

$$\lambda = kU/P \quad (6.6.28)$$

es más pequeño cuanto más grande sea la cartera. Esto significa que en teoría una compañía grande puede operar con un recargo de seguridad más bajo que un asegurador pequeño, siendo los demás elementos iguales.

**(e) Referencias.** El trabajo fundamental sobre la teoría de los juegos lo presentaron von Neumann y Morgenstern (1947). Owen (1969) y Driessen (1988) pueden tomarse como libros de estudio.

La idea de aplicar la teoría de los juegos en el terreno de los seguros fue sugerida por Borch (1960, 1961).

## APENDICE A

### Deducción de la fórmula de Poisson

#### A.1 Enfoques individuales y colectivos

La fórmula de Poisson (2.2.1) es una herramienta primaria en las consideraciones de la Teoría del Riesgo. En la sección A.2(a) se muestra cómo puede deducirse a partir de supuestos simples acerca de sus propiedades fundamentales; en la sección A.2(b) se muestra cómo la misma fórmula puede obtenerse como una expresión límite de la función de probabilidad binomial.

**(a) Enfoque individual.** Considérese un colectivo de riesgo consistente en  $N$  unidades de riesgo diferentes  $i$ . En la teoría del riesgo individual el número total de siniestros  $k$  en un colectivo de riesgo, durante un período de tiempo, por ejemplo un año, se plantea como una suma

$$k = \sum_i k_i \quad (A.1.1)$$

donde  $k_i$  denota el número de siniestros ocurridos en la unidad de riesgo  $i$ . Para cada  $k_i$  se plantea un modelo por separado.

Se supone que, por cada unidad de riesgo, los números de siniestros ocurridos en dos intervalos de tiempo disjuntos son mutuamente independientes y que la probabilidad de que ocurra un siniestro en un punto futuro fijo es igual a cero. Entonces  $k_i$  satisface los supuestos (1)-(3) de la sección 2.2(a) (en la práctica, en el caso de una unidad de riesgo, la exclusión de múltiples siniestros puede ser tomada como garantizada) y  $k_i$ , entonces, se distribuye como una Poisson( $n_i$ ) con  $n_i = E(k_i)$ , es decir

$$\text{Prob} \{k_i = k\} = e^{-n_i} \cdot \frac{n_i^k}{k!}, \quad (\text{A.1.2})$$

como se mostrará en la sección A.2. Si, además, los números de siniestros  $k_i$  de diferentes unidades de riesgo  $i$  son mutuamente independientes, entonces, por aditividad de las variables de Poisson (sección 2.3 (a)), el número total de siniestros también sigue una distribución de Poisson, así

$$\text{Prob} \{k = k\} = e^{-n} \cdot \frac{n^k}{k!}, \quad n = \sum_i n_i. \quad (\text{A.1.3})$$

De este modo el enfoque individual, bajo ciertos supuestos ideales, conduce a una distribución de Poisson.

**(b) Enfoque colectivo.** En la teoría del riesgo colectiva, por otra parte, sólo se plantean modelos sobre el número total de siniestros y no se le presta atención alguna a los riesgos individuales. El mismo resultado (A.1.3) puede ser obtenido postulando que el número total de siniestros satisface los supuestos (1)-(3) de la sección 2.2(a).

Entonces, bajo estos supuestos, ambos enfoques, individual y colectivo, conducen al mismo resultado.

**(c) Distribución de Poisson como límite de la distribución binomial.** El supuesto de independencia entre el número de siniestros ocurridos en una unidad de riesgo en intervalos disjuntos de tiempo no siempre se da en la práctica en forma estricta. Por ejemplo, si un conductor de un automóvil sufre un serio accidente y queda incapacitado para manejar por el resto del año, el riesgo de siniestro durante ese período se reducirá notablemente. En el caso extremo de que pueda ocurrir como máximo un siniestro por año para cada unidad de riesgo, por ejemplo, cuando un

siniestro haya ocurrido, ya no habrá riesgo de siniestro para esa unidad de riesgo. En el caso especial donde la probabilidad  $p$  de un siniestro es la misma para cada unidad de riesgo, y los siniestros ocurridos para diferentes unidades de riesgos sean mutuamente independientes, la distribución binomial puede ser usada como distribución del número de siniestros, dando la probabilidad

$$\text{Prob}\{k=k\} = b_k(p, N) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \quad (\text{A.1.4})$$

de que  $k$  siniestros ocurrirán. Esto puede ser un modelo satisfactorio en seguros de vida, por ejemplo, donde puede ocurrir, como máximo, un siniestro durante un período de observación para cada unidad de riesgo. Esto difiere de la situación habitual de los Seguros Generales donde pueden ser posibles varios eventos causantes de siniestros para cada objeto durante un único período de tiempo (el objeto, luego de ser dañado es a menudo reparado inmediatamente o reemplazado por uno nuevo). En este caso la distribución de Poisson, es una elección más natural porque permite varios siniestros para cada unidad de riesgo individual.

Es útil recordar que la distribución de Poisson es, de hecho, el límite de la distribución binomial cuando  $N \rightarrow \infty$ , si el valor esperado de  $n=pN$  se mantiene fijo.

Tabla A.1.1 *Dsfs, Binomial( $p,N$ ) y Poisson( $p,N$ );  $p=0,05$*

N = 100			N = 10000		
k	Binomial	Poisson	k	Binomial	Poisson
0	0,006	0,006	450	0,011	0,012
2	0,118	0,124	470	0,087	0,093
5	0,616	0,616	490	0,334	0,338
7	0,872	0,867	500	0,512	0,512
10	0,989	1,986	520	0,827	0,821
12	0,999	0,998	540	0,967	0,964
15	1,000	1,000	570	0,999	0,999
Media	5	5	500	500	
Des. Stánd	2,18	2,24	218	224	
Asimetría	0,41	0,45	0,041	0,045	

Esto puede observarse reemplazando  $p$  por  $n/N$  en (A.1.4). Luego de algunas manipulaciones tenemos

$$b_k(p, N) = \frac{n^k}{k!} \cdot \left(1 - \frac{n}{N}\right)^n \cdot \frac{\left(1 - \frac{1}{N}\right)\left(1 - \frac{2}{N}\right) \dots \left(1 - \frac{1-k}{N}\right)}{\left(1 - \frac{n}{N}\right)^k} \rightarrow \frac{n^k}{k!} e^{-n}, \quad (\text{A.1.5})$$

cuando  $N \rightarrow \infty$ . En consecuencia, la probabilidad binomial se aproxima a la de Poisson a medida que el tamaño  $N$  del colectivo resulta grande comparado con el número esperado de siniestros  $n$ .

La Tabla (A.1.1) presenta una comparación entre las probabilidades de las distribuciones binomial y Poisson.

Como la diferencia entre las distribuciones binomial y de Poisson usualmente es relativamente pequeña, en las aplicaciones teóricas sobre riesgos; el modelo de Poisson, que es más sencillo de manejar, se utiliza a menudo aún en esos casos donde la distribución binomial podría ser vista como un modelo más ajustado teóricamente.

## A.2 Deducción de la ley de distribución de Poisson

(a) **El caso estacionario.** Denomatamos por  $k(t)$  al número de siniestros ocurridos en el intervalo de tiempo  $(0,t]$ , y por

$$k(u,t) = k(t) - k(u) \quad (\text{A.2.1})$$

al número de siniestros ocurridos en el intervalo  $(u,t]$ .

Se supone que se satisfacen las condiciones siguientes:

- (1) **Independencia de los incrementos:**  $k(u_1, t_1)$  y  $k(u_2, t_2)$  son independientes siempre que  $(u_1, t_1]$  y  $(u_2, t_2]$  sean disjuntos.
- (2) **Exclusión de siniestros múltiples:** la probabilidad de que más de un siniestro ocurra al mismo tiempo es cero.
- (3)\* **Estacionariedad de los incrementos:**  $k(t)$  y  $k(u, u+t)$  están identicamente distribuidos para todo  $t, u > 0$ .

Se demostrará que  $\mathbf{k}(t)$  se distribuye según Poisson. El caso más general de la sección 2.2(a), donde la condición (3)\* se reemplaza por una condición más débil (3) dada en la sección 2.2(a), será tratado más abajo en la sección A.2(b).

Por (1) y (3)\*,

$$\begin{aligned} p_0(s+t) &= \text{Prob}\{\mathbf{k}(s+t)=0\} \\ &= \text{Prob}\{\mathbf{k}(s)=0 \text{ y } \mathbf{k}(s,s+t)=0\} \\ &= p_0(s) \cdot p_0(t) \end{aligned} \quad (\text{A.2.2})$$

Entonces  $p_0(t)$  es una función monótonamente decreciente de  $t$  y, siempre que  $m$  y  $n$  sean enteros positivos,

$$p_0(m/n) = [p_0(1/n)]^m = [p_0(n \cdot (1/n))]^{m/n} = [p_0(1)]^{m/n}. \quad (\text{A.2.3})$$

Como esta ecuación es válida para todo número racional positivo  $m/n$ , y dado que  $p_0(t)$  es monótona decreciente, tenemos

$$p_0(t) = [p_0(1)]^t \quad \text{para todo } t > 0. \quad (\text{A.2.4})$$

Podemos suponer que  $0 < p_0(1) < 1$ . En realidad, si tuviéramos  $p_0(1) = \text{Prob}\{\mathbf{k}=0\} = 1$ , entonces tendríamos el caso trivial de  $\text{Prob}\{\mathbf{k} \neq 0\} = 1$ , por la condición (3)\*. Por otra parte, si  $p_0(1) = 0$ , entonces tendríamos  $\text{Prob}\{\mathbf{k}(t) \geq 1\} = 1 - p_0(t) = 1$  para  $t > 0$ , lo que implicaría la existencia de infinitos siniestros durante cada período de tiempo, ya que todo intervalo puede ser subdividido en infinitos subintervalos. Si  $\mu = -\ln(p_0(1))$ , se tiene

$$p_0(t) = e^{-\mu t} = 1 - \mu t + o(t), \quad (\text{A.2.5})$$

donde la notación  $o(t)$  significa que el residuo converge a cero más rápidamente que  $t$ , a medida que  $t \rightarrow 0$ , es decir  $o(t)/t \rightarrow 0$ , a medida que  $t \rightarrow 0$ .

Fijemos que  $t > 0$ . Definamos a **las variables indicadoras de siniestros**

$$\begin{aligned} I_0(1) &= \min(1, \mathbf{k}(0, t)) \\ I_1(1) &= \min\left[1, k\left(0, \frac{t}{2}\right)\right] \quad I_1(2) = \min\left[1, k\left(\frac{t}{2}, t\right)\right], \end{aligned}$$

y, generalmente para todo entero  $j \geq 0$ ,

$$I_j(v) = \min\left[1, k\left((v-1) \cdot \frac{t}{2^j}, v \cdot \frac{t}{2^j}\right)\right] \quad v = 1, 2, \dots, 2^j$$

y

$$\mathbf{k}_j = \sum_{v=1}^{2^j} I_j(v). \quad (\text{A.2.6})$$

Entonces, para un  $j$  fijo, el valor del indicador  $I_j(v)$  es igual a 1 si al menos un siniestro ocurre en el  $v$ -ésimo intervalo  $((v-1)t/2^j, vt/2^j]$ , y es igual a cero en cualquier otro caso. Consecuentemente,  $\mathbf{k}_j$  cuenta el número de intervalos en la  $j$ -ésima división del intervalo  $(0, t)$  que contiene al menos un siniestro. Como la  $(j+1)$ -ésima división es una subdivisión de la  $j$ -ésima división, se tiene que  $\mathbf{k}_j$ ,  $j=0, 1, \dots$ , es una secuencia creciente de variables aleatorias. Además, para una realización dada, la mínima distancia,  $d$ , entre los siniestros ocurridos en el mismo intervalo  $(0, t]$  es posiblemente debido a la formación de siniestros múltiples, y es por eso que ningún subintervalo contiene más de un siniestro de esta realización.

a partir de que  $j$  sea lo suficientemente grande como para que  $t/2^j < d$ . Entonces

$$k_j \rightarrow k(t) \text{ a medida que } j \rightarrow \infty \quad (\text{A.2.7})$$

Como

$$\begin{aligned} \text{Prob}\{I_j(v)=1\} &= \text{Prob}\{k((v-1).t/2^j, v.t/2^j) \geq 1\} \\ &= 1 - p_0(t/2^j) = 1 - \exp(-\mu.t/2^j), \end{aligned}$$

y como  $I_j(v)$ ,  $v=1,2,3,\dots,2^j$ , son mutuamente independientes por (1), se obtiene que la distribución de  $k_j$  es binomial( $q_j, 2^j$ ) con  $q_j = 1 - \exp(-\mu.t/2^j) = \mu.t/2^j + o(1/2^j)$ . Por tanto,

$$q_j \cdot 2^j \rightarrow \mu.t \quad \text{a medida que } j \rightarrow \infty. \quad (\text{A.2.8})$$

Como el valor de la f.g.m. de la variable binaria  $I_j(v)$  en  $s$  es igual a  $1 - q_j + e^s \cdot q_j$ , la f.g.m.  $M_j$  de la variable  $k_j$  binomial( $q_j, 2^j$ ) satisface

$$\begin{aligned} M_j(s) &= (1 - q_j + e^s \cdot q_j)^{2^j} \\ &= (1 + q_j \cdot 2^j \cdot \frac{(e^s - 1)^{2^j}}{2^j}) \rightarrow e^{\mu.t.(e^s - 1)}, \end{aligned} \quad (\text{A.2.9})$$

y, como el límite es la f.g.m. de la distribución de Poisson( $\mu.t$ ) (Ejercicio 2.3.1), se tiene que la distribución de la variable límite  $k(t)$  es Poisson( $\mu.t$ ).

**(b) El caso no estacionario.** La condición (3)\* de la sección A.2(a) será ahora atenuada al permitir que el proceso tenga incrementos no estacionarios.

Se supone que el proceso del número de siniestros  $k$  satisface las condiciones (1)(independencia de los incrementos) y (2)(exclusión de siniestros múltiples) dadas arriba en la sección A.2(a). La presunción estacionaria (3)\* se reemplaza por una más débil, la (3) de la sección 2.2(a), que establece que ningún punto de tiempo  $t$  en la línea real se halla en una posición especial, en el sentido de que en ese momento específico exista una probabilidad positiva de que ocurra un siniestro.

Las condiciones (1)-(3)\* implican que  $p_0(t)$  es una función continua de  $t$ . Para probar ésto, primero observamos que la función es decreciente, y que existe una discontinuidad en un punto  $u$  si y sólo si hay un salto descendente de tamaño  $p_0(u\mu)-p_0(u)>0$ , donde  $p_0(u\mu)$  denota el límite por la izquierda  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} p_0(u-\epsilon)$ . A su vez, si  $C_u$  denota el hecho de que un siniestro ocurra exactamente al momento  $u$ , entonces tenemos que

$$\text{Prob}(C_u) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \text{Prob}\{k(u-\epsilon, u) \geq 1\}.$$

Por otra parte, debido a la independencia de los incrementos,

$$\begin{aligned} \text{Prob}\{k(u-\epsilon, u) \geq 1\} &= \text{Prob}\{k(u-\epsilon, u) \geq 1 | k(u-\epsilon) = 0\} \\ &= \text{Prob}\{k(u-\epsilon) = 0 \text{ y } k(u) > 0\} / p_0(u-\epsilon) \\ &= [p_0(u-\epsilon) - p_0(u)] / p_0(u-\epsilon) \rightarrow [p_0(u\mu) - p_0(u)] / p_0(u\mu), \end{aligned} \quad (\text{A.2.10})$$

Se puede ver que la  $\text{Prob}(C_u)$  es positiva si y sólo si  $p_0$  es discontinua en el punto  $u$ .

Se mostrará que la condición (3)\*, junto con los supuestos (1) y (2), son suficientes para garantizar que  $\mathbf{k}(t)$  se distribuye según Poisson para todo punto en el tiempo  $t$ .

Se define al llamado **tiempo operativo** para el proceso  $\mathbf{k}(t)$  estableciendo  $t^*=T(t)$ , donde  $T$  es la función continua creciente

$$T(t) = -\mu \cdot \ln p_0(t), \quad (\text{A.2.11})$$

y  $\mu$  es un número escalar positivo que puede elegirse libremente. Definimos

$$\mathbf{k}^*(t^*) = \mathbf{k}(t). \quad (\text{A.2.12})$$

Tomando, por ejemplo,  $\mu=E(\mathbf{k}(1))$ , las esperanzas de ambos procesos serán iguales en el punto de tiempo  $t=1$ .

Si  $T$  es estrictamente decreciente hay una correspondencia uno a uno entre  $t$  y  $t^*$ , y puede ser visto inmediatamente que el proceso estocástico modificado  $\mathbf{k}^*$  también satisface las premisas (1) y (2).

Si se supone que la función  $T$  no es estrictamente decreciente. Entonces hay uno o más subintervalos  $I_j=(a_j, b_j]$  tales que  $T$  es constante en cada uno de éstos, y estrictamente decreciente fuera de ellos. Puede verse a partir de (A.2.10) que  $T$  es constante en cada  $I_j$ , lo que implica que la probabilidad de siniestros en estos intervalos es igual a cero. Así, se puede presumir que todos los siniestros ocurren fuera de los intervalos  $I_j$ , donde existe una correspondencia uno a uno entre  $t$  y  $t^*$ . Consecuentemente,  $\mathbf{k}^*$  está también bien definida cuando  $T$  no es estrictamente decreciente, siempre que  $s^*=t^*$ , tenemos  $\mathbf{k}(s)=\mathbf{k}(t)$ , aún si  $s$  es diferente de  $t$ . Además se puede ver que  $\mathbf{k}^*$  satisface (1) y (2).

Para probar que  $\mathbf{k}^*$  es un proceso de Poisson estacionario, ahora es suficiente probar que  $\text{Prob}\{\mathbf{k}^*(t^*)=0\}$  es igual a  $e^{\mu t^*}$ , ya que ésto implicaría que el proceso  $\mathbf{k}^*$  satisface (A.2.5), y que la premisa (3)\* era necesaria en la sección A.2(a) sólo para la prueba de (A.2.5). Tenemos

$$\text{Prob}\{\mathbf{k}^*(t^*)=0\} = \text{Prob}\{\mathbf{k}(t)=0\} = p_0(t) = e^{T(t)} = e^{\mu t^*}, \quad (\text{A.2.13})$$

que muestra que  $\mathbf{k}^*$  satisface (A.2.5). Por lo tanto  $\mathbf{k}^*$  es un proceso estacionario de Poisson. Y por (A.2.12)  $\mathbf{k}(t)$  sigue entonces una distribución de Poisson.

**(c) El caso de la Poisson mixta.** Nótese que en la práctica, a menudo se dan diferentes circunstancias de contexto, como las condiciones económicas, que causan variaciones **aleatorias** en la propensión al siniestro. Es por eso que la premisa (1), que establece la independencia de los incrementos en el proceso del número de siniestros puede no mantenerse válida. Pero, aún así la condición (1) de independencia puede verse satisfecha **condicionalmente**, bajo la condición de que las circunstancias se mantienen fijas. Esto nos conduce a las llamadas, distribuciones de Poisson mixtas, que serán introducidas en la sección 2.4.

## APENDICE B

### Distribuciones Pólya y Gamma

(a) F.g.m. de la distribución Gamma. Sea  $\mathbf{Y}$  una variable aleatoria de distribución Gamma( $r, \alpha$ ), donde  $r$  y  $\alpha$  son positivas. La densidad de  $\mathbf{Y}$  está dada por (2.5.1). Luego la f.g.m.  $M_Y$  de  $\mathbf{Y}$  es,

$$\begin{aligned} M_Y(s) &= E(e^{s\cdot\mathbf{Y}}) = \frac{a^r}{\Gamma(r)} \int_0^\infty e^{-(a-s)z} z^{r-1} dz \\ &= \frac{a^r}{\Gamma(r)} \int_0^\infty e^{-z} \left(\frac{z}{a-s}\right)^{r-1} \frac{dz}{a-s} \\ &= \left(\frac{a}{a-s}\right)^r \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^\infty e^{-z} r^{r-1} dz \\ &= \left(\frac{a}{a-s}\right)^r = \frac{\Gamma(r)}{\Gamma(r)} = \left(\frac{a}{a-s}\right)^r \end{aligned} \quad (\text{B.1.1})$$

Puede verse a partir de (1.4.14) que la suma de variables aleatorias independientes con distribución Gamma( $r_1, \alpha$ ) y Gamma( $r_2, \alpha$ ) es otra variable con distribución Gamma( $r_1 + r_2, \alpha$ ).

La manera más conveniente de calcular las características básicas de  $\mathbf{Y}$  es utilizar la función generatriz de cumulantes  $\Psi_Y(s) = \ln M_Y(s) = r \ln(a) - r \ln(a-s)$  de  $\mathbf{Y}$  (ver sección 1.4(c)). El  $j$ -ésimo cumulante de  $\mathbf{Y}$  se obtiene diferenciando  $\Psi_Y$  como sigue:

$$\kappa_j = \Psi_Y^{(j)}(O) = r \cdot \frac{(j-1)!}{(a-O)^j} = r \cdot \frac{r(j-1)!}{a^j} \quad (B.1.2)$$

En particular,

$$E(Y) = \kappa_1 = \frac{r}{a}, \quad \sigma^2_Y = \kappa_2 = \frac{r}{a^2},$$

$$\gamma_Y = \frac{\kappa_3}{\kappa_2^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{r}}, \quad \gamma_{2,Y} = \frac{\kappa_4}{\kappa_2^2} = \frac{6}{r}, \quad (B.1.3)$$

donde  $Y$  se distribuye según Gamma( $r, a$ ).

Eligiendo  $r=a=b$  se dan las principales características (2.5.4) de una variable de ponderación con distribución Gamma.

**(b) Demostración de (2.5.5).** La demostración de que combinando la distribución de Poisson( $n$ ) con una variable de ponderación con distribución Gamma( $b, b$ ) resulta una distribución Pólya (2.5.3) es como sigue

$$p_k = \mathbb{E}(p_k(n, q)) = \int_0^\infty e^{-nq} \frac{(nq)^k}{k!} dH(q)$$

$$= \frac{n^k \cdot h^k}{\Gamma(h) \cdot k!} \int_0^\infty e^{-(n+h)q} q^{b+k-1} dq$$

$$= \frac{n^k \cdot h^k}{\Gamma(h) \cdot k!} \int_0^\infty e^{-z} \left( \frac{z}{n+h} \right)^{(h+k)-1} \frac{dz}{n+h}$$

$$= \frac{n^k \cdot h^k}{\Gamma(h) \cdot k!} \cdot \frac{\Gamma(h+k)}{(n+h)^{h+k}} = \frac{\Gamma(h+k)}{\Gamma(h) \cdot k!} \left( \frac{h}{n+h} \right)^h \cdot 1 - \left( \frac{h}{n+h} \right)^k$$

$$= \frac{h+k-1}{k} \cdot p^h \cdot (1-p)^k, \text{ donde } p = \frac{h}{n+h} \quad (B.1.4)$$

Aquí  $p_k(n, p)$  es la probabilidad de Poisson( $n, p$ ) para  $k$ . Para el coeficiente binomial de la última línea, ver (2.5.6).

**(c) Demostración de (2.5.7).** A partir de (2.4.9) y (B.1.1) la f.g.m.  $M$  de la variable aleatoria  $K$ , número de siniestros, que sigue una distribución Pólya( $n, b$ ) es

$$M(s) = M_q(n \cdot e^s - n) = \left( \frac{h}{h - n \cdot e^s + n} \right), \quad (B.1.5)$$

**(d) Demostración de (2.5.9).** Reemplazando (2.5.4) en (2.4.12) obtenemos (2.5.8).

(e) **Demostración de (2.5.9).** Como

$$\binom{h-1}{0} = 1 \quad (\text{B.1.6})$$

puede observarse a partir de (B.1.4) que

$$p_0 = p^h, \quad p = \frac{h}{n+h} \quad (\text{B.1.7})$$

Si  $k > 0$ , entonces

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{\Gamma(h+k)}{\Gamma(h).k!} \left(\frac{h}{n+h}\right)^h \cdot \left(\frac{n}{n+h}\right)^k \\ &= \frac{\Gamma(h+k-1).(h+k-1)!}{\Gamma(h).(k-1)!k} \cdot \left(\frac{h}{n+h}\right)^h \cdot \left(\frac{n}{n+h}\right)^{k-1} \cdot \frac{n}{n+h} \\ &= \frac{h+k-1}{k} \cdot \frac{n}{n+h} \cdot p_{k-1} = 1 + \frac{h-1}{k} \cdot (1-p) \cdot p_{k-1} \\ &= (1-p) + \left(\frac{(h-1).(1-p)}{k}\right) \cdot p_{k-1}, \end{aligned} \quad (\text{B.1.8})$$

donde se utiliza la bien conocida equivalencia funcional  $\Gamma(z) = (z-1).\Gamma(z-1)$ .

## APENDICE C

### Comportamiento Asintótico de la función de distribución de Poisson compuesta

Sea  $X$  una variable Poisson compuesta mixta con  $q$  como la variable de ponderación, y  $x = X/E(X)$  la variable relativa correspondiente. Se verá que la f.d. límite  $F_x$  de la variable relativa es la f.d. de ponderación  $H$ . La f.d. condicional,

$$F(\cdot | q=q) \quad (\text{c.1})$$

que  $x$  es una f.d. de Poisson compuesta  $(n, q)$ , cuya media y varianza son

$$\begin{aligned} E(x | q=q) &= \frac{n.q.m}{n.m} = q \\ \text{Var}(x | q=q) &= \frac{Var(X | q=q)}{n^2 \cdot m^2} = \frac{n.q.a_2}{n^2 \cdot m^2} = \frac{a_2/m^2}{n} \cdot q. \end{aligned} \quad (\text{c.2})$$

Surge de la última ecuación que

$$E[\text{Var}(x | q)] = \left( \frac{a_2/m^2}{n} \cdot q \right) = \frac{a_2/m^2}{n} \rightarrow 0, \text{ cuando } n \rightarrow \infty \quad (\text{c.3})$$

Por otra parte, por la definición de la varianza condicional (sección 1.4 (g)), tenemos

$$\begin{aligned} E[\text{Var}(\mathbf{x} \mid \mathbf{q})] &= E[E((\mathbf{x}-E(\mathbf{x} \mid \mathbf{q}))^2 \mid \mathbf{q})] \\ &= E[E((\mathbf{x}-\mathbf{q})^2 \mid \mathbf{q})] = E[(\mathbf{x}-\mathbf{q})^2]. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Junto con (C.3), esto implica que  $E[(\mathbf{x}-\mathbf{q})]$  tiende a cero ó, en otras palabras,  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{q}$  en términos de mínimos cuadrados, cuando  $n \rightarrow \infty$ . En consecuencia,  $F_x \rightarrow H$  a medida que  $n \rightarrow \infty$ .

## APENDICE D

### Cálculo numérico de la f.d. de la Normal

(a) **Los valores numéricos de la f.d. de la Normal**  $N$  se pueden obtener de los libros de texto estándar o puede programarse haciendo uso de la expresión siguiente (Abramowitz y Stegun, 1970).

$$R = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} (b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + b_4 y^4 + b_5 y^5), \quad (\text{D.1})$$

donde

$$y = 1/(1+0,2316419|x|),$$

y los valores de  $b_i$ ,  $i=1,2,\dots,5$  son respectivamente:

$$0,319381530, -0,356563782, 1,781477937,$$

$$-1,821255978, 1,330274429. \quad (\text{D.2})$$

Entonces,

$$N(x) = \begin{cases} R & \text{para } x \leq 0 \\ 1-R & \text{para } x > 0 \end{cases} \quad (\text{D.3})$$

**(b) Fórmula inversa.** Cuando el valor de  $N=N(x)$  está dado y se requiere el argumento  $x$  correspondiente, primero se calcula

$$l(x)=\begin{cases} \sqrt{-2 \ln N} & \text{para } 0 < N \leq 0.5 \\ \sqrt{-2 \ln (1-N)} & \text{para } 0.5 < N < 1 \end{cases} \quad (\text{D.4})$$

y

$$z=t-\frac{c_0+c_1t+c_2t^2}{1+d_1t+d_2t^2+d_3t^3}, \quad (\text{D.5})$$

donde

$$c_0 = 2,515517, \quad c_1 = 0,802853, \quad c_2 = 0,010328$$

$$d_1 = 1,432788, \quad d_2 = 0,189269, \quad d_3 = 0,001308.$$

Luego

$$x=\begin{cases} -z & \text{para } 0 < N \leq 0.5 \\ z & \text{para } 0.5 < N < 1 \end{cases} \quad (\text{D.6})$$

El valor absoluto del error es  $< 7,5 \cdot 10^{-8}$  para (D.3) y  $< 4,5 \cdot 10^{-1}$  para (D.6).

## APENDICE E

### Deducción de la fórmula de recurrencia para $F$

La fórmula de recurrencia (4.1.5) para las distribuciones compuestas que satisfacen las condiciones (1) y (2) de la sección 4.1(a) se deduce en la sección E(a).

En la sección E(b) se demuestra que el tamaño del siniestro medio de la distribución originaria de la cuantía de los siniestros no se modifica cuando la distribución se transforma en discreta utilizando el método descrito en la sección 4.1.(d).

**(a) Demostración de la fórmula de recurrencia.** Si  $\mathbf{Z}=\mathbf{Z}_1+\mathbf{Z}_2+\dots+\mathbf{Z}_k$  es una variable compuesta tal que la variable número de siniestros  $k$  satisface la fórmula de recurrencia

$$p_k=(a+b/k) \cdot p_{k-1} \quad \text{para } k=1,2,3,\dots \quad (\text{E.1})$$

y  $s_0+s_1+\dots+s_r=1$ , donde  $s_i=\text{Prob}\{\mathbf{Z}=i|C\}$ ,  $i=0,1,2,\dots,r$ , como en la sección 4.1. Sin perder generalidad podemos presumir que  $C=1$ .

Denotemos

$$s_j^{(k)} = \text{Prob}\{\mathbf{Z}_1+\dots+\mathbf{Z}_k=j\} \quad (\text{E.2})$$

para  $k \geq 0$ , especialmente  $s_0^{(0)}=1$ , y  $s_j^{(0)}=0$ , si  $j>0$ . Entonces para  $k>0$ ,

$$s_j^{k*} = \sum_{i=0}^j s_i \cdot s_{j-i}^{(k-1)*}, \quad (\text{E.3})$$

Por simetría,

$$E(Z_1 \left| \sum_{i=1}^k Z_i = j \right.) = \frac{1}{k} \cdot E(\sum_{i=1}^k Z_i \left| \sum_{i=1}^k Z_i = j \right.) = \frac{j}{k} \quad (\text{E.4})$$

para  $k > 0$ . A su vez, si  $s_j^{k*} > 0$ ,

$$\begin{aligned} E(Z_1 \left| \sum_{i=1}^k Z_i = j \right.) &= \sum_{i=1}^j i \cdot \text{Prob}\left\{ Z_1 = i \left| \sum_{m=1}^k Z_m = j \right. \right\} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^j i \cdot \text{Prob}\left\{ Z_1 = i \text{ y } \sum_{m=2}^k Z_m = j - i \right\}}{\text{Prob}\left\{ \sum_{i=1}^k Z_i = j \right\}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^j i \cdot s_i \cdot s_{j-i}^{(k-1)*}}{s_j^{k*}}, \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

ya que  $Z_1$  y  $Z_2 + \dots + Z_k$  son independientes. Se tiene que, para  $j > 0$ ,

$$s_j^{k*} = \frac{k}{j} \cdot \sum_{i=1}^j i \cdot s_i \cdot s_{j-i}^{(k-1)*}. \quad (\text{E.6})$$

Nótese que por (E.3)  $s_j^{k*} = 0$  sólo si  $s_i \cdot s_{j-i}^{(k-1)*} = 0$  para todo  $i$ . Es por eso que la igualdad (E.6) se satisface también en el caso en que  $s_j^{k*} = 0$ .

Ahora podemos demostrar la fórmula de recurrencia (4.1.8). A partir de

$$f_j = \text{Prob}\{X=j\} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot s_j^{k*}, \quad (\text{E.7})$$

se tiene, por (E.1), (E.3) y (E.6) que, para  $j > 0$ ,

$$\begin{aligned} f_j &= \sum_{k=1}^{\infty} (a + b/k) \cdot p_{k-1} \cdot s_j^{k*} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} a \cdot p_{k-1} \cdot \sum_{i=0}^j s_i s_{j-i}^{(k-1)*} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b}{j} p_{k-1} \cdot \sum_{i=1}^j i \cdot s_i s_{j-i}^{(k-1)*} \\ &= a \cdot s_0 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} p_{k-1} \cdot s_j^{(k-1)*} + \sum_{i=1}^j \left( a + i \cdot \frac{b}{j} \right) s_i \cdot \sum_{k=1}^{\infty} p_{k-1} s_{j-i}^{(k-1)*} \\ &= a \cdot s_0 \cdot f_j + \sum_{i=1}^j \left( a + \frac{i \cdot b}{j} \right) s_i \cdot f_{j-i}. \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

Despejando  $f_j$  se obtiene la fórmula de recurrencia (4.1.5). La suma de la última línea puede detenerse en  $i=r$ , dado que  $s_i=0$  para valores mayores de  $i$ .

La fórmula (4.1.6) para un valor inicial de  $f_0$  se obtiene inmediatamente de (E.7). Si  $s_0=0$  se obtienen directamente las fórmulas (4.1.7) a partir de  $f_0=s_0$ .

Con el fin de demostrar (4.1.7) para valores positivos de  $s_0$ , sustituimos  $s=lns_0$  en la f.g.m.  $M_k(s)$  de la variable número de siniestros correspondiente. Luego, en el caso de Poisson,  $M_k=\exp(n.e^s-n)=\exp(n.s_0-n)$ . En el caso de la Pólya la fórmula requerida se obtiene sustituyendo  $b=(a+b)/a$  (ver 2.5.10) en (2.5.7). Para la f.d. de la binomial( $p,N$ ) notemos, primero, que tenemos (Tabla 4.1.1)  $(a+b)/a=N$  y  $1-a=i/(1-p)$ . Luego la última fórmula en (4.1.7) se logra sustituyendo éstas en la f.g.m. de la binomial  $((1-p)+p.e^s)^N$  (A.2.9) del Apéndice A).

#### (b) Ausencia de sesgo en la distribución transformada en discreta

**(4.1.13).** Demostraremos que la distribución "discretizada" de la intensidad de los siniestros  $\{s_i\}_i$  definida por las ecuaciones (4.1.12), (4.1.13) y (4.1.14) posee el mismo valor medio que la f.d. de la intensidad de los siniestros originaria S. Utilizando una nueva escala, si es necesario, podemos suponer que la distancia hasta C es igual a 1. Si  $Z$  se distribuye según S y denotamos  $\Delta_i = (i-1, i]$ . Entonces tenemos

$$d_i = \text{Prob}\{Z \in \Delta_i\} = l_i \cdot r_{i-1} \quad (\text{E.9})$$

y

$$e_i = d_i \cdot E(Z | Z \in \Delta_i) = \text{Prob}\{Z \in \Delta_i\} \cdot E(Z | Z \in \Delta_i), \quad (\text{E.10})$$

según (4.1.14). Como  $i-1 \leq E(Z | Z \in \Delta_i) \leq i$ , se puede observar que  $(i-1).d_i \leq e_i \leq i.d_i$ , de modo tal que  $0 = i.d_i - i.d_i \leq i.d_i - e_i = r_{i-1} \leq i.d_i - (i-1).d_i = d_i$ . Es por eso que, por (4.1.13), ambas  $l_i$  y  $r_{i-1}$ , y en consecuencia  $s_i$ , son no negativas para todo  $i$ . Como todo número real pertenece exactamente a un intervalo  $\Delta_i$ , está claro, por (4.1.12) y (E.9) que  $\sum s_i = \sum d_i = 1$ , lo que demuestra que  $\{s_i\}_i$  es una distribución de probabilidades discreta.

El valor medio de  $Z$  se puede escribir como

$$E(Z) = \sum \text{Prob}\{Z \in \Delta_i\} \cdot E(Z | Z \in \Delta_i) = \sum e_i, \quad (\text{E.11})$$

A su vez, el valor medio de la distribución discreta  $\{s_i\}_i$  es

$$\begin{aligned} \sum_i i.s_i &= \sum_i i.l_i + i.r_{i-1} = \sum_i i.l_i + (i-1).r_{i-1}, \\ &= \sum_i i.(l_i + r_{i-1}) - r_{i-1} = \sum_i i.d_i - r_{i-1}, \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

según (E.9) y (E.10). Como  $e_i = i.d_i - r_{i-1}$ , y por (4.1.13), los valores medios (E.11) y (E.12) son iguales.

## APENDICE F

### Simulación

Este apéndice complementa al Capítulo 5, otorgando mayor información sobre la técnica de simulación.

#### F.1 Números aleatorios distribuidos uniformemente

(a) La generación de números aleatorios **distribuidos uniformemente** es el pilar fundamental en diversos modelos de simulación. Los generadores de números aleatorios tienen una construcción algorítmica y una periodicidad común. Cualquier número particular está seguido por otro determinado por uno o varios valores anteriores. De ahí que, tomando en cuenta el hecho de que los números están dados para un cierto número  $d$  de dígitos, y están limitados a un intervalo finito fijo, el generador eventualmente comienza a repetir la misma secuencia. Es por eso que la secuencia debe ser lo suficientemente larga como para no repetirse en ~~en~~ cualquier aplicación importante, de otra manera el resultado puede verse ~~se~~ seriamente dañado. Debido al hecho de que estos tipos de secuencias, ~~especialmente~~ hablando, no son números aleatorios genuinos, se llaman ~~normalmente~~ **números seudo-aleatorios**. Para los fines prácticos son suficientes.

Los paquetes de programas de computación normalmente incluyen generadores de números aleatorios distribuidos uniformemente, como un software estándar. Es preciso testear la adaptabilidad de cada programa antes de utilizarlo para asegurarse de que no produzca frecuentemente series de números cíclicas. Si el programa estándar es inadecuado, se aconseja construir uno nuevo.

La denominada, **fórmula mixta de congruencia** (Rubinstein, 1981), se utiliza normalmente para generar números aleatorios distribuidos uniformemente:

$$r_k = a \cdot r_{k-1} + b \pmod{10^d} \quad (d \text{ entero positivo}) \quad (\text{F.1.1})$$

El  $k$ -ésimo número aleatorio se obtiene de la expresión de la derecha tomando los últimos  $d$  dígitos. Si  $b$  es un entero positivo no divisible por 2 o por 5 y  $a$  es de la forma  $1+10^i$  (siendo  $i$  cualquier entero positivo), la fórmula genera una secuencia de  $10^d$  números diferentes antes de repetir la misma.

Usualmente es mejor tomar una escala tal que la secuencia cubra el intervalo abierto (0,1). El número inicial  $r_0$  puede ser elegido de cualquier lugar de este intervalo, es denominado **origen**. Para algunas aplicaciones es necesario tener la posibilidad de que el usuario sea quién lo suministre y así poder correr realizaciones sucesivas con exactamente las mismas secuencias, por ejemplo, cuando se llevan a cabo análisis de sensibilidad.

## F.2 Números aleatorios distribuidos normalmente

Los números aleatorios distribuidos normalmente pueden ser generados por la denominada, **fórmula tri-log** (“log-and-trig formula”) (Rubinstein, 1981)

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{-2 \ln(r_1)} \cdot \cos(2\pi r_2) \\ x_2 &= \sqrt{-2 \ln(r_1)} \cdot \sin(2\pi r_2) \end{aligned} \quad (\text{F.2.1})$$

donde  $r_1, r_2$  es un par de números aleatorios del intervalo (0,1) distribuidos uniformemente, y el par  $x_1, x_2$  generado consiste en números aleatorios mutuamente independientes y distribuidos normalmente con media 0 y desvío estándar 1.

**OBSERVACIÓN:** Otra fórmula, que suele proponerse en algunos libros de texto, primero genera una cierta cantidad de números aleatorios distribuidos uniformemente y sumándolos, deduce números distribuidos aproximadamente según una Normal. Este método está desafortunadamente afectado por sesgo en las colas y por lo tanto no puede ser recomendado para las aplicaciones de Teoría del Riesgo.

## F.3 Presentación gráfica de resultados

La presentación gráfica de los resultados de simulación, que hemos utilizado frecuentemente en este libro, puede proveer una imagen adecuada e ilustrativa de las características esenciales (por ejemplo las figuras de las secciones 5.2, 5.5, 9.4, 9.5, 9.6 y 12.4). Es importante, entre otras cosas, elegir la función y la escala apropiadas. Puede ser recomendable en ciertas ocasiones graficar la f.d.  $F$  o  $1-F$  en lugar de la densidad, utilizando una escala semi-logarítmica, con el fin de resaltar las propiedades límite de las colas. La Figura 9.5.3. es un ejemplo. El fluir suavemente irregular de la curva da una idea de la inexactitud de la simulación.

## F.4 Resultados numéricos y su exactitud

A pesar de que la simulación logre buenos resultados al utilizarse para generar diagramas gráficos, existe también la necesidad de presentar los resultados en forma numérica. Proporcionaremos algunas sugerencias sobre eso.

**(a) Un enfoque simple.** es contar la frecuencia relativa de los eventos de interés. Por ejemplo, si estamos interesados en evaluar el riesgo de la variable en cuestión, digamos del resultado de suscripción, de caer por debajo de cierto límite, entonces podemos contar el número de casos,  $c$ , ocurridos en una simulación. Si el tamaño de la muestra es  $s$ , entonces la tasa

$$\hat{p} = c / s \quad (\text{F.4.1})$$

puede ser utilizada como una estimación de la probabilidad requerida  $p$ . Desafortunadamente este método es bastante vclátil, a menos que  $E(c)$  sea muy grande, como puede ser observado a partir del desvío estándar relativo de  $c$ :

$$\frac{\sigma_c}{E(c)} = \frac{\sqrt{p(1-p)s}}{p.s} \approx \frac{1}{\sqrt{c}}. \quad (\text{F.4.2})$$

Esta expresión se obtiene por medio de una fórmula binomial estándar. Si  $p$  es pequeña, como generalmente lo es en aplicaciones de la Teoría del Riesgo, este desvío estándar relativo resulta significativamente grande. Por ejemplo, si  $p$  es 0,01 y  $s$  es, 1.000 y por lo tanto  $E(c)=10$ , los límites de confianza para el resultado  $c$ , al 95% son 4 y 16 (utilizando la aproximación normal). Si se requiere un error relativo pequeño, el tamaño de la muestra debe ser mayor. Límites de confianza más exactos, para ambas distribuciones, Poisson y binomial, se pueden hallar en Johnson y Kotz, 1969, Vol. 1, pp.60 y 67. Ellos dan el límite para el desconocido valor "verdadero" de  $p$  como una función del resultado simulado  $\hat{p}$ .

Una variante del método anterior es contar fractiles de los resultados simulados o graficar los **valores extremos** que aparecen en la muestra para cada punto de tiempo. La figura F.4.1 ejemplifica esta última aproximación (área sombreada).

**(b) Manejo estadísticos de los resultados.** Un método mucho más efectivo para evaluar la imprecisión de la simulación y encontrar los valores numéricos de las cantidades pertinentes es calcular la media, el desvío estándar, y la asimetría de las realizaciones simuladas. Esto puede llevarse a cabo fácilmente almacenando las simples sumas  $\sum u^k$  ( $k=1, 2$  y  $3$ ) durante el proceso de simulación; de ahí pueden calcularse las características pertinentes (Ejercicio F.4.1). La f.d. de los valores, o tal vez el límite de confianza  $\hat{\mu}_e(t)$  para cada  $t$ , puede evaluarse a partir de ahí, por ejemplo por medio de la fórmula de WH (4.2.12) o de la fórmula de N.P (4.2.6). Notemos ahora que, cuando se calculan la media, el desvío estándar y el posible sesgo, puede utilizarse el

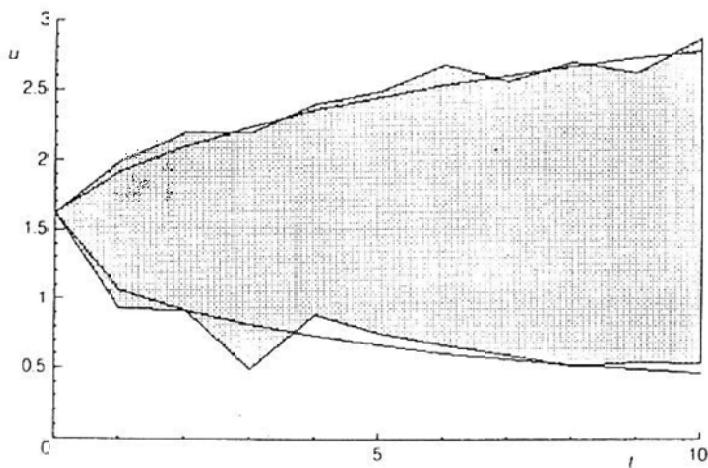


Figura F.4.1. Simulación de la tasa de solvencia  $u(t)$  de acuerdo con el algoritmo (12.3.6). La distribución está marcada a partir de los valores de mínimos y máximos de las realizaciones en cada punto de tiempo (área sombreada). A los efectos de la comparación también fueron calculados los límites de confianza al 99% utilizando la fórmula Wilson-Hilferty (4.2.12) con los mismos parámetros básicos que se utilizaron en la simulación. Tamaño de la muestra 100.

conjunto de realizaciones completo, y no sólo las colas como en la fórmula (F.4.1). La Figura F.4.2 muestra este método. La distribución es la misma que la de la Figura F.4.1.

La precisión del intervalo de confianza puede acrecentarse ajustando una curva convenientemente definida  $\bar{\mu}_e(t)$  para suavizar los límites de confianza  $\hat{\mu}_e(t)$  que han sido calculados inicialmente para cada  $t$  de algún rango específico  $t_1 \leq t \leq t_2$ . Por ejemplo, una fórmula de tipo parabólica debería ser una candidata para el límite inferior;

$$\bar{\mu}_e(t) = \mu(0) - a t^2 \quad (\text{F.4.3})$$

donde el parámetro  $a$  puede determinarse utilizando el método de los mínimos cuadrados.

**(c) Otros métodos.** El procedimiento de simulación puede realizarse a menudo más rápidamente y asimismo reducirse la imprecisión de la simulación, mediante métodos presentados en los libros de texto estándar sobre simulación, por ejemplo, por medio de la reducción de la varianza o estratificando las muestras (Rubinstein, 1981). Toda consideración acerca de estos métodos está más allá del alcance de este libro.

**Ejercicio F.4.1** Muestre cómo pueden ser estimadas las características  $\mu(t)$ ,  $\sigma(t)$  y  $\gamma(t)$  si la simulación se organiza de acuerdo con las indicaciones dadas en la sección F.4(b).

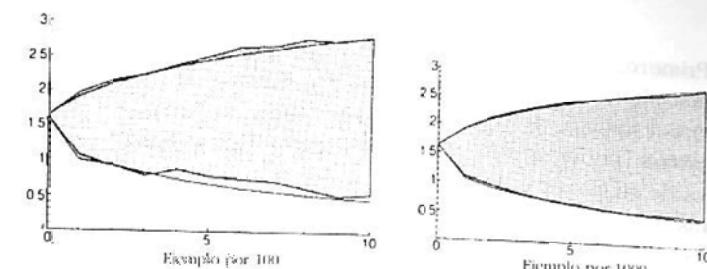


Figura F.4.2 Área dentro de la cuadra debe permanecer en la realización con un 99% de confianza, calculada por medio del método WH a partir de las características deducidas de las realizaciones simuladas. A los efectos de comparar, los límites de confianza también se han calculado directamente por la fórmula WH como en la Figura F.4.1. Se utiliza la misma información básica que en la Figura F.4.1.

## F.5 Simulación del negocio del seguro

La simulación de diversas partes del proceso del seguro se trató en diferentes secciones de este libro. Por razones editoriales el material se presentó en numerosos ítems separados, comenzando por el más simple en la sección 5.4, que involucraba sólo al número de siniestros, y progresando hacia un análisis completo del negocio asegurador, donde los siniestros son estocásticos en varios tramos y donde se toman en cuenta la inflación, las inversiones, las primas, los costos, la dinámica, etc., como se consideró en la sección 12.4, capítulo 13 y secciones 14.2 y 14.3. Para conveniencia de los lectores el proceso total de simulación del seguro se resume ahora, haciendo referencia a las secciones más relevantes y a las fórmulas necesarias para cada bloque por separado. Restringimos la atención a aquellos modelos de largo plazo y a aquellos casos en los que existe sólo una línea de negocios. Puede ser una clase particular de seguro o varias clases combinadas (sección 3.2(d) en lo que concierne a aditividad).

**(a) Diagrama general de flujos.** Está esbozado en la Figura F.5.1.

Primero, por supuesto, debe especificarse el modelo. Hay numerosas alternativas para escoger (u omitir), de acuerdo con el propósito del trabajo, por ejemplo, como sigue.

- **Siniestros:** ponderación y ciclos (sección 9.4), "run-off", incluyendo reserva de siniestros (sección 9.5) y reaseguro (sección 3.4).
- **Primas:** Reglamentación de primas (sección 10.1, 10.2 y 12.4(c))
- **Gastos:** Capítulo 11

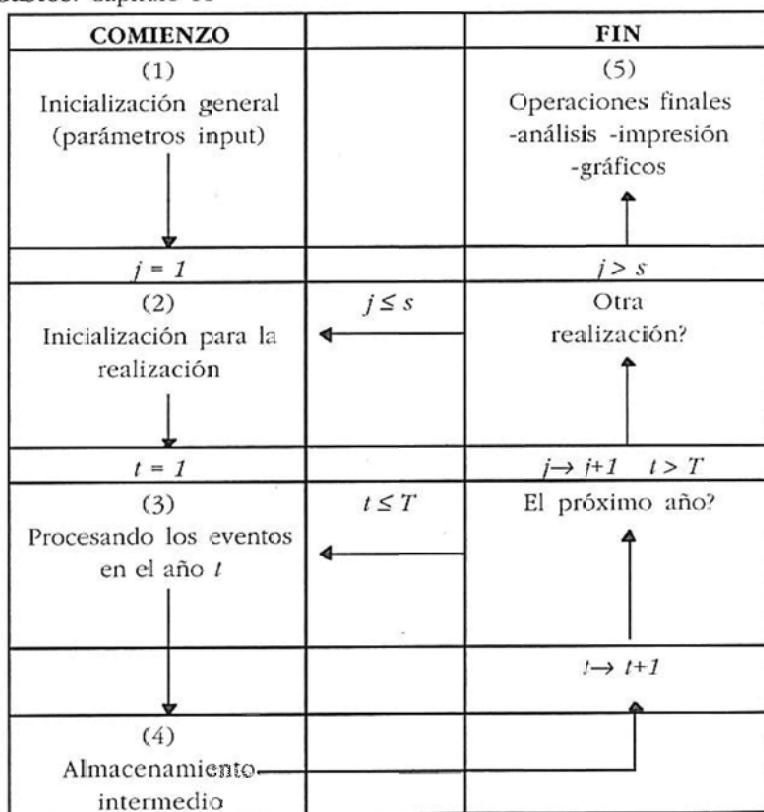


Figura F.5.1: El flujo de la simulación del negocio del seguro.

- **Inversiones:** diferentes sub-módulos para las clases de inversiones más importantes (sección 8.4 para el modelo Wilkie y sección 8.5 para los alternativos), selección del cartera (sección 8.6) o, quizás, el resultado total de todas las inversiones tomadas conjuntamente (sección 8.5(f)).
- **Mercado:** sección 14.3.
- **Un módulo maestro** para controlar el flujo de la simulación se obtiene a partir de modificar convenientemente las ecuaciones básicas (14.2.1) para los bienes y (14.2.2) para el margen de selenicia. Este módulo maestro se alimenta de módulos auxiliares construidos para siniestros, primas, etc.

Las casillas de la tabla serán comentadas en las secciones siguientes.

- (b) Inicialización general de parámetros (Casilla 1).** Todos los parámetros pertinentes deben estar dados como dato. Es conveniente construir una o más matrices de datos para lo cual se suministran valores estándar. El usuario debe tener la posibilidad de cambiarlos y seleccionar ciertas opciones, tales como manejar algunas partes del proceso determinística o estocásticamente u omitirlas todas.

Los parámetros necesarios del modelo pueden encontrarse en las ecuaciones pertinentes de los capítulos y secciones que a ellos se refieren en la sección F.5(a), donde aparecen como coeficientes y distintos tipos de parámetros. Se dan ejemplos en (6.1.11), (6.2.1), (7.3.6), en las especificaciones de la sección 8.4 (para modelos Wilkie), y en (8.5.5), (8.5.9), (8.5.17) y (8.5.18). El problema de encontrar valores numéricos adecuados para los parámetros de los modelos se discute en la sección 14.5(d).

**(c) Inicio para la realización (Casilla 2).** Algunos aspectos, por ejemplo la evolución del índice de inflación, son específicos de una realización en particular, pero independientes del modo en que se desarrollan los resultados de la empresa durante la realización. La tasa de beneficio de las inversiones puede caer en esta categoría si éstas son tratadas conjuntamente. Es conveniente hallar valores numéricos adecuados antes de ingresar a la retroalimentación temporal de las Casillas 3 y 4.

**(d) Procesando los eventos del año  $t$  (Casilla 3).** Primero se generan las variables primarias - siniestros, primas, costos, beneficio de las inversiones, etc.- (referencias en la sección F.5(a)). Luego se obtienen los resultados de suscripción y de seguros vía el módulo maestro, junto con el estado de las variables al final del año  $t$ .

**(e) Almacenamiento intermedio (Casilla 4).** Se almacenan aquellas cantidades que se necesitan para el estado inicial de la retroalimentación próxima ( $t+1$ ), y para las operaciones finales, quizás junto con aquellas cantidades auxiliares (acumuladas) como, por ejemplo, las sumas  $\Sigma u$ ,  $\Sigma u^2$ ,  $\Sigma u^3$ , que se utilizan para el cálculo de los límites de confianza (sección F.4).

**(f) Las operaciones finales (Casilla 5)** consisten en calcular los resultados requeridos del proceso y plasmarlos en tablas, diagramas, etc., junto con el análisis que se requiere de los resultados.