

Figura 3.3.1 Las frecuencias acumuladas de las intensidades de los siniestros basadas en los cocientes brutos observados n_i/n , de la Tabla 3.3.1. La cola se ajusta a una línea recta. Escala logarítmica doble.

Una curva analítica que se adapte a los datos puede hallarse del siguiente modo. Primero se traza en una doble escala logarítmica el gráfico del complemento $1-S_{\text{obs}}(Z)$ de la f.d. $S_{\text{obs}}(Z)$ de la muestra observada (para $Z \leq T$ ya hemos definido $S(Z) = S_{\text{obs}}(Z)$). Este gráfico se ha trazado en la Figura 3.3.1. La incertidumbre que es característica de la cola superior de la distribución de la intensidad de los siniestros puede observarse en esta Figura. Luego se elige una línea recta sobre la escala logarítmica doble para ajustar bien los datos observados y para llegar al punto $(T, S(T))$. Transformando nuevamente a la escala lineal se obtiene en nuestro ejemplo en $S(Z) = 1 - 7,3208 \cdot Z^{-1,3938}$ para $Z \geq T$. En realidad, ésta es una f.d. de Pareto (3.3.14). Además se supuso que la mayor pérdida posible en la cartera era de \$100 millones y la f.d. de Pareto es, por lo tanto, truncada en este punto, es decir $S(Z)$ se fija igual a 1 para $Z \geq 100,000$.

Los momentos absolutos a_j de la intensidad de un siniestro (3.2.9) ahora pueden obtenerse como la suma

$$a_j = \int_{-\infty}^{\infty} Z^j dS(Z) \equiv \sum_{Z_i \leq T} Z_i^j \Delta S_i + \int_T^{\infty} Z^j dS(Z), \quad (3.3.4)$$

en la que los promedios de las clases \bar{Z}_i y las diferencias $\Delta S_i = S(\bar{Z}_{i+1}) - S(\bar{Z}_i)$, $i=1, \dots, n$ (para $Z_i \leq T$) se toman directamente de la Tabla 3.3.1, y $T=102,40$ es el punto límite a partir del cual se utiliza la distribución analítica de la cola. El cálculo del valor de la integral en el segundo término se deja como ejercicio.

Ejercicio 3.3.5 Calcule el valor esperado $m=a_1$ según la fórmula (3.3.4) para la f.d. S dada en la Tabla 3.3.1, con la expresión analítica de la cola especificada en el texto (sección 3.3.3(c)).

3.3.4 Métodos analíticos

(a) Ventajas del método analítico. Como se expresó en la sección 3.3.1(b), a menudo es conveniente tratar de hallar una expresión analítica explícita para una f.d. S de la intensidad de los siniestros. Este es particularmente el caso si las estadísticas de los siniestros están demasiado dispersas como para utilizar el método tabular de la sección 3.3.3. La experiencia obtenida de trabajar con otros riesgos similares puede indicar alguna forma particular para la f.d. de la intensidad de los siniestros.

Por otro lado, dado que una f.d. analítica a menudo es la más fácil de manejar en cálculos y programación, con frecuencia se la utiliza también en los casos en que puede esperarse que la distribución empírica proporcione un modelo satisfactorio para la f.d. de la intensidad de los siniestros. Entonces puede encontrarse una f.d. S analítica adecuada, por

ejemplo, ajustando la curva, que esté muy cerca de la f.d. discreta observada y que, por lo tanto, puede utilizarse en su lugar. Los rasgos característicos de las f.d. analíticas más comúnmente utilizadas pueden encontrarse en los libros de texto corrientes.

En las secciones 3.3.5 a 3.3.7 se estudian algunas distribuciones analíticas usadas más frecuentemente; podrán hallarse más ejemplos en Hogg y Klugman (1984).

La explicación de las técnicas de ajustamiento de curvas y del cálculo de la f.d. de la intensidad de los siniestros se encuentra bien desarrollada en la bibliografía de temas actuariales y está fuera del alcance de este libro. El lector podrá consultar estos temas en Hogg y Klugman (1984) y Patrik (1980). Sin embargo, en la siguiente sección presentaremos un método útil de ajuste de curvas, que ha resultado ser eficaz en las aplicaciones.

Debemos destacar que muchos métodos corrientes de estimación en estadística son inadecuados para la estimación de la distribución de la intensidad de los siniestros. La razón principal de la discrepancia es la naturaleza marcadamente asimétrica de las distribuciones típicas de la intensidad de los siniestros.

(b) Ajustamiento de curvas utilizando la función del valor esperado acotado. Cuando tratamos de ajustar una f.d. analítica a los datos observados (complementados, si es necesario, por información adicional acerca de siniestros catastróficos), siempre se plantea la pregunta de cómo medir la bondad del ajuste. Un problema particular que surge al comparar una f.d. analítica con una discreta es que la segunda es una función escalonada discontinua y, por lo tanto, las dos f.d. siempre diferirán entre sí en el entorno de un escalón en al menos la mitad de la medida del escalón. Este problema puede solucionarse integrando las dos

f.d. al mismo tiempo, lo que lleva a la llamada función del valor esperado acotado. Esta resulta una herramienta muy útil para probar la bondad del ajuste de una f.d. analítica a la f.d. de la intensidad de los siniestros observados.

La función L del valor esperado acotado de una variable Z de la intensidad de siniestros, o de la correspondiente f.d. S se define como

$$L(M) = E(\min(M, Z)) = \int_{-\infty}^M Z dZ(Z) + M \cdot (1 - S(M)), \quad (3.3.5)$$

donde M es cualquier número real. El valor de la función L en un punto M es igual a la esperanza de la f.d. S truncada en el punto M .

Para ajustar la función L del valor esperado acotado de una f.d. S analítica a los datos observados, primero se construye la función L_{obs} del valor esperado acotado (Ejercicio 3.3.7) de la f.d. S_{obs} de la intensidad de siniestros observados (3.3.3). De allí en adelante intentamos hallar una f.d. S analítica adecuada, tal que la correspondiente función L del valor esperado acotado esté lo más cerca posible de la L_{obs} .

Una razón por la que la función del valor esperado acotado es una herramienta especialmente adecuada para nuestros propósitos es que representa la distribución de la intensidad de los siniestros en la dimensión monetaria. Por ejemplo, tenemos $L(\infty) = E(Z) = m$. Por otro lado, la f.d. S trabaja sobre la escala de probabilidades, es decir que toma valores entre 0 y 1. Por lo tanto, generalmente es difícil ver, observando solamente la f.d. S , cuán sensible es la prima de riesgo a los cambios en los valores de S , mientras que la función L del valor esperado acotado muestra inmediatamente cómo las diferentes partes de la f.d. S de la intensidad de los siniestros contribuyen a la prima del riesgo.

Además de los fines del ajustamiento de curvas, la función L resultará ser también un concepto muy útil en muchos otros aspectos relacionados más adelante en este libro, por ejemplo en la sección 3.3.10 que trata acerca de las franquicias y en la sección 3.4.2 cuando se estudie el reaseguro de exceso de pérdida.

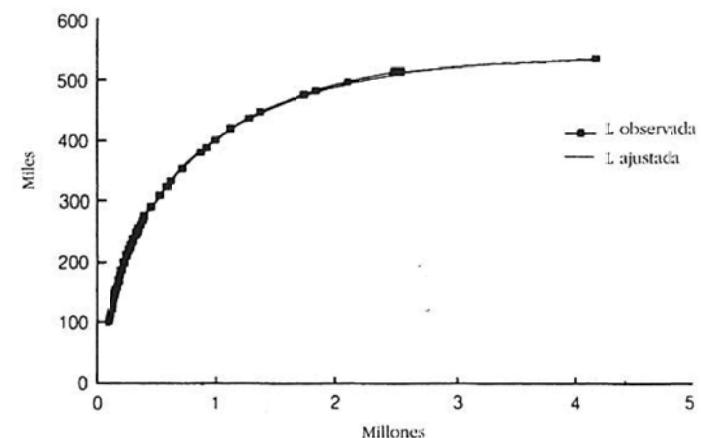
La función L del valor esperado acotado (Ejercicios 3.3.9 a 3.3.12) tiene las siguientes propiedades importantes

- 1) El gráfico de L es cóncavo, continuo y creciente.
- 2) $L(M) \rightarrow m = E(Z)$, para $M \rightarrow \infty$,
- 3) $S(M) = 1 - L'(M)$,

donde $L'(M)$ es la derivada de la función L en el punto M ; si S es discontinua en el punto M , entonces 3) se cumple para la derivada por la derecha $L'(M+)$.

Desde el punto de vista del ajuste de curvas el uso de la función acotada del valor esperado tiene la ventaja, comparada con el uso de las f.d., que tanto la L analítica que será ajustada como la correspondiente función L_{obs} observada (Ejercicio 3.3.7), basada en la f.d. discreta S_{obs} observada, son continuas y cóncavas, mientras que la f.d. S_{obs} de la intensidad de los siniestros observados es una función escalonada discontinua (véase la Figura 3.3.2). La propiedad 3) implica que la función del valor esperado acotado determina únicamente la correspondiente f.d. S . Cuando las funciones del valor esperado acotado de dos distribuciones son parecidas, no sólo los valores medios de las distribuciones son cercanos, sino que las distribuciones completas son parecidas.

Función L del valor esperado acotado:



Función de distribución S

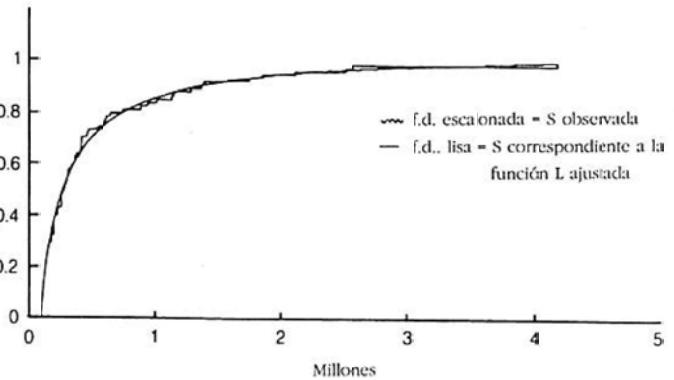


Figura 3.3.2 Las funciones L_{obs} y L del valor esperado acotado observada y ajustada analíticamente (gráfico superior), y las correspondientes f.d. S_{obs} y S (gráfico inferior). Las marcas negras en el gráfico superior son los 75 siniestros observados que exceden los

100.000 marcos finlandeses (equivalentes a cerca de \$12.000 en 1992), no se incluyeron los siniestros por debajo de este límite, dado que se aplicaban en la cartera franquicias relativamente altas, que consistía en pólizas de rotura de determinada maquinaria industrial. El ajuste es excelente porque la curva L observada y la ajustada son prácticamente iguales. La curva ajustada es una curva de Pareto proporcionada. En la sección 3.3.7(c) damos más detalles de las distribuciones de Pareto "proporcionadas".

Cuando pueden ocurrir siniestros grandes, debe prestarse especial atención a la cola de la distribución de la intensidad de los siniestros. Si se cuenta con información acerca de las intensidades y frecuencias de siniestros grandes para riesgos similares en el mercado, entonces la f.d. S_{obs} de la intensidad de los siniestros observados primero debe modificarse de acuerdo con aquélla. Por otro lado, una vez realizado el ajustamiento, siempre hay que analizar el comportamiento de la función L en el rango a la derecha del punto Z_{max} donde la S_{obs} alcanza el valor 1, mientras que L_{obs} se mantiene constante. Entonces, si $L(M)$ aún aumenta considerablemente para valores $M > Z_{max}$, entonces hay que ver que las correspondientes probabilidades $1-S(M)$ sean confiables y estén en conformidad con las observaciones. El peso de la cola de una f.d. analítica S puede modificarse utilizando distribuciones proporcionadas, que presentaremos en la sección 3.3.7(c).

(c) Algunas observaciones sobre la aplicabilidad de los diferentes enfoques. Incluso en casos en que una distribución analítica parece ajustarse bien a los datos observados, se requiere especial atención si el volumen de las estadísticas de siniestros es tan pequeño que no puede alcanzarse un nivel de confianza razonable. Este es a menudo el caso en la práctica, especialmente cuando se trata de siniestros grandes.

La necesidad de precisión de la f.d. S depende de la aplicación en cuestión. Por ejemplo, para fijar la tasa de una franquicia de un asegurado es importante que la distribución se ajuste bien a los datos observados en el rango de siniestros más pequeños, en cuyo caso se recomienda utilizar el enfoque del ajuste de curva o el método tabular. Por otro lado, cuando

la f.d. F del importe acumulado de siniestros es aproximada y cuando la frecuencia de siniestros no es demasiado pequeña, entonces la forma exacta de la f.d. S de la intensidad del siniestro ya no es tan fundamental. Es más importante estimar bien las características más bajas de S y, en el caso de una distribución de extremo pesado, que el perfil de la cola sea realista. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que los tres momentos más bajos no definen por completo la forma de una f.d. S y, por lo tanto el ajuste de S a los datos observados puede ser impreciso.

La precisión del ajuste de una distribución analítica de la intensidad de los siniestros a los datos observados puede verse más fácilmente si se comparan las correspondientes funciones L y L_{obs} del valor esperado acotado, como en la Figura 3.3.2. En el área de la cola también es conveniente comparar las f.d. analítica y observada S y S_{obs} , o $1-S$ y $1-S_{obs}$ entre sí, para ver el nivel de incertidumbre. Para esta comparación es aconsejable graficar un diagrama como en la Figura 3.3.1 (obsérvese la doble escala logarítmica).

Las distribuciones gamma, log-normal y de Pareto, que se estudiarán en las secciones 3.3.5 a 3.3.7 más adelante, son candidatas típicas para ser consideradas en aplicaciones en las que es suficiente con que los tres momentos inferiores y el perfil de la cola de la distribución de la intensidad de los siniestros coincidan con los datos observados. Las distribuciones de Pareto y de Pareto proporcionada (sección 3.3.7) son, además, especialmente adecuadas para el ajuste de curvas, dado que la f.d. de Pareto es muy conveniente para realizar cálculos. La razón principal de esto es que las características de la f.d. S pueden estimarse en forma cerrada y, lo que es más, estas fórmulas de cálculo también pueden aplicarse cuando se considera cualquier rango limitado de la f.d. S . Si una f.d. analítica coincide con los datos sólo hasta cierto valor de intensidad de siniestros, y otra f.d. analítica coincide con los datos para siniestros más grandes, entonces puede utilizarse una f.d. combinada. La función del

valor esperado acotado de una distribución definida por partes se obtiene como se señala en el Ejercicio 3.3.15.

Ejercicio 3.3.6. Probar que si la f.d. S es una función escalonada, la correspondiente función L del valor esperado acotado es una función lineal por tramos. Trazar los gráficos de S y L en el caso en el que solamente las intensidades de siniestros 1, 2, 4, 7, 11 y 16 sean posibles, siendo las respectivas probabilidades puntuales 0,40; 0,10; 0,25; 0,10; 0,10 y 0,05.

Ejercicio 3.3.7. Sea S la f.d. muestral (3.3.3) para una muestra dada de n siniestros observados \mathbf{Z}_i , $i=1,2,\dots,n$. Probar que la correspondiente función L del valor esperado acotado está dado por la fórmula

$$L(M) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \min(M, Z_i).$$

Ejercicio 3.3.8 Probar que la función $L_{a\mathbf{Z}+b}$ del valor esperado acotado de una transformación lineal positiva (es decir, $a>0$) $a\mathbf{Z}+b$ de \mathbf{Z} satisface la ecuación

$$L_{a\mathbf{Z}+b}(M) = a \cdot L_z \left(\frac{M-b}{a} \right) + b.$$

Ejercicio 3.3.9 Probar que la función L del valor esperado acotado es creciente y continua.

Ejercicio 3.3.10 Probar que L es una función cóncava.

Ejercicio 3.3.11 Probar que $L(M)$ se acerca al promedio m de la intensidad de siniestros cuando M tiende a infinito.

Ejercicio 3.3.12 a) Probar que $S(M)=1-L'(M+)$ y que $S(M-) = 1-L'(M-)$, donde $L'(M+)$ y $L'(M-)$ son las derivadas por la derecha y por la izquierda de L .

b) Probar que

$$L(M) = L(0) + \int_0^M [1-S(z)] dz,$$

donde $L(0) = 0$ si se excluyen los siniestros negativos.

Ejercicio 3.3.13 a) Probar que $L(M)=M$ si y sólo si $S(M-)=0$.

b) Probar que $L(x)-L(y) \leq x-y$, si $x \leq y$.

Ejercicio 3.3.14 Sea L_T la función acotada del valor esperado correspondiente a la distribución de la cola S_T

$$S_T(Z) = \text{Prob}\{\mathbf{Z} \leq \mathbf{z} | \mathbf{Z} > T\} = \frac{S(Z) - S(T)}{1 - S(T)}, Z \geq T$$

obtenida de truncar una f.d. S dada en el punto T . Probar que

$$L_T(M) = \frac{L(M) - L(T)}{1 - S(T)}, M \geq T.$$

Ejercicio 3.3.15 Sea S_i una f.d. y sea L_i la correspondiente función del valor esperado acotado, para $i=1,2$. Supongamos que tenemos $S_1(A) \leq S_2(A)$ en un punto A . La f.d. S se define por partes fijando $S(Z)=S_1(Z)$ para $Z < A$ y $S(Z)=S_2(Z)$ para $Z \geq A$. Probar que la función del valor esperado acotado de S está dada por la fórmula $L(M)=L_1(\min(M,A))+L_2(\max(M,A))-L_2(A)$.

Ejercicio 3.3.16 Sea L la función acotada del valor esperado de la f.d. S de la intensidad de siniestros de una suma de variables mutuamente independientes de Poisson(n_i) compuesta y sean L_i las funciones del valor esperado acotado de las f.d. de la intensidad de los siniestros de los sumandos. Probar que $L = \sum (n_i / n) \cdot L_i$.

3.3.5 Distribución gamma de tres parámetros

(a) La distribución gamma desplazada. Para una f.d. S analítica de la intensidad de siniestros puede utilizarse la distribución gamma desplazada, definida como $S(Z)=G(Z-d)$, $d > 0$, donde G es la f.d. Gamma(r, a) (sección 2-5(a)). La f.d. S tiene tres parámetros, a , r y d , y también se denomina distribución gamma de tres parámetros.

Supongamos que tenemos las tres características principales, el valor medio m , el desvío estándar $\sigma=\sigma_z$ y la asimetría $\gamma=\gamma_z (>0)$ de la distribución de la intensidad de siniestros. Queremos hallar los valores para los parámetros a , r y d de la f.d. S gamma de tres parámetros conforme con estas tres características. Si Y tiene una distribución Gamma(r, a), entonces $Z=d+Y$ tiene una distribución gamma desplazada con parámetros a , r y d . Tenemos (Apéndice B (B.1.3)) las ecuaciones

$$m = E(Z) = d + \frac{r}{a}, \quad \sigma_z^2 = \frac{r}{a^2}, \quad \gamma_z = \frac{2}{\sqrt{r}}. \quad (3.3.6)$$

Resolviendo para a , r y d (Ejercicio 3.3.17) se obtiene

$$r = \frac{4}{\gamma_z^2}, \quad a = \frac{2}{\sigma_z \cdot \gamma_z}, \quad d = m - 2 \cdot \frac{\sigma_z}{\gamma_z} \quad (3.3.7)$$

La función L del valor esperado acotado de la distribución gamma desplazada con parámetros a , r y d está dada por (Hogg y Klugman (1984), pág. 226)

$$L(M) = d + \frac{r}{a} \cdot G_{r+1,a}(M-d) - (M-d) \cdot [1 - G_{r,a}(M-d)],$$

para $M \geq d$, (3.3.8)

donde $G_{r,a}$ es la f.d. Gamma (r, a). Para el cálculo numérico de la gamma $G_{r,a}$, véase Press y otros (1986) (utilizando su notación, tenemos $G_{r,a}(x)=P(r, a \cdot x)$).

(b) Las formas de las curvas de la densidad gamma. En la Figura 3.3.3 se grafican ejemplos de densidades gamma para valores diferentes de la asimetría γ

Para una asimetría mayor o igual que 2 la curva de densidad es puntiaguda. En la práctica las distribuciones de las intensidades de siniestros generalmente tienen una asimetría bastante elevada (desde 5-10 hacia arriba). La d mínima de una distribución gamma de tres parámetros está determinada por las tres características básicas de la f.d. de la intensidad de siniestros. A menudo sucede que el punto inicial d de la f.d. no se ajusta bien con los datos de siniestros observados. Entonces, si el rango de siniestros pequeños es importante para la aplicación, la f.d.

gamma de tres parámetros debe ser rechazada. Por supuesto, es aún peor si el ajuste es malo para siniestros grandes.

La f.d. gamma de tres parámetros a veces se utiliza también como aproximación de la f.d. F del importe acumulado de siniestros, si la asimetría es pequeña (comp. sección 4.2.1(b)).

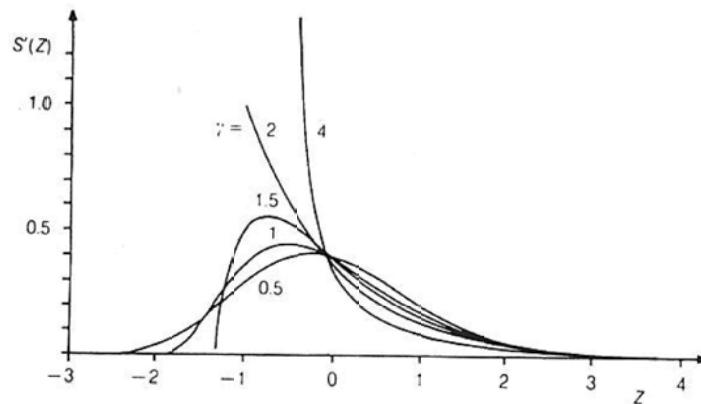


Figura 3.3.3 Ejemplos de densidades gamma desplazadas con una media = 0, desvío estándar = 1 y asimetrías diversas.

(c) Aditividad. La suma de variables aleatorias con distribuciones $\text{Gamma}(r_1, \alpha)$ y $\text{Gamma}(r_2, \alpha)$ tiene una distribución $\text{Gamma}(r_1+r_2, \alpha)$. Esto se demuestra en el Apéndice B utilizando la función generatriz de momentos.

Nótese que la f.d. $S\text{Gamma}(1, \alpha)$ se reduce a la f.d. exponencial $S(Z)=1-e^{\alpha Z}$, $Z \geq 0$. Por lo tanto, la f.d. $\text{Gamma}(k, \alpha)$ para valores enteros positivos de k se obtiene como la k -ésima convolución de la f.d. exponencial.

Ejercicio 3.3.17 Probar las fórmulas (3.3.7).

Ejercicio 3.3.18 Probar que $\text{Gamma}(1, \alpha)$ es la distribución exponencial.

Ejercicio 3.3.19 Probar que $\text{Gamma}(r, \alpha)$ es asintóticamente normal cuando $r \rightarrow \infty$.

3.3.6 Distribución logarítmico-normal

(a) Variable normal transformada. Una distribución frecuentemente utilizada para la intensidad de siniestros es la **logarítmico-normal** (desplazada), o en forma abreviada **log-normal**. Por definición, una variable de la intensidad de siniestros Z tiene una distribución log-normal si es de la forma

$$Z = d + e^Y, \quad (3.3.9)$$

donde $Y = Y_{\mu, s}$ es una variable con distribución normal con un valor medio μ y desvío estándar s , y donde d es el punto inicial del rango de la variable de la intensidad de siniestros Z .

Si se despeja Y de (3.3.9) se obtiene $Y = \ln(Z-d)$. Entonces $S(Z) = N((\ln(Z-d)-\mu)/s)$, y la densidad de la variable Z (Ejercicio 3.3.20) es

$$S'(Z) = \frac{1}{s \cdot (Z-d) \cdot \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2s^2} (\ln(Z-d)-\mu)^2 \right], \quad (3.3.10)$$

donde d , μ y s son parámetros libres. Dados la media m , el desvío estándar σ_z y la asimetría $\gamma_z (>0)$ de la f.d. S de la intensidad de siniestros, entonces se obtienen los valores correspondientes de los parámetros d , μ y s (Ejercicio 3.3.21) de la siguiente manera. Primero se halla una variable auxiliar η como la raíz real de la ecuación

$$\eta^3 + 3\eta - \gamma_z = 0. \quad (3.3.11)$$

Luego, tenemos

$$d = m - \sigma_z/\eta; \quad s^2 = \ln(1+\eta^2); \quad \mu = \ln(m-d) - 1/2.s^2. \quad (3.3.12)$$

La función del valor esperado acctado de la distribución log-normal (véase Hogg y Klugman (1984), pág. 229) es

$$L(M) = d + (m - d) \cdot N\left(\frac{\ln(M - d) - \mu - s^2}{s}\right) \\ + (M - d) \cdot \left[1 - N\left(\frac{\ln(M - d)}{s}\right) - \mu\right]. \quad (3.3.13)$$

(b) Las formas de las curvas de densidad log-normal se grafican en la Figura 3.3.4 para diferentes valores de la asimetría.

El mismo aspecto que se observó con respecto a la distribución gamma en la sección 3.3.5(b) también se ve en la Figura 3.3.4: cuando la asimetría es elevada, la cola de la izquierda se concentra en una franja muy angosta por debajo del valor medio como un pico. Por consiguiente, si se tiene en cuenta la asimetría bastante alta de las formas observadas de las intensidades de siniestros, hay que analizar cuidadosamente si estas distribuciones pueden constituir un modelo adecuado para la f.d. de la intensidad de siniestros en todo el rango.

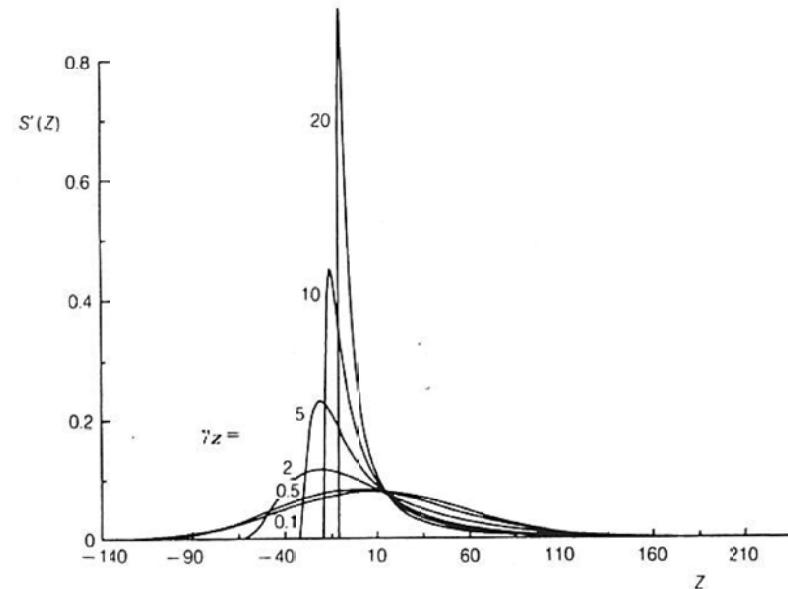


Figura 3.3.4 Una familia de densidades log-normales con una media $m=10$, desvío estándar $\sigma_z=50$ y una asimetría variable γ_z . Escala logarítmica doble.

Ejercicio 3.3.20 Probar que la densidad de la distribución log-normal está dada por (3.3.10).

Ejercicio 3.3.21 a) La f.g.m. de la variable con distribución normal $N(\mu, s^2)$ es

$$M(t) = e^{t\mu} \cdot e^{t^2 s^2 / 2}.$$

Utilizando esto, calcule los momentos a_k de la variable Z con distribución log-normal en el caso $d=0$.

b) Demostrar que, si Z tiene una distribución log-normal con parámetros d, μ, s , entonces

$$m = e^d \cdot e^{s^2/2} + d$$

$$\sigma_z^2 = (e^{2\mu} \cdot e^{s^2} \cdot (e^{s^2} - 1))$$

$$\gamma_z = (e^{s^2} + 2)\sqrt{e^{s^2} - 1}.$$

c) Probar que si S es una f.d. con distribución normal con media m , desvío estándar σ_z y una asimetría $\gamma_z (>0)$, entonces los parámetros d, μ y s están dados por (3.3.12).

3.3.7 Distribución de Pareto

(a) Definición y algunas propiedades. Una de las distribuciones analíticas de la intensidad de siniestros utilizadas con más frecuencia es la f.d. de Pareto, o más específicamente la f.d. de Pareto(α, β, D) que se define con la fórmula

$$S(Z) = 1 - \left(\frac{D + \beta}{Z + \beta} \right)^{\alpha} \quad (Z \geq D), \quad (3.3.14)$$

donde α, β y D son parámetros que satisfacen $\alpha > 0$ y $\beta > -D$. El primer parámetro, α , controla cuán importante es la cola de la distribución: cuanto menor el α , más importante la cola. El segundo parámetro, β , afecta principalmente al rango de la izquierda de la distribución y no cambia esencialmente la cola de la distribución en la región en que Z es mucho más grande que β . El parámetro D restringe el rango de Z desde abajo (Figura 3.3.5). Si sólo debe ajustarse la cola de la distribución de la

intensidad de los siniestros, como en la sección 3.3.3(c), el parámetro β a menudo puede omitirse.

La experiencia ha demostrado que la fórmula de Pareto (3.3.14) a menudo es un modelo adecuado para la distribución de la intensidad de siniestros, especialmente donde pueden ocurrir siniestros excepcionalmente grandes.

Una ventaja de la f.d. de Pareto es que muchos valores básicos relacionados con la f.d. son simples y pueden deducirse mediante cálculos directos. Ejemplos de esas fórmulas son las expresiones para los momentos, tanto en casos en los que se utiliza la distribución de Pareto completa como cuando solamente se utiliza la cola de la distribución o cuando una variable aleatoria con distribución de Pareto está restringida a un intervalo (Ejercicios al final de la sección 3.3.7). Por ejemplo, las características principales y la función del valor esperado acotado (3.3.5) de la f.d. de Pareto(α, β, D) son (Ejercicios 3.3.24 a 3.3.27).

$$\begin{aligned} m &= \frac{\alpha \cdot D + \beta}{\alpha - 1}, \quad \text{para } \alpha > 1, \\ \sigma_z^2 &= \frac{(\alpha \cdot D + \beta)^2}{(\alpha - 1)^2 \cdot (\alpha - 2)}, \quad \text{para } \alpha > 2, \\ \gamma_z &= 2 \cdot \frac{\alpha + 1}{\alpha - 3} \cdot \sqrt{\frac{\alpha - 2}{\alpha}}, \quad \text{para } \alpha > 3, \\ L(M) &= \frac{\alpha \cdot D + \beta - (\alpha + \beta) \cdot [1 - S(M)]}{\alpha - 1} \quad (M \geq D) \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

En el caso especial que $\alpha = 1$, $L(M)$ en (3.3.15) es de la forma 0/0 y entonces L debe expresarse de otra forma (Ejercicio 3.3.27).

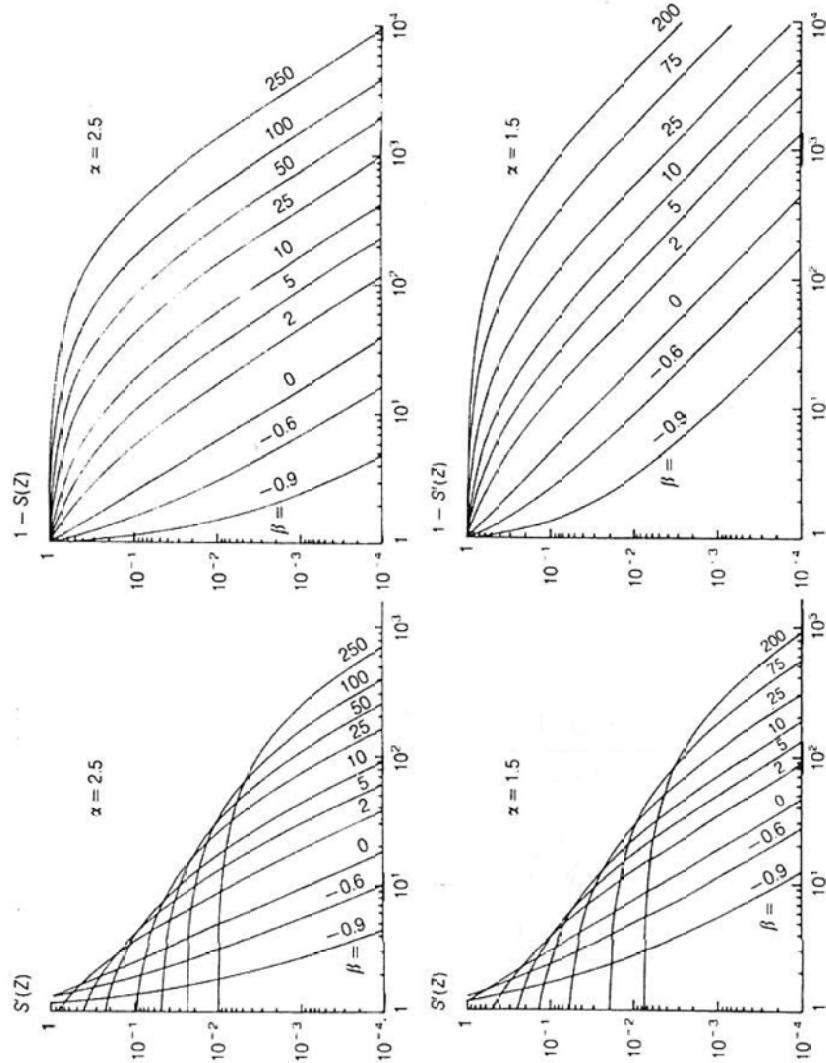


Figura 3.3.5 Densidades y colas de Pareto $1-S(Z)$. $D=1$ en todos los casos.

(b) Un problema con convergencia. Para valores pequeños del parámetro α la distribución de Pareto es de cola importante. Esto está indicado por la propiedad de que los momentos absolutos a_j de la intensidad de un siniestro son infinitos para aquellos valores de j que satisfacen $j \geq \alpha$ (Ejercicio 3.3.24). Por consiguiente, para $0 < \alpha \leq 1$ hasta el valor medio de la f.d. de Pareto es infinito, y para los valores del parámetro $2 < \alpha \leq 3$, por ejemplo, el desvío estándar es finito pero la asimetría y las características de órdenes mayores son infinitas. Los valores de α que son adecuados para ajustar los datos reales (dentro del rango en el que puede esperarse que ocurran los siniestros) generalmente varían desde menos de 1 a más de 3 y, por lo tanto, las tres características básicas en (3.3.15) en muchos casos no son de utilidad.

No obstante, este problema de momentos infinitos es manejable, dado que en la práctica generalmente hay algún tope superior para intensidades posibles de siniestros y por lo tanto hay que acatar los valores extremos de la cola de la distribución de la intensidad de siniestros. En las secciones 3.3.7(c) y 3.3.7(d) se estudian dos técnicas diferentes para ese propósito. Se darán los momentos de las f.d. resultantes.

(c) Distribución proporcionada (“censored distribution”). La f.d. proporcionada

$$S_c(Z) = \text{Prob}\{Z \leq Z\} = \frac{S(Z)}{S(C)}, \quad \text{para } Z < C, \quad (3.3.16)$$

puede ser una modificación útil de (3.3.14), si hay pruebas de que intensidades de siniestros mayores que el límite C están excluidas, y si el número esperado de siniestros que exceden B ($B < C$) disminuye a cero para $B \rightarrow C$. Obviamente el método de proporcionar también puede

utilizarse para otras f.d.. Los momentos de una f.d. proporcionada siempre son finitos (Ejercicio 3.3.29).

En la Figura 3.3.2 de la sección 3.3.4(b) se ajustó una función L del valor esperado acotado con distribución Pareto ($\alpha, \beta, \$12.000$), proporcionada respecto del punto C , a la función observada L_{obs} del valor esperado acotado (Ejercicio 3.3.7). El ajuste se realizó mediante un esquema de prueba y error simple utilizando una computadora. Los gráficos de las funciones acotadas del valor esperado, L_{obs} y L , observada y ajustada respectivamente, se trazaron en la pantalla de una computadora para algunos valores iniciales supuestos de los parámetros libres α , β y C . Luego, los valores de los parámetros α , β y C fueron modificados, hasta que el ajuste de los dos gráficos ya no se pudo mejorar significativamente. Se obtuvieron los valores de los parámetros, $\alpha=0,9$; $\beta=\$7.400$ y $C=\$0,5$ millones. La diferencia relativa máxima entre las funciones L observada y ajustada fue cercano al 1%. Naturalmente se podrían haber utilizado métodos numéricos para este ajuste, pero el método de prueba y error es bastante eficiente en la práctica con programas comunes de microcomputadores.

(d) Distribución truncada. El truncamiento es otro modo de trabajar con una f.d. de la intensidad de los siniestros cuando siniestros que exceden algún límite Z_{\max} son eliminados de la cuenta del asegurador, por ejemplo, cuando los importes de los siniestros por encima de cierto nivel son transferidos a los reaseguradores (sección 3.4) o cuando los siniestros por encima de un límite superior no están cubiertos por la indemnización (véase también el ejemplo de la sección 1.4(b)). La masa de probabilidad $1-S(Z_{\max})$ de la cola $Z \geq Z_{\max}$ está concentrada en el punto Z_{\max} , resultando en una f.d.

$$S_{\text{tr}}(Z) = \begin{cases} 1, & \text{para } Z \geq Z_{\max} \\ S(Z), & \text{para } Z \leq Z_{\max} \end{cases} \quad (3.3.17)$$

Obsérvese que la media de la f.d. truncada S_{tr} es, por definición, igual al valor de la función L del valor esperado acotado de la f.d. originaria S en el punto de truncamiento Z_{\max} . Los momentos de una f.d. truncada siempre son finitos.

Los momentos absolutos $a_k=a_k(Z_{\max})$ de una variable de la intensidad de siniestros $Z_{\text{tr}}=\min(Z, Z_{\max})$, que está distribuida acorde con la distribución truncada de Pareto(α, β, D) S_{tr} , se obtienen (Ejercicio 3.3.28) de la fórmula

$$a_k = (Z_{\max})^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \cdot (-\beta)^{k-i} \cdot E((Z_{\text{tr}} + \beta)^i), \quad \text{con}$$

$$E((Z_{\text{tr}} + \beta)^i) = \frac{\alpha \cdot (D + \beta)^i - i \cdot (Z_{\max} + \beta)^i \cdot (1 - S(Z_{\max}))}{\alpha - i} \quad (3.3.18)$$

Si α es un entero, entonces el caso $i = \alpha$ nuevamente lleva a una ecuación singular, y la fórmula de arriba requiere alguna modificación (Ejercicio 3.3.28).

(e) La distribución Burr. Es necesario encontrar distribuciones que ofrezcan una flexibilidad mayor que la f.d. de Pareto (3.3.14). La distribución de Burr proporciona esa flexibilidad

$$S(Z) = 1 - \left(\frac{\lambda}{(Z - D)^{\tau} + \lambda} \right)^{\alpha} \quad (Z \geq D) \quad (3.3.19)$$

donde α , τ y λ son parámetros positivos. Esta es una generalización de la f.d. de Pareto. En realidad con $\tau=1$ y $\lambda=D+\beta$ obtenemos la fórmula (3.3.14).

Las características básicas y la función del valor esperado acotado de la distribución de Burr pueden encontrarse en Hogg y Klugman (1984).

Ejercicio 3.3.22 Probar que si Z tiene una distribución de Pareto(α, β, D), la variable desplazada $Z-c$ tiene una distribución de Pareto($\alpha, \beta+c, D-c$).

Ejercicio 3.3.23 Probar que si Z tiene una distribución de Pareto(α, β, D), la cola de Z a partir de un punto $T>D$ (es decir, la variable condicional $Z|Z>T\}$) tiene una distribución de Pareto(α, β, T).

Ejercicio 3.3.24 Sea Z una variable con distribución de Pareto(α, β, D). Probar que

$$E((Z+\beta)^k) = \frac{\alpha}{\alpha-k} \cdot (D+\beta)^k, \quad \text{para } \alpha > k,$$

y que los momentos para $k \geq \alpha$ son infinito.

Ejercicio 3.3.25 Probar las fórmulas (3.3.15) para la media m y el desvío estándar σ_Z de la distribución de Pareto(α, β, D).

Ejercicio 3.3.26 Deducir el cumulante tercero de una variable Z con distribución de Pareto y Probar que se cumple la fórmula (3.3.15) para la asimetría γ_Z .

Ejercicio 3.3.27 Sea L_c la función del valor esperado acotado de la distribución de Pareto(α, β, D).

a) Probar que $L=L_\alpha$ responde a la fórmula (3.3.15), si $\alpha \neq 1$.

b) Probar que $L_\alpha \rightarrow L_1$ para $\alpha \rightarrow 1$.

c) Probar que $L_1(M)=D+(D+\beta)[\ln(M+\beta)-\ln(D+\beta)]$, para $M \geq D$.

Ejercicio 3.3.28 a) Probar las fórmulas (3.3.18) para los momentos de una distribución truncada de Pareto.

b) Probar que para $\alpha=i$ tenemos

$$E((Z_{tr}+\beta)^i) = i \cdot (D+\beta)^i \cdot [\ln(Z_{max}+\beta)-\ln(D+\beta)] + (Z_{max}+\beta)^i \cdot (1-S(Z_{max})).$$

Ejercicio 3.3.29 Obtener una expresión para los momentos a_k de la f.d. de Pareto proporcionada (3.3.16) en términos de los momentos $a_k(C)$ de la f.d. de Pareto truncada correspondiente.

Ejercicio 3.3.30 Sea L la función del valor esperado acotado correspondiente a una f.d. S y sea L_c la función del valor esperado acotado de la f.d. proporcionada $S_c=S/S(C)$. Probar que

$$L(M) = M \cdot (1-S(C)) \\ L_c(M) = \frac{L(M)-M \cdot (1-S(C))}{S(C)}, \quad \text{para } M \leq C.$$

Ejercicio 3.3.31 Probar que el gráfico de $1-S(Z)$, donde S es la f.d. de Pareto($\alpha, 0, D$), es una línea recta sobre una escala logarítmica doble.

3.3.8 Siniestros grandes

(a) El problema de la insuficiencia de estadísticas de siniestros.

Como ya se ha dicho, la falta de datos suficientes con respecto a siniestros grandes es un problema grave tanto desde el punto de vista práctico como desde el teórico. A menos que el reaseguro elimine los importes de intensidades de siniestros grandes, la cola de la f.d. es de importancia crítica, cada vez que se considera una f.d. S con cola significativa de la intensidad de los siniestros. Paradójicamente, la porción menos conocida de la f.d. S tiene, en estos casos, el mayor efecto sobre los resultados numéricos. Por lo tanto, es importante hacer el mejor uso de la información dispersa y a menudo escasa que se pueda conseguir de los archivos del asegurador o de otras fuentes. Algunos aspectos de este problema en particular se analizan más adelante.

(b) Período de observación prolongado. Una posibilidad es utilizar diferentes períodos de observación para analizar la experiencia de siniestros grandes y pequeños. Para valores pequeños de Z la experiencia de un período breve puede bastar para determinar valores de $S(Z)$. Dado que esta experiencia, en general, incluirá relativamente pocos siniestros grandes, tal vez sea necesario seguir estudiando siniestros grandes durante un período más largo para asegurar un conjunto adecuado de datos.

Entonces las estadísticas de un año pueden ser suficientes para siniestros menores que o iguales a \$100.000, por ejemplo, mientras que para siniestros superiores a \$100.000, tal vez sean necesarios datos de 20 años o más. Por supuesto, en este caso la experiencia de siniestros grandes debe adaptarse de manera que sea coherente con la magnitud relativa de los negocios. Cuánto se puede utilizar este método, depende de cuánto tiempo transcurre antes de que cambios estructurales subyacentes tornen poco confiable la acumulación de experiencia. Esto debe probarse continuamente, por ejemplo mediante el seguimiento de posibles modificaciones en las propiedades de siniestros más pequeños.

(c) La experiencia en el conjunto de la industria puede sustentar la deducción de supuestos para siniestros grandes. Por ejemplo, pueden obtenerse estadísticas acumuladas de siniestros muy grandes para períodos prolongados para condiciones equivalentes en un sentido amplio. En algunos países algunos aseguradores han establecido una oficina conjunta para reunir y analizar datos para la fijación de tasas y reservas. Sus archivos también podrían producir estadísticas de siniestros que serían útiles para la construcción de las funciones básicas teóricas básicas de los riesgos.

(d) Evaluación individual. A veces las estadísticas relativas a siniestros grandes son insatisfactorias debido a los cambios relativamente rápidos que se producen en la estructura de riesgo de la cartera. En esos casos puede resultar conveniente un método aproximado, tal como el enfoque individual, que se describió en la sección 3.3.2. Las unidades de riesgo más grandes en la cartera se consideran una por una, y se evalúan las intensidades potenciales de siniestros y las correspondientes frecuencias de ocurrencia. El método es evidentemente subjetivo, pero en ausencia de otros métodos, constituye un tipo de fundamento para cálculos subsiguientes.

(e) Siniestros supuestos. Si se dispone de cierta información con respecto a la posibilidad de siniestros grandes, a veces se puede agregar uno o más siniestros hipotéticos supuestos a las estadísticas de los siniestros reales, que, teniendo en cuenta la cartera real, pueden considerarse realistas aunque con pocas probabilidades de ocurrir. En lugar del número esperado de siniestros supuestos generalmente es más conveniente pensar en términos de sus frecuencias; por ejemplo, se puede tratar de arreglar las intensidades de los siniestros más grandes que podrían ocurrir una vez cada 10, 25, 50 y 100 años en la cartera.

3.3.9 Evaluaciones libres de distribuciones

Pueden presentarse situaciones en las que se necesitan las intensidades de las características principales de la variable del importe acumulado de siniestros X , pero no se conoce la forma de la f.d. S de la intensidad de siniestros. También hay ocasiones en las que se requiere una evaluación rápida de la magnitud aproximada de los momentos. Si se sabe que los siniestros causados por un evento individual tienen un límite superior M , entonces se pueden encontrar límites superiores para estas características básicas. El límite M puede deberse a la retención neta para reaseguro cedido, si la cesión por reaseguro se acuerda por riesgos individuales (la sección 3.4.2 se ocupa de los tratados de exceso de pérdida). Un límite M también puede surgir de condiciones de pólizas especiales o puede resultar del carácter especial de la cartera, por ejemplo si solamente consiste en pólizas relativamente pequeñas, como propiedades privadas, automóviles, etc.

(a) Fórmulas aproximadas para el desvío estándar del importe acumulado de siniestros en el caso en que las intensidades de siniestros tienen un límite superior, M . Las aproximaciones se basan en la desigualdad

$$a_j = \int_0^M Z^j dS(Z) \leq M \int_0^M Z^{j-1} dS(Z) = M \cdot a_{j-1}, \quad (3.3.20)$$

que es válida para cualquier distribución de intensidades de siniestros no negativas.

En el caso de Poisson compuesta (véase (3.2.13)), la desigualdad anterior da

$$\sigma_x = \sqrt{n \cdot a_2} \leq \sqrt{n \cdot M \cdot m} = \sqrt{M \cdot P}, \quad (3.3.21)$$

donde $P=E(X)=n \cdot m$ es la prima de riesgo. Para dar una idea de la precisión de esta desigualdad, en la Figura 3.3.6 se observa un ejemplo del comportamiento del cociente

$$K = \frac{\sigma_x}{\sqrt{M \cdot P}} = \sqrt{\frac{n \cdot a_2}{M \cdot P}} = \sqrt{\frac{a_2}{M \cdot m}}, \quad (3.3.22)$$

del desvío estándar sobre su límite superior, como una función de M .

El cociente K varía, en este ejemplo, entre los valores 0,5 y 0,8 para aquellos valores de M que son relevantes en la mayoría de las aplicaciones. Si pueden tolerarse desvíos negativos y positivos, entonces $K=0,7$ puede aceptarse como un valor medio, dando como resultado una fórmula aproximada

$$\sigma_x \approx K \cdot \sqrt{M \cdot P} \quad (K=1 \text{ límite superior; } K=0,7 \text{ promedio}) \quad (3.3.23)$$

Sin embargo, debe tenerse en cuenta que cualquier valor entre 0 y 1 para K es teóricamente posible.

Para el caso de Poisson mixta compuesta se obtiene una evaluación similar:

$$\sigma_x = \sqrt{n \cdot a_2 + P^2 \cdot \sigma_q^2} \approx \sqrt{k^2 \cdot M \cdot P + P^2 \cdot \sigma_q^2}, \quad (3.3.24)$$

donde $K=0,7$ nuevamente da un estimación somera, mientras que se obtiene una cota superior para $K=1$. Para hacer uso de esta fórmula se necesitan cálculos para M y para σ_q .

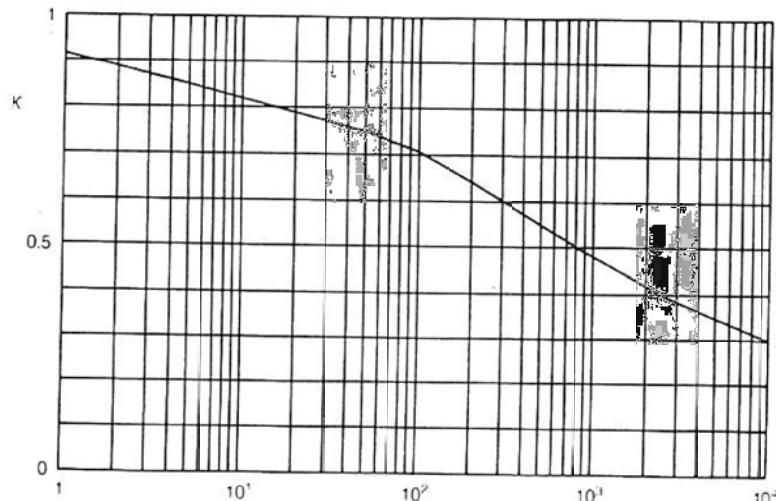


Figura 3.3.6 El cociente K de (3.3.22) como función de M . La f.d. de la intensidad de los siniestros como se consigna en la Tabla 3.4.1. M según un tratado de exceso de pérdida de un riesgo individual.

(b) Asimetría. En el caso de Poisson compuesta puede deducirse una cota superior para la asimetría mediante (3.3.20) (véase (3.2.13)).

$$\gamma_x = \frac{a_3}{a_2^{3/2} \cdot \sqrt{n}} = \frac{a_3}{a_2 \cdot \sqrt{n \cdot a_2}} \leq \frac{M}{\sigma_x}. \quad (3.3.25)$$

(c) La distribución más peligrosa. La fórmula (3.3.20) tiene una buena interpretación, cuando la igualdad se cumple. En realidad, si se excluyen siniestros negativos y intensidades de siniestros que exceden la cota M , entonces se ve fácilmente que existe igualdad en (3.3.20) si y sólo si la masa de probabilidad total se concentra en los puntos extremos 0 y M (ejercicio 4.1.7). Entre estas distribuciones extremas existe exactamente una que tiene una media igual al valor m dado, es decir la f.d.

$$\text{Prob}\{\mathbf{Z} = M\} = m/M = 1 - \text{Prob}\{\mathbf{Z} = 0\}. \quad (3.3.26)$$

Por lo tanto, de acuerdo con (3.3.21) en el caso de Poisson compuesta el desvío estándar σ_x para esta distribución en particular es mayor que el

desvío estándar de cualquier otra distribución restringida al mismo rango acotado $[0, M]$ y que tiene la misma intensidad media “ m ” de siniestros. El resultado se generaliza fácilmente al caso de Poisson mixta compuesta (3.3.24) y también al caso compuesto general (3.2.18). Concluimos que, dentro de la mencionada familia limitada de distribuciones de intensidad de siniestros, la f.d. (3.3.26) maximiza el desvío estándar del importe acumulado \mathbf{X} de siniestros.

Los momentos superiores a_j entonces también son maximizados por (3.3.20) y, por consiguiente, la distribución (3.3.26) puede considerarse, en cierto sentido, como la más peligrosa de todas las distribuciones de intensidad de siniestros con media igual a m , cuyo rango está restringido al intervalo $[0, M]$.

3.3.10 Franquicias

(a) ¿Cómo depende el riesgo asegurado de la franquicia? Es una práctica habitual en la mayoría de los ramos de seguros que la cobertura esté restringida por una franquicia. La idea de una franquicia es, en primer lugar, reducir los costos del manejo de los siniestros excluyendo de la cobertura los frecuentes y numerosos siniestros pequeños y, en segundo lugar, proporcionar cierta motivación al asegurado para que prevenga los siniestros, a través de un grado limitado de coseguro o de participación en los costos del siniestro.

Que un acuerdo entre el asegurado y la aseguradora tenga una franquicia D significa que la compañía de seguros solamente paga la porción del siniestro que excede el importe D ; si la intensidad del siniestro cae por debajo de este importe, entonces el siniestro no es cubierto por el contrato y el asegurado no recibe la indemnización.

Ahora consideremos la f.d. de la intensidad de siniestros (de los costos del siniestro luego de la deducción de la franquicia) como una función de la franquicia D . Sea S la f.d. de la intensidad de un siniestro en el caso sin franquicia. Si Z es la intensidad de un siniestro distribuida acorde con la f.d. S , entonces la compañía de seguros paga el importe Z_D en exceso de D o, más precisamente, el importe

$$Z_D = Z - \min(D, Z) = (Z - D)^+. \quad (3.3.27)$$

(Notación: $(x)^+ = \max(0, x)$.) El valor medio $E(Z_D)$ del importe a ser pagado es entonces

$$E(Z_D) = L(\infty) - L(D). \quad (3.3.28)$$

donde L es la función del valor esperado acotado (3.3.5) de la f.d. S , de acuerdo con la cual la variable Z de la intensidad de siniestros está distribuida; en particular, $L(\infty) = E(Z) = m$ es la media de Z . La fórmula (3.3.28) puede reformularse como

$$E(Z_D) = c(D) \cdot m, \quad (3.3.29)$$

donde el **coeficiente de descuento por franquicia**

$$c(D) = \frac{L(\infty) - L(D)}{L(\infty)} = 1 - \frac{L(D)}{m} \quad (3.3.30)$$

es una función decreciente y convexa de la franquicia D , tal que $c(0) = 1$ y $c(\infty) = 0$ (Ejercicio 3.3.32).

Si n es el número esperado de siniestros y $P_D = n \cdot E(Z_D)$, la prima de riesgos para la franquicia D , tenemos

$$P_D = c(D) \cdot P = n \cdot (L(\infty) - L(D)). \quad (3.3.31)$$

Entonces, vemos que la función L del valor esperado acotado es una herramienta conveniente para evaluar el efecto de una franquicia sobre la prima de riesgo.

Sea S_D la f.d. condicional $S_D(Z) = \text{Prob}\{Z \leq z | Z > D\}$ de la intensidad de siniestros Z bajo la condición de que la intensidad de un siniestro excede el importe de la franquicia D . Entonces, tenemos

$$S_D(z) = \frac{S(z) - S(D)}{1 - S(D)}, \quad z \geq D, \quad (3.3.32)$$

(cf. Ejercicio 3.3.14). La intensidad de siniestros media en exceso $m_D = E(Z - D | Z > D)$ (luego de tomar en cuenta el efecto de la franquicia) de un siniestro mayor que la franquicia, y el número esperado $n_D = n \cdot \text{Prob}\{Z > D\}$ de aquellos eventos que dan origen a un siniestro mayor que D , están dadas por las ecuaciones

$$\begin{aligned} m_D &= \frac{c(D)}{1 - S(D)} \cdot m, \\ n_D &= (1 - S(D)) \cdot n. \end{aligned} \quad (3.3.33)$$

Nótese especialmente la relación $n_D \cdot m_D = n \cdot E(Z_D)$.

(b) La franquicia condicionada. A veces se incluye en un contrato la llamada **franquicia condicionada**. En este caso el asegurador paga todo el siniestro si se excede el importe de la franquicia acordada. Si la franquicia de franquicia es D , entonces la media m_D en (3.3.33) es reemplazado por $m_{D, \text{franq.}} = m_D + D$, y tenemos (Ejercicio 3.3.33) la fórmula

$$P_{D, \text{franq.}} = P_D + n_D \cdot D \quad (3.3.34)$$

para la prima de riesgo, donde P_D y n_D están dados por (3.3.31) y (3.3.33).

Ejercicio 3.3.32 Probar, utilizando las propiedades de la función L del valor esperado acotado, que el coeficiente c de descuento para franquicias es una función continua, convexa y decreciente de la franquicia.

Ejercicio 3.3.33 Dar una fórmula para el coeficiente de franquicia c_{frang} (D) para la franquicia de franquicia.

Ejercicio 3.3.34 Considerar un riesgo asegurado donde la probabilidad de un siniestro en un año se evalúa en 0.01 y puede ignorarse la posibilidad de más de un siniestro. La intensidad del siniestro puede ser al menos $\sqrt{2}$ y a lo sumo 10 que se distribuyen entre estos límites según $S(Z)=1-2Z^3$. Calcular la prima de riesgo en el caso en que la franquicia del asegurado es 2.

3.4. Siniestros y reaseguro

3.4.1. Modificación de la f.d. de la intensidad de siniestros debido al reaseguro

(a) Siniestros netos de reaseguro. Para mantener razonable la variación del importe acumulado de siniestros X , un asegurador generalmente toma cobertura de reaseguro para su cartera de seguros, es decir que se protege contra pérdidas que surjan de siniestros grandes, excesivamente numerosos o catastróficos reasegurando importes de siniestros grandes o frecuencias elevadas de siniestros con una o más compañías de seguros o de reaseguros.

El importe acumulado de siniestros netos de reaseguro, $X=X_{ced}$, es la porción del cedente del importe total acumulado de siniestros X_{tot} , que es retenida luego de que la porción X_{re} del reasegurador (o reaseguradores) de los siniestros ha sido deducida, es decir

$$X = X_{tot} - X_{re}. \quad (3.4.1)$$

Dado que a menudo nos ocupamos de problemas concernientes a las cantidades netas del reaseguro, nuestro interés generalmente se centra en el importe neto X , que, entonces, se deja sin subíndice en esta sección.

En esta sección estudiaremos las características y distribuciones principales de las variables de siniestros netas de reaseguro, y de la porción del reasegurador. Una de las tareas principales es la obtención de la f.d. y la prima de riesgo del importe neto acumulado de siniestros X y de la porción X_{re} del reasegurador dadas las cantidades totales originarias y el tipo y los parámetros del acuerdo de reaseguro.

Los tratados de reaseguro a menudo se arreglan siniestro por siniestro (o evento por evento). Esto significa que cada siniestro se divide entre el cedente y el reasegurador. Entonces, por analogía con (3.4.1), la intensidad $Z=Z_{ced}$ de un siniestro individual neto de reaseguro es

$$Z = Z_{tot} - Z_{re}, \quad (3.4.2)$$

donde Z_{tot} es la intensidad del siniestro antes de deducir la porción Z_{re} del reasegurador. Los reaseguros de exceso de pérdida, de cuota parte y de excedentes que veremos en las secciones 3.4.2 a 3.4.4 son ejemplos de este tipo de acuerdo de reaseguro.

Un inconveniente de los acuerdos de reaseguro sobre la base siniestro por siniestro es que no necesariamente restringen la influencia de valores excepcionalmente grandes del importe acumulado de siniestros X_{tot} en todos los casos; la protección puede ser insuficiente en situaciones en las que X_{tot} es grande como resultado de una gran cantidad de siniestros, más que debido a uno o más siniestros muy grandes. En realidad, puede probarse (véase Pesonen, 1984) que, teóricamente, en un sentido bastante general, cualquier acuerdo de reaseguro óptimo es tal que se aplica directamente al importe acumulado de siniestros X_{tot} , de modo tal que X es una función de X_{tot} . En la sección 3.4.4 se analizará el reaseguro del