

# Notatki do Analizy I R

Na podstawie wykładu głoszzonego przez prof. Sołtana w 2023 r.

red. Filip Baciak

November 2023

# 1 Wstęp

## 1.1 Relacje

### Definicja 1.1. Relacja

Relacją  $R$  ze zbioru  $A$  do zbioru  $B$  nazywamy podzbiór iloczynu kartezjańskiego tych dwu zbiorów:

$$R \subseteq A \times B. \quad (1)$$

Jeśli  $(x, y) \in R$  to piszemy  $xRy$ .

### Przykłady relacji:

- Relacja równości  $R \subseteq A \times A$ , zdefiniowana:

$$R = \{(a, a) | a \in A\}. \quad (2)$$

- Na zbiorze  $\mathbb{N}$  mamy relację wewnętrzną (tj. będącą podzbiorem  $\mathbb{N}^2$ ):

$$R = \{(n, m) | n \leq m\}. \quad (3)$$

### Definicja 1.2. Relacja równoważności

Relacją równoważności nazywamy relację  $R \subseteq A \times A$ , spełniającą następujące aksjomaty:

1. Zwrotność:

$$\forall_{x \in A} : xRx. \quad (4)$$

2. Symetryczność:

$$\forall_{x, y \in A} : xRy \implies yRx. \quad (5)$$

3. Przechodność:

$$\forall_{x, y, z \in A} : xRy \wedge yRz \implies xRz. \quad (6)$$

Przykładem relacji równoważności jest relacja  $R_f$  zadana przez funkcję  $f : A \rightarrow B$ :

$$xR_f y \iff f(x) = f(y). \quad (7)$$

### Definicja 1.3. Częściowy porządek

Częściowym porządkiem na zbiorze  $A$  nazywamy relację  $R \subseteq A^2$  (którą oznaczamy  $\leq$  i piszemy  $x \leq y$  zamiast  $xRy$ ), jeśli ma następujące cechy:

1. Zwrotność:

$$\forall_{x \in A} : x \leq x. \quad (8)$$

2. Antysymetryczność:

$$\forall_{x, y \in A} : x \leq y \wedge y \leq x \implies x = y. \quad (9)$$

3. Przechodność:

$$\forall_{x, y, z \in A} : xRy \wedge yRz \implies xRz. \quad (10)$$

Zbiór parę  $(A, \leq)$  nazywamy zbiorem częściowo uporządkowanym.

Na przykład relacja wewnętrzna na zbiorze  $\mathbb{N}^2$  zdefiniowana następująco:

$$(a, b) \leq (a', b') \iff a \leq a' \wedge b \leq b',$$

zadaje częściowy porządek nad  $\mathbb{N}^2$ .

#### Definicja 1.4. Porządek liniowy

Porządek częściowy  $\leq$  nad  $A$  nazywamy **liniowym**, jeśli:

$$\forall x, y \in A : x \leq y \vee x \leq y. \quad (11)$$

Zbiór z określonym porządkiem liniowym nazywamy **uporządkowanym liniowo**. Jeśli  $x \leq y \wedge x \neq y$  to piszemy  $x < y$ .

Zauważmy, że porządek częściowy - jak sama nazwa wskazuje - niekoniecznie określa relację wielkości między każdymi dwoma elementami zbioru na którym jest określony. Tę własność ma dopiero porządek liniowy.

#### Definicja 1.5. Ograniczenia

Podzbiór  $X \subseteq A$  zbioru uporządkowanego liniowo  $(A, \leq)$  nazywamy **ograniczonym z góry**, jeśli:

$$\exists u \in A \forall x \in X : x \leq u. \quad (12)$$

Podobnie definiujemy **ograniczenie z dołu**:

$$\exists l \in A \forall x \in X : l \leq x. \quad (13)$$

Elementy  $u$  i  $l$  nazywamy odpowiednio **ograniczeniem górnym** i **ograniczeniem dolnym**.

#### Definicja 1.6. Kresy górne i dolne

**Kresem górnym** podzbioru  $X \subseteq A$  uporządkowanego  $(A, \leq)$  nazwiemy najmniejsze jego ograniczenie górne, to znaczy taką liczbę  $b \in A$ , że:

- $b$  jest ograniczeniem górnym  $X$ ,
- jeśli  $l$  jest ograniczeniem górnym  $X$ , to  $b \leq l$ .

Podobnie - jako największe ograniczenie dolne - definiujemy **kres dolny**. Kres górny zbioru  $X$  oznaczamy  $\sup X$ , a kres dolny  $\inf X$ .

Zauważmy, że w ogólności zbiór nie musi mieć kresu górnego lub dolnego, a jeśli go ma to kres nie musi być elementem tegoż zbioru.

## 1.2 Liczby rzeczywiste

#### Definicja 1.7. $\mathbb{R}$

**Liczbami rzeczywistymi** nazywamy zbiór  $\mathbb{R}$  z określonymi działaniami dodawania  $+$  i mnożenia  $\cdot$ , wyróżnionymi, różnymi elementami  $0$  i  $1$  i określoną relacją porządku liniowego  $\leq$  - w skrócie  $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, \leq)$  - taki że:

1.  $\mathbb{R}$  jest ciałem, tzn. spełnia:

(a) Zamkniętość dodawania i mnożenia:

$$\forall_{a,b \in \mathbb{R}} : a + b \in \mathbb{R} \wedge a \cdot b \in \mathbb{R}; \quad (14)$$

(b) 0 jest elementem neutralnym dodawania:

$$\forall_{a \in \mathbb{R}} : a + 0 = a; \quad (15)$$

(c) Istnieją elementy odwrotne względem dodawania:

$$\forall_{a \in \mathbb{R}} \exists_{-a \in \mathbb{R}} : a + (-a) = 0; \quad (16)$$

(d) Dodawanie jest łączne:

$$\forall_{a,b,c \in \mathbb{R}} : (a + b) + c = a + (b + c); \quad (17)$$

(e) Dodawanie jest przemienne:

$$\forall_{a,b \in \mathbb{R}} : a + b = b + a; \quad (18)$$

(f) 1 jest elementem neutralnym mnożenia:

$$\forall_{a \in \mathbb{R}} : a \cdot 1 = a; \quad (19)$$

(g) Mnożenie jest łączne:

$$\forall_{a,b,c \in \mathbb{R}} : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c); \quad (20)$$

(h) Mnożenie jest przemienne:

$$\forall_{a,b \in \mathbb{R}} : a \cdot b = b \cdot a; \quad (21)$$

(i) Istnieją elementy przeciwne względem mnożenia (z wyjątkiem 0):

$$\forall_{a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \exists_{a^{-1} \in \mathbb{R}} : a \cdot a^{-1} = 1; \quad (22)$$

(j) Dodawanie jest rozdzielne względem mnożenia:

$$\forall_{a,b,c \in \mathbb{R}} : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c. \quad (23)$$

2. Porządek liniowy  $\leq$  spełnia:

(a) Możliwość dodawania "stronami":

$$\forall_{a,b,t \in \mathbb{R}} : a \leq b \implies a + t \leq b + t; \quad (24)$$

(b) Mnożenie dodatnich zachowuje dodatniość

$$\forall_{a,b \in \mathbb{R}} : 0 < a \wedge 0 < b \implies 0 < a \cdot b. \quad (25)$$

3.  $\mathbb{R}$  jest zwarty, tj. każdy niepusty zbiór ograniczony z góry ma kres górny w  $\mathbb{R}$ .

Można podać konstrukcję ciała o podanych własnościach (np. konstrukcja Dedekina, konstrukcja Rie-

man) i dowieść, że z dokładnością do izomorfizmu istnieje tylko jedno takie ciało.

### Twierdzenie 1.1. Własność Archimedesa

$$\forall x > 0, y \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : nx > y. \quad (26)$$

#### Dowód.

Twierdzenia dowiedziemy nie wprost:

Niech  $X = nx | n \in \mathbb{N}$  i założmy, że  $X$  jest ograniczony z góry przez  $y$ . Zatem posiada supremum:  $\alpha = \sup X$ . Wiemy, że  $\alpha - x < \alpha$ , więc nie może to być ograniczenie górne. Zatem:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : n_0 x > \alpha - x.$$

Ale wtedy:

$$(n_0 + 1)x > \alpha = \sup X.$$

Sprzeczność! Istotnie więc, zbiór  $nx | n \in \mathbb{N}$  nie może być ograniczony przez żadną liczbę, co dowodzi tezy.

### Twierdzenie 1.2. Gęstość $\mathbb{Q}$ w $\mathbb{R}$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y \exists r \in \mathbb{Q} : x < r < y. \quad (27)$$

#### Dowód.

Skoro  $y - x > 0$ , to  $\exists n \in \mathbb{N} : n(y - x) > 1$ . Ponadto, skoro  $1 > 0$ , to  $\exists m_1, m_2 \in \mathbb{N} : m_1 > nx \wedge m_2 > -nx$ . Zatem  $-m_2 < nx < m_1$ , tzn.  $nx$  leży pomiędzy dwiema liczbami całkowitymi. Istnieje więc takie  $m \in \mathbb{Z}$ , takie że:

$$m - 1 \leq nx < m.$$

Stąd już prosto:

$$nx < m \leq nx + 1 < ny,$$

$$x < \frac{m}{n} < y.$$

Na koniec krótka notka - zbiór  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ , to jest liczby rzeczywiste z dołączonymi symbolami (nie liczbami!) plus i minus nieskończoności, nazywami **rozszerzonymi liczbami rzeczywistymi**.

## 2 Ciagi rzeczywiste

### 2.1 Pojęcie ciągu i ogólne rezultaty

#### Definicja 2.1. Ciąg

**Ciagiem** elementów z zbioru  $X$  nazywamy funkcję:

$$a : \mathbb{N} \rightarrow X \quad (28)$$

i zamiast  $a(n)$  piszemy  $a_n$ . Cały ciąg oznaczamy  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . My w szczególności zajmować się będziemy ciągami rzeczywistymi i zespolonymi.

W sekcji tej, o ile nie powiedziano inaczej, zakładamy, że wszystkie ciągi są rzeczywiste.

#### Definicja 2.2. ZBIEŻNOŚĆ CIĄGU

Ciąg rzeczywisty  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nazywamy zbieżnym do granicy  $g$ , jeśli:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - g| \leq \varepsilon. \quad (29)$$

Piszemy wtedy:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$  lub  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g$ .

Ciąg  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nazywamy **ograniczonym**, jeśli:

$$\exists C \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq C. \quad (30)$$

#### Obserwacja 2.1. Obserwacja

Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.

#### Twierdzenie 2.1. Arytmetyka granic

Niech  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  i  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  będą ciągami rzeczywistymi, takimi, że  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  i  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ .

Wtedy:

1. 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a + b_n = a + b \quad (31)$$

2. 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a \cdot b_n = a \cdot b \quad (32)$$

3. 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a|_n = |a| \quad (33)$$

4. Jeśli  $b_n \neq 0$  DDD  $n$  (dla dostatecznie dużych  $n$ ) i  $b \neq 0$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \quad (34)$$

### Dowód.

W dowodach wszystkich tych twierdzeń chcemy dla dowolnego  $\varepsilon$  skonstruować takie  $N$ , że dla wszystkich  $n \geq N$  różnica między wyrazami ciągu po lewej a granicą po prawej stronie jest mniejsza od  $\varepsilon$ . Pamiętajmy tutaj, że:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq M_\varepsilon : |a_n - a| \leq \varepsilon, \quad (35)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq K_\varepsilon : |b_n - b| \leq \varepsilon, \quad (36)$$

1. Mamy:

$$|a_n + b_n - a - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b|, \quad (37)$$

więc dla  $n \geq N = \max\{M_{\frac{\varepsilon}{2}}, K_{\frac{\varepsilon}{2}}\}$ :

$$|a_n + b_n - a - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad (38)$$

2.

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n| |b_n - b| + |b| |a_n - a|. \quad (39)$$

Ale  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  jest ograniczony, więc  $a_n \leq C$  i mamy:

$$|a_n b_n - ab| \leq |a_n| |b_n - b| + |b| |a_n - a| \leq (|C| + 1) |b_n - b| + (|b| + 1) |a_n - a|. \quad (40)$$

Zatem dla  $n \geq \max\{M_{\frac{\varepsilon}{2(|b|+1)}}, K_{\frac{\varepsilon}{2(|C|+1)}}\}$ :

$$|a_n b_n - ab| \leq (|C| + 1) \frac{\varepsilon}{2(|C| + 1)} + (|b| + 1) \frac{\varepsilon}{2(|b| + 1)} = \varepsilon. \quad (41)$$

Dodaliśmy tutaj 1 do  $|C|$  i  $|b|$ , żeby uniknąć ewentualnego dzielenia przez 0.

3. Jeśli  $a > 0$ , to ciąg od pewnego miejsca musi być dodatni:  $|a_n| = a_n$  dla  $n > M_{|a|}$ , więc dla  $n > N = \max\{M_{|a|}, M_\varepsilon\}$ :

$$||a_n| - |a|| = |a_n - a| < \varepsilon.$$

Podobnie, jeśli  $a < 0$ , to ciąg od pewnego miejsca jest ujemny i  $|a_n| = -a_n$  dla  $n > M_{|a|}$ , więc dla  $n > N = \max\{M_{|a|}, M_\varepsilon\}$ :

$$||a_n| - |a|| = |-a_n - a| = |a_n - a| < \varepsilon.$$

Dla  $a = 0$ , mamy prosto:

$$|a_n| < \varepsilon \implies ||a_n|| < \varepsilon.$$

4. Zakładamy, że  $b_n \neq 0$  DDD  $n$ , więc istnieje takie  $K_0$ , że dla  $n \geq K_0$   $b_n \neq 0$ . Wtedy:

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| = \left| \frac{a_n b - a b_n}{b_n b} \right| = \left| \frac{a_n b - ab + ab - a b_n}{b_n b} \right| = \left| \frac{b(a_n - a) + a(b - b_n)}{b_n b} \right| \quad (42)$$

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| \leq \left| \frac{a_n - a}{b_n} \right| + \left| \frac{a}{b_n b} \right| |b_n - b| \leq \left| \frac{a_n - a}{b_n} \right| + \left( \left| \frac{a}{b_n b} \right| + 1 \right) |b_n - b| \quad (43)$$

Zauważmy, że dla  $n \geq K_{\frac{1}{2|b|}}$  mamy  $|b_n - b| \leq \frac{1}{2|b|}$ , więc  $\frac{1}{2|b|} \leq |b_n|$ , przez co:

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| \leq \left| \frac{a_n - a}{b_n} \right| + \left( \left| \frac{a}{b_n b} \right| + 1 \right) |b_n - b| \leq \left| \frac{2}{b} \right| |a_n - a| + \left( \left| \frac{2a}{b} \right| + 1 \right) |b_n - b| \quad (44)$$

Ostatecznie dla  $n > \max\{K_0, K_{\frac{1}{2|b|}}, K_{\frac{\varepsilon}{2(|\frac{2a}{b}|+1)}}, M_{\frac{\varepsilon}{4|b|}}\}$ :

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| \leq \left| \frac{2}{b} \right| \frac{\varepsilon}{4|b|} + \left( \left| \frac{2a}{b} \right| + 1 \right) \frac{\varepsilon}{2(|\frac{2a}{b}|+1)} = \varepsilon. \quad (45)$$

Powiemy teraz o mocnym twierdzeniu, pozwalającym stwierdzić, czy ciąg ma granicę, bez jej wyznaczania.

### Twierdzenie 2.2. Twierdzenie o ciągu monotonicznym i ograniczonym

Każdy ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.

- Jeśli ciąg jest niemalejący, to jest on zbieżny do supremum zbioru wyrazów ciągu.
- Jeśli ciąg jest nierosnący, to jest on zbieżny do infimum zbioru wyrazów ciągu.

Uwaga - dla ciągu  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  supremum jego wyrazów - tj.  $\sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$  - oznaczamy  $\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$ .

Analogicznie piszemy  $\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$  dla infimum jego wyrazów.

#### Dowód.

Załóżmy, że  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  jest niemalejący. Zbiór  $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$  jest ograniczony, zatem posiada supremum. Oznaczmy je  $g$ . Zatem dla każdego  $\varepsilon > 0$  liczba  $g - \varepsilon$  nie jest ograniczeniem górnym:

$$\exists_m : g - \varepsilon \leq a_m \leq g. \quad (46)$$

Ale wtedy, z racji monotoniczności  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ :

$$\forall_{n \geq m} : g - \varepsilon \leq a_m \leq a_n \leq g \leq g + \varepsilon. \quad (47)$$

Czyli:

$$\forall_{n \geq m} : |a_n - g| \leq \varepsilon, \quad (48)$$

co chcieliśmy pokazać. Dla  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nierosnącego dowód jest zupełnie analogiczny (można też rozważać zbieżność niemalejącego ciągu  $(-a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ).

### Twierdzenie 2.3. Twierdzenie o trzech ciągach

Niech  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  i  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  będą dwoma ciągami zbieżnymi do wspólnej granicy  $g$ . Wtedy, jeśli dla ciągu  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  istnieje takie  $N$ , że:

$$\forall_{n \geq N} : a_n \leq b_n \leq c_n, \quad (49)$$

to  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g$ .

#### Dowód.

Dowód jest bardzo krótki. Dla dowolnego  $\varepsilon$  bierzemy takie  $M_\varepsilon$ , że  $\forall_{n \geq M_\varepsilon} : |a_n - g| \leq \varepsilon$  i takie  $K_\varepsilon$ , że:  $\forall_{n \geq K_\varepsilon} : |c_n - g| \leq \varepsilon$ . Wtedy dla  $n \geq \max\{N, M_\varepsilon, K_\varepsilon\}$ :

$$g - \varepsilon \leq a_n \leq b_n \leq c_n \leq g + \varepsilon, \quad (50)$$

więc  $|b_n - g| \leq \varepsilon$ .



**Definicja 2.3. Rozbieżność do  $\pm\infty$** 

Powiemy, że ciąg  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  jest rozbieżny do  $+\infty$ , jeśli:

$$\forall C \exists N_C \in \mathbb{N} \forall n \geq N_C : a_n \geq C. \quad (51)$$

Analogicznie, powiemy, że ciąg  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  jest rozbieżny do  $-\infty$ , jeśli:

$$\forall C \exists N_C \in \mathbb{N} \forall n \geq N_C : a_n \leq C. \quad (52)$$

Mówimy też o "zbieżności" do  $\pm\infty$ , tj. zbieżności w zbiorze  $\overline{\mathbb{R}}$

**Obserwacja 2.2.**

Ciąg monotoniczny, nieograniczony jest rozbieżny do  $\pm\infty$ .

**Definicja 2.4. Podciąg**

Podciągiem ciągu  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nazywamy ciąg  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ , gdzie  $n \ni k \mapsto n_k \in \mathbb{N}$  jest funkcją ściśle rosnącą.

**Obserwacja 2.3.**

Jeśli  $a_n \rightarrow g$ , to każdy podciąg  $a_{n_k} \rightarrow g$

**2.2  $\limsup$  i  $\liminf$** 

Założmy, że mamy dany ciąg liczb rzeczywistych  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Zdefiniujemy wtedy następujące dwa ciągi:  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  oraz  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , takie że:

$$\alpha_n = \inf\{a_k \mid k \geq n\} \quad (53)$$

$$\beta_n = \sup\{a_k \mid k \geq n\} \quad (54)$$

Wtedy,  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  jest ciągiem niemalejącym, co wynika z faktu, że:

$$\inf\{a_k \mid k \geq n+1\} \subseteq \inf\{a_k \mid k \geq n\}$$

Podobnie,  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  jest ciągiem nierosnącym. Z tego wynika więc, że są to ciągi zbieżne w  $\overline{\mathbb{R}}$ . Mamy więc:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \sup \alpha_n, \quad (55)$$

gdyż  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  to ciąg nierosnący oraz podobnie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \inf \beta_n. \quad (56)$$

**Definicja 2.5. Granice górne i dolne ciągu**

Wielkość:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf\{a_k \mid k \geq n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \sup \alpha_n \quad (57)$$

nazywamy **granica dolną** ciągu  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  i oznaczamy  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Podobnie, wielkość:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{a_k \mid k \geq n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \inf \beta_n \quad (58)$$

nazywamy **granica górną** ciągu i oznaczamy  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

#### Twierdzenie 2.4. Bolzano-Weierstrassa I

Niech  $L$  będzie zbiorem punktów skupienia zbioru  $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ , tzn. takich liczb, dla których istnieje podciąg ciągu  $((a_n)_{n \in \mathbb{N}})$  zbieżny do tej liczby:

$$L = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid \exists \text{ podciąg } (a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} : \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = x\}. \quad (59)$$

Wtedy:

$$1. \quad L \neq \emptyset \quad (60)$$

$$2. \quad \liminf a_n \in L \quad \wedge \quad \limsup a_n \in L \quad (61)$$

$$3. \quad \liminf a_n = \inf L \quad \wedge \quad \limsup a_n = \sup L \quad (62)$$

#### Dowód.

TODO

Nietrudnym wnioskiem z tego twierdzenia jest następujące:

#### Twierdzenie 2.5. Kryterium zbieżności

Ciąg  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  jest zbieżny do  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\liminf a_n = \limsup a_n. \quad (63)$$

#### Dowód.

$\Rightarrow$  Jeśli  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , to także każdy podciąg  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dąży do  $a$ , więc  $L = \{a\}$ . Ale  $\liminf a_n \in L$  i  $\limsup a_n \in L$ , więc:

$$\liminf a_n = a = \limsup a_n. \quad (64)$$

$\Leftarrow$  Oczywiście zachodzi nierówność:

$$\alpha_n \leq a_n \leq \beta_n. \quad (65)$$

Skoro mamy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \liminf a_n = \limsup a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n, \quad (66)$$

więc z twierdzenia o trzech ciągach mamy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf a_n = \limsup a_n. \quad (67)$$

### Twierdzenie 2.6. Warunek Cauchy'ego

Niech  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  będzie ciągiem rzeczywistym. Wtedy następujące warunki są równoważne:

1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R} \quad (68)$$

2.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M_\varepsilon \forall n, m \geq M_\varepsilon |a_n - a_m| \leq \varepsilon. \quad (69)$$

Jeśli ciąg spełnia ten warunek, mówimy, że spełnia warunek Cauchy'ego.

Sprawdzając warunek Cauchy'ego, możemy dowodzić zbieżności ciągu do granicy rzeczywistej bez wyznaczania tej granicy.

### Dowód.

1.  $\Rightarrow$  2. Skoro  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zbieżny do  $a \in \mathbb{R}$ , to dla dowolnego  $\varepsilon > 0$  istnieje takie  $N_{\frac{\varepsilon}{2}}$ , że:

$$\forall n, m \geq N_{\frac{\varepsilon}{2}} : |a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} \wedge |a_m - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad (70)$$

ale wtedy:

$$|a_n - a_m| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad (71)$$

2.  $\Rightarrow$  1. Zauważmy, że  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  jest ciągiem ograniczonym. Istotnie, weźmy  $\varepsilon = 1$ :

$$\exists M_1 \forall n \geq M_1 : |a_n - a_{M_1}| \leq 1, \quad (72)$$

więc:

$$\min\{a_{M_1} - 1; a_k \mid k < M_1\} \leq a_n \leq \max\{a_{M_1} + 1; a_k \mid k < M_1\}. \quad (73)$$

Weźmy teraz dowolny  $\varepsilon > 0$ . Z ograniczoności  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  wynika:  $\alpha = \liminf a_n \in \mathbb{R}$  i  $\beta = \limsup a_n \in \mathbb{R}$ . Oznacza to, że:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A_\varepsilon \forall n \geq A_\varepsilon : |\alpha_n - \alpha| \leq \varepsilon, \quad (74)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists B_\varepsilon \forall n \geq B_\varepsilon : |\beta_n - \beta| \leq \varepsilon, \quad (75)$$

Zauważmy, że:

$$|\alpha - \beta| \leq |\alpha - \alpha_n| + |\beta - \beta_n| + |\alpha_n - \beta_n|. \quad (76)$$

Dwa pierwsze czynniki po prawej potrafimy ograniczyć, zbadajmy więc ostatni wyraz:

$$\begin{aligned} |\alpha_n - \beta_n| &\leq |\alpha_n - a_n| + |\beta_n - a_n| = |\inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\} - a_n| + |\sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\} - a_n| \\ &= \inf\{|a_m - a_n| \mid m \geq n\} + \sup\{|a_m - a_n| \mid m \geq n\}. \end{aligned} \quad (77)$$

Możemy teraz skorzystać z warunku Cauchy'ego i znaleźć takie  $M_{\frac{\varepsilon}{6}}$ , że:

$$\forall m \geq n \geq M_{\frac{\varepsilon}{6}} : |a_m - a_n| \leq \frac{\varepsilon}{6}. \quad (78)$$

Zatem dla  $n \geq M_{\frac{\varepsilon}{6}}$ :

$$\inf\{|a_m - a_n| \mid m \geq n\} \leq \frac{\varepsilon}{6} \quad (79)$$

$$\sup\{|a_m - a_n| \mid m \geq n\} \leq \frac{\varepsilon}{6} \quad (80)$$

Ostatecznie otrzymujemy dla  $n \geq \max\{A_{\frac{\varepsilon}{3}}, B_{\frac{\varepsilon}{3}}, M_{\frac{\varepsilon}{6}}\}$ :

$$|\alpha - \beta| \leq |\alpha - \alpha_n| + |\beta - \beta_n| + |\alpha_n - a_n| + |\beta_n - a_n| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \varepsilon. \quad (81)$$

Pokazaliśmy, że różnica  $|\liminf a_n - \limsup a_n|$  jest mniejsza od dowolnej liczby dodatniej, zatem musi być równa 0. Oznacza to, że  $\liminf a_n = \limsup a_n \in \mathbb{R}$ , a więc - co udowodniliśmy już wcześniej - ciąg jest zbieżny do rzeczywistej granicy.

### 3 Szeregi liczbowe

#### Definicja 3.1. Szereg liczbowy

Niech  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  będzie ciągiem liczb zespolonych ( $a_n \in \mathbb{C}$ ). **Szeregiem** o wyrazach  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nazwiemy napis:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \quad (82)$$

$N$ -tą sumą częściową szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  nazwiemy sumę:

$$S_N = \sum_{n=1}^N a_n. \quad (83)$$

Powiemy, że szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest **zbieżny** do  $S$ , jeśli:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = S \in \mathbb{C}. \quad (84)$$

Napiszemy wtedy, że  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ , a liczbę  $S$  nazwiemy sumą szeregu. Jeśli  $S_N$  nie ma granicy, to szereg nazwiemy **rozbieżnym**.

**Przykład 1.** Jeśli  $a_n = (-1)^n$ , to szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest rozbieżny.

**Przykład 2.** Jeśli  $a_n = q^{n-1}$ , dla  $|q| < 1$ , to  $S_N = \frac{1-q^N}{1-q}$  i  $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1-q}$ .

#### Twierdzenie 3.1.

Szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall \varepsilon \exists N_\varepsilon \forall N \geq M \geq N_\varepsilon \left| \sum_{n=M+1}^N a_n \right| \leq \varepsilon. \quad (85)$$

#### Dowód.

Twierdzenie wynika prosto z zastosowania warunku Cauchy'ego do ciągu  $S_N$ . Bowiem  $S_N$  jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall \varepsilon \exists N_\varepsilon \forall N \geq M \geq N_\varepsilon |S_N - S_M| \leq \varepsilon, \quad (86)$$

co po rozpisaniu  $S_N$  i  $S_M$  jest równoważne twierdzeniu.

$\sum_{n=M+1}^N a_n$  nazywa się czasami **ogonem szeregu**.

### Obserwacja 3.1. Warunek konieczny zbieżności

Warunkiem koniecznym zbieżności szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest, aby  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

Istotnie, wystarczy podstawić  $M = N - 1$  w twierdzeniu 3, żeby otrzymać definicję zbieżności  $a_n$  do 0.

Warto pamiętać, że nie jest to warunek wystarczający - kontrprzykładem jest np. rozbieżny szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ . Wtedy

$$S_{2^k} = 1 + \sum_{l=1}^k \sum_{j=2^{l-1}+1}^{2^l} \frac{1}{j} \geq 1 + \sum_{l=1}^k \frac{2^{l-1}}{2^l} = 1 + \frac{1}{2}k \rightarrow \infty. \quad (87)$$

Zatem  $S_N \rightarrow \infty$ , bo jest to ciąg monotoniczny.

## 3.1 Szeregi o wyrazach dodatnich

W tej sekcji zajmujemy się jedynie szeregami o wyrazach dodatnich, to jest takimi, dla których  $\mathbb{R} \ni a_n \geq 0$ .

### Obserwacja 3.2.

Dla szeregów o wyrazach dodatnich, ciąg sum częściowych jest niemalejącym ciągiem rzeczywistym. Oznacza to, że szereg jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg sum częściowych jest ograniczony. W przeciwnym wypadku  $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = +\infty$  i wtedy mówimy, że  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest rozbieżny do  $+\infty$ .

### Twierdzenie 3.2. Kryterium porównawcze

Niech  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$  będą szeregami o wyrazach dodatnich. Wtedy:

1. Jeśli  $\exists_{C>0} : a_n \leq C b_n$  DDDn, to:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty. \quad (88)$$

2. Jeśli  $\exists C > 0 : a_n \geq C b_n$  DDDn, to:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty. \quad (89)$$

#### Dowód.

Niech  $N_0$  będzie oznaczał indeks, od którego podane nierówności zachodzą.

1. Dla  $N > N_0$  mamy:

$$S_N^{(a)} = S_{N_0}^{(a)} + \sum_{n=N_0+1}^N a_n \leq S_{N_0}^{(a)} + \sum_{n=N_0+1}^N C b_n = S_{N_0}^{(a)} - C S_{N_0}^{(b)} + C S_N^{(b)} \leq S_{N_0}^{(a)} - C S_{N_0}^{(b)} + C \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty.$$

Zatem skoro  $S_N^{(a)}$  jest ograniczony, to (por. Obs. 3.1) jest i zbieżny.

2. Podobnie jak poprzednio, dla  $N > N_0$  mamy:

$$S_N^{(a)} = S_{N_0}^{(a)} + \sum_{n=N_0+1}^N a_n \geq S_{N_0}^{(a)} + \sum_{n=N_0+1}^N C b_n = S_{N_0}^{(a)} - C S_{N_0}^{(b)} + C S_N^{(b)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \infty,$$

więc  $S_N^{(a)}$  jest rozbieżny do nieskończoności.

#### Twierdzenie 3.3. Kryterium porównawcze (wersja graniczna)

Niech  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$  będą szeregami o wyrazach dodatnich i niech  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ . Wtedy:

1. Jeśli  $L < \infty$ , to:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty. \quad (90)$$

2. Jeśli  $L > 0$ , to:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty. \quad (91)$$

#### Dowód.

1. Jeśli  $L < \infty$ , to  $a_n \leq (L + 1) b_n$  dla dostatecznie dużych  $n$  i stosujemy Tw. 3.1.1.

2. Jeśli  $L > 0$ , to  $a_n \leq \frac{1}{2} L b_n$  DDDn (ew.  $a_n \leq 2 b_n$ , jeśli  $L = \infty$ ) i stosujemy Tw. 3.1.2.

### Twierdzenie 3.4. Kryterium D'Alemberta

Niech  $\forall_n a_n > 0$  i niech  $d_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ . Wtedy:

1.

$$\limsup d_n < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \quad (92)$$

2.

$$(\liminf d_n > 1 \vee \exists_k \forall_{n \geq k} : d_n \geq 1) \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty. \quad (93)$$

Ponadto, jeśli zachodzi poprzecznik implikacji, to  $a_n \not\rightarrow 0$ .

### Dowód.

1. Skoro  $\limsup d_n < 1$ , to  $d_n$  musi być ograniczony. Niech  $\lambda$  będzie taką liczbą, że  $1 > \lambda > \limsup d_n$ . Zauważmy, że może istnieć tylko skończona liczba wyrazów  $d_n$  większych lub równych  $\lambda$ , gdyż inaczej wybralibyśmy z nich podciąg zbieżny do granicy  $\geq \lambda$ , co przeczy założeniu, że  $\lambda < \limsup d_n$ . Zatem:

$$\exists_N \forall_{n \geq N} : d_n < \lambda.$$

Czyli:

$$\exists_N \forall_{n \geq N} : a_{n+1} < \lambda a_n.$$

Stąd, dla  $n > N$ :  $a_n < \frac{a_N}{\lambda^{n-N}} \lambda^n$ . Tak więc na mocy kryterium porównawczego ze zbieżnym szeregiem  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n$  ( $\lambda < 1$ ) szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest zbieżny.

2. Jeśli  $\liminf d_n > 1$ , to (używając podobnego rozumowania, jak poprzednio) istnieje  $\rho > 1$  t.j.  $d_n > \rho$ . Skoro tak, to DDDn:  $a_{n+1} > \rho a_n > a_n$  i  $a_n$ , jako rosnący ciąg o wyrazach dodatnich, nie może dążyć do 0. Podobnie, jeśli DDDn mamy  $d_n \geq 1$ , to  $a_{n+1} \geq a_n$  i znowu  $a_n$  nie może dążyć do 0.

### Uwagi.

1. Może być tak, że  $d_n \geq 1$  dla nieskończenie wielu  $n$ , a szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest zbieżny. Przykład:

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{(\frac{n}{2})^2}, & \text{gdy } n = 2k \\ \frac{1}{(\frac{n-1}{2})^2}, & \text{gdy } n = 2k+1 \end{cases}$$

2. Może być tak, że szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest zbieżny, ale  $\limsup d_n > 1$ .

Następne kryterium jest rozszerzeniem kryterium D'Alemberta:



**Twierdzenie 3.5. Kryterium Cauchy'ego**

TODO

**Twierdzenie 3.6.**

Załóżmy, że  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest szeregiem o wyrazach dodatnich ( $a_n > 0$ ). Wtedy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sup_{\substack{F \subseteq \mathbb{N} \\ |F| < +\infty}} \sum_{n \in F} a_n. \quad (94)$$

**Dowód.**

Oczywiście, skoro  $S_N$  jest rosnący, to  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \sup_{N \in \mathbb{N}} S_N$ . Łatwo widzieć też, że  $\sup_{N \in \mathbb{N}} S_N \leq \sup_{\substack{F \subseteq \mathbb{N} \\ |F| < +\infty}} \sum_{n \in F} a_n$  (ponieważ  $S_N$  to suma tego samego typu, co po prawej stronie z  $F = \{1, \dots, N\}$ ). Dodatkowo, dla każdego skończonego  $F \subseteq \mathbb{N}$ , istnieje takie  $N$ , że  $\forall_{n \in F} n \leq N$ , zatem  $\sum_{n \in F} a_n \leq S_N$ . Ostatecznie mamy  $\sup_{\substack{F \subseteq \mathbb{N} \\ |F| < +\infty}} \sum_{n \in F} a_n \leq \sup_{N \in \mathbb{N}} S_N$ , stąd te dwie wielkości są sobie równe i mamy tezę.

Wynikają z tego następujące wnioski:

**Twierdzenie 3.7.**

1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \iff \exists C > 0 \forall_{F \subseteq \mathbb{N}, |F| < +\infty} \sum_{n \in F} a_n \leq C$$

(Zbiór wszystkich sum elementów o indeksach pochodzących ze SKOŃCZONEGO podzbioru  $\mathbb{N}$  jest ograniczony)

2. Jeśli  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  jest bijekcją (permutacją indeksów), to:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Oznacza to, że zmiana kolejności sumowania nie wpływa na wynik.

3. Jeśli:

$$\mathbb{N} = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad (\text{jest to suma rozłączna, tj. } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ dla } i \neq j)$$

i:

$$S_i = \sum_{n \in A_i} a_n,$$

to:

$$\sum_{i=1}^{\infty} S_i = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Jest to grupowania (łączności i przemienności) dla szeregu.

**Dowód.**

1. Ograniczoność sum po prawej jest oczywiście równoważne istnieniu skończonego ich supremum, co równe jest sumie po lewej.
2.  $\sigma$  zachowuje klasę skończonych podzbiorów i wyznacza bijekcję:

$$\sigma : 2^{\mathbb{N}} \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$$

$$\sigma(F) = \{\sigma(n) \mid n \in F\},$$

która zachowuje moc zbioru  $F$  i przeprowadza zbiory skończone na skończone. Zatem:

$$\left\{ \sum_{n \in F} a_n \mid F \subset \mathbb{N}, |F| < \infty \right\} = \left\{ \sum_{n \in \sigma(F)} a_n \mid F \subset \mathbb{N}, |F| < \infty \right\},$$

więc:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sup \left\{ \sum_{n \in F} a_n \mid F \subset 2^{\mathbb{N}} \right\} = \sup \left\{ \sum_{n \in \sigma(F)} a_n \mid F \subset \mathbb{N}, |F| < \infty \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$$

3. a) Jeśli  $\exists j : S_j = \infty$ , to:

$$\sum_{i=1}^{\infty} S_i = \infty$$

i:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \geq \sum_{n \in A_j} a_n = \infty.$$

Stąd:

$$\sum_{i=1}^{\infty} S_i = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

- b) Niech  $\forall i : S_i < \infty$ . Ustalmy  $\varepsilon > 0$  i weźmy dowolny:

$$K \subset \mathbb{N}, \quad |K| < \infty.$$

Przypomnijmy:

$$\sum_{i=1}^{\infty} S_i = \sup_{\substack{K \subset \mathbb{N}, \\ |K| < \infty}} \sum_{j \in K} S_j.$$

Niech  $K = \{i_1, i_2, \dots, i_l\}$  i wybierzmy:

$$C_1 \subseteq A_{i_1}, C_2 \subseteq A_{i_2}, \dots, C_l \subseteq A_{i_l},$$

takie, że:

$$\forall j : \sum_{n \in C_j} a_n \geq S_{i_j} - \frac{\varepsilon}{l},$$

co jest możliwe, gdyż  $S_{i_j}$  jest supremum sum po skończonych podzbiorach. Jeśli  $A_{i_j}$  jest skończony, możemy przyjąć  $C_j = A_{i_j}$ .

Wtedy:

$$\sum_{i \in K} S_i = S_{i_1} + S_{i_2} + \dots + S_{i_l} \leq \left( \sum_{n \in C_1} a_n + \frac{\varepsilon}{l} \right) + \left( \sum_{n \in C_l} a_n + \frac{\varepsilon}{l} \right) + \dots + \left( \sum_{n \in C_l} a_n + \frac{\varepsilon}{l} \right) = \varepsilon + \sum_{n \in \bigcup_{j=1}^l C_j} a_n.$$

NB:  $\bigcup_{j=1}^l C_j$  jest zbiorem skończonym, więc:

$$\sum_{i \in K} S_i \leq \varepsilon + \sup_{\substack{F \subset \mathbb{N} \\ |F| < +\infty}} \sum_{n \in F} a_n = \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Rozumowanie to przeprowadziliśmy dla dowolnego  $K$  i  $\varepsilon$ , więc:

$$\sum_{i=1}^{\infty} S_i = \sup_{\substack{K \subset \mathbb{N} \\ |K| < \infty}} \sum_{i \in K} S_i \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

W drugą stronę, weźmy  $F \subset \mathbb{N}$ ,  $|F| < \infty$  i niech:

$$K = \{i \in \mathbb{N} \mid A_i \cap F \neq \emptyset\},$$

wtedy  $|K| < \infty$ , bo  $F$  jest skończony, a  $A_j$  są rozłączne. Wtedy mamy:

$$\sum_{n \in F} a_n = \sum_{i \in K} \sum_{n \in A_i \cap F} a_n \leq \sum_{i \in K} \sum_{n \in A_i} a_n = \sum_{i \in K} S_i.$$

Z tego:

$$\sum_{n \in F} a_n \leq \sum_{i \in K} S_i \leq \sup_{\substack{K \subset \mathbb{N} \\ |K| < \infty}} \sum_{i \in K} S_i = \sum_{i=1}^{\infty} S_i,$$

co zachodzi dla dowolnego  $F$  skończonego. Zatem:

$$\sup_{\substack{F \subset \mathbb{N} \\ |F| < \infty}} \sum_{n \in F} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{i=1}^{\infty} S_i.$$

Porównując dwie otrzymane nierówności, otrzymujemy tezę.

### 3.2 Szeregi o wyrazach dowolnych

W tej podsekcji rozważamy szeregi o dowolnych wyrazach zespolonych:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n, \quad z_n \in \mathbb{C}.$$

### Twierdzenie 3.8. Kryterium zbieżności bezwzględnej

Jeśli następujący szereg jest zbieżny:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < +\infty$$

to i:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

jest zbieżny.

### Dowód.

Korzystamy z warunku Cauchy'ego dla szeregu modułów:

$$\forall \varepsilon \exists N_\varepsilon \forall n > m \geq N_\varepsilon : \left| \sum_{k=m+1}^n |z_k| \right| \leq \varepsilon,$$

ale:

$$\left| \sum_{k=m+1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |z_k|,$$

więc:

$$\forall \varepsilon \exists M_\varepsilon = N_\varepsilon \forall n > m \geq M_\varepsilon : \left| \sum_{k=m+1}^n z_k \right| \leq \varepsilon.$$

To dowodzi, że warunek Cauchy'ego zachodzi dla  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ , zatem jest to szereg zbieżny.

### Definicja 3.2. Zbieżność bezwzględna

- Szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  nazywamy zbieżnym bezwzględnie, jeśli szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$  jest zbieżny.
- Jeśli szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  jest zbieżny, ale  $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$  już nie, to szereg nazywamy zbieżnym warunkowo.

Dla szeregów o wyrazach dowolnych obowiązują inne kryteria zbieżności niż dla szeregów o wyrazach dodatnich. Jednym z nich, jest:

### Twierdzenie 3.9. Kryterium Dirichleta

Założmy, że:

- Mamy ciągi:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad a_n \in \mathbb{C}$$
$$(b_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad b_n \in \mathbb{R}, \quad b_n \geq 0$$

- $b_n$  zbiega monotonicznie do 0.
- Ciąg sum częściowych wyrazów  $(a_n)$  jest ograniczony:

$$\exists C \in \mathbb{R} \forall N \in \mathbb{N} : \left| \sum_{n=1}^N a_n \right| \leq C.$$

Wtedy szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  jest zbieżny.

**Uwaga!** W kryterium tym wystarczy, żeby  $b_n$  był nierosnący (i.e. nie trzeba, by był on ściśle malejący).

**Przykład - szeregi naprzemienne.** Weźmy szereg postaci:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n,$$

gdzie  $b_n \searrow 0$  (dąży monotonicznie z góry do 0). Szereg taki nazywamy szeregiem naprzemiennym. Z kryterium Dirichleta wynika, że każdy szereg takiej postaci jest zbieżny (co nazywa się czasem kryterium Leibnitza). W szczególności:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln 2.$$

#### Dowód kryterium Dirichleta.

Niech  $\sum_{n=1}^N a_n = z_N$ . Zauważmy, że  $(z_N)$  jest ciągiem ograniczonym. Zapiszmy sumy częściowe docelowego szeregu:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N a_n b_n &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_N b_N = z_1 b_1 + (z_2 - z_1) b_2 + \dots + (z_N - z_{N-1}) b_N = \\ &= z_1 (b_1 - b_2) + z_2 (b_2 - b_3) + \dots + z_{N-1} (b_{N-1} - b_N) + z_N b_N. \end{aligned}$$

Zauważmy, że wyraz  $z_N b_N$  jest zbieżny do 0 (jako iloczyn czynnika ograniczonego i czynnika dążącego do 0). Zajmijmy się więc otrzymaną sumą. Zauważmy, że zachodzi:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |z_n (b_n - b_{n+1})| &= \sum_{n=1}^{\infty} |z_n| (b_n - b_{n+1}) \leq C \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) = \\ &= C \lim_{N \rightarrow \infty} (b_1 - b_{N+1}) = C b_1 < +\infty \end{aligned}$$

Zatem szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n (b_n - b_{n+1})$  jest zbieżny bezwzględnie, a więc i zbieżny. Z tego i z równości:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} z_n (b_n - b_{n+1}) + \lim_{n \rightarrow \infty} z_n b_n,$$

Wynika, że szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  musi być zbieżny.

Kolejnym kryterium zbieżności dla szeregów o wyrazach dowolnych jest prosto wynikające z kryterium Dirichleta tzw.:

### Twierdzenie 3.10. Kryterium Abela

Jeśli:

- mamy ciągi:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad a_n \in \mathbb{C}$$

$$(b_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad b_n \in \mathbb{R}$$

- $b_n$  jest monotoniczny i ograniczony,

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest zbieżny.

Wtedy szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  jest zbieżny.

### Dowód.

Oczywiście  $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  istnieje. Wtedy:

$$\sum_{n=1}^N a_n b_n = \sum_{n=1}^N a_n (b_n - b) + b \sum_{n=1}^N a_n.$$

Szereg  $b \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest oczywiście zbieżny na mocy założenia. Za to  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (b_n - b)$  jest zbieżne na mocy kryterium Dirichleta, zauważmy bowiem, że:

$$\sum_{n=1}^N a_n (b_n - b) = \text{sign}(b_n - b) \sum_{n=1}^N a_n |b_n - b|,$$

ale  $|b_n - b| \searrow 0$  na mocy założenia, a sumy częściowe  $|\sum_{n=1}^N a_n|$  muszą być ograniczone, gdyż są zbieżne. Warunki kryterium Dirichleta są więc spełnione. Ostatecznie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (b_n - b) + b \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Wszystkie składniki po prawej są zbieżne, zatem szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  także musi być zbieżny.

**Grupowanie składników** Zajmijmy się teraz kwestią grupowania składników w szeregach o wyrazach dowolnych i kiedy taka operacja nie zmienia wartości szeregu. Prowadźmy jednak trochę

notacji.

### Definicja 3.3. Rozbicie na wyrazy dodatnie

Dla szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  definiujemy następujące ciągi:

- $a_n = \operatorname{Re}(z_n)$
- $b_n = \operatorname{Im}(z_n)$
- $a_n^+ = \max\{0, a_n\}$
- $a_n^- = -\min\{0, a_n\}$
- $b_n^+ = \max\{0, b_n\}$
- $b_n^- = -\min\{0, b_n\}$

Jasnym jest, że:

$$z_n = a_n^+ - a_n^- + i b_n^+ - i b_n^-$$

oraz:

$$0 \leq a_n^+, a_n^-, b_n^+, b_n^- \leq |z_n|.$$

Z ostatniej nierówności wynika (kryterium porównawcze), że jeśli szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$  jest zbieżny, to i szeregi  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^+$  muszą być zbieżne. Wtedy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- + i \sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ - i \sum_{n=1}^{\infty} b_n^-,$$

jako że:

$$\sum_{n=1}^N z_n = \sum_{n=1}^N a_n^+ - \sum_{n=1}^N a_n^- + i \sum_{n=1}^N b_n^+ - i \sum_{n=1}^N b_n^-,$$

Z tego wynika następujący wniosek:

### Twierdzenie 3.11. Grupowanie szeregów zbieżnych bezwzględnie

Niech szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  będzie zbieżny bezwzględnie. Wtedy:

1. Jeśli  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  jest bijekcją (permutacją indeksów), to:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} z_n.$$

Oznacza to, że zmiana kolejności sumowania nie wpływa na wynik.

2. Jeśli:

$$\mathbb{N} = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} A_j$$

i:

$$S_j = \sum_{n \in A_j} z_n,$$

to  $\sum_{j=1}^{\infty} S_j$  jest zbieżny bezwzględnie i:

$$\sum_{j=1}^{\infty} S_j = \sum_{n=1}^{\infty} z_n.$$

Są to prawa grupowania dla szeregów o wyrazach dowolnych, analogiczne do tych, które zachodzą dla szeregów o wyrazach dodatnich.

### Dowód.

1. Mamy następujące równości:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} z_{\sigma(n)} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}^- + i \sum_{n=1}^{\infty} b_{\sigma(n)}^+ - i \sum_{n=1}^{\infty} b_{\sigma(n)}^- = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- + i \sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ - i \sum_{n=1}^{\infty} b_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \end{aligned}$$

W 2 równości korzystamy z analogicznego prawa dla zbieżnych szeregów dodatnich.

Oczywiście, jako że  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  jest zbieżny bezwzględnie, to mamy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |z_{\sigma(n)}|,$$

więc permutacja szeregu zbieżnego bezwzględnie jest także zbieżna bezwzględnie.

2. Mamy:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |S_j| = \sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{n \in A_j} z_n \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n \in A_j} |z_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < +\infty.$$



Widzimy więc, że  $\sum_{j=1}^{\infty} S_j$  jest także zbieżny bezwzględnie. Jako że  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  jest zbieżny bezwzględnie, więc tym bardziej jego podszeregi muszą być zbieżne bezwzględnie. Możemy więc zapisać:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N S_j &= \sum_j \sum_{n \in A_j} z_n = \sum_{j=1}^N \left( \sum_{n \in A_j} a_n^+ - \sum_{n \in A_j} a_n^- + i \sum_{n \in A_j} b_n^+ - i \sum_{n \in A_j} b_n^- \right) = \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{n \in A_j} a_n^+ - \sum_{j=1}^N \sum_{n \in A_j} a_n^- + i \sum_{j=1}^N \sum_{n \in A_j} b_n^+ - i \sum_{j=1}^N \sum_{n \in A_j} b_n^-. \end{aligned}$$

Każdy z szeregów po prawej stronie jest szeregiem zbieżnym o wyrazach dodatnich. Biorąc granicę  $N \rightarrow \infty$  otrzymamy więc:

$$\sum_{j=1}^{\infty} S_j = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n \in A_j} a_n^+ - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n \in A_j} a_n^- + i \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n \in A_j} b_n^+ - i \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n \in A_j} b_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} z_n,$$

co wynika z odpowiednich twierdzeń dla szeregów dodatnich.

## 4 Przestrzenie metryczne

### 4.1 Podstawowe definicje. Otwartość i domkniętość

Zmienimy teraz temat, odchodząc od analizy zbieżności w liczbach zespolonych i rozpoczniemy rozważania o temacie znacznie bardziej ogólnym, mianowicie o przestrzeniach z metrykami, będących uogólnieniem znanego pojęcia odległości w  $\mathbb{C}$ .

#### Definicja 4.1. Metryka

Ustalmy  $X$  będące dowolnym niepustym zbiorem. Funkcję:

$$d : X \times X \rightarrow [0; +\infty[$$

nazywamy **metryką**, jeśli spełnia następujące aksjomaty:

1.

$$\forall_{x,y \in X} : d(x,y) = d(y,x),$$

2.

$$\forall_{x,y \in X} : d(x,y) = 0 \iff x = y,$$

3.

$$\forall_{x,y,z \in X} : d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$$

O metryce myśleć można, jako o funkcji zwracającej "odległość" między dwoma elementami w zbiorze  $X$ . Podane aksjomaty zapewniają, że nasza metryka spełniać będzie "zdraworozsądkowe" własności odległości. 1. nakłada warunek symetryczności na metrykę - odległość z  $x$  do  $y$  musi być równa odległości z  $y$  do  $x$ . 2. normalizuje metrykę, mówiąc, że punkt jest odległy o 0 od samego siebie i **tylko** od samego siebie. 3. to tak zwana **nierówność trójkąta** - dodając na drodze między dwoma punktami trzeci punkt nie można odległości skrócić.

#### Definicja 4.2. Przestrzeń metryczna

Parę  $(X, d)$  - gdzie  $X$  to niepusty zbiór, a  $d : X \times X \rightarrow [0; +\infty[$  to metryka - nazywamy **przestrzenią metryczną**.

**Przykłady** Pokażemy parę przykładów przestrzeni metrycznych, aby dać pojęcie, jak mogą one wyglądać.

- $X = \mathbb{R}$   $d(x, y) = |x - y|$  - jest to odległość między dwiema liczbami rzeczywistymi, z której korzystaliśmy np. przy definicji granicy ciągu.
- $X = \mathbb{R}^v$ , gdzie  $v \in \mathbb{N}$  jest wymiarem przestrzeni,

$$d_p(x, y) = \left( \sum_{n=1}^v |x_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Podstawiając za  $p$  różne wartości możemy otrzymać wiele alternatywnych metryk. Np. dla  $p = 1$  otrzymujemy tzw. **metrykę Manhattanu**:

$$d_1(x, y) = \sum_{n=1}^v |x_n - y_n|.$$

Nazwa pochodzi od tego, że jest to odległość jaką trzeba pokonać między dwoma punktami, mogąc przemieszczać się tylko równolegle do osi współrzędnych - tak jak na Manhattanie, gdzie ulice są do się prostopadłe.

Dla  $p = 2$  otrzymujemy znaną **odległość Euklidesową**:

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{n=1}^v (x_n - y_n)^2}.$$

- $X = \mathbb{R}^v$ ,

$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq n \leq v} |x_n - y_n|.$$

Jest to tak zwana **metryka maximum**. Indeks  $\infty$  wziął się z faktu, że o  $d_\infty$  myśleć można o jako o granicy  $d_p$  dla  $p \rightarrow \infty$ , mamy bowiem:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=1}^v a_n^p \right)^{\frac{1}{p}} = \max_{1 \leq n \leq v} a_n.$$

- Dla dowolnego zbioru  $X$  definiujemy **metrykę dyskretną**:

$$d(x, y) = \delta_{x,y} = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & x \neq y \end{cases}. \quad (95)$$

- Niech  $X$  będzie zbiorem funkcji klasy  $C^0$  (tj, funkcji ciągłych) z  $[0; 1]$  na  $\mathbb{C}$ . Wtedy za odległość między dwiema funkcjami przyjąć możemy:

$$d(f, g) = \sup_{x \in [0; 1]} |f(x) - g(x)|. \quad (96)$$

- Dla  $X$  takiego samego jak w poprzednim punkcie można określić także:

$$d_p(f, g) = \left( \int_0^1 |f(x) - g(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (97)$$

#### Definicja 4.3. Zbieżność w przestrzeni metrycznej

Niech  $(X, d)$  będzie przestrzenią metryczną i niech  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  będzie ciągiem elementów z  $X$ . Powiemy, że  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  jest zbieżny do  $g \in X$ , jeśli:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq N_\varepsilon : d(x_n, g) < \varepsilon, \quad (98)$$

co możemy alternatywnie zapisać, jako:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, g) = 0. \quad (99)$$

Oczywiście jeśli  $x_n \rightarrow g$  i  $x_n \rightarrow g'$ , to  $g = g'$  - co wynika z faktu, że jedynym elementem odległym o 0 od  $g$  jest  $g$ . Ponadto jeśli  $x_n \rightarrow g$  to każdy podciąg  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  także dąży do  $g$ :  $x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} g$ .

**Definicja 4.4. Równoważność metryk**

Niech  $d$  i  $\delta$  będą metrykami na  $X$ . Powiemy, że  $d$  i  $\delta$  są równoważne, jeśli:

$$\exists C_1, C_2 \in \mathbb{R} : \forall x, y \in X : C_1 d(x, y) \leq \delta(x, y) \leq C_2 d(x, y). \quad (100)$$

Łatwo widać, że jest to relacja symetryczna, przechodnia i zwrotna.

**Przykład** Metryk  $d_p$  i  $d_\infty$  na  $\mathbb{R}^n$  są równoważne, albowiem:

$$d_\infty(x, y) = \max_i |x_i - y_i| \leq d_p(x, y) = \left( \sum_{n=1}^n |x_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (101)$$

Ponadto:

$$d_p(x, y)^p \leq n d_\infty(x, y)^p \implies d_p(x, y) \leq n^{\frac{1}{p}} d_\infty(x, y) \quad (102)$$

Wystarczy więc wziąć  $C_1 = 1$  i  $C_2 = n^{\frac{1}{p}}$ .

**Obserwacja 4.1.**

Jeśli  $d$  i  $\delta$  są równoważne, to  $x_n \rightarrow g$  w  $(X, d) \iff x_n \rightarrow g$  w  $(X, \delta)$ .

**Definicja 4.5. Warunek Cauchy'ego**

Powiemy, że ciąg  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  spełnia **warunek Cauchy'ego** (i.e. że jest **ciągami Cauchy'ego**), jeśli:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall (m, n \geq N_\varepsilon) : d(x_m, x_n) \leq \varepsilon. \quad (103)$$

**Definicja 4.6. Przestrzeń zupełna**

Powiemy, że przestrzeń  $(X, d)$  jest **zupełna** jeśli każdy ciąg Cauchy'ego w tej przestrzeni jest zbieżny.

Zauważmy, że  $(\mathbb{R}, d_2)$  (czyli liczby rzeczywiste ze standardową metryką Euklidesową) to przestrzeń zupełna, co udowodniliśmy.  $(\mathbb{Q}, d_2)$  nie jest przestrzenią zupełną (gdyż np. ciąg kolejnych przybliżeń dziesiętnych  $\sqrt{2}$  spełnia warunek Cauchy'ego, jednak nie ma w  $\mathbb{Q}$  granicy).

**Definicja 4.7. Kule**

Niech  $(X, d)$  - p-ń metryczna. Wtedy **kulą (otwartą)** o środku  $x_0 \in X$  i promieniu  $r \in \mathbb{R}_+$  nazywamy zbiór:

$$\text{Ball}(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}. \quad (104)$$

**Definicja 4.8. Punkty wewnętrzne**

Niech  $(X, d)$  - p-ń metryczna,  $A \subseteq X$  i  $a \in A$ . Powiemy, że  $a$  jest **punktem wewnętrznym**  $A$ , jeśli:

$$\exists r > 0 : \text{Ball}(a, r) \subseteq A. \quad (105)$$

Widzimy więc, że jeśli  $a$  jest punktem wewnętrznym  $A$ , to znajduje się w  $A$  razem z pewną kulą wokół siebie - można potocznie sobie więc wyobrazić, że  $a$  nie może być na "brzegu"  $A$ .

#### Definicja 4.9. Zbiór otwarty

Powiemy, że  $A$  jest **otwarty** (w ustalonej  $p$ -ń metrycznej  $(X, d)$ ), jeśli każdy jego punkt jest punktem wewnętrznym:

$$\forall a \in A \exists r > 0 : \text{Ball}(a, r) \subseteq A. \quad (106)$$

Dla ustalonej przestrzeni metrycznej zdefiniujemy  $\mathcal{T}$  jako rodzinę wszystkich zbiorów otwartych w tej przestrzeni. Wprowadzimy też zapis:

$$U \underset{\text{otw.}}{\subseteq} X, \quad (107)$$

jeśli  $U$  jest otwartym podzbiorem  $X$  (i.e. jeśli  $U \in \mathcal{T}$ ).

#### Twierdzenie 4.1. Własności $\mathcal{T}$

1.  $\emptyset \in \mathcal{T}$  oraz  $X \in \mathcal{T}$ .
2.  $U, V \in \mathcal{T} \implies U \cap V \in \mathcal{T}$ . Inaczej mówiąc (rozszerzywszy łatwo twierdzenie za pomocą indukcji), skończony iloczyn zbiorów otwartych jest otwarty.
3.  $\{U_i\}_{i \in I}$  - rodzina zbiorów otwartych. Wtedy

$$\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}. \quad (108)$$

Zauważmy, że nie zakładamy, że jest to skończona (ani nawet przeliczalna) rodzina.

#### Dowód.

1. Prawdziwym jest zdanie, że dla każdego elementu należącego do  $\emptyset$  jest on punktem wewnętrznym. Ponadto:

$$\forall x \in X, r > 0 \text{Ball}(x, r) \subseteq X, \quad (109)$$

co wynika za samej definicji Ball.

2. Skoro  $U, V$  są otwarte, to dla każdego  $x \in U \cap V$  istnieją  $r_1$  i  $r_2$  takie, że:

$$\text{Ball}(x, r_1) \in U, \quad \text{Ball}(x, r_2) \in V.$$

Wtedy jednak:

$$\text{Ball}(x, \min\{r_1, r_2\}) \in U, \quad \text{Ball}(x, \min\{r_1, r_2\}) \in V.$$

Wystarczy więc wziąć  $r = \min\{r_1, r_2\}$

3. Dla każdego  $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$  mamy  $i \in I$  takie, że  $x \in U_i$ . Wtedy jednak istnieje takie  $r$ , że  $\text{Ball}(x, r) \in U_i$ , przeto  $\text{Ball}(x, r) \in \bigcup_{i \in I} U_i$ .

#### Twierdzenie 4.2.

Kula otwarta jest otwarta.

**Dowód.**

Istotnie, jeśli niech  $y \in \text{Ball}(x, r)$ . Wtedy  $d(x, y) < r$ . Zauważmy, że  $\text{Ball}(y, r - d(x, y)) \subseteq \text{Ball}(x, r)$ , bowiem jeśli  $z \in \text{Ball}(y, r - d(x, y))$ , to  $d(z, y) < r - d(x, y)$ , zatem:

$$d(z, x) < d(z, y) + d(y, x) < r,$$

czyli  $z \in \text{Ball}(x, r)$ .

**Definicja 4.10. Punkt skupienia**

Niech  $(X, d)$  - p-ń metryczna i  $A \subseteq X$ , wtedy punkt  $x \in X$  nazwiemy **punktem skupienia**  $A$ , jeśli:

$$\forall_{r>0} : \text{Ball}(x, r) \cap A \neq \emptyset. \quad (110)$$

**Definicja 4.11. Zbiór domknięty**

Zbiór  $A$  nazwiemy **domkniętym** jeśli zawiera wszystkie swoje punkty skupienia. To znaczy:

$$\forall_{x \in X} [\forall_{r>0} : \text{Ball}(x, r) \cap A \neq \emptyset \implies x \in A]. \quad (111)$$

Podobnie jak  $\mathcal{T}$ , zdefiniujemy  $\mathcal{F}$  jako rodzinę wszystkich zbiorów domkniętych w danej przestrzeni. Będziemy również pisać:

$$U \underset{\text{domk.}}{\subseteq} X, \quad (112)$$

jeśli  $U$  jest domkniętym podzbiorem  $X$ .

**Definicja 4.12. Kula domknięta**

**Kulą domkniętą** o środku  $x_0 \in X$  i promieniu  $r \in \mathbb{R}_+$  nazwiemy zbiór:

$$\overline{\text{Ball}}(x, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) \leq r\}. \quad (113)$$

**Twierdzenie 4.3.**

Kula domknięta jest domknięta.

**Dowód.**

Niech  $y \notin \overline{\text{Ball}}(x, r)$ . Wtedy  $d(y, x) > r$ . Weźmy  $R = d(y, x) - r > 0$ . Wtedy  $\text{Ball}(y, R) \cap \overline{\text{Ball}}(x, r) = \emptyset$ . Albowiem, jeśli  $z \in \text{Ball}(y, R)$ , to  $d(z, y) < d(y, x) - r$ , zatem  $d(x, z) \geq d(x, y) - d(z, y) > r$ , czyli  $z \notin \overline{\text{Ball}}(x, r)$ .

**Twierdzenie 4.4. Dopełnienie zbioru otwartego jest domknięte**

Niech  $A \subseteq X$ .  $A$  jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy  $X \setminus A$  jest domknięty.

**Dowód.**

Mamy następujący ciąg równoważności:

$$(X \setminus A) - \text{domknięty} \iff (114)$$

$$\forall y \notin (X \setminus A) \exists r > 0 : \text{Ball}(y, r) \cap (X \setminus A) = \emptyset \iff (115)$$

$$\forall y \in A \exists r > 0 : \text{Ball}(y, r) \subseteq X \setminus (X \setminus A) = A \iff (116)$$

$$A - \text{otwarty} (117)$$

Zauważmy, że istnieją zbiory jednocześnie domknięte i otwarte. Na przykład w każdej przestrzeni metrycznej są to  $\emptyset$  oraz cała przestrzeń. W  $\mathbb{R}$  są to jedynie takie zbiory. Za to w przestrzeni dyskretniej, wszystkie zbiory mają tę własność.

**Twierdzenie 4.5.**

Zbiór  $A$  jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy  $A$  jest sumą kul.

**Dowód.**

$\implies$  Możemy wybrać sumę rodziny generowanej w ten sposób, że każdemu elementowi przypisujemy kulę mu odpowiadającą, która należy do  $A$ :

$$\forall y \in A \exists r(y) > 0 : \text{Ball}(y, r(y)) \subseteq A. (118)$$

Zatem:

$$A = \bigcup_{y \in A} \{y\} \subseteq \bigcup_{y \in A} \text{Ball}(y, r(y)) (119)$$

oraz:

$$\bigcup_{y \in A} \text{Ball}(y, r(y)) \subseteq A, (120)$$

więc:

$$A = \bigcup_{y \in A} \text{Ball}(y, r(y)) (121)$$

$\Leftarrow$  W drugą stronę sprawa jest jasna - suma każdej rodziny kul (i.e. zbiorów otwartych) będzie otwarta.

**Obserwacja 4.2. na temat  $\mathcal{F}$** 

1.  $\emptyset, X \in \mathcal{F}$ .
2.  $\mathcal{F} = \{X \setminus A \mid A \in \mathcal{T}\}$ .
3.  $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cup B \in \mathcal{F}$ . Inaczej mówiąc - skończony iloczyn zbiorów domkniętych jest domknięty.
4.  $\{V_i\}_{i \in I}$  - rodzina zbiorów domkniętych. Wtedy

$$\bigcap_{i \in I} V_i \in \mathcal{T}. (122)$$

Fakty te są oczywistą konsekwencją własności  $\mathcal{T}$  i prawa, które mówi, że dopełnienie zbioru otwartego jest domknięte.

Spójrzmy jeszcze na przykład, pokazujący, że w 3. własność ta zachodzi tylko dla sum skończonych:

$$]0, 1[ = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right].$$

#### Definicja 4.13. Wnętrze i domknięcie

Niech  $B \subseteq X$ .

**Wnętrzem** zbioru  $B$ , oznaczanym  $B^\circ$ , nazywamy zbiór wszystkich punktów wewnętrznych  $B$ .

**Domknięciem** zbioru  $B$ , oznaczanym  $\bar{B}$ , nazywamy zbiór punktów skupienia  $B$ .

Innymi słowy:

$$x \in B^\circ \iff \exists r : \text{Ball}(x, r) \subseteq B. \quad (123)$$

$$x \in \bar{B} \iff \forall r : \text{Ball}(x, r) \cap B \neq \emptyset. \quad (124)$$

#### Obserwacja 4.3.

$$B^\circ \subseteq B \subseteq \bar{B} \quad (125)$$

#### Obserwacja 4.4.

- $B$  - otwarty  $\iff B^\circ = B$ .
- $B$  - domknięty  $\iff \bar{B} = B$ .

#### Twierdzenie 4.6.

$$X \setminus \bar{B} = (X \setminus B)^\circ \quad (126)$$

lub

$$\bar{B} = X \setminus (X \setminus B)^\circ. \quad (127)$$

#### Dowód.

$$x \in X \setminus \bar{B} \iff x \text{ nie jest punktem skupienia } B \iff \exists r, \text{Ball}(x, r) \cap B = \emptyset \iff \exists r, \text{Ball}(x, r) \cap B \subseteq X \setminus B \iff x \in (X \setminus B)^\circ.$$

Powiemy teraz o bardzo ważnym twierdzeniu pozwalającym utożsamić punkty skupienia z granicami ciągów ze zbioru.

#### Twierdzenie 4.7.

Niech  $B \subseteq X$ . Wtedy domknięcie  $B$  to zbiór granic ciągów z  $B$ , tj.:

$$\bar{B} = \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \mid (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \wedge \forall n, x_n \in B \right\}. \quad (128)$$



**Dowód.**

⊇ Dla każdego  $x \in \bar{B}$  zdefiniujmy ciąg  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  następująco - niech  $x_n$  to dowolny element należący do  $\text{Ball}(x, \frac{1}{n}) \cap B$  (jest to zbiór zawsze niepusty na mocy tego, że  $x$  jest punktem skupienia  $B$ ). Oczywiście  $x_n \rightarrow x$ , gdyż  $d(x_n, x) < \frac{1}{n} \rightarrow 0$ .

⊆ Odwrotnie, jeśli  $x_n \rightarrow x$  i  $\forall_n : x_n \in B$ , to:

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{N_\varepsilon} \forall_{n \geq N_\varepsilon} : B \ni x_n \in \text{Ball}(x, \varepsilon) \implies \forall_{\varepsilon > 0} \text{Ball}(x, \varepsilon) \cap B \neq \emptyset, \quad (129)$$

skąd mamy  $x \in \bar{B}$ .

**Definicja 4.14. Ograniczoność**

Powiemy, że  $B \subseteq X$  jest **ograniczony**, jeśli:

$$\exists_{x \in X, r > 0} : B \subseteq \text{Ball}(x, r). \quad (130)$$

**Definicja 4.15. Gęstość**

Powiemy, że  $A \subseteq X$  jest **gęsty** w  $B \subseteq X$ , jeśli:

$$B \subseteq \bar{A}. \quad (131)$$

Uwaga! Mówiąc po prostu, że zbiór jest gęsty, mamy na myśli, że jest gęsty w  $X$ .

**Przykład**  $\mathbb{Q}$  jest gęsty w  $\mathbb{R}$ .

**Definicja 4.16. Otoczenie**

$A \subseteq X$  jest otoczeniem punktu  $x \in X$ , jeśli:

$$\exists_{U \subseteq X \atop \text{otw.}} : x \in U \subseteq A. \quad (132)$$

Warunek ten jest równoważny temu, że  $x \in A^\circ$ .

Dla danego punktu rodzinę wszystkich jego otoczeń oznaczajmy  $\mathcal{N}(x)$ :

$$\mathcal{N}(x) = \{A \in \mathcal{P}(X) = 2^X \mid x \in A^\circ\}. \quad (133)$$

**Twierdzenie 4.8.**

Niech  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  będzie ciągiem elementów  $X$ . Wtedy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \iff \forall_{A \in \mathcal{N}(x)} \exists_{N_A \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq N_A} : x_n \in A. \quad (134)$$

**Dowód.**

$\Leftarrow$  Weźmy  $A_\varepsilon \text{Ball}(x, \varepsilon)$ . Wtedy:

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{N_\varepsilon} \forall_{n \geq N_\varepsilon} : x_n \in \text{Ball}(x, \varepsilon) \implies d(x_n, x) < \varepsilon. \quad (135)$$

implies  $x_n$  zbiega do  $x$ , zatem:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \forall n \geq N_\varepsilon : d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Mamy też:

$$A \in \mathcal{N}(x) \implies \exists \varepsilon : \text{Ball}(x, \varepsilon) \subseteq A.$$

Wystarczy więc wziąć  $N_A = N_\varepsilon$ . Wtedy będzie:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \forall n \geq N_\varepsilon : (d(x_n, x) < \varepsilon \wedge \text{Ball}(x, \varepsilon) \subseteq A) \implies x_n \in A. \quad (136)$$

Twierdzenie to mówi nie mniej, nie więcej niż to, że jeśli ciąg zbiega do jakiegoś punktu, to w każdym otoczeniu tego punktu znajdują się prawie wszystkie wyrazy tego ciągu.

#### Twierdzenie 4.9.

Niech  $(X, d)$  - p-ń. metryczna, niech  $Y \subseteq X$  i niech  $d_Y = d|_{Y \times Y}$  będzie obcięciem  $d$  do  $Y$ . Wtedy:

1.  $A \subseteq Y$  jest otwarty w  $(Y, d_Y) \iff \exists_{\substack{U \subseteq X \\ \text{otw.}}} : A = Y \cap U.$
2.  $A \subseteq Y$  jest domknięty w  $(Y, d_Y) \iff \exists_{\substack{F \subseteq X \\ \text{domk.}}} : A = Y \cap F.$

Twierdzenie to daje nam pojęcie o tym, jak wyglądają zbiory otwarte i domknięte w jakimś zawężeniu metryki - mianowicie są to zawężenia odpowiednich zbiorów otwartych i domkniętych.

#### Dowód.

Zacniemy od dowodu 2.

$\implies$  Niech  $A$  domknięty w  $Y$  i niech  $F$  będzie domknięciem  $A$  w  $X$  (więc  $F$  musi być domknięty w  $X$ ). Wtedy:

$$F = \{ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in X \mid a_n \in A \},$$

za to:

$$A = \{ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in Y \mid a_n \in A \},$$

gdyż  $A$  jest domknięty w  $Y$ . Widzimy z tych definicji łatwo, że  $A = F \cap Y$ .

$\Leftarrow$  W drugą stronę, niech  $A = Y \cap F$  i  $F$  będzie domknięty w  $X$ . Niech  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  będzie ciągiem w  $A$  (więc i w  $F$ ), zbiegającym do  $g$ . Wtedy  $g \in F$ . Zatem jeśli  $g \in Y$ , to  $g \in A$ , z konstrukcji  $A$ . Pokazaliśmy więc, że każdy ciąg z  $A$  zbieżny w  $Y$  ma granicę w samym  $A$ , zatem  $A$  jest domknięty.

2.  $\implies$  1. Pokażemy teraz, jak z 2. wynika 1. Mamy bowiem ciąg następujących równoważności:

$$A \subseteq Y \text{ jest otwarty w } Y \iff Y \setminus A \text{ jest domknięty w } Y \iff \exists_{\substack{F \subseteq X \\ \text{domk.}}} : Y \setminus A = Y \cap F \iff$$

$$\exists_{\substack{F \subseteq X \\ \text{domk.}}} : A = Y \cap (X \setminus F) \iff \exists_{\substack{U \subseteq X \\ \text{otw.}}} : A = Y \cap U.$$

Przedostatnia równoważność, wynika z faktu, że jeśli  $Y \setminus A = Y \cap F$ , to  $A = Y \setminus (Y \cap F) = Y \setminus F = Y \cap (X \setminus F)$  (pamiętamy, że  $Y \subseteq X$ ). Ostatnia równoważność jest konsekwencją tego, że dopełnienie zbioru domkniętego jest otwarte (Tw. 4.1).

## 4.2 Przekształcenia ciągłe

Zacniemy rozważać teraz przekształcenia (i.e. funkcje) pomiędzy przestrzeniami metrycznymi i wyróżnimy wśród nich szczególnie ważną klasę funkcji ciągłych.

### Twierdzenie 4.10. Warunki ciągłości

Niech  $(X, d)$  i  $(Y, \delta)$  będą przestrzeniami metrycznymi, a  $\varphi : X \rightarrow Y$  przekształceniem między nimi. Ustalmy też  $x_0 \in X$ . Wtedy następujące warunki są równoważne:

$$1. \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \lambda_\varepsilon > 0 \forall x \in X : d(x, x_0) < \lambda_\varepsilon \implies \delta(\varphi(x), \varphi(x_0)) < \varepsilon. \quad (137)$$

$$2. \quad \forall U \in \mathcal{N}(\varphi(x_0)) \exists V \in \mathcal{N}(x_0) : \varphi(V) \subseteq U. \quad (138)$$

$$3. \quad \forall U \in \mathcal{N}(\varphi(x_0)) : \varphi^{-1}(U) \in \mathcal{N}(x_0). \quad (139)$$

(Przypominamy, że  $\varphi^{-1}(U)$  to w przeciwobraz  $U$ ).

4. Jeśli  $x_n \rightarrow x_0$  w  $(X, d)$ , to  $\varphi(x_n) \rightarrow \varphi(x_0)$  w  $(Y, \delta)$ .

### Dowód.

1.  $\implies$  2. Dla dowolnego  $U \in \mathcal{N}(\varphi(x_0))$  istnieje  $\varepsilon > 0$ :

$$\text{Ball}(\varphi(x_0), \varepsilon) \subseteq U.$$

Z 1. weźmy więc  $\lambda_\varepsilon$  spełniające podaną implikację i  $V = \text{Ball}(x_0, \lambda_\varepsilon)$ . Wtedy:

$$\varphi(x \in V) \in \text{Ball}(\varphi(x_0), \varepsilon),$$

zatem:

$$\varphi(V) \subseteq \text{Ball}(\varphi(x_0), \varepsilon) \subseteq U.$$

2.  $\implies$  3. Weźmy dowolne  $U \in \mathcal{N}(\varphi(x_0))$ . Wtedy:

$$\exists V \in \mathcal{N}(x_0) : \varphi(V) \subseteq U,$$

i.e.  $V \subseteq \varphi^{-1}(U)$ . Ale skoro  $V \in \mathcal{N}(x_0)$ , to tym bardziej  $\varphi^{-1}(U) \in \mathcal{N}(x_0)$ , jako rozszerzenie  $V$ .

3.  $\implies$  4. Weźmy ciąg  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zbieżny do  $x_0$ . Niech  $U \in \mathcal{N}(\varphi(x_0))$ , skąd  $\varphi^{-1}(U) \in \mathcal{N}(x_0)$ . Zatem:

$$\exists N_U \forall n \geq N_U : x_n \in \varphi^{-1}(U),$$

z twierdzenia udowodnionego wcześniej. Ergo:

$$\forall U \in \mathcal{N}(\varphi(x_0)) \exists N_U \forall n \geq N_U : \varphi(x_n) \in U.$$

Zatem, z tego samego twierdzenia:

$$\varphi(x_n) \rightarrow \varphi(x_0).$$

4.  $\implies$  1. Dowodzimy nie wprost, że  $\neg 1. \implies \neg 4.$ . Zaprzeczeniem 1. jest:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \lambda \exists x_\lambda \in X : d(x_\lambda, x_0) < \lambda \wedge \delta(\varphi(x_\lambda), \varphi(x_0)) \geq \varepsilon.$$

Weźmy  $\lambda_n = \frac{1}{n}$  i na tej podstawie skonstruujemy ciąg  $x_n$  odpowiadających  $x_\lambda$  w powyższym stwierdzeniu dla odpowiednich  $\lambda$ . Wtedy musi być, że  $x_n \rightarrow x_0$ , gdyż  $d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$ , ale  $\varphi(x_n) \not\rightarrow \varphi(x_0)$ , gdyż  $\delta(\varphi(x_n), \varphi(x_0)) \geq \varepsilon \forall n$ . Zatem zachodzi  $\neg 4.$ .

#### Definicja 4.17. Odwzorowanie ciągłe

Odwzorowanie spełniające warunki 1. - 4. Twierdzenia 4.2 dla punktu  $x_0 \in X$  nazywamy **ciągłym** w  $x_0$  (w p-ń.  $(X, d)$ ). Jeśli odwzorowanie jest ciągłe w każdym punkcie przestrzeni, nazywamy je po prostu ciągłym.

Czasami, mając na myśli warunek 1., mówimy o tzw. zbieżności według Cauchy'ego, zaś o warunku 4. mówimy, jako zbieżności według Heinego.

#### Twierdzenie 4.11. Złożenie odwzorowań ciągłych jest ciągłe

Jeśli  $\varphi : X \rightarrow Y$  jest ciągłe w  $x_0 \in X$  i  $\Psi : Y \rightarrow Z$  jest ciągłe w  $\varphi(x_0)$ , to  $\Psi \circ \varphi : X \rightarrow Z$  jest ciągłe w  $x_0$ .

#### Dowód.

Korzystając np. z 4. warunku ciągłości, weźmy ciąg  $x_n \rightarrow x_0$ , wtedy  $\varphi(x_n) \rightarrow \varphi(x_0)$  z ciągłości  $\varphi$ . Ponadto  $\Psi(\varphi(x_n)) \rightarrow \Psi(\varphi(x_0))$  z ciągłości  $\Psi$ . Widzimy, więc prosto, że  $\Psi \circ \varphi$  musi być ciągłe.

#### Twierdzenie 4.12. Ciągłość na całej dziedzinie

$\varphi : X \rightarrow Y$  jest ciągłe na całym  $X$  wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall_{\substack{U \subseteq Y \\ \text{otw.}}} : \varphi^{-1}(U) \subseteq X. \quad (140)$$

Inaczej mówiąc, przekształcenie jest ciągłe na całej dziedzinie wtedy i tylko wtedy, gdy przeciobrazy zbiorów otwartych są otwarte.

#### Dowód.

$\implies$  Niech  $U \subseteq Y$  i  $x \in \varphi^{-1}(U)$ . Zatem  $\varphi(x) \in U$ . Skoro  $U$  jest otwarty, to musi być otoczeniem  $\varphi(x)$ , i.e.  $U \in \mathcal{N}(\varphi(x))$ , zatem (warunek 3.):

$$\varphi^{-1}(U) \in \mathcal{N}(x) \quad \forall_{x \in \varphi^{-1}(U)},$$

czyli  $\varphi^{-1}(U)$  jest otwarty.

⇐ Udowadniamy warunek 2.:

$$\forall_{\substack{U \subseteq Y \\ \text{otw.}}} : \varphi^{-1}(U) \subseteq X.$$

Weźmy  $x \in X$  i  $U \in \mathcal{N}(\varphi(x))$ . Wtedy:

$$\exists_{\substack{\tilde{U} \subseteq X \\ \text{otw.}}} : \varphi(x) \in \tilde{U} \subseteq U,$$

więc  $V = \varphi^{-1}(\tilde{U})$  - otwarty. Ponadto  $x \in V$ . Zatem  $V \in \mathcal{N}(x)$ , oraz  $\varphi(V) \subseteq \tilde{U} \subseteq U$ , więc 2. zachodzi.

#### Definicja 4.18. Ciągłość jednostajna

$\varphi : X \rightarrow Y$  nazwiemy **jednostajnie ciągłym**, jeśli:

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\lambda_\varepsilon} : \forall_{x, x' \in X} : d(x, x') \leq \lambda_\varepsilon \implies \delta(\varphi(x), \varphi(x')) \leq \varepsilon. \quad (141)$$

Ważną częścią tejże definicji jest to, że wybór  $\lambda$  zależy jedynie od  $\varepsilon$ , nie zaś od samych punktów  $x, x'$ .

#### Obserwacja 4.5.

Każda funkcja jednostajnie ciągła, jest ciągła.

#### Definicja 4.19. Przekształcenie Lipschitzowskie

Przekształcenie  $\varphi : X \rightarrow Y$  nazwiemy **Lipschitzowskim** (i.e. spełniającym **warunek Lipschitza**), jeśli:

$$\exists_{L > 0} \forall_{x, x' \in X} : \delta(\varphi(x), \varphi(x')) \leq L \cdot d(x, x'). \quad (142)$$

Warunek ten mówi, że odległość między wartościami funkcji jest zawsze ograniczona przez odległość między jej argumentami (z pewną proporcjonalnością).

#### Obserwacja 4.6.

Funkcje Lipschitzowskie są ciągłe jednostajnie.

Istotnie - wystarczy ustalić:  $\lambda_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{L}$ .

### 4.3 Zwartość

Powiemy teraz o bardzo ważnym pojęciu charakteryzującym zbiory w przestrzeni metrycznej - to jest o zwartości.

**Definicja 4.20. Pokrycie**

Ustalmy  $(X, d)$  - p-ń. metryczną. **Pokryciem** zbioru  $K$  nazwiemy rodzinę zbiorów  $U = \{U_i\}_{i \in I}$ ,  $U_i \subseteq X$ , taką że:

$$K \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i. \quad (143)$$

Pokrycie jest otwarte, jeśli wszystkie  $U_i$  są otwarte. Pokrycie  $V = \{V_i\}_{i \in I'}$  nazwiemy podpokryciem  $U$ , jeśli  $V \subseteq U$ .

**Przykład** Dla  $X = \mathbb{R}$ ,  $K = [0, 1]$ , pokryciem  $K$  jest rodzina:

$$U_{n \in \mathbb{N}} : \quad U_n = [0, 1 + \frac{1}{n}].$$

Nie jest to pokrycie otwarte.

**Definicja 4.21. Zwartość (pokryciowa)**

Zbiór  $K \subseteq X$  nazwiemy **ZWARTYM**, jeśli z każdego pokrycia otwartego tegoż zbioru, można wybrać podpokrycie skończone (tj. mające skończoną liczbę elementów). Jeśli  $K$  jest zwartym podzbiorem  $X$ , to zapiszemy  $K \subseteq\subseteq X$ .

**Twierdzenie 4.13. Własności zbiorów zwartych**

1. Każdy zbiór zwarty jest ograniczony.
2. Każdy zbiór zwarty jest domknięty.

**Dowód.**

Niech  $K \subseteq\subseteq X$ .

1. Weźmy dowolny  $x \in X$ . Wtedy  $\{\text{Ball}(x, \frac{1}{n})\}_{n \in \mathbb{N}}$  niewątpliwie jest pokryciem otwartym  $K$ . Skoro tak, to można zeń wybrać skończone podpokrycie. Zatem istnieje  $N \in \mathbb{N}$ , będące największym z indeksów z tegoż podpokrycia, takie że:

$$K \subseteq \text{Ball}(x, N),$$

jako że kolejne z tych kul zawierają w sobie poprzednie. Widzimy więc, że  $K$  jest ograniczony.

2. Dowód nie wprost. Przypuśćmy, że  $\exists y$  będący punktem skupienia  $K$ , t.ż.  $y \notin K$ . Weźmy rodzinę zbiorów  $\{X \setminus \overline{\text{Ball}}(y, \frac{1}{n})\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Niewątpliwie jest to pokrycie otwarte, gdyż wszystkie z tych zbiorów są otwarte i sumują się one do  $X \setminus \{y\}$ . Wybierzmy z niego więc skończone podpokrycie i niech  $N$  będzie największym z indeksów w tym podpokryciu. Zauważmy, że wtedy sumujw się ono do  $X \setminus \overline{\text{Ball}}(y, \frac{1}{N})$ , jako że kolejne z tych zbiorów zawierają w sobie poprzednie. Mamy więc, że  $K \subseteq X \setminus \overline{\text{Ball}}(y, \frac{1}{N})$ . Wtedy jednak  $\text{Ball}(y, \frac{1}{N}) \cap K \subseteq \overline{\text{Ball}}(y, \frac{1}{N}) \cap K = \emptyset$ , co przeczy temu, że  $y$  jest punktem skupienia  $K$ . Sprzeczność! Zatem  $K$  rzeczywiście musi być domknięty.

**Definicja 4.22. Zwartość ciągowa**

Powiemy, że podzbiór  $K \subseteq X$  jest **ciągowo zwarty**, jeśli każdy ciąg  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zawarty w  $K$  ( $x_n \in K$ ) zawiera podciąg zbieżny do granicy w  $K$ :

$$\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_n \in K \exists k \mapsto n_k : x_{n_k} \rightarrow g \in K. \quad (144)$$

**Twierdzenie 4.14.**

Zbiór  $K$  ciągowo zwarty jest także domknięty.

**Dowód.**

Istotnie, jeśli ciąg  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  elementów z  $K$  jest zbieżny, to każdy jego podciąg jest zbieżny do tej samej granicy. Ale skoro  $K$  jest ciągowo zwarty, to  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ma podciąg zbieżny do elementu z  $K$ , który będzie wspólną granicą wszystkich podciągów. Zatem i granica  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  musi leżeć w  $K$ .

**Definicja 4.23.  $\varepsilon$  - sieć**

Niech  $K \subseteq X$  i  $\varepsilon > 0$ . Wtedy  $S \subseteq X$  nazwiemy  **$\varepsilon$  - siecią dla  $K$**  jeśli:

$$\forall z \in K \exists s \in S : z \in \text{Ball}(s, \varepsilon). \quad (145)$$

$S$  jest  $\varepsilon$  - siecią w  $K$  jeśli jest  $\varepsilon$  - siecią dla  $K$  i  $S \subseteq K$ .

**Twierdzenie 4.15.**

Jeśli  $K$  jest ciągowo zwarty, to dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje skończona  $\varepsilon$  - sieć w  $K$ .

**Dowód.**

**Dowód nie wprost.** Przypuśćmy, że istnieje  $\varepsilon > 0$ , t.ż. w  $K$  nie ma skończonej  $\varepsilon$  - sieci. Skonstruujmy wtedy następująco ciąg  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  i rodzinę zbiorów  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ :  
Niech  $x_1 \in K$  będzie dowolne i  $U_1 = \text{Ball}(x_1, \varepsilon)$ . Oczywiście  $U_1$  nie pokrywa  $K$  (z założenia):  $K \setminus U_1 \neq \emptyset$ . Za  $x_2$  bierzemy więc dowolny element w  $K \setminus U_1$ , a  $U_2 = U_1 \cup \text{Ball}(x_2, \varepsilon)$ . Ogólnie  $x_n \in K \setminus U_{n-1}$  i  $U_n = U_{n-1} \cup \text{Ball}(x_n, \varepsilon)$ . Oczywiście  $K \setminus U_{n-1} \neq \emptyset$ , gdyż gdyby było inaczej, to z konstrukcji mielibyśmy wbrew założeniu skończoną  $\varepsilon$  - sieć pokrywającą  $K$ .  
Otrzymaliśmy ciąg  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , który jednak nie może mieć podciągu zbieżnego, gdyż nie spełnia warunku Cauchy'ego - z konstrukcji jasno widać, że  $\forall i < j : d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ , jako że  $x_j \in K \setminus U_{j-1} \subseteq K \setminus U_i$ . Przeczy to założeniu, że  $K$  jest ciągowo zwarty.

**Twierdzenie 4.16.**

Jeśli  $K$  jest ciągowo zwarty, to istnieje przeliczalny  $D \subseteq K$ , t.ż.  $\overline{D} = K$  i.e.  $D$  jest gęsty w  $K$ .

**Dowód.**

Weźmy

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_{\frac{1}{n}} \subseteq K,$$

gdzie jako  $S_{\varepsilon}$  oznaczyliśmy skończoną  $\varepsilon$  - sieć w  $K$ , która na mocy Tw. 4.3 istnieje. Jasno wi-  
dać, że  $D$  jest przeliczalny. Wtedy  $\overline{D} \subseteq K$ , gdyż dla każdego  $y \in K$  tworzymy ciąg  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$   
elementów, takich że  $x_n \in S_{\frac{1}{n}}$  i  $y \in \text{Ball}(x_n, \frac{1}{n})$ , co zawsze możemy zrobić, bo  $S_{\frac{1}{n}}$  są  $\varepsilon$  - sie-  
ciami w  $K$ . Wtedy  $d(x_n, y) < \frac{1}{n} \rightarrow 0$ , więc  $x_n \rightarrow y$ , czyli  $y \in \overline{D}$ . Odwrotnie mamy  $\overline{D} \supseteq K$ , bo  
 $D \subseteq K \implies \overline{D} \subseteq \overline{K}$  (domknięcie jest monotoniczne, a  $K$  jest domknięty por. Tw. 4.3). Z tych  
dwu inkluzji mamy tezę.

**Twierdzenie 4.17.**

Jeśli  $K$  jest ciągowo zwarty, do każde jego pokrycie otwarte ma przeliczalne podpokrycie.

**Dowód.**

Niech  $U$  - pokrycie otwarte  $K$ . Dla dowolnego  $y \in K$  zdefiniujmy:

$$n_y = \min\{n \in \mathbb{N} \mid \exists U_y \in U : \text{Ball}(y, \frac{1}{n}) \subseteq U_y\}.$$

Taka liczba będzie bez wątpienia istniała, gdyż  $U$  pokrywa  $K$  i składa się z samych zbiorów  
otwartych. Niech  $U_y$  będzie zbiorem spełniającym powyższy warunek dla  $y \in K$ . Niech  $V =$   
 $\{U_y \mid y \in D\}$ , gdzie  $D$  to przeliczalny podzbiór gęsty w  $K$  (istnieje on na mocy Tw. 4.3). Jasne,  
że  $V \subseteq U$  i że  $V$  jest przeliczalny. Pokażemy, że jest to podpokrycie.

Niech  $x \in K$ . Wiemy, że  $\exists U_x \in U, N \in \mathbb{N} : \text{Ball}(x, \frac{1}{N}) \subseteq U_x$ . Ponadto, jako że  $D$  jest gęsty w  $K$ , to  
 $\exists y \in D : d(y, x) < \frac{1}{2N}$ . Wtedy:

$$x \in \text{Ball}(y, \frac{1}{2N}) \implies \text{Ball}(y, \frac{1}{2N}) \subseteq \text{Ball}(x, \frac{1}{N}) \subseteq U_x \in U.$$

Więc  $2N \geq n_y$  z konstrukcji  $n_y$ . Zatem:

$$x \in \text{Ball}(y, \frac{1}{2N}) \subseteq \text{Ball}(y, \frac{1}{n_y}) \subseteq U_y \in V.$$

Czyli  $V$  pokrywa  $K$ .

Jesteśmy już gotowi, żeby udowodnić najważniejsze twierdzenie w tej sekcji.

**Twierdzenie 4.18. Zwartość ciągowa = zwartość pokryciowa**

Zbiór  $K$  jest ciągowo zwarty wtedy i tylko wtedy gdy jest zwarty (pokryciowo).



### Dowód.

$\Rightarrow$  Niech  $K \subseteq X$ ,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  będzie ciągiem elementów z  $K$  i niech  $Z = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Pokażemy, że zachodzi jedna z dwu możliwości:

1.

$$\exists_{y \in K} : \forall_{U \in \mathcal{N}(y), U \subseteq X \atop \text{otw.}} : |Z \cap U| = \infty.$$

2.  $Z$  jest skończony.

Mianowicie, niech  $\neg 1.$ , i.e.:

$$\forall_{y \in K} : \exists_{U_y \in \mathcal{N}(y), U_y \subseteq X \atop \text{otw.}} : |Z \cap U_y| < \infty.$$

Oczywiście  $\{U_y\}_{y \in K}$  jest pokryciem otwartym  $K$  (gdyż każdy  $y$  zawiera się np. w odpowiadającym mu  $U_y$ ). Wybierzmy więc zeń skończone podpokrycie, tak, żeby:

$$K \subseteq U_{y_1} \cup U_{y_2} \cup \dots \cup U_{y_N}.$$

Mamy jednak  $Z \subseteq K$ , zatem:

$$Z = K \cap Z = (U_{y_1} \cap Z) \cup (U_{y_2} \cap Z) \cup \dots \cup (U_{y_N} \cap Z). \quad (146)$$

Każdy z elementów tej sumy jest skończony, na mocy założenia, zatem  $Z$  także jest skończony, jako skończona suma skończonych.

Widzimy więc, że zachodzi 1. lub 2.:

1. Jeśli zachodzi pierwszy warunek, to skoro:

$$\exists_{y \in K} : \forall_{U \in \mathcal{N}(y), U \subseteq X \atop \text{otw.}} : |Z \cap U| = \infty,$$

to konstruujemy  $k \mapsto n_k$ , tak aby  $\forall_k : n_{k+1} > n_k$  i  $x_{n_k} \in \text{Ball}(y, \frac{1}{k})$ . Jest to możliwe, bo każde otwarte otoczenie  $y$  zawiera nieskończenie wiele elementów ciągu  $x_n$ , w szczególności zawiera element o indeksie większym od dowolnej liczby. Oczywiście z podanej konstrukcji mamy  $x_{n_k} \rightarrow y \in K$ .

2. Jeśli  $Z$  jest skończony, to z zasady szuflatkowej istnieje wartość  $x \in Z \subseteq K$ , która zostanie odwiedzona nieskończenie wiele razy przez wyrazy ciągu  $x_n$  - można więc wziąć podciąg stały równy  $x$  i oczywiście do tej liczby zbieżny.

Widzimy więc, że w obu przypadkach potrafimy skonstruować podciąg zbieżny w  $K$ , zatem  $K$  istotnie jest ciągowo zwarty.

$\Leftarrow$  Dowód przeprowadzimy nie wprost. Niech  $K$  będzie ciągowo zwartym,  $U$  pewnym jego pokryciem otwartym, a  $V = V_{i \in \mathbb{N}}$  jego przeliczalnym podpokryciem, które na mocy Tw. 4.3 istnieje. Przypuśćmy, że żadna skończona podrodzina  $V$  nie jest pokryciem  $K$ . Wtedy dla  $n \in \mathbb{N}$  wybieramy  $x_n \in K \setminus (\bigcup_{i=1}^n V_i)$ . Oczywiście zbiór z którego wybieramy  $x_n$  będzie niepusty na mocy założenia, że żadna skończona podrodzina  $V$  nie pokrywa  $K$ . Otrzymujemy ciąg  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  elementów z  $K$ , więc ma on podciąg zbieżny do  $y \in K$ . Ale  $\exists_N : y \in V_N$ . Skoro jednak  $V_N$  jest otwarty (gdyż wyjściowe pokrycie  $U$  było otwarte), to prawie wszystkie wyrazy podciągu  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zbieżnego do  $y$  powinny leżeć w  $V_N$ . Jednakże tylko skończona liczba wyrazów  $x_n$  leży w  $V_N$ , gdyż dla  $n \geq N$ :  $x_n \in K \setminus V_N$ . Sprzeczność! Musi więc istnieć skończone podpokrycie  $V$ , zatem  $K$  jest zwarty pokryciowo.

**Obserwacja 4.7.**

Domknięty podzbiór zbioru zwartego jest zwarty.

Istotnie  $K \subseteq X \wedge C \subseteq K \wedge C = \overline{C} \implies C \subseteq X$ .

**Twierdzenie 4.19. Bolzano-Weierstrassa II**

Każdy ograniczony i domknięty podzbiór  $\mathbb{R}$  jest zwarty.

**Dowód.**

Wynika on prosto z równoważności zwartości ciągowej i pokryciowej. Jeśli jakiś podzbiór  $\mathbb{R}$  jest ograniczony, to zawiera podciąg zbieżny (Twierdzenie 2.2), a skoro jest domknięty, to ów podciąg zbieżny ma granicę w tymże zbiorze. Zatem podzbiór ten jest ciągowo zwarty, czyli zwarty.

**Definicja 4.24. Metryka na iloczynie kartezjańskim**

Rozważmy dwie p-ń metryczne  $(X, d_1)$  i  $(Y, d_2)$ . Można wtedy wprowadzić na ich iloczynie kartezjańskim nową metrykę  $D$ , tworząc p-ń.  $(X \times Y, D)$ . Standardowo robi się to w ramach jednej z równoważnych metryk  $d_p$  ( $p \in [1, \infty]$ ) - tak, że  $D((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_p(d_1(x_1, x_2), d_2(y_1, y_2))$ . Wszystkie te metryki zadają tę samą topologię. Metrykę na iloczynie kartezjańskim większej liczby zbiorów definiuje się indukcyjnie.

**Obserwacja 4.8.**

$$(x_n, y_n) \xrightarrow{D} (x, y) \iff x_n \rightarrow x \wedge y_n \rightarrow y. \quad (147)$$

Widzimy, że zbieżność na iloczynie kartezjańskim jest "po współrzędnych".

**Twierdzenie 4.20.**

Iloczyn kartezjańskich dwu zbiorów zwartych jest zwarty.

**Dowód.**

TODO

**Obserwacja 4.9.**

Niech  $K \subseteq \mathbb{R}$ . Wtedy  $K$  zawiera swoje kresy.

Rzeczywiście, skoro  $K$  jest zwarty, to i ograniczony:  $\inf K \in \mathbb{R}$  i  $\sup K \in \mathbb{R}$ . Ponadto  $\inf K$  i  $\sup K$  są granicami ciągów z  $K$ , więc do  $K$  należą, skoro  $K$  jest domknięty.

**Twierdzenie 4.21.**

Niech  $(X, d)$  to p-ń. metryczna zupełna. Niech  $K \subseteq X$ . Wtedy, zbiór  $K$  jest zwarty jeżeli  $\forall_{\varepsilon > 0}$  można go pokryć skończoną  $\varepsilon$  - siecią.  
domk.

**Dowód.**

TODO

**Twierdzenie 4.22. Obraz zbioru zwartego jest zwarty**

Niech  $(X, d), (Y, \delta)$  będą p-ń. metrycznymi, a  $\varphi : X \rightarrow Y$  będzie odwzorowaniem ciągłym. Ponadto niech  $K \subseteq X$ . Wtedy zbiór  $\varphi(K)$  jest zwarty.

**Dowód.**

Niech  $U = \{U_i\}_{i \in I}$  - rodzina zbiorów otwartych pokrywająca  $\varphi(K)$ :  $\varphi(K) \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ . Skonstruujmy rodzinę  $V = \{V_i = \varphi^{-1}(U_i)\}$ . Skoro  $\varphi$  jest ciągłe, to  $V$  jest rodziną otwartą. Ponadto z właściwości przeciwobrazów:  $K \subseteq \bigcup_{i \in I} V_i$ . Zatem  $V$  jest pokryciem otwartym. Możemy więc zeń wybrać skończone podpokrycie otwarte:

$$K \subseteq V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_n} = \varphi^{-1}(U_{i_1}) \cup \dots \cup \varphi^{-1}(U_{i_n}).$$

Wtedy:

$$\varphi(K) \subseteq \varphi(\varphi^{-1}(U_{i_1}) \cup \dots \cup \varphi^{-1}(U_{i_n})) = \varphi(\varphi^{-1}(U_{i_1})) \cup \dots \cup \varphi(\varphi^{-1}(U_{i_n})) \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}.$$

Zatem dla każdego pokrycia  $\varphi(K)$  wybraliśmy zeń skończone podpokrycie - zatem  $\varphi(K)$  jest zwarty.

**Obserwacja 4.10. Odwzorowanie ciągle na zbiorze zwartym osiąga swoje kresy**

Niech  $(X, d)$  - p-ń. metryczna i niech  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  będzie ciągłą funkcją oraz niech  $K \subseteq X$ . Wtedy:

$$\sup_{x \in K} f = \sup f(K) \in f(K) \quad (148)$$

oraz

$$\inf_{x \in K} f = \inf f(K) \in f(K). \quad (149)$$

Wynika to od razu z Twierdzenia 4.22 oraz Obserwacji 4.3.

**Twierdzenie 4.23. Heinego - Borela**

Podzbiór  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty i ograniczony.

**Dowód.**

$\Rightarrow$  Por. Tw. 4.3.

$\Leftarrow$  Skoro  $K$  jest ograniczony, to istnieje kostka postaci:

$$C = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n], \quad (150)$$

t.ż.  $K \subseteq C$ . Ponadto,  $C$  musi być zwarty, jako iloczyn kartezjański dwu zbiorów zwartych (por. Tw. 4.3). Zauważyliśmy jednak, że domknięty podzbiór zbioru zwartego jest zwarty, zatem i  $K$  jest zwarty (Obs. 4.3).

#### Twierdzenie 4.24. Lemat Lebesgue'a

Niech  $(X, d)$  - p-ń. metryczna,  $K \subseteq X$  ( $K$  jest zwartym podzbiorem  $X$ ). Niech  $U$  będzie pokryciem otwartym  $K$ . Wówczas:

$$\exists \lambda > 0 \forall x \in K \exists U_x \in U : \text{Ball}(x, \lambda) \subseteq U_x. \quad (151)$$

**Uwaga!** Liczbę  $\lambda$  podaną w twierdzeniu nazywa się **liczbą Lebesgue'a**.

#### Dowód.

Skoro  $K$  - zwarty, to wybierzmy z  $U$  skończone podpokrycie:  $\{U_i\}_{1 \leq i \leq N}$ .

- Jeżeli  $\exists i \leq N : X = U_i$ , to sytuacja nie przedstawia żadnego problemu - za  $\lambda$  bierzemy dowolną liczbę, zaś za  $U_x = X$ . Teza jest trywialnie spełniona.
- Jeżeli  $\forall i \leq N : X \not\subseteq U_i$ , to definiujemy rodzinę  $F_i = X \setminus U_i$  oraz funkcję:

$$f(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d(x, F_i),$$

gdzie

$$d(x, F_i) = \inf_{v \in F_i} \{d(x, v)\}$$

jest dobrze określoną funkcją dla niepustego  $F_i$ .

Oczywiście  $f$  jest ciągła, bo mamy:

$$|f(x) - f(x_0)| = \frac{1}{N} \left| \sum_{i=1}^N d(x, F_i) - d(x_0, F_i) \right| \leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \inf_{v \in F_i} \{d(x, v)\} - \inf_{v \in F_i} \{d(x_0, v)\} \right|.$$

Zauważmy, że skoro:

$$d(x, v) \leq d(x_0, v) + d(x, x_0)$$

oraz:

$$d(x_0, v) \leq d(x, v) + d(x, x_0),$$

to:

$$\inf_{v \in F_i} \{d(x, v)\} \leq \inf_{v \in F_i} \{d(x_0, v)\} + d(x, x_0)$$

i:

$$\inf_{v \in F_i} \{d(x_0, v)\} \leq \inf_{v \in F_i} \{d(x, v)\} + d(x, x_0),$$

zatem:

$$|\inf_{v \in F_i} \{d(x, v)\} - \inf_{v \in F_i} \{d(x_0, v)\}| \leq d(x, x_0).$$

Widzimy, więc że

$$|f(x) - f(x_0)| \leq d(x, x_0),$$

czyli  $f$  musi być ciągła.

Skoro  $f$  jest ciągła na zbiorze zwartym  $K$  i  $\forall_{x \in K} : f(x) > 0$  (bo inaczej – gdyby  $f(x) = 0$ , to  $x$  nie należałby do żadnego pokrycia  $U_i$ ), to  $\exists_{x_0} : f(x_0) = \inf f(x) > 0$ . Funkcja ciągła na zbiorze zwartym osiąga swoje kresy. Weźmy  $\lambda = \inf f(x) > 0$ . Skoro mamy  $\forall_{x \in K} : f(x) \geq \lambda$ , a  $f(x)$  jest średnią odległością  $x$  od  $F_i$ , to w szczególności istnieje takie  $F_j$ , że  $\lambda \leq d(x, F_j) = \inf_{v \in U_j} d(x, v) \implies \forall_{v \in U_j} : d(x, v) \geq \lambda$ . Zatem dla tego  $U_j$ :

$$\text{Ball}(x, \lambda) \subseteq U_j.$$

Znaleźliśmy więc szukaną  $\lambda$  i szukane  $U_x = U_j$ . Dowód został zakończony.

## 4.4 Spójność

### Definicja 4.25. Spójność

Powiemy, że zbiór  $Z$  w pewnej metryce jest **niespójny**, jeśli:

$$\exists_{Z_1, Z_2 \neq \emptyset} : Z_1 \cup Z_2 = Z \quad \wedge \quad Z_1 \cap \overline{Z_2} = \emptyset. \quad (152)$$

W przeciwnym razie, zbiór nazwiemy **spójnym**. Dla zbiorów spójnych, mamy:

$$Z_1, Z_2 \neq \emptyset \wedge Z_1 \cup Z_2 = Z \implies Z_1 \cap \overline{Z_2} \neq \emptyset \vee \overline{Z_1} \cap Z_2.$$

### Obserwacja 4.11.

Podzbiór  $\mathbb{R}$  jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy jest przedziałem.

### Twierdzenie 4.25. Obraz zbioru spójnego jest spójny

Jeśli  $Z$  jest zbiorem spójnym, a  $\varphi : X \rightarrow Y$  odwzorowaniem ciągłym, to  $\varphi(Z)$  jest spójny.

### Dowód.

Dowód nie wprost. Załóżmy, że  $\varphi(Z)$  jest niespójny, tj. istnieją takie niepuste  $W_1, W_2 \subseteq Y$ , że  $W_1 \cap \overline{W_2} = \emptyset$  i  $W_1 \cup W_2 = \varphi(Z)$ . Niech  $Z_1 = \varphi^{-1}(W_1) \cap Z$  i  $Z_2 = \varphi^{-1}(W_2) \cap Z$ . Mamy:

$$Z \subseteq \varphi^{-1}(\varphi(Z)) = \varphi^{-1}(W_1 \cup W_2).$$

Zatem  $Z = Z_1 \cup Z_2$ . Skoro  $Z$  jest spójny, to  $\overline{Z_1} \cap Z_2 \neq \emptyset$  lub  $Z_1 \cap \overline{Z_2} \neq \emptyset$ . Bez straty ogólności, załóżmy ten pierwszy przypadek. Wtedy istnieje  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , t.j.  $x_n \in Z_1$  i  $x_n \rightarrow x \in Z_2$ . Ale wtedy – z ciągłości  $\varphi$  –  $W_1 \ni \varphi(x_n) \rightarrow \varphi(x) \in W_2$ , zatem  $\overline{W_1} \cap W_2 \neq \emptyset$ , wbrew założeniu. Powstała sprzeczność dowodzi tezy.

**Obserwacja 4.12. Łukowa spójność**

Zbiór spójny łukowo jest spójny.

## 5 Rachunek różniczkowy

### Definicja 5.1. Różniczkowalność

Niech  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , gdzie  $I$  jest przedziałem w  $\mathbb{R}$  (otwartym lub domkniętym). Powiemy, że  $f$  jest różniczkowalna w punkcie  $x_0 \in I$ , jeśli istnieje granica:

$$\lim_{I \ni x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (153)$$

W szczególności, jeśli  $I = [a, b]$ , to  $f$  jest różniczkowalna w  $a$ , jeśli istnieje granica:

$$\lim_{I \ni x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \quad (154)$$

Wartość tychże granic nazywamy pochodną funkcji  $f$  w punkcie  $x_0$  i oznaczamy  $f'(x_0)$ .

### Definicja 5.2. Pochodna

Jeśli w każdym punkcie funkcji  $f$  istnieje skończona pochodna, to funkcje  $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f' : x \mapsto f'(x)$  nazywamy **pochodną** funkcji  $f$ . Mówimy wtedy o  $f$ , że jest **różniczkowalna**.

### Twierdzenie 5.1.

Niech  $x \in I$  deg. Wtedy:

$$\exists_{f'(x_0)} \iff \exists_y : \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - yh}{h} = 0. \quad (155)$$

Wtedy oczywiście  $y = f'(x)$ .

### Dowód.

$\implies$  Jeśli  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ , to  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$  i:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - hf'(x_0)}{h} = 0.$$

$\impliedby$  Jeśli:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - hy}{h} = 0,$$

to:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = y = f'(x_0).$$

### Twierdzenie 5.2. Funkcja różniczkowalna jest ciągła

Jeśli funkcja  $f$  jest różniczkowalna w pewnym punkcie  $x_0$ , to jest w tym punkcie ciągła.

**Dowód.**

Skoro  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ , to  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x_0)(x - x_0) = 0$ , zatem funkcja jest ciągła.

**Obserwacja 5.1. Podstawowe własności pochodnych**

Niech  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  będą funkcjami różniczkowalnymi. Wtedy:

- $(f + g)'$  istnieje i:

$$(f + g)' = f' + g'. \quad (156)$$

- Jeśli  $a \in \mathbb{R}$ , to  $(af)'$  istnieje i:

$$(af)' = af'. \quad (157)$$

- $(fg)'$  istnieje i:

$$(fg)' = f' \cdot g + f \cdot g'. \quad (158)$$

Jest to tzw. wzór Leibniza.

- Jeśli  $g(x) \neq 0$  i  $g'(x) \neq 0$  dla wszystkich  $x \in I$ , to  $(\frac{f}{g})'$  istnieje i:

$$(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{(g)^2}. \quad (159)$$

Dowód jest bardzo prosty i pozostawiamy go jako ćwiczenie. Nieco ciekawsze (i dużo ważniejsze) jest następujące:

**Twierdzenie 5.3. Pochodna funkcji złożonej**

Niech  $g : I_1 \rightarrow I_2$ ,  $f : I_2 \rightarrow \mathbb{R}$  będą funkcjami różniczkowalnymi odpowiednio w punktach  $x_0 \in I_1$  deg i  $g(x_0) \in I_2$  deg. Wtedy  $f \circ g$  także jest różniczkowalna i w  $x_0$ :

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0). \quad (160)$$

Reguła ta nazywa się czasem **regułą łańcuchową**.

**Dowód.**

Niech  $r(h) = g(x_0 + h) - g(x_0) - g'(x_0)h$ . Wtedy (por. Tw. 5.1):

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0. \quad (161)$$

Niech  $y_0 = g(x_0)$  i  $R(k) = f(y_0 + h) - f(y_0) - f'(y_0)h$ . Znowuż:

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{R(k)}{k} = 0. \quad (162)$$

Wtedy:

$$f(g(x_0 + h)) - f(g(x_0)) = f(g(x_0) + g'(x_0)h + r(h)) - f(g(x_0)) = f(g(x_0) + k(h)) - f(g(x_0)), \quad (163)$$



gdzie oznaczyliśmy  $k(h) = g'(x_0)h + r(h)$ . Oczywiście  $\lim_{h \rightarrow 0} k(h) = 0$ . Licząc dalej:

$$f(g(x_0 + h)) - f(g(x_0)) = f(g(x_0) + k(h)) - f(g(x_0)) = R(k(h)) + f'(y_0)k(h). \quad (164)$$

Zatem:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x_0 + h)) - f(g(x_0))}{h} = f'(y_0) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(k(h))}{h}.$$

Zauważmy, że:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x_0)h + r(h)}{h} = g'(x_0).$$

Stąd mamy:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(k(h))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(k(h))}{k(h)} \frac{k(h)}{h} = 0.$$

Ostatecznie więc:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x_0 + h)) - f(g(x_0))}{h} = f'(y_0)g'(x_0).$$

### Definicja 5.3. Inna definicja pochodnej

Niech  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Niech  $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ . Jeśli istnieje taka macierz  $A \in M(\mathbb{R})_{m \times n}$ , że:

$$\lim_{\|\vec{h}\| \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x}_0 + \vec{h}) - f(\vec{x}_0) - A\vec{h}}{\|\vec{h}\|} = 0, \quad (165)$$

dla  $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ , to macierz  $A$  nazwiemy pochodną  $f$  w punkcie  $\vec{x}_0$ . Łatwo widzieć, że  $A$  jest wyznaczone jednoznacznie.

Zajmiemy się teraz związkiem pochodnej z własnościami funkcji rzeczywistych.

### Definicja 5.4. Ekstrema

Niech  $(X, d)$  - p-ń. metryczna oraz  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Wtedy  $x_0 \in X$  nazwiemy:

- **Lokalnym minimum**, jeśli:

$$\exists U \in \mathcal{N}(x_0) \forall x \in U : f(x) \geq f(x_0). \quad (166)$$

- **Lokalnym minimum ścisłym**, jeśli:

$$\exists U \in \mathcal{N}(x_0) \forall x \in U : f(x) > f(x_0). \quad (167)$$

- **Lokalnym maksimum**, jeśli:

$$\exists U \in \mathcal{N}(x_0) \forall x \in U : f(x) \leq f(x_0). \quad (168)$$

- **Lokalnym maksimum ścisłym**, jeśli:

$$\exists U \in \mathcal{N}(x_0) \forall x \in U : f(x) < f(x_0). \quad (169)$$

Wpólna nazwa, na którąś z tych sytuacji, to wystąpienie lokalnego **ekstremum** (ściłego ekstremum).

**Twierdzenie 5.4. Warunek konieczny istnienia ekstremum**

Jeśli  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest w punkcie  $x_0$  różniczkowalna i  $x_0$  jest ekstremum  $f$ , to:

$$f'(x_0) = 0. \quad (170)$$

**Dowód.**

Założmy, że  $f$  ma w  $x_0$  minimum. Wtedy oczywiście:

$$f(x) - f(x_0) \geq 0.$$

Zatem:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$

dla  $x > x_0$ , więc:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0^+} f'(x_0) \geq 0.$$

Jednakże:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0,$$

dla  $x < x_0$  i:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0^-} f'(x_0) \leq 0.$$

Jedyną możliwością połączenia tych nierówności jest  $f'(x_0) = 0$ . Dla maksimum w  $x_0$  dowód zupełnie analogiczny.

Twierdzenie to pomoże nam udowodnić kilka zasadniczych twierdzeń związanych z pochodnymi. Zaczniemy od:

**Twierdzenie 5.5. Rolle'a**

Jeśli  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła i różniczkowalna na  $]a, b[$  oraz  $f(a) = f(b)$ , to:

$$\exists_{\xi \in ]a, b[} : f'(\xi) = 0.$$

**Dowód.**

$f$  jest ciągła na zwartej dziedzinie  $[a, b]$ , także osiąga swoje kresy. Jeśli  $\sup f = \inf f = f(a) = f(b)$ , to  $f$  jest funkcją stałą:  $f := f(a)$  i jej pochodna we wszystkich punktach pomiędzy  $a$  i  $b$  jest równa 0. W przeciwnym wypadku, (i.e.  $\sup f \neq f(a)$  lub  $\inf f \neq f(a)$ ) istnieje  $\xi \in ]a, b[$  osiągające ów kres różny od wartości w  $a$ . Oczywiście  $\xi$  będzie ekstremum, zatem z poprzedniego twierdzenia  $f'(\xi) = 0$ .

Uogólnieniami tych twierdzeń są następujące dwa rezultaty:

**Twierdzenie 5.6. Cauchy'ego**

Niech  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  - ciągłe i różniczkowalne na  $]a, b[$ , wtedy:

$$\exists_{\xi \in ]a, b[} : g'(\xi)(f(b) - f(a)) = f'(\xi)(g(b) - g(a)). \quad (171)$$

**Dowód.**

Konstruujemy funkcję:

$$h(x) = g(x)(f(b) - f(a)) - f(x)(g(b) - g(a)).$$

Łatwo widzieć, że:

$$h(a) = h(b) = g(a)f(b) - f(b)g(a).$$

Ponadto  $h$  powstaje z operacji arytmetycznych na  $f, g$  więc również jest ciągła i różniczkowalna na  $]a, b[$ . Spełnia więc wszystkie założenia Tw. Rolle'a:

$$\exists_{\xi \in ]a, b[} : h'(\xi) = 0$$

Ale:

$$h'(\xi) = g'(\xi)(f(b) - f(a)) - f'(\xi)(g(b) - g(a)).$$

Stąd prosto otrzymujemy tezę.

**Twierdzenie 5.7. Lagrange'a**

Niech  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  - ciągła i różniczkowalna na  $]a, b[$ , wtedy:

$$\exists_{\xi \in ]a, b[} : f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (172)$$

**Dowód.**

Bierzemy  $g = x$  w Tw. Cauchy'ego. Oczywiście  $g$  spełnia wszystkie założenia. Stąd:

$$\exists_{\xi \in ]a, b[} : f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a). \quad (173)$$

Wystarczy podzielić teraz przez  $(b - a)$ .

## 6 Rachunek całkowy

### 6.1 Całka Riemanna

W toku tego podrozdziału zajmować się będziemy jedynie funkcjami ograniczonymi na zwartych przedziałach - gdyż dla takich właśnie definiuje się całkę Riemanna.

#### Definicja 6.1. Podział przedziału

**Podziałem** przedziału  $[a, b]$  o długości  $n$  nazywamy ciąg skończony  $\pi = (t_0, \dots, t_n)$ , t.ż.  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ . Powiemy też, że  $\pi' = (t_0, \dots, t_n)$  jest drobniejszy niż  $\pi = (s_0, \dots, s_m)$  ( $\pi' \leq \pi$ ) jeśli  $\{t_0, \dots, t_n\} \subseteq \{s_0, \dots, s_m\}$ .

#### Definicja 6.2. Suma górna i dolna

Niech  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją ograniczoną. Wtedy definiujemy dla niej i pewnego podziału  $\pi$  przedziału  $[a, b]$ :

- Sumę dolną:

$$\underline{S}(f, \pi) = \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \inf_{[t_i, t_{i-1}]} f \quad (174)$$

oraz Sumę górną:

$$\overline{S}(f, \pi) = \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \sup_{[t_i, t_{i-1}]} f \quad (175)$$

#### Twierdzenie 6.1.

Ustalmy przedział  $[a, b]$ .

1. Jeśli  $\pi_1 \leq \pi_2$  to:

$$\overline{S}(f, \pi_1) \leq \overline{S}(f, \pi_2) \quad (176)$$

oraz:

$$\underline{S}(f, \pi_1) \geq \underline{S}(f, \pi_2). \quad (177)$$

2. Dla każdego dwu podziałów  $\pi_1, \pi_2$  istnieje podział  $\pi'$  t.ż.  $\pi' \leq \pi_1, \pi_2$ .
3. Dla każdego dwu podziałów  $\pi_1, \pi_2$ :

$$(b-a) \inf_{[a,b]} f \leq \underline{S}(f, \pi_1) \leq \overline{S}(f, \pi_2) \leq (b-a) \sup_{[a,b]} f. \quad (178)$$

#### Dowód.

- Jest to prosta konsekwencja faktu, że jeśli  $c \in [a, b]$  to:

$$(c-a) \sup_{[a,c]} f + (b-c) \sup_{[c,b]} f \leq (b-a) \sup_{[a,b]} f$$

i analogicznej własności dla inf.

- Za  $\pi'$  wystarczy wziąć sumę teoriomnogościową punktów z  $\pi_1$  i  $\pi_2$ .

- Stosujemy punkt 1. do  $\pi'$  drobniejszego od obu podziałów.

### Definicja 6.3. Całka dolna i górna

Całką dolną funkcji ograniczonej  $f$  na przedziale  $[a, b]$  nazywamy liczbę:

$$\int_a^b f = \sup_{\pi \leq [a, b]} \underline{S}(f, \pi), \quad (179)$$

to jest supremum sum dolnych po wszystkich podziałach  $[a, b]$ . Analogicznie definiujemy całkę górną:

$$\int_a^b f = \inf_{\pi \leq [a, b]} \bar{S}(f, \pi). \quad (180)$$

### Definicja 6.4. Całkowalność w sensie Riemanna

Powiemy, że funkcja ograniczona  $f$  na przedziale  $[a, b]$  jest **całkowalna w sensie Riemanna**, jeśli jej całka dolna jest równa całce górnej. Ich wspólną wartość nazwiemy po prostu całką  $f$  po przedziale  $[a, b]$ :

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f = \int_a^b f. \quad (181)$$

### Twierdzenie 6.2. Kryterium całkowalności

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \pi \leq [a, b] : \bar{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) \leq \varepsilon. \quad (182)$$

### Dowód.

$\Leftarrow$  Jeśli spełniony jest warunek:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \pi \leq [a, b] : \bar{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) \leq \varepsilon,$$

to skoro:

$$\underline{S}(f, \pi) \leq \int_a^b f \leq \bar{S}(f, \pi) \leq Sg(f, \pi),$$

gdyż skoro: dla każdych  $\pi_1, \pi_2$ :

$$\underline{S}(f, \pi_1) \leq S(f, \pi_2),$$

to na pewno:

$$\int_a^b f = \sup_{\pi_1} \underline{S}(f, \pi_1) \leq \inf_{\pi_1} S(f, \pi_2) = \int_a^b f. \quad (183)$$

Dostajemy, więc:

$$\int_a^b f - \int_a^b f \leq Sg(f, \pi) - Sd(f, \pi) \leq \varepsilon \forall \varepsilon > 0.$$

Jasne, że zachodzić to może tylko wtedy, gdy całka dolna jest równa całce górnej -  $f$  jest więc całkowalna.

$\Rightarrow$  Mamy:  $\int_a^b f = \int_a^b f$ . Z definicji supremum i infimum wynika, że:

$$\exists \pi_1 : \bar{S}(f, \pi_1) - \int_a^b f \leq \frac{1}{2}\varepsilon$$

oraz:

$$\exists \pi_2 : \int_a^b f - \underline{S}(f, \pi_2) \leq \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Niech  $\pi \leq \pi_1, \pi_2$ . Dla tego podziału zachodzić będą oczywiście obie z tych nierówności ( $\bar{S}(f, \pi) \leq \bar{S}(f, \pi_1)$  i  $\underline{S}(f, \pi) \geq \underline{S}(f, \pi_2)$ ). Zatem, dodawszy je:

$$\bar{S}(f, \pi) - \int_a^b f + \int_a^b f - \underline{S}(f, \pi) = \bar{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) \leq \varepsilon.$$

### Twierdzenie 6.3. Złożenie funkcji ciągłej z funkcją całkowalną jest całkowalne

Niech  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją całkowalną (więc i ograniczoną). Niech  $F : \overline{f([a, b])} \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągłą (dziedzina  $F$  to domknięcie obrazu  $f$ ).

Wtedy  $F \circ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest całkowalna.

### Dowód.

Zbiór  $X = \overline{f([a, b])}$  jest domknięty i ograniczony w  $\mathbb{R}$ , więc jest zwarty. Zatem  $F$ , jako ciągła na zbiorze zwartym, jest jednostajnie ciągła:

$$\forall \varepsilon \exists \delta_\varepsilon > 0 |s - t| \leq \delta_\varepsilon \implies |F(s) - F(t)| \leq \frac{\varepsilon}{b - a + 2 \sup_X |F|} = \varepsilon'.$$

Wyrażenie po prawej ma sens, gdyż  $F$  jest ograniczona. Przyjmijmy w tym warunku, że  $\delta_\varepsilon < \varepsilon'$ , co zawsze możemy zrobić. Ponadto, skoro  $f$  - całkowalna, to:

$$\exists \pi : \bar{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) \leq \delta_\varepsilon^2.$$

Niech  $\pi = (t_0, \dots, t_n)$ . Ponadto niech  $\sup_{[t_{i-1}, t_i]} f = M_i$ ,  $\inf_{[t_{i-1}, t_i]} f = m_i$ ,  $\sup_{[t_{i-1}, t_i]} F \circ f = M'_i$ ,  $\inf_{[t_{i-1}, t_i]} F \circ f = m'_i$ . Z własności  $f$  i  $F$  wiemy, że są to wszystkie liczby rzeczywiste. Zatem:

$$\bar{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}).$$

Rozbijmy indeksy  $\{1, \dots, n\} = A \sqcup B$ , gdzie  $A = \{i \mid M_i - m_i \leq \delta_\varepsilon\}$ ,  $B = \{i \mid M_i - m_i > \delta_\varepsilon\}$ . Zatem:

$$\bar{S}(F \circ f, \pi) - \underline{S}(F \circ f, \pi) = \sum_{i \in A} (M'_i - m'_i)(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i \in B} (M'_i - m'_i)(t_i - t_{i-1})$$

Jeśli  $i \in A$  i  $x, y \in [t_{i-1}, t_i]$ , to  $m_i \leq f(x), f(y) \leq M_i$ , więc  $|f(x) - f(y)| \leq M_i - m_i \leq \delta_\varepsilon$ . Zatem z jednostajnej ciągłości  $F$ :  $|F(f(x)) - F(f(y))| \leq \varepsilon'$ . W szczególności więc  $|M'_i - m'_i| \leq \varepsilon$ , gdyż przy

przejściu do supremum i infimum nierówność się zachowuje. Tak więc:

$$\sum_{i \in A} (M'_i - m'_i)(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i \in A} \varepsilon'(t_i - t_{i-1}) \leq \varepsilon'(b - a).$$

Co do drugiej sumy, mamy:

$$\delta_\varepsilon \sum_{i \in B} (t_i - t_{i-1}) < \sum_{i \in B} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) = \overline{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) \leq \delta_\varepsilon^2.$$

Stąd:

$$\sum_{i \in B} (t_i - t_{i-1}) < \delta_\varepsilon \leq \varepsilon'$$

Zatem:

$$\sum_{i \in B} (M'_i - m'_i)(t_i - t_{i-1}) \leq (\sup_X F - \inf_X F) \sum_{i \in B} (t_i - t_{i-1}) \leq 2 \sup_X |F| \varepsilon' < \infty,$$

bo  $F$  jest ograniczona. Ostatecznie:

$$\overline{S}(F \circ f, \pi) - \underline{S}(F \circ f, \pi) = \sum_{i \in A} (M'_i - m'_i)(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i \in B} (M'_i - m'_i)(t_i - t_{i-1}) \leq \varepsilon'(b - a + 2 \sup_X |F|) = \varepsilon.$$

Konstrukcje przeprowadziliśmy dla dowolnego  $\varepsilon$ , zatem  $F \circ f$  spełnia kryterium całkowalności, więc jest całkowalna.

**Przykład** Zbadajmy funkcję  $\text{id} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , t.ż.  $\text{id}(x) = x$ . Jest to funkcja całkowalna na dowolnym przedziale. Rzeczywiście, niech  $\pi = (a + \frac{1}{n}(b - a) | 0 \leq i \leq n)$ . Wtedy  $\sup_{[t_i, t_{i+1}]} \text{id} = (b - a) \frac{i+1}{n} + a$  i  $\inf_{[t_i, t_{i+1}]} \text{id} = (b - a) \frac{i}{n} + a$ . Zatem:

$$\overline{S}(\text{id}, \pi) - \underline{S}(\text{id}, \pi) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{b-a}{n} \right)^2 = \frac{(b-a)^2}{n}. \quad (184)$$

Wielkość tę można uczynić dowolnie małą dla dużych  $n$ , więc  $\text{id}$  spełnia kryterium całkowalności.

#### Obserwacja 6.1. Funkcje ciągłe są całkowalne

Niech  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Wtedy  $f$  jest całkowalna jako złożenie funkcji ciągłej z funkcją całkowalną:  $f = f \circ \text{id}$ .

#### Twierdzenie 6.4. Liniowość całki

Niech  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  - całkowalne i  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Wtedy  $\alpha f + \beta g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest całkowalna i:

$$\int_a^b \alpha f + \beta g = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g. \quad (185)$$

Inaczej mówiąc - przestrzeń funkcji całkowalnych na  $[a, b]$  jest przestrzenią liniową, a wzięcie całki jest na tej przestrzeni formą liniową.

**Dowód.**

**Jednorodność** Niech  $\alpha \in \mathbb{R}$  i  $f$  - całkowalna. Wtedy, gdy  $\alpha > 0$ :

$$\overline{S}(\alpha f, \pi) = \alpha \overline{S}(f, \pi)$$

oraz:

$$\underline{S}(\alpha f, \pi) = \alpha \underline{S}(f, \pi)$$

z jednorodności sup i inf dla skalarów dodatnich. Zatem, z całkowalności  $f$ :

$$\exists \pi : \overline{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) \leq \frac{\varepsilon}{\alpha} \implies \exists \pi : \overline{S}(\alpha f, \pi) - \underline{S}(\alpha f, \pi) \leq \varepsilon, \quad (186)$$

czyli spełniony jest warunek całkowalności dla  $\alpha f$ .

Gdy  $\alpha = 0$ , to  $\alpha f := 0$ , a funkcja zerowa jest trywialnie całkowalna.

Gdy  $\alpha < 0$  mamy:

$$\overline{S}(\alpha f, \pi) = \alpha \underline{S}(f, \pi)$$

oraz:

$$\underline{S}(\alpha f, \pi) = \alpha \overline{S}(f, \pi),$$

z tego, że  $\sup -f = -\inf f$  i vice versa. Dalej dowód przeprowadza się analogicznie.

**Addytywność** Z całkowalności  $f, g$  wynika, że dla dowolnego  $\varepsilon$ :

$$\exists \pi_1 : \overline{S}(f, \pi_1) - \underline{S}(f, \pi_1) \leq \frac{1}{2} \varepsilon$$

i podobnie:

$$\exists \pi_2 : \overline{S}(g, \pi_2) - \underline{S}(g, \pi_2) \leq \frac{1}{2} \varepsilon$$

Weźmy  $\pi = (t_0, \dots, t_n) \leq \pi_1, \pi_2$ . Wtedy powyższe nierówności tym bardziej są spełnione dla podziału  $\pi$ :

$$\overline{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) + \overline{S}(g, \pi) - \underline{S}(g, \pi) \leq \varepsilon.$$

Mamy też:

$$\overline{S}(f + g, \pi) = \sum_{i=1}^n \sup_{[t_i, t_{i-1}]} (f + g) \leq \sum_{i=1}^n \sup_{[t_i, t_{i-1}]} f + \sup_{[t_i, t_{i-1}]} g = \overline{S}(f, \pi) + \overline{S}(g, \pi).$$

Identycznie:

$$\underline{S}(f + g, \pi) \geq \underline{S}(f, \pi) + \underline{S}(g, \pi).$$

Zatem:

$$\overline{S}(f + g, \pi) - \underline{S}(f + g, \pi) \leq \overline{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) + \overline{S}(g, \pi) - \underline{S}(g, \pi) \leq \varepsilon. \quad (187)$$

Widzimy więc, że  $f + g$  spełnia kryterium całkowalności, więc jest całkowalna.

Z tego wynika, że  $\sup_{\pi} \underline{S}(f + g, \pi) = \inf_{\pi} \overline{S}(f + g, \pi) = \int_a^b (f + g)$ . Z całkowalności  $f, g$  wynika też, że dla dowolnego  $\varepsilon$ :

$$\exists \pi : \overline{S}(f, \pi) \leq \int_a^b f + \frac{1}{2} \varepsilon \wedge \overline{S}(g, \pi) \leq \int_a^b g + \frac{1}{2} \varepsilon.$$

Tutaj podobnie wybieramy osobno podziały dla  $f$  i  $g$  a następnie znajdujemy podział drobniejszy od ich obu. Wtedy:

$$\int_a^b f + g \leq \overline{S}(f + g, \pi) \leq \overline{S}(f, \pi) + \overline{S}(g, \pi) \leq \int_a^b f + \int_a^b g + \varepsilon.$$



Skoro nierówność ta zachodzi dla wszystkich  $\varepsilon > 0$ , to musi też być:

$$\int_a^b f + g \leq \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Zastosujmy teraz powyższą nierówność do pary  $(-f, -g)$  i skorzystajmy z jednorodności całki:

$$-\int_a^b f + g = \int_a^b -f - g \leq \int_a^b -f + \int_a^b -g = -\left(\int_a^b f + \int_a^b g\right). \quad (188)$$

Łącząc otrzymane nierówności, mamy:

$$\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g$$

#### Twierdzenie 6.5.

Niech  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  będą funkcjami całkowalnymi. Wtedy  $f \cdot g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  także jest całkowalna.

#### Dowód.

Niech  $F : [a, n] \ni x \mapsto x^2$ . Jest to funkcja ciągła. Wtedy  $f \cdot g = \frac{1}{4}(F \circ (f + g) - F \circ (f - g))$  jest całkowalna na podstawie udowodnionych już własności.

**Przykład - funkcja Dirichleta** Niech

$$Z(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}. \quad (189)$$

Funkcja ta nie jest całkowalna na żadnym przedziale, gdyż dla każdego podziału  $\pi \leq [a, b]$ , mamy:

$$\overline{S}(Z, \pi) = b - a \neq 0 = \underline{S}(Z, \pi), \quad (190)$$

gdyż w każdym przedziale o niezerowej długości znajdują się zarówno liczby wymierne jak i niewymierne.

#### Twierdzenie 6.6.

Niech  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  - całkowalne i  $\forall_{x \in [a, b]} : f(x) \leq g(x)$  - lub pisząc prościej:  $f \leq g$ . Wtedy:

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g. \quad (191)$$

**Dowód.**

Dowód niesamowicie prosty - skoro  $f \leq g$ , to  $\bar{S}(f, \pi) \leq \bar{S}(g, \pi)$  dla każdego podziału  $\pi$ . Zatem oczywiście:

$$\int_a^b f = \inf_{\pi} \bar{S}(f, \pi) \leq \inf_{\pi} \bar{S}(g, \pi) = \int_a^b g.$$

**Twierdzenie 6.7.**

Niech  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  - całkowalna. Wtedy  $|f|$  jest także całkowalna i:

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|. \quad (192)$$

**Dowód.**

$|f|$  musi być całkowalna, jako złożenie funkcji ciągłej  $F(x) = |x|$  i funkcji całkowalnej  $f$ . Ponadto istnieje taka liczba  $\sigma = \pm 1$ :

$$\sigma \int_a^b f = \left| \int_a^b f \right|.$$

Ale, korzystając z poprzedniego rezultatu:

$$\left| \int_a^b f \right| = \sigma \int_a^b f = \int_a^b \sigma f \leq \int_a^b |\sigma f| = \int_a^b |f|,$$

gdyż  $\sigma f \leq |f|$ .

**Obserwacja 6.2.**

- Niech  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Ponadto, niech  $f = g$  na  $[a, b] \setminus S$ , gdzie  $|S| < \infty$  - tj.  $f$  i  $g$  zgadza się z sobą na całym przedziale poza skończoną liczbą punktów. Wtedy  $f$  jest całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy  $g$  jest całkowalna i jeśli to zachodzi, to:

$$\int_a^b f = \int_a^b g.$$

- Niech  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  - całkowalna i niech  $[c, d] \subseteq [a, b]$ . Wtedy  $f|_{[c, d]}$  także jest całkowalna.
- Zdefiniujmy funkcję charakterystyczną zbioru  $A$ :

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}. \quad (193)$$

Wtedy, jeśli  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest całkowalna, to dla  $[c, d] \subseteq [a, b]$  mamy:

$$\int_a^b \chi_{[c, d]} \cdot f = \int_c^d f|_{[c, d]} = \int_c^d f. \quad (194)$$

Ostatnie wyrażenie jest wygodniejszym zapisem tejże wielkości.

**Twierdzenie 6.8.**

Niech  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  - całkowalna i  $c \in ]a, b[$ . Wtedy:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f. \quad (195)$$

**Dowód.**

$$\int_a^b f = \int_a^b (\chi_{[a,c]}f + \chi_{[c,b]}f) = \int_a^b \chi_{[a,c]}f + \int_a^b \chi_{[c,b]}f = \int_a^c f + \int_c^b f, \quad (196)$$

bo  $f$  i  $\chi_{[a,c]}f + \chi_{[c,b]}f$  różnią się tylko w jednym punkcie ( $x = c$ ).

**Definicja 6.5. Wypunktowanie**

Niech  $\pi = (t_0, \dots, t_n)$  będzie podziałem  $[a, b]$ . Wtedy **wypunktowaniem**  $\pi$  nazywamy ciąg skończony:

$$\Xi = (\xi_1, \dots, \xi_n), \quad (197)$$

t.ż.  $\xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$ .

Ponadto, jeśli  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , to **sumą wypunktowaną** podziału  $\pi$  i wypunktowania  $\Xi$  nazywamy:

$$S(f, \pi, \Xi) = \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})f(\xi_i). \quad (198)$$

Średnicą podziału  $\pi$  nazwiemy liczbę:

$$\text{Diam}(\pi) = \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1}). \quad (199)$$

**Twierdzenie 6.9.**

Niech  $f \in C([a, b])$  (funkcje ciągłe na  $[a, b]$ ) i  $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  będzie ciągiem podziałów  $[a, b]$ , t.ż.:

$$\text{Diam}(\pi_n) \rightarrow 0. \quad (200)$$

Niech  $(\Xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  będzie ciągiem wypunktowań  $\pi_n$ .

Wtedy:

$$S(f, \pi_n, \Xi_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f \quad (201)$$

**Dowód.**

Zacznijmy od tego, że  $f$  jako funkcja ciągła jest całkowalna. Ponadto,  $f$  jako ciągła na zwartym przedziale jest jednostajnie ciągła:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon : |s - t| \leq \delta_\varepsilon \implies |f(s) - f(t)| \leq \varepsilon. \quad (202)$$

Niech  $\pi$  będzie takim podziałem, że  $\text{Diam}(\pi) \leq \delta_{\frac{\varepsilon}{b-a}}$ . Wtedy:

$$\bar{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) = \sum_{i=1}^n \left( \sup_{[t_i, t_{i-1}]} f - \inf_{[t_i, t_{i-1}]} f \right) (t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{b-a} (t_i - t_{i-1}) = \varepsilon, \quad (203)$$

co wynika z tego, że skoro  $(t_i - t_{i-1}) \leq \delta_{\frac{\varepsilon}{b-a}}$ , to wartości  $f$  na tym przedziale są nie dalej niż  $\frac{\varepsilon}{b-a}$ , więc także jest tak dla supremum i infimum  $f$  na tym przedziale.

Ponadto, dla dowolnego wypunktowania  $\Xi$  podziału  $\pi$ :

$$\underline{S}(f, \pi) = \sum_{i=1}^n \inf_{[t_i, t_{i-1}]} f (t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i) (t_i - t_{i-1}) = S(f, \pi, \Xi) \quad (204)$$

oraz:

$$S(f, \pi, \Xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) (t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n \sup_{[t_i, t_{i-1}]} f (t_i - t_{i-1}) = \bar{S}(f, \pi), \quad (205)$$

czyli:

$$\underline{S}(f, \pi) \leq S(f, \pi, \Xi) \leq \bar{S}(f, \pi). \quad (206)$$

Jednak zachodzi też:

$$\underline{S}(f, \pi) \leq \int_a^b f \leq \bar{S}(f, \pi), \quad (207)$$

Zatem:

$$\left| S(f, \pi, \Xi) - \int_a^b f \right| \leq \bar{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) \leq \varepsilon. \quad (208)$$

Jśli dla ustalonego  $\varepsilon > 0$  w naszym ciągu  $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , wybierzemy takie  $N$ , że dla  $n \geq N$ :

$$\text{Diam}(\pi_n) \leq \delta_{\frac{\varepsilon}{b-a}}, \quad (209)$$

to:

$$\bar{S}(f, \pi_n) - \underline{S}(f, \pi_n) \leq \varepsilon \quad (210)$$

i:

$$\left| S(f, \pi_n, \Xi_n) - \int_a^b f \right| \leq \varepsilon \quad (211)$$

dla  $n \geq N$ . Zatem rzeczywiście:

$$S(f, \pi_n, \Xi_n) \rightarrow \int_a^b f. \quad (212)$$

#### Definicja 6.6.

Dla  $a > b$  definiujemy:

$$\int_a^b f := - \int_b^a f. \quad (213)$$

Ponadto:

$$\int_a^a f := 0. \quad (214)$$

Zauważmy, że wtedy Twierdzenie 6.9 zachodzi dla dowolnego ułożenia  $a, b, c$ .

**Twierdzenie 6.10. Zasadnicze Twierdzenie Rachunku Całkowego I**

Niech  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  - całkowalna. Ponadto zdefiniujmy  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$F(x) = \int_a^x f. \quad (215)$$

Wiemy, że powyższe wyrażenie ma sens dla  $x \in [a, b]$ .

Wtedy:

- $F$  jest ciągła,
- jeśli  $f$  jest ciągła w  $x_0$ , to  $F$  jest różniczkowalna tamże i:

$$F'(x_0) = f(x_0). \quad (216)$$

**Dowód.**

Dowód

- Skoro  $f$  jest całkowalna, to musi być ograniczona:

$$\exists_M \forall_x : |f(x)| \leq M.$$

Zatem dla  $x > y$ :

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_a^x f - \int_a^y f \right| = \left| \int_y^x f \right| \leq \int_y^x |f| \leq M|x - y|, \quad (217)$$

czyli  $F$  jest Lipschitzowska, a więc i ciągła.

- Niech  $f$  będzie ciągła w  $x_0$ . Obliczmy iloraz różnicowy  $F$ :

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f = \frac{1}{|h|} \int_c^d f, \quad (218)$$

gdzie:

$$[c, d] = \begin{cases} [x_0, x_0 + h] & h > 0 \\ [x_0 + h, x_0] & h < 0 \end{cases}. \quad (219)$$

Skoro  $f$  jest ciągła w  $x_0$ , to:

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta_\varepsilon} : |t - x_0| \leq \delta_\varepsilon \implies |f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon. \quad (220)$$

Wtedy dla  $|h| \leq \delta_\varepsilon$  i  $t \in [c, d]$ :

$$f(x_0) - \varepsilon \leq f(t) \leq f(x_0) + \varepsilon. \quad (221)$$

Zatem, całkując obustronnie:

$$|h|(f(x_0) - \varepsilon) \leq \int_c^d f \leq |h|(f(x_0) + \varepsilon), \quad (222)$$

i dalej:

$$f(x_0) - \varepsilon \leq \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \leq f(x_0) + \varepsilon, \quad (223)$$

dla  $|h| \leq \delta_\varepsilon$ . Zatem:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon : |h| \leq \delta_\varepsilon \implies \left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| \leq \varepsilon. \quad (224)$$

Jest to inne wyrażenie równości:

$$F'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0). \quad (225)$$

Zauważmy, że skoro:

$$\int_{x_0}^x f = - \int_a^{x_0} f + \int_a^x f, \quad (226)$$

gdzie  $\int_a^{x_0} f = \text{const.}$ , to zdefiniowanie  $F$  jako całki od  $a$  lub od  $x_0$  przesuwają ją jedynie i stałą i nie zmieniają jej własności.

#### Definicja 6.7. Funkcja pierwotna

Niech  $f$  będzie daną funkcją. Jeśli  $F$  jest taką funkcją, że  $F' = f$ , to  $F$  nazywamy **funkcją pierwotną** do  $f$ .

#### Obserwacja 6.3.

Dla każdej funkcji ciągłej  $f$  na  $[a, b]$  istnieje funkcja do niej pierwotna:

$$F(x) = \int_a^x f. \quad (227)$$

#### Twierdzenie 6.11. Zasadnicze Twierdzenie Rachunku Całkowego II

Jeśli  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest całkowna, a  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła na  $[a, b]$  i różniczkowalna na  $]a, b[$  oraz ponadto:

$$\forall x \in ]a, b[ : F'(x) = f(x), \quad (228)$$

to wtedy:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a). \quad (229)$$

#### Dowód.

Weźmy  $\varepsilon > 0$ . Niech  $\pi$  będzie takim podziałem  $[a, b]$ , że:

$$\overline{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) \leq \varepsilon. \quad (230)$$

Niech  $\pi = (t_0, \dots, t_n)$ . Niech  $\Xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  będzie wypunktowaniem  $\pi$  t.ż.:

$$\frac{F(t_i) - F(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} = F'(\xi_i) = f(\xi_i). \quad (231)$$

$\xi_i \in ]t_i, t_{i-1}[$  spełniające powyższy warunek będzie istnieć na mocy Twierdzenia Lagrange'a.  
Skoro:

$$\overline{S}(f, \pi) \leq S(f, \pi, \Xi) \leq \underline{S}(f, \pi) \quad (232)$$

oraz:

$$\overline{S}(f, \pi) \leq \int_a^b f \leq \underline{S}(f, \pi), \quad (233)$$

to:

$$\left| \int_a^b f - S(f, \pi, \Xi) \right| \leq \varepsilon. \quad (234)$$

Mamy też:

$$S(f, \pi, \Xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^n F'(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^n F(t_i) - F(t_{i-1}) = F(b) - F(a). \quad (235)$$

Zatem:

$$\forall \varepsilon > 0 : \left| \int_a^b f - (F(b) - F(a)) \right| \leq \varepsilon. \quad (236)$$

Wielkości te muszą więc być równe sobie:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a). \quad (237)$$

#### Twierdzenie 6.12. Całkowanie przez części

Niech  $F, G \in C([a, b])$  - różniczkowalne na  $]a, b[$ . Niech ponadto  $f = F'$  i  $g = G'$  - całkowne na  $[a, b]$  (zauważmy, że całkowność  $f, g$  nie zależy od ich wartości w  $a$  i  $b$ , por. Obs. 6.2).

Wtedy:

$$\int_a^b f G = G \cdot F \Big|_a^b - \int_a^b F g. \quad (238)$$

#### Dowód.

$F \cdot G$  jest funkcją pierwotną do  $Fg + fG$ . Zatem  $Fg + fG$  jest całkowna (jako suma i iloczyn f. całkownych) i:

$$\int_a^b (Fg + fG) = G \cdot F \Big|_a^b, \quad (239)$$

co wynika z Tw. 6.11. Korzystając z liniowości całki i z tego, że każda z funkcji  $Fg$  i  $fG$  jest całkowna, dostajemy tezę.

#### Twierdzenie 6.13. Całkowanie przez podstawienie

Niech  $\varphi \in C([a, b])$  będzie ściśle rosnącą funkcją różniczkowalną na przedziale  $]a, b[$ . Niech  $[c, d] = \varphi([a, b])$  (wiemy że obrazem zwartego przedziału przy funkcji ciągłej będzie zwarty przedział). Niech  $f \in C([c, d])$ .

Wtedy funkcja  $(f \circ \varphi)\varphi'$  t.ż.:

$$[a, b] \ni x \mapsto f(\varphi(x))\varphi'(x) \in R, \quad (240)$$

jest całkowalna i :

$$\int_a^b (f \circ \varphi)\varphi' dx = \int_c^d f(y)dy. \quad (241)$$

Zauważmy, że w punktach  $a, b$  funkcja  $(f \circ \varphi)\varphi'$  nie jest dobrze określona, jednak możemy przyjąć tam dowolne wartości, co nie zmieni całkowalności.

Uwaga! W twierdzeniu tym zamiast ciągłości  $f$  przyjąć możemy słabsze założenia:

- $f$  ma funkcję pierwotną,
- $(f \circ \varphi)\varphi'$  jest całkowalna.

### Dowód.

$f \circ \varphi$  jest całkowalna jako złożenie dwu funkcji ciągłych. Po pomnożeniu przez  $\varphi'$ , całkowalną na mocy założeń, otrzymamy funkcję całkowalną  $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ . Niech:

$$F(y) = \int_c^y f dy,$$

dla  $y \in [c, d]$ .  $F$  jest różniczkowalna i  $F' = f$ . Jeśli przyjmujemy ogólniejsze założenia, to  $F$  jest funkcją pierwotną do  $f$  taką, że  $F(c)$ . Taka zawsze istnieje, gdyż jeśli  $G$  jest dowolną f. pierwotną do  $f$ , to  $F = G - G(c)$  także nią jest. Wtedy także  $F \circ \varphi$  jest różniczkowalna na na  $]a, b[$  i:

$$(F \circ \varphi)' = (F' \circ \varphi) \cdot \varphi' = (f \circ \varphi) \cdot \varphi'.$$

Zatem  $F \circ \varphi$  jest funkcją pierwotną do  $(f \circ \varphi)\varphi'$  na  $]a, b[$ . Zatem, zgodnie z 6.11:

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = (F \circ \varphi)(b) - (F \circ \varphi)(a),$$

ale, skoro  $\varphi$  jest ściśle rosnąca, to  $\varphi(a) = c$  i  $\varphi(b) = d$ , więc:

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(d) - F(c).$$

Ale  $F$  jest funkcją pierwotną do  $f$ , więc:

$$\int_c^d f(y)dy = F(d) - F(c).$$

Porównując dwa poprzednie równania, mamy tezę:

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_c^d f(y)dy.$$



## 6.2 Funkcje logarytmiczna i wykładnicza

### Definicja 6.8. Logarytm naturalny

Dla  $x > 0$  zdefiniujemy funkcję  $\log x : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t} dt. \quad (242)$$

Na mocy Tw. 6.10,  $\log$  jest ciągły i różniczkowalny na całej dziedzinie oraz:

$$(\log x)' = \frac{1}{x}. \quad (243)$$

Z tego widać też, że  $\log$  jest funkcją ściśle rosnącą.

### Twierdzenie 6.14.

Niech  $x, y \in ]0, \infty[$ . Wtedy:

$$\log(xy) = \log x + \log y.$$

### Dowód.

$$\log(xy) = \int_1^{xy} \frac{1}{t} dt = \int_1^y \frac{1}{t} dt + \int_y^{xy} \frac{1}{t} dt = \log y + \int_y^{xy} \frac{1}{t} dt.$$

Weźmy pod lupę tę ostatnią całkę i użyjmy tu podstawienia:  $\varphi(t) = yt$ ,  $\varphi'(t) = y > 0$ . Wtedy:

$$\int_y^{xy} \frac{1}{t} dt = \int_{\varphi^{-1}(y)}^{\varphi^{-1}(xy)} \frac{1}{\varphi(t)} \varphi'(t) dt = \int_1^x \frac{1}{t} dt = \log x.$$

Podstawiając powyższą wartość do wyjściowego równania otrzymujemy tezę.

### Twierdzenie 6.15.

Niech  $r \in \mathbb{Q}$ ,  $x \in ]0, \infty[$ . Wtedy:

$$\log(x^r) = r \log x.$$

### Dowód.

Ponownie, używając łatwego podstawienia:

$$\log(x^r) = \int_1^{x^r} \frac{1}{t} dt = \int_1^x \frac{rt^{r-1}}{t^r} dt = r \log x.$$

Użyliśmy tu podstawienia:  $\varphi(x) = x^r$ .

Zauważmy, że  $\log$  jest ciągły na przedziale spójnym, jego obrazem więc będzie przedział. Żeby wyznaczyć jego postać, zauważmy, że:

$$\log 2 = \int_1^2 \frac{1}{t} dt \geq \frac{1}{2} > 0 \quad (244)$$

i ogólnie  $\log x \geq \frac{x-1}{x}$ , dla  $x \geq 1$ . Stąd:

$$\log(2^n) = n \log 2 \geq \frac{1}{2} n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty. \quad (245)$$

Stąd z monotoniczności  $\log$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log x = \infty. \quad (246)$$

Podobnie:

$$\log(2^{-n}) = -n \log 2 \leq -\frac{1}{2} n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty, \quad (247)$$

czyli:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log x = -\infty. \quad (248)$$

Zatem przeciwobrazem  $\log$  jest  $\mathbb{R}$ . Stąd i z monotoniczności (implikującej różnowartościowość) i ciągłości (pociągającej suriektywność) mamy:

#### Obserwacja 6.4.

$\log : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  jest różniczkowalną bijekcją  $]0, \infty[$  na  $\mathbb{R}$ .

Wynika stąd, że istnieje funkcja odwrotna do  $\log$  i ona także będzie różniczkowalną bijekcją.

#### Definicja 6.9. Funkcja wykładnicza

Funkcję:

$$\exp(x) : \mathbb{R} \rightarrow ]0, \infty[, \quad (249)$$

będącą funkcją odwrotną do  $\log$  nazywamy **funkcją wykładniczą**. Jest to różniczkowalna bijekcja.

#### Twierdzenie 6.16. Pochodna funkcji wykładniczej

$$(\exp)' = \exp. \quad (250)$$

Wynika stąd, że  $\exp$  jest klasy  $C^\infty(\mathbb{R})$ .

#### Dowód.

Niech  $t \in \mathbb{R}$  t.ż.  $t = \log x$ . Wtedy z własności pochodnej funkcji odwrotnej:

$$\exp'(t) = \exp'(\log x) = \frac{1}{\log' x} = x = \exp(t). \quad (251)$$

Zauważmy, że skoro  $\log(1) = 0$ , to  $\exp(0) = \exp^{(n)}(0) = 1$  dla każdego  $n \in \mathbb{N}$ . Możemy więc rozpisać wzór Taylora dla  $\exp$  wokół zera:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} x^n + \frac{1}{N!} \exp(\xi) x^N, \quad (252)$$

dla  $\xi$  pomiędzy 0 i  $x$ . Zauważmy jednak, że wyraz resztowy dąży do zera wraz z  $N$ :

$$\frac{1}{N!} \exp(\xi) x^N \leq \frac{1}{N!} \exp(|x|) t^N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \quad (253)$$

Zatem  $\exp$  jest granicą (punktową! - zob. następna sekcja) swoich rozwinięć Taylora.

#### Obserwacja 6.5.

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (254)$$

#### Definicja 6.10. Liczba $e$

Liczbą  $e$  Eulera nazywamy wielkość:

$$e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}. \quad (255)$$

#### Definicja 6.11. Potęgowanie

Niech  $a > 0$  i  $t \in \mathbb{R}$ . Definiujemy:

$$a^t = \exp(t \log a). \quad (256)$$

Zauważmy, że definicja ta, dla  $t \in \mathbb{Q}$  pokrywa się ze standardową definicją potęgi (na mocy Tw. 6.15). Ponadto, z ciągłości  $\exp$  i  $\log$  wynika, że  $a^t$  jest ciągłą funkcją zarówno podstawy jak i wykładnika.

Zgodnie z powyższą definicją mamy:

$$e^x = \exp x \quad (257)$$

i zapisów tych używać będziemy zamiennie.

Powiemy teraz trochę o rozszerzeniu  $\exp$  na całą przestrzeń liczb całkowitych.

#### Definicja 6.12. Zespolona funkcja wykładnicza

Funckję  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ :

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad (258)$$

będącą rozszerzeniem poprzednio zdefiniowanej funkcji  $\exp$  na dziedzinę liczb zespolnych, dalej nazywać będziemy funkcją wykładniczą.

Zauważmy, że z kryterium D'Alemberta wynika, że jest to szereg zbieżny bezwzględnie. Rozszerzając dziedzinę  $\exp$ , tracimy własności bijekcji.

#### Twierdzenie 6.17.

Dla zespolonej funkcji wykładniczej zachodzi wzór:

$$\exp(z)\exp(w) = \exp(w + z), \quad (259)$$

gdzie  $w, z \in \mathbb{C}$ .

#### Dowód.

$$\exp(z)\exp(w) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \quad (260)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{z^k w^{n-k}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = \exp(z+w). \quad (261)$$

Skorzystaliśmy tu z tzw. Twierdzenia Mertensa (nie załączonego w tym skrypcie), które mówi, że jeśli oba szeregi są zbieżne bezwzględnie, to ich iloczyn jest równy ich iloczynowi Cauchy'ego.

#### Twierdzenie 6.18.

Zespolona funkcja wykładnicza jest:

- ciągła,
- różniczkowalna w sęsie zespolonym i jej pochodna jest równa  $\exp$ . Oznacza to, że:

$$\exp'(z) = \lim_{\mathbb{C} \ni w \rightarrow 0} \frac{\exp(z+w) - \exp(z)}{w} = \exp(z). \quad (262)$$

Powyższą granicę bierzemy po wszystkich ciągach liczb zespolonych dążących do  $z$ .

#### Dowód.

Mamy następującą równość:

$$\exp(z+w) - \exp(z) = \exp(z)(\exp(w) - 1) = \exp(z) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n!} = \exp(z)w \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{(n+1)!}.$$

Gdy  $w \rightarrow 0$ , to prawa część równości dąży do zera, więc funkcja jest ciągła. Policzmy teraz iloraz różnicowy:

$$\frac{\exp(z+w) - \exp(z)}{w} = \exp(z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{(n+1)!} \xrightarrow{w \rightarrow 0} \exp(z),$$

jest tak, gdyż, gdy  $|w| < c$ :

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{(n+1)!} \right| \leq |w| \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^{n-1}}{(n+1)!} \right| \leq |w| \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^{n-1}}{(n+1)!} \right| \rightarrow 0.$$

### Definicja 6.13. Funkcje trygonometryczne

Używając zespolonej funkcji wykładniczej, definiujemy funkcje trygonometryczne zespolonego argumentu.

Funkcją **sinus** nazywamy funkcję:

$$\sin z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}. \quad (263)$$

Funkcją **cosinus** nazywamy funkcję:

$$\cos z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}. \quad (264)$$

### Obserwacja 6.6.

Łatwo widzieć, że funkcje sinus i cosinus rozwijają się w szereg następująco:

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad (265)$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}. \quad (266)$$

Ze wzorów tych bezpośrednio widzieć, że jeśli zawężymy  $\sin$  i  $\cos$  do dziedziny rzeczywistej, to ich wartości także będą rzeczywiste.

Ponadto różniczkując wzory definiujące  $\sin$  i  $\cos$  widzimy, że:

$$\sin' = \cos \quad (267)$$

i:

$$\cos' = -\sin. \quad (268)$$

Skorzystaliśmy tutaj z liniowości zespolonej pochodnej, którą dowodzi się identycznie jak w przypadku rzeczywistym.

Z bezpośredniego rachunku widzieć, że:

$$\cos 0 = 1 \quad (269)$$

i:

$$\cos 2 = 1 - 2 + \frac{4}{45} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} < 0. \quad (270)$$

. Ostatni składnik jest szeregiem naprzemiennym o malejących modułach, na pewno więc będzie ujemny. Ponadto, gdy  $x \in ]0, 2]$ :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} > 0. \quad (271)$$

Podobnie, czynnik z prawej jest szeregiem naprzemiennym o malejących modułach, a wyrazy z lewej na badanym przedziale są dodatnie. Wynika stąd, że  $\cos$  na przedziale  $]0, 2]$  jest ściśle malejący i przeto, jako że zmienia znak na końcach tego przedziału i jest ciągły, ma weń dokładnie jedno zero.

#### Definicja 6.14. Liczba $\pi$

Jedyną liczbę  $\pi$ , taką że:

- $\frac{1}{2}\pi \in ]0, 2], \quad (272)$

- $\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 0 \quad (273)$

nazywamy **liczbą  $\pi$** .

Zauważmy też, że bezpośrednio z rozwinięcia  $\exp$  w szereg, wynika że:

$$\overline{\exp(it)} = \exp \bar{it} = \exp(-it) = \frac{1}{\exp(it)}, \quad (274)$$

stąd:

$$|\exp(it)| = 1. \quad (275)$$

#### Obserwacja 6.7. Wzór Eulera

Bespośrednio z definicji wynika następujący wzór:

$$\exp(it) = \cos t + i \sin t. \quad (276)$$

Ponadto, gdy  $t \in \mathbb{R}$ :

$$\Re(\exp(it)) = \cos t \quad \Im(\exp(it)) = \sin t. \quad (277)$$

## 7 Ciągi funkcyjne

### Definicja 7.1. Zbieżność punktowa

Niech  $X$  będzie zbiorem a  $Y$  - p-ń. metryczną. Niech  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  będzie ciągiem funkcji:  $f_n : X \rightarrow Y$ . Mówimy, że  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **zbiega punktowo** do funkcji  $f : X \rightarrow Y$ , jeśli:

$$\forall_{x \in X} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x). \quad (278)$$

Zapiszemy wtedy:

$$f_n \xrightarrow{\text{punk.}} f. \quad (279)$$

### Definicja 7.2. Zbieżność jednostajna

Mówimy, że ciąg  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  funkcji  $f_n : X \rightarrow Y$  wbiega jednostajnie do funkcji  $f$ , gdzie  $(Y, d)$  to p-ń metryczna, jeśli:

$$\sup_{x \in X} d(f_n(x), f(x)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (280)$$

Zapiszemy wtedy:

$$f_n \xrightarrow{\text{jedn.}} f. \quad (281)$$

Jeśli  $f_n$  dążą do  $f$  jednostajnie na każdym zwartym podziorze  $X$ :

$$\forall_{K \subseteq X} f_n|_K \xrightarrow{\text{jedn.}} f|_K, \quad (282)$$

to powiemy, że  $f_n$  zbiegają do  $f$  **niemal jednostajnie**.

### Obserwacja 7.1.

Jeśli  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  jest zbieżny do  $f$  jednostajnie lub niemal jednostajnie, to zbiega  $f$  także punktowo.

Jest to oczywista konsekwencja podanych definicji.

**Przykład 1.** Niech  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  będzie ciągiem funkcji postaci:

$$[0, 1] \ni x \mapsto f_n(x) = x^n \in \mathbb{R}. \quad (283)$$

Wtedy, jak łatwo widać:

$$f_n \xrightarrow{\text{punk.}} f = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 0 & 0 \leq x < 1 \end{cases}. \quad (284)$$

$f_n$  nie zbiegają jednostajnie do  $f$ , bo:

$$\forall_{\varepsilon \in ]0, 1[ , n \in \mathbb{N}} \exists_{x = \varepsilon^{\frac{1}{n}}} : |f(x) - f_n(x)| = \varepsilon \leq \varepsilon. \quad (285)$$

Zatem:

$$\forall_{\varepsilon, n} : \sup |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon. \quad (286)$$

**Przykład 2.** Weźmy ciąg funkcji  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  określonych następująco:

$$f_n = \begin{cases} 0 & x \in ]-\infty, n-1] \cup [n+1, \infty[ \\ n(x-n-1) & x \in ]n-1, n] \\ n(n+1-x) & x \in ]n, n+1[ \end{cases}. \quad (287)$$

Wykresem  $f_n$  jest "ząbek" o środku w  $n$ , wysokości  $n$  i szerokości 2. Oczywiście  $f_n \xrightarrow{\text{punk.}} f := 0$ , bo "ząbek" idąc w prawo, w końcu minie każdą liczbę. Jednakże  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f| = n$  i rozbiega ono do nieskończoności wraz z  $n$ . Tutaj  $f_n$  zbiegają do  $f$  niemal jednostajnie.

### Definicja 7.3.

Niech  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  będzie ciągiem funkcji t.z.  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Wtedy ciąg funkcji  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  t.z.:

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x) \quad (x \in X) \quad (288)$$

nazywamy **szeregiem funkcyjnym**. Jeśli  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  jest zbieżny do  $g$  (jakkolwiek), to piszemy:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x). \quad (289)$$

### Twierdzenie 7.1. Kryterium Weierstrassa

Niech  $X$  będzie zbiorem. Roważmy ciąg funkcyjny  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  i szereg funkcyjny  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ :

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x) \quad (x \in X). \quad (290)$$

Załóżmy, że istnieje szereg skalarny  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ , zbieżny bezwzględnie, o tej własności, że:

$$\forall_{x \in X, n} : |f_n(x)| \leq b_n. \quad (291)$$

To szereg:

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \quad (292)$$

jest zbieżny jednostajnie.



**Dowód.**

Jeśli ustalimy  $x \in X$ , to  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  jest zbieżny bezwzględnie, z kryterium porównawczego z  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ . Bierzemy:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (x \in X).$$

Oczywiście  $g_n \xrightarrow{\text{punk.}} g$ . Ponadto:

$$|g(x) - g_N(x)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=1}^N f_n(x) \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n.$$

Zatem:

$$\sup_{x \in X} |g(x) - g_N(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0,$$

co wynika z warunku Cauchy'ego dla zbieżnego szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ . Zatem:

$$g_n \xrightarrow{\text{jedn.}} g.$$

**Definicja 7.4. Funkcja ograniczona**

Funkcję  $f : X \rightarrow Y$ , gdzie  $Y$  to p-ń. metryczna, nazywamy **ograniczoną**, jeśli zbiór  $f(X)$  jest ograniczony.

Symbolem  $\mathbb{B}(X, Y)$  oznaczamy zbiór wszystkich funkcji ograniczonych z  $X$  do  $Y$ .

**Definicja 7.5. Przestrzeń jednostajna**

Niech  $X$  to zbiór a  $Y$  - p-ń. metryczna. Wtedy na zbiorze  $\mathbb{B}(X, Y)$  wprowadzamy metrykę  $\rho$  wzorem:

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)), \quad (f, g \in \mathbb{B}(X, Y)).$$

Metrykę tę nazywamy **metryką jednostajną** a  $(\mathbb{B}(X, Y), \rho)$  - **przestrzenią jednostajną**.

Zauważmy, że rzeczywiście jest to dobrze określona funkcja, gdyż skoro  $f$  i  $g$  są ograniczone, to:

$$f(X) \subseteq \text{Ball}(y_1, r_1), \quad g(X) \subseteq \text{Ball}(y_2, r_2).$$

Zatem:

$$\sup_{x \in X} d(f(x), g(x)) \leq r_1 + r_2 + d(y_1, y_2) < \infty.$$

Ponadto łatwo widać, że  $\rho$  spełnia wszystkie inne warunki metryki. Zarysujmy np. dowód nierówności trójkąta:

$$\begin{aligned} \rho(f, g) &= \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)) \leq \sup_{x \in X} (d(f(x), h(x)) + d(g(x), h(x))) \leq \\ &\leq \sup_{x \in X} d(f(x), h(x)) + \sup_{x \in X} d(g(x), h(x)) = \rho(f, h) + \rho(g, h). \end{aligned} \quad (293)$$

**Koniec**

## Spis treści

<b>1</b>	<b>Wstęp</b>	<b>2</b>
1.1	Relacje . . . . .	2
1.2	Liczby rzeczywiste . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Ciagi rzeczywiste</b>	<b>6</b>
2.1	Pojęcie ciągu i ogólne rezultaty . . . . .	6
2.2	limsup i liminf . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Szeregi liczbowe</b>	<b>13</b>
3.1	Szeregi o wyrazach dodatnich . . . . .	14
3.2	Szeregi o wyrazach dowolnych . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Przestrzenie metryczne</b>	<b>26</b>
4.1	Podstawowe definicje. Otwartość i domkniętość . . . . .	26
4.2	Przekształcenia ciągłe . . . . .	35
4.3	Zwartość . . . . .	37
4.4	Spójność . . . . .	45
<b>5</b>	<b>Rachunek różniczkowy</b>	<b>47</b>
<b>6</b>	<b>Rachunek całkowy</b>	<b>52</b>
6.1	Całka Riemanna . . . . .	52
6.2	Funkcje logarytmiczna i wykładnicza . . . . .	65
<b>7</b>	<b>Ciagi funkcyjne</b>	<b>71</b>