2 Szeregi o wyrazach dowolnych

W tej podsekcji rozważamy szeregi o dowolnych wyrazach zespolonych:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n, \quad z_n \in \mathbb{C}.$$

Twierdzenie 3.2. Kryterium zbieżności bezwzględnej

Jeśli następujący szereg jest zbieżny:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < +\infty$$

to i:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

jest zbieżny.

Dowód

Korzystamy z warunku Cauchy'ego dla szeregu modułów:

$$\forall \varepsilon \exists N_\varepsilon \forall n > m \geq N_\varepsilon : \left| \sum_{k=m+1}^n |z_k| \right| \leq \varepsilon,$$

ale:

$$\left| \sum_{k=m+1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |z_k|,$$

więc:

$$\forall \varepsilon \exists M_\varepsilon = N_\varepsilon \forall n > m \geq M_\varepsilon : \left| \sum_{k=m+1}^n z_k \right| \leq \varepsilon.$$

To dowodzi, że warunek Cauchy'ego zachodzi dla $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, zatem jest to szereg zbieżny.

Definicja 3.1. Zbieżność bezwzględna

- Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ nazywamy zbieżnym bezwzględnie, jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ jest zbieżny.
- Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny, ale $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ już nie, to szereg nazywamy zbieżnym warunkowo.

Dla szeregów o wyrazach dowolnych obowiązują inne kryteria zbieżności niż dla szeregów o wyrazach dodatnich. Jednym z nich, jest:

Twierdzenie 3.3. Kryterium Dirichleta

Założmy, że:

- Mamy ciągi:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad a_n \in \mathbb{C}$$
$$(b_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad b_n \in \mathbb{R}, \quad b_n \geq 0$$

- b_n zbiega monotonicznie do 0.
- Ciąg sum częściowych wyrazów (a_n) jest ograniczony:

$$\exists C \in \mathbb{R} \forall N \in \mathbb{N} : \left| \sum_{n=1}^N a_n \right| \leq C.$$

Wtedy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jest zbieżny.

Przykład - szeregi naprzemienne. Weźmy szereg postaci:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n,$$

gdzie $b_n \searrow 0$ (dąży monotonicznie z góry do 0). Szereg taki nazywamy szeregiem naprzemiennym. Z kryterium Dirichleta wynika, że każdy szereg takiej postaci jest zbieżny (co nazywa się czasem kryterium Leibniza). W szczególności:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln 2.$$

Dowód kryterium Dirichleta

Niech $\sum_{n=1}^N a_n = z_N$. Zauważmy, że (z_N) jest ciągiem ograniczonym. Zapiszmy sumy częściowe docelowego szeregu:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N a_n b_n &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_N b_N = z_1 b_1 + (z_2 - z_1) b_2 + \dots + (z_N - z_{N-1}) b_N = \\ &= z_1 (b_1 - b_2) + z_2 (b_2 - b_3) + \dots + z_{N-1} (b_{N-1} - b_N) + z_N b_N. \end{aligned}$$

Zauważmy, że wyraz $z_N b_N$ jest zbieżny do 0 (jako iloczyn czynnika ograniczonego i czynnika dążącego do 0). Zajmijmy się więc otrzymaną sumą. Zauważmy, że zachodzi:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |z_n (b_n - b_{n+1})| &= \sum_{n=1}^{\infty} |z_n| (b_n - b_{n+1}) \leq C \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) = \\ &= C \lim_{N \rightarrow \infty} (b_1 - b_{N+1}) = C b_1 < +\infty \end{aligned}$$

Zatem szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n(b_n - b_{n+1})$ jest zbieżny bezwzględnie, a więc i zbieżny. Z tego i z równości:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(b_n - b_{n+1}) + \lim_{n \rightarrow \infty} z_n b_n,$$

Wynika, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ musi być zbieżny.

Kolejnym kryterium zbieżności dla szeregów o wyrazach dowolnych jest prosto wynikające z kryterium Dirichleta tzw.:

Twierdzenie 3.4. Kryterium Abela

Jeśli:

- mamy ciągi:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad a_n \in \mathbb{C}$$

$$(b_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad b_n \in \mathbb{R}$$

- b_n jest monotoniczny i ograniczony,

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Wtedy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jest zbieżny.

Dowód

Oczywiście $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ istnieje. Wtedy:

$$\sum_{n=1}^N a_n b_n = \sum_{n=1}^N a_n(b_n - b) + b \sum_{n=1}^N a_n.$$

Szereg $b \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest oczywiście zbieżny na mocy założenia. Za to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(b_n - b)$ jest zbieżne na mocy kryterium Dirichleta, zauważmy bowiem, że:

$$\sum_{n=1}^N a_n(b_n - b) = \text{sign}(b_n - b) \sum_{n=1}^N a_n |b_n - b|,$$

ale $|b_n - b| \searrow 0$ na mocy założenia, a sumy częściowe $|\sum_{n=1}^N a_n|$ muszą być ograniczone, gdyż są zbieżne. Warunki kryterium Dirichleta są więc spełnione. Ostatecznie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(b_n - b) + b \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Wszystkie składniki po prawej są zbieżne, zatem szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ także musi być zbieżny.

Grupowanie składników Zajmijmy się teraz kwestią grupowania składników w szeregach o wyrazach dowolnych i kiedy taka operacja nie zmienia wartości szeregu. Prowadźmy jednak trochę notacji.

Definicja 3.2. Rozbicie na wyrazy dodatnie

Dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ definiujemy następujące ciągi:

- $a_n = \operatorname{Re}(z_n)$
- $b_n = \operatorname{Im}(z_n)$
- $a_n^+ = \max\{0, a_n\}$
- $a_n^- = -\min\{0, a_n\}$
- $b_n^+ = \max\{0, b_n\}$
- $b_n^- = -\min\{0, b_n\}$

Jasnym jest, że:

$$z_n = a_n^+ - a_n^- + i b_n^+ - i b_n^-$$

oraz:

$$0 \leq a_n^+, a_n^-, b_n^+, b_n^- \leq |z_n|.$$

Z ostatniej nierówności wynika (kryterium porównawcze), że jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ jest zbieżny, to i szereg

regi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\pm}, \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{\pm}$ muszą być zbieżne. Wtedy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- + i \sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ - i \sum_{n=1}^{\infty} b_n^-,$$

jako że:

$$\sum_{n=1}^N z_n = \sum_{n=1}^N a_n^+ - \sum_{n=1}^N a_n^- + i \sum_{n=1}^N b_n^+ - i \sum_{n=1}^N b_n^-,$$

Z tego wynika następujący wniosek:

Twierdzenie 3.5. Grupowanie szeregów zbieżnych bezwzględnie

Niech szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ będzie zbieżny bezwzględnie. Wtedy:

1. Jeśli $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ jest bijekcją (permutacją indeksów), to:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} z_n.$$

Oznacza to, że zmiana kolejności sumowania nie wpływa na wynik.

2. Jeśli:

$$\mathbb{N} = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} A_j$$

i:

$$S_j = \sum_{n \in A_j} z_n,$$

to $\sum_{j=1}^{\infty} S_j$ jest zbieżny bezwzględnie i:

$$\sum_{j=1}^{\infty} S_j = \sum_{n=1}^{\infty} z_n.$$

Są to prawa grupowania dla szeregów o wyrazach dowolnych, analogiczne do tych, które zachodzą dla szeregów o wyrazach dodatnich.

Dowód

1. Mamy następujące równości:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} z_{\sigma(n)} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}^- + i \sum_{n=1}^{\infty} b_{\sigma(n)}^+ - i \sum_{n=1}^{\infty} b_{\sigma(n)}^- = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- + i \sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ - i \sum_{n=1}^{\infty} b_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \end{aligned}$$

W 2 równości korzystamy z analogicznego prawa dla zbieżnych szeregów dodatnich.

Oczywiście, jako że $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny bezwzględnie, to mamy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |z_{\sigma(n)}|,$$

więc permutacja szeregu zbieżnego bezwzględnie jest także zbieżna bezwzględnie.

2. Mamy:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |S_j| = \sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{n \in A_j} z_n \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n \in A_j} |z_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < +\infty.$$

Widzimy więc, że $\sum_{j=1}^{\infty} S_j$ jest także zbieżny bezwzględnie. Jako że $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny bezwzględnie, więc tym bardziej jego podszeregi muszą być zbieżne bezwzględnie. Możemy więc zapisać:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N S_j &= \sum_{j=1}^N \sum_{n \in A_j} z_n = \sum_{j=1}^N \left(\sum_{n \in A_j} a_n^+ - \sum_{n \in A_j} a_n^- + i \sum_{n \in A_j} b_n^+ - i \sum_{n \in A_j} b_n^- \right) = \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{n \in A_j} a_n^+ - \sum_{j=1}^N \sum_{n \in A_j} a_n^- + i \sum_{j=1}^N \sum_{n \in A_j} b_n^+ - i \sum_{j=1}^N \sum_{n \in A_j} b_n^-. \end{aligned}$$

Każdy z szeregów po prawej stronie jest szeregiem zbieżnym o wyrazach dodatnich. Biorąc granicę $N \rightarrow \infty$ otrzymamy więc:

$$\sum_{j=1}^{\infty} S_j = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n \in A_j} a_n^+ - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n \in A_j} a_n^- + i \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n \in A_j} b_n^+ - i \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n \in A_j} b_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} z_n,$$

co wynika z odpowiednich twierdzeń dla szeregów dodatnich.

4 Przestrzenie metryczne

4.1 Podstawowe definicje. Otwartość i domkniętość

Zmienimy teraz temat, odchodząc od analizy zbieżności w liczbach zespolonych i rozpoczniemy rozważania o temacie znacznie bardziej ogólnym, mianowicie o przestrzeniach z metrykami, będących uogólnieniem znanego pojęcia odległości w \mathbb{C} .

Definicja 4.1. Metryka

Ustalmy X będące dowolnym niepustym zbiorem. Funkcję:

$$d : X \times X \rightarrow [0; +\infty[$$

nazywamy **metryką**, jeśli spełnia następujące aksjomaty:

1.

$$\forall_{x,y \in X} : d(x,y) = d(y,x),$$

2.

$$\forall_{x,y \in X} : d(x,y) = 0 \iff x = y,$$

3.

$$\forall_{x,y,z \in X} : d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$$

O metryce myśleć można, jako o funkcji zwracającej "odległość" między dwoma elementami w zbiorze X . Podane aksjomaty zapewniają, że nasza metryka spełniać będzie "zdroworozsądkowe" własności odległości. 1. nakłada warunek symetryczności na metrykę - odległość z x do y musi być równa odległości z y do x . 2. normalizuje metrykę, mówiąc, że punkt jest odległy o 0 od samego siebie i **tylko** od samego siebie. 3. to tak zwana **nierówność trójkąta** - dodając na drodze między dwoma punktami trzeci punkt nie można odległości skrócić.

Definicja 4.2. Przestrzeń metryczna

Parę (X, d) - gdzie X to niepusty zbiór, a $d : X \times X \rightarrow [0; +\infty[$ to metryka - nazywamy **przestrzenią metryczną**.

Przykłady Pokażemy parę przykładów przestrzeni metrycznych, aby dać pojęcie, jak mogą one wyglądać.

- $X = \mathbb{R}$ $d(x, y) = |x - y|$ - jest to odległość między dwiema liczbami rzeczywistymi, z której korzystaliśmy np. przy definicji granicy ciągu.
- $X = \mathbb{R}^v$, gdzie $v \in \mathbb{N}$ jest wymiarem przestrzeni,

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{n=1}^v |x_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Podstawiając za p różne wartości możemy otrzymać wiele alternatywnych metryk. Np. dla $p = 1$ otrzymujemy tzw. **metrykę Manhattanu**:

$$d_1(x, y) = \sum_{n=1}^v |x_n - y_n|.$$

Nazwa pochodzi od tego, że jest to odległość jaką trzeba pokonać między dwoma punktami, mogąc przemieszczać się tylko równolegle do osi współrzędnych - tak jak na Manhattanie, gdzie ulice są do się prostopadłe.

Dla $p = 2$ otrzymujemy znaną **odległość Euklidesową**:

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{n=1}^v (x_n - y_n)^2}.$$

- $X = \mathbb{R}^v$,

$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq n \leq v} |x_n - y_n|.$$

Jest to tak zwana **metryka maximum**. Indeks ∞ wziął się z faktu, że o d_∞ myśleć można o jako o granicy d_p dla $p \rightarrow \infty$, mamy bowiem:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^v a_n^p \right)^{\frac{1}{p}} = \max_{1 \leq n \leq v} a_n.$$

- Dla dowolnego zbioru X definiujemy **metrykę dyskretną**:

$$d(x, y) = \delta_{x,y} = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & x \neq y \end{cases}. \quad (82)$$

- Niech X będzie zbiorem funkcji klasy C^0 (tj, funkcji ciągłych) z $[0; 1]$ na \mathbb{C} . Wtedy za odległość między dwiema funkcjami przyjąć możemy:

$$d(f, g) = \sup_{x \in [0; 1]} |f(x) - g(x)|. \quad (83)$$

- Dla X takiego samego jak w poprzednim punkcie można określić także:

$$d_p(f, g) = \left(\int_0^1 |f(x) - g(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (84)$$

Definicja 4.3. Zbieżność w przestrzeni metrycznej

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną i niech $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem elementów z X . Powiemy, że $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny do $g \in X$, jeśli:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq N_\varepsilon : d(x_n, g) < \varepsilon, \quad (85)$$

co możemy alternatywnie zapisać, jako:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, g) = 0. \quad (86)$$

Oczywiście jeśli $x_n \rightarrow g$ i $x_n \rightarrow g'$, to $g = g'$ - co wynika z faktu, że jedynym elementem odległym o 0 od g jest g . Ponadto jeśli $x_n \rightarrow g$ to każdy podciąg $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ także dąży do g : $x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} g$.

Definicja 4.4. Równoważność metryk

Niech d i δ będą metrykami na X . Powiemy, że d i δ są równoważne, jeśli:

$$\exists C_1, C_2 \in \mathbb{R} : \forall x, y \in X : C_1 d(x, y) \leq \delta(x, y) \leq C_2 d(x, y). \quad (87)$$

Łatwo widać, że jest to relacja symetryczna, przechodnia i zwrotna.

Przykład Metryk d_p i d_∞ na \mathbb{R}^v są równoważne, albowiem:

$$d_\infty(x, y) = \max_i |x_i - y_i| \leq d_p(x, y) = \left(\sum_{n=1}^v |x_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (88)$$

Ponadto:

$$d_p(x, y)^p \leq v d_\infty(x, y)^p \implies d_p(x, y) \leq v^{\frac{1}{p}} d_\infty(x, y) \quad (89)$$

Wystarczy więc wziąć $C_1 = 1$ i $C_2 = v^{\frac{1}{p}}$.

Obserwacja 4.

Jeśli d i δ są równoważne, to $x_n \rightarrow g$ w $(X, d) \iff x_n \rightarrow g$ w (X, δ) .

Definicja 4.5. Warunek Cauchy'ego

Powiemy, że ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ spełnia **warunek Cauchy'ego** (i.e. że jest **ciągami Cauchy'ego**), jeśli:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall (m, n \geq N_\varepsilon) : d(x_m, x_n) \leq \varepsilon. \quad (90)$$

Definicja 4.6. Przestrzeń zupełna

Powiemy, że przestrzeń (X, d) jest **zupełna** jeśli każdy ciąg Cauchy'ego w tej przestrzeni jest zbieżny.

Zauważmy, że (\mathbb{R}, d_2) (czyli liczby rzeczywiste ze standardową metryką Euklidesową) to przestrzeń zupełna, co udowodniliśmy. (\mathbb{Q}, d_2) nie jest przestrzenią zupełną (gdyż np. ciąg kolejnych przybliżeń dziesiętnych $\sqrt{2}$ spełnia warunek Cauchy'ego, jednak nie ma w \mathbb{Q} granicy).

Definicja 4.7. Kule

Niech (X, d) - p-n metryczna. Wtedy **kulą (otwartą)** o środku $x_0 \in X$ i promieniu $r \in \mathbb{R}_+$ nazywamy zbiór:

$$\text{Ball}(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}. \quad (91)$$

Definicja 4.8. Punkty wewnętrzne

Niech (X, d) - p-n metryczna, $A \subseteq X$ i $a \in A$. Powiemy, że a jest **punktem wewnętrznym** A , jeśli:

$$\exists r > 0 : \text{Ball}(a, r) \subseteq A. \quad (92)$$

Widzimy więc, że jeśli a jest punktem wewnętrznym A , to znajduje się w A razem z pewną kulą wokół siebie - można potocznie sobie więc wyobrazić, że a nie może być na "brzegu" A .

Definicja 4.9. Zbiór otwarty

Powiemy, że A jest **otwarty** (w ustalonej p-n metrycznej (X, d)), jeśli każdy jego punkt jest punktem wewnętrznym:

$$\forall a \in A \exists r > 0 : \text{Ball}(a, r) \subseteq A. \quad (93)$$

Dla ustalonej przestrzeni metrycznej zdefiniujemy \mathcal{T} jako rodzinę wszystkich zbiorów otwartych w tej przestrzeni. Wprowadzimy też zapis:

$$U \underset{\text{otw.}}{\subseteq} X, \quad (94)$$

jeśli U jest otwartym podzbiorem X (i.e. jeśli $U \in \mathcal{T}$).

Twierdzenie 4.1. Właściwości \mathcal{T}

1. $\emptyset \in \mathcal{T}$ oraz $X \in \mathcal{T}$.
2. $U, V \in \mathcal{T} \implies U \cap V \in \mathcal{T}$. Inaczej mówiąc (rozszerzywszy łatwo twierdzenie za pomocą indukcji), skończony iloczyn zbiorów otwartych jest otwarty.

3. $\{U_i\}_{i \in I}$ - rodzina zbiorów otwartych. Wtedy

$$\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}. \quad (95)$$

Zauważmy, że nie zakładamy, że jest to skończona (ani nawet przeliczalna) rodzina.

Dowód

1. Prawdziwym jest zdanie, że dla każdego elementu należącego do \emptyset jest on punktem wewnętrznym. Ponadto:

$$\forall_{x \in X, r > 0} \text{Ball}(x, r) \subseteq X, \quad (96)$$

co wynika za samej definicji Ball.

2. Skoro U, V są otwarte, to dla każdego $x \in U \cap V$ istnieją r_1 i r_2 takie, że:

$$\text{Ball}(x, r_1) \in U, \quad \text{Ball}(x, r_2) \in V.$$

Wtedy jednak:

$$\text{Ball}(x, \min\{r_1, r_2\}) \in U, \quad \text{Ball}(x, \min\{r_1, r_2\}) \in V.$$

Wystarczy więc wziąć $r = \min\{r_1, r_2\}$

3. Dla każdego $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$ mamy $i \in I$ takie, że $x \in U_i$. Wtedy jednak istnieje takie r , że $\text{Ball}(x, r) \in U_i$, przeto $\text{Ball}(x, r) \in \bigcup_{i \in I} U_i$.

Twierdzenie 4.2.

Kula otwarta jest otwarta.

dowód

Istotnie, jeśli niech $y \in \text{Ball}(x, r)$. Wtedy $d(x, y) < r$. Zauważmy, że $\text{Ball}(y, r - d(x, y)) \subseteq \text{Ball}(x, r)$, bowiem jeśli $z \in \text{Ball}(y, r - d(x, y))$, to $d(z, y) < r - d(x, y)$, zatem:

$$d(z, x) < d(z, y) + d(y, x) < r,$$

czyli $z \in \text{Ball}(x, r)$.

Definicja 4.10. Punkt skupienia

Niech (X, d) - p-ń metryczna i $A \subseteq X$, wtedy punkt $x \in X$ nazwiemy **punktem skupienia** A , jeśli:

$$\forall_{r > 0} : \text{Ball}(x, r) \cap A \neq \emptyset. \quad (97)$$

Definicja 4.11. Zbiór domknięty

Zbiór A nazwiemy **domkniętym** jeśli zawiera wszystkie swoje punkty skupienia. To znaczy:

$$\forall_{x \in X} [\forall_{r>0} : \text{Ball}(x, r) \cap A \neq \emptyset \implies x \in A]. \quad (98)$$

Podobnie jak \mathcal{T} , zdefiniujemy \mathcal{F} jako rodzinę wszystkich zbiorów domkniętych w danej przestrzeni. Będziemy również pisać:

$$U \subseteq_{\text{domk.}} X, \quad (99)$$

jeśli U jest domkniętym podzbiorem X .

Definicja 4.12. Kula domknięta

Kulą domkniętą o środku $x_0 \in X$ i promieniu $r \in \mathbb{R}_+$ nazwiemy zbiór:

$$\overline{\text{Ball}}(x, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) \leq r\}. \quad (100)$$

Twierdzenie 4.3.

Kula domknięta jest domknięta.

Dowód

Niech $y \notin \overline{\text{Ball}}(x, r)$. Wtedy $d(y, x) > r$. Weźmy $R = d(y, x) - r > 0$. Wtedy $\text{Ball}(y, R) \cap \overline{\text{Ball}}(x, r) = \emptyset$. Albowiem, jeśli $z \in \text{Ball}(y, R)$, to $d(z, y) < d(y, x) - r$, zatem $d(x, z) \geq d(x, y) - d(z, y) > r$, czyli $z \notin \overline{\text{Ball}}(x, r)$.

Twierdzenie 4.4. Dopelnienie zbioru otwartego jest domknięte

Niech $A \subseteq X$. A jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy $X \setminus A$ jest domknięty.

Dowód

Mamy następujący ciąg równoważności:

$$(X \setminus A) \text{ - domknięty} \iff \quad (101)$$

$$\forall_{y \in (X \setminus A)} \exists_{r>0} : \text{Ball}(y, r) \cap (X \setminus A) = \emptyset \iff \quad (102)$$

$$\forall_{y \in A} \exists_{r>0} : \text{Ball}(y, r) \subseteq X \setminus (X \setminus A) = A \iff \quad (103)$$

$$A \text{ - otwarty} \quad (104)$$

Zauważmy, że istnieją zbiory jednocześnie domknięte i otwarte. Na przykład w każdej przestrzeni metrycznej są to \emptyset oraz cała przestrzeń. W \mathbb{R} są to jedynie takie zbiory. Za to w przestrzeni dyskretniej, wszystkie zbiory mają tę własność.

Twierdzenie 4.5.

Zbiór A jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy A jest sumą kul.

Dowód

\Rightarrow Możemy wybrać sumę rodziny generowanej w ten sposób, że każdemu elementowi przypisujemy kulę mu odpowiadającą, która należy do A :

$$\forall_{y \in A} \exists_{r(y) > 0} : \text{Ball}(y, r(y)) \subseteq A. \quad (105)$$

Zatem:

$$A = \bigcup_{y \in A} \{y\} \subseteq \bigcup_{y \in A} \text{Ball}(y, r(y)) \quad (106)$$

oraz:

$$\bigcup_{y \in A} \text{Ball}(y, r(y)) \subseteq A, \quad (107)$$

więc:

$$A = \bigcup_{y \in A} \text{Ball}(y, r(y)) \quad (108)$$

\Leftarrow W drugą stronę sprawa jest jasna - suma każdej rodziny kul (i.e. zbiorów otwartych) będzie otwarta.

Obserwacja 5. na temat \mathcal{F}

1. $\emptyset, X \in \mathcal{F}$.
2. $\mathcal{F} = \{X \setminus A \mid A \in \mathcal{T}\}$.
3. $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$. Inaczej mówiąc - skończony iloczyn zbiorów domkniętych jest domknięty.
4. $\{V_i\}_{i \in I}$ - rodzina zbiorów domkniętych. Wtedy

$$\bigcap_{i \in I} V_i \in \mathcal{T}. \quad (109)$$

Fakty te są oczywistą konsekwencją własności \mathcal{T} i prawa, które mówi, że dopełnienie zbioru otwartego jest domknięte.

Spójrzmy jeszcze na przykład, pokazujący, że w 3. własność ta zachodzi tylko dla sum skończonych:

$$]0, 1[= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right].$$

Definicja 4.13. Wnętrze i domknięcie

Niech $B \subseteq X$.

Wnętrznem zbioru B , oznaczanym B° , nazywamy zbiór wszystkich punktów wewnętrznych B .

Domknięciem zbioru B , oznaczanym \bar{B} , nazywamy zbiór punktów skupienia B .

Innymi słowy:

$$x \in B^\circ \iff \exists_r : \text{Ball}(x, r) \subseteq B. \quad (110)$$

$$x \in \bar{B} \iff \forall_r : \text{Ball}(x, r) \cap B \neq \emptyset. \quad (111)$$

Obserwacja 6.

$$B^\circ \subseteq B \subseteq \bar{B} \quad (112)$$

Obserwacja 7.

- B - otwarty $\iff B^\circ = B$.
- B - domknięty $\iff \bar{B} = B$.

Twierdzenie 4.6.

$$X \setminus \bar{B} = (X \setminus B)^\circ \quad (113)$$

lub

$$\bar{B} = X \setminus (X \setminus B)^\circ. \quad (114)$$

Dowód

$$x \in X \setminus \bar{B} \iff x \text{ nie jest punktem skupienia } B \iff \exists_r, \text{Ball}(x, r) \cap B = \emptyset \iff \exists_r, \text{Ball}(x, r) \cap B \subseteq X \setminus B \iff x \in (X \setminus B)^\circ.$$

Powiemy teraz o bardzo ważnym twierdzeniu pozwalającym utożsamić punkty skupienia z granicami ciągów ze zbioru.

Twierdzenie 4.7.

Niech $B \subseteq X$. Wtedy domknięcie B to zbiór granic ciągów z B , tj.:

$$\bar{B} = \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \mid (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \wedge \forall_n x_n \in B \right\}. \quad (115)$$

Dowód

\supseteq Dla każdego $x \in \bar{B}$ zdefiniujmy ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ następująco - niech x_n to dowolny element należący do $\text{Ball}(x, \frac{1}{n}) \cap B$ (jest to zbiór zawsze niepusty na mocy tego, że x jest punktem skupienia B). Oczywiście $x_n \rightarrow x$, gdyż $d(x_n, x) < \frac{1}{n} \rightarrow 0$.

\subseteq Odwrotnie, jeśli $x_n \rightarrow x$ i $\forall_n : x_n \in B$, to:

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{N_\varepsilon} \forall_{n \geq N_\varepsilon} : B \ni x_n \in \text{Ball}(x, \varepsilon) \implies \forall_{\varepsilon > 0} \text{Ball}(x, \varepsilon) \cap B \neq \emptyset, \quad (116)$$

skąd mamy $x \in \bar{B}$.

Definicja 4.14. Ograniczoność

Powiemy, że $B \subseteq X$ jest **ograniczony**, jeśli:

$$\exists_{x \in X, r > 0} : B \subseteq \text{Ball}(x, r). \quad (117)$$

Definicja 4.15. Gęstość

Powiemy, że $A \subseteq X$ jest **gęsty** w $B \subseteq X$, jeśli:

$$B \subseteq \bar{A}. \quad (118)$$

Uwaga! Mówiąc po prostu, że zbiór jest gęsty, mamy na myśli, że jest gęsty w X .

Przykład \mathbb{Q} jest gęsty w \mathbb{R} .

Definicja 4.16. Otoczenie

$A \subseteq X$ jest otoczeniem punktu $x \in X$, jeśli:

$$\exists_{U \subseteq X \atop \text{otw.}} : x \in U \subseteq A. \quad (119)$$

Warunek ten jest równoważny temu, że $x \in A^\circ$.

Dla danego punktu rodzinę wszystkich jego otoczeń oznaczamy będziemy $\mathcal{N}(x)$:

$$\mathcal{N}(x) = \{A \in \mathcal{P}(X) = 2^X \mid x \in A^\circ\}. \quad (120)$$

Twierdzenie 4.8.

Niech $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem elementów X . Wtedy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \iff \forall_{A \in \mathcal{N}(x)} \exists_{N_A \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq N_A} : x_n \in A. \quad (121)$$

Dowód

\Leftarrow Weźmy $A_\varepsilon = \text{Ball}(x, \varepsilon)$. Wtedy:

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{N_\varepsilon} \forall_{n \geq N_\varepsilon} : x_n \in \text{Ball}(x, \varepsilon) \implies d(x_n, x) < \varepsilon. \quad (122)$$

implies x_n zbiega do x , zatem:

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{N_\varepsilon} \forall_{n \geq N_\varepsilon} : d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Mamy też:

$$A \in \mathcal{N}(x) \implies \exists_\varepsilon : \text{Ball}(x, \varepsilon) \subseteq A.$$

Wystarczy więc wziąć $N_A = N_\varepsilon$. Wtedy będzie:

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{N_\varepsilon} \forall_{n \geq N_\varepsilon} : (d(x_n, x) < \varepsilon \wedge \text{Ball}(x, \varepsilon) \subseteq A) \implies x_n \in A. \quad (123)$$

Twierdzenie to mówi nie mniej, nie więcej niż to, że jeśli ciąg zbiega do jakiegoś punktu, to w każdym otoczeniu tego punktu znajdują się prawie wszystkie wyrazy tego ciągu.

Twierdzenie 4.9.

Niech (X, d) - p-ń. metryczna, niech $Y \subseteq X$ i niech $d_Y = d|_{Y \times Y}$ będzie obcięciem d do Y . Wtedy:

1. $A \subseteq Y$ jest otwarty w $(Y, d_Y) \iff \exists_{\substack{U \subseteq X \\ \text{otw.}}} : A = Y \cap U$.
2. $A \subseteq Y$ jest domknięty w $(Y, d_Y) \iff \exists_{\substack{F \subseteq X \\ \text{domk.}}} : A = Y \cap F$.

Twierdzenie to daje nam pojęcie o tym, jak wyglądają zbiory otwarte i domknięte w jakimś zawężeniu metryki - mianowicie są to zawężenia odpowiednich zbiorów otwartych i domkniętych.

Dowód

Zacniemy od dowodu 2.

\implies Niech A domknięty w Y i niech F będzie domknięciem A w X (więc F musi być domknięty w X). Wtedy:

$$F = \{ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in X \mid a_n \in A \},$$

za to:

$$A = \{ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in Y \mid a_n \in A \},$$

gdyż A jest domknięty w Y . Widzimy z tych definicji łatwo, że $A = F \cap Y$.

\Leftarrow W drugą stronę, niech $A = Y \cap F$ i F będzie domknięty w X . Niech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem w A (więc i w F), zbiegającym do g . Wtedy $g \in F$. Zatem jeśli $g \in Y$, to $g \in A$, z konstrukcji A . Pokazaliśmy więc, że każdy ciąg z A zbieżny w Y ma granicę w samym A , zatem A jest domknięty.

2. \implies 1. Pokażemy teraz, jak z 2. wynika 1. Mamy bowiem ciąg następujących równoważności:

$$A \subseteq Y \text{ jest otwarty w } Y \iff Y \setminus A \text{ jest domknięty w } Y \iff \exists_{\substack{F \subseteq X \\ \text{domk.}}} : Y \setminus A = Y \cap F \iff$$

$$\exists_{\substack{F \subseteq X \\ \text{domk.}}} : A = Y \cap (X \setminus F) \iff \exists_{\substack{U \subseteq X \\ \text{otw.}}} : A = Y \cap U.$$

Przedostatnia równoważność, wynika z faktu, że jeśli $Y \setminus A = Y \cap F$, to $A = Y \setminus (Y \cap F) = Y \setminus F = Y \cap (X \setminus F)$ (pamiętamy, że $Y \subseteq X$). Ostatnia równoważność jest konsekwencją tego, że dopełnienie zbioru domkniętego jest otwarte (Tw. 4.1).

4.2 Przekształcenia ciągłe

Zacniemy rozważać teraz przekształcenia (i.e. funkcje) pomiędzy przestrzeniami metrycznymi i wyróżnimy wśród nich szczególnie ważną klasę funkcji ciągłych.

Twierdzenie 4.10. Warunki ciągłości

Niech (X, d) i (Y, δ) będą przestrzeniami metrycznymi, a $\Phi : X \rightarrow Y$ przekształceniem między nimi. Ustalmy też $x_0 \in X$. Wtedy następujące warunki są równoważne:

$$1. \quad \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\lambda_\varepsilon > 0} \forall_{x \in X} : d(x, x_0) < \lambda_\varepsilon \implies \delta(\Phi(x), \Phi(x_0)) < \varepsilon. \quad (124)$$

$$2. \quad \forall_{U \in \mathcal{N}(\Phi(x_0))} \exists_{V \in \mathcal{N}(x_0)} : \Phi(V) \subseteq U. \quad (125)$$

$$3. \quad \forall_{U \in \mathcal{N}(\Phi(x_0))} : \Phi^{-1}(U) \in \mathcal{N}(x_0). \quad (126)$$

(Przypominamy, że $\Phi^{-1}(U)$ to w przeciwobraz U).

4. Jeśli $x_n \rightarrow x_0$ w (X, d) , to $\Phi(x_n) \rightarrow \Phi(x_0)$ w (Y, δ) .

Dowód

1. \implies 2. Dla dowolnego $U \in \mathcal{N}(\Phi(x_0))$ istnieje $\varepsilon > 0$:

$$\text{Ball}(\Phi(x_0), \varepsilon) \subseteq U.$$

Z 1. weźmy więc λ_ε spełniające podaną implikację i $V = \text{Ball}(x_0, \lambda_\varepsilon)$. Wtedy:

$$\Phi(x \in V) \in \text{Ball}(\Phi(x_0), \varepsilon),$$

zatem:

$$\Phi(V) \subseteq \text{Ball}(\Phi(x_0), \varepsilon) \subseteq U.$$

2. \implies 3. Weźmy dowolne $U \in \mathcal{N}(\Phi(x_0))$. Wtedy:

$$\exists_{V \in \mathcal{N}(x_0)} : \Phi(V) \subseteq U,$$

i.e. $V \subseteq \Phi^{-1}(U)$. Ale skoro $V \in \mathcal{N}(x_0)$, to tym bardziej $\Phi^{-1}(U) \in \mathcal{N}(x_0)$, jako rozszerzenie V .

3. \implies 4. Weźmy ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zbieżny do x_0 . Niech $U \in \mathcal{N}(\Phi(x_0))$, skąd $\Phi^{-1}(U) \in \mathcal{N}(x_0)$.
Zatem:

$$\exists_{N_U} \forall_{n \geq N_U} : x_n \in \Phi^{-1}(U),$$

z twierdzenia udowodnionego wcześniej. Ergo:

$$\forall_{U \in \mathcal{N}(\Phi(x_0))} \exists_{N_U} \forall_{n \geq N_U} : \Phi(x_n) \in U.$$

Zatem, z tego samego twierdzenia:

$$\Phi(x_n) \rightarrow \Phi(x_0).$$

4. \implies 1. Dowodzimy nie wprost, że $\neg 1. \implies \neg 4.$. Zaprzeczeniem 1. jest:

$$\exists_{\varepsilon > 0} \forall_{\lambda} \exists_{x_\lambda \in X} : d(x_\lambda, x_0) < \lambda \wedge \delta(\Phi(x_\lambda), \Phi(x_0)) \geq \varepsilon.$$

Weźmy $\lambda_n = \frac{1}{n}$ i na tej podstawie skonstruujemy ciąg x_n odpowiadających x_λ w powyższym stwierdzeniu dla odpowiednich λ . Wtedy musi być, że $x_n \rightarrow x_0$, gdyż $d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$, ale $\Phi(x_n) \not\rightarrow \Phi(x_0)$, gdyż $\delta(\Phi(x_n), \Phi(x_0)) \geq \varepsilon \forall_n$. Zatem zachodzi $\neg 4.$.

Definicja 4.17. Odwzorowanie ciągłe

Odwzorowanie spełniające warunki 1. - 4. Twierdzenia 4.2 dla punktu $x_0 \in X$ nazywamy **ciągłym** w x_0 (w p-ń. (X, d)). Jeśli odwzorowanie jest ciągłe w każdym punkcie przestrzeni, nazywamy je po prostu ciągłym.

Czasami, mając na myśli warunek 1., mówimy o tzw. zbieżności według Cauchy'ego, zaś o warunku 4. mówimy, jako zbieżności według Heinego.

Twierdzenie 4.11. Złożenie odwzorowań ciągłych jest ciągłe

Jeśli $\Phi : X \rightarrow Y$ jest ciągłe w $x_0 \in X$ i $\Psi : Y \rightarrow Z$ jest ciągłe w $\Phi(x_0)$, to $\Psi \circ \Phi : X \rightarrow Z$ jest ciągłe w x_0 .

Dowód

Korzystając np. z 4. warunku ciągłości, weźmy ciąg $x_n \rightarrow x_0$, wtedy $\Phi(x_n) \rightarrow \Phi(x_0)$ z ciągłości Φ . Ponadto $\Psi(\Phi(x_n)) \rightarrow \Psi(\Phi(x_0))$ z ciągłości Ψ . Widzimy, więc prosto, że $\Psi \circ \Phi$ musi być ciągłe.

Twierdzenie 4.12. Ciągłość na całej dziedzinie

$\Phi : X \rightarrow Y$ jest ciągłe na całym X wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall_{\substack{U \subseteq Y \\ \text{otw.}}} : \Phi^{-1}(U) \subseteq X. \quad (127)$$

Inaczej mówiąc, przekształcenie jest ciągłe na całej dziedzinie wtedy i tylko wtedy, gdy przeciobrazy zbiorów otwartych są otwarte.

Dowód

\Rightarrow Niech $U \subseteq Y$ i $x \in \Phi^{-1}(U)$. Zatem $\Phi(x) \in U$. Skoro U jest otwarty, to musi być otoczeniem $\Phi(x)$, i.e. $U \in \mathcal{N}(\Phi(x))$, zatem (warunek 3.):

$$\Phi^{-1}(U) \in \mathcal{N}(x) \quad \forall_{x \in \Phi^{-1}(U)},$$

czyli $\Phi^{-1}(U)$ jest otwarty.

\Leftarrow Udowadniamy warunek 2.:

$$\forall_{\substack{U \subseteq Y \\ \text{otw.}}} : \Phi^{-1}(U) \subseteq X.$$

Weźmy $x \in X$ i $U \in \mathcal{N}(\Phi(x))$. Wtedy:

$$\exists_{\substack{\tilde{U} \subseteq X \\ \text{otw.}}} : \Phi(x) \in \tilde{U} \subseteq U,$$

więc $V = \Phi^{-1}(\tilde{U})$ - otwarty. Ponadto $x \in V$. Zatem $V \in \mathcal{N}(x)$, oraz $\Phi(V) \subseteq \tilde{U} \subseteq U$, więc 2. zachodzi.

Definicja 4.18. Ciągłość jednostajna

$\Phi : X \rightarrow Y$ nazwiemy **jednostajnie ciągłym**, jeśli:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \lambda_\varepsilon : \forall_{x, x' \in X} : d(x, x') \leq \lambda_\varepsilon \implies \delta(\Phi(x), \Phi(x')) \leq \varepsilon. \quad (128)$$

Ważną częścią tejże definicji jest to, że wybór λ zależy jedynie od ε , nie zaś od samych punktów x, x' .

Obserwacja 8.

Każda funkcja jednostajnie ciągła, jest ciągła.

Definicja 4.19. Przekształcenie Lipschitzowskie

Przekształcenie $\Phi : X \rightarrow Y$ nazwiemy **Lipschitzowskim** (i.e. spełniającym **warunek Lipschitza**), jeśli:

$$\exists L > 0 \forall_{x, x' \in X} : \delta(\Phi(x), \Phi(x')) \leq L \cdot d(x, x'). \quad (129)$$

Warunek ten mówi, że odległość między wartościami funkcji jest zawsze ograniczona przez odległość między jej argumentami (z pewną proporcjonalnością).

Obserwacja 9.

Funkcje Lipschitzowskie są ciągłe jednostajnie.

Istotnie - wystarczy ustalić: $\lambda_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{L}$.

4.3 Zwartość

Powiemy teraz o bardzo ważnym pojęciu charakteryzującym zbiory w przestrzeni metrycznej - to jest o zwartości.

Definicja 4.20. Pokrycie

Ustalmy (X, d) - p-ń. metryczną. **Pokryciem** zbioru K nazwiemy rodzinę zbiorów $U = \{U_i\}_{i \in I}$, $U_i \subseteq X$, taką że:

$$K \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i. \quad (130)$$

Pokrycie jest otwarte, jeśli wszystkie U_i są otwarte. Pokrycie $V = \{V_i\}_{i \in I'}$ nazwiemy **podpokryciem** U , jeśli $V \subseteq U$.

Przykład Dla $X = \mathbb{R}$, $K = [0, 1]$, pokryciem K jest rodzina:

$$U_{n \in \mathbb{N}} : U_n = [0, 1 + \frac{1}{n}].$$

Nie jest to pokrycie otwarte.

Definicja 4.21. Zwartość (pokryciowa)

Zbiór $K \subseteq X$ nazwiemy **ZWARTYM**, jeśli z każdego pokrycia otwartego tegoż zbioru, można wybrać podpokrycie skończone (tj. mające skończoną liczbę elementów). Jeśli K jest zwartym podzbiorem X , to zapiszemy $K \subseteq\subseteq X$.

Twierdzenie 4.13. Własności zbiorów zwartych

1. Każdy zbiór zwarty jest ograniczony.
2. Każdy zbiór zwarty jest domknięty.

Dowód

Niech $K \subseteq\subseteq X$.

1. Weźmy dowolny $x \in X$. Wtedy $\{\text{Ball}(x, \frac{1}{n})\}_{n \in \mathbb{N}}$ niewątpliwie jest pokryciem otwartym K . Skoro tak, to można też wybrać skończone podpokrycie. Zatem istnieje $N \in \mathbb{N}$, będące największym z indeksów z tegoż podpokrycia, takie że:

$$K \subseteq \text{Ball}(x, N),$$

jako że kolejne z tych kul zawierają w sobie poprzednie. Widzimy więc, że K jest ograniczony.

2. Dowód nie wprost. Przypuśćmy, że $\exists y$ będący punktem skupienia K , t.ż. $y \notin K$. Weźmy rodzinę zbiorów $\{X \setminus \overline{\text{Ball}}(y, \frac{1}{n})\}_{n \in \mathbb{N}}$. Niewątpliwie jest to pokrycie otwarte, gdyż wszystkie z tych zbiorów są otwarte i sumują się one do $X \setminus \{y\}$. Wybierzmy z niego więc skończone podpokrycie i niech N będzie największym z indeksów w tym podpokryciu. Zauważmy, że wtedy sumują się one do $X \setminus \overline{\text{Ball}}(y, \frac{1}{N})$, jako że kolejne z tych zbiorów zawierają w sobie poprzednie. Mamy więc, że $K \subseteq X \setminus \overline{\text{Ball}}(y, \frac{1}{N})$. Wtedy jednak $\text{Ball}(y, \frac{1}{N}) \cap K \subseteq \overline{\text{Ball}}(y, \frac{1}{N}) \cap K = \emptyset$, co przeczy temu, że y jest punktem skupienia K . Sprzeczność! Zatem K rzeczywiście musi być domknięty.

Definicja 4.22. Zwartość ciągowa

Powiemy, że podzbiór $K \subseteq X$ jest **ciągowo zwarty**, jeśli każdy ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zawarty w K ($x_n \in K$) zawiera podciąg zbieżny do granicy w K :

$$\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_n \in K \exists k \mapsto n_k : x_{n_k} \rightarrow g \in K. \quad (131)$$

Twierdzenie 4.14.

Zbiór K ciągowo zwarty jest także domknięty.

Dowód

Istotnie, jeśli ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ elementów z K jest zbieżny, to każdy jego podciąg jest zbieżny do tej samej granicy. Ale skoro K jest ciągowo zwarty, to $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ma podciąg zbieżny do ele-

mentu z K , który będzie wspólną granicą wszystkich podciągów. Zatem i granica $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ musi leżeć w K .

Definicja 4.23. ε - sieć

Niech $K \subseteq X$ i $\varepsilon > 0$. Wtedy $S \subseteq X$ nazwiemy ε - **sieciami dla K** jeśli:

$$\forall z \in K \exists s \in S : z \in \text{Ball}(s, \varepsilon). \quad (132)$$

S jest ε - siecią w X jeśli jest ε - siecią dla K i $S \subseteq K$.

Twierdzenie 4.15.

Jeśli K jest ciągowo zwarty, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje skończona ε - sieć w K .

Dowód

Dowód nie wprost. Przypuśćmy, że istnieje $\varepsilon > 0$, t.j. w K nie ma skończonej ε - sieci. Skonstruujmy wtedy następująco ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i rodzinę zbiorów $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$:
Niech $x_1 \in K$ będzie dowolne i $U_1 = \text{Ball}(x_1, \varepsilon)$. Oczywiście U_1 nie pokrywa K (z założenia): $K \setminus U_1 \neq \emptyset$. Za x_2 bierzemy więc dowolny element w $K \setminus U_1$, a $U_2 = U_1 \cup \text{Ball}(x_2, \varepsilon)$. Ogólnie $x_n \in K \setminus U_{n-1}$ i $U_n = U_{n-1} \cup \text{Ball}(x_n, \varepsilon)$. Oczywiście $K \setminus U_{n-1} \neq \emptyset$, gdyż gdyby było inaczej, to z konstrukcji mielibyśmy wbrew założeniu skończoną ε - sieć pokrywającą K .
Otrzymaliśmy ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, który jednak nie może mieć podciągu zbieżnego, gdyż nie spełnia warunku Cauchy'ego - z konstrukcji jasno widać, że $\forall i < j : d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$, jako że $x_j \in K \setminus U_{j-1} \subseteq K \setminus U_i$. Przeczy to założeniu, że K jest ciągowo zwarty.

Twierdzenie 4.16.

Jeśli K jest ciągowo zwarty, to istnieje przeliczalny $D \subseteq K$, t.j. $\overline{D} = K$ i.e. D jest gęsty w K .

Dowód

Weźmy

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_{\frac{1}{n}} \subseteq K,$$

gdzie jako S_{ε} oznaczyliśmy skończoną ε - sieć w K , która na mocy Tw. 4.3 istnieje. Jasno widać, że D jest przeliczalny. Wtedy $\overline{D} \subseteq K$, gdyż dla każdego $y \in K$ tworzymy ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ elementów, takich że $x_n \in S_{\frac{1}{n}}$ i $y \in \text{Ball}(x_n, \frac{1}{n})$, co zawsze możemy zrobić, bo $S_{\frac{1}{n}}$ są ε - sieciami w K . Wtedy $d(x_n, y) < \frac{1}{n} \rightarrow 0$, więc $x_n \rightarrow y$, czyli $y \in \overline{D}$. Odwrotnie mamy $\overline{D} \supseteq K$, bo $D \subseteq K \implies \overline{D} \subseteq \overline{K}$ (domknięcie jest monotoniczne, a K jest domknięty por. Tw. 4.3). Z tych dwu inkluzji mamy tezę.

Twierdzenie 4.17.

Jeśli K jest ciągowo zwarty, to każde jego pokrycie otwarte ma przeliczalne podpokrycie.

Dowód

Niech U - pokrycie otwarte K . Dla dowolnego $y \in K$ zdefiniujmy:

$$n_y = \min\{n \in \mathbb{N} \mid \exists U_y \in U : \text{Ball}(y, \frac{1}{n}) \subseteq U_y\}.$$

Taka liczba będzie bez wątpienia istniała, gdyż U pokrywa K i składa się z samych zbiorów otwartych. Niech U_y będzie zbiorem spełniającym powyższy warunek dla $y \in K$. Niech $V = \{U_y \mid y \in D\}$, gdzie D to przeliczalny podzbiór gęsty w K (istnieje on na mocy Tw. 4.3). Jasne, że $V \subseteq U$ i że V jest przeliczalny. Pokażemy, że jest to podpokrycie.

Niech $x \in K$. Wiemy, że $\exists U_x \in U, N \in \mathbb{N} : \text{Ball}(x, \frac{1}{N}) \subseteq U_x$. Ponadto, jako że D jest gęsty w K , to $\exists y \in D : d(y, x) < \frac{1}{2N}$. Wtedy:

$$x \in \text{Ball}(y, \frac{1}{2N}) \implies \text{Ball}(y, \frac{1}{2N}) \subseteq \text{Ball}(x, \frac{1}{N}) \subseteq U_x \in U.$$

Więc $2N \geq n_y$ z konstrukcji n_y . Zatem:

$$x \in \text{Ball}(y, \frac{1}{2N}) \subseteq \text{Ball}(y, \frac{1}{n_y}) \subseteq U_y \in V.$$

Czyli V pokrywa K .

Jesteśmy już gotowi, żeby udowodnić najważniejsze twierdzenie w tej sekcji.

Twierdzenie 4.18. Zwartość ciągowa = zwartość pokryciowa

Zbiór K jest ciągowo zwarty wtedy i tylko wtedy gdy jest zwarty (pokryciowo).

Dowód

\implies Niech $K \subseteq X$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem elementów z K i niech $Z = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Pokażemy, że zachodzi jedna z dwu możliwości:

1.

$$\exists y \in K : \forall_{U \in \mathcal{N}(y), U \subseteq X \atop \text{otw.}} |Z \cap U| = \infty.$$

2. Z jest skończony.

Mianowicie, niech $\neg 1.$, i.e.:

$$\forall y \in K : \exists_{U_y \in \mathcal{N}(y), U_y \subseteq X \atop \text{otw.}} |Z \cap U_y| < \infty.$$

Oczywiście $\{U_y\}_{y \in K}$ jest pokryciem otwartym K (gdyż każdy y zawiera się np. w odpowiadającym mu U_y). Wybierzmy więc zeń skończone podpokrycie, tak, żeby:

$$K \subseteq U_{y_1} \cup U_{y_2} \cup \dots \cup U_{y_N}.$$

Mamy jednak $Z \subseteq K$, zatem:

$$Z = K \cap Z = (U_{y_1} \cap Z) \cup (U_{y_2} \cap Z) \cup \dots \cup (U_{y_N} \cap Z). \quad (133)$$

Każdy z elementów tej sumy jest skończony, na mocy założenia, zatem Z także jest skończony, jako skończona suma skończonych.

Widzimy więc, że zachodzi 1. lub 2.:

1. Jeśli zachodzi pierwszy warunek, to skoro:

$$\exists_{y \in K} : \forall_{U \in \mathcal{N}(y), U \subseteq X \atop \text{otw.}} : |Z \cap U| = \infty,$$

to konstruujemy $k \mapsto n_k$, tak aby $\forall_k : n_{k+1} > n_k$ i $x_{n_k} \in \text{Ball}(y, \frac{1}{k})$. Jest to możliwe, bo każde otwarte otoczenie y zawiera nieskończenie wiele elementów ciągu x_n , w szczególności zawiera element o indeksie większym od dowolnej liczby. Oczywiście z podanej konstrukcji mamy $x_{n_k} \rightarrow y \in K$.

2. Jeśli Z jest skończony, to z zasady szuflatkowej istnieje wartość $x \in Z \subseteq K$, która zostanie odwiedzona nieskończenie wiele razy przez wyrazy ciągu x_n - można więc wziąć podciąg stały równy x i oczywiście do tej liczby zbieżny.

Widzimy więc, że w obu przypadkach potrafimy skonstruować podciąg zbieżny w K , zatem K istotnie jest ciągowo zwarty.

◀ Dowód składać się będzie z

Twierdzenie 4.19. Bolzano-Weierstrassa II

Każdy ograniczony i domknięty podzbiór \mathbb{R} jest zwarty.

Dowód

Wynika on prosto z równoważności zwartości ciągowej i pokryciowej. Jeśli jakiś podzbiór \mathbb{R} jest ograniczony, to zawiera podciąg zbieżny (Twierdzenie 2.2), a skoro jest domknięty, to ów podciąg zbieżny ma granicę w tymże zbiorze. Zatem podzbiór ten jest ciągowo zwarty, czyli zwarty.

Koniec

Spis treści

1	Wstęp	1
1.1	Relacje	1
1.2	Liczby rzeczywiste	3
2	Ciągi rzeczywiste	5
2.1	Pojęcie ciągu i ogólne rezultaty	5
2.2	lim sup i lim inf	8
3	Szeregi liczbowe	11
3.1	Szeregi o wyrazach dodatnich	11
3.2	Szeregi o wyrazach dowolnych	14
4	Przestrzenie metryczne	19
4.1	Podstawowe definicje. Otwartość i domkniętość	19
4.2	Przekształcenia ciągłe	28
4.3	Zwartość	31