Dani laschinsky

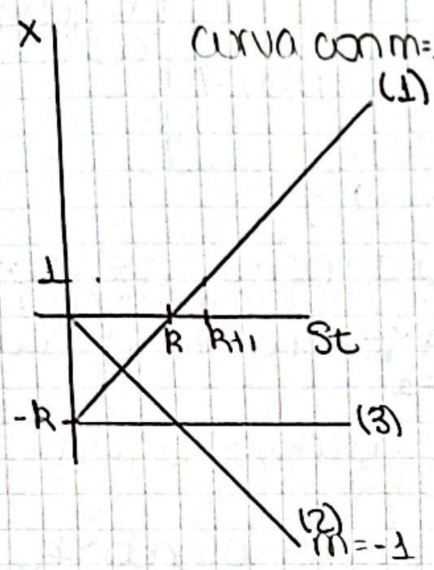
CLASE 0

VALUACIÓN DE DERIVADOS

• **Forward** → obligación de compra en una fecha futura T a un precio pactado K, un determinado activo subyacente. → STRIKE

$\boxed{\text{Pay Off}(X) = S_T - K}$ (1)

Parte compradora del forward:



Curva con m=1: Si el activo, al precio del vencimiento termina valiendo cero el valor del forward es negativo (-K)

• Si el activo termina valiendo K, el pay off va a ser cero, y si termina valiendo K+1 → X=1

• Si necesito comprar el activo en T → en T hago frente a un flujo de fondos $-S_T$ $\boxed{T = -S_T}$ (2)

Si ST termina valiendo cero, voy a tener que pagar cero. Si termina valiendo 1 tengo que pagar -1 → curva con pendiente -1

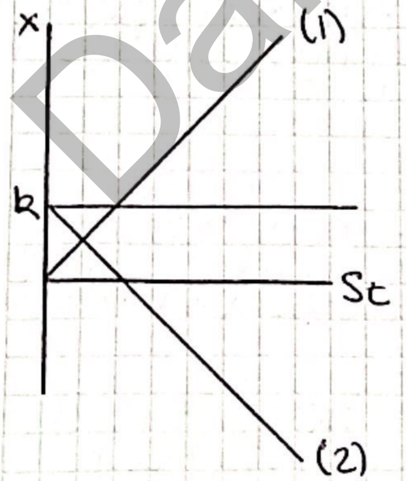
→ Si tengo los contratos (1) y (2) el flujo que vamos a tener en T va a ser: si termina valiendo cero → -K (-K+0)
uno → 1-K-1 = -K
dos → -K
} se compensan (3)

↳ Me quedo con un flujo de fondos negativo pero cte.

Cualquier empresa productiva se enfrenta ante esta situación cuando quiere comprar un insumo.

PARTE vendedora del forward

Fijo el precio de venta de un insumo que no tengo aún



• En T vendo a un valor S_T

$\boxed{X = K - S_T}$ (1)

• El flujo de fondos antes de la contratación del forward vendido tiene pendiente positiva e igual a 1

• Cuando el forward está vendido (para el emisor). Cuando $S_T=0$, $X=K$ / $S_T=1$, $X=K-1$ pendiente negativa igual a -1.

• $\boxed{T = S_T}$ (2)

Escaneado con CamScanner

En la mayoría de los casos se estudia como el derecho a cobrarlo. Quien recibe el derecho, es quien tiene que poner dinero para obtenerlo.

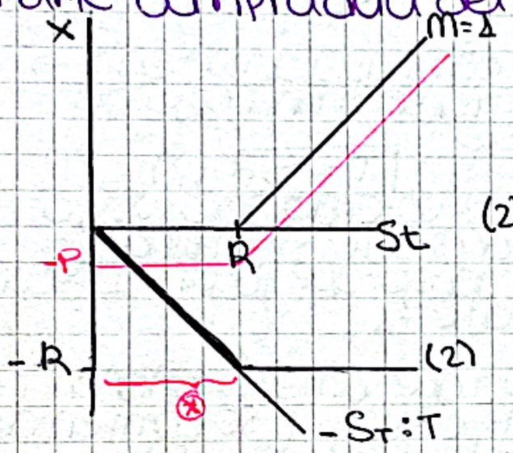
OPCIONES DE COMPRA o **CALL**: el comprador no tiene la obligación de comprar sino el derecho.

> **Calls**
> ↳ europeos (solo pueden ejercerse al vencimiento)
> ↳ Americanos (pueden ser ejercidos en cualquier momento)
> (vencimiento del contrato)

$$\boxed{X = (S_T - K)^+ = \max(S_T - K; 0)}$$

- Si $S_T > K$ → conviene cambiar K $ por el activo "in the money"
- Si $S_T < K$ → no le conviene "out of the money"
- Si $S_T = K$ → "at the money"

Parte compradora del call



Mientras que el activo esté por debajo de $K \to X = 0$. Si termina valiendo $K+1 \to X = 1 \Rightarrow$ A partir de K crece con pendiente $= 1$

(2) Suma de los dos flujos: a partir de K se compensa

Si el activo termina valiendo $> K$, tengo que poner K. Si termina valiendo $< K$, no pongo plata. Es un derecho si no me conviene compro al valor de mercado

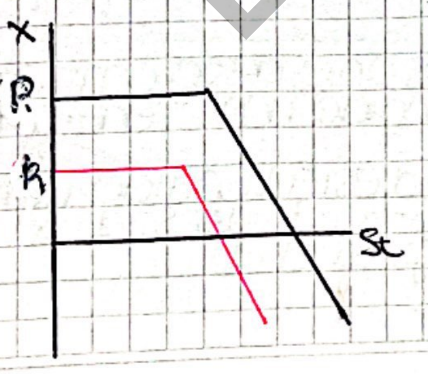
⊛ Diferencia entre comprar un forward y un call cuando tenemos la obligación de comprarnos el activo. Es la diferencia entre comprarlo al precio pactado o al precio de mercado, cuando nos conviene el precio de mercado.

* Le resto la prima para ver el beneficio del call

- Si el activo subyacente $< K \Rightarrow$ la acción no sería ejercida y el beneficio por herencia sería cero (no tengo obligación) si no ejerzo el call, pierdo solo la prima.

Emisor del call

$$X = -(S_t - K)^+$$



Es una situación especulativa. Si creo que no va a bajar, me conviene porque cobro la prima y al vencimiento no pago nada

Es una posición muy riesgosa porque puedo perder hasta ∞, no hay cota.

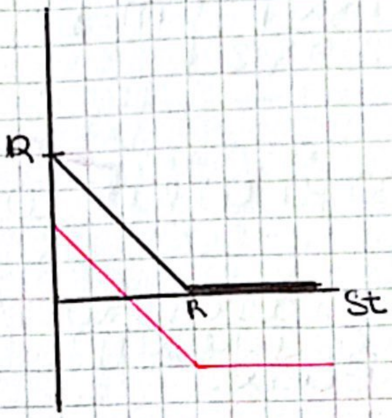
NOTA

Escaneado con CamScanner

PUT U OBLIGACIÓN DE VENTA: ofrecen al tenedor el derecho a vender un determinado subyacente en una fecha futura T a un determinado strike K

$$\boxed{X = (K - S_T)^+}$$

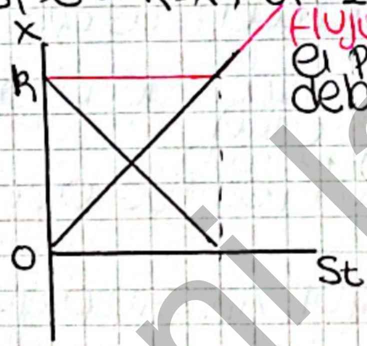
Si $S_T = 0 \rightarrow X = K$. Tengo el derecho a vender a K algo que vale cero
Si $S_T = 1 \rightarrow X = K - 1 \rightarrow$ bajo con $m = 1$
Si $S_T = K + 1 \rightarrow X = 0$



El valor de la prima está dado por la variación que espero que tenga el valor del activo.

- Me convendría tener un PUT cuando quiero vender algo y tengo miedo que el precio baje → compro un PUT que me asegure que si el precio baja, me pagan la diferencia.

En T vendo al valor del activo S_T. Si vale 1, me dan 1. Si además compro la opción de venta, el flujo de fondos es: $S_T = 0 \rightarrow K = X$, $S_T = 1$, $X = K$ (1 x barril, K-1 x PUT)



Flujo de fondo total. → Nos queda graficado el precio de venta. nunca vendo por debajo de K

ESTRATEGIAS

- **ESTÁTICAS**: conjunto de instrumentos que me compro al momento cero y los mantengo por un cierto tiempo. No cambia la cantidad
- **DINÁMICAS**: voy cambiando los componentes en el tiempo

NOTA

Escaneado con CamScanner

ESTRATEGIAS ESTÁTICAS CONOCIDAS

sobreprecio/diferencia

BULL SPREAD: compuesto por dos call. Apuesto a que el activo sube (TORO)

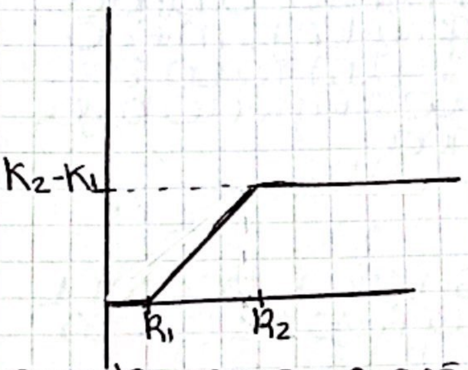
$$X = \underbrace{(S_t-K_1)^+}_{\text{compro call con strike } K_1} - \underbrace{(S_t-K_2)^+}_{\text{vendo con strike } K_2 \ (A)} \qquad K_1 < K_2$$

Si S_T termina valiendo menos que $K_1 \Rightarrow X=0$

$$\left.\begin{array}{l} K_1 \Rightarrow X=0 \\ K_1+1 \Rightarrow X=1 \\ K_1+2 \Rightarrow X=2 \end{array}\right\} m=1$$

Si termina valiendo $K_2 \rightarrow K_1=0$

Queda fijo porque cada peso que gano por un lado lo compenso por el otro, a partir de K_2

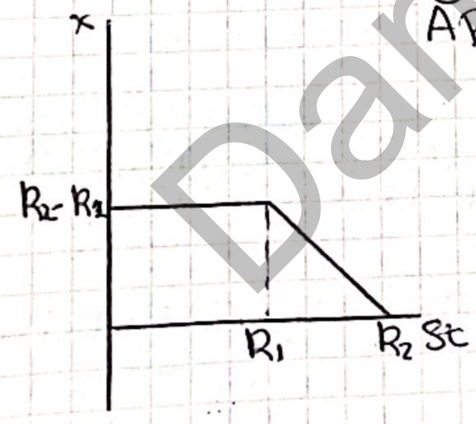


- El bull spread debería valer el valor del call que tengo menos el que debe.

- Queda como un gráfico de un call truncado. Lo que gano por un lado lo pierdo por el otro
- Lo que tengo que pagar de menos a diferencia del otro gráfico es A. (el valor del segundo call)
- Me convendría un bull porque es muy barato

Tener un bull spread es tener un valor positivo o cero $\Rightarrow$ tengo que poner una prima

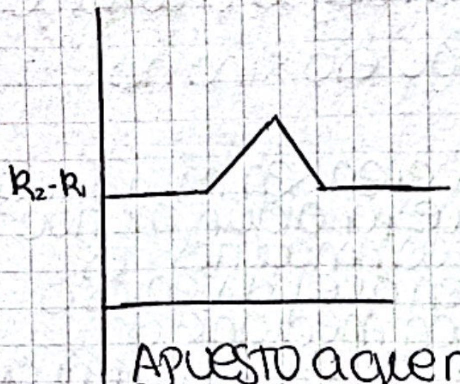
BEAR SPREAD: compuesto por dos put. Apuesto a que el activo
Apuesto a que el activo baje. (OSO)



Dani laschinsky

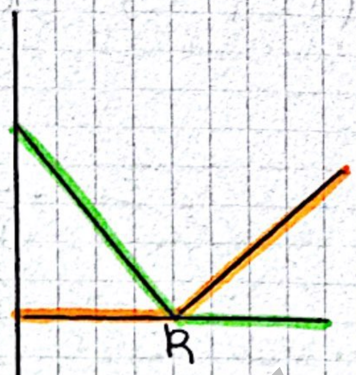
Escaneado con CamScanner

BUTTERFLY



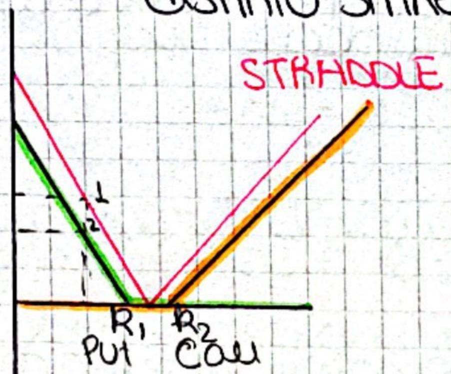
Apuesto a que no va a haber mucha volatilidad en el precio.

STRADDLE: CALL + PUT



Apostamos a la volatilidad, a que el activo va a variar de precio.

STRANGLE: CALL + PUT con distinto strike



Apostamos aún más a la volatilidad.

- Debería pagar más el de adentro. $1 > 2$
  El de afuera paga más en casos más remotos.
- El de afuera debería ser más barato.

STRIP

- Tengo más pendiente de un lado que del otro. De un lado tengo m=2 (2 puts) y del otro m=1 (1 call)
- Apuesto a la volatilidad, pero un poco más a que pierda que a que gane

STRAP → idem strip pero al revés. m=1 en put y m=2 en call

NOTA

CALL ASIÁTICO. Instrumento financiero que permite cambiar un flujo cierto por uno incierto.

$$X = \left(\sum_{i=1}^{T} \frac{S_i}{T} - K \right)^+$$

→ Pagamos S_K por el valor del promedio que vaya a tener un activo a lo largo del tiempo.
Si es positivo pago eso, sino no pago nada.

- Estos contratos suelen ser muy utilizados por empresas que por algún motivo compran o venden commodities. Es común en casos en que las ventas o compras se realicen mediante un suministro constante de algún producto, por lo que el precio a cobrarse o pagarse de este producto suele surgir como promedio de los distintos valores que toma el producto en cuestión de un determinado tiempo. (termino controlando la volatilidad)

PUT ASIÁTICO

$$X = \left(K - \sum_{i=1}^{T} \frac{S_i}{T} \right)^+$$

- Para definir un derivado hay que definir una regla que nos indique cómo transformar la trayectoria de precios del activo en un número.
En todos los casos un derivado es un pay off que está definido como una función cuyo origen es la trayectoria subyacente del activo de precios y cuya imagen es un número real.

LOOK BACK OPTIONS: Provee al tenedor la posibilidad de conseguir el beneficio en que se habría incurrido si se hubiera comprado un determinado activo en el momento en el que tomó su mínimo valor. O si se lo hubiera vendido en el momento en el que tomó su máximo valor y se lo hubiera recomprado a vencimiento.

Lookback call: $X = S_T - m_T$ mínimo

Lookback put: $X = M_T - S_T$ máximo

NOTA

Dani Taschinsky

Escaneado con CamScanner

Instrumento financiero derivado: contrato a través del cual el tenedor recibe en una fecha futura una cantidad de dinero determinada a través de una función cuyo dominio es el conjunto de trayectorias futuras de precios del activo subyacente y cuya imagen es la recta real. 12

CLASE 1: MODELO DISCRETO

- Sirve para entender todas las técnicas financieras de valuación.

ÁRBOL BINOMIAL UNIPERIÓDICO

ACTIVOS: $S_0 \nearrow S_1^u$, $S_0 \searrow S_1^d$

BONOS: $B_0 \nearrow B_1$, $B_0 \searrow B_1$

- sin riesgo (supuesto)

DERIVADO: $? \nearrow X^u$, $? \searrow X^d$

↳ cuánto vale el activo un momento antes

→ se intentará replicar el pay off de un mercado pero ahora con carteras formadas por bonos y activos subyacentes.

cartera con ϕ activos y ψ bonos

$(\phi ; \psi) \rightarrow V_0 = \phi S_0 + \psi B_0$ → valor de la cartera al momento cero.

- ψ y ϕ pueden tomar valores negativos → debo un bono. me obligué a devolver cierta cantidad de dinero. (préstamo)
  - ↳ vender en descubierto
  - ↳ dame lo que vale un bono hoy y te devuelvo lo que valga mañana

RÉPLICA DE CARTERA: armar algo que arroje un flujo de fondos igual al flujo de fondos del instrumento que queremos valuar.

→ el objetivo es encontrar una cartera formada por ϕ activos subyacentes y ψ bonos que replique el pay-off del derivado.

Matemáticamente significa encontrar un vector $(\phi ; \psi)$ que cumpla con:

$$\begin{cases} X^u = \phi S_1^u + \psi (1+i) \\ X^d = \phi S_1^d + \psi (1+i) \end{cases} \Rightarrow (\phi^* ; \psi^*)$$

Al momento cero esa cartera vale:
Precio del derivado en ausencia de arbitraje

$$V_0 = \phi^* S_0 + \psi^* B_0$$ → vale lo mismo que X^u o X^d

→ el derivado X, en el momento cero es V_0 → como nos ofrecen el mismo flujo de fondos, tienen el mismo valor actual.

$$V_0 = X_0 \Rightarrow V_0 \begin{matrix} \nearrow X^u \\ \searrow X^d \end{matrix}$$

Si existe un contrato con un pay-off que se puede conseguir (replicar) con una cartera en bonos, entonces el valor de ese contrato en ausencia de arbitraje es igual al de la cartera que lo replica.

↳ no existe la posibilidad de ganar dinero sin riesgos

Dani Jasinsky

Escaneado con CamScanner

Hay un argumento de indiferencia

ARBITRAJE: ganar dinero sin riesgo.

- Si el valor del arbitraje fuera mayor que V_0 → puedo armar un arbitraje con la cartera $(\phi; \psi; -1)$
  - cantidad de derivados a comprar (emitir un derivado)
  - ↳ Para ganar dinero sin riesgo. vendo lo caro y compro lo barato.
    - ↳ En este caso lo caro es el derivado, por eso lo emito/vendo con $X = 11$, $V = 10$ } con los 11 de emitir el derivado, gano 1 y uso 10 para comprar la cartera.
      - Si el activo sube, va a valer lo que recaude con la cartera → vendo la cartera y pago el pay off del derivado. → Gané \$1
      Si sube → vale X^u, si baja → vale X^d

con $X = 9$, $V = 10$ } vendo la cartera en descubierto y compro un derivado. Al momento en que tengo que pagar el pay off me devuelven la cartera (que va a valer lo mismo) y pago.
La ganancia la hago con la diferencia inicial: me quedo con plata de vender la cartera más barato que lo que compré el derivado

ARBOL BINOMIAL MULTIPERIÓDICO

$$\boxed{S_1^u \begin{smallmatrix} \nearrow S_2^{uu} \\ \searrow S_2^{ud} \end{smallmatrix} \qquad B_1 \begin{smallmatrix} \nearrow B_2 \\ \searrow B_2 \end{smallmatrix} \qquad \overset{?}{V_1^u} \begin{smallmatrix} \nearrow X^{uu} \\ \searrow X^{ud} \end{smallmatrix}} \quad (1)$$

$$S_0 \begin{smallmatrix} \nearrow \\ \searrow S_2^d \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \nearrow S_2^{du} \\ \searrow S_2^{dd} \end{smallmatrix} \qquad B_0 \begin{smallmatrix} \nearrow \\ \searrow B_1 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \nearrow B_2 \\ \searrow B_2 \end{smallmatrix} \qquad V_0? \begin{smallmatrix} \nearrow \\ \searrow \end{smallmatrix} \overset{?}{V_1^d} \begin{smallmatrix} \nearrow X^{du} \\ \searrow X^{dd} \end{smallmatrix} \quad (2)$$

$$(1)\begin{cases} X^{uu} = \phi_1^u S_2^{uu} + \psi_1^u B_2 \\ X^{ud} = \phi_1^u S_2^{ud} + \psi_1^u B_2 \end{cases} \Rightarrow \phi_1^{u*}\ \psi_1^{u*} \Rightarrow V_1^u = \phi_1^{u*} S_1^u + \psi_1^{u*} B_1 = ?$$

↳ Si no se cumple la igualdad hay posibilidades de arbitraje (valor de la cartera = valor del derivado en el mismo momento)

$$\begin{cases} X^{du} = \phi_1^d S_2^{du} + \psi_1^d B_2 \\ X^{dd} = \phi_1^d S_2^{dd} + \psi_1^d B_2 \end{cases} \quad \phi_1^{d*} ; \psi_1^{d*} \Rightarrow V_1^d = \phi_1^{d*} S_1^d + \psi_1^{d*} B_1$$

Dani Iaschinsky

Escaneado con CamScanner

Armamos una cartera que me compraría en 0 y quiero que valga V_1^u o V_1^d

$$\left.\begin{array}{l} V_1^u = \varnothing_0 S_1^u + \psi_0 B_1 \\ V_1^d = \varnothing_0 S_1^d + \psi_0 B_1 \end{array}\right\} \varnothing_0^* ; \psi_0^* \rightarrow V_0 = \varnothing_0^* S_0 + \psi_0^* B_0$$

Valor del derivado mayor que la cartera V_0: $V_0 = 10$, $X_0 = 11$
vendo el derivado, guardo \$1 y compro la cartera V_0. La obligación de la venta la tengo que pagar en el momento 2. El problema es que la cartera me da un flujo de fondos al momento 1, y si no reinvierto y hay fluctuaciones, pierdo plata. Como el precio de la cartera aumenta, me pagan más y, con esos precios, compro otras cantidades, otra cartera que me la pagan en 2, al mismo precio de la deuda contraída por el derivado ($V = X$)

Valor del derivado menor que la cartera V_0: $V_0 = 10$, $X_0 = 9$
vendo la cartera, gano \$1 y compro el derivado. Ahora tengo una deuda en el momento 1, que la voy a pagar vendiendo otra cartera en descubierto. La segunda deuda la pago en el momento 2, con el valor del derivado

ejemplo:

$$10 \begin{cases} 12 \begin{cases} 14 \\ 10 \end{cases} \\ 8 \begin{cases} 10 \\ 6 \end{cases} \end{cases} \qquad 1 \begin{cases} 1{,}1 \begin{cases} 1{,}2 \\ 1{,}2 \end{cases} \\ 1{,}1 \begin{cases} 1{,}2 \\ 1{,}2 \end{cases} \end{cases} \qquad \begin{cases} \begin{cases} 4 \\ 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2 \\ 0 \end{cases} \end{cases}$$

El valor del derivado depende de la trayectoria y no de un solo valor

$X = S_T - m_T \rightarrow$ LOOKBACK CALL (m_T: mínimo)

4 (14 - 10)

0 (10 - 10)

2 (10 - 8)

0 (6 - 8) < 0

NOTA

Dani Iaschinsky

Escaneado con CamScanner

CLASE 2

· Una cartera es una variable aleatoria y una cartera es una sucesión de V.A → una estrategia es un proceso estocástico. → sucesión de carteras → sucesión de VA →

· **Estrategias** cumplen con las siguientes condiciones:
- Autofinanciable: se financia sola, no pongo plata en el medio
- Replica el pay-off del derivado que queremos valuar → la última cartera coincide con el valor del pay-off del derivado → Replicabilidad

Matemáticamente:

· **Condición de autofinanciabilidad** (1)

$$\phi_{t+1} \cdot S_{t+1} + \psi_{t+1} \cdot B_{t+1} = \phi_t \cdot S_{t+1} + \psi_t B_{t+1}$$

Para todo t, puede comprarse la cartera del momento t+1 con la cartera del momento t.

· **Condición de replicabilidad**

$$\phi_T \cdot S_{t+1} \psi_T \cdot B_{t+1} = X \quad \Rightarrow \quad V_T = X$$

(1) La cartera que me compré en t, valuada en t+1, me tiene que alcanzar para comprar otra cartera en t+1

$$\phi_t S_{t+1} + \psi_t B_{t+1} = \phi_t S_t + \psi_t B_t + \phi_t \Delta S_t + \psi_t \Delta B_t$$

$$V_{t+1} = V_t + \phi_t (S_{t+1} - S_t) + \psi_t (B_{t+1} - B_t)$$

(*) $\sum_{t=s}^{T-1} [V_{t+1} - V_t] = \sum_{t=s}^{T-1} [\phi (S_{t+1} - S_t) + \psi (B_{t+1} - B_t)]$

$$V_T = V_s + \sum_{t=s}^{T-1} [\phi_t (S_{t+1} - S_t) + \psi (B_{t+1} - B_t)]$$

↳ si una estrategia cumple con esta ecuación, es autofinanciable

El valor de la estrategia en t+1 se consigue con el valor de la estrategia en t más el cambio en el valor de la cartera que se mantiene desde t hasta t+1

Explicación a través de bonos

Cuántos bonos se pueden comprar con una acción/cartera

$Z = \frac{S}{B}$ Z representa la cantidad de bonos que vale 1 activo.

$E = \frac{V}{B}$ E representa la cantidad de bonos que vale la cartera.

Condición de autofinanciabilidad:

$$\phi_{t+1} Z_{t+1} + \psi_{t+1} = \phi_t Z_{t+1} + \psi_t$$

$$\begin{cases} E_{t+1} = \phi_t Z_{t+1} + \psi_t \\ E_T = E_s + \sum_{t=s}^{T-1} \phi_t \Delta Z_t \end{cases}$$

Desaparece ψ_t porque el valor de un bono no varía en término de bono.

NOTA

Dani Iaschinsky

Escaneado con CamScanner

La cantidad de bonos para comprar la estrategia en el momento T se consigue con la cantidad de bonos que vale la estrategia en S más las sucesivas variaciones

Condición de replicabilidad: $E_T = \frac{X}{B_T}$

Explicación a través de activo subyacente

$D_t = \frac{V_t}{S_t}$ $\quad Y_t = \frac{B_t}{S_t}$

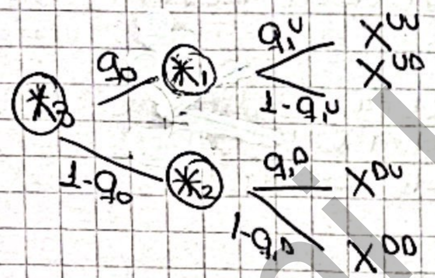
Condición de autofinanciamiento: $D_{t+1} = \varphi_t + \psi_t Y_{t+1} \Rightarrow$

$D_{t+1} = D_t + \psi_t \Delta Y_t \rightarrow D_T = D_S + \sum_{t=s}^{t-1} \psi_t \Delta Y_t$

Condición de replicabilidad: $D_T = \frac{X}{S_t}$

La cantidad de acciones que valdrá el pay-off del derivado coincidirá con la cantidad de activo subyacente que valdrá la estrategia.

ESPERANZA CONDICIONADA



F = información/filtración
F = donde estoy parada

Martingala: $E(Y|F_s) = Y_s \quad s<t$

Si estoy en (*1), el valor de x:

$E_Q(X|F_1) = q_1^u X^{uu} + (1-q_1^u) X^{u0}$

Si estoy en (*2), el valor de x

$E_Q(X|F_1) = q_1^0 X^{0u} + (1-q_1^0) X^{00}$

Esperanza según probabilidades "q" de la VA X dada la info que hay en 1.

$E_Q[X|F_2] \begin{cases} X^{uu} \\ X^{u0} \\ X^{0u} \\ X^{00} \end{cases}$

Si estoy en (*3), el valor de x:

$E_Q(X|F_0) = q_0 q_1^u X^{uu} + q_0 (1-q_1^u) X^{u0} + (1-q_0) q_1^0 X^{0u} + (1-q_0)(1-q_1^0) X^{00}$

↳ esperanza según probabilidades q de la VA x dada la info que hay en cero

NOTA

Dani Iaschinsky

Escaneado con CamScanner

Propiedades de las esperanzas condicionadas

1. La esperanza es un proceso estocástico porque es una sucesión de variables aleatorias. Depende del momento en el que estoy parado. $E_Q[X/F_T]$: PE

2. La esperanza de la variable aleatoria al momento que la descubro (T):

$$EQ(X/F_T) = X$$

3. Tower Property $EQ[EQ(X/F_T)/F_S] = EQ(X/F_S) \quad t > s$

Dados dos factores t y s, la esperanza de x en el momento s se calcula con la esperanza de lo que voy a esperar en t. Lo que esperamos respecto de lo que vamos a esperar mañana, coincide con lo que esperamos hoy.

Medidas de probabilidad

La prima del derivado en términos de bonos sería igual a la esperanza (calculada si la prob. q que hacen que el proceso sea martingala) de la VA "Pay off en término de bonos" cond. condicionada a la info que hay.

$$EQ\left(\frac{X}{B_t}/F_S\right) = \underbrace{EQ(E_S/F_S)}_{E_S} + \underbrace{EQ\sum_{t=s}[\phi_t(Z_{t+1}-Z_t)]/F_S}$$

$E_S \downarrow$

Hay que hallar las probabilidades que hacen que el término valga cero

Cuánto va a valer la cartera que quiero tener al momento s, dada la info que tengo en s.

$$EQ\left(\frac{X}{B_T}/F_S\right) = E_S$$

$$EQ\left(\sum_{t=s}^{T-1}[\phi_t(Z_{t+1}-Z_t)]/F_S\right) = \sum_{t=s}^{T-1} EQ[\phi_t(Z_{t+1}-Z_t)/F_S]$$

Aplicando Tower Property: la esperanza que quiero calcular coincide con la esperanza de lo que voy a esperar

$$EQ[\phi_t(Z_{t+1}-Z_t)/F_S] = EQ\{EQ[\phi_t(Z_{t+1}-Z_t)/F_T]/F_S\}$$

→ lo conozco en t=1

$$0 = q_t(Z^u_{t+1}-Z_t) + (1-q_t)(Z^d_{t+1}-Z_t)$$

→ al momento t es conocido → constante

$$\boxed{q_t = \frac{Z_t - Z^d_{t+1}}{Z^u_{t+1} - Z^d_{t+1}}}$$

Entonces el valor esperado del pay off dividido el valor del bono coincide con E_S — No es necesario conocer cada una de las carteras para encontrar el valor del derivado en ausencia de arbitraje.

$$EQ\left(\frac{X}{B_T}/F_S\right) = E_S$$

con $E_S = \frac{V_S}{B_S}$

→ valor del bono en el mismo momento

Multiplico por B_S a ambos lado

$$B_S\, EQ\left(\frac{X}{B_T}/F_S\right) = \frac{V_S}{\cancel{B_S}}\cancel{B_S} \Rightarrow \boxed{B_S\, EQ\left(\frac{X}{B_T}/F_S\right) = V_S}$$

$$\boxed{EQ\left(X\frac{B_S}{B_T}/F_S\right) = V_S}$$

↳ Factor de actualización

Escaneado con CamScanner

CLASE 3

Valuamos un call cuyo strike es $K=9$

$$X=(S_T-K)^+$$

$$\frac{X}{B}=E_s+\sum_{t=s}^{T-1}[\phi_t(Z_{t+1}-Z_t)]$$

→ valor del derivado en término de bono.

$$E_Q\left(\frac{X}{B}/F_s\right)=E_s+E_Q\left\{\sum_{t=s}^{T-1}[\phi_t(Z_{t+1}-Z_t)]/F_s\right\}$$

$$B_s\,E_Q\left(\frac{X}{B}/F_s\right)=B_s E_s=V_s$$

S			B			X		
	10,816	11,699		1,012	1,018		V_1^u	2,699
10		10,185	1		1,018	V_0		1,185
	9,417	10,185		1,012	1,018		V_1^D	1,185
		8,867			1,018			0

Sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}X^{UU}=\phi_1^u S_2^{UU}+\varphi_1^u B_2\\ X^{UD}=\phi_1^u S_2^{UD}+\varphi_1^u B_2\end{cases}\Rightarrow\begin{aligned}2{,}699&=\phi_1^{u*}11{,}699+\varphi_1^{u*}1{,}018\\1{,}185&=\phi_1^{u*}10{,}185+\varphi_1^{u*}1{,}018\end{aligned}$$

$$\boxed{\phi_1^{u*}=1}\quad\boxed{\varphi_1^{u*}=-8{,}841}$$

$$V_1^u=\phi_1^{u*}S_1^u+\varphi_1^{u*}B_1$$

$$\Rightarrow V_1^u=1.10{,}816-8{,}841.1{,}012$$

$$\boxed{V_1^u=1{,}8689}$$

$$\begin{cases}X^{DU}=\phi_1^D S_2^{DU}+\varphi_1^D B_2\\ X^{DD}=\phi_1^D S_2^{DD}+\varphi_1^D B_2\end{cases}\Rightarrow\begin{aligned}1{,}185&=\phi_1^{D*}10{,}185+\varphi_1^{D*}1{,}018\\0&=\phi_1^{D*}8{,}867+\varphi_1^{D*}1{,}018\end{aligned}$$

$$\boxed{\phi_1^{D*}=0{,}899}\quad\boxed{\varphi_1^{D*}=-7{,}831}$$

$$V_1^D=\phi_1^{D*}S_1^D+\varphi_1^{D*}B_1$$

$$\Rightarrow V_1^D=0{,}899.9{,}417-7{,}831.1{,}012$$

$$\boxed{V_1^D=0{,}5409}$$

$$\begin{cases}V_1^u=\phi_0 S_1^u+\varphi_0 B_1\\ V_1^D=\phi_0 S_1^D+\varphi_0 B_1\end{cases}\Rightarrow\begin{aligned}1{,}18689&=\phi_0\,10{,}816+\varphi_0\,1{,}012\\0{,}5409&=\phi_0.9{,}417+\varphi_0\,1{,}012\end{aligned}$$

$$\boxed{\phi_0^*=0{,}94925}\quad\boxed{\varphi_0^*=-8{,}2986}$$

$$V_0=\phi_0^*S_0+\varphi_0 B_0\Rightarrow V_0=0{,}94925.10-82986.1$$

$$\boxed{V_0=1{,}1939}$$

Dani Iaschinsky

Escaneado con CamScanner

Podemos llegar a V_0, V_1^u, V_1^D con un método alternativo:
sabiendo:

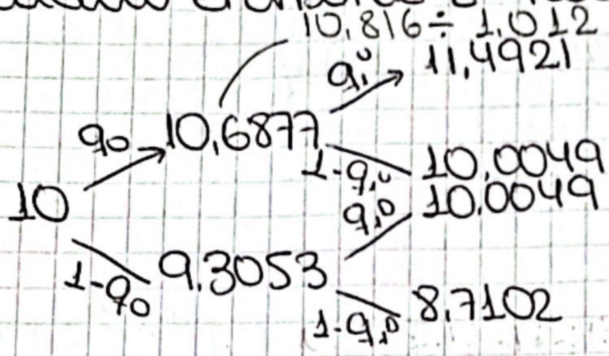
$$Z_t = S_t \cdot B_t^{-1} \qquad E_S = V_S B_S^{-1}$$

cuántos pesos vale 1 bono

$$\boxed{B_S\, EQ\left(\frac{X}{B_t} / F_S\right) = E_S B_S = V_S}$$ → voy a comprobarlo.

cuántos bonos vale un derivado.

Calculo el árbol de Z: Todo el arbol S. dividido B.



- $10 = q_0 \cdot 10{,}6877 + (1-q_0)\, 9{,}3053 \;//\; q_0 = \dfrac{10-9{,}3053}{10{,}6877-9{,}3053}$

$$\Rightarrow \boxed{q_0 = 0{,}503} \qquad q_t = \frac{Z_t - Z_{t+1}^{D}}{Z_{t+1}^{u} - Z_{t+1}^{D}}$$

- $q_1^u = \dfrac{10{,}6877-10{,}0049}{11{,}4921-10{,}0049}$ $\qquad \boxed{q_1^u = 0{,}459}$

- $q_1^D = \dfrac{9{,}3053-8{,}7102}{10{,}0049-8{,}7102}$ $\qquad \boxed{q_1^D = 0{,}459}$

Calculo el valor esperado del pay off en términos de bonos

$$E_S = \left[\frac{\overset{X^{uu}}{2{,}699}}{1{,}018_{B_2}} q_1^u + \frac{\overset{X^{uD}}{1{,}185}}{1{,}018_{B_2}} (1-q_1^u)\right] 1{,}012 = B_1\, EQ\left(\frac{X}{B} / F_1\right)$$

$$E_S = 1{,}8688 = V_1^u$$

$$E_S^D = \left[\frac{1{,}185}{1{,}018} \cdot q_1^D + \frac{0}{1{,}018} (1-q_1^D)\right] 1{,}012 \Rightarrow E_1^D = 0{,}54 = V_1^D$$

$$E_0 = \left[\frac{1{,}8689}{1{,}012} q_0 + \frac{0{,}5409}{1{,}012} (1-q_0)\right] 1 \rightarrow E_0 = 1{,}1945 \cong V_0$$

→ Calculo el valor esperado y lo actualizo

NOTA

Dani laschinsky

Escaneado con CamScanner

$\frac{B_s}{B_t}$ → Factor de actualización. Está implícito en el precio del bono → estamos calculando el valor esperado y lo estamos actualizando.

$$S_{t+\Delta t} = S_t e^{\mu\Delta t \pm \sigma\sqrt{\Delta t}} \qquad B_{t+\Delta t} = B_t e^{r\Delta t}$$

Δt → tiempo esperado en años

μ → modela la tendencia

σ → modela la volatilidad

En el ejemplo: $\mu = 0{,}11$ $\quad K = 9$ $\quad T = 2/12$
$\sigma = 0{,}24$ $\quad S_0 = 10.$
$r = 0{,}07$ → factorización continua.

- Si aumento el μ, aumentan los valores del activo.
  Si aumento σ, la diferencia se hace mayor
  Si aumento r, aumentan los factores de actualización

$\uparrow K \to \downarrow V_0$ · El valor de K tiene una relación inversa con V_0. Si $\uparrow K \to \downarrow V_0$. Financieramente ya no tengo el derecho a comprar algo a 9, sino a 10 → me conviene menos.

$\uparrow S_0 \to \uparrow K$ · El valor de S_0 tiene una relación directa con K. Si $\uparrow S_0$, el árbol se va para arriba, tengo el derecho a comprar a 9 algo que vale más.

$\uparrow \mu \to \uparrow V_0$ · El valor de μ tiene una relación directa con V_0. Si sube μ, espero que valga más el activo, entonces me conviene más el derecho a comprar a 9.

· El valor de σ tiene una relación directa con V_0. Me conviene que pueda valer 20 o 0 a que pueda valer 10 u 8.

$\uparrow T \to \uparrow V_0$ · Si el T es más grande, el árbol es más largo. Pero se puede demostrar matemáticamente que a mayor vencimiento, más vale V_0.

$\uparrow r \to \uparrow V_0$ · Si aumenta r, sube V_0. Necesito ~~deber~~ menos dinero para devolver lo mismo a medida que r este más alta → el valor de la cartera que replica este pay off es más alto.

Escaneado con CamScanner

Interpretación de las probabilidades q

Nos inventamos tantos derivados como nodos tengamos al final

caso contrario, cero

proporción (no es una prob)

$$Q^{uu\,uu} = B_T \mathbb{1}^{uu\,uu} \qquad V_0^{uu\,uu} = B_0 q^{uu\,uu}$$

→ El valor actual es una fracción del bono.

$$Q^{uu\,ud} = B_T \mathbb{1}^{uu\,ud} \qquad V_0^{uu\,ud} = B_0 q^{uu\,ud}$$

$$\vdots$$

$$Q^{dd\,dd} = B_T \mathbb{1}^{dd\,dd} \qquad V_0^{dd\,dd} = B_0 q^{dd\,dd}$$

$$\overline{\quad B_T \quad} \qquad \overline{\quad B_0 \quad}$$

Si me compro todos estos derivados, voy a tener un bono ya que puede suceder solo una de las posibilidades

La suma de las proporciones "q" da 1 por un motivo de arbitraje: tener todos los derivados me da lo mismo que tener un bono. Da 1 por un motivo de arbitraje, no por ser probabilidades

Supongamos que tenemos un derivado que paga

$$X = \sum_{\forall \square} \underbrace{X^{\square} B_T^{-1}}_{\text{cant. de derivados}} \underbrace{B_T \mathbb{1}^{\square}}_{\text{Derivados}} \qquad \square = uu..uu,\ = uu..ud,\ dd..dd$$

$$V_0 = \sum_{\forall \square} X^{\square} B_T^{-1} B_0 q_0^{\square} = B_0 \sum_{\forall \square} X^{\square} B_T^{-1} q_0^{\square}$$

→ El valor de cualquier derivado tiene que ser el pay off en término de bonos por una proporción que sume 1.

- Valuar la cartera al momento cero, me debería dar igual al bono si no hay arbitraje:

$$V_0\left(\sum_{\square} B_T \mathbb{1}^{\square}\right) = B_0$$

$$V_0(B_T \mathbb{1}^{\square}) \geq 0$$

- Las q no pueden ser negativas, porque se podría armar un arbitraje.

Dani Iaschinsky

Escaneado con CamScanner

Habría que demostrar en forma genérica:

$q^{A,BC} = q^{AB} \, q^{AB,C}$: La probabilidad de que estando en A, pase a B y a C, es igual a la probabilidad de que estando en A pase B × la probabilidad de que estando en B (luego de haber estado en A) pase C.

→ Como las q son proporciones y no probabilidades, hay que demostrar que esto pasa.

$q^{A,BC}$ = el valor de un derivado en A, que paga un bono si ocurre B y C
> en término de bonos.

$q^{A,B}$ = Valor en A del derivado en término de bonos, que paga un bono si ocurre B

$q^{AB,C}$ = el valor de un derivado en B (habiendo transcurrido A) que pago un bono en C.

Suponiendo que ya hice el sistema de ecuaciones y ya sé cuánto va a valer en pesos cada derivado, y, por ende, sé cuánto va a valer en términos de bonos → ¿se respeta la regla? Sí, porque sino se podría armar un arbitraje.

Para armar un arbitraje, compro una cierta cantidad de derivados →

nodo A $\quad q^{A,B}$ a una cantidad $q^{AB,C}$

Si ocurre B, tengo $q^{AB,C}$ bonos. Sino cero.

Tengo $q^{AB,C}$ bonos → puedo comprar el derivado que paga 1 bono si pasamos a C.

nodo B $\quad q^{AB,C}$

⇒ Me da lo mismo que comprarme el derivado que paga $q^{A,BC}$

$X = S_{t+1}^{A:u} \, 1^{A:u} + S_{t+1}^{A:d} \, 1^{A:D}$ → Parados en el nodo A.
→ Si el activo sube, cobro un activo. Lo mismo si baja → X = 1 activo

$V_A = S_T^A$

$X = S_{t+1}^{A:u} \, B_{t+1}^{-1} \, B_{t+1} \, 1^{A:u} + S_{t+1}^{A:d} \, B_{t+1}^{-1} \, B_{t+1} \cdot {}^{A:D}$

$X = S_{t+1}^{A:u} \, B^{-1} \, B_t \, q^{Au} + S_{t+1}^{AD} \, B_{t+1}^{-1} \, B_t \, q^{AD} = S_T^A$

$\Sigma q = 1$ $\qquad q^{A:u} = \dfrac{Z_t - Z_{t+1}^d}{Z_{t+1}^u - Z_{t+1}^d}$

NOTA

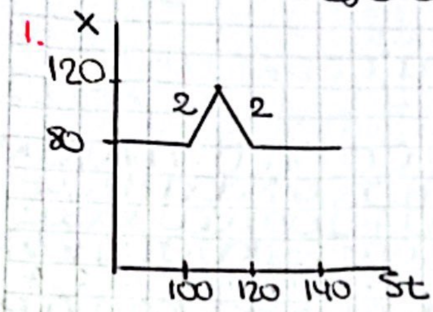
Danilaschinsky

Escaneado con CamScanner

CLASE 4

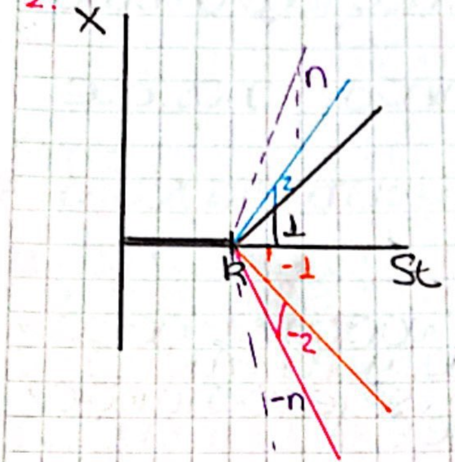
Ejercicio:

1.



Pay off de un call: $X=(S_T-K)^+$

2.



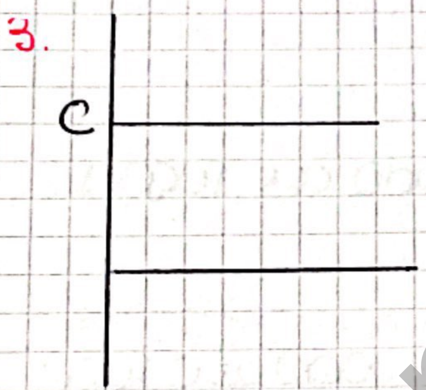
A partir de K empieza a crecer con m=1
con 2 calls → m=2   K+2 → X=4

Si debo un call y tengo -1 call   St<K → pago 0.
$S_T = K+1 \to X=-1 \to m=-1$
-2 call → m=-2

⇒ La pendiente es igual a cuánto cobro del call.

Replico con bonos cupón 0. → único flujo de fondo

3.



El bono tiene X=C con indiferencia del valor que tome el activo

Armo la estrategia: replico el gráfico (1) de izquierda a derecha.
• Primero tengo un bono cupón cero con valor nominal $80
Al gráfico le sigue una compra de 2 calls con strike 100. Se los tengo que agregar para que a partir de 100, la estrategia me empiece a dar $2 adicionales respecto de los $80 por cada $ adicional que termina valiendo el activo respecto de 100. ($S_T=101 \Rightarrow X=82$, $S_T=102 \to X=84$)
En 120=St, quiero que el gráfico se mantenga tengo que comprar algo que nos quite $2 por cada $ adicional que termina valiendo el activo respecto de $120. Para que compense con los dos calls que me siguen dando

NOTA

Dani Iaschinsky

Escaneado con CamScanner

Plata después de 120 ⇒ vender 2 calls con strike 120.
Ahora, para bajar con m=2, le tengo que agregar 2 calls con el mismo strike. ⇒ 4C(120)
En 140 tengo que comprar algo que me de $2 por cada $ adicional que termine valiendo el activo respecto de 140 → 2 calls con strike = 140.

$P(80) + 2C(100) - 4C(120) + 2C(140)$ (mismo gráfico que 1)

Si quiero calcular el valor teórico de (1), valúo los valores del call (valuación de derivados) y los bonos:
↳ tengo que descontarlo con la tasa implícita del bono $80 \cdot \frac{B_z}{B_t}$ (factor de actualización)

Hay otra forma de valuarlo: armando el árbol ⊛

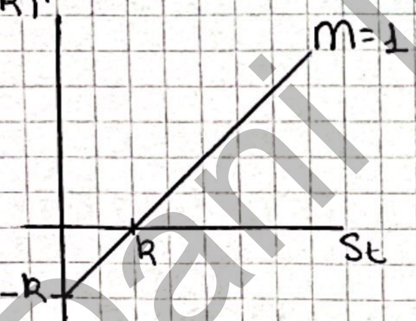
El bono que paga 80 en cero tiene que valer $80 \frac{B_z}{B_t}$ porque sino se puede armar un arbitraje

⊛ → Para valuar la cartera valúo el derivado en cada uno de sus momentos, reemplazo los valores en el árbol y hago la cuenta con el sistema de ecuaciones

Si al revés, quiero replicar puts y bonos, voy de derecha a izquierda
↳ $B(80) + 2P(140) - 4P(120) + 2P(100)$

CALL - PUT PARITY

$X = (S_t - K)^+$



→ Forward: Estamos obligados

$X = (K - S_t)^+$

→ Put: opción de venta. Gano cuando el activo vale menos de K

⇒ Tener un forward es lo mismo que tener un forward y deber un put (vender)

$X^F = X^C - X^P$

Esta relación entre pay-off, por una cuestión de arbitraje, nos da una relación entre los valores de los instrumentos en fechas anteriores

NOTA

Dani Iasonsky

Escaneado con CamScanner

$\boxed{V_t^F = V_t^c - V_t^p}$ (en una fecha anterior) porque sino hay arbitraje

↳ Call - put parity → se cumple en el mercado. (cuando coincide el K y el T)

Ejemplo de arbitraje

$V_t^F = 3 \;;\; V_t^c = 4 \;;\; V_t^p = 2$

El forward está más caro que la cartera → vendo un forward a 3, me guardo 1 y con 2 compro la cartera. → En T mayúscula, cuando tenga que pagar la obligación, pago con la cartera que replica dicha valuación. (para comprar la cartera vendo un put, me dan \$2, junto los \$4 y con eso compro el call)

⇒ Como existe dicha relación entre los pay-off, los valores en fechas anteriores, también deben cumplir con la relación → sino hay arbitraje

Demostración call - put parity

Forward: $(S_T - K)$

$V_T = B_T \, E_Q [X B_T^{-1} / F_T]$ → da exactamente lo mismo que un sistema de ecuaciones

$= B_T \, E_Q [(S_t - K) B_t^{-1} / F_t]$ } $X = (S_T - K)$

$= B_T \, E_Q [S_t B_t^{-1} - K B_t^{-1} / F_T]$ constante

$= B_t [E_Q (S_t B_t^{-1} / F_T) - E_Q (K B_T^{-1} / F_T)]$

$= B_t \, E_Q [S_t B_t^{-1} / F_T] - K B_T^{-1} B_t$

con $Z = \frac{S_t}{B_t}$ y $E_Q [\Delta Z_t / F_t] = 0$

$V_t = B_t Z_t - B_t K B_T^{-1}$

$\boxed{V_t = S_t - K \frac{B_t}{B_T}}$ Valor de un forward. Coincide con la fórmula: valor de un activo hoy menos K por un factor de actualización

↳ solo en este caso, la fórmula de valuación nos dice cuál es la estrategia para replicar este derivado.

$V_t = \underbrace{1}_{\phi} S_t \underbrace{- K \frac{B_t}{B_T}}_{\psi}$ } ϕ constante, ψ constante } ESTRATEGIA ESTÁTICA

↓

No cambio los componentes en el tiempo.

Dani laschinsky

Escaneado con CamScanner

Todas las equivalencias que encontremos a partir de estrategias estáticas, no sólo se cumplen en el modelo sino que también se cumplen en los mercados.

↳ Por convención, se estableció que la gente no va a comprar forwards que tengan elementos positivos ni negativos → sólo se suelen operar aquellos forwards en los que $V_t = 0$ pactando un K → no hay flujos de fondo al momento cero
↳ se pacta un $K / V_t = 0$.

Despejando K: con $V_t = 0$.

$$\boxed{K_{t;T} = S_t \frac{B_T}{B_t}}$$ → K que surge de capitalizar el activo de t a T

↳ precio forward

Método de valuación con probabilidades R (para call)

Invierto el modelo → Nos preguntamos cuántos activos vale un bono y cuántos activos vale un derivado

$Y = \frac{B}{S}$ $\quad D = \frac{V}{S}$

El razonamiento aplica igual, cambian las letras

1'30

$$E_R[XS_T^{-1}/F_s] = E_R[\overbrace{D_s}^{\text{constante}}/F_s] + \underbrace{E_R[\sum_{t=s}^{T-1} \psi_t \Delta Y_t / F_s]}_{=0 \text{ invierto probabilidades R}}$$

$$S_s E_R[\overbrace{XS_T^{-1}}^{D_s} | F_s] = D_s S_s = V_s$$

$$\boxed{r_t = \frac{Y_t - Y_{t+1}^0}{Y_{t+1}^1 - Y_{t+1}^0}}$$

→ La diferencia es que el pay off se hace en términos de activo, y vale algo distinto en cada nodo (el bono valía lo mismo)

VALUACIÓN DE UN CALL

$X = (S_T - K)^+ = (S_T - K) \cdot 1_{S_T > K}$ → Función o VA que toma 1 si $S_T > K$, sino toma cero

$= \underbrace{S_T \cdot 1_{S_T > K}}_{X_1} - \underbrace{K \cdot 1_{S_T > K}}_{X_2}$) distribuyo

→ Estoy descomponiendo el pay off del derivado en dos:
Tener un call es como tener X_1 comprado y X_2 vendido
Puedo valuar cada uno por separado y después restarlo.
↳ Los valúo por el método que más me convenga.

Dani lacolinsky

Escaneado con CamScanner

• Valúo X_1 por el método de las probabilidades R

$$V_t^1 = S_t \, E_R[X_1 S_T^{-1} / F_t]$$
$$= S_t \, E_R[S_T \cdot 1_{S_T > K} S_T^{-1} / F_t]$$
$$= S_t \, E_R[1_{S_T > K} / F_t]$$
$$= S_t \, R[S_T > K / F_t]$$ → Nos dice que nos fijemos todos los nodos a los que podemos acceder, en qué nodo $S_T > K$, y calcular la probabilidad de que ocurra eso (con las R) y multiplicarlo por S_t.

• Valúo X_2 por el método de las probabilidades Q

$$V_t^2 = B_t \, E_Q[X^2 B_T^{-1} / F_t]$$
$$= B_t \, E_Q[\underbrace{K}_{cte} \cdot 1_{S_T > K} \underbrace{B_T^{-1}}_{cte} / F_t]$$
$$= \frac{B_t}{B_T} K \, Q[S_T > K / F_t]$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Call}: X = S_t R[S_T > K / F_t] - \frac{B_t}{B_T} K Q[S_T > K / F_t]}$$

$$\text{PUT}: X = \frac{B_t}{B_T} K \{1 - Q[S_T > K / F_t]\} - S_t \{1 - R[S_T > K / F_t]\}$$

Call - Put = Forward

$$\text{Forward}: X = S_t - K \frac{B_t}{B_T}$$

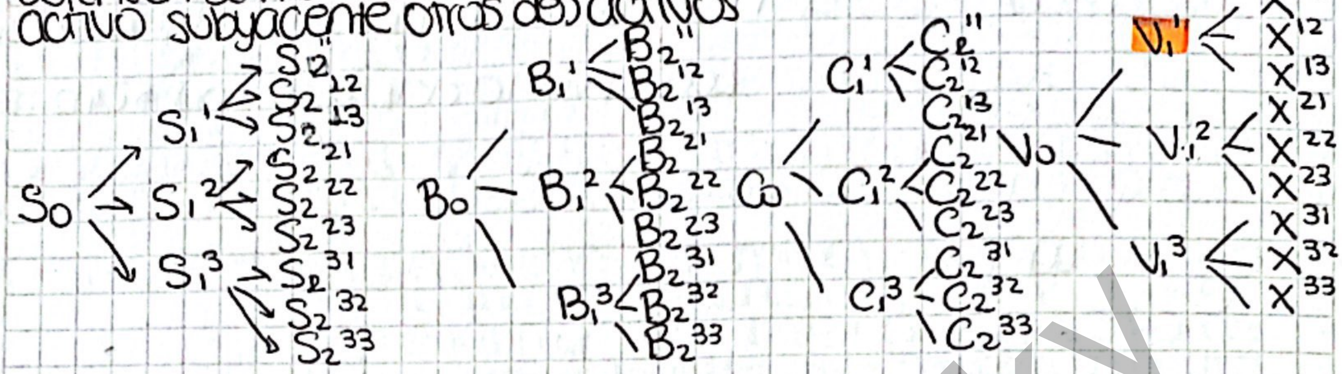
Dani Iaschinsky

Escaneado con CamScanner

CLASE 4.25

(Hay un resumen de todo hasta ahora en ppt)

37 **MODELO MULTINOMIAL MULTIPERIÓDICO**: sirve para derivados que dependen de más de un activo - derivados que tengan como activo subyacente otros dos activos



Ahora voy a tener 3 ecuaciones y 2 incógnitas → puede que no haya ninguna solución al problema: no hay ninguna cartera formada por los 3 activos que me genere el pay-off que quiero en 3 escenarios

↳ Para que el problema tenga solución agrego una incógnita poniendo otro activo: C

Armo una cartera que voy a comprar en el momento 1, en el escenario que va de 0 a 1 (sube)

↳ Tengo $(\phi_1^1 ; \psi_1^1 ; \theta_1^1)$

$$\begin{cases} X^{11} = \phi_1^1 S_2^{11} + \psi_1^1 B_2^{11} + \theta_1^1 C_2^{11} \\ X^{12} = \phi_1^1 S_2^{12} + \psi_1^1 B_2^{12} + \theta_1 C_2^{12} \\ X^{13} = \phi_1 S_2^{13} + \psi_1 B_2^{13} + \theta_1 C_2^{13} \end{cases}$$

⇒ Encuentro las incógnitas $(\phi_1^1 ; \psi_1^1 ; \theta_1^1)$ → El valor de esta cartera en ese escenario tiene que coincidir con el pay-off del derivado porque me ofrecen lo mismo.

$V_1^1 = \phi_1^1 S_1^1 + \psi_1^1 B_1^1 + \theta_1^1 C_1^1$ → Si el derivado no vale esto, se puede ganar dinero (se puede armar un arbitraje)

Para calcular los otros valores:

$(\phi_1^2 ; \psi_1^2 ; \theta_1^2) \rightarrow V_1^2$

$(\phi_1^3 ; \psi_1^3 ; \theta_1^3) \rightarrow V_1^3$

$(\phi_0 ; \psi_0 ; \theta_0) \rightarrow V_0$

NOTA

Escaneado con CamScanner

Igualmente, puede pasar que dos ecuaciones sean linealmente dependientes entre si y que me terminen quedando igual 3 ecuaciones y 2 incógnitas (me daría infinitas soluciones → potencialmente pueden existir infinitas carteras que replican el Pay-Off)

EJ: (A) $10 \begin{cases} 13 \\ 12 \end{cases}$ (B) $10 \begin{cases} 11 \\ 11 \end{cases}$ } En este mercado hay arbitraje porque siempre me conviene A ↓ (no hay independencia

Las q van a dar $q<0, q>1$ → arbitraje

Metodo Q 1'20

$Z = \frac{S}{C}$ $W = \frac{B}{C}$

Calculo las probabilidades q que hagan que

$E_Q[\Delta Z_t / F_t] = 0 \wedge E_Q[\Delta W_t / F_t] = 0$ → dos condiciones y dos incognitas

$\underbrace{E_Q[Z_{t+1} / F_t]}_{①} = Z_t$ $E_Q[W_{t+1} / F_t] = W_t$

$V_t = B_t E_Q[X B_T^{-1} / F_t]$

$V_t = S_T E_R[X S_T^{-1} / F_t]$

Z_t → q_t^1: Z_{t+1}^1, q_t^2: Z_{t+1}^2, $(1-q_t^1-q_t^2)$: Z_{t+1}^3

W_t → q_t^1: W_{t+1}^1, q_t^2: W_{t+1}^2, W_{t+1}^3

① $q_t^1 Z_{t+1}^1 + q_t^2 Z_{t+1}^2 + (1-q_t^1-q_t^2) Z_{t+1}^3 = Z_t$
$q_t^1 W_{t+1}^1 + q_t^2 W_{t+1}^2 + (1-q_t^1-q_t^2) W_{t+1}^3 = W_t$ } • 2 ecuaciones • 2 incognitas ↓ encuentro q_t^1 y q_t^2

→ Encuentro V_t

activo base

$$\boxed{V_t = C_t E_Q^c[X C_T^{-1} / F_t]}$$

NOTA

Dani Iaschinsky

Escaneado con CamScanner

CLASE 4.5

MERCADO DE TASAS DE INTERÉS

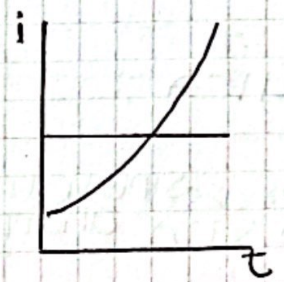
Derivado lineal: Derivado cuyo pay-off es una función lineal del subyacente.
Caso típico: Forward

Curva o estructura temporal de tasas de interés: la tasa de interés depende del plazo de la operación

$i(t;0;P) \rightarrow$ tasa de interés nominal realizada en el momento "t" para operaciones de plazo P
Si en el momento t se colocan \$C por un plazo de P periodos, se conseguirán a vto:
$\$C(1+i(t;0;P)P)$

→ Es una variable aleatoria en el momento cero, no la conozco hasta t.

- Suponemos que todas las tasas son nominales anuales



No necesariamente tiene m=0, estaría asumiendo que no son variables en el tiempo

La curva de tasas suele ser creciente por la incertidumbre

- Muchas veces las tasas de interés surgen del valor de los bonos

- Dados 3 bonos

$C \rightarrow$ flujo de fondos del bono

$V_1 \rightarrow$ valor del bono cupono que vence en 1 (valor de \$1 en 1)

$P_1 = C_1^1 V_1 + C_2^1 V_2 + C_3^1 V_3$

$P_2 = C_1^2 V_1 + C_2^2 V_2 + C_3^2 V_3$

$P_3 = C_1^3 V_1 + C_2^3 V_2 + C_3^3 V_3$

$(V_1; V_2; V_3)$ son incógnitas → una vez que las resuelvo puedo calcular las i

$$V_1 = \frac{1}{1+i(0;0;1)1} \qquad V_2 = \frac{1}{1+i(0;0;2)2} \qquad V_3 = \frac{1}{1+i(0;0;3)3}$$

- Para que se pueda resolver, tengo que tener flujos de fondos que ocurran en el mismo momento

Dani Iaschinsky

Escaneado con CamScanner

Contrato de fijación de tasa de interés futura: la tasa de interés a la cual se invierten los fondos es fijada en un momento anterior.

Pacto que en t doy \$C y recibo:

$$\left.\begin{array}{ll} t & -C \rightarrow \text{flujo de fondos negativos} \\ t+P & C(1+KP) \end{array}\right\} (*)$$

Existe un K relativamente justa

$$\underset{\text{invierto \$1}}{0} \;—\; \underset{\substack{1+i(0;0;t)t \\ \text{recibo y} \\ \text{reinvierto}}}{t} \;—\; \underset{\underbrace{[1+i(0;0;t)t]}_{\text{Banco}}\underbrace{[1+KP]}_{\text{tercero}}}{t+P}$$

Este flujo lo recibo en t+P pero lo conozco en cero.

Otra estrategia es ir al banco e invertir a t+P →

recibo: $(1+i(0;0;t+P))(t+P)$

• Lo lógico sería que ambos flujos de fondos sean iguales → lo igualo y encuentro K. ← si no hay arbitraje

Facto de capitalización de 0 a t+P

Transforma en efectiva

$$\boxed{i(0;h;P) = K = \left(\frac{1+i(0;0;(t+P))(t+P)}{1+i(0;0;t)t} - 1\right)\frac{1}{P}}$$

Tasa forward implícita

lo normaliza

Facto de capitalización de 0 a h

53

$i(0;h;P)$ $t \neq 0$ → tasa forward: empieza en un período t

$i(0;0;P)$ → **tasa spot**: empieza hoy

$i(t;h;P)$ → tasa que va a haber en t, para operaciones a arrancar en t+h por un plazo P.

t → cuándo conozco la tasa

h → diferimiento

P → plazo de duración

1'03 • Si el segundo término es negativo, me tienen que dar dinero para que entre y si es positivo (K muy alta) le tengo que dar dinero porque me está dando una K muy beneficiosa

Surge una tasa justa que hace que no tenga que haber flujos al momento cero y llego a la misma tasa por otro camino

$$(*)\; V_0 = E\underbrace{C(1+i(0;0;t)t]^{-1} + C(1+KP)[1+i(0;0;K+P)(K+P)]^{-1}}_{=0}$$

Dani Jaschinsky

Escaneado con CamScanner

Si los fondos no son iguales, hay arbitraje: si $i(0;0;t)=0{,}10$
$i(0;0;t+P)=0{,}13$
$\Rightarrow R=0{,}15$

Si el tercero trabaja con $i=0{,}16$, me conviene tomar dinero prestado por $t+P$ períodos al 13%, me dan \$1. Ese \$1 lo invierto al 10% y se lo doy al tercero por un 16% y lo que voy a recibir del tercero va a ser más grande de lo que voy a tener que devolver. → Termina siendo equivalente

FORWARD DE TASA DE INTERÉS [FRA]: El tenedor del contrato recibe un pay-off en un momento $P+h$, el cual viene definido como la diferencia entre los intereses que generaría una inversión de \$C a realizar desde el momento h hasta $h+P$, en función de las condiciones de mercado existentes en el momento h, y los intereses que generaría una inversión idéntica pero pactada a una tasa R conocida de antemano.

$X=C[i(h;0;P)P-RP]$ ← intereses que recibiría si la tasa que pactó no es la de mercado. Paga en $h+P$.

0 — h — h+P

$Ci(h;0;P)P-CRP$ → No conocemos cuánto vale el flujo en cero porque la tasa i es aleatoria y recién la conozco en h.

Existen dos formas de valuación

1. Forward comprado

Invierto \$C en h: → Puedo agregar esta operatoria porque en cero no tiene valor

0 — h — h+P

$-C$ en h; $\cancel{Ci(h;0;P)P}-CRP$ en $h+P$

Pido prestado \$C en h y pago en $h+P$ → no tengo que poner nada en cero para en h hacer eso → en cero no tiene valor

0 — h — h+P

C en h; $\cancel{-Ci(h;0;P)P}-C$ en $h+P$ ↳ el lado de lo que queda tiene lo mismo que antes

→ El dinero que iba a recibir por el derivado se me cancela con los intereses que tengo que dar al banco

⇒ Flujo de fondos neto: $FF_{h+P}=-C-CRP$

↳ Fondo fijo → lo puedo actualizar porque desaparece la aleatoriedad → actualizo cada flujo con su tasa:

$$\boxed{V_0=C(1+i(0;0;h)h)^{-1}-C(1+RP)[(1+i(0;0;h+P)(h+P)]^{-1}}$$

→ La tasa que hace que $V_0=0$ es la tasa forward $i(0;h;P)$

Dani Iaschinsky

Escaneado con CamScanner

2. Forward vendido: La parte variable la voy a pagar, no a recibir

0 — h — n+p

Lo conozco recién en h

$Ci(h,0,P)P - CKP$ → pago a la tasa forward

$-\ Ci(h,0,P)P + Ci(0;h,P)P$ → vale cero.

$Ci(0;h,P)P - CKP$

↳ Flujo de fondo fijo, le puedo calcular el valor actual:

$$\boxed{V_0 = \frac{C(i(0;h;P) - K)P}{1 + i(0;0;h+P)(h+P)}}$$

Si tengo que actualizar flujos donde tengo tasas variables, reemplazo dichas tasas por la tasa forward asociada y actualizo los flujos resultantes (porque me quedan flujos de fondos fijos)

↳ En realidad no estamos reemplazando, estamos agregando al flujo de fondos contratos que tienen un valor cero

UPFRONT: el flujo de fondos se paga en h (al principio)

IN ARREARS: el flujo de fondos se paga en n+P.

El reemplazo de la tasa variable por la forward sólo tiene sentido cuando no es upfront, porque no se podrían hacer las cancelaciones. (en la práctica se hace en todos lados)

SWAPS DE TASAS DE INTERÉS: el intercambio de flujos variables por flujos fijos se realiza en varias fechas.

Cobro: $Ci(0;0;2/12)2/12$ $\quad Ci(2/12;0;2/12)2/12$ $\quad Ci(4/12;0;2/12)2/12$ → Flujos de fondos variables

$-C$ $\quad \frac{2}{12}$ $\quad \frac{4}{12}$ $\quad \frac{6}{12}$

Pago: $-CR\frac{2}{12}$ $\quad -CR\frac{2}{12}$ $\quad -CR\frac{2}{12}$ → Flujo de fondo fijo

Distintos métodos de valuación: 1) Separación de flujos

Valor del fondo fijo: $\boxed{VF_F = \sum \frac{-CR\ 2/12}{1 + i(0;0;t)t}}$ $\quad t = 2/12; 4/12; 6/12$

Dani Iaschinsky

Escaneado con CamScanner

152 Los flujos variables pueden ser valuados a través de una estrategia estática de réplica: Invierto $C en el momento cero por un plazo de dos períodos → en el momento 2 recibo $C + C \cdot i(0,0;2/12)^{2/12}$. Me quedo con los intereses y reinvierto el capital → en el momento 4 obtengo $C + C\, i(2;0,2/12)^{2/12}$ ⇒ Al final me guardo el interés y con el capital inicial. ⇒ La operación me cubre todos los intereses pero me sobra el capital → Para que no me sobre capital, tomo una financiación en el momento cero por un plazo equivalente al del vencimiento del swap por un monto equivalente al valor actual de $C ⇒ en el momento 6 devuelvo C y lo que me sobró de la primer operación es lo mismo que lo que tengo que devolver en la segunda operación. ⇒ hacer las dos operaciones juntas me genera, neto, el flujo de fondos (los intereses)

$$\boxed{VF_V = C - \frac{C}{1+i(0,0;6/12)^{6/12}}}$$

cantidad de dinero que puse en cero

⇒ Valor del swap $= VF_F + VF_V$

$$\boxed{V_0 = C - \frac{C}{1+i(0,0;6/12)^{6/12}} - \sum \frac{C\,k^{2/12}}{1+i(0,0,t)^t}}$$

CLASE 4/75

Ejemplo.

$C = 10$ $\quad C/1+i(0,0;6/12)^{6/12} = 9$ $\quad \sum \ldots = 0{,}6$ ⇒ $V_0 = 0{,}4$ (teórico)

$V_0 = 0.5$ (mercado)

Vendo lo caro, compro lo barato. Vendo el swap a 0,5 y me quedo con 0,1. Con 0,4 armo la estrategia.

Para armar el flujo de fondos.
Tengo $0,4 pero necesito $1 → pido prestado $0,6 y me obligo a devolver $\sum C k^{2/12} \ldots$, que lo voy a devolver con el swap que vendí. Lo pago con cada cobro fijo.

Con $1, pido prestado $9 adicionales y me obligo a devolver C (10) en el momento 6. Con los $10 que tengo, invierto y me va a dar intereses → esos intereses los uso para pagar los flujos variables del swap.

29/43 resumen

Vendo el swap a 0,5. Me guardo 0,1. Tomo prestado 0,6 que se me cancela con los flujos que cobro
0,6 + 0,4 → junto $1 y con eso obtengo los flujos variables que cancelan la deuda variable que tenía

Valor de mercado no puede ser mayor al teórico, sino se puede armar un arbitraje.

Dani Iaschinsky

Escaneado con CamScanner

2) Método de estimación

Reemplazo las tasas desconocidas por una tasa que conozco hoy (tasa forward) → añado al flujo de fondos una sucesión de forwards con tasa pactada igual a las respectivas tasas forward a fin de simplificar el flujo de fondos resultante sin modificar el valor de la cartera a valuar

$$ci\left(0;0;\tfrac{2}{12}\right)\tfrac{2}{12} \qquad ci\left(\tfrac{2}{12};0;\tfrac{2}{12}\right)\tfrac{2}{12} \qquad ci\left(\tfrac{4}{12};0;\tfrac{2}{12}\right)\tfrac{2}{12}$$

$$-CK\tfrac{2}{12} \qquad -CK\tfrac{2}{12} \qquad -CK\tfrac{2}{12}$$

Hago de cuenta que en realidad tengo: (reemplazo x tasa forward)

$$Ci\left(0;0;\tfrac{2}{12}\right)\tfrac{2}{12} \qquad Ci\left(0;\tfrac{2}{12};\tfrac{2}{12}\right)\tfrac{2}{12} \qquad Ci\left(0;\tfrac{4}{12};\tfrac{2}{12}\right)\tfrac{2}{12}$$

↓ Flujos fijos

Actualizo cada flujo fijo por su tasa

$$\boxed{V_{0\,swap} = \frac{Ci\left(0;0;\frac{2}{12}\right)\frac{2}{12}}{1+i\left(0;0;\frac{2}{12}\right)\frac{2}{12}} + \frac{Ci\left(0;\frac{2}{12};\frac{2}{12}\right)\frac{2}{12}}{1+i\left(0;0;\frac{4}{12}\right)\frac{4}{12}} + \frac{Ci\left(0;\frac{4}{12};\frac{2}{12}\right)\frac{2}{12}}{1+i\left(0;0;\frac{6}{12}\right)\frac{6}{12}}}$$

↳ Llego al mismo valor que antes. Verificar.

· V_0 puede ser positivo o negativo y va a depender del K que pactemos. K muy chica en relación a la tasa: $V_0>0$
K muy grande: $V_0<0$

↓

La K justa que hace que nadie le tenga que pagar a nadie es la que hace que $V_0=0$

↳ Tasa swap: tasa pactada K que hace que el valor del swap sea igual a cero.

↳ coincide con el promedio ponderado de las tasas forward que estiman los intereses variables del swap, siendo las ponderaciones mencionados los valores actuales de los del instrumento.

$$K = \text{Prom. Pond}\left[i\left(0;0;\tfrac{2}{12}\right);\ i\left(0;\tfrac{2}{12};\tfrac{2}{12}\right);\ i\left(0;\tfrac{4}{12};\tfrac{2}{12}\right)\right]$$

Danilaschinsky

Escaneado con CamScanner