2) Método de estimación

Reemplazo las tasas desconocidas por una tasa que conozco hoy (tasa forward) → añado al flujo de fondos una sucesión de forwards con tasa pactada igual a las respectivas tasas forward a fin de simplificar el flujo de fondos resultante sin modificar el valor de la cartera a valuar

$ci(0;0;\frac{2}{12})\frac{2}{12}$ $\quad$ $ci(\frac{2}{12};0;\frac{2}{12})\frac{2}{12}$ $\quad$ $ci(\frac{4}{12};0;\frac{2}{12})\frac{2}{12}$

$-CK\frac{2}{12}$ $\quad$ $-CK\frac{2}{12}$ $\quad$ $-CK\frac{2}{12}$

Hago de cuenta que en realidad tengo: (reemplazo x tasa forward)

$Ci(0;0;\frac{2}{12})\frac{2}{12}$ $\quad$ $Ci(0;\frac{2}{12};\frac{2}{12})\frac{2}{12}$ $\quad$ $Ci(0;\frac{4}{12};\frac{2}{12})\frac{2}{12}$

↓ Flujos fijos

Actualizo cada flujo fijo por su tasa

$$\boxed{V_{0\,swap} = \frac{Ci(0;0;\frac{2}{12})\frac{2}{12}}{1+i(0;0;\frac{2}{12})\frac{2}{12}} + \frac{Ci(0;\frac{2}{12};\frac{2}{12})\frac{2}{12}}{1+i(0;0;\frac{4}{12})\frac{4}{12}} + \frac{Ci(0;\frac{4}{12};\frac{2}{12})\frac{2}{12}}{1+i(0;0;\frac{6}{12})\frac{6}{12}}}$$

↳ Llego al mismo valor que antes. Verificar.

- V_0 puede ser positivo o negativo y va a depender del K que pactemos. K muy chica en relación a la tasa: $V_0 > 0$
  K muy grande $V_0 < 0$

↓

La K justa que hace que nadie le tenga que pagar a nadie es la que hace que $V_0 = 0$

↳ Tasa swap: tasa pactada K que hace que el valor del swap sea igual a cero.

↳ coincide con el promedio ponderado de las tasas forward que estiman los intereses variables del swap, siendo las ponderaciones mencionadas los valores actuales de los del instrumento.

$$K = \text{Prom. Pond}\left[i(0;0;\tfrac{2}{12});\ i(0;\tfrac{2}{12};\tfrac{2}{12});\ i(0;\tfrac{4}{12};\tfrac{2}{12}) \right]$$

Cada una de las tasas se pondera por el factor de descuento asociado a cada tasa.

$$\frac{1}{\underbrace{1+i\left(0;0;\frac{2}{12}\right)\frac{2}{12}}_{P_1}} \qquad \frac{1}{\underbrace{1+i\left(0;0;\frac{4}{12}\right)\frac{4}{12}}_{P_2}} \qquad \frac{1}{\underbrace{1+i\left(0;0;\frac{6}{12}\right)\frac{6}{12}}_{P_3}}$$

$$K=\frac{\dfrac{i\left(0;0;\frac{2}{12}\right)}{P_1}+\dfrac{i\left(0;\frac{2}{12};\frac{2}{12}\right)}{P_2}+\dfrac{i\left(0;\frac{4}{12};\frac{2}{12}\right)}{P_3}}{P_1+P_2+P_3}$$

Mercados de tasas de interés

Los derivados de tasa de interés no están expresados a partir del valor de un activo, sino de una cosa (tasa) que depende del valor del activo.

Derivados no lineales: son aquellos cuyo pay-off no surge directamente a partir de una transformación lineal de las tasas de interés que se realicen en el mercado.

- **CAP**: otorga a su tenedor el beneficio que se tendría si se tuviera solamente el derecho (no obligación) a recibir intereses variables a cambio de intereses fijos sobre un capital nocional de C.

Este instrumento puede entenderse como una póliza de seguro destinada a cubrir el exceso de intereses variables a pagar sobre una financiación a interés variable por sobre los intereses que se deberían pagar si los intereses de la financiación estuvieran pactados a una tasa K.

$$\boxed{X^{CAP}=C\,P\left(i_{T-P;0;P}-K\right)^{+}}$$

Si $i>K$ me dan dinero y sino no me dan nada.

Flujo de intereses de algo que deviene intereses desde $T-P$ hasta T y que paga en T. No conocemos la tasa hasta $T-P$ y puede llegar a ser muy alto → tenemos seguro.

$$\boxed{X^{FLOOR}=C\,P\left(K-i_{T-P;0;P}\right)^{+}}$$

Este tipo de derivados no se pueden valuar igual que los demás. El problema es que cuando hacíamos el árbol, armábamos un sistema de ecuaciones y hallábamos el valor de la cartera. Pero la tasa de interés no es un activo → no podemos hacer cantidad x precio → el problema es que la tasa no es un activo sino que es un indicador de cuánto dinero me van a dar

El problema se solucionaría trabajando con árboles de bonos. (Veo a la tasa de interés como un algoritmo que surge a partir del valor del respectivo bono cupón 0 ("P")

↳ Los derivados sobre la tasa de interés pueden verse también como derivados sobre activos subyacentes

$$\underbrace{P(T-p,T)}_{\text{valor actual de \$1}} = \frac{1}{1+i(T-p;0;p)p} \Bigg\}$$ valor que hay en T-P de \$1 puesto en T

De esta ecuación puedo descubrir la tasa si sé el valor en T-P de \$1 puesto en T:

$$\boxed{i(T-p;0;p) = \Big(\underbrace{\frac{1}{P(T-p,T)}}_{\text{Factor de capitalización}} - 1\Big)\frac{1}{p}}$$

tasa efectiva

↳ la nominalizo

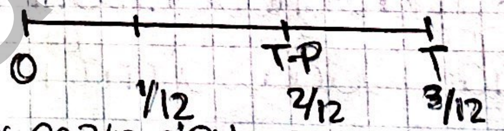
Puedo reemplazarlo en la ecuación original

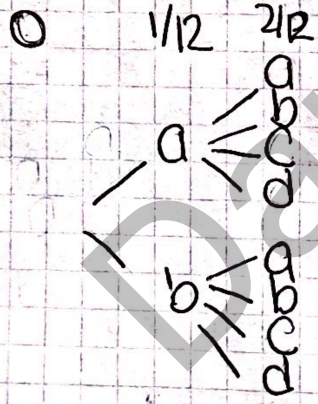
Ej: Quiero valuar un derivado que paga

$$X = C \cdot \frac{1}{12}\left[i\left(\frac{2}{12};0;\frac{2}{12}\right) - K\right]^{+} \qquad K \to \text{dato puntual}$$

Si necesito escenarios de la tasa, necesito escenarios del bono asociado a la tasa

↳ El bono asociado paga en T=3/12 y yo lo valúo en 2/12, 1/12 y 0





$P(2/12;3/12)^{aa}$ → valor en 2/12 del bono que paga en 3/12

$P(2/12;3/12)^{ab}$ → Con este dato puedo saber en qué tasa mes está pensando el mercado.

Con este número saco la tasa (fórmula)

$P(2/12;3/12)^{ba}$

$$i\left(\frac{2}{12};0;\frac{1}{12}\right) = \left(\frac{1}{P(2/12;3/12)} - 1\right)\frac{1}{1/12}$$

→ La tasa efectiva mensual la llevo a anual

→ Para cada escenario obtengo la tasa para cada escenario. → calculo el pay-off

NOTA

otro de los árboles tiene que ser el bono, porque es lo que se compra y vende. En este caso, el activo subyacente es un bono, entonces no podemos suponer que el segundo bono no tiene riesgo.
Además tengo que tener más de dos estados.

↳ con derivados de tasas de interés tengo que recurrir a muchos escenarios y a muchos bonos.

- Los bonos no tienen que vencer antes del vencimiento del derivado. Sino, no podría resolver el sistema

- No necesariamente los pay off de los derivados sobre la tasa de interés se encontrarán referenciados a una única tasa de interés → puede ocurrir que el pay off a valuar contemple el valor que tomen varios puntos de una ETTI futura → hay varios activos subyacentes

Valuación del derivado s/ esperanzas

$V_t = G_t \, E_Q[X \cdot \overset{\text{un árbol}}{G_T^{-1}} | F_T]$ Si el bono vence en el mismo momento, divido por 1.

CLASES

MODELO CONTINUO

Parámetros

- μ → modela la tendencia -0.02
- σ → modela la volatilidad 0.05
- r → modela la tendencia del precio del bono 0.004
- T → Dato contractual, cuando vence el contrato. 10
- n → cuántas veces quiero operar. 100
- S_0 → valor del activo hoy 10

Se desarrolla una metodología que nos dice qué cantidad de activos y qué cantidad de bonos tengo que tener en cartera en cada momento, en función de dónde esté parado y de lo que vaya ocurriendo con la trayectoria de precios de los activos subyacentes

t	W_t	B_t	S_t	fi	Psi	V_t	Error	cuenta errores

B_t: Surge como resultado de la función del tiempo ⇒ El precio del bono se mueve de forma exponencial (el valor del bono capitaliza continuamente a la tasa r)

$$B_t = e^{rt}$$

S_t → trayectoria al azar que puede llegar a tomar la trayectoria del activo subyacente. Trayectoria posible.

V_t → valor del activo al momento t.

Error → Diferencia entre el valor al que quiero vender la cartera vieja y el valor al cual quiero comprar la cartera nueva → en este modelo hay una diferencia por vender la cartera vieja a los precios nuevos y comprar una cartera nueva.

Cuenta errores → acumulo los errores capitalizándolos al mismo tiempo y sumándolos. ↓

$\frac{B_{0{,}02}}{B_{0{,}01}}$ = Factor de capitalización implícito del bono

→ El valor de la última cartera tiene que coincidir con el pay-off del derivado, cualquiera sea la trayectoria

• Si quiero mejorar el nivel de imprecisión, tengo que aumentar n →

$\uparrow n \to \downarrow$ imprecisión ; $\downarrow n \to \uparrow$ imprecisión.

↳ La cuenta errores es una variable aleatoria que converge a cero a medida que $n \to \infty$ con probabilidad 1

• Diferencia entre algo que ocurre siempre y algo que ocurre con probabilidad 1.

$X \sim U[0;1]$

• Y si $X<1$ $Y=X$; si $X=1$ $Y=0$ $\quad \Big\}\ P(Y=X)=1$

• Si $X=(1/2)^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $Y=0$; si $X \neq (1/2)^n$ $Y=X$ $\quad \Big\}\ P(Y=X)=1$

• Si $X \in \mathbb{Q}$ (fracción) ⇒ $Y=0$; $X \notin \mathbb{Q}$ ⇒ $Y=X$ $\quad \Big\}\ P(Y=X)=1$ → más allá de que las fracciones están en el intervalo, existen muchísimos más números que no son fracciones por toda la recta

W_t: Proceso browniano

NOTA

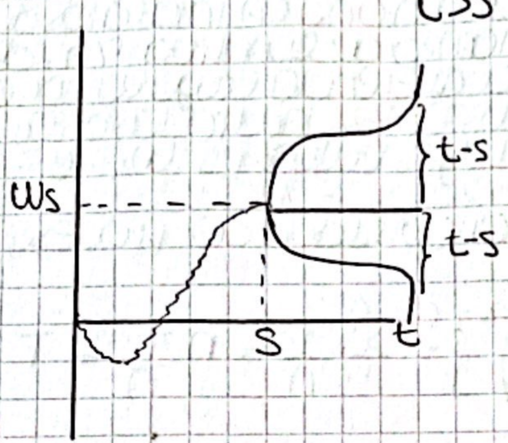
PROCESOS BROWNIANOS

Procesos estocásticos (sucesión de variables aleatorias W_t) que cumplen con las siguientes condiciones:

1. $W_0 = 0$: el proceso browniano arranca valiendo cero.

2. $W_t - W_s \sim N(0 ; \overset{\text{varianza}}{t-s})$: una vez llegado al momento s, sea cual fuere el valor que tome el proceso browniano, la VA W_t se distribuye como una normal con media W_s y varianza $t-s$

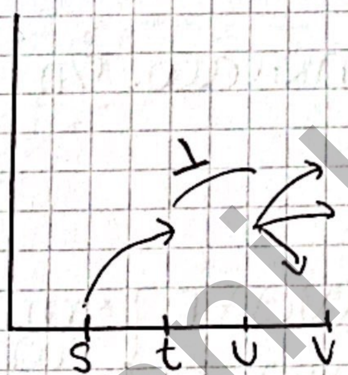
$t > s$



En promedio W_t va a valer lo mismo que W_s. Puede fluctuar con una varianza de $t-s$.
Las fluctuaciones se distribuyen normalmente

3. $(W_t - W_s) ; (W_v - W_u)$ son VA independientes con $v > u > t > s$

$\Rightarrow COV(W_t - W_s ; W_v - W_u) = 0$: Las diferencias entre los valores que toma el proceso en intervalos de tiempo disjuntos son variables aleatorias independientes



Lo que ocurra entre u y v es independiente de lo que ocurra entre s y t siendo U-V un intervalo disjunto respecto de S-T

4. W_t es una función continua : no puede tener saltos
trayectoria

Ejemplo página 68

◦ Varianza → longitud del intervalo

• Las trayectorias del proceso browniano tienden a "temblar".

↓

Propiedades de las trayectorias de los procesos brownianos

1. Variación cuadrática

Dada una VA Y_n

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} \left[W_{(i\frac{T}{n})} - W_{[(i-1)\frac{T}{n}]} \right]^2$$

Eleva al cuadrado las diferencias que toma el proceso browniano en intervalos de tiempo de longitud T/n, desde la diferencia cuyo valor es $W_0 - W_{T/n}$ hasta la diferencia cuyo valor es $W_T - W_{T-T/n}$

$W_0 - W_{T/n}$ ———————— $W_T - W_{T-T/n}$

→ Y_n representa una medida de la variabilidad del proceso browniano.

$$E(Y_n) = \sum_{i=1}^{n} E\left[\left(W_{(i\frac{T}{n})} - W_{((i-1)\frac{T}{n})}\right)^2\right] \overset{(1)}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{T}{n} = n\frac{T}{n} = T$$

Agarro un término cualquiera

$$\text{VAR (definición)} = E\left[\left(\underbrace{W_{(i\frac{T}{n})} - W_{((i-1)\frac{T}{n})}}_{\sim N(0;\,T/n)} - 0\right)^2\right] = T/n$$

⇒ $E(Y_n) = T$ Esperanza de cada intervalo: T/n

$\sigma^2(Y_n) = 2\frac{T^2}{n}$ } Demostrar

Variación cuadrática: $\lim_{n\to\infty} Y_n$ ⇒ $E(VC) = T$, $\sigma^2(VC) = 0$ } siempre vale T con probabilidad 1.

↳ A dónde converge (1) cuando $n \to \infty$

→ La probabilidad de que la variación cuadrática tome el valor T es igual a 1

↓

Los caminos que puede tomar con probabilidad 1 el proceso browniano, tienen que tener una variabilidad tal que su VC entre 0 y T sea igual a T → los caminos que sigue el proceso tienen que ser diferentes a las funciones diferenciables (las mismas tienen VC=0)

CLASE 6

TEOREMA DE ITO

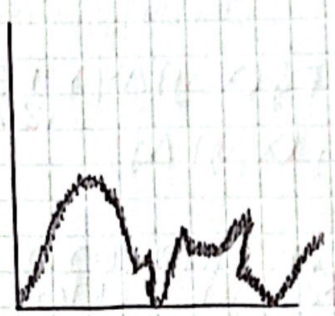
$$\sum \Delta W_t^2 = T = \sum \Delta t \Rightarrow \Delta W_t^2 = \Delta t$$

$$\Delta W_t = \pm\sqrt{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta W_t}{\Delta t} = \pm \frac{\sqrt{\Delta t}}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta W_t}{\Delta t} = \pm \frac{1}{\sqrt{\Delta t}}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} = \pm \infty$$

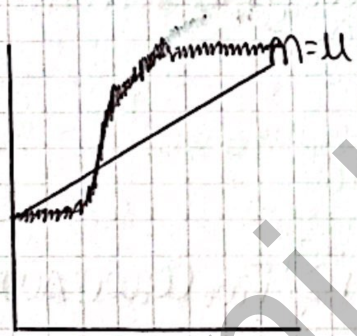


La pendiente del proceso browniano es siempre $\pm\infty$
A medida que pasa el tiempo, tiembla mucho
Es mucho más grande la variación del proceso browniano que la variación del tiempo.
→ no se puede derivar

REPRESENTACIÓN DEL ACTIVO

$$S_t = S_0 + \mu t + \sigma W_t - \overset{=0}{\omega_2} \text{ cte}$$

↳ Proceso browniano



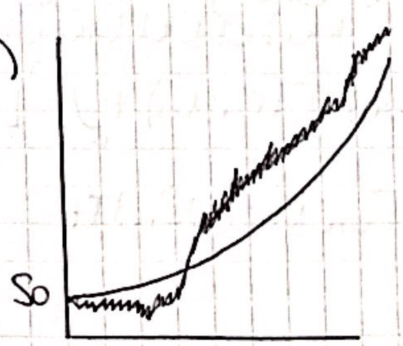
Sin la parte del proceso browniano, tengo una recta que empieza en S_0 y crece con pendiente μ
Cuando el proceso browniano vale cero, la simulación es igual a la tendencia original

$S_t \sim N(S_0 + \mu t ; \sigma^2 t)$ → La variable aleatoria puede tomar cualquier valor
↓
Esta fórmula no se puede usar para representar el precio de un activo

Se suele usar:

$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma W_t}$

$S_t \in (0; \infty+)$



$S_t = \cos(t + W_t)$

$S_t = \ln(W_t)$

$S_t = F(t; W_t)$

- W_t no depende directamente de t. Que conozca t no me dice nada.

Lo que sí sabemos es que existe una relación entre la variación del proceso browniano y la variación de t: $\sum \Delta W_t^2 = \sum \Delta T$

Aplico Taylor p/ disminuir error

$Z = F(x; y) \qquad \Delta Y^2 = \Delta X$

$\Delta Z = F(x+\Delta x; y+\Delta y) - F(x;y) = F'_x(x;y)\Delta x + F'_y(x;y)\Delta y +$ $= \pm\sqrt{\Delta x} \Rightarrow$ no tiende a cero

$+\frac{1}{2} F''_{xx}(x;y)\Delta x^2 + F''_{xy}(x;y)\Delta x \Delta y + \frac{1}{2} F''_{yy}(x;y)\Delta y^2$

Ito: de todos los términos, me quedo con aquellos que no sean despreciables en relación a Δx → divido cada término por Δx y me fijo si a medida que $\Delta x \to 0$, todo el término tiende a cero. Si lo hace, lo elimino.

$\Rightarrow \Delta Z = F'_x(x;y)\Delta x - F'_y(x;y)\Delta y + \frac{1}{2} F''_{yy}(x;y)(\Delta y)^2$

Lo expreso en términos de t y W_t.

$\Delta S_t = F(t+\Delta t; W_t + \Delta W_t) - F(t; W_t)$

Ito: la igualdad también se da para la sumatoria.

$\underbrace{\sum_0^T \Delta S_t}_{S_T - S_0} = \sum_0^T \left[F'_t(t; W_t)\Delta t + \frac{1}{2} F''_{W_t}(t; W_t)\underbrace{(\Delta W_t)^2}_{\Delta t}\right] +$

$\sum F'_{W_t}(t; W_t)\Delta W_t + \varepsilon_n$ ← término de error; n: cantidad de subintervalos que hay en la suma

$\underbrace{S_T}_{F(T;W_T)} = \underbrace{S_0}_{F(0;W_T)} + \sum_0^T \left[F'_t(t;W_t) + \frac{1}{2} F''_{W_t}(t;W_t)\Delta t\right] + \sum_0^T F'_{W_t}(t;W_t)\Delta W_t + \varepsilon_n$

ITO: el error converge a cero a medida que $n \to \infty$ (n = cantidad de subintervalos) con probabilidad 1.

A medida que $n \to \infty$ las sumas se transforman en integrales: Nomenclatura (es lo mismo que antes)

- $F(T; W_T) = F(0; W_T) + \int_0^T \left[F'_t(t; W_t) + \frac{1}{2} F''_{W_t; W_t}(t; W_t)\right] dt$

$+ \int_0^T F'_{W_t}(t; W_t)\, d\,t \qquad$ AS (con prob = 1)

NOTA

otra forma de escribirlo

$$dF(t;W_t) = [F_t(t;W_t) + \frac{1}{2} F''_{W_t W_t}(t;W_t)]dt + F'_{W_t}(t;W_t)dW_t$$

$$+ F(0;W_t)$$

$$S_t = F(t;W_t) = S_0 e^{\mu t + \sigma W_t}$$

Vamos a ver si podemos calcular S_t como el valor inicial más cada una de las sumas intermedias.

$$F(t;W_t) = F(0;W_t) + \sum \underbrace{[F_t(t;W_t) + \frac{1}{2} F''_{W_t}(t;W_t)]}_{\text{Tendencia}} \Delta t$$

$$+ \sum_0^T \underbrace{F'_{W_t}(t;W_t)}_{\text{volatilidad}} \Delta W_t$$

Calculo derivadas:

$$F_t(t;W_t) = S_0 \mu e^{\mu t + \sigma W_t}$$

$$F'_{W_t}(t;W_t) = \sigma S_0 e^{\mu t + \sigma W_t}$$

$$F''_{W_t}(t;W_t) = \sigma^2 S_0 e^{\mu t + \sigma W_t}$$

Asigno valores a las constantes

$S_0 = 10$ $\mu = 0{,}01$ $T = 10$

$\sigma = 0{,}05$ subintervalos $n = 100$ $\Delta t = \frac{T}{n} = 0{,}1$

t	ΔW_t	W_t	S_t (Formula)	Tendencia	Volatilidad	Var. est.	Aprox. Sd
0		0	10	0	0	—	
0,1	supongo 0,13	0,13	10,15			0,149	10,1[illegible]
0,2	-0,04	0,09	10,08				
0,3							
10		2,34	19,21				

• ΔW_t la simulo como una variable aleatoria que se distribuye normal con media cero, varianza 0.1

• Variación estimada = tendencia Δt + volatilidad ΔW

↳ en el momento 0.1, cuando conozco ΔW

Aproximación → voy acumulando las sumas

Teorema generalizado de ITO: qué pasa cuando tenemos una función de una función que depende de cosas estocásticas.

lo conozco en t

lo conozco en t+1

$$dS_t = \alpha_t\, dt + \beta_t\, dW_t$$

Procesos que tiene representado a partir de una forma diferencial

las conozco en t.

• Nos dice cómo cambia S cuando pasa el tiempo, no tengo que calcular el teorema de ITO.

m_t → min valor del proceso browniano entre 0 y t
M_t → max

Nuevo proceso estocástico: es una función del tiempo y del proceso anterior S_t

$$V_t = F(t, S_t)$$

$$dV_t = F'_t \Delta t + F'_s \Delta S_t + \frac{1}{2} F''_{t,t} \Delta t^2 + F''_{t,s_t} \Delta t \Delta S + \frac{1}{2} F''_{s_t s_t} \Delta S_t^2 \Rightarrow \text{Reemplazo } dS$$

$$\boxed{dV = \left(F'_t + F'_s \alpha_t + \frac{1}{2} F''_{ss} \beta_t^2\right) dt + F'_s \beta_t\, d\,S_t \;^{W_t}}$$

Término de tendencia — Término de volatilidad

NOTA

Segundo Parcial

HOJA N° 30

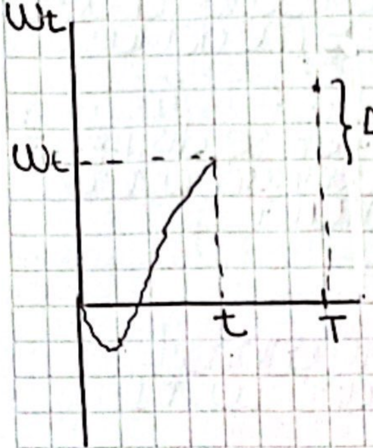
FECHA

CLASE 6.5

Proceso browniano

$P[a < W_T - W_t < b] \sim N \quad \mu = 0 \; ; \; \sigma = T - t$

$$P[a < \Delta W_{T-t} < b] = \underbrace{\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(\Delta W_{T-t} - 0)^2}{T-t}}}_{\text{F de densidad}} d(\Delta W_{T-t})$$

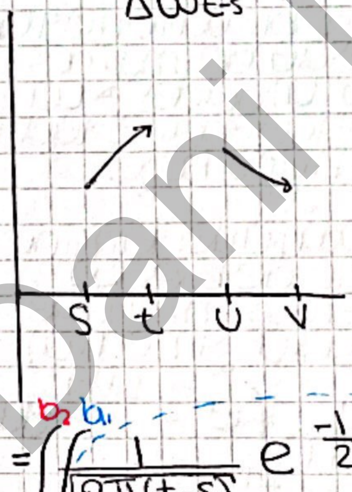


¿Cuál es la probabilidad de que la variación del proceso browniano entre T y t, termine estando entre a y b

$P[a < W_T < b] \rightarrow$ Probabilidad de que el proceso browniano esté entre a y b

$$= P[a < W_T - W_0 < b] = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-0)}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(\Delta W_{T-0} - 0)^2}{T-0}} d(\Delta W_{T-0})$$

$P[\underbrace{a_1 < W_t - W_s < b_1}_{\Delta W_{t-s}} \; ; \; \underbrace{a_2 < W_v - W_u < b_2}_{\Delta W_{v-u}}] \quad v > u > t > s$ intervalos disjuntos



¿Cuál es la probabilidad de que la variación del proceso browniano termine entre a_1 y b_1 y que la variación en otro momento termine entre a_2 y b_2

Las puedo multiplicar porque son intervalos disjuntos

$$= \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(\Delta W_{t-s} - 0)^2}{t-s}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(v-u)}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(\Delta W_{v-u} - 0)^2}{v-u}}$$

Función de densidad conjunta $\cdot \; d(\Delta W_{t-s}) d(\Delta W_{v-u})$

- Cuando tengo intervalos disjuntos, puedo tratar a las variables aleatorias como independientes.

NOTA

$P[a_1 < W_t < b_1 ; a_2 < W_T < b_2]$

$$\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-0)}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(W_t-0)^2}{t-0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(W_T-W_t)^2}{T-t}} \, dW_t \, dW_T$$

No lau puedo multiplicar porque no son independientes. El conocimiento respecto de la VA W_t influencia la distribución de probabilidades de W_T ⇒ Planteo la función de densidad condicionada a la información que me da la otra.

$$W_T = W_t + \underbrace{(W_T - W_t)}_{\text{único término aleatorio.}}$$: Si conozco W_t, W_T se distribuye con media W_t y varianza $T-t$

REFLECTION PRINCIPLE DE LOS PROCESOS BROWNIANOS.

máximo valor del proceso browniano $[0;T]$

$P[M_T > m ; W_T < b]$ Gráfico pag. 71

La probabilidad de que la trayectoria del proceso browniano en un intervalo $(0;T)$ sea tal que su máximo valor sea mayor a "m" y que su valor final sea menor a "b" coincide con la probabilidad de que el valor final de la trayectoria del proceso browniano en un intervalo $(0;T)$ sea mayor a $2m-b$

⇒ Una vez que una trayectoria del proceso browniano toma el valor "m", es igual de probable que descienda más de "m-b" o bien que ascienda más de "m-b" unidades → La probabilidad de que el proceso browniano suba es igual a la probabilidad de que el proceso browniano baje.

- La probabilidad de que el máximo proceso browniano termine por encima de m y el mínimo por debajo de b, es lo mismo que, en algún momento superemos m, y que el último termine por encima de $2m-b$ (por la simetría)

$$P[M_T > m ; W_T < b] = P[W_T > 2m-b] = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{2m-b}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{(W_T)^2}{T}} \, dW_T \quad (1)$$

$$= F(m;b)$$

Esto nos permite calcular la función de densidad conjunta de M y W ...

NOTA

Función de densidad conjunta

$$P[M_T > m ; W_T \leq b] = F(m;b) = \int_{-\infty}^{b} \int_{m}^{+\infty} f(M_T;W_T)\, dM_T\, dW_T$$

De tener bien calculado $f(M_T;W_T)$ deberíamos llegar a lo mismo que (1) ⇒ integrando dos veces llego a (1) ⇒ derivando dos veces (1) llego a $f(M_T;W_T)$

$$\frac{\partial F(m;b)}{\partial b} = \int_{m}^{+\infty} f(M_T;W_T)\, dM_T\, dW_T$$ Desaparece $\int_{-\infty}^{b}$ (la de afuera)

me cambia el símbolo derivar con respecto al límite inferior.

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial F(m;b)}{\partial b} \right)}{\partial m} = - f(M_T;W_T)\, dM_T\, dW_T$$

desarrollo: pag 72

$$\ldots \quad \boxed{f(m;b) = \frac{2(2m-b)}{T\sqrt{2\pi T}}\, e^{-\frac{(2m-b)^2}{2T}}}$$

↳ Función de densidad conjunta del máximo y del último valor del proceso browniano.

- Va a ser muy útil para calcular primas de derivados cuyo pay-off dependa del máximo valor que tome el subyacente en determinado intervalo de tiempo. (Barrier options - lookback options).

Probabilidad de que el máximo termine por encima de m y el último termine por debajo de m

$$P[M_T \geq m ; W_T \leq m] = P[W_T > m] = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{m}^{\infty} e^{\frac{W_T^2}{2T}}\, dW_T$$

$$= P[M_T \geq m ; W_T \geq m] = P[W_T > m]$$

$$\Rightarrow P[M_T > m] = P[M_T \geq m ; W_T \leq m] + P[M_T \geq m ; W_T \geq m]$$

$$= 2 . P[W_T \geq m] = 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{m}^{\infty} e^{\frac{W_T^2}{2T}}\, dW_T$$

ZERO SET (conjunto 0) $m = 0$. ...

$$P[M_T > 0] = 2 P[W_T \geq 0] = 2 . 0{,}5 = 1$$

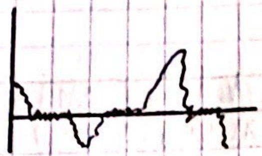
La probabilidad de que el máximo termine por encima de cero, es 2 × probabilidad $W_T \geq 0$ ⇒ 0,5 (normal con media cero, la mitad de las veces termina por arriba de cero, la mitad por debajo)

La probabilidad de que el mínimo termine por debajo del cero: es $\frac{1}{2}$ por simetría → en algún momento, entre 0 y T, el proceso browniano toma un valor negativo.

$P[M_T \geq 0] = P[m_T \leq 0] = 1$

⇒ En algún momento posterior a cero el proceso browniano no retornará a cero con probabilidad 1 en el momento t_1. Se puede aplicar el mismo análisis para el intervalo $(0; t_1)$ y ver que, con probabilidad 1, el proceso browniano tomará en un momento $t_2 < t_1$, el valor 0.

⇒ El proceso browniano cruza infinitas veces el 0 entre 0 y T → es contra intuitivo, pero se puede probar que los ceros de las trayectorias de los procesos brownianos se encuentran todos juntos → el proceso browniano tiembla tanto que antes de escaparse del cero, cruza infinitamente el eje de los ceros



Teorema de ITO

Dado un proceso estocástico $S_t = F(t; W_t)$, se puede calcular ΔS_t aproximando con derivadas

$$\Delta S_t = \underbrace{\left(F'_t + \frac{1}{2} F''_{ww}\right)}_{\alpha_t} \Delta t + \underbrace{F'_w}_{\beta_t} \Delta W_t$$

Teorema generalizado de ITO. (se intenta llegar a ΔV_t)

$V_t = F(t; S_t)$ $\quad \Delta S_t = \alpha_t \Delta t + \beta_t \Delta W_t$

$$dV_t = F'_t dt + F'_s dS_t + \frac{1}{2} F''_{tt} dt^2 + F''_{t;S_t} dt dS + \frac{1}{2} F''_{ss} dS_t^2$$

Aproximación de segundo orden de la variación de V

Reemplazo dS_t con ΔS

(...) ver pasos en el apunte

$$dV_t = A\, dt + B\, dW_t + \cancel{C\, dt^2} + D\, \cancel{dt}\, dW_t + E\, dW_t^2$$

Me quedo con los términos que no desaparecen (que no son despreciables)

∇ $\frac{dW_t}{dt}$ varía mucho sabiendo que $\frac{\Delta W_t}{\Delta t} \simeq \frac{\sqrt{\Delta t}}{\Delta t}$

∇ $\Delta W_t^2 = \Delta t$

∇ S termina siendo el valor del activo
V termina siendo el valor del derivado.

$\Rightarrow dV_t = A\,dt + B\,dW_t + E\,dt$

$$\boxed{dV_t = \Big(\underbrace{F'_t + F'_s \alpha_t + \frac{1}{2} F''_{ss} \beta_t^2}_{\text{Tendencia}}\Big) dt + \underbrace{F'_s \beta_t\, dW_t}_{\text{volatilidad}} \quad \text{con } V_t = F(t;S_t) \wedge dS_t = \alpha_t\,dt + \beta_t\,dW_t}$$

<u>Ejemplo</u>:

Datos: $\Delta S_t = \overbrace{M_t}^{\alpha_t} \Delta t + \overbrace{m_t}^{\beta_t} \Delta W_t$

$S_0 = 0 \rightarrow$ me tienen que decir de dónde parto

$V_t = \frac{S_t^2}{1+t} \Rightarrow V'_t = \frac{S_t^2}{-(1+t)^2}$ $\quad V'_s = \frac{2S_t}{1+t}$

$V''_{ss} = \frac{2}{1+t}$

$T = 10$
$n = 100$
$\Delta t = 0{,}1 = \frac{10}{100}$

De toda la columna de W_t hasta t

t	ΔW_t	W_t	max α_t	min β_t	S_t	V_t	Tend.	Vol	Aprox
0		0	$M_0 = 0$	0	0				
0,1	$\sim N(0;0{,}1)$ 0,21	$W_t + \Delta W_t$ 0,21	max W 0,21	0	0				
0,2	-0,12	0,21-0,12 0,09	0,21	0	0.11				
⋮		⋮							
10		3,81	4,32	-1,15					

$\Delta S_t = \alpha_t \Delta t + \beta_t \Delta W_t$

Deberían dar iguales

CLASE 7

Esperanzas condicionadas

↳ A algunas se les puede calcular el teorema de Ito y a otras no.

Ejemplo 1

$E[W_T | F_t]$

↳ Cuánto espero que valga W_t condicionada a la información que tengo en t

$E[W_T | F_t] = W_t$ → Dado que $\Delta W_t \sim N(0;\sigma^2)$, la variación tiene media cero ⇒ mañana tiene que valer lo mismo que vale hoy.

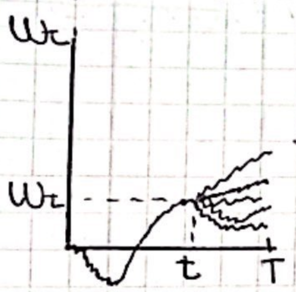
En términos matemáticos se puede escribir como:

$$E[W_T | F_t] = E[W_t + W_T - W_t | F_t]$$

$$= E[W_t | F_T] + E[\underbrace{W_T - W_t}_{\Delta W_t \text{ con } \mu = 0} | F_t]$$

$$= W_t + 0.$$

⇒ Separo lo conocido de lo que resta conocerse, aplico las esperanzas condicionadas separadamente



} Un promedio de cada una de las proyecciones me termina dando W_t

Esperanza condicionada } Valor al que convergen en promedio las simulaciones de la VA condicionándolas a lo ocurrido hasta t.

Siempre que se pueda se buscará el valor de la esperanza analíticamente, sino se hará con las simulaciones.

Otro ejemplo Ejemplo 2

$$E[W_T^2 | F_t] = E[[W_t + (W_T - W_t)]^2 | F_t]$$

$$E[[W_t^2 + 2W_t(W_T - W_t) + (W_T - W_t)^2] | F_t]$$

$$= E[W_t^2 | F_t] + 2E[W_t(W_T - W_t) | F_t] + E[(W_T - W_t)^2 | F_t]$$

$$= W_t^2 + 2W_t E[\Delta W_T] + E[(W_T - W_t)^2 - \overset{\mu}{0} | F_t] \to \sigma^2$$

$$= W_t^2 + 0 + (T - t)$$

$E(W_T^2|F_t)=W_t^2+(T-t)$ → se agrega un término porque hay una cierta asimetría entre las variaciones negativas y positivas (que pesan más)

	W_T	W_T^2
	0	0
10	10	100
	20	400

→ cuando me muevo para abajo, bajo 100 unidades y cuando me muevo para arriba, me muevo 300. Además, el valor mínimo es cero las variaciones para abajo no restan tanto como lo que suben las variaciones para arriba.

Ejemplo 3

$E[S_T|F_t]$ con $S_T=S_0e^{\mu t+\sigma W_t}$

separo lo conocido de lo que resta por conocer

$S_T=S_0e^{\mu T+\sigma W_T}$ Reemplazo T por t:

$S_T=S_0e^{\mu t+\sigma W_t+\mu(T-t)+\sigma(W_T-W_t)}$

$=S_0e^{\mu t+\sigma W_t}\,e^{\mu(T-t)+\sigma(W_T-W_t)}$

$=S_te^{\mu(T-t)+\sigma(W_T-W_t)}$ → Aleatoriedad proporcional al tiempo que falta.

Le calculo la esperanza

$E[S_T|F_t]=E[S_te^{\overbrace{\mu(T-t)+\sigma(W_T-W_t)}^{A}}|F_t]$

$=S_tE[e^{\mu(T-t)+\sigma(W_T-W_t)}|F_t]$ e^{VA} con $VA\sim N(\underbrace{\mu(T-t)}_{A};\underbrace{\sigma^2(T-t)}_{b^2})$

Se puede demostrar que:

$E[e^x]$ con $x\sim N(a;b^2)\Rightarrow E[e^x]=e^{a+\frac{1}{2}b^2}$

$\Rightarrow E[S_T|F_t]=S_te^{\mu(T-t)+\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}$

- Si $\Delta W_T\to+\infty\Rightarrow S_T\to\infty$
  $\Delta W_T\to-\infty\Rightarrow S_T\to0$
  $\Delta W_T=0\Rightarrow S_T=S_te^{\mu(T-t)}$ ☆

Los valores más bajos están acotados en 0, pero puede ir hasta ∞. En promedio me da algo más alto que ☆ ⇒ aparece un término más.

Ejemplo 4

$E[\cos(W_T)|F_t] = E[\cos(W_t + (W_T - W_t))|F_t]$

Como no lo puedo resolver analíticamente, lo tengo que simular.

$$= E[\cos(W_t + \overbrace{\Delta W_{T-t}}^{\sim N(0;T-t)})|F_t]$$

Más fácil es calcularla a partir de su definición. Tomo todos los valores que puede llegar a tomar la VA, lo multiplico por sus probabilidades e integro.

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cos(W_t + \Delta W_{T-t})}_{\text{Lo multiplico por el valor de la VA}} \underbrace{\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(\Delta W_{T-t}-0)^2}{T-t}}}_{\text{Función de densidad } \Delta W_{T-t}} d(\Delta W_{T-t})}_{\text{Probabilidad de que la variación del proceso browniano entre } t \text{ y } T \text{ tome un valor entre } \Delta W_{T-t} \text{ y } \Delta W_{T-t}+d(\Delta W_{T-t})}$$

Ejemplo 5

$E[e^{M_T} m_t|F_t]$ → No la puedo resolver de manera analítica ni por integrales porque no conozco las funciones de densidad

↓

Tengo que simularla y obtener el promedio

La cantidad de veces que tengo que simular depende de la varianza y de cuánto yo quiera que valga la varianza.

Propiedades de las esperanzas condicionadas

1. $E[X/F_t]$ = Proceso estocástico. (sucesión de VA)
   ↓
   una variable aleatoria distinta para cada t en donde calcule la esperanza condicionada.

2. $E[X/F_T] = X$

3. $E[E[X/F_t]/F_t] = E[X/F_\tau]$ → La esperanza de lo que voy a esperar es lo mismo que lo que espero hoy.

   $H_t = E[X/F_t] \Rightarrow \underline{E[H_t/F_s] = H_s}$

en el ejemplo 2: $E(W_T^2/F_t) = W_t^2 + (T-t)$

$$H_t = W_t^2 + (T-t)$$

$$E(H_t/F_s) = E(W_s^2/F_s) + E[(T-t)/F_s)$$

$$E(H_t/F_s) = W_s^2 + (\cancel{t}-s) + (T-\cancel{t})$$

$$= W_s^2 + (T-S)$$

$$= H_s$$

A un proceso que cumple con esta condición se lo llama Martingala → espero que no varíe
↓
Esto tiene consecuencia con el teorema de Ito.

- en el ejemplo 2:

$$\Delta H_t = \left[F'_t + \frac{1}{2} F''_{ww}\right]\Delta t + F'_w \Delta W_t \quad \text{con } S_t = W_t^2 + (T-t)$$

$$= \left[-1 + \frac{1}{2} \cdot 2\right]\Delta t + 2W_t \Delta W_t$$

$$\Delta H_t = 0\,\Delta t + 2W_t\,\Delta W_t$$

→ Me desaparece el término de tendencia (yo se que el proceso mañana va a valer, en promedio, lo mismo que hoy)
→ El proceso H, en promedio, no varía $\Rightarrow \Delta H_t = 0$.

$E[\Delta W_t/F_t] = 0$. Necesito que lo que acompañe a Δt sea 0 también, para que $E[\Delta H_t] = 0$.

Teorema de la representación de Martingala

Para los procesos que no sabemos cómo aplicarle el teorema de Ito.
Para los martingalas

$$\boxed{\Delta H_t \simeq 0\,\Delta t + \delta_t \Delta W_t}$$

Esto nos termina asegurando que cualquier derivado se puede replicar.

CLASE 8
Valuación de derivados

Si tenemos un mercado formado por un activo $S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma W_t}$ y además un bono $B_t = e^{rt}$ y emitimos un derivado con pay off X (puede ser cualquier algoritmo que tome la trayectoria del activo y la transforme en un flujo de fondos)

$\Rightarrow$ el valor del derivado en ausencia de arbitraje tiene que ser igual a:

$$V_t = B_t\, E_Q[X B_t^{-1} \mid F_t] \quad (1)$$

Para entender qué es la Q nos inventamos un nuevo proceso

$$\boxed{\tilde{W}_t = W_t + \left(\frac{\mu - r + 1/2\,\sigma^2}{\sigma}\right) t}$$

$\tilde{W}_t$ es un proceso browniano más un término
↓
$\tilde{W}_t$ no es un proceso browniano

$$\Delta \tilde{W}_t = \Delta W_t + \underbrace{\left(\frac{\mu - r + 1/2\,\sigma^2}{\sigma}\right)}_{A} \Delta t$$

$\Delta \tilde{W}_t \sim N(A;\Delta t)$ (no cumple con la propiedad de los procesos brownianos

Despejo W_t de $\tilde{W}_t$ y reemplazo en S_t

$$\boxed{S_t = S_0\, e^{(r - 1/2\,\sigma^2)t + \sigma \tilde{W}_t}}$$

μ no es cualquier cosa
$\mu = r - 1/2\,\sigma^2$

La Q significa suponer que $\tilde{W}_t$ es un proceso browniano, y W_t no.
Invento unas probabilidades distintas de las originales que hacen que (1) me de el valor del derivado en ausencia de arbitraje.

NOTA

Ejemplo

$X = S_T^2$

$$V_t = e^{rt} E_Q[S_T^2 e^{-rT} | F_t]$$

$$= \underbrace{e^{-r(T-t)}}_{\text{Factor de actualización}} E_Q[S_T^2 | F_t]$$

$$S_T = S_0 e^{(r - 1/2\sigma^2)T + \sigma \tilde{W}_T}$$ separo lo conocido de lo que resta conocer

$$= \underbrace{S_0 e^{(r-1/2\sigma^2)t + \sigma \tilde{W}_t}}_{S_t \text{ (probabilidad P)}} e^{(r-1/2\sigma^2)(T-t) + \sigma(\tilde{W}_T - \tilde{W}_t)}$$

Q: $S_T = S_t e^{(r-1/2\sigma^2)(T-t) + \sigma(\tilde{W}_T - \tilde{W}_t)}$

$$\Rightarrow V_t = e^{-r(T-t)} E_Q[S_t^2 e^{2(r-1/2\sigma^2)(T-t) + 2\sigma(\tilde{W}_T - \tilde{W}_t)} | F_t]$$

$$= e^{-r(T-t)} S_t^2 E_Q[e^{\underbrace{\overbrace{2(r-1/2\sigma^2)(T-t)}^{A} + 2\sigma(\tilde{W}_T - \tilde{W}_t)}_{\sim N(A; \sqrt{4\sigma^2(T-t)})}} | F_t]$$

Aplico probabilidades Q

recordando $E[e^x] = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$

$$= e^{-r(T-t)} S_t^2 e^{2(r-1/2\sigma^2)(T-t) + \frac{1}{2} 4\sigma^2(\tilde{W}_T - \tilde{W}_t)}$$

Operando

$$\boxed{V_t = S_t^2 e^{(r+\sigma^2)(T-t)}}$$

↓ Fórmula que depende de los parámetros del modelo (r y σ), t y T. ⇒ depende de todas cosas que conocemos al momento de valuación

Independiente de μ

$\Phi_t = 2S_t e^{(r+\sigma^2)(T-t)}$ → explicación atrás

Ejemplio

$X = \ln(S_T)$

$$V_t = e^{-r(T-t)} E_Q[\ln(S_t e^{(r-1/2\sigma^2)(T-t)+\sigma(\tilde{W}_T-\tilde{W}_t)}) | F_t]$$

$$= e^{-r(T-t)} \{ E_Q[\underbrace{\ln(S_t)|F_t}_{\ln(S_t)}] + E_Q[(r-1/2\sigma^2)(T-t)|F_t] + \underbrace{E_Q[\sigma(\tilde{W}_T-\tilde{W}_t)|F_t]}_{=0} \}$$

$=0$ porque suponemos que, por probabilidades Q, W_t es un proceso browniano y tiene media cero

$$\boxed{V_t = e^{-r(T-t)}[\ln(S_t) + (r-1/2\sigma^2)(T-t)]}$$

Se demuestra (ver apunte) que si el valor nos queda en función del tiempo y del activo que

$$\text{Si } V_t = F(t; S_t) \Rightarrow \phi_t = \frac{\partial F}{\partial S}$$

$$\Rightarrow V_t = \phi_t S_t + \psi_t B_t \Rightarrow \psi_t = \frac{V_t - \phi_t S_t}{B_t}$$

$$\Rightarrow \phi_t = \frac{e^{-r(T-t)}}{S_t}$$

Simulando el modelo en excel $X = S_T^2$

DATOS $S_0 = 10$; $T = 10$; $r = 0{,}001$; $n = 100$; $\mu = 0{,}003$ $\sigma = 0{,}005$

$\Delta t = \frac{T}{n} = 0{,}1$

t	ΔW_t	W_t	$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma W_t}$	$B_t = e^{rt}$	ϕ_t	ψ_t	V_t	Error	Error acumulado
0		0	10	1	C	D		0	0
0,1	$\sim N(0,\sqrt{\Delta t})$	0,12	A	B	E	F		0,002	$0{,}002 e^{r\Delta t}$
0,2	-0,10	0,02						-0,001	
10		2,31					$\approx S_T^2$		≈ 0

El error es cuanto me dan por vender la cartera vieja ($C \times A + D \times B$) menos la cartera nueva ($E \times A + F \times B$)

El error acumulado se capitaliza por $e^{r\Delta t}$

CLASE 9

Caso genérico: $X = F(S_T)$

con $V_t = B_t \, E_Q[X B_T^{-1} / F_t]$

$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma W_t} \qquad B_t = e^{rt}$

$S_t = S_0 e^{(r - 1/2\sigma^2)t + \sigma \tilde{W}_t}$

$S_T = S_t e^{(r - 1/2\sigma^2)(T-t) + \sigma(\tilde{W}_T - \tilde{W}_t)}$

$\Rightarrow V_t = e^{-r(T-t)} E_Q[F(S_t e^{(r-1/2\sigma^2)(T-t) + \sigma(\tilde{W}_T - \tilde{W}_t)}) / F_t]$

No puedo aplicar las propiedades de esperanza porque depende de la función que a priori no conozco.

Multiplico la VA por la función de densidad

$$V_t = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} F(S_t e^{(r-1/2\sigma^2)(T-t) + \sigma(\Delta\tilde{W}_{T-t})}) \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-1/2 \frac{(\Delta\tilde{W}_{T-t} - 0)^2}{T-t}} d(\Delta\tilde{W}_{T-t})$$

→ Probabilidad de que me de un valor muy cercano a $\Delta\tilde{W}_{T-t}$

Si $V_t = G(S_t; t) \Rightarrow \phi_t$ lo aproximo numéricamente según los valores de S_t y t
↳ porque no puedo derivar, no conozco la función

ej: $t = 0{,}1$
$S_0 = 10$.

$$\boxed{\phi_t = \frac{G(10{,}1; 0) - G(10; 0)}{0{,}1}}$$

⇒ Podemos valuar cualquier derivado cuyo pay-off depende del valor que tome S_t al momento del vencimiento del mismo.
Quedan excluidos los derivados que dependen de la trayectoria del activo y no del mismo valor.

NOTA

Ejemplo de un call $X=(S_T-K)^+$

$$V_t=e^{-r(T-t)}E_Q\left[F\left(S_t e^{(r-1/2\sigma^2)(T-t)+\sigma(\tilde{W}_T-\tilde{W}_t)}\right)\mid F_t\right]$$

$$=e^{-r(T-t)}\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\left(S_t e^{(r-1/2\sigma^2)(T-t)+\sigma\Delta\tilde{W}_{T-t}}\right.}_{A}\left.-K\right)^+\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(\Delta\tilde{W}_{T-t}-0)^2}{T-t}}d\Delta\tilde{W}_{T-t}$$

Va a haber un valor para el cual $A>K$, haciendo que la integral deje de valer cero. ⇒ Empiezo a integrar desde ahí

Cuánto tiene que valer $\Delta\tilde{W}_{T-t}$ para que: $A=K$ ⇒ encuentro ΔW^*_{T-t}

$$\Delta\tilde{W}^*_{T-t}=\frac{\ln(K/S_t)-(r-1/2\sigma^2)(T-t)}{\sigma}$$

$$\Rightarrow V_t=e^{-r(T-t)}\int_{\Delta\tilde{W}^*_{T-t}}^{\infty}\left(S_t e^{(r-1/2\sigma^2)(T-t)+\sigma\Delta\tilde{W}_{T-t}}-K\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(\Delta\tilde{W}_{T-t}-0)^2}{T-t}}d\Delta\tilde{W}_{T-t}$$

Al igual que en el tiempo discreto $E_Q[\Delta Z_t|F_t]=0$ ⇒ no esperamos que haya variación entre el proceso Z de hoy a mañana con las probabilidades Q

En el tiempo continuo, se puede mostrar que $E_Q[Z_t|F_t]=Z_t$

con probabilidades R: $V_t=S_t E_R[XS_T^{-1}|F_t]$

Nos inventamos un proceso

$$\bar{W}_t=W_t+\frac{\mu-r+1/2\sigma^2}{\sigma}t$$

$$\Delta\bar{W}_t=\Delta W_t+\frac{\mu-r+1/2\sigma^2}{\sigma}\Delta t$$

$\bar{W}_t$ no es un proceso browniano. Su media es igual a la constante

⇓

Probabilidades R: suponer que $\bar{W}_t$ es un proceso browniano.

$$\Rightarrow S_t=S_0 e^{(r-1/2\sigma^2)+\sigma\bar{W}_t}$$

Demostramos que con las probabilidades Q y las probabilidades R llegamos a lo mismo.

Mismo ejemplo. $X=S_T^2$

$$V_t=S_t E_R[S_T^2\cancel{S_T^{-1}}|F_t]$$

$$=S_t E_R[S_T|F_t]$$

NOTA

$S_T = S_0 e^{(r+1/2\sigma^2)T + \sigma \bar{W}_T}$

$= \underbrace{S_0 e^{(r+1/2\sigma^2)t + \sigma\bar{W}_t}}_{S_t}{}^{+ (r+1/2\sigma^2)(T-t) + \sigma(\bar{W}_T - \bar{W}_t)}$

$S_T = S_t e^{(r+1/2\sigma^2)(T-t) + \sigma(\bar{W}_T - \bar{W}_t)}$? Diferencia con Q

$V_t = S_t E_R[S_t e^{\underbrace{(r+1/2\sigma^2)(T-t)}_{\mu} + \sigma(\bar{W}_T - \bar{W}_t)} | F_t]$

$= S_t^2 (\ldots)$

$E[e^X] = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$

$V_t = S_t^2 e^{(r+1/2\sigma^2)(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}$

$V_t = S_t^2 e^{(r+\sigma^2)(T-t)}$ = prob Q ✓

En discreto: $E_R[\Delta Y_t | F_t] = 0$ con $Y = \frac{B}{S_t}$

En continuo $E_R[Y_T | F_t] = E_R[e^{rT} / S_t e^{(r+1/2\sigma^2)(T-t) + \sigma(\bar{W}_T - \bar{W}_t)} | F_t]$

$\Rightarrow E_R[Y_T | F_t] = S_t^{-1} e^{rt} E_R[e^{r(T-t)} \cancel{e}^{-(r+1/2\sigma^2)(T-t) + \sigma(\bar{W}_T - \bar{W}_t)} | F_t]$

$= S_t^{-1} e^{rt} E_R[e^{\underbrace{-1/2\sigma^2(T-t)}_{\mu} - \sigma(\bar{W}_T - \bar{W}_t)} | F_t]$

$= e^{rt} S_t^{-1} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}$

$= Y_t$ ✓