Capítulo 5

Simulación

5.1 Comentarios introductorios

(a) La idea de la simulación. Los métodos numéricos presentados en el capítulo 4 demostraron cómo puede resultar complicada la evaluación de una distribución del importe de los siniestros, aún con supuestos restrictivos. Cuando existen correlaciones e interrelaciones entre las variables surgen problemas más serios. Éstos se tornan aún más complejos, en realidad con frecuencia imposibles de resolver mediante los métodos convencionales, cuando el modelo se amplia y se incluyen elementos adicionales tales como varios años o líneas de negocios, inflación, beneficios de las inversiones, control dinámico, etc. El método de la simulación que trataremos en este capítulo, ofrece un esquema flexible y poderoso para enfrentarse hasta con las especificaciones más complicadas de los modelos.

La idea básica de la simulación es directa; en lugar de resolver el problema en forma analítica o por medio de métodos numéricos convencionales, el evento estudiado se imita dividiéndolo en una cadena de hechos primarios, cada uno de los cuales es relativamente fácil de manejar. Se utiliza un generador de números aleatorios para generar cada variable requerida para una realización particular y el proceso total se repite varias veces.

Por ejemplo, la distribución de los siniestros acumulados de una variable de Poisson mixta compuesta puede obtenerse generando, en primer lugar, un número aleatorio que represente el valor q de la variable de ponderación y a partir de allí un valor k para el número de siniestros, condicionado al parámetro nq de Poisson. Por último, se generan

siniestros individuales k y se suman para obtener el valor del importe acumulado de siniestros. El procedimiento se repite varias veces hasta lograr una muestra de siniestros acumulados simulados, a partir de los cuales, es posible estimar la f.d. $\boldsymbol{F}$ compuesta utilizando los métodos estadísticos convencionales, como si se contara con datos estadísticos de una cantidad grande de siniestros reales observados. En aplicaciones más avanzadas, los efectos tales como aquellos causados por la inflación, los ciclos comerciales, los controles dinámicos, etc. se pueden incorporar al proceso como pasos auxiliares sin que surjan complicaciones abrumadoras, y el proceso se puede extender a varios períodos sucesivos (ejercicios contables), donde el resultado al final de cada período determina el punto inicial de los eventos del período subsiguiente.

Una herramienta técnica que se requiere para producir la gran cantidad de números aleatorios necesarios en las aplicaciones prácticas, es el generador de números aleatorios, es decir un algoritmo de cálculo que produce secuencias de los denominados **números pseudoaleatorios**. Éstos números se distribuyen de tal manera que siguen una distribución dada con un grado de precisión suficiente.

La simulación es una técnica que con frecuencia se utiliza en la investigación operativa, y existe abundante bibliografía, incluyendo a Rubinstein (1981), por ejemplo. Tomaremos aquellos puntos que son apropiados para las aplicaciones de seguros. Para que sea más útil para el lector, hemos hecho una presentación independiente, también porque de esta manera se pueden especificar las definiciones y notaciones necesarias y además, se pueden hacer algunas modificaciones importantes.

Los pilares fundamentales para la simulación están dados en las secciones 5.2 a la 5.5. Su uso en la construcción de modelos más avanzados se demuestra en la sección 5.6 donde se analizan las ventajas y desventajas de la simulación. Dejamos algunos detalles para el Apéndice F.

(b) Terminología. El término **simulación** se utiliza en la literatura con una gran variedad de significados. Con frecuencia se incluyen los elementos estocásticos, pero no siempre. Solamente utilizaremos enfoques estocásticos, en su mayoría del tipo al que se refiere la bibliografía general como **métodos de Monte Carlo** (sección 5.2). Para ser breves, nos referiremos a la simulación a pesar de que algunas veces el término se usado aquí en forma más limitada de lo que a veces sería el caso.

5.2 Números aleatorios

(a) Secuencias de números aleatorios. La situación más simple donde se puede utilizar la simulación puede describirse del siguiente modo. Sea ***F*** la f.d. de una distribución dada. Como primer paso, en la mayoría de las aplicaciones se genera una secuencia

$$X_1, X_2, \dots X_s \tag{5.2.1}$$

de números aleatorios de tal manera que tengan un f.d. ***F*** común y sean mutuamente independientes. El proceso es similar al de la lotería. Por ejemplo, en el caso de una distribución discreta el proceso se organiza de tal manera que la probabilidad de extraer un valor determinado es la misma probabilidad que se le asigna a este valor de acuerdo con la distribución dada.

(b) Los números aleatorios distribuidos uniformemente son, con frecuencia, el punto de partida de la mayoría de las simulaciones. En la mayoría de las aplicaciones el rango de los valores r admitidos se limita a la unidad del intervalo (0,1). Aplicando el ejemplo de la lotería al que nos referimos más arriba, los números permitidos son los decimales del intervalo (0,1) especificados para n dígitos; por lo tanto, cada uno de ellos tiene la probabilidad $1/(10^n - 1)$ de ser extraído, si se excluyen los puntos extremos 0 y 1, como frecuentemente se aconseja para evitar problemas

técnicos que surjan ocasionalmente de estos valores especiales. Si n es lo suficientemente grande (por ejemplo $n \geq 10$), esta distribución discreta uniforme puede, en la práctica, considerarse igual a la distribución **uniforme** continua correspondiente teniendo la f.d.

$$R(r) = \begin{cases} 0 \text{ para } r \leq 0 \\ r \text{ para } 0 < r < 1 \\ 1 \text{ para } r \geq 1. \end{cases} \tag{5.2.2}$$

La distribución se denomina rectangular, debido a la forma de su función de densidad.

Con frecuencia en las computadoras se incluyen, como elementos estándar del "software", módulos de generación de números (pseudo)aleatorios distribuidos uniformemente. Un algoritmo que se utiliza habitualmente se presenta en el Apéndice **F** junto con algunos comentarios.

(c) Números aleatorios distribuidos de acuerdo con una f.d. *F* dada pueden obtenerse rápidamente generando primero, un número aleatorio $\boldsymbol{r}$ distribuido uniformemente, y luego transformándolo por la inversa de F

$$\boldsymbol{X} = F^{-1}(\boldsymbol{r}). \tag{5.2.3}$$

Entonces ***X*** tiene distribución *F*, como se ilustra en la Figura 5.2.1 (Ejercicio 5.2.1). Si la función *F* no es unívoca, entonces se debe definir que $F^{-1}(r)=\min\{X:F(X)\geq r\}$.

EJEMPLO: Los números aleatorios

$$\boldsymbol{X} = -(1/a)\ln(\boldsymbol{r}) \quad (\boldsymbol{r} \text{ distribuido uniformemente en } (0,1)). \tag{5.2.4}$$

tienen la f.d. exponencial (Ejercicio 5.2.2)

$$F(X) = 1 - e^{aX} \quad (X \geq 0) \tag{5.2.5}$$

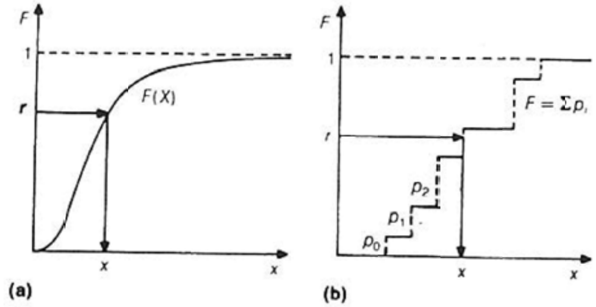

Figura 5.2.1 *Generación de números aleatorios **X** distribuidos según F; (a) caso continuo, (b) caso discreto.*

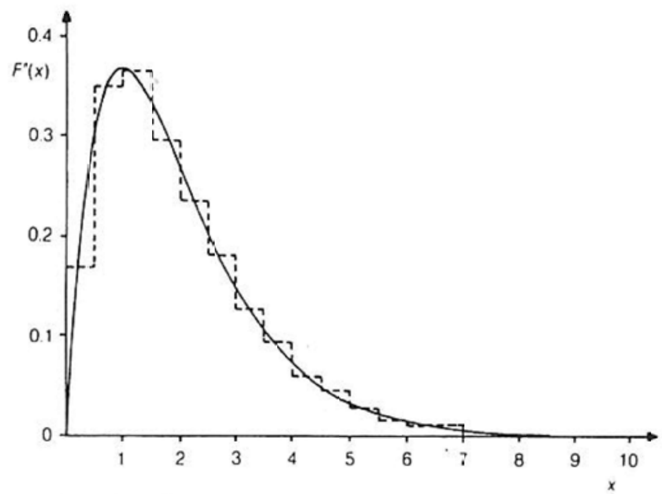

Figura 5.2.2 *Valores de la f.d. Gamma (2,1) exactos y simulados. Tamaño de la muestra: 2000.*

El procedimiento de simulación también puede organizarse de tal manera que se obtenga una estimación numérica para la densidad y para la f.d.. En la Figura 5.2.2 se da un ejemplo. Para demostrar las propiedades de los métodos analítico y de simulación se aplican simultáneamentemente (a pesar de que, en un caso tan simple como el

que presentamos aquí, la simulación no ofrece ninguna ventaja). Los valores simulados de X se agrupan en clases para estimar la densidad.

El diagrama proporciona información completa acerca de la forma de la función objetivo. Por el otro lado, también pueden verse la desventaja del método de simulación; el resultado de la simulación es una muestra de la distribución verdadera y por lo tanto es sólo una aproximación. La precisión puede evaluarse, como se muestra en el Apéndice F, sección F4, y el ajuste se puede mejorar incrementando el tamaño de la muestra y utilizando intervalos de clase más cortos.

(d) Los números aleatorios r distribuidos normalmente con media cero y desvío estándar unitario, también son importantes para muchas aplicaciones. En la práctica se dispone de programas para generarlos. La **fórmula de logaritmos y trigonometría** - que es fácil de manejar - aparece en el Apéndice F. Se la utilizará en todas las aplicaciones de este libro.

Entonces los números aleatorios distribuidos normalmente con media μ_X y desvío estándar σ_X se obtienen rápidamente conforme

$$\mathbf{X} = \mu_X + \sigma_X \, \mathbf{r}. \qquad (5.2.6)$$

Ejercicio 5.2.1 Demostrar que la X definida en (5.2.3) tiene a **F** como f.d..

Ejercicio 5.2.2 Demostrar (5.2.5).

Ejercicio 5.2.3 Construir generadores de números aleatorios que produzcan números distribuidos de acuerdo con las distribuciones siguientes: (a) log-normal (3.3.10); y (b) Pareto (3.3.14).

5.3 Simulación de números de siniestros

(a) La simulación directa. Una aplicación directa de la sección 5.2(c) proporciona un procedimiento para generar secuencias de números de siniestros relacionados con el caso de Poisson, el caso de Pólya o con una distribución mixta general.

Se supone que se dan los parámetros de Poisson, de Pólya u otros n,b, etc, necesarios, de tal manera que la f.d. F de la variable del número de siniestros sea especificada ((2.3.8) y (2.5.5)).

La simulación consiste en los dos pasos siguientes:

(1) Generar un número aleatorio r uniforme en (0,1).

(2) Hallar (por medio de cálculos o tablas preexistentes) la k más pequeña que cumpla con la desigualdad

$$F(k) \geq r \tag{5.3.1}$$

y tomar k como el número aleatorio requerido.

Repetir los pasos (1) y (2) s veces para obtener una muestra de tamaño s. Este método directo funciona bien en tanto que se espere un número de siniestros n moderado. Si n es grande, entonces el cálculo aproximado es útil, como ya se ha considerado en el contexto de las distribuciones del número de siniestros en la sección 2.3. Tal método se describe en los párrafos siguientes.

(b) Simulación de números aleatorios de Poisson. Este enfoque se basa en la inversa de la transformación de Anscombe (2.3.12), es decir, resolviendo k a partir de

$$F(k) = N(A_n(k)). \tag{5.3.2}$$

La simulación consiste en los pasos siguientes

(1) Generar un número aleatorio r con distribución N utilizando la fórmula de logaritmos y trigonometría (Apéndice F).

(2) Calcular k a partir de

$$k = A_n^{-1}(r) = a\,.(r+b)^{3/2} - c$$

donde (5.3.3)

$$a=\sqrt{\frac{8}{27}}\cdot\sqrt{n};\quad b=\frac{3}{2}\sqrt{n}-\frac{1}{24\sqrt{n}}\quad y\quad c=\frac{5}{8}$$

Entonces k tiene una distribución de Poisson (aproximadamente).

Repetir los pasos (1) y (2) s veces para obtener una muestra del tamaño s.

Si se diseña un programa de computación para abarcar colectivos de todos los tamaños, incluyendo a los más pequeños, es aconsejable combinar los métodos de las secciones 5.3(a,b). Se debe estipular un límite n_0 para definir qué cálculo se utiliza. Si $n < n_0$, se utiliza el método directo, y si no, el de Anscombe inverso. Teniendo en cuenta la Tabla 2.3.1, el límite puede ser bastante bajo, digamos $n_0 = 10$, dependiendo de la precisión deseada.

(c) La simulación de los números de siniestros de Poisson mixta puede lograrse agregando al procedimiento de la sección 5.3(b) la generación de la variable de ponderación $\boldsymbol{q}$. Es decir,

(1) Generar una q distribuida de acuerdo con la f.d. H de ponderación (sección 2.4(B)).

(2) Generar un número aleatorio de Poisson($n \cdot q$) como aparece en la sección 5.3(b) reemplazando n por $n \cdot q$ en (5.3.3).

Nótese que, por ejemplo en el caso Pólya, el método WH, con frecuencia, puede utilizarse para generar $\boldsymbol{q}$, como aparece en el cuarto párrafo de la sección 5.4(c).

5.4 Simulación de variables compuestas

Ahora la simulación se extenderá a distribuciones compuestas, incorporando al procedimiento la intensidad de los siniestros.

(a) Simulación directa. Primero se debe considerar la simulación de los números aleatorios que representan el importe acumulado de siniestros distribuido según la distribución compuesta general (3.1.4).

$$F(X) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k S^{k*}(X). \qquad (5.4.1)$$

Suponiendo que se conocen las probabilidades p_k y la f.d. S de la intensidad de siniestros, se deben seguir los pasos siguientes

(1) Generar el número de siniestros k utilizando los métodos de la sección 5.3.

(2) Generar k números $Z_1, Z_2, ..., Z_k$, que obedecen a la f.d. S de la intensidad del siniestro utilizando los métodos descriptos en la sección 5.2(c).

(3) La suma

$$X = Z_1 + Z_2 + ... + Z_k \qquad (5.4.2)$$

da el número aleatorio compuesto X que se requiere.

Si es necesaria una muestra de tamaño s, se deben repetir los pasos (1) y (3) s veces. Si también es necesaria una estimación de la f.d. $\boldsymbol{F}$ del importe acumulado de siniestros, ello se puede lograr organizando adecuadamente los resultados. La estimación discreta de la figura 5.2.2 ofrece una manera de proceder. Es posible obtener valores más precisos para las características y las distribuciones buscadadas almacenando todos los valores X y calculando las cantidades pertinentes a partir de allí.

El método directo es aplicable sólo en los casos (no frecuentes) donde el número de siniestros es bastante pequeño y la f.d. de la intensidad de siniestros es fácil de manejar. En cuanto a los colectivos grandes, y en el caso de las intensidades de siniestro de colas largas definidas en la forma tabular de la sección 3.3.3, el tiempo de cálculo tiende a extenderse mucho, indicando la necesidad de métodos de aproximación resumidos. En la sección 5.4(b) se presentará tal método para la distribución de Poisson compuesta, con una versión ampliada para la distribución de Poisson mixta compuesta en la sección 5.4(c). Desafortunadamente, estos métodos de aproximación no son aplicables si la distribución del importe acumulado de los siniestros es relativamente asimétrica. Si éste fuera el caso, entonces es posible aplicar el método que aparece en Pesonen (1989), que genera números aleatorios compuestos de tal manera que el tiempo de procesamiento es independiente del número esperado de siniestros.

(b) Generador WH de números aleatorios de Poisson compuesta. De la misma manera que se puede utilizar la fórmula de Anscombe para la simulación del número de siniestros (sección 5.3), la fórmula Wilson-Hilferty (sección 4.2.5) con la forma

$$F(X) = N(W(x)) \tag{5.4.3}$$

ofrece un método conveniente para generar números aleatorios aproximadamente con distribución de Poisson compuesta. Aquí, N, es nuevamente la f.d. normal estándar (1.4.23), la expresión W se dio en (4.2.11) y x es la variable estándarizada (4.2.2).

Las características primarias de $\boldsymbol{X}$, la media μ_X, el desvío estándar σ_X y la asimetría γ_X, son necesarias como parámetros iniciales para el cálculo. El usuario del modelo puede proporcionarlas, posiblemente utilizando la fórmula (3.2.13) (o las fórmulas (3.2.15) y (3.2.16), estableciendo $\sigma_q = 0$).

La simulación consiste en los pasos siguientes

(1) Generar un número aleatorio r con distribución N utilizando la fórmula de logaritmos y trigonometría (Apéndice F).

(2) Resolver x a partir de $r = W(x)$, es decir

$$x = b_1 .(r-b_2)^3 - b_3 \tag{5.4.4}$$

donde (véase(4.2.11))

$$b_1 = \frac{\gamma_X^2}{108}; \quad b_2 = \frac{\gamma_X}{6} - \frac{6}{\gamma_X}; \quad b_3 = \frac{2}{\gamma_X}. \tag{5.4.5}$$

(3) El importe acumulado de los siniestros simulados que se requiere es

$$X = \mu_X + x \,.\, \sigma_X. \tag{5.4.6}$$

Si fuera necesaria una muestra de tamaño s, se deben repetir los pasos (1)-(3) s veces. Si la f.d. $\boldsymbol{F}$ también es necesaria, se la puede estimar de la manera que se especifica en el penúltimo párrafo de la sección 5.4(a).

OBSERVACION El generador WH es una herramienta útil para simular otras distribuciones que se pueden ajustar a la f.d. gamma, además de la Poisson compuesta. La condición es que la asimetría γ_X no debe ser grande, preferentemente $< 0{,}5$ o como mucho igual a 1 (sección 4.2.5(c)). Si esta condición no se cumple, entonces se debe utilizar el método directo de la sección 5.4(a) u otro método.

En la siguiente sección vamos a demostrar como se puede tratar el caso mixto. Es aconsejable programar un módulo (subprograma) para el generador WH y utilizarlo para todos estos diversos propósitos seleccionando los parámetros de ingreso de acuerdo con la aplicación.

(c) Generador WH de números aleatorios de Poisson mixta compuesta. El generador WH de la sección 5.4(b) se puede extender fácilmente al caso mixto, generando, en primer lugar, una variable de ponderación $\boldsymbol{q}$. Entonces la simulación consistirá en los siguientes pasos

(1) Generar una variable de ponderación $\boldsymbol{q}$, como en la sección 5.2(c).

(2) Calcular las características μ_X , σ_X y la γ_X, que corresponden al valor particular q que se obtiene reemplazando n por $n \cdot q$ en (3.2.13).

(3) Aplicar el generador WH de la sección 5.4(b).

En el caso Pólya los pasos (1) y (2) pueden reemplazarse calculando las características directamente de (3.2.11) y (3.2.17). Entonces no es necesario simular $\boldsymbol{q}$.

La variable de ponderación $\boldsymbol{q}$ también puede generarse (paso (1)) utilizando el generador WH, como se mencionó en la observación de la sección 5.4(b). Por esta razón, los parámetros de entrada μ_X, σ_X γ_X en (5.4.5) y (5.4.6) se reemplazan por las cantidades de $\boldsymbol{q}$ correspondientes, es decir $\mu_q=1$, σ_q y γ_q. Entonces, el resultado, que se simboliza con $\boldsymbol{X}$ en (5.4.6), se puede utilizar como la q buscada. Este criterio es particularmente apropiado para los casos en los que no se cuenta fácilmente con la f.d., pero las características se pueden evaluar directamente, por ejemplo a partir de los datos reales (comp. la técnica (3) de la sección 3.3. (b)).

Nótese que en las simulaciones a largo plazo, $\boldsymbol{q}$ se puede simular por medio de series de tiempo u obtener por otros métodos que se desarrollarán en la sección 9.2(d,e).

Para que le resulte más fácil al lector, las transformaciones expliciatadas en el paso (2), que van de las características para las que q=1 a las correspondientes al valor simulado de q, son las siguientes .

$$\mu_{\boldsymbol{X}} = n.q.m$$

$$\sigma_{\boldsymbol{X}} = \sqrt{n.\,q.\,a^2} \tag{5.4.7}$$

$$\gamma_{\boldsymbol{X}} = a_3 \;/\sqrt{n.\,q.\,a_2^3}$$

(d) Generador condicional WH. En algunos casos es necesario simular, para cada realización, tanto el número de siniestros $\boldsymbol{k}$ como el importe acumulado $\boldsymbol{X}$ de siniestros relacionados. Por ejemplo, cuando se simula la supervivencia de cohortes de seguros de vida, son necesarios tanto el número de miembros fallecidos de la cohorte como el importe del siniestro asociado (secciones 15.2(a,e). En la simulación directa de la sección 5.4(a), se cuenta con los valores $\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{X}$ para los pasos de simulación. En el caso del generador WH de la sección 5.4(b), son necesarias modificaciones de la forma que sigue a continuación

(1) Primero, simular el valor k para el número k de siniestros (sección 5.3)

(2) Luego simular el valor X para la suma

$$\boldsymbol{X}(k) = \boldsymbol{Z}_1 + \boldsymbol{Z}_2 + \ldots + \boldsymbol{Z}_k \,. \tag{5.4.8}$$

Esto se puede hacer simulando las Zs una por una (como en la sección 5.4(a)), o, si la asimetría de $\boldsymbol{X}(k)$ no es mayor que 1, utilizando el mismo generador WH como se presentó en la sección 5.4(b), reemplazando los parámetros de entrada μ_X, σ_X y γ_X por medio de las características correspondientes de $\boldsymbol{X}(k)$. Estas se obtienen teniendo en cuenta el hecho de que el número de términos k en (5.4.8) ahora es fijo, es decir que no es aleatorio como era en el caso compuesto general (3.1.1). Como las $\boldsymbol{Z}$ son independientes e idénticamente distribuidas, obtenemos (3.2.9) y (1.4.21)).

$$\mu_{X(k)} = k.m$$

$$\sigma^2_{X(k)} = k.\sigma^2_Z = k.(a_2 - m^2)$$

$$\tag{5.4.9}$$

$$\gamma_{X(k)} = \frac{k \cdot \kappa_3(\mathbf{Z})}{\sigma^3_{X(k)}} = \frac{\gamma_Z}{\sqrt{k}}$$

$$= \frac{a_3 - 3a_2 m + 2m^3}{\left(a_2 - m^2\right)^{3/2} \cdot \sqrt{k}}$$

OBSERVACION. Vale la pena señalar que dividiendo la simulación en dos pasos, se puede reducir la imprecisión del uso de la fórmula WH, que como hemos señalado con anterioridad, se incrementa rápidamente a medida que la asimetría crece (sección 4.2.5(c)). Esto se debe al hecho de que la asimetría total surge en parte de la variación del número de siniestros (paso 1, más arriba) y en parte de la variación de la intensidad de los siniestros (paso 2).

5.5 Generalidades para la simulación de procesos de seguros más complejos.

Los métodos de simulación que presentamos en las secciones anteriores son bastante simples y muchas de las distribuciones objetivo podrían, en realidad, haberse obtenido utilizando los métodos analíticos convencionales. Se presentan como los pilares fundamentales para procedimientos más complejos que se tratarán en secciones posteriores, y no tanto para ser aplicados como tales en forma aislada. Para

proporcionar una visión total de las técnicas de simulación avanzadas, en esta sección daremos algunos ejemplos, que representan varios tipos de aplicaciones. Los ejemplos son muy simples para destacar los aspectos principales. Esto también ofrece la oportunidad de introducir algunos términos y conceptos útiles.

(a) Horizonte de tiempo de varios años. Tomamos la ecuación de suscripción (1.3.2) simple incorporando el rendimiento por intereses y permitiendo cambios dependientes del tiempo en P y λ, como un ejemplo para demostrar el uso de la simulación. Para esto se la transforma en el algoritmo

$$\boldsymbol{U}(t) = (1+\boldsymbol{j}(t)).\boldsymbol{U}(t-1)+(1+\lambda(t))\boldsymbol{P}(t)\text{-}\boldsymbol{X}(t) \tag{5.5.1}$$

donde $\boldsymbol{U}(t)$ es la reserva de riesgo al final del año t (véase sección 1.3(c)). Las ganancias se acumulan en la reserva de riesgo y las pérdidas se deducen de la misma. El coeficiente $j(t)$ es la tasa de interés ganada sobre la reserva, $P(t)$ es la prima de riesgo pura, $\lambda(t)$ un recargo de seguridad y $\boldsymbol{X}(t)$ los siniestros. Para hacer la simulación es necesario especificar las cantidades $U(0)$, $j(t)$, $\lambda(t)$, $\boldsymbol{P}(t)$, junto con los parámetros necesarios para la simulación de $\boldsymbol{X}(t)$, tal como n, las características de la distribución de la intensidad de los siniestros y de la variable de ponderación.

Primero, para que t=1, el importe de siniestros se simula utilizando uno de los generadores descriptos en las secciones 5.3 ó 5.4. El resultado $X(1)$ se sustituye en (5.5.1) y se obtiene $U(1)$. Entonces se repite el procedimiento para t = 2, 3, ..., T, llegando a la secuencia

$$U(0),\ U(1),\ U(2),\ \ldots,\ U(T). \tag{5.5.2}$$

Este resultado es la realización del proceso de reserva de riesgo U. Tal realización se grafica en la Figura 5.5.1 presentándola en la forma de cociente $u=U/P$.

Las importantes ventajas de la simulación se pueden apreciar en este ejemplo simple. Permite dividir el proceso total en una secuencia de pasos, en este ejemplo relativo al año en curso t.

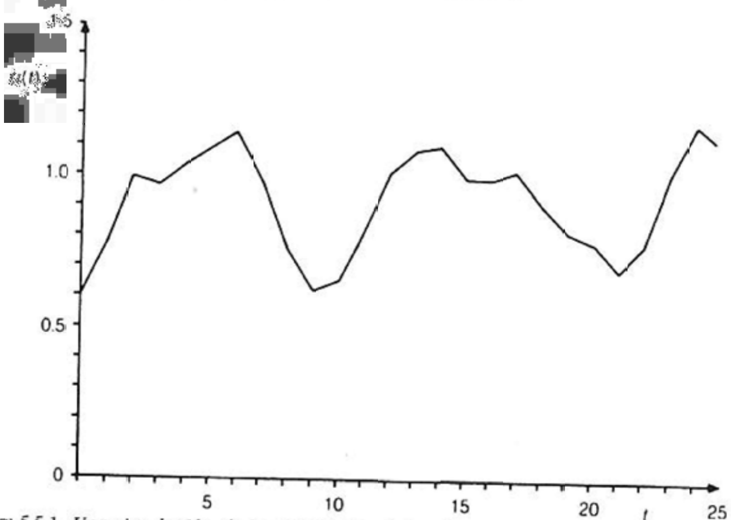

Figura 5.5.1. *Una simulación de la realización del ratio u*

Cada uno de estos pasos (los resultados de suscripción anual en el ejemplo) puede calcularse fácilmente. Entonces, utilizando el algoritmo, la realización completa puede obtenerse directamente, independientemente del número de pasos. Los métodos analíticos convencionales serían bastante tediosos y, en realidad, con frecuencia imposibles de manejar, especialmente si se incorporan los efectos de la retroalimentación externa y dinámica como se muestra en las secciones siguientes.

(b) El método de Monte Carlo. La Figura 5.5.1, que muestra una sola realización, ya proporciona información acerca del proceso. Sin embargo, un número de preguntas quedan abiertas, por ejemplo, cuáles de los aspectos exhibidos resultan de los números aleatorios seleccionados en esta realización en particular y cuáles generalmente son característicos del proceso. Además, el rango de la variación no se indica claramente. Por lo tanto, es útil repetir la simulación, por ejemplo s veces, de acuerdo con la idea del **método de Monte Carlo** (sección 5.1(b)). Entonces se obtiene una Figura como la 5.5.2, que es más instructiva. Se obtiene una idea visual inmediata del carácter del proceso, por ejemplo, el rango de la variación y si hay tendencias. También pueden construirse (sección 5.5(e) más adelante) métodos para obtener estimaciones numéricas para las características relevantes, tales como la media y el desvío estándar de las variables objetivo $u(t)$ y $x(t)$, así como para obtener los intervalos de confianza tal como indica la figura 5.5.2.

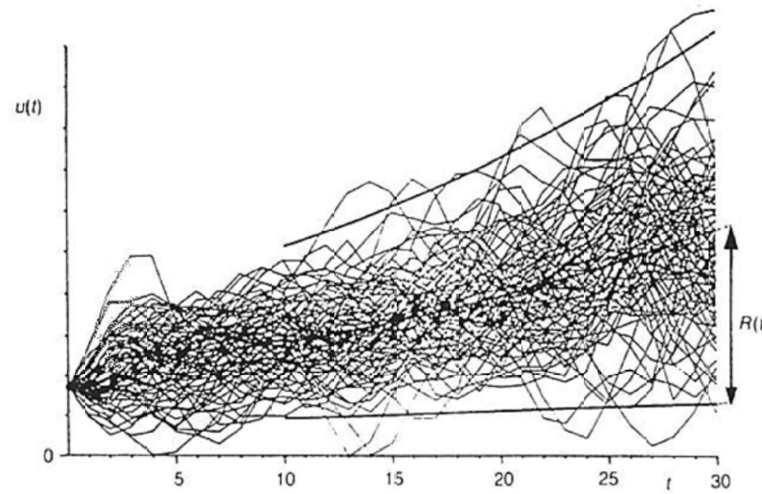

Figura 5.5.2. *Una muestra de 50 realizaciones*

(c) Impulsos externos. En la realidad el negocio del seguro está sujeto a diferentes tipos de impulsos e influencias externos, tales como la inflación, épocas de auge y recesión de la economía nacional, la competencia èn el mercado de seguros y los movimientos en el mercado de capitales, que influyen en los beneficios ganados con las inversiones. Incorporarlos a los modelos de seguros es un gran desafío. La técnica de simulación ofrece una solución práctica, como se verá en los capítulos siguientes. Vamos a ilustrar la idea incorporando la inflación al "minimodelo" definido en (5.5.1).

Sea $I(t)$ el índice del valor de la moneda, por ejemplo el índice de precios. Además, sea $i(t) = I(t)/\,I(t-1)-1$ la tasa incremental de la inflación de siniestros. Acá suponemos que ésta es una variable aleatoria y la ejemplificamos utilizando nuestro procedimiento de simulación. Debe señalarse que los valores reales sucesivos de esta tasa de inflación no son, en realidad, mutuamente independientes, como se verá con detalle más adelante en el capítulo 7, es decir, existen períodos de inflación bajos y altos. Para este tipo de fenómeno, se pueden desarrollar las series de tiempo para generar secuencias de números aleatorios donde los valores sucesivos estén **autocorrelacionados**. El tipo más simple es el denominado **series de tiempo autorregresivas de primer orden** y se construye de la manera siguiente

$$i(t)-\bar{i} = a.[i(t-1)-\bar{i}\,] + \varepsilon(t). \qquad (5.5.3)$$

Aquí a es un coeficiente que controla el grado de autorregresión (Apéndice G), $\bar{i}$ es el nivel promedio de $i(t)$ fluctuante y $\varepsilon\,(t)$ es un número aleatorio que introduce la variación estocástica en el esquema. Con frecuencia se la define como de distribución normal $N(0,\sigma_{\varepsilon})$ y se lo denomina término de ruido. Si el comportamiento del fenómeno que va a ser simulado sugiere un ruido de asimetría, esto se puede lograr generando $\varepsilon\,(t)$ por medio de una función gamma trasladada (3.3.5). La que se puede definir en términos de las características

$$\mu_{\varepsilon} = 0,\ \sigma_{\varepsilon} \text{ y } \gamma_{\varepsilon}, \qquad (5.5.4)$$

permitiendo de tal manera que se especifiquen tanto el desvío estándar como la asimetría. El término de ruido puede generarse por medio del generador WH descripto en la sección 5.4(c). Luego, el índice solicitado es

$$I(t) = I(0).\prod_{u=1}^{t}\,(1+i(u)). \qquad (5.5.5)$$

Suponemos que la influencia de la inflación en este minimodelo puede representarse transformando las variables monetarias de (5.5.1.) para reflejar los valores del índice (en la sección 9.3 aparecen las fórmulas detalladas).

Evidentemente, se incrementa el rango de variación del conjunto de los resultados (realizaciones) porque se ha incorporado una fuente de incertidumbre.

Este ejemplo muestra cómo pueden incluirse los impulsos externos. La incorporación de submodelos auxiliares no presenta ninguna dificultad en particular. La ventaja más importante del método de simulación es que es lo suficientemente flexible como para aceptar casi un número ilimitado de pasos operativos. De esta manera se pueden introducir numerosos aspectos para mejorar su utilidad.

(d) El control dinámico ofrece más posibilidades para extender el modelo del seguro. Por ejemplo, si el desarrollo de la situación económica es adversa, los directivos probablemente intervengan con medidas reparadoras tales como el incremento de las tasas de prima, seleccionando los riesgos más cuidadosamente, extendiendo la cobertura de reaseguro, etc. Por otro lado, si la posición pasa a ser muy fuerte, se incrementan los dividendos, las bonificaciones y los impuestos, las tasas de primas se pueden reducir o se refuerza la presión de ventas. Para que un modelo de simulación a largo plazo sea más realista, se deben incorporar aspectos como los señalados de una manera u otra. Daremos un ejemplo limitado a una simple regla de control de la tasa de prima, a través del recargo de seguridad ($\lambda(t)$ en 5.5.1).

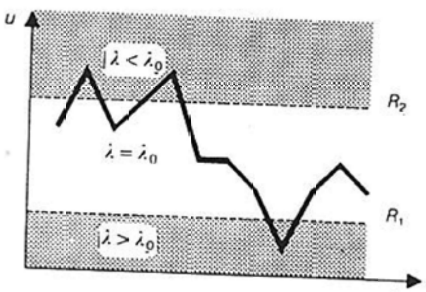

Figura 5.5.3 *Control Dinámico*

La idea es incorporar medidas que fortalezcan la posición financiera si ha habido un desarrollo económico adverso, y que lleven a un incremento de las bonificaciones (dividendos) o de los esfuerzos de venta si la posición es más satisfactoria. Como un ejemplo simple, supongamos que el recargo $\lambda(t)$ se incrementará si el ratio de reserva de riesgo $\boldsymbol{u}(t)$ pasa por debajo de una barrera de alarma R_1. Por otro lado, si se excede otra barrera R_2, $\lambda(t)$ se reducirá (Figura 5.5.3). Conforme con ello, sea

$$\lambda(t) = \lambda_0 + c_1(R_1 - \boldsymbol{u}(t-1))^+ - c_2(\boldsymbol{u}(t-1) - R_2)^+, \qquad (5.5.6)$$

e incorporemos esto como otro submodelo del modelo principal.

Claramente, este tipo de control dinámico reduce el rango de la variación de $\boldsymbol{u}(t)$. Como se verá en los capítulos siguientes, con frecuencia, ésta es la única manera de evitar una dispersión ilimitada de grupos para simulaciones a largo plazo y de prevenir que tiendan al infinito. Las diversas reglas para cotización de primas como la credibilidad, la tarificación experimental, etc, constituyen uno de los puntos de mayor interés de la bibliografía actuarial y se tratarán brevemente en los capítulos subsiguientes.

(e) Evaluación de la precisión. Como la simulación estocástica sólo produce una muestra de los flujos de las variables objetivo, los resultados siempre están sujetos al error muestral. Una investigación visual del diagrama tal como el que aparece en la figura 5.5.2 puede dar una buena idea de la precisión de la muestra.

Si los resultados se obtienen en forma numérica, la falta de precisión de la muestra puede estimarse directamente. Por ejemplo, si son necesarios la media y el desvío estándar de la reserva de riesgo $\boldsymbol{u}(t)$, estos pueden calcularse a partir de la Figura 5.5.2, utilizando las fórmulas estadísticas habituales (ver Apéndice F, Ejercicio F.4.1 donde también se da una fórmula para la asimetría)

$$\mu_u \approx \frac{1}{s}\sum_{y=1}^{s} \boldsymbol{u}_i(t); \quad \sigma_u^2 \approx \frac{1}{s-1}\sum_{y=1}^{s} (\boldsymbol{u}_i(t) - \mu_u)^2 \qquad (5.5.7)$$

dónde los $\boldsymbol{u}_i(t)$ son los resultados de la simulación de $\boldsymbol{u}$ en t. Estas características están sujetas a errores muestrales que tienen desvíos estándar

$$\sigma_\mu \approx \frac{\sigma_u}{\sqrt{s}}; \qquad \sigma_\sigma \approx \frac{\sigma_u}{\sqrt{2(s-1)}} \qquad . \quad (5.5.8)$$

En el caso de la Figura 5.5.2 $\mu_u \approx 0,5$, $\sigma_u \approx 0,2$,

$$\sigma_\mu \approx 0{,}2/\sqrt{100} = 0{,}02 \ y \ \sigma_\sigma \approx 0{,}2 / \sqrt{198} \approx 0{,}014.$$

Si se deseara mejorar la precisión en un decimal más, el tamaño de la muestra *s* debería incrementarse cien veces, es decir a 5.000 en lugar de 50. Esta es una regla general que se aplica a tales simulaciones. Nótese que además de la imprecisión de la muestra existen errores inherentes a la identificación de los modelos de la estimación de los parámetros (véase sección 1.3(e)). El problema con respecto a la evaluación de la precisión se trata en el Apéndice F, más adelante.

(f) Análisis. La ventaja del método de simulación radica en que es lo suficientemente flexible como para incorporar modelos que están sujetos a condiciones y controles numerosos, tanto en el tiempo como en el espacio, como ilustran los ejemplos simples anteriores. Con la simulación no es necesario formular todo en una serie global y condensada de ecuaciones. Cada aspecto de interacción puede especificarse por separado, con variabilidad cuando sea apropiado. El modelo trabaja con un período por vez y dentro de ese período de tiempo puede programarse, por ejemplo, la resolución de ecuaciones simultáneas, tomar medidas específicas, considerar efectos tales como impuestos o criterios contables, etc. Cuando se realizan un número grande de simulaciones, los resultados proporcionan una convolución de toda una serie de distribuciones de probabilidades que afectan a diferentes aspectos del desarrollo de un negocio. Esto permite que los resultados se expresen en términos de probabilidades, ya sea en relación al mantenimiento de la solvencia, de la liquidez, activos libres, ganancias, patrimonio neto descontado. La simulación es un arma poderosa que ha facilitado la extensión de las aplicaciones de la teoría del riesgo más allá de las fronteras que inevitablemente fueron creadas por las limitaciones de los métodos convencionales, principalmente analíticos.

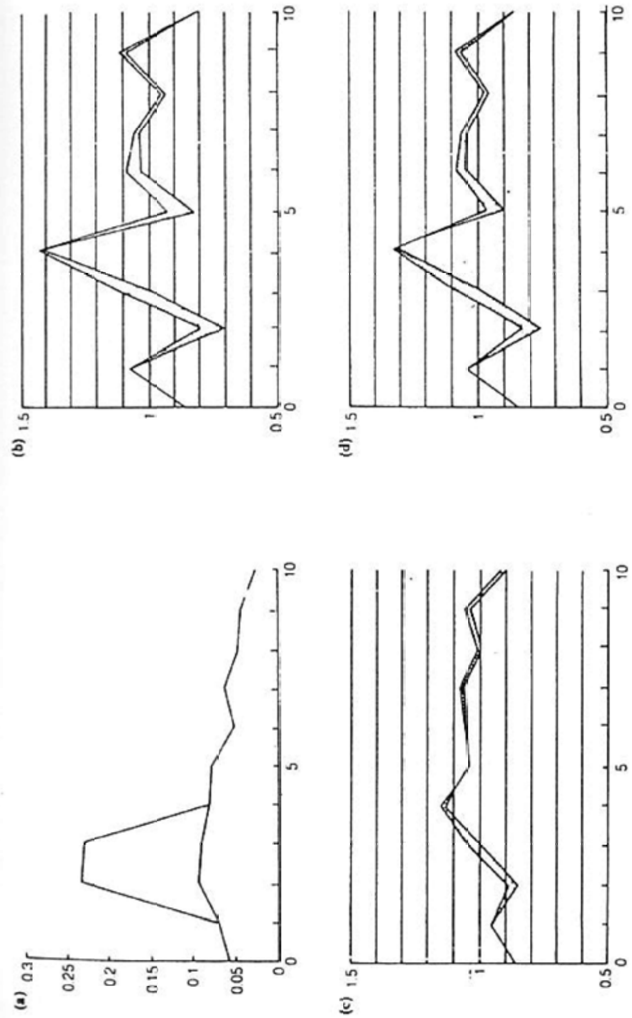

Figura 5.5.4 Un ejemplo del uso de la simulación para el análisis de sensibilidad. Los métodos de reservas se definen en la sección 9.5.2 (a,b,c) (Pentikäinen y Rantala, 1992).(a) La tasa de inflación, el flujo normal y un "shock" en los años 2 y 3; (b) tasa de siniestralidad X*P con reserva de siniestros mediante el método escaleras encadenadas; (c) tasa de siniestralidad X*P suponiendo el método de reservas basado en las primas; (d) tasa de siniestralidad X*P suponiendo el método mixto de reservas.

Por otro lado, una desventaja de la simulación es su incapacidad de dar resultados que no sean en forma de muestras, con la consecuente inexactitud de muestral. Más aún, las estructuras del modelo, por ejemplo, las relaciones entre las variables relevantes, con frecuencia no son obvias a partir de los resultados numéricos. Sin embargo, el problema de la imprecisión puede reducirse por medio de las evaluaciones de error, las que se mostraron más arriba y se analizan con más profundidad en el Apéndice F. Las relaciones intrínsicas se pueden estudiar por medio del análisis de sensibilidad. Por ejemplo, si se desea estudiar el efecto de los coeficientes de la inflación en (5.5.3), la simulación se puede hacer a su vez para varios grupos de valores de parámetros por vez y analizar las diferencias. La influencia de la distorsión que resulta de los errores muestrales puede reducirse, en gran medida, utilizando la misma secuencia de números aleatorios para cada una de las simulaciones concurrentes (es decir, empezando siempre a partir de la misma semilla específica del generador primario de números aleatorios).

La Figura 5.5.4 muestra un análisis de sensibilidad. La inflación se simuló, en primer lugar, utilizando la fórmula habitual (5.5.3), luego se agregó un shock temporario particular para dos años. (gráfico (a)). Luego, se simularon los dos coeficientes de siniestralidad para las dos alternativas. Los gráficos (b), (c) y (d) muestran la reacción para tres reglas de reservas de siniestros diferentes. Para mejorar la comparación entre las alternativas se obtienen las curvas paralelas utilizando la misma secuencia de números aleatorios (Apéndice F, último párrafo de la sección F.1).

Por último, es importante mencionar que no hay que considerar que los métodos analíticos clásicos y la simulación compiten entre sí. Una regla general es que una técnica analítica debe utilizarse siempre donde sea posible aplicarla. Por otro lado, hay que resistir la tentación de manipular las premisas del modelo para hacer posibles los cálculos analíticos, si esto sólo se puede llevar a cabo a costa de la aplicabilidad

del modelo a las condiciones reales. Si esto se hace, como con frecuencia es el caso en la teoría del riesgo teóricamente orientada, se debe advertir claramente acerca de la aplicabilidad restringida o la no aplicabilidad. El amplio campo de aplicación de los métodos de simulación comienza donde otro métodos se vuelven inmanejables.