

Notatki do Analizy I R

Na podstawie wykładu głoszzonego przez prof. Sołtana w 2023 r.

red. Filip Baciak

November 2023

1 Wstęp

1.1 Relacje

Definicja 1.1. Relacja

Relacją R ze zbioru A do zbioru B nazywamy podzbiór iloczynu kartezjańskiego tych dwu zbiorów:

$$R \subseteq A \times B. \quad (1)$$

Jeśli $(x, y) \in R$ to piszemy xRy .

Przykłady relacji:

- Relacja równości $R \subseteq A \times A$, zdefiniowana:

$$R = \{(a, a) | a \in A\}. \quad (2)$$

- Na zbiorze \mathbb{N} mamy relację wewnętrzną (tj. będącą podzbiorem \mathbb{N}^2):

$$R = \{(n, m) | n \leq m\}. \quad (3)$$

Definicja 1.2. Relacja równoważności

Relacją równoważności nazywamy relację $R \subseteq A \times A$, spełniającą następujące aksjomaty:

1. Zwrotność:

$$\forall_{x \in A} : xRx. \quad (4)$$

2. Symetryczność:

$$\forall_{x, y \in A} : xRy \implies yRx. \quad (5)$$

3. Przechodność:

$$\forall_{x, y, z \in A} : xRy \wedge yRz \implies xRz. \quad (6)$$

Przykładem relacji równoważności jest relacja R_f zadana przez funkcję $f : A \rightarrow B$:

$$xR_f y \iff f(x) = f(y). \quad (7)$$

Definicja 1.3. Częściowy porządek

Częściowym porządkiem na zbiorze A nazywamy relację $R \subseteq A^2$ (którą oznaczamy \leq i piszemy $x \leq y$ zamiast xRy), jeśli ma następujące cechy:

1. Zwrotność:

$$\forall_{x \in A} : x \leq x. \quad (8)$$

2. Antysymetryczność:

$$\forall_{x, y \in A} : x \leq y \wedge y \leq x \implies x = y. \quad (9)$$

3. Przechodność:

$$\forall_{x, y, z \in A} : xRy \wedge yRz \implies xRz. \quad (10)$$

Zbiór parę (A, \leq) nazywamy zbiorem częściowo uporządkowanym.

Na przykład relacja wewnętrzna na zbiorze \mathbb{N}^2 zdefiniowana następująco:

$$(a, b) \leq (a', b') \iff a \leq a' \wedge b \leq b',$$

zadaje częściowy porządek nad \mathbb{N}^2 .

Definicja 1.4. Porządek liniowy

Porządek częściowy \leq nad A nazywamy **liniowym**, jeśli:

$$\forall_{x, y \in A} : x \leq y \vee x \leq y. \quad (11)$$

Zbiór z określonym porządkiem liniowym nazywamy **uporządkowanym liniowo**. Jeśli $x \leq y \wedge x \neq y$ to piszemy $x < y$.

Zauważmy, że porządek częściowy - jak sama nazwa wskazuje - niekoniecznie określa relację wielkości między każdymi dwoma elementami zbioru na którym jest określony. Tę własność ma dopiero porządek liniowy.

Definicja 1.5. Ograniczenia

Podzbiór $X \subseteq A$ zbioru uporządkowanego liniowo (A, \leq) nazywamy **ograniczonym z góry**, jeśli:

$$\exists_{u \in A} \forall_{x \in X} : x \leq u. \quad (12)$$

Podobnie definiujemy **ograniczenie z dołu**:

$$\exists_{l \in A} \forall_{x \in X} : l \leq x. \quad (13)$$

Elementy u i l nazywamy odpowiednio **ograniczeniem górnym** i **ograniczeniem dolnym**.

Definicja 1.6. Kresy górne i dolne

Kresem górnym podzbioru $X \subseteq A$ uporządkowanego (A, \leq) nazwiemy najmniejsze jego ograniczenie górne, to znaczy taką liczbę $b \in A$, że:

- b jest ograniczeniem górnym X ,
- jeśli l jest ograniczeniem górnym X , to $b \leq l$.

Podobnie - jako największe ograniczenie dolne - definiujemy **kres dolny**. Kres górny zbioru X oznaczamy $\sup X$, a kres dolny $\inf X$.

Zauważmy, że w ogólności zbiór nie musi mieć kresu górnego lub dolnego, a jeśli go ma to kres nie musi być elementem tegoż zbioru.

1.2 Liczby rzeczywiste

Definicja 1.7. \mathbb{R}

Liczbami rzeczywistymi nazywamy zbiór \mathbb{R} z określonymi działaniami dodawania $+$ i mnożenia \cdot , wyróżnionymi, różnymi elementami 0 i 1 i określoną relacją porządku liniowego \leq - w skrócie $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ - taki że:

1. \mathbb{R} jest ciałem, tzn. spełnia:

(a) Zamkniętość dodawania i mnożenia:

$$\forall_{a,b \in \mathbb{R}} : a + b \in \mathbb{R} \wedge a \cdot b \in \mathbb{R}; \quad (14)$$

(b) 0 jest elementem neutralnym dodawania:

$$\forall_{a \in \mathbb{R}} : a + 0 = a; \quad (15)$$

(c) Istnieją elementy odwrotne względem dodawania:

$$\forall_{a \in \mathbb{R}} \exists_{-a \in \mathbb{R}} : a + (-a) = 0; \quad (16)$$

(d) Dodawanie jest łączne:

$$\forall_{a,b,c \in \mathbb{R}} : (a + b) + c = a + (b + c); \quad (17)$$

(e) Dodawanie jest przemienne:

$$\forall_{a,b \in \mathbb{R}} : a + b = b + a; \quad (18)$$

(f) 1 jest elementem neutralnym mnożenia:

$$\forall_{a \in \mathbb{R}} : a \cdot 1 = a; \quad (19)$$

(g) Mnożenie jest łączne:

$$\forall_{a,b,c \in \mathbb{R}} : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c); \quad (20)$$

(h) Mnożenie jest przemienne:

$$\forall_{a,b \in \mathbb{R}} : a \cdot b = b \cdot a; \quad (21)$$

(i) Istnieją elementy przeciwne względem mnożenia (z wyjątkiem 0):

$$\forall_{a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \exists_{a^{-1} \in \mathbb{R}} : a \cdot a^{-1} = 1; \quad (22)$$

(j) Dodawanie jest rozdzielne względem mnożenia:

$$\forall_{a,b,c \in \mathbb{R}} : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c. \quad (23)$$

2. Porządek liniowy \leq spełnia:

(a) Możliwość dodawania "stronami":

$$\forall_{a,b,t \in \mathbb{R}} : a \leq b \implies a + t \leq b + t; \quad (24)$$

(b) Mnożenie dodatnich zachowuje dodatniość

$$\forall_{a,b \in \mathbb{R}} : 0 < a \wedge 0 < b \implies 0 < a \cdot b. \quad (25)$$

3. \mathbb{R} jest zwarty, tj. każdy niepusty zbiór ograniczony z góry ma kres górny w \mathbb{R} .

Można podać konstrukcję ciała o podanych własnościach (np. konstrukcja Dedekina, konstrukcja Rie-

man) i dowieść, że z dokładnością do izomorfizmu istnieje tylko jedno takie ciało.

Twierdzenie 1.1. Własność Archimedesa

$$\forall x > 0, y \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : nx > y. \quad (26)$$

Dowód.

Twierdzenia dowiedziemy nie wprost:

Niech $X = nx | n \in \mathbb{N}$ i założmy, że X jest ograniczony z góry przez y . Zatem posiada supremum: $\alpha = \sup X$. Wiemy, że $\alpha - x < \alpha$, więc nie może to być ograniczenie górne. Zatem:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : n_0 x > \alpha - x.$$

Ale wtedy:

$$(n_0 + 1)x > \alpha = \sup X.$$

Sprzeczność! Istotnie więc, zbiór $nx | n \in \mathbb{N}$ nie może być ograniczony przez żadną liczbę, co dowodzi tezy.

Twierdzenie 1.2. Gęstość \mathbb{Q} w \mathbb{R}

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y \exists r \in \mathbb{Q} : x < r < y. \quad (27)$$

Dowód.

Skoro $y - x > 0$, to $\exists n \in \mathbb{N} : n(y - x) > 1$. Ponadto, skoro $1 > 0$, to $\exists m_1, m_2 \in \mathbb{N} : m_1 > nx \wedge m_2 > -nx$. Zatem $-m_2 < nx < m_1$, tzn. nx leży pomiędzy dwiema liczbami całkowitymi. Istnieje więc takie $m \in \mathbb{Z}$, takie że:

$$m - 1 \leq nx < m.$$

Stąd już prosto:

$$nx < m \leq nx + 1 < ny,$$

$$x < \frac{m}{n} < y.$$

Na koniec krótka notka - zbiór $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, to jest liczby rzeczywiste z dołączonymi symbolami (nie liczbami!) plus i minus nieskończoności, nazywami **rozszerzonymi liczbami rzeczywistymi**.

2 Ciagi rzeczywiste

2.1 Pojęcie ciągu i ogólne rezultaty

Definicja 2.1. Ciąg

Ciagiem elementów z zbioru X nazywamy funkcję:

$$a : \mathbb{N} \rightarrow X \quad (28)$$

i zamiast $a(n)$ piszemy a_n . Cały ciąg oznaczamy $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. My w szczególności zajmować się będziemy ciągami rzeczywistymi i zespolonymi.

W sekcji tej, o ile nie powiedziano inaczej, zakładamy, że wszystkie ciągi są rzeczywiste.

Definicja 2.2. ZBIEŻNOŚĆ CIĄGU

Ciąg rzeczywisty $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nazywamy zbieżnym do granicy g , jeśli:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - g| \leq \varepsilon. \quad (29)$$

Piszemy wtedy: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$ lub $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g$.

Ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nazywamy **ograniczonym**, jeśli:

$$\exists C \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq C. \quad (30)$$

Obserwacja 1. Obserwacja

Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.

Twierdzenie 2.1. Arytmetyka granic

Niech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będą ciągami rzeczywistymi, takimi, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$.

Wtedy:

1.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a + b_n = a + b \quad (31)$$

2.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a \cdot b_n = a \cdot b \quad (32)$$

3.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a|_n = |a| \quad (33)$$

4. Jeśli $b_n \neq 0$ DDD n (dla dostatecznie dużych n) i $b \neq 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \quad (34)$$

Dowód.

W dowodach wszystkich tych twierdzeń chcemy dla dowolnego ε skonstruować takie N , że dla wszystkich $n \geq N$ różnica między wyrazami ciągu po lewej a granicą po prawej stronie jest mniejsza od ε . Pamiętajmy tutaj, że:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq M_\varepsilon : |a_n - a| \leq \varepsilon, \quad (35)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq K_\varepsilon : |b_n - b| \leq \varepsilon, \quad (36)$$

1. Mamy:

$$|a_n + b_n - a - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b|, \quad (37)$$

więc dla $n \geq N = \max\{M_{\frac{\varepsilon}{2}}, K_{\frac{\varepsilon}{2}}\}$:

$$|a_n + b_n - a - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad (38)$$

2.

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n| |b_n - b| + |b| |a_n - a|. \quad (39)$$

Ale $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ograniczony, więc $a_n \leq C$ i mamy:

$$|a_n b_n - ab| \leq |a_n| |b_n - b| + |b| |a_n - a| \leq (|C| + 1) |b_n - b| + (|b| + 1) |a_n - a|. \quad (40)$$

Zatem dla $n \geq \max\{M_{\frac{\varepsilon}{2(|b|+1)}}, K_{\frac{\varepsilon}{2(|C|+1)}}\}$:

$$|a_n b_n - ab| \leq (|C| + 1) \frac{\varepsilon}{2(|C| + 1)} + (|b| + 1) \frac{\varepsilon}{2|b| + 1} = \varepsilon. \quad (41)$$

Dodaliśmy tutaj 1 do $|C|$ i $|b|$, żeby uniknąć ewentualnego dzielenia przez 0.

3. Jeśli $a > 0$, to ciąg od pewnego miejsca musi być dodatni: $|a_n| = a_n$ dla $n > M_{|a|}$, więc dla $n > N = \max\{M_{|a|}, M_\varepsilon\}$:

$$||a_n| - |a|| = |a_n - a| < \varepsilon.$$

Podobnie, jeśli $a < 0$, to ciąg od pewnego miejsca jest ujemny i $|a_n| = -a_n$ dla $n > M_{|a|}$, więc dla $n > N = \max\{M_{|a|}, M_\varepsilon\}$:

$$||a_n| - |a|| = |-a_n - |a|| = |a_n - a| < \varepsilon.$$

Dla $a = 0$, mamy prosto:

$$|a_n| < \varepsilon \implies ||a_n|| < \varepsilon.$$

4. Zakładamy, że $b_n \neq 0$ DDD n , więc istnieje takie K_0 , że dla $n \geq K_0$ $b_n \neq 0$. Wtedy:

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| = \left| \frac{a_n b - a b_n}{b_n b} \right| = \left| \frac{a_n b - ab + ab - a b_n}{b_n b} \right| = \left| \frac{b(a_n - a) + a(b - b_n)}{b_n b} \right| \quad (42)$$

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| \leq \left| \frac{a_n - a}{b_n} \right| + \left| \frac{a}{b_n b} \right| |b_n - b| \leq \left| \frac{a_n - a}{b_n} \right| + \left(\left| \frac{a}{b_n b} \right| + 1 \right) |b_n - b| \quad (43)$$

Zauważmy, że dla $n \geq K_{\frac{1}{2|b|}}$ mamy $|b_n - b| \leq \frac{1}{2|b|}$, więc $\frac{1}{2|b|} \leq |b_n|$, przez co:

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| \leq \left| \frac{a_n - a}{b_n} \right| + \left(\left| \frac{a}{b_n b} \right| + 1 \right) |b_n - b| \leq \left| \frac{2}{b} \right| |a_n - a| + \left(\left| \frac{2a}{b} \right| + 1 \right) |b_n - b| \quad (44)$$

Ostatecznie dla $n > \max\{K_0, K_{\frac{1}{2|b|}}, K_{\frac{\varepsilon}{2(|\frac{2a}{b}|+1)}}, M_{\frac{\varepsilon}{4|b|}}\}$:

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| \leq \left| \frac{2}{b} \right| \frac{\varepsilon}{4|b|} + \left(\left| \frac{2a}{b} \right| + 1 \right) \frac{\varepsilon}{2(|\frac{2a}{b}| + 1)} = \varepsilon. \quad (45)$$

Powiemy teraz o mocnym twierdzeniu, pozwalającym stwierdzić, czy ciąg ma granicę, bez jej wyznaczania.

Twierdzenie 2.2. Twierdzenie o ciągu monotonicznym i ograniczonym

Każdy ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.

- Jeśli ciąg jest niemalejący, to jest on zbieżny do supremum zbioru wyrazów ciągu.
- Jeśli ciąg jest nierosnący, to jest on zbieżny do infimum zbioru wyrazów ciągu.

Uwaga - dla ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ supremum jego wyrazów - tj. $\sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ - oznaczamy $\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$.

Analogicznie piszemy $\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$ dla infimum jego wyrazów.

Dowód.

Załóżmy, że $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest niemalejący. Zbiór $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ jest ograniczony, zatem posiada supremum. Oznaczmy je g . Zatem dla każdego $\varepsilon > 0$ liczba $g - \varepsilon$ nie jest ograniczeniem górnym:

$$\exists_m : g - \varepsilon \leq a_m \leq g. \quad (46)$$

Ale wtedy, z racji monotoniczności $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\forall_{n \geq m} : g - \varepsilon \leq a_m \leq a_n \leq g \leq g + \varepsilon. \quad (47)$$

Czyli:

$$\forall_{n \geq m} : |a_n - g| \leq \varepsilon, \quad (48)$$

co chcieliśmy pokazać. Dla $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nierosnącego dowód jest zupełnie analogiczny (można też rozważać zbieżność niemalejącego ciągu $(-a_n)_{n \in \mathbb{N}}$).

Twierdzenie 2.3. Twierdzenie o trzech ciągach

Niech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będą dwoma ciągami zbieżnymi do wspólnej granicy g . Wtedy, jeśli dla ciągu $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ istnieje takie N , że:

$$\forall_{n \geq N} : a_n \leq b_n \leq c_n, \quad (49)$$

to $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g$.

Dowód.

Dowód jest bardzo krótki. Dla dowolnego ε bierzemy takie M_ε , że $\forall_{n \geq M_\varepsilon} : |a_n - g| \leq \varepsilon$ i takie K_ε , że: $\forall_{n \geq K_\varepsilon} : |c_n - g| \leq \varepsilon$. Wtedy dla $n \geq \max\{N, M_\varepsilon, K_\varepsilon\}$:

$$g - \varepsilon \leq a_n \leq b_n \leq c_n \leq g + \varepsilon, \quad (50)$$

więc $|b_n - g| \leq \varepsilon$.

Definicja 2.3. Rozbieżność do $\pm\infty$

Powiemy, że ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest rozbieżny do $+\infty$, jeśli:

$$\forall C \exists N_C \in \mathbb{N} \forall n \geq N_C : a_n \geq C. \quad (51)$$

Analogicznie, powiemy, że ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest rozbieżny do $-\infty$, jeśli:

$$\forall C \exists N_C \in \mathbb{N} \forall n \geq N_C : a_n \leq C. \quad (52)$$

Mówimy też o "zbieżności" do $\pm\infty$, tj. zbieżności w zbiorze $\overline{\mathbb{R}}$

Obserwacja 2.

Ciąg monotoniczny, nieograniczony jest rozbieżny do $\pm\infty$.

Definicja 2.4. Podciąg

Podciągiem ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nazywamy ciąg $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, gdzie $n \ni k \mapsto n_k \in \mathbb{N}$ jest funkcją ściśle rosnącą.

Obserwacja 3.

Jeśli $a_n \rightarrow g$, to każdy podciąg $a_{n_k} \rightarrow g$

2.2 \limsup i \liminf

Założmy, że mamy dany ciąg liczb rzeczywistych $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Zdefiniujemy wtedy następujące dwa ciągi: $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oraz $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, takie że:

$$\alpha_n = \inf\{a_k \mid k \geq n\} \quad (53)$$

$$\beta_n = \sup\{a_k \mid k \geq n\} \quad (54)$$

Wtedy, $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem niemalejącym, co wynika z faktu, że:

$$\inf\{a_k \mid k \geq n+1\} \subseteq \inf\{a_k \mid k \geq n\}$$

Podobnie, $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem nierosnącym. Z tego wynika więc, że są to ciągi zbieżne w $\overline{\mathbb{R}}$. Mamy więc:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \sup \alpha_n, \quad (55)$$

gdyż $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ to ciąg nierosnący oraz podobnie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \inf \beta_n. \quad (56)$$

Definicja 2.5. Granice górne i dolne ciągu

Wielkość:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf\{a_k \mid k \geq n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \sup \alpha_n \quad (57)$$

nazywamy **granicą dolną** ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i oznaczamy $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$. Podobnie, wielkość:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{a_k \mid k \geq n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \inf \beta_n \quad (58)$$

nazywamy **granicą górną** ciągu i oznaczamy $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Twierdzenie 2.4. Bolzano-Weierstrassa I

Niech L będzie zbiorem punktów skupienia zbioru $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, tzn. takich liczb, dla których istnieje podciąg ciągu $((a_n)_{n \in \mathbb{N}})$ zbieżny do tej liczby:

$$L = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid \exists \text{ podciąg } (a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} : \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = x\}. \quad (59)$$

Wtedy:

$$1. \quad L \neq \emptyset \quad (60)$$

$$2. \quad \liminf a_n \in L \quad \wedge \quad \limsup a_n \in L \quad (61)$$

$$3. \quad \liminf a_n = \inf L \quad \wedge \quad \limsup a_n = \sup L \quad (62)$$

Dowód.

TODO

Nietrudnym wnioskiem z tego twierdzenia jest następujące:

Twierdzenie 2.5. Kryterium zbieżności

Ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny do $a \in \overline{\mathbb{R}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\liminf a_n = \limsup a_n. \quad (63)$$

Dowód.

\Rightarrow Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, to także każdy podciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dąży do a , więc $L = \{a\}$. Ale $\liminf a_n \in L$ i $\limsup a_n \in L$, więc:

$$\liminf a_n = a = \limsup a_n. \quad (64)$$

\Leftarrow Oczywiście zachodzi nierówność:

$$\alpha_n \leq a_n \leq \beta_n. \quad (65)$$

Skoro mamy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \liminf a_n = \limsup a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n, \quad (66)$$

więc z twierdzenia o trzech ciągach mamy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf a_n = \limsup a_n. \quad (67)$$

Twierdzenie 2.6. Warunek Cauchy'ego

Niech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem rzeczywistym. Wtedy następujące warunki są równoważne:

1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R} \quad (68)$$

2.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M_\varepsilon \forall n, m \geq M_\varepsilon |a_n - a_m| \leq \varepsilon. \quad (69)$$

Jeśli ciąg spełnia ten warunek, mówimy, że spełnia warunek Cauchy'ego.

Sprawdzając warunek Cauchy'ego, możemy dowodzić zbieżności ciągu do granicy rzeczywistej bez wyznaczania tej granicy.

Dowód.

1. \Rightarrow 2. Skoro $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zbieżny do $a \in \mathbb{R}$, to dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $N_{\frac{\varepsilon}{2}}$, że:

$$\forall n, m \geq N_{\frac{\varepsilon}{2}} : |a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} \wedge |a_m - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad (70)$$

ale wtedy:

$$|a_n - a_m| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad (71)$$

2. \Rightarrow 1. Zauważmy, że $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem ograniczonym. Istotnie, weźmy $\varepsilon = 1$:

$$\exists M_1 \forall n \geq M_1 : |a_n - a_{M_1}| \leq 1, \quad (72)$$

więc:

$$\min\{a_{M_1} - 1; a_k \mid k < M_1\} \leq a_n \leq \max\{a_{M_1} + 1; a_k \mid k < M_1\}. \quad (73)$$

Weźmy teraz dowolny $\varepsilon > 0$. Z ograniczoności $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wynika: $\alpha = \liminf a_n \in \mathbb{R}$ i $\beta = \limsup a_n \in \mathbb{R}$. Oznacza to, że:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A_\varepsilon \forall n \geq A_\varepsilon : |\alpha_n - \alpha| \leq \varepsilon, \quad (74)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists B_\varepsilon \forall n \geq B_\varepsilon : |\beta_n - \beta| \leq \varepsilon, \quad (75)$$

Zauważmy, że:

$$|\alpha - \beta| \leq |\alpha - \alpha_n| + |\beta - \beta_n| + |\alpha_n - \beta_n|. \quad (76)$$

Dwa pierwsze czynniki po prawej potrafimy ograniczyć, zbadajmy więc ostatni wyraz:

$$\begin{aligned} |\alpha_n - \beta_n| &\leq |\alpha_n - a_n| + |\beta_n - a_n| = |\inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\} - a_n| + |\sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\} - a_n| \\ &= \inf\{|a_m - a_n| \mid m \geq n\} + \sup\{|a_m - a_n| \mid m \geq n\}. \end{aligned} \quad (77)$$

Możemy teraz skorzystać z warunku Cauchy'ego i znaleźć takie $M_{\frac{\varepsilon}{6}}$, że:

$$\forall m \geq n \geq M_{\frac{\varepsilon}{6}} : |a_m - a_n| \leq \frac{\varepsilon}{6}. \quad (78)$$

Zatem dla $n \geq M_{\frac{\varepsilon}{6}}$:

$$\inf\{|a_m - a_n| \mid m \geq n\} \leq \frac{\varepsilon}{6} \quad (79)$$

$$\sup\{|a_m - a_n| \mid m \geq n\} \leq \frac{\varepsilon}{6} \quad (80)$$

Ostatecznie otrzymujemy dla $n \geq \max\{A_{\frac{\varepsilon}{3}}, B_{\frac{\varepsilon}{3}}, M_{\frac{\varepsilon}{6}}\}$:

$$|\alpha - \beta| \leq |\alpha - \alpha_n| + |\beta - \beta_n| + |\alpha_n - a_n| + |\beta_n - a_n| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \varepsilon. \quad (81)$$

Pokazaliśmy, że różnica $|\liminf a_n - \limsup a_n|$ jest mniejsza od dowolnej liczby dodatniej, zatem musi być równa 0. Oznacza to, że $\liminf a_n = \limsup a_n \in \mathbb{R}$, a więc - co udowodniliśmy już wcześniej - ciąg jest zbieżny do rzeczywistej granicy.

3 Szeregi liczbowe

Definicja 3.1. Szereg liczbowy

Niech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczb zespolonych ($a_n \in \mathbb{C}$). **Szeregiem** o wyrazach $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nazwiemy napis:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \quad (82)$$

N -tą sumą częściową szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazwiemy sumę:

$$S_N = \sum_{n=1}^N a_n. \quad (83)$$

Powiemy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest **zbieżny** do S , jeśli:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = S \in \mathbb{C}. \quad (84)$$

Napiszemy wtedy, że $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$, a liczbę S nazwiemy sumą szeregu. Jeśli S_N nie ma granicy, to szereg nazwiemy **rozbieżnym**.

Przykład 1. Jeśli $a_n = (-1)^n$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

Przykład 2. Jeśli $a_n = q^{n-1}$, dla $|q| < 1$, to $S_N = \frac{1-q^N}{1-q}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1-q}$.

Twierdzenie 3.1.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall \varepsilon \exists N_\varepsilon \forall N \geq M \geq N_\varepsilon \left| \sum_{n=M+1}^N a_n \right| \leq \varepsilon. \quad (85)$$

Dowód.

Twierdzenie wynika prosto z zastosowania warunku Cauchy'ego do ciągu S_N . Bowiem S_N jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall \varepsilon \exists N_\varepsilon \forall N \geq M \geq N_\varepsilon |S_N - S_M| \leq \varepsilon, \quad (86)$$

co po rozpisaniu S_N i S_M jest równoważne twierdzeniu.

$\sum_{n=M+1}^N a_n$ nazywa się czasami **ogonem szeregu**.

Obserwacja 4. Warunek konieczny zbieżności

Warunkiem koniecznym zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest, aby $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Istotnie, wystarczy podstawić $M = N - 1$ w twierdzeniu 3, żeby otrzymać definicję zbieżności a_n do 0.

Warto pamiętać, że nie jest to warunek wystarczający - kontrprzykładem jest np. rozbieżny szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Wtedy

$$S_{2^k} = 1 + \sum_{l=1}^k \sum_{j=2^{l-1}+1}^{2^l} \frac{1}{j} \geq 1 + \sum_{l=1}^k \frac{2^{l-1}}{2^l} = 1 + \frac{1}{2}k \rightarrow \infty. \quad (87)$$

Zatem i $S_N \rightarrow \infty$, bo jest to ciąg monotoniczny.

3.1 Szeregi o wyrazach dodatnich

W tej sekcji zajmujemy się jedynie szeregami o wyrazach dodatnich, to jest takimi, dla których $\mathbb{R} \ni a_n \geq 0$.

Obserwacja 5.

Dla szeregów o wyrazach dodatnich, ciąg sum częściowych jest niemalejącym ciągiem rzeczywistym. Oznacza to, że szereg jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg sum częściowych jest ograniczony. W przeciwnym wypadku $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = +\infty$ i wtedy mówimy, że $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny do $+\infty$.

Twierdzenie 3.2. Kryterium porównawcze

Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ będą szeregami o wyrazach dodatnich. Wtedy:

1. Jeśli $\exists_{C>0} : a_n \leq C b_n$ DDDn, to:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty. \quad (88)$$

2. Jeśli $\exists C > 0 : a_n \geq C b_n$ DDDn, to:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty. \quad (89)$$

Dowód.

Niech N_0 będzie oznaczał indeks, od którego podane nierówności zachodzą.

1. Dla $N > N_0$ mamy:

$$S_N^{(a)} = S_{N_0}^{(a)} + \sum_{n=N_0+1}^N a_n \leq S_{N_0}^{(a)} + \sum_{n=N_0+1}^N C b_n = S_{N_0}^{(a)} - C S_{N_0}^{(b)} + C S_N^{(b)} \leq S_{N_0}^{(a)} - C S_{N_0}^{(b)} + C \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty.$$

Zatem skoro $S_N^{(a)}$ jest ograniczony, to (por. Obs. 3.1) jest i zbieżny.

2. Podobnie jak poprzednio, dla $N > N_0$ mamy:

$$S_N^{(a)} = S_{N_0}^{(a)} + \sum_{n=N_0+1}^N a_n \geq S_{N_0}^{(a)} + \sum_{n=N_0+1}^N C b_n = S_{N_0}^{(a)} - C S_{N_0}^{(b)} + C S_N^{(b)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \infty,$$

więc $S_N^{(a)}$ jest rozbieżny do nieskończoności.

Twierdzenie 3.3. Kryterium porównawcze (wersja graniczna)

Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ będą szeregami o wyrazach dodatnich i niech $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$. Wtedy:

1. Jeśli $L < \infty$, to:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty. \quad (90)$$

2. Jeśli $L > 0$, to:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty. \quad (91)$$

Dowód.

1. Jeśli $L < \infty$, to $a_n \leq (L + 1) b_n$ dla dostatecznie dużych n i stosujemy Tw. 3.1.1.

2. Jeśli $L > 0$, to $a_n \leq \frac{1}{2} L b_n$ DDDn (ew. $a_n \leq 2 b_n$, jeśli $L = \infty$) i stosujemy Tw. 3.1.2.

Twierdzenie 3.4. Kryterium D'Alemberta

Niech $\forall_n a_n > 0$ i niech $d_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Wtedy:

1.

$$\limsup d_n < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \quad (92)$$

2.

$$(\liminf d_n > 1 \vee \exists_k \forall_{n \geq k} : d_n \geq 1) \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty. \quad (93)$$

Ponadto, jeśli zachodzi poprzecznik implikacji, to $a_n \not\rightarrow 0$.

Dowód.

1. Skoro $\limsup d_n < 1$, to d_n musi być ograniczony. Niech λ będzie taką liczbą, że $1 > \lambda > \limsup d_n$. Zauważmy, że może istnieć tylko skończona liczba wyrazów d_n większych lub równych λ , gdyż inaczej wybralibyśmy z nich podciąg zbieżny do granicy $\geq \lambda$, co przeczy założeniu, że $\lambda < \limsup d_n$. Zatem:

$$\exists_N \forall_{n \geq N} : d_n < \lambda.$$

Czyli:

$$\exists_N \forall_{n \geq N} : a_{n+1} < \lambda a_n.$$

Stąd, dla $n > N$: $a_n < \frac{a_N}{\lambda^{n-N}} \lambda^n$. Tak więc na mocy kryterium porównawczego ze zbieżnym szeregiem $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n$ ($\lambda < 1$) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

2. Jeśli $\liminf d_n > 1$, to (używając podobnego rozumowania, jak poprzednio) istnieje $\rho > 1$ t.j. $d_n > \rho$. Skoro tak, to DDDn: $a_{n+1} > \rho a_n > a_n$ i a_n , jako rosnący ciąg o wyrazach dodatnich, nie może dążyć do 0. Podobnie, jeśli DDDn mamy $d_n \geq 1$, to $a_{n+1} \geq a_n$ i znowu a_n nie może dążyć do 0.

Uwagi.

1. Może być tak, że $d_n \geq 1$ dla nieskończenie wielu n , a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Przykład:

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{(\frac{n}{2})^2}, & \text{gdy } n = 2k \\ \frac{1}{(\frac{n-1}{2})^2}, & \text{gdy } n = 2k+1 \end{cases}$$

2. Może być tak, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, ale $\limsup d_n > 1$.

Następne kryterium jest rozszerzeniem kryterium D'Alemberta:

Twierdzenie 3.5. Kryterium Cauchy'ego

TODO

Twierdzenie 3.6.

Załóżmy, że $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest szeregiem o wyrazach dodatnich ($a_n > 0$). Wtedy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sup_{\substack{F \subset \mathbb{N} \\ |F| < +\infty}} \sum_{n \in F} a_n. \quad (94)$$

Dowód.

Oczywiście, skoro S_N jest rosnący, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \sup_{N \in \mathbb{N}} S_N$. Łatwo widzieć też, że $\sup_{N \in \mathbb{N}} S_N \leq \sup_{\substack{F \subset \mathbb{N} \\ |F| < +\infty}} \sum_{n \in F} a_n$ (ponieważ S_N to suma tego samego typu, co po prawej stronie z $F = \{1, \dots, N\}$). Dodatkowo, dla każdego skończonego $F \subseteq \mathbb{N}$, istnieje takie N , że $\forall_{n \in F} n \leq N$, zatem $\sum_{n \in F} a_n \leq S_N$. Ostatecznie mamy $\sup_{\substack{F \subset \mathbb{N} \\ |F| < +\infty}} \sum_{n \in F} a_n \leq \sup_{N \in \mathbb{N}} S_N$, stąd te dwie wielkości są sobie równe i mamy tezę.

Wynikają z tego następujące wnioski:

Twierdzenie 3.7.

1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \iff \exists_{C>0} \forall_{F \subset \mathbb{N}, |F| < +\infty} \sum_{n \in F} a_n \leq C$$

(Zbiór wszystkich sum elementów o indeksach pochodzących ze SKOŃCZONEGO podzbioru \mathbb{N} jest ograniczony)

2. Jeśli $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ jest bijekcją (permutacją indeksów), to:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Oznacza to, że zmiana kolejności sumowania nie wpływa na wynik.

3. Jeśli:

$$\mathbb{N} = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad (\text{jest to suma rozłączna, tj. } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ dla } i \neq j)$$

i:

$$S_i = \sum_{n \in A_i} a_n,$$

to:

$$\sum_{i=1}^{\infty} S_i = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Jest to grupowania (łączności i przemienności) dla szeregu.

Dowód.

1. Ograniczoność sum po prawej jest oczywiście równoważne istnieniu skończonego ich supremum, co równe jest sumie po lewej.
2. σ zachowuje klasę skończonych podzbiorów i wyznacza bijekcję:

$$\sigma : 2^{\mathbb{N}} \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$$

$$\sigma(F) = \{\sigma(n) \mid n \in F\},$$

która zachowuje moc zbioru F i przeprowadza zbiory skończone na skończone. Zatem:

$$\left\{ \sum_{n \in F} a_n \mid F \subset \mathbb{N}, |F| < \infty \right\} = \left\{ \sum_{n \in \sigma(F)} a_n \mid F \subset \mathbb{N}, |F| < \infty \right\},$$

więc:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sup \left\{ \sum_{n \in F} a_n \mid F \subset \mathbb{N} \right\} = \sup \left\{ \sum_{n \in \sigma(F)} a_n \mid F \subset \mathbb{N}, |F| < \infty \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$$

3. a) Jeśli $\exists j : S_j = \infty$, to:

$$\sum_{i=1}^{\infty} S_i = \infty$$

i:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \geq \sum_{n \in A_j} a_n = \infty.$$

Stąd:

$$\sum_{i=1}^{\infty} S_i = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

- b) Niech $\forall i : S_i < \infty$. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i weźmy dowolny:

$$K \subset \mathbb{N}, \quad |K| < \infty.$$

Przypomnijmy:

$$\sum_{i=1}^{\infty} S_i = \sup_{\substack{K \subset \mathbb{N}, \\ |K| < \infty}} \sum_{j \in K} S_j.$$

Niech $K = \{i_1, i_2, \dots, i_l\}$ i wybierzmy:

$$C_1 \subseteq A_{i_1}, C_2 \subseteq A_{i_2}, \dots, C_l \subseteq A_{i_l},$$

takie, że:

$$\forall j : \sum_{n \in C_j} a_n \geq S_{i_j} - \frac{\varepsilon}{l},$$

co jest możliwe, gdyż S_{i_j} jest supremum sum po skończonych podzbiorach. Jeśli A_{i_j} jest skończony, możemy przyjąć $C_j = A_{i_j}$.

Wtedy:

$$\sum_{i \in K} S_i = S_{i_1} + S_{i_2} + \dots + S_{i_l} \leq \left(\sum_{n \in C_1} a_n + \frac{\varepsilon}{l} \right) + \left(\sum_{n \in C_l} a_n + \frac{\varepsilon}{l} \right) + \dots + \left(\sum_{n \in C_l} a_n + \frac{\varepsilon}{l} \right) = \varepsilon + \sum_{n \in \bigcup_{j=1}^l C_j} a_n.$$

NB: $\bigcup_{j=1}^l C_j$ jest zbiorem skończonym, więc:

$$\sum_{i \in K} S_i \leq \varepsilon + \sup_{\substack{F \subset \mathbb{N} \\ |F| < +\infty}} \sum_{n \in F} a_n = \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Rozumowanie to przeprowadziliśmy dla dowolnego K i ε , więc:

$$\sum_{i=1}^{\infty} S_i = \sup_{\substack{K \subset \mathbb{N} \\ |K| < \infty}} \sum_{i \in K} S_i \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

W drugą stronę, weźmy $F \subset \mathbb{N}$, $|F| < \infty$ i niech:

$$K = \{i \in \mathbb{N} \mid A_i \cap F \neq \emptyset\},$$

wtedy $|K| < \infty$, bo F jest skończony, a A_j są rozłączne. Wtedy mamy:

$$\sum_{n \in F} a_n = \sum_{i \in K} \sum_{n \in A_i \cap F} a_n \leq \sum_{i \in K} \sum_{n \in A_i} a_n = \sum_{i \in K} S_i.$$

Z tego:

$$\sum_{n \in F} a_n \leq \sum_{i \in K} S_i \leq \sup_{\substack{K \subset \mathbb{N} \\ |K| < \infty}} \sum_{i \in K} S_i = \sum_{i=1}^{\infty} S_i,$$

co zachodzi dla dowolnego F skończonego. Zatem:

$$\sup_{\substack{F \subset \mathbb{N} \\ |F| < \infty}} \sum_{n \in F} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{i=1}^{\infty} S_i.$$

Porównując dwie otrzymane nierówności, otrzymujemy tezę.

3.2 Szeregi o wyrazach dowolnych

W tej podsekcji rozważamy szeregi o dowolnych wyrazach zespolonych:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n, \quad z_n \in \mathbb{C}.$$

Twierdzenie 3.8. Kryterium zbieżności bezwzględnej

Jeśli następujący szereg jest zbieżny:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < +\infty$$

to i:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

jest zbieżny.

Dowód.

Korzystamy z warunku Cauchy'ego dla szeregu modułów:

$$\forall \varepsilon \exists N_\varepsilon \forall n > m \geq N_\varepsilon : \left| \sum_{k=m+1}^n |z_k| \right| \leq \varepsilon,$$

ale:

$$\left| \sum_{k=m+1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |z_k|,$$

więc:

$$\forall \varepsilon \exists M_\varepsilon = N_\varepsilon \forall n > m \geq M_\varepsilon : \left| \sum_{k=m+1}^n z_k \right| \leq \varepsilon.$$

To dowodzi, że warunek Cauchy'ego zachodzi dla $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, zatem jest to szereg zbieżny.

Definicja 3.2. Zbieżność bezwzględna

- Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ nazywamy zbieżnym bezwzględnie, jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ jest zbieżny.
- Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny, ale $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ już nie, to szereg nazywamy zbieżnym warunkowo.

Dla szeregów o wyrazach dowolnych obowiązują inne kryteria zbieżności niż dla szeregów o wyrazach dodatnich. Jednym z nich, jest:

Twierdzenie 3.9. Kryterium Dirichleta

Założmy, że:

- Mamy ciągi:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad a_n \in \mathbb{C}$$
$$(b_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad b_n \in \mathbb{R}, \quad b_n \geq 0$$

- b_n zbiega monotonicznie do 0.
- Ciąg sum częściowych wyrazów (a_n) jest ograniczony:

$$\exists C \in \mathbb{R} \forall N \in \mathbb{N} : \left| \sum_{n=1}^N a_n \right| \leq C.$$

Wtedy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jest zbieżny.

Uwaga! W kryterium tym wystarczy, żeby b_n był nierosnący (i.e. nie trzeba, by był on ściśle malejący).

Przykład - szeregi naprzemienne. Weźmy szereg postaci:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n,$$

gdzie $b_n \searrow 0$ (dąży monotonicznie z góry do 0). Szereg taki nazywamy szeregiem naprzemiennym. Z kryterium Dirichleta wynika, że każdy szereg takiej postaci jest zbieżny (co nazywa się czasem kryterium Leibnitza). W szczególności:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln 2.$$

Dowód kryterium Dirichleta.

Niech $\sum_{n=1}^N a_n = z_N$. Zauważmy, że (z_N) jest ciągiem ograniczonym. Zapiszmy sumy częściowe docelowego szeregu:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N a_n b_n &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_N b_N = z_1 b_1 + (z_2 - z_1) b_2 + \dots + (z_N - z_{N-1}) b_N = \\ &= z_1 (b_1 - b_2) + z_2 (b_2 - b_3) + \dots + z_{N-1} (b_{N-1} - b_N) + z_N b_N. \end{aligned}$$

Zauważmy, że wyraz $z_N b_N$ jest zbieżny do 0 (jako iloczyn czynnika ograniczonego i czynnika dążącego do 0). Zajmijmy się więc otrzymaną sumą. Zauważmy, że zachodzi:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |z_n (b_n - b_{n+1})| &= \sum_{n=1}^{\infty} |z_n| (b_n - b_{n+1}) \leq C \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) = \\ &= C \lim_{N \rightarrow \infty} (b_1 - b_{N+1}) = C b_1 < +\infty \end{aligned}$$

Zatem szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n (b_n - b_{n+1})$ jest zbieżny bezwzględnie, a więc i zbieżny. Z tego i z równości:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} z_n (b_n - b_{n+1}) + \lim_{n \rightarrow \infty} z_n b_n,$$

Wynika, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ musi być zbieżny.

Kolejnym kryterium zbieżności dla szeregów o wyrazach dowolnych jest prosto wynikające z kryterium Dirichleta tzw.:

Twierdzenie 3.10. Kryterium Abela

Jeśli:

- mamy ciągi:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad a_n \in \mathbb{C}$$

$$(b_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad b_n \in \mathbb{R}$$

- b_n jest monotoniczny i ograniczony,

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Wtedy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jest zbieżny.

Dowód.

Oczywiście $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ istnieje. Wtedy:

$$\sum_{n=1}^N a_n b_n = \sum_{n=1}^N a_n (b_n - b) + b \sum_{n=1}^N a_n.$$

Szereg $b \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest oczywiście zbieżny na mocy założenia. Za to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (b_n - b)$ jest zbieżne na mocy kryterium Dirichleta, zauważmy bowiem, że:

$$\sum_{n=1}^N a_n (b_n - b) = \text{sign}(b_n - b) \sum_{n=1}^N a_n |b_n - b|,$$

ale $|b_n - b| \searrow 0$ na mocy założenia, a sumy częściowe $|\sum_{n=1}^N a_n|$ muszą być ograniczone, gdyż są zbieżne. Warunki kryterium Dirichleta są więc spełnione. Ostatecznie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (b_n - b) + b \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Wszystkie składniki po prawej są zbieżne, zatem szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ także musi być zbieżny.

Grupowanie składników Zajmijmy się teraz kwestią grupowania składników w szeregach o wyrazach dowolnych i kiedy taka operacja nie zmienia wartości szeregu. Prowadźmy jednak trochę

notacji.

Definicja 3.3. Rozbicie na wyrazy dodatnie

Dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ definiujemy następujące ciągi:

- $a_n = \operatorname{Re}(z_n)$
- $b_n = \operatorname{Im}(z_n)$
- $a_n^+ = \max\{0, a_n\}$
- $a_n^- = -\min\{0, a_n\}$
- $b_n^+ = \max\{0, b_n\}$
- $b_n^- = -\min\{0, b_n\}$

Jasnym jest, że:

$$z_n = a_n^+ - a_n^- + i b_n^+ - i b_n^-$$

oraz:

$$0 \leq a_n^+, a_n^-, b_n^+, b_n^- \leq |z_n|.$$

Z ostatniej nierówności wynika (kryterium porównawcze), że jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ jest zbieżny, to i szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^+$ muszą być zbieżne. Wtedy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- + i \sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ - i \sum_{n=1}^{\infty} b_n^-,$$

jako że:

$$\sum_{n=1}^N z_n = \sum_{n=1}^N a_n^+ - \sum_{n=1}^N a_n^- + i \sum_{n=1}^N b_n^+ - i \sum_{n=1}^N b_n^-,$$

Z tego wynika następujący wniosek:

Twierdzenie 3.11. Grupowanie szeregów zbieżnych bezwzględnie

Niech szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ będzie zbieżny bezwzględnie. Wtedy:

1. Jeśli $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ jest bijekcją (permutacją indeksów), to:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} z_n.$$

Oznacza to, że zmiana kolejności sumowania nie wpływa na wynik.

2. Jeśli:

$$\mathbb{N} = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} A_j$$

i:

$$S_j = \sum_{n \in A_j} z_n,$$

to $\sum_{j=1}^{\infty} S_j$ jest zbieżny bezwzględnie i:

$$\sum_{j=1}^{\infty} S_j = \sum_{n=1}^{\infty} z_n.$$

Są to prawa grupowania dla szeregów o wyrazach dowolnych, analogiczne do tych, które zachodzą dla szeregów o wyrazach dodatnich.

Dowód.

1. Mamy następujące równości:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} z_{\sigma(n)} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}^- + i \sum_{n=1}^{\infty} b_{\sigma(n)}^+ - i \sum_{n=1}^{\infty} b_{\sigma(n)}^- = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- + i \sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ - i \sum_{n=1}^{\infty} b_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \end{aligned}$$

W 2 równości korzystamy z analogicznego prawa dla zbieżnych szeregów dodatnich.

Oczywiście, jako że $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny bezwzględnie, to mamy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |z_{\sigma(n)}|,$$

więc permutacja szeregu zbieżnego bezwzględnie jest także zbieżna bezwzględnie.

2. Mamy:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |S_j| = \sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{n \in A_j} z_n \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n \in A_j} |z_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < +\infty.$$

Widzimy więc, że $\sum_{j=1}^{\infty} S_j$ jest także zbieżny bezwzględnie. Jako że $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny bezwzględnie, więc tym bardziej jego podszeregi muszą być zbieżne bezwzględnie. Możemy więc zapisać:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N S_j &= \sum_j \sum_{n \in A_j} z_n = \sum_{j=1}^N \left(\sum_{n \in A_j} a_n^+ - \sum_{n \in A_j} a_n^- + i \sum_{n \in A_j} b_n^+ - i \sum_{n \in A_j} b_n^- \right) = \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{n \in A_j} a_n^+ - \sum_{j=1}^N \sum_{n \in A_j} a_n^- + i \sum_{j=1}^N \sum_{n \in A_j} b_n^+ - i \sum_{j=1}^N \sum_{n \in A_j} b_n^-. \end{aligned}$$

Każdy z szeregów po prawej stronie jest szeregiem zbieżnym o wyrazach dodatnich. Biorąc granicę $N \rightarrow \infty$ otrzymamy więc:

$$\sum_{j=1}^{\infty} S_j = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n \in A_j} a_n^+ - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n \in A_j} a_n^- + i \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n \in A_j} b_n^+ - i \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n \in A_j} b_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} z_n,$$

co wynika z odpowiednich twierdzeń dla szeregów dodatnich.

4 Przestrzenie metryczne

4.1 Podstawowe definicje. Otwartość i domkniętość

Zmienimy teraz temat, odchodząc od analizy zbieżności w liczbach zespolonych i rozpoczniemy rozważania o temacie znacznie bardziej ogólnym, mianowicie o przestrzeniach z metrykami, będących uogólnieniem znanego pojęcia odległości w \mathbb{C} .

Definicja 4.1. Metryka

Ustalmy X będące dowolnym niepustym zbiorem. Funkcję:

$$d : X \times X \rightarrow [0; +\infty[$$

nazywamy **metryką**, jeśli spełnia następujące aksjomaty:

1.

$$\forall_{x,y \in X} : d(x,y) = d(y,x),$$

2.

$$\forall_{x,y \in X} : d(x,y) = 0 \iff x = y,$$

3.

$$\forall_{x,y,z \in X} : d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$$

O metryce myśleć można, jako o funkcji zwracającej "odległość" między dwoma elementami w zbiorze X . Podane aksjomaty zapewniają, że nasza metryka spełniać będzie "zdraworozsądkowe" własności odległości. 1. nakłada warunek symetryczności na metrykę - odległość z x do y musi być równa odległości z y do x . 2. normalizuje metrykę, mówiąc, że punkt jest odległy o 0 od samego siebie i **tylko** od samego siebie. 3. to tak zwana **nierówność trójkąta** - dodając na drodze między dwoma punktami trzeci punkt nie można odległości skrócić.

Definicja 4.2. Przestrzeń metryczna

Parę (X, d) - gdzie X to niepusty zbiór, a $d : X \times X \rightarrow [0; +\infty[$ to metryka - nazywamy **przestrzenią metryczną**.

Przykłady Pokażemy parę przykładów przestrzeni metrycznych, aby dać pojęcie, jak mogą one wyglądać.

- $X = \mathbb{R}$ $d(x, y) = |x - y|$ - jest to odległość między dwiema liczbami rzeczywistymi, z której korzystaliśmy np. przy definicji granicy ciągu.
- $X = \mathbb{R}^v$, gdzie $v \in \mathbb{N}$ jest wymiarem przestrzeni,

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{n=1}^v |x_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Podstawiając za p różne wartości możemy otrzymać wiele alternatywnych metryk. Np. dla $p = 1$ otrzymujemy tzw. **metrykę Manhattanu**:

$$d_1(x, y) = \sum_{n=1}^v |x_n - y_n|.$$

Nazwa pochodzi od tego, że jest to odległość jaką trzeba pokonać między dwoma punktami, mogąc przemieszczać się tylko równolegle do osi współrzędnych - tak jak na Manhattanie, gdzie ulice są do się prostopadłe.

Dla $p = 2$ otrzymujemy znaną **odległość Euklidesową**:

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{n=1}^v (x_n - y_n)^2}.$$

- $X = \mathbb{R}^v$,

$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq n \leq v} |x_n - y_n|.$$

Jest to tak zwana **metryka maximum**. Indeks ∞ wziął się z faktu, że o d_∞ myśleć można o jako o granicy d_p dla $p \rightarrow \infty$, mamy bowiem:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^v a_n^p \right)^{\frac{1}{p}} = \max_{1 \leq n \leq v} a_n.$$

- Dla dowolnego zbioru X definiujemy **metrykę dyskretną**:

$$d(x, y) = \delta_{x,y} = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & x \neq y \end{cases}. \quad (95)$$

- Niech X będzie zbiorem funkcji klasy C^0 (tj, funkcji ciągłych) z $[0; 1]$ na \mathbb{C} . Wtedy za odległość między dwiema funkcjami przyjąć możemy:

$$d(f, g) = \sup_{x \in [0; 1]} |f(x) - g(x)|. \quad (96)$$

- Dla X takiego samego jak w poprzednim punkcie można określić także:

$$d_p(f, g) = \left(\int_0^1 |f(x) - g(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (97)$$

Definicja 4.3. Zbieżność w przestrzeni metrycznej

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną i niech $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem elementów z X . Powiemy, że $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny do $g \in X$, jeśli:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq N_\varepsilon : d(x_n, g) < \varepsilon, \quad (98)$$

co możemy alternatywnie zapisać, jako:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, g) = 0. \quad (99)$$

Oczywiście jeśli $x_n \rightarrow g$ i $x_n \rightarrow g'$, to $g = g'$ - co wynika z faktu, że jedynym elementem odległym o 0 od g jest g . Ponadto jeśli $x_n \rightarrow g$ to każdy podciąg $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ także dąży do g : $x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} g$.

Definicja 4.4. Równoważność metryk

Niech d i δ będą metrykami na X . Powiemy, że d i δ są równoważne, jeśli:

$$\exists_{C_1, C_2 \in \mathbb{R}} : \forall_{x, y \in X} : C_1 d(x, y) \leq \delta(x, y) \leq C_2 d(x, y). \quad (100)$$

Łatwo widać, że jest to relacja symetryczna, przechodnia i zwrotna.

Przykład Metryk d_p i d_∞ na \mathbb{R}^n są równoważne, albowiem:

$$d_\infty(x, y) = \max_i |x_i - y_i| \leq d_p(x, y) = \left(\sum_{n=1}^n |x_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (101)$$

Ponadto:

$$d_p(x, y)^p \leq n d_\infty(x, y)^p \implies d_p(x, y) \leq n^{\frac{1}{p}} d_\infty(x, y) \quad (102)$$

Wystarczy więc wziąć $C_1 = 1$ i $C_2 = n^{\frac{1}{p}}$.

Obserwacja 6.

Jeśli d i δ są równoważne, to $x_n \rightarrow g$ w $(X, d) \iff x_n \rightarrow g$ w (X, δ) .

Definicja 4.5. Warunek Cauchy'ego

Powiemy, że ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ spełnia **warunek Cauchy'ego** (i.e. że jest **ciągami Cauchy'ego**), jeśli:

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{N_\varepsilon \in \mathbb{N}} \forall (m, n \geq N_\varepsilon) : d(x_m, x_n) \leq \varepsilon. \quad (103)$$

Definicja 4.6. Przestrzeń zupełna

Powiemy, że przestrzeń (X, d) jest **zupełna** jeśli każdy ciąg Cauchy'ego w tej przestrzeni jest zbieżny.

Zauważmy, że (\mathbb{R}, d_2) (czyli liczby rzeczywiste ze standardową metryką Euklidesową) to przestrzeń zupełna, co udowodniliśmy. (\mathbb{Q}, d_2) nie jest przestrzenią zupełną (gdyż np. ciąg kolejnych przybliżeń dziesiętnych $\sqrt{2}$ spełnia warunek Cauchy'ego, jednak nie ma w \mathbb{Q} granicy).

Definicja 4.7. Kule

Niech (X, d) - p-ń metryczna. Wtedy **kulą (otwartą)** o środku $x_0 \in X$ i promieniu $r \in \mathbb{R}_+$ nazywamy zbiór:

$$\text{Ball}(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}. \quad (104)$$

Definicja 4.8. Punkty wewnętrzne

Niech (X, d) - p-ń metryczna, $A \subseteq X$ i $a \in A$. Powiemy, że a jest **punktem wewnętrznym** A , jeśli:

$$\exists_{r > 0} : \text{Ball}(a, r) \subseteq A. \quad (105)$$

Widzimy więc, że jeśli a jest punktem wewnętrznym A , to znajduje się w A razem z pewną kulą wokół siebie - można potocznie sobie więc wyobrazić, że a nie może być na "brzegu" A .

Definicja 4.9. Zbiór otwarty

Powiemy, że A jest **otwarty** (w ustalonej p -ń metrycznej (X, d)), jeśli każdy jego punkt jest punktem wewnętrznym:

$$\forall a \in A \exists r > 0 : \text{Ball}(a, r) \subseteq A. \quad (106)$$

Dla ustalonej przestrzeni metrycznej zdefiniujemy \mathcal{T} jako rodzinę wszystkich zbiorów otwartych w tej przestrzeni. Wprowadzimy też zapis:

$$U \underset{\text{otw.}}{\subseteq} X, \quad (107)$$

jeśli U jest otwartym podzbiorem X (i.e. jeśli $U \in \mathcal{T}$).

Twierdzenie 4.1. Własności \mathcal{T}

1. $\emptyset \in \mathcal{T}$ oraz $X \in \mathcal{T}$.
2. $U, V \in \mathcal{T} \implies U \cap V \in \mathcal{T}$. Inaczej mówiąc (rozszerzywszy łatwo twierdzenie za pomocą indukcji), skończony iloczyn zbiorów otwartych jest otwarty.
3. $\{U_i\}_{i \in I}$ - rodzina zbiorów otwartych. Wtedy

$$\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}. \quad (108)$$

Zauważmy, że nie zakładamy, że jest to skończona (ani nawet przeliczalna) rodzina.

Dowód.

1. Prawdziwym jest zdanie, że dla każdego elementu należącego do \emptyset jest on punktem wewnętrznym. Ponadto:

$$\forall x \in X, r > 0 \text{Ball}(x, r) \subseteq X, \quad (109)$$

co wynika za samej definicji Ball.

2. Skoro U, V są otwarte, to dla każdego $x \in U \cap V$ istnieją r_1 i r_2 takie, że:

$$\text{Ball}(x, r_1) \in U, \quad \text{Ball}(x, r_2) \in V.$$

Wtedy jednak:

$$\text{Ball}(x, \min\{r_1, r_2\}) \in U, \quad \text{Ball}(x, \min\{r_1, r_2\}) \in V.$$

Wystarczy więc wziąć $r = \min\{r_1, r_2\}$

3. Dla każdego $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$ mamy $i \in I$ takie, że $x \in U_i$. Wtedy jednak istnieje takie r , że $\text{Ball}(x, r) \in U_i$, przeto $\text{Ball}(x, r) \in \bigcup_{i \in I} U_i$.

Twierdzenie 4.2.

Kula otwarta jest otwarta.

Dowód.

Istotnie, jeśli niech $y \in \text{Ball}(x, r)$. Wtedy $d(x, y) < r$. Zauważmy, że $\text{Ball}(y, r - d(x, y)) \subseteq \text{Ball}(x, r)$, bowiem jeśli $z \in \text{Ball}(y, r - d(x, y))$, to $d(z, y) < r - d(x, y)$, zatem:

$$d(z, x) < d(z, y) + d(y, x) < r,$$

czyli $z \in \text{Ball}(x, r)$.

Definicja 4.10. Punkt skupienia

Niech (X, d) - p-ń metryczna i $A \subseteq X$, wtedy punkt $x \in X$ nazwiemy **punktem skupienia** A , jeśli:

$$\forall_{r>0} : \text{Ball}(x, r) \cap A \neq \emptyset. \quad (110)$$

Definicja 4.11. Zbiór domknięty

Zbiór A nazwiemy **domkniętym** jeśli zawiera wszystkie swoje punkty skupienia. To znaczy:

$$\forall_{x \in X} [\forall_{r>0} : \text{Ball}(x, r) \cap A \neq \emptyset \implies x \in A]. \quad (111)$$

Podobnie jak \mathcal{T} , zdefiniujemy \mathcal{F} jako rodzinę wszystkich zbiorów domkniętych w danej przestrzeni. Będziemy również pisać:

$$U \underset{\text{domk.}}{\subseteq} X, \quad (112)$$

jeśli U jest domkniętym podzbiorem X .

Definicja 4.12. Kula domknięta

Kulą domkniętą o środku $x_0 \in X$ i promieniu $r \in \mathbb{R}_+$ nazwiemy zbiór:

$$\overline{\text{Ball}}(x, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) \leq r\}. \quad (113)$$

Twierdzenie 4.3.

Kula domknięta jest domknięta.

Dowód.

Niech $y \notin \overline{\text{Ball}}(x, r)$. Wtedy $d(y, x) > r$. Weźmy $R = d(y, x) - r > 0$. Wtedy $\text{Ball}(y, R) \cap \overline{\text{Ball}}(x, r) = \emptyset$. Albowiem, jeśli $z \in \text{Ball}(y, R)$, to $d(z, y) < d(y, x) - r$, zatem $d(x, z) \geq d(x, y) - d(z, y) > r$, czyli $z \notin \overline{\text{Ball}}(x, r)$.

Twierdzenie 4.4. Dopełnienie zbioru otwartego jest domknięte

Niech $A \subseteq X$. A jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy $X \setminus A$ jest domknięty.

Dowód.

Mamy następujący ciąg równoważności:

$$(X \setminus A) - \text{domknięty} \iff (114)$$

$$\forall y \notin (X \setminus A) \exists r > 0 : \text{Ball}(y, r) \cap (X \setminus A) = \emptyset \iff (115)$$

$$\forall y \in A \exists r > 0 : \text{Ball}(y, r) \subseteq X \setminus (X \setminus A) = A \iff (116)$$

$$A - \text{otwarty} (117)$$

Zauważmy, że istnieją zbiory jednocześnie domknięte i otwarte. Na przykład w każdej przestrzeni metrycznej są to \emptyset oraz cała przestrzeń. W \mathbb{R} są to jedynie takie zbiory. Za to w przestrzeni dyskretniej, wszystkie zbiory mają tę własność.

Twierdzenie 4.5.

Zbiór A jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy A jest sumą kul.

Dowód.

\implies Możemy wybrać sumę rodziny generowanej w ten sposób, że każdemu elementowi przypisujemy kulę mu odpowiadającą, która należy do A :

$$\forall y \in A \exists r(y) > 0 : \text{Ball}(y, r(y)) \subseteq A. (118)$$

Zatem:

$$A = \bigcup_{y \in A} \{y\} \subseteq \bigcup_{y \in A} \text{Ball}(y, r(y)) (119)$$

oraz:

$$\bigcup_{y \in A} \text{Ball}(y, r(y)) \subseteq A, (120)$$

więc:

$$A = \bigcup_{y \in A} \text{Ball}(y, r(y)) (121)$$

\Leftarrow W drugą stronę sprawa jest jasna - suma każdej rodziny kul (i.e. zbiorów otwartych) będzie otwarta.

Obserwacja 7. na temat \mathcal{F}

1. $\emptyset, X \in \mathcal{F}$.
2. $\mathcal{F} = \{X \setminus A \mid A \in \mathcal{T}\}$.
3. $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cup B \in \mathcal{F}$. Inaczej mówiąc - skończony iloczyn zbiorów domkniętych jest domknięty.
4. $\{V_i\}_{i \in I}$ - rodzina zbiorów domkniętych. Wtedy

$$\bigcap_{i \in I} V_i \in \mathcal{T}. (122)$$

Fakty te są oczywistą konsekwencją własności \mathcal{T} i prawa, które mówi, że dopełnienie zbioru otwartego jest domknięte.

Spójrzmy jeszcze na przykład, pokazujący, że w 3. własność ta zachodzi tylko dla sum skończonych:

$$]0, 1[= \bigcup_{i=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right].$$

Definicja 4.13. Wnętrze i domknięcie

Niech $B \subseteq X$.

Wnętrzem zbioru B , oznaczanym B° , nazywamy zbiór wszystkich punktów wewnętrznych B .

Domknięciem zbioru B , oznaczanym \bar{B} , nazywamy zbiór punktów skupienia B .

Innymi słowy:

$$x \in B^\circ \iff \exists_r : \text{Ball}(x, r) \subseteq B. \quad (123)$$

$$x \in \bar{B} \iff \forall_r : \text{Ball}(x, r) \cap B \neq \emptyset. \quad (124)$$

Obserwacja 8.

$$B^\circ \subseteq B \subseteq \bar{B} \quad (125)$$

Obserwacja 9.

- B - otwarty $\iff B^\circ = B$.
- B - domknięty $\iff \bar{B} = B$.

Twierdzenie 4.6.

$$X \setminus \bar{B} = (X \setminus B)^\circ \quad (126)$$

lub

$$\bar{B} = X \setminus (X \setminus B)^\circ. \quad (127)$$

Dowód.

$$x \in X \setminus \bar{B} \iff x \text{ nie jest punktem skupienia } B \iff \exists_r \text{Ball}(x, r) \cap B = \emptyset \iff \exists_r \text{Ball}(x, r) \cap B \subseteq X \setminus B \iff x \in (X \setminus B)^\circ.$$

Powiemy teraz o bardzo ważnym twierdzeniu pozwalającym utożsamić punkty skupienia z granicami ciągów ze zbioru.

Twierdzenie 4.7.

Niech $B \subseteq X$. Wtedy domknięcie B to zbiór granic ciągów z B , tj.:

$$\bar{B} = \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \mid (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \wedge \forall_n x_n \in B \right\}. \quad (128)$$

Dowód.

⊇ Dla każdego $x \in \bar{B}$ zdefiniujmy ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ następująco - niech x_n to dowolny element należący do $\text{Ball}(x, \frac{1}{n}) \cap B$ (jest to zbiór zawsze niepusty na mocy tego, że x jest punktem skupienia B). Oczywiście $x_n \rightarrow x$, gdyż $d(x_n, x) < \frac{1}{n} \rightarrow 0$.

⊆ Odwrotnie, jeśli $x_n \rightarrow x$ i $\forall_n : x_n \in B$, to:

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{N_\varepsilon} \forall_{n \geq N_\varepsilon} : B \ni x_n \in \text{Ball}(x, \varepsilon) \implies \forall_{\varepsilon > 0} \text{Ball}(x, \varepsilon) \cap B \neq \emptyset, \quad (129)$$

skąd mamy $x \in \bar{B}$.

Definicja 4.14. Ograniczoność

Powiemy, że $B \subseteq X$ jest **ograniczony**, jeśli:

$$\exists_{x \in X, r > 0} : B \subseteq \text{Ball}(x, r). \quad (130)$$

Definicja 4.15. Gęstość

Powiemy, że $A \subseteq X$ jest **gęsty** w $B \subseteq X$, jeśli:

$$B \subseteq \bar{A}. \quad (131)$$

Uwaga! Mówiąc po prostu, że zbiór jest gęsty, mamy na myśli, że jest gęsty w X .

Przykład \mathbb{Q} jest gęsty w \mathbb{R} .

Definicja 4.16. Otoczenie

$A \subseteq X$ jest otoczeniem punktu $x \in X$, jeśli:

$$\exists_{U \subseteq X \atop \text{otw.}} : x \in U \subseteq A. \quad (132)$$

Warunek ten jest równoważny temu, że $x \in A^\circ$.

Dla danego punktu rodzinę wszystkich jego otoczeń oznaczajmy $\mathcal{N}(x)$:

$$\mathcal{N}(x) = \{A \in \mathcal{P}(X) = 2^X \mid x \in A^\circ\}. \quad (133)$$

Twierdzenie 4.8.

Niech $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem elementów X . Wtedy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \iff \forall_{A \in \mathcal{N}(x)} \exists_{N_A \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq N_A} : x_n \in A. \quad (134)$$

Dowód.

\Leftarrow Weźmy $A_\varepsilon \text{Ball}(x, \varepsilon)$. Wtedy:

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{N_\varepsilon} \forall_{n \geq N_\varepsilon} : x_n \in \text{Ball}(x, \varepsilon) \implies d(x_n, x) < \varepsilon. \quad (135)$$

implies x_n zbiega do x , zatem:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \forall n \geq N_\varepsilon : d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Mamy też:

$$A \in \mathcal{N}(x) \implies \exists \varepsilon : \text{Ball}(x, \varepsilon) \subseteq A.$$

Wystarczy więc wziąć $N_A = N_\varepsilon$. Wtedy będzie:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \forall n \geq N_\varepsilon : (d(x_n, x) < \varepsilon \wedge \text{Ball}(x, \varepsilon) \subseteq A) \implies x_n \in A. \quad (136)$$

Twierdzenie to mówi nie mniej, nie więcej niż to, że jeśli ciąg zbiega do jakiegoś punktu, to w każdym otoczeniu tego punktu znajdują się prawie wszystkie wyrazy tego ciągu.

Twierdzenie 4.9.

Niech (X, d) - p-ń. metryczna, niech $Y \subseteq X$ i niech $d_Y = d|_{Y \times Y}$ będzie obcięciem d do Y . Wtedy:

1. $A \subseteq Y$ jest otwarty w $(Y, d_Y) \iff \exists_{\substack{U \subseteq X \\ \text{otw.}}} : A = Y \cap U.$
2. $A \subseteq Y$ jest domknięty w $(Y, d_Y) \iff \exists_{\substack{F \subseteq X \\ \text{domk.}}} : A = Y \cap F.$

Twierdzenie to daje nam pojęcie o tym, jak wyglądają zbiory otwarte i domknięte w jakimś zawężeniu metryki - mianowicie są to zawężenia odpowiednich zbiorów otwartych i domkniętych.

Dowód.

Zacniemy od dowodu 2.

\implies Niech A domknięty w Y i niech F będzie domknięciem A w X (więc F musi być domknięty w X). Wtedy:

$$F = \{ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in X \mid a_n \in A \},$$

za to:

$$A = \{ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in Y \mid a_n \in A \},$$

gdyż A jest domknięty w Y . Widzimy z tych definicji łatwo, że $A = F \cap Y$.

\Leftarrow W drugą stronę, niech $A = Y \cap F$ i F będzie domknięty w X . Niech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem w A (więc i w F), zbiegającym do g . Wtedy $g \in F$. Zatem jeśli $g \in Y$, to $g \in A$, z konstrukcji A . Pokazaliśmy więc, że każdy ciąg z A zbieżny w Y ma granicę w samym A , zatem A jest domknięty.

2. \implies 1. Pokażemy teraz, jak z 2. wynika 1. Mamy bowiem ciąg następujących równoważności:

$$A \subseteq Y \text{ jest otwarty w } Y \iff Y \setminus A \text{ jest domknięty w } Y \iff \exists_{\substack{F \subseteq X \\ \text{domk.}}} : Y \setminus A = Y \cap F \iff$$

$$\exists_{\substack{F \subseteq X \\ \text{domk.}}} : A = Y \cap (X \setminus F) \iff \exists_{\substack{U \subseteq X \\ \text{otw.}}} : A = Y \cap U.$$

Przedostatnia równoważność, wynika z faktu, że jeśli $Y \setminus A = Y \cap F$, to $A = Y \setminus (Y \cap F) = Y \setminus F = Y \cap (X \setminus F)$ (pamiętamy, że $Y \subseteq X$). Ostatnia równoważność jest konsekwencją tego, że dopełnienie zbioru domkniętego jest otwarte (Tw. 4.1).

4.2 Przekształcenia ciągłe

Zacniemy rozważać teraz przekształcenia (i.e. funkcje) pomiędzy przestrzeniami metrycznymi i wyróżnimy wśród nich szczególnie ważną klasę funkcji ciągłych.

Twierdzenie 4.10. Warunki ciągłości

Niech (X, d) i (Y, δ) będą przestrzeniami metrycznymi, a $\Phi : X \rightarrow Y$ przekształceniem między nimi. Ustalmy też $x_0 \in X$. Wtedy następujące warunki są równoważne:

$$1. \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \lambda_\varepsilon > 0 \forall x \in X : d(x, x_0) < \lambda_\varepsilon \implies \delta(\Phi(x), \Phi(x_0)) < \varepsilon. \quad (137)$$

$$2. \quad \forall U \in \mathcal{N}(\Phi(x_0)) \exists V \in \mathcal{N}(x_0) : \Phi(V) \subseteq U. \quad (138)$$

$$3. \quad \forall U \in \mathcal{N}(\Phi(x_0)) : \Phi^{-1}(U) \in \mathcal{N}(x_0). \quad (139)$$

(Przypominamy, że $\Phi^{-1}(U)$ to w przeciwobraz U).

4. Jeśli $x_n \rightarrow x_0$ w (X, d) , to $\Phi(x_n) \rightarrow \Phi(x_0)$ w (Y, δ) .

Dowód.

1. \implies 2. Dla dowolnego $U \in \mathcal{N}(\Phi(x_0))$ istnieje $\varepsilon > 0$:

$$\text{Ball}(\Phi(x_0), \varepsilon) \subseteq U.$$

Z 1. weźmy więc λ_ε spełniające podaną implikację i $V = \text{Ball}(x_0, \lambda_\varepsilon)$. Wtedy:

$$\Phi(x \in V) \in \text{Ball}(\Phi(x_0), \varepsilon),$$

zatem:

$$\Phi(V) \subseteq \text{Ball}(\Phi(x_0), \varepsilon) \subseteq U.$$

2. \implies 3. Weźmy dowolne $U \in \mathcal{N}(\Phi(x_0))$. Wtedy:

$$\exists V \in \mathcal{N}(x_0) : \Phi(V) \subseteq U,$$

i.e. $V \subseteq \Phi^{-1}(U)$. Ale skoro $V \in \mathcal{N}(x_0)$, to tym bardziej $\Phi^{-1}(U) \in \mathcal{N}(x_0)$, jako rozszerzenie V .

3. \implies 4. Weźmy ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zbieżny do x_0 . Niech $U \in \mathcal{N}(\Phi(x_0))$, skąd $\Phi^{-1}(U) \in \mathcal{N}(x_0)$. Zatem:

$$\exists N_U \forall n \geq N_U : x_n \in \Phi^{-1}(U),$$

z twierdzenia udowodnionego wcześniej. Ergo:

$$\forall U \in \mathcal{N}(\Phi(x_0)) \exists N_U \forall n \geq N_U : \Phi(x_n) \in U.$$

Zatem, z tego samego twierdzenia:

$$\Phi(x_n) \rightarrow \Phi(x_0).$$

4. \implies 1. Dowodzimy nie wprost, że $\neg 1. \implies \neg 4.$ Zaprzeczeniem 1. jest:

$$\exists \epsilon > 0 \forall \lambda \exists x_\lambda \in X : d(x_\lambda, x_0) < \lambda \wedge \delta(\Phi(x_\lambda), \Phi(x_0)) \geq \epsilon.$$

Weźmy $\lambda_n = \frac{1}{n}$ i na tej podstawie skonstruujemy ciąg x_n odpowiadających x_λ w powyższym stwierdzeniu dla odpowiednich λ . Wtedy musi być, że $x_n \rightarrow x_0$, gdyż $d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$, ale $\Phi(x_n) \not\rightarrow \Phi(x_0)$, gdyż $\delta(\Phi(x_n), \Phi(x_0)) \geq \epsilon \forall n$. Zatem zachodzi $\neg 4.$

Definicja 4.17. Odwzorowanie ciągłe

Odwzorowanie spełniające warunki 1. - 4. Twierdzenia 4.2 dla punktu $x_0 \in X$ nazywamy **ciągłym** w x_0 (w p-ń. (X, d)). Jeśli odwzorowanie jest ciągłe w każdym punkcie przestrzeni, nazywamy je po prostu ciągłym.

Czasami, mając na myśli warunek 1., mówimy o tzw. zbieżności według Cauchy'ego, zaś o warunku 4. mówimy, jako zbieżności według Heinego.

Twierdzenie 4.11. Złożenie odwzorowań ciągłych jest ciągłe

Jeśli $\Phi : X \rightarrow Y$ jest ciągłe w $x_0 \in X$ i $\Psi : Y \rightarrow Z$ jest ciągłe w $\Phi(x_0)$, to $\Psi \circ \Phi : X \rightarrow Z$ jest ciągłe w X_0 .

Dowód.

Korzystając np. z 4. warunku ciągłości, weźmy ciąg $x_n \rightarrow x_0$, wtedy $\Phi(x_n) \rightarrow \Phi(x_0)$ z ciągłości Φ . Ponadto $\Psi(\Phi(x_n)) \rightarrow \Psi(\Phi(x_0))$ z ciągłości Ψ . Widzimy, więc prosto, że $\Psi \circ \Phi$ musi być ciągłe.

Twierdzenie 4.12. Ciągłość na całej dziedzinie

$\Phi : X \rightarrow Y$ jest ciągłe na całym X wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall_{\substack{U \subseteq Y \\ \text{otw.}}} : \Phi^{-1}(U) \subseteq X. \quad (140)$$

Inaczej mówiąc, przekształcenie jest ciągłe na całej dziedzinie wtedy i tylko wtedy, gdy przeciwobrazy zbiorów otwartych są otwarte.

Dowód.

\implies Niech $U \subseteq Y$ i $x \in \Phi^{-1}(U)$. Zatem $\Phi(x) \in U$. Skoro U jest otwarty, to musi być otoczeniem $\Phi(x)$, i.e. $U \in \mathcal{N}(\Phi(x))$, zatem (warunek 3.):

$$\Phi^{-1}(U) \in \mathcal{N}(x) \quad \forall_{x \in \Phi^{-1}(U)},$$

czyli $\Phi^{-1}(U)$ jest otwarty.

\Leftarrow Udowadniamy warunek 2.:

$$\forall_{\substack{U \subseteq Y \\ \text{otw.}}} : \Phi^{-1}(U) \subseteq X.$$

Weźmy $x \in X$ i $U \in \mathcal{N}(\Phi(x))$. Wtedy:

$$\exists_{\substack{\tilde{U} \subseteq X \\ \text{otw.}}} : \Phi(x) \in \tilde{U} \subseteq U,$$

więc $V = \Phi^{-1}(\tilde{U})$ - otwarty. Ponadto $x \in V$. Zatem $V \in \mathcal{N}(x)$, oraz $\Phi(V) \subseteq \tilde{U} \subseteq U$, więc 2. zachodzi.

Definicja 4.18. Ciągłość jednostajna

$\Phi : X \rightarrow Y$ nazwiemy **jednostajnie ciągłym**, jeśli:

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\lambda_\varepsilon} : \forall_{x, x' \in X} : d(x, x') \leq \lambda_\varepsilon \implies \delta(\Phi(x), \Phi(x')) \leq \varepsilon. \quad (141)$$

Ważną częścią tejże definicji jest to, że wybór λ zależy jedynie od ε , nie zaś od samych punktów x, x' .

Obserwacja 10.

Każda funkcja jednostajnie ciągła, jest ciągła.

Definicja 4.19. Przekształcenie Lipschitzowskie

Przekształcenie $\Phi : X \rightarrow Y$ nazwiemy **Lipschitzowskim** (i.e. spełniającym **warunek Lipschitza**), jeśli:

$$\exists_{L > 0} \forall_{x, x' \in X} : \delta(\Phi(x), \Phi(x')) \leq L \cdot d(x, x'). \quad (142)$$

Warunek ten mówi, że odległość między wartościami funkcji jest zawsze ograniczona przez odległość między jej argumentami (z pewną proporcjonalnością).

Obserwacja 11.

Funkcje Lipschitzowskie są ciągłe jednostajnie.

Istotnie - wystarczy ustalić: $\lambda_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{L}$.

4.3 Zwartość

Powiemy teraz o bardzo ważnym pojęciu charakteryzującym zbiory w przestrzeni metrycznej - to jest o zwartości.

Definicja 4.20. Pokrycie

Ustalmy (X, d) - p-ń. metryczną. **Pokryciem** zbioru K nazwiemy rodzinę zbiorów $U = \{U_i\}_{i \in I}$, $U_i \subseteq X$, taką że:

$$K \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i. \quad (143)$$

Pokrycie jest otwarte, jeśli wszystkie U_i są otwarte. Pokrycie $V = \{V_i\}_{i \in I'}$ nazwiemy podpokryciem U , jeśli $V \subseteq U$.

Przykład Dla $X = \mathbb{R}$, $K = [0, 1]$, pokryciem K jest rodzina:

$$U_{n \in \mathbb{N}} : U_n = [0, 1 + \frac{1}{n}].$$

Nie jest to pokrycie otwarte.

Definicja 4.21. Zwartość (pokryciowa)

Zbiór $K \subseteq X$ nazwiemy **ZWARTYM**, jeśli z każdego pokrycia otwartego tegoż zbioru, można wybrać podpokrycie skończone (tj. mające skończoną liczbę elementów). Jeśli K jest zwartym podzbiorem X , to zapiszemy $K \subseteq\subseteq X$.

Twierdzenie 4.13. Własności zbiorów zwartych

1. Każdy zbiór zwarty jest ograniczony.
2. Każdy zbiór zwarty jest domknięty.

Dowód.

Niech $K \subseteq\subseteq X$.

1. Weźmy dowolny $x \in X$. Wtedy $\{\text{Ball}(x, \frac{1}{n})\}_{n \in \mathbb{N}}$ niewątpliwie jest pokryciem otwartym K . Skoro tak, to można zeń wybrać skończone podpokrycie. Zatem istnieje $N \in \mathbb{N}$, będące największym z indeksów z tegoż podpokrycia, takie że:

$$K \subseteq \text{Ball}(x, N),$$

jako że kolejne z tych kul zawierają w sobie poprzednie. Widzimy więc, że K jest ograniczony.

2. Dowód nie wprost. Przypuśćmy, że $\exists y$ będący punktem skupienia K , t.ż. $y \notin K$. Weźmy rodzinę zbiorów $\{X \setminus \overline{\text{Ball}}(y, \frac{1}{n})\}_{n \in \mathbb{N}}$. Niewątpliwie jest to pokrycie otwarte, gdyż wszystkie z tych zbiorów są otwarte i sumują się one do $X \setminus \{y\}$. Wybierzmy z niego więc skończone podpokrycie i niech N będzie największym z indeksów w tym podpokryciu. Zauważmy, że wtedy sumujw się ono do $X \setminus \overline{\text{Ball}}(y, \frac{1}{N})$, jako że kolejne z tych zbiorów zawierają w sobie poprzednie. Mamy więc, że $K \subseteq X \setminus \overline{\text{Ball}}(y, \frac{1}{N})$. Wtedy jednak $\text{Ball}(y, \frac{1}{N}) \cap K \subseteq \overline{\text{Ball}}(y, \frac{1}{N}) \cap K = \emptyset$, co przeczy temu, że y jest punktem skupienia K . Sprzeczność! Zatem K rzeczywiście musi być domknięty.

Definicja 4.22. Zwartość ciągowa

Powiemy, że podzbiór $K \subseteq X$ jest **ciągowo zwarty**, jeśli każdy ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zawarty w K ($x_n \in K$) zawiera podciąg zbieżny do granicy w K :

$$\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_n \in K \exists k \mapsto n_k : x_{n_k} \rightarrow g \in K. \quad (144)$$

Twierdzenie 4.14.

Zbiór K ciągowo zwarty jest także domknięty.

Dowód.

Istotnie, jeśli ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ elementów z K jest zbieżny, to każdy jego podciąg jest zbieżny do tej samej granicy. Ale skoro K jest ciągowo zwarty, to $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ma podciąg zbieżny do elementu z K , który będzie wspólną granicą wszystkich podciągów. Zatem i granica $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ musi leżeć w K .

Definicja 4.23. ε - sieć

Niech $K \subseteq X$ i $\varepsilon > 0$. Wtedy $S \subseteq X$ nazwiemy **ε - siecią dla K** jeśli:

$$\forall z \in K \exists s \in S : z \in \text{Ball}(s, \varepsilon). \quad (145)$$

S jest ε - siecią w K jeśli jest ε - siecią dla K i $S \subseteq K$.

Twierdzenie 4.15.

Jeśli K jest ciągowo zwarty, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje skończona ε - sieć w K .

Dowód.

Dowód nie wprost. Przypuśćmy, że istnieje $\varepsilon > 0$, t.ż. w K nie ma skończonej ε - sieci. Skonstruujmy wtedy następująco ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i rodzinę zbiorów $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$:
Niech $x_1 \in K$ będzie dowolne i $U_1 = \text{Ball}(x_1, \varepsilon)$. Oczywiście U_1 nie pokrywa K (z założenia): $K \setminus U_1 \neq \emptyset$. Za x_2 bierzemy więc dowolny element w $K \setminus U_1$, a $U_2 = U_1 \cup \text{Ball}(x_2, \varepsilon)$. Ogólnie $x_n \in K \setminus U_{n-1}$ i $U_n = U_{n-1} \cup \text{Ball}(x_n, \varepsilon)$. Oczywiście $K \setminus U_{n-1} \neq \emptyset$, gdyż gdyby było inaczej, to z konstrukcji mielibyśmy wbrew założeniu skończoną ε - sieć pokrywającą K .
Otrzymaliśmy ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, który jednak nie może mieć podciągu zbieżnego, gdyż nie spełnia warunku Cauchy'ego - z konstrukcji jasno widać, że $\forall i < j : d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$, jako że $x_j \in K \setminus U_{j-1} \subseteq K \setminus U_i$. Przeczy to założeniu, że K jest ciągowo zwarty.

Twierdzenie 4.16.

Jeśli K jest ciągowo zwarty, to istnieje przeliczalny $D \subseteq K$, t.ż. $\overline{D} = K$ i.e. D jest gęsty w K .

Dowód.

Weźmy

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_{\frac{1}{n}} \subseteq K,$$

gdzie jako S_{ε} oznaczyliśmy skończoną ε - sieć w K , która na mocy Tw. 4.3 istnieje. Jasno wi-
dać, że D jest przeliczalny. Wtedy $\overline{D} \subseteq K$, gdyż dla każdego $y \in K$ tworzymy ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$
elementów, takich że $x_n \in S_{\frac{1}{n}}$ i $y \in \text{Ball}(x_n, \frac{1}{n})$, co zawsze możemy zrobić, bo $S_{\frac{1}{n}}$ są ε - sie-
ciami w K . Wtedy $d(x_n, y) < \frac{1}{n} \rightarrow 0$, więc $x_n \rightarrow y$, czyli $y \in \overline{D}$. Odwrotnie mamy $\overline{D} \supseteq K$, bo
 $D \subseteq K \implies \overline{D} \subseteq \overline{K}$ (domknięcie jest monotoniczne, a K jest domknięty por. Tw. 4.3). Z tych
dwu inkluzji mamy tezę.

Twierdzenie 4.17.

Jeśli K jest ciągowo zwarty, do każde jego pokrycie otwarte ma przeliczalne podpokrycie.

Dowód.

Niech U - pokrycie otwarte K . Dla dowolnego $y \in K$ zdefiniujmy:

$$n_y = \min\{n \in \mathbb{N} \mid \exists U_y \in U : \text{Ball}(y, \frac{1}{n}) \subseteq U_y\}.$$

Taka liczba będzie bez wątpienia istniała, gdyż U pokrywa K i składa się z samych zbiorów
otwartych. Niech U_y będzie zbiorem spełniającym powyższy warunek dla $y \in K$. Niech $V =$
 $\{U_y \mid y \in D\}$, gdzie D to przeliczalny podzbiór gęsty w K (istnieje on na mocy Tw. 4.3). Jasne,
że $V \subseteq U$ i że V jest przeliczalny. Pokażemy, że jest to podpokrycie.

Niech $x \in K$. Wiemy, że $\exists U_x \in U, N \in \mathbb{N} : \text{Ball}(x, \frac{1}{N}) \subseteq U_x$. Ponadto, jako że D jest gęsty w K , to
 $\exists y \in D : d(y, x) < \frac{1}{2N}$. Wtedy:

$$x \in \text{Ball}(y, \frac{1}{2N}) \implies \text{Ball}(y, \frac{1}{2N}) \subseteq \text{Ball}(x, \frac{1}{N}) \subseteq U_x \in U.$$

Więc $2N \geq n_y$ z konstrukcji n_y . Zatem:

$$x \in \text{Ball}(y, \frac{1}{2N}) \subseteq \text{Ball}(y, \frac{1}{n_y}) \subseteq U_y \in V.$$

Czyli V pokrywa K .

Jesteśmy już gotowi, żeby udowodnić najważniejsze twierdzenie w tej sekcji.

Twierdzenie 4.18. Zwartość ciągowa = zwartość pokryciowa

Zbiór K jest ciągowo zwarty wtedy i tylko wtedy gdy jest zwarty (pokryciowo).

Dowód.

\Rightarrow Niech $K \subseteq X$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem elementów z K i niech $Z = \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$. Pokażemy, że zachodzi jedna z dwu możliwości:

1.

$$\exists_{y \in K} : \forall_{U \in \mathcal{N}(y), U \subseteq X \atop \text{otw.}} : |Z \cap U| = \infty.$$

2. Z jest skończony.

Mianowicie, niech $\neg 1.$, i.e.:

$$\forall_{y \in K} : \exists_{U_y \in \mathcal{N}(y), U_y \subseteq X \atop \text{otw.}} : |Z \cap U_y| < \infty.$$

Oczywiście $\{U_y\}_{y \in K}$ jest pokryciem otwartym K (gdyż każdy y zawiera się np. w odpowiadającym mu U_y). Wybierzmy więc zeń skończone podpokrycie, tak, żeby:

$$K \subseteq U_{y_1} \cup U_{y_2} \cup \dots \cup U_{y_N}.$$

Mamy jednak $Z \subseteq K$, zatem:

$$Z = K \cap Z = (U_{y_1} \cap Z) \cup (U_{y_2} \cap Z) \cup \dots \cup (U_{y_N} \cap Z). \quad (146)$$

Każdy z elementów tej sumy jest skończony, na mocy założenia, zatem Z także jest skończony, jako skończona suma skończonych.

Widzimy więc, że zachodzi 1. lub 2.:

1. Jeśli zachodzi pierwszy warunek, to skoro:

$$\exists_{y \in K} : \forall_{U \in \mathcal{N}(y), U \subseteq X \atop \text{otw.}} : |Z \cap U| = \infty,$$

to konstruujemy $k \mapsto n_k$, tak aby $\forall_k : n_{k+1} > n_k$ i $x_{n_k} \in \text{Ball}(y, \frac{1}{k})$. Jest to możliwe, bo każde otwarte otoczenie y zawiera nieskończenie wiele elementów ciągu x_n , w szczególności zawiera element o indeksie większym od dowolnej liczby. Oczywiście z podanej konstrukcji mamy $x_{n_k} \rightarrow y \in K$.

2. Jeśli Z jest skończony, to z zasady szuflatkowej istnieje wartość $x \in Z \subseteq K$, która zostanie odwiedzona nieskończenie wiele razy przez wyrazy ciągu x_n - można więc wziąć podciąg stały równy x i oczywiście do tej liczby zbieżny.

Widzimy więc, że w obu przypadkach potrafimy skonstruować podciąg zbieżny w K , zatem K istotnie jest ciągowo zwarty.

\Leftarrow Dowód przeprowadzimy nie wprost. Niech K będzie ciągowo zwartym, U pewnym jego pokryciem otwartym, a $V = V_{i \in \mathbb{N}}$ jego przeliczalnym podpokryciem, które na mocy Tw. 4.3 istnieje. Przypuśćmy, że żadna skończona podrodzina V nie jest pokryciem K . Wtedy dla $n \in \mathbb{N}$ wybieramy $x_n \in K \setminus (\bigcup_{i=1}^n V_i)$. Oczywiście zbiór z którego wybieramy x_n będzie niepusty na mocy założenia, że żadna skończona podrodzina V nie pokrywa K . Otrzymujemy ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ elementów z K , więc ma on podciąg zbieżny do $y \in K$. Ale $\exists_N : y \in V_N$. Skoro jednak V_N jest otwarty (gdyż wyjściowe pokrycie U było otwarte), to prawie wszystkie wyrazy podciągu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zbieżnego do y powinny leżeć w V_N . Jednakże tylko skończona liczba wyrazów x_n leży w V_N , gdyż dla $n \geq N$: $x_n \in K \setminus V_N$. Sprzeczność! Musi więc istnieć skończone podpokrycie V , zatem K jest zwarty pokryciowo.

Obserwacja 12.

Domknięty podzbiór zbioru zwartego jest zwarty.

Istotnie $K \subseteq X \wedge C \subseteq K \wedge C = \overline{C} \implies C \subseteq X$.

Twierdzenie 4.19. Bolzano-Weierstrassa II

Każdy ograniczony i domknięty podzbiór \mathbb{R} jest zwarty.

Dowód.

Wynika on prosto z równoważności zwartości ciągowej i pokryciowej. Jeśli jakiś podzbiór \mathbb{R} jest ograniczony, to zawiera podciąg zbieżny (Twierdzenie 2.2), a skoro jest domknięty, to ów podciąg zbieżny ma granicę w tymże zbiorze. Zatem podzbiór ten jest ciągowo zwarty, czyli zwarty.

Definicja 4.24. Metryka na iloczynie kartezjańskim

Rozważmy dwie p-ń metryczne (X, d_1) i (Y, d_2) . Można wtedy wprowadzić na ich iloczynie kartezjańskim nową metrykę D , tworząc p-ń. $(X \times Y, D)$. Standardowo robi się to w ramach jednej z równoważnych metryk d_p ($p \in [1, \infty]$) - tak, że $D((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_p(d_1(x_1, x_2), d_2(y_1, y_2))$. Wszystkie te metryki zadają tę samą topologię. Metrykę na iloczynie kartezjańskim większej liczby zbiorów definiuje się indukcyjnie.

Obserwacja 13.

$$(x_n, y_n) \xrightarrow{D} (x, y) \iff x_n \rightarrow x \wedge y_n \rightarrow y. \quad (147)$$

Widzimy, że zbieżność na iloczynie kartezjańskim jest "po współrzędnych".

Twierdzenie 4.20.

Iloczyn kartezjańskich dwu zbiorów zwartych jest zwarty.

Dowód.

TODO

Obserwacja 14.

Niech $K \subseteq \mathbb{R}$. Wtedy K zawiera swoje kresy.

Rzeczywiście, skoro K jest zwarty, to i ograniczony: $\inf K \in \mathbb{R}$ i $\sup K \in \mathbb{R}$. Ponadto $\inf K$ i $\sup K$ są granicami ciągów z K , więc do K należą, skoro K jest domknięty.

Twierdzenie 4.21.

Niech (X, d) to p-ń. metryczna zupełna. Niech $K \subseteq X$. Wtedy, zbiór K jest zwarty jeżeli $\forall_{\varepsilon > 0}$ można go pokryć skończoną ε - siecią.
domk.

Dowód.

TODO

Twierdzenie 4.22. Obraz zbioru zwartego jest zwarty

Niech $(X, d), (Y, \delta)$ będą p-ń. metrycznymi, a $\phi : X \rightarrow Y$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Ponadto niech $K \subseteq X$. Wtedy zbiór $\phi(K)$ jest zwarty.

Dowód.

Niech $U = \{U_i\}_{i \in I}$ - rodzina zbiorów otwartych pokrywająca $\phi(K)$: $\phi(K) \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$. Skonstruujmy rodzinę $V = \{V_i = \phi^{-1}(U_i)\}$. Skoro ϕ jest ciągłe, to V jest rodziną otwartą. Ponadto z właściwości przeciwobrazów: $K \subseteq \bigcup_{i \in I} V_i$. Zatem V jest pokryciem otwartym. Możemy więc zeń wybrać skończone podpokrycie otwarte:

$$K \subseteq V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_n} = \phi^{-1}(U_{i_1}) \cup \dots \cup \phi^{-1}(U_{i_n}).$$

Wtedy:

$$\phi(K) \subseteq \phi(\phi^{-1}(U_{i_1}) \cup \dots \cup \phi^{-1}(U_{i_n})) = \phi(\phi^{-1}(U_{i_1})) \cup \dots \cup \phi(\phi^{-1}(U_{i_n})) \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}.$$

Zatem dla każdego pokrycia $\phi(K)$ wybraliśmy zeń skończone podpokrycie - zatem $\phi(K)$ jest zwarty.

Obserwacja 15. Odwzorowanie ciągle na zbiorze zwartym osiąga swoje kresy

Niech (X, d) - p-ń. metryczna i niech $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ciągłą funkcją oraz niech $K \subseteq X$. Wtedy:

$$\sup_{x \in K} f = \sup f(K) \in f(K) \quad (148)$$

oraz

$$\inf_{x \in K} f = \inf f(K) \in f(K). \quad (149)$$

Wynika to od razu z Twierdzenia 4.22 oraz Obserwacji 4.3.

Twierdzenie 4.23. Heinego - Borela

Podzbiór $K \subseteq \mathbb{R}^n$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty i ograniczony.

Dowód.

\Rightarrow Por. Tw. 4.3.

\Leftarrow Skoro K jest ograniczony, to istnieje kostka postaci:

$$C = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n], \quad (150)$$

t.ż. $K \subseteq C$. Ponadto, C musi być zwarty, jako iloczyn kartezjański dwu zbiorów zwartych (por. Tw. 4.3). Zauważyliśmy jednak, że domknięty podzbiór zbioru zwartego jest zwarty, zatem i K jest zwarty (Obs. 4.3).

Twierdzenie 4.24. Lemat Lebesgue'a

Niech (X, d) - p-ń. metryczna, $K \subseteq X$ (K jest zwartym podzbiorem X). Niech U będzie pokryciem otwartym K . Wówczas:

$$\exists \lambda > 0 \forall x \in K \exists U_x \in U : \text{Ball}(x, \lambda) \subseteq U_x. \quad (151)$$

Uwaga! Liczbę λ podaną w twierdzeniu nazywa się **liczbą Lebesgue'a**.

Dowód.

Skoro K - zwarty, to wybierzmy z U skończone podpokrycie: $\{U_i\}_{1 \leq i \leq N}$.

- Jeżeli $\exists i \leq N : X = U_i$, to sytuacja nie przedstawia żadnego problemu - za λ bierzemy dowolną liczbę, zaś za $U_x = X$. Teza jest trywialnie spełniona.
- Jeżeli $\forall i \leq N : X \not\subseteq U_i$, to definiujemy rodzinę $F_i = X \setminus U_i$ oraz funkcję:

$$f(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d(x, F_i),$$

gdzie

$$d(x, F_i) = \inf_{v \in F_i} \{d(x, v)\}$$

jest dobrze określoną funkcją dla niepustego F_i .

Oczywiście f jest ciągła, bo mamy:

$$|f(x) - f(x_0)| = \frac{1}{N} \left| \sum_{i=1}^N d(x, F_i) - d(x_0, F_i) \right| \leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \inf_{v \in F_i} \{d(x, v)\} - \inf_{v \in F_i} \{d(x_0, v)\} \right|.$$

Zauważmy, że skoro:

$$d(x, v) \leq d(x_0, v) + d(x, x_0)$$

oraz:

$$d(x_0, v) \leq d(x, v) + d(x, x_0),$$

to:

$$\inf_{v \in F_i} \{d(x, v)\} \leq \inf_{v \in F_i} \{d(x_0, v)\} + d(x, x_0)$$

i:

$$\inf_{v \in F_i} \{d(x_0, v)\} \leq \inf_{v \in F_i} \{d(x, v)\} + d(x, x_0),$$

zatem:

$$|\inf_{v \in F_i} \{d(x, v)\} - \inf_{v \in F_i} \{d(x_0, v)\}| \leq d(x, x_0).$$

Widzimy, więc że

$$|f(x) - f(x_0)| \leq d(x, x_0),$$

czyli f musi być ciągła.

Skoro f jest ciągła na zbiorze zwartym K i $\forall_{x \in K} : f(x) > 0$ (bo inaczej – gdyby $f(x) = 0$, to x nie należałby do żadnego pokrycia U_i), to $\exists_{x_0} : f(x_0) = \inf f(x) > 0$. Funkcja ciągła na zbiorze zwartym osiąga swoje kresy. Weźmy $\lambda = \inf f(x) > 0$. Skoro mamy $\forall_{x \in K} : f(x) \geq \lambda$, a $f(x)$ jest średnią odległością x od F_i , to w szczególności istnieje takie F_j , że $\lambda \leq d(x, F_j) = \inf_{v \in U_j} d(x, v) \implies \forall_{v \in U_j} : d(x, v) \geq \lambda$. Zatem dla tego U_j :

$$\text{Ball}(x, \lambda) \subseteq U_j.$$

Znaleźliśmy więc szukaną λ i szukane $U_x = U_j$. Dowód został zakończony.

4.4 Spójność

Definicja 4.25. Spójność

Powiemy, że zbiór Z w pewnej metryce jest **niespójny**, jeśli:

$$\exists_{Z_1, Z_2 \neq \emptyset} : Z_1 \cup Z_2 = Z \quad \wedge \quad Z_1 \cap \overline{Z_2} = \emptyset. \quad (152)$$

W przeciwnym razie, zbiór nazwiemy **spójnym**. Dla zbiorów spójnych, mamy:

$$Z_1, Z_2 \neq \emptyset \wedge Z_1 \cup Z_2 = Z \implies Z_1 \cap \overline{Z_2} \neq \emptyset \vee \overline{Z_1} \cap Z_2.$$

Obserwacja 16.

Podzbiór \mathbb{R} jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy jest przedziałem.

Twierdzenie 4.25. Obraz zbioru spójnego jest spójny

Jeśli Z jest zbiorem spójnym, a $\Phi : X \rightarrow Y$ odwzorowaniem ciągłym, to $\Phi(Z)$ jest spójny.

Dowód.

Dowód nie wprost. Załóżmy, że $\Phi(Z)$ jest niespójny, tj. istnieją takie niepuste $W_1, W_2 \subseteq Y$, że $W_1 \cap \overline{W_2} = \emptyset$ i $W_1 \cup W_2 = \Phi(Z)$. Niech $Z_1 = \Phi^{-1}(W_1) \cap Z$ i $Z_2 = \Phi^{-1}(W_2) \cap Z$. Mamy:

$$Z \subseteq \Phi^{-1}(\Phi(Z)) = \Phi^{-1}(W_1 \cup W_2).$$

Zatem $Z = Z_1 \cup Z_2$. Skoro Z jest spójny, to $\overline{Z_1} \cap Z_2 \neq \emptyset$ lub $Z_1 \cap \overline{Z_2} \neq \emptyset$. Bez straty ogólności, załóżmy ten pierwszy przypadek. Wtedy istnieje $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, t.j. $x_n \in Z_1$ i $x_n \rightarrow x \in Z_2$. Ale wtedy – z ciągłości Φ – $W_1 \ni \Phi(x_n) \rightarrow \Phi(x) \in W_2$, zatem $\overline{W_1} \cap W_2 \neq \emptyset$, wbrew założeniu. Powstała sprzeczność dowodzi tezy.

Obserwacja 17. Łukowa spójność

Zbiór spójny łukowo jest spójny.

5 Rachunek różniczkowy

Definicja 5.1. Różniczkowalność

Niech $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie I jest przedziałem w \mathbb{R} (otwartym lub domkniętym). Powiemy, że f jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in I$, jeśli istnieje granica:

$$\lim_{I \ni x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (153)$$

W szczególności, jeśli $I = [a, b]$, to f jest różniczkowalna w a , jeśli istnieje granica:

$$\lim_{I \ni x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \quad (154)$$

Wartość tychże granic nazywamy pochodną funkcji f w punkcie x_0 i oznaczamy $f'(x_0)$.

Definicja 5.2. Pochodna

Jeśli w każdym punkcie funkcji f istnieje skończona pochodna, to funkcje $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$, $f' : x \mapsto f'(x)$ nazywamy **pochodną** funkcji f . Mówimy wtedy o f , że jest **różniczkowalna**.

Twierdzenie 5.1.

Niech $x \in I$ deg. Wtedy:

$$\exists_{f'(x_0)} \iff \exists_y : \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - yh}{h} = 0. \quad (155)$$

Wtedy oczywiście $y = f'(x)$.

Dowód.

\implies Jeśli $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$, to $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$ i:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - hf'(x_0)}{h} = 0.$$

\Leftarrow Jeśli:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - hy}{h} = 0,$$

to:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = y = f'(x_0).$$

Twierdzenie 5.2. Funkcja różniczkowalna jest ciągła

Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w pewnym punkcie x_0 , to jest w tym punkcie ciągła.

Dowód.

Skoro $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$, to $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x_0)(x - x_0) = 0$, zatem funkcja jest ciągła.

Obserwacja 18. Podstawowe własności pochodnych

Niech $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami różniczkowalnymi. Wtedy:

- $(f + g)'$ istnieje i:

$$(f + g)' = f' + g'. \quad (156)$$

- Jeśli $a \in \mathbb{R}$, to $(af)'$ istnieje i:

$$(af)' = af'. \quad (157)$$

- $(fg)'$ istnieje i:

$$(fg)' = f' \cdot g + f \cdot g'. \quad (158)$$

Jest to tzw. wzór Leibniza.

- Jeśli $g(x) \neq 0$ i $g'(x) \neq 0$ dla wszystkich $x \in I$, to $(\frac{f}{g})'$ istnieje i:

$$(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{(g)^2}. \quad (159)$$

Dowód jest bardzo prosty i pozostawiamy go jako ćwiczenie. Nieco ciekawsze (i dużo ważniejsze) jest następujące:

Twierdzenie 5.3. Pochodna funkcji złożonej

Niech $g : I_1 \rightarrow I_2$, $f : I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami różniczkowalnymi odpowiednio w punktach $x_0 \in I_1$ deg i $g(x_0) \in I_2$ deg. Wtedy $f \circ g$ także jest różniczkowalna i w x_0 :

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0). \quad (160)$$

Reguła ta nazywa się czasem **regułą łańcuchową**.

Dowód.

Niech $r(h) = g(x_0 + h) - g(x_0) - g'(x_0)h$. Wtedy (por. Tw. 5.1):

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0. \quad (161)$$

Niech $y_0 = g(x_0)$ i $R(k) = f(y_0 + h) - f(y_0) - f'(y_0)h$. Znowuż:

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{R(k)}{k} = 0. \quad (162)$$

Wtedy:

$$f(g(x_0 + h)) - f(g(x_0)) = f(g(x_0) + g'(x_0)h + r(h)) - f(g(x_0)) = f(g(x_0) + k(h)) - f(g(x_0)), \quad (163)$$

gdzie oznaczyliśmy $k(h) = g'(x_0)h + r(h)$. Oczywiście $\lim_{h \rightarrow 0} k(h) = 0$. Licząc dalej:

$$f(g(x_0 + h)) - f(g(x_0)) = f(g(x_0) + k(h)) - f(g(x_0)) = R(k(h)) + f'(y_0)k(h). \quad (164)$$

Zatem:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x_0 + h)) - f(g(x_0))}{h} = f'(y_0) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(k(h))}{h}.$$

Zauważmy, że:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x_0)h + r(h)}{h} = g'(x_0).$$

Stąd mamy:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(k(h))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(k(h))}{k(h)} \frac{k(h)}{h} = 0.$$

Ostatecznie więc:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x_0 + h)) - f(g(x_0))}{h} = f'(y_0)g'(x_0).$$

Definicja 5.3. Inna definicja pochodnej

Niech $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Niech $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Jeśli istnieje taka macierz $A \in M(\mathbb{R})_{m \times n}$, że:

$$\lim_{\|\vec{h}\| \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x}_0 + \vec{h}) - f(\vec{x}_0) - A\vec{h}}{\|\vec{h}\|} = 0, \quad (165)$$

dla $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$, to macierz A nazwiemy pochodną f w punkcie \vec{x}_0 . Łatwo widać, że A jest wyznaczone jednoznacznie.

Zajmiemy się teraz związkiem pochodnej z własnościami funkcji rzeczywistych.

Definicja 5.4. Ekstrema

Niech (X, d) - p-ń. metryczna oraz $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Wtedy $x_0 \in X$ nazwiemy:

- **Lokalnym minimum**, jeśli:

$$\exists U \in \mathcal{N}(x_0) \forall x \in U : f(x) \geq f(x_0). \quad (166)$$

- **Lokalnym minimum ścisłym**, jeśli:

$$\exists U \in \mathcal{N}(x_0) \forall x \in U : f(x) > f(x_0). \quad (167)$$

- **Lokalnym maksimum**, jeśli:

$$\exists U \in \mathcal{N}(x_0) \forall x \in U : f(x) \leq f(x_0). \quad (168)$$

- **Lokalnym maksimum ścisłym**, jeśli:

$$\exists U \in \mathcal{N}(x_0) \forall x \in U : f(x) < f(x_0). \quad (169)$$

Wpólna nazwa, na którąś z tych sytuacji, to wystąpienie lokalnego **ekstremum** (ściłego ekstremum).

Twierdzenie 5.4. Warunek konieczny istnienia ekstremum

Jeśli $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest w punkcie x_0 różniczkowalna i x_0 jest ekstremum f , to:

$$f'(x_0) = 0. \quad (170)$$

Dowód.

Założmy, że f ma w x_0 minimum. Wtedy oczywiście:

$$f(x) - f(x_0) \geq 0.$$

Zatem:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$

dla $x > x_0$, więc:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0^+} f'(x_0) \geq 0.$$

Jednakże:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0,$$

dla $x < x_0$ i:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0^-} f'(x_0) \leq 0.$$

Jedyną możliwością połączenia tych nierówności jest $f'(x_0) = 0$. Dla maksimum w x_0 dowód zupełnie analogiczny.

Twierdzenie to pomoże nam udowodnić kilka zasadniczych twierdzeń związanych z pochodnymi. Zaczniemy od:

Twierdzenie 5.5. Rolle'a

Jeśli $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i różniczkowalna na $]a, b[$ oraz $f(a) = f(b)$, to:

$$\exists_{\xi \in]a, b[} : f'(\xi) = 0.$$

Dowód.

f jest ciągła na zwartej dziedzinie $[a, b]$, także osiąga swoje kresy. Jeśli $\sup f = \inf f = f(a) = f(b)$, to f jest funkcją stałą: $f := f(a)$ i jej pochodna we wszystkich punktach pomiędzy a i b jest równa 0. W przeciwnym wypadku, (i.e. $\sup f \neq f(a)$ lub $\inf f \neq f(a)$) istnieje $\xi \in]a, b[$ osiągające ów kres różny od wartości w a . Oczywiście ξ będzie ekstremum, zatem z poprzedniego twierdzenia $f'(\xi) = 0$.

Uogólnieniami tych twierdzeń są następujące dwa rezultaty:

Twierdzenie 5.6. Cauchy'ego

Niech $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ - ciągłe i różniczkowalne na $]a, b[$, wtedy:

$$\exists_{\xi \in]a, b[} : g'(\xi)(f(b) - f(a)) = f'(\xi)(g(b) - g(a)). \quad (171)$$

Dowód.

Konstruujemy funkcję:

$$h(x) = g(x)(f(b) - f(a)) - f(x)(g(b) - g(a)).$$

Łatwo widzieć, że:

$$h(a) = h(b) = g(a)f(b) - f(b)g(a).$$

Ponadto h powstaje z operacji arytmetycznych na f, g więc również jest ciągła i różniczkowalna na $]a, b[$. Spełnia więc wszystkie założenia Tw. Rolle'a:

$$\exists_{\xi \in]a, b[} : h'(\xi) = 0$$

Ale:

$$h'(\xi) = g'(\xi)(f(b) - f(a)) - f'(\xi)(g(b) - g(a)).$$

Stąd prosto otrzymujemy tezę.

Twierdzenie 5.7. Lagrange'a

Niech $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ - ciągła i różniczkowalna na $]a, b[$, wtedy:

$$\exists_{\xi \in]a, b[} : f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (172)$$

Dowód.

Bierzemy $g = x$ w Tw. Cauchy'ego. Oczywiście g spełnia wszystkie założenia. Stąd:

$$\exists_{\xi \in]a, b[} : f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a). \quad (173)$$

Wystarczy podzielić teraz przez $(b - a)$.

6 Rachunek całkowy

6.1 Całka Riemanna

W toku tego podrozdziału zajmować się będziemy jedynie funkcjami ograniczonymi na zwartych przedziałach - gdyż dla takich właśnie definiuje się całkę Riemanna.

Definicja 6.1. Podział przedziału

Podziałem przedziału $[a, b]$ o długości n nazywamy ciąg skończony $\pi = (t_0, \dots, t_n)$, t.ż. $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. Powiemy też, że $\pi' = (t_0, \dots, t_n)$ jest drobniejszy niż $\pi = (s_0, \dots, s_m)$ ($\pi' \leq \pi$) jeśli $\{t_0, \dots, t_n\} \subseteq \{s_0, \dots, s_m\}$.

Definicja 6.2. Suma górna i dolna

Niech $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną. Wtedy definiujemy dla niej i pewnego podziału π przedziału $[a, b]$:

- Sumę dolną:

$$\underline{S}(f, \pi) = \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \inf_{[t_i, t_{i-1}]} f \quad (174)$$

oraz Sumę górną:

$$\overline{S}(f, \pi) = \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \sup_{[t_i, t_{i-1}]} f \quad (175)$$

Twierdzenie 6.1.

Ustalmy przedział $[a, b]$.

1. Jeśli $\pi_1 \leq \pi_2$ to:

$$\overline{S}(f, \pi_1) \leq \overline{S}(f, \pi_2) \quad (176)$$

oraz:

$$\underline{S}(f, \pi_1) \geq \underline{S}(f, \pi_2). \quad (177)$$

2. Dla każdego dwu podziałów π_1, π_2 istnieje podział π' t.ż. $\pi' \leq \pi_1, \pi_2$.
3. Dla każdego dwu podziałów π_1, π_2 :

$$(b-a) \inf_{[a,b]} f \leq \underline{S}(f, \pi_1) \leq \overline{S}(f, \pi_2) \leq (b-a) \sup_{[a,b]} f. \quad (178)$$

Dowód.

- Jest to prosta konsekwencja faktu, że jeśli $c \in [a, b]$ to:

$$(c-a) \sup_{[a,c]} f + (b-c) \sup_{[c,b]} f \leq (b-a) \sup_{[a,b]} f$$

i analogicznej własności dla inf.

- Za π' wystarczy wziąć sumę teoriomnogościową punktów z π_1 i π_2 .

- Stosujemy punkt 1. do π' drobniejszego od obu podziałów.

Definicja 6.3. Całka dolna i górna

Całką dolną funkcji ograniczonej f na przedziale $[a, b]$ nazywamy liczbę:

$$\int_a^b f = \sup_{\pi \leq [a, b]} \underline{S}(f, \pi), \quad (179)$$

to jest supremum sum dolnych po wszystkich podziałach $[a, b]$. Analogicznie definiujemy całkę górną:

$$\int_a^b f = \inf_{\pi \leq [a, b]} \bar{S}(f, \pi). \quad (180)$$

Definicja 6.4. Całkowalność w sensie Riemanna

Powiemy, że funkcja ograniczona f na przedziale $[a, b]$ jest **całkowalna w sensie Riemanna**, jeśli jej całka dolna jest równa całce górnej. Ich wspólną wartość nazwiemy po prostu całką f po przedziale $[a, b]$:

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f = \int_a^b f. \quad (181)$$

Twierdzenie 6.2. Kryterium całkowalności

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \pi \leq [a, b] : \bar{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) \leq \varepsilon. \quad (182)$$

Dowód.

\Leftarrow Jeśli spełniony jest warunek:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \pi \leq [a, b] : \bar{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) \leq \varepsilon,$$

to skoro:

$$\underline{S}(f, \pi) \leq \int_a^b f \leq \bar{S}(f, \pi) \leq Sg(f, \pi),$$

gdyż skoro: dla każdych π_1, π_2 :

$$\underline{S}(f, \pi_1) \leq S(f, \pi_2),$$

to na pewno:

$$\int_a^b f = \sup_{\pi_1} \underline{S}(f, \pi_1) \leq \inf_{\pi_1} S(f, \pi_2) = \int_a^b f. \quad (183)$$

Dostajemy, więc:

$$\int_a^b f - \int_a^b f \leq Sg(f, \pi) - Sd(f, \pi) \leq \varepsilon \forall \varepsilon > 0.$$

Jasne, że zachodzić to może tylko wtedy, gdy całka dolna jest równa całce górnej - f jest więc całkowalna.

\Rightarrow Mamy: $\int_a^b f = \int_a^b f$. Z definicji supremum i infimum wynika, że:

$$\exists \pi_1 : \bar{S}(f, \pi_1) - \int_a^b f \leq \frac{1}{2}\varepsilon$$

oraz:

$$\exists \pi_2 : \int_a^b f - \underline{S}(f, \pi_2) \leq \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Niech $\pi \leq \pi_1, \pi_2$. Dla tego podziału zachodzić będą oczywiście obie z tych nierówności ($\bar{S}(f, \pi) \leq \bar{S}(f, \pi_1)$ i $\underline{S}(f, \pi) \geq \underline{S}(f, \pi_2)$). Zatem, dodawszy je:

$$\bar{S}(f, \pi) - \int_a^b f + \int_a^b f - \underline{S}(f, \pi) = \bar{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) \leq \varepsilon.$$

Twierdzenie 6.3. Złożenie funkcji ciągłej z funkcją całkowalną jest całkowalne

Niech $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną (więc i ograniczoną). Niech $F : \overline{f([a, b])} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągłą (dziedzina F to domknięcie obrazu f).

Wtedy $F \circ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna.

Dowód.

Zbiór $X = \overline{f([a, b])}$ jest domknięty i ograniczony w \mathbb{R} , więc jest zwarty. Zatem F , jako ciągła na zbiorze zwartym, jest jednostajnie ciągła:

$$\forall \varepsilon \exists \delta_\varepsilon > 0 |s - t| \leq \delta_\varepsilon \implies |F(s) - F(t)| \leq \frac{\varepsilon}{b - a + 2 \sup_X |F|} = \varepsilon'.$$

Wyrażenie po prawej ma sens, gdyż F jest ograniczona. Przyjmijmy w tym warunku, że $\delta_\varepsilon < \varepsilon'$, co zawsze możemy zrobić. Ponadto, skoro f - całkowalna, to:

$$\exists \pi : \bar{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) \leq \delta_\varepsilon^2.$$

Niech $\pi = (t_0, \dots, t_n)$. Ponadto niech $\sup_{[t_{i-1}, t_i]} f = M_i$, $\inf_{[t_{i-1}, t_i]} f = m_i$, $\sup_{[t_{i-1}, t_i]} F \circ f = M'_i$, $\inf_{[t_{i-1}, t_i]} F \circ f = m'_i$. Z własności f i F wiemy, że są to wszystkie liczby rzeczywiste. Zatem:

$$\bar{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}).$$

Rozbijmy indeksy $\{1, \dots, n\} = A \sqcup B$, gdzie $A = \{i \mid M_i - m_i \leq \delta_\varepsilon\}$, $B = \{i \mid M_i - m_i > \delta_\varepsilon\}$. Zatem:

$$\bar{S}(F \circ f, \pi) - \underline{S}(F \circ f, \pi) = \sum_{i \in A} (M'_i - m'_i)(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i \in B} (M'_i - m'_i)(t_i - t_{i-1})$$

Jeśli $i \in A$ i $x, y \in [t_{i-1}, t_i]$, to $m_i \leq f(x), f(y) \leq M_i$, więc $|f(x) - f(y)| \leq M_i - m_i \leq \delta_\varepsilon$. Zatem z jednostajnej ciągłości F : $|F(f(x)) - F(f(y))| \leq \varepsilon'$. W szczególności więc $|M'_i - m'_i| \leq \varepsilon$, gdyż przy

przejściu do supremum i infimum nierówność się zachowuje. Tak więc:

$$\sum_{i \in A} (M'_i - m'_i)(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i \in A} \varepsilon'(t_i - t_{i-1}) \leq \varepsilon'(b - a).$$

Co do drugiej sumy, mamy:

$$\delta_\varepsilon \sum_{i \in B} (t_i - t_{i-1}) < \sum_{i \in B} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) = \overline{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) \leq \delta_\varepsilon^2.$$

Stąd:

$$\sum_{i \in B} (t_i - t_{i-1}) < \delta_\varepsilon \leq \varepsilon'$$

Zatem:

$$\sum_{i \in B} (M'_i - m'_i)(t_i - t_{i-1}) \leq (\sup_X F - \inf_X F) \sum_{i \in B} (t_i - t_{i-1}) \leq 2 \sup_X |F| \varepsilon' < \infty,$$

bo F jest ograniczona. Ostatecznie:

$$\overline{S}(F \circ f, \pi) - \underline{S}(F \circ f, \pi) = \sum_{i \in A} (M'_i - m'_i)(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i \in B} (M'_i - m'_i)(t_i - t_{i-1}) \leq \varepsilon'(b - a + 2 \sup_X |F|) = \varepsilon.$$

Konstrukcje przeprowadziliśmy dla dowolnego ε , zatem $F \circ f$ spełnia kryterium całkowalności, więc jest całkowalna.

Przykład Zbadajmy funkcję $\text{id} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, t.ż. $\text{id}(x) = x$. Jest to funkcja całkowalna na dowolnym przedziale. Rzeczywiście, niech $\pi = (a + \frac{1}{n}(b - a) | 0 \leq i \leq n)$. Wtedy $\sup_{[t_i, t_{i+1}]} \text{id} = (b - a) \frac{i+1}{n} + a$ i $\inf_{[t_i, t_{i+1}]} \text{id} = (b - a) \frac{i}{n} + a$. Zatem:

$$\overline{S}(\text{id}, \pi) - \underline{S}(\text{id}, \pi) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{b-a}{n} \right)^2 = \frac{(b-a)^2}{n}. \quad (184)$$

Wielkość tę można uczynić dowolnie małą dla dużych n , więc id spełnia kryterium całkowalności.

Obserwacja 19. Funkcje ciągłe są całkowalne

Niech $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Wtedy f jest całkowalna jako złożenie funkcji ciągłej z funkcją całkowalną: $f = f \circ \text{id}$.

Twierdzenie 6.4. Liniowość całki

Niech $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ - całkowalne i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wtedy $\alpha f + \beta g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna i:

$$\int_a^b \alpha f + \beta g = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g. \quad (185)$$

Inaczej mówiąc - przestrzeń funkcji całkowalnych na $[a, b]$ jest przestrzenią liniową, a wzięcie całki jest na tej przestrzeni formą liniową.

Dowód.

Jednorodność Niech $\alpha \in \mathbb{R}$ i f - całkowalna. Wtedy, gdy $\alpha > 0$:

$$\overline{S}(\alpha f, \pi) = \alpha \overline{S}(f, \pi)$$

oraz:

$$\underline{S}(\alpha f, \pi) = \alpha \underline{S}(f, \pi)$$

z jednorodności sup i inf dla skalarów dodatnich. Zatem, z całkowalności f :

$$\exists \pi : \overline{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) \leq \frac{\varepsilon}{\alpha} \implies \exists \pi : \overline{S}(\alpha f, \pi) - \underline{S}(\alpha f, \pi) \leq \varepsilon, \quad (186)$$

czyli spełniony jest warunek całkowalności dla αf .

Gdy $\alpha = 0$, to $\alpha f := 0$, a funkcja zerowa jest trywialnie całkowalna.

Gdy $\alpha < 0$ mamy:

$$\overline{S}(\alpha f, \pi) = \alpha \underline{S}(f, \pi)$$

oraz:

$$\underline{S}(\alpha f, \pi) = \alpha \overline{S}(f, \pi),$$

z tego, że $\sup -f = -\inf f$ i vice versa. Dalej dowód przeprowadza się analogicznie.

Addytywność Z całkowalności f, g wynika, że dla dowolnego ε :

$$\exists \pi_1 : \overline{S}(f, \pi_1) - \underline{S}(f, \pi_1) \leq \frac{1}{2} \varepsilon$$

i podobnie:

$$\exists \pi_2 : \overline{S}(g, \pi_2) - \underline{S}(g, \pi_2) \leq \frac{1}{2} \varepsilon$$

Weźmy $\pi = (t_0, \dots, t_n) \leq \pi_1, \pi_2$. Wtedy powyższe nierówności tym bardziej są spełnione dla podziału π :

$$\overline{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) + \overline{S}(g, \pi) - \underline{S}(g, \pi) \leq \varepsilon.$$

Mamy też:

$$\overline{S}(f + g, \pi) = \sum_{i=1}^n \sup_{[t_i, t_{i-1}]} (f + g) \leq \sum_{i=1}^n \sup_{[t_i, t_{i-1}]} f + \sup_{[t_i, t_{i-1}]} g = \overline{S}(f, \pi) + \overline{S}(g, \pi).$$

Identycznie:

$$\underline{S}(f + g, \pi) \geq \underline{S}(f, \pi) + \underline{S}(g, \pi).$$

Zatem:

$$\overline{S}(f + g, \pi) - \underline{S}(f + g, \pi) \leq \overline{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) + \overline{S}(g, \pi) - \underline{S}(g, \pi) \leq \varepsilon. \quad (187)$$

Widzimy więc, że $f + g$ spełnia kryterium całkowalności, więc jest całkowalna.

Z tego wynika, że $\sup_{\pi} \underline{S}(f + g, \pi) = \inf_{\pi} \overline{S}(f + g, \pi) = \int_a^b (f + g)$. Z całkowalności f, g wynika też, że dla dowolnego ε :

$$\exists \pi : \overline{S}(f, \pi) \leq \int_a^b f + \frac{1}{2} \varepsilon \wedge \overline{S}(g, \pi) \leq \int_a^b g + \frac{1}{2} \varepsilon.$$

Tutaj podobnie wybieramy osobno podziały dla f i g a następnie znajdujemy podział drobniejszy od ich obu. Wtedy:

$$\int_a^b f + g \leq \overline{S}(f + g, \pi) \leq \overline{S}(f, \pi) + \overline{S}(g, \pi) \leq \int_a^b f + \int_a^b g + \varepsilon.$$

Skoro nierówność ta zachodzi dla wszystkich $\varepsilon > 0$, to musi też być:

$$\int_a^b f + g \leq \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Zastosujmy teraz powyższą nierówność do pary $(-f, -g)$ i skorzystajmy z jednorodności całki:

$$-\int_a^b f + g = \int_a^b -f - g \leq \int_a^b -f + \int_a^b -g = -\left(\int_a^b f + \int_a^b g\right). \quad (188)$$

Łącząc otrzymane nierówności, mamy:

$$\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g$$

Twierdzenie 6.5.

Niech $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami całkowanymi. Wtedy $f \cdot g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ także jest całkowna.

Dowód.

Niech $F : [a, n] \ni x \mapsto x^2$. Jest to funkcja ciągła. Wtedy $f \cdot g = \frac{1}{4}(F \circ (f + g) - F \circ (f - g))$ jest całkowna na podstawie udowodnionych już własności.

Przykład - funkcja Dirichleta Niech

$$Z(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}. \quad (189)$$

Funkcja ta nie jest całkowna na żadnym przedziale, gdyż dla każdego podziału $\pi \leq [a, b]$, mamy:

$$\overline{S}(Z, \pi) = b - a \neq 0 = \underline{S}(Z, \pi), \quad (190)$$

gdyż w każdym przedziale o niezerowej długości znajdują się zarówno liczby wymierne jak i niewymierne.

Twierdzenie 6.6.

Niech $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ - całkowne i $\forall_{x \in [a, b]} : f(x) \leq g(x)$ - lub pisząc prościej: $f \leq g$. Wtedy:

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g. \quad (191)$$

Dowód.

Dowód niesamowicie prosty - skoro $f \leq g$, to $\bar{S}(f, \pi) \leq \bar{S}(g, \pi)$ dla każdego podziału π . Zatem oczywiście:

$$\int_a^b f = \inf_{\pi} \bar{S}(f, \pi) \leq \inf_{\pi} \bar{S}(g, \pi) = \int_a^b g.$$

Twierdzenie 6.7.

Niech $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ - całkowalna. Wtedy $|f|$ jest także całkowalna i:

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|. \quad (192)$$

Dowód.

$|f|$ musi być całkowalna, jako złożenie funkcji ciągłej $F(x) = |x|$ i funkcji całkowalnej f . Ponadto istnieje taka liczba $\sigma = \pm 1$:

$$\sigma \int_a^b f = \left| \int_a^b f \right|.$$

Ale, korzystając z poprzedniego rezultatu:

$$\left| \int_a^b f \right| = \sigma \int_a^b f = \int_a^b \sigma f \leq \int_a^b |\sigma f| = \int_a^b |f|,$$

gdyż $\sigma f \leq |f|$.

Obserwacja 20.

- Niech $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Ponadto, niech $f = g$ na $[a, b] \setminus S$, gdzie $|S| < \infty$ - tj. f i g zgadza się z sobą na całym przedziale poza skończoną liczbą punktów. Wtedy f jest całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy g jest całkowalna i jeśli to zachodzi, to:

$$\int_a^b f = \int_a^b g.$$

- Niech $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ - całkowalna i niech $[c, d] \subseteq [a, b]$. Wtedy $f|_{[c, d]}$ także jest całkowalna.
- Zdefiniujmy funkcję charakterystyczną zbioru A :

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}. \quad (193)$$

Wtedy, jeśli $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna, to dla $[c, d] \subseteq [a, b]$ mamy:

$$\int_a^b \chi_{[c, d]} \cdot f = \int_c^d f|_{[c, d]} = \int_c^d f. \quad (194)$$

Ostatnie wyrażenie jest wygodniejszym zapisem tejże wielkości.

Twierdzenie 6.8.

Niech $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ - całkowalna i $c \in]a, b[$. Wtedy:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f. \quad (195)$$

Dowód.

$$\int_a^b f = \int_a^b (\chi_{[a,c]}f + \chi_{[c,b]}f) = \int_a^b \chi_{[a,c]}f + \int_a^b \chi_{[c,b]}f = \int_a^c f + \int_c^b f, \quad (196)$$

bo f i $\chi_{[a,c]}f + \chi_{[c,b]}f$ różnią się tylko w jednym punkcie ($x = c$).

Definicja 6.5. Wypunktowanie

Niech $\pi = (t_0, \dots, t_n)$ będzie podziałem $[a, b]$. Wtedy **wypunktowaniem** π nazywamy ciąg skończony:

$$\Xi = (\xi_1, \dots, \xi_n), \quad (197)$$

t.ż. $\xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$.

Ponadto, jeśli $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, to **sumą wypunktowaną** podziału π i wypunktowania Ξ nazywamy:

$$S(f, \pi, \Xi) = \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) f(\xi_i). \quad (198)$$

Średnicą podziału π nazwiemy liczbę:

$$\text{Diam}(\pi) = \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1}). \quad (199)$$

Twierdzenie 6.9.

Niech $f \in C([a, b])$ (funkcje ciągłe na $[a, b]$) i $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem podziałów $[a, b]$, t.ż.:

$$\text{Diam}(\pi_n) \rightarrow 0. \quad (200)$$

Niech $(\Xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem wypunktowań π_n .

Wtedy:

$$S(f, \pi_n, \Xi_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f \quad (201)$$

Dowód.

Zacznijmy od tego, że f jako funkcja ciągła jest całkowalna. Ponadto, f jako ciągła na zwartym przedziale jest jednostajnie ciągła:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon : |s - t| \leq \delta_\varepsilon \implies |f(s) - f(t)| \leq \varepsilon. \quad (202)$$

Niech π będzie takim podziałem, że $\text{Diam}(\pi) \leq \delta_{\frac{\varepsilon}{b-a}}$. Wtedy:

$$\bar{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) = \sum_{i=1}^n \left(\sup_{[t_i, t_{i-1}]} f - \inf_{[t_i, t_{i-1}]} f \right) (t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{b-a} (t_i - t_{i-1}) = \varepsilon, \quad (203)$$

co wynika z tego, że skoro $(t_i - t_{i-1}) \leq \delta_{\frac{\varepsilon}{b-a}}$, to wartości f na tym przedziale są nie dalej niż $\frac{\varepsilon}{b-a}$, więc także jest tak dla supremum i infimum f na tym przedziale.

Ponadto, dla dowolnego wypunktowania Ξ podziału π :

$$\underline{S}(f, \pi) = \sum_{i=1}^n \inf_{[t_i, t_{i-1}]} f (t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i) (t_i - t_{i-1}) = S(f, \pi, \Xi) \quad (204)$$

oraz:

$$S(f, \pi, \Xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) (t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n \sup_{[t_i, t_{i-1}]} f (t_i - t_{i-1}) = \bar{S}(f, \pi), \quad (205)$$

czyli:

$$\underline{S}(f, \pi) \leq S(f, \pi, \Xi) \leq \bar{S}(f, \pi). \quad (206)$$

Jednak zachodzi też:

$$\underline{S}(f, \pi) \leq \int_a^b f \leq \bar{S}(f, \pi), \quad (207)$$

Zatem:

$$\left| S(f, \pi, \Xi) - \int_a^b f \right| \leq \bar{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) \leq \varepsilon. \quad (208)$$

Jśli dla ustalonego $\varepsilon > 0$ w naszym ciągu $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wybierzemy takie N , że dla $n \geq N$:

$$\text{Diam}(\pi_n) \leq \delta_{\frac{\varepsilon}{b-a}}, \quad (209)$$

to:

$$\bar{S}(f, \pi_n) - \underline{S}(f, \pi_n) \leq \varepsilon \quad (210)$$

i:

$$\left| S(f, \pi_n, \Xi_n) - \int_a^b f \right| \leq \varepsilon \quad (211)$$

dla $n \geq N$. Zatem rzeczywiście:

$$S(f, \pi_n, \Xi_n) \rightarrow \int_a^b f. \quad (212)$$

Definicja 6.6.

Dla $a > b$ definiujemy:

$$\int_a^b f := - \int_b^a f. \quad (213)$$

Ponadto:

$$\int_a^a f := 0. \quad (214)$$

Zauważmy, że wtedy Twierdzenie 6.9 zachodzi dla dowolnego ułożenia a, b, c .

Twierdzenie 6.10. Zasadnicze Twierdzenie Rachunku Całkowego I

Niech $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ - całkowalna. Ponadto zdefiniujmy $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$:

$$F(x) = \int_a^x f. \quad (215)$$

Wiemy, że powyższe wyrażenie ma sens dla $x \in [a, b]$.

Wtedy:

- F jest ciągła,
- jeśli f jest ciągła w x_0 , to F jest różniczkowalna tamże i:

$$F'(x_0) = f(x_0). \quad (216)$$

Dowód.

Dowód

- Skoro f jest całkowalna, to musi być ograniczona:

$$\exists_M \forall_x : |f(x)| \leq M.$$

Zatem dla $x > y$:

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_a^x f - \int_a^y f \right| = \left| \int_y^x f \right| \leq \int_y^x |f| \leq M|x - y|, \quad (217)$$

czyli F jest Lipschitzowska, a więc i ciągła.

- Niech f będzie ciągła w x_0 . Obliczmy iloraz różniczkowy F :

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f = \frac{1}{|h|} \int_c^d f, \quad (218)$$

gdzie:

$$[c, d] = \begin{cases} [x_0, x_0 + h] & h > 0 \\ [x_0 + h, x_0] & h < 0 \end{cases}. \quad (219)$$

Skoro f jest ciągła w x_0 , to:

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta_\varepsilon} : |t - x_0| \leq \delta_\varepsilon \implies |f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon. \quad (220)$$

Wtedy dla $|h| \leq \delta_\varepsilon$ i $t \in [c, d]$:

$$f(x_0) - \varepsilon \leq f(t) \leq f(x_0) + \varepsilon. \quad (221)$$

Zatem, całkując obustronnie:

$$|h|(f(x_0) - \varepsilon) \leq \int_c^d f \leq |h|(f(x_0) + \varepsilon), \quad (222)$$

i dalej:

$$f(x_0) - \varepsilon \leq \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \leq f(x_0) + \varepsilon, \quad (223)$$

dla $|h| \leq \delta_\varepsilon$. Zatem:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon : |h| \leq \delta_\varepsilon \implies \left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| \leq \varepsilon. \quad (224)$$

Jest to inne wyrażenie równości:

$$F'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0). \quad (225)$$

Zauważmy, że skoro:

$$\int_{x_0}^x f = - \int_a^{x_0} f + \int_a^x f, \quad (226)$$

gdzie $\int_a^{x_0} f = \text{const.}$, to zdefiniowanie F jako całki od a lub od x_0 przesuwają ją jedynie i stałą i nie zmieniają jej własności.

Definicja 6.7. Funkcja pierwotna

Niech f będzie daną funkcją. Jeśli F jest taką funkcją, że $F' = f$, to F nazywamy **funkcją pierwotną** do f .

Obserwacja 21.

Dla każdej funkcji ciągłej f na $[a, b]$ istnieje funkcja do niej pierwotna:

$$F(x) = \int_a^x f. \quad (227)$$

Twierdzenie 6.11. Zasadnicze Twierdzenie Rachunku Całkowego II

Jeśli $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowna, a $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła na $[a, b]$ i różniczkowalna na $]a, b[$ oraz ponadto:

$$\forall x \in]a, b[: F'(x) = f(x), \quad (228)$$

to wtedy:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a). \quad (229)$$

Dowód.

Weźmy $\varepsilon > 0$. Niech π będzie takim podziałem $[a, b]$, że:

$$\overline{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) \leq \varepsilon. \quad (230)$$

Niech $\pi = (t_0, \dots, t_n)$. Niech $\Xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ będzie wypunktowaniem π t.ż.:

$$\frac{F(t_i) - F(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} = F'(\xi_i) = f(\xi_i). \quad (231)$$

$\xi_i \in]t_i, t_{i-1}[$ spełniające powyższy warunek będzie istnieć na mocy Twierdzenia Lagrange'a.

Skoro:

$$\overline{S}(f, \pi) \leq S(f, \pi, \Xi) \leq \underline{S}(f, \pi) \quad (232)$$

oraz:

$$\overline{S}(f, \pi) \leq \int_a^b f \leq \underline{S}(f, \pi), \quad (233)$$

to:

$$\left| \int_a^b f - S(f, \pi, \Xi) \right| \leq \varepsilon. \quad (234)$$

Mamy też:

$$S(f, \pi, \Xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^n F'(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^n F(t_i) - F(t_{i-1}) = F(b) - F(a). \quad (235)$$

Zatem:

$$\forall_{\varepsilon > 0} : \left| \int_a^b f - (F(b) - F(a)) \right| \leq \varepsilon. \quad (236)$$

Wielkości te muszą więc być równe sobie:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a). \quad (237)$$

Koniec

Spis treści

1	Wstęp	2
1.1	Relacje	2
1.2	Liczby rzeczywiste	3
2	Ciagi rzeczywiste	6
2.1	Pojęcie ciągu i ogólne rezultaty	6
2.2	limsup i liminf	9
3	Szeregi liczbowe	13
3.1	Szeregi o wyrazach dodatnich	14
3.2	Szeregi o wyrazach dowolnych	19
4	Przestrzenie metryczne	26
4.1	Podstawowe definicje. Otwartość i domkniętość	26
4.2	Przekształcenia ciągłe	35
4.3	Zwartość	37
4.4	Spójność	45
5	Rachunek różniczkowy	47
6	Rachunek całkowy	52
6.1	Całka Riemanna	52