CLASE 7

Esperanzas condicionadas

↳ A algunas se les puede calcular el teorema de Ito y a otras no.

Ejemplo 1

$E[W_T / F_t]$

↳ Cuánto espero que valga W_t condicionada a la información que tengo en t

$E[W_T / F_t] = W_t$ → Dado que $\Delta W_t \sim N(0;\sigma^2)$, la variación tiene media cero ⇒ mañana tiene que valer lo mismo que vale hoy.

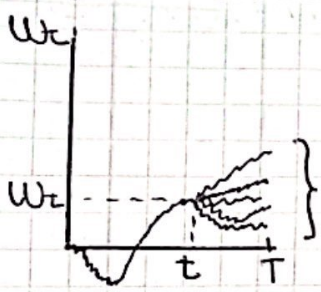
En términos matemáticos se puede escribir como:

$$E[W_T / F_t] = E[W_t + W_T - W_t / F_t]$$

$$= E[W_t / F_T] + E[\underbrace{W_T - W_t}_{\Delta W_t \text{ con } \mu=0} / F_t]$$

$$= W_t + 0.$$

⇒ Separo lo conocido de lo que resta conocerse, aplico las esperanzas condicionadas separadamente



} Un promedio de cada una de las proyecciones me termina dando W_t

Esperanza condicionada } Valor al que convergen en promedio las simulaciones de la VA condicionándolas a lo ocurrido hasta t.

Siempre que se pueda se buscará el valor de la esperanza analíticamente, sino se hará con las simulaciones.

Otro ejemplo Ejemplo 2

$$E[W_T^2 / F_t] = E[[W_t + (W_T - W_t)]^2 / F_t]$$

$$E[[W_t^2 + 2W_t(W_T - W_t) + (W_T - W_t)^2] / F_t]$$

$$= E[W_t^2 / F_t] + 2E[W_t(W_T - W_t) / F_t] + E[(W_T - W_t)^2 / F_t]$$

$$= W_t^2 + 2W_t\, E[\Delta W_T] + E[(W_T - W_t)^2 - \overset{\mu}{0} / F_t] \to \sigma^2$$

$$= W_t^2 + 0 + (T - t)$$

$E(W_T^2 | F_t) = W_t^2 + (T-t)$ → se agrega un término porque hay una cierta asimetría entre las variaciones negativas y positivas (que pesan más)

	W_T	W_T^2
	0	0
10	10	100
	20	400

→ cuando me muevo para abajo, bajo 100 unidades y cuando me muevo para arriba, me muevo 300. Además, el valor mínimo es cero. Las variaciones para abajo no restan tanto como lo que suben las variaciones para arriba.

Ejemplo 3

$E[S_T | F_t]$ con $S_T = S_0 e^{\mu t + \sigma W_t}$

separo lo conocido de lo que resta por conocer

$S_T = S_0 e^{\mu T + \sigma W_T}$ Reemplazo T por t

$S_T = S_0 e^{\mu t + \sigma W_t + \mu(T-t) + \sigma(W_T - W_t)}$

$= S_0 e^{\mu t + \sigma W_t} e^{\mu(T-t) + \sigma(W_T - W_t)}$

$= S_t e^{\mu(T-t) + \sigma(W_T - W_t)}$ → Aleatoriedad proporcional al tiempo que falta.

Le calculo la esperanza

$E[S_T | F_t] = E[S_t e^{\overbrace{\mu(T-t) + \sigma(W_T - W_t)}^{A}} | F_t]$

$= S_t E[e^{\mu(T-t) + \sigma(W_T - W_t)} | F_t]$ e^{VA} con $VA \sim N(\overbrace{\mu(T-t)}^{A}; \underbrace{\sigma^2(T-t)}_{b^2})$

Se puede demostrar que:

$E[e^x]$ con $x \sim N(a; b^2) \Rightarrow E[e^x] = e^{a + \frac{1}{2}b^2}$

$\Rightarrow E[S_T | F_t] = S_t e^{\mu(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}$

- Si $\Delta W_T \to +\infty \Rightarrow S_T \to \infty$
  - $\Delta W_T \to -\infty \Rightarrow S_T \to 0$
  - $\Delta W_T = 0 \Rightarrow S_T = S_t e^{\mu(T-t)}$ ✩

} Los valores más bajos están acotados en 0, pero puede ir hasta ∞. En promedio me da algo más alto que ✩ ⇒ aparece un término más.

Ejemplo 4

$E[\cos(W_T) \mid F_t] = E[\cos(W_t + (W_T - W_t)) \mid F_t]$

Como no lo puedo resolver analíticamente, lo tengo que simular.

$$= E[\cos(W_t + \overset{\sim N(0;T-t)}{\Delta W_{T-t}}) \mid F_t]$$

Más fácil es calcularla a partir de su definición. Tomo todos los valores que puede llegar a tomar la VA, lo multiplico por sus probabilidades e integro.

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cos(W_t + \Delta W_{T-t})}_{\text{Lo multiplico por el valor de la VA}} \underbrace{\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(\Delta W_{T-t} - 0)^2}{T-t}}}_{\text{Función de densidad } \Delta W_{T-t}} d(\Delta W_{T-t})}_{\text{Probabilidad de que la variación del proceso browniano entre } t \text{ y } T \text{ tome un valor entre } \Delta W_{T-t} \text{ y } \Delta W_{T-t} + d(\Delta W_{T-t})}$$

Ejemplo 5

$E[e^{M_T} m_t \mid F_t] \rightarrow$ No la puedo resolver de manera analítica ni por integrales porque no conozco las funciones de densidad

$\downarrow$

Tengo que simularla y obtener el promedio

La cantidad de veces que tengo que simular depende de la varianza y de cuánto yo quiera que valga la varianza.

Propiedades de las esperanzas condicionadas

1. $E[X/F_t]$ = proceso estocástico. (sucesión de VA)
   ↓
   una variable aleatoria distinta para cada t en donde calcule la esperanza condicionada.

2. $E[X/F_T] = X$

3. $E[E[X/F_t]/F_t] = E[X/F_\tau]$ → La esperanza de lo que voy a esperar es lo mismo que lo que espero hoy.

   $H_t = E[X/F_t] \Rightarrow \underline{E[H_t/F_s] = H_s}$

en el ejemplo 2: $E(W_T^2/F_t) = W_t^2 + (T-t)$

$$H_t = W_t^2 + (T-t)$$

$$E(H_t/F_s) = E(W_s^2/F_s) + E[(T-t)/F_s]$$

$$E(H_t/F_s) = W_s^2 + (\cancel{t}-s) + (T-\cancel{t})$$

$$= W_s^2 + (T-s)$$

$$= H_s$$

A un proceso que cumple con esta condición se lo llama Martingala → espero que no varíe
↓
Esto tiene consecuencia con el teorema de Ito.

- en el ejemplo 2:

$$\Delta H_t = \left[F_t' + \frac{1}{2} F_{ww}''\right]\Delta t + F_w' \Delta W_t \quad \text{con } S_t = W_t^2 + (T-t)$$

$$= \left[-1 + \frac{1}{2} \cdot 2\right]\Delta t + 2W_t \Delta W_t$$

$$\Delta H_t = 0\,\Delta t + 2W_t\,\Delta W_t$$

→ Me desaparece el término de tendencia (yo se que el proceso mañana va a valer, en promedio, lo mismo que hoy)
→ El proceso H, en promedio, no varía $\Rightarrow \Delta H_t = 0$.

$E[\Delta W_t / F_t] = 0$. Necesito que lo que acompañe a Δt sea 0 también, para que $E[\Delta H_t] = 0$.

Teorema de la representación de Martingala

Para los procesos que no sabemos cómo aplicarle el teorema de Ito.
Para los martingalas

$$\boxed{\Delta H_t \simeq 0\,\Delta t + \delta_t \Delta W_t}$$

Esto nos termina asegurando que cualquier derivado se puede replicar.

CLASE 8
Valuación de derivados

Si tenemos un mercado formado por un activo $S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma W_t}$ y además un bono $B_t = e^{rt}$ y emitimos un derivado con pay off X (puede ser cualquier algoritmo que tome la trayectoria del activo y la transforme en un flujo de fondos)
$\Rightarrow$ el valor del derivado en ausencia de arbitraje tiene que ser igual a:

$$V_t = B_t\, E_Q[X B_t^{-1} \mid F_t] \quad (1)$$

Para entender qué es la Q nos inventamos un nuevo proceso

$$\boxed{\tilde{W}_t = W_t + \left(\frac{\mu - r + 1/2\,\sigma^2}{\sigma}\right) t}$$

$\tilde{W}_t$ es un proceso browniano más un término
↓
$\tilde{W}_t$ no es un proceso browniano

$$\Delta \tilde{W}_t = \Delta W_t + \underbrace{\left(\frac{\mu - r + 1/2\,\sigma^2}{\sigma}\right)}_{A} \Delta t$$

$\Delta \tilde{W}_t \sim N(A;\Delta t)$ (no cumple con la propiedad de los procesos brownianos

Despejo W_t de $\tilde{W}_t$ y reemplazo en S_t

$$\boxed{S_t = S_0\, e^{(r - 1/2\,\sigma^2)t + \sigma \tilde{W}_t}}$$

μ no es cualquier cosa
$\mu = r - 1/2\,\sigma^2$

La Q significa suponer que $\tilde{W}_t$ es un proceso browniano, y W_t no.
Invento unas probabilidades distintas de las originales que hacen que (1) me dé el valor del derivado en ausencia de arbitraje.

NOTA

Ejemplio

$X = S_T^2$

$$V_t = e^{rt} E_Q[S_T^2 e^{-rT} | F_t]$$

$$= \underbrace{e^{-r(T-t)}}_{\text{Factor de actualización}} E_Q[S_T^2 | F_t]$$

$$S_T = S_0 e^{(r - 1/2\sigma^2)T + \sigma \tilde{W}_T}$$ } separo lo conocido de lo que resta conocer

$$= \underbrace{S_0 e^{(r-1/2\sigma^2)t + \sigma \tilde{W}_t}}_{S_t \text{ (probabilidad P)}} e^{(r - 1/2\sigma^2)(T-t) + \sigma(\tilde{W}_T - \tilde{W}_t)}$$

Q: $S_T = S_t e^{(r-1/2\sigma^2)(T-t) + \sigma(\tilde{W}_T - \tilde{W}_t)}$

$$\Rightarrow V_t = e^{-r(T-t)} E_Q[S_t^2 e^{2(r-1/2\sigma^2)(T-t) + 2\sigma(\tilde{W}_T - \tilde{W}_t)} | F_t]$$

$$= e^{-r(T-t)} S_t^2 E_Q[e^{\underbrace{\overbrace{2(r-1/2\sigma^2)(T-t)}^{A} + 2\sigma(\tilde{W}_T - \tilde{W}_t)}_{\sim N(A;\sqrt{4\sigma^2(T-t)})}} | F_t]$$

recordando $E[e^x] = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$) Aplico probabilidades Q

$$= e^{-r(T-t)} S_t^2 e^{2(r-1/2\sigma^2)(T-t) + \frac{1}{2} 4\sigma^2(\tilde{W}_T - \tilde{W}_t)}$$

Operando

$$\boxed{V_t = S_t^2 e^{(r+\sigma^2)(T-t)}}$$

↓

Fórmula que depende de los parámetros del modelo (r y σ), t y T. ⇒ depende de todas cosas que conocemos al momento de valuación

Independiente de μ

$$\Phi_t = 2S_t e^{(r+\sigma^2)(T-t)}$$ → explicación atrás

Ejemplio

$X = \ln(S_T)$

$$V_t = e^{-r(T-t)} E_Q[\ln(S_t e^{(r-1/2\sigma^2)(T-t)+\sigma(\tilde{W}_T-\tilde{W}_t)}) | F_t]$$

$$= e^{-r(T-t)} \{ E_Q[\underbrace{\ln(S_t) | F_t}_{\ln(S_t)}] + E_Q[(r-1/2\sigma^2)(T-t) | F_t] + \underbrace{E_Q[\sigma(\tilde{W}_T - \tilde{W}_t) | F_t]}_{=0} \}$$

$=0$ porque suponemos que, por probabilidades Q, W_t es un proceso browniano y tiene media cero

$$\boxed{V_t = e^{-r(T-t)} [\ln(S_t) + (r - 1/2\sigma^2)(T-t)]}$$

Se demuestra (ver apunte) que si el valor nos queda en función del tiempo y del activo que

$$\text{Si } V_t = F(t; S_t) \Rightarrow \phi_t = \frac{\partial F}{\partial S}$$

$$\Rightarrow V_t = \phi_t S_t + \psi_t B_t \Rightarrow \psi_t = \frac{V_t - \phi_t S_t}{B_t}$$

$$\Rightarrow \phi_t = \frac{e^{-r(T-t)}}{S_t}$$

Simulando el modelo en excel $X = S_T^2$

DATOS $S_0 = 10$; $T = 10$; $r = 0{,}001$; $n = 100$; $\mu = 0{,}008$ $\sigma = 0{,}005$

$\Delta t = \frac{T}{n} = 0{,}1$

t	ΔW_t	W_t	$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma W_t}$	$B_t = e^{rt}$	ϕ_t	ψ_t	V_t	Error	Error acumulado
0		0	10	1	C	D		0	0
0,1	$\sim N(0,\sqrt{\Delta t})$	0,12	A	B	E	F		0,002	$0{,}002\, e^{r\Delta t}$
0,2	-0,10	0,02						-0,001	
10		2,31					$\simeq S_T^2$		$\simeq 0$

El error es cuanto me dan por vender la cartera vieja ($C \times A + D \times B$) menos la cartera nueva ($E \times A + F \times B$)

El error acumulado se capitaliza por $e^{r\Delta t}$

CLASE 9

caso genérico: $X = F(S_T)$

con $V_t = B_t \, E_Q [X B_T^{-1} / F_t]$

$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma W_t}$ $\quad B_t = e^{rt}$

$S_t = S_0 e^{(r - 1/2\sigma^2)t + \sigma \tilde{W}_t}$

$S_T = S_t e^{(r - 1/2\sigma^2)(T-t) + \sigma(\tilde{W}_T - \tilde{W}_t)}$

$\Rightarrow V_t = e^{-r(T-t)} E_Q [F(S_t e^{(r-1/2\sigma^2)(T-t) + \sigma(\tilde{W}_T - \tilde{W}_t)}) / F_t]$

No puedo aplicar las propiedades de esperanza porque depende de la función que a priori no conozco.

Multiplico la VA por la función de densidad

$$V_t = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} F(S_t e^{(r-1/2\sigma^2)(T-t) + \sigma(\Delta\tilde{W}_{T-t})}) \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-1/2 \frac{(\Delta\tilde{W}_{T-t} - 0)^2}{T-t}} d(\Delta\tilde{W}_{T-t})$$

→ Probabilidad de que me de un valor muy cercano a $\Delta\tilde{W}_{T-t}$

Si $V_t = G(S_t; t) \Rightarrow \phi_t$ lo aproximo numéricamente según los valores de S_t y t

↳ porque no puedo derivar, no conozco la función

ej: $t = 0{,}1$
$S_0 = 10.$

$$\boxed{\phi_t = \frac{G(10{,}1; 0) - G(10; 0)}{0{,}1}}$$

⇒ Podemos valuar cualquier derivado cuyo pay-off depende del valor que tome S_t al momento del vencimiento del mismo.
Quedan excluidos los derivados que dependen de la trayectoria del activo y no del mismo valor.

Ejemplo de un call $X=(S_T-K)^+$

$$V_t=e^{-r(T-t)}E_Q[F(S_t e^{(r-1/2\sigma^2)(T-t)+\sigma(\tilde{W}_T-\tilde{W}_t)})|F_t]$$

$$=e^{-r(T-t)}\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{(S_t e^{(r-1/2\sigma^2)(T-t)+\sigma\Delta\tilde{W}_{T-t}}}_{A}-K)^+\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(\Delta\tilde{W}_{T-t}-0)^2}{T-t}}d\Delta\tilde{W}_{T-t}$$

Va a haber un valor para el cual $A>K$, haciendo que la integral deje de valer cero. $\Rightarrow$ Empiezo a integrar desde ahí

Cuánto tiene que valer $\Delta\tilde{W}_{T-t}$ para que: $A=K$ $\Rightarrow$ encuentro $\Delta\tilde{W}^*_{T-t}$

$$\Delta\tilde{W}^*_{T-t}=\frac{\ln(K/S_t)-(r-1/2\sigma^2)(T-t)}{\sigma}$$

$$\Rightarrow V_t=e^{-r(T-t)}\int_{\Delta\tilde{W}^*_{T-t}}^{\infty}(S_t e^{(r-1/2\sigma^2)(T-t)+\sigma\Delta\tilde{W}_{T-t}}-K)\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(\Delta\tilde{W}_{T-t}-0)^2}{T-t}}d\Delta\tilde{W}_{T-t}$$

Al igual que en el tiempo discreto $E_Q[\Delta Z_t|F_t]=0$ $\Rightarrow$ no esperamos que haya variación entre el proceso Z de hoy a mañana con las probabilidades Q

En el tiempo continuo, se puede mostrar que $E_Q[Z_t|F_t]=Z_t$

con probabilidades R: $V_t=S_t E_R[XS_T^{-1}|F_t]$

Nos inventamos un proceso

$$\bar{W}_t=W_t+\frac{\mu-r+1/2\sigma^2}{\sigma}t$$

$\bar{W}_t$ no es un proceso browniano. Su media es igual a la constante

$$\Delta\bar{W}_t=\Delta W_t+\frac{\mu-r+1/2\sigma^2}{\sigma}\Delta t$$

$$\Rightarrow S_t=S_0 e^{(r-1/2\sigma^2)+\sigma\bar{W}_t}$$

Probabilidades R: suponer que $\bar{W}_t$ es un proceso browniano.

Demostramos que con las probabilidades Q y las probabilidades R llegamos a lo mismo.

Mismo ejemplo. $X=S_T^2$

$$V_t=S_t\, E_R[S_T^2\, \cancel{S_T}^{-1}|F_t]$$

$$=S_t\, E_R[S_T|F_t]$$

NOTA

$$S_T = S_0 e^{(r+1/2\sigma^2)T + \sigma \bar{W}_T}$$

$$= \underbrace{S_0 e^{(r+1/2\sigma^2)t + \sigma \bar{W}_t}}_{S_t} e^{(r+1/2\sigma^2)(T-t) + \sigma(\bar{W}_T - \bar{W}_t)}$$

$$S_T = S_t e^{(r+1/2\sigma^2)(T-t) + \sigma(\bar{W}_T - \bar{W}_t)}$$? Diferencia con Q

$$V_t = S_t E_R[S_t e^{\underbrace{(r+1/2\sigma^2)(T-t)}_{\mu} + \sigma(\bar{W}_T - \bar{W}_t)} | F_t]$$

$$= S_t^2 (\dots) \qquad E[e^X] = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$$

$$V_t = S_t^2 e^{(r+1/2\sigma^2)(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}$$

$$V_t = S_t^2 e^{(r+\sigma^2)(T-t)} \qquad = \text{prob } Q \checkmark$$

En discreto: $E_R[\Delta Y_t | F_t] = 0$ con $Y = \frac{B}{S_t}$

En continuo $E_R[Y_T | F_t] = E_R[e^{rT} / S_t e^{(r+1/2\sigma^2)(T-t) + \sigma(\bar{W}_T - \bar{W}_t)} | F_t]$

$$\Rightarrow E_R[Y_T | F_t] = S_t^{-1} e^{rt} E_R[e^{r(T-t)} \cancel{e}^{-(r+1/2\sigma^2)(T-t) - \sigma(\bar{W}_T - \bar{W}_t)} | F_t]$$

$$= S_t^{-1} e^{rt} E_R[e^{\underbrace{-1/2\sigma^2(T-t)}_{\mu} - \sigma(\bar{W}_T - \bar{W}_t)} | F_t]$$

$$= e^{rt} S_t^{-1} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}$$

$$= Y_t \checkmark$$

Ejemplo call

$X = (S_T - K)\,1_{S_T > K}$

$$X = \underbrace{S_T \cdot 1_{S_T>K}}_{X_1} - \underbrace{K \cdot 1_{S_T>K}}_{X_2}$$

X_1 me conviene valuarlo con probabilidades R

$$V_t^1 = S_t\, E_R\left[\cancel{S_T}\, 1_{S_T>K}\, \cancel{S_T^{-1}} \mid F_t\right]$$

$$= S_t\, R\left[S_T > K \mid F_t\right]$$

$$S_t\, e^{(r+1/2\sigma^2)(T-t)+\sigma\underbrace{(\bar{W}_T - W_t)}_{\Delta\bar{W}_{T-t}}} > K$$

Despejo $\Delta\bar{W}_{T-t}$ $\quad \Delta\bar{W}_{T-t} > \dfrac{\ln(K/S_t) - (r+1/2\sigma^2)(T-t)}{\sigma}$

Aplico probabilidades R diciendo que $\Delta\bar{W}_{T-t} \sim N(0;T-t)$

Divido ambos términos por el desvío

$$\underbrace{\frac{\Delta\bar{W}_{T-t}}{\sqrt{T-t}}}_{\sim N(0;1)} > \frac{\ln(K/S_t) - (r+1/2\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Al ser una probabilidad simétrica

$$\frac{\Delta\bar{W}_{T-t}}{\sqrt{T-t}} < \frac{-\ln(K/S_t) + (r+1/2\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$\frac{\Delta\bar{W}_{T-t}}{\sqrt{T-t}} > \frac{\ln(S_t/K) + (r+1/2\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \sim N(0;1)$$

$$\Rightarrow \boxed{V_t^1 = S_t\, N\left[\frac{\ln(S_t/K) + (r+1/2\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right]}$$

Distribución acumulada de $\sim N(0;1)$ hasta ese valor

NOTA

X_2 me conviene valuarlo con las probabilidades Q

$$V_t^2 = e^{-r(T-t)} E_Q[K 1_{S_T>K} | F_t]$$
$$= K e^{-r(T-t)} Q[S_T > K | F_t]$$

$$S_t e^{(r-1/2\sigma^2)(T-t)+\sigma(\bar{W}_T - W_t)} > K$$

Despejo $\Delta\bar{W}_{T-t}$

$$\Delta\bar{W}_{T-t} > \frac{\ln(K/S_T) - (r-1/2\sigma^2)(T-t)}{\sigma}$$

$$\Delta\bar{W}_{T-t} \sim N(0; T-t) \rightarrow \text{probabilidad } Q$$

$$\frac{\Delta\bar{W}_{T-t}}{\sqrt{T-t}} < \frac{\ln(S_T/K) + (r-1/2\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$\boxed{V_t^2 = K e^{-r(T-t)} N\left[\frac{\ln(S_T/K) + (r-1/2\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right]}$$

$$\Rightarrow \boxed{V = V_t^1 - V_t^2} \quad \text{call}$$

Para un PUT:

$$V_t = K e^{-r(T-t)} \left[1 - N\left[\frac{\ln(S_t/K) + (r-1/2\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right]\right]$$
$$- S_t \left[1 - N\left[\frac{\ln(S_T/K) + (r+1/2\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right]\right]$$

Para un forward = call - PUT

Al ser probabilidades complementarias, dan 1

$$\boxed{F = S_t - K e^{-r(T-t)}}$$

Se puede probar que $\Phi = N[\,]$

$\downarrow$

ver apunte

NOTA

$\frac{\partial V}{\partial S} = \emptyset = \Delta$ $\frac{\partial V}{\partial r} = \rho$ $\frac{\partial^2 V}{\partial^2 S} = \gamma$

$\frac{\partial V}{\partial (T-t)} = \theta$ $\frac{\partial V}{\partial \sigma} = \nu$ (vega)

CLASE 10

TEOREMA DE GIRSANOV

Se demuestra que cualquier derivado se puede arbitrar

El teorema acumula las probabilidades P y Q

Tenemos un proceso browniano $\tilde{W}_t = W_t + \theta t$ } SUPUESTO P

y nos inventamos otro. $\tilde{W}_t - \theta t = W_t$ } SUPUESTO Q

SUPUESTO P = W_t es un proceso browniano $\Rightarrow \tilde{W}_t$ no lo es

SUPUESTO Q: $\tilde{W}_t$ es un proceso browniano. W_t es un proceso que tiene tendencia $-\theta$

Vamos a estudiar cómo se distribuye W_t en ambos supuestos.

SUPUESTO P: W_t proceso browniano

$W_T \sim N(0;T)$

condicionando W_t a la información que hay en t

$W_T = \underset{cte}{W_t} + \underset{VA \sim N(0;T-t)}{(W_T - W_t)} \Rightarrow W_T \sim N(W_t; T-t)$

SUPUESTO Q: $W_T = \tilde{W}_T - \theta T$

$W_T \sim N(-\theta T; T)$

$W_T = W_t + (W_T - W_t)$ condicionado

$= W_t - \theta(T-t) + (\tilde{W}_T - \tilde{W}_t)$

$W_T \sim N(W_t - \theta(T-t); T-t)$

$W_T - W_t \sim N(-\theta(T-t); T-t)$

Comparamos las distribuciones

$$P(a<W_T<b)=\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\, e^{-\frac{1}{2T}(W_T)^2}\, dW_T$$

$$Q(a<W_T<b)=\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{(W_T-(-\theta T))^2}{T}}\, dW_T$$

Desarrollo el cuadrado de binomio

$$=\int_a^b e^{-W_T\theta-\frac{1}{2}\theta^2 T}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{W_T^2}{2T}}\, dW_T$$

Reemplazo límites. La función vale 0 por fuera de $[a;b]$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{1_{(a;b)}\, e^{-\theta W_T-\frac{1}{2}\theta^2 T}}_{\text{valor VA}}\;\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{W_T^2}{T}}\, dW_T}_{P(a<W_T<b)}$$

$\int$ valor VA . P = Esperanza

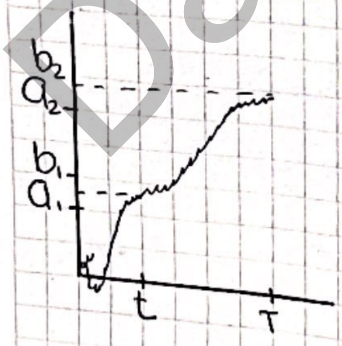
$$\boxed{Q(a<W_T<b)=E_P\left(1_{(a,b)}\, e^{-\theta W_T-\frac{1}{2}\theta^2 T}\right)}$$

↳ La probabilidad Q se puede calcular como la esperanza con las probabilidades P de la VA.

En dos dimensiones

$$P(a_1<W_t<b_1\,;\,a_2<W_T<b_2)$$

$$=\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\, e^{-\frac{W_t^2}{2t}}\;\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}}\, e^{-\frac{1(W_T-W_t)}{2(T-t)}}\, dW_t\, dW_T$$



- Función de densidad original $W_t \sim N(0;t)$
- Función de densidad de W_T condicionada a que en t, W tomó el valor W_t $W_T \sim N(W_t;T-t)$

La multiplicación de ambas probabilidades (función de densidad $\times d$) me da la probabilidad conjunta

↳ Probabilidad de que el proceso browniano en t termine valiendo W_t aprox. y que en T, W_T

$$Q(a_1 < W_t < b_1 ; a_2 < W_T < b_2) =$$

$$= \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{\frac{(W_t+\theta t)^2}{2t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi (T-t)}} e^{\frac{(W_T - W_t + \theta(T-t))^2}{2(T-t)}} dW_t dW_T$$

Bajo el supuesto Q: $W_t \sim N(-\theta t ; t)$

$W_T \sim N(W_t - \theta(T-t) ; T-t)$

Desarrollo el cuadrado del binomio.

$$Q(\ldots) = \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} \underbrace{e^{-\theta W_T - \frac{1}{2}\theta^2 T}}_{VA} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{1}{2}\frac{W_t^2}{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi (T-t)}} e^{-\frac{(W_T - W_t)^2}{2t}}}_{\text{Funciones de distribución}} dW_t dW_T$$

Reemplazo los límites:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{1_{(a_1<W_t<b_1 ; a_2<W_T<b_2)} e^{-\theta W_T - \frac{1}{2}\theta^2 T}}_{\text{VA que depende de } W_t \text{ y } W_T} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{\frac{W_t^2}{2t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi (T-t)}} e^{\frac{(W_T - W_t)^2}{2t}}}_{\text{Funciones de densidad}} dW_t dW_T$$

$$\Rightarrow Q(a_1 < W_t < b_1 ; a_2 < W_T < b_2) = E_P\left[1_{(a_1<W_t<b_1 ; a_2<W_T<b_2)} e^{-\theta W_T - \frac{1}{2}\theta^2 T}\right]$$

Se puede replicar para n dimensiones

$$Q(a_1 < W_{t_1} < b_1 ; \ldots ; a_n < W_T < b_n) = E_P\left[1_{(\,)} e^{-\theta W_T - \frac{1}{2}\theta^2 T}\right]$$

Llego al mismo resultado.

Aplicaciones

Esta relación se cumple para cualquier tipo de probabilidad que quiero llegar a obtener.

$$\boxed{Q(W \in A) = E_P\left(1_A e^{-\theta W_T - \frac{1}{2}\theta^2 T}\right)}$$

NOTA