Todas las equivalencias que encontremos a partir de estrategias estáticas, no sólo se cumplen en el modelo sino que también se cumplen en los mercados.

↳ Por convención, se estableció que la gente no va a comprar forwards que tengan elementos positivos ni negativos → sólo se suelen operar aquellos forwards en los que $V_t=0$ pactando un K → no hay flujos de fondo al momento cero ↳ se pacta un K / $V_t=0$.

Despejando K: con $V_t=0$.

$$\boxed{K_{t;T} = S_t \frac{B_T}{B_t}} \rightarrow$$ K que surge de capitalizar el activo de t a T

↳ precio forward

Método de valuación con probabilidades R (para call)

Invierto el modelo → nos preguntamos cuántos activos vale un bono y cuántos activos vale un derivado

$$Y=\frac{B}{S} \qquad D=\frac{V}{S}$$

El razonamiento aplica igual, cambian las letras

1'30

$$E_R[XS_T^{-1}/F_s] = E_R[\overbrace{D_s}^{\text{constante}}/F_s] + \underbrace{E_R[\sum_{t=s}^{T-1} \psi_t \Delta Y_t / F_s]}_{=0 \text{ invierto probabilidades R}}$$

$$S_s E_R[\overbrace{XS_T^{-1}}^{D_s} | F_s] = D_s S_s = V_s$$

$$\boxed{r_t = \frac{Y_t - Y_{t+1}^0}{Y_{t+1} - Y_{t+1}^0}}$$

→ La diferencia es que el pay off se hace en términos de activo, y vale algo distinto en cada nodo (el bono valía lo mismo)

VALUACIÓN DE UN CALL

$$X = (S_T - K)^+ = (S_T - K) \cdot \mathbb{1}_{S_T > K}$$ → Función o VA que toma 1 si $S_T > K$, sino toma cero.

$$= \underbrace{S_T \cdot \mathbb{1}_{S_T > K}}_{X_1} - \underbrace{K \cdot \mathbb{1}_{S_T > K}}_{X_2}$$) distribuyo

→ Estoy descomponiendo el pay off del derivado en dos: Tener un call es como tener X_1 comprado y X_2 vendido. Puedo valuar cada uno por separado y después restarlo. ↳ Los valuo por el método que más me convenga.

• Valúo X_1 por el método de las probabilidades R

$$V_t^1 = S_t \, E_R[X_1 S_T^{-1} / F_t]$$
$$= S_t \, E_R[S_T \cdot 1_{S_T > K} S_T^{-1} / F_t]$$
$$= S_t \, E_R[1_{S_T > K} / F_t]$$
$$= S_t \, R[S_T > K / F_t]$$ → Nos dice que nos fuésemos todos a los nodos a los que podemos acceder, en qué nodo $S_T > K$, y calcular la probabilidad de que ocurra eso (con las R) y multiplicarlo por S_t.

• Valúo X_2 por el método de las probabilidades Q

$$V_t^2 = B_t \, E_Q[X^2 B_T^{-1} / F_t]$$
$$= B_t \, E_Q[\underbrace{K}_{cte} \cdot 1_{S_T > K} \underbrace{B_T^{-1}}_{cte} / F_t]$$
$$= \frac{B_t}{B_T} K \; Q[S_T > K / F_t]$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{call}: X = S_t R[S_T > K / F_t] - \frac{B_t}{B_T} K Q[S_T > K / F_t]}$$

PUT: $X = \frac{B_t}{B_T} K \{1 - Q[S_T > K / F_t]\} - S_t \{1 - R[S_T > K / F_t]\}$

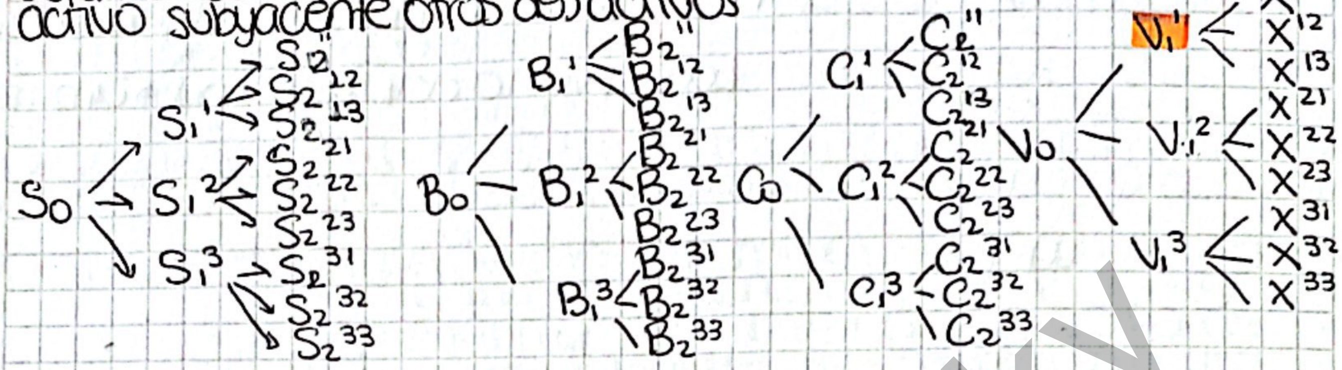
call - Put = Forward

Forward: $X = S_t - K \frac{B_t}{B_T}$

CLASE 4:25

(Hay un resumen de todo hasta ahora al ppo)

37 **MODELO MULTINOMIAL MULTIPERIÓDICO**: sirve para derivados que dependen de más de un activo - derivados que tengan como activo subyacente otros dos activos



Ahora voy a tener 3 ecuaciones y 2 incógnitas → puede que no haya ninguna solución al problema: no hay ninguna cartera formada por los 3 activos que me genere el pay-off que quiero en 3 escenarios
↳ Para que el problema tenga solución agrego una incógnita poniendo otro activo: C

Armo una cartera que voy a comprar en el momento 1, en el escenario que va de 0 a 1 (sube)
↳ Tengo $(\phi_1^1 ; \psi_1^1 ; \theta_1^1)$

$$\begin{cases} X^{11} = \phi_1^1 S_2^{11} + \psi_1^1 B_2^{11} + \theta_1^1 C_2^{11} \\ X^{12} = \phi_1^1 S_2^{12} + \psi_1^1 B_2^{12} + \theta_1^1 C_2^{12} \\ X^{13} = \phi_1^1 S_2^{13} + \psi_1^1 B_2^{13} + \theta_1^1 C_2^{13} \end{cases}$$

⇒ Encuentro las incógnitas $(\phi_1^1 ; \psi_1^1 ; \theta_1^1)$ → El valor de esta cartera en ese escenario tiene que coincidir con el pay-off del derivado porque me ofrecen lo mismo.

$V_1^1 = \phi_1^1 S_1^1 + \psi_1^1 B_1^1 + \theta_1^1 C_1^1$ → si el derivado no vale esto, se puede ganar dinero (se puede armar un arbitraje)

Para calcular los otros valores:

$(\phi_1^2 ; \psi_1^2 ; \theta_1^2) \rightarrow V_1^2$

$(\phi_1^3 ; \psi_1^3 ; \theta_1^3) \rightarrow V_1^3$

$(\phi_0 ; \psi_0 ; \theta_0) \rightarrow V_0$

NOTA

Igualmente, puede pasar que dos ecuaciones sean linealmente dependientes entre sí y que me terminen quedando igual 3 ecuaciones y 2 incógnitas (me daría infinitas soluciones → potencialmente pueden existir infinitas carteras que replican el pay-off)

Ej: Ⓐ $10 \begin{cases} 13 \\ 12 \end{cases}$ Ⓑ $10 \begin{cases} 11 \\ 11 \end{cases}$ } En este mercado hay arbitraje porque siempre me conviene A ↓ (no hay independencia)

Las q van a dar $q<0$, $q>1$ → arbitraje

Metodo Q 1'20

$Z = \frac{S}{C}$ $W = \frac{B}{C}$

Calculo las probabilidades q que hagan que

$E_Q[\Delta Z_t / F_t] = 0 \wedge E_Q[\Delta W_t / F_t] = 0$ → dos condiciones y dos incógnitas

$\underbrace{E_Q[Z_{t+1} / F_t]}_{①} = Z_t$ $E_Q[W_{t+1} / F_t] = W_t$

$V_t = B_t E_Q[X B_T^{-1} / F_t]$

$V_t = S_T E_R[X S_T^{-1} / F_t]$

$Z_t \xrightarrow{q_t^1} Z_{t+1}^1$, $Z_t \xrightarrow{q_t^2} Z_{t+1}^2$, $Z_t \xrightarrow{(1-q_t^1-q_t^2)} Z_{t+1}^3$

$W_t \xrightarrow{q_t^1} W_{t+1}^1$, $W_t \xrightarrow{q_t^2} W_{t+1}^2$, $W_t \rightarrow W_{t+1}^3$

① $q_t^1 Z_{t+1}^1 + q_t^2 Z_{t+1}^2 + (1 - q_t^1 - q_t^2) Z_{t+1}^3 = Z_t$

$q_t^1 W_{t+1}^1 + q_t^2 W_{t+1}^2 + (1 - q_t^1 - q_t^2) W_{t+1}^3 = W_t$

} · 2 ecuaciones · 2 incógnitas ↓ encuentro q_t^1 y q_t^2

→ Encuentro V_t

activo base

$$\boxed{V_t = C_t E_{Q^c}[X C_T^{-1} / F_t]}$$

NOTA

CLASE 4.5

MERCADO DE TASAS DE INTERÉS

Derivado lineal: Derivado cuyo pay-off es una función lineal del subyacente.
Caso típico: Forward

Curva o estructura temporal de tasas de interés: la tasa de interés depende del plazo de la operación

$i(t;0;P)$ → tasa de interés nominal realizada en el momento "t" para operaciones de plazo P
Si en el momento t se colocan \$C por un plazo de P períodos, se conseguirán a vto: $\$C(1+i(t;0;P)P)$

→ Es una variable aleatoria en el momento cero, no la conozco hasta t.

• Suponemos que todas las tasas son nominales anuales

No necesariamente tiene m=0, estaría asumiendo que no son variables en el tiempo

La curva de tasas suele ser creciente por la incertidumbre

• Muchas veces las tasas de interés surgen del valor de los bonos

• Dados 3 bonos

$$P_1 = C_1^1 V_1 + C_2^1 V_2 + C_3^1 V_3$$
$$P_2 = C_1^2 V_1 + C_2^2 V_2 + C_3^2 V_3$$
$$P_3 = C_1^3 V_1 + C_2^3 V_2 + C_3^3 V_3$$

C → flujo de fondos del bono

V_1 → valor del bono cupón 0 que vence en 1 (valor de \$1 en 1)

$(V_1; V_2; V_3)$ son incógnitas → una vez que las resuelvo puedo calcular las i

$$V_1 = \frac{1}{1+i(0;0;1)1} \qquad V_2 = \frac{1}{1+i(0;0;2)2} \qquad V_3 = \frac{1}{1+i(0;0;3)3}$$

• Para que se pueda resolver, tengo que tener flujos de fondos que ocurran en el mismo momento

Contrato de fijación de tasa de interés futura: la tasa de interés a la cual se invierten los fondos es fijada en un momento anterior.

Pacto que en t doy \$C y recibo:

$t \qquad -C \rightarrow$ flujo de fondos negativos

$t+P \qquad C(1+kP)$ $\Big\}$ ⊛

Existe un k relativamente justa

$0 \qquad\qquad t \qquad\qquad t+P$

Invierto \$1 $\qquad 1+i(0;0;t)t$ recibo y reinvierto $\qquad \underbrace{[1+i(0;0;t)t]}_{\text{Banco}}\underbrace{[1+kP]}_{\text{tercero}}$

Este flujo lo recibo en t+P pero lo conozco en cero.

Otra estrategia es ir al banco e invertir a t+P →

recibo: $(1+i(0;0;t+P)(t+P))$

• Lo lógico sería que ambos flujos de fondos sean iguales → lo igualo y encuentro k. (si no, hay arbitraje)

Facto de capitalización de 0 a t+P

Transforma en efectiva

$$\boxed{i(0;h;P)=K=\left(\frac{1+i(0;0;(t+P))(t+P)}{1+i(0;0;t)t}-1\right)\frac{1}{P}}$$

la normaliza

Tasa forward implícita

Facto de capitalización de 0 a h

53

$i(0;h;P)$ $t\neq 0 \rightarrow$ tasa forward: empieza en un período t

$i(0;0;P) \rightarrow$ **tasa spot**: empieza hoy

$i(t;h;P) \rightarrow$ tasa que va a haber en t, para operaciones a arrancar en t+h por un plazo P.

$t \rightarrow$ cuándo conozco la tasa

$h \rightarrow$ diferimiento

$P \rightarrow$ plazo de duración

1'03 • Si el segundo término es negativo, me tienen que dar dinero para que entre y si es positivo (k muy alta) le tengo que dar dinero porque me está dando una k muy beneficiosa

Surge una tasa justa que hace que $=0$ no tenga que haber flujos al momento cero y llego a la misma tasa por otro camino

$$⊛\ V_0=E\,C(1+i(0;0;t)t)^{-1}+C(1+kP)[1+i(0;0;k+P)(k+P)]^{-1}$$

Si los fondos no son iguales, hay arbitraje: si $i(0;0;t)=0{,}10$
$i(0;0;t+p)=0{,}13$
$\Rightarrow k=0{,}15$

Si el tercero trabaja con $i=0{,}16$, me conviene tomar dinero prestado por $t+p$ periodos al 13%, me dan \$1. Ese \$1 lo invierto al 10% y se lo doy al tercero por un 16% y lo que voy a recibir del tercero va a ser más grande de lo que voy a tener que devolver. → Termina siendo equivalente

FORWARD DE TASA DE INTERÉS [FRA]: El tenedor del contrato recibe un pay-off en un momento $p+h$, el cual viene definido como la diferencia entre los intereses que generaría una inversión de \$C a realizar desde el momento h hasta $h+p$, en función de las condiciones de mercado existentes en el momento h, y los intereses que generaría una inversión idéntica pero pactada a una tasa k conocida de antemano.

$$X = C[i(h;0;p)p - kp]$$

intereses que recibiría si la tasa que pactó no es la de mercado. Paga en $h+p$.

$0 \quad h \quad h+p$

$Ci(h;0;p)p - Ckp$ → No conocemos cuánto vale el flujo en cero porque la tasa i es aleatoria y recién la conozco en h.

Existen dos formas de valuación

1. Forward comprado

Invierto \$C en h: → puedo agregar esta operatoria porque en cero no tiene valor

$0 \quad h \quad h+p$

h: $-C$; $h+p$: $\cancel{Ci(h;0;p)p} - Ckp$

1'23

Pido prestado \$C en h y pago en $h+p$ → no tengo que poner nada en cero para en h hacer eso → en cero no tiene valor

$0 \quad h \quad h+p$

h: C ; $h+p$: $\cancel{-Ci(h;0;p)p} - C$ ↳ el lado de lo que queda tiene lo mismo que antes

→ El dinero que iba a recibir por el derivado se me cancela con los intereses que tengo que dar al banco

⇒ Flujo de fondos neto: $FF_{h+p} = -C - Ckp$

↳ Fondo fijo → lo puedo actualizar porque desaparece la aleatoriedad → actualizo cada flujo con su tasa:

$$\boxed{V_0 = C(1+i(0;0;h)h)^{-1} - C(1+kp)[(1+i(0;0;h+p)(h+p)]^{-1}}$$

→ La tasa que hace que $V_0=0$ es la tasa forward $i(0;h;p)$

NOTA

2. Forward vendido: La parte variable la voy a pagar, no a recibir

$0 \quad\quad h \quad\quad n+p$

Lo conozco recién en h

$$
\begin{array}{l}
\quad C\,i(h;0;p)\,p - CKP \\
- \; C\,i(h;0;p)\,p + C\,i(0;h;p)\,p \rightarrow \text{vale cero.} \\
\hline
\quad C\,i(0;h;p)\,p - CKP
\end{array}
$$

Pacto a la tasa forward

↳ Flujo de fondo fijo. le puedo calcular el valor actual:

$$\boxed{V_0 = \frac{C\,(i(0;h;p) - K)\,p}{1 + i(0;0;h+p)(h+p)}}$$

Si tengo que actualizar flujos donde tengo tasas variables, reemplazo dichas tasas por la tasa forward asociada y actualizo los flujos resultantes (porque me quedan flujos de fondos fijos)

↳ En realidad no estamos reemplazando, estamos agregando al flujo de fondos contratos que tienen un valor cero

UPFRONT: el flujo de fondos se paga en h (al principio)

IN ARREARS: el flujo de fondos se paga en n+p.

El reemplazo de la tasa variable por la forward sólo tiene sentido cuando no es upfront, porque no se podrían hacer las cancelaciones. (en la práctica se hace en todos lados)

SWAPS DE TASAS DE INTERÉS: el intercambio de flujos variables por flujos fijos se realiza en varias fechas.

Cobro: $\quad C\,i(0;0;2/12)\,2/12 \quad C\,i(2/12;0;2/12)\,2/12 \quad C\,i(4/12;0;2/12)\,2/12 \rightarrow$ Flujos de fondos variables

$-C \quad\quad \frac{2}{12} \quad\quad \frac{4}{12} \quad\quad \frac{6}{12}$

Pago: $\quad -CR\frac{2}{12} \quad\quad -CR\frac{2}{12} \quad\quad -CR\frac{2}{12} \rightarrow$ Flujo de fondo fijo

Distintos métodos de valuación: 1) Separación de flujos

Valor del fondo fijo: $\boxed{VF_F = \sum_t \frac{-CR\,2/12}{1 + i(0;0;t)\,t}}$ $\quad t = 2/12;\ 4/12;\ 6/12$

152 Los flujos variables pueden ser valuados a través de una estrategia estática de réplica: Invierto $C en el momento cero por un plazo de dos períodos → en el momento 2 recibo C + C. i(0,0; 2/12)^{2/12}. Me quedo con los intereses y reinvierto el capital → en el momento 4 obtengo C + C i(2,0; 2/12)^{2/12} → Al final me guardo el interés y con el capital inicial. → La operación me cubre todos los intereses pero me sobra el capital → Para que no me sobre capital, tomo una financiación en el momento cero por un plazo equivalente al del vencimiento del swap por un monto equivalente al valor actual de $C ⇒ en el momento 6 devuelvo C y lo que me sobró de la primer operación es lo mismo que lo que tengo que devolver en la segunda operación. ⇒ hacer las dos operaciones juntas me genera, neto, el flujo de fondos (los intereses)

$$\boxed{VF_V = C - \frac{C}{1+i(0,0;6/12)^{6/12}}}$$

cantidad de dinero que puse en cero

⇒ Valor del swap = $VF_F + VF_V$

$$\boxed{V_0 = C - \frac{C}{1+i(0,0;6/12)^{6/12}} - \sum \frac{C\,k^{2/12}}{1+i(0,0;t)^{t}}}$$

CLASE 4/15

Ejemplo.

C = 10 $\quad C/1+i(0,0;6/12)^{6/12} = 9 \quad \Sigma \ldots = 0.6 \Rightarrow V_0 = 0.4$ (teórico)

$V_0 = 0.5$ (mercado)

Vendo lo caro, compro lo barato. Vendo el swap a 0.5 y me quedo con 0.1. Con 0.4 armo la estrategia. Para armar el flujo de fondos.

Tengo $0.4 pero necesito $1 → pido prestado $0.6 y me obligo a devolver $\Sigma C k^{2/12}$ ..., que lo voy a devolver con el swap que vendí. Lo pago con cada cobro fijo.

Con $1, pido prestado $9 adicionales y me obligo a devolver C (10) en el momento 6. Con los $10 que tengo, invierto y me va a dar intereses → esos intereses los uso para pagar los flujos variables del swap.

29:43 resumen

Vendo el swap a 0.5. Me guardo 0.1. Tomo prestado 0.6 que se me cancela con los flujos que cobro
0.6 + 0.4 → junto $1 y con eso obtengo los flujos variables que cancelan la deuda variable que tenía

Valor de mercado no puede ser mayor al teórico, sino se puede armar un arbitraje.

2) Método de estimación

Reemplazo las tasas desconocidas por una tasa que conozco hoy (tasa forward) → añado al flujo de fondos una sucesión de forwards con tasa pactada igual a las respectivas tasas forward a fin de simplificar el flujo de fondos resultante sin modificar el valor de la cartera a valuar

$$a\left(0;0;\tfrac{2}{12}\right)\tfrac{2}{12} \qquad a\left(\tfrac{2}{12};0;\tfrac{2}{12}\right)\tfrac{2}{12} \qquad a\left(\tfrac{4}{12};0;\tfrac{2}{12}\right)\tfrac{2}{12}$$

$$-CK\tfrac{2}{12} \qquad -CK\tfrac{2}{12} \qquad -CK\tfrac{2}{12}$$

Hago de cuenta que en realidad tengo: (remplazo x tasa forward)

$$Ci\left(0;0;\tfrac{2}{12}\right)\tfrac{2}{12} \qquad Ci\left(0;\tfrac{2}{12};\tfrac{2}{12}\right)\tfrac{2}{12} \qquad Ci\left(0;\tfrac{4}{12};\tfrac{2}{12}\right)\tfrac{2}{12}$$

↓ flujos fijos

Actualizo cada flujo fijo por su tasa

$$\boxed{V_{0\,swap} = \frac{Ci\left(0;0;\frac{2}{12}\right)\frac{2}{12}}{1+i\left(0;0;\frac{2}{12}\right)\frac{2}{12}} + \frac{Ci\left(0;\frac{2}{12};\frac{2}{12}\right)\frac{2}{12}}{1+i\left(0;0;\frac{4}{12}\right)\frac{4}{12}} + \frac{Ci\left(0;\frac{4}{12};\frac{2}{12}\right)\frac{2}{12}}{1+i\left(0;0;\frac{6}{12}\right)\frac{6}{12}}}$$

↳ Llego al mismo valor que antes. Verificar.

- V_0 puede ser positivo o negativo y va a depender del K que pactemos. K muy chica en relación a la tasa: $V_0 > 0$
  K muy grande $V_0 < 0$

↓

La K justa que hace que nadie le tenga que pagar a nadie es la que hace que $V_0 = 0$

↳ Tasa swap: tasa pactada K que hace que el valor del swap sea igual a cero.

↳ coincide con el promedio ponderado de las tasas forward que estiman los intereses variables del swap, siendo las ponderaciones mencionadas, los valores actuales de los del instrumento.

$$K = \text{Prom. Pond}\left[i\left(0;0;\tfrac{2}{12}\right); i\left(0;\tfrac{2}{12};\tfrac{2}{12}\right); i\left(0;\tfrac{4}{12};\tfrac{2}{12}\right)\right]$$

Cada una de las tasas se pondera por el factor de descuento asociado a cada tasa.

$$\underbrace{\frac{1}{1+i\left(0;0;\frac{2}{12}\right)\frac{2}{12}}}_{P_1} \qquad \underbrace{\frac{1}{1+i\left(0;0;\frac{4}{12}\right)\frac{4}{12}}}_{P_2} \qquad \underbrace{\frac{1}{1+i\left(0;0;\frac{6}{12}\right)\frac{6}{12}}}_{P_3}$$

$$K = \frac{\frac{i\left(0;0;\frac{2}{12}\right)}{P_1} + \frac{i\left(0;\frac{2}{12};\frac{2}{12}\right)}{P_2} + \frac{i\left(0;\frac{4}{12};\frac{2}{12}\right)}{P_3}}{P_1+P_2+P_3}$$

Mercados de tasas de interés

Los derivados de tasa de interés no están expresados a partir del valor de un activo, sino de una cosa (tasa) que depende del valor del activo.

Derivados no lineales: son aquellos cuyo pay-off no surge directamente a partir de una transformación lineal de las tasas de interés que se realicen en el mercado.

• CAP: otorga a su tenedor el beneficio que se tendría si se tuviera solamente el derecho (no obligación) a recibir intereses variables a cambio de intereses fijos sobre un capital nocional de C.
Este instrumento puede entenderse como una póliza de seguro destinada a cubrir el exceso de intereses variables a pagar sobre una financiación a interés variable por sobre los intereses que se deberían pagar si los intereses de la financiación estuvieran pactados a una tasa K.

$$\boxed{X^{CAP} = C\,p\,(i_{T-p;0;p} - K)^+}$$

Si $i > K$ me dan dinero y si no no me dan nada.

Flujo de intereses de algo que deviene intereses desde T-P hasta T y que paga en T. No conocemos la tasa hasta T-P y puede llegar a ser muy alto → tenemos seguro.

$$\boxed{X^{FLOOR} = C\,P\,(K - i_{T-P;0;P})^+}$$

Este tipo de derivados no se pueden valuar igual que los demás. El problema es que cuando hacíamos el árbol, armábamos un sistema de ecuaciones y hallábamos el valor de la cartera. Pero la tasa de interés no es un activo → no podemos hacer cantidad x precio → el problema es que la tasa no es un activo sino que es un indicador de cuánto dinero me van a dar

NOTA

El problema se solucionaría trabajando con árboles de bonos. (Veo a la tasa de interés como un algoritmo que surge a partir del valor del respectivo bono cupón 0 ("P")
↳ Los derivados sobre la tasa de interés pueden verse también como derivados sobre activos subyacentes

$$\underbrace{P(T-P,T)}_{\text{valor actual de \$1}} = \frac{1}{1+i(T-P;0;P)P} \Big\} \text{ valor que hay en } T-P \text{ de \$1 puesto en } T$$

De esta ecuación puedo descubrir la tasa si sé el valor en T-P de \$1 puesto en T:

$$\boxed{i(T-P;0;P) = \Big(\underbrace{\frac{1}{P(T-P,T)}}_{\text{factor de capitalización}} - 1\Big)\frac{1}{P}}$$

tasa efectiva

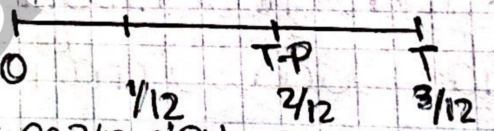
la nominalizo

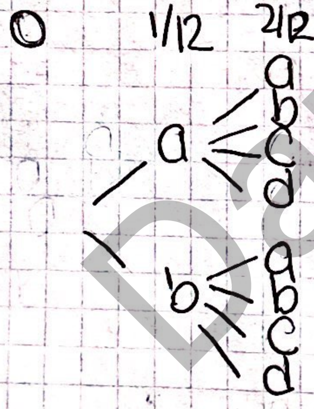
↓ Puedo reemplazarlo en la ecuación original

Ej: Quiero valuar un derivado que paga

$$X = C \cdot \frac{1}{12}\left[i\left(\frac{2}{12};0;\frac{2}{12}\right) - K\right]^+ \qquad K \rightarrow \text{dato puntual}$$

Si necesito escenarios de la tasa, necesito escenarios del bono asociado a la tasa
↳ El bono asociado paga en T=3/12 y yo lo valúo en 2/12, 1/12 y 0





$P(2/12;3/12)^{aa}$ → valor en 2/12 del bono que paga en 3/12
$P(2/12;3/12)^{ab}$ → Con este dato puedo saber en qué tasa mes está pensando el mercado.

Con este número saco la tasa (fórmula)

$P(2/12;3/12)^{ba}$

$$i\left(\frac{2}{12};0;\frac{1}{12}\right) = \left(\frac{1}{P(2/12;3/12)} - 1\right)\frac{1}{1/12}$$

→ La tasa efectiva mensual la llevo a anual

→ Para cada escenario obtengo la tasa para cada escenario. → calculo el pay-off

NOTA

otro de los árboles tiene que ser el bono, porque es lo que se compra y vende. En este caso, el activo subyacente es un bono, entonces no podemos suponer que el segundo bono no tiene riesgo.
Además tengo que tener más de dos estados.

↳ con derivados de tasas de interés tengo que recurrir a muchos escenarios y a muchos bonos.

- Los bonos no tienen que vencer antes del vencimiento del derivado. Sino, no podría resolver el sistema

- No necesariamente los pay off de los derivados sobre la tasa de interés se encontrarán referenciados a una única tasa de interés → puede ocurrir que el pay off a valuar contemple el valor que tomen varios puntos de una ETTI futura → hay varios activos subyacentes

Valuación del derivado s/ esperanzas

$V_t = G_t \, E_Q[X \cdot \overset{\text{un árbol}}{G_T^{-1}} \mid F_T]$ Si el bono vence en el mismo momento, divido por 1.

CLASES

MODELO CONTINUO

Parámetros

- μ → modela la tendencia -0,02
- σ → modela la volatilidad 0,05
- r → modela la tendencia del precio del bono 0.004
- T → Dato contractual, cuándo vence el contrato. 10
- n → cuántas veces quiero operar. 100
- S_0 → valor del activo hoy 10

Se desarrolla una metodología que nos dice qué cantidad de activos y qué cantidad de bonos tengo que tener en cartera en cada momento, en función de dónde esté parado y de lo que vaya ocurriendo con la trayectoria de precios de los activos subyacentes

t	W_t	B_t	S_t	f_i	Psi	V_t	Error	cuenta errores

NOTA

B_t: Surge como resultado de la función del tiempo ⇒ El precio del bono se mueve de forma exponencial (el valor del bono capitaliza continuamente a la tasa r)

$$B_t = e^{rt}$$

S_t → trayectoria al azar que puede llegar a tomar la trayectoria del activo subyacente. Trayectoria posible.

V_t → valor del activo al momento t.

Error → Diferencia entre el valor al que quiero vender la cartera vieja y el valor al cual quiero comprar la cartera nueva → en este modelo hay una diferencia por vender la cartera vieja a los precios nuevos y comprar una cartera nueva.

Cuenta errores → acumulo los errores capitalizándolos al mismo tiempo y sumándolos. ↓

$$\frac{B_{0,02}}{B_{0,01}} = \text{Factor de capitalización implícito del bono}$$

→ El valor de la última cartera tiene que coincidir con el Pay-off del derivado, cualquiera sea la trayectoria

- Si quiero mejorar el nivel de imprecisión, tengo que aumentar n →

$\uparrow n \rightarrow \downarrow$ imprecisión ; $\downarrow n \rightarrow \uparrow$ imprecisión.

↳ La cuenta errores es una variable aleatoria que converge a cero a medida que $n \rightarrow \infty$ con probabilidad 1

- Diferencia entre algo que ocurre siempre y algo que ocurre con probabilidad 1.

$X \sim U[0;1]$

- $Y \begin{cases} \text{si } X<1 & Y=X \\ \text{si } X=1 & Y=0 \end{cases} \quad P(Y=X)=1$

- $\begin{cases} \text{si } X=(1/2)^n \ \forall n \in \mathbb{N} & Y=0 \\ \text{si } X \neq (1/2)^n & Y=X \end{cases} \quad P(Y=X)=1$

- $\begin{cases} \text{si } X \in \mathbb{Q} \text{ (fracción)} & \Rightarrow Y=0 \\ X \notin \mathbb{Q} & \Rightarrow Y=X \end{cases}$ $P(Y=X)=1$ → más allá de que las fracciones están en el intervalo, existen muchísimos más números que no son fracciones por toda la recta

W_t: Proceso browniano

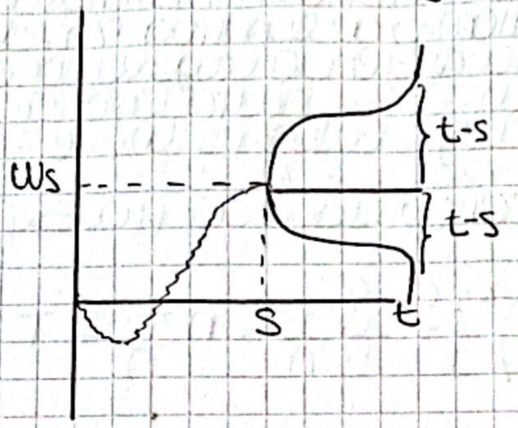
NOTA

PROCESOS BROWNIANOS

Procesos estocásticos (sucesión de variables aleatorias W_t) que cumplen con las siguientes condiciones:

1. $W_0 = 0$: el proceso browniano arranca valiendo cero.
2. $W_t - W_s \sim N(0 ; \overset{\text{varianza}}{t-s})$: una vez llegado al momento s, sea cual fuere el valor que tome el proceso browniano, la VA W_t se distribuye como una normal con media W_s y varianza $t-s$

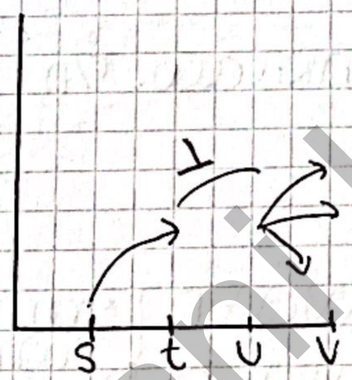
$t > S$



En promedio W_t va a valer lo mismo que W_s. Puede fluctuar con una varianza de $t-s$.
Las fluctuaciones se distribuyen normalmente

3. $(W_t - W_s) ; (W_v - W_u)$ son VA independientes con $V > U > t > S$

$\Rightarrow COV(W_t - W_s ; W_v - W_u) = 0$: Las diferencias entre los valores que toma el proceso en intervalos de tiempo disjuntos son variables aleatorias independientes



Lo que ocurra entre U y V es independiente de lo que ocurra entre S y t siendo U-V un intervalo disjunto respecto de S-T

4. W_t es una función continua : no puede tener saltos
trayectoria

Ejemplo página 68

∘ varianza → longitud del intervalo

• Las trayectorias del proceso browniano tienden a "temblar".

↓

Propiedades de las trayectorias de los procesos brownianos

1. Variación cuadrática

Dada una VA Y_n

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} \left[W_{\left(i \frac{T}{n}\right)} - W_{\left[(i-1)\frac{T}{n}\right]} \right]^2$$

Eleva al cuadrado las diferencias que toma el proceso browniano en intervalos de tiempo de longitud T/n, desde la diferencia cuyo valor es $W_0 - W_{T/n}$ hasta la diferencia cuyo valor es $W_T - W_{T-T/n}$

$W_0 - W_{T/n}$ $\qquad\qquad$ $W_T - W_{T-T/n}$

→ Y_n representa una medida de la variabilidad del proceso browniano.

$$E(Y_n) = \sum_{i=1}^{n} E\left[\left(W_{\left(i \frac{T}{n}\right)} - W_{\left((i-1)\frac{T}{n}\right)} \right)^2 \right] \overset{(1)}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{T}{n} = n\frac{T}{n} = T$$

Agarro un término cualquiera

$$\underset{\text{(definición)}}{VAR} = E\left[\left(\underbrace{W_{\left(i \frac{T}{n}\right)} - W_{\left((i-1)\frac{T}{n}\right)}}_{\sim N(0;\, T/n)} \overset{=0}{} \right)^2 \right] = T/n$$

⇒ $E(Y_n) = T$ $\qquad$ Esperanza de cada intervalo: T/n

$\sigma^2(Y_n) = 2\frac{T^2}{n}$ } Demostrar

Variación cuadrática: $\lim_{n \to \infty} Y_n$ ⇒ $E(VC) = T$, $\sigma^2(VC) = 0$ } siempre vale T con probabilidad 1.

↳ A dónde converge (1) cuando $n \to \infty$

→ La probabilidad de que la variación cuadrática tome el valor T es igual a 1

↓

Los caminos que puede tomar con probabilidad 1 el proceso browniano, tienen que tener una variabilidad tal que su VC entre 0 y T sea igual a T → los caminos que sigue el proceso tienen que ser diferentes a las funciones diferenciables (las mismas tienen VC=0)

CLASE 6

TEOREMA DE ITO

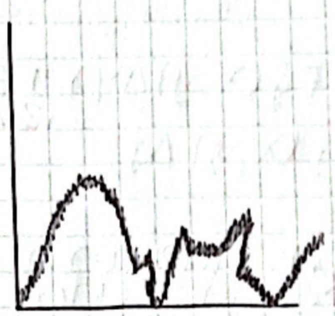
$$\sum \Delta W_t^2 = T = \sum \Delta t \Rightarrow \Delta W_t^2 = \Delta t$$

$$\Delta W_t = \pm\sqrt{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta W_t}{\Delta t} = \pm\frac{\sqrt{\Delta t}}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta W_t}{\Delta t} = \pm\frac{1}{\sqrt{\Delta t}}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} = \pm\infty$$

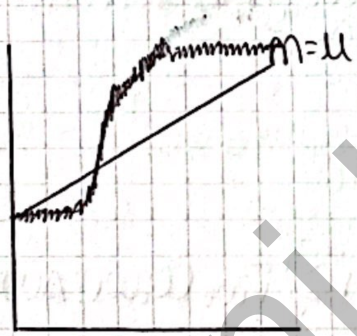


La pendiente del proceso browniano es siempre $\pm\infty$
A medida que pasa el tiempo, tiembla mucho
Es mucho más grande la variación del proceso browniano que la variación del tiempo.
→ no se puede derivar

REPRESENTACIÓN DEL ACTIVO

$$S_t = S_0 + \mu t + \sigma W_t - \overset{=0}{\omega_0} \text{ cte}$$

→ Proceso browniano

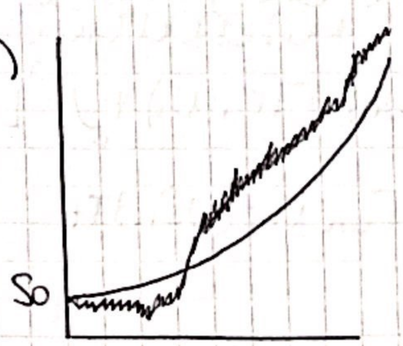


Sin la parte del proceso browniano, tengo una recta que empieza en S_0 y crece con pendiente μ
Cuando el proceso browniano vale cero, la simulación es igual a la tendencia original

$S_t \sim N(S_0 + \mu t \,;\, \sigma^2 t)$ → La variable aleatoria puede tomar cualquier valor
↓
Esta fórmula no se puede usar para representar el precio de un activo

Se suele usar:
$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma W_t}$

$S_t \in (0; \infty+)$



$S_t = \cos(t + W_t)$

$S_t = \ln(W_t)$

$S_t = F(t; W_t)$

• W_t no depende directamente de t. Que conozca t no me dice nada.
Lo que sí sabemos es que existe una relación entre la variación del proceso browniano y la variación de t: $\sum \Delta W_t^2 = \sum \Delta T$

Aplico Taylor p/ disminuir error]

$z = F(x; y) \qquad \Delta y^2 = \Delta x$

$\Delta z = F(x+\Delta x; y+\Delta y) - F(x;y) = F'_x(x;y)\Delta x + F'_y(x;y)\Delta y +$ $\quad = 1 \cdot \sqrt{\Delta x} \Rightarrow$ no tiende a cero

$+\frac{1}{2} F''_{xx}(x;y)\Delta x^2 + F''_{xy}(x;y)\Delta x \Delta y + \frac{1}{2} F''_{yy}(x;y)\Delta y^2$

Ito: de todos los términos, me quedo con aquellos que no sean despreciables en relación a Δx → divido cada término por Δx y me fijo si a medida que $\Delta x \to 0$, todo el término tiende a cero. Si lo hace, lo elimino.

$\Rightarrow \Delta z = F'_x(x;y)\Delta x - F'_y(x;y)\Delta y + \frac{1}{2} F''_{yy}(x;y)(\Delta y)^2$

Lo expreso en términos de t y W_t.

$\Delta S_t = F(t+\Delta t; W_t + \Delta W_t) - F(t; W_t)$

Ito: la igualdad también se da para la sumatoria.

$\underbrace{\sum_0^T \Delta S_t}_{S_T - S_0} = \sum_0^T \left[F'_t(t;W_t)\Delta t + \frac{1}{2} F''_{W_t}(t;W_t)\underbrace{(\Delta W_t)^2}_{\Delta t}\right] +$

$\sum F'_{W_t}(t;W_t)\Delta W_t + \varepsilon_{(n)}$ término de error

(n) cantidad de subintervalos que hay en la suma

$\underbrace{S_T}_{F(T;W_T)} = \underbrace{S_0}_{F(0;W_T)} + \sum_0^T \left[F'_t(t;W_t) + \frac{1}{2} F''_{W_t}(t;W_t)\Delta t\right] + \sum_0^T F'_{W_t}(t;W_t)\Delta W_t + \varepsilon_n$

ITO: el error converge a cero a medida que $n \to \infty$ (n = cantidad de subintervalos) con probabilidad 1.

A medida que $n \to \infty$ las sumas se transforman en integral: Nomenclatura (es lo mismo que antes)

• $F(T;W_T) = F(0;W_T) + \int_0^T \left[F'_t(t;W_t) + \frac{1}{2} F''_{W_t;W_t}(t;W_t)\right]dt$

$+ \int_0^T F'_{W_t}(t;W_t) d\, t \qquad$ AS (con prob = 1)

NOTA

otra forma de escribirlo

$$dF(t;W_t) = \left[F_t(t;W_t) + \frac{1}{2} F''_{W_t W_t}(t;W_t)\right]dt + F'_{W_t}(t;W_t)\,dW_t$$

$$+ F(0;W_t)$$

$$S_t = F(t;W_t) = S_0 e^{\mu t + \sigma W_t}$$

Vamos a ver si podemos calcular S_t como el valor inicial más cada una de las sumas intermedias.

$$F(t;W_t) = F(0;W_t) + \sum \underbrace{\left[F_t(t;W_t) + \frac{1}{2} F''_{W_t}(t;W_t)\right]}_{\text{Tendencia}} \Delta t$$

$$+ \sum_0^T \underbrace{F'_{W_t}(t;W_t)}_{\text{volatilidad}} \Delta W_t$$

Calculo derivada:

$$F_t(t;W_t) = S_0 \mu e^{\mu t + \sigma W_t}$$

$$F'_{W_t}(t;W_t) = \sigma S_0 e^{\mu t + \sigma W_t}$$

$$F''_{W_t}(t;W_t) = \sigma^2 S_0 e^{\mu t + \sigma W_t}$$

Asigno valores a la constantes

$S_0 = 10$ $\quad \mu = 0{,}01$ $\quad T = 10$

subintervalos

$\sigma = 0{,}05$ $\quad n = 100$ $\quad \Delta t = \frac{T}{n} = 0{,}1$

t	ΔW_t	W_t	S_t (Formula)	Tendencia	Volatilidad	Var.est.	Aprox
0		0	10	0	0	—	Sd
0,1	supongo 0,13	0,13	10,15			0,149	10,1
0,2	-0,04	0,09	10,08				
0,3							
10		2,34	19,21				

NOTA

- ΔW_t la simulo como una variable aleatoria que se distribuye normal con media cero, varianza 0.1
- Variación estimada = tendencia Δt + volatilidad ΔW
  ↳ en el momento 0.1, cuando conozco ΔW

Aproximación → voy acumulando las sumas

Teorema generalizado de ITO: qué pasa cuando tenemos una función de una función que depende de cosas estocásticas.

lo conozco en t

lo conozco en t+1

$$dS_t = \alpha_t \, dt + \beta_t \, dW_t$$

las conozco en t.

Proceso S que viene representado a partir de una forma diferencial

- Nos dice cómo cambia S cuando pasa el tiempo, no tengo que calcular el teorema de ITO.

m_t → min valor del proceso browniano entre 0 y t

M_t → max

Nuevo proceso estocástico: es una función del tiempo y del proceso anterior S_t

$$V_t = F(t, S_t)$$

$$dV_t = F'_t \Delta t + F'_S \Delta S_t + \frac{1}{2} F''_{t,t} \Delta t^2 + F''_{t,S_t} \Delta t \Delta S + \frac{1}{2} F''_{S_t,S_t} \Delta S_t^2 \Rightarrow \text{Reemplazo } dS$$

$$\boxed{dV = \left(F'_t + F'_S \alpha_t + \frac{1}{2} F''_{SS} \beta_t^2\right) dt + F'_S \beta_t \, dW_t}$$

Término de tendencia   Término de volatilidad

NOTA

HOJA N° 30

FECHA

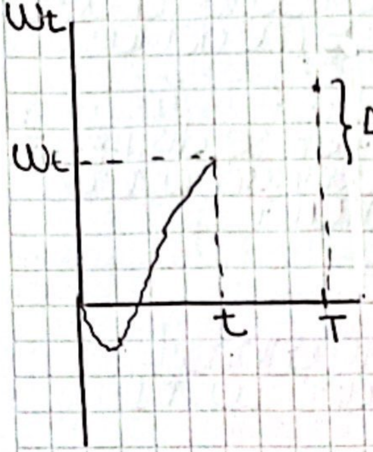
Segundo Parcial

CLASE 6.5

Proceso browniano

$P[a < W_T - W_t < b] \sim N \quad \mu = 0 \;:\; \sigma = T - t$

$$P[a < \Delta W_{T-t} < b] = \int_a^b \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(\Delta W_{T-t} - 0)^2}{T-t}}}_{\text{F de densidad}} \, d(\Delta W_{T-t})$$

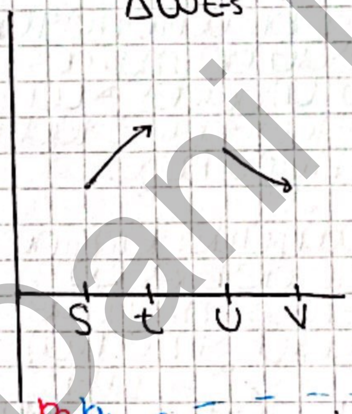


Cuál es la probabilidad de que la variación del proceso browniano entre T y t, termine estando ente a y b

$P[a < W_T < b] \rightarrow$ Probabilidad de que el proceso browniano esté entre a y b

$$= P[a < W_T - W_0 < b] = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-0)}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(\Delta W_{T-0} - 0)^2}{T-0}} \, d(\Delta W_{T-0})$$

$P[a_1 < \underbrace{W_t - W_s}_{\Delta W_{t-s}} < b_1 \,;\, a_2 < \underbrace{W_v - W_u}_{\Delta W_{v-u}} < b_2] \quad v > u > t > s$ intervalos disjuntos



Cuál es la probabilidad de que la variación del proceso browniano termine entre a_1 y b_1 y que la variación en otro momento termine entre a_2 y b_2

Las puedo multiplicar porque son intervalos disjuntos

$$= \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(\Delta W_{t-s} - 0)^2}{t-s}} \; \frac{1}{\sqrt{2\pi(v-u)}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(\Delta W_{v-u} - 0)^2}{v-u}}$$

Función de densidad conjunta: $d(\Delta W_{t-s})\, d(\Delta W_{v-u})$

- Cuando tengo intervalos disjuntos, puedo tratar a las variables aleatorias como independientes.

NOTA

$P[a_1 < W_t < b_1 ; a_2 < W_T < b_2]$

$$\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-0)}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(W_t-0)^2}{t-0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(W_T-W_t)^2}{T-t}} dW_t\, dW_T$$

No las puedo multiplicar porque no son independientes. El conocimiento respecto de la VA W_t influencia la distribución de probabilidades de W_T. ⇒ Planteo la función de densidad condicionada a la información que me da la otra.

$W_T = W_t + \underbrace{(W_T - W_t)}_{\text{único término aleatorio.}}$: Si conozco W_t, W_T se distribuye con media W_t y varianza $T-t$

REFLECTION PRINCIPLE DE LOS PROCESOS BROWNIANOS.

$P[\underbrace{M_T}_{\text{máximo valor del proceso browniano } [0;T]} > m ; W_T < b]$ Gráfico pag. 71

La probabilidad de que la trayectoria del proceso browniano en un intervalo (0;T) sea tal que su máximo valor sea mayor a "m" y que su valor final sea menor a "b" coincide con la probabilidad de que el valor final de la trayectoria del proceso browniano en un intervalo (0;T) sea mayor a 2m-b

⇒ Una vez que una trayectoria del proceso browniano toma el valor "m", es igual de probable que descienda más de "m-b" o bien que ascienda más de "m-b" unidades → La probabilidad de que el proceso browniano suba es igual a la probabilidad de que el proceso browniano baje.

- La probabilidad de que el máximo proceso browniano termine por encima de m y el mínimo por debajo de b, es lo mismo que, en algún momento superemos m, y que el último termine por encima de 2m-b (por la simetría)

$$P[M_T > m ; W_T < b] = P[W_T > 2m-b] = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{2m-b}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{(W_T)^2}{T}} dW_T \quad (1)$$

$$= F(m;b)$$

Esto nos permite calcular la función de densidad conjunta de M y W ...

Función de densidad conjunta

$$P[M_T > m ; W_T \leq b] = F(m;b) = \int_{-\infty}^{b} \int_{m}^{+\infty} f(M_T;W_T)\, dM_T\, dW_T$$

De tener bien calculado $f(M_T;W_T)$ deberíamos llegar a lo mismo que (1) ⇒ integrando dos veces llego a (1) ⇒ derivando dos veces (1) llego a $f(M_T;W_T)$

$$\frac{\partial F(m;b)}{\partial b} = \int_{m}^{+\infty} f(M_T;W_T)\, dM_T\, dW_T$$ Desaparece $\int_{-\infty}^{b}$ (la de afuera)

me cambia el símbolo derivar con respecto al límite inferior

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial F(m;b)}{\partial b}\right)}{\partial m} = -f(M_T;W_T)\, dM_T\, dW_T$$

desarrollo: pag 72

...

$$\boxed{f(m;b) = \frac{2(2m-b)}{T\sqrt{2\pi T}}\, e^{-\frac{(2m-b)^2}{2T}}}$$

↳ Función de densidad conjunta del máximo y del último valor del proceso browniano.

- Va a ser muy útil para calcular primas de derivados cuyo pay-off dependa del máximo valor que tome el subyacente en determinado intervalo de tiempo. (Barrier options - lookback options).

Probabilidad de que el máximo termine por encima de m y el último termine por debajo de m

$$P[M_T \geq m ; W_T \leq m] = P[W_T > m] = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{m}^{\infty} e^{\frac{W_T^2}{2T}}\, dW_T$$

$$= P[M_T \geq m ; W_T \geq m] = P[W_T > m]$$

$$\Rightarrow P[M_T > m] = P[M_T \geq m ; W_T \leq m] + P[M_T \geq m ; W_T \geq m]$$

$$= 2 \cdot P[W_T \geq m] = 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{m}^{\infty} e^{\frac{W_T^2}{2T}}\, dW_T$$

ZERO SET (conjunto 0) $m=0$. ...

$$P[M_T > 0] = 2P[W_T \geq 0] = 2 \cdot 0{,}5 = 1$$

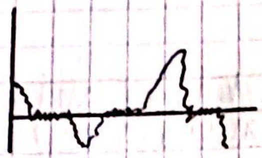
La probabilidad de que el máximo termine por encima de cero, es 2 × probabilidad $W_T \geq 0 \Rightarrow 0{,}5$ (normal con media cero, la mitad de las veces termina por arriba de cero, la mitad por debajo)

La probabilidad de que el mínimo termine por debajo del cero: es $\frac{1}{2}$ por simetría → en algún momento, entre 0 y T, el proceso browniano toma un valor negativo.

$$P[M_T \geq 0] = P[m_T \leq 0] = 1$$

⇒ En algún momento posterior a cero el proceso browniano no retornará a cero con probabilidad 1, en el momento t_1. Se puede aplicar el mismo análisis para el intervalo $(0; t_1)$ y ver que, con probabilidad 1, el proceso browniano tomará en un momento $t_2 < t_1$, el valor 0.

⇒ El proceso browniano cruza infinitas veces el 0 entre 0 y T → es contra intuitivo, pero se puede probar que los ceros de las trayectorias de los procesos brownianos se encuentran todos juntos → el proceso browniano tiembla tanto que antes de escaparse del cero, cruza infinitamente el eje de los ceros



Teorema de ITO

Dado un proceso estocástico $S_t = F(t; W_t)$, se puede calcular ΔS_t aproximando con derivadas

$$\Delta S_t = \underbrace{\left(F'_t + \frac{1}{2} F''_{ww}\right)}_{\alpha_t} \Delta t + \underbrace{F'_w}_{\beta_t} \Delta W_t$$

Teorema generalizado de ITO. (se intenta llegar a ΔV_t)

$$V_t = F(t; S_t) \qquad \Delta S_t = \alpha_t \Delta t + \beta_t \Delta W_t$$

$$dV_t = F'_t dt + F'_s dS_t + \frac{1}{2} F''_{tt} dt^2 + F''_{t;s_t} dt dS + \frac{1}{2} F''_{ss} dS_t^2$$

Aproximación de segundo orden de la variación de V

Reemplazo dS_t con ΔS

(...) ver pasos en el apunte

$$dV_t = A\, dt + B\, dW_t + \cancel{C dt^2} + D \cancel{dt} dW_t + E\, dW_t^2$$

Me quedo con los términos que no desaparecen (que no son despreciables).

▽ $\frac{dW_t}{dt}$ varía mucho sabiendo que $\frac{\Delta W_t}{\Delta t} \simeq \frac{\sqrt{\Delta t}}{\Delta t}$

▽ $\Delta W_t^2 = \Delta t$

∇ S termina siendo el valor del activo
V termina siendo el valor del derivado.

$$\Rightarrow dV_t = A\,dt + B\,dW_t + E\,dt$$

$$\boxed{\begin{array}{l} dV_t = \underbrace{\left(F'_t + F'_s\,\alpha_t + \frac{1}{2}F''_{ss}\,\beta_t^2\right)}_{\text{Tendencia}} dt + \underbrace{F'_s\,\beta_t\,dW_t}_{\text{volatilidad}} \\ \text{con } V_t = F(t;S_t) \wedge dS_t = \alpha_t\,dt + \beta_t\,dW_t \end{array}}$$

Ejemplo:

Datos: $\Delta S_t = \overbrace{M_t}^{\alpha_t}\Delta t + \overbrace{m_t}^{\beta_t}\Delta W_t$

$S_0 = 0 \rightarrow$ me tienen que decir de dónde parto

$V_t = \frac{S_t^2}{1+t} \Rightarrow V'_t = \frac{S_t^2}{-(1+t)^2}$ $\quad V'_s = \frac{2S_t}{1+t}$

$V''_{ss} = \frac{2}{1+t}$

$T = 10$
$n = 100$
$\Delta t = 0{,}1 = \frac{10}{100}$

De toda la columna de W_t hasta t

t	ΔW_t	W_t	max α_t	min β_t	S_t	V_t	Tend.	Vol	Aprox
0		0	$M_0=0$	0	0				
0,1	$\sim N(0;0{,}1)$ 0,21	$W_t+\Delta W_t$ 0,21	0,21	0	0				
0,2	-0,12	0,21-0,12 0,09	0,21	0	0,11				
⋮		⋮							
10		3,81	4,32	-1,15					

Deberían dar iguales

$\Delta S_t = \alpha_t\,\Delta t + \beta_t\,\Delta W_t$