~~———~~ 872668 (1)

Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Económicas
Cátedra: Teoría del Equilibrio Actuarial
Examen Final RIESGO: 2024-08-19
TEMA 3

Apellido: FERREIRO
Nombres: JAUNTO
Registro n°: 872668
DNI: 41203997
e-mail: jacinferreiro@gmail.com

Nota: En todos los casos debe plantear las fórmulas de concepto y las fórmulas de cálculo que respondan a resoluciones analíticas y numéricas.

La Aseguradora Fernando cuenta con dos carteras de riesgos homogéneos e independientes tal que:

- **Zona Demario:** con 5.000 pólizas, en conjunto con Distribución Poisson del Número de Siniestros; con valor medio básico de 200, y cuantías posibles de cada siniestro conforme una distribución uniforme del daño con valor medio de $1.000.000 y franquicia absoluta de $80.000 por siniestro. El Valor medio básico del número de siniestros puede tomar valores del 70%, 100% y 130% conforme contextos con probabilidades del 40, 20 y 40% respectivamente. Para cada póliza la prima resulta igual al valor esperado de los siniestros con un 80% de la dispersión.
- **Zona Deluis:** con 10.000 pólizas, cada una con un número de siniestros que puede tomar los valores 0, 1 y 2 con probabilidades del 80%, 15% y 5% respectivamente), la cuantía del daño de cada siniestro responde a una distribución Gamma, con media $600.000 y dispersión de $800.000. La prima se ha determinado por un valor del 150% del daño esperado, sin embargo, la indemnización máxima por póliza es de $5.000.000.-

- Se ha contratado una **cobertura de exceso de pérdida por póliza** con prioridad de $1.000.000, con costo igual a la prima pura con un recargo del 75% de la dispersión del riesgo total cedido, calculado ello mediante un proceso de simulación estocástica
- Se ha contratado una **cobertura de exceso de siniestralidad**, con dos tramos, el primero **con prioridad del 150% y un límite hasta llegar el 180%** de las primas netas de reaseguro de exceso de pérdida, con costo igual a prima pura con más el 85% de la dispersión del riesgo cedido, y el segundo tramo por **el exceso sobre el límite anterior**, con un costo igual a prima pura con más un 95% de la dispersión del riesgo cedido en este tramo, calculado todo ello conforme un proceso de *simulación estocástica*

Se le pide:

a) Primas Brutas calculadas en forma exacta o en su defecto por discretización,
b) Primas cedidas
c) ¿Que capital requiere la compañía, para la probabilidad anual de ruina sea del 1%?, ¿y cuál sería en consecuencia la probabilidad de ruina para un período de tres años?
d) Se desea realizar un estudio alternativo, utilizando una distribución Gamma para el comportamiento conjunto de las carteras originarias, y (sin considerar reaseguros) se pide: i) calcular qué capital sería necesario para que la probabilidad de ruina sea del 1%. ii) calcular la diferencia en términos de capital que arroja esta aproximación respecto de un método conceptualmente exacto (seleccionar y justificar).

Scanned with CamScanner

JOAQUIN B FERREIRO 892658 ①

GRUPO I

5000 PÓLIZAS $N^T \sim P(\lambda_i)$ $P_{N^T}(n) = \frac{e^{-\lambda_i} \cdot \lambda_i^n}{n!}$

i	$E[N^T \mid C=i]$	$P[C=i]$
1	200.0,7	0,4
2	200	0,2
3	200.1,3	0,4

$\lambda_i = E[N^T \mid C=i] = VAR[N^T \mid C=i]$

$F_N(m) = \sum_{n=0}^{m} \frac{e^{-\lambda_i} \lambda_i^n}{n!}$

$E[N^T \mid C=i] = 5000 \cdot E[N \mid C=i]$

$E[N \mid C=i] = \frac{E[N^T \mid C=i]}{5000}$

$Z \sim U[a;b]$ $f_Z[z] = \frac{1}{b-a}$ ASUMO $a=0$

$1000000 = \frac{b-a}{2} \rightarrow b = 2000000$

$E[Z] = \int_0^{80000} 0 \cdot f_Z[z]dz + \int_{80000}^{2000000} (z-80000) f_Z[z]dz$

$E[Z^2] = \int_0^{80000} 0^2 \cdot f_Z[z]dz + \int_{80000}^{2000000} (z-80000)^2 f_Z[z]dz$

$VAR[Z] = E[Z^2] - E[Z]^2$

PARA LA CARTERA:

$E[S_i \mid C=i] = E[N^T_i \mid C=i] E[Z]$

$VAR[S_i \mid C=i] = E[N^T_i \mid C=i] VAR[Z] + E[Z]^2 VAR[N^T_i \mid C=i]$

$E[S_i^2 \mid C=i] = VAR[S_i \mid C=i] + E[S_i \mid C=i]^2$

DESCONTEXTUALIZO:

$E[S_i^k] = \sum_{i=1}^{3} P[C=i] \cdot E[S_i^k \mid C=i]$

$\llcorner k=1 \quad E[S_i]$

$\llcorner k=2 \quad E[S_i^2]$

$VAR[S_i] = E[S_i^2] - E[S_i]^2$

COMO LA PRIMA DEPENDE DE LA DISPERSIÓN DE CADA PÓLIZA:

$E[X \mid C=i] = E[N \mid C=i] E[Z]$

$VAR[X \mid C=i] = E[Z]^2 VAR[N \mid C=i] + VAR[Z] E[N \mid C=i]$

$E[X^2 \mid C=i] = VAR[X \mid C=i] + E[X \mid C=i]^2$

DESCONTEXTUALIZO:

$E[X^k] = \sum_{i=1}^{3} P[C=i] E[X^k \mid C=i]$

$\llcorner k=1 \quad E[X]$

$\llcorner k=2 \quad E[X^2]$

$VAR[X] = E[X^2] - E[X]^2$

$\Pi[X] = E[X] + 0,3 \cdot \sqrt{VAR[X]}$

$\Pi[S_i] = 5000 \cdot \Pi[X]$

JACINTO B FERREIRO 842658

②

GRUPO II 10000 PÓLIZAS

N ~ n	P[N=n]
0	0,8
1	0,15
2	0,05

$E[N]$

Z ~ Gamma

$E[Z] = 600000 = \alpha\beta$

$Var[Z] = 300000 = \alpha \cdot \beta^2$ } DESPEJO α y β

$$f_z[z] = \frac{z^{\alpha-1} \cdot e^{-z/\beta}}{\beta^\alpha \cdot \Gamma(\alpha)} \qquad F_z[z] = \int_0^z f_z[z]\,d$$

DEBO DISCRETIZAR PORQUE TENGO LIMITADA LA IND. DE LA PÓLIZA.

n	0	1	2	$\sum_1$
P[N=n]	P[N=0]	P[N=1]	P[N=2]	
z	$f_z^{*(0)}[z]$	$f_z^{*(1)}[z]$	$f_z^{*(2)}[z]$	P[X=z]
0	1	$F_z[250000]$		
500000	0	$F_z[750000]-F_z[250000]$		
1000000	0	$F_z[1250000]-F_z[750000]$	⊛	⊛²
1500000	0			
⋮		⋮		
5000000	0	$1-F_z[4500000]$	$1-\sum_{z=0}^{4500000} f_z^{*(2)}[z]$	$1-\sum_{z=0}^{4500000} P[X=z]$

DONDE

⊛ $f_z^{*(n)}[z] = \sum_{s=0}^{z} f_z^{*(n-1)}[s] \cdot f_z^{*(n)}[z-s]$

⊛² $P[X=z] = \sum_{n=0}^{2} P[N=n] \cdot f_z^{*(n)}[z]$

AHORA BUSCO ~~ESPERADOS~~ PROB DEL GRUPO:

$P[S_2=s] = P^{*(10000)}[X=s]$

Y OBTENGO MONTO ESPERADO DE SINIESTROS DEL GRUPO:

$E[S_2] = \sum_{s=0}^{5M \cdot 1K} s \cdot P[S_2=s]$

$\pi[S_2] = E[S_2] \cdot 1,5$

$\pi[S] = \pi[S_1] + \pi[S_2]$

JACINTO B FERREIRO 892658

3

COBERTURAS:

- XL POR PÓLIZA PRIO 1000000 $\pi[S^{ced\,XL}] = E[S^{ced\,XL}] + 0{,}75 \cdot \sigma[S^{ced\,XL}]$
- SL DOS TRAMOS $1{,}5\,\pi[S^{ret\,XL}]$ A $1{,}8\,\pi[S^{ret\,XL}]$
  $> 1{,}8\,\pi[S^{ret\,XL}]$

SIMULACIÓN ESTOCÁSTICA

$\#_{i;j}$: ~~[illegible]~~ NRO ALEATORIO ENTRE 0 Y 1

j: SIMULACIÓN EN CUESTIÓN

K: CANTIDAD DE SIMULACIONES A REALIZAR.

1º) SIMULO $\#_{1;j}$ PARA EL CONTEXTO DEL GRUPO I

$$\text{si } \#_{1;j} = \begin{cases} < 0{,}4 & C=1 \\ 0{,}4 < \; < 0{,}6 & C=2 \\ > 0{,}6 & C=3 \end{cases}$$

2º) SIMULO $\#_{2;j}$ PARA LA CANTIDAD DE STROS ~~[illegible]~~ DE PÓLIZA DEL GRUPO I

$$\#_{2;j} = \sum_{n=0}^{N_{1;j}} \frac{e^{-\lambda_i} \cdot \lambda_i^{n}}{n!}$$ CON λ_i DEPENDIENDO DEL CONTEXTO SORTEADO EN 1º

$$F^{-1}(\#_{2;j}) = N^{T}_{1;j}$$

3º) SIMULO MONTO DE STRO ~~[illegible]~~ DE LA PÓLIZA DE LA CARTERA I:

$$\#_{3;j} = \int_0^{z_{i;j}} \frac{1}{2000000}\,dz$$

$$F^{-1}(\#_{3;j}) = Z^{*}_{1;j}$$

$$Z_{1;j} = \begin{cases} 0 & \text{si } Z^{*}_{1;j} \leq 80000 \\ Z^{*}_{1;j} - 80000 & \text{si } Z^{*}_{1;j} > 80000 \end{cases}$$

REPITO ESTE PASO $N^{T}_{1;j}$ VECES.

4º) OBTENGO MONTO POR PÓLIZA DE LA CARTERA I:

$$X^{i}_{1;j} = \begin{cases} 0 & \text{si } N_{1;j} = 0 \\ \sum_{i=0}^{N^{T}_{1;j}} Z_{i;j} & \text{si } N_{1;j} > 0 \end{cases}$$

5º) APLICO REASEGURO XL Y OBTENGO MONTO CEDIDO Y RETENIDO DEL XL.

$$X^{ret\,XL}_{1;j} = \min[X_{1;j} ; 1000000]$$

$$X^{ced\,XL}_{1;j} = \max[0 ; X_{1;j} - 1000000]$$

REPITO PASOS 2 A 5 5000 VECES Y JACINTO B FERREIRO 892658

④

6º) OBTENGO MONTO RETENIDO Y CEDIDO DEL XL DE LA CARTERA I.

$$S_{1;j}^{ret\,xl} = \sum_{i=1}^{5000} X_{1;i}^{ret\,xl} \qquad S_{1;j}^{ced\,xl} = \sum_{i=1}^{5000} X_{1;i}^{ced\,xl}$$

7º) SIMULO $\#_{4;i}$ PARA CANTIDAD DE SINIESTROS POR POLIZA DE LA CARTERA 2

$$\text{si } \#_{4;i} \begin{cases} < 0{,}8 & N_2 = 0 \\ 0{,}8 < \; < 0{,}95 & N_2 = 1 \\ > 0{,}95 & N_2 = 2 \end{cases}$$

8º) SIMULO $\#_{5;i}$ PARA CUANTÍA DE UN SINIESTRO DE LA POLIZA DE LA CARTERA 2:

$$\#_{5;i} = \int_0^{z_{5;i}} \frac{z^{\alpha-1} e^{-z/\beta}}{\beta^{\alpha}\,\Gamma(\alpha)}\, dz$$

$$F^{-1}(\#_{5;i}) = z_{5;i}$$

REPITO ESTE PASO $N_{2;i}$ VECES

9º) OBTENGO MONTO DE POLIZA DE LA CARTERA 2:

$$X_{2;i}^{*} = \begin{cases} 0 & \text{si } N_{2;i} = 0 \\ \sum_{i=1}^{N_2} z_{5;i} & \text{si } N_{2;i} > 0 \end{cases}$$

$$X_{2;i} = \min\left[X_{2;i}' \,;\, 5000000\right]$$

10º) BUSCO MONTO RETENIDO Y CEDIDO DEL XL PARA LA CARTERA 2:

$$X_{2;i}^{ret\,xl} = \min\left[X_{2;i} \,;\, 1000000\right]$$

$$X_{2;i}^{ced\,xl} = \max\left[0 \,;\, X_{2;i} - 1000000\right]$$

11º) REPITO PASOS 6 A 10 10000 VECES Y OBTENGO MONTO DE LA CARTERA 2 RETENIDO Y CEDIDO DEL XL.

$$S_{2;j}^{ret\,xl} = \sum_{i=1}^{10000} X_{2;i}^{ret\,xl} \qquad S_{2;j}^{ced\,xl} = \sum_{i=1}^{10000} X_{2;i}^{ced\,xl}$$

12º) OBTENGO MONTOS TOTALES DE RETENCIÓN Y CESIÓN DEL XL

$$S_j^{ret\,xl} = S_{1;j}^{ret\,xl} + S_{2;j}^{ret\,xl} \qquad S_j^{ced\,xl} = S_{1;j}^{ced\,xl} + S_{2;j}^{ced\,xl}$$

13º) REPITO PASOS 1º A 12º K VECES Y OBTENGO VALORES ESPERADOS:

$$E[S^{ret\,xl\,\gamma}] = \sum_{j=1}^{K} \frac{(S_j^{ret\,xl\,\gamma})}{K} \qquad E[S^{ced\,xl\,\gamma}] = \sum_{i=1}^{K} \frac{(S_i^{ced\,xl\,\gamma})}{K}$$

$\gamma = 1 \;\; E[S^{ret\,xl}]$

$\gamma = 2 \;\; E[S^{ret\,xl\,2}]$

$\gamma = 1 \;\; E[S^{ced\,xl}]$

$\gamma = 2 \;\; E[S^{ced\,xl\,2}]$

$$VAR[S^{ced\,xl}] = E[S^{ced\,xl\,2}] - E[S^{ced\,xl}]^2$$

JACINTO B FERREIRO 832658

5

6º)

OBTENGO PRIMA CEDIDA DEL REASEGURO XL

$$\pi[S^{ced\,xl}] = E[S^{ced\,xl}] + 0{,}75\sqrt{VAR[S^{ced\,xl}]}$$

7º

$$\pi[S^{ret\,xl}] = \pi[S] - \pi[S^{ced\,xl}]$$

L, HALLADOS PREVIAMENTE

14º) CON LOS DATOS DEL PUNTO 13 DEFINO LOS LIMITES DE LOS TRAMOS DE LA COBERTURA SL DEFINIDA PREVIAMENTE Y CALCULO MONTOS RETENIDOS Y CEDIDOS :

8º

$$\text{si } S_j^{ret\,xl} = \begin{cases} \leq 1{,}5\pi[S^{ret\,xl}] & S_j^{ret\,sl} = S_j^{ret\,xl} \mid S_j^{ced\,sl\,1T} = 0 = S_j^{ced\,sl\,2T} \\ 1{,}5\pi[S^{ret\,xl}] < \; \leq 1{,}8\pi[S^{ret\,xl}] & S_j^{ret\,sl} = 1{,}5\pi[S^{ret\,xl}] \mid S_j^{ced\,sl\,1T} = S_j^{ret\,xl} - 1{,}5\pi[S^{ret\,xl}] \\ & \text{y } S_j^{ced\,sl\,2T} = 0 \\ > 1{,}8\pi[S^{ret\,xl}] & S_j^{ret\,sl} = 1{,}5\pi[S^{ret\,xl}] \\ & S_j^{ced\,sl\,1T} = 0{,}3\pi[S^{ret\,xl}] \\ & S_j^{ced\,sl\,2T} = S_j^{ret\,xl} - 1{,}8\pi[S^{ret\,xl}] \end{cases}$$

15º) REALIZO K VECES EL PASO 14 Y OBTENGO VALORES ESPERADOS :

$$E[S^{ced\,sl\,1T^{\alpha}}] = \sum_{j=1}^{k} \frac{(S_j^{ced\,sl\,1T})^{\alpha}}{k}$$

L $\alpha = 1$ $E[S^{ced\,sl\,1T}]$

L $\alpha = 2$ $E[S^{ced\,sl\,2T^{2}}]$

$$VAR[S^{ced\,sl\,1T}] = E[S^{ced\,sl\,1T^2}] - E[S^{ced\,sl\,1T}]^2$$

ANALOGAMENTE OBTENGO PARA EL 2T :

$E[S^{ced\,sl\,2T}]$ Y $VAR[S^{ced\,2T\,sl}]$

$$\pi[S^{ced\,sl\,1T}] = E[S^{ced\,sl\,1T}] + 0{,}85 \cdot \sqrt{VAR[S^{ced\,sl\,1T}]}$$

$$\pi[S^{ced\,sl\,2T}] = E[S^{ced\,sl\,2T}] + 0{,}95 \cdot \sqrt{VAR[S^{ced\,sl\,2T}]}$$

Scanned with CamScanner

JACINTO D FERREIRO 842638

⑥

c) CAP. NECESARIO PARA PROB DE RUINA DEL 1%.

$$P\left[S^{ret\,SL} > \pi^{ret\,SL} + u_0\right] = 0{,}01$$

$$P\left[S^{ret\,SL} \leq \pi^{ret\,SL} + u_0\right] = 0{,}99$$

EN ESTE CASO PUEDO ORDENAR LOS MONTOS DE SINIESTROS DE LAS CARTERAS Y BUSCAR AQUEL VALOR ~~[illegible]~~ DE u_0 QUE HAGA QUE EL 99% DE LOS VALORES DE S_j SIMULADOS ($j=1,2,3\ldots K$) SUPEREN LAS PRIMAS Y EL CAPITAL.

PARA LA PROB. DE RUINA DE LOS PROXIMOS TRES AÑOS Y TENIENDO EN CUENTA ESTE CAPITAL, REALIZO LA TRAYECTORIA:

1ER AÑO

$$\begin{cases} PN_1 < 0 & R_1^j = 1 \quad \text{RUINA EN 1} \\ 0 \leq PN_1 < CM & R_1^j = 0 \quad \text{LIQ.} \\ PN_1 \geq CM & R_1^j = 0 \quad \text{CONT.} \end{cases}$$

2DO AÑO

$$\begin{cases} PN_1 < CM & R_2^j = 0 \quad \text{RUINA Ó LIQ. EN 1} \\ PN_1 \geq CM & \begin{cases} PN_2 < 0 & R_2^j = 1 \quad \text{RUINA EN 2} \\ 0 \leq PN_2 < CM & R_2^j = 0 \quad \text{LIQ.} \\ PN_2 \geq CM & R_2^j = 0 \quad \text{CONT.} \end{cases} \end{cases}$$

3ER AÑO

$$\begin{cases} PN_1 < CM & R_3^j = 0 \quad \text{RUINA Ó LIQ. EN 1} \\ PN_1 \geq CM & \begin{cases} PN_2 < CM & R_3^j = 0 \quad \text{RUINA O LIQ. EN 2} \\ PN_2 \geq CM & \begin{cases} PN_3 < 0 & R_3^j = 1 \quad \text{RUINA EN 3} \\ 0 \leq PN_3 < CM & R_3^j = 0 \quad \text{LIQ.} \\ PN_3 \geq CM & R_3^j = 0 \quad \text{CONT.} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

REALIZO K SIMULACIONES DE LA TRAYECTORIA Y OBTENGO:

$$P[u;3] = \sum_{j=1}^{k} \frac{(R_1^j + R_2^j + R_3^j)}{K}$$

$$PN_t = A_t - P_t$$

$$Ab_t = A_{t-1} + RF_t + \left[\pi_t^{ret\,SL} - SPag_t - UGG_t\right]$$ ~~[illegible]~~

$$Pb_t = \text{~~[illegible]~~ SP}_{t+1}$$

$$Pb_t = Ab_t - Pb_t$$

$$A_t = Ab_t + Ap_t - Div_t$$

$$P_t = Pb_t$$

JACINTO B FERREIRO 892658

(7)

d) DISTRIB. GAMMA SIN REASEGUROS.

$E[S_1] + C_2$

$\sigma_1^2 \quad \sigma_2^2$

$P[S < \pi[S] + K] = 0{,}99$

DE $\left.\begin{array}{l} E[S] = \alpha \cdot \beta \\ VAR(S) = \alpha \cdot \beta^2 \end{array}\right\}$ OBTENGO α Y β

AMBAS CALCULADAS EN PUNTO 1

$$P[S < \pi[S] + K] = 0{,}99 = \sum_{S=0}^{\pi[S]+K} \frac{S^{\alpha-1} \cdot e^{-S/\beta}}{\beta^{\alpha} \cdot \Gamma(\alpha)} \cdot S$$

$$0{,}99 = F_S[\pi[S] + K]$$

DESPEJO $\pi[S] + K$ Y COMO EL DATO DE $\pi[S]$ YA LO TENGO, DESPEJO K QUE SERÁ EL CAP NECESARIO PARA CUMPLIR CON LA PROB. DE RUINA BUSCADA.

SI LA DISTRIBUCIÓN GAMMA SE ADECUA A LA DISTRIBUCIÓN REAL DE LA CARTERA NO DEBERÍA HABER DIFERENCIAS SIGNIFICATIVAS EN EL CAPITAL REQUERIDO.

SI LA GAMMA ACUMULA MÁS VALORES ~~POR~~ SOBRE LA COLA SUPERIOR SE EXIGIRÁ MÁS CAPITAL Y VICEVERSA.

~~[illegible]~~

SI LA GAMMA SE APROXIMA A LA DIST. REAL LA ELEGIRÍA PORQUE NO NECESITO ~~[illegible]~~ REALIZAR SIMULACIONES NI HACER ~~CONVOLUCIÓN~~ DE LAS CARTERAS PARA OBTENER LA DIST. REAL, SOLO NECESITO CONOCER LOS MOMENTOS Y BUSCAR LOS PARÁMETROS α Y β.