para cada j. La solución requerida, si existe para los valores de los parámetros dados, puede encontrarse entre los puntos en donde estas derivadas y Q son cero. Como las variables objetivo M_j están contenidas en las expresiones para los momentos, esto puede conducir a problemas técnicos, que no se tratan aquí. Sin embargo, la expresión de arriba permite llegar a ciertas conclusiones acerca del carácter de la solución.

Supongamos que la expresión que está entre corchetes en (6.6.16) es igual a cero. Resolviendo M_j a partir de ahí tenemos

$$M_j = \frac{(\rho-1)\cdot\sigma_X(M_1,\dots,M_k)}{y_\varepsilon\cdot\rho}\lambda_j - n_j\cdot m_j(M_j)\cdot\sigma^2_{qj}. \tag{6.6.17}$$

Sustituyendo esto en (6.6.12), se puede determinar el valor de ρ.

Nótese que el multiplicador para λ_j en (6.6.17) es el mismo para todas los ramos j. Por lo tanto, este término contribuye al importe de M_j en proporción al recargo de seguridad, es decir, cuanto mejor sea la rentabilidad esperada del ramo, más alta será la retención sugerida.

En el caso particular donde la ponderación es despreciable, es decir $\sigma_{q_j} \approx 0$ para cada j, resulta el teorema siguiente: los límites de retención M_j deberían seleccionarse en proporción a los correspondientes recargos de seguridad λ_j.

El segundo término del lado derecho de (6.6.17) reduce la retención buscada en proporción a la varianza de la variable de ponderación atribuible a este ramo. Aún se puede hacer que M_j se convierta en negativa si la variable de ponderación es grande. Este resultado no es inesperado, ya que el supuesto contrato de exceso de

pérdida no ofrece protección en contra de la variación en el número de siniestros.

(c) Análisis. Debe recordarse que las conclusiones de arriba dependen de los supuestos, especialmente que la prima de reaseguro no depende de la rentabilidad del negocio cedido. En la práctica, con frecuencia, esto podría no ser el caso, lo que hace que la situación en la vida real sea mucho más complicada. Sin embargo, el resultado debería ser generalmente pertinente en cuanto a que el cedente tiene interés de mantener todo lo posible de las áreas rentables de su negocio en su retención neta. Esto contradice cualquier teoría que proponga que el mismo límite de retención debería aplicarse uniformemente en toda la cartera.

6.6.5 El concepto de utilidad

En la sección 6.6.1(b) se destaca que la varianza no es ideal como medida de optimalidad general. En su lugar es útil construir una medida que compare mejor la conveniencia de las diversas alternativas entre las que debe realizarse una elección en el momento de tomar una decisión. Por esta razón se introduce y se formula matemáticamente el concepto de utilidad. Se introduce por medio de un ejemplo simple que sigue la idea presentada por Jewell durante la conferencia del seminario de Oberwolfach (1980).

(a) Toma de decisiones del asegurado. Supongamos que un asegurado potencial está evaluando si toma o no un seguro para un objeto de riesgo en particular de valor X. La probabilidad de una pérdida accidental del objeto es p y el capital inicial del asegurado es U_0. El asegurado debe elegir entre de estas alternativas

(I) Tomar un seguro y pagar una prima B.

(II) Ahorrar la prima B y correr el riesgo de pérdida del importe X.

Tabla 6.6.1. *Opciones de decisión de un asegurado potencial*

	La riqueza U del asegurado si	
	(I) *Toma el seguro*	*(II)* *No toma el seguro*
En caso de		
(i) no ocurrencia de siniestro	$U_O - B$	U_O
(ii) ocurrencia de siniestro	$U_O - B$	$U_O - X$

La función de utilidad $G(U)$ se construye para describir la situación de la toma de decisiones (Tabla 6.6.1) y para darle una formulación matemática al problema. Se trata de ponderar cuán convenientes son los diferentes resultados para el interesado. Claramente para el asegurado es mejor cuanto más grande sea su patrimonio U. Sin embargo, es razonable suponer que la conveniencia no es directamente proporcional a U. Si el decisor pierde una parte sustancial de su patrimonio, y ello podría causar un problema considerable o hasta penuria. Por ejemplo, una consecuencia puede ser la pérdida de la casa o la imposibilidad de afrontar la educación para sus hijos. Por lo tanto se deben dar ponderaciones especiales a los resultados en los que el patrimonio cae a un nivel muy bajo (para no decir negativo, por ejemplo si originariamente se tomó un préstamo para financiar la propiedad; en el caso de incendio la propiedad se pierde, pero el préstamo sigue vigente!). La conveniencia de tales casos se describe mejor por medio de valores bajos de la función de utilidad. Por otro lado, el aumento del patrimonio generalmente se acepta como un hecho positivo, pero cuanto más acaudalada sea una persona, se supone una menor ponderación en cuanto al deseo de incrementar el patrimonio aún más en un cierto importe fijo ΔU. Estos aspectos personales, conveniencias e inconveniencias se

describirán construyendo una función $G(U)$ para evaluar numéricamente la conveniencia, o como se la llama, la **utilidad** de diferentes resultados.

La función de utilidad $G(U)$ puede suponerse como una función creciente del patrimonio U, y los aspectos analizados más arriba indican que debería ser cóncava, como se señala en la Figura 6.6.3, es decir

$$G'(U) > 0 \quad \text{y} \quad G''(U) < 0. \tag{6.6.18}$$

Las alternativas disponibles para el asegurado potencial en el ejemplo simple de más arriba, se muestran en la figura 6.6.3, relacionándolas a una función de utilidad hipotética. Parece natural caracterizar las dos alternativas de decisión, es decir,

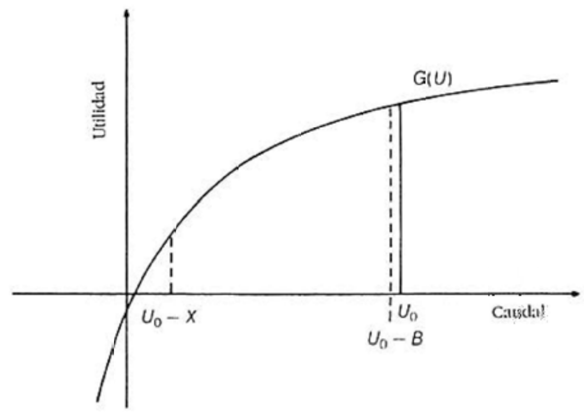

Figura 6.6.3 *Presentación esquemática de las opciones disponibles para el asegurado.*

asegurarlo o no, teniendo en cuenta por un lado la función de utilidad G y por otro la probabilidad de que tenga lugar un resultado particular. Esto sugiere que el concepto de **utilidad esperada,** que en la opción I es

$$G_I = (1-p)\cdot G(U_0 - B) + p\cdot G(U_0 - B) = G(U_0 - B) \qquad (6.6.19)$$

y en la opción II, es decir, no asegurar es

$$G_{II} = (1-p)\cdot G(U_0) + p\cdot G(U_0 - X). \qquad (6.6.20)$$

El seguro sólo se debería tomar si $G_I > G_{II}$, de otra manera no. Esto depende de la selección de la función de utilidad, así como del capital inicial y de los valores p, X y B.

Nótese que en el caso particular en el que G es la función lineal $G(U)=U$ (nótese que entonces G no es más estrictamente cóncava, ya que $G''=0$) la utilidad esperada es, en realidad, el valor esperado y tenemos

$$G_I - G_{II} = -B + p\cdot X \qquad (6.6.21)$$

Como $p\cdot X$ es la prima de riesgo $E(\boldsymbol{X})$ y por lo tanto, si la cotización es correcta, menor que la prima bruta B, esta expresión siempre es negativa. Esto implica que en promedio el asegurado está perdiendo. Sin embargo, el seguro tiene sentido si la pérdida posible, X, es grande comparada con el patrimonio U_0 y las consecuencias son dañosas, quizás extremadamente perjudiciales si no están cubiertas por el seguro. Por lo tanto, la función de la utilidad lineal no es apropiada y la forma cóncava probablemente describa la situación real en forma más precisa.

El ejemplo anterior se simplificó dado que se supusieron dos resultados. Una situación más general es aquella donde son posibles varios resultados, quizás permanentemente cambiantes. Entonces las probabilidades p y $1-p$ de resultados diferentes U_0 y U_0-X se reemplazan por una f.d. F de un resultado estocástico $\boldsymbol{U}$ que resulta de la decisión tomada, y la utilidad esperada se puede expresar como

$$G_U = E(G(\boldsymbol{U})) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(U)dF(U). \qquad (6.6.22)$$

Se denomina utilidad del resultado $\boldsymbol{U}$.

La Figura 6.6.3 simple se reemplaza ahora por la figura 6.6.4. La opción I es conservadora, ya que la distribución no se extiende a valores muy bajos, mientras que la opción II implica tanto resultados positivos muy grandes como muy pequeños, y aún negativos. No obstante, la utilidad ponderada para la opción II es mayor.

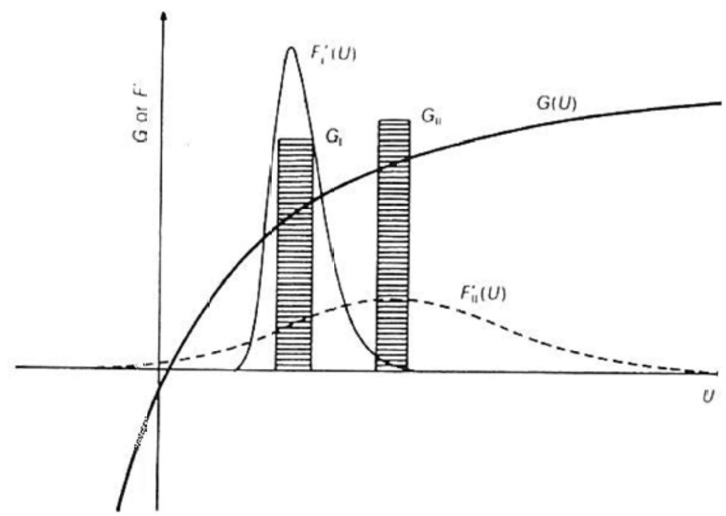

Figura 6.6.4. *La idea de utilidad aplicada a una situación de decisión donde están disponibles las opciones de estrategia, conservadora (I), y toma de riesgos (II).*

Como se mencionó anteriormente, el perjuicio esperado introducido en la sección 6.6.1 es conceptualmente muy cercano al concepto de la utilidad.

(b) La utilidad aplicada al asegurador. El concepto de utilidad es conveniente para describir el comportamiento racional en situaciones simples tales como el caso del asegurado, sin dejar de tener en cuenta el hecho de que construir la función de utilidad del asegurado puede ser muy difícil.

Por otro lado, muchas situaciones de dirección de una compañía de seguros, sin hablar del control total de una compañía de seguros, son tan complicadas y continuamente cambiantes tanto por la presión externa y por las fuerzas e impulsos internos que en la práctica no es posible encontrar una función de utilidad que describa el control total de la empresa. Este punto será analizado más ampliamente en la sección 14.5 en el contexto de planificación comercial.

(c) Referencias. La idea de la función de utilidad data de 1738, cuando se publicó en San Petersburgo un famoso artículo de D.Bernoulli (1738).

El concepto de utilidad se utiliza mucho en los libros de economía para intentar describir el comportamiento de los individuos, instituciones y mercados en su conjunto. Borch (1961) y (1974) fue un pionero al aplicar el enfoque de utilidad en el contexto de los seguros.

En esta sección sólo se consideró la utilidad de los resultados monetarios. Sin embargo, la teoría de utilidad axiomática moderna, introducida por von Neumann y Morgenstern (1947, reimpresa 1964), trata un concepto muy general de utilidad.

Ejercicio 6.6.2 Un asegurado potencial tiene un riesgo de pérdida de un importe de 75 (en unidades monetarias apropiadas) con la probabilidad evaluada p=0,01. El patrimonio inicial U_0 es 100 y la función de utilidad $1-e^{-aU}$, siendo el coeficiente a=0,01. ¿Cuánto puede ser la prima como máximo de tal manera que, en términos de utilidad, le resulte preferible contratar el seguro?

Ejercicio 6.6.3 Probar que una función de utilidad G y la transformación lineal $\overline{G}=a\cdot G+b$, con $a>0$, ambas conducen al mismo orden de preferencias, es decir, $G_u > G_v$ *si y sólo si* $\overline{G}_u > \overline{G}_v$.

6.6.6 Asignación del recargo de seguridad - una conexión con la teoría de los juegos con multiples jugadores

(a) El problema del recargo de seguridad. Una compañía de seguros necesita un margen de solvencia U como protección en contra de las fluctuaciones de los riesgos. Las fórmulas del tipo de (6.1.8) se utilizaron como una medida de aproximación para las secciones anteriores y el problema se va a considerar de manera más detallada en la sección 13.2. Omitiendo el término de asimetría en (6.1.8), se supone que el capital mínimo requerido es

$$U = y \cdot \sigma_x = y \cdot P \cdot \sqrt{r_2 / n + \sigma_q^2} \tag{6.6.23}$$

donde y es un factor de proporcionalidad, digamos 3. En el caso de un compañía privada se espera que la cartera proporcione un beneficio sobre este capital. En el caso de una compañía mutua, se creará U por autofinanciación y se mantendrá a través del recargo de seguridad λ, que da un rendimiento total λP proporcional a U, o, como es aproximadamente lo mismo de acuerdo con (6.6.23) al desvío estándar σ_x de los siniestros acumulados.

Otra manera de llegar al mismo resultado es suponer una situación hipotética donde un grupo de asegurados van a establecer una compañía de seguros y el capital inicial mínimo U consstituirá por medio de una contribución por parte de cada miembro del grupo.

(b) El enfoque de múltiples jugadores. Nótese que las fórmulas y el razonamiento anteriores sólo sugieren que el ingreso total del recargo de seguridad debería ser proporcional al capital mínimo requerido U o a el desvío estándar σ_X , es decir,

$$\lambda P = kU \tag{6.6.24}$$

donde k es el factor de proporcionalidad. Como P es el ingreso total por primas asociado con toda la cartera, esto no determina cómo se distribuirá el recargo total entre las pólizas individuales o los grupos de pólizas. Un enfoque natural sería recargar todas las pólizas de igual manera en proporción a el desvío estándar o, posiblemente, a otra medida de riesgo. Una explicación racional es permitir que cada póliza pague para la contribución que su volatilidad hace al requerimiento del capital total de la cartera. En realidad éste es un procedimiento estándar que con frecuencia se propone en la bibliografía actuarial. Ahora vamos a demostrar algunas consecuencias, utilizando un ejemplo simple.

Supongamos que la cartera está compuesta por tres grupos de asegurados. El grupo 1 incluye todos los riesgos pequeños, tales como automóviles, viviendas familiares, etc., el grupo 2 contiene grandes riesgos tales como plantas industriales, barcos, aviones, etc. y el grupo 3 se caracteriza por variaciones a corto plazo excepcionalmente grandes tales como es típico para seguros forestales u otras coberturas contra fenómenos naturales. Estas características básicas aparecen en la Tabla 6.6.2.

La cantidad U_j es el capital requerido (6.6.23) si cada grupo j constituye un colectivo de seguros separado. Sin perder la generalidad, el

factor k de proporcionalidad se toma igual a 1. U_{ib} es el requerimiento de capital si dos de los grupos constituyen un grupo de riesgos como un par (sección 6.2(e)) y finalmente U_{123}=27,6 es el capital para toda la cartera combinada.

Tabla 6.6.2 *Una cartera compuesta por tres grupos j=1,2,3. Los grupos combinados aparecen con ib. El número de siniestros esperados n, los índices de riesgo r (3.2.16), los desvíos estándares de la variable de ponderación σ_q, intensidad media de siniestro y el ingreso por prima P=nm aparecen para cada grupo. Unidad monetaria \$$10^6$.*

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
j	n_j	r_{2j}	σ_{qj}	m_j	P_j	U_j	ib	U_{ib}	G_{ib}	G_j	G_j^{σ}	G_j^{V}
12	10.000	5	0,05	0,0028	28,0	4,6	12	26,8	4,2	2,0	1,2	0,3
32	5.000	150	0,10	0,0088	44,0	26,4	13	8,1	3,2	5,1	7,1	9,2
3	1.000	5	0,80	0,0028	2,8	6,7	23	27,2	5,9	3,0	1,8	0,6
Σ	16.000	-	-	-	74,8	37,7				10,1	10,1	10,1

Es importante destacar que el requerimiento de capital combinado es considerablemente menor que la suma de los componentes por separado en la columna 7. Esta es la misma característica que se mostró en la sección 6.2(e).

La diferencia

$$G_{123} = U_1 + U_2 + U_3 - U_{123} = 10,1 \tag{6.6.25}$$

se denomina **ganancia** lograda por medio de la cooperación entre los grupos. El problema es cómo dividir la ganancia entre los grupos. Una condición natural es requerir que la participación G_j de cada grupo sea positiva, sujeta a la condición

$$\sum_{j=1}^{3} G_j = G_{123} \qquad (6.6.26)$$

de tal manera que se justifique ingresar en la cartera combinada en lugar de establecer una por separado. Otra condición es que no debería justificar a ninguno de los otros dos grupos establecer su propia compañía, excluyendo la tercera, es decir,

$$G_i + G_j > G_{ij} \qquad (i \neq j; \quad i, j = 1, 2, 3) \qquad (6.6.27)$$

donde G_{ij} es la ganancia si se combinan los grupos i y j, en comparación con capital requerido si están por separado. Por ejemplo $G_{12} = U_1 + U_2 - U_{12} = 4{,}2$ como aparece en la Tabla 6.6.2.

Las condiciones anteriores no son suficientes para determinar unívocamente las porciones G_j. Como una primera propuesta, estimemos estas porciones proporcionales al desvío estándar σ_X o, equivalentemente a los requerimientos por separado de capital U_j .Los resultados aparecen en la columna 12 de la Tabla 6.6.2. Puede observarse que la condición (6.6.27) no se cumple para la combinación 1,3. Los grupos 1 y 3 juntos ganarían menos (=1,2+1,8) que si establecieran su propia compañía con 2 (G_{13}=3,2). Esto indica que la regla de el desvío estándar sobrecarga a los colectivos de riesgo pequeños en favor de los grandes (grupo 2).

Esta situación es aún más inequitativa si la varianza se utiliza como una medida de riesgo, es decir, el recargo se define en proporción a la varianza. Esto aparece en la columna 13 de la Tabla 6.6.2.

Sin embargo, hay combinaciones (G_j) que cumplen todas las condiciones enunciadas. La columna 11 ilustra una. En la teoría del juego tal grupo de soluciones posibles se denominan **núcleo** del juego. Para

llegar a una solución única se necesitan más condiciones. La situación es similar a la del óptimo de Pareto de la sección 6.6.3(c). Sin embargo, excede el alcance de este libro considerar las diversas filosofías para compartir el núcleo entre los participantes. El lector podrá remitirse a la bibliografía acerca de la teoría del juego, tales como los ítems referidos en la sección 6.6.6(e) de más adelante.

La extensión del problema al caso de más de tres compañías es directo.

(c) Aspectos de equidad. El ejemplo anterior introdujo al problema del recargo de las primas un aspecto que es importante desde el punto de vista de la teoría como de la práctica. Las reglas de recargo, cualquiera sean, deberían evitar recargar excesivamente cualesquier tipo de seguros o grupos de riesgos de tal manera que el grupo o la combinación de grupos pueda lograr un seguro más económico por separado, por ejemplo, estableciendo su propia compañía (cautiva u otra). Sin embargo, en la práctica, los recargos de primas no equitativos puede no hacer surgir una nueva compañía. En su lugar, se puede esperar que algún asegurador de la competencia establezca una estructura de tarifas más equitativa. Entonces aquellos asegurados a los que se les sobrecarga probablemente llevarán las pólizas a esa compañía. Puede surgir un fenómeno de **selección**, en ese caso aquellas pólizas que están subvaluadas permanecerán y las sobrevaluadas irán a otro lado. Si esta tendencia crece, perjudicará severamente a la rentabilidad.

Las consideraciones anteriores en relación a los recargos de seguridad son igualmente aplicables para los recargos por gastos, con una advertencia similar. Esto se tratará con más detalle en el capítulo 11.

(d) Tamaño de la compañía. Otra observación interesante que puede hacerse a partir de (6.6.24) es que el recargo de seguridad

$$\lambda = kU / P \tag{6.6.28}$$

es más pequeño cuanto más grande sea la cartera. Esto significa que en teoría una compañía grande puede operar con un recargo de seguridad más bajo que un asegurador pequeño, siendo los demás elementos iguales.

(e) Referencias. El trabajo fundamental sobre la teoría de los juegos lo presentaron von Neumann y Morgenstern (1947). Owen (1969) y Driessen (1988) pueden tomarse como libros de estudio.

La idea de aplicar la teoría de los juegos en el terreno de los seguros fue sugerida por Borch (1960, 1961).

APENDICE A

Deducción de la fórmula de Poisson

A.1 Enfoques individuales y colectivos

La fórmula de Poisson (2.2.1) es una herramienta primaria en las consideraciones de la Teoría del Riesgo. En la sección A.2(a) se muestra cómo puede deducirse a partir de supuestos simples acerca de sus propiedades fundamentales; en la sección A.2(b) se muestra cómo la misma fórmula puede obtenerse como una expresión límite de la función de probabilidad binomial.

(a) Enfoque individual. Considérese un colectivo de riesgo consistente en N unidades de riesgo diferentes i. En la teoría del riesgo individual el número total de siniestros $\boldsymbol{k}$ en un colectivo de riesgo, durante un período de tiempo, por ejemplo un año, se plantea como una suma

$$\boldsymbol{k} = \Sigma_i \, \boldsymbol{k}_i \tag{A.1.1}$$

donde $\boldsymbol{k}_i$ denota el número de siniestros ocurridos en la unidad de riesgo i. Para cada $\boldsymbol{k}_i$ se plantea un modelo por separado.

Se supone que, por cada unidad de riesgo, los números de siniestros ocurridos en dos intervalos de tiempo disjuntos son mutuamente independientes y que la probabilidad de que ocurra un siniestro en un punto futuro fijo es igual a cero. Entonces $\boldsymbol{k}_i$ satisface los supuestos (1)-(3) de la sección 2.2(a) (en la práctica, en el caso de una unidad de riesgo, la exclusión de múltiples siniestros puede ser tomada como garantizada) y $\boldsymbol{k}_i$, entonces, se distribuye como una Poisson(n_i) con $n_i = E(\boldsymbol{k}_i)$, es decir