Ejercicio 6.3.8 Sea la f.d. del importe de los siniestros de Pareto(α,0,1). El reaseguro de exceso de pérdida se contrata con una retención neta máxima M. Calcular M con un decimal a partir de (6.1.10) cuando α=1,5; U_r=30; n=100; λ=0,03; σ_q=0 y y_ε=2,33. Clave: obtener una expresión para U_r como función de M y luego encontrar (por prueba y error) el valor numérico solicitado de M.

6.4 Una aplicación a la tarificación

(a) El problema. No es necesario limitar la aplicación de la teoría del riesgo al proceso siniestral o a la suscripción de toda la cartera o de algún ramo específico. Por el contrario, la teoría es aplicable a cualquier grupo de seguros. Un ejemplo es el tratamiento convencional de las estadísticas para la determinación de las tarifas de los seguros. Las unidades de riesgo se clasifican en grupos homogéneos y el problema es cuán grande debe ser un grupo para brindar una base estadística adecuada para la determinación de las tasas de las primas. Por supuesto, se pueden utilizar los métodos corrientes de la estadística matemática, pero las fórmulas obtenidas en la sección 6.1 pueden ser útiles para efectuar cálculos rápidos. Una ventaja es que hacen uso de las propiedades especiales del proceso siniestral, que puede mejorar la eficiencia del enfoque, en particular con respecto a la asimetría usual de las distribuciones de siniestros.

Como ejemplo consideremos un grupo de pólizas similares de seguros contra incendio u otros sobre la propiedad que se han observado durante un período determinado. Supongamos que el importe total de los siniestros ha sido X=8,00, utilizando el millón de libras como unidad monetaria. Con la misma unidad monetaria la suma total asegurada para el grupo de pólizas es S=7.000. El llamado costo según experiencia siniestral **"burning cost"** puede estimarse como f=X/S=1,14 por mil. El problema es evaluar la precisión de esta estimación de la experiencia siniestral subyacente.

(b) Límites de confianza. Suponiendo que se aplica la distribución de Poisson mixta compuesta, los límites de confianza se obtienen como una aplicación directa de (6.1.7). Puede esperarse que el importe acumulado de siniestros $\boldsymbol{X}$ que se observa durante el período de interés caiga en el intervalo

$$X_1 \leq \boldsymbol{X} \leq X_2 \qquad (6.4.1)$$

con probabilidad 1-2ε, donde los límites se definen mediante las ecuaciones

$$F(X_1) = \varepsilon, \text{ y } F(X_2) = 1 - \varepsilon. \qquad (6.4.2)$$

Por consiguiente, el burning cost está, con la misma probabilidad, dentro del intervalo

$$X_1/S \leq \boldsymbol{f} \leq X_2/S. \qquad (6.4.3)$$

Supongamos en el ejemplo anterior que se pueden aplicar los parámetros numéricos siguientes((6.1.10), (6.1.11) y (6.1.11*a*))

$$n = 5000;\ r_2 = 40;\ r_3 = 4000;\ \sigma_q = 0{,}1;$$

$$\gamma_q = 0{,}5;\ \varepsilon = 0{,}025. \qquad (6.4.4)$$

La intensidad de siniestros media observada es X/n=0,00160, que puede utilizarse como una estimación para la media m. Es más, el desvío estándar σ_X y la asimetría γ_X pueden calcularse a partir de (3.2.15), obteniendo los valores 1,07 y 0,37 respectivamente. Entonces, aplicando la fórmula WH inversa de la sección 4.2.5(b), se obtiene el resultado numérico siguiente para (6.4.3)

$$6{,}09/7000 = 0{,}87‰ \leq f \leq 10{,}28/\ 7000 = 1{,}47‰ \qquad (6.4.5)$$

Utilizando la aproximación normal, es decir tomando

$$X_{1,2} = \mu_X \pm y_\varepsilon\, \sigma_X\ , \qquad (6.4.6)$$

los límites serían 0,84 y 1,44 por mil. La diferencia respecto del cálculo anterior se debe al hecho de que la aproximación normal ignora el efecto de la asimetría.

Si la asimetría es leve, como en el ejemplo de arriba, entonces puede utilizarse convenientemente la aproximación normal. Si la asimetría es grande, por ejemplo entre 0,5 y 1, se recomienda la fórmula WH. Si la asimetría excede 1, entonces es necesario recurrir a métodos más precisos, por ejemplo el método de recurrencia de la sección 4.1.

Ejercicio 6.4.1 Se sabe que para algunos riesgos de incendio $f \approx 0{,}1\%$ y el número de siniestros por año es cerca de 1.000. ¿Cuántos años de estadísticas se necesitan para calcular f con una precisión del 20% a un nivel de confianza del 10%? El índice de riesgo r_2 se estima en 100 y $\sigma_q = 0$. Puede utilizarse la aproximación normal.

6.5 Tarificación experimental

6.5.1 Comentarios preliminares

(a) El concepto y alcance. Un problema universal en la tarificación es el hecho de que la base estadística a menudo es escasa, incierta y a veces casi inexistente. Es común combinar riesgos similares para formar tarifas por clases y evaluar las tasas promedio para cada clase. No obstante, pueden aparecer enormes diferencias en la propensión al riesgo dentro de cada una de esas clases. Por lo tanto, algunas pólizas pueden tener una tasa excesiva y otras por debajo del valor real en beneficio o en detrimento de otras pólizas de esa clase. Para aliviar este problema se han desarrollado métodos que proporcionan correcciones individuales *a posteriori* a las tasas iniciales sobre la base de la experiencia real en siniestros, en forma de modificaciones permanentes a las tasas o mediante beneficios sobre las ganancias, descuentos y bonificaciones o recargos. En otras palabras, las tarifas de las clases son reemplazadas por **tarificaciones individuales** en casos en los que cada unidad de riesgo asegurado tiene una historia siniestral que es suficiente para que se saquen conclusiones con respecto al nivel de riesgo.

Utilizaremos la expresión **tarificación experimental** como un término general para todos estos métodos. Puede subdividirse en varias subdisciplinas, tales como la participación en las utilidades (sección 6.5.2), la nivelación exponencial (sección 6.5.3) y la credibilidad (6.5.4).

La tarificación experimental es adecuada para pólizas relativamente grandes donde ocurren siniestros pequeños permanentemente. Un ejemplo podría ser el de los accidentes personales entre el personal de una fábrica o de una empresa, o la flotilla de vehículos de tal empresa, etc. Tradicionalmente se ha considerado que el seguro de accidentes de trabajo corresponde a este método.

La tarificación experimental también puede aplicarse a la adaptación constante (semiautomática) de las tarifas generales controlando las tasas separadamente en grupos tarifarios diferentes, por ejemplo casas de ladrillos en alguna zona específica o determinadas clases de vehículos.

(b) Ventajas y desventajas. Desde el punto de vista de los asegurados, la tarificación experimental ayuda a promover la determinación justa y equitativa de las tarifas. En la medida en que sea técnicamente factible, cada unidad de riesgo debe pagar su propio costo a largo plazo. También es de interés para la aseguradora que la tarificación sea implementada del modo más confiable posible.

La **antiselección** puede constituir un problema en los casos en los que se aplican tarifas de nivel general para unidades de riesgo para las que el asegurado (o los competidores) podría evaluar si es justo el precio que se les está cobrando. Estos asegurados que estén pagando una tasa excesiva tenderán a cambiar sus pólizas a compañías que tengan un sistema más flexible de tarificación (o tal vez establezcan una compañía propia). Esto llevará a una situación en la que una proporción creciente de pólizas tendrán una tasa menor que la real, conduciendo a resultados insuficientes, aunque las tarifas de clase sean correctas como tasas promedio.

Si las primas son aprobadas por autoridades reguladoras o si están sujetas a una negociación periódica entre el asegurador y el cliente, entonces un acuerdo previo sobre las reglas que regirán fortalecerá la consistencia del proceso y reforzará la confianza de los clientes en la credibilidad y equidad de la tarificación. Los métodos de tarificación experimental pueden ser adecuados para este propósito.

La dificultad principal con este sistema de tarificación experimental es lograr una tarificación individual lo suficientemente confiable, teniendo en cuenta la base estadística generalmente limitada de la historia siniestral. En particular, el riesgo de siniestros grandes

potenciales a menudo no es evidente a partir de la experiencia individual. Este problema puede ser atenuado respaldando el método de tarificación experimental con un tratado de exceso de pérdida. Los siniestros grandes se convierten en responsabilidad del reasegurador, mientras que los siniestros pequeños y medianos se manejan por la tarificación experimental. Esto extiende el alcance de la aplicación del método.

(c) Referencias. La tarificación experimental tiene una larga trayectoria en Estados Unidos, donde generalmente se denomina **credibilidad**. Venter presenta el estado actual de esta teoría en el capítulo 7 de *Foundations of Casualty Actuarial Science* (1990), con especial atención en las aplicaciones prácticas. Goovaerts y Hoogstad (1987) presentan la teoría y una lista de referencias. De todos modos, la tarificación experimental se ha convertido en un tema independiente y amplio que ya no se considera generalmente como una rama de la teoría del riesgo. Brindar un estudio más detallado excede el alcance de este libro. Sin embargo, teniendo en cuenta el hecho de que algunas de las funciones básicas que se introducen en las secciones previas han hallado aplicación en la tarificación experimental, en este capítulo daremos un resumen del tema.

6.5.2 Participación en las utilidades

(a) Participación en las utilidades es un tipo de bonificación que a veces se encuentra en los contratos de reaseguro y también en algunos contratos de seguro directo. La incertidumbre vinculada con la determinación de las tasas de las primas P=E($\boldsymbol{X}$) se compensa fijando la prima con recargo de seguridad P_λ=(1+λ)P en un nivel conservador, con la condición de que un determinado cociente k de cualquier ganancia que surja en virtud del contrato se devolverá al asegurado.

Como ejemplo consideremos la fórmula de participación:

$$G = k.(P_\lambda - X)^+, \tag{6.5.1}$$

donde el supraíndice "+" indica que si la expresión entre paréntesis es negativa, debe reemplazarse por cero. El problema es hallar una relación entre el coeficiente de participación k y el recargo de seguridad λ, con la condición de que la ganancia esperada que será retenida por el asegurador sea al menos un monto específico $\lambda_0 P$.

La ganancia por suscripción para el asegurador entonces se define como

$$U = P_\lambda - X - G. \tag{6.5.2}$$

Su valor esperado es

$$E(U) = P_\lambda - E(X) - k \cdot \int_0^{P_\lambda} (P_\lambda - X) dF(X). \tag{6.5.3}$$

Es conveniente destacar la relación entre esta expresión y la expresión para una prima de un reaseguro del exceso de siniestralidad. La integral en (6.5.3) puede trabajarse de la manera siguiente.

$$\int_0^{P_\lambda} (X - P_\lambda) dF(X) = \int_0^{\infty} (X - P_\lambda) dF(X) - \int_{P_\lambda}^{\infty} (X - P_\lambda) dF(X) = E(X) - P_\lambda + P_{re} \tag{6.5.4}$$

donde $P_{re} = P_{re}(P_\lambda)$ es la prima de exceso de siniestralidad (3.4.26) con límite de exceso de siniestralidad $M = P_\lambda$. Reemplazando E(X) por P y P_λ por $(1+\lambda)P$ y sustituyendo (6.5.4) en (6.5.3) obtenemos

$$E(U) = \lambda P - k(P_{re} + \lambda P) = P.[\lambda.(1-k) - k.P_{re} / P]. \tag{6.5.5}$$

A partir de la condición de que la ganancia esperada a ser retenida por el asegurador debe ser al menos el importe previsto $\lambda_0 P$, se deduce la siguiente desigualdad

$$k \leq \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda + P_{re} / P}. \tag{6.5.6}$$

(b) Análisis. La deducción anterior supone que las distribuciones y los parámetros pertinentes se conocen y que se cuenta con ellos. En realidad los acuerdos de participación en las utilidades generalmente se aplican en un medio en el que éste no es el caso. A menudo solamente se conoce una prima de riesgo P promedio aproximada para un grupo de unidades de riesgo aseguradas similares. No obstante, la propensión al riesgo dentro del grupo puede variar considerablemente. Por lo tanto, el asegurador debe utilizar la tasa promedio P y el requisito de ganancia promedio $\lambda_0 P$. para todas las pólizas individuales del grupo. La Fórmula (6.5.6) muestra que existe un límite superior para el coeficiente de beneficio k. Si se excede este límite, entonces el asegurador puede esperar obtener una ganancia de suscripción menor que el importe previsto $\lambda_0 P$. La posición extrema se ilustra mediante la elección hipotética de k=1. es decir, devolviendo siempre la totalidad de toda ganancia. Entonces E(U) es $-P_{re}$, es decir la ganancia esperada es negativa y el importe de la pérdida es igual a la prima de exceso de siniestralidad. Esto demuestra que, si el grupo de unidades aseguradas, con una prima conjunta P_λ y un coeficiente de beneficio k, es muy heterogéneo, es decir que la E(X) desconocida varía considerablemente entre las unidades, es difícil encontrar un λ y un k que eviten que algunas de las unidades más riesgosas presenten una expectativa de pérdida por suscripción al asegurador. Sin embargo, la situación podría ser aún mejor para el asegurador que si no existiera un acuerdo de participación en las utilidades y se hubiera cobrado una prima mucho menor.

Otros modelos de tarificación experimental pueden brindar bastante más flexibilidad que el método de participación en las utilidades en casos en los que la cobertura se renueva generalmente para una cantidad de años.

6.5.3. *Nivelación exponencial*

Un enfoque alternativo a la participación en los beneficios es acordar que las primas que se tasan para los años subsiguientes se ajusten de acuerdo con la experiencia de los siniestros acumulados que se obtiene de las estadísticas propias de la póliza. La variante que introducimos es llamada **fluctuación limitada de credibilidad** por Venter (1990, capítulo 7). Este nombre se refiere a la condición cuya meta es restringir los cambios de las tasa de tarifa dentro de límites que no sean demasiado inconvenientes para el asegurado.

Consideremos un riesgo o grupo de riesgos que están asegurados por una póliza sujeto a tarificación experimental. Se acuerda una prima inicial P_0 y se acuerda que las tasas $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2$, ... para los años subsiguientes se van a calcular de acuerdo con el algoritmo

$$\boldsymbol{P}_t = Z \cdot \boldsymbol{X}_{t-1} + (1-Z) \cdot \boldsymbol{P}_{t-1}, \quad (t = 1,2,\ldots) \qquad (6.5.7)$$

donde $\boldsymbol{X}_t$ es el importe total de los siniestros durante el año t que surge del colectivo de riesgo. El coeficiente Z se denomina **ponderación de credibilidad** o, abreviado, **credibilidad.** Se elige a partir del intervalo

$$0 < Z \leq 1,$$

y se fija lo suficientemente bajo como para eliminar fluctuaciones aleatorias excesivamente grandes. Más precisamente, se elige sujeto a la condición de que las fluctuaciones puramente aleatorias en el importe total de los siniestros, con probabilidad 1-ε, no tendrán como consecuencia un cambio de la prima de más de $100p\%$ del valor esperado de siniestros. Expresado en símbolos, éste es el caso si la constante Z satisface la condición

$$Z \cdot \Delta X \leq pE(X), \qquad (6.5.8)$$

donde ΔX se obtiene de

$$F(E(X) + \Delta X) - F(E(X) - \Delta X) = 1 - \varepsilon, \qquad (6.5.9)$$

donde la f.d. F de $\boldsymbol{X}$ se conoce o se supone. Entonces el valor absoluto del desvío ΔX del importe real de los siniestros $\boldsymbol{X}$ respecto del valor esperado **E(*X*)** puede ser mayor que el ΔX determinado por (6.5.9) sólo con probabilidad 1-ε.

Si podemos suponer que la aproximación PN nos proporciona una aproximación satisfactoria para F, entonces, limitando el análisis a saltos ascendentes de $\boldsymbol{X}$, obtenemos (véase (6.1.8) y (6.1.9)).

$$Zx_\varepsilon \sqrt{r_2 / n + \sigma_q^2} = p, \qquad (6.5.10)$$

donde, de acuerdo con (4.2.6),

$$x_\varepsilon = y_\varepsilon + \frac{1}{6}\gamma_x (y_\varepsilon^2 - 1), \qquad (6.5.11)$$

e y_ε es la raíz de $1\text{-}\varepsilon = N(y_\varepsilon)$ y r_2 es nuevamente el índice de riesgo (3.2.16). Por lo tanto tenemos

$$Z = \frac{p}{x_\varepsilon \sqrt{r_2 / n + \sigma_q^2}}. \tag{6.5.12}$$

OBSERVACION. Las consideraciones precedentes, son estrictamente correctas sólo si $P_{t-1} = E(X_{t-1})$. En las aplicaciones prácticas esta condición no se cumple por completo dado que, P_{t-1} varía en el entorno de $E(X_{t-1})$. Por lo tanto, las fórmulas resultantes son sólo aproximadas, más aún porque con frecuencia los límites de la permisibilidad de la fórmula PN (sección 4.2(b)) no se tienen presente.

Si la variable de ponderación es poco significativa (véase Tabla 3.2.2), la fórmula se puede simplificar poniendo $\sigma_q=0$. Entonces

$$Z = \frac{p}{x_\varepsilon}\sqrt{\frac{n}{r_2}}. \tag{6.5.13}$$

El número esperado n de siniestros que hace que $Z = 1$, esto es

$$n_0 = \frac{r_2 x_\varepsilon^2}{p^2 - x_\varepsilon^2 \sigma_q^2}, \tag{6.5.14}$$

reviste un interés especial. De acuerdo con la terminología estadounidense con respecto a la teoría de la credibilidad, se dice que existe credibilidad total si $Z=1$.

Tabla 6.5.1 *Valores n_0 para la credibilidad total (importe de siniestro constante y sin variable de ponderación)*

	ε		
p	10%	5%	1%
0,01	27.057	38.416	66.347
0,05	1.082	1.537	2.654
0,1	271	384	663
0,2	68	96	166

En el caso especial donde $\sigma_q=0$ y las sumas a riesgo son todas iguales o, si sólo se registra el número de siniestros para calcular la frecuencia de los siniestros, entonces $r_2=1$ y los valores de n_0 que son lo suficientemente grandes para la credibilidad completa pueden obtenerse inmediatamente de la tabla de la distribución normal, sin utilizar la fórmula PN, como en la Tabla 6.5.1.

En la mayoría de los casos prácticos, las sumas a riesgo no son iguales y por lo tanto, r_2 no es 1. La variación del valor del número depende, en gran medida, del grado de heterogeneidad de las sumas a riesgo y por consiguiente, el límite de la credibilidad total puede ser considerablemente mayor que el dado en la tabla 6.5.1. Con frecuencia, los valores de r_2 pueden ser del orden de 5 a 10, pero en los casos en que pueda haber sumas a riesgo grandes los valores pueden ser mucho mayores (Tabla 3.4.1).

Si el número esperado n de siniestros es más chico que el valor obtenido a partir de (6.5.14), entonces la constante Z tiene valores inferiores a 1 y se utiliza el término **credibilidad parcial.** Si $\sigma_q=0$, entonces una de las fórmulas conocidas de la teoría de la credibilidad puede obtenerse inmediatamente a partir de (6.5.13) y de (6.5.14) eliminando el coeficiente de $\sqrt{n}$ en (6.5.13).

$$Z = \sqrt{n/n_0}. \tag{6.5.15}$$

En lo antedicho se supuso que se utilizaría la aproximación PN. Sin embargo, debido al tamaño pequeño del colectivo de riesgo que con frecuencia surge en los casos sujetos a la tarificación experimental o a la teoría de la credibilidad, la aplicabilidad de la fórmula PN es dudosa, aún si no se necesitan valores muy pequeños de ε, para los cuales la precisión de la fórmula no es muy buena. Por supuesto que se puede evitar la incertidumbre calculando la cantidad x_ε por algún otro método de cálculo, tal como el método de recurrencia de la sección 4.1.

La experiencia de los actuarios estadounidenses podría indicar que aún la aproximación normal da valores que son aplicables en la práctica a pesar de que la fórmula con frecuencia se utiliza más allá de los límites teóricos de precisión aceptable (sección 4.2. (b)).

(c) El valor límite. Aplicando (6.5.7) para una secuencia de t años, y desarrollando el algoritmo en serie se desprende que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}_t &= ZX_{t-1} + (1-Z)\boldsymbol{P}_{t-1} \\ &= Z\sum_{i=1}^{t}(1-Z)^{i-1}\boldsymbol{X}_{t-i} + (1-Z)^t P_0. \end{aligned} \tag{6.5.16}$$

Si se supone que el valor esperado $\mu = \mathrm{E}(\boldsymbol{X}_i)$ es igual para todos los valores i, entonces

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{P}_t) &= Z\sum_{i=1}^{t}(1-Z)^{i-1}\mu + (1-Z)^t P_0 \\ &= \left[1-(1-Z)^t\right]\mu + (1-Z)^t P_0, \end{aligned} \tag{6.5.17}$$

que tiende a μ para $t \to \infty$. Por lo tanto, a la larga, el valor esperado de $\boldsymbol{P}_t$ tiende al valor medio μ desconocido que teóricamente es correcto. Por lo tanto la fórmula cumple los requerimientos de equidad. El coeficiente Z regula la fluctuación de la tasa de la prima móvil.

Como $\boldsymbol{P}_t$ depende de los importes de siniestros $\boldsymbol{X}_{t-i}$ de los años precedentes mediante ponderaciones por el tiempo transcurrido i en los exponentes, el algoritmo (6.5.16) y la fórmula (6.5.7) a veces se denominan **exponenciales.**

Bonsdorff (1990) consideró el sesgo que surge cuando el coeficiente Z no es constante.

6.5.4 Teoría de la credibilidad

El problema que se trató en la sección 6.5.3 puede enfocarse desde un ángulo algo diferente.

(a) El enfoque Bayesiano. Con frecuencia ocurre que de las unidades de riesgo aparentemente similares, una puede ser más riesgosa que otra, a pesar que el asegurador no sea capaz de ver esta diferencia cuando cotiza el riesgo. Por ejemplo, en la sección 2.6. se estudió la heterogeneidad de una cartera de seguros de automóviles.

Si no existe una historia siniestral u otra información pertinente para una nueva unidad de riesgo, el asegurador puede simplemente suponer que su propensión al riesgo está a un nivel promedio. Por otro lado, es posible estimar la calidad de una unidad de riesgo que ha sido parte de la cartera por un período más largo utilizando su propia historia siniestral.

$$Z = \sqrt{n/n_0}\,. \tag{6.5.15}$$

En lo antedicho se supuso que se utilizaría la aproximación PN. Sin embargo, debido al tamaño pequeño del colectivo de riesgo que con frecuencia surge en los casos sujetos a la tarificación experimental o a la teoría de la credibilidad, la aplicabilidad de la fórmula PN es dudosa, aún si no se necesitan valores muy pequeños de ε, para los cuales la precisión de la fórmula no es muy buena. Por supuesto que se puede evitar la incertidumbre calculando la cantidad x_ε por algún otro método de cálculo, tal como el método de recurrencia de la sección 4.1.

La experiencia de los actuarios estadounidenses podría indicar que aún la aproximación normal da valores que son aplicables en la práctica a pesar de que la fórmula con frecuencia se utiliza más allá de los límites teóricos de precisión aceptable (sección 4.2. (b)).

(c) El valor límite. Aplicando (6.5.7) para una secuencia de t años, y desarrollando el algoritmo en serie se desprende que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}_t &= Z\boldsymbol{X}_{t-1} + (1-Z)\boldsymbol{P}_{t-1} \\ &= Z\sum_{i=1}^{t}(1-Z)^{i-1}\boldsymbol{X}_{t-i} + (1-Z)^t P_0. \end{aligned} \tag{6.5.16}$$

Si se supone que el valor esperado $\mu = \mathrm{E}(\boldsymbol{X}_i)$ es igual para todos los valores i, entonces

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{P}_t) &= Z\sum_{i=1}^{t}(1-Z)^{i-1}\mu + (1-Z)^t P_0 \\ &= \left[1-(1-Z)^t\right]\mu + (1-Z)^t P_0, \end{aligned} \tag{6.5.17}$$

que tiende a μ para $t \to \infty$. Por lo tanto, a la larga, el valor esperado de $\boldsymbol{P}_t$ tiende al valor medio μ desconocido que teóricamente es correcto. Por lo tanto la fórmula cumple los requerimientos de equidad. El coeficiente Z regula la fluctuación de la tasa de la prima móvil.

Como $\boldsymbol{P}_t$ depende de los importes de siniestros $\boldsymbol{X}_{t-i}$ de los años precedentes mediante ponderaciones por el tiempo transcurrido i en los exponentes, el algoritmo (6.5.16) y la fórmula (6.5.7) a veces se denominan **exponenciales.**

Bonsdorff (1990) consideró el sesgo que surge cuando el coeficiente Z no es constante.

6.5.4 Teoría de la credibilidad

El problema que se trató en la sección 6.5.3 puede enfocarse desde un ángulo algo diferente.

(a) El enfoque Bayesiano. Con frecuencia ocurre que de las unidades de riesgo aparentemente similares, una puede ser más riesgosa que otra, a pesar que el asegurador no sea capaz de ver esta diferencia cuando cotiza el riesgo. Por ejemplo, en la sección 2.6. se estudió la heterogeneidad de una cartera de seguros de automóviles.

Si no existe una historia siniestral u otra información pertinente para una nueva unidad de riesgo, el asegurador puede simplemente suponer que su propensión al riesgo está a un nivel promedio. Por otro lado, es posible estimar la calidad de una unidad de riesgo que ha sido parte de la cartera por un período más largo utilizando su propia historia siniestral.

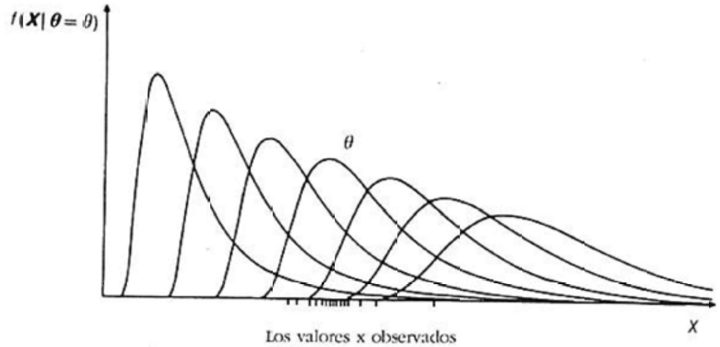

Figura 6.5.1. *Las curvas de densidad alternativas $f = F'$ de una distribución supuesta y un grupo de importes acumulados de siniestros anuales de una unidad de riesgo.*

Consideremos un colectivo de unidades de riesgo aparentemente similares. Para cada unidad de riesgo asignamos un parámetro θ fijo que muestra la "calidad" del riesgo, por ejemplo, la esperanza del importe real acumulado anual de los siniestros para la unidad de riesgo. Se supone que se conoce la f.d. $F(X|\theta)$ del importe acumulado anual de siniestros para una unidad de riesgo si se conoce el valor θ del parámetro de calidad.

La idea de la obtención de una estimación para θ se ejemplifica en la Figura 6.5.1.

La densidad f se grafica para una serie de valores diferentes del parámetro θ que determina la posición de la curva en el eje X al igual que su forma. Los valores X_i de la unidad de riesgo observados están marcados en el eje X. Intuitivamente es natural elegir una estimación para θ tal que la curva se centre sobre el grupo de valores observados.

Esto conduce a un tipo de inferencia estadística que se conoce como **Bayesiana**. Se postula a priori la forma de la distribución, pero los parámetros pertinentes se desconocen. El problema radica en obtener estimaciones para estos parámetros.

(b) La fórmula de la credibilidad. Ahora supongamos que tenemos una unidad de riesgo elegida de la cartera en forma aleatoria. El parámetro de calidad θ del riesgo puede considerarse como una variable aleatoria, y supongamos que se conoce la distribución θ. Los importes acumulados de los siniestros $\boldsymbol{X}_i$ de la unidad de riesgo elegida, con idéntica distribución para cada año i, dependen uno respecto del otro a través del parámetro θ, pero para otras razones se suponen independientes, es decir, dado θ, los $\boldsymbol{X}_i$ son condicionalmente independientes.

Ahora el problema es que, si se nos da una unidad de riesgo junto con su historia siniestral de t años

$$\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_t, \qquad (6.5.18)$$

¿cuál es la mejor estimación de la prima de riesgo desconocida $\mu(\theta) = E(\boldsymbol{X}_i/\theta)$ de la unidad de riesgo? Teóricamente la esperanza condicional

$$E(\mu(\theta)|\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_t) \qquad (6.5.19)$$

es la mejor estimación (varianza mínima) para $\mu(\theta)$. Desafortunadamente, en la práctica no es fácil resolver (6.5.19) claramente, ya que para la solución se necesita la f.d. conjunta del vector $(\theta, \boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_t)$ aleatorio $(t+1)$ dimensional. Sin embargo, si nos autolimitamos a aquellas estimaciones de $\mu(\theta)$ que son de la forma lineal

$$a + b_1 \cdot X_1 + b_2 \cdot X_2 + \ldots b_t . X_t \, , \tag{6.5.20}$$

entonces podemos encontrar la mejor estimación P para $\mu(\theta)$ tal que el desvío medio cuadrático $E[(P-\mu(\theta))^2]$ sea mínimo. Por simetría, la mejor estimación lineal debe ser tal que b_i sea la misma para todo i. Por consiguiente, podemos restringirnos a soluciones de la forma

$$P = a + b \cdot \overline{X}, \tag{6.5.21}$$

donde $X = X_t$, representa el valor medio $(X_1+X_2+\ldots+X_t)/t$. Ahora el problema se reduce a una forma que es equivalente a encontrar la función lineal de $\overline{X}$ que minimice el desvío medio cuadrático de $\mu(\theta)$. Es bien conocido que la solución está dada por

$$P = \mu + Z_t \cdot (\overline{X} - \mu) = (1 - Z_t) \cdot \mu + Z_t \cdot \overline{X}, \tag{6.5.22}$$

donde $\mu = E(\mu(\theta)) = E(X_i) = E(\overline{X})$ es el promedio $\mu(\theta)$, y

$$Z_t = \frac{Cov(\overline{X}, \mu(\theta))}{Var(\mu(\theta))}. \tag{6.5.23}$$

El valor del coeficiente de credibilidad Z_t, está siempre entre 0 y 1. Cuanto más cerca esté de 1, $\overline{X}$ será una mejor estimación para $\mu(\theta)$.

Ahora debemos demostrar que, de acuerdo con las presunciones precedentes, el **coeficiente de credibilidad** Z_t, cumple la fórmula

$$Z_t = \frac{Var(\mu(\theta))}{Var(\mu(\theta)) + \dfrac{E(\sigma^2(\theta))}{t}}, \tag{6.5.24}$$

donde $\sigma^2(\theta) = Var(X_i | \theta)$. Para la demostración se señala en primer lugar que $E(\overline{X} \cdot \mu(\theta)) = E(X_i \cdot \mu(\theta)) = E(\mu(\theta)^2)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} Cov(\overline{X}, \mu(\theta)) &= E(\overline{X} \cdot \mu(\theta)) - E(\overline{X}) \cdot E(\mu(\theta)) \\ &= E(\mu(\theta)^2) - \mu^2 = Var(\mu(\theta)). \end{aligned} \tag{6.5.25}$$

Por otro lado, la fórmula de las varianzas condicionales (1.4.18) da

$$\begin{aligned} Var(\overline{X}) &= E(Var(\overline{X} | \theta)) + Var(E(\overline{X} | \theta)) \\ &= E\left[(t/t^2) \cdot Var(X_i | \theta)\right] + Var\left[(t/t) \cdot \mu(\theta)\right] \\ &= E(\sigma^2(\theta)/t + Var(\mu(\theta)). \end{aligned} \tag{6.5.26}$$

Sustituyendo éstas en (6.5.23) da (6.5.24).

EJEMPLO. Supongamos que para cada unidad de riesgo el número acumulado de siniestros es de Poisson$(n \cdot q)$ compuesta, donde q es fija (pero desconocida) para cada unidad de riesgo, pero varía entre diferentes unidades de riesgo de acuerdo con una f.d. de estructura H (sección 2.6). Si la f.d. S del importe de los siniestros no depende de la unidad de riesgo, entonces podemos elegir $\theta = q$, donde q simboliza la variable de estructura definida en la sección 2.6.

(c) Análisis. Cuando el número de años de observación $t \to \infty$, entonces $Z_t \to 1$, como debería ser por la ley de los grandes números.

Puede pensarse que la varianza $\mathrm{Var}(\mu(\theta))$ caracteriza la heterogeneidad entre las diferentes unidades de riesgo, mientras que $E(\sigma^2(\theta))$ da la variación promedio anual del importe acumulado anual de los siniestros de una unidad de riesgo. Por lo tanto podemos concluir a partir de (6.5.24) que, para una cantidad fija de años de observación t, el coeficiente de credibilidad Z_t es mayor, cuanto mayor sea la heterogeneidad de la cartera comparada con la variación promedio dentro de una unidad de riesgo.

6.6 Partipación óptima de riesgos

6.6.1 Medidas de riesgo

(a) La varianza como una medida del riesgo. En las secciones anteriores el rango de variación de los siniestros o de otras variables pertinentes, fue un concepto clave cuando se obtuvo el capital a riesgo, la probabilidad de ruina, etc. Cuando se comparan políticas estratégicas alternativas, se puede evaluar su optimización sobre la base de cuál es la alternativa menos volátil, es decir que conduce al menor rango de variación. El desvío estándar σ_X, o por las razones de cálculo, su cuadrado, es decir la varianza

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (X - E(X))^2 \, dF(X) \qquad (6.6.1)$$

se utiliza habitualmente como la medida de la variación de la variable pertinente $\boldsymbol{X}$(por ejemplo, el importe acumulado de los siniestros); cuánto más pequeña sea la varianza, menor será el riesgo. Esto se ejemplificará en las secciones 6.6.2 y 6.6.3 comparando formas diferentes de reaseguro y buscando el que tenga la menor varianza.

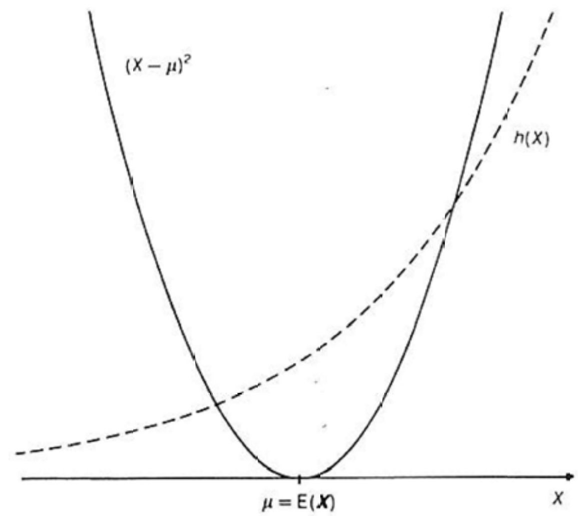

Figura 6.6.1 *Desvío medio cuadrático y una función de perjuicio h(X).*

(b) Medidas de riesgo más generales. La utilidad de la varianza como medida depende de cómo se distribuye la variable aleatoria _ alrededor de su media. Los desvíos positivos y los negativos tienen la misma ponderación y ambas colas de la distribución determinan juntas la cuantía de la varianza. Sin embargo, en muchas aplicaciones, sólo los desvíos positivos (importes grandes de siniestros) son perjudiciales, mientras que los valores pequeños, es decir, los desvíos negativos, hasta pueden ser convenientes. En este caso la varianza no es una medida de riesgo correcta porque no diferencia entre el desvío positivo y el negativo. Una medida más satisfactoria del "perjuicio" que causa la pérdida de $\boldsymbol{X}$ se obtiene, por lo tanto, si el desvío medio cuadrático $(\boldsymbol{X}-\mu)^2$ se reemplaza por una función convexa $h(\boldsymbol{X})$ de $\boldsymbol{X}$. La línea de puntos de la figura 6.6.1 ejemplifica tal función de perjuicio h no simétrica. En lugar de la varianza (6.6.1) lo perjudicial de una pérdida $\boldsymbol{X}$ ahora se mide por el perjuicio esperado

$$H_X = E(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(X)dF(X) \qquad (6.6.2)$$

de la variable de pérdida $\boldsymbol{X}$. Cuanto menor sea el perjuicio esperado, mejor será el riesgo.

La convexidad de la función de perjuicio h significa que la derivada h' es creciente, lo que a su vez, es equivalente a la condición

$$h'' \geq 0. \qquad (6.6.3)$$

La forma convexa de la función de perjuicio está motivada por la observación general de que cuanto más grande sea el valor de $\boldsymbol{X}$, la pérdida adicional se percibirá como más perjudicial.

El grado de convexidad de la función de perjuicio seleccionada depende de cuánto riesgo quiere correr el que toma el riesgo. El caso límite $h''\equiv 0$ significa que h ya no es más convexa, sino una función lineal en cuyo caso la medida de riesgo H es equivalente al valor medio, es decir, $H_X \leq H_Y$ si y sólo si $E(\boldsymbol{X}) \leq E(\boldsymbol{Y})$. Esta medida de riesgo extrema no considera las variaciones estocásticas.

Una desventaja de la varianza como una medida de riesgo es que mide los desvíos a partir del valor medio pero deja de lado el valor esperado por completo, mientras que la medida H considera a ambos.

Nótese que en términos conceptuales, hemos llegado al terreno de las funciones conocidas como **funciones de utilidad**, que se desarrollarán en forma sucinta en la sección 6.6.6. Al invertir una función de utilidad, u, cóncava unidimensional, obtenemos la función de perjuicio convexa, h, correspondiente.

6.6.2 Optimización del reaseguro del exceso de siniestralidad

(a) El problema. Consideremos un asegurador que quiera lograr una política de reaseguro que dé la menor varianza σ^2, o más generalmente el menor perjuicio esperado H (sección 6.6.1(b)), para la misma prima de riesgo P de reaseguro (sin recargos de seguridad ni gastos). Tal política puede considerarse óptima desde el punto de vista del cedente porque proporciona la mejor protección contra la volatilidad para una misma prima de riesgo neta.

Sea $\boldsymbol{X}_{tot}$ el importe total de los siniestros acumulados durante un año y $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_{ced}$ la retención de la cedente. Se supone que se aplican las condiciones

$$0 \leq X \leq X_{tot} \quad \text{y} \quad E(X) = P, \qquad (6.6.4)$$

donde P es fija. El tipo de reaseguro no está restringido de otra manera. El problema es encontrar el programa de reaseguro que tenga la menor varianza σ_x^2 o el menor perjuicio H_x esperado. Antes de resolver este problema específico de minimización, primero se deduce una desigualdad general para las funciones convexas en la sección 6.6(b) que sigue.

(b) Una generalización de la desigualdad de Jensen. El gráfico de una función convexa $h(X)$ siempre está sobre la línea de la tangente $T(X)=h(M)+h'(M)\cdot(X-M)$ trazada en un punto M (véase figura 6.6.2). Por lo tanto, la desigualdad $h(\boldsymbol{X})\geq h(M)+h'(M)\cdot(\boldsymbol{X}-M)$ se cumple para cualquier variable aleatoria $\boldsymbol{X}$. Si elegimos $M=E(\boldsymbol{X})$ y tomamos valores esperados de ambos lados, entonces el último término del lado derecho desaparece, ya que $E(\boldsymbol{X}-M)=0$, y obtenemos la desigualdad de Jensen $E(h(\boldsymbol{X}))\geq h(E(\boldsymbol{X}))$ (Ejercicio 3.2.9).

Más generalmente, si tenemos dos variables aleatorias $\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{X}^*$ y una constante M tal que

(1) $E(\boldsymbol{X})=E(\boldsymbol{X}^*)$ y

(2) $\boldsymbol{X}^*$ está siempre entre $\boldsymbol{X}$ y M, es decir para todos los resultados ya sea $\boldsymbol{X} \geq \boldsymbol{X}^* \geq M$ ó $\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{X}^* \leq M$,

lo que significa que $\boldsymbol{X}^*$ está más concentrada alrededor de M que $\boldsymbol{X}$, entonces se cumple la siguiente desigualdad de Jensen generalizada:

$$E(h(\boldsymbol{X})) \geq E(h(\mathbf{X}^*)). \qquad (6.6.5)$$

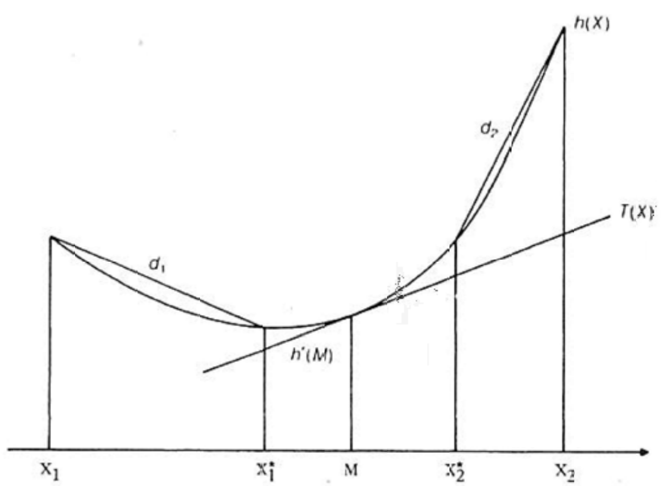

Figura 6.6.2 *La derivada $h'(M)$ de una función convexa h comparada con las diferencias divididas d_1 y d_2 de los dos segmentos del gráfico de h en ambos lados del punto M.*

En el caso especial $\boldsymbol{X}^* \equiv E(\boldsymbol{X})$, resulta la desigualdad de Jensen ordinaria. A partir de la figura 6.6.2 se puede ver que

$$d_1 = \frac{h(X_1^*) - h(X_1)}{X_1^* - X_1} < h'(M)$$

$$d_2 = \frac{h(X_2) - h(X_2^*)}{X_2 - X_2^*} > h'(M).$$

Para probar (6.6.5) notamos, por la condición (2), que $\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{X}^*$ están siempre a la derecha o a la izquierda de M. Verificando ambos casos por separado, se ve a partir de la figura 6.6.2 que

$$h(\mathbf{X}) - h(\mathbf{X}^*) \geq h'(M) \cdot (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}^*). \qquad (6.6.6)$$

Tomando los valores esperados de ambos lados de (6.6.6), y recordando (1), obtenemos que $E(h(\boldsymbol{X})\text{-}E(h(\boldsymbol{X}^*)) \geq h'(M) \cdot (\boldsymbol{X}\text{-}\boldsymbol{X}^*)=0$, lo que da (6.6.5).

(c) Optimalidad del reaseguro de exceso de siniestralidad. Se desprende que de acuerdo con los supuestos (6.6.4) el contrato reaseguro de exceso de siniestralidad (sección 3.3.4)

$$\boldsymbol{X}^* = \boldsymbol{X}_{ced} = \min(\boldsymbol{X}_{tot}, M) \qquad (6.6.7)$$

es el acuerdo óptimo requerido, donde el límite de retención M se elige de tal manera que se cumpla la condición $E(\boldsymbol{X}^*)=P$. Esta condición determina unívocamente el límite M, ya que $E(\min(\boldsymbol{X}_{tot}, M))$ crece estricta y continuamente de 0 a $E(\boldsymbol{X}_{tot})$ como una función de M.

Para demostrarlo utilizamos el hecho de que la retención neta en el reaseguro de exceso de siniestralidad $\boldsymbol{X}^*$ es más concentrada que la de cualquier otro acuerdo de reaseguro $\boldsymbol{X}$ que cumpla las condiciones (6.6.4).

(b) L

Poiss

Más precisamente, demostraremos que se cumplen las condiciones (1) y (2) de la desigualdad de Jensen generalizada(6.6.5). Como $X^*=M$ en el caso de que $X_{tot}\geq M$, sólo queda verificar el caso en que $X_{tot}<M$. Pero entonces tenemos, por (6.6.4), $X\leq X_{tot}=\min(X_{tot},M)=X^*<M$, y nuevamente X^* está más cerca de M. Por lo tanto, si b es una función de perjuicio convexa, tenemos que $H_{X^*}=E(b(X^*))\leq E(b(X))=H_X$, por (6.6.3). De igual manera, la elección de la función convexa $b(X)=(X-\mu)^2$ da $\sigma_X \geq \sigma_{X^*}$. De esta manera, el tratado de exceso de siniestralidad es la solución óptima deseada.

(d) Los contratos de exceso de siniestralidad en la práctica son problemáticos. A pesar de que la optimalidad del reaseguro del exceso de siniestralidad de acuerdo con los supuestos dados es teóricamente interesante, tiene poca aplicación práctica, porque sólo se basa en las primas de riesgo. El hecho de que una fuerte variabilidad de la porción a cargo del reasegurador conduce a una considerable incertidumbre en la cotización, fue dejada completamente de lado. Debido a la incertidumbre y a la alta sensibilidad a la inflación y a otros cambios en la exposición al riesgo (sección 3.4.4(c)), las primas de exceso de siniestralidad con frecuencia están muy recargadas y en la práctica con frecuencia no se consiguen coberturas ilimitadas de exceso de siniestralidad.

6.6.3 Intercambio óptimo de riesgos

(a) El problema. Consideremos dos aseguradores C_1 y C_2 que desearían intercambiar reaseguros sobre base recíproca. Sean X_1 y X_2, respectivamente, los importes acumulados de los siniestros de las compañías.

Las compañías quieren encontrar un intercambio recíproco de riesgos óptimo (Y_1,Y_2) (condición (1) más adelante) tal que los importes de los siniestros Y_1 e Y_2 después del intercambio de los riesgos tengan

varianzas lo más pequeñas posible. De esta manera, debemos encontrar variables Y_1 e Y_2 que cumplan las condiciones de optimización siguientes:

(1) $Y_1 + Y_2 = X_1 + X_2$

(2) $\sigma_{Y_i} \leq \sigma_{X_i}$, para ambas i

(3) No existe otro intercambio de riesgo que dé una varianza menor para ambas compañías C_i.

El problema puede reformularse de una manera obvia para que se dé el caso en que las dos compañías C_i utilizan funciones de perjuicio b_i (sección 6.6.1(b)) para medir las pérdidas en lugar de la varianza.

(b) Minimización de las varianzas. Simbolicemos el importe acumulado total de siniestros con $X=X_1+X_2$. Supongamos que tenemos un intercambio de riesgos (Y_1,Y_2) que cumple la condición (1).

En primer lugar consideraremos sólo aquellos intercambios de riesgos (Y_1,Y_2), que cumplen con la condición adicional que

$\sigma_{Y_1} = \sigma$, donde σ, $0 \leq \sigma \leq \sigma_X$ es una constante fija. Como $Y_2=X-Y_1$, tenemos

$$\sigma^2_{Y_2} = \sigma^2_X + \sigma^2 - 2\cdot Cov(X, Y_1) = \sigma^2_X + \sigma^2 - \rho\,(X, Y_1)\cdot\sigma_X\cdot\sigma, \tag{6.6.8}$$

donde $\rho\,(X,Y_1)=Cov(X,Y_1)/(\sigma_X\cdot\sigma)$ es el coeficiente de correlación. Como es sabido $\rho\,(X,Y_1)$ alcanza su valor máximo, 1, si y sólo si Y_1, es una función lineal creciente de $\boldsymbol{X}$. Por consiguiente, el intercambio de riesgos proporcional

$$Y^*_1 = c \cdot \boldsymbol{X}, \qquad Y^*_2 = (1 - c) \cdot \boldsymbol{X}, \tag{6.6.9}$$

donde $c=\sigma/\sigma_X$ (para obtener $\sigma_{Y^*_1}=\sigma$), maximiza el coeficiente de correlación y por lo tanto, minimiza la varianza de la compañía C_2 entre todos aquellos intercambios de riesgos $(\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_2)$, que cumplen la condición $\sigma_{Y_1}=\sigma$.

(c) El óptimo de Pareto. Nótese que los desvíos estándares de las porciones canjeadas Y^*_1 e Y^*_2 en el intercambio de riesgos (6.6.9) son $c\cdot\sigma_x$ y $(1-c)\cdot\sigma_x$ respectivamente, donde c ($0\leq c\leq 1$) es un parámetro.

Puede observarse que si se modifica el valor de c (es decir σ), entonces los desvíos estándar cambian en cuantías iguales pero en direcciones opuestas. En consecuencia todos los intercambios de riesgo (6.6.9) satisfacen la condición (3) de la sección 6.6.3, y podemos concluir que estos son los intercambios de riesgo óptimos.

Un grupo de soluciones óptimas tal que cualquier otra solución es peor para por lo menos una de las partes, se denomina **Optimo de Pareto.**

La condición (2) que queda, restringe los valores de c al intervalo

$$1 - \frac{\sigma_{X_2}}{\sigma_X} \leq c \leq \frac{\sigma_{X_1}}{\sigma_X}. \tag{6.6.10}$$

como lo señala un cálculo directo. Nótese que como, generalmente, $\sigma_{X_1+X_2} \geq \sigma_{X_1} + \sigma_{X_2}$, donde la igualdad se cumple sólo si $\boldsymbol{X}_1$ y $\boldsymbol{X}_2$ ya

son funciones lineales una de otra, la ecuación (6.6.10) realmente define un intervalo apropiado de los valores del parámetro c.

Si se utiliza la varianza como una medida, entonces todo intercambio de riesgos óptimo de Pareto $(c\cdot\boldsymbol{X},(1-c)\cdot\boldsymbol{X})$ que cumpla con (6.6.10) es mejor que la situación originaria para ambas compañías. La elección final del parámetro c que se va a utilizar deberá negociarse entre las partes. Algunas reglas simples pueden sugerirse para alcanzar una solución única. En este caso, por ejemplo, podríamos elegir la solución óptima que corresponda al punto medio del intervalo (6.6.10). Estos problemas de elección corresponden al ámbito de la denominada teoría de los juegos (6.6.6).

OBSERVACION 1. En la práctica un intercambio de riesgos de los importes acumulados de siniestros entre dos compañías de seguros implica una relación muy cercana entre las compañías, ya que cada parte acepta todos los riesgos suscritos por la otra. Los intercambios parciales de riesgos (es decir los fondos comunes ó "pools") que sólo tratan con siniestros de mayor magnitud para ciertos tipos específicos de riesgos son más comunes en la práctica.

OBSERVACION 2. Con frecuencia la varianza es una medida apropiada del riesgo sólo en los casos en los que la asimetría del importe acumulado total de los siniestros $\boldsymbol{X}$ es pequeña. Por lo tanto, con frecuencia se necesitan coberturas de reaseguro adicionales para siniestros excepcionalmente grandes o siniestros catastróficos además del acuerdo de intercambio de riesgos.

Todos los resultados, de esta sección 6.6.3, también son válidos en el caso de que haya más de dos compañías C_i.

(d) Generalizaciones. Supongamos, más generalmente, que ambas compañías C_i quieren encontrar un intercambio de riesgos $(\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_2)$ que minimice el perjuicio esperado H_{i,Y_i} (6.6.1(b)) de sus partes. Como las funciones de perjuicios h_i son convexas, el teorema de Borch (Gerber, 1979) da como resultado que nuevamente hay una familia de un sólo parámetro de intercambios de riesgos de óptimos de Pareto (Y'_1,Y'_2) tal que las partes de ambas compañías sean funciones crecientes del importe acumulado total de siniestros $X=X_1+X_2$. Sin embargo, éstas no son frecuentemente funciones lineales de X como lo eran cuando la varianza se utilizaba como una medida de riesgo. Por el contrario, puede demostrarse que, dado cualquier intercambio de riesgos (Y_1,Y_2) tal que las partes de ambas compañías son funciones crecientes de X, existen funciones convexas h_1 y h_2 tal que este intercambio de riesgos en particular (Y_1,Y_2) es óptimo si estas funciones convexas se utilizan como funciones de perjuicio (Pesonen, 1984). Por lo tanto, la conclusión es que generalmente no se puede decir nada más acerca de los intercambios de riesgos óptimos, que las participaciones de las compañías en un intercambio de riesgos óptimo son funciones crecientes del importe total X.

(e) Reaseguro óptimo. Nótese que todos los resultados de esta sección se pueden aplicar al caso del reaseguro simplemente sustituyendo $X_2 \equiv 0$.

Si se utiliza la varianza como medida, la condición (2) de la sección 6.6.3(a) puede dejarse de lado, ya que la varianza de la parte del reasegurador Y_2 en un intercambio de riesgos obviamente se incrementa en comparación con el caso en el que el reasegurador no corre ningún riesgo (proveniente de la cedente). Pero el reasegurador compensa el incremento del riesgo recargando más la prima de reaseguro, cuanto más grande es la varianza de Y_2. Puede observarse a partir de los resultados de la sección 6.6.3(b) que el reaseguro de cuota parte es aún óptimo en este caso.

Es importante destacar que en la mayoría de los casos la varianza del importe acumulado de siniestros retenido no es una buena medida del riesgo cuando el asegurador compara diferentes coberturas de reaseguro. Las razones son las que ya mencionamos en la Observación 2 al final de la sección 6.6.3(c). Más aún, algunos riesgos individuales en una cartera de

seguros pueden ser muy grandes, o puede existir el peligro de la acumulación de siniestros a causa de, por ejemplo, una tormenta. Entonces puede ocurrir un siniestro o una catástrofe que dé lugar a montos de pérdida que exceden muchas veces la pérdida máxima que el asegurador puede sufrir sin dificultades financieras considerables. Esto significaría que si el reaseguro se acordara a través de un tratado de cuota parte, la cuota retenida debería ser muy chica, o en otras palabras, la mayor parte de los ingreso de prima debería ir a los reaseguradores.

Si el de perjuicio esperado H_i de ambas compañías se utiliza como una medida del riesgo, entonces, teóricamente, se obtiene una familia parametrizada de contratos de reaseguros óptimos. Sin embargo, en la práctica, aún se tiene el problema al que nos referimos en la Observación 2 de la sección 6.6.3(c).

Ejercicio 6.6.1 Supongamos que N compañías de seguros C_i tienen importes acumulados de siniestros X_i mutuamente independientes tales que el desvío estándar $\sigma_{X_i}=\sigma$ es el mismo para cada i. Las compañías quieren minimizar las varianzas por medio de acuerdos de intercambio de riesgos recíprocos. Las compañías acordaron elegir el intercambio de riesgos óptimo que reduce los desvíos estándares de todas las partes en el mismo cociente r. Demostrar que $r=1/\sqrt{N}$.

6.6.4 Límites de retención en una cartera con múltiples ramos

(a) El problema. Como un ejemplo más de cómo se pueden utilizar las medidas del riesgo para resolver los problemas de optimización, consideramos una cartera multiramo con el objeto de hallar un método racional para determinar los límites de la retención neta para cada ramo, teniendo en cuenta las características pertinentes de cada ramo, de tal manera que se pueda obtener una ganancia óptima para todo el negocio. Para simplificar, la varianza se utiliza como una medida de riesgo.

Supongamos que la cartera se subdivide en ramos $j=1,2,\ldots,k$. Se supone que el número esperado de siniestros n_j, recargos de seguridad λ_j, la f.d. S_j de la intensidad de los siniestros y el desvío estándar σ_{qj} de la distribución de ponderación de la distribución compuesta del importe acumulado de los siniestros se conocen para cada ramo j. Se supone que cada ramo j tiene una cobertura de reaseguro de exceso de pérdida, cuyas prioridades respectiva se simbolizan con M_j.

La prioridades M_j se van a determinar de tal manera que el importe del resultado esperado (ganancias)

$$r(M_1,\ldots,M_k)=\sum_j \lambda_j \cdot n_j \cdot m_j(M_j) \tag{6.6.11}$$

se maximice sujeto a la condición de que la probabilidad de ruina no supere un nivel fijo ε.

Si, para simplificar, la f.d. del importe acumulado retenido de los siniestros de toda la cartera se aproxima a la distribución normal, entonces el término de la asimetría R_γ en la ecuación básica (6.1.8) desaparece. De acuerdo con (6.1.8) la condición de que la probabilidad de ruina sea igual a ε es entonces equivalente a la condición $\boldsymbol{X}$

$$\begin{aligned} Q(M_1,\ldots,M_k) = U - y_\varepsilon \cdot \sigma_X(M_1,\ldots,M_k) \\ + \sum_j \lambda_j \cdot n_j \cdot m_j(M_j) = 0, \end{aligned} \tag{6.6.12}$$

donde $m_j(M_j)=a_{1j}(M_j)$ (véase (3.4.5)) y

$$\sigma_X(M_1,\ldots,M_k) = \sqrt{\sum_j (n_j \cdot a_{2j}(M_j) + n_j^2 \cdot m_j(M_j)^2 \cdot \sigma_{qj}^2)}. \tag{6.6.13}$$

Los momentos segundos a_{2j} se obtienen a partir de (3.4.8).

(b) La solución. Debemos encontrar el punto $(M_1,\ldots,M_k)$ en la superficie dimensional $(k\text{-}1)$ definida por la ecuación $Q=0$ donde la función del resultado r alcance el máximo. Este problema de maximización puede resolverse utilizando el método de Lagrange, que introduce una función

$$F = r - \rho \cdot Q \tag{6.6.14}$$

donde ρ es una variable auxiliar. Las derivadas parciales de F relativas a las variables M_j se forman e igualan a cero. En primer lugar nótese que

$$\begin{aligned} \frac{da_{ij}(M_j)}{dM_j} &= \frac{d}{dM_j}\left[\int_{-\infty}^{M_j} Z^i dS_j(Z) + M_j^i \cdot (1-S_j(M_j))\right] \\ &= i \cdot M_j^{i-1} \cdot (1-S_j(M_j)) \end{aligned} \tag{6.6.15}$$

(en el ejercicio 3.4.9 se da una prueba alternativa). Se supone la existencia de las derivadas necesarias, así como la independencia de los recargos de seguridad λ_j relativos a las prioridades M_j. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial M_j} &= n_j \cdot (1 - S_j(M_j)) \cdot \left[(1-\rho)\cdot\lambda_j + \frac{\rho \cdot y_\varepsilon}{\sigma_X} M_j + \frac{\rho \cdot y_\varepsilon}{\sigma_X} n_j \cdot m_j(M_j) \cdot \sigma_{qj}^2\right] \\ &= 0 \end{aligned} \tag{6.6.16}$$