$$S_T = S_0 e^{(r+1/2\sigma^2)T + \sigma \bar{W}_T}$$

$$= \underbrace{S_0 e^{(r+1/2\sigma^2)t + \sigma \bar{W}_t}}_{S_t} {}^{+ (r+1/2\sigma^2)(T-t) + \sigma(\bar{W}_T - \bar{W}_t)}$$

$$S_T = S_t e^{(r+1/2\sigma^2)(T-t) + \sigma(\bar{W}_T - \bar{W}_t)}$$? Diferencia con Q

$$V_t = S_t E_R[S_t e^{\overbrace{(r+1/2\sigma^2)(T-t)}^{\mu} + \sigma(\bar{W}_T - \bar{W}_t)} | F_t]$$

$$= S_t^2 (\ldots)$$

$$E[e^x] = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$$

$$V_t = S_t^2 e^{(r+1/2\sigma^2)(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}$$

$$V_t = S_t^2 e^{(r+\sigma^2)(T-t)} \quad = \text{Prob } Q \checkmark$$

En discreto: $E_R[\Delta Y_t | F_t] = 0$ con $Y = \frac{B}{S_t}$

En continuo $E_R[Y_T | F_t] = E_R[e^{rT} / S_t e^{(r+1/2\sigma^2)(T-t) + \sigma(\bar{W}_T - \bar{W}_t)} | F_t]$

$$\Rightarrow E_R[Y_T | F_t] = S_t^{-1} e^{rt} E_R[e^{r(T-t)} e^{-(r+1/2\sigma^2)(T-t) + \sigma(\bar{W}_T - \bar{W}_t)} | F_t]$$

$$= S_t^{-1} e^{rt} E_R[e^{\underbrace{-1/2\sigma^2(T-t)}_{\mu} - \sigma(\bar{W}_T - \bar{W}_t)} | F_t]$$

$$= e^{rt} S_t^{-1} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}$$

$$= Y_t \checkmark$$

Ejemplo Call $X = (S_T - K)\mathbb{1}_{S_T > K}$

$$X = \underbrace{S_T \cdot \mathbb{1}_{S_T>K}}_{X_1} - \underbrace{K \cdot \mathbb{1}_{S_T>K}}_{X_2}$$

X_1 me conviene valuarlo con probabilidades $\tilde{R}$

$$V_t^1 = S_t E_{\tilde{R}}[\cancel{S_T} \mathbb{1}_{S_T>K} \cancel{S_T^{-1}} | F_t]$$

$$= S_t \tilde{R}[S_T > K | F_t]$$

$$S_t e^{(r+1/2\sigma^2)(T-t)+\sigma\underbrace{(\bar{W}_T - W_t)}_{\Delta\bar{W}_{T-t}}} > K$$

Despejo $\Delta\bar{W}_{T-t}$ $\quad \Delta\bar{W}_{T-t} > \dfrac{\ln(K/S_t) - (r+1/2\sigma^2)(T-t)}{\sigma}$

Aplico probabilidades $\tilde{R}$ diciendo que $\Delta\bar{W}_{T-t} \sim N(0;T-t)$

Divido ambos términos por el desvío

$$\underbrace{\frac{\Delta\bar{W}_{T-t}}{\sqrt{T-t}}}_{\sim N(0;1)} > \frac{\ln(K/S_t) - (r+1/2\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Al ser una probabilidad simétrica

$$\frac{\Delta\bar{W}_{T-t}}{\sqrt{T-t}} < \frac{-\ln(K/S_t) + (r+1/2\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$\frac{\Delta\bar{W}_{T-t}}{\sqrt{T-t}} > \frac{\ln(S_t/K) + (r+1/2\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \sim N(0;1)$$

$$\Rightarrow \boxed{V_t^1 = S_t N\left[\frac{\ln(S_t/K) + (r+1/2\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right]}$$ Distribución acumulada de $\sim N(0;1)$ hasta ese valor

NOTA

X_2 me conviene valuarlo con las probabilidades Q

$$V_t^2 = e^{-r(T-t)} E_Q[K 1_{S_T > K} | F_t]$$
$$= K e^{-r(T-t)} Q[S_T > K | F_t]$$

$$S_t e^{(r - 1/2\sigma^2)(T-t) + \sigma(\bar{W}_T - W_t)} > K$$

Despejo $\Delta \bar{W}_{T-t}$

$$\Delta \bar{W}_{T-t} > \frac{\ln(K/S_T) - (r - 1/2\sigma^2)(T-t)}{\sigma}$$

$$\Delta \bar{W}_{T-t} \sim N(0; T-t) \rightarrow \text{probabilidad } Q$$

$$\frac{\Delta \bar{W}_{T-t}}{\sqrt{T-t}} < \frac{\ln(S_T/K) + (r - 1/2\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$\boxed{V_t^2 = K e^{-r(T-t)} N\left[\frac{\ln(S_T/K) + (r - 1/2\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right]}$$

$\Rightarrow \boxed{V = V_t^1 - V_t^2}$ call

Para un PUT:

$$V_t = K e^{-r(T-t)}\left[1 - N\left[\frac{\ln(S_T/K) + (r - 1/2\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right]\right]$$

$$- S_t\left[1 - N\left[\frac{\ln(S_T/K) + (r + 1/2\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right]\right]$$

Para un forward = call - PUT

Al ser probabilidades complementarias, dan 1

$$\boxed{F = S_t - K e^{-r(T-t)}}$$

Se puede probar que $\Phi = N[\ ]$

↓

Ver apunte

$\frac{\partial V}{\partial S} = \emptyset = \Delta$ $\quad\frac{\partial V}{\partial r} = \rho$ $\quad\frac{\partial^2 V}{\partial^2 S} = \gamma$

$\frac{\partial V}{\partial (T-t)} = \theta$ $\quad\frac{\partial V}{\partial \sigma} = \nu$ (vega)

CLASE 10

TEOREMA DE GIRSANOV

Se demuestra que cualquier derivado se puede arbitrar

El teorema acumula las probabilidades P y Q

Tenemos un proceso browniano $\tilde{W}_t = W_t + \theta t$ } SUPUESTO P

y nos inventamos otro. $\tilde{W}_t - \theta t = W_t$ } SUPUESTO Q

SUPUESTO P = W_t es un proceso browniano $\Rightarrow \tilde{W}_t$ no lo es

SUPUESTO Q: $\tilde{W}_t$ es un proceso browniano. W_t es un proceso que tiene tendencia $-\theta$

Vamos a estudiar cómo se distribuye W_t en ambos supuestos.

SUPUESTO P: W_t proceso browniano

$W_T \sim N(0; T)$

condicionando W_T a la información que hay en t

$W_T = \underbrace{W_t}_{cte} + \underbrace{(W_T - W_t)}_{VA \sim N(0;T-t)} \Rightarrow W_T \sim N(W_t; T-t)$

SUPUESTO Q: $W_T = \tilde{W}_T - \theta T$

$W_T \sim N(-\theta T; T)$

$W_T = W_t + (W_T - W_t)$ condicionado

$= W_t - \theta(T-t) + (\tilde{W}_T - \tilde{W}_t)$

$W_T \sim N(W_t - \theta(T-t); T-t)$

$W_T - W_t \sim N(-\theta(T-t); T-t)$

Comparamos las distribuciones

$$P(a<W_T<b)=\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\, e^{-\frac{1}{2T}(W_T)^2}\, dW_T$$

$$Q(a<W_T<b)=\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{(W_T-(-\theta T))^2}{T}}\, dW_T$$

Desarrollo el cuadrado de binomio

$$=\int_a^b e^{-W_T\theta-\frac{1}{2}\theta^2 T}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{W_T^2}{T}}\, dW_T$$

Reemplazo límites. La función vale 0 por fuera de [a;b]

$$=\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{1_{(a;b)}\, e^{-\theta W_T-\frac{1}{2}\theta^2 T}}_{\text{valor VA}}\ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{W_T^2}{T}}\, dW_T}_{P(a<W_T<b)}$$

$\int$ valor VA . P = Esperanza

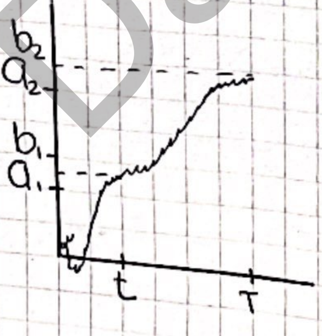
$$\boxed{Q(a<W_T<b)=E_P\left(1_{(a,b)}\, e^{-\theta W_T-\frac{1}{2}\theta^2 T}\right)}$$

↳ La probabilidad Q se puede calcular como la esperanza con las probabilidades P de la VA.

En dos dimensiones

$$P(a_1<W_t<b_1\, ;\, a_2<W_T<b_2)$$

$$=\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\, e^{-\frac{(W_t)^2}{2t}}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}}\, e^{\frac{1(W_T-W_t)}{2(T-t)}}\, dW_t\, dW_T$$



- Función de densidad original $W_t \sim N(0;t)$
- Función de densidad de W_T condicionada a que en t, W tomó el valor W_t $W_T \sim N(W_t;T-t)$

La multiplicación de ambas probabilidades (función de densidad × d) me da la probabilidad conjunta

↳ Probabilidad de que el proceso browniano en t termine valiendo W_t aprox. y que en T, W_T

$$Q(a_1 < W_t < b_1 ; a_2 < W_T < b_2) =$$
$$= \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{\frac{(W_t+\theta t)^2}{2t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi (T-t)}} e^{\frac{(W_T - W_t + \theta(T-t))^2}{2(T-t)}} dW_t dW_T$$

Bajo el supuesto Q: $W_t \sim N(-\theta t ; t)$

$W_T \sim N(W_t - \theta(T-t) ; T-t)$

Desarrollo el cuadrado el binomio.

$$Q(\ldots) = \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} \underbrace{e^{-\theta W_T - \frac{1}{2}\theta^2 T}}_{VA} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{1}{2}\frac{W_t^2}{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi (T-t)}} e^{-\frac{(W_T - W_t)^2}{2t}}}_{\text{Funciones de distribución}} dW_t dW_T$$

Reemplazo los límites:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{1_{(a_1<W_t<b_1 ; a_2<W_T<b_2)} e^{-\theta W_T - \frac{1}{2}\theta^2 T}}_{\text{VA que depende de } W_t \text{ y } W_T} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{\frac{W_t^2}{2t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi (T-t)}} e^{\frac{(W_T - W_t)^2}{2t}}}_{\text{Funciones de densidad}} dW_t dW_T$$

$$\Rightarrow Q(a_1 < W_t < b_1 ; a_2 < W_T < b_2) = E_P\left[1_{(a_1<W_t<b_1 ; a_2<W_T<b_2)} e^{-\theta W_T - \frac{1}{2}\theta^2 T}\right]$$

Se puede replicar para n dimensiones

$$Q(a_1 < W_{t_1} < b_1 ; \ldots a_n < W_T < b_n) = E_P\left[1_{(\ )} e^{-\theta W_T - \frac{1}{2}\theta^2 T}\right]$$

Llego al mismo resultado

Aplicaciones

Esta relación se cumple para cualquier tipo de probabilidad que quiero llegar a obtener.

$$\boxed{Q(W \in A) = E_P\left(1_A e^{-\theta W_T - \frac{1}{2}\theta^2 T}\right)}$$

NOTA

$$f_{\max}(M_t ; W_T) = \frac{2(2M_t - W_T)}{T\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{(2M_T - W_T)^2}{2T}}$$

$$P(M_t > a ; W_T > b) = \int_a^{\infty}\int_b^{M_t} \frac{2(2M_t - W_T)}{T\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{(2M_T - W_T)^2}{2T}} \, dW_t \, dM_T$$

con $A = (M_t < a ; W_T < b)$ quiero calcular $Q(W \in A)$

$$Q(M_t < a ; W_T < b) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\max(W_T, 0)}^{\infty} 1_A \, e^{-\theta W_T - \frac{1}{2}\theta^2 T} \frac{2(2M_t - W_T)}{T\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{(2M_t - W_T)^2}{2T}} \, dM_t dW_t$$

$\max(W_T, 0) \rightarrow$ proceso browniano arranca en cero

- No cambia el orden de la integración

Desde a y b para arriba, $Q = 0$.

$\Rightarrow$

$$Q(M_t < a ; W_T < b) = \int_{-\infty}^{b}\int_{\max(W_T, 0)}^{a} e^{-\theta W_T - \frac{1}{2}\theta^2 T} \frac{2(2M_t - W_T)}{T\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{(M_t - W_T)^2}{2T}} \, dM_t dW_t$$

$$\Rightarrow Q(M_T < a ; W_T < b) = \int_{-\infty}^{b}\int_{\max(W_T, 0)}^{a} f_Q(M_T ; W_T) \, dM_t W_T$$

$\Rightarrow$

$$f_Q(M_T ; W_T) = e^{-\theta W_T - \frac{1}{2}\theta^2 T} \frac{2(2M_T - W_T)}{T\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{(M_T - W_T)^2}{2T}}$$

$\hookrightarrow$ Puedo calcular cualquier probabilidad.

Consecuencia indirecta

$P(W \in A) = 0$

$Q(W \in A) = E_P(1_A \, e^{-\theta W_T - \frac{1}{2}\theta^2 T}) \rightarrow$ estoy sumando ceros.

$= 0.$

$P(W \in A) = 1 \Rightarrow P(W \notin A) = 0 \Rightarrow Q(W \notin A) = 0.$

$Q(W \in A) = 1 \Rightarrow P(W \in A) = 1$

$Q(W \in A) = 0 \rightarrow P(W \in A) = 0.$

$\}$ Cuando se cumplen estas condiciones, P y Q son absolutamente continuas.

$\Rightarrow$ $\boxed{Q[(\emptyset ; \Psi) \rightarrow X] = 1 \Rightarrow P[(\emptyset ; \Psi) \rightarrow X] = 1}$

NOTA

CLASE 11

$X = F(S_{T_1} ; S_{T_2})$ $\quad S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma W_t}$ y $B_t = e^{rt}$

calculo el valor del derivado con:

$$V_t = B_t E_Q[X B_T^{-1} | F_t]$$

$$= S_t E_R[X S_T^{-1} | F_t]$$

$$Q: S_t = S_0 e^{(r - 1/2\sigma^2)t + \sigma \tilde{W}_t}$$

$$S_T = S_t e^{(r - 1/2\sigma^2)(T-t) + \sigma(\tilde{W}_T - \tilde{W}_t)}$$

$$R: S_t = S_0 e^{(r + 1/2\sigma^2)t + \sigma \bar{W}_t}$$

$$S_T = S_t e^{(r+1/2\sigma^2)(T-t) + \sigma(\bar{W}_T - \bar{W}_t)}$$

En vez de tener una integral simple, ahora tenemos una integral doble

Utilizando probabilidades Q

$$V_t = e^{-r(T_2-t)} E_Q[F(S_{T_1} : S_{T_2}) | F_t]$$

$$= e^{-r(T_2-t)} E_Q[F(S_t e^{(r-1/2\sigma^2)(T_1-t) + \sigma \underbrace{(\tilde{W}_{T_1} - \tilde{W}_{t})}_{\Delta\tilde{W}_{T_1-t}}} ; S_t e^{(r-1/2\sigma^2)(T_2-t) + \sigma(\tilde{W}_{T_2} - \tilde{W}_t)}]$$

$$\underbrace{(\tilde{W}_{T_1} - \tilde{W}_t) + (\tilde{W}_{T_2} - \tilde{W}_{T_1})}_{\Delta\tilde{W}_{T_1-t} + \Delta\tilde{W}_{T_2-T_1}}$$

Permite ver la independencia y no condicionar

$$V_t = e^{-r(T_2-t)} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(T_1-t)}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(\Delta\tilde{W}_{T_1-t})^2}{T_1-t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(T_2-T_1)}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(\Delta\tilde{W}_{T_2-T_1})^2}{T_2-T_1}} d(\Delta\tilde{W}_{T_1-t})\, d(\Delta\tilde{W}_{T_2-T_1})$$

- Probabilidad marginal asociada a la variable aleatoria $\Delta\tilde{W}_{T_1-t}$
- Probabilidad marginal asociada a la variable aleatoria $\Delta\tilde{W}_{T_2-T_1}$

La multiplicación de las dos marginales me da la probabilidad conjunta

La segunda probabilidad no está condicionada a la ocurrencia de la primera

↳ Tercera propiedad de los procesos brownianos: las variaciones son VA independientes si los intervalos no se tocan ⇒ la probabilidad conjunta es la multiplicación de las marginales.

▽ Lo que es independiente es | cuánto crece la variación | no los valores puntuales

Si tengo n fechas, planteo n integrales

Si tenemos el mismo pay off, pero paga en T_3

$$V_t = e^{-r(T_3-t)}$$

En general, T es la fecha en la que paga el derivado. No necesariamente coincide con alguna de las fechas a las que tengo que buscar el activo para valuar el pay-off.

Si lo hubieramos resuelto con probabilidades R, y con T_3,

$V_t = S_t\, E_R[X S_{T_3}^{-1} \mid F_t] \Rightarrow$ tengo $S_1, S_2, S_3 \Rightarrow$ tengo 3 integrales y 3 f. de densidad

Ejemplo $\quad X = \max[\max(S_T) - 2\min(S_T); 0]$

No puedo resolver por integrales → simulación: aproximo el valor de la esperanza condicionada)

Uso probabilidades R: $V_t = S_t E_R[X S_T^{-1} \mid F_t]$

$$S_T = S_t\, e^{(r+1/2\sigma^2)(\underset{U}{T}-t) + \sigma(\bar{\omega}_{\underset{U}{T}} - \bar{\omega}_t)}$$

$T = 10$
$t = 3$ (fecha de valuación)
$S_t = 12$
$\mu = 0{,}02$
$r = 0{,}01$
U = tiempo

$\underset{0:3}{\text{Max}}(S_T) = 14$
$\underset{0:3}{\text{Min}}(S_T) = 9$
$n = 70$
$\Delta t = \frac{(T-t)}{n} \Rightarrow \Delta t = 0{,}1$

U	$\Delta\bar{\omega}$	$\bar{\omega}_U - \bar{\omega}_t$	S_U
3		0	12 $(\bar{\omega}_T - \bar{\omega}_t) = 0$
3,1	$\sim N(0{,}0{,}1)$	0,15	12,4
3,2	-0,8	0,7	12,22
⋮			⋮
10		3,1	14,7

De esta trayectoria agarro el máximo
supongo max = 19
min: 11,8

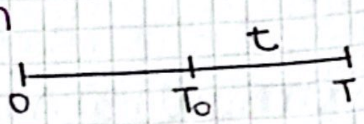
simulación 1

$X = (19 - 2.9)^+ \Rightarrow E_R = X S_T^{-1} = \frac{(19-2{,}9)^+}{14{,}7} = \frac{X^{①}}{S_T^1}$

Simulo m veces $X^2/S_T^2 \ldots X^m/S_T^m$
Los sumo, divido por m y obtengo $\simeq E_R[X S_T^{-1} \mid F_t]$
multiplico por 12 y obtengo V_t

Ejemplo Forward Strike Option

$X = (S_T - S_{T_0}) \mathbb{1}_{S_T > S_{T_0}}$



El strike del call no es un valor fijo sino que es el valor que vamos a conocer en T_0 (= valor que toma el activo en esa fecha) paga en T.

(strike)

Entre T_0 y T es un call, está fijo el strike del instrumento.

Para $t \geq T_0$ = call

$$V_t = S_T \, N\left[\frac{\ln(S_T/S_{T_0}) + (r + 1/2\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right] - S_{T_0} e^{-r(T-t)} \cdot N\left[\frac{\ln(S_T/S_{T_0}) + (r - 1/2\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right]$$

Para $t = T_0$ $\ln(1) = 0$.

$$V_t = S_{T_0} \underbrace{\left\{ N\left[\frac{(r + 1/2\sigma^2)(T-T_0)}{\sigma\sqrt{T-T_0}}\right] - e^{-r(T-t)} N\left[\frac{(r - 1/2\sigma^2)(T-T_0)}{\sigma\sqrt{T-T_0}}\right]\right\}}_{A}$$

A: Todas las variables son conocidas, las conozco en cero.

$V_t = S_{T_0} A$ (A es un número)

Para $t < T_0$ $V_t = S_t A$

Si quiero obtener $\$S_{T_0} A$, en T_0 en un momento anterior tengo que comprar A activos

Tengo: $\phi_t = A$ y $\psi_t = 0$.

En T_0 voy a tener A activos que van a valer $\$S_{T_0} A$.

A partir de T_0 sigo replicando el call

$$\phi_t = \phi_t^{\text{call}(S_{T_0};T)}$$

$$\psi_t = \psi_t^{\text{call}(S_{T_0};T)}$$

Hasta T_0 la estrategia es estática (me compré A activos y los guardé). A partir de T_0 la plata que junté me alcanza para comprarme la primer cartera asociada al call y así la voy a ir cambiando todos los días.

NOTA

con probabilidades R llego al mismo resultado.

$$V_t = S_t E_R[(S_T - S_{T_0}) 1_{S_T > S_{T_0}} S_T^{-1} | F_t]$$

tower property

$$V_t = S_t E_R[\underbrace{S_{T_0} E_R[(S_T - S_{T_0}) 1_{S_T > S_{T_0}} S_T^{-1} | F_t]}_{V_{T_0} = S_{T_0} A} S_{T_0}^{-1} | F_t]$$

$$V_t = S_t E_R[\cancel{S_{T_0}} A \cancel{S_{T_0}^{-1}} | F_t]$$

$$V_t = S_t A$$

CLASE 12

Explicación de por qué los derivados se pueden valuar de la manera en que lo hacen.

Tenemos un mercado con un tipo de activo que se comporta según S_t, un tipo de bono que se comporta según B_t y un derivado cuyo pay off viene dado por alguna forma de X.

1. $S_t = S_0 e^{(r+1/2\sigma^2)t + \sigma W_t}$ { Utiliza probabilidades P, ya que W_t es un proceso browniano.
2. $B_t = e^{rt}$
3. $X = S_T^2$; $X = \ln(S_T)$
4. $V_t = B_t E_Q[X B_T^{-1} | F_t]$ → Tiene que cumplirse porque sino se arma arbitraje. ↓ Lo vamos a demostrar
5. $\underset{\text{NO ES PB}}{\tilde{W}_t} = \overset{\text{PB}}{W_t} + \left(\frac{\mu - r + 1/2\sigma^2}{\sigma}\right)t$

Si puedo demostrar que algo se cumple con probabilidad Q=1, automáticamente se cumple con P=1, siempre que se cumpla 5.

Aplicando diferencia

6. $\Delta \tilde{W}_t = \Delta W_t + \left(\frac{\mu - r + 1/2\sigma^2}{\sigma}\right)\Delta t$
7. $S_t = S_0 e^{(r - 1/2\sigma^2)t + \sigma \tilde{W}_t}$
8. $\frac{S_t}{B_t} = Z_t = S_0 e^{(-1/2\sigma^2)t + \sigma \tilde{W}_t}$

Si suponemos que $\tilde{W}_t$ es un proceso browniano y logro demostrar que algo se cumple con probabilidad 1 → puedo asegurar que eso mismo se cumple con probabilidad 1 cuando supongo que W_t es un proceso browniano. (Teorema de Girsanov)

Bajo el supuesto original, el mercado se mueve según los parámetros μ, σ y r (1)
Asumiendo que $\tilde{W}_t$ es un proceso browniano, el mercado queda modelado por σ y r (7)
⇒ El supuesto inventado es un caso particular del supuesto original (un caso particular de μ)

Demuestro algo para el caso particular y por el teorema de Girsanov se demuestra para el caso original

Por el teorema de Ito:

$$\Delta Z_t = \left(\frac{\partial Z_t}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Z_t}{\partial \tilde{W}_t^2} \right) \Delta t + \frac{\partial Z}{\partial \tilde{W}_t} \Delta \tilde{W}_t$$

Resuelvo las derivadas.

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = Z_t \left(-\frac{1}{2} \sigma^2 \right) \quad \frac{\partial Z_t}{\partial \tilde{W}_t} = \sigma Z_t \quad \frac{\partial^2 Z_t}{\partial \tilde{W}_t^2} = \sigma^2 Z_t$$

$$\Delta Z_t = \left(-\frac{1}{2} \sigma^2 Z_t + \frac{1}{2} \sigma^2 Z_t \right) \Delta t + \sigma Z_t \Delta \tilde{W}_t$$

9. $\Delta Z_t = \sigma Z_t \Delta \tilde{W}_t$ → Me quedo sin término de tendencia y eso hace que sea más fácil demostrarlo con este supuesto
se cumple con $Q=1$

Recordando $E_Q[Z_t | F_t] = Z_t$ ⇒ Martingala (espero que un proceso mañana valga lo mismo que hoy)
↳ Si a un martingala le calculo el teorema de Ito, desaparece la tendencia ⇒ q, tiene sentido. (si se puede)

Invento un proceso

10. $E_t = E_Q[X / B_T^{-1} | F_t]$ Tomando E_t como un Martingala

11. $\Delta E_t = \lambda_t \ \Delta \tilde{W}_t$ → Por el teorema de la representación de Martingala se cumple con $Q=1$

12. $\phi_t = \dfrac{\lambda_t}{\sigma Z_t}$ } cuántas veces varía el valor del derivado ΔE_t en relación a la variación del activo ΔZ_t

ϕ_t es la cantidad de activos que voy a querer para replicar el valor del derivado.

Ψ_t va a ser lo que yo necesite para que el valor de la cartera en términos de bonos sea igual a E_t

13. $E_t = \emptyset_t Z_t + \Psi_t \qquad \Psi_t = E_t - \emptyset_t Z_t$ 13,5

Voy a demostrar que (13) efectivamente replica el valor del derivado.

14. En $t+\Delta t$: $= \emptyset_t Z_{t+\Delta t} + \Psi_t$

15. $\underbrace{\emptyset_t Z_{t+\Delta t} + \Psi_t}_{\text{Lo que va a valer la cartera que me compré en t en } t+\Delta t} = \underbrace{\emptyset_t Z_t + \Psi_t}_{E_t} + \underbrace{\emptyset_t \Delta Z_t}_{\Delta E_t}$

$\Delta E_t \to$ Lo que va a variar la cartera en términos de bonos entre t y Δt

16. $E_{t+\Delta t} = \emptyset_t Z_t + \Psi_t + \emptyset_t \Delta Z_t$

17. $E_{t+\Delta t} = \emptyset_{t+\Delta t} Z_{t+\Delta t} + \Psi_{t+\Delta t}$ (sale de 18) sigo recursivamente hasta T

18. En T: $E_Q[X B_T^{-1} | F_t] = X B_T^{-1}$

Esta réplica funciona con probabilidad 1 (Q=1)

Compound call

$X = (\text{call}(S_{T_2}; K; T_2) - L)^+ \to$ call sobre un call.

En T tengo el derecho a comprar a L un call que vence en T_2

$\overset{L}{\underset{T}{|}} \qquad \overset{K}{\underset{T_2}{|}}$

$X = (E_Q[e^{-r(T_2-T)}(S_{T_2} - K) 1_{S_{T_2} > K} | F_T] - L)^+$

Lo de adentro

$X = S_T N\left[\frac{\ln(S_T/K) + (r + 1/2\sigma^2)(T_2 - T)}{\sigma\sqrt{T_2 - T}}\right] - Ke^{-r(T_2-T)} N\left[\frac{\ln(S_T/K) + (r+1/2\sigma^2)(T_2-T)}{\sigma\sqrt{T_2-T}}\right.$

Cuando el activo $\to 0 \Rightarrow S \to 0$
$\to \infty \Rightarrow S \to \infty$

El call va a valer más que L si el activo termina valiendo más que A

$$X = [(S_T E_R[1_{S_{T_2}>K} | F_T] - Ke^{-r(T_2-T)} E_Q[1_{S_{T_2}>K} | F_T]) - L] 1_{S_T>A}$$

$$X = \underbrace{S_T E_R[1_{S_{T_2}>K; S_T>A} | F_T]}_{X_1} - \underbrace{Ke^{-r(T_2-T)} E_Q[1_{S_{T_2}>K; S_T>A} | F_T]} - \underbrace{L \cdot 1_{S_T>A}}_{3}$$

Valúo cada término por separado

<u>3.</u> Pareado a cuando en un call nos queda $S_T 1_{S_T>K} - \underline{K 1_{S_T>K}}$

$$V^3_t = Le^{-r(T_2-T)} N\left[\frac{\ln(S_t/A) + (r - 1/2\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right]$$

∇ Cuando tengo S_T antes de la esperanza me conviene valuarlo con probabilidades R para que se cancele.
Cuando tengo una constante adelante, conviene valuar con probabilidades Q

<u>X_1:</u> $V^1_t = S_t E_R[X S_T^{-1} / F_t]$

$$= S_t E_R[\cancel{S_T} E_R[1_{S_{T_2}>K; S_T>A} | F_T] \cancel{S_T^{-1}} / F_t]$$

La esperanza de una esperanza es la esperanza

$$= S_t E_R[1_{S_{T_2}>K; S_T>A} | F_t]$$ → La esperanza es $1 \times$ Probabilidad de que ocurra $+ 0 \times$ prob que no ocurra

$$= S_t R[S_{T_2}>K; S_T>A | F_t]$$ Probabilidad R de que se cumpla la condición

con $t=0$. → es lo mismo que:

$$S_T = S_0 e^{(r+1/2\sigma^2)T + \sigma \bar{W}_T} > K$$

$$S_{T_2} = S_0 e^{(r+1/2\sigma^2)T_2 + \sigma \bar{W}_{T_2}} > A$$

Despejo $\bar{W}_T$ y $\bar{W}_{T_2}$

$$\bar{W}_T > \frac{\ln(A/S_0) - (r+1/2\sigma^2)T}{\sigma} = b_{A,R} \qquad \bar{W}_T \sim N(0;T)$$

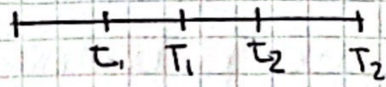
$$\bar{W}_{T_2} > \frac{\ln(K/S_0) - (r+1/2\sigma^2)T_2}{\sigma} = a_{K,R} \qquad \bar{W}_{T_2} \sim N(\bar{W}_T; T_2-T)$$

$$V^1_t = \int_{b_R}^{\infty}\int_{a_{K,R}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(\bar{W}_T)^2}{T}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(T_2-T)}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(\bar{W}_{T_2}-\bar{W}_T)^2}{T_2-T}} d\bar{W}_{T_2} d\bar{W}_T$$

Lo mismo para X_2 con probabilidades Q

CLASE 12.5

$X = S_{T_1}$ con vencimiento en T_2



Valuando en t_2

$V_{t_2} = B_t E_Q[S_{T_1} B_{T_2}^{-1} | F_{t_2}] = \frac{B_{t_2}}{B_{T_2}} S_{T_1}$ } valor actual S_{T_1}

$V_{t_2} = S_t E_R[S_{T_1} S_{T_2}^{-1} | F_{t_2}] = S_t S_{T_1} E_R[S_{T_2}^{-1} | F_{t_2}]$

$= \cancel{S_t} S_{T_1} E_R[\cancel{S_t^{-1}} e^{-(r+1/2\sigma^2)(T_2-t)-\sigma(\bar{W}_{T_2}-\bar{W}_t)} | F_t]$

Aplico probabilidades R al suponer $\bar{W}_t$ es un proceso browniano

$\bar{W}_{T_2} - \bar{W}_t \sim N(0; T_2 - t)$

exponente $\sim N(-(r+1/2\sigma^2)(T_2-t); \sigma^2(T_2-t))$

$E[e^X] = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$

$V_{t_2} = S_{T_1} e^{-(r+1/2\sigma^2)(T_2-t)+\frac{1}{2}\sigma^2(T_2-t)}$

$V_{t_2} = S_{T_1} e^{-r(T_2-t)} = S_{T_1}\frac{B_t}{B_{T_2}}$ ✓

Valuado en t_1

en T_1: $V_t = S_{T_1} \overset{0{,}8}{\frac{B_{T_1}}{B_{T_2}}}$ } Para que no haya arbitraje

en t: $V_t = S_t\, 0{,}8$

$V_t = S_t E_R[S_{T_1} S_{T_2}^{-1} | F_t]$

$= S_t E_R[\cancel{S_{T_1}} \cancel{S_{T_1}^{-1}} e^{-(r+1/2)\sigma^2(T_2-T_1)-\sigma(\bar{W}_{T_2}-\bar{W}_{T_1})} | F_t]$

$= S_t e^{-(r+1/2)\sigma^2(T_2-T_1)+\frac{1}{2}\sigma^2(T_2-T_1)}$

$= S_t e^{-r(T_2-T_1)}$ ✓

Si $V_t = F(t; S_t) \Rightarrow \phi_t = \frac{\partial V_t}{\partial S_t}$

en t_2: $\phi = 0$. $\psi_t = \frac{V_t - S_t\phi_t}{B_t} = S_{T_1} e^{-rT_2}$

en t_1: $\phi = e^{-r(T_2-T_1)}$ $\psi_t = 0$.

NOTA

Cuando estamos en un momento posterior a T, cuando ya es conocido el pay-off, no tengo que invertir en activos. Lo único que tengo que saber es cuanto me va a pagar el derivado (S_T) y tengo que tener un flujo de bonos que me asegure ese valor fijo.

Siempre que el derivado no tenga aleatoriedad, $\phi = 0$.

Barrier options

P.141

$X = (S_T - K)^+ \mathbb{1}_{S_T^* \leq L}$ → un call si el máximo valor que toma el activo hasta T es menor o igual a L.

$S_T^* = \max_{0 \leq t \leq T} S_t$

Simplifico valuando el derivado al momento cero.

$$V_0 = e^{-rt} E_Q[(S_T - K)^+ \mathbb{1}_{S_T^* \leq L} | F_0]$$

Como trabajo con probabilidades Q uso:

$$S_t = S_0 e^{\sigma \tilde{W}_t + (r - 1/2\sigma^2)t}$$

$$= S_0 e^{\underbrace{\sigma \left(\tilde{W}_t + \frac{(r - 1/2\sigma^2 t)}{\sigma} \right)}_{\hat{W}_t}}$$

S_t va a tomar su valor máximo cuando $\hat{W}_t$ alcance el máximo.

$$\left.\begin{array}{l} S_T = S_0 e^{\sigma \hat{M}_T} \\ S_T = S_t e^{\sigma \hat{W}_T} \end{array}\right\}$$ Todo el pay off me queda dependiendo del último valor y el máximo

Sabiendo que la función de densidad conjunta de M_T y de W_T es P.140

$$f(M_T; W_T) = \frac{2(2M_T - W_T)}{T\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{(2M_T - W_T)^2}{2T}}$$ (Supongo que W es un proceso browniano)

↓

No la puedo usar directo agregándole los Δ. Voy a suponer que $\hat{W}_t$ es un proceso browniano → tengo que modificar la función de densidad.

$$\hat{W}_T = \overset{P.B.}{\tilde{W}_T} - \theta_T \quad \text{con } \theta = -\left(\frac{r - 1/2\sigma^2}{\sigma}\right)t$$

$\hat{W}$ es un proceso browniano con una tendencia $-\theta$

Por teorema de girsanov, cuando tengo tendencia, tengo que multiplicar a la función de densidad por un factor:

$$\Rightarrow f(\hat{M}_T;\hat{W}_T) = e^{-\theta \hat{W}_T - \frac{1}{2}\theta^2 T} \frac{2(2\hat{M}_T - \hat{W}_T)}{T\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{(2\hat{M}_T - \hat{W}_T)^2}{2T}}$$

$$V_0 = e^{-rT} \int_b^m \int_{\max(\hat{W}_T;0)}^m (S_0 e^{\sigma \hat{W}_T} - K)^+ \mathbb{1}_{S_0 e^{\sigma \hat{M}_T} \leq L} f(\hat{M}_T;\hat{W}_T)\, d\hat{M}_T\, d\hat{W}_T$$

$$\mathbb{1}_{\hat{M} \leq m;\, \hat{W} \geq b}$$

Limites

$$S_0 e^{\sigma \hat{W}_T} \geq K \Rightarrow b = \frac{1}{\sigma} \ln\left(\frac{K}{S_0}\right)$$

$$S_0 e^{\sigma \hat{M}_T} \leq L \Rightarrow m = \frac{1}{\sigma} \ln\left(\frac{L}{S_0}\right)$$

$\downarrow$

despejo $\hat{W}_T$ y $\hat{M}_T$

CLASE 13

Divisas como activo subyacente

$C_t = C_0 e^{\nu t + \sigma W_t}$ $\rightarrow$ Tipo de cambio local extranjero: cuánto vale la divisa. Cuántas unidades de moneda local tengo que poner para que me den una unidad de moneda extranjera.

C_t^{-1}: Tipo de cambio extranjero local: cuántas unidades de moneda extranjera tengo que poner para que me den una de moneda local.

$B_t = e^{rt}$ Bono local

$B_t^f = e^{r^f t}$ Bono extranjero

$X = (C_T - K)^+$

- C_t no se opera nunca, me conviene operar B_t que aumenta el dinero. Compro divisa y con eso el bono extranjero.

Para poder usar la misma metodología invento un activo

$$S_t = C_t B_t^f = \underbrace{C_0}_{S_0} e^{\overbrace{(\nu + r^f)}^{\mu} t + \sigma W_t}$$

S_t es el bono extranjero nominado en moneda local (cuantos pesos vale un bono extranjero)

con $\mu = \nu + r^f \Rightarrow S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma W_t}$

$V_t = B_t E_Q[X B_T^{-1} | F_t] \Rightarrow S_t = S_0 e^{(r - 1/2\sigma^2)t + \sigma \tilde{W}_t}$

Reescribo el pay off: $X = \left(\frac{S_T}{B_T^f} - K\right)^+$

$$X = \frac{1}{B_T^f}(S_T - K^*) \quad \text{con } K^* = K B_T^f$$

$$V_t = \frac{1}{B_T^f}\left[S_t N\left(\frac{\ln(S_t/K^*) + (r + 1/2\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) - K^* e^{-r(T-t)} N\left(\frac{\ln(S_t/K^*) + (r - 1/2\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\right]$$

Reemplazo con C_t, B_t^f, S_t y K^*

$$V = C_t e^{-r^f(T-t)} N\left(\frac{\ln(C_t/K) - (r - r^f + 1/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) - K e^{-r(T-t)}$$

$$N\left(\frac{\ln(C_t/K) - (r - r^f - 1/2\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)$$

<u>Desde el lado extranjero.</u>

$X^f = X C_T^{-1}$ $\quad C_T^{-1} \rightarrow$ tipo de cambio

$B_t^f = e^{r^f t} \rightarrow$ bono local $\quad B_T = e^{rt} \rightarrow$ bono extranjero. (nuestro local)

$S_t^f = B_t C_t^{-1}$ Bono extranjero valuado en su moneda

$S_t^f = S_0^f e^{\mu^f t + \sigma^f W_t}$ con $S_0^f = C_0^{-1}$; $\mu^f = r - \nu$; $\sigma^f = \sigma$

$V_t^f = B_t^f E_Q^f[X^f B_T^{f-1} | F_t]$

$V_t = V_t^f C_T \Rightarrow$ se cumple. ?

Las probabilidades R son las probabilidades Q que utiliza el que está en el extranjero.

NOTA

$$C_t V_t^f = \frac{C_t B_t^f}{S_t} E_Q^f\Big[\underbrace{X C_T^{-1} B_T^{f^{-1}}}_{\frac{X^f}{S_T^{-1}}} \mid F_t\Big]$$

$$= S_t E_Q^f [X S_T^{-1} \mid F_t] \rightarrow \text{probabilidades } R$$

$$Z_t^f = \frac{S_t^f}{B_t^f} = \frac{B_t C_t^{-1}}{B_t^f} = \frac{B_t}{\frac{C_t B_t^f}{S_t}} = \frac{B_t}{S_t} = Y_t$$

$\Rightarrow$ La Z_t^f del extranjero es la Y_t nuestra $\Rightarrow$ las probabilidades que hacen que Z_t^f en promedio no cambien, son las mismas que las probabilidades que hacen que en promedio Y_t no cambie

$\Rightarrow Q^f = R$

Para $X = (C_t - K)^+$ local.

Para el extranjero: $X^f = C_T^{-1}(C_T - K)^+$

$\downarrow$

Lo puedo trabajar para que quede más sencillo

$$X^f = (1 - K C_T^{-1})^+$$
$$= K(1 - K' C_T^{-1}) \text{ con } K' = K^{-1}$$

$\rightarrow$ Queda la fórmula invertida (un put con nuestra moneda local/extranjera para él).

Lo que nosotros vemos como un call sobre moneda extranjera, para el otro son K puts con nuestra moneda local.

Call sobre peso-dolar = put sobre dolar peso.

Derivados sobre acciones que pagan dividendos (cuidado)

$C_t = C_0 e^{\mu t + \sigma W_t}$ $\quad B_t = e^{rt}$ $\quad B_t^f = e^{r^f t}$

r^f: Tasa continua de pago de dividendos. A cada instante la acción paga dividendos. Puedo suponer que los vuelvo a invertir en mis acciones

$S_t = C_t B_t^f \rightarrow$ una acción al PPO + todos los dividendos reinvertidos.

$S_t = C_0 e^{(\mu + r^f)t + \sigma W_t}$

$S_t = S_0 e^{\mu_t + \sigma W_t}$

$$X = (C_T - K)^+ \Rightarrow X = \left(\frac{S_T}{B_T^f} - K\right)^+ \Rightarrow X = \frac{1}{B_T^f}(S_T - K)^+$$

Clase 14

Ecuación en derivadas parciales de Black-Shoes

Forma alternativa de valuación.
Método análogo al de sistema de ecuaciones para el tiempo discreto.
En continuo, en algunas ocasiones es más fácil que el método de las esperanzas.

$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma W_t}$ → Probabilidades P (1)

$B_t = e^{rt}$

$V_t = B_t E_Q[X B_T^{-1} | F_t]$ ⇒ $S_t = S_0 e^{(r - 1/2\sigma^2)t + \sigma \tilde{W}_t}$ (2)

Si $V_t = f(t; S_t) \Rightarrow \emptyset = \frac{\partial V_t}{\partial S_t}$

↓

Demostrando esto llego a la ecuación en derivadas parciales

Usando (1) o (2) llego a lo mismo.

Uso (2) y aplico teorema de Itô.

$dS_t = \left[\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) S_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t \right] dt + \sigma S_t d\tilde{W}_t$

(3) $dS_t = r S_t dt + \sigma S_t d\tilde{W}_t$
(4) $dB_t = r e^{rt} dt = r B_t dt$

} La tendencia del activo es la misma que la del bono (el activo y el bono capitalizan a la misma tasa)

Teorema generalizado de Itô aplicado a $V_t = V(t; S_t)$

(5) $dV_t = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial S} r S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S_t \right) dt + \frac{\partial V}{\partial S} \sigma^2 S_t^2 d\tilde{W}_t$

=

(6) $dV_t = \emptyset_t dS_t + \Psi_t dB_t$ } Lo calculo como un cambio en el valor de la estrategia que replica el pay-off del derivado.

Reemplazo (3) y (4) en (6)

$dV_t = \emptyset_t r S_t dt + \emptyset_t \sigma S_t d\tilde{W}_t + \Psi r B_t dt$

$= (\emptyset r S_t + \Psi r B_t) dt + \emptyset_t \sigma S_t d\tilde{W}_t$

(7) $= r V_t dt + \emptyset_t \sigma S_t d\tilde{W}_t$

Para que (5) = (7)

$$\frac{\partial V}{\partial S} = \emptyset$$

y

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial S} r S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 = r V_t$$

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial S} r S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 - r V_t = 0}$$

↳ Ecuación en derivadas parciales de Black Sholes.
Valida para cualquier derivado que cumpla con
$X = V(T; S_T)$

Hay una sola función que cumple con la ecuación y con la condición. Si la encuentro, puedo saber cuánto vale el derivado.

ejemplo: $2 \frac{\partial F}{\partial t} + 3F(t) + t^2 = 0 \Rightarrow 2 \frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{\Delta t} + 3F(t) + t^2 = 0$

$F(0) = 1 \rightarrow$ condición particular

$$2 \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + 3F(t) + t^2$$

$$2 \; \frac{\frac{F(t+2\Delta t) - F(t+\Delta t)}{\Delta t} - \frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{\Delta t}}{} + 3F(t) + t^2 = 0$$

$$2 \; \frac{F(t+2\Delta t) - 2F(t+\Delta t) + F(t)}{\Delta t^2} + 3F(t) + t^2 = 0$$

necesito 2 condiciones

$$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial S} r S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S_t - r V_t = 0 \quad \text{con} \quad X = V(T; S_T)$$

$$\frac{V(t+\Delta t; S) - V(t;S)}{\Delta t} + \frac{V(t; S+\Delta S) - V(t;S)}{\Delta S} r S_t + \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{V(t; S+2\Delta S) - 2V(t; S+\Delta S) - V(t;S)}{\Delta S^2}\right)\sigma^2 S_t^2 - rV(t;S) = 0$$

(...)

$\Rightarrow$ necesito más condiciones.

Condiciones:
- $X = V(T; S_T)$
- $V(t; 0) = 0$ si en algún momento $S=0$, el contrato va a terminar valiendo 0 $\rightarrow$ el valor de hoy es 0
- $V'_S(t; \infty) = 1$

Ejemplo call asiático $\quad X = \left(\sum \frac{S_i}{T} - K\right)^+$

$$\left(\int_0^T \frac{S_t}{T} dt - K\right)^+ = \left(\frac{Y_T}{T} - K\right)^+ \quad \text{con } Y_t = \int_0^t S_t \, dt$$

$$dY_t = S_t dt + 0\, d\tilde{W}_t$$

$$V_t = V(t; S_t; Y_t)$$

cuánto vale el proceso en cada momento importa porque necesito el promedio

Teorema generalizado de Ito aplicado a $V(t; S_t; Y_t)$

$$dV_t = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial S} r S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial V}{\partial Y} S_t\right) dt + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial S}\sigma^2 S_t^2 d\tilde{W}_t}_{\text{No cambia porque } dY_t = (\ldots)\, 0\, d\tilde{W}_t}$$

Ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial S} r S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S_t - rV_t + \frac{\partial V}{\partial Y} S_T = 0.$$

ϕ_t sigue siendo el mismo.

Clase 15

$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma W_t}$ $\quad B_t = e^{rt}$

$dB_t = r e^{rt} dt$

$Z_t = S_0 e^{(\mu - r)t + \sigma W_t}$

$\tilde{W}_t = W_t + \theta t$

$d\tilde{W}_t = dW_t + \theta dt$

$d\tilde{W}_t - \theta \cdot dt = dW_t \quad (1)$

$S_{t+dt} = S_t e^{\mu dt + \sigma dW_t}$ $\qquad dW_t^2 = dt$

$$\ln^2\left(\frac{S_{t+dt}}{S_t}\right) = (\mu dt + \sigma dW_t)^2 \underset{\text{supuesto P}}{=} \underbrace{\mu^2 dt^2 + 2\mu dt \sigma dW_t}_{\text{son despreciables}} + \sigma^2 dW_t^2 = \sigma^2 dt$$

$$\underset{\text{supuesto Q}}{=} \text{Reemplazando con (1)} : (\mu dt + \sigma(d\tilde{W}_t - \theta dt))^2 = \sigma^2 dt$$

En ambos casos, si calculo una variación cuadrática del logaritmo de las divisiones del valor del activo me da una constante al cuadrado x dt

↳ Agregarle la tendencia $-\theta$ al proceso browniano no me cambió la variación cuadrática del logaritmo de ΔS_t

↓

Cuando hago un cambio en las probabilidades, no estoy cambiando las cosas que tienen probabilidad 1 de ocurrencia.

Al cambiar el θ estoy manteniendo las trayectorias. Distinto sería si afectaría/cambiara la volatilidad. → Por ello agregamos tendencia y no volatilidad

Al cambiar el θ estoy cambiando las probabilidades. Al no agregarle una constante a dW_t no estoy cambiando las trayectorias.

$$\theta = \frac{\mu + 1/2\sigma^2 - r}{\sigma} \Rightarrow S_t = S_0 e^{(r - 1/2\sigma^2)t + \sigma \tilde{W}_t}$$

$$Z_t = S_0 e^{(-1/2\sigma^2)t + \sigma \tilde{W}_t}$$

Le aplico Ito a las dos

$dS_t = r dt + \sigma S_t d\tilde{W}_t$

$dZ_t = 0dt + \sigma Z_t d\tilde{W}_t$ → Espero que Z no varíe con el tiempo.

En discreto:

$E_Q[XB_T^{-1} | F_s] = E_s + E_Q\left[\sum_{S=t}^{T-1} \phi_t \Delta Z_t | F_s\right]$

Me invento las probabilidades Q para que $E_Q[..] = 0$.

⇒

$B_s E_Q[XB_T^{-1} | F_s] = B_s E_s = V_s$

En continuo.

$E_Q[XB_T^{-1} / F_s] = E_s + E_Q[\int_s^T \phi_t dZ_t | F_t]$

Trabajo con las probabilidades Q que hacen que $E_Q[\ ] = 0$

Corolario: con independencia del modelo, agarro el proceso browniano, le cambio la tendencia de forma tal que dZ_t en promedio no varíe y con ese nuevo modelo calculo la esperanza y obtengo el valor del derivado.

Modelo - cuando los parámetros no son constantes sino que varían con el tiempo.

$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma W_t}$

$dS_t = \underbrace{(\mu + 1/2\sigma^2)}_{\mu} S_t dt + \sigma S_t dW_t$

$dS = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$

$dB_t = r B_t dt \rightarrow B_t = e^{rt} = e^{\int_0^t r ds}$

$d\tilde{W}_t = dW_t + \theta dt$ con $\theta = \frac{\mu - r}{\sigma}$

$dS_t = (\mu - \theta\sigma) S_t dt + \sigma S_t d\tilde{W}_t$

$dS_t = r S_t dt + \sigma S_t d\tilde{W}_t$

El bono y el activo tienen la misma tendencia. Es razonable con que S con respecto al bono no cambie.

$dZ_t = \sigma Z_t d\tilde{W}_t \Rightarrow dt = 0$

Extrapolaciones

- $dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dW_t$ (μ y σ dependen de t)

$$dB_t = r_t B_t dt \rightarrow B_t = e^{\int_0^t r_s ds + \int_0^t 0 \, dW_t} = e^{A_t}$$

$$dA_t = r_t dt + 0 \, dW_t$$

$d\tilde{W}_t = dW_t + \theta dt$ con $\theta = \left(\frac{\mu_t - r_t}{\sigma_t}\right)$ me invento una tendencia

$$dS_t = r_t S_t dt + \sigma_t S_t d\tilde{W}_t$$

$$dZ_t = \sigma_t Z_t d\tilde{W}_t \qquad dt = 0.$$

$$\Rightarrow E_Q[X B_T^{-1} | F_s] = E_s + \cancel{E_Q\left[\int_s^T \phi_t dZ_t | F_s\right]}$$

$$E_Q[X B_T^{-1} | F_s] = E_s.$$

En estos casos tengo 1 activo, 1 bono y 1 proceso brownian

Con 2 P.B necesito 2 activos y 1 bono

Con 3 PB necesito 3 activos y 1 bono.

Generalizando

n activos ($i = 1:n$), 1 bono. n Ws ($j = 1:n$)

$$dS_t^i = \mu_t^i S_t^i dt + S_t^i \sum_{j=1}^n \sigma_t^{ij} dW_t^j$$

matriz

$$B_t = e^{\int_0^t r_s ds}$$

$$dB_t = r_t B_t dt$$

$$d\tilde{W}_t^j = dW_t^j + \theta_t^j dt \text{ con } \theta_t = (\mu_t - r_t)\sigma_t^{-1}$$

$$dS_t^i = r_t S_t^i dt + S_t^i \sum_{j=1}^n \sigma_t^{ij} d\tilde{W}_t^j$$

$$dZ_t^i = Z_t^i \sum_{j=1}^n \sigma_t^{ij} d\tilde{W}_t$$

$$E_Q[X B_T^{-1} | F_s] = E_s$$

Ejemplo 2 activos

$S_t = S_0 e^{\mu_s t + \sigma_s W_t^s}$ • Ambos están correlacionados

$Y_t = Y_0 e^{\mu_y t + \sigma_y W_t^y}$

$B_t = e^{rt}$

$X = (S_T + Y_T)^2$

$= \underbrace{S_T^2}_{V_1} + \underbrace{2 S_T Y_t}_{V_3} + \underbrace{Y_t^2}_{V_2}$

Valúo cada término por separado

$V_1 = S_T^2 e^{(r+\sigma_t^2)(T-t)}$ (De cálculos anteriores)

$V_2 = Y_T^2 e^{(r+\sigma_T^2)(T-t)}$

Para V_3: Me invento 2 nuevos procesos brownianos.

- $\Delta W_t^s = \Delta W_t^1$
- $\Delta W_t^y = a \Delta W_t^1 + b \Delta W_t^2$

Para este caso

si $\rho = 1 \Rightarrow a = 1 \quad b = 0$

si $\rho = 0 \Rightarrow a = 0 \quad b = 1$

$\Delta W_t^y = \rho \Delta W_t^1 + \sqrt{1-\rho^2} \Delta W_t^2$ (1)

condiciones: 1. $corr(\Delta W_y; \Delta W_s) = \rho$

2. $Var(\Delta W) = \Delta t$

Demostración de (1):

$\Delta W_t^y = \rho \Delta W_t^1 + b \Delta W_t^2 \Rightarrow Var(\Delta W_t^y) = \rho^2 \Delta t + b^2 \Delta t = \Delta t$

$b = \sqrt{1-\rho^2}$

Reescribo los procesos

$S_t = S_0 e^{\mu_s t + \sigma_s W_t^1}$ $\quad Y_t = S_0 e^{\mu_y t + \sigma_y (\rho W_t^1 + \sqrt{1-\rho^2} W_t^2)}$

Aplico teorema de Ito

$dS_t = S_t\left(\mu_s + \frac{1}{2}\sigma_s^2\right)dt + S_t \sigma_s dW_t^1$ (2)

$dY_t = Y_t\left(\mu_y + \frac{1}{2}\sigma_y^2\right)dt + Y_t \sigma_y \rho dW_t^1 + Y_t \sigma_y \sqrt{1-\rho^2}\, dW_t^2$ (3)

de (2): Agrego θ a W_t para que me quede r acompañando dt

$$\theta^1 = \frac{\mu_S + 1/2\sigma_S^2 - r}{\sigma_S}$$

$$\Rightarrow d\tilde{W}_t^1 = dW_t^1 + \theta^1 dt$$

De (3): $\theta^2 = \frac{\mu_Y + 1/2\sigma_Y^2 - \theta^1\sigma_Y\rho - r}{\sigma_Y}$

$$\Rightarrow d\tilde{W}_t^2 = dW_t^2 + \theta^2 dt$$

Expreso en términos de $d\tilde{W}_t$

$$dS_t = S_t r dt + S_t \sigma_S \tilde{W}_t^1$$

$$dY_t = Y_t r dt + Y_t \sigma_Y \rho d\tilde{W}_t^1 + Y_t \sigma_Y \sqrt{1-\rho^2}\, d\tilde{W}_t^2$$

valuación:

$$V_t^3 = B_t E_Q[S_T Y_T B_T^{-1} | F_t]$$

$$= e^{-r(T-t)} E_Q\left[S_t e^{(r-1/2\sigma_S^2)(T-t)+\sigma_S \Delta\tilde{W}_{T-t}^1} Y_t e^{(r-1/2\sigma_Y^2)(T-t)} e^{\sigma_Y(\rho\Delta\tilde{W}_{T-t}^1 + \sqrt{1-\rho^2}\Delta\tilde{W}_{T-t}^2)} | F_t\right]$$

W_1 y W_2 son independientes

$$= e^{-r(T-t)} S_t Y_t e^{(r-1/2\sigma_S^2)(T-t)} e^{(r-1/2\sigma_Y^2)(T-t)} E_Q\left[e^{\sigma_S\Delta\tilde{W}_{T-t}^1 + \sigma_Y\rho\Delta\tilde{W}_{T-t}^1} | F_t\right] E_Q\left[e^{\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}\Delta\tilde{W}_{T-t}^2} | F_t\right]$$

$$V_t^3 = e^{-r(T-t)} S_t Y_t e^{(r-1/2\sigma_S^2)(T-t)} e^{(r-1/2\sigma_Y^2)(T-t)} e^{\frac{1}{2}(\sigma_S+\sigma_Y\rho)^2(T-t)} e^{1/2(\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2})^2(T-t)}$$

$$V_t = V_t^1 + V_t^2 + V_t^3$$