Capítulo 3

El importe de los siniestros

Ahora consideraremos la situación en que los importes de los siniestros pueden variar. El importe del siniestro es la cuantía que el asegurador debe pagar en caso de incendio, accidente, muerte o algún otro evento asegurado. La suma de los siniestros individuales constituye el importe acumulado de siniestros, que es una de las cuestiones claves tanto en la administración práctica de una compañía de seguros como en las consideraciones teóricas.

En términos del cálculo de probabilidades construimos un modelo estocástico doble del importe acumulado de siniestros, donde el número de siniestros y la intensidad de cada uno son variables estocásticas. Este modelo se aplica especialmente a las distintas clases de seguros generales. En el negocio del seguro de vida y de rentas vitalicias el importe del siniestro generalmente es fijo o está bien definido, en lugar de ser aleatorio.

3.1. Modelo compuesto del importe acumulado de siniestros

(a) Importe acumulado de siniestros. Generalizamos ahora el proceso de siniestros para incluir la consideración de los importes de los siniestros. Sea $\boldsymbol{k}$, la variable que indica el número de siniestros para una cartera de seguros (o cualquier grupo de riesgos) en un período determinado, por ejemplo, un año. El importe acumulado de siniestros $\boldsymbol{X}$ durante ese período es

$$\boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{Z}_i \tag{3.1.1}$$

$\boldsymbol{Z}_i$ es la cuantía del reclamo del i-ésimo siniestro que ocurre durante ese período. Si no hay siniestros, entonces $\boldsymbol{k}=0$ y $\boldsymbol{X}=0$.

Las variables de la forma (3.1.1) se conocen como sumas aleatorias dado que el número $\boldsymbol{k}$ de los sumandos es un número aleatorio como también lo son los valores individuales de los sumandos.

El objetivo es encontrar una expresión para la distribución de probabilidades del importe acumulado de siniestros $\boldsymbol{X}$ en términos de las probabilidades p_k del número de siniestros (sección 2.1) y la distribución de la intensidad del siniestro. El evento $\{\boldsymbol{X} \leq X\}$ puede ocurrir de los siguientes modos alternativos

$\boldsymbol{k} = 0$ (siempre que X no sea negativo),

$\boldsymbol{k} = 1$ y $\boldsymbol{Z}_1 \leq X$,

$\boldsymbol{k} = 2$ y $\boldsymbol{Z}_1 + \boldsymbol{Z}_2 \leq X$,

$\boldsymbol{k} = 3$ y $\boldsymbol{Z}_1 + \boldsymbol{Z}_2 + \boldsymbol{Z}_3 \leq X$,

etc.

Suponiendo que cada cuantía $\boldsymbol{Z}_i$ de los siniestros sea independiente de la variable $\boldsymbol{k}$ del número de siniestros, y aplicando las reglas de la suma y de la multiplicación de probabilidades, la f.d. F de $\boldsymbol{X}$ ahora puede escribirse

$$F(X) = \mathrm{Prob}\ \{\boldsymbol{X} \leq X\} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot \mathrm{Prob}\left\{\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{Z}_i \leq X\right\}, \tag{3.1.2}$$

donde $p_k=\mathrm{Prob}\{\boldsymbol{k}=k\}$ es la probabilidad de que exactamente k siniestros ocurran.

Para que este resultado sea válido es necesario que las variables de las intensidades de los siniestros sean independientes de $\boldsymbol{k}$. No obstante, la fórmula es bastante general, ya que no se requiere una especificación de la distribución del número de siniestros ni de la intensidad de los mismos.

(b) Variable compuesta del importe acumulado de siniestros. Ahora supondremos también que, además de ser independiente del número de siniestros k, las intensidades $\boldsymbol{Z}_i$ de los siniestros que constituyen la variable $\boldsymbol{X}$ del importe acumulado de siniestros también son mutuamente independientes y están idénticamente distribuidas, cada una de ellas con la misma f.d. S,

$$S(Z) = \mathrm{Prob}\ \{\boldsymbol{Z}_i \leq Z\}. \tag{3.1.3}$$

Una variable $\boldsymbol{X}$ del importe acumulado de siniestros que satisface estos supuestos se denomina **variable compuesta**, y su distribución se denomina **distribución compuesta**. Cuando la variable $\boldsymbol{k}$ del número de siniestros es Poisson (mixta), la distribución de $\boldsymbol{X}$ es **Poisson compuesta (mixta)** y cuando $\boldsymbol{k}$ tiene una distribución de Pólya, la distribución de $\boldsymbol{X}$ es **Pólya compuesta**. Términos análogos se utilizan para los respectivos procesos del importe acumulado de siniestros cuando se supone que la acumulación de los importes de los siniestros se produce en forma continua en el tiempo.

La independencia mutua de las variables $\boldsymbol{Z}_i$ de la intensidad de los siniestros y la variable $\boldsymbol{k}$ del número de siniestros significa que la probabilidad de que un solo siniestro sea de una magnitud en particular no está afectada por el número de siniestros que han tenido lugar, ni por las intensidades de otros siniestros. Por consiguiente, la f.d. F de una variable compuesta $\boldsymbol{X}$ está determinada totalmente por la distribución del número de siniestros y por la f.d. S de la intensidad del siniestro. Más precisamente, para una variable compuesta $\boldsymbol{X}$ la fórmula (3.1.2) se escribe

$$F(X) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot S^{k} * (X), \tag{3.1.4}$$

donde

$$S^{k*}(X) = Prob \{ \sum_{i=1}^{k} Z_i \leq X \} \tag{3.1.5}$$

es la k-ésima convolución S^{k*} de S evaluado en el punto S (sección 1.4(f)). En particular, $S^{0*}(X)=0$, si $X<0$, y $S^{0*}(X)=1$, si $X\geq 0$. Nótese la fórmula de recurrencia $S^{k*}(X)= S^{*}S^{(k-1)*}(X)$, para $k\geq 1$.

(c) Análisis sobre la aplicabilidad. Cuando el modelo compuesto se aplica en la práctica, la cartera de seguros debe dividirse en secciones según el tipo de negocio, y cada una debe tratarse por separado. Entonces, el supuesto de la existencia de una f.d. S de la intensidad de los siniestros para cada sección, que represente satisfactoriamente la distribución de las cuantías reales de los siniestros, es razonable y concuerda con la experiencia general, al menos para períodos moderados y siempre que se elimine el efecto de los cambios en los valores monetarios.

Sin embargo, en algunos casos el supuesto de independencia mutua entre el número de siniestros $\boldsymbol{k}$ y las intensidades de los siniestros $\boldsymbol{Z}_i$ puede entrar en conflicto con la realidad. Si el número de siniestros aumenta considerablemente, de vez en cuando, por ejemplo como resultado de una tormenta, entonces, además de la aparición de siniestros muy grandes, tal vez haya un predominio de siniestros pequeños en mayor grado que en circunstancias normales, como ha observado Ramlau-Hansen (1988). Esto podría tratarse teóricamente haciendo que la f.d. S dependa del número de siniestros mediante la variable de ponderación.

Las intensidades de siniestros $\boldsymbol{Z}_i$ indican el importe total que debe pagarse para cancelar el siniestro. La liquidación a menudo se demora y puede consistir en dos o más pagos. Los pagos pendientes de siniestros deben estimarse a los fines de la presentación de informes. Las inexactitudes asociadas con el procedimiento de estimación requieren atención y las consideraremos en la sección 9.5.

Una práctica común en la teoría del riesgo, especialmente con respecto a los seguros generales, es restringir las intensidades de los siniestros a valores no negativos. A menos que especifiquemos lo contrario en casos particulares, no hemos aplicado esta restricción y aceptamos importes negativos de siniestros. Es conveniente utilizar el concepto de un importe negativo de siniestros en casos en los que un evento da lugar a un aumento del patrimonio o de la ganancia del asegurador, en contraposición con los casos habituales que reducen la ganancia (el proceso básico está descripto en la sección 1.3(c) donde los siniestros provocan reducciones en el patrimonio del asegurador).

De acuerdo con el enfoque colectivo descripto en la sección 2.1(a), no se considera la unidad de riesgo (o póliza) de la que ha surgido el siniestro. La f.d. S describe la variabilidad de la intensidad de los siniestros en el flujo colectivo de los mismos. La conexión entre las unidades individuales de riesgos y la f.d. S colectiva se estudiará brevemente en la sección 3.3.2.

3.2 Propiedades de las distribuciones compuestas

(a) Funciones generatrices de momentos y de cumulantes. El propósito de esta sección es encontrar expresiones para las funciones generatrices de cumulantes y de momentos de una variable compuesta $\boldsymbol{X}$ en términos de las funciones generatrices de las distribuciones del número e intensidad de los siniestros. Luego, éstas se utilizarán para calcular las características de $\boldsymbol{X}$ en la sección 3.2(b).

Si $\boldsymbol{X}$ es una variable aleatoria compuesta con la variable $\boldsymbol{k}$ del número de siniestros, entonces, con la condición de que $\boldsymbol{k}=k$, la f.g.m. condicional de $\boldsymbol{X}$ es

$$M(s|\boldsymbol{k}=k)= M_{Z_1+Z_2+\dots Z_k}(s) = M_z(s)^k \tag{3.2.1}$$

donde M_z es la f.g.m. de la distribución de la intensidad de los siniestros. La fórmula (3.2.1) se obtiene de la propiedad de multiplicación (1.4.14) de las f.g.m. de variables independientes y del supuesto de que las intensidades individuales $\boldsymbol{Z}_i$ de los siniestros están idénticamente distribuidas. La f.g.m. M_X de $\boldsymbol{X}$ se obtiene como el promedio ponderado de las f.g.m. condicionales correspondientes (1.4.3) de la siguiente manera

$$M_x(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot M(s|\boldsymbol{k}=k) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot M_z(s)^k \tag{3.2.2}$$

donde p_k = Prob$\{\boldsymbol{k}=k\}$. Esto puede escribirse más brevemente como

$$M_x(s) = E[\, M(s\,|\,\boldsymbol{k})] = E[\, M_z(s)^k\,] \tag{3.2.3}$$

y además, utilizando la identidad $t^k = e^{k\cdot\ln t}$

$$M_X(s) = E[M_Z(s)^k] = E[e^{k\cdot\ln M_Z(s)}] = M_k(\ln M_Z(s)) = M_k(\psi_Z(s)) \tag{3.2.4}$$

donde $\psi_Z = \ln M_Z$ es la f.g.c. de la intensidad de un siniestro ((2.3.3) y (2.4.10)). Las últimas expresiones se obtienen sustituyendo $u = \ln M_Z(s)$ en $E(e^{k.u}) = M_k(u)$. Aplicando logaritmos, se obtiene la fórmula general siguiente para la f.g.c. ψ_X de la variable compuesta $\boldsymbol{X}$

$$\psi_X(s) = \psi_X(\psi_Z(s)). \tag{3.2.5}$$

Cuando la variable del número de siniestros tiene una distribución de Poisson, por (2.3.3) obtenemos

$$\psi_X(s) = n\cdot(e^{\psi_Z(s)}-1) = n\cdot M_z(s) - n \quad (\boldsymbol{X}\text{, Poisson compuesta}) \tag{3.2.6}$$

que es la f.g.c. para la distribución de Poisson compuesta, siendo n el parámetro de Poisson.

En el caso en que el número de siniestros tenga una distribución de Poisson mixta, esta fórmula puede generalizarse (Ejercicio 3.2.1) como

$$\psi_X(s) = \psi_q(n\cdot M_z(s) - n) \quad (\boldsymbol{X}\text{ Poisson compuesta mixta}). \tag{3.2.7}$$

Para el caso de Pólya compuesto es más conveniente utilizar la f.g.m.

$$M_x(s) = \left[1 - \frac{n}{h}\cdot(M_z(s)-1\right]^{-h} \quad (\boldsymbol{X}\text{ Pólya compuesto}). \tag{3.2.8}$$

(Ejercicio 3.2.2) en lugar de la f.g.c. Obsérvese que la elección aquí entre la f.g.m. y la f.g.c. se basa en la simplicidad de las expresiones obtenidas, teniendo en cuenta que las características de las variables compuestas se deducen directamente de estas expresiones.

(b) Características básicas de las distribuciones compuestas. Ahora presentaremos la siguiente notación estándar, que se utilizará en todo el libro para los momentos absolutos α_j de la distribución de la intensidad de los siniestros y para el número esperado de siniestros:

$$n = \mathrm{E}(k);\ m = a_1 = \mathrm{E}(\mathbf{Z});\ a_j = \alpha_j(\mathbf{Z}) = \mathrm{E}(\mathbf{Z}^j), \tag{3.2.9}$$

donde $\boldsymbol{Z}$ está distribuida según la f.d. S de la intensidad de los siniestros y $\boldsymbol{k}$ es la variable para el número de siniestros.

El valor esperado de toda variable $\boldsymbol{X}$ del importe acumulado de siniestros es simplemente el producto del número esperado de siniestros n y la intensidad media m de los siniestros. Dado que $\mathrm{E}(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{k}=k)= \mathrm{E}(\boldsymbol{Z}_1+\boldsymbol{Z}_2+...+\boldsymbol{Z}_k) = \boldsymbol{k}.\mathrm{E}(\boldsymbol{Z}_i)$, tenemos

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{X}) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot E(\boldsymbol{X} \mid \boldsymbol{k} = k) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot k \cdot E(\boldsymbol{Z}_i) = \mathbf{E}(\boldsymbol{k}) \cdot E(\boldsymbol{Z}_i) \tag{3.2.10}$$

Introducimos otra notación, P, para el valor esperado μ_x de una variable $\boldsymbol{X}$ del importe de los siniestros. P es un símbolo para la prima de riesgo, es decir la prima requerida para cubrir el costo esperado de siniestros, sin recargos para gastos, ni para ganancias, ni para desvíos adversos, los cuales consideraremos más adelante. Utilizando esta notación tenemos

$$P = \mu_x = \mathrm{E}(\boldsymbol{X}) = n \cdot m, \tag{3.2.11}$$

toda vez que $\boldsymbol{X}$ sea una variable compuesta.

De la f.g.c. de una variable compuesta $\boldsymbol{X}$ del importe acumulado de siniestros obtenemos sus cumulantes. Entonces las características de mayor orden pueden obtenerse inmediatamente utilizando (1.4.25).

En el **caso de Poisson compuesto** los cumulantes κ_j se obtienen directamente de (3.2.6):

$$K_j = \psi_x^{(j)}(0) = n \cdot M_{\mathbf{z}}^{(j)}(0) = n \cdot a_j. \tag{3.2.12}$$

Dado que el momento centrado a_j es la j-ésima derivada de la f.g.m. M_z evaluada al origen (1.4.12). En consecuencia, la varianza y la asimetría de una variable compuesta de Poisson $\boldsymbol{X}$ son las siguientes

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= K_2 = n \cdot a_2 \\ \gamma_X &= \frac{K_3}{\sigma_X^3} = \frac{n \cdot a_3}{(n \cdot a_2)^{3/2}} = \frac{a_3}{a_2^{3/2} \cdot \sqrt{n}}. \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

En el **caso de Poisson mixto compuesto** estas características toman las siguientes formas (Ejercicio 3.2.3), que frecuentemente serán necesarias en secciones y capítulos posteriores

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= n \cdot a_2 + n^2 \cdot m^2 \cdot \sigma_{\mathbf{q}}^2 \\ \gamma_X &= \frac{n \cdot a_3 + 3 \cdot n^2 \cdot m \cdot a_2 \cdot \sigma_{\mathbf{q}}^2 + n^3 \cdot m^3 \cdot \gamma_{\mathbf{q}} \cdot \sigma_{\mathbf{q}}^3}{\sigma_X^3} \end{aligned} \tag{3.2.14}$$

donde $\mathbf{q}$ es la variable de ponderación. La curtosis puede hallarse en el Ejercicio 3.2.4. Estas fórmulas serán los bloques de construcción fundamentales en muchas aplicaciones. A veces es más conveniente utilizar la siguiente variante de (3.2.14), que se obtiene directamente por sustitución:

$$\sigma_X = n \cdot m \cdot \sqrt{\frac{r_2}{n} + \sigma_q^2}$$
$$\gamma_X = \frac{r_3/n^2 + 3r_2 \cdot \sigma_q^2/n + \gamma_q \cdot \sigma_q^3}{(r_2/n + \sigma_q^2)^{3/2}} \qquad (3.2.15)$$

donde

$$r_2 = a_2 / m^2 \;,\; r_3 = a_3 / m^3 \,. \qquad (3.2.16)$$

Estos cocientes se denominan **índices de riesgo** y sirven como índices del grado de riesgosidad de la distribución S de la intensidad de los siniestros. Una regla práctica sería calificar la peligrosidad como moderada o leve si $r_2 < 30$. Entonces generalmente la cola de la distribución es corta. Por otro lado, si r_2 es mayor que, por ejemplo, 200, la distribución es riesgosa. La Tabla 3.4.1. muestra el comportamiento del índice de riesgo r_2.

En el **caso de Pólya compuesto** las fórmulas (3.2.14) toman (véase (2.5.4)) la forma

$$\sigma_X^2 = n \cdot a_2 + n^2 \cdot m^2/h$$
$$\gamma_X = \frac{n \cdot a_3 + 3 \cdot n^2 \cdot m \cdot a_2 / h + 2 \cdot n^3 \cdot m^3 / h^2}{\sigma_X^3} \,. \qquad (3.2.17)$$

Las características de $\boldsymbol{X}$ dadas más arriba se expresaron en términos de los momentos absolutos a_j de la distribución de la intensidad de los siniestros, dado que esto permite fórmulas más convenientes en el caso de Poisson mixto compuesto. No obstante, para otras variables compuestas, o cuando el desvío estándar y la asimetría de la f.d. S de la intensidad de los siniestros se obtengan más fácilmente que los momentos en torno a cero, se pueden utilizar las fórmulas generales

$$\sigma_X^2 = n \cdot \sigma_Z^2 + \sigma_k^2 \cdot m^2$$
$$\gamma_X = \frac{n \cdot \sigma_Z^3 \cdot \gamma_Z + 3 \cdot \sigma_k^2 \cdot m \cdot \sigma_Z^2 + \sigma_k^3 \cdot \gamma_k \cdot m^3}{\sigma_X^3}, \qquad (3.2.18)$$

que son válidas (Ejercicios 3.2.5 y 3.2.12) para toda variable compuesta $\boldsymbol{X}$.

(c) Comportamiento asintótico de las distribuciones mixtas compuestas. Las fórmulas anteriores para las características de una variable compuesta $\boldsymbol{X}$ permiten sacar algunas conclusiones útiles acerca de las propiedades límite de las distribuciones de Poisson mixtas compuestas cuando la intensidad de la cartera se hace muy grande. Con este propósito la varianza en (3.2.14) se escribe del siguiente modo

$$\sigma_X^2 = \sigma_0^2 + P^2 \cdot \sigma_q^2 \,, \qquad (3.2.19)$$

donde

$$\sigma_0^2 = n \cdot a_2 \qquad (3.2.20)$$

es la varianza en el caso de Poisson compuesta.

Entonces el desvío estándar relativo de $\boldsymbol{X}$ (el coeficiente de variación) es

$$\frac{\sigma_{\mathbf{x}}}{E(\boldsymbol{X})} = \frac{\sigma_{\mathbf{x}}}{P} = \sqrt{\frac{\sigma_0^2}{P^2} + \sigma_q^2} = \sqrt{\frac{r_2}{n} + \sigma_q^2}. \tag{3.2.21}$$

El primer término dentro de la raíz cuadrada proviene de la fluctuación de la Poisson compuesta, mientras que el segundo introduce el efecto adicional de la variable de ponderación $\boldsymbol{q}$. El primero disminuye cuando el parámetro de volumen n aumenta, pero el segundo es independiente de n. Esto implica que en colectivos pequeños la variación aleatoria de Poisson pura, junto con la variación aleatoria de cada magnitud de siniestros individuales, tiene un efecto más importante sobre la fluctuación del importe acumulado de siniestros que la variable de ponderación, mientras que en colectivos grandes predomina el efecto de la variable de ponderación. Esta propiedad está ilustrada en la Tabla 3.2.1, en la que el desvío estándar de una distribución de Poisson mixta compuesta se compara con el caso correspondiente de Poisson (no mixto) compuesto y con dos casos de Pólya compuestos. El índice de riesgo r_2 es igual a 44 en estos ejemplos.

Para entender la naturaleza de la fluctuación de los siniestros resulta de interés otra descomposición de la varianza (3.2.14) de una variable de Poisson mixta compuesta.

$$\begin{aligned}\mathbf{Var}(\boldsymbol{X}) &= \sigma_{\mathbf{X}}^2 = m^2 \cdot n + n \cdot (a_2 - m^2) + n^2 \cdot m^2 \cdot \sigma_q^2 \\ &= m^2\mathbf{Var}(\mathbf{Poisson}(n)) + n \cdot \mathbf{Var}(\boldsymbol{Z}) + n^2 \cdot m^2 \cdot \mathbf{Var}(\boldsymbol{q}).\end{aligned} \tag{3.2.22}$$

Tabla 3.2.1 *Comparación de los desvíos estándares de variables de Poisson compuestas y de Poisson mixtas compuestas con dos variables de ponderación diferentes. El valor del índice de riesgo r_2 es igual a 44*

Número esperado de siniestros n	σ_0/P	*Caso:* $\sigma_q=0{,}038$		*Caso:* $\sigma_q=0{,}100$	
		σ_X/P	σ_X/σ_0	σ_X/P	σ_X/σ_0
10	2,098	2,098	1,00	2,100	1,00
100	0,663	0,664	1,00	0,671	1,01
1000	0,210	0,213	1,02	0,232	1,11
10000	0,066	0,076	1,15	0,120	1,81
100000	0,021	0,043	2,07	0,102	4,87
1000000	0,007	0,039	5,82	0,100	15,11

σ_0 es el desvío estándar de la distribución de Poisson compuesta
σ_X es el desvío estándar de la distribución de Poisson mixta compuesta, y
σ_q es el desvío estándar de la respectiva distribución de ponderación.

Figura 3.2.2 *Intensidades relativas de las tres componentes de la*

$Var(\boldsymbol{X}) = V_1 + V_2 + V_3$ en la descomposición (3.2.22) de la varianza de una variable de Poisson mixta compuesta. Supuestos: $\sigma_q=0{,}038$ y $r_2 = 44$

Número esperado de siniestros n	$V_1/Var(\boldsymbol{X})$ (%)	$V_2/Var(\boldsymbol{X})$ (%)	$V_3/Var(\boldsymbol{X})$ (%)
10	2	98	0
100	2	97	0
1000	2	95	3
10000	2	74	24
100000	1	23	76
1000000	0	3	97

$V_1 = m^2 \cdot n,\ V_2 = n \cdot Var(\boldsymbol{Z}),\ V_3 = m^2 \cdot n^2 \cdot Var(\boldsymbol{q})$

Una observación fundamental es que el límite de (3.2.24) tiene un carácter muy diferente en el caso de Poisson mixta compuesta. El cociente de siniestralidad (3.2.23) no converge hacia ningún valor límite único, sino que puede tomar aleatoriamente valores dentro de un rango caracterizado por el desvío estándar σ_q . Esto significa que la ley de los grandes números no es válida para distribuciones de Poisson mixtas compuestas, cuando la intensidad de la cartera tiende a infinito. La distribución del importe acumulado de siniestros tampoco tiene la distribución normal como distribución límite, aspecto que será útil recordar cuando se analicen los métodos de aproximación en la sección siguiente.

Un tratamiento riguroso de la distribución límite se brinda en el Apéndice C donde se muestra que la f.d. límite es en realidad la f.d. de ponderación H, es decir

$$F_{X/P}(x) = \text{Prob}\{X/P \leq x\} \rightarrow H(x), \text{ cuando } n \rightarrow \infty. \tag{3.2.25}$$

OBSERVACION. Las consideraciones anteriores se focalizaron en siniestros que ocurren durante algún período de tiempo fijo, por ejemplo durante un año en particular. Por lo tanto, el comportamiento asintótico de la variable compuesta de ponderación se consideró para el caso en que el tamaño de la cartera crece tendiendo a infinito. Sin embargo, si el importe acumulado de siniestros en un proceso Poisson mixta compuesta se considera para un período más largo, entonces (suponiendo que se eliminaran la influencia de las tendencias y de la inflación) el proceso de ponderación probablemente tendrá valores diferentes para tiempos diferentes, de manera que la ley de los grandes números pueda aplicarse satisfactoriamente al importe acumulado de siniestros, si el número de años es suficientemente grande. Surge una situación levemente diferente cuando se considera la suma de los importes acumulados de siniestros de varias ramas de seguro, como veremos en la sección 3.5 más detalladamente.

(d) Sobre las propiedades de aditividad de las variables del importe acumulado de siniestros. Los siniestros en una cartera de seguros generalmente se analizan separadamente para las diferentes clases,

determinando la intensidad X_j del siniestro f.d. S_j y la f.d. de la variable del importe acumulado de siniestros para cada clase j. Luego, el importe acumulado de siniestros X de toda la cartera es simplemente la suma

$$X = \sum_j X_j \tag{3.2.26}$$

sobre todas las clases j de las variables del importe acumulado de siniestros X_j.

Una pregunta es si la suma X de las variables X_j del importe acumulado de siniestros tiene propiedades aditivas útiles. Por ejemplo, ¿en qué condiciones pueden obtenerse la distribución y las características básicas, etc., de la suma (3.2.26) de las cantidades correspondientes a cada clase?

Puede demostrarse que la suma de variables de Poisson mixtas compuestas independientes generalmente no es una variable compuesta. A pesar de ello, debido a la independencia, las características básicas satisfacen las reglas generales de la aditividad en este caso. De hecho, cuando los importes acumulados de los siniestros X_j son mutuamente independientes, las características principales de su suma X pueden expresarse en términos de las características de las variables de clase X_j (1.4.21):

$$\mu_{\mathbf{X}} = \sum_j \mu_{\mathbf{x}_j}; \quad \sigma^2_{\mathbf{X}} = \sum_j \sigma^2_{\mathbf{x}_j}; \qquad \gamma_{\mathbf{X}} = \frac{\sum_j \sigma^3_{\mathbf{x}_j} \cdot \gamma_{\mathbf{x}_j}}{\sigma^3_{\mathbf{X}}} \tag{3.2.27}$$

No obstante, en ciertas condiciones la suma $\boldsymbol{X}$ es una variable compuesta. A continuación los casos 1) y 2)constituyen ejemplos de esas situaciones especiales:

1) *Suma de variables de Poisson compuestas independientes.* Se supone que las $\boldsymbol{X}_j$ son variables de Poisson compuestas (es decir, no mixta) mutuamente independientes y se demostrará que la suma $\boldsymbol{X}$ entonces también es una variable de Poisson compuesta. Para la demostración escribimos la f.g.c. ψ_x de la suma $\boldsymbol{X}$ como la suma de las f.g.c. ψ_j de los sumandos con distribución de Poisson compuesta (sección 1.4(d) y la ecuación (3.2.6)):

$$\psi_x(s)=\sum_j \psi_j(s)=\sum_j (n_j \cdot M_j(s)-n_j)$$

$$=n\cdot\left(\sum_j \frac{n_j}{n}\cdot M_j(s)\right)-n=n\cdot M(s)-n, \tag{3.2.28}$$

donde n_j es el número esperado de siniestros en la clase j,

$n = \sum n_j$ y

$$M(s)=\sum_j \frac{n_j}{n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{sZ} dS_j(Z)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{sZ} d\left[\sum_j \frac{n_j}{n} S_j(Z)\right]. \tag{3.2.29}$$

Esto demuestra que M es la f.g.m. de la f.d. ponderada

$$S(Z) = \sum_j \frac{n_j}{n} S_j(Z). \tag{3.2.30}$$

Puede verse de la última expresión en (3.2.28) que $\boldsymbol{X}$ es una variable de Poisson compuesta con una f.d. de la intensidad de siniestros dada por (3.2.30) y un número esperado de siniestros n.

Como consecuencia inmediata de (3.2.30), los momentos centrados a_k de la f.d. S de la intensidad de los siniestros puede expresarse como

$$a_k = \sum_j \frac{n_j}{n} a_{k,j}. \tag{3.2.31}$$

Las fórmulas (3.2.27) lógicamente siguen siendo válidas en este caso especial.

2) *La suma de variables de Poisson mixtas compuestas con mezcla sincronizada, pero con sumandos independientes.* Al sumar variables de Poisson mixtas compuestas $\boldsymbol{X}_j$, que tienen todas la misma variable de ponderación $\boldsymbol{q}$, se genera una variable de Poisson mixta compuesta $\boldsymbol{X}$ con la misma variable de ponderación $\boldsymbol{q}$, siempre que las variables $\boldsymbol{X}_j$ sean condicionalmente mutuamente independientes dado el valor de la variable de ponderación $\boldsymbol{q}$. La demostración consiste en fijar en primer lugar el valor q de la variable de ponderación y luego aplicar la demostración del caso anterior (1) reemplazando n_j por $q.n_j$; se observa que las fórmulas (3.2.30) y (3.2.31) permanecen inalteradas dado que q se elimina del cociente n_j/n.

La diferencia entre el caso de la variable de ponderación sincronizada y el caso de las variables de ponderación independientes se demuestra en el Ejercicio 3.2.15, que muestra que (3.2.27) no se aplica en el caso de la variable de ponderación sincronizada, donde las variables del importe acumulado de siniestros de clases diferentes están correlacionadas a través de la variable de ponderación $\boldsymbol{q}$.

Nótese que puede verse de la demostración del caso de la variable de ponderación sincronizada por qué la suma de variables compuestas mixtas independientes generalmente no es una variable compuestas mixta. Si las variables de ponderación de diferentes clases j y k tienen valores diferentes q_j y q_k, entonces las ponderaciones de estas dos clases en (3.2.30) ya no son iguales a n_j/n y n_k/n, y por lo tanto (si se excluye el caso especial en que cada clase tiene exactamente la misma distribución de la intensidad de los siniestros) la f.d. S de la intensidad de los siniestros resulta dependiente de los valores de las variables de ponderación, lo que, por definición, no es posible para variables de Poisson compuestas mixtas.

Ejercicio 3.2.1 Probar que la f.g.c. de una variable de Poisson compuesta mixta $\boldsymbol{X}$ está dada por (3.2.7).

Ejercicio 3.2.2 Probar que la f.g.m. de una variable de Pólya compuesta $\boldsymbol{X}$ está dada por (3.2.8).

Ejercicio 3.2.3 a) Obtener las fórmulas (3.2.14) para el desvío estándar y la asimetría de una variable de Poisson compuesta mixta $\boldsymbol{X}$. b) Deducir las fórmulas (3.2.15).

Ejercicio 3.2.4 Hallar una fórmula para el cumulante κ_4 y para la curtosis γ_2 de una variable de Poisson compuesta mixta en términos del parámetro de Poisson, los momentos a_j de la distribución de la intensidad de los siniestros y las características de la variable de ponderación.

Ejercicio 3.2.5 Deducir la fórmula (3.2.18) para el desvío estándar σ_x de una variable compuesta $\boldsymbol{X}$ utilizando las fórmulas para las esperanzas condicionales presentadas en la sección 1.4(g) en lugar de utilizar las funciones generadoras.

Ejercicio 3.2.6 Recalcular los valores de la Tabla 3.2.1 en el caso en que el índice de riesgo r_2 es igual a 200.

Ejercicio 3.2.7 Probar que, si se excluyen las intensidades negativas de siniestros, los índices de riesgo (3.2.16) satisfacen $1 \leq r_2^2 \leq r_3$. (Ayuda: utilizar la desigualdad de Schwarz $(E(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{V}))^2 \leq E(\boldsymbol{U}^2)\cdot E(\boldsymbol{V}^2)$.)

Ejercicio 3.2.8 Probar que una distribución de Poisson compuesta es asintóticamente normal cuando el parámetro de Poisson n tiende a infinito.

Ejercicio 3.2.9 Sea $\boldsymbol{Y}$ una variable aleatoria. Probar que $E(\varphi(\boldsymbol{Y})) \leq \varphi(E(\boldsymbol{Y}))$ para toda función cóncava φ. Esta se conoce como la **desigualdad de Jensen**. Por simplicidad se puede suponer que φ es diferenciable, en cuyo caso una función es cóncava si y sólo si su derivada es una función decreciente.

Ejercicio 3.2.10 Probar que los momentos a_2 y a_3 de una variable $\boldsymbol{Z}$ no negativa de la intensidad de los siniestros (o de cualquier variable aleatoria no negativa) satisfacen la desigualdad $a_2 \leq a_3^{2/3}$.(Ayuda: Utilizar la desigualdad de Jensen $E(\varphi(\boldsymbol{Y})) \leq \varphi(E(\boldsymbol{Y})$ para la variable $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Z}^3$.)

Ejercicio 3.2.11 Probar que la asimetría de una variable de Poisson compuesta siempre excede la asimetría de la correspondiente variable Poisson del número de siniestros.

Ejercicio 3.2.12 Deducir la fórmula $P = n \cdot m$ para la prima de riesgos y las fórmulas (3.2.18) para la varianza y la asimetría de una variable compuesta $\boldsymbol{X}$ utilizando la fórmula (3.2.5) para f.g.c.

Ejercicio 3.2.13 Suponer que $\boldsymbol{X}$ es una variable compuesta del importe acumulado de siniestros y sea $\boldsymbol{k}$ la variable correspondiente al número de siniestros. Demuestre que $\mathrm{Cov}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{X}) = m \cdot \mathrm{Var}(\boldsymbol{k})$. Presentar el coeficiente de correlación correspondiente en el caso de $\boldsymbol{k}$ de Poisson mixta. ¿En qué casos es la correlación grande y cuándo es pequeña?

Ejercicio 3.2.14 La cartera de un asegurador consiste en riesgos de dos líneas de seguros diferentes $j = 1,2$. El número esperado de siniestros, n, y los momentos absolutos primero y segundo, m y a_2 en cada línea de seguros son los que muestra la Figura siguiente.

j	n	m	a_2
1	50	5	30
2	10	10	200

Los importes acumulados de los siniestros de cada línea $\boldsymbol{X}_j$ dependen recíprocamente a través de sus variables de ponderación $\boldsymbol{q}_j$ pero si no, son mutuamente independientes. Los desvíos estándar de las variables de ponderación son $\sigma_{q1} = 0{,}20$ y $\sigma_{q2} = 0{,}05$, y el coeficiente de correlación de las variables de ponderación es

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2)}{\sigma_{\boldsymbol{q}_1} \cdot \sigma_{\boldsymbol{q}_2}}.$$

Calcular la covarianza $\mathrm{Cov}(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2)$ y el desvío estándar del importe acumulado total de siniestros $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2$ como función de ρ, y evaluarlos para $\rho = -1$, 0 y +1.

Ejercicio 3.2.15 Considerar un grupo de $N = 10.000$ unidades de riesgo j, cada una con una distribución de siniestros del tipo Poisson mixta compuesta con el mismo número esperado $n_j = 0{,}1$ de siniestros. El desvío estándar de la variable de ponderación $\boldsymbol{q}_j$ de cada unidad j de riesgo es $\sigma_{qi} = 0{,}2$. Es más, la f.d. conjunta de la intensidad de los siniestros es aproximada por una f.d. discreta, dada en términos de alguna unidad monetaria adecuada, por ejemplo \$1.000, en la Tabla siguiente, donde s_i es la probabilidad de que la intensidad de un siniestro sea $\boldsymbol{Z}_i$.

i	1	2	3	4	5
$\boldsymbol{Z}_i$	1	2	4	8	16
s_i	0,8	0,1	0,05	0,02	0,03

Calcular μ_X y σ_X para todo el grupo en los dos casos siguientes:

a) suponiendo que la variable de ponderación $\boldsymbol{q}_j = \boldsymbol{q}$ es igual para todas las unidades de riesgo, pero que los riesgos son condicionalmente independientes dado el valor de la variable de ponderación $\boldsymbol{q}$;

b) suponiendo que las variables de ponderación $\boldsymbol{q}_j$ son mutuamente independientes.

3.3 La distribución de la intensidad de los siniestros

La f.d. S de la intensidad de un siniestro se presentó en la sección 3.1.(b) y ahora se la estudiará más detalladamente. La obtención de las distribuciones de la intensidad de los siniestros según datos siniestrales podrían considerarse como una disciplina en sí misma, aplicando los métodos de la estadística matemática. Brindar una idea general de este tema va más allá del objetivo de este libro. Para más detalles el lector deberá referirse a un libro de texto adecuado, como Hogg and Klugman (1984). A continuación damos ejemplos de métodos relevantes.

Dada la gran cantidad de aspectos diferentes del tema, esta sección se divide en varias subsecciones. Estas tratan, por ejemplo, acerca de los diferentes métodos para hallar una f.d. S que se ajuste satisfactoriamente a los datos siniestrales observados, y acerca del efecto que tiene sobre la f.d. S la utilizacion de franquicias de importe variable. Los efectos de los diversos acuerdos de reaseguro sobre la f.d. S neta del reaseguro, se considerarán en la sección 3.4.

3.3.1. Construcción de la distribución de la intensidad de los siniestros

(a) Estadísticas siniestrales y otras experiencias. Para poder aplicar el modelo compuesto del importe acumulado de siniestros hay que conocer o suponer una f.d. S adecuada de la intensidad de los mismos. La situación ideal es aquélla en la que se cuenta con suficientes datos estadísticos de siniestros anteriores y que esta información es considerada como una buena guía para la aplicación deseada. Luego, puede estimarse la f.d. S a partir de los datos observados, teniendo en cuenta aspectos especiales, como la eliminación de la inflación, que describiremos más adelante en este capítulo.

Generalmente los aseguradores tienen archivos de datos que contienen información detallada acerca de las pólizas y los siniestros; éstos se utilizan para producir muchas clases de estadísticas, para la contabilidad, para la determinación de cotizaciones y para otros propósitos. Las distribuciones de la intensidad de los siniestros y otros datos necesarios para los análisis teóricos de los riesgos pueden obtenerse, generalmente luego de algunas modificaciones, como subproductos de estos procesamientos de datos.

Desafortunadamente, las estadísticas de siniestralidad son a menudo limitadas. Luego, la f.d. S debe basarse en el conocimiento de otros riesgos similares. En la sección 3.3.8 veremos los problemas particulares que surgen de siniestros grandes. Es más, también puede haber situaciones en las que datos o experiencias anteriores no estén disponibles, como por ejemplo, cuando se implementa un nuevo tipo de seguro o cuando se aseguran riesgos especiales muy grandes. Entonces, tal vez pueda aplicarse un método de evaluación riesgo por riesgo (sobre el terreno), como estudiaremos en la sección 3.3.2.

(b) Modelos continuos, discretos y basados en los momentos. Los modelos utilizados para la f.d. S pueden clasificarse en tres tipos básicos:

1) La f.d. S se expresa en una **forma analítica** que se ajusta a los datos observados.

2) La f.d. S se obtiene directamente de los datos estadísticos en una **forma tabular, discreta libre de parámetros.**

3) La f.d. S no está especificada explícitamente, pero las **características principales** de los primeros órdenes, especialmente la media, el desvío estándar y la asimetría, se obtienen de los datos.

Tal vez sea conveniente a veces combinar los modelos mencionados, subdividiendo el rango de la distribución de la intensidad de los siniestros en intervalos para los que pueden utilizarse métodos diferentes. Por ejemplo, los siniestros pequeños y medianos pueden tratarse en forma discreta, utilizando la distribución de la intensidad de los siniestros observados, o solamente las características estimadas, mientras que los siniestros grandes se tratan analíticamente, por ejemplo postulando algún tipo de distribución analítica y evaluando sus parámetros.

La forma analítica es el enfoque que se adopta con frecuencia en la bibliografía actuarial. El problema es encontrar una expresión analítica adecuada que se ajuste bien a los datos observados y que sea fácil de manejar. El enfoque analítico se estudia más detalladamente en las secciones 3.3.4 a 3.3.7.

El método 3) basado en los momentos a menudo es adecuado cuando se utilizan métodos de aproximación en el cálculo de la f.d. compuesta del importe acumulado de siniestros *F*. Este método requiere conocer solamente las características clave de la distribución de la intensidad de los siniestros, en lugar de conocer especificaciones de toda la f.d. *S*. La construcción de *S* puede constituir un trabajo innecesario si sólo se necesitan los momentos.

(c) Eliminación del efecto de la inflación y otros cambios. Si los datos se han reunido durante un período en el que han cambiado los valores monetarios, es importante llevar los valores a una base común mediante un índice elegido adecuadamente.

La elección del índice depende de la rama de seguros. Por ejemplo, un índice del costo de los precios de construcción puede ser adecuado para seguros contra incendio y otros seguros de la propiedad, un índice de rendimiento para seguros de vida y de accidente y un índice general de

precios puede servir cuando se requiere un solo índice para varias líneas o para toda la cartera.

Al analizar estadísticas siniestrales que abarcan varios años, hay que tener en cuenta que, además del efecto de la inflación, las intensidades de los siniestros a menudo están sujetos a otros cambios sistemáticos. Por ejemplo, el desarrollo permanente de técnicas de construcción puede originar una tendencia en la forma de la distribución de los siniestros sobre propiedad y en el nivel del siniestro promedio. Los cambios en las condiciones de las pólizas, prácticas de indemnización, fallos judiciales, etc., pueden producir un efecto similar. La inflación y los problemas asociados se considerarán más detalladamente en el capítulo 7.

La longitud del período de observación exige cuidado. La necesidad de obtener una cantidad suficiente de datos requiere el uso de un período preferentemente largo. Sin embargo, si la estructura de riesgo dentro de la cartera está cambiando, es conveniente obtener los datos del período más reciente posible. Esos cambios pueden ser difíciles de detectar. Debe llevarse a cabo un análisis para asegurarse que los datos muestren las tendencias o los cambios temporarios, y para saber si hay que tener en cuenta cambios posibles en las condiciones de las pólizas, prácticas legales o algún otro factor. Si, por ejemplo, el número relativo de un cierto tipo de riesgos en el colectivo de riesgos ha aumentado considerablemente con el tiempo, y si los siniestros relacionados con estos riesgos tienen un perfil diferente en comparación con los correspondientes a los otros riesgos del grupo, entonces debe tenerse en cuenta el cambio de la estructura de la cartera en la determinación de *S*.

Las franquicias variables dentro del colectivo de riesgos pueden llevar a subestimar el número real de los siniestros menores, que no son informados porque caen por debajo de la franquicia y por lo tanto no están incluidos en las estadísticas de siniestros del asegurador. Para algunas aplicaciones tales sesgos deben ser corregidos (sección 3.3.10).

3.3.2 *Evaluación individual de los riesgos*

El análisis de los riesgos individuales puede utilizarse en algunos casos especiales para compilar la f.d. S de la intensidad de los siniestros cuando no pueden aplicarse otros métodos, por ejemplo, debido a estadísticas de siniestros incorrectas o faltantes. Entonces el análisis debe basarse generalmente en una inspección sobre el terreno en plantas industriales, etc. Esto puede formar parte del procedimiento para fijar las primas o parte de una evaluación específica de la gestión de riesgos a ser utilizada por los gerentes de planta. El método es el más simple en los casos (raros) en que no pueden ocurrir siniestros parciales.

Es conveniente presentar este enfoque, dado que ilustra la conexión entre la distribución de la intensidad de los siniestros y la estructura de la cartera, mostrando así el vínculo entre las intensidades de los siniestros en el enfoque clásico de riesgos individuales y la f.d. S de la intensidad de los siniestros de la teoría del riesgo colectivo.

Las unidades de riesgo (pólizas) en la cartera se numeran con un índice i, y el número esperado de siniestros que ocurren con respecto a la unidad de riesgo i en un año se denota por n_i. Primero consideraremos el caso simple en el que no pueden ocurrir siniestros parciales, es decir que sólo es posible una intensidad de siniestro $\boldsymbol{Z}_i$ para cada unidad i. La probabilidad de que un siniestro elegido al azar de la cartera ocurriera con respecto a la i-ésima unidad de riesgo es igual a

$$\frac{n_i}{n}, \quad \text{donde} \quad n = \sum_i n_i \qquad (3.3.1)$$

siempre que, por ejemplo, el número de siniestros que ocurran con respecto a las diferentes unidades de riesgo sean independientes y con

distribución de Poisson (véase Ejercicio 3.3.4 o la sección 3.2(d)). Entonces la probabilidad $S(\boldsymbol{Z})$ de que la intensidad de un siniestro elegido al azar sea menor o igual que $\boldsymbol{Z}$ es simplemente la suma de probabilidades (3.3.1) para todas aquellas unidades de riesgo que satisfacen la condición $\boldsymbol{Z}_i \leq \boldsymbol{Z}$, es decir

$$S(Z) = \frac{1}{n}\sum_{Z_i \leq Z} n_i \, . \qquad (3.3.2a)$$

Más generalmente, si también son posibles siniestros parciales, hay que especificar la f.d. S_i de la intensidad de los siniestros, $S_i(\boldsymbol{Z}) = S(\boldsymbol{Z}$ |el siniestro ocurrido con respecto a la unidad de riesgo i) para cada unidad de riesgo i. Si utilizamos las probabilidades (3.3.1) nuevamente, la fórmula (3.3.2a) se generaliza en la forma

$$S(Z) = \frac{1}{n}\sum_i n_i \cdot S_i(Z) \, . \qquad (3.3.2b)$$

EJEMPLO. Como resultado de una inspección sobre el terreno de tres plantas diferentes i (i = 1,2,3) se obtuvo el número esperado n_i de siniestros por año y la f.d. S_i de la intensidad de los siniestros para cada planta i, como muestra la tabla siguiente.

Tabla *El número esperado de siniestros por año y la f.d. S_i de la intensidad del siniestro para cada planta*

Planta número i:	1	2	+
n_i	0,5	1,5	3,0
PME$_i$ ($1.000):	1.000	400	200
Perfiles de la intensidad de los siniestros:			
Prob{$\mathbf{Z}$ = 1,00 PME$_i$ }:	0,05	0,10	0,30
Prob{$\mathbf{Z}$ = 0,75 PME$_i$ }:	0,10	0,15	0,10
Prob{$\mathbf{Z}$ = 0,50 PME$_i$ }:	0,15	0,25	0,15
Prob{$\mathbf{Z}$ = 0,25 PME$_i$ }:	0,70	0,50	0,45

PME$_i$ es la **pérdida máxima estimada**, o siniestro máximo esperado, es decir, el importe máximo de un siniestro que puede esperarse con respecto a la planta *i*. Para cada planta las intensidades posibles de siniestros se clasificaron en cuatro clases, los límites de cada clase se eligen múltiplos de un cuarto de la PME. (Los siniestros más pequeños no se tuvieron en cuenta ni se incluyeron en las cantidades esperadas de siniestros.) Entonces, tenemos ($\mathbf{Z}$ en $1.000):

$S_i(\mathbf{Z})$ = 0,00 para $\mathbf{Z}$ < 250 (= 0,25 · PME$_1$),

$S_i(\mathbf{Z})$ = 0,70 para 250 ≤ $\mathbf{Z}$ < 500,

$S_i(\mathbf{Z})$ = 0,85 para 500 ≤ $\mathbf{Z}$ < 750,

$S_i(\mathbf{Z})$ = 0,95 para 750 ≤ $\mathbf{Z}$ < 1.000,

$S_i(\mathbf{Z})$ = 1,00 para $\mathbf{Z}$ ≥ 1.000.

Las f.d. S_2 y S_3 se obtienen análogamente y así la f.d. S se obtiene como la media ponderada de las S_i utilizando las ponderaciones n_i/n (véase el Ejercicio 3.3.3):

Z = 50	100	150	200	250	300	400	500	750	1000
S(Z)=0,270	0,510	0,570	0,825	0,895	0,940	0,970	0,985	0,995	1,000

donde el valor de la f.d.S se da en cada punto Z.

En la práctica el problema con el método individual es que generalmente se desconocen las frecuencias de los siniestros en las diferentes clases de intensidades de siniestros, y deben basarse en evaluaciones más o menos subjetivas. No obstante, estas evaluaciones pueden ser válidas si se utiliza la experiencia obtenida de otros riesgos similares o comparables. Los expertos en gestión de riesgos y en fijar las cotizaciones tal vez puedan hacer uso de las frecuencias promedio y de las distribuciones de la intensidad de los siniestros en la industria en general y tener en cuenta el efecto de las condiciones locales estudiando caso por caso. El lector interesado podrá consultar la sección sobre la clasificación de riesgos individuales de Tiller en el capítulo 3 de *Foundations of Casualty Actuarial Science* (CAS)(1990). Debe observarse que, cuando se utilizan datos promedio, en realidad estamos casi nuevamente en el enfoque colectivo.

Ejercicio 3.3.1 Un asegurador ha emitido un seguro por muerte accidental, las sumas a pagar se estandarizan en $100, $250 y $500. El número de personas aseguradas en estas clases son 5.000, 1.000 y 2.000, respectivamente. Se sabe que puede esperarse que las tasas de mortalidad para los dos importes inferiores sean iguales, pero que (debido a la antiselección) el porcentaje para el importe asegurado más alto es el doble que en los dos más bajos. Obtener la f.d. S.

Ejercicio 3.3.2 Probar que (3.3.2b) se reduce a (3.3.2a) si no pueden ocurrir siniestros parciales, es decir, si sólo una cuantía de siniestro Z_i es posible para cada unidad i.

Ejercicio 3.3.3 Calculaas la f.d. S en el Ejemplo de la sección 3.3.2.

Ejercicio 3.3.4 a) Sea $\boldsymbol{k} = \Sigma \boldsymbol{k}_i$, donde $\boldsymbol{k}_i$ son variables independientes de Poisson(n_i) del número de siniestros. Probar que la Prob$\{\boldsymbol{k}_i=1|\boldsymbol{k}=1\}=n_i/n$, donde $n = \Sigma n_i$.

b) Suponga que las variables del número de siniestros para diferentes unidades de riesgo son independientes y con distribución de Poisson. Probar que (3.3.1) se cumple.

3.3.3 Método tabular

(a) La distribución observada. Una estimación natural para la distribución de la intensidad de los siniestros es la distribución observada de la intensidad de los siniestros, es decir, la f.d. S de la intensidad de los siniestros se define simplemente igual a la f.d. muestral

$$S(\mathbf{Z}) = \frac{\text{N° de siniestros de tamaño} \leq \mathbf{Z}}{\text{N° total de siniestros}}. \tag{3.3.3}$$

Como S es una f.d. discreta, puede presentarse en forma tabular, de allí el título **método tabular**.

Recuérdese que, si se han producido cambios en los valores monetarios durante el período de observación, deben utilizarse datos corregidos según la inflación. Análogamente, cualquier otro cambio sistemático en la cartera debe tenerse en cuenta, como se mencionó en la sección 3.3.1(c).

El método tabular solamente es adecuado cuando hay un volumen suficientemente grande de datos siniestrales. Este es rara vez el caso para

la cola de la distribución, especialmente en situaciones en que son posibles siniestros excepcionalmente grandes. Por lo tanto, generalmente es aconsejable dividir el rango de los valores relevantes de siniestros, $\boldsymbol{Z}$, en dos partes, tratando las intensidades de los siniestros hasta cierto límite, T, como variables discretas, mientras que la cola hacia la derecha de este punto límite T es reemplazada por una función analítica, por ejemplo, por una curva de Pareto.

Cuando el número de siniestros es grande, quizás sea necesario agrupar los siniestros observados en clases según su intensidad (como en la Tabla 3.3.1). Para no distorsionar demasiado los datos, las longitudes de los intervalos de las clases deben mantenerse relativamente pequeños. La masa de probabilidades de cada clase necesita colocarse de un modo insesgado tal que la intensidad media de los siniestros permanezca sin cambios. Por lo tanto, antes de agrupar los datos es importante calcular al menos los promedios de las clases a partir de los datos no agrupados.

(b) Un ejemplo con datos reales. En el resto de esta sección la presentación se fundamenta en un ejemplo con datos reales de siniestros de incendio en el Reino Unido. Los siniestros reales de la cartera considerada se obtuvieron en forma agrupada, como lo muestra la Tabla 3.3.1. El número total de siniestros observados durante el período de observación de cuatro años fue de 16.536, y la intensidad media de los siniestros igual a \$7.009.

Los siniestros se clasificaron en grupos según la intensidad del siniestro. En este ejemplo se utilizan límites de clase que aumentan geométricamente (columna 2), excepto para las clases más altas. El número n_i de los siniestros observados en cada clase i se consignan en la columna 4 y la intensidad media $\overline{z}_i$ de siniestros en la clase i se observa en la columna 3. Por ejemplo, el número de siniestros en la clase 17, entre \$18.100 y \$25.600, es 214.

Tabla 3.3.1 *Compilación de estadísticas de siniestros*

(1) Clase i	(2) Límite superior de clase($1.000) Z_i	(3) Promedio de clase($1.000) $\overline{Z}_i$	(4) Número observado de siniestros n_i	(5) n_i esperada para la cola $n.\Delta S_i$	(6) Valor de la f.d. S $S(Z_i)$
1	0,10	0,041	4319		0,2611877
2	0,14	0,118	795		0,3092646
3	0,20	0,167	910		0,3642961
4	0,28	0,237	962		0,4224722
5	0,40	0,336	1097		0,4888123
6	0,57	0,475	1121		0,5566038
7	0,80	0,673	1046		0,6198597
8	1,13	0,957	969		0,6784591
9	,60	1,35	843		0,7294388
10	2,26	1,90	805		0,7781205
11	3.20	2,70	694		0,8200895
12	4.53	3,81	602		0,8564949
13	6.40	5,39	480		0,8855225
14	9.05	7,56	382		0,9086236
15	12.80	10,56	329		0,9285196
16	18,10	15,06	273		0,9450290
17	25,60	21,51	214		0,9579705
18	36,20	30,51	172		0,9884495
19	51,20	42,74	136		0,9765965
20	72,41	60,50	108		0,9831277
21	102,40	85,72	88		0,9884495
22	250,00	155,70	117	136	0,9966710
23	500,00	336,70	47	34	0,9987331
24	750,00	635,90	12	9	0,9992801
25	1000,00	845,19	4	4	0,9995179
26	2000,00	1277,01	8	5	0,9998165
27	3000,00	2579,42	3	1,3	0,9998957
28	5000,00		0	0,9	0,9999488
29	10000,00		0	0,5	0,9999805
30	20000,00		0	0,2	0,9999926
31	50000,00		0	0,1	0,9999979
32	100000,00		0	0,0	0,9999992

Los datos agrupados de los siniestros se utilizan en este ejemplo por conveniencia. En las aplicaciones prácticas el agrupamiento de los siniestros según la intensidad no habría sido necesaria; es obvio que al agrupar los datos se pierde información (véase Sandström, 1991).

La idea es definir la f.d. S de la intensidad de los siniestros utilizando la distribución discreta observada para las intensidades de siniestros que estén por debajo de algún límite adecuado T, mientras que la cola de la f.d. S, comenzando desde el punto T, se obtiene ajustando una curva analítica a los datos observados. Para valores Z_i a lo sumo iguales al límite T elegido, las $S(Z_i)$ correspondientes se obtienen entonces directamente de (3.3.3). Nótese que la masa de probabilidad para la clase i debe situarse en la media de clases $\overline{Z}_i$ más que en el límite de clases Z_i. El ajuste de la cola será descripto en la sección 3.3.3(c).

(c) Ajustamiento de la cola de la f.d. discreta de la intensidad de los siniestros. En esta sección la cola de la distribución de la intensidad de los siniestros correspondiente a siniestros más grandes se obtiene adaptando una curva analítica simple a los datos observados que se consignan en la Tabla 3.3.1. El punto inicial T de la cola se eligió igual a Z_{21}=102,40 ($1.000), dado que se consideró que el número de siniestros en cada clase luego de este límite era demasiado pequeño, en comparación con la longitud relativa del intervalo de clase, como para dar estimaciones confiables para las correspondientes frecuencias de los siniestros (véase Figura 3.3.1).