$$f(\underset{max}{M_t};W_T)=\frac{2(2M_t-W_T)}{T\sqrt{2\pi T}}e^{-\frac{(2M_T-W_T)^2}{2T}}$$

$$P(M_t>a;W_T>b)=\int_a^{\infty}\int_b^{M_t}\frac{2(2M_t-W_T)}{T\sqrt{2\pi T}}e^{-\frac{(2M_T-W_T)^2}{2T}}dW_t\,dM_T$$

con $A=(M_t<a;W_T<b)$ quiero calcular $Q(\omega\in A)$

$$Q(M_t<a;W_T<b)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{max(W_T;0)}^{\infty}1_A\, e^{-\theta W_T-\frac{1}{2}\theta^2 T}\frac{2(2M_t-W_T)}{T\sqrt{2\pi T}}e^{-\frac{(2M_t-W_T)^2}{2T}}dM_t dW$$

→ proceso browniano arranca en cero

• No cambia el orden de la integración

Desde a y b para arriba, Q=0.

⇒

$$Q(M_t<a;W_T<b)=\int_{-\infty}^{b}\int_{max(W_T;0)}^{a}e^{-\theta W_T-\frac{1}{2}\theta^2 T}\frac{2(2M_t-W_T)}{T\sqrt{2\pi T}}e^{-\frac{(M_t-W_T)^2}{2T}}dM_t dW_t$$

$$\Rightarrow Q(M_T<a;W_T<b)=\int_{-\infty}^{b}\int_{max(W_T;0)}^{a}f_Q(M_T;W_T)\,dM_t W_T$$

⇒

$$f_Q(M_T;W_T)=e^{-\theta W_T-\frac{1}{2}\theta^2 T}\frac{2(2M_T-W_T)}{T\sqrt{2\pi T}}e^{-\frac{(M_T-W_T)^2}{2T}}$$

↳ Puedo calcular cualquier probabilidad.

Consecuencia indirecta

$P(\omega\in A)=0$

$Q(\omega\in A)=E_P(1_A\, e^{-\theta W_T-\frac{1}{2}\theta^2 T})$ → estoy sumando ceros.

$=0.$

$P(\omega\in A)=1 \Rightarrow P(\omega\notin A)=0 \Rightarrow Q(\omega\notin A)=0.$

$Q(\omega\in A)=1 \Rightarrow P(\omega\in A)=1$

$Q(\omega\in A)=0 \rightarrow P(\omega\in A)=0.$

} cuando se cumplen estas condiciones, P y Q son absolutamente continuas.

⇒ $\boxed{Q[(\emptyset;\Psi)\to X]=1 \Rightarrow P[(\emptyset;\Psi)\to X]=1}$

Dani laschinsky

Escaneado con CamScanner

CLASE 11

$X = F(S_{T_1} ; S_{T_2})$ $\quad S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma W_t}$ y $B_t = e^{rt}$

calculo el valor del derivado con:

$$V_t = B_t E_Q[X B_T^{-1} | F_t]$$
$$= S_t E_R[X S_T^{-1} | F_t]$$

$$Q: S_t = S_0 e^{(r - 1/2\sigma^2)t + \sigma \tilde{W}_t}$$
$$S_T = S_t e^{(r - 1/2\sigma^2)(T-t) + \sigma(\tilde{W}_T - \tilde{W}_t)}$$
$$R: S_t = S_0 e^{(r + 1/2\sigma^2)t + \sigma \bar{W}_t}$$
$$S_T = S_t e^{(r + 1/2\sigma^2)(T-t) + \sigma(\bar{W}_T - \bar{W}_t)}$$

En vez de tener una integral simple, ahora tenemos una integral doble

Utilizando probabilidades Q

$$V_t = e^{-r(T_2-t)} E_Q[F(S_{T_1} ; S_{T_2}) | F_t]$$

$$= e^{-r(T_2-t)} E_Q[F(S_t e^{(r-1/2\sigma^2)(T_1-t) + \sigma \underbrace{(\tilde{W}_{T_1} - \tilde{W}_t)}_{\Delta\tilde{W}_{T_1-t}}} ; S_t e^{(r-1/2\sigma^2)(T_2-t) + \sigma(\tilde{W}_{T_2} - \tilde{W}_t)}]$$

$$\tilde{W}_{T_2} - \tilde{W}_t = \underbrace{(\tilde{W}_{T_1} - \tilde{W}_t)}_{\Delta\tilde{W}_{T_1-t}} + \underbrace{(\tilde{W}_{T_2} - \tilde{W}_{T_1})}_{\Delta\tilde{W}_{T_2-T_1}}$$

Permite ver la independencia y no condicionar

$$V_t = e^{-r(T_2-t)} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(T_1-t)}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(\Delta\tilde{W}_{T_1-t})^2}{T_1-t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(T_2-T_1)}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(\Delta\tilde{W}_{T_2-T_1})^2}{T_2-T_1}} d(\Delta\tilde{W}_{T_1-t}) d(\Delta\tilde{W}_{T_2-T_1})$$

- Probabilidad marginal asociada a la variable aleatoria $\Delta\tilde{W}_{T_1-t}$
- Probabilidad marginal asociada a la variable aleatoria $\Delta\tilde{W}_{T_2-T_1}$

La multiplicación de las dos marginales me da la probabilidad conjunta

La segunda probabilidad no está condicionada a la ocurrencia de la primera
↳ Tercera propiedad de los procesos brownianos: las variaciones son VA independientes si los intervalos no se tocan ⇒ la probabilidad conjunta es la multiplicación de las marginales.

▽ Lo que es independiente es | cuánto crece la variación | no los valores puntuales

Dani Iaschinsky

Escaneado con CamScanner

Si tengo n fechas, planteo n integrales

Si tenemos el mismo pay off, pero paga en T_3

$V_t = e^{-r(T_3 - t)}$

En general, T es la fecha en la que paga el derivado. No necesariamente coincide con alguna de las fechas a las que tengo que buscar el activo para valuar el pay-off.

Si lo hubieramos resuelto con probabilidades R, y con T_3,

$V_t = S_t \, E_R[X S_{T_3}^{-1} | F_t] \Rightarrow$ tengo $S_1, S_2, S_3 \Rightarrow$ tengo 3 integrales y 3 f. de densidad

Ejemplo $X = \max[\max(S_T) - 2\min(S_T); 0]$

No puedo resolver por integrales → simulación: aproximo el valor de la esperanza condicionada)

Uso probabilidades R: $V_t = S_t \, E_R[X S_T^{-1} | F_t]$

$S_T = S_t \, e^{(r + 1/2\sigma^2)(\underset{U}{T} - t) + \sigma(\underset{U}{\bar{W}_T} - \bar{W}_t)}$

$r = 10$
$t = 3$ (fecha de valuación)
$S_t = 12$
$\mu = 0{,}02$
$\sigma = 0{,}01$
U = tiempo

$\underset{0:3}{\text{Max}}(S_T) = 14$
$\underset{0:3}{\text{Min}}(S_T) = 9$
$n = 70$
$\Delta t = \frac{(T-t)}{n} \Rightarrow \Delta t = 0{,}1$

U	$\Delta\bar{W}$	$\bar{W}_U - \bar{W}_t$	S_U
3		0	12 $(\bar{W}_T - \bar{W}_t) = 0$
3,1	$\sim N(0;0{,}1)$	0,15	12,4
3,2	-0,8	0,7	12,22
⋮			⋮
10		3,1	14,7

De esta trayectoria agarro el máximo
supongo max = 19
min = 11,8

simulación 1

$X = (19 - 2.9)^+ \Rightarrow E_R = X S_T^{-1} = \frac{(19 - 2 \times 9)^+}{14{,}7} = \frac{X^{①}}{S_T^1}$

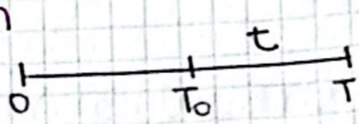
Simulo m veces $X^2/S_T^2 \ldots X^m/S_T^m$
Los sumo, divido por m y obtengo $\simeq E_R[X S_T^{-1} | F_t]$
multiplico por 12 y obtengo V_t

Dani laschinsky

Escaneado con CamScanner

Ejemplo Forward Strike Option

$X = (S_T - S_{T_0}) \mathbb{1}_{S_T > S_{T_0}}$



El strike del call no es un valor fijo sino que es el valor que vamos a conocer en T_0 (= valor que toma el activo en esa fecha) paga en T.

(strike)

Entre T_0 y T es un call, está fijo el strike del instrumento.

Para $t \geq T_0$ = call

$$V_t = S_T \, N\left[\frac{\ln(S_T/S_{T_0}) + (r + 1/2\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right] - S_{T_0} e^{-r(T-t)} \cdot N\left[\frac{\ln(S_T/S_{T_0}) + (r - 1/2\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right]$$

Para $t = T_0$ $\ln(1) = 0$.

$$V_t = S_{T_0} \underbrace{\left\{ N\left[\frac{(r + 1/2\sigma^2)(T-T_0)}{\sigma\sqrt{T-T_0}}\right] - e^{-r(T-t)} N\left[\frac{(r - 1/2\sigma^2)(T-T_0)}{\sigma\sqrt{T-T_0}}\right]\right\}}_{A}$$

A: Todas las variables son conocidas, las conozco en cero.

$V_t = S_{T_0} A$ (A es un número)

Para $t < T_0$ $V_t = S_t A$

Si quiero obtener $\$S_{T_0}A$, en T_0 en un momento anterior tengo que comprar A activos

Tengo: $\phi_t = A$ y $\psi_t = 0$.

En T_0 voy a tener A activos que van a valer $\$S_{T_0}A$.

A partir de T_0 sigo replicando el call

$$\phi_t = \phi_t^{\text{call}(S_{T_0};T)}$$

$$\psi_t = \psi_t^{\text{call}(S_{T_0};T)}$$

Hasta T_0 la estrategia es estática (me compré A activos y los guardé). A partir de T_0 la plata que junté me alcanza para comprarme la primer cartera asociada al call y así la voy a ir cambiando todos los días.

NOTA

Danila Schinsky

Escaneado con CamScanner

con probabilidades R llego al mismo resultado.

$$V_t = S_t E_R[(S_T - S_{T_0}) 1_{S_T > S_{T_0}} S_T^{-1} | F_t]$$

Tower property

$$V_t = S_t E_R[\underbrace{S_{T_0} E_R[(S_T - S_{T_0}) 1_{S_T > S_{T_0}} S_T^{-1} | F_t]}_{V_{T_0} = S_{T_0} A} S_{T_0}^{-1} | F_t]$$

$$V_t = S_t E_R[\cancel{S_{T_0}} A \cancel{S_{T_0}^{-1}} | F_t]$$

$$V_t = S_t A$$

CLASE 12

Explicación de por qué los derivados se pueden valuar de la manera en que lo hacen.

Tenemos un mercado con un tipo de activo que se comporta según S_t, un tipo de bono que se comporta según B_t y un derivado cuyo pay off viene dado por alguna forma de X.

1. $S_t = S_0 e^{(r+1/2\sigma^2)t + \sigma W_t}$ } Utiliza probabilidades P, ya que W_t es un proceso browniano.

2. $B_t = e^{rt}$

3. $X = S_T^2$; $X = \ln(S_T)$

4. $V_t = B_t E_Q[X B_T^{-1} | F_t]$ → Tiene que cumplirse porque sino se arma arbitraje.

↓ Lo vamos a demostrar

5. $\underset{\text{No es PB}}{\tilde{W}_t} = \underset{\text{PB}}{W_t} + \left(\frac{\mu - r + 1/2\sigma^2}{\sigma}\right)t$

Si puedo demostrar que algo se cumple con probabilidad Q=1, automáticamente se cumple con P=1, siempre que se cumpla 5.

Aplicando diferencial

6. $\Delta\tilde{W}_t = \Delta W_t + \left(\frac{\mu - r + 1/2\sigma^2}{\sigma}\right)\Delta t$

7. $S_t = S_0 e^{(r - 1/2\sigma^2)t + \sigma W_t}$

8. $\frac{S_t}{B_t} = Z_t = S_0 e^{(-1/2\sigma^2)t + \sigma \tilde{W}_t}$

NOTA

Dani lascrinsky

Escaneado con CamScanner

Si suponemos que $\tilde{\omega}_t$ es un proceso browniano y logro demostrar que algo se cumple con probabilidad 1 ⇒ puedo asegurar que eso mismo se cumple con probabilidad 1 cuando supongo que ω_t es un proceso browniano. (Teorema de Girsanov

Bajo el supuesto original, el mercado se mueve según los parámetros μ, σ y r (1)
Asumiendo que $\tilde{\omega}_t$ es un proceso browniano, el mercado queda modelado por σ y r (7)
⇒ El supuesto inventado es un caso particular del supuesto original (un caso particular de μ)

Demuestro algo para el caso particular y por el teorema de Girsanov se demuestra para el caso original

Por el teorema de Ito:

$$\Delta Z_t = \left(\frac{\partial Z_t}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Z_t}{\partial \tilde{\omega}_t^2} \right) \Delta t + \frac{\partial Z}{\partial \tilde{\omega}_t} \Delta \tilde{\omega}_t$$

Resuelvo las derivadas.

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = Z_t \left(-\frac{1}{2} \sigma^2 \right) \quad \frac{\partial Z_t}{\partial \tilde{\omega}_t} = \sigma Z_t \quad \frac{\partial^2 Z_t}{\partial \tilde{\omega}_t^2} = \sigma^2 Z_t$$

$$\Delta Z_t = \left(-\frac{1}{2} \sigma^2 Z_t + \frac{1}{2} \sigma^2 Z_t \right) \Delta t + \sigma Z_t \Delta \tilde{\omega}_t$$

9. $\Delta Z_t = \sigma Z_t \Delta \tilde{\omega}_t$ → Me quedo sin término de tendencia y eso hace que sea más fácil demostrarlo con este supuesto se cumple con $Q = 1$

Recordando $E_Q[Z_t | F_t] = Z_t$ ⇒ Martingala (espero que un proceso mañana valga lo mismo que hoy)
↳ Si a un martingala le calculo el teorema de Ito, desaparece la tendencia ⇒ 9. tiene sentido. (si se puede)

Invento un proceso

10. $E_t = E_Q[X / B_T^{-1} | F_t]$ Tomando E_t como un Martingala

11. $\Delta E_t = \lambda_t \; \Delta \tilde{\omega}_t$ → Por el teorema de la representación de Martingala se cumple con $Q = 1$

12. $\phi_t = \dfrac{\lambda_t}{\sigma Z_t}$ } Cuántas veces varía el valor del derivado ΔE_t en relación a la variación del activo ΔZ_t

ϕ_t es la cantidad de activos que voy a querer para replicar el valor del derivado.

Dani Iaschinsky

Escaneado con CamScanner

Ψ_t va a ser lo que yo necesite para que el valor de la cartera en términos de bonos sea igual a E_t

13. $E_t = \emptyset_t Z_t + \Psi_t \qquad \Psi_t = E_t - \emptyset_t Z_t$ 13,5

Voy a demostrar que (13) efectivamente replica el valor del derivado.

14. En $t+\Delta t$: $= \emptyset_t Z_{t+\Delta t} + \Psi_t$

15. $\underbrace{\emptyset_t Z_{t+\Delta t} + \Psi_t}_{\text{Lo que va a valer la cartera que me compré en t en } t+\Delta t} = \underbrace{\emptyset_t Z_t + \Psi_t}_{E_t} + \underbrace{\emptyset_t \Delta Z_t}_{\Delta E_t}$

$\Delta E_t \rightarrow$ Lo que va a variar la cartera en términos de bonos entre t y Δt

16. $E_{t+\Delta t} = \emptyset_t Z_t + \Psi_t + \emptyset_t \Delta Z_t$

17. $E_{t+\Delta t} = \emptyset_{t+\Delta t} Z_{t+\Delta t} + \Psi_{t+\Delta t}$ (sale de 18) sigo recursivamente hasta T

18. En T: $E_Q[X B_T^{-1} | F_t] = X B_T^{-1}$

Esta réplica funciona con probabilidad 1 ($Q=1$)

Compound call

$X = (call(S_{T_2}; K; T_2) - L)^+ \rightarrow$ call sobre un call.

$\overset{L}{\underset{T}{+}} \text{———} \overset{K}{\underset{T_2}{+}}$ En T tengo el derecho a comprar a L un call que vence en T_2

$X = (E_Q[e^{-r(T_2-T)}(S_{T_2} - K) 1_{S_{T_2} > K} | F_T] - L)^+$

Lo de adentro

$X = S_T N\left[\frac{\ln(S_T/K) + (r + 1/2\sigma^2)(T_2 - T)}{\sigma\sqrt{T_2 - T}}\right] - Ke^{-r(T_2-T)} N\left[\frac{\ln(S_T/K) + (r+1/2\sigma^2)(T_2-T)}{\sigma\sqrt{T_2-T}}\right]$

Cuando el activo $\rightarrow 0 \Rightarrow S \rightarrow 0$
$\rightarrow \infty \Rightarrow S \rightarrow \infty$

El call va a valer más que L si el activo termina valiendo más que A

NOTA

Dani Iaschinski

Escaneado con CamScanner

$$X = [(S_T E_R[1_{S_{T_2}>K} | F_T] - Ke^{-r(T_2-T)} E_Q[1_{S_{T_2}>K} | F_T]) - L] 1_{S_T>A}$$

$$X = \underbrace{S_T E_R[1_{S_{T_2}>K; S_T>A} | F_T]}_{X_1} - \underbrace{Ke^{-r(T_2-T)} E_Q[1_{S_{T_2}>K; S_T>A} | F_T]} - \underbrace{L \cdot 1_{S_T>A}}_{3}$$

Valuo cada término por separado

3. Pareado a cuando en un call nos queda $S_T 1_{S_T>K} - \underline{K 1_{S_T>K}}$

$$V^3 = Le^{-r(T_2-T)} N\left[\frac{\ln(S_t/A) + (r - 1/2\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right]$$

▽ cuando tengo S_T antes de la esperanza me conviene valuarlo con probabilidades R para que se cancele.
Cuando tengo una constante adelante, conviene valuar con probabilidades Q

$\underline{X_i}$: $V_t^1 = S_t E_R[X S_T^{-1} / F_t]$

$= S_t E_R[\cancel{S_T} E_R[1_{S_{T_2}>K; S_T>A} | F_T] \cancel{S_T^{-1}} / F_t]$

La esperanza de una esperanza es la esperanza

$= S_t E_R[1_{S_{T_2}>K; S_T>A} | F_t]$ → la esperanza es $1 \times$ probabilidad de que ocurra $+ 0 \times$ prob que no ocurra

$= S_t R[S_{T_2}>K; S_T>A | F_t]$ probabilidad R de que se cumpla la condición

con $t=0$. → es lo mismo que:

$$S_T = S_0 e^{(r+1/2\sigma^2)T + \sigma\bar{W}_T} > K$$

$$S_{T_2} = S_0 e^{(r+1/2\sigma^2)T_2 + \sigma\bar{W}_{T_2}} > A$$

Despejo $\bar{W}_T$ y $\bar{W}_{T_2}$ $\quad \bar{W}_T > \dfrac{\ln(A/S_0) - (r+1/2\sigma^2)T}{\sigma} = b_{A,R} \quad \bar{W}_T \sim N(0;T)$

$$\bar{W}_{T_2} > \frac{\ln(K/S_0) - (r+1/2\sigma^2)T_2}{\sigma} = a_{K,R} \quad \bar{W}_{T_2} \sim N(\bar{W}_T; T_2-T)$$

$$V_t^1 = \int_{b_R}^{\infty}\int_{a_{K,R}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(\bar{W}_T)^2}{T}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(T_2-T)}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(\bar{W}_{T_2}-\bar{W}_T)^2}{T_2-T}} d\bar{W}_{T_2} d\bar{W}_T$$

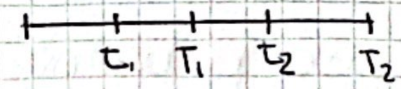
Lo mismo para X_2 con probabilidades Q

Dani Iaschinsky

Escaneado con CamScanner

CLASE 12.5

$X = S_{T_1}$ con vencimiento en T_2



Valuando en t_2

$$V_{t_2} = B_t E_Q[S_{T_1} \cdot B_{T_2}^{-1} | F_{t_2}] = \frac{B_{t_2}}{B_{T_2}} S_{T_1} \Big\} \text{valor actual } S_{T_1}$$

$$V_{t_2} = S_t \, E_R[S_{T_1} \cdot S_{T_2}^{-1} | F_{t_2}] = S_t S_{T_1} E_R[S_{T_2}^{-1} | F_{t_2}]$$

$$= \cancel{S_t} S_{T_1} E_R[\cancel{S_t^{-1}} e^{-(r+1/2\sigma^2)(T_2-t) - \sigma(\bar{W}_{T_2} - \bar{W}_t)} | F_t]$$

Aplico probabilidades R al suponer $\bar{W}_t$ es un proceso browniano

$\bar{W}_{T_2} - \bar{W}_t \sim N(0; T_2 - t)$

exponente $\sim N(-(r+1/2\sigma^2)(T_2-t); \sigma^2(T_2-t))$

$E[e^x] = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$

$$V_{t_2} = S_{T_1} e^{-(r+1/2\sigma^2)(T_2-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T_2-t)}$$

$$V_{t_2} = S_{T_1} e^{-r(T_2-t)} = S_{T_1} \frac{B_t}{B_{T_2}} \checkmark$$

Valuado en t_1

en T_1: $V_t = S_{T_1} \frac{B_{T_1}}{B_{T_2}}$ (0,8) $\Big\}$ Para que no haya arbitraje

en t: $V_t = S_t \, 0{,}8$

$$V_t = S_t E_R[S_{T_1} S_{T_2}^{-1} | F_t]$$

$$= S_t E_R[\cancel{S_{T_1}} \cancel{S_{T_1}^{-1}} e^{-(r+1/2\sigma^2)(T_2-T_1) - \sigma(\bar{W}_{T_2} - \bar{W}_{T_1})} | F_t]$$

$$= S_t e^{-(r+1/2)\sigma^2(T_2-T_1) + \frac{1}{2}\sigma^2(T_2-T_1)}$$

$$= S_t e^{-r(T_2-T_1)} \checkmark$$

Si $V_t = F(t; S_t) \Rightarrow \phi_t = \frac{\partial V_t}{\partial S_t}$

en t_2: $\phi = 0$. $\psi_t = \frac{V_t - S_t \phi_t}{B_t} = S_{T_1} e^{-rT_2}$

en t_1: $\phi = e^{-r(T_2-T_1)}$ $\psi_t = 0$.

NOTA

Danilaschinsky

Escaneado con CamScanner

Cuando estamos en un momento posterior a T, cuando ya es conocido el pay-off, no tengo que invertir en activos. Lo único que tengo que saber es cuánto me va a pagar el derivado (S_{T}) y tengo que tener un flujo de bonos que me asegure ese valor fijo.

Siempre que el derivado no tenga aleatoriedad, $\phi = 0$.

Barrier options

P.141

$X = (S_T - K)^+ \mathbb{1}_{S_T^* \leq L}$ → un call si el máximo valor que toma el activo hasta T es menor o igual a L.

$S_T^* = \max_{0 \leq t \leq T} S_t$

Simplifico valuando el derivado al momento cero.

$$V_0 = e^{-rt} E_Q[(S_T - K)^+ \mathbb{1}_{S_T^* \leq L} | F_0]$$

Como trabajo con probabilidades Q uso:

$$S_t = S_0 e^{\sigma \tilde{W}_t + (r - 1/2\sigma^2)t}$$

$$= S_0 e^{\sigma \underbrace{\left(\tilde{W}_t + \frac{(r - 1/2\sigma^2)t}{\sigma}\right)}_{\hat{W}_t}}$$

S_t va a tomar su valor máximo cuando $\hat{W}_t$ alcance el máximo.

$$\left.\begin{aligned} S_T^* &= S_0 e^{\sigma \hat{M}_T} \\ S_T &= S_t e^{\sigma \hat{W}_T} \end{aligned}\right\}$$ Todo el pay off me queda dependiendo del último valor y el máximo

Sabiendo que la función de densidad conjunta de M_T y de W_T es P.140

$$f(M_T; W_T) = \frac{2(2M_T - W_T)}{T\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{(2M_T - W_T)^2}{2T}}$$ (Supongo que W es un proceso browniano)

↓

No la puedo usar directo agregándole los $\hat{}$ voy a suponer que $\hat{W}_t$ es un proceso browniano → tengo que modificar la función de densidad.

$$\hat{W}_T = \underset{P.B}{\tilde{W}_T} - \theta_T \quad \text{con } \theta = -\left(\frac{r - 1/2\sigma^2}{\sigma}\right)t$$

Dani Iaschinsky

Escaneado con CamScanner

$\hat{W}$ es un proceso browniano con una tendencia $-\theta$

Por teorema de Girsanov, cuando tengo tendencia, tengo que multiplicar a la función de densidad por un factor:

$$\Rightarrow f(\hat{M}_T;\hat{W}_T) = e^{-\theta \hat{W}_T - \frac{1}{2}\theta^2 T}\, \frac{2(2\hat{M}_T - \hat{W}_T)}{T\sqrt{2\pi T}}\, e^{-\frac{(2\hat{M}_T-\hat{W}_T)^2}{2T}}$$

$$V_0 = e^{-rT}\int_b^m \int_{\max(\hat{W}_T;0)}^m (S_0 e^{\sigma \hat{W}_T} - K)^+ \, \underbrace{1_{S_0 e^{\sigma \hat{M}_T} \le L}}_{1_{\hat{M}\le m;\,\hat{W}\ge b}}\, f(\hat{M}_T;\hat{W}_T)\, d\hat{M}_T\, d\hat{W}_T$$

Límites

$$S_0 e^{\sigma \hat{W}_T} \ge K \Rightarrow b = \frac{1}{\sigma}\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)$$

$$S_0 e^{\sigma \hat{M}_T} \le L \Rightarrow m = \frac{1}{\sigma}\ln\left(\frac{L}{S_0}\right)$$

$\downarrow$

despejo $\hat{W}_T$ y $\hat{M}_T$

CLASE 13

Divisas como activo subyacente

$C_t = C_0 e^{\nu t + \sigma W_t}$ → Tipo de cambio local extranjero: cuánto vale la divisa. Cuántas unidades de moneda local tengo que poner para que me den una unidad de moneda extranjera.

C_t^{-1}: Tipo de cambio extranjero local: cuántas unidades de moneda extranjera tengo que poner para que me den una de moneda local.

$B_t = e^{rt}$ Bono local

$B_t^f = e^{r^f t}$ Bono extranjero

$X = (C_T - K)^+$

- C_t no se opera nunca, me conviene operar B_t que aumenta el dinero. Compro divisa y con eso el bono extranjero.

Para poder usar la misma metodología invento un activo

$$S_t = C_t B_t^f = \underbrace{C_0}_{S_0} e^{\overbrace{(\nu + r^f)}^{}_{\mu} t + \sigma W_t}$$

Dani Iaschinsky

Escaneado con CamScanner

S_t es el bono extranjero nominado en moneda local (cuantos pesos vale un bono extranjero)

con $\mu = \nu + r^f \Rightarrow S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma W_t}$

$V_t = B_t E_Q[X B_T^{-1} | F_t] \Rightarrow S_t = S_0 e^{(r - 1/2\sigma^2)t + \sigma \tilde{W}_t}$

Reescribo el pay off: $X = \left(\frac{S_T}{B_T^f} - K\right)^+$

$X = \frac{1}{B_T^f}(S_T - K^*)$ con $K^* = K B_T^f$

$V_t = \frac{1}{B_T^f}\left[S_t N\left(\frac{\ln(S_t/K^*) + (r + 1/2\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) - K^* e^{-r(T-t)} N\left(\frac{\ln(S_t/K^*) + (r - 1/2\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\right]$

Reemplazo con C_t, B_t^f, S_t y K^*

$V = C_t e^{-r^f(T-t)} N\left(\frac{\ln(C_t/K) - (r - r^f + 1/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) - K e^{-r(T-t)}$

$N\left(\frac{\ln(C_t/K) - (r - r^f - 1/2\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)$

Desde el lado extranjero.

$X^f = X C_T^{-1}$ $\quad C_t^{-1} \rightarrow$ tipo de cambio

$B_t^f = e^{r^f t} \rightarrow$ bono local $\quad B_t = e^{rt} \rightarrow$ bono extranjero.
(nuestro local)

$S_t^f = B_t C_t^{-1}$ Bono extranjero valuado en su moneda

$S_t^f = S_0^f e^{\mu^f t + \sigma^f W_t}$ con $S_0^f = C_0^{-1}$; $\mu^f = r - \nu$; $\sigma^f = \sigma$

$V_t^f = B_t^f E_Q^f[X^f B_T^{f^{-1}} | F_t]$

$V_t = V_t^f C_t \Rightarrow$ se cumple.

Las probabilidades R son las probabilidades q que utiliza el que está en el extranjero.

NOTA

Daniliaschinsky

Escaneado con CamScanner

$$C_t V_t^f = \frac{C_t B_t^f}{S_t} E_Q^f \Big[\underbrace{\frac{X C_T^{-1} B_T^{f^{-1}}}{S_T^{-1}}}_{X^f} \Big| F_t \Big]$$

$$= S_t E_Q^f [X S_T^{-1} | F_t] \rightarrow \text{probabilidades } R$$

$$Z_t^f = \frac{S_T^f}{B_T^f} = \frac{B_t C_t^{-1}}{B_t^f} = \frac{B_t}{\frac{C_t B_t^f}{S_t}} = \frac{B_t}{S_t} = Y_t$$

$\Rightarrow$ La Z_t^f del extranjero es la Y_t nuestra $\Rightarrow$ las probabilidades que hacen que Z_t en promedio no cambien, son las mismas que las probabilidades que hacen que en promedio Y_t no cambie

$\Rightarrow Q^f = R$

Para $X = (C_t - K)^+$ local,

Para el extranjero: $X^f = C_T^{-1}(C_T - K)^+$

$\downarrow$

Lo puedo trabajar para que quede más sencillo

$$X^f = (1 - K C_T^{-1})^+$$

$$= K(1 - K' C_T^{-1}) \text{ con } K' = K^{-1}$$

$\rightarrow$ Queda la fórmula invertida (un put con nuestra moneda local. (extranjera para él).

Lo que nosotros vemos como un call sobre moneda extranjera, para el otro son K puts con nuestra moneda local.

Call sobre peso-dolar = put sobre dolar peso.

Derivados sobre acciones que pagan dividendos (cuidado)

$C_t = C_0 e^{\mu t + \sigma W_t}$ $\quad B_t = e^{rt}$ $\quad B_t^f = e^{r^f t}$

Tasa continua de pago de dividendos. A cada instante la acción paga dividendos. Puedo suponer que los vuelvo a invertir en mis acciones

$S_t = C_t B_t^f \rightarrow$ una acción al PPO + todos los dividendos reinvertidos.

$S_t = C_0 e^{(\nu + r^f)t + \sigma W_t}$

$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma W_t}$

$$X = (C_T - K)^+ \Rightarrow X = \left(\frac{S_T}{B_T^f} - K \right)^+ \Rightarrow X = \frac{1}{B_T^f}(S_T - K)^+$$

NOTA

Dani Taschinsky

Escaneado con CamScanner

Clase 14

Ecuación en derivadas parciales de Black-Shoes

Forma alternativa de valuación.
Método análogo al de sistema de ecuaciones para el tiempo discreto.
En continuo, en algunas ocasiones es más fácil que el método de las esperanzas.

$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma W_t}$ → probabilidades P (1)

$B_t = e^{rt}$

$V_t = B_t E_Q[X B_T^{-1} | F_t]$ ⇒ $S_t = S_0 e^{(r - 1/2\sigma^2)t + \sigma \tilde{W}_t}$ (2)

Si $V_t = f(t; S_t) \Rightarrow \varnothing = \frac{\partial V_t}{\partial S_t}$

↓

Demostrando esto llego a la ecuación en derivadas parciales

Usando (1) o (2) llego a lo mismo.

Uso (2) y aplico teorema de Itô.

$dS_t = \left[\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) S_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t \right] dt + \sigma S_t d\tilde{W}_t$

(3) $dS_t = r S_t dt + \sigma S_t d\tilde{W}_t$

(4) $dB_t = r e^{rt} dt = r B_t dt$

} La tendencia del activo es la misma que la del bono. El activo y el bono capitalizan a la misma tasa.

Teorema generalizado de Itô aplicado a $V_t = V(t; S_t)$

(5) $dV_t = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial S} r S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S_t \right) dt + \frac{\partial V}{\partial S} \sigma^2 S_t^2 d\tilde{W}_t$

=

(6) $dV_t = \varnothing_t dS_t + \psi_t dB_t$ } La calculo como un cambio en el valor de la estrategia que replica el pay-off del derivado.

Reemplazo (3) y (4) en (6)

$dV_t = \varnothing_t r S_t dt + \varnothing_t \sigma S_t d\tilde{W}_t + \psi r B_t dt$

$= (\varnothing r S_t + \psi r B_t) dt + \varnothing_t \sigma S_t d\tilde{W}_t$

(7) $= r V_t dt + \varnothing_t \sigma S_t d\tilde{W}_t$

Dani Laschinsky

Escaneado con CamScanner

Para que (5) = (7)

$$\frac{\partial V}{\partial S} = \emptyset$$

y

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial S} r S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S_t^2 = r V_t$$

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial S} r S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S_t^2 - r V_t = 0}$$

↳ Ecuación en derivadas parciales de Black Sholes.
Válida para cualquier derivado que cumpla con

$$X = V(T; S_T)$$

Hay una sola función que cumple con la ecuación y con la condición. Si la encuentro, puedo saber cuánto vale el derivado.

ejemplo: $2\frac{\partial F}{\partial t} + 3F(t) + t^2 = 0 \Rightarrow 2\,\frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{\Delta t} + 3F(t) + t^2 = 0$

$F(0) = 1 \rightarrow$ condición particular

$$2\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + 3F(t) + t^2$$

$$2\,\frac{\frac{F(t+2\Delta t) - F(t+\Delta t)}{\Delta t} - \frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{\Delta t}}{} + 3F(t) + t^2 = 0$$

$$2\,\frac{F(t+2\Delta t) - 2F(t+\Delta t) + F(t)}{\Delta t^2} + 3F(t) + t^2 = 0$$

necesito 2 condiciones

Dani Iaschinsky

Escaneado con CamScanner

$$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial S} r S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S_t - rV_t = 0 \quad \text{con} \quad X = V(T;S_T)$$

$$\frac{V(t+\Delta t;S) - V(t;S)}{\Delta t} + \frac{V(t;S+\Delta S) - V(t;S)}{\Delta S} r S_t + \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{V(t;S+2\Delta S) - 2V(t;S+\Delta S) - V(t;S)}{\Delta S^2}\right)\sigma^2 S_t^2 - rV(t;S) = 0$$

(...)

$\Rightarrow$ necesito más condiciones.

Condiciones:
- $X = V(T;S_T)$
- $V(t;0) = 0$ si en algún momento $S=0$, el contrato va a terminar valiendo 0 $\rightarrow$ el valor de hoy es 0
- $V'_S(t;\infty) = 1$

Ejemplo call asiático $X = \left(\sum \frac{S_i}{T} - K\right)^+$

$$\left(\int_0^T \frac{S_t}{T} dt - K\right)^+ = \left(\frac{Y_T}{T} - K\right)^+ \quad \text{con } Y_t = \int_0^t S_t\, dt$$

$dY_t = S_t dt + 0\, d\tilde{W}_t$

$V_t = V(t;S_t;Y_t)$ — cuánto vale el proceso en cada momento importa porque necesito el promedio

Teorema generalizado de Ito aplicado a $V(t;S_t;Y_t)$

$$dV_t = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial S} r S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial V}{\partial Y} S_t\right)dt + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial S}\sigma^2 S_t^2 d\tilde{W}_t}_{\text{No cambia porque } dY_t = (...) 0 d\tilde{W}_t}$$

Ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial S} r S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S_t - rV_t + \frac{\partial V}{\partial Y} S_T = 0.$$

ϕ_t sigue siendo el mismo.

Danilaschinsky

Escaneado con CamScanner

Clase 15

$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma W_t}$ $\quad B_t = e^{rt}$

$dB_t = r e^{rt} dt$

$Z_t = S_0 e^{(\mu - r)t + \sigma W_t}$

$\tilde{W}_t = W_t + \theta t$

$d\tilde{W}_t = dW_t + \theta dt$

$d\tilde{W}_t - \theta \cdot dt = dW_t \qquad (1)$

$S_{t+dt} = S_t e^{\mu dt + \sigma dW_t}$ $\qquad dW_t^2 = dt$

$$\ln^2\left(\frac{S_{t+dt}}{S_t}\right) = (\mu dt + \sigma dW_t)^2 = \underbrace{\mu^2 dt^2 + 2\mu dt \sigma dW_t}_{\text{son despreciables}} + \sigma^2 dW_t^2 = \sigma^2 dt$$

Supuesto P

$$\underset{\text{Supuesto Q}}{= \text{Reemplazando con (1)}} = (\mu dt + \sigma(d\tilde{W}_t - \theta dt))^2 = \sigma^2 dt$$

En ambos casos si calculo una variación cuadrática del logaritmo de las divisiones del valor del activo me da una constante al cuadrado x dt

↳ Agregarle la tendencia $-\theta$ al proceso browniano no me cambió la variación cuadrática del logaritmo de ΔS_t

↓

Cuando hago un cambio en las probabilidades, no estoy cambiando las cosas que tienen probabilidad 1 de ocurrencia.

Al cambiar el θ estoy manteniendo las trayectorias. Distinto sería si afectaría/cambiara la volatilidad. → por eso agregamos tendencia y no volatilidad

Al cambiar el θ estoy cambiando las probabilidades. Al no agregarle una constante a dW_t no estoy cambiando las trayectorias.

$$\theta = \frac{\mu + 1/2\sigma^2 - r}{\sigma} \Rightarrow S_t = S_0 e^{(r - 1/2\sigma^2)t + \sigma \tilde{W}_t}$$

$$Z_t = S_0 e^{(-1/2\sigma^2)t + \sigma \tilde{W}_t}$$

Le aplico Ito a las dos

$dS_t = r dt + \sigma S_t d\tilde{W}_t$

NOTA

Dani Iaschirsky

Escaneado con CamScanner

$dZ_t = 0dt + \sigma Z_t d\tilde{W}_t$ → Espero que Z no varíe con el tiempo.

En discreto:

$E_Q[XB_T^{-1}|F_s] = E_s + E_Q\left[\sum_{s=t}^{T-1} \phi_t \Delta Z_t | F_s\right]$

Me invento las probabilidades Q para que $E_Q[..]=0$.

⇒

$B_s E_Q[XB_T^{-1}|F_s] = B_s E_s = V_s$

En continuo.

$E_Q[XB_T^{-1}/F_s] = E_s + E_Q\left[\int_s^T \phi_t dZ_t | F_t\right]$

Trabajo con las probabilidades Q que hacen que $E_Q[\ ]=0$

Corolario: con independencia del modelo, agarro el proceso browniano, le cambio la tendencia de forma tal que dZ_t en promedio no varíe y con ese nuevo modelo calculo la esperanza y obtengo el valor del derivado.

Modelo - cuando los parámetros no son constantes sino que varían con el tiempo.

$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma W_t}$

$dS_t = \underbrace{(\mu + 1/2\,\sigma^2)}_{\mu} S_t dt + \sigma S_t dW_t$

$dS = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$

$dB_t = rB_t dt \rightarrow B_t = e^{rt} = e^{\int_0^T r ds}$

$d\tilde{W}_t = dW_t + \theta dt$ con $\theta = \frac{\mu - r}{\sigma}$

$dS_t = (\mu - \theta\sigma) S_t dt + \sigma S_t d\tilde{W}_t$

$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\tilde{W}_t$

El bono y el activo tienen la misma tendencia. Es razonable con que S con respecto al bono no cambie.

$dZ_t = \sigma Z_t d\tilde{W}_t \Rightarrow dt = 0$

Dani Iaschinsky

Escaneado con CamScanner

FECHA

Extrapolaciones

- $dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dW_t$ (μ y σ dependen de t)

$dB_t = r_t B_t dt \rightarrow B_t = e^{\int_0^t r_s ds + \int_0^t 0 dW_t} = e^{A_t}$

$dA_t = r_t dt + 0 dW_t$

$d\tilde{W}_t = dW_t + \theta dt$ con $\theta = \left(\frac{\mu_t - r_t}{\sigma_t}\right)$ Me invento una tendencia

$dS_t = r_t S_t dt + \sigma_t S_t d\tilde{W}_t$

$dZ_t = \sigma_t Z_t d\tilde{W}_t$ $\qquad dt = 0.$

$\Rightarrow E_Q[X B_T^{-1} | F_s] = E_s + \cancel{E_Q[\int_s^T \phi_t dZ_t | F_s]}$

$E_Q[X B_T^{-1} | F_s] = E_s.$

En estos casos tengo 1 activo, 1 bono y 1 proceso browniano

Con 2 P.B necesito 2 activos y 1 bono

Con 3 PB necesito 3 activos y 1 bono.

Generalizando

n activos ($i = 1:n$), 1 bono, n W_s ($j = 1:n$)

$dS_t^i = \mu_t^i S_t^i dt + S_t^i \sum_{j=1}^{n} \sigma_t^{ij} dW_t^j$ matriz

$B_t = e^{\int_0^t r_s ds}$

$dB_t = r_t B_t dt$

$d\tilde{W}_t^j = dW_t^j + \theta_t^j dt$ con $\theta_t = (\mu_t - r_t)\sigma_t^{-1}$

$dS_t^i = r_t S_t^i dt + S_t^i \sum_{j=1}^{n} \sigma_t^{ij} d\tilde{W}_t^j$

$dZ_t^i = Z_t^i \sum_{j=1}^{n} \sigma_t^{ij} d\tilde{W}_t$

$E_Q[X B_T^{-1} | F_s] = E_s$

Dani Iaschinsky

Escaneado con CamScanner

Ejemplo 2 activos

$S_t = S_0 e^{\mu_s t + \sigma_s W_t^s}$ • Ambos están correlacionados

$Y_t = Y_0 e^{\mu_Y t + \sigma_Y W_t^Y}$

$B_t = e^{rt}$

$X = (S_T + Y_T)^2$

$= \underbrace{S_T^2}_{V_1} + \underbrace{2 S_T Y_t}_{V_3} + \underbrace{Y_t^2}_{V_2}$

Valuo cada término por separado

$V_1 = S_T^2 e^{(r+\sigma_t^2)(T-t)}$ (De clases anteriores)

$V_2 = Y_T^2 e^{(r+\sigma_T^2)(T-t)}$

Para V_3: Me invento 2 nuevos procesos brownianos.

- $\Delta W_t^s = \Delta W_t^1$
- $\Delta W_t^Y = a \Delta W_t^1 + b \Delta W_t^2$

Para este caso
Si $\rho = 1 \Rightarrow a = 1 \quad b = 0$
Si $\rho = 0 \Rightarrow a = 0 \quad b = 1$

$\Delta W_t^Y = \rho \Delta W_t^1 + \sqrt{1-\rho^2}\, \Delta W_t^2$ (1)

Condiciones: 1. $\operatorname{corr}(\Delta W_Y; \Delta W_S) = \rho$

2. $\operatorname{Var}(\Delta W_\cdot) = \Delta t$

Demostración de (1):

$\Delta W_t^Y = \rho \Delta W_t^1 + b \Delta W_t^2 \Rightarrow \operatorname{Var}(\Delta W_t^Y) = \rho^2 \Delta t + b^2 \Delta t = \Delta t$

$b = \sqrt{1-\rho^2}$

Reescribo los procesos

$S_t = S_0 e^{\mu_s t + \sigma_s W_t^1}$ $\qquad Y_t = S_0 e^{\mu_Y t + \sigma_Y (\rho W_t^1 + \sqrt{1-\rho^2} W_t^2)}$

Aplico teorema de Ito

$dS_t = S_t \left(\mu_s + \frac{1}{2}\sigma_s^2\right) dt + S_t \sigma_s dW_t^1$ (2)

$dY_t = Y_t \left(\mu_Y + \frac{1}{2}\sigma_Y^2\right) dt + Y_t \sigma_Y \rho dW_t^1 + Y_t \sigma_Y \sqrt{1-\rho^2}\, dW_t^2$ (3)

Dani Iaschinsky

Escaneado con CamScanner

de (2): Agrego θ a W_t para que me quede r acompañando dt

$$\theta^1 = \frac{\mu_S + 1/2\sigma_S^2 - r}{\sigma_S}$$

$$\Rightarrow d\tilde{W}_t^1 = dW_t^1 + \theta^1 dt$$

De (3): $$\theta^2 = \frac{\mu_Y + 1/2\sigma_Y^2 - \theta^1\sigma_Y\rho - r}{\sigma_Y}$$

$$\Rightarrow d\tilde{W}_t^2 = dW_t^2 + \theta^2 dt$$

Expreso en términos de $d\tilde{W}_t$

$$dS_t = S_t r dt + S_t\sigma_S \tilde{W}_t^1$$

$$dY_t = Y_t r dt + Y_t\sigma_Y \rho d\tilde{W}_t^1 + Y_t\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}\, d\tilde{W}_t^2$$

Valuación:

$$V_t^3 = B_t E_Q[S_T Y_T B_T^{-1} | F_t]$$

$$= e^{-r(T-t)} E_Q[S_t e^{(r-1/2\sigma_S^2)(T-t)+\sigma_S\Delta\tilde{W}_{T-t}^1} Y_t e^{(r-1/2\sigma_Y^2)(T-t)} e^{\sigma_Y(\rho\Delta\tilde{W}_{T-t}^1 + \sqrt{1-\rho^2}\Delta\tilde{W}_{T-t}^2)} | F_t]$$

W_1 y W_2 son independientes

$$= e^{-r(T-t)} S_t Y_t e^{(r-1/2\sigma_S^2)(T-t)} e^{(r-1/2\sigma_Y^2)(T-t)} E_Q[e^{\sigma_S\Delta\tilde{W}_{T-t}^1 + \sigma_Y\rho\Delta\tilde{W}_{T-t}^1} | F_t] \cdot E_Q[e^{\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}\Delta\tilde{W}_{T-t}^2} | F_t]$$

$$V_t^3 = e^{-r(T-t)} S_t Y_t e^{(r-1/2\sigma_S^2)(T-t)} e^{(r-1/2\sigma_Y^2)(T-t)} e^{\frac{1}{2}(\sigma_S+\sigma_Y\rho)^2(T-t)} e^{1/2(\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2})^2(T-t)}$$

$$V_t = V_t^1 + V_t^2 + V_t^3$$

Dani Iaschinsky