

# Notatki do Analizy I R

Na podstawie wykładu głoszonoego przez prof. Sołtana w 2023 r.

red. Filip Baciak

November 2023

## 1 Wstęp

### 1.1 Relacje

#### Relacja

Relacją  $R$  ze zbioru  $A$  do zbioru  $B$  nazywamy podzbiór iloczynu kartezjańskiego tych dwu zbiorów:

$$R \subseteq A \times B. \quad (1)$$

Jeśli  $(x, y) \in R$  to piszemy  $xRy$ .

#### Przykłady relacji:

- Relacja równości  $R \subseteq A \times A$ , zdefiniowana:

$$R = \{(a, a) | a \in A\}. \quad (2)$$

- Na zbiorze  $\mathbb{N}$  mamy relację wewnętrzną (tj. będącą podzbiorem  $\mathbb{N}^2$ ):

$$R = \{(n, m) | n \leq m\}. \quad (3)$$

#### Relacja równoważności

Relacją równoważności nazywamy relację  $R \subseteq A \times A$ , spełniającą następujące aksjomaty:

1. Zwrotność:

$$\forall_{x \in A} : xRx. \quad (4)$$

2. Symetryczność:

$$\forall_{x, y \in A} : xRy \implies yRx. \quad (5)$$

3. Przechodność:

$$\forall_{x, y, z \in A} : xRy \wedge yRz \implies xRz. \quad (6)$$

Przykładem relacji równoważności jest relacja  $R_f$  zadana przez funkcję  $f : A \rightarrow B$ :

$$xR_f y \iff f(x) = f(y). \quad (7)$$

### Częściowy porządek

Częściowym porządkiem na zbiorze  $A$  nazywamy relację  $R \subseteq A^2$  (którą oznaczamy  $\leq$  i piszemy  $x \leq y$  zamiast  $xRy$ ), jeśli ma następujące cechy:

1. Zwrotność:

$$\forall x \in A : x \leq x. \quad (8)$$

2. Antysymetryczność:

$$\forall x, y \in A : x \leq y \wedge y \leq x \implies x = y. \quad (9)$$

3. Przechodność:

$$\forall x, y, z \in A : xRy \wedge yRz \implies xRz. \quad (10)$$

Zbiór parę  $(A, \leq)$  nazywamy zbiorem częściowo uporządkowanym.

Na przykład relacja wewnętrzna na zbiorze  $\mathbb{N}^2$  zdefiniowana następująco:

$$(a, b) \leq (a', b') \iff a \leq a' \wedge b \leq b',$$

zadaje częściowy porządek nad  $\mathbb{N}^2$ .

### Porządek liniowy

Porządek częściowy  $\leq$  nad  $A$  nazywamy **liniowym**, jeśli:

$$\forall x, y \in A : x \leq y \vee y \leq x. \quad (11)$$

Zbiór z określonym porządkiem liniowym nazywamy **uporządkowanym liniowo**. Jeśli  $x \leq y \wedge x \neq y$  to piszemy  $x < y$ .

Zauważmy, że porządek częściowy - jak sama nazwa wskazuje - niekoniecznie określa relację wielkości między każdymi dwoma elementami zbioru na którym jest określony. Tę własność ma dopiero porządek liniowy.

### Ograniczenia

Podzbiór  $X \subseteq A$  zbioru uporządkowanego liniowo  $(A, \leq)$  nazywamy **ograniczonym z góry**, jeśli:

$$\exists u \in A \forall x \in X : x \leq u. \quad (12)$$

Podobnie definiujemy **ograniczenie z dołu**:

$$\exists l \in A \forall x \in X : l \leq x. \quad (13)$$

Elementy  $u$  i  $l$  nazywamy odpowiednio **ograniczeniem górnym** i **ograniczeniem dolnym**.

### Kresy górne i dolne

**Kresem górnym** podzbioru  $X \subseteq A$  uporządkowanego  $(A, \leq)$  nazwiemy najmniejsze jego ograniczenie górne, to znaczy taką liczbę  $b \in A$ , że:

- $b$  jest ograniczeniem górnym  $X$ ,
- jeśli  $l$  jest ograniczeniem górnym  $X$ , to  $b \leq l$ .

Podobnie - jako największe ograniczenie dolne - definiujemy **kres dolny**. Kres górny zbioru  $X$  oznaczamy  $\sup X$ , a kres dolny  $\inf X$

Zauważmy, że w ogólności zbiór nie musi mieć kresu górnego lub dolnego, a jeśli go ma to kres nie musi być elementem tegoż zbioru.

## 1.2 Liczby rzeczywiste

$\mathbb{R}$

**Liczby rzeczywiste** nazywamy zbiór  $\mathbb{R}$  z określonymi działaniami dodawania  $+$  i mnożenia  $\cdot$ , wyróżnionymi, różnymi elementami  $0$  i  $1$  i określoną relacją porządku liniowego  $\leq$  - w skrócie  $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, \leq)$  - taki że:

1.  $\mathbb{R}$  jest ciałem, tzn. spełnia:

(a) Zamkniętość dodawania i mnożenia:

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : a + b \in \mathbb{R} \wedge a \cdot b \in \mathbb{R}; \quad (14)$$

(b)  $0$  jest elementem neutralnym dodawania:

$$\forall a \in \mathbb{R} : a + 0 = a; \quad (15)$$

(c) Istnieją elementy odwrotne względem dodawania:

$$\forall a \in \mathbb{R} \exists -a \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0; \quad (16)$$

(d) Dodawanie jest łączne:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a + b) + c = a + (b + c); \quad (17)$$

(e) Dodawanie jest przemienne:

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : a + b = b + a; \quad (18)$$

(f)  $1$  jest elementem neutralnym mnożenia:

$$\forall a \in \mathbb{R} : a \cdot 1 = a; \quad (19)$$

(g) Mnożenie jest łączne:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c); \quad (20)$$

(h) Mnożenie jest przemienne:

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : a \cdot b = b \cdot a; \quad (21)$$

(i) Istnieją elementy przeciwne względem mnożenia (z wyjątkiem  $0$ ):

$$\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists a^{-1} \in \mathbb{R} : a \cdot a^{-1} = 1; \quad (22)$$

(j) Dodawanie jest rozdzielne względem mnożenia:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c. \quad (23)$$

2. Porządek liniowy  $\leq$  spełnia:

(a) Możliwość dodawania "stronami":

$$\forall_{a,b,t \in \mathbb{R}} : a \leq b \implies a + t \leq b + t; \quad (24)$$

(b) Mnożenie dodatnich zachowuje dodatniość

$$\forall_{a,b \in \mathbb{R}} : 0 < a \wedge 0 < b \implies 0 < a \cdot b. \quad (25)$$

3.  $\mathbb{R}$  jest zwarty, tj. każdy niepusty zbiór ograniczony z góry ma kres górny w  $\mathbb{R}$ .

Można podać konstrukcję ciała o podanych własnościach (np. konstrukcja Dedekina, konstrukcja Riemana) i dowieść, że z dokładnością do izomorfizmu istnieje tylko jedno takie ciało.

#### Własność Archimedesesa

$$\forall_{x>0,y \in \mathbb{R}} \exists_{n \in \mathbb{N}} : nx > y. \quad (26)$$

#### Dowód

Twierdzenia dowiedzimy nie wprost:

Niech  $X = nx | n \in \mathbb{N}$  i założmy, że  $X$  jest ograniczony z góry przez  $y$ . Zatem posiada supremum:  $\alpha = \sup X$ . Wiemy, że  $\alpha - x < \alpha$ , więc nie może to być ograniczenie górne. Zatem:

$$\exists_{n_0 \in \mathbb{N}} : n_0 x > \alpha - x.$$

Ale wtedy:

$$X \ni (n_0 + 1)x > \alpha = \sup X.$$

Sprzeczność! Istotnie więc, zbiór  $nx | n \in \mathbb{N}$  nie może być ograniczony przez żadną liczbę, co dowodzi tezy.

#### Gęstość $\mathbb{Q}$ w $\mathbb{R}$

$$\forall_{x,y \in \mathbb{R}, x < y} \exists_{r \in \mathbb{Q}} : x < r < y. \quad (27)$$

#### Dowód

Skoro  $y - x > 0$ , to  $\exists n \in \mathbb{N} : n(y - x) > 1$ . Ponadto, skoro  $1 > 0$ , to  $\exists_{m_1, m_2 \in \mathbb{N}} : m_1 > nx \wedge m_2 > -nx$ . Zatem  $-m_2 < nx < m_1$ , tzn.  $nx$  leży pomiędzy dwiema liczbami całkowitymi. Istnieje więc takie  $m \in \mathbb{Z}$ , takie że:

$$m - 1 \leq nx < m.$$

Stąd już prosto:

$$nx < m \leq nx + 1 < ny,$$

$$x < \frac{m}{n} < y.$$

Na koniec krótka notka - zbiór  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ , to jest liczby rzeczywiste z dołączonymi symbolami (nie liczbami!) plus i minus nieskończoności, nazywamy **rozszerzonymi liczbami rzeczywistymi**.

## 2 Ciągi rzeczywiste

### 2.1 Pojęcie ciągu i ogólne rezultaty

#### Ciąg

**Ciągiem** elementów z zbioru  $X$  nazywamy funkcję:

$$a : \mathbb{N} \rightarrow X \quad (28)$$

i zamiast  $a(n)$  piszemy  $a_n$ . Cały ciąg oznaczamy  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . My w szczególności zajmować się będziemy ciągami rzeczywistymi i zespolonymi.

W sekcji tej, o ile nie powiedziano inaczej, zakładamy, że wszystkie ciągi są rzeczywiste.

#### ZBIEŻNOŚĆ CIĄGU

Ciąg rzeczywisty  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nazywamy zbieżnym do granicy  $g$ , jeśli:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq N_\varepsilon : |a_n - g| \leq \varepsilon. \quad (29)$$

Piszemy wtedy:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$  lub  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g$ .

Ciąg  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nazywamy **ograniczonym**, jeśli:

$$\exists C \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq C. \quad (30)$$

#### Obserwacja

Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.

#### Arytmetyka granic

Niech  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  i  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  będą ciągami rzeczywistymi, takimi, że  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  i  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ .

Wtedy:

1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a + b_n = a + b \quad (31)$$

2.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a \cdot b_n = a \cdot b \quad (32)$$

3.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a|_n = |a| \quad (33)$$

4. Jeśli  $b_n \neq 0$  DDD  $n$  (dla dostatecznie dużych  $n$ ) i  $b \neq 0$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \quad (34)$$

### Dowód

W dowodach wszystkich tych twierdzeń chcemy dla dowolnego  $\varepsilon$  skonstruować takie  $N$ , że dla wszystkich  $n \geq N$  różnica między wyrazami ciągu po lewej a granicą po prawej stronie jest mniejsza od  $\varepsilon$ . Pamiętajmy tutaj, że:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq M_\varepsilon : |a_n - a| \leq \varepsilon, \quad (35)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq K_\varepsilon : |b_n - b| \leq \varepsilon, \quad (36)$$

1. Mamy:

$$|a_n + b_n - a - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b|, \quad (37)$$

więc dla  $n \geq N = \max\{M_{\frac{\varepsilon}{2}}, K_{\frac{\varepsilon}{2}}\}$ :

$$|a_n + b_n - a - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad (38)$$

2.

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n| |b_n - b| + |b| |a_n - a|. \quad (39)$$

Ale  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  jest ograniczony, więc  $a_n \leq C$  i mamy:

$$|a_n b_n - ab| \leq |a_n| |b_n - b| + |b| |a_n - a| \leq (|C| + 1) |b_n - b| + (|b| + 1) |a_n - a|. \quad (40)$$

Zatem dla  $n \geq \max\{M_{\frac{\varepsilon}{2(|b|+1)}}, K_{\frac{\varepsilon}{2(|C|+1)}}\}$ :

$$|a_n b_n - ab| \leq (|C| + 1) \frac{\varepsilon}{2(|b| + 1)} + (|b| + 1) \frac{\varepsilon}{2(|b| + 1)} = \varepsilon. \quad (41)$$

Dodaliśmy tutaj 1 do  $|C|$  i  $|b|$ , żeby uniknąć ewentualnego dzielenia przez 0.

3. Jeśli  $a > 0$ , to ciąg od pewnego miejsca musi być dodatni:  $|a_n| = a_n$  dla  $n > M_{|a|}$ , więc dla  $n > N = \max\{M_{|x|}, M_\varepsilon\}$ :

$$||a_n| - a| = |a_n - a| < \varepsilon.$$

Podobnie, jeśli  $a < 0$ , to ciąg od pewnego miejsca jest ujemny i  $|a_n| = -a_n$  dla  $n > M_{|a|}$ , więc dla  $n > N = \max\{M_{|x|}, M_\varepsilon\}$ :

$$||a_n| - a| = |-a_n - a| = |a_n - a| < \varepsilon.$$

Dla  $a = 0$ , mamy prosto:

$$|a_n| < \varepsilon \implies ||a_n|| < \varepsilon.$$

4. Zakładamy, że  $b_n \neq 0$  DDD  $n$ , więc istnieje takie  $K_0$ , że dla  $n \geq K_0$   $b_n \neq 0$ . Wtedy:

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| = \left| \frac{a_n b - a b_n}{b_n b} \right| = \left| \frac{a_n b - ab + ab - a b_n}{b_n b} \right| = \left| \frac{b(a_n - a) + a(b - b_n)}{b_n b} \right| \quad (42)$$

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| \leq \left| \frac{a_n - a}{b_n} \right| + \left| \frac{a}{b_n b} \right| |b_n - b| \leq \left| \frac{a_n - a}{b_n} \right| + \left( \left| \frac{a}{b_n b} \right| + 1 \right) |b_n - b| \quad (43)$$

Zauważmy, że dla  $n \geq K_{\frac{1}{2}|b|}$  mamy  $|b_n - b| \leq \frac{1}{2}|b|$ , więc  $\frac{1}{2}|b| \leq |b_n|$ , przez co:

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| \leq \left| \frac{a_n - a}{b_n} \right| + \left( \left| \frac{a}{b_n b} \right| + 1 \right) |b_n - b| \leq \left| \frac{2}{b} \right| |a_n - a| + \left( \left| \frac{2a}{b} \right| + 1 \right) |b_n - b| \quad (44)$$

Ostatecznie dla  $n > \max\{K_0, K_{\frac{1}{2}|b|}, K_{\frac{\varepsilon}{2(|\frac{2a}{b}|+1)}}, M_{\frac{\varepsilon}{4|b|}}\}$ :

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| \leq \left| \frac{2}{b} \right| \frac{\varepsilon}{4|b|} + \left( \left| \frac{2a}{b} \right| + 1 \right) \frac{\varepsilon}{2(|\frac{2a}{b}|+1)} = \varepsilon. \quad (45)$$

Powiemy teraz o mocnym twierdzeniu, pozwalającym stwierdzić, czy ciąg ma granicę, bez jej wyznaczania.

#### Twierdzenie o ciągu monotonicznym i ograniczonym

Każdy ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.

- Jeśli ciąg jest niemalejący, to jest on zbieżny do supremum zbioru wyrazów ciągu.
- Jeśli ciąg jest nierosnący, to jest on zbieżny do infimum zbioru wyrazów ciągu.

Uwaga - dla ciągu  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  supremum jego wyrazów - tj.  $\sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$  - oznaczamy  $\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$ .

Analogicznie piszemy  $\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$  dla infimum jego wyrazów.

#### Dowód

Załóżmy, że  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  jest niemalejący. Zbiór  $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$  jest ograniczony, zatem posiada supremum. Oznaczmy je  $g$ . Zatem dla każdego  $\varepsilon > 0$  liczba  $g - \varepsilon$  nie jest ograniczeniem górnym:

$$\exists m : g - \varepsilon \leq a_m \leq g. \quad (46)$$

Ale wtedy, z racji monotoniczności  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ :

$$\forall n \geq m : g - \varepsilon \leq a_m \leq a_n \leq g \leq g + \varepsilon. \quad (47)$$

Czyli:

$$\forall n \geq m : |a_n - g| \leq \varepsilon, \quad (48)$$

co chcieliśmy pokazać. Dla  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nierosnącego dowód jest zupełnie analogiczny (można też rozważać zbieżność niemalejącego ciągu  $(-a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ).

#### Twierdzenie o trzech ciągach

Niech  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  i  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  będą dwoma ciągami zbieżnymi do wspólnej granicy  $g$ . Wtedy, jeśli dla ciągu  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  istnieje takie  $N$ , że:

$$\forall n \geq N : a_n \leq b_n \leq c_n, \quad (49)$$

to  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g$ .

### Dowód

Dowód jest bardzo krótki. Dla dowolnego  $\varepsilon$  bierzemy takie  $M_\varepsilon$ , że  $\forall_{n \geq M_\varepsilon} : |a_n - g| \leq \varepsilon$  i takie  $K_\varepsilon$ , że:  $\forall_{n \geq K_\varepsilon} : |c_n - g| \leq \varepsilon$ . Wtedy dla  $n \geq \max\{N, M_\varepsilon, K_\varepsilon\}$ :

$$g - \varepsilon \leq a_n \leq b_n \leq c_n \leq g + \varepsilon, \quad (50)$$

więc  $|b_n - g| \leq \varepsilon$ .

### Rozbieżność do $\pm\infty$

Powiemy, że ciąg  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  jest rozbieżny do  $+\infty$ , jeśli:

$$\forall_C \exists_{N_C \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq N_C} : a_n \geq C. \quad (51)$$

Analogicznie, powiemy, że ciąg  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  jest rozbieżny do  $-\infty$ , jeśli:

$$\forall_C \exists_{N_C \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq N_C} : a_n \leq C. \quad (52)$$

Mówimy też o "zbieżności" do  $\pm\infty$ , tj. zbieżności w zbiorze  $\overline{\mathbb{R}}$

### Obserwacja

Ciąg monotoniczny, nieograniczony jest rozbieżny do  $\pm\infty$ .

### Podciąg

Podciągiem ciągu  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nazywamy ciąg  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ , gdzie  $n \ni k \mapsto n_k \in \mathbb{N}$  jest funkcją ściśle rosnącą.

### Obserwacja

Jeśli  $a_n \rightarrow g$ , to każdy podciąg  $a_{n_k} \rightarrow g$

## 2.2 $\limsup$ i $\liminf$

Założmy, że mamy dany ciąg liczb rzeczywistych  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Zdefiniujmy wtedy następujące dwa ciągi:  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  oraz  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , takie że:

$$\alpha_n = \inf\{a_k \mid k \geq n\} \quad (53)$$

$$\beta_n = \sup\{a_k \mid k \geq n\} \quad (54)$$

Wtedy,  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  jest ciągiem niemalejącym, co wynika z faktu, że:

$$\inf\{a_k \mid k \geq n+1\} \subseteq \inf\{a_k \mid k \geq n\}$$

Podobnie,  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  jest ciągiem nierosnącym. Z tego wynika więc, że są to ciągi zbieżne w  $\overline{\mathbb{R}}$ . Mamy więc:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \sup \alpha_n, \quad (55)$$



gdyż  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  to ciąg nierosnący oraz podobnie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta = \inf \beta. \quad (56)$$

### Granice górne i dolne ciągu

Wielkość:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \{a_k \mid k \geq n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \sup \alpha_n \quad (57)$$

nazywamy **granica dolną** ciągu  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  i oznaczamy  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Podobnie, wielkość:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \{a_k \mid k \geq n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \inf \beta_n \quad (58)$$

nazywamy **granica górną** ciągu i oznaczamy  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

### Twierdzenie o punktach skupienia ciągu

Niech  $L$  będzie zbiorem punktów skupienia zbioru  $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ , tzn. takich liczb, dla których istnieje podciąg  $((a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}})$  zbieżny do tej liczby:

$$L = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid \exists \text{ podciąg } (a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} : \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = x\}. \quad (59)$$

Wtedy:

1.

$$L \neq \emptyset \quad (60)$$

2.

$$\liminf a_n \in L \quad \wedge \quad \limsup a_n \in L \quad (61)$$

3.

$$\liminf a_n = \inf L \quad \wedge \quad \limsup a_n = \sup L \quad (62)$$

### Dowód

TODO

Nietrudnym wnioskiem z tego twierdzenia jest następujące:

### Kryterium zbieżności

Ciąg  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  jest zbieżny do  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\liminf a_n = \limsup a_n. \quad (63)$$

### Dowód

$\Rightarrow$  Jeśli  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , to także każdy podciąg  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  dąży do  $a$ , więc  $L = \{a\}$ . Ale  $\liminf a_n \in L$  i  $\limsup a_n \in L$ , więc:

$$\liminf a_n = a = \limsup a_n. \quad (64)$$

⇐ Oczywiście zachodzi nierówność:

$$\alpha_n \leq a_n \leq \beta_n. \quad (65)$$

Skoro mamy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \liminf a_n = \limsup a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n, \quad (66)$$

więc z twierdzenia o trzech ciągach mamy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf a_n = \limsup a_n. \quad (67)$$

### Warunek Cauchy'ego

Niech  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  będzie ciągiem rzeczywistym. Wtedy następujące warunki są równoważne:

1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R} \quad (68)$$

2.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M_\varepsilon \forall n, m \geq M_\varepsilon |a_n - a_m| \leq \varepsilon. \quad (69)$$

Jeśli ciąg spełnia ten warunek, mówimy, że spełnia warunek Cauchy'ego.

Sprawdzając warunek Cauchy'ego, możemy dowodzić zbieżności ciągu do granicy rzeczywistej bez wyznaczania tej granicy.

### Dowód

1.  $\implies$  2. Skoro  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zbieżny do  $a \in \mathbb{R}$ , to dla dowolnego  $\varepsilon > 0$  istnieje takie  $N_{\frac{\varepsilon}{2}}$ , że:

$$\forall n, m \geq N_{\frac{\varepsilon}{2}} : |a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} \wedge |a_m - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad (70)$$

ale wtedy:

$$|a_n - a_m| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad (71)$$

2.  $\implies$  1. Zauważmy, że  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  jest ciągiem ograniczonym. Istotnie, weźmy  $\varepsilon = 1$ :

$$\exists M_1 \forall n \geq M_1 : |a_n - a_{M_1}| \leq 1, \quad (72)$$

więc:

$$\min\{a_{M_1} - 1; a_k \mid k < M_1\} \leq a_n \leq \max\{a_{M_1} + 1; a_k \mid k < M_1\}. \quad (73)$$

Weźmy teraz dowolny  $\varepsilon > 0$ . Z ograniczoności  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  wynika:  $\alpha = \liminf a_n \in \mathbb{R}$  i  $\beta = \limsup a_n \in \mathbb{R}$ . Oznacza to, że:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A_\varepsilon \forall n \geq A_\varepsilon : |\alpha_n - \alpha| \leq \varepsilon, \quad (74)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists B_\varepsilon \forall n \geq B_\varepsilon : |\beta_n - \beta| \leq \varepsilon, \quad (75)$$

Zauważmy, że:

$$|\alpha - \beta| \leq |\alpha - \alpha_n| + |\beta - \beta_n| + |\alpha_n - \beta_n|. \quad (76)$$

Dwa pierwsze czynniki po prawej potrafimy ograniczyć, zbadajmy więc ostatni wyraz:

$$\begin{aligned} |\alpha_n - \beta_n| &\leq |\alpha_n - a_n| + |\beta_n - a_n| = |\inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\} - a_n| + |\sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\} - a_n| \\ &= \inf\{|a_m - a_n| \mid m \geq n\} + \sup\{|a_m - a_n| \mid m \geq n\}. \end{aligned} \quad (77)$$

Możemy teraz skorzystać z warunku Cauchy'ego i znaleźć takie  $M_{\frac{\varepsilon}{6}}$ , że:

$$\forall m \geq n \geq M_{\frac{\varepsilon}{6}} : |a_m - a_n| \leq \frac{\varepsilon}{6}. \quad (78)$$

Zatem dla  $n \geq M_{\frac{\varepsilon}{6}}$ :

$$\inf\{|a_m - a_n| \mid m \geq n\} \leq \frac{\varepsilon}{6} \quad (79)$$

$$\sup\{|a_m - a_n| \mid m \geq n\} \leq \frac{\varepsilon}{6} \quad (80)$$

Ostatecznie otrzymujemy dla  $n \geq \max\{A_{\frac{\varepsilon}{3}}, B_{\frac{\varepsilon}{3}}, M_{\frac{\varepsilon}{6}}\}$ :

$$|\alpha - \beta| \leq |\alpha - \alpha_n| + |\beta - \beta_n| + |\alpha_n - a_n| + |\beta_n - a_n| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \varepsilon. \quad (81)$$

Pokazaliśmy, że różnica  $|\liminf a_n - \limsup a_n|$  jest mniejsza od dowolnej liczby dodatniej, zatem musi być równa 0. Oznacza to, że  $\liminf a_n = \limsup a_n \in \mathbb{R}$ , a więc - co udowodniliśmy już wcześniej - ciąg jest zbieżny do rzeczywistej granicy.

### 3 Szeregi liczbowe

#### 3.1 Szeregi o wyrazach dodatnich

Założmy, że  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest szeregiem o wyrazach dodatnich ( $a_n > 0$ ). Ostatnio zauważyliśmy, że:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sup_{\substack{F \subset \mathbb{N} \\ |F| < +\infty}} \sum_{n \in F} a_n.$$

Wynikają z tego następujące:

#### Wnioski

1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \iff \exists C > 0 \forall F \subset \mathbb{N}, |F| < +\infty \sum_{n \in F} a_n \leq C$$

(Zbiór wszystkich sum elementów o indeksach pochodzących ze SKOŃCZONEGO podzbioru  $\mathbb{N}$  jest ograniczony)

2. Jeśli  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  jest bijekcją (permutacją indeksów), to:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Oznacza to, że zmiana kolejności sumowania nie wpływa na wynik.

3. Jeśli:

$$\mathbb{N} = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad (\text{jest to suma rozłączna, tj. } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ dla } i \neq j)$$

i:

$$S_i = \sum_{n \in A_i} a_n,$$

to:

$$\sum_{i=0}^{\infty} S_i = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Jest to grupowania (łączności i przemienności) dla szeregu.

### Dowód wniosków

1. Ograniczoność sum po prawej jest oczywiście równoważne istnieniu skończonego ich supremum, co równe jest sumie po lewej.
2.  $\sigma$  zachowuje klasę skończonych podzbiorów i wyznacza bijekcję:

$$\sigma : 2^{\mathbb{N}} \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$$

$$\sigma(F) = \{\sigma(n) | n \in F\},$$

która zachowuje moc zbioru  $F$  i przeprowadza zbiory skończone na skończone. Zatem:

$$\left\{ \sum_{n \in F} a_n \mid F \subset \mathbb{N}, |F| < \infty \right\} = \left\{ \sum_{n \in \sigma(F)} a_n \mid F \subset \mathbb{N}, |F| < \infty \right\},$$

więc:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sup \left\{ \sum_{n \in F} a_n \mid F \in 2^{\mathbb{N}} \right\} = \sup \left\{ \sum_{n \in \sigma(F)} a_n \mid F \subset \mathbb{N}, |F| < \infty \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$$

3. a) Jeśli  $\exists j : S_j = \infty$ , to:

$$\sum_{i=1}^{\infty} S_i = \infty$$

i:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \geq \sum_{n \in A_j} a_n = \infty.$$

Stąd:

$$\sum_{i=1}^{\infty} S_i = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

- b) Niech  $\forall_i : S_i < \infty$ . Ustalmy  $\varepsilon > 0$  i weźmy dowolny:

$$K \subset \mathbb{N}, \quad |K| < \infty.$$

Przypomnijmy:

$$\sum_{i=1}^{\infty} S_i = \sup_{\substack{K \subset \mathbb{N}, \\ |K| < \infty}} \sum_{j \in K} S_j.$$

Niech  $K = \{i_1, i_2, \dots, i_l\}$  i wybierzmy:

$$C_1 \subseteq A_{i_1}, C_2 \subseteq A_{i_2}, \dots, C_l \subseteq A_{i_l},$$

takie, że:

$$\forall j: \sum_{n \in C_j} a_n \geq S_{i_j} - \frac{\varepsilon}{l},$$

co jest możliwe, gdyż  $S_{i_j}$  jest supremum sum po skończonych podzbiorach. Jeśli  $A_{i_j}$  jest skończony, możemy przyjąć  $C_j = A_{i_j}$ .

Wtedy:

$$\sum_{i \in K} S_i = S_{i_1} + S_{i_2} + \dots + S_{i_l} \leq \left( \sum_{n \in C_1} a_n + \frac{\varepsilon}{l} \right) + \left( \sum_{n \in C_2} a_n + \frac{\varepsilon}{l} \right) + \dots + \left( \sum_{n \in C_l} a_n + \frac{\varepsilon}{l} \right) = \varepsilon + \sum_{n \in \bigcup_{j=1}^l C_j} a_n.$$

NB:  $\bigcup_{j=1}^l C_j$  jest zbiorem skończonym, więc:

$$\sum_{i \in K} S_i \leq \varepsilon + \sup_{\substack{F \subset \mathbb{N} \\ |F| < +\infty}} \sum_{n \in F} a_n = \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Rozumowanie to przeprowadziliśmy dla dowolnego  $K$  i  $\varepsilon$ , więc:

$$\sum_{i=1}^{\infty} S_i = \sup_{\substack{K \subset \mathbb{N} \\ |K| < \infty}} \sum_{i \in K} S_i \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

W drugą stronę, weźmy  $F \subset \mathbb{N}$ ,  $|F| < \infty$  i niech:

$$K = \{i \in \mathbb{N} \mid A_i \cap F \neq \emptyset\},$$

wtedy  $|K| < \infty$ , bo  $F$  jest skończony, a  $A_j$  są rozłączne. Wtedy mamy:

$$\sum_{n \in F} a_n = \sum_{i \in K} \sum_{n \in A_i \cap F} a_n \leq \sum_{i \in K} \sum_{n \in A_i} a_n = \sum_{i \in K} S_i.$$

Z tego:

$$\sum_{n \in F} a_n \leq \sum_{i \in K} S_i \leq \sup_{\substack{K \subset \mathbb{N} \\ |K| < \infty}} \sum_{i \in K} S_i = \sum_{i=1}^{\infty} S_i,$$

co zachodzi dla dowolnego  $F$  skończonego. Zatem:

$$\sup_{\substack{F \subset \mathbb{N} \\ |F| < \infty}} \sum_{n \in F} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{i=1}^{\infty} S_i.$$

Porównując dwie otrzymane nierówności, otrzymujemy tezę.

### 3.2 Szeregi o wyrazach dowolnych

W tej podsekcji rozważamy szeregi o dowolnych wyrazach zespolonych:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n, \quad z_n \in \mathbb{C}.$$

#### Kryterium zbieżności bezwzględnej

Jeśli następujący szereg jest zbieżny:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < +\infty$$

to i:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

jest zbieżny.

#### Dowód

Korzystamy z warunku Cauchy'ego dla szeregu modułów:

$$\forall \varepsilon \exists N_\varepsilon \forall n > m \geq N_\varepsilon : \left| \sum_{k=m+1}^n |z_k| \right| \leq \varepsilon,$$

ale:

$$\left| \sum_{k=m+1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |z_k|,$$

więc:

$$\forall \varepsilon \exists M_\varepsilon = N_\varepsilon \forall n > m \geq M_\varepsilon : \left| \sum_{k=m+1}^n z_k \right| \leq \varepsilon.$$

To dowodzi, że warunek Cauchy'ego zachodzi dla  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ , zatem jest to szereg zbieżny.

#### Zbieżność bezwzględna

- Szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  nazywamy zbieżnym bezwzględnie, jeśli szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$  jest zbieżny.
- Jeśli szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  jest zbieżny, ale  $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$  już nie, to szereg nazywamy zbieżnym warunkowo.

Dla szeregów o wyrazach dowolnych obowiązują inne kryteria zbieżności niż dla szeregów o wyrazach dodatnich. Jednym z nich, jest:

### Kryterium Dirichleta

Założmy, że:

- Mamy ciągi:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad a_n \in \mathbb{C}$$
$$(b_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad b_n \in \mathbb{R}, \quad b_n \geq 0$$

- $b_n$  zbiega monotonicznie do 0.
- Ciąg sum częściowych wyrazów  $(a_n)$  jest ograniczony:

$$\exists C \in \mathbb{R} \forall N \in \mathbb{N} : \left| \sum_{n=1}^N a_n \right| \leq C.$$

Wtedy szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  jest zbieżny.

**Przykład - szeregi naprzemienne.** Weźmy szereg postaci:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n,$$

gdzie  $b_n \searrow 0$  (dąży monotonicznie z góry do 0). Szereg taki nazywamy szeregiem naprzemiennym. Z kryterium Dirichleta wynika, że każdy szereg takiej postaci jest zbieżny (co nazywa się czasem kryterium Leibniza). W szczególności:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln 2.$$

### Dowód kryterium Dirichleta

Niech  $\sum_{n=1}^N a_n = z_N$ . Zauważmy, że  $(z_N)$  jest ciągiem ograniczonym. Zapiszmy sumy częściowe docelowego szeregu:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N a_n b_n &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_N b_N = z_1 b_1 + (z_2 - z_1) b_2 + \dots + (z_N - z_{N-1}) b_N = \\ &= z_1 (b_1 - b_2) + z_2 (b_2 - b_3) + \dots + z_{N-1} (b_{N-1} - b_N) + z_N b_N. \end{aligned}$$

Zauważmy, że wyraz  $z_N b_N$  jest zbieżny do 0 (jako iloczyn czynnika ograniczonego i czynnika dążącego do 0). Zajmijmy się więc otrzymaną sumą. Zauważmy, że zachodzi:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |z_n (b_n - b_{n+1})| &= \sum_{n=1}^{\infty} |z_n| (b_n - b_{n+1}) \leq C \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) = \\ &= C \lim_{N \rightarrow \infty} (b_1 - b_{N+1}) = C b_1 < +\infty \end{aligned}$$

Zatem szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n(b_n - b_{n+1})$  jest zbieżny bezwzględnie, a więc i zbieżny. Z tego i z równości:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(b_n - b_{n+1}) + \lim_{n \rightarrow \infty} z_n b_n,$$

Wynika, że szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  musi być zbieżny.

Kolejnym kryterium zbieżności dla szeregów o wyrazach dowolnych jest prosto wynikające z kryterium Dirichleta tzw.:

### Kryterium Abela

Jeśli:

- mamy ciągi:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad a_n \in \mathbb{C}$$

$$(b_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad b_n \in \mathbb{R}$$

- $b_n$  jest monotoniczny i ograniczony,

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest zbieżny.

Wtedy szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  jest zbieżny.

### Dowód

Oczywiście  $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  istnieje. Wtedy:

$$\sum_{n=1}^N a_n b_n = \sum_{n=1}^N a_n(b_n - b) + b \sum_{n=1}^N a_n.$$

Szereg  $b \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest oczywiście zbieżny na mocy założenia. Za to  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(b_n - b)$  jest zbieżne na mocy kryterium Dirichleta, zauważmy bowiem, że:

$$\sum_{n=1}^N a_n(b_n - b) = \text{sign}(b_n - b) \sum_{n=1}^N a_n |b_n - b|,$$

ale  $|b_n - b| \searrow 0$  na mocy założenia, a sumy częściowe  $|\sum_{n=1}^N a_n|$  muszą być ograniczone, gdyż są zbieżne. Warunki kryterium Dirichleta są więc spełnione. Ostatecznie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(b_n - b) + b \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$



Wszystkie składniki po prawej są zbieżne, zatem szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  także musi być zbieżny.

**Grupowanie składników** Zajmijmy się teraz kwestią grupowania składników w szeregach o wyrazach dowolnych i kiedy taka operacja nie zmienia wartości szeregu. Prowadźmy jednak trochę notacji.

#### Rozbicie na wyrazy dodatnie

Dla szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  definiujemy następujące ciągi:

- $a_n = \operatorname{Re}(z_n)$
- $b_n = \operatorname{Im}(z_n)$
- $a_n^+ = \max\{0, a_n\}$
- $a_n^- = -\min\{0, a_n\}$
- $b_n^+ = \max\{0, b_n\}$
- $b_n^- = -\min\{0, b_n\}$

Jasnym jest, że:

$$z_n = a_n^+ - a_n^- + i b_n^+ - i b_n^-$$

oraz:

$$0 \leq a_n^+, a_n^-, b_n^+, b_n^- \leq |z_n|.$$

Z ostatniej nierówności wynika (kryterium porównawcze), że jeśli szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$  jest zbieżny, to i szereg

regi  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\pm}, \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{\pm}$  muszą być zbieżne. Wtedy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- + i \sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ - i \sum_{n=1}^{\infty} b_n^-,$$

jako że:

$$\sum_{n=1}^N z_n = \sum_{n=1}^N a_n^+ - \sum_{n=1}^N a_n^- + i \sum_{n=1}^N b_n^+ - i \sum_{n=1}^N b_n^-,$$

Z tego wynika następujący wniosek:

### Grupowanie szeregów zbieżnych bezwzględnie

Niech szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  będzie zbieżny bezwzględnie. Wtedy:

1. Jeśli  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  jest bijekcją (permutacją indeksów), to:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} z_n.$$

Oznacza to, że zmiana kolejności sumowania nie wpływa na wynik.

2. Jeśli:

$$\mathbb{N} = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} A_j$$

i:

$$S_j = \sum_{n \in A_j} z_n,$$

to  $\sum_{j=1}^{\infty} S_j$  jest zbieżny bezwzględnie i:

$$\sum_{j=1}^{\infty} S_j = \sum_{n=1}^{\infty} z_n.$$

Są to prawa grupowania dla szeregów o wyrazach dowolnych, analogiczne do tych, które zachodzą dla szeregów o wyrazach dodatnich.

### Dowód

1. Mamy następujące równości:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} z_{\sigma(n)} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}^- + i \sum_{n=1}^{\infty} b_{\sigma(n)}^+ - i \sum_{n=1}^{\infty} b_{\sigma(n)}^- = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- + i \sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ - i \sum_{n=1}^{\infty} b_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \end{aligned}$$

W 2 równości korzystamy z analogicznego prawa dla zbieżnych szeregów dodatnich.

Oczywiście, jako że  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  jest zbieżny bezwzględnie, to mamy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |z_{\sigma(n)}|,$$

więc permutacja szeregu zbieżnego bezwzględnie jest także zbieżna bezwzględnie.

2. Mamy:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |S_j| = \sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{n \in A_j} z_n \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n \in A_j} |z_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < +\infty.$$

Widzimy więc, że  $\sum_{j=1}^{\infty} S_j$  jest także zbieżny bezwzględnie. Jako że  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  jest zbieżny bezwzględnie, więc tym bardziej jego podszeregi muszą być zbieżne bezwzględnie. Możemy więc zapisać:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N S_j &= \sum_{j=1}^N \sum_{n \in A_j} z_n = \sum_{j=1}^N \left( \sum_{n \in A_j} a_n^+ - \sum_{n \in A_j} a_n^- + i \sum_{n \in A_j} b_n^+ - i \sum_{n \in A_j} b_n^- \right) = \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{n \in A_j} a_n^+ - \sum_{j=1}^N \sum_{n \in A_j} a_n^- + i \sum_{j=1}^N \sum_{n \in A_j} b_n^+ - i \sum_{j=1}^N \sum_{n \in A_j} b_n^-. \end{aligned}$$

Każdy z szeregów po prawej stronie jest szeregiem zbieżnym o wyrazach dodatnich. Biorąc granicę  $N \rightarrow \infty$  otrzymamy więc:

$$\sum_{j=1}^{\infty} S_j = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n \in A_j} a_n^+ - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n \in A_j} a_n^- + i \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n \in A_j} b_n^+ - i \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n \in A_j} b_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} z_n,$$

co wynika z odpowiednich twierdzeń dla szeregów dodatnich.

## 4 Przestrzenie metryczne

Zmienimy teraz temat, odchodząc od analizy zbieżności w liczbach zespolonych i rozpoczniemy rozważania o temacie znacznie bardziej ogólnym, mianowicie o przestrzeniach z metrykami, będących uogólnieniem znanego pojęcia odległości w  $\mathbb{C}$ .

### Metryka

Ustalmy  $X$  będące dowolnym niepustym zbiorem. Funkcję:

$$d : X \times X \rightarrow [0; +\infty[$$

nazywamy **metryką**, jeśli spełnia następujące aksjomaty:

1.

$$\forall_{x,y \in X} : d(x,y) = d(y,x),$$

2.

$$\forall_{x,y \in X} : d(x,y) = 0 \iff x = y,$$

3.

$$\forall_{x,y,z \in X} : d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$$

O metryce myśleć można, jako o funkcji zwracającej "odległość" między dwoma elementami w zbiorze  $X$ . Podane aksjomaty zapewniają, że nasza metryka spełniać będzie "zdroworozsądkowe" własności odległości. 1. nakłada warunek symetryczności na metrykę - odległość z  $x$  do  $y$  musi być równa odległości z  $y$  do  $x$ . 2. normalizuje metrykę, mówiąc, że punkt jest odległy o 0 od samego siebie i **tylko** od samego siebie. 3. to tak zwana **nierówność trójkąta** - dodając na drodze między dwoma punktami trzeci punkt nie można odległości skrócić.

### Przestrzeń metryczna

Parę  $(X, d)$  - gdzie  $X$  to niepusty zbiór, a  $d : X \times X \rightarrow [0; +\infty[$  to metryka - nazywamy **przestrzenią metryczną**.

**Przykłady** Pokażemy parę przykładów przestrzeni metrycznych, aby dać pojęcie, jak mogą one wyglądać.

- $X = \mathbb{R}$   $d(x, y) = |x - y|$  - jest to odległość między dwiema liczbami rzeczywistymi, z której korzystaliśmy np. przy definicji granicy ciągu.
- $X = \mathbb{R}^v$ , gdzie  $v \in \mathbb{N}$  jest wymiarem przestrzeni,

$$d_p(x, y) = \left( \sum_{n=1}^v |x_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Podstawiając za  $p$  różne wartości możemy otrzymać wiele alternatywnych metryk. Np. dla  $p = 1$  otrzymujemy tzw. **metrykę Manhattanu**:

$$d_1(x, y) = \sum_{n=1}^v |x_n - y_n|.$$

Nazwa pochodzi od tego, że jest to odległość jaką trzeba pokonać między dwoma punktami, mogąc przemieszczać się tylko równolegle do osi współrzędnych - tak jak na Manhattanie, gdzie ulice są do się prostopadłe.

Dla  $p = 2$  otrzymujemy znaną **odległość Euklidesową**:

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{n=1}^v (x_n - y_n)^2}.$$

- $X = \mathbb{R}^v$ ,

$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq n \leq v} |x_n - y_n|.$$

Jest to tak zwana **metryka maximum**. Indeks  $\infty$  wziął się z faktu, że o  $d_\infty$  myśleć można o jako o granicy  $d_p$  dla  $p \rightarrow \infty$ , mamy bowiem:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=1}^v a_n^p \right)^{\frac{1}{p}} = \max_{1 \leq n \leq v} a_n.$$

- Dla dowolnego zbioru  $X$  definiujemy **metrykę dyskretną**:

$$d(x, y) = \delta_{x,y} = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & x \neq y \end{cases}. \quad (82)$$

- Niech  $X$  będzie zbiorem funkcji klasy  $C^0$  (tj, funkcji ciągłych) z  $[0; 1]$  na  $\mathbb{C}$ . Wtedy za odległość między dwiema funkcjami przyjąć możemy:

$$d(f, g) = \sup_{x \in [0; 1]} |f(x) - g(x)|. \quad (83)$$

- Dla  $X$  takiego samego jak w poprzednim punkcie można określić także:

$$d_p(f, g) = \left( \int_0^1 |f(x) - g(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (84)$$

### Zbieżność w przestrzeni metrycznej

Niech  $(X, d)$  będzie przestrzenią metryczną i niech  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  będzie ciągiem elementów z  $X$ . Powiemy, że  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  jest zbieżny do  $g \in X$ , jeśli:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq N_\varepsilon : d(x_n, g) < \varepsilon, \quad (85)$$

co możemy alternatywnie zapisać, jako:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, g) = 0. \quad (86)$$

Oczywiście jeśli  $x_n \rightarrow g$  i  $x_n \rightarrow g'$ , to  $g = g'$  - co wynika z faktu, że jedynym elementem odległym o 0 od  $g$  jest  $g$ . Ponadto jeśli  $x_n \rightarrow g$  to każdy podciąg  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  także dąży do  $g$ :  $x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} g$ .

### Równoważność metryk

Niech  $d$  i  $\delta$  będą metrykami na  $X$ . Powiemy, że  $d$  i  $\delta$  są równoważne, jeśli:

$$\exists C_1, C_2 \in \mathbb{R} : \forall x, y \in X : C_1 d(x, y) \leq \delta(x, y) \leq C_2 d(x, y). \quad (87)$$

Łatwo widać, że jest to relacja symetryczna, przechodnia i zwrotna.

**Przykład** Metryk  $d_p$  i  $d_\infty$  na  $\mathbb{R}^v$  są równoważne, albowiem:

$$d_\infty(x, y) = \max_i |x_i - y_i| \leq d_p(x, y) = \left( \sum_{n=1}^v |x_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (88)$$

Ponadto:

$$d_p(x, y)^p \leq v d_\infty(x, y)^p \implies d_p(x, y) \leq v^{\frac{1}{p}} d_\infty(x, y) \quad (89)$$

Wystarczy więc wziąć  $C_1 = 1$  i  $C_2 = v^{\frac{1}{p}}$ .

### Fakt

Jeśli  $d$  i  $\delta$  są równoważne, to  $x_n \rightarrow g$  w  $(X, d) \iff x_n \rightarrow g$  w  $(X, \delta)$ .

### Warunek Cauchy'ego

Powiemy, że ciąg  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  spełnia **warunek Cauchy'ego** (i.e. że jest **ciągami Cauchy'ego**), jeśli:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall (m, n \geq N_\varepsilon) : d(x_m, x_n) \leq \varepsilon. \quad (90)$$

### Przestrzeń zupełna

Powiemy, że przestrzeń  $(X, d)$  jest **zupełna** jeśli każdy ciąg Cauchy'ego w tej przestrzeni jest zbieżny.

Zauważmy, że  $(\mathbb{R}, d_2)$  (czyli liczby rzeczywiste ze standardową metryką Euklidesową) to przestrzeń zupełna, co udowodniliśmy.  $(\mathbb{Q}, d_2)$  nie jest przestrzenią zupełną (gdyż np. ciąg kolejnych przybliżeń dziesiętnych  $\sqrt{2}$  spełnia warunek Cauchy'ego, jednak nie ma w  $\mathbb{Q}$  granicy).

### Kule

Niech  $(X, d)$  - p-n metryczna. Wtedy **kulą (otwartą)** o środku  $x_0 \in X$  i promieniu  $r \in \mathbb{R}_+$  nazywamy zbiór:

$$\text{Ball}(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}. \quad (91)$$

### Punkty wewnętrzne

Niech  $(X, d)$  - p-n metryczna,  $A \subseteq X$  i  $a \in A$ . Powiemy, że  $a$  jest **punktem wewnętrznym**  $A$ , jeśli:

$$\exists r > 0 : \text{Ball}(a, r) \subseteq A. \quad (92)$$

Widzimy więc, że jeśli  $a$  jest punktem wewnętrznym  $A$ , to znajduje się w  $A$  razem z pewną kulą wokół siebie - można potocznie sobie więc wyobrazić, że  $a$  nie może być na "brzegu"  $A$ .

### Zbiór otwarty

Powiemy, że  $A$  jest **otwarty** (w ustalonej p-n metrycznej  $(X, d)$ ), jeśli każdy jego punkt jest punktem wewnętrznym:

$$\forall a \in A \exists r > 0 : \text{Ball}(a, r) \subseteq A. \quad (93)$$

Dla ustalonej przestrzeni metrycznej zdefiniujemy  $\mathcal{T}$  jako rodzinę wszystkich zbiorów otwartych w tej przestrzeni. Wprowadzimy też zapis:

$$U \underset{\text{otw.}}{\subseteq} X, \quad (94)$$

jeśli  $U$  jest otwartym podzbiorem  $X$  (i.e. jeśli  $U \in \mathcal{T}$ ).

### Właściwości $\mathcal{T}$

1.  $\emptyset \in \mathcal{T}$  oraz  $X \in \mathcal{T}$ .
2.  $U, V \in \mathcal{T} \implies U \cap V \in \mathcal{T}$ . Inaczej mówiąc (rozszerzywszy łatwo twierdzenie za pomocą indukcji), skończony iloczyn zbiorów otwartych jest otwarty.

3.  $\{U_i\}_{i \in I}$  - rodzina zbiorów otwartych. Wtedy

$$\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}. \quad (95)$$

Zauważmy, że nie zakładamy, że jest to skończona (ani nawet przeliczalna) rodzina.

### Dowód

1. Prawdziwym jest zdanie, że dla każdego elementu należącego do  $\emptyset$  jest on punktem wewnętrznym. Ponadto:

$$\forall_{x \in X, r > 0} \text{Ball}(x, r) \subseteq X, \quad (96)$$

co wynika za samej definicji Ball.

2. Skoro  $U, V$  są otwarte, to dla każdego  $x \in U \cap V$  istnieją  $r_1$  i  $r_2$  takie, że:

$$\text{Ball}(x, r_1) \in U, \quad \text{Ball}(x, r_2) \in V.$$

Wtedy jednak:

$$\text{Ball}(x, \min\{r_1, r_2\}) \in U, \quad \text{Ball}(x, \min\{r_1, r_2\}) \in V.$$

Wystarczy więc wziąć  $r = \min\{r_1, r_2\}$

3. Dla każdego  $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$  mamy  $i \in I$  takie, że  $x \in U_i$ . Wtedy jednak istnieje takie  $r$ , że  $\text{Ball}(x, r) \in U_i$ , przeto  $\text{Ball}(x, r) \in \bigcup_{i \in I} U_i$ .

### Stwierdzenie

Kula otwarta jest otwarta.

### dowód

Istotnie, jeśli niech  $y \in \text{Ball}(x, r)$ . Wtedy  $d(x, y) < r$ . Zauważmy, że  $\text{Ball}(y, r - d(x, y)) \subseteq \text{Ball}(x, r)$ , bowiem jeśli  $z \in \text{Ball}(y, r - d(x, y))$ , to  $d(z, y) < r - d(x, y)$ , zatem:

$$d(z, x) < d(z, y) + d(y, x) < r,$$

czyli  $z \in \text{Ball}(x, r)$ .

### Punkt skupienia

Niech  $(X, d)$  - p-ń metryczna i  $A \subseteq X$ , wtedy punkt  $x \in X$  nazwiemy **punktem skupienia**  $A$ , jeśli:

$$\forall_{r > 0} : \text{Ball}(x, r) \cap A \neq \emptyset. \quad (97)$$

### Zbiór domknięty

Zbiór  $A$  nazwiemy **domkniętym** jeśli zawiera wszystkie swoje punkty skupienia. To znaczy:

$$\forall_{x \in X} [\forall_{r>0} : \text{Ball}(x, r) \cap A \neq \emptyset \implies x \in A]. \quad (98)$$

Podobnie jak  $\mathcal{T}$ , zdefiniujemy  $\mathcal{F}$  jako rodzinę wszystkich zbiorów domkniętych w danej przestrzeni. Będziemy również pisać:

$$U \subseteq_{\text{domk.}} X, \quad (99)$$

jeśli  $U$  jest domkniętym podzbiorem  $X$ .

### Kula domknięta

**Kulą domkniętą** o środku  $x_0 \in X$  i promieniu  $r \in \mathbb{R}_+$  nazwiemy zbiór:

$$\overline{\text{Ball}}(x, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) \leq r\}. \quad (100)$$

### Stwierdzenie

Kula domknięta jest domknięta.

### Dowód

Niech  $y \notin \overline{\text{Ball}}(x, r)$ . Wtedy  $d(y, x) > r$ . Weźmy  $R = d(y, x) - r > 0$ . Wtedy  $\text{Ball}(y, R) \cap \overline{\text{Ball}}(x, r) = \emptyset$ . Albowiem, jeśli  $z \in \text{Ball}(y, R)$ , to  $d(z, y) < d(y, x) - r$ , zatem  $d(x, z) \geq d(x, y) - d(z, y) > r$ , czyli  $z \notin \overline{\text{Ball}}(x, r)$ .

### Dopełnienie zbioru otwartego jest domknięte

Niech  $A \subseteq X$ .  $A$  jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy  $X \setminus A$  jest domknięty.

### Dowód

Mamy następujący ciąg równoważności:

$$(X \setminus A) \text{ - domknięty} \iff \quad (101)$$

$$\forall_{y \in (X \setminus A)} \exists_{r>0} : \text{Ball}(y, r) \cap (X \setminus A) = \emptyset \iff \quad (102)$$

$$\forall_{y \in A} \exists_{r>0} : \text{Ball}(y, r) \subseteq X \setminus (X \setminus A) = A \iff \quad (103)$$

$$A \text{ - otwarty} \quad (104)$$

Zauważmy, że istnieją zbiory jednocześnie domknięte i otwarte. Na przykład w każdej przestrzeni metrycznej są to  $\emptyset$  oraz cała przestrzeń. W  $\mathbb{R}$  są to jedynie takie zbiory. Za to w przestrzeni dyskretniej, wszystkie zbiory mają tę własność.



### Stwierdzenie

Zbiór  $A$  jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy  $A$  jest sumą kul.

### Dowód

$\Rightarrow$  Możemy wybrać sumę rodziny generowanej w ten sposób, że każdemu elementowi przypisujemy kulę mu odpowiadającą, która należy do  $A$ :

$$\forall_{y \in A} \exists_{r(y) > 0} : \text{Ball}(y, r(y)) \subseteq A. \quad (105)$$

Zatem:

$$A = \bigcup_{y \in A} \{y\} \subseteq \bigcup_{y \in A} \text{Ball}(y, r(y)) \quad (106)$$

oraz:

$$\bigcup_{y \in A} \text{Ball}(y, r(y)) \subseteq A, \quad (107)$$

więc:

$$A = \bigcup_{y \in A} \text{Ball}(y, r(y)) \quad (108)$$

$\Leftarrow$  W drugą stronę sprawa jest jasna - suma każdej rodziny kul (i.e. zbiorów otwartych) będzie otwarta.

## Koniec

## Spis treści

<b>1</b>	<b>Wstęp</b>	<b>1</b>
1.1	Relacje . . . . .	1
1.2	Liczby rzeczywiste . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Ciagi rzeczywiste</b>	<b>5</b>
2.1	Pojęcie ciągu i ogólne rezultaty . . . . .	5
2.2	lim sup i lim inf . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Szeregi liczbowe</b>	<b>11</b>
3.1	Szeregi o wyrazach dodatnich . . . . .	11
3.2	Szeregi o wyrazach dowolnych . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Przestrzeń metryczna</b>	<b>19</b>