Notatki do Analizy I R

Na podstawie wykładu głoszonego przez prof. Sołtana w 2023 r.

red. Filip Baciak

November 2023

1 Wstęp

1.1 Relacje

Definicja 1.1. Relacja

Relacją R ze zbioru A do zbioru B nazywamy podzbiór iloczynu kartezjańskiego tych dwu zbiorów:

$$R \subseteq A \times B. \tag{1}$$

Jeśli $(x, y) \in R$ to piszemy xRy.

Przykłady relacji:

- Relacja równości $R \subseteq A \times A$, zdefioniowana:

$$R = \{(a, a) | a \in A\}. \tag{2}$$

- Na zbiorze $\mathbb{N}$ mamy relację wewnętrzną (tj. będącą podzbiorem $\mathbb{N}^2$):

$$R = \{(n, m) | n \leqslant m\}. \tag{3}$$

Definicja 1.2. Relacja równoważności

Relacją równoważności nazywamy relację $R \subseteq A \times A$, spełniającą następujące aksjomaty:

1. Zwrotność:

$$\forall_{x \in A} : xRx. \tag{4}$$

2. Symetryczność:

$$\forall_{x,y \in A} : xRy \implies yRx. \tag{5}$$

3. Przechodniość:

$$\forall_{x,y,z \in A} : xRy \wedge yRz \implies xRz. \tag{6}$$

Przykładem relacji równoważności jest relacja R_f zadana przez funkcję $f : A \to B$:

$$xR_f y \iff f(x) = f(y). \tag{7}$$

Definicja 1.3. Częściowy porządek

Częściowym porządkiem na zbiorze A nazywamy relację $R \subseteq A^2$ (którą oznaczamy $\leqslant$ i piszemy $x \leqslant y$ zamiast xRy), jeśli ma następujące cechy:

1. Zwrotność:

$$\forall_{x \in A} : x \leqslant x. \tag{8}$$

2. Antysymetryczność:

$$\forall_{x,y \in A} : x \leqslant y \wedge y \leqslant x \implies x = y. \tag{9}$$

3. Przechodniość:

$$\forall_{x,y,z \in A} : xRy \wedge yRz \implies xRz. \tag{10}$$

Zbiór parę $(A, \leqslant)$ nazywamy zbiorem częsciowo uporządkowanym.

Na przykład relacja wewnętrzna na zbiorze $\mathbb{N}^2$ zdefiniowana następująco:

$$(a,b) \leqslant (a',b') \iff a \leqslant a' \land b \leqslant b',$$

zadaje częsciowy porządek nad $\mathbb{N}^2$.

Definicja 1.4. Porządek liniowy

Porządek częściowy $\leqslant$ nad A nazywamy **liniowym**, jeśli:

$$\forall_{x,y\in A}: \quad x \leqslant y \lor x \leqslant y. \tag{11}$$

Zbiór z określonym porządkiem liniowym nazywamy **uporządkowanym liniowo**. Jeśli $x \leqslant y \land x \neq y$ to piszemy $x < y$.

Zauważmy, że porządek częściowy - jak sama nazwa wskazuje - niekoniecznie określa relację większości między każdymi dwoma elementami zbioru na którym jest określony. Tę własność ma dopiero porządek liniowy.

Definicja 1.5. Ograniczenia

Podzbiór $X \subseteq A$ zbioru uporządkowanego liniowo $(A,\leqslant)$ nazywamy **ograniczonym z góry**, jeśli:

$$\exists_{u\in A}\forall_{x\in X}: x \leqslant B. \tag{12}$$

Podobnie definiujemy **ograniczenie z dołu**:

$$\exists_{l\in A}\forall_{x\in X}: l \leqslant x. \tag{13}$$

Elementy u i l nazywamy odpowiednio **ograniczeniem górnym** i **ograniczeniem dolnym**.

Definicja 1.6. Kresy górne i dolne

Kresem górnym podzbioru $X \subseteq A$ uporządkowanego $(A,\leqslant)$ nazwiemy najmniejsze jego ograniczenie górne, to znaczy taką liczbę $b \in A$, że:

- b jest ograniczeniem górnym X,
- jeśli l jest ograniczeniem górnym X, to $b \leqslant l$.

Podobnie - jako największe ograniczenie dolne - definiujemy **kres dolny**. Kres górny zbioru X oznaczamy $\sup X$, a kres dolny $\inf X$

Zauważmy, że w ogólności zbiór nie musi mieć kresu górnego lub dolnego, a jeśli go ma to kres nie musi być elementem tegoż zbioru.

1.2 Liczby rzeczywiste

Definicja 1.7. $\mathbb{R}$

Liczbami rzeczywistymi nazywamy zbiór $\mathbb{R}$ z określonymi działaniami dodawania $+$ i mnożenia $\cdot$, wyróżnionymi, różnymi elementami 0 i 1 i określoną relacją porządku liniowego $\leqslant$ - w skrócie $(\mathbb{R},+,\cdot,0,1,\leqslant)$ - taki że:

1. $\mathbb{R}$ jest ciałem, tzn. spełnia:
   (a) Zamkniętość dodawania i mnożenia:
   $$\forall_{a,b\in\mathbb{R}} : a + b \in R \wedge a \cdot b \in \mathbb{R}; \tag{14}$$
   (b) 0 jest elementem neutralnym dodawania:
   $$\forall_{a\in\mathbb{R}} : a + 0 = a; \tag{15}$$
   (c) Istnieją elementy odwrotne względem dodwania:
   $$\forall_{a\in\mathbb{R}}\exists_{-a\in R} : a + (-a) = 0; \tag{16}$$
   (d) Dodawanie jest łączne:
   $$\forall_{a,b,c\in\mathbb{R}} : (a + b) + c = a + (b + c); \tag{17}$$
   (e) Dodawanie jest przemienne:
   $$\forall_{a,b\in\mathbb{R}} : a + b = b + a; \tag{18}$$
   (f) 1 jest elementem neutralnym mnożenia:
   $$\forall_{a\in\mathbb{R}} : a \cdot 1 = a; \tag{19}$$
   (g) Mnożenie jest łączne:
   $$\forall_{a,b,c\in\mathbb{R}} : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c); \tag{20}$$
   (h) Mnożenie jest przemienne:
   $$\forall_{a,b\in\mathbb{R}} : a \cdot b = b \cdot a; \tag{21}$$
   (i) Istnieją elementy przeciwne względem mnożenia (z wyjątkiem 0):
   $$\forall_{a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}\exists_{a^{-1}\in R} : a \cdot a^{-1} = 1; \tag{22}$$
   (j) Dodawanie jest rozdzielne względem mnożenia:
   $$\forall_{a,b,c\in\mathbb{R}} : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c. \tag{23}$$
2. Porządek liniowy $\leqslant$ spełnia:
   (a) Możliwość dodawania "stronami":
   $$\forall_{a,b,t\in R} : a \leqslant b \implies a + t \leqslant b + t; \tag{24}$$
   (b) Mnożenie dodatnich zachowuje dodatniość
   $$\forall_{a,b\in R} : 0 < a \wedge 0 < b \implies 0 < a \cdot b. \tag{25}$$
3. $\mathbb{R}$ jest zwarty, tj. każdy niepusty zbiór ograniczony z góry ma kres górny w $\mathbb{R}$.

Można podać konstrukcję ciała o podanych własnościach (np. kontrukcja Dedekina, kontrukcja Riemanna) i dowieść, że z dokładnością do izomorfizmu istnieje tylko jedno takie ciało.

Twierdzenie 1.1. Własność Archimedesa

$$\forall_{x>0, y\in\mathbb{R}} \exists_{n\in\mathbb{N}} : nx > y. \tag{26}$$

Dowód.

Twiedzenia dowiedziemy nie wprost:
Niech $X = nx | n \in \mathbb{N}$ i załóżmy, że X jest ograniczony z góry przez y. Zatem posiada supremum: $\alpha = \sup X$. Wiemy, że $\alpha - x < \alpha$, więc nie może to być ograniczenie górne. Zatem:

$$\exists_{n_0\in\mathbb{N}} : n_0 x > \alpha - x.$$

Ale wtedy:

$$X \ni (n_0 + 1)x > \alpha = \sup X.$$

Sprzeczność! Istotnie więc, zbiór $nx | n \in \mathbb{N}$ nie może być ograniczony przez żadną liczbę, co dowodzi tezy.

Twierdzenie 1.2. Gęstość $\mathbb{Q}$ w $\mathbb{R}$

$$\forall_{x,y\in\mathbb{R}, x<y} \exists_{r\in\mathbb{Q}} : x < r < y. \tag{27}$$

Dowód.

Skoro $y - x > 0$, to $\exists n \in \mathbb{N} : n(y - x) > 1$. Ponadto, skoro $1 > 0$, to $\exists_{m_1, m_2\in\mathbb{N}} : m_1 > nx \wedge m_2 > -nx$. Zatem $-m_2 < nx < m_1$, tzn. nx leży pomiędzy dwiema liczami całkowitymi. Istnieje więc takie $m \in \mathbb{Z}$, takie że:

$$m - 1 \leqslant nx < m.$$

Stąd już prosto:

$$nx < m \leqslant nx + 1 < ny,$$

$$x < \frac{m}{n} < y.$$

Na koniec krótka notka - zbiór $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, to jest liczby rzeczywiste z dołączonymi symbolami (nie liczbami!) plus i minus nieskończoności, nazywami **rozszerzonymi liczbami rzeczywistymi**.

2 Ciagi rzeczywiste

2.1 Pojęcie ciągu i ogólne rezulatamy

Definicja 2.1. Ciąg

Ciagiem elementów z zbioru X nazywamy funkcję:

$$a : \mathbb{N} \to X \tag{28}$$

i zamiast $a(n)$ piszemy a_n. Cały ciąg oznaczamy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. My w szczególności zajmować się będziemy ciągami rzeczywistymi i zespolonymi.

W sekcji tej, o ile nie powiedziano inaczej, zakładamy, że wszystkie ciągi są rzeczywiste.

Definicja 2.2. ZBIEŻNOŚĆ CIĄGU

Ciąg rzeczywisty $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nazywamy zbieżnym do granicy g, jeśli:

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N_\varepsilon\in\mathbb{N}}\forall_{n\geqslant N} : |a_n - g| \leqslant \varepsilon. \tag{29}$$

Piszemy wtedy: $\lim_{n\to\infty} a_n = g$ lub $a_n \xrightarrow{n\to\infty} g$.

Ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nazywamy **ograniczonym**, jeśli:

$$\exists_C\forall_{n\in\mathbb{N}} : |a_n| \leqslant C. \tag{30}$$

Obserwacja 2.1. Obserwacja

Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.

.

Twierdzenie 2.1. Arytmetyka granic

Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będą ciągami rzeczywistymi, takimi, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Wtedy:

1. $$\lim_{n\to\infty} a + b_n = a + b \tag{31}$$

2. $$\lim_{n\to\infty} a \cdot b_n = a \cdot b \tag{32}$$

3. $$\lim_{n\to\infty} |a|_n = |a| \tag{33}$$

4. Jeśli $b_n \neq 0$ DDD n (dla dostatecznie dużych n) i $b \neq 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \tag{34}$$

Dowód.

W dowodach wszystkich tych twierdzeń chcemy dla dowolnego ε skonstruować takie N, że dla wszystkich $n \geqslant N$ różnica między wyrazami ciągu po lewej a granicą po prawej stronie jest mniejsza od ε. Pamiętamy tutaj, że:

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{M_\varepsilon\in\mathbb{N}}\forall n \geqslant M_\varepsilon : |a_n - a| \leqslant \varepsilon, \tag{35}$$

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{K_\varepsilon\in\mathbb{N}}\forall n \geqslant K_\varepsilon : |b_n - b| \leqslant \varepsilon, \tag{36}$$

1. Mamy:

$$|a_n + b_n - a - b| \leqslant |a_n - a| + |b_n - b|, \tag{37}$$

więc dla $n \geqslant N = \max\{M_{\frac{\varepsilon}{2}}, K_{\frac{\varepsilon}{2}}\}$:

$$|a_n + b_n - a - b| \leqslant |a_n - a| + |b_n - b| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{38}$$

2.

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leqslant |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a|. \tag{39}$$

Ale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony, więc $a_n \leqslant C$ i mamy:

$$|a_n b_n - ab| \leqslant |a_n||b_n - b| + b|a_n - a| \leqslant (|C| + 1)|b_n - b| + (|b| + 1)|a_n - a|. \tag{40}$$

Zatem dla $n \geqslant \max\{M_{\frac{\varepsilon}{2|b+1|}}, K_{\frac{\varepsilon}{2(|C|+1)}}\}$:

$$|a_n b_n - ab| \leqslant (|C| + 1)\frac{\varepsilon}{2(|C| + 1)} + (|b| + 1)\frac{\varepsilon}{2|b + 1|} = \varepsilon. \tag{41}$$

Dodaliśmy tutaj 1 do $|C|$ i $|b|$, żeby uniknąć ewentualnego dzielenia przez 0.

3. Jeśli $a > 0$, to ciąg od pewnego miejsca musi być dodatni: $|a_n| = a_n$ dla $n > M_{|a|}$, więc dla $n > N = \max\{M_{|x|}, M_\varepsilon\}$:

$$||a_n| - |a|| = |a_n - a| < \varepsilon.$$

Podobnie, jeśli $a < 0$, to ciąg od pewnego miejsca jest ujemny i $|a_n| = -a_n$ dla $n > M_{|a|}$, więc dla $n > N = \max\{M_{|x|}, M_\varepsilon\}$:

$$||a_n| - a| = | - a_n - |a|| = |a_n - a| < \varepsilon.$$

Dla $a = 0$, mamy prosto:

$$|a_n| < \varepsilon \implies ||a_n|| < \varepsilon.$$

4. Zakładamy, że $b_n \neq 0$ DDD n, więc istnieje takie K_0, że dla $n \geqslant K_0$ $b_n \neq 0$. Wtedy:

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a_n b - a b_n}{b_n b}\right| = \left|\frac{a_n b - ab + ab - ab_n}{b_n b}\right| = \left|\frac{b(a_n - a) + a(b - b_n)}{b_n b}\right| \tag{42}$$

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| \leqslant \left|\frac{a_n - a}{b_n}\right| + \left|\frac{a}{b_n b}\right|\left|b_n - b\right| \leqslant \left|\frac{a_n - a}{b_n}\right| + (\left|\frac{a}{b_n b}\right| + 1)\left|b_n - b\right| \tag{43}$$

Zauważmy, że dla $n \geqslant K_{|\frac{b}{2}|}$ mamy $|b_n - b| \leqslant |\frac{b}{2}|$, więc $\frac{1}{2}|b| \leqslant |b_n|$, przez co:

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| \leqslant \left|\frac{a_n - a}{b_n}\right| + (\left|\frac{a}{b_n b}\right| + 1)\left|b_n - b\right| \leqslant \left|\frac{2}{b}\right|\left|a_n - a\right| + (\left|\frac{2a}{b}\right| + 1)\left|b_n - b\right| \tag{44}$$

Ostatecznie dla $n > \max\{K_0, K_{|\frac{b}{2}|}, K_{\frac{\varepsilon}{2(|\frac{2a}{b}|+1)}}, M_{\frac{\varepsilon}{4|b|}}\}$:

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| \leqslant \left|\frac{2}{b}\right|\frac{\varepsilon}{4|b|} + (\left|\frac{2a}{b}\right| + 1)\frac{\varepsilon}{2(|\frac{2a}{b}| + 1)} = \varepsilon. \tag{45}$$

Powiemy teraz o mocnym twierdzeniu, pozwalającym stwierdzić, czy ciąg ma granicę, bez jej wyznaczania.

Twierdzenie 2.2. Twierdzenie o ciągu monotonicznym i ograniczonym

Każdzy ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.

- Jeśli ciąg jest niemalejący, to jest on zbieżny do supremum zbioru wyrazów ciągu.
- Jeśli ciąg jest nierosnący, to jest on zbieżny do infimum zbioru wyrazów ciągu.

Uwaga - dla ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ supremum jego wyrazów - tj. $\sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ - oznaczamy $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$. Analogicznie piszemy $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ dla infimum jego wyrazów.

Dowód.

Załóżmy, że $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest niemalejący. Zbiór $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ jest ograniczony, zatem posiada supremum. Oznaczmy je g. Zatem dla każdego $\varepsilon > 0$ liczba $g - \varepsilon$ nie jest ograniczeniem górnym:

$$\exists_m : g - \varepsilon \leqslant a_m \leqslant g. \tag{46}$$

Ale wtedy, z racji monotoniczności $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\forall_{n\geqslant m} : g - \varepsilon \leqslant a_m \leqslant a_n \leqslant g \leqslant g + \varepsilon. \tag{47}$$

Czyli:

$$\forall_{n\geqslant m} : |a_n - g| \leqslant \varepsilon, \tag{48}$$

co chcieliśmy pokazać. Dla $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nierosnącego dowód jest zupełnie analogiczny (można też rozważać zbieżność niemalejącego ciągu $(-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

Twierdzenie 2.3. Twiedzenie o trzech ciągach

Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będą dwoma ciągami zbieżnymi do wspólnej granicy g. Wtedy, jeśli dla ciągu $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ istnieje takie N, że:

$$\forall_{n\geqslant N} : a_n \leqslant b_n \leqslant c_n, \tag{49}$$

to $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = g$.

Dowód.

Dowód jest bardzo krótki. Dla dowolnego ε bierzemy takie M_ε, że $\forall_{n\geqslant M_\varepsilon} : |a_n - g| \leqslant \varepsilon$ i takie K_ε, że: $\forall_{n\geqslant K_\varepsilon} : |c_n - g| \leqslant \varepsilon$. Wtedy dla $n \geqslant \max\{N, M_\varepsilon, K_\varepsilon\}$:

$$g - \varepsilon \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant c_n \leqslant g - \varepsilon, \tag{50}$$

więc $|b_n - g| \leqslant \varepsilon$.

Definicja 2.3. Rozbieżność do $\pm\infty$

Powiemy, że ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest rozbieżny do $+\infty$, jeśli:

$$\forall_C \exists_{N_C\in\mathbb{N}} \forall_{n\geqslant N_C} : a_n \geqslant C. \tag{51}$$

Analogicznie, powiemy, że ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest rozbieżny do $-\infty$, jeśli:

$$\forall_C \exists_{N_C\in\mathbb{N}} \forall_{n\geqslant N_C} : a_n \leqslant C. \tag{52}$$

Mówimy też o "zbieżności"do $\pm\infty$, tj. zbieżności w zbiorze $\overline{\mathbb{R}}$

Obserwacja 2.2.

Ciąg monotoniczny, nieograniczony jest rozbieżny do $\pm\infty$.

Definicja 2.4. Podciąg

Podciągiem ciagu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nazywamy ciąg $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, gdzie $n \ni k \mapsto n_k \in \mathbb{N}$ jest funkcją ściśle rosnącą.

Obserwacja 2.3.

Jeśli $a_n \to g$, to każdy podciąg $a_{n_k} \to g$

2.2 lim sup i lim inf

Założmy, że mamy dany ciąg liczb rzeczywistych $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zdefiniujmy wtedy następujące dwa ciągi: $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oraz $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, takie że:

$$\alpha_n = \inf\{a_k | k \geqslant n\} \tag{53}$$

$$\beta_n = \sup\{a_k | k \geqslant n\} \tag{54}$$

Wtedy, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem niemalejącym, co wynika z faktu, że:

$$\inf\{a_k | k \geqslant n+1\} \subseteq \inf\{a_k | k \geqslant n\}$$

Podobnież, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem nierosnącym. Z tego wynika więc, że są to ciągi zbieżne w $\overline{\mathbb{R}}$. Mamy więc:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \sup \alpha_n, \tag{55}$$

gdyż $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ to ciąg nierosnący oraz podobnie:

$$\lim_{n\to\infty} \beta = \inf \beta. \tag{56}$$

Definicja 2.5. Granice górne i dolne ciągu

Wielkość:

$$\lim_{n\to\infty} \inf\{a_k | k \geqslant n\} = \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \sup \alpha_n \tag{57}$$

nazywamy **granicą dolną** ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i oznaczamy $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$. Podobnie, wielkość:

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{a_k \,|\, k \geqslant n\} = \lim_{n\to\infty} \beta_n = \inf \beta_n \tag{58}$$

nazywamy **granicą górną** ciągu i oznaczamy $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Twierdzenie 2.4. Bolzano-Weierestrassa I

Niech L będzie zbiorem punktów skupienia zbioru $\{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, tzn. takich liczb, dla których istnieje podciąg ciągu $((a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zbieżny do tej liczby:

$$L = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \,|\, \exists_{\text{podciąg}\,(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}} : \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = x\}. \tag{59}$$

Wtedy:

1.
$$L \neq \emptyset \tag{60}$$

2.
$$\liminf a_n \in L \quad \wedge \quad \limsup a_n \in L \tag{61}$$

3.
$$\liminf a_n = \inf L \quad \wedge \quad \limsup a_n = \sup L \tag{62}$$

Dowód.

TODO

Nietrudnym wnioskiem z tego twierdzenia jest następujące:

Twierdzenie 2.5. Kryterium zbieżności

Ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do $a \in \overline{\mathbb{R}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\liminf a_n = \limsup a_n. \tag{63}$$

Dowód.

$\Longrightarrow$ Jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, to także każdy podciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dąży do a, więc $L = \{a\}$. Ale $\liminf a_n \in L$ i $\limsup a_n \in L$, więc:

$$\liminf a_n = a = \limsup a_n. \tag{64}$$

$\Longleftarrow$ Oczywiście zachodzi nierówność:

$$\alpha_n \leqslant a_n \leqslant \beta_n. \tag{65}$$

Skoro mamy:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \liminf a_n = \limsup a_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n, \tag{66}$$

więc z twierdzenia o trzech ciągach mamy:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \liminf a_n = \limsup a_n. \tag{67}$$

Twierdzenie 2.6. Warunek Cauchy'ego

Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem rzeczywistym. Wtedy następujące warunki są rónoważne:

1.
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R} \tag{68}$$

2.
$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{M_\varepsilon}\forall_{n,m\geqslant M_\varepsilon}|a_n - a_m| \leqslant \varepsilon. \tag{69}$$

Jeśli ciąg spełnia ten warunek, mówimy, że spełnia warunek Cauchy'ego.

Sprawdzając warunek Cauchy'ego, możemy dowodzić zbieżności ciągu do granicy rzeczywistej bez wyznaczania tej granicy.

Dowód.

1. $\implies$ 2. Skoro $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zbieżny do $a \in R$, to dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $N_{\frac{\varepsilon}{2}}$, że:

$$\forall_{n,m\geqslant N_{\frac{\varepsilon}{2}}} : |a_n - a| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \wedge |a_m - a| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \tag{70}$$

ale wtedy:

$$|a_n - a_m| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{71}$$

2. $\implies$ 1. Zauważmy, że $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem ograniczonym. Istotnie, weźmy $\varepsilon = 1$:

$$\exists_{M_1}\forall_{n\geqslant M_1} : |a_n - a_{M_1}| \leqslant 1, \tag{72}$$

więc:

$$\min\{a_{M_1} - 1; a_k \,\big|\, k < M_1\} \leqslant a_n \leqslant \max\{a_{M_1} + 1; a_k \,\big|\, k < M_1\}. \tag{73}$$

Weźmy teraz dowolny $\varepsilon > 0$. Z ograniczoności $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wynika: $\alpha = \liminf a_n \in \mathbb{R}$ i $\beta = \limsup a_n \in \mathbb{R}$. Oznacza to, że:

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{A_\varepsilon}\forall_{n\geqslant A_\varepsilon} : |\alpha_n - \alpha| \leqslant \varepsilon, \tag{74}$$

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{B_\varepsilon}\forall_{n\geqslant B_\varepsilon} : |\beta_n - \beta| \leqslant \varepsilon, \tag{75}$$

Zauważmy, że:

$$|\alpha - \beta| \leqslant |\alpha - \alpha_n| + |\beta - \beta_n| + |\alpha_n - \beta_N|. \tag{76}$$

Dwa pierwsze czynniki po prawej potrafimy ograniczyć, zbadajmy więc ostatni wyraz:

$$\begin{aligned} |\alpha_n - \beta_N| \leqslant |\alpha_n - a_n| + |\beta_n - a_n| &= |\inf\{a_n, a_{n+1}, \ldots\} - a_n| + |\sup\{a_n, a_{n+1}, \ldots\} - a_n| \\ &= \inf\{|a_m - a_n| \,\big|\, m \geqslant n\} + \sup\{|a_m - a_n| \,\big|\, m \geqslant n\}. \end{aligned} \tag{77}$$

Możemy teraz skorzystać z warunku Cauchy'ego i znaleźć takie $M_{\frac{\varepsilon}{6}}$, że:

$$\forall_{m\geqslant n\geqslant M_{\frac{\varepsilon}{6}}} : |a_m - a_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{6}. \tag{78}$$

Zatem dla $n \geqslant M_{\frac{\varepsilon}{6}}$:

$$\inf\{|a_m - a_n| \,\Big|\, m \geqslant n\} \leqslant \frac{\varepsilon}{6} \tag{79}$$

$$\sup\{|a_m - a_n| \,\Big|\, m \geqslant n\} \leqslant \frac{\varepsilon}{6} \tag{80}$$

Ostecznie otrzymujemy dla $n \geqslant \max\{A_{\frac{\varepsilon}{3}}, B_{\frac{\varepsilon}{3}}, M_{\frac{\varepsilon}{6}}\}$:

$$|\alpha - \beta| \leqslant |\alpha - \alpha_n| + |\beta - \beta_n| + |\alpha_n - a_n| + |\beta_n - a_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \varepsilon. \tag{81}$$

Pokazaliśmy, że różnica $|\liminf a_n - \limsup a_n|$ jest mniejsza od dowolnej liczby dodatniej, zatem musi być równa 0. Oznacza to, że $\liminf a_n = \limsup a_n \in \mathbb{R}$, a więc - co udowodniliśmy już wcześniej - ciąg jest zbieżny do rzeczywistej granicy.

3 Szeregi liczbowe

Definicja 3.1. Szereg liczbowy

Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczb zespolonych ($a_n \in \mathbb{C}$). **Szeregiem** o wyrazach $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nazwiemy napis:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{82}$$

N**-tą sumą częściową** szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazwiemy sumę:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n. \tag{83}$$

Powiemy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest **zbieżny** do S, jeśli:

$$\lim_{N\to\infty} S_N = S \in \mathbb{C}. \tag{84}$$

Napiszemy wtedy, że $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$, a liczbę S nazwiemy sumą szeregu. Jeśli S_N nie ma granicy, to szereg nazwiemy **rozbieżnym**.

Przykład 1. Jeśli $a_n = (-1)^n$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

Przykład 2. Jeśli $a_n = q^{n-1}$, dla $|q| < 1$, to $S_N = \frac{1-q^n}{1-q}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} q_n^{n-1} = \frac{1}{1-q}$.

Twierdzenie 3.1.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall_{\varepsilon} \exists_{N_\varepsilon} \forall_{N \geqslant M \geqslant N_\varepsilon} \Big| \sum_{n=M+1}^{N} a_n \Big| \leqslant \varepsilon. \tag{85}$$

Dowód.

Twierdzenie wynika prosto z zastosowania warunku Cauchy'ego do ciągu S_N. Bowiem S_N jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall_{\varepsilon} \exists_{N_\varepsilon} \forall_{N \geqslant M \geqslant N_\varepsilon} |S_N - S_m| \leqslant \varepsilon, \tag{86}$$

co po rozpisaniu S_N i S_M jest równoważne twierdzeniu.

$\sum\limits_{n=M+1}^{N} a_n$ nazywa się czasami **ogonem szeregu**.

Obserwacja 3.1. Warunek konieczny zbieżności

Warunkiem koniecznym zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest, aby $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Istotnie, wystarczy podstawić $M = N - 1$ w twierdzeniu 3, żeby otrzymać definicję zbieżności a_n do 0.

Warto pamiętać, że nie jest to warunek wystarczający - kontrprzykładem jest np. rozbieżny szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} n$. Wtedy

$$S_{2^k} = 1 + \sum_{l=1}^{k} \sum_{j=2^{l-1}+1}^{2^l} \frac{1}{j} \geqslant 1 + \sum_{l=1}^{k} \frac{2^{l-1}}{2^l} = 1 + \frac{1}{2}k \to \infty. \tag{87}$$

Zatem i $S_N \to \infty$, bo jest to ciąg monotoniczny.

3.1 Szeregi o wyrazach dodatnich

W tej sekcji zajmiemy się jedynie szeregami o wyrazach dodatnich, to jest takimi, dla których $\mathbb{R} \ni a_n \geqslant 0$.

Obserwacja 3.2.

Dla szeregów o wyrazach dodatnich, ciąg sum częściowych jest niemalejącym ciągiem rzeczywistym. Oznacza to, że szereg jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg sum częściowych jest ograniczony. W przeciwnym wypadku $\lim_{N\to\infty} S_N = +\infty$ i wtedy mówimy, że $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny do $+\infty$.

Twierdzenie 3.2. Kryterium porównawcze

Niech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ będą szeregami o wyrazach dodatnich. Wtedy:

1. Jeśli $\exists_{C>0} : a_n \leqslant Cb_n$ DDDn, to:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty. \tag{88}$$

2. Jeśli $\exists_{C>0} : a_n \geqslant Cb_n$ DDDn, to:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty. \tag{89}$$

Dowód.

Niech N_0 będzie oznaczał indeks, od którego podane nierówności zachodzą.

1. Dla $N > N_0$ mamy:

$$S_N^{(a)} = S_{N_0}^{(a)} + \sum_{n=N_0+1}^{N} a_n \leqslant S_{N_0}^{(a)} + \sum_{n=N_0+1}^{N} Cb_n = S_{N_0}^{(a)} - CS_{N_0}^{(b)} + CS_N^{(b)} \leqslant S_{N_0}^{(a)} - CS_{N_0}^{(b)} + C\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty.$$

   Zatem skoro $S_N^{(a)}$ jest ograniczony, to (por. Obs. 3.1) jest i zbieżny.

2. Podobnie jak poprzednio, dla $N > N_0$ mamy:

$$S_N^{(a)} = S_{N_0}^{(a)} + \sum_{n=N_0+1}^{N} a_n \geqslant S_{N_0}^{(a)} + \sum_{n=N_0+1}^{N} Cb_n = S_{N_0}^{(a)} - CS_{N_0}^{(b)} + CS_N^{(b)} \xrightarrow{N\to\infty} \infty,$$

   więc i $S_N^{(a)}$ jest rozbieżny do nieskończoności.

Twierdzenie 3.3. Kryterium porównawcze (wersja graniczna)

Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ będą szeregami o wyrazach dodatnich i niech $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$. Wtedy:

1. Jeśli $L < \infty$, to:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty. \tag{90}$$

2. Jeśli $L > 0$, to:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty. \tag{91}$$

Dowód.

1. Jeśli $L < \infty$, to $a_n \leqslant (L+L) * b_n$ dla dostatecznie dużyn n i stosujemy Tw. 3.1.1.
2. Jeśli $L > 0$, to $a_n \leqslant \frac{1}{2}Lb_n$ DDDn (ew. $a_n \leqslant 2b_n$, jeśli $L = \infty$) i stosujemy Tw. 3.1.2.

Twierdzenie 3.4. Kryterium D'Alemberta

Niech $\forall_n a_n > 0$ i niech $d_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Wtedy:

1. $$\limsup d_n < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \tag{92}$$

2. $$(\liminf d_n > 1 \vee \exists_k \forall_{n \geqslant k} : d_n \geqslant 1) \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty. \tag{93}$$

   Ponadto, jeśli zachodzi poprzecznik implikacji, to $a_n \not\to 0$.

Dowód.

1. Skoro $\limsup d_n < 1$, to d_n musi być ograniczony. Niech λ będzie taką liczbą, że $1 > \lambda > \limsup d_n$. Zauważmy, że może istnieć tylko skończona liczba wyrazów d_n większych lub równych λ, gdyż inaczej wybralibyśmy z nich podciąg zbieżny do granicy $\geqslant \lambda$, co przeczy założeniu, że $\lambda < \limsup d_n$. Zatem:
   $$\exists_N \forall_{n \geqslant N} : d_n < \lambda.$$
   Czyli:
   $$\exists_N \forall_{n \geqslant N} : a_{n+1} < \lambda a_n.$$
   Stąd, dla $n > N$: $a_n < \frac{a_N}{\lambda^N} \lambda^n$. Tak więc na mocy kryterium porównawczego ze zbieżnym szeregiem $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n$ $(\lambda < 1)$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

2. Jeśli $\liminf d_n > 1$, to (używając podobnego rozumowania, jak poprzednio) istnieje $\rho > 1$ t.ż. $d_n > \rho$. Skoro tak, to DDDn: $a_{n+1} > \rho a_n > a_n$ i a_n, jako rosnący ciąg o wyrazach dodatnich, nie może dążyć do 0. Podobnie, jeśli DDDn mamy $d_n \geqslant 1$, to $a_{n+1} \geqslant a_n$ i znowuż a_n nie może dążyć do 0.

Uwagi.

1. Może być tak, że $d_n \geqslant 1$ dla nieskończenie wielu n, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Przykład:
   $$a_n = \begin{cases} \frac{1}{(\frac{n}{2})^2}, & \text{gdy } n = 2k \\ \frac{1}{(\frac{n-1}{2})^2}, & \text{gdy } n = 2k+1 \end{cases}$$

2. Może być tak, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, ale $\limsup d_n > 1$.

Następne kryterium jest rozszerzeniem kryterium D'Alemberta:

Twierdzenie 3.5. Kryterium Cauchy'ego

TODO

Twierdzenie 3.6.

Załóżmy, że $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest szeregiem o wyrazach dodatnich ($a_n > 0$). Wtedy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sup_{\substack{F \subset \mathbb{N} \\ |F| < +\infty}} \sum_{n \in F} a_n. \tag{94}$$

Dowód.

Oczywiście, skoro S_N jest rosnący, to $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} S_N = \sup_{N\in\mathbb{N}} S_N$. Łatwo widać też, że $\sup_{N\in\mathbb{N}} S_N \leqslant \sup_{\substack{F \subset \mathbb{N} \\ |F| < +\infty}} \sum_{n\in F} a_n$ (ponieważ S_N to suma tego samego typu, co po prawej stronie z $F = \{1, ..., N\}$). Dodatkowo, dla każdego skończonego $F \subseteq \mathbb{N}$, istnieje takie N, że $\forall_{n\in F} x \leqslant N$, zatem $\sum_{n\in F} a_n \leqslant S_N$. Ostatecznie mamy $\sup_{\substack{F \subset \mathbb{N} \\ |F| < +\infty}} \sum_{n\in F} a_n \leqslant \sup_{N\in\mathbb{N}} S_N$, stąd te dwie wielkości są sobie równe i mamy tezę.

Wynikają z tego następujące wnioski:

Twierdzenie 3.7.

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \iff \exists_{C>0} \forall_{F\subset\mathbb{N}, |F|<+\infty} \sum_{n\in F} a_n \leqslant C$$
   (Zbiór wszystkich sum elementów o indeksach pochodzących ze SKOŃCZONEGO podzbioru $\mathbb{N}$ jest ograniczony)
2. Jeśli $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest bijekcją (permutacją indeksów), to:
   $$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$
   Oznacza to, że zmiana kolejności sumowania nie wpływa na wynik.
3. Jeśli:
   $$\mathbb{N} = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad \text{(jest to suma rozłączna, tj. } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ dla } i \neq j\text{)}$$
   i:
   $$S_i = \sum_{n\in A_i} a_n,$$
   to:
   $$\sum_{i=0}^{\infty} S_i = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$
   Jest to grupowania (łączności i przemienności) dla szeregu.

Dowód.

1. Ograniczoność sum po prawej jest oczywiście równoważne istnieniu skończonego ich supremum, co równe jest sumie po lewej.

2. σ zachowuje klasę skończonych podzbiorów i wyznacza bijekcję:

$$\sigma : 2^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}}$$

$$\sigma(F) = \{\sigma(n) \,|\, n \in F\},$$

   która zachowuje moc zbioru F i przeprowadza zbiory skończone na skończone. Zatem:

$$\left\{ \sum_{n\in F} a_n \,\middle|\, F \subset \mathbb{N}, |F| < \infty \right\} = \left\{ \sum_{n\in \sigma(F)} a_n \,\middle|\, F \subset \mathbb{N}, |F| < \infty \right\},$$

   więc:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sup \left\{ \sum_{n\in F} a_n \,\middle|\, F \in 2^{\mathbb{N}} \right\} = \sup \left\{ \sum_{n\in \sigma(F)} a_n \,\middle|\, F \subset \mathbb{N}, |F| < \infty \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$$

3. **a)** Jeśli $\exists_j : S_j = \infty$, to:

$$\sum_{i=1}^{\infty} S_i = \infty$$

   i:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \geqslant \sum_{n\in A_j} a_n = \infty.$$

   Stąd:

$$\sum_{i=1}^{\infty} S_i = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

   b) Niech $\forall_i : S_i < \infty$. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i weźmy dowolny:

$$K \subset \mathbb{N}, \quad |K| < \infty.$$

   Przypomnijmy:

$$\sum_{i=1}^{\infty} S_i = \sup_{\substack{K\subset\mathbb{N},\\ |K|<\infty}} \sum_{j\in K} S_j.$$

   Niech $K = \{i_1, i_2, \ldots, i_l\}$ i wybierzmy:

$$C_1 \subseteq A_{i_1}, C_2 \subseteq A_{i_2}, \ldots, C_l \subseteq A_{i_l},$$

   takie, że:

$$\forall_j : \quad \sum_{n\in C_j} a_n \geqslant S_{i_j} - \frac{\varepsilon}{l},$$

   co jest możliwe, gdyż S_{i_j} jest supremum sum po skończonych podzbiorach. Jeśli A_{i_j} jest skończony, możemy przyjąć $C_j = A_{i_j}$.

Wtedy:

$$\sum_{i\in K} S_i = S_{i_1} + S_{i_2} + \ldots + S_{i_l} \leqslant \left(\sum_{n\in C_1} a_n + \frac{\varepsilon}{l}\right) + \left(\sum_{n\in C_l} a_n + \frac{\varepsilon}{l}\right) + \ldots \left(\sum_{n\in C_l} a_n + \frac{\varepsilon}{l}\right) = \varepsilon + \sum_{n\in\bigcup_{j=1}^{l} C_j} a_n.$$

NB: $\bigcup_{j=1}^{l} C_j$ jest zbiorem skończonym, więc:

$$\sum_{i\in K} S_i \leqslant \varepsilon + \sup_{\substack{F\subset\mathbb{N}\\ |F|<+\infty}} \sum_{n\in F} a_n = \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Rozumowanie to przeprowadziliśmy dla dowolnego K i ε, więc:

$$\sum_{i=1}^{\infty} S_i = \sup_{\substack{K\subset\mathbb{N}\\ |K|<\infty}} \sum_{i\in K} S_i \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

W drugą stronę, weźmy $F \subset \mathbb{N}$, $|F| < \infty$ i niech:

$$K = \{i \in \mathbb{N} \,|\, A_i \cap F \neq \emptyset\},$$

wtedy $|K| < \infty$, bo F jest skończony, a A_j są rozłączne. Wtedy mamy:

$$\sum_{n\in F} a_n = \sum_{i\in K} \sum_{n\in A_i\cap F} a_n \leqslant \sum_{i\in K} \sum_{n\in A_i} a_n = \sum_{i\in K} S_i.$$

Z tego:

$$\sum_{n\in F} a_n \leqslant \sum_{i\in K} S_i \leqslant \sup_{\substack{K\subset\mathbb{N}\\ |K|<\infty}} \sum_{i\in K} S_i = \sum_{i=1}^{\infty} S_i,$$

co zachodzi dla dowolnego F skończonego. Zatem:

$$\sup_{\substack{F\subset\mathbb{N}\\ |F|<\infty}} \sum_{n\in F} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} S_i.$$

Porównując dwie otrzymane nierówności, otrzymujemy tezę.

3.2 Szeregi o wyrazach dowolnych

W tej podsekcji rozważamy szeregi o dowolnych wyrazach zespolonych:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n, \quad z_n \in \mathbb{C}.$$

Twierdzenie 3.8. Kryterium zbieżności bezwzględnej

Jeśli następujący szereg jest zbieżny:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < +\infty$$

to i:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

jest zbieżny.

Dowód.

Korzystamy z warunku Cauchy'ego dla szeregu modułów:

$$\forall_{\varepsilon} \exists_{N_\varepsilon} \forall_{n>m\geqslant N_\varepsilon} : |\sum_{k=m+1}^{n} |z_k|| \leqslant \varepsilon,$$

ale:

$$|\sum_{k=m+1}^{n} z_k| \leqslant |\sum_{k=m+1}^{n} |z_k||,$$

więc:

$$\forall_{\varepsilon} \exists_{M_\varepsilon = N_\varepsilon} \forall_{n>m\geqslant M_\varepsilon} : |\sum_{k=m+1}^{n} z_k| \leqslant \varepsilon.$$

To dowodzi, że warunek Cauchy'ego zachodzi dla $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, zatem jest to szereg zbieżny.

Definicja 3.2. Zbieżność bezwzględna

- Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ nazywamy zbieżnym bezwzględnie, jeśli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$ jest zbieżny.
- Jeśli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny, ale $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$ już nie, to szereg nazywamy zbieżnym warunkowo.

Dla szeregów o wyrazach dowolnych obowiązują inne kryteria zbieżności niż dla szeregów o wyrazach dodatnich. Jednym z nich, jest:

Twierdzenie 3.9. Kryterium Dirichleta

Załóżmy, że:

- Mamy ciągi:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad a_n \in \mathbb{C}$$

$$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad b_n \in \mathbb{R}, \quad b_n \geqslant 0$$

- b_n zbiega monotonicznie do 0.
- Ciąg sum częściowych wyrazów (a_n) jest ograniczony:

$$\exists_{C\in\mathbb{R}}\forall_{N\in\mathbb{N}} : \Big|\sum_{n=1}^{N} a_n\Big| \leqslant C.$$

Wtedy szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jest zbieżny.

Uwaga! W kryterium tym wystarczy, żeby b_n był nierosnący (i.e. nie trzeba, by był on ściśle malejący).

Przykład - szeregi naprzemienne. Weźmy szereg postaci:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n,$$

gdzie $b_n \searrow 0$ (dąży monotonicznie z góry do 0). Szereg taki nazywamy szeregiem naprzemiennym. Z kryterium Dirichleta wynika, że każdy szereg takiej postaci jest zbieżny (co nazywa się czasem kryterium Leibnitza). W szczególności:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln 2.$$

Dowód kryterium Dirichleta.

Niech $\sum_{n=1}^{N} a_n = z_N$. Zauważmy, że (z_N) jest ciągiem ograniczonym. Zapiszmy sumy częściowe docelowego szerego:

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_N b_N = z_1 b_1 + (z_2 - z_1) b_2 + \ldots + (z_N - z_{N-1}) b_N =$$

$$= z_1(b_1 - b_2) + z_2(b_2 - b_3) + \ldots + z_{N-1}(b_{N-1} - b_N) + z_N b_N.$$

Zauważmy, że wyraz $z_N b_N$ jest zbieżny do 0 (jako iloczyn czynnika ograniczonego i czynnika dążącego do 0). Zajmijmy się więc otrzymaną sumą. Zauważmy, że zachodzi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n(b_n - b_{n+1})| = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n||(b_n - b_{n+1})| \leqslant C \sum_{n=1}^{\infty} |(b_n - b_{n+1})| =$$

$$= C \lim_{N\to\infty} (b_1 - b_{N+1}) = C b_1 < +\infty$$

Zatem szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n(b_n - b_{n+1})$ jest zbieżny bezwzględnie, a więc i zbieżny. Z tego i z równości:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(b_n - b_{n+1}) + \lim_{n\to\infty} z_n b_n,$$

Wynika, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ musi być zbieżny.

Kolejnym kryterium zbieżności dla szeregów o wyrazach dowolnych jest prosto wynikające z kryterium Dirichleta tzw.:

Twierdzenie 3.10. Kryterium Abela

Jeśli:

- mamy ciągi:
$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad a_n \in \mathbb{C}$$
$$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad b_n \in \mathbb{R}$$
- b_n jest monotoniczny i ograniczony,
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Wtedy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jest zbieżny.

Dowód.

Oczywiście $b = \lim_{n\to\infty} b_n$ istnieje. Wtedy:

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = \sum_{n=1}^{N} a_n(b_n - b) + b\sum_{n=1}^{N} a_n.$$

Szereg $b\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest oczywiście zbieżny na mocy założenia. Za to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(b_n - b)$ jest zbieżne na mocy kryterium Dirichleta, zauważmy bowiem, że:

$$\sum_{n=1}^{N} a_n(b_n - b) = \operatorname{sign}(b_n - b)\sum_{n=1}^{N} a_n|b_n - b|,$$

ale $|b_n - b| \searrow 0$ na mocy założenia, a sumy częściowe $|\sum_{n=1}^{N} a_n|$ muszą być ograniczone, gdyż są zbieżne. Warunki kryterium Dirichleta są więc spełnione. Ostatecznie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(b_n - b) + b\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Wszystkie składniki po prawej są zbieżne, zatem szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ także musi być zbieżny.

Grupowanie składników Zajmijmy się teraz kwestią grupowania składników w szeregach o wyrazach dowolnych i kiedy taka operacja nie zmienia wartości szeregu. Prowadźmy jednak trochę notacji.

Definicja 3.3. Rozbicie na wyrazy dodatnie

Dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ definiujemy następujące ciągi:

- $$a_n = \text{Re}(z_n)$$
- $$b_n = \text{Im}(z_n)$$
- $$a_n^+ = \max\{0, a_n\}$$
- $$a_n^- = -\min\{0, a_n\}$$
- $$b_n^+ = \max\{0, b_n\}$$
- $$b_n^- = -\min\{0, b_n\}$$

Jasnym jest, że:

$$z_n = a_n^+ - a_n^- + ib_n^+ - ib_n^-$$

oraz:

$$0 \leqslant a_n^+, a_n^-, b_n^+, b_n^- \leqslant |z_n|.$$

Z ostatniej nierówności wynika (kryterium porównawcze), że jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ jest zbieżny, to i szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\pm}$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{\pm}$ muszą być zbieżne. Wtedy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- + i\sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ - i\sum_{n=1}^{\infty} b_n^-,$$

jako że:

$$\sum_{n=1}^{N} z_n = \sum_{n=1}^{N} a_n^+ - \sum_{n=1}^{N} a_n^- + i\sum_{n=1}^{N} b_n^+ - i\sum_{n=1}^{N} b_n^-,$$

Z tego wynika następujący wniosek:

Twierdzenie 3.11. Grupowanie szeregów zbieżnych bezwzględnie

Niech szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ będzie zbieżny bezwzględnie. Wtedy:

1. Jeśli $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest bijekcją (permutacją indeksów), to:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} z_n.$$

   Oznacza to, że zmiana kolejności sumowania nie wpływa na wynik.

2. Jeśli:

$$\mathbb{N} = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} A_j$$

   i:

$$S_j = \sum_{n \in A_j} z_n,$$

   to $\sum_{j=1}^{\infty} S_j$ jest zbieżny bezwzględnie i:

$$\sum_{j=0}^{\infty} S_j = \sum_{n=1}^{\infty} z_n.$$

Są to prawa grupowania dla szeregów o wyrazach dowolnych, analogiczne do tych, które zachodzą dla szeregów o wyrazach dodatnich.

Dowód.

1. Mamy następujące równości:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a^+_{\sigma(n)} - \sum_{n=1}^{\infty} a^-_{\sigma(n)} + i \sum_{n=1}^{\infty} b^+_{\sigma(n)} - i \sum_{n=1}^{\infty} b^-_{\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a^+_n - \sum_{n=1}^{\infty} a^-_n + i \sum_{n=1}^{\infty} b^+_n - i \sum_{n=1}^{\infty} b^-_n = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

   W 2 równości korzystamy z analogicznego prawa dla zbieżnych szeregów dodatnich. Oczywiście, jako że $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny bezwzględnie, to mamy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |z_{\sigma(n)}|,$$

   więc permutacja szeregu zbieżnego bezwzględnie jest także zbieżna bezwzględnie.

2. Mamy:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |S_j| = \sum_{j}^{\infty} \Big| \sum_{n \in A_j} z_n \Big| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n \in A_j} |z_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < +\infty.$$

Widzimy więc, że $\sum_{j=1}^{\infty} S_j$ jest także zbieżny bezwzględnie. Jako że $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny bezwzględnie, więc tym bardziej jego podszeregi muszą być zbieżne bezwzględnie. Możemy więc zapisać:

$$\sum_{j=1}^{N} S_j = \sum_{j}^{N} \sum_{n \in A_j} z_n = \sum_{j=1}^{N} \Big(\sum_{n \in A_j} a_n^+ - \sum_{n \in A_j} a_n^- + i \sum_{n \in A_j} b_n^+ - i \sum_{n \in A_j} b_n^- \Big) =$$

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{n \in A_j} a_n^+ - \sum_{j=1}^{N} \sum_{n \in A_j} a_n^- + i \sum_{j=1}^{N} \sum_{n \in A_j} b_n^+ - i \sum_{j=1}^{N} \sum_{n \in A_j} b_n^-.$$

Każdy z szeregów po prawej stronie jest szeregiem zbieżnym o wyrazach dodatnich. Biorąc granicę $N \to \infty$ otrzymamy więc:

$$\sum_{j=1}^{\infty} S_j = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n \in A_j} a_n^+ - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n \in A_j} a_n^- + i \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n \in A_j} b_n^+ - i \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n \in A_j} b_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} z_n,$$

co wynika z odpowiednich twierdzeń dla szeregów dodatnich.

4 Przestrzenie metryczne

4.1 Podstawowe definicje. Otwartość i domkniętość

Zmienimy teraz temat, odchodząc od analizy zbieżności w liczbach zespolonych i rozpoczniemy rozważania o temacie znacznie bardziej ogólnym, mianowicie o przestrzeniach z metrykami, będących uogólnieniem znanego pojęcia odległości w $\mathbb{C}$.

Definicja 4.1. Metryka

Ustalmy X będące dowolnym niepustym zbiorem. Funkcję:

$$d : X \times X \to [0; +\infty[$$

nazywamy **metryką**, jeśli spełnia następujące aksjomaty:

1. $$\forall_{x,y \in X} : d(x,y) = d(y,x),$$

2. $$\forall_{x,y \in X} : d(x,y) = 0 \iff x = y,$$

3. $$\forall_{x,y,z \in X} : d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z).$$

O metryce myśleć można, jako o funkcji zwracającej "odległość"między dwoma elementami w zbiorze X. Podane aksjomaty zapewniają, że nasza metryka spełniać będzie "zdroworozsądkowe"własności odległości. **1.** nakłada warunek symetryczności na metrykę - odległość z x do y musi być równa odległości z y do x. **2.** normalizuje metrykę, mówiąc, że punkt jest odległy o 0 od samego siebie i **tylko** od samego siebie. **3.** to tak zwana **nierówność trójkąta** - dodając na drodze między dwoma punktami trzeci punkt nie można odległości skrócić.

Definicja 4.2. Przestrzeń metryczna

Parę (X,d) - gdzie X to niepusty zbiór, a $d : X \times X \to [0; +\infty[$ to metryka - nazywamy **przestrzenią metryczną**.

Przykłady Pokażemy parę przykładów przestrzeni metrycznych, aby dać pojęcie, jak mogą one wyglądać.

- $X = \mathbb{R}$ $d(x,y) = |x-y|$ - jest to odległość między dwiema liczbami rzeczywistymi, z której korzystaliśmy np. przy definicji granicy ciągu.
- $X = \mathbb{R}^\nu$, gdzie $\nu \in \mathbb{N}$ jest wymiarem przestrzeni,

  $$d_p(x,y) = \left(\sum_{n=1}^{\nu} |x_n - y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

  Podstawiając za p różne wartości możemy otrzymać wiele alternatywnych metryk.
  Np. dla $p = 1$ otrzymujemy tzw. **metrykę Manhattanu**:

  $$d_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\nu} |x_n - y_n|.$$

Nazwa pochodzi od tego, że jest to odległość jaką trzeba pokonać między dwoma punktami, mogąc przemieszczać się tylko równolegle do osi współrzędnych - tak jak na Manhattanie, gdzie ulice są do się prostopadłe.
Dla $p = 2$ otrzymujemy znaną **odległość Euklidesową**:

$$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\nu}(x_n - y_n)^2}.$$

- $X = \mathbb{R}^\nu$,

$$d_\infty(x,y) = \max_{1\leqslant n\leqslant \nu} |x_n - y_n|.$$

  Jest to tak zwana **metryka maximum**. Indeks ∞ wziął się z faktu, że o d_∞ myśleć można o jako o granicy d_p dla $p \to \infty$, mamy bowiem:

$$\lim_{p\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{\nu} a_n^p\right)^{\frac{1}{p}} = \max_{1\leqslant n\leqslant \nu} a_n.$$

- Dla dowolnego zbioru X definiujemy **metrykę dyskretną**:

$$d(x,y) = \delta_{x,y} = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & x \neq y \end{cases}. \tag{95}$$

- Niech X będzie zbiorem funkcji klasy C^0 (tj, funkcji ciągłych) z $[0;1]$ na $\mathbb{C}$. Wtedy za odległość między dwiema funkcjami przyjąć możemy:

$$d(f,g) = \sup_{x\in[0;1]} |f(x) - g(x)|. \tag{96}$$

- Dla X takiego samego jak w poprzednim punkcie można określić także:

$$d_p(f,g) = \left(\int_0^1 |f(x) - g(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{97}$$

Definicja 4.3. Zbieżność w przestrzeni metrycznej

Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną i niech $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem elementów z X. Powiemy, że $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do $g \in X$, jeśli:

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N_\varepsilon\in\mathbb{N}}\forall_{n\geqslant N_\epsilon} : d(x_n, g) < \varepsilon, \tag{98}$$

co możemy alternatywnie zapisać, jako:

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, g) = 0. \tag{99}$$

Oczywiście jeśli $x_n \to g$ i $x_n \to g'$, to $g = g'$ - co wynika z faktu, że jedynym elementem odległym o 0 od g jest g. Ponadto jeśli $x_n \to g$ to każdy podciąg $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ także dąży do g: $x_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} g$.

Definicja 4.4. Równoważność metryk

Niech d i δ będą metrykami na X. Powiemy, że d i δ są równoważne, jeśli:

$$\exists_{C_1, C_2 \in \mathbb{R}} : \forall_{x,y \in X} : C_1 d(x,y) \leqslant \delta(x,y) \leqslant C_2 d(x,y). \tag{100}$$

Łatwo widać, że jest to relacja symetryczna, przechodnia i zwrotna.

Przykład Metryk d_p i d_∞ na $\mathbb{R}^\nu$ są równoważne, albowiem:

$$d_o o(x,y) = \max_i |x_i - y_i| \leqslant d_p(x,y) = \left(\sum_{n=1}^{\nu} |x_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{101}$$

Ponadto:

$$d_p(x,y)^p \leqslant \nu d_\infty(x,y)^p \implies d_p(x,y) \leqslant \nu^{\frac{1}{p}} d_\infty(x,y) \tag{102}$$

Wystarczy więc wziąć $C_1 = 1$ i $C_2 = \nu^{\frac{1}{p}}$.

Obserwacja 4.1.

Jeśli d i δ są równoważne, to $x_n \to g$ w $(X,d) \iff x_n \to g$ w (X,δ).

Definicja 4.5. Warunek Cauchy'ego

Powiemy, że ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ spełnia **warunek Cauchy'ego** (i.e. że jest **ciągiem Cauchy'ego**), jeśli:

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{N_\varepsilon \in \mathbb{N}} \forall (m,n \geqslant N_\varepsilon) : d(x_m, x_n) \leqslant \varepsilon. \tag{103}$$

Definicja 4.6. Przestrzeń zupełna

Powiemy, że przestrzeń (X,d) jest **zupełna** jeśli każdy ciąg Cauchy'ego w tej przestrzeni jest zbieżny.

Zauważmy, że $()\mathbb{R}, d_2)$ (czyli liczby rzeczywiste ze standardową metryką Euklidesową) to przestrzeń zupełna, co udowodniliśmy. $(\mathbb{Q}, d_2)$ nie jest przestrzenią zupełną (gdyż np. ciąg kolejnych przybliżeń dziesiętnych$\sqrt{2}$ spełnia warunek Cauchy'ego, jednak nie ma w $\mathbb{Q}$ granicy).

Definicja 4.7. Kule

Niech (X,d) - p-ń metryczna. Wtedy **kulą (otwartą)** o środku $x_0 \in X$ i promieniu $r \in \mathbb{R}_+$ nazwiemy zbiór:

$$\mathrm{Ball}(x_0, r) = \{x \in X \,|\, d(x,x_0) < r\}. \tag{104}$$

Definicja 4.8. Punkty wewnętrzne

Niech (X,d) - p-ń metryczna, $A \subseteq X$ i $a \in A$. Powiemy, że a jest **punktem wewnętrznym** A, jeśli:

$$\exists_{r>0} : \mathrm{Ball}(a, r) \subseteq A. \tag{105}$$

Widzimy więc, że jeśli a jest punktem wewnętrznym A, to znajduje się w A razem z pewną kulą wokół siebie - można potocznie sobie więc wyobrazić, że a nie może być na "brzegu"A.

Definicja 4.9. Zbiór otwarty

Powiemy, że A jest **otwarty** (w ustalonej p-ń metrycznej (X,d)), jeśli każdy jego punkt jest punktem wewnętrznym:

$$\forall_{a\in A}\exists_{r>0} : \mathrm{Ball}(a,r) \subseteq A. \tag{106}$$

Dla ustalonej przestrzenii metrycznej zdefiniujemy $\mathcal{T}$ jako rodzinę wszystkich zbiorów otwartych w tej przestrzenii. Wprowadzimy też zapis:

$$U \underset{\text{otw.}}{\subseteq} X, \tag{107}$$

jeśli U jest otwartym podzbiorem X (i.e. jeśli $U \in \mathcal{T}$).

Twierdzenie 4.1. Właności $\mathcal{T}$

1. $\emptyset \in \mathcal{T}$ oraz $X \in \mathcal{T}$.
2. $U, V \in \mathcal{T} \implies U \cap V \in \mathcal{T}$. Inaczej mówiąc (rozszerzywszy łątwo twierdzenie za pomocą indukcji), skończony iloczyn zbiorów otwartych jest otwarty.
3. $\{U_i\}_{i\in I}$ - rodzina zbiorów otwartych. Wtedy

$$\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}. \tag{108}$$

   Zauważmy, że nie zakładamy, że jest to skończona (ani nawet przeliczalna) rodzina.

Dowód.

1. Prawdziwym jest zdanie, że dla każego elementu należącego do $\emptyset$ jest on punktem wewnętrzym. Ponadto:

$$\forall_{x\in X, r>0} \mathrm{Ball}(x,r) \subseteq X, \tag{109}$$

   co wynika za samej definicji Ball.
2. Skoro U, V są otwarte, to dla każdego $x \in U \cap V$ istnieją r_1 i r_2 takie, że:

$$\mathrm{Ball}(x, r_1) \in U, \quad \mathrm{Ball}(x, r_2) \in V.$$

   Wtedy jednak:

$$\mathrm{Ball}(x, \min\{r_1, r_2\}) \in U, \quad \mathrm{Ball}(x, \min\{r_1, r_2\}) \in V.$$

   Wystarczy więc wziąć $r = \min\{r_1, r_2\}$
3. Dla każdego $x \in \bigcup_{i\in I} U_i$ mamy $i \in I$ takie, że $x \in U_i$. Wtedy jednak istnieje takie r, że $\mathrm{Ball}(x,r) \in U_i$, przeto $\mathrm{Ball}(x,r) \in \bigcup_{i\in I} U_i$.

Twierdzenie 4.2.

Kula otwarta jest otwarta.

Dowód.

Istotnie, jeśli niech $y \in \text{Ball}(x, r)$. Wtedy $d(x,y) < r$. Zauważmy, że $\text{Ball}(y, r-d(x,y)) \subseteq \text{Ball}(x, r)$, bowiem jeśli $z \in \text{Ball}(y, r-d(x,y))$, to $d(z,y) < r - d(x,y)$, zatem:

$$d(z,x) < d(z,y) + d(y,z) < r,$$

czyli $z \in \text{Ball}(x, r)$.

Definicja 4.10. Punkt skupienia

Niech (X,d) - p-ń metryczna i $A \subseteq X$, wtedy punkt $x \in X$ nazwiemy **punktem skupienia** A, jeśli:

$$\forall_{r>0} : \text{Ball}(x, r) \cap A \neq \emptyset. \tag{110}$$

Definicja 4.11. Zbiór domknięty

Zbiór A nazwiemy **domkniętym** jeśli zawiera wszystkie swoje punkty skupienia. To znaczy:

$$\forall_{x \in X} [\forall_{r>0} : \text{Ball}(x, r) \cap A \neq \emptyset \implies x \in A]. \tag{111}$$

Podobnie jak $\mathcal{T}$, zdefiniujemy $\mathcal{F}$ jako rodzinę wszystkich zbiorów domkniętych w danej przestrzenii. Będziemy również pisać:

$$U \underset{\text{domk.}}{\subseteq} X, \tag{112}$$

jeśli U jest domkniętym podzbiorem X.

Definicja 4.12. Kula domknięta

Kulą domkniętą o środku $x_0 \in X$ i promieniu $r \in \mathbb{R}_+$ nazwiemy zbiór:

$$\overline{\text{Ball}}(x, r) = \{x \in X \,|\, d(x, x_0) \leqslant r\}. \tag{113}$$

Twierdzenie 4.3.

Kula domknięta jest domknięta.

Dowód.

Niech $y \notin \overline{\text{Ball}}(x, r)$. Wtedy $d(y,x) > r$. Weźmy $R = d(y,x) - r > 0$. Wtedy $\text{Ball}(y, R) \cap \overline{\text{Ball}}(x, r) = \emptyset$. Albowiem, jeśli $z \in \text{Ball}(y, R)$, to $d(z,y) < d(y,x) - r$, zatem $d(x,z) \geqslant d(x,y) - d(z,y) > r$, czyli $z \notin \overline{\text{Ball}}(x, r)$.

Twierdzenie 4.4. Dopełnienie zbioru otwartego jest domknięte

Niech $A \subseteq X$. A jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy $X \backslash A$ jest domknięty.

Dowód.

Mamy następujący ciąg równoważności:

$$(X\backslash A) \text{ - domknięty} \iff \tag{114}$$

$$\forall_{y\notin(X\backslash A)}\exists_{r>0} : \mathrm{Ball}(y,r)\cap(X\backslash A) = \emptyset \iff \tag{115}$$

$$\forall_{y\in A}\exists_{r>0} : \mathrm{Ball}(y,r)\subseteq X\backslash(X\backslash A) = A \iff \tag{116}$$

$$A \text{ - otwarty} \tag{117}$$

Zauważmy, że istnieją zbiory jednocześnie domknięte i otwarte. Na przykład w każdej przestrzenii metrycznej są to $\emptyset$ oraz cała przestrzeń. W $\mathbb{R}$ są to jedynie takie zbiory. Za to w przestrzenii dyskretnej, wszystkie zbiory mają te własność.

Twierdzenie 4.5.

Zbiór A jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy A jest sumą kul.

Dowód.

$\implies$ Możemy wybrać sumę rodziny generowanej w tej sposób, że każdemu elementowi przypisujemy kulę mu odpowiadającą, która należy do A:

$$\forall_{y\in A}\exists_{r(y)>0} : \mathrm{Ball}(y,r(y))\subseteq A. \tag{118}$$

Zatem:

$$A = \bigcup_{y\in A}\{y\} \subseteq \bigcup_{y\in A}\mathrm{Ball}(y,r(y)) \tag{119}$$

oraz:

$$\bigcup_{y\in A}\mathrm{Ball}(y,r(y)) \subseteq A, \tag{120}$$

więc:

$$A = \bigcup_{y\in A}\mathrm{Ball}(y,r(y)) \tag{121}$$

$\impliedby$ W drugą stronę sprawa jest jasna - suma każdej rodziny kul (i.e. zbiorów otwarty) będzie otwarta.

Obserwacja 4.2. na temat $\mathcal{F}$

1. $\emptyset, X \in \mathcal{F}$.
2. $\mathcal{F} = \{X\backslash A \big| A \in \mathcal{T}\}$.
3. $A,B \in \mathcal{F} \implies A\cup B \in \mathcal{F}$. Inaczej mówiąc - skończony iloczyn zbiorów domkniętych jest domknięty.
4. $\{V_i\}_{i\in I}$ - rodzina zbiorów domkniętych. Wtedy

$$\bigcap_{i\in I} V_i \in \mathcal{T}. \tag{122}$$

Fakty te są oczywistą konsekwencją własności $\mathcal{T}$ i prawa, które mówi, że dopełnienie zbioru otwartego jest domknięte.

Spójrzmy jeszcze na przykład, pokazujący, że w 3. własność ta zachodzi tylko dla sum skończonych:

$$]0,1[=\bigcup_{i=1}^{\infty}[\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}].$$

Definicja 4.13. Wnętrze i domknięcie

Niech $B \subseteq X$.
Wnętrznem zbioru B, oznaczanym B°, nazywamy zbiór wszyskich punktów wewnętrznych B.
Domknięciem zbioru B, oznaczanym $\overline{B}$, nazywamy zbiór punktów skupienia B.
Innymi słowy:

$$x \in B\deg \iff \exists_r : \mathrm{Ball}(x,r) \subseteq B. \tag{123}$$

$$x \in \overline{B} \iff \forall_r : \mathrm{Ball}(x,r) \cap B \neq \emptyset. \tag{124}$$

Obserwacja 4.3.

$$B^\circ \subseteq B \subseteq \overline{B} \tag{125}$$

Obserwacja 4.4.

- B - otwarty $\iff B^\circ = B.$
- B - domknięty $\iff \overline{B} = B.$

Twierdzenie 4.6.

$$X\backslash\overline{B} = (X\backslash B)^\circ \tag{126}$$

lub

$$\overline{B} = X\backslash(X\backslash B)^\circ. \tag{127}$$

Dowód.

$x \in X\backslash\overline{B} \iff x$ nie jest punktem skupienia $B \iff \exists_r \mathrm{Ball}(x,r) \cap B = \emptyset \iff \exists_r \mathrm{Ball}(x,r) \cap B \subseteq X\backslash B \iff x \in (X\backslash B)^\circ$.

Powiemy teraz o bardzo ważnym twierdzeniu pozwalającym utożsamić punkty skupienia z granicami ciągów ze zbioru.

Twierdzenie 4.7.

Niech $B \subseteq X$. Wtedy domknięcie B to zbiór granic ciągów z B, tj.:

$$\overline{B} = \{\lim_{n\to\infty} x_n \,\Big|\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \wedge \forall_n x_n \in B\}. \tag{128}$$

Dowód.

$\supseteq$ Dla każdego $x \in \overline{B}$ zdefiniujmy ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ następująco - niech x_n to dowolny element należący do $\mathrm{Ball}(x, \frac{1}{n}) \cap B$ (jest to zbiór zawsze niepusty na mocy tego, że x jest punktem skupienia B). Oczywiście $x_n \to x$, gdyż $d(x_n, x) < \frac{1}{n} \to 0$.
$\subseteq$ Odwrotnie, jeśli $x_n \to x$ i $\forall_n : x_n \in B$, to:

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N_\varepsilon}\forall_{n\geqslant N_\varepsilon} : B \ni x_n \in \mathrm{Ball}(x, \varepsilon) \implies \forall \varepsilon > 0 \mathrm{Ball}(x, \varepsilon) \cap B \neq \emptyset, \tag{129}$$

skąd mamy $x \in \overline{B}$.

Definicja 4.14. Ograniczoność

Powiemy, że $B \subseteq X$ jest **ograniczony**, jeśli:

$$\exists_{x\in X, r>0} : B \subseteq \mathrm{Ball}(x, r). \tag{130}$$

Definicja 4.15. Gęstość

Powiemy, że $A \subseteq X$ jest **gęsty** w $B \subseteq X$, jeśli:

$$B \subseteq \overline{A}. \tag{131}$$

Uwaga! Mówiąc po prostu, że zbiór jest gęsty, mamy na myśli, że jest gęsty w X.

Przykład $\mathbb{Q}$ jest gęsty w $\mathbb{R}$.

Definicja 4.16. Otoczenie

$A \subseteq X$ jest otoczeniem punktu $x \in X$, jeśli:

$$\exists_{\substack{U\subseteq X \\ \text{otw.}}} : x \in U \subseteq A. \tag{132}$$

Waruneke ten jest równoważny temu, żę $x \in A^\circ$.
Dla danego punktu rodzinę wszyskich jego otoczeń oznaczać będziemy $\mathcal{N}(x)$:

$$\mathcal{N}(x) = \{A \in \mathcal{P}(X) = 2^X \,\big|\, x \in A^\circ\}. \tag{133}$$

Twierdzenie 4.8.

Niech $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem elementów X. Wtedy:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \iff \forall_{A\in\mathcal{N}(x)}\exists_{N_A\in\mathbb{N}}\forall_{n\geqslant N_A} : x_n \in A. \tag{134}$$

Dowód.

$\impliedby$ Weźmy $A_\varepsilon \mathrm{Ball}(x, \varepsilon)$. Wtedy:

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N_\varepsilon}\forall_{n\geqslant N_\varepsilon} : x_n \in \mathrm{Ball}(x, \varepsilon) \implies d(x_n, x) < \varepsilon. \tag{135}$$

implies x_n zbiega do x, zatem:

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N_\varepsilon}\forall_{n\geqslant N_\varepsilon} : d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Mamy też:

$$A \in \mathcal{N}(x) \implies \exists_\varepsilon : \mathrm{Ball}(x, \varepsilon) \subseteq A.$$

Wystarczy więc wziąć $N_A = N_\varepsilon$. Wtedy będzie:

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N_\varepsilon}\forall_{n\geqslant N_\varepsilon} : (d(x_n, x) < \varepsilon \wedge \mathrm{Ball}(x, \varepsilon) \subseteq A) \implies x_n \in A. \tag{136}$$

Twierdzenie to mówi nie mniej, nie więcej niż to, że jeśli ciąg zbiega do jakiegoś punktu, to w każdym otoczeniu tego punktu znajdą się prawie wszystkie wyrazy tego ciągu.

Twierdzenie 4.9.

Niech (X, d) - p-ń. metryczna, niech $Y \subseteq X$ i niech $d_y = d|_{Y\times Y}$ będzie obcięciem d do Y. Wtedy:

1. $A \subseteq Y$ jest otwarty w $(Y, d_y) \iff \exists_{\substack{U\subseteq X\\ \text{otw.}}} : A = Y \cap U$.
2. $A \subseteq Y$ jest domknięty w $(Y, d_y) \iff \exists_{\substack{F\subseteq X\\ \text{domk.}}} : A = Y \cap F$.

Twierdzenie to daje nam pojęcie o tym, jak wyglądają zbiory otwarte i domknięte w jakimś zawężeniu metryki - mianowicie są to zawężenia odpowiednich zbiorów otwartych i domkniętych.

Dowód.

Zaczniemy od dowodu 2.

$\implies$ Niech A domknięty w Y i niech F będzie domknięciem A w X (więc F musi być domknięty w X). Wtedy:

$$F = \{\lim_{n\to\infty} a_n \in X \,\big|\, a_n \in A\},$$

za to:

$$A = \{\lim_{n\to\infty} a_n \in Y \,\big|\, a_n \in A\},$$

gdyż A jest domknięty w Y. Widzimy z tych definicji łatwo, że $A = F \cap Y$.

$\impliedby$ W drugą stronę, niech $A = Y \cap F$ i F będzie domknięty w X. Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem w A (więc i w F), zbiegającym do g. Wtedy $g \in F$. Zatem jeśli $g \in Y$, to $g \in A$, z konstrukcji A. Pokazaliśmy więc, że każdy ciąg z A zbieżny w Y ma granicę w samym A, zatem A jest domknięty.

2. $\implies$ 1. Pokażemy teraz, jak z 2. wynika 1. Mamy bowiem ciąg następujących równoważności:
$A \subseteq Y$ jest otwarty w $Y \iff Y\backslash A$ jest domknięty w $Y \iff \exists_{\substack{F\subseteq X\\ \text{domk.}}} : Y\backslash A = Y \cap F \iff \exists_{\substack{F\subseteq X\\ \text{domk.}}} : A = Y \cap (X\backslash F) \iff \exists_{\substack{U\subseteq X\\ \text{otw.}}} : A = Y \cap U$.

Przedostatnia równoważność, wynika z faktu, że jeśli $Y \backslash A = Y \cap F$, to $A = Y \backslash (Y \cap F) = Y \backslash F = Y \cap (X \backslash F)$ (pamiętamy, że $Y \subseteq X$). Ostatnia równoważność jest konsekwencją tego, że dopełnienie zbioru domkniętego jest otwarte (Tw. 4.1).

4.2 Przekształcenia ciągłe

Zaczniemy rozważać teraz przekształcenia (i.e. funkcje) pomiędzy przestrzeniami metrycznymi i wyróżnimy wśród nich szczgólnie ważną klasę funkcji ciągłych.

Twierdzenie 4.10. Warunki ciągłości

Niech (X, d) i (Y, δ) będą przestrzeniami metrycznymi, a $\varphi : X \to Y$ przekształceniem między nimi. Ustalmy też $x_0 \in X$. Wtedy następujące warunki są równoważne:

1. $$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\lambda_\varepsilon>0}\forall_{x\in X} : d(x, x_0) < \lambda_\varepsilon \implies \delta(\varphi(x), \varphi(x_0)) < \varepsilon. \tag{137}$$
2. $$\forall_{U\in\mathcal{N}(\varphi(x_0))}\exists_{V\in\mathcal{N}(x_0)} : \varphi(V) \subseteq U. \tag{138}$$
3. $$\forall_{U\in\mathcal{N}(\varphi(x_0))} : \varphi^{-1}(U) \in \mathcal{N}(x_0). \tag{139}$$
   (Przypominamy, że $\varphi^{-1}(U)$ to w przeciwobraz U).
4. Jeśli $x_n \to x_0$ w (X, d), to $\varphi(x_n) \to \varphi(x_0)$ w (Y, δ).

Dowód.

1. $\implies$ 2. Dla dowolnego $U \in \mathcal{N}(\varphi(x_0))$ istnieje $\varepsilon > 0$:

$$\mathrm{Ball}(\varphi(x_0), \varepsilon) \subseteq U.$$

Z 1. weźmy więc λ_ε spełniające podaną implikację i $V = \mathrm{Ball}(x_0, \lambda_\varepsilon)$. Wtedy:

$$\varphi(x \in V) \in \mathrm{Ball}(\varphi(x_0), \varepsilon),$$

zatem:

$$\varphi(V) \subseteq \mathrm{Ball}(\varphi(x_0), \varepsilon) \subseteq U.$$

2. $\implies$ 3. Weźmy dowolne $U \in \mathcal{N}(\varphi(x_0))$. Wtedy:

$$\exists_{V\in\mathcal{N}(x_0)} : \varphi(V) \subseteq U,$$

i.e. $V \subseteq \varphi^{-1}(U)$. Ale skoro $V \in \mathcal{N}(x_0)$, to tym bardziej $\varphi^{-1}(U) \in \mathcal{N}(x_0)$, jako rozszerzenie V.
3. $\implies$ 4. Weźmy ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zbieżny do x_0. Niech $U \in \mathcal{N}(\varphi(x_0))$, skąd $\varphi^{-1}(U) \in \mathcal{N}(x_0)$. Zatem:

$$\exists_{N_U}\forall_{n\geqslant N_U} : x_n \in \varphi^{-1}(U),$$

z twierdzenia udowodnionego wcześniej. Ergo:

$$\forall_{U\in\mathcal{N}(\varphi(x_0))}\exists_{N_U}\forall_{n\geqslant N_U} : \varphi(x_n) \in U.$$

Zatem, z tego samego twierdzenia:

$$\varphi(x_n) \to \varphi(x_0).$$

4. $\implies$ 1. Dowodzimy nie wprost, że $\neg 1. \implies \neg 4.$. Zaprzeczeniem 1. jest:

$$\exists_{\varepsilon>0}\forall_{\lambda}\exists_{x_\lambda \in X} : d(x_\lambda, x_0) < \lambda \wedge \delta(\varphi(x_\lambda, x_0)) \geqslant \varepsilon.$$

Weźmy $\lambda_n = \frac{1}{n}$ i na tej podstawie skonstruujmy ciąg x_n odpowiadających x_λ w powyższym stwierdzeniu dla odpowiednich λ. Wtedy musi być, że $x_n \to x_0$, gdyż $d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$, ale $\varphi(x_n) \nrightarrow \varphi(x_0)$, gdyż $\delta(\varphi(x_n), \varphi(x_0)) \geqslant \varepsilon \forall_n$. Zatem zachodzi $\neg 4.$.

Definicja 4.17. Odwzorowanie ciągłe

Odwzorowanie spełniające warunki 1. - 4. Twierdzenia 4.2 dla punktu $x_0 \in X$ nazywamy **ciągłym** w x_0 (w p-ń. (X, d)). Jeśli odwzorowanie jest ciągłe w każdym punkcie przestrzenii, nazywamy je po prostu ciągłym.

Czasami, mając na myśli warunek 1., mówimy o tzw. zbieżności według Cauchy'ego, zaś o warunku 4. mówimy, jako zbieżności według Heinego.

Twierdzenie 4.11. Złożenie odwzorowań ciągłych jest ciągłe

Jeśli $\varphi : X \to Y$ jest ciągłe w $x_0 \in X$ i $\Psi : Y \to Z$ jest ciągłe w $\varphi(x_0)$, to $\Psi \circ \varphi : X \to Z$ jest ciągłe w X_0.

Dowód.

Korzystając np. z 4. warunku ciągłości, weźmy ciąg $x_n \to x_0$, wtedy $\varphi(x_n) \to \varphi(x_0)$ z ciągłości φ. Ponadto $\Psi(\varphi(x_n)) \to \Psi(\varphi(x_0))$ z ciągłości Ψ. Widzimy, więc prosto, że $\Psi \circ \varphi$ musi być ciągłe.

Twierdzenie 4.12. Ciągłość na całej dziedzinie

$\varphi : X \to Y$ jest ciągłe na całym X wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall_{\underset{\text{otw.}}{U \subseteq Y}} : \varphi^{-1}(U) \underset{\text{otw.}}{\subseteq} X. \tag{140}$$

Inaczej mówiąc, przekształcenie jest ciągłe na całej dziedzinie wtedy i tylko wtedy, gdy przeciwobrazy zbiorów otwartych są otwarte.

Dowód.

$\implies$ Niech $U \underset{\text{otw.}}{\subseteq} Y$ i $x \in \varphi^{-1}(U)$. Zatem $\varphi(x) \in U$. Skoro U jest otwarty, to musi być otoczeniem $\varphi(x)$, i.e. $U \in \mathcal{N}(\varphi(x))$, zatem (warunek 3.):

$$\varphi^{-1}(U) \in \mathcal{N}(x) \quad \forall_{x \in \varphi^{-1}(U)},$$

czyli $\varphi^{-1}(U)$ jest otwarty.

$\Longleftarrow$ Udowadniamy warunek 2.:

$$\forall_{\underset{\text{otw.}}{U\subseteq Y}} : \varphi^{-1}(U) \underset{\text{otw.}}{\subseteq} X.$$

Weźmy $x \in X$ i $U \in \mathcal{N}(\varphi(x))$. Wtedy:

$$\exists_{\underset{\text{otw.}}{\tilde{U}\subseteq X}} : \varphi(x) \in \tilde{U} \subseteq U,$$

więc $V = \varphi^{-1}(\tilde{U})$ - otwarty. Pondato $x \in V$. Zatem $V \in \mathcal{N}(x)$, oraz $\varphi(V) \subseteq \tilde{U} \subseteq U$, więc 2. zachodzi.

Definicja 4.18. Ciągłość jednostajna

$\varphi : X \to Y$ nazwiemy **jednostajnie ciągłym**, jeśli:

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\lambda_\varepsilon} : \forall_{x,x'\in X} : d(x,x') \leqslant \lambda_\varepsilon \implies \delta(\varphi(x),\varphi(x')) \leqslant \varepsilon. \tag{141}$$

Ważną częścią tejże definicji jest to, że wybór λ zależy jedynie od ε, nie zaś od samych punktów x, x'.

Obserwacja 4.5.

Każda funkcja jednostajnie ciągła, jest ciągła.

Definicja 4.19. Przekształcenie Lipschitzowskie

Przekształcenie $\varphi : X \to Y$ nazwiemy **Lipschitzowskim** (i.e. spełniającym **warunek Lipschitza**), jeśli:

$$\exists_{L>0}\forall_{x,x'\in X} : \delta(\varphi(x),\varphi(x')) \leqslant L \cdot d(x,x'). \tag{142}$$

Warunek ten mówi, że odległość między wartościami funkcji jest zawsze ograniczona przez odległość między jej argumentami (z pewną proporcjonalnością).

Obserwacja 4.6.

Funkcje Lipschitzowskie są ciągłe jednostajnie.

Istotnie - wystarczy ustalić: $\lambda_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{L}$.

4.3 Zwartość

Powiemy teraz o bardzo ważnym pojęciu charakteryzującym zbiory w przestrzenii metrycznej - to jest o zwartości.

Definicja 4.20. Pokrycie

Ustalmy (X, d) - p-ń. metryczną. **Pokryciem** zbioru K nazwiemy rodzinę zbiorów $U = \{U\}_{i \in I}$, $U_i \subseteq X$, taką że:

$$K \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i. \tag{143}$$

Pokrycie jest otwarte, jeśli wszystkie U_i są otwarte. Pokrycie $V = \{V_i\}_{i \in I'}$ nazwiemy podpokryciem U, jeśli $V \subseteq U$.

Przykład Dla $X = \mathbb{R}$, $K = [0, 1]$, pokryciem K jest rodzina:

$$U_{n\, n \in \mathbb{N}} : \quad U_n = [0, 1 + \frac{1}{n}].$$

Nie jest to pokrycie otwarte.

Definicja 4.21. Zwartość (pokryciowa)

Zbiór $K \subseteq X$ nazwiemy **ZWARTYM**, jeśli z każdego pokrycia otwartego tegoż zbioru, można wybrać podpokrycie skończone (tj. mające skończonę liczbę elementów). Jeśli K jest zwartym podzbiorem X, to zapiszemy $K \subseteq\subseteq X$.

Twierdzenie 4.13. Własności zbiorów zwartych

1. Każdy zbiór zwarty jest ograniczony.
2. Każdy zbiór zwarty jest domknięty.

Dowód.

Niech $K \subseteq\subseteq X$.

1. Weźmy dowolny $x \in X$. Wtedy $\{\mathrm{Ball}(x,)n\}_{n \in \mathbb{N}}$ niewątpliwie jest pokryciem otwartym K. Skoro tak, to można zeń wybrać skończone podpokrycie. Zatem istnieje $N \in \mathbb{N}$, będące największym z indeksów z tegoś podpokrycia, takie że:

   $$K \subseteq \mathrm{Ball}(x, N),$$

   jako że kolejne z tych kul zawierają w sobie poprzednie. Widzimy więc, że K jest ograniczony.

2. Dowód nie wprost. Przypuśćmy, że $\exists\, y$ będący punktem skupienia K, t.ż. $y \notin K$. Weźmy rodzinę zbiorów $\{X \backslash \overline{\mathrm{Ball}}(y, \frac{1}{n})\}_{n \in \mathbb{N}}$. Niewątpliwie jest to pokrycie otwarte, gdyż wszystkie z tych zbiorów są otwarte i sumują się one do $X \backslash \{y\}$. Wybierzmy z niego więc skończone podpokrycie i niech N będzie największym z indeksów w tym podpokryciu. Zauważmy, że wtedy sumujw się ono do $X \backslash \overline{\mathrm{Ball}}(y, \frac{1}{N})$, jako że kolejne z tych zbiorów zawierają w sobie poprzednie. Mamy więc, że $K \subseteq X \backslash \overline{\mathrm{Ball}}(y, \frac{1}{N})$. Wtedy jednak $\mathrm{Ball}(y, \frac{1}{N}) \cap K \subseteq \overline{\mathrm{Ball}}(y, \frac{1}{N}) \cap K = \emptyset$, co przeczy temu, że y jest punktem skupienia K. Sprzeczność! Zatem K rzeczywiście musi być domknięty.

Definicja 4.22. Zwartość ciągowa

Powiemy, że podzbiór $K \subseteq X$ jest **ciągowo zwarty**, jeśli każdy ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zawarty w K ($x_n \in K$) zawiera podciąg zbieżny do granicy w K:

$$\forall_{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x_n \in K} \exists_{k\mapsto n_k} : x_{n_k} \to g \in K. \tag{144}$$

Twierdzenie 4.14.

Zbiór K ciągowo zwarty jest także domknięty.

Dowód.

Istotnie, jeśli ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elementów z K jest zbieżny, to każdy jego podciąg jest zbieżny do tej samej granicy. Ale skoro K jest ciągowo zwarty, to $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ma podciąg zbieżny do elementu z K, który będzie wspólną granicą wszystkich podciągów. Zatem i granica $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ musi leżeć w K.

Definicja 4.23. ε - sieć

Niech $K \subseteq X$ i $\varepsilon > 0$. Wtedy $S \subseteq X$ nazwiemy ε - **siecią dla** K jeśli:

$$\forall_{z\in K} \exists_{s\in S} : z \in \mathrm{Ball}(s, \varepsilon). \tag{145}$$

S jest ε - siecią **w** jeśli jest ε - siecią dla K i $S \subseteq K$.

Twierdzenie 4.15.

Jeśli K jest ciągowo zwarty, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje skończona ε - sieć w K.

Dowód.

Dowód nie wprost. Przypuśćmy, że istnieje $\varepsilon > 0$, t.ż. w K nie ma skończonej ε - sieci. Skonstruujmy wtedy następująco ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i rodzinę zbiorów $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
Niech $x_1 \in K$ będzie dowolne i $U_1 = \mathrm{Ball}(x_1, \varepsilon)$. Oczywiście U_1 nie pokrywa K (z założenia): $K \setminus U_1 \neq \emptyset$. Za x_2 bierzemy więc dowolny element w $K \setminus U_1$, a $U_2 = U_1 \cup \mathrm{Ball}(x_2, \varepsilon)$. Ogólnie $x_n \in K \setminus U_{n-1}$ i $U_n = U_{n-1} \cup \mathrm{Ball}(x_n, \varepsilon)$. Oczywiście $K \setminus U_{n-1} \neq \emptyset$, gdyż gdyby było inaczej, to z konstrukcji mielibyśmy wbrew założeniu skończoną ε - sieć pokrywającą K.
Otrzymaliśmy ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, który jednak nie może mieć podciągu zbieżnego, gdyż nie spełnia warunku Cauchy'ego - z konstrukcji jasno widać, że $\forall_{i<j} : d(x_i, x_j) \geqslant \varepsilon$, jako że $x_j \in K \setminus U_{j-1} \subseteq K \setminus U_i$. Przeczy to założeniu, że K jest ciągowo zwarty.

Twierdzenie 4.16.

Jeśli K jest ciągowo zwarty, to istnieje przeliczalny $D \subseteq K$, t.ż. $\overline{D} = K$ i.e. D jest gęsty w K.

Dowód.

Weźmy
$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_{\frac{1}{n}} \subseteq K,$$
gdzie jako S_ε oznaczyliśmy skończoną ε - sieć w K, która na mocy Tw. 4.3 istnieje. Jasno widać, że D jest przeliczalny. Wtedy $\overline{D} \subseteq K$, gdyż dla każdego $y \in K$ tworzymy ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elementów, takich że $x_n \in S_{\frac{1}{n}}$ i $y \in \text{Ball}(x_n, \frac{1}{n})$, co zawsze możemy zrobić, bo $S_{\frac{1}{n}}$ są ε - sieciami w K. Wtedy $d(x_n, y) < \frac{1}{n} \to 0$, więc $x_n \to y$, czyli $y \in \overline{D}$. Odwrotnie mamy $\overline{D} \supseteq K$, bo $D \subseteq K \implies \overline{D} \subseteq \overline{K}$ (domknięcie jest monotoniczne, a K jest domknięty por. Tw. 4.3). Z tych dwu inkluzji mamy tezę.

Twierdzenie 4.17.

Jeśl K jest ciągowo zwarty, do każde jego pokrycie otwarte ma przeliczalne podpokrycie.

Dowód.

Niech U - pokrycie otwarte K. Dla dowolnego $y \in K$ zdefiniujmy:
$$n_y = \min\{n \in \mathbb{N} | \exists_{U_y \in U} : \text{Ball}(y, \frac{1}{n}) \subseteq U_y\}.$$
Taka liczba będzie bez wątpienia istniała, gdyż U pokrywa K i składa się z samych zbiorów otwartych. Niech U_y będzie zbiorem spełniającym powyższy warunek dla $y \in K$. Niech $V = \{U_y | y \in D\}$, gdzie D to przeliczalny podzbiór gęsty w K (istnieje on na mocy Tw. 4.3). Jasne, że $V \subseteq U$ i że V jest przeliczalny. Pokażemy, że jest to podpokrycie.
Niech $x \in K$. Wiemy, że $\exists_{U_x \in U, N \in \mathbb{N}} : \text{Ball}(x, \frac{1}{N}) \subseteq U_x$. Ponadto, jako że D jest gęsty w K, to $\exists_{y \in D} : d(y, x) < \frac{1}{2N}$. Wtedy:
$$x \in \text{Ball}(y, \frac{1}{2N}) \implies \text{Ball}(y, \frac{1}{2N}) \subseteq \text{Ball}(x, \frac{1}{N}) \subseteq U_x \in U.$$
Więc $2N \geqslant n_y$ z konstrukcji n_y. Zatem:
$$x \in \text{Ball}(y, \frac{1}{2N}) \subseteq \text{Ball}(y, \frac{1}{n_y}) \subseteq U_y \in V.$$
Czyli V pokrywa K.

Jesteśmy już gotowi, żeby udowodnić najważniejsze twierdzenie w tej sekcji.

Twierdzenie 4.18. Zwartość ciągowa = zwartość pokryciowa

Zbiór K jest ciągowo zwarty wtedy i tylko wtedy gdy jest zwarty (pokryciowo).

Dowód.

$\Longrightarrow$ Niech $K \subseteq\subseteq X$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem elementów z K i niech $Z = \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$. Pokażemy, że zachodzi jedna z dwu możliwości:

1. $$\exists_{y\in K} : \forall_{U\in\mathcal{N}(y),\, \underset{\text{otw.}}{U\subseteq X}} : |Z \cap U| = \infty.$$
2. Z jest skończony.

Mianowicie, niech $\neg$1., i.e.:

$$\forall_{y\in K} : \exists_{U_y\in\mathcal{N}(y),\, \underset{\text{otw.}}{U_y\subseteq X}} : |Z \cap U_y| < \infty.$$

Oczywiście $\{U_y\}_{y\in K}$ jest pokryciem otwartym K (gdyż każdy y zawiera się np. w odpowiadającym mu U_y). Wybierzmy więc zeń skończone podpokrycie, tak, żeby:

$$K \subseteq U_{y_1} \cup U_{y_2} \cup \ldots \cup U_{y_N}.$$

Mamy jednak $Z \subseteq K$, zatem:

$$Z = K \cap Z = (U_{y_1} \cap Z) \cup (U_{y_2} \cap Z) \cup \ldots \cup (U_{y_N} \cap Z). \tag{146}$$

Każdy z elementów tej sumy jest skończony, na mocy założenia, zatem Z także jest skończony, jako skończona suma skończonych.
Widzimy więc, że zachodzi 1. lub 2.:

1. Jeśli zachodzi pierwszy warunek, to skoro:
   $$\exists_{y\in K} : \forall_{U\in\mathcal{N}(y),\, \underset{\text{otw.}}{U\subseteq X}} : |Z \cap U| = \infty,$$
   to konstruujemy $k \mapsto n_k$, tak aby $\forall_k : n_{k+1} > n_k$ i $x_{n_k} \in \mathrm{Ball}(y, \frac{1}{k})$. Jest to możliwe, bo każde otwarte otoczenie y zawiera nieskończenie wiele elementów ciągu x_n, w szczególności zawiera element o indeksie większym od dowolnej liczby. Oczywiście z podanej konstrukcji mamy $x_{n_k} \to y \in K$.
2. Jeśli Z jest skończony, to z zasady szuflatkowej istnieje wartość $x \in Z \subseteq K$, która zostanie odwiedzona nieskończenie wiele razy przez wyrazy ciągu x_n - można więc wziąć podciąg stały równy x i oczywiście do tej liczby zbieżny.

Widzimy więc, że w obu przypadkach potrafimy skonstruować podciąg zbieżny w K, zatem K istotnie jest ciągowo zwarty.

$\Longleftarrow$ Dowód przeprowadzimy nie wprost. Niech K będzie ciągowo zwartym, U pewnym jego pokryciem otwartym, a $V = V_{i\, i\in\mathbb{N}}$ jego przeliczalnym podpokryciem, które na mocy Tw. 4.3 istnieje. Przypuśćmy, że żadna skończona podrodzina V nie jest pokryciem K. Wtedy dla $n \in \mathbb{N}$ wybieramy $x_n \in K \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} V_i)$. Oczywiście zbiór z którego wybieramy x_n będzie niepusty na mocy założenia, że żadna skończona podrodzina V nie pokrywa K. Otrzymujemy ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elementów z K, więc ma on podciąg zbieżny do $y \in K$. Ale $\exists_N : y \in V_N$. Skoro jednak V_N jest otwarty (gdyż wyjściowe pokrycie U było otwarte), to prawie wszystkie wyrazy podciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zbieżnego do y powinny leżeć w V_N. Jednakże tylko skończona liczba wyrazów x_n leży w V_N, gdyż dla $n \geqslant N$: $x_n \in K \setminus V_N$. Sprzeczność! Musi więc istnieć skończone podpokrycie V, zatem K jest zwarty pokryciowo.

Obserwacja 4.7.

Domknięty podzbiór zbioru zwartego jest zwarty.

Istotnie $K \subseteq\subseteq X \wedge C \subseteq K \wedge C = \overline{C} \implies C \subseteq\subseteq X$.

Twierdzenie 4.19. Bolzano-Weierestrassa II

Każdy ograniczony i domknięty podzbiór $\mathbb{R}$ jest zwarty.

Dowód.

Wynika on prosto z równoważności zwartości ciągowej i pokryciowej. Jeśli jakiś podzbiór $\mathbb{R}$ jest ograniczony, to zawiera podciąg zbieżny (Twierdzenie 2.2), a skoro jest domknięty, to ów podciąg zbieżny ma granicę w tymże zbiorze. Zatem podzbiór ten jest ciągowo zwarty, czyli zwarty.

Definicja 4.24. Metryka na iloczynie kartezjańskim

Rozważmy dwie p-ń metryczne (X, d_1) i (Y, d_2). Można wtedy wprowadzić na ich iloczynie kartezjańskim nową metrykę D, tworząc p-ń. $(X \times Y, D)$. Standardowo robi się to w ramach jednej z równoważnych metryk d_p ($p \in [1, \infty]$) - tak, że $D((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_p(d_1(x_1, x_2), d_2(y_1, y_2))$. Wszystkie te metryki zadają tę samą topologię. Metrykę na iloczynie kartezjańskim większej liczby zbiorów definiuje się indukcyjnie.

Obserwacja 4.8.

$$(x_n, y_n) \xrightarrow{D} (x, y) \iff x_n \to x \wedge y_n \to y. \tag{147}$$

Widzimy, że zbieżność na iloczynie kartezjańskim jest "po współrzędnych".

Twierdzenie 4.20.

Iloczyn kartezjańskich dwu zbiorów zwartych jest zwarty.

Dowód.

TODO

Obserwacja 4.9.

Niech $K \subseteq\subseteq \mathbb{R}$. Wtedy K zawiera swoje kresy.

Rzeczywiście, skoro K jest zwarty, to i ograniczony: $\inf K \in \mathbb{R}$ i $\sup K \in \mathbb{R}$. Ponadto $\inf K$ i $\sup K$ są granicami ciągów z K, więc do K należą, skoro K jest domknięty.

Twierdzenie 4.21.

Niech (X,d) to p-ń. metryczna zupełna. Niech $K \underset{\text{domk.}}{\subseteq} X$. Wtedy, zbiór K jest zwarty jeżeli $\forall_{\varepsilon>0}$ można go pokryć skończoną ε - siecią.

Dowód.

TODO

Twierdzenie 4.22. Obraz zbioru zwartego jest zwarty

Niech (X,d), (Y,δ) będą p-ń. metrycznymi, a $\varphi : X \to Y$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Ponadto niech $K \subseteq\subseteq X$. Wtedy zbiór $\varphi(K)$ jest zwarty.

Dowód.

Niech $U = \{U_i\}_{i\in I}$ - rodzina zbiorów otwartych pokrywająca $\varphi(K)$: $\varphi(K) \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$. Skonstruujmy rodzinę $V = \{V_i = \varphi^{-1}(U_i)\}$. Skoro φ jest ciągłe, to V jest rodziną otwartą. Podnadto z włąsciwości przeciwobrazów: $K \subseteq \bigcup_{i\in I} V_i$. Zatem V jest pokryciem otwartym. Możemy więc zeń wybraż skończone podpokrycie otwarte:

$$K \subseteq V_{i_1} \cup .. \cup V_{i_n} = \varphi^{-1}(U_{i_1}) \cup .. \cup \varphi^{-1}(U_{i_n}).$$

Wtedy:

$$\varphi(K) \subseteq \varphi(\varphi^{-1}(U_{i_1}) \cup .. \cup \varphi^{-1}(U_{i_n})) = \varphi(\varphi^{-1}(U_{i_1})) \cup .. \cup \varphi(\varphi^{-1}(U_{i_n})) \subseteq U_{i_1} \cup ... \cup U_{i_n}.$$

Zatem dla każdego pokrycia $\varphi(K)$ wybraliśmy zeń skończone podpokrycie - zatem $\varphi(K)$ jest zwarty.

Obserwacja 4.10. Odwzorowanie ciągłe na zbiorze zwartym osiąga swoje kresy

Niech (X,d) - p-ń. metryczna i niech $f : X \to \mathbb{R}$ będzie ciągłą funkcją oraz niech $K \subseteq\subseteq X$. Wtedy:

$$\sup_{x\in K} f = \sup f(K) \in f(K) \tag{148}$$

oraz

$$\inf_{x\in K} f = \inf f(K) \in f(K). \tag{149}$$

Wynika to od razu z Twierdzenia 4.22 oraz Obserwacji 4.3.

Twierdzenie 4.23. Heinego - Borela

Podzbiór $K \subseteq \mathbb{R}^n$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty i ograniczony.

Dowód.

$\implies$ Por. Tw. 4.3.

$\Longleftarrow$ Skoro K jest ograniczony, to istnieje kostka postaci:

$$C = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n], \tag{150}$$

t.ż $K \subseteq C$. Ponadto, C musi być zwarta, jako iloczyn kartezjański dwu zbiorów zwartych (por. Tw. 4.3). Zauważyliśmy jednak, żę domknięty podzbiór zbioru zwartego jest zwarty, zatem i K jest zwarty (Obs. 4.3).

Twierdzenie 4.24. Lemat Lebesgue'a

Niech (X, d) - p-ń. metryczna, $K \subseteq\subseteq X$ (K jest zwartym podzbiorem X). Niech U będzie pokryciem otwartym K. Wówczas:

$$\exists_{\lambda>0} \forall_{x\in K} \exists_{U_x \in U} : \mathrm{Ball}(x, \lambda) \subseteq U_x. \tag{151}$$

Uwaga! Liczbę λ podaną w twierdzeniu nazywa się **liczbą Lebesgue'a**.

Dowód.

Skoro K - zwarty, to wybierzmy z U skończone podpokrycie: $\{U_i\}_{1\leqslant i\leqslant N}$.

- Jeżeli $\exists_{i\leqslant N} : X = U_i$, to sytuacja nie przedstawia żadnego problemu - za λ bierzemy dowolną liczbę, zaś za $U_x = X$. Teza jest trywialnie spełniona.
- Jeżeli $\forall_{i\leqslant N} : X \not\subseteq U_i$, to definiujemy rodzinę $F_i = X \backslash U_i$ oraz funkcję:

  $$f(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} d(x, F_i),$$

  gdzie

  $$d(x, F_i) = \inf_{v\in F_i}\{d(x, v)\}$$

  jest dobrze określoną funkcją dla niepustego F_i.
  Oczywiście f jest ciągła, bo mamy:

  $$\left|f(x) - f(x_0)\right| = \frac{1}{N}\left|\sum_{i=1}^{N} d(x, F_i) - d(x_0, F_i)\right| \leqslant \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|\inf_{v\in F_i}\{d(x, v)\} - \inf_{v\in F_i}\{d(x_0, v)\}\right|.$$

  Zauważmy, że skoro:

  $$d(x, v) \leqslant d(x_0, v) + d(x, x_0)$$

  oraz:

  $$d(x_0, v) \leqslant d(x, v) + d(x, x_0),$$

  to:

  $$\inf_{v\in F_i}\{d(x, v)\} \leqslant \inf_{v\in F_i}\{d(x_0, v)\} + d(x, x_0)$$

  i:

  $$\inf_{v\in F_i}\{d(x_0, v)\} \leqslant \inf_{v\in F_i}\{d(x, v)\} + d(x, x_0),$$

zatem:

$$|\inf_{v\in F_i}\{d(x,v)\} - \inf_{v\in F_i}\{d(x_0,v)\}| \leqslant d(x,x_0).$$

Widzimy, więc że

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant d(x,x_0),$$

czyli f musi być ciągła.
Skoro f jest ciągła na zbiorze zwartym K i $\forall_{x\in K} : f(x) > 0$ (bo inaczej – gdyby $f(x) = 0$, to x nie nalezałby do żadego pokrycia U_i), to $\exists_{x_0} : f(x_0) = \inf f(x) > 0$. Funkcja ciągła na zbiorze zwartym osiąga swoje kresy. Weźmy $\lambda = \inf f(x) > 0$. Skoro mamy $\forall_{x\in K} : f(x) \geqslant \lambda$, a $f(x)$ jest średnią odległością x od F_i, to w szczególności istnieje takie F_j, że $\lambda \leqslant d(x,F_j) = \inf_{v\notin U_j} d(x,v) \implies \forall_{v\notin U_j} : d(x,v) \geqslant \lambda$. Zatem dla tego U_j:

$$\mathrm{Ball}(x,\ \lambda) \subseteq U_j.$$

Znaleźliśmy więc szukaną λ i szukane $U_x = U_j$. Dowód został zakończony.

4.4 Spójność

Definicja 4.25. Spójność

Powiemy, że zbiór Z w pewnej metryce jest **niespójny**, jeśli:

$$\exists_{Z_1,Z_2\neq\emptyset} : Z_1 \cup Z_2 = Z \quad \wedge \quad Z_1 \cap \overline{Z_2} = \emptyset. \tag{152}$$

W przeciwnym razie, zbiór nazwiemy **spójnym**. Dla zbiorów spójnych, mamy:

$$Z_1, Z_2 \neq \emptyset \wedge Z_1 \cup Z_2 = Z \implies Z_1 \cap \overline{Z_2} \neq \emptyset \vee \overline{Z_1} \cap Z_2.$$

Obserwacja 4.11.

Podzbiór $\mathbb{R}$ jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy jest przedziałem.

Twierdzenie 4.25. Obraz zbioru spójnego jest spójny

Jeśli Z jest zbiorem spójnym, a $\varphi : X \to Y$ odzworowaniem ciągłym, to $\varphi(Z)$ jest spójny.

Dowód.

Dowód nie wprost. Załóżmy, że $\varphi(Z)$ jest niespójny, tj. istnieją takie niepuste $W_1, W_2 \subseteq Y$, że $W_1 \cap \overline{W_2} = \emptyset$ i $W_1 \cup W_2 = \varphi(Z)$. Niech $Z_1 = \varphi^{-1}(W_1) \cap Z$ i $Z_2 = \varphi^{-1}(W_1) \cap Z$. Mamy:

$$Z \subseteq \varphi^{-1}(\varphi(Z)) = \varphi(W_1) \cup \varphi(W_2).$$

Zatem $Z = Z_1 \cup Z_2$. Skoro Z jest spójny, to $\overline{Z_1} \cap Z_2 \neq \emptyset$ lub $Z_1 \cap \overline{Z_2} \neq \emptyset$. Bez straty ogólności, załóżmy ten pierwszy przypadek. Wtedy istnieje $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, t.ż. $x_n \in Z_1$ i $x_n \to x \in Z_2$. Ale wtedy – z ciągłości φ – $W_1 \ni \varphi(x_n) \to \varphi(x) \in W_2$, zatem $\overline{W_1} \cap W_2 \neq \emptyset$, wbrew założeniu. Powstała sprzeczność dowodzi tezy.

Obserwacja 4.12. Łukowa spójność

Zbiór spójny łukowo jest spójny.

5 Rachunek różniczkowy

Definicja 5.1. Różniczkowalność

Niech $f : I \to \mathbb{R}$, gdzie I jest przedziałem w $\mathbb{R}$ (otwartym lub domkniętym). Powiemy, że f jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in I$, jeśli istnieje granica:

$$\lim_{I \ni x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{153}$$

W szczególności, jeśli $I = [a, b]$, to f jest różniczkowalna w a, jeśli istnieje granica:

$$\lim_{I \ni x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \tag{154}$$

Wartość tychże granic nazywamy pochodną funkcji f w punkcie x_0 i oznaczamy $f'(x_0)$.

Definicja 5.2. Pochodna

Jeśli w każdym punkcie funkcji f istnieje skończona pochodna, to funkcje $f' : I \to \mathbb{R}$, $f' : x \mapsto f'(x)$ nazywamy **pochodną** funkcji f. Mówimy wtedy o f, że jest **różniczkowalna**.

Twierdzenie 5.1.

Niech $x \in I$ deg. Wtedy:

$$\exists_{f'(x_0)} \iff \exists_y : \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - yh}{h} = 0. \tag{155}$$

Wtedy oczywiście $y = f'(x)$.

Dowód.

$\Longrightarrow$ Jeśli $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$, to $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$ i:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - hf'(x_0)}{h} = 0.$$

$\Longleftarrow$ Jeśli:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - hy}{h} = 0,$$

to:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{h} = y = f'(x_0).$$

Twierdzenie 5.2. Funkcja różniczkowalna jest ciągła

Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w pewnym punkcie x_0, to jest w tym punkcie ciągła.

Dowód.

Skoro $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$, to $\lim_{x\to x_0}f(x)-f(x_0)=lim_{x\to x_0}f'(x_0)(x-x_0)0$, zatem funkcja jest ciągła.

Obserwacja 5.1. Podstawowe własności pochodnych

Niech $f,g:I\to\mathbb{R}$ będą funkcjami różniczkowalnymi. Wtedy:

- $(f+g)'$ istnieje i:
$$(f+g)'=f'+g'. \tag{156}$$
- Jeśli $a\in R$, to $(af)'$ istnieje i:
$$(af)'=af'. \tag{157}$$
- $(fg)'$ istnieje i:
$$(fg)'=f'\cdot g+f\cdot g'. \tag{158}$$
Jest to tzw. wzór Leibnitza.
- Jeśli $g(x)\neq 0$ i $g'(x)\neq 0$ dla wszyskich $x\in I$, to $(\frac{f}{g})'$ istnieje i:
$$(\frac{f}{g})'=\frac{f'g-fg'}{(g)^2}. \tag{159}$$

Dowód jest bardzo prosty i pozostawiamy go jako ćwiczenie. Nieco ciekawsze (i dużo ważniejsze) jest następujące:

Twierdzenie 5.3. Pochodna funkcji złożonej

Niech $g:I_1\to I_2$, $f:I_2\to\mathbb{R}$ będą funkcjami różniczkowalnymi odpowiednio w punktach $x_0\in I_1$ deg i $g(x_0)\in I_2$ deg. Wtedy $f\circ g$ także jest różniczkowalna i w x_0:
$$(f\circ g)'(x_0)=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0). \tag{160}$$
Reguła ta nazywa się czasem **regułą łańuchową**.

Dowód.

Niech $r(h)=g(x_0+h)-g(x_0)-g'(x_0)h$. Wtedy (por. Tw. 5.1):
$$\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h}=0. \tag{161}$$
Niech $y_0=g(x_0)$ i $R(k)=f(y_0+h)-f(y_0)-f'(y_0)h$. Znowuż:
$$\lim_{k\to 0}\frac{R(k)}{k}=0. \tag{162}$$
Wtedy:
$$f(g(x_0+h))-f(g(x_0))=f(g(x_0)+g'(x_0)h+r(h))-f(g(x_0))=f(g(x_0)+k(h))-f(g(x_0)), \tag{163}$$

gdzie oznaczyliśmy $k(h) = g'(x_0)h + r(h)$. Oczywiście $\lim_{h\to 0} k(h) = 0$. Licząc dalej:

$$f(g(x_0+h)) - f(g(x_0)) = f(g(x_0)+k(h)) - f(g(x_0)) = R(k(h)) + f'(y_0)k(h). \tag{164}$$

Zatem:

$$\lim_{h\ to 0} \frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{h} = f'(y_0)\lim_{h\to 0}\frac{k(h)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{R(k(h))}{h}.$$

Zauważmy, że:

$$\lim_{h\to 0}\frac{k(h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g'(x_0)h + r(h)}{h} = g'(x_0).$$

Stąd mamy:

$$\lim_{h\to 0}\frac{R(k(h))}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{R(k(h))}{k(h)}\frac{k(h)}{h} = 0.$$

Ostatecznie więc:

$$\lim_{h\ to 0}\frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{h} = f'(y_0)g'(x_0).$$

Definicja 5.3. Inna definicja pochodnej

Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Niech $\vec{x_0} \in \mathbb{R}^n$. Jeśli istnieje taka macierz $A \in M(\mathbb{R})_{m\times n}$, że:

$$\lim_{\|\vec{h}\|\to 0}\frac{f(\vec{x_0}+\vec{h}) - f(\vec{x_0}) - A\vec{h}}{\|\vec{h}\|} = 0, \tag{165}$$

dla $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$, to macierz A nazwiemy pochodną f w punkcie $\vec{x_0}$. Łatwo widać, że A jest wyznaczone jednoznacznie.

Zajmiemy się teraz związkiem pochodnej z własnościami funkcji rzeczywistych.

Definicja 5.4. Ekstrema

Niech (X, d) - p-ń. metryczna oraz $f : X \to \mathbb{R}$. Wtedy $x_0 \in X$ nazwiemy:

- **Lokalnym minimum**, jeśli:
$$\exists_{U\in\mathcal{N}(x_0)}\forall_{x\in U} : f(x) \geqslant f(x_0). \tag{166}$$
- **Lokalnym minimum ścisłym**, jeśli:
$$\exists_{U\in\mathcal{N}(x_0)}\forall_{x\in U} : f(x) > f(x_0). \tag{167}$$
- **Lokalnym maksimum**, jeśli:
$$\exists_{U\in\mathcal{N}(x_0)}\forall_{x\in U} : f(x) \leqslant f(x_0). \tag{168}$$
- **Lokalnym maksimum ścisłym**, jeśli:
$$\exists_{U\in\mathcal{N}(x_0)}\forall_{x\in U} : f(x) < f(x_0). \tag{169}$$

Wpólna nazwa, na którąś z tych sytuacji, to wystąpienie lokalnego **ekstremum** (ścisłego ekstremum).

Twierdzenie 5.4. Warunek konieczny istnienia ekstremum

Jeśli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest w punkcie x_0 różniczkowalna i x_0 jest ekstremum f, to:

$$f'(x_0) = 0. \tag{170}$$

Dowód.

Załóżmy, że f ma w x_0 minimum. Wtedy oczywiście:

$$f(x) - f(x_0) \geqslant 0.$$

Zatem:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0,$$

dla $x > x_0$, więc:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \to x_0^+} f'(x_0) \geqslant 0.$$

Jednakże:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0,$$

dla $x < x_0$ i:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \to x_0^-} f'(x_0) \leqslant 0.$$

Jedyną możliwością połączenia tych nierówności jest $f'(x_0) = 0$. Dla maksimum w x_0 dowód zupełnie analogiczny.

Twierdzenie to pomoże nam udowodnić kilka zasadniczych twierdzeń związanych z pochodnymi. Zaczniemy od:

Twierdzenie 5.5. Rolle'a

Jeśli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła i różniczkowalna na $]a, b[$ oraz $f(a) = f(b)$, to:

$$\exists_{\xi \in]a,b[} : f'(\xi) = 0.$$

Dowód.

f jest ciągła na zwartej dziedzinie $[a, b]$, także osiąga swoje kresy. Jeśli $\sup f = \inf f = f(a) = f(b)$, to f jest funkcją stałą: $f := f(a)$ i jej pochodna we wszystkich punktach pomiędzy a i b jest równa 0. W przeciwnym wypadku, (i.e. $\sup f \neq f(a)$ lub $\inf f \neq f(a)$) istnieje $\xi \in]a, b[$ osiągające ów kres różny od wartości w a. Oczywiście ξ będzie ektremum, zatem z poprzedniego twierdzenia $f'(\xi) = 0$.

Uogólnieniami tych twierdzeń są następujące dwa rezultaty:

Twierdzenie 5.6. Cauchy'ego

Niech $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ - ciągłe i różniczkowalne na $]a, b[$, wtedy:

$$\exists_{\xi \in]a,b[} : g'(\xi)(f(b) - f(a)) = f'(\xi)(g(b) - g(a)). \tag{171}$$

Dowód.

Konstruujemy funkcję:

$$h(x) = g(x)(f(b) - f(a)) - f(x)(g(b) - g(a)).$$

Łatwo widzieć, że:

$$h(a) = h(b) = g(a)f(b) - f(b)g(a).$$

Ponadto h powstaje z operacji arytmetycznych na f, g więc również jest ciągła i różniczkowalna na $]a, b[$. Spełnia więc wszystkie założenia Tw. Rolle'a:

$$\exists_{\xi \in]a,b[} : h'(\xi) = 0$$

Ale:

$$h'(\xi) = g'(\xi)(f(b) - f(a)) - f'(\xi)(g(b) - g(a)).$$

Stąd prosto otrzymujemy tezę.

Twierdzenie 5.7. Lagrange'a

Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ - ciągła i różniczkowalne na $]a, b[$, wtedy:

$$\exists_{\xi \in]a,b[} : f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{172}$$

Dowód.

Bierzemy $g = x$ w Tw. Cauchy'ego. Oczywiście g spełnia wszystkie założenia. Stąd:

$$\exists_{\xi \in]a,b[} : f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a). \tag{173}$$

Wystarczy podzielić teraz przez $(b - a)$.

6 Rachunek całkowy

6.1 Całka Riemanna

W toku tego podrozdziału zajmować się będziemy jedynie funkcjami ograniczonymi na zwartych przedziałach - gdyż dla takich właśnie definiuje się całkę Riemanna.

Definicja 6.1. Podział przedziału

Podziałem przedziału $[a,b]$ o długości n nazywamy ciąg skończony $\pi = (t_0, ..., t_n)$, t.ż. $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$. Powiemy też, że $\pi' = (t_0, ..., t_n)$ jest drobniejszy niż $\pi = (s_0, ..., s_m)$ ($\pi' \preceq \pi$) jeśli $\{t_0, .., t_n\} \subseteq \{s_0, ..., s_m\}$.

Definicja 6.2. Suma górna i dolna

Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną. Wtedy definiujemy dla niej i pewnego podziału π przedziału $[a,b]$:

- **Sumę dolną**:
$$\underline{S}(f,\pi) = \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \inf_{[t_i, t_{i-1}]} f \tag{174}$$
oraz **Sumę górną**:
$$\overline{S}(f,\pi) = \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \sup_{[t_i, t_{i-1}]} f \tag{175}$$

Twierdzenie 6.1.

Ustalmy przedział $[a,b]$.

1. Jeśli $\pi_1 \preceq \pi_2$ to:
$$\overline{S}(f,\pi_1) \leqslant \overline{S}(f,\pi_2) \tag{176}$$
oraz:
$$\underline{S}(f,\pi_1) \geqslant \underline{S}(f,\pi_2). \tag{177}$$
2. Dla każdych dwu podziałów π_1, π_2 istnieje podział π' t.ż. $\pi' \preceq \pi_1, \pi_2$.
3. Dla każdych dwu podziałów π_1, π_2:
$$(b-a) \inf_{[a,b]} f \leqslant \underline{S}(f,\pi_1) \leqslant \overline{S}(f,\pi_2) \leqslant (b-a) \sup)[b,a] f. \tag{178}$$

Dowód.

- Jest to prosta konsekwencja faktu, że jeśli $c \in [a,b]$ to:
$$(c-a) \sup_{[a,c]} f + (b-c) \sup_{[c,b]} f \leqslant (b-a) \sup_{[a,b]} f$$
i analogicznej własności dla inf.
- Za π' wystarczy wziąć sumę teoriomnogościową punktów z π_1 i π_2.

- Stosujemy punkt 1. do π' drobniejszego od obu podziałów.

Definicja 6.3. Całka dolna i górna

Całką dolną funkcji ograniczonej f na przedziale $[a,b]$ nazywamy liczbę:

$$\underline{\int_a^b} f = \sup_{\pi \preceq [a,b]} \underline{S}(f,\pi), \tag{179}$$

to jest supremum sum dolnych po wszyskich podziałach $[a,b]$. Analogicznie definiujemy całkę górną:

$$\overline{\int_a^b} f = \inf_{\pi \preceq [a,b]} \underline{S}(f,\pi). \tag{180}$$

Definicja 6.4. Całkowalność w sensie Riemanna

Powiemy, że funkcja ograniczona f na przedziale $[a,b]$ jest **całkowalna w sensie Riemanna**, jeśli jej całka dolna jest równa całce górnej. Ich wspólną wartość nazwiemy po prostu całką z f po przedziale $[a,b]$:

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f. \tag{181}$$

Twierdzenie 6.2. Kryterium całkowalności

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\pi \preceq [a,b]} : \overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) \leqslant \varepsilon. \tag{182}$$

Dowód.

$\Longleftarrow$ Jeśli spełniony jest warunek:

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\pi \preceq [a,b]} : \overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) \leqslant \varepsilon,$$

to skoro:

$$\underline{S}(f,\pi) \leqslant \underline{\int_a^b} f \leqslant \overline{\int_a^b} f \leqslant Sg(f,\pi),$$

gdyż skoro: dla każdych π_1, π_2:

$$\underline{S}(f,\pi_1) \leqslant S(f,\pi_2),$$

to na pewno:

$$\underline{\int_a^b} f = \sup_{\pi_1} \underline{S}(f,\pi_1) \leqslant \inf_{\pi_1} S(f,\pi_2) = \overline{\int_a^b} f. \tag{183}$$

Dostajemy, więc:

$$\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leqslant Sg(f,\pi) - Sd(f,\pi) \leqslant \varepsilon \forall_{\varepsilon>0}.$$

Jasne, że zachodzić to może tylko wtedy, gdy całka dolna jest równa całce górnej - f jest więc całkowalna.
$\Longrightarrow$ Mamy: $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$. Z deficji supremum i infimum wynika, że:

$$\exists_{\pi_1} : \overline{S}(f, \pi_1) - \overline{\int_a^b} f \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon$$

oraz:

$$\exists_{\pi_2} : \underline{\int_a^b} f - \underline{S}(f, \pi_2) \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Niech $\pi \preceq \pi_1, \pi_2$. Dla tego podziału zachodzić będą oczywiście obie z tych nierówności ($\overline{S}(f,\pi) \leqslant \overline{S}(f,\pi_1)$ i $\underline{S}(f,\pi) \geqslant \underline{S}(f,\pi_2)$). Zatem, dodawszy je:

$$\overline{S}(f,\pi) - \overline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} f - \underline{S}(f,\pi) = \overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) \leqslant \varepsilon.$$

Twierdzenie 6.3. Złożenie funkcji ciągłej z funkcją całkowalną jest całkowalne

Niech $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną (więc i ograniczoną). Niech $F : \overline{f([a,b])} \to \mathbb{R}$ jest ciągła (dziedzina F to domknięcie obrazu f).
Wtedy $F \circ f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna.

Dowód.

Zbiór $X = \overline{f([a,b])}$ jest domknięty i ograniczony w $\mathbb{R}$, więc jest zwarty. Zatem F, jako ciągła na zbiorze zwartym, jest jednostajnie ciągła:

$$\forall_{\varepsilon} \exists_{\delta_\varepsilon > 0} |s-t| \leqslant \varepsilon \implies |F(s) - F(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{b - a + 2\sup_X |F|} = \varepsilon'.$$

Wyrażenie po prawej ma sens, gdyż F jest ograniczona. Przyjmijmy w tym warunku, że $\delta_\varepsilon < \varepsilon'$, co zawsze możemy zrobić. Ponadto, skoro f - całkowalna, to:

$$\exists_\pi : \overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) \leqslant \delta_\varepsilon^2.$$

Niech $\pi = (t_0, ..., t_n)$. Ponadto niech $\sup_{[t_{i-1},t_i]} f = M_i$, $\inf_{[t_{i-1},t_i]} f = m_i$, $\sup_{[t_{i-1},t_i]} F \circ f = M_i'$, $\inf_{[t_{i-1},t_i]} F \circ f = m_i'$. Z właności f i F wiemy, że są to wszystko liczby rzeczywiste. Zatem:

$$\overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}).$$

Rozbijmy indeksy $\{1, ..., n\} = A \sqcup B$, gdzie $A = \{i \,|\, M_i - m_i \leqslant \delta_\varepsilon\}$, $B = \{i \,|\, M_i - m_i > \delta_\varepsilon\}$. Zatem:

$$\overline{S}(F \circ f, \pi) - \underline{S}(F \circ f, \pi) = \sum_{i \in A} (M_i' - m_i')(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i \in B} (M_i' - m_i')(t_i - t_{i-1})$$

Jeśli $i \in A$ i $x, y \in [t_{i-1}, t_i]$, to $m_i \leqslant f(x), f(y) \leqslant M_i$, więc $|f(x) - f(y)| \leqslant M_i - m_i \leqslant \delta_\varepsilon$. Zatem z jednostajnej ciągłości F: $|F(f(x)) - F(f(y))| \leqslant \varepsilon'$. W szczególności więc $|M_i' - m_i'| \leqslant \varepsilon$, gdyż przy przejściu do supremum i infimum nierówność się zachowuje. Tak więc:

$$\sum_{i\in A}(M_i'-m_i')(t_i-t_{i-1}) \leqslant \sum_{i\in A}\varepsilon'(t_i-t_{i-1}) \leqslant \varepsilon'(b-a).$$

Co do drugiej sumy, mamy:

$$\delta_\varepsilon \sum_{i\in B}(t_i-t_{i-1}) < \sum_{i\in B}(M_i-m_i)(t_i-t_{i-1}) \leqslant \sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)(t_i-t_{i-1}) = \overline{S}(f,\pi)-\underline{S}(f,\pi) \leqslant \delta_\varepsilon^2.$$

Stąd:

$$\sum_{i\in B}(t_i-t_{i-1}) < \delta_\varepsilon \leqslant \varepsilon'$$

Zatem:

$$\sum_{i\in B}(M_i'-m_i')(t_i-t_{i-1}) \leqslant (\sup_X F-\inf_X F)\sum_{i\in B}(t_i-t_{i-1}) \leqslant 2\sup_X|F|\varepsilon' < \infty,$$

bo F jest ograniczona. Ostatecznie:

$$\overline{S}(F\circ f,\pi)-\underline{S}(F\circ f,\pi) = \sum_{i\in A}(M_i'-m_i')(t_i-t_{i-1}) + \sum_{i\in B}(M_i'-m_i')(t_i-t_{i-1}) \leqslant \varepsilon'(b-a+2\sup_X|F|) = \varepsilon.$$

Konstrukcje przeprowadziliśmy dla dowolnego ε, zatem $F\circ f$ spełnia kryterium całkowalności, więc jest całkowalna.

Przykład Zbadajmy funckję $\mathrm{id}:[a,b]\to\mathbb{R}$, t.ż. $\mathrm{id}(x)=x$. Jest to funkcja całkowalna na dowolnym przedziale. Rzeczywiście, niech $\pi=(a+\frac{1}{n}(b-a)\,|\,0\leqslant i\leqslant n)$. Wtedy $\sup_{[t_i,t_{i-1}]}\mathrm{id}=(b-a)\frac{i+1}{n}+a$ i $\inf_{[t_i,t_{i-1}]}\mathrm{id}=(b-a)\frac{i}{n}+a$. Zatem:

$$\overline{S}(\mathrm{id},\pi)-\underline{S}(\mathrm{id},\pi)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2=\frac{(b-a)^2}{n}. \tag{184}$$

Wielkość tę można uczynić dowolnie małą dla dużych n, więc id spełnia kryterium całkowalności.

Obserwacja 6.1. Funkcje ciągłe są całkowalne

Niech $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Wtedy f jest całkowalna jako złożenie funkcji ciągłej z funkcją całkowalną: $f=f\circ\mathrm{id}$.

Twierdzenie 6.4. Liniowość całki

Niech $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ - całkowalne i $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Wtedy $\alpha f+\beta g:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest całkowalna i:

$$\int_a^b \alpha f+\beta g = \alpha\int_a^b f+\beta\int_a^b g. \tag{185}$$

Inaczej mówiąc - przestrzeń funkcji całkowalnych na $[a,b]$ jest przestrzenią liniową, a wzięcie całki jest na tej przestrzenii formą liniową.

Dowód.

Jednorodność Niech $\alpha \in \mathbb{R}$ i f - całkowalna. Wtedy, gdy $\alpha > 0$:

$$\overline{S}(\alpha f, \pi) = \alpha \overline{S}(f, \pi)$$

oraz:

$$\underline{S}(\alpha f, \pi) = \alpha \underline{S}(f, \pi)$$

z jednorodności sup i inf dla skalarów dodatnich. Zatem, z całkowalności f:

$$\exists_\pi : \overline{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) \leqslant \frac{\varepsilon}{\alpha} \implies \exists_\pi : \overline{S}(\alpha f, \pi) - \underline{S}(\alpha f, \pi) \leqslant \varepsilon, \tag{186}$$

czyli spełniony jest warunek całkowalności dla αf.
Gdy $\alpha = 0$, to $\alpha f := 0$, a funckcja zerowa jest trywialnie całkowalna.
Gdy $\alpha < 0$ mamy:

$$\overline{S}(\alpha f, \pi) = \alpha \underline{S}(f, \pi)$$

oraz:

$$\underline{S}(\alpha f, \pi) = \alpha \overline{S}(f, \pi),$$

z tego, że $\sup -f = -\inf f$ i vice versa. Dalej dowód przeprowadza się analogicznie.
Addytywność Z całkowalności f, g wynika, że dla dowolnego ε:

$$\exists_{\pi_1} : \overline{S}(f, \pi_1) - \underline{S}(f, \pi_1) \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon$$

i podobnie:

$$\exists_{\pi_2} : \overline{S}(g, \pi_2) - \underline{S}(g, \pi_2) \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon$$

Weźmy $\pi = (t_0, ..., t_n) \preceq \pi_1, \pi_2$. Wtedy powyższe nierówności tym bardziej są spełnione dla podziału π:

$$\overline{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) + \overline{S}(g, \pi) - \underline{S}(g, \pi) \leqslant \varepsilon.$$

Mamy też:

$$\overline{S}(f+g, \pi) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{[t_i, t_{i-1}]} (f+g) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sup_{[t_i, t_{i-1}]} f + \sup_{[t_i, t_{i-1}]} g = \overline{S}(f, \pi) + \overline{S}(g, \pi).$$

Identycznie:

$$\underline{S}(f+g, \pi) \geqslant \underline{S}(f, \pi) + \underline{S}(g, \pi).$$

Zatem:

$$\overline{S}(f+g, \pi) - \underline{S}(f+g, \pi) \leqslant \overline{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) + \overline{S}(g, \pi) - \underline{S}(g, \pi) \leqslant \varepsilon. \tag{187}$$

Widzimy więc, żę $f+g$ spełnia kryterium całkowalności, więc jest całkowalna.
Z tego wynika, że $\sup_\pi \underline{S}(f+g, \pi) = \inf_\pi \overline{S}(f+g, \pi) = \int_a^b (f+g)$. Z całkowalności f, g wynika też, że dla dowolnego ε:

$$\exists_\pi : \overline{S}(f, \pi) \leqslant \int_a^b f + \frac{1}{2}\varepsilon \wedge \overline{S}(g, \pi) \leqslant \int_a^b g + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Tutaj podobnie wybieramy osobno podziały dla f i g a następnie znajdujemy podział drobniejszy od ich obu. Wtedy:

$$\int_a^b f + g \leqslant \overline{S}(f+g, \pi) \leqslant \overline{S}(f, \pi) + \overline{S}(g, \pi) \leqslant \int_a^b f + \int_a^b g + \varepsilon.$$

Skoro nierówność ta zachodzi dla wszystkich $\varepsilon > 0$, to musi też być:

$$\int_a^b f+g \leqslant \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Zastosujmy teraz powyższą nierówność do pary $(-f,-g)$ i skorzystajmy z jednorodności całki:

$$-\int_a^b f+g = \int_a^b -f-g \leqslant \int_a^b -f + \int_a^b -g = -(\int_a^b f + \int_a^b g). \tag{188}$$

Łącząc otrzymane nierówności, mamy:

$$\int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g$$

Twierdzenie 6.5.

Niech $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ będą funkcjami całkowalnymi. Wtedy $f \cdot g : [a,b] \to \mathbb{R}$ także jest całkowalna.

Dowód.

Niech $F : [a,n] \ni x \mapsto x^2$. Jest to funkcja ciągła. Wtedy $f \cdot g = \frac{1}{4}(F \circ (f+g) - F \circ (f-g))$ jest całkowalna na podstawie udowodnionych już własności.

Przykład - funkcja Dirichleta Niech

$$Z(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}. \tag{189}$$

Funkcja ta nie jest całkowalna na żadnym przedziale, gdyż dla każdego podziału $\pi \preceq [a,b]$, mamy:

$$\overline{S}(Z,\pi) = b-a \neq 0 = \underline{S}(Z,\pi), \tag{190}$$

gdyż w każdym przedziale o niezerowej długości znajdują się zarówno liczby wymierne jak i niewymierne.

Twierdzenie 6.6.

Niech $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ - całkowalne i $\forall_{x\in[a,b]} : f(x) \leqslant g(x)$ - lub pisząc prościej: $f \leqslant g$. Wtedy:

$$\int_a^b f \leqslant \int_a^b g. \tag{191}$$

Dowód.

Dowód niesamowicie prosty - skoro $f \leqslant g$, to $\overline{S}(f,\pi) \leqslant \overline{S}(g,\pi)$ dla każdego podziału π. Zatem oczywiście:

$$\int_a^b f = \inf_\pi \overline{S}(f,\pi) \leqslant \inf_\pi \overline{S}(g,\pi) = \int_a^b g.$$

Twierdzenie 6.7.

Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ - całkowalna. Wtedy $|f|$ jest także całkowalna i:

$$\Big|\int_a^b f\Big| \leqslant \int_a^b |f|. \tag{192}$$

Dowód.

$|f|$ musi być całkowalna, jako złożenie funkcji ciągłej $F(x) = |x|$ i funkcji całkowalnej f. Ponadto istnieje taka liczba $\sigma = \pm 1$:

$$\sigma \int_a^b f = \Big|\int_a^b f\Big|.$$

Ale, korzystając z poprzedniego rezultatu:

$$\Big|\int_a^b f\Big| = \sigma \int_a^b f = \int_a^b \sigma f \leqslant \int_a^b |\sigma f| = \int_a^b |f|,$$

gdyż $\sigma f \leqslant |f|$.

Obserwacja 6.2.

- Niech $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$. Ponadto, niech $f = g$ na $[a,b] \setminus S$, gdzie $|S| < \infty$ - tj. f i g zgadzają się z sobą na całym przedziale poza skończoną liczbą punktów.
  Wtedy f jest całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy g jest całkowalna i jeśli to zachodzi, to:
  $$\int_a^b f = \int_a^b g.$$
- Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ - całkowalna i niech $[c,d] \subseteq [a,b]$. Wtedy $f\big|_{[c,d]}$ także jest całkowalna.
- Zdefiniujmy funkcję charakterystyczną zbioru A:
  $$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}. \tag{193}$$
  Wtedy, jeśli $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna, to dla $[c,d] \subseteq [a,b]$ mamy:
  $$\int_a^b \chi_{[c,d]} \cdot f = \int_c^d f\big|_{[c,d]} = \int_c^d f. \tag{194}$$
  Ostatnie wyrażenie jest wygodniejszym zapisem tejże wielkości.

Twierdzenie 6.8.

Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ - całkowalna i $c \in]a,b[$. Wtedy:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f. \tag{195}$$

Dowód.

$$\int_a^b f = \int_a^b (\chi_{[a,c]}f + \chi_{[c,b]}f) = \int_a^b \chi_{[a,c]}f + \int_a^b \chi_{[c,b]}f = \int_a^c f + \int_c^d f, \tag{196}$$

bo f i $\chi_{[a,c]}f + \chi_{[c,b]}f$ różnią się tylko w jednym punkcie ($x = c$).

Definicja 6.5. Wypunktowanie

Niech $\pi = (t_0, ..., t_n)$ będzie podziałem $[a,b]$. Wtedy **wypunktowaniem** π nazywamy ciąg skończony:

$$\Xi = (\xi_1, ..., \xi_n), \tag{197}$$

t.ż. $\xi_i \in [t_i, t_{i-1}]$.
Ponadto, jeśli $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, to **sumą wypunkowaną** podziału π i wypunktowania Ξ nazywamy:

$$S(f, \pi, \Xi) = \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) f(\xi_i). \tag{198}$$

Średnicą podziału π nazwiemy liczbę:

$$\mathrm{Diam}(\pi) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} (t_i - t_{i-1}). \tag{199}$$

Twierdzenie 6.9.

Niech $f \in C([a,b])$ (funkcje ciągłe na $[a,b]$) i $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem podziałów $[a,b]$, t.ż.:

$$\mathrm{Diam}(\pi_n) \to 0. \tag{200}$$

Niech $(\Xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem wypunktowań π_n.
Wtedy:

$$S(f, \pi_n, \Xi_n) \xrightarrow{n\to\infty} \int_a^b f \tag{201}$$

Dowód.

Zacznijmy od tego, że f jako funkcja ciągła jest całkowalna. Ponadto, f jako ciągła na zwartym przedziale jest jednostajnie ciągła:

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta_\varepsilon} : |s-t| \leqslant \delta_\varepsilon \implies |f(s) - f(t)| \leqslant \varepsilon. \tag{202}$$

Niech π będzie takim podziałem, że $\mathrm{Diam}(\pi) \leqslant \delta_{\frac{\varepsilon}{b-a}}$. Wtedy:

$$\overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,pi) = \sum_{i=1}^{n} (\sup_{[t_i,t_{i-1}]} f - \inf_{[t_i,t_{i-1}]} f)(t_i - t_{i-1}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a}(t_i - t_{i-1}) = \varepsilon, \tag{203}$$

co wynika z tego, że skoro $(t_i - t_{i-1}) \leqslant \delta_{\frac{\varepsilon}{b-a}}$, to wartości f na tym przedziale są nie dalej niż $\frac{\varepsilon}{b-a}$, więc także jest tak dla supremum i infimum f na tym przedziale.
Ponadto, dla dowolnego wypunktowania Ξ podziału π:

$$\underline{S}(f,\pi) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{[t_i,t_{i-1}]} f(t_i - t_{i-1}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) = S(f,\pi,\Xi) \tag{204}$$

oraz:

$$S(f,\pi,\Xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sup_{[t_i,t_{i-1}]} f(t_i - t_{i-1}) = \overline{S}(f,\pi), \tag{205}$$

czyli:

$$\underline{S}(f,\pi) \leqslant S(f,\pi,\Xi) \leqslant \overline{S}(f,\pi). \tag{206}$$

Jednak zachodzi też:

$$\underline{S}(f,\pi) \leqslant \int_a^b f \leqslant \overline{S}(f,\pi), \tag{207}$$

Zatem:

$$\left| S(f,\pi,\Xi) - \int_a^b f \right| \leqslant \overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) \leqslant \varepsilon. \tag{208}$$

Jśli dla ustalonego $\varepsilon > 0$ w naszym ciągu $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wybierzemy takie N, że dla $n \geqslant N$:

$$\mathrm{Diam}(\pi_n) \leqslant \delta_{\frac{\varepsilon}{b-a}}, \tag{209}$$

to:

$$\overline{S}(f,\pi_n) - \underline{S}(f,\pi_n) \leqslant \varepsilon \tag{210}$$

i:

$$\left| S(f,\pi_n,\Xi_n) - \int_a^b f \right| \leqslant \varepsilon \tag{211}$$

dla $n \geqslant N$. Zatem rzeczywiście:

$$S(f,\pi_n,\Xi_n) \to \int_a^b f. \tag{212}$$

Definicja 6.6.

Dla $a > b$ definiujemy:

$$\int_a^b f := -\int_b^a f. \tag{213}$$

Ponadto:

$$\int_a^a f := 0. \tag{214}$$

Zauważmy, że wtedy Twierdzenie 6.9 zachodzi dla dowolnego ułożenia a, b, c.

Twierdzenie 6.10. Zasadnicze Twierdzenie Rachunku Całkowego I

Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ - całkowalna. Ponadto zdefiniujmy $F : [a,b] \to \mathbb{R}$:

$$F(x) = \int_a^x f. \tag{215}$$

Wiemy, że powyższe wyrażenie ma sens dla $x \in [a,b]$.
Wtedy:

- F jest ciągła,
- jeśli f jest ciągła w x_0, to F jest różniczkowalna tamże i:

$$F'(x_0) = f(x_0). \tag{216}$$

Dowód.

Dowód

- Skoro f jest całkowalna, to musi być ograniczona:

  $$\exists_M \forall_x : |f(x)| \leqslant M.$$

  Zatem dla $x > y$:

  $$|F(x) - F(y)| = \left| \int_a^x f - \int_a^y f \right| = \left| \int_x^y f \right| \leqslant \int_x^y |f| \leqslant M|x-y|, \tag{217}$$

  czyli F jest Lipschitzowska, a więc i ciągła.
- Niech f będzie ciągła w x_0. Obliczmy iloraz różniczowy F:

  $$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f = \frac{1}{|h|} \int_c^d f, \tag{218}$$

  gdzie:

  $$[c,d] = \begin{cases} [x_0, x_0+h] & h > 0 \\ [x_0+h, x_0] & h < 0 \end{cases}. \tag{219}$$

  Skoro f jest ciągła w x_0, to:

  $$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta_\varepsilon} : |t - x_0| \leqslant \delta_\varepsilon \implies |f(t) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon. \tag{220}$$

  Wtedy dla $|h| \leqslant \delta_\varepsilon$ i $t \in [c,d]$:

  $$f(x_0) - \varepsilon \leqslant f(t) \leqslant f(x_0) + \varepsilon. \tag{221}$$

  Zatem, całkując obustronnie:

  $$|h|(f(x_0) - \varepsilon) \leqslant \int_c^d f \leqslant |h|(f(x_0) + \varepsilon), \tag{222}$$

  i dalej:

  $$f(x_0) - \varepsilon \leqslant \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} \leqslant f(x_0) + \varepsilon, \tag{223}$$

dla $|h| \leqslant \delta_\varepsilon$. Zatem:

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta_\varepsilon} : |h| \leqslant \delta_\varepsilon \implies \left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| \leqslant \varepsilon. \tag{224}$$

Jest to inne wyrażenie równości:

$$F'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(x_0). \tag{225}$$

Zauważmy, że skoro:

$$\int_{x_0}^{x} f = -\int_a^{x_0} f + \int_a^x f, \tag{226}$$

gdzie $\int_a^{x_0} f$ = const., to zdefiniowanie F jako całki od a lub od x_0 przesuwa ją jedynie i stałą i nie zmienia jej własności.

Definicja 6.7. Funkcja pierwotna

Niech f będzie daną funkcją. Jeśli F jest taką funkcją, że $F' = f$, to F nazywamy **funkcją pierwotną** do f.

Obserwacja 6.3.

Dla każdej funkcji ciągłej f na $[a,b]$ istnieje funkcja do niej pierwotna:

$$F(x) = \int_a^x f. \tag{227}$$

Twierdzenie 6.11. Zasadnicze Twierdzenie Rachunku Całkowego II

Jeśli $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna, a $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła na $[a,b]$ i różniczkowalna na $]a,b[$ oraz ponadto:

$$\forall_{x\in]a,b[} : F'(x) = f(x), \tag{228}$$

to wtedy:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a). \tag{229}$$

Dowód.

Weźmy $\varepsilon > 0$. Niech π będzie takim podziałem $[a,b]$, że:

$$\overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) \leqslant \varepsilon. \tag{230}$$

Niech $\pi = (t_0,\dots,t_n)$. Niech $\Xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)$ będzie wypunktowaniem π t.ż.:

$$\frac{F(t_i)-F(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} = F'(\xi_i) = f(\xi_i). \tag{231}$$

$\xi_i \in]t_i, t_{i-1}[$ spełniające powyższy warunek będzie istnieć na mocy Twierdzenia Lagrange'a. Skoro:

$$\overline{S}(f,\pi) \leqslant S(f,\pi,\Xi) \leqslant \underline{S}(f,\pi) \tag{232}$$

oraz:

$$\overline{S}(f,\pi) \leqslant \int_a^b f \leqslant \underline{S}(f,\pi), \tag{233}$$

to:

$$\left|\int_a^b f - S(f,\pi,\Xi)\right| \leqslant \varepsilon. \tag{234}$$

Mamy też:

$$S(f,\pi,\Xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} F'(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} F(t_i) - F(t_{i-1}) = F(b) - F(a). \tag{235}$$

Zatem:

$$\forall_{\varepsilon>0} : \left|\int_a^b f - (F(b) - F(a))\right| \leqslant \varepsilon. \tag{236}$$

Wielkości te muszą więc być równe sobie:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a). \tag{237}$$

Twierdzenie 6.12. Całkowanie przez części

Niech $F, G \in C([a,b])$ - różniczkowalne na $]a,b[$. Niech ponadto $f = F'$ i $g = G'$ - całkowalne na $[a,b]$ (zauważmy, że całkowalność f, g nie zależy od ich wartości w a i b, por. Obs. 6.2). Wtedy:

$$\int_a^b fG = G \cdot F\Big|_a^b - \int_a^b Fg. \tag{238}$$

Dowód.

$F \cdot G$ jest funkcją pierwotną do $Fg + fG$. Zatem $Fg + fG$ jest całkowalna (jako suma i iloczyn f. całkowalnych) i:

$$\int_a^b (Fg + fG) = G \cdot F\Big|_a^b, \tag{239}$$

co wynika z Tw. 6.11. Korzystając z liniowości całki i z tego, że każda az funkcji Fg i fG jest całkowalna, dostajemy tezę.

Twierdzenie 6.13. Całkowanie przez podstawienie

Niech $\varphi \in C([a,b])$ będzie ściśle rosnącą funkcją różniczkowalną na przedziale $]a,b[$. Niech $[c,d] = \varphi([a,b])$ (wiemy że obrazem zwartego przedziału przy funkcji ciągłej będzie zwarty przedział). Niech $f \in C([c,d])$.

Wtedy funkcja $(f \circ \varphi)\varphi'$ t.ż.:

$$[a,b] \ni x \mapsto f(\varphi(x))\varphi'(x) \in R, \tag{240}$$

jest całkowalna i :

$$\int_a^b (f \circ \varphi)\varphi' dx = \int_c^d f(y)dy. \tag{241}$$

Zauważmy, że w punktach a, b funkcja $(f \circ \varphi)\varphi'$ nie jest dobrze określona, jednak możemy przyjąć tam dowolne wartości, co nie zmieni całkowalności.
Uwaga! W twierdzeniu tym zamiast ciągłości f przyjąć możemy słabsze założenia:

- f ma funkcję pierwotną,
- $(f \circ \varphi)\varphi'$ jest całkowalna.

Dowód.

$f \circ \varphi$ jest całkowalna jako złożenie dwu funkcji ciągłych. Po pomnożeniu przez φ', całkowalną na mocy założeń, otrzymamy funkcję całkowalną $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$. Niech:

$$F(y) = \int_c^y f dy,$$

dla $y \in [c,d]$. F jest różniczkowalna i $F' = f$. Jeśli przyjmujemy ogólniejsze założenia, to F jest funkcją pierwotną do f taką, że $F(c)$. Taka zawsze istnieje, gdyż jeśli G jest dowolną f. pierwotną do f, to $F = G - G(c)$ także nią jest. Wtedy także $F \circ \varphi$ jest różniczkowalna na na $]a,b[$ i:

$$(F \circ \varphi)' = (F' \circ \varphi) \cdot \varphi' = (f \circ \varphi) \cdot \varphi'.$$

Zatem $F \circ \varphi$ jest funkcją pierwotną do $(f \circ \varphi)\varphi'$ na $]a,b[$. Zatem, zgodnie z 6.11:

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = (F \circ \varphi)(b) - (F \circ \varphi)(a),$$

ale, skoro φ jest ściśle rosnąca, to $\varphi(a) = c$ i $\varphi(b) = d$, więc:

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(d) - F(c).$$

Ale F jest funkcją pierwotną do f, więc:

$$\int_c^d f(y)dy = F(d) - F(c).$$

Porównując dwa poprzednie równania, mamy tezę:

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_c^d f(y)dy.$$

6.2 Funkcje logarytmiczna i wykładnicza

Definicja 6.8. Logarytm naturalny

Dla $x > 0$ zdefiniujmy funkcję $\log x :]0, \infty[\to \mathbb{R}$:

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t} dt. \tag{242}$$

Na mocy Tw. 6.10, log jest ciągły i różniczkowalny na całej dziedzinie oraz:

$$(\log x)' = \frac{1}{x}. \tag{243}$$

Z tego widać też, że log jest funkcją ściśle rosnącą.

Twierdzenie 6.14.

Niech $x, y \in]0, \infty[$. Wtedy:

$$\log(xy) = \log x + \log y.$$

Dowód.

$$\log(xy) = \int_1^{xy} \frac{1}{t} dt = \int_1^y \frac{1}{t} dt + \int_y^{xy} \frac{1}{t} dt = \log y + \int_y^{xy} \frac{1}{t} dt.$$

Weźmy pod lupę tę ostatnią całkę i użyjmy tu podstawienia: $\varphi(t) = yt$, $\varphi'(t) = y > 0$. Wtedy:

$$\int_y^{yt} \frac{1}{t} dt = \int_{\varphi^{-1}(y)}^{\varphi^{-1}(xy)} \frac{1}{\varphi(t)} \varphi'(t) dt = \int_1^x \frac{1}{t} dt = \log x.$$

Podstawiając powyższą wartość do wyjściowego równania otrzymujemy tezę.

Twierdzenie 6.15.

Niech $r \in \mathbb{Q}$, $x \in]0, \infty[$. Wtedy:

$$\log(x^r) = r \log x.$$

Dowód.

Ponownie, używając łatwego podstawienia:

$$\log(x^r) = \int_1^{x^r} \frac{1}{t} dt = \int_1^x \frac{r t^{r-1}}{t^r} dt = r \log x.$$

Użyliśmy tu podstawienia: $\varphi(x) = x^r$.

Zauważmy, że log jest ciągły na przedziale spójnym, jego obrazem więc będzie przedział. Zeby wyznaczyć jego postać, zauważmy, że:

$$\log 2 = \int_1^2 \frac{1}{t} dt \geqslant \frac{1}{2} > 0 \tag{244}$$

i ogólnie $\log x \geqslant \frac{x-1}{x}$, dla $x \geqslant 1$. Stąd:

$$\log(2^n) = n \log 2 \geqslant \frac{1}{2} n \xrightarrow{n\to\infty} \infty. \tag{245}$$

Stąd z monotoniczności log:

$$\lim_{x\to\infty} \log x = \infty. \tag{246}$$

Podobnież:

$$\log(2^{-n}) = -n \log 2 \leqslant -\frac{1}{2} n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty, \tag{247}$$

czyli:

$$\lim_{x\to 0} \log x = -\infty. \tag{248}$$

Zatem przeciwobrazem log jest $\mathbb{R}$. Stąd i z monotoniczności (implikującej różnowartościowość) i ciągłośći (pociągającej suriektywność) mamy:

Obserwacja 6.4.

$\log :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ jest różniczkowalną bijekcją $]0, \infty[$ na $\mathbb{R}$.

Wynika stąd, że istnieje funkcja odwrotna do log i ona także będzie różniczkowalną bijekcją.

Definicja 6.9. Funkcja wykładnicza

Funkcję:

$$\exp(x) : \mathbb{R} \to]0, \infty[, \tag{249}$$

będącą funkcją odwrotną do log nazywamy **funkcją wykładniczą**. Jest to różniczkowalna bijekcja.

Twierdzenie 6.16. Pochodna funkcji wykładniczej

$$(\exp)' = \exp. \tag{250}$$

Wynika stąd, że exp jest klasy $C^\infty(\mathbb{R})$.

Dowód.

Niech $t \in R$ t.ż. $t = \log x$. Wtedy z włanośći pochodnej funkcji odwrotnej:

$$\exp'(t) = \exp'(\log x) = \frac{1}{\log' x} = x = exp(t). \tag{251}$$

Zauważmy, że skoro $\log(1) = 0$, to $\exp(0) = \exp^{(n)}(0) = 1 \forall_{n\in\mathbb{N}}$. Możemy więc rozpisać wzór Taylora dla exp wokół zera:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} x^n + \frac{1}{N!} \exp(\xi) x^N, \tag{252}$$

dla ξ pomiędzy 0 i x. Zauważmy jednak, że wyraz resztowy dąży do zera wraz z N:

$$\frac{1}{N!} \exp(\xi) x^N \leqslant \frac{1}{N!} \exp(|x|) t^N \xrightarrow{N\to\infty} 0. \tag{253}$$

Zatem exp jest granicą (punktową! - zob. następna sekcja) swoich rozwinięć Taylora.

Obserwacja 6.5.

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{254}$$

Definicja 6.10. Liczba e

Liczbą e Eulera nazywamy wielkość:

$$e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}. \tag{255}$$

Definicja 6.11. Potęgowanie

Niech $a > 0$ i $t \in \mathbb{R}$. Definiujemy:

$$a^t = \exp(t \log x). \tag{256}$$

Zauważmy, że definicja ta, dla $t \in \mathbb{Q}$ pokrywa się ze standardową definicją potęgi (na mocy Tw. 6.15). Podadto, z ciągłości exp i log wynika, że a^t jest ciągłą funkcją zarówno podstawy jak i wykładnika.

Zgodnie z powyższą definicją mamy:

$$e^x = \exp x \tag{257}$$

i zapisów tych używać będziemy zamiennie.

Powiemy teraz trochę o rozszerzeniu exp na całą przestrzeń liczb całkowitych.

Definicja 6.12. Zespolona funkcja wykładnicza

Funckję $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$:

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \tag{258}$$

będącą rozszerzeń poprzednio zdefiniowanej funkcji exp na dziedzinę liczb zespolnych, dalej nazywać będziemy funkcją wykładniczą.

Zauważmy, że z kryterium D'Alemberta wynika, że jest to szereg zbieżny bezwzględnie. Rozszerzając dziedzinę exp, tracimy włanośći bijekcji.

Twierdzenie 6.17.

Dla zespolonej funkcji wykładniczej zachodzi wzór:

$$exp(z)\exp(w) \ = \exp(w+z), \tag{259}$$

gdzie $w, z \in \mathbb{C}$.

Dowód.

$$exp(z)\exp(w) = (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!})(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{z^k w^(n-k)}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = \exp(z+w). \tag{260}$$

Skorzystaliśmy tu z tzw. Twierdzenia Mertensa (nie załączonego w tym skrypcie), które mówi, że jeśli oba szeregi są zbieżne bewzględnie, to ich iloczyn jest równy ich iloczynowi Cauchy'ego.

Twierdzenie 6.18.

Zespolona funkcja wykładnicza jest:

- ciągła,
- różniczkowalna w sęsie zespolonym i jej pochodna jest równa exp. Oznacza to, że:

$$\exp'(z) = \lim_{\mathbb{C} \ni w \to 0} \frac{\exp(z+w) - \exp(z)}{w} = \exp(z). \tag{261}$$

Powyższa granica, to po wszykich ciągach liczb zespolonych dążących do z.

Koniec

Spis treści