exceso de siniestralidad "stop loss" (o reaseguro del exceso acumulado de pérdida) que es un ejemplo de ese tipo de acuerdo de reaseguro acumulado. Sin embargo, en la práctica este tipo de acuerdo de reaseguro, que brinda protección directamente contra las fluctuaciones del importe acumulado de siniestros $\boldsymbol{X}_{tot}$ es problemático, ya que numerosos factores relevantes, como la inflación, los cambios en el volumen comercial o los niveles de las primas, cambios en las condiciones de las pólizas o en la práctica de la liquidación de siniestros, etc. pueden provocar fluctuaciones inesperadas en $\boldsymbol{X}_{tot}$, y el reasegurador a menudo no puede analizar todos estos riesgos y factores con el suficiente detenimiento como para poder fijar las tasas y evaluar el riesgo correctamente.

En la práctica, a menudo se utilizan diferentes tipos de reaseguros para diferentes clases de negocios y para diferentes tipos de riesgos. A veces se combinan tipos diferentes.

Primero consideraremos cada clase por separado. Si el reaseguro para todas las clases se contrata sobre la base siniestro por siniestro, puede ser posible construir una distribución ponderada de la intensidad de siniestros netos del reaseguro para toda la cartera, utilizando la aditividad de las variables compuestas, siempre que se cumplan los supuestos requeridos para esa propiedad (sección 3.2(d)). Si existen coberturas complicadas de reaseguro, posiblemente incluyendo otras coberturas acumuladas de reaseguro (como el exceso de siniestralidad) para algunas clases, entonces tal vez la simulación sea el único método disponible para deducir la f.d. del importe acumulado de siniestros netos de reaseguro para todas las clases de negocios de un asegurador.

3.4.2 Reaseguro de exceso de pérdida

(a) Definición. Con un **tratado de exceso de pérdida** el reasegurador paga aquella parte de cada importe de siniestro que excede un límite

acordado M, el límite de retención del cedente. Los tratados del exceso de pérdida pueden convenirse de una variedad de formas. En esta sección nos ocupamos de los tratados en los que la retención del cedente se define para cada siniestro en un determinado grupo de riesgos, y en los que el reasegurador paga el exceso sobre ese importe si un siniestro excede el nivel M de retención. Este tipo se denomina reaseguro del exceso de pérdida **por siniestro** (o por riesgo), cuando es necesario diferenciarlo de variantes basadas en eventos tales como el exceso de pérdida por **eventos individuales,** mediante los cuales la protección se brinda a un grupo de riesgos contra la acumulación catastrófica de siniestros que surgen de un evento importante como un terremoto o una tormenta.

En el reaseguro de exceso de pérdida el reasegurador paga el exceso $\boldsymbol{Z}_{re,M}=(\boldsymbol{Z}_{tot}-M)^+$ sobre un importe acordado M con respecto a cada siniestro. La porción del cedente $\boldsymbol{Z}_M=\boldsymbol{Z}_{tot}-\boldsymbol{Z}_{re,M}$ del siniestro, neto del reaseguro, es entonces

$$\boldsymbol{Z}_M = \min(M,\boldsymbol{Z}_{tot}) \tag{3.4.3}$$

y su f.d. S_M, en términos de la f.d. S de la intensidad total $\boldsymbol{Z}_{tot}$ de siniestros es

$$S_M(Z) = \begin{cases} S(Z) & para\ Z < M \\ 1 & para\ Z \geq M \end{cases} \tag{3.4.4}$$

El límite de retención M se escribe como un subíndice, dado que su valor a menudo se varía cuando se comparan límites alternativos.

Desde el punto de vista del cedente, el reaseguro de exceso de pérdida no influye en el número de siniestros. Por lo tanto, si el importe acumulado total $\boldsymbol{X}_{tot}$ de siniestros es una variable compuesta con una f.d. S de la intensidad de siniestros y si todos los riesgos se reaseguran utilizando el mismo límite de retención M, el importe acumulado $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_M$ de siniestros neto de reaseguro también es una variable compuesta que tiene la misma variable del número de siniestros, pero con una f.d. S_M de la intensidad de siniestros dada por (3.4.4). El importe acumulado de siniestros del reasegurador también es una variable compuesta, pero el número de siniestros no nulos generalmente es mucho menor para el reasegurador.

(b) Características básicas. La intensidad media m_M de los siniestros de a cargo del cedente (3.4.3) de un siniestro cubierto por reaseguro de exceso de pérdida es

$$m_M = E(\mathbf{Z}_M) = \int_{-\infty}^{M-} Z dS(Z) + M \cdot (1 - S(M)). \tag{3.4.5}$$

De (3.4.3) surge inmediatamente, utilizando la definición de la función del valor esperado acotado que

$$m_M = \mathrm{E}(\min(M, \boldsymbol{Z}_{\mathrm{tot}})) = L(M), \tag{3.4.6}$$

donde L es la función del valor esperado acotado de la f.d. S de la intensidad total $\boldsymbol{Z}_{\mathrm{tot}}$ de siniestros. Las propiedades de la función del valor esperado acotado (sección 3.3.4(b)) implican que la intensidad media neta del siniestro m_M, y por consiguiente también la prima de riesgo neto

$$P_M = n \, . \, m_M \tag{3.4.7}$$

es una función cóncava, continua, creciente del límite de retención M.

Los momentos absolutos (3.2.9) de la porción $\boldsymbol{Z}_M$ del cedente, para un siniestro están dados por

$$a_k(M) = E\left(\mathbf{z}_M^k\right) = \int_{-\infty}^{M} Z^k dS(Z) + M^k \cdot (1 - S(M)). \tag{3.4.8}$$

Debido a la analogía formal entre la parte $\boldsymbol{Z}_{\mathrm{re}}=\boldsymbol{Z}_{\mathrm{re},M}$ del reasegurador de un siniestro en un tratado de exceso de pérdida y la variable (3.3.27) que da la intensidad de siniestros neta de una franquicia, los resultados de la sección 3.3.10(a) concernientes a las intensidades medias de siniestros, primas de riesgo y cantidades de siniestros también se aplican directamente para la parte $\boldsymbol{Z}_{\mathrm{re}}$ del reasegurador. Por ejemplo, el número esperado de siniestros que exceden el límite de retención M es $n_{\mathrm{re}}=n.(1-S(M))$. Los momentos de la parte $\boldsymbol{Z}_{\mathrm{re}}$ del reasegurador pueden obtenerse (Ejercicio 3.4.4) de los momentos (3.4.8) por la fórmula

$$a_k(\mathbf{Z}_{re}) = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \cdot (-M)^{k-i} \cdot [a_i - a_i(M)], \tag{3.4.9}$$

donde $a_i = a_i(\infty) = a_i(\boldsymbol{Z}_{\mathrm{tot}})$. Nótese que el valor de $\boldsymbol{Z}_{\mathrm{re}}$ es cero cuando la intensidad de un siniestro es menor que el límite de retención M. El k-ésimo momento absoluto de la parte del reasegurador de un siniestro que excede el límite de retención es

$$a_k(\boldsymbol{Z}_{\mathrm{re}} \mid \boldsymbol{Z}_{\mathrm{re}} > 0) = a_k(\boldsymbol{Z}_{\mathrm{re}})/(1-S(M)). \tag{3.4.10}$$

El denominador $1-S(M)=\mathrm{Prob}\{\boldsymbol{Z}_{\mathrm{re}}>0\}=\mathrm{Prob}\{\boldsymbol{Z}_{\mathrm{tot}}>M\}$ fue necesario para eliminar los siniestros nulos del reasegurador, es decir aquellos siniestros que no excedían el límite de retención. No obstante, nótese que a menudo es más conveniente utilizar los momentos (3.4.9) que los momentos condicionales correspondientes (3.4.10), como puede verse, por ejemplo en la sección 3.4.2(e) más adelante.

Tabla 3.4.1 Momentos menores e índices de riesgo rk = ak /mk (véase 3.2.16) de la distribución SM de la intensidad de siniestros a cargo del cedente netos de reaseguro, en presencia de un tratado de exceso de reaseguro con límite de retención M, calculado para la distribución de la intensidad de siniestros S de la Tabla 3.3.1. La unidad monetaria es $1.000.

M	$S(M)$	m_M	$a_2(M)$	$a_3(M)$	$r_2(M)$	$r_3(M)$
0.10	0.2611877	0.085	0.008	0.001	1.09	1.25
0.14	0.3092646	0.113	0.015	0.002	1.15	1.38
0.20	0.3642961	0.153	0.028	0.005	1.20	1.53
0.28	0.4224722	0.201	0.051	0.014	1.27	1.70
0.40	0.4888123	0.266	0.095	0.036	1.34	1.93
0.57	0.5566038	0.347	0.173	0.093	1.44	2.23
0.80	0.6198597	0.441	0.301	0.225	1.55	2.63
1.13	0.6784591	0.556	0.522	0.546	1.69	3.18
1.60	0.7294388	0.694	0.897	1.315	1.86	3.93
2.26	0.7781205	0.855	1.513	3.102	2.07	4.96
3.20	0.8200895	1.043	2.528	7.262	2.32	6.40
4.53	0.8564949	1.256	4.159	16.721	2.64	8.44
6.40	0.8855225	1.495	6.746	37.935	3.02	11.35
9.05	0.9086236	1.764	10.862	85.637	3.49	15.60
12.80	0.9285196	2.066	17.393	192.598	4.07	21.84
18.10	0.9450290	2.395	27.435	425.047	4.78	30.95
25.60	0.9579705	2.754	42.958	933.019	5.66	44.67
36.20	0.9683720	3.140	66.542	2023.655	6.75	65.35
51.20	0.9765965	3.545	101.470	4306.566	8.07	96.66
72.41	0.9831277	3.964	152.490	9017.448	9.71	144.80
102.40	0.9884495	4.381	224.245	18 365.977	11.68	218.42
250.00	0.9966710	5.271	511.096	92 353.348	18.39	630.59
500.00	0.9987331	5.776	869.586	2.910 E + 05	26.07	1510.05
750.00	0.9992801	6.013	1160.741	5.625 E + 05	32.10	2586.83
1000.00	0.9995179	6.160	1415.296	8.957 E + 05	37.30	3831.57
2000.00	0.9998165	6.453	2246.000	2.737 E + 06	53.94	10 186.38
3000.00	0.9998957	6.590	2920.672	5.253 E + 06	67.25	18 354.69
5000.00	0.9999488	6.735	4044.418	1.194 E + 07	89.16	39 083.80
10 000.00	0.9999805	6.890	6248.167	3.636 E + 07	131.61	111 160.67
20 000.00	0.9999926	7.008	9602.810	1.107 E + 08	195.52	321 633.02
50 000.00	0.9999979	7.122	16 865.385	4.823 E + 08	332.49	1 335 137.90
100 000.00	0.9999992	7.185	25 764.811	1.469 E + 09	499.11	3 959 410.62

Notación: $x\text{E} + n = x \cdot 10^n$.

(c) Un ejemplo. Los tres primeros momentos $a_k(M)$ para la f.d. S dada en la Tabla 3.3.1 de la sección 3.3.3 se consignan en la Tabla 3.4.1 para valores diferentes del límite de retención M. Dado que en la Tabla 3.3.1 se utilizaron datos agrupados y dado que las medias de clase $\mathbf{Z}_i$ y el número de siniestros en cada grupo eran la única información que se dio acerca de la f.d. S, se supuso que dentro del rango [0;102,4] la f.d. S es una función escalonada con los escalones situados en las medias de clase $\mathbf{Z}_i$. Para la cola que comienza en el punto 102,4 se utiliza la curva de Pareto ajustada $S(Z)=1-7{,}3208.Z^{1{,}5938}$, truncada en Z=100.000 (Ejercicio 3.4.6). A los fines de verificar, se observa que la doble desigualdad $1 \leq r^2{}_2 \leq r_3$ (Ejercicio 3.2.7) se satisface para todo M en la Tabla 3.4.1.

Puede observarse a partir de las cifras de la Tabla 3.4.1 que la prima de riesgo de reaseguro $P_{re}=n.(m_\infty-m_M)$ será relativamente pequeña en comparación con la prima de riesgo total $P = n.m_\infty$, si el límite de retención M es mayor que un millón de libras. Sin embargo, los momentos más altos, y por lo tanto la volatilidad del riesgo neto del cedente, se incrementan fuertemente a medida que el límite de retención M se incrementa. La f.d. S de la intensidad de siniestros en la Tabla 3.4.1 tiene una cola relativamente importante, ya que la frecuencia de los siniestros que exceden los $20 millones es aproximadamente de uno en treinta años, y la frecuencia de los siniestros que superan los $50 millones es aproximadamente de uno en cien años. El número total de siniestros durante el período de observación de cuatro años fue de 16.536.

(d) Sensibilidad a la inflación de los siniestros. Como mencionamos en la sección 3.3.1(c), el efecto de la inflación debe tenerse siempre en cuenta cuando se analizan siniestros. Debe considerarse que la prima de riesgo de reaseguro del exceso de pérdida $P_{re,M}$ es particularmente sensible a la inflación. En realidad, si las intensidades totales de siniestros $\mathbf{Z}_{tot}$, se multiplican por un factor $r>1$, entonces la prima de riesgo de reaseguro $P_{re,M}$ se incrementa en un factor mayor

$$r^*(M)= \frac{P_{re,M}(r\mathbf{Z}_{tot})}{P_{re,M}(\mathbf{Z}_{tot})} = \frac{E((r\mathbf{Z}_{tot}-M)^+)}{E((\mathbf{Z}_{tot}-M)^+)} > r,$$

donde M es el límite de retención del cedente, que se mantiene sin cambios. Para demostrar esta desigualdad, primero debemos recordar que, por (3.4.6) $P_{re,M}(\mathbf{Z}_{tot})=n.[L(\infty)-L(M)]$ y $P_{re,M}(r\mathbf{Z}_{tot})=n.[L_r(\infty)-L_r(M)]$, donde L y L_r, son respectivamente las funciones del valor esperado acotado de las intensidades totales de siniestros $\mathbf{Z}_{tot}$ y $r\mathbf{Z}_{tot}$. Tenemos (Ejercicio 3.3.8) $L_r(M)=r.L_r(M/r)$, de modo que $r^*(M)=r.[L(\infty)-L(M/r)]/[L(\infty)L(M)]>r$, porque L es una función creciente.

Para dar una idea de la diferencia entre el factor de crecimiento primario r y el factor de crecimiento resultante r^* de la prima de riesgo del reaseguro, se consignan algunos ejemplos en la Tabla 3.4.2, donde se supone que la $\mathbf{Z}_{tot}$ original tiene una distribución de Pareto(α,0,1) y donde se hace variar al parámetro α. El factor $r^*(M)$ no depende del límite de retención M en el caso de una distribución de Pareto con β=0; en realidad $r^* \equiv r^\alpha$ en este caso (Ejercicio 3.4.7).

Tabla 3.4.2. *La tasa de crecimiento r^*-1 para la prima de riesgo del reaseguro $P_{re,M}$ en el caso de una distribución de intensidad de siniestros Pareto(α,0,1) para valores diferentes del parámetro de Pareto α. La tasa de inflación de siniestros r-1 se supone igual al 10%.*

Pareto-α:	1.1	1.5	2	3
(r^*-1)	11.1%	15.4%	21.0%	33.1%

Puede concluirse que, cuanto más leve sea la cola de la distribución de la intensidad de siniestros, más sensible es a la inflación la prima de riesgo del exceso de pérdida del reasegurador. La explicación es que la inflación no sólo aumenta las intensidades de siniestros, sino también el número esperado $n_{re,M}$ de siniestros que exceden el límite de retención M; cuanto mayor es el importe relativo de los siniestros más pequeños, más fuerte es el crecimiento del número esperado $n_{re,M}$ de siniestros.

(e) Cobertura limitada del exceso de pérdida. En la práctica la cobertura del exceso de pérdida del reaseguro generalmente es limitada. Esto significa que el reasegurador paga el posible exceso sobre el límite de retención M, pero a lo sumo hasta un importe acordado A por siniestro. Si utilizamos la terminología corriente del reaseguro, el tratado cubre el **tramo A xs M**. Luego la parte del reasegurador de un siniestro de intensidad $\boldsymbol{Z}_{tot}$ es (Ejercicio 3.4.8)

$$\boldsymbol{Z}_{re} = \min(A,(\boldsymbol{Z}_{tot} - M)^+) = \boldsymbol{Z}_{M+A} - \boldsymbol{Z}_M , \qquad (3.4.12)$$

donde se utiliza la notación $\boldsymbol{Z}_M = \min(M,\boldsymbol{Z}_{tot})$de la sección 3.4.2(a).

En la práctica, la cobertura del reaseguro puede consistir en varios tramos y las primas de riesgo tal vez deban estimarse para cada uno de ellos.

Por (3.4.6) la prima de riesgo del reasegurador para el tramo A xs M es simplemente

$$P_{re} = n \,.\, \mathrm{E}(\boldsymbol{Z}_{re}) = n \,.\, (L(M + A) - L(M)) \qquad (3.4.13)$$

donde n es el número esperado de (todos) los siniestros.

Las fórmulas (3.4.9) y (3.4.10) para los momentos de la parte del reasegurador $\boldsymbol{Z}_{re}$, se generalizan (Ejercicio 3.4.4) al caso de un tramo limitado A xs M simplemente reemplazando $a_i(M)$ en (3.4.9) por $a_i(M+A)$.

Si el importe acumulado total $\boldsymbol{X}_{tot}$ de siniestros es una variable de Poisson mixta compuesta con un número esperado de siniestros n y si existe una cobertura limitada de exceso de pérdida para el tramo A xs M, entonces la varianza Var($\boldsymbol{X}_{re}$), de la parte del reasegurador del importe acumulado de siniestros es (Ejercicio 3.4.5)

$$\mathrm{Var}(\boldsymbol{X}_{re}) = n.[a_2(M+A) - a_2(M)] - 2.M.P_{re} + \mathrm{Var}(\boldsymbol{q}).P_{re}^{\;2} \qquad (3.4.14)$$

donde $\boldsymbol{q}$ es la variable de ponderación. La asimetría de la parte del reasegurador $\boldsymbol{X}_{re}$ puede expresarse análogamente utilizando los momentos $a_k(M)$ y $a_k(M+A)$. Sin embargo, dado que el número esperado $n_{re} = n.(1-S(M))$ de siniestros con una intensidad que supera el límite de retención M generalmente es bastante pequeña, a veces menor que 1, estas características superiores no son necesariamente muy útiles; tal vez sea más importante saber con qué frecuencia el tramo es alcanzado por un siniestro y cuál es la f.d. de la intensidad de siniestros.

OBSERVACIÓN. En la práctica una cobertura de reaseguro de exceso de pérdida para un tramo A xs M a menudo está también limitado con respecto al importe acumulado de siniestros. Por ejemplo, el tratado puede establecer que sólo se permiten tres reposiciones durante un año, lo que significa que la parte del reasegurador de todos los siniestros acumulados durante un año está limitada por el importe (1+3). A, es decir que la cobertura puede restablecerse tres veces. Es más, quizás pueda pagarse una prima extra por cada reposición. Sundt (1990) ha encarado el tema de las reposiciones.

(f) Aplicación al caso con una franquicia. Como ya se dijo en la sección 3.4.2(b), existe una analogía formal entre la franquicia y el límite de retención del exceso de pérdida. En esta sección se mostrará cómo los resultados de la sección 3.4.2(e) pueden aplicarse a los siniestros netos de un cedente de un reaseguro de exceso de pérdida en presencia de una franquicia en la póliza originaria.

Consideremos una situación en la que se da la f.d. S de la intensidad total de siniestro y los tres momentos inferiores $a_k(M)$ (3.4.8) de la intensidad $\boldsymbol{Z}_M$ de un siniestro truncado en M están disponibles para valores diferentes del parámetro M. La Tabla 3.4.1 proporciona un ejemplo. Supongamos que se introduce una franquicia D y que existe un reaseguro de exceso de pérdida con un límite de retención M ($>D$). Aplicando (3.4.9) y (3.4.10) a la f.d. truncada S_M, los tres momentos inferiores $a_k = a_k(D,M)$ de la parte del asegurador netos de reaseguro de cada siniestro que excede la franquicia D se obtienen mediante las fórmulas

$$a_1 = \frac{m_M - m_D}{1-S(D)}$$

$$a_2 = \frac{a_2(M)-a_2(D)-2.D(m_M-m_D)}{1-S(D)},$$

$$a_3 = \frac{a_3(M)-a_3(D)-3.D.(a_2(M)-a_2(D))+3.D^2.(m_M-m_D)}{1-S(D)}, \qquad (3.4.15)$$

El denominador $1-S(D)$ es necesario (como en (3.4.10) para eliminar aquellos siniestros que son menores que la franquicia D.

Si el importe acumulado de siniestros es una variable compuesta, entonces la media μ_X, el desvío estándar σ_X y la asimetría γ_X, del importe neto acumulado de siniestros del asegurador $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_{D,M}$ en presencia de una franquicia D y de una retención neta M pueden obtenerse fácilmente sustituyendo los momentos (3.4.15) en las fórmulas pertinentes de la sección 3.2.(b), suponiendo que se conozca la distribución del número de siniestros.

Para ilustrar el comportamiento del importe neto de siniestros del asegurador como una función tanto de la franquicia D como del límite de retención M, en la Tabla 3.4.3 se calculan algunos ejemplos. La f.d. S de la Tabla 3.3.1. se utilizó nuevamente como la f.d. de la intensidad de siniestros. El número esperado de todos los siniestros en un año se supuso igual a n=4.134, la media anual del número de siniestros observados, y para que los cálculos fueran simples en este ejemplo ilustrativo, el número de siniestros se supuso con distribución de Poisson. Entonces, de acuerdo con (3.2.11) y (3.2.13), tenemos $\mu_X = n_D.a_1$, $\sigma_X = \sqrt{n_D}.a_2$ y $\gamma_X = n_D.a_3/\sigma^3_X$, donde $n_D = n.(1-S(D))$ es el número esperado de siniestros que exceden la franquicia D.

Tabla 3.4.3 *Las características básicas del importe acumulado de siniestros netos del asegurador* $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_{D,M}$, *como una función de la franquicia D y el límite de retención M del exceso de pérdida. Se han utilizado los datos numéricos de la Tabla 3.4.1.*

Franquicia D (\$)	*Retención M* (millones de \$)	n_D	μ_X (millones de \$)	σ_X (millones de \$)	γ_X
0	1	4134	25.5	2.42	0.26
200	1	2628	24,8	2,42	0,26
1600	1	1119	22,8	2,40	0,26
250000	1	14	3,7	1,38	0,46
0	5	4134	29,4	8,35	3,43
200	5	2628	28,8	8,35	3,43
1600	5	1119	26,6	8,34	3,43
250000	5	14	7,7	7,99	3,82
0	10	4134	29,7	10,32	5,52
200	10	2628	29,1	10,32	5,52
1600	10	1119	26,8	10,32	5,52
250000	10	14	7,9	10,02	5,95

Ejercicio 3.4.1 Suponer que la f.d. de la intensidad de siniestros es exponencial $S(Z)=1-e^{-cZ}$ y que el reaseguro de exceso de pérdida se aplica con un límite de retención M. ¿Cuál es la f.d. de la intensidad de siniestros a cargo del reasegurador para un siniestro que excede el límite

de retención? ¿Cuál es la varianza de la parte del reasegurador del importe acumulado de siniestros en el caso de Poisson mixta compuesta?

Ejercicio 3.4.2 Suponer que la f.d. de la intensidad de siniestros es exponencial $S(Z)=0,9.Z$ para $Z<1$, y $S(Z)=1-0,1.Z^3$ para $Z\geq 1$, donde la unidad monetaria es \$10.000. El tramo 3 xs 2 (en unidades de \$10.000) está cubierto por un contrato de reaseguro de exceso de pérdida limitado. Calcular la prima de riesgo de reaseguro P_{re} como un porcentaje de la prima de riesgo total P_{tot}. Suponer que como resultado de la inflación las intensidades de los siniestros se incrementan uniformemente en un 10%, pero la prima no cambia. ¿Cuál es la pérdida esperada del reasegurador como resultado de la inflación?

Ejercicio 3.4.3 Suponer que la f.d. de la intensidad de siniestros S es log-normal con una media $m=30$, un desvío estándar $\sigma=100$ y asimetría $\gamma=76$. El número esperado de siniestros es $n=100$. Entonces $P_{tot}=3.000$. Calcular la prima de riesgo de reaseguro de exceso de pérdida para límites de retención M = 50, 100, 400 y 2.000. Verificar que estas primas de riesgo sigan un comportamiento convexo.

Ejercicio 3.4.4 a) Probar que el momento segundo $a_2(\mathbf{Z}_{re,\,M})$ de la parte del reasegurador de un siniestro bajo un tratado de exceso de pérdida es

$$a_2(\mathbf{Z}_{re,\,M}) = a_2 - a_2(M) - 2\,.\,M\,.\,(m - m_M).$$

b) Demostrar la fórmula general (3.4.9).

c) Probar que, para el tramo A xs M, la fórmula correspondiente es

$$a_k(\mathbf{Z}_{re,(A\ xs\ M)}) = \sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}.(-M)^{k-i}.\left[a_i\left(M+A\right)-a_i\left(M\right)\right]$$

Ejercicio 3.4.5 Probar que la fórmula (3.4.14) para la varianza del importe acumulado de siniestros $\boldsymbol{X}_{re}$ del reasegurador es válida en el caso de Poisson mixta compuesta.

Ejercicio 3.4.6 Dar las fórmulas de cálculo para los momentos que se consignan en la Tabla 3.4.1. Obsérvese que los valores de M en la Tabla 3.4.1 son los mismos que los límites superiores de las clases en la Tabla 3.3.1 y recuérdese que la cola de la distribución de Pareto de S comienza en el punto 102,4.

Ejercicio 3.4.7 Probar que, si las intensidades $\mathbf{Z}_{tot}$ de siniestros tienen una distribución de Pareto(α,β,D), y $\alpha>1$, el factor de crecimiento para la prima de riesgo de reaseguro, definido en (3.4.11), es

$$r^*(M) = r^{\alpha}.\left(\frac{M+\beta}{M+r\cdot\beta}\right)^{\alpha-1} \qquad \text{para } M \geq r.D.$$

Ejercicio 3.4.8 Considerar la parte del reasegurador $\mathbf{Z}_{re}=\min(A,(\mathbf{Z}_{tot}M)^{+})$ de un siniestro $\mathbf{Z}_{tot}$ en el caso de un contrato de reaseguro de exceso de pérdida que está limitado al tramo A xs M. Probar que

$$\mathbf{Z}_{re} = \mathbf{Z}_{M+A} - \mathbf{Z}_M = (\mathbf{Z}_{tot} - M)^{+} - (\mathbf{Z}_{tot} - A)^{+}.$$

Ejercicio 3.4.9 Demostrar la fórmula

$$a_k(M) = a_k(0) + \int_0^M k.Z^{k-1}.(1-S(Z))dZ,$$

para los momentos absolutos de la intensidad de siniestros neta Z_M del cedente en un contrato de reaseguro de exceso de pérdida. (Generalmente $a_k(0)=0$.)

Ejercicio 3.4.10 Demostrar las fórmula

$$P_{re,(A\ xs\ M)} = n \cdot \int_M^{M+A} [1-S(Z)]\ dZ,$$

para la prima de riesgo del reasegurador, en un exceso de pérdida, para el tramo *A* xs *M*.

Ejercicio 3.4.11 Suponer que el tramo *A* xs *M* está cubierto por el reaseguro, pero que el cedente paga el resto de cada siniestro (incluyendo el posible exceso por encima del límite $M+A$). Probar que la prima de riesgo neta del cedente es igual a $P=n.[L(\infty)-L(M+A)+L(M)]$. Ilustrar las f.d. de la intensidad de siniestros total y neta en la misma figura.

Ejercicio 3.4.12 Suponiendo que la tasa de inflación de siniestros r-1 es positiva, considerar la parte de siniestros del reasegurador en el caso de un contrato de reaseguro de exceso de pérdida limitado que cubre un tramo *A* xs *M*.

a) Probar que la tasa de crecimiento (r'-1) de la prima de riesgo de reaseguro es no negativa.

b) ¿Bajo qué condiciones es $r'=1$?

c) Probar que $r'(A xs M)=r^{\alpha}$, *si* S tiene una distribución de Pareto(α,0,D) y $M \geq r.D$.

Ejercicio 3.4.13 Demostar la fórmula

$$a_k(Z_{re},(A\ xs\ M)) = \int_0^A k \cdot Z^{k-1} \cdot (1-S(M+Z))dZ,$$

para los momentos absolutos de la intensidad de siniestros del reasegurador Z_{re}, para el tramo *A* xs *M* en un contrato de reaseguro de exceso de pérdida limitado.

3.4.3 Reaseguro proporcional

(a) Aspectos generales. En el reaseguro proporcional cada siniestro se comparte entre el cedente y el(los) reasegurador(es) en una proporción que se especifica en el contrato. Una ventaja de este tipo de reaseguro es que las tasas de las primas de reaseguro son más fáciles de establecer que en el caso de los tratados de reaseguro no proporcionales. En realidad, dado que el reasegurador paga cierto porcentaje de cada siniestro, la prima total de reaseguro del riesgo es la misma proporción de la prima de riesgo.

Un inconveniente del reaseguro proporcional es que se comparten los siniestros pequeños entre el cedente y el reasegurador así como los grandes. Esto significa que el reaseguro proporcional generalmente reduce el volumen neto comercial del cedente mucho más que, por ejemplo, el reaseguro de exceso de pérdida, que cubre solamente los siniestros más grandes. Una solución parcial a este problema es el llamado reaseguro de excedente (sección 3.4.3(c) más adelante), que asigna diferentes proporciones cedidas a riesgos diferentes según su magnitud. Otra desventaja del reaseguro proporcional es que los contratos referentes a siniestros individualmente no brindan una cobertura satisfactoria contra las fluctuaciones en el número de siniestros.

(b) Reaseguro de cuota parte. En los reaseguros de cuota parte cualquier siniestro, sin considerar su magnitud, se divide entre el cedente y el reasegurador en una proporción predeterminada. Entonces la parte del cedente $\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{Z}_{ced}$ del importe total de siniestros $\boldsymbol{Z}_{tot}$ es de la forma

$$\boldsymbol{Z} = r\,.\boldsymbol{Z}_{tot}\ , \tag{3.4.16}$$

donde el valor de r ($0<r<1$) es fijo y la parte del reasegurador es simplemente $\boldsymbol{Z}_{re}=(1-r).\boldsymbol{Z}_{tot}$.

La f.d. S de la intensidad de siniestros, de la parte del cedente $\boldsymbol{Z}$ es

$$S_r(Z) = S(Z/r), \tag{3.4.17}$$

donde S es la f.d. de $\boldsymbol{Z}_{tot}$. La f.d. de la intensidad de siniestros a cargo del reasegurador es $S_{re,r}(Z) = S_{1-r}(Z) = S(Z/(1-r))$.

Ejercicio 3.4.14 ¿Cuáles son la media, el desvío estándar y la asimetría a cargo del cedente $\boldsymbol{Z} = r\boldsymbol{Z}_{tot}$ de un siniestro en un reaseguro de cuota parte, expresados en términos de las características correspondientes da la intensidad del siniestro total $\boldsymbol{Z}_{tot}$?

Ejercicio 3.4.15 Un asegurador con una f.d. S para la intensidad total de siniestros tiene en vigor una combinación de dos contratos de reaseguro:

1) Un convenio de cuota parte, según el cual el reasegurador paga una proporción r de cada siniestro y 2) un convenio por exceso de pérdida que cubre los negocios retenidos con una retención neta máxima M. ¿Cuál es la función de distribución de un siniestro para la retención neta del asegurador?

c) Los reaseguros de excedentes se aplican en clases de seguros en las que para cada unidad de riesgo existe un límite superior Q definido, tal que la intensidad de un siniestro que le ocurra a esa unidad de riesgo no puede exceder Q. En los seguros de propiedades la suma asegurada es apta para Q. Sin embargo, la llamada **pérdida máxima estimada** (PME) (ejemplo en la sección 3.3.2) generalmente es más conveniente como límite superior Q, y de aquí en adelante se supondrá que Q se elige igual a la PME para la unidad de riesgo. Nótese que la PME puede ser menor que el valor asegurado de la propiedad; en el caso de unidades grandes de riesgo especialmente puede ser muy improbable que toda la propiedad asegurada se pierda en un accidente.

La idea que subyace al reaseguro de excedentes es tener una cobertura proporcional de reaseguro, donde la parte del reasegurador depende de la unidad de riesgo de tal modo que cuanto más alto el límite superior Q para la unidad de riesgo, mayor será la parte del reasegurador.

Sea M el importe máximo que el cedente desea pagar con respecto a un siniestro. En un **contrato de reaseguro de excedentes** con una retención máxima M, aquellos riesgos que son inferiores a este límite, es decir $Q \le M$, se encuentran dentro de la retención neta del cedente. Para unidades más grandes de riesgo, donde pueden ocurrir siniestros mayores que M los siniestros se comparten según la proporción $r=r_M(Q)=M/Q$, de modo que el cedente es responsable por un importe $r\boldsymbol{Z}_{tot}$ de cada siniestro y el (los) reasegurador(es) paga(n) el resto, es decir $(1-r)\boldsymbol{Z}_{tot}$. Nótese la diferencia en comparación con el contrato de cuota parte (3.4.16); en un contrato de reaseguro de excedentes el cociente r depende de la unidad de riesgo a través del límite superior Q mientras que en el contrato de cuota parte es igual para todos los siniestros.

Cuanto mayor el límite superior Q de una unidad de riesgo, mayor será la proporción de cada siniestro que le ocurre a esa unidad de riesgo que es pagada por el reasegurador. En el caso de pérdida máxima, es decir cuando la intensidad del siniestro llega al límite superior Q de la unidad de riesgo, la porción del siniestro a cargo del cedente será igual a M, suponiendo que $Q \geq M$. Por otro lado, la cobertura del reaseguro también se extiende a siniestros parciales sobre riesgos grandes, porque r depende del límite predeterminado Q(PME) pero no de la intensidad del siniestro real.

Si consideramos un siniestro elegido al azar de los que ocurren en la cartera, entonces tanto la intensidad $\boldsymbol{Z}_{tot}$ de este siniestro como el respectivo límite superior $\boldsymbol{Q}$, según la unidad de riesgo en la que ocurrió el siniestro, la porción del cedente $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Z}_{ced}$ del siniestro neto de reaseguro entonces está dada por

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{r}_M \, . \, \boldsymbol{Z}_{tot} \, , \tag{3.4.18}$$

donde

$$\boldsymbol{r}_M = \boldsymbol{r}_M \, .(\boldsymbol{Q}) = \min(1, M/\boldsymbol{Q}) \tag{3.4.19}$$

toma valores positivos entre 0 y 1 y es una variable aleatoria dado que su valor depende del límite superior $\boldsymbol{Q}$ del riesgo.

Supongamos que las unidades de riesgo de la cartera se dividen en clases j, de acuerdo con sus PMEs (límites superiores) Q y sea $S(Z/Q_j)$ la f.d. de la intensidad de siniestros de la clase j. Al aplicar la fórmula (3.4.17) para cada clase j la f.d. S_M de la intensidad de siniestros netos (3.4.18) se obtiene de estas distribuciones de las clases como la media ponderada

$$S_M(Z) = \sum_j Prob\{\boldsymbol{Q} = Q_j\} \, . \, S(Z/r_M(Q_j) \,|\, Q_j). \tag{3.4.20}$$

Si el número esperado de siniestros estimado en cada clase j es n_j, entonces tenemos la estimación

$$Prob\{\boldsymbol{Q} = Q_j\} = \frac{n_j}{n} \quad (n = \Sigma n_j). \tag{3.4.21}$$

Utilizando esta estimación obtenemos la fórmula siguiente para la prima de riesgo neta del cedente:

$$P_M = n . m_M = \sum_j r_M(Q_j) . P(Q_j), \tag{3.4.22}$$

donde $P(Q_j) = n_j . m(Q_j) = n_j . \mathrm{E}(\boldsymbol{Z}_{tot} \,|\, Q_j)$ es la prima de riesgo (total) de la clase j. Las primas de riesgo $P(Q_j)$ determinan el **perfil PME** de la cartera, que indica cómo se distribuye el riesgo total entre las diferentes clases según la PME.

Si el importe acumulado de siniestros es una variable de Poisson mixta compuesta, entonces (Ejercicio 3.4.16) la varianza de la porción del cedente $\boldsymbol{X}_M$ del importe acumulado de siniestros netos de reaseguro es, conforme (3.2.14) y (3.2.31),

$$\sigma^2_{\boldsymbol{X}_M} = P^2{}_M . \sigma_q{}^2 + \Sigma_j (r_M(Q_j))^2 . n_j . a_{2,j}, \tag{3.4.23}$$

donde $a_{2,j}$ es el segundo momento absoluto de la f.d. de la intensidad de siniestros $S(Z|Q_j)$ de la clase j.

Fórmulas similares a (3.4.22) y (3.4.23) también son válidas para la porción $\boldsymbol{X}_{re,M}$ del reasegurador del importe acumulado de siniestros $\boldsymbol{X}$

(Ejercicio 3.4.17). Las distribuciones condicionales de la intensidad de siniestros $S(Z|Q_j)$ de cada clase j fueron necesarias más arriba porque las porciones del cedente y del reasegurador de un siniestro en un contrato de reaseguro de excedentes dependen de la PME Q del riesgo. La estimación de estas distribuciones en cada clase generalmente requiere la estimación de la f.d. bidimensional del vector aleatorio $(\boldsymbol{Z}_{tot},\boldsymbol{Q})$. Puede esperarse que exista una correlación positiva entre $\boldsymbol{Z}_{tot}$ y $\boldsymbol{Q}$, y que la f.d. $S(Z|Q)$ cambie de un modo uniforme como una función de la PME Q. Para obtener una estimación satisfactoria para las distribuciones de las clases es necesario un volumen relativamente grande de estadísticas de siniestros.

Dado que la porción del cedente de un siniestro está limitada por arriba por la retención máxima M, la f.d. S_M de la intensidad de siniestros del cedente en un contrato de reaseguro de excedentes es más fácil de calcular que las distribuciones de clases generalmente mucho más asimétricas $S(Z|Q_j)$. En realidad, si el perfil PME de la cartera ha permanecido sin cambios durante el período de observación, luego, la f.d. S_M de la porción del cedente del siniestro puede calcularse directamente utilizando el método alternativo de estimación siguiente, siempre que tanto la intensidad $\boldsymbol{Z}_{tot}$ como el límite superior Q de la correspondiente unidad de riesgo se registren para cada siniestro. Primero se debe fijar el límite M de retención y luego se debe calcular $\boldsymbol{Z}_{ced}=\boldsymbol{r}_M(Q).Z_{tot}$ para cada siniestro observado. Para obtener el valor estimado deseado de $S_M(Z)$, *se debe considerar* el número $N_M(Z)$ de esos siniestros que cumplen la condición $Z_{ced}\leq Z$. Si N es el número total de siniestros, tenemos la estimación

$$S_M(Z) = N_M(Z) \;/\; N. \qquad (3.4.24)$$

Una Tabla similar a la Tabla 3.3.1 puede calcularse para cualquier límite de retención M fijo, permitiendo que Z varíe sobre un conjunto conveniente de valores discretos.

Ejercicio 3.4.16 Probar las fórmulas (3.4.22) y (3.4.23) para la media y la varianza del importe acumulado $\boldsymbol{X}_M$ de siniestros netos del cedente en el caso de una cobertura de reaseguro de excedentes.

Ejercicio 3.4.17 Dar las fórmulas correspondientes a (3.4.22) y (3.4.23) para la porción $\boldsymbol{X}_{re}$ del reasegurador del importe acumulado de siniestros en el caso de una cobertura de reaseguro por de excedentes.

Ejercicio 3.4.18 Consideremos dos acuerdos alternativos de reaseguro, de excedentes y por exceso de pérdida, ambos con el mismo límite de retención M. Sean $Z_{re,SUR}$ y $Z_{re,XL}$ la parte del reasegurador de un siniestro de intensidad $\boldsymbol{Z}_{tot}$ en los contratos de excedentes y de exceso de pérdida respectivamente. Probar que

a) Si $Z_{re,SUR}=0$, entonces $Z_{re,XL}=0$

b) Si $Z_{re,SUR}>0$, entonces $Z_{re,SUR}\geq Z_{re,XL}$, donde la igualdad es válida sólo si $\boldsymbol{Z}_{tot}$ es igual al límite superior Q del riesgo.

3.4.4. Reaseguro de exceso de siniestralidad

(a) Reaseguro de exceso de siniestralidad, que también se denomina cobertura de exceso de pérdida acumulada, es un tipo de cobertura global(sección 3.4.1(a)) que brinda protección no sólo contra grandes siniestros individuales, sino también contra la fluctuación en el número de siniestros.

En el reaseguro de exceso de siniestralidad el reasegurador paga el exceso $\boldsymbol{X}_{re}=(\boldsymbol{X}_{tot}-M)^+$ sobre un importe límite acordado M del importe acumulado de siniestros $\boldsymbol{X}_{tot}$ del cedente acumulado durante un período de tiempo determinado, por ejemplo un año. La porción del cedente $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_{ced}=\boldsymbol{X}_{tot}-\boldsymbol{X}_{re}$ del siniestro, neto del reaseguro, es entonces

$$\boldsymbol{X} = \min(M,\boldsymbol{X}_{tot}). \qquad (3.4.25)$$

Obsérvese la analogía formal entre el reaseguro de exceso de siniestralidad y el de exceso de pérdida. En el reaseguro de exceso de siniestralidad el importe acumulado de siniestros se comparte entre el cedente y el reasegurador exactamente tal como se comparte un siniestro individual en el caso del reaseguro de exceso de pérdida. Debido a esta analogía, las fórmulas de la sección 3.4.2 correspondientes a un siniestro pueden aplicarse al reaseguro de exceso de siniestralidad. Por ejemplo la prima de riesgo del cedente P=E($\boldsymbol{X}$) y la prima de riesgo del reasegurador P_{re}=E($\boldsymbol{X}_{tot}$)-E($\boldsymbol{X}$) pueden obtenerse ((3.4.5), (3.4.6) y Ejercicio 3.3.12) simplemente a través de las fórmulas

$$P_{ced} = L_F(M) = \int_{-\infty}^{M} XdF(X) + M.(1-F(M))$$

$$P_{re} = L_F(\infty)-L_F(M) = \int_M^{\infty} [1-F(X)]dX, \qquad (3.4.26)$$

donde F es la f.d. del importe acumulado de siniestros $\boldsymbol{X}_{tot}$ y L_F es la función correspondiente del valor esperado acotado. Más generalmente, si solamente un tramo limitado. A xs M, del importe acumulado de siniestros está cubierto por un contrato de exceso de siniestralidad, entonces la prima de riesgo del reaseguro, por ejemplo, se obtiene (comp.(3.4.12)) mediante la fórmula $P_{re}(A\text{xs}M) = L_F(M+A)-L_F(M) = P_{re,M} - P_{re,M+A}$. Los momentos superiores de $\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{X}_{re}$ pueden obtenerse de una manera similar a partir de los resultados de la sección 3.4.2.

(b) Un ejemplo. Supongamos que la cartera considerada es grande. Si la asimetría γ de la variable del importe acumulado de siniestros $\boldsymbol{X}_{tot}$ es tan pequeña que satisface la condición $0 \le \gamma \le 1$, entonces la llamada aproximación "PN", que se presentará más adelante en la sección 4.2, generalmente provee una aproximación bastante buena para la cola de la distribución del importe acumulado de siniestros. (La aproximación NP es

una aproximación normal modificada, que considera la asimetría de la distribución que será aproximada; para γ=0 la aproximación NP se reduce a la bien conocida aproximación normal.)

Sin entrar en detalles ahora nos referiremos a la sección 4.2.4 y al Ejercicio 4.2.1, y aquí sólo daremos el resultado. Tenemos

$$P_{re} = \sigma.\left(1+\frac{\gamma}{6}\cdot\gamma_M\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-(y_M^2/2)} - (M-P_{tot})\cdot(1-N(y_M)), \qquad (3.4.27)$$

en el caso en que $M>P_{tot}$ donde σ y γ son el desvío estándar y la asimetría del importe acumulado de siniestros $\boldsymbol{X}_{tot}$, M es el límite de retención del exceso de siniestralidad y y_M es la mayor raíz y de la ecuación

$$\frac{M-P_{tot}}{\sigma} = y + \frac{\gamma}{6}\cdot\left(y^2-1\right) \qquad (3.4.28)$$

En el caso especial en que γ=0, la fórmula de la prima de riesgo (3.4.27) puede obtenerse (Ejercicio 3.4.19) utilizando la aproximación normal.

(c) Hipersensibilidad de las primas de riesgo en el reaseguro de exceso de siniestralidad. Las primas de riesgo de reaseguros de exceso de siniestralidad resultan ser muy sensibles a los cambios en la f.d. F del importe acumulado de siniestros $\boldsymbol{X}_{tot}$.

Supongamos que el importe acumulado de siniestros $\boldsymbol{X}_{tot}$ se multiplica por un factor r>**1**, debido a la inflación, por ejemplo. Si el límite de retención M permanece sin cambios, entonces el resultado de la sección 3.4.2(d) aplicado al importe acumulado de siniestros $\boldsymbol{X}_{tot}$ muestra que la prima de riesgo de reaseguro $P_{re,M}$ se incrementa en un factor mayor

$r^{\cdot}(M)>r$. Como se observó en la sección 3.4.2(d), cuanto más leve sea la cola de la distribución, mayor la diferencia entre $r^{\cdot}(M)$ y r. Dado que la asimetría de la variable del importe acumulado de siniestros generalmente es mucho menor que la asimetría de la intensidad de un siniestro, puede esperarse que el cociente de sensibilidad $r^{\cdot}/r$ sea muy grande para las primas de riesgo de reaseguro de exceso de siniestralidad. De hecho, la Tabla 3.4.4 muestra que la prima de riesgo de reaseguro puede verse considerablemente afectada por la inflación.

Figura 3.4.4 *La tasa de crecimiento para la prima de riesgo P_{re} del reaseguro de exceso de siniestralidad en el caso de una inflación del 10%.*

Asimetría	γ=0	γ=0,2	γ=0,5	γ=1,0
Crecimiento de P_{re}	700%	570%	440%	320%

Supuestos: $E(X_{tot})$=100, $\sigma_{X_{tot}}$ = 10 y el límite de retención del exceso de siniestralidad M=115.

Factor de tasa de inflación r=1,1 (como en la Tabla 3.4.2), tasa de crecimiento $P_{re} = r^{\cdot} - 1$.

Se utilizó la fórmula de aproximación (3.4.27) para los cálculos.

Ejercicio 3.4.19 Obtener una fórmula general para la prima de riesgo P_{re} de exceso de siniestralidad para un importe acumulado de siniestros con distribución normal. Pueden seguirse los siguientes pasos para la deducción:

a) Probar que la función del valor esperado acotado de la f.d. normal estandarizada N es

$$L_N(M) = M.(1 - N(M)) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-M^2/2}.$$

b) Dar una fórmula para la función L del valor esperado acotado de la distribución normal $N(\mu,\sigma^2)$ en términos de L_N.

c) Escribir la fórmula solicitada para la prima de riesgo de exceso de siniestralidad en términos de la función L dada más arriba.

d) Verificar que el resultado sea el mismo que (3.4.27) para γ=0.

Ejercicio 3.4.20 a)Suponer que X_{tot} tiene una distribución normal con un valor medio μ=100 y un desvío estándar σ=10. Calcular la prima de riesgo de exceso de siniestralidad del reasegurador $P_{re}(M)$ para M=115.

b) Luego suponer que la variable X_{tot} dada en a) se multiplica por el factor 1,1, lo que indica un incremento del 10% en los importes de los siniestros. Recalcular la prima de exceso de siniestralidad $P_{re}(M)$ en este caso sin cambiar el límite de exceso de siniestralidad en M=115.