f)Ecuación contable básica. Al hallar B', X' y A de la ecuación (1.2.1) a la (1.2.4) y sustituyéndolos en (1.1.1), se obtiene la siguiente ecuación contable básica

$$U(t) = U(t\text{-}1) + B(t) + J(t) + U_{nueva}(t) - \Delta L'_0(t) - X(t) - E(t) - R(t) - D(t). \qquad (1.2.5)$$

$\Delta L'_0(t)$ es todo aumento en el compromiso neto que no sean las reservas técnicas, excluyendo cualquier aumento en préstamos o deudas o conceptos que ya están incluidos en otras partidas de (1.2.5). $R(t)$ es el neto de las cuentas con los reaseguradores. Este término no es necesario si la contabilidad es neta de reaseguros (véase la nota 1 de la sección 1.1(b)).

La ecuación (1.2.5) y sus variantes, simultáneamente con la ecuación de costos emergentes, será una de nuestras herramientas de trabajo clave.

(g) Seguro de vida. La ecuación contable básica (1.2.5) se ha expresado en términos de los principios contables para los seguros generales. Sin embargo, surge una necesidad similar de establecer asignaciones con respecto a compromisos futuros en el caso de los seguros de vida (y para otros sistemas financieros a los que podría aplicarse un modelo similar). Además de ciertos tipos de seguros colectivos, la mayoría de las provisiones para seguros de vida generalmente se establecen sobre la base de póliza por póliza como una **reserva de primas** y una **reserva de siniestros,** colocando la mayor atención, a diferencia de los seguros generales, sobre las reservas de primas, aunque una distinción entre estas dos reservas es discrecional y varía de país a país. La provisión que debe establecerse al final de cada año puede considerarse como, el exceso del valor de los egresos futuros en virtud del contrato sobre el valor de los ingresos futuros.

(h) Como construir un modelo del proceso de seguros. Una vez establecida una ecuación de transición, ya sea en el formato de los costos emergentes de (1.1.1) o en el formato contable de (1.2.5), el paso siguiente es el de especificar submodelos para cada elemento en la ecuación. La teoría clásica del riesgo se concentra en el proceso siniestral, considerando primero el número de siniestros, luego una distribución de la intensidad de los siniestros y finalmente uniendo a ambos para formar un proceso del importe acumulado de siniestros. Las primas se tomaban, pero de un modo muy sencillo. Los trabajos más recientes acerca de los modelos de los procesos del seguro han acentuado la importancia de la volatilidad de los activos y la influencia que ejerce la inflación, que también es muy variable y generalmente afecta a la conducta inversora y al pago de siniestros. Otros elementos importantes incluyen los problemas de la estimación de reservas, tarificación y rentabilidad, los gastos, el reaseguro, los siniestros catastróficos, la interacción con el resto del mercado de seguros y la influencia de los mecanismos de retroalimentación dinámica formales o informales.

(i) La estructura del libro. La presentación en los próximos capítulos está organizada de tal modo que los elementos de las ecuaciones básicas presentadas en las secciones precedentes se presentan y analizan uno por uno, comenzando por los siniestros y continuando con las primas, las inversiones, los efectos del mercado, el control dinámico, etc., llegando por último a los modelos abarcativos en el capítulo 14 y a las aplicaciones específicas para el seguro de vida (capítulo 15) y los fondos previsionales (capítulo 16), Pero antes de ello, en la sección 1.3 ofrecemos un breve resumen de la teoría clásica del riesgo.

1.3 Algunas características de la teoría clásica

(a) Las características principales de la teoría clásica del riesgo se describen en este apartado para ilustrar cómo la idea de lo estocástico puede introducirse en el contexto de los seguros. Aunque este enfoque, tal como se lo presenta, no es adecuado para describir los fenómenos de la vida real, será un elemento de los modelos más avanzados y por lo tanto es conveniente presentarlo como el preludio a las secciones posteriores.

(b) Los siniestros como un proceso estocástico. El proceso de siniestros puede ilustrarse gráficamente como en la Figura 1.3.1. Todo suceso que da lugar a un indemnización está representado por un escalón vertical, la altura del escalón indica el importe de la indemnización. El tiempo se mide hacia la derecha a lo largo del eje horizontal y la altura X de la línea escalonada en el instante t muestra el importe total de siniestros durante el intervalo de tiempo $(0,t]$. El proceso, es, en realidad, un proceso estocástico compuesto, en el sentido que el momento de ocurrencia y la intensidad de cada siniestro son fenómenos aleatorios. Cualquier realización en particular, que consista en un flujo observado como el de la Figura 1.3.1, se denomina recorrido muestral o realización del proceso.

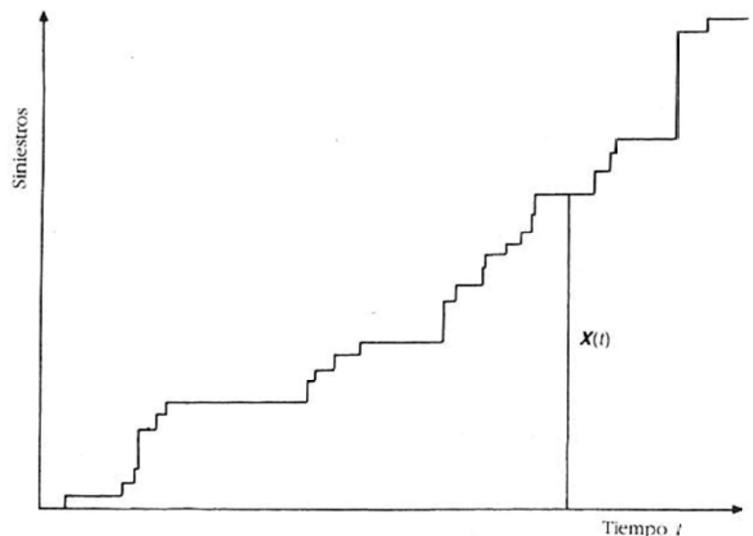

Figura 1.3.1 *Recorrido muestral de un proceso siniestral*

Obsérvese que en este apartado la variable de tiempo t es continua, mientras que en la sección 1.2 y en muchos otros contextos es discreta, indicando el período contable actual, que generalmente coincide con el año calendario.

Si el momento de observación t es fijo, entonces el resultado correspondiente, el **estado** $\boldsymbol{X}(t)$, del proceso de la cuantía de los siniestros $\boldsymbol{X}(t)$, que en nuestro ejemplo representa el importe acumulado de siniestros en el intervalo $(0,t]$, es una **variable aleatoria** con una función de distribución (abreviadamente f.d.)

$$F_t(X) = \text{Prob}\{\boldsymbol{X}(t) \leq X\}. \tag{1.3.1}$$

Para todo momento t, dado el proceso estocástico $\boldsymbol{X}$, la f.d. (función de distribución) F_t está determinada en forma unívoca. Por otro lado, a diferencia del caso de una sola variable aleatoria, la mera definición de las F_t´s, aunque sean válidan para todo t, no es suficiente para determinar la estructura probabilística de un proceso estocástico. También se necesitan reglas de transición para describir cómo están correlacionados los valores de los estados $\boldsymbol{X}(t)$ en instantes t diferentes. Por consiguiente, es necesario cierto cuidado cuando las f.d. de estado F_t se utilizan para definir el comportamiento de un proceso estocástico. La notación utilizada en este libro y el uso de los diferentes caracteres tipográficos se explican en la sección de Nomenclatura.

OBSERVACIÓN. Es conveniente observar que necesitamos principalmente la **variable de estado** o **transversal**, el importe de siniestros asociado con el período contable, generalmente el año. Los períodos se cuentan en números enteros, por ejemplo, t = 1980, 1981,.... Los importes de siniestros vinculados se representan por $\boldsymbol{X}(t)$, es decir, utilizando la misma notación que se presentó anteriormente y que generalmente se utiliza en los libros para indicar un proceso estocástico. Por supuesto, un procedimiento lógico sería distinguir estos dos conceptos mediante símbolos diferentes. Sin embargo, la utilización de un símbolo diferente para la variable transversal llevaría a ciertos inconvenientes porque es una de las variables claves del libro y se la necesita con frecuencia. Por lo tanto, utilizaremos los símbolos $X(t)$ y X para la variable transversal y para el proceso estocástico, siendo la última necesaria sólo en algunas ocasiones. El contexto indicará el significado. Esta convención para la notación también abarca a algunas otras variables, por ejemplo, el margen de solvencia $U(t)$. Análogamente, la variable t, el tiempo, se tomará generalmente como discreta, el número de períodos contables, pero en algunos contextos, como anteriormente en esa sección, se tomará como una variable continua.

(c) El proceso del seguro. Como paso siguiente en el armado de los modelos más avanzados, se presenta el ingreso por primas $P(t)$. Se supone que las primas fluyen continuamente hacia una reserva de riesgos $\boldsymbol{U}(t)$, de la cual se pagan los siniestros $\boldsymbol{X}(t)$. Las demoras en el pago de siniestros son ignoradas. En la teoría clásica del riesgo el ingreso de primas en el período $(0,t]$ se define como $P(t) = (1 + \lambda)\cdot P\cdot t$, donde $P = E(\boldsymbol{X}(1))$ es la **prima de riesgo pura** por unidad de tiempo y λ es un **coeficiente de recargo de seguridad**. Esta definición de ingreso de primas difiere de la prima devengada $B(t)$ que se introdujo en la sección 1.2(b), en que no se hacen asignaciones en $P(t)$ por gastos. En otras palabras, al utilizar las primas de riesgo puras $P(t)$ en la teoría clásica del riesgo se supone que la carga por gastos y los gastos reales se compensan entre sí y por lo tanto pueden dejarse de lado en el análisis de lo estocástico. $B(t)$, por otro lado, es la prima comercial facturada.

El proceso está ilustrado en la Figura 1.3.2. El ingreso por primas se supone que se percibe continuamente y se representa mediante una línea de pendiente positiva. Los siniestros, que pueden considerarse como ingresos negativos, aparecen como escalones descendentes discretos. Si $\boldsymbol{U}_0$ es la reserva inicial, la diferencia

$$\boldsymbol{U}(t) - U_0 = (1 + \lambda)\cdot P\cdot t - \boldsymbol{X}(t) \tag{1.3.2}$$

da el resultado neto (que puede ser positivo o negativo) que surge durante el período de tiempo $(0,t]$.

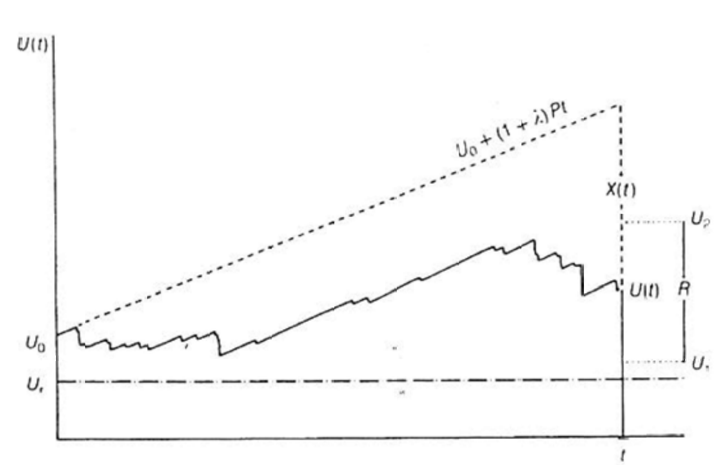

Figura 1.3.2 *Reserva de riesgos como la diferencia entre el ingreso por primas y el egreso por siniestros.*

OBSERVACIÓN. $\boldsymbol{U}(t)$ es un proceso estocástico y la reserva de riesgos en el instante t es el estado del proceso. No obstante, para una mejor comprensión, no diferenciamos esto en la notación, como ya explicamos en la observación de la sección 1.3(b).

Un problema importante es evaluar el rango de variación R, indicado por los límites de confianza inferior y superior U_1 y U_2, dentro del cual la reserva final de riesgos $\boldsymbol{U}(t)$ caerá con una probabilidad dada.

Es de interés la probabilidad ε de que la reserva de riesgos final $\boldsymbol{U}(t)$, al cabo del período de observación $(0,t]$, será menor que cierto límite especificado U_1, sujeto a la condición de que el valor inicial sea U_0

$$\varepsilon = \mathrm{Prob}\{\boldsymbol{U}(t) < U_1 \mid U(0) = U_0\} \tag{1.3.3}$$

Una manera útil de analizar la situación es considerar el capital a riesgo. Este puede definirse como igual a $U_0 - U_r$, es decir, el capital que puede perderse a lo sumo con una confianza de 1-ε. Otro modo de plantear el problema es introducir el concepto de la probabilidad de ruina, es decir, la probabilidad de que $U(t)$ caiga por debajo de un límite U_r, que puede describirse como la **barrera de ruina**. En la mayoría de los países ese límite es impuesto por los reguladores (si no, podría tomarse igual a 0). En este contexto debe entenderse que U_0 comprende la totalidad del margen de solvencia así como fue definido en (1.2.4). La ruina en la terminología de la *teoría del riesgo* significa un cese obligatorio de la empresa. Si $U(t)$ se ha hecho negativa, una quiebra se avecina; de otro modo se aplican diversos tipos de procesos de liquidación o de administración de siniestros pendientes ("run off"), como se especifica en las leyes nacionales de seguros (continúa el análisis en la sección 14.6).

(d) Enfoques de largo plazo. Desde el punto de vista del asegurador, la supervivencia a largo plazo es fundamental. Por lo tanto, el horizonte de tiempo debe extenderse desde un solo período (generalmente un año) hasta una secuencia de períodos como la ilustra la Figura 1.3.3.

Si se supone que la posición económica (representada por $U(t)$) se controla solamente en instantes (equidistantes) t=1,2,...,T, es necesaria una versión discreta del modelo. Los puntos de observación pueden ser el cierre de cada año calendario.

El problema de la ruina radica ahora en estimar la probabilidad de que el margen de solvencia $U(t)$ caiga por debajo de la barrera de ruina en cualquiera de los instantes t = 1,2,...,T. Además, la distribución de los resultados en los instantes t es de interés en muchas aplicaciones. Uno de los temas centrales de la teoría es hallar técnicas para el cálculo de estas distribuciones.

Paralelamente al concepto discreto de la ruina, también se aplica una definición **continua**, considerando como ruina todo resultado en el que $U(t)$ cae por debajo de la barrera de ruina en **cualquier** instante del período de observación (0,t], incluyendo a aquéllos situados entre los puntos discretos de observación, que generalmente son los puntos finales de años calendario consecutivos.

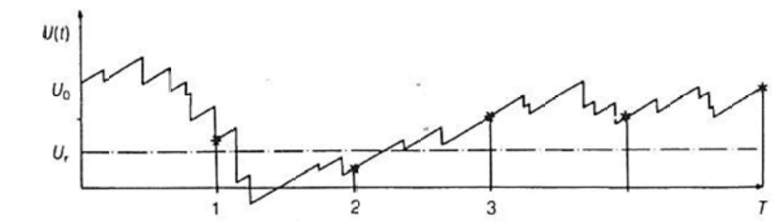

Figura 1.3.3 *Control en los instantes t=1,2,...,T durante el período de observación.*

OBSERVACIÓN. Un enfoque adoptado frecuentemente en la teoría clásica fue permitir que el horizonte del tiempo T creciera hasta el infinito y utilizar la probabilidad de la ruina resultante de "tiempo-infinito" como una medida de inestabilidad. Algunas veces cuando se hablaba de la "probabilidad de ruina" sin especificar el horizonte, se aludía a este caso en particular. Este procedimiento lleva a una teoría interesante y elegante. Sin embargo, como se analizará brevemente en la sección 13.1(d) requiere supuestos y características restrictivas que la tornan inadecuada para los modelos prácticos. Por lo tanto, limitaremos nuestra consideración al tiempo finito.

Nótese además que la práctica habitual con los modelos de tiempo-infinito consistía en describir los diversos modelos a "largo plazo" como de tiempo-finito, distinguiéndolos así de la versión "normal" de tiempo-infinito.

(e) Validez de los modelos. Finalmente, recordemos el conocido hecho de que los modelos, incluyendo los avanzados que se describirán en otros capítulos de este libro, son sólo una idealización del mundo real. Del mismo modo que en los métodos de estadística matemática, también se requiere sentido común para decidir si y en qué medida los modelos propuestos son competentes para describir los fenómenos estudiados.

Es conveniente reconocer que los modelos en principio están sujetos a tres tipos de incertidumbre.

Los errores de modelo surgen del hecho de que ningún modelo en la práctica puede representar al mundo real. Esto resulta en un sesgo o error inevitable en los resultados estimados.

El error de parámetro se origina en la dificultad de hacer estimaciones correctas sobre cualquier parámetro que sea requerido por el modelo, dada la necesidad de utilizar inferencias estadísticas sobre los datos observados.

El error estocástico surge porque las cuantías reales fijadas como objetivo tales como pagos de siniestros, el rendimiento de la inversión, etc., están sujetas a fluctuaciones aleatorias, incluso en una situación (teórica) en que el modelo y sus parámetros son estrictamente correctos.

La evaluación y el análisis de cada uno de estos tipos de error pueden requerir el uso de técnicas diferentes.

OBSERVACIÓN. Pueden utilizarse términos diferentes para los conceptos antedichos en estadística matemática, por ejemplo error de especificación, error de cálculo y error estadístico (Taylor, G.C., 1986).

1.4 Notación y algunos conceptos de la teoría de probabilidades

El objetivo de esta sección es enunciar un conjunto de conceptos del cálculo de probabilidades para facilitar la referencia a ellos en secciones

posteriores y, especialmente, para introducir la notación que se utilizará en todo el libro. Otras convenciones de notación y un resumen general de notaciones se ofrece en la sección de Nomenclatura.

El lector hallará de utilidad una recapitulación de algunas técnicas y resultados importantes, dado que este material se presenta en una variedad de formas en los libros de texto comunes. Los lectores que estén acostumbrados a la disciplina axiomática del cálculo de probabilidades y de los procesos estocásticos apreciará que se limitan las consideraciones a tipos bastante simples de variables y procesos, lo que, no obstante, será suficiente a los fines prácticos. En general se han omitido detalles de teoremas matemáticos y demostraciones, o se han incluido solamente en ejercicios y apéndices, dado que el énfasis de la presentación se encuentra en las aplicaciones prácticas de las ideas.

(a) Variables aleatorias y sus funciones de distribución. Las variables aleatorias y los procesos estocásticos se simbolizan con letras en negrita, por ejemplo $\boldsymbol{X}$ o $\boldsymbol{k}$ (véase lo señalado sobre estos conceptos en la sección 1.3(b)). Las variables aleatorias también se denominan **variables estocásticas** ("stochastic variables" o "variates") en la bibliografía.

La distribución de probabilidades de una variable aleatoria $\boldsymbol{X}$ está unívocamente determinada por su función de distribución (acumulativa) (f.d.) F,

$$F(X) = \text{Prob}\{\boldsymbol{X} \leq X\} \quad (-\infty < X < \infty), \tag{1.4.1}$$

es decir que $F(X)$ simboliza la probabilidad de que $\boldsymbol{X}$ tome un valor menor o igual que X.

Se utilizará un conjunto de distribuciones de probabilidades diferentes. Algunas serán continuas, otras discretas, mientras que otras serán de tipo mixto (Figura 1.4.1). Estas se definen de la siguiente manera:

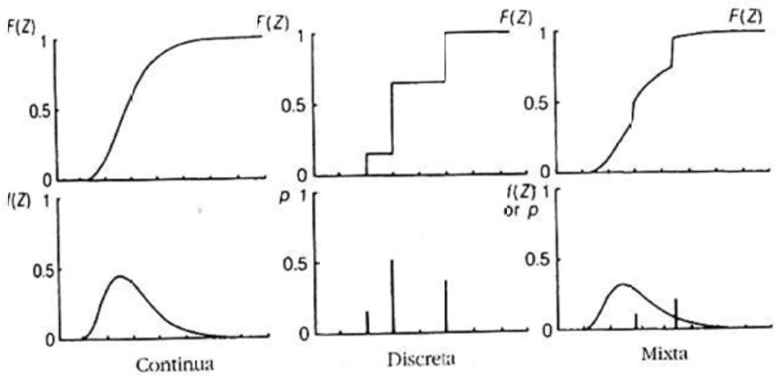

Figura 1.4.1 *Tres tipos de distribución*

La función de distribución F de una variable aleatoria distribuida de modo continuo es una función continua y tiene una derivada $f(X) = F'(X)$ en todo punto, fuera de un conjunto finito (o numerable) de puntos de excepción. La derivada se denomina **densidad**. La f.d. continua a menudo se utiliza para representar la intensidad de los siniestros individuales en los seguros generales, donde todas las cuantías desde cero hasta un número muy grande pueden suceder, permitiendo una variedad de riesgos de diferentes magnitudes y la posibilidad de que se paguen daños parciales.

Una variable aleatoria $\boldsymbol{X}$ con una distribución discreta sólo tiene una cuantía finita (o numerable) de valores X_1, X_2 ,.... Las probabilidades

respectivas generalmente se simbolizan p_1 ,p_2,.... La variable número de siniestros es de este tipo. Otro ejemplo podría ser los seguros donde los beneficios están normalizados (o estandarizados), con una opción solamente con respecto a cuántas unidades de cobertura se toman, como, por ejemplo, en el caso de algunas pólizas de viaje.

Una función de distribución F de tipo mixto es una combinación de los tipos discreto y continuo, siendo continua y diferenciable fuera de un conjunto finito o numerable de puntos críticos X_1, X_2,..., que están asociados a probabilidades p_1 ,p_2,..., causando saltos en la función de distribución en estos puntos. Este tipo de función de distribución puede surgir de una distribución básica continua si hay acuerdos de reaseguro que tienen el efecto de eliminar el tramo superior de los riesgos originarios. Pueden producirse saltos discretos similares a partir de límites superiores legales o contractuales de indemnización o de franquicias de los asegurados. Un tipo de función de distribución mixta también resulta cuando una política abarca beneficios de varios tipos, por ejemplo, sumas fijas en el caso de muerte o invalidez permanente e indemnización para el costo real de la atención médica.

Si utilizamos la notación dada anteriormente, una expresión para la f.d. de $\boldsymbol{X}$ es

$$F(X) = \int_{-\infty}^{X} f(X)dX + \sum_{X_i \leq X} p_i. \tag{1.4.2}$$

Esto se aplica a los tres tipos de función de distribución. En el caso continuo el segundo término es cero, en el caso discreto el primer término es cero, y en el caso mixto se utilizan ambos términos.

Por ejemplo, el valor medio E($\boldsymbol{X}$) de $\boldsymbol{X}$ puede escribirse del siguiente modo utilizando esta notación

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} Xf(X)\mathrm{d}X + \sum_i X_i p_i \tag{1.4.3}$$

siempre que la integral y la suma converjan.

(b) Una convención para la notación. Existe una necesidad frecuente de una forma generalizada de (1.4.3), para dar valores esperados del tipo E($g(\boldsymbol{X})$), donde g es cualquier función de valores reales. Podemos escribir

$$\mathrm{E}(g(\boldsymbol{X})) = \int_{-\infty}^{\infty} g(X)f(X)\mathrm{d}X + \sum_i g(X_i)p_i \tag{1.4.4}$$

o podemos usar la notación conveniente de la integral de Stieltjes

$$\mathrm{E}(g(\boldsymbol{X})) = \int_{-\infty}^{\infty} g(X)\mathrm{dF}(X). \tag{1.4.5}$$

Los lectores no familiarizados con la integral de Stieltjes pueden interpretar una expresión de la forma (1.4.5) como una abreviatura de la expresión de dos términos en (1.4.4).

EJEMPLO. Sea la intensidad bruta $\boldsymbol{Z}$ de un siniestro una variable aleatoria distribuida con una densidad exponencial

$$f(Z) = ae^{-aZ} \quad (Z \geq 0;\ a \text{ es una constante positiva}). \tag{1.4.6}$$

Supongamos que la responsabilidad de un asegurador tiene un límite superior M, de modo que paga la cuantía total $\boldsymbol{Z}$ solamente cuando $\boldsymbol{Z} \leq M$ y la cuantía M si $\boldsymbol{Z}$ excede este límite. (Tal límite puede surgir, por ejemplo, de una limitación contractual o como resultado de haber cedido el exceso de dicho tope "M" a reaseguradores.) Por consiguiente, los siniestros truncados $\boldsymbol{Z}_M$ por los cuales es responsable la compañía aseguradora se definen como

$$\boldsymbol{Z}_M = \min(M,\boldsymbol{Z}) = \begin{cases} \mathbf{Z} & si\ \mathbf{Z} \leq M \\ M & si\ \mathbf{Z} > M \end{cases}$$

¿Cuál es el valor medio de $\boldsymbol{Z}_M$?

Mediante una aplicación directa de la fórmula (1.4.3), tenemos

$$E(\mathbf{Z}_M) = \int_0^{\infty} Z \cdot ae \quad \mathrm{d}Z + M \cdot p_M \tag{1.4.7}$$

donde p_M es la probabilidad

$$p_M = \mathrm{Pr}\,ob\{\mathbf{Z}_M = M\} = \mathrm{Pr}\,ob\{\mathbf{Z} \geq M\} = \int_M^{\infty} ae^{-aZ}\,\mathrm{d}Z = e^{-aM}. \tag{1.4.8}$$

Sustituyendo (1.4.8) en (1.4.7) y resolviendo la integral de la derecha obtenemos

$$E(\mathbf{Z}_M) = \frac{1}{a}\left[-aMe^{-aM} - e^{-aM} + 1\right] + Me^{-aM} = \frac{1}{a}\left[1 - e^{-aM}\right] \tag{1.4.9}$$

Nótese, como verificación, que E($\boldsymbol{Z}_M$)$\to 0$ cuando $M \to 0$ y E($\boldsymbol{Z}_M$)$\to 1/a$ = E($\boldsymbol{Z}$) cuando $M \to \infty$.

(c) Momentos y la función generatriz de momentos. El j-ésimo momento absoluto α_j de una variable aleatoria $\boldsymbol{X}$ se define del siguiente modo, utilizando la notación de (1.4.5)

$$\alpha_j = \mathrm{E}(\boldsymbol{X}^j) = \int_{-\infty}^{\infty} X^j \, \mathrm{dF}(X). \qquad (1.4.10)$$

Un cálculo directo de los momentos a menudo resulta difícil o imposible. Un método para estimar los momentos α_j y para facilitar muchas otras tareas, es el que proporciona la función generatriz de momentos (f.g.m.) M de la variable aleatoria $\boldsymbol{X}$, que, si se utiliza la notación (1.4.5) se define como

$$M(s) = \mathrm{E}(e^{sX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sX} \, \mathrm{dF}(X). \qquad (1.4.11)$$

De aquí en adelante se presupone la existencia y convergencia de las integrales y series. Esta condición técnica no causará problemas en lo que sigue (excepto en casos excepcionales tales como la distribución de Pareto (sección 3.3.7) a menos que sea truncada). Una condición suficiente para la f.g.m. $M(s)$ es que sea finita en algún entorno $|s| < \varepsilon$ del origen.

La f.g.m. tiene las propiedades importantes siguientes, que se deducen en libros de textos comunes y que damos aquí sin su demostración (véase el Ejercicio 1.4.2).

El momento α_j es igual a la j-ésima derivada de M evaluada al origen s=0, es decir

$$\alpha_j = M^{(j)}(0). \qquad (1.4.12)$$

Cuando es necesario indicar de qué variable aleatoria se trata, se utilizará la notación más larga $\alpha_j(\boldsymbol{X})$.

Los momentos aparecen como coeficientes en la serie de Taylor de la f.g.m.

$$M(s) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \frac{s^j}{j!}. \qquad (1.4.13)$$

La distribución de probabilidades de una variable aleatoria está unívocamente definida por su f.g.m. $M(s)$.

Si M_1 y M_2 son las f.g.m. de las variables aleatorias *independientes* $\boldsymbol{X}_1$ y $\boldsymbol{X}_2$, entonces la f.g.m. M de la suma $\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2$ se obtiene como el producto de las f.g.m. M_1 y M_2.

$$M(s) = M_1(s) \cdot M_2(s). \qquad (1.4.14)$$

La transformación lineal $\boldsymbol{Y} = a\boldsymbol{X} + b$ de una variable aleatoria $\boldsymbol{X}$ cambia a la f.g.m. como

$$M_Y(s) = e^{bs} M_X(as). \qquad (1.4.15)$$

EJEMPLO La f.g.m. de la distribución exponencial (1.4.6) es

$$M(s) = \int_0^{\infty} e^{sX} ae^{-aX}\, dX = \frac{a}{a-s} \quad (s < a)$$
$$= 1 + \frac{s}{a} + \left(\frac{s}{a}\right)^2 + \left(\frac{s}{a}\right)^3 + \ldots \qquad (1.4.16)$$

Si se comparan los coeficientes de esta serie con (1.4.13), los momentos se definen como

$$\alpha_j = \frac{j!}{a^j} \qquad (1.4.17)$$

(d) Cumulantes y la función generatriz de cumulantes. Una desventaja de los momentos absolutos α_j, aunque se definan convenientemente en términos de la f.g.m., es que no son aditivos para variables aleatorias independientes (excepto para la media α_1). Por lo tanto, es útil introducir, paralelamente con los momentos α, características primarias que tengan una propiedad de aditividad simple. El conjunto de características con esta propiedad se conoce como los **cumulantes**. Se obtienen mediante la **función generatriz de cumulantes** (f.g.c.) ψ de X, que se define como el logaritmo natural de la f.g.m. M de X

$$\psi(s) = \ln M(s). \qquad (1.4.18)$$

El cumulante k_j de X es igual a la j-ésima derivada de ψ estimada al origen (cf. 1.4.12)

$$\kappa_j = \psi^{(j)}(0). \qquad (1.4.19)$$

Cuando sea necesario indicar de qué variable aleatoria se trata, se utilizará la notación más larga $\kappa_j(X)$. Si ψ_1 y ψ_2 son las f.g.c. de variables aleatorias

independientes X_1 y X_2 ,la f.g.c. ψ de la suma X_1+X_2 se obtiene tomando logaritmos en (1.4.14)

$$\psi(s) = \psi_1(s) + \psi_2(s). \qquad (1.4.20)$$

Esto implica la aditividad de los cumulantes para variables independientes, es decir si X_1 y X_2 son independientes, entonces

$$\kappa_j(X_1+X_2) = \kappa_j(X_1) + \kappa_j(X_2) \qquad (1.4.21)$$

como se deduce inmediatamente a partir de (1.4.19) y (1.4.20).

Como la f.g.c. define unívocamente a la función generatriz de momentos, y la distribución de probabilidades de una variable aleatoria está unívocamente definida por su f.g.m., entonces la distribución de probabilidades de una variable aleatoria también está unívocamente determinada por su f.g.c.

Los cumulantes κ_j pueden expresarse en términos de los momentos α_j, y recíprocamente. Por ejemplo

$$\kappa_1 = \alpha_1$$
$$\kappa_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$$
$$\kappa_3 = \alpha_3 - 3.\alpha_1 . \alpha_2 + 2.\alpha^3_1$$
$$\kappa_4 = \alpha_4 - 4.\alpha_1 .\alpha_3 - 3.\alpha^2_2 + 12.\ \alpha^2_1 .\ \alpha_2 - 6.\alpha^4_1 . \qquad (1.4.22)$$

EJEMPLO La f.g.c. de una variable aleatoria con distribución normal (es decir con distribución $N(\mu,\sigma)$) con media μ y una desviación estándar σ y una f.d.

$$F(X)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2\right) \qquad (1.4.23)$$

es $\psi(s)=\mu.s+1/2.s^2.\sigma^2$ (Ejercicio 1.4.3). De donde,

$$\kappa_1=\mu, \quad \kappa_2=\sigma^2 \quad \text{y} \quad \kappa_j=0 \text{ para } j\geq 3 \qquad (1.4.24)$$

OBSERVACIÓN. En lugar de los cumulantes muchos libros de texto corrientes utilizan los momentos centrados $\mu_j=E((X-E(X))^j)$, lo que equivale a los cumulantes para j = 1, 2 y 3 pero no para valores de j más altos, por ejemplo, $\mu_4=\kappa_4+3.\kappa_2^2$. La aditividad y algunos otros rasgos implican que los cumulantes son preferibles a los momentos centrados.

(e) Las características básicas convencionales de una variable aleatoria X pueden enunciarse fácilmente en términos de los cumulantes

$E(X)=\kappa_1$ (media)

$Var(X)=\sigma^2=\kappa_2$ (varianza, siendo σ el desvío estándar)

$\gamma=\kappa_3/\sigma^3$ (asimetría)

$\gamma_2=\kappa_4/\sigma^4$ (curtosis) (1.4.25)

Como es bien sabido en el cálculo de probabilidades, la media da la posición del centro de la masa de probabilidades que se estudia y el desvío estándar (o la varianza) mide su dispersión. La asimetría es un indicador del desvío respecto de una figura completamente simétrica. La curtosis es el grado al cual la distribución se empina. Si γ_2 es negativa, entonces la densidad es más aguda (leptocúrtica), mientras que una γ_2 positiva indica una curva más plana en el máximo (platicúrtica).

La asimetría y la curtosis de una variable aleatoria con distribución normal son iguales a cero, como implica inmediatamente (1.4.24).

Debido a la aditividad de los cumulantes, la asimetría y la curtosis de la suma de variables aleatorias independientes pueden deducirse fácilmente de las características de los sumandos. Por ejemplo, si X e Y son independientes, entonces la asimetría de la suma $X+Y$ puede estimarse a partir de la fórmula (véanse Ejercicios 1.4.11 y 1.4.12).

$$\gamma_{x+y}=\frac{\sigma_x^3\gamma_x+\sigma_y^3\gamma_y}{\sigma_{x+y}^3}. \qquad (1.4.26)$$

(f) Convolución. Si X_1 y X_2 son dos variables aleatorias independientes, por ejemplo el importe acumulado de siniestros resultante de dos líneas comerciales independientes, con f.d. F_1 y F_2, entonces la f.d. de su suma $X=X_1+X_2$ se obtiene a partir de la fórmula de **convolución**

$$F(X)=F_1*F_2(x)=\int_{-\infty}^{\infty}F_1(X-X_2)dF_2(X_2). \qquad (1.4.27)$$

En el caso particular en que al menos uno de los sumandos, por ejemplo X_2, tiene una distribución continua, y f_2 simboliza su densidad, tenemos

$$F(X)=F_1*F_2(x)=\int_{-\infty}^{\infty}F_1(X-X_2)f_2(X_2)dX_2 \qquad (1.4.28)$$

por lo que la suma X tiene una distribución continua.

(g) Condicionalidad. Hay aplicaciones importantes donde la f.d. de una variable X puede depender de algún factor o fenómeno controlante. Por ejemplo el cargo por siniestros en los seguros contra incendio a menudo depende de las condiciones climáticas. Entonces se dice que $\boldsymbol{X}$ está condicionado por este factor ambiental. Si éste está descripto por una variable $\boldsymbol{Y}$ (por ejemplo la temperatura promedio durante el período de observación) y las dependencias pertinentes pueden cuantificarse, es decir, se conoce la distribución conjunta de $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$, entonces puede construirse la f.d. condicional de la variable $\boldsymbol{X}$.

La f.d. **condicional** de $\boldsymbol{X}$ sujeta a $\boldsymbol{Y}$ que tiene el valor fijo Y se escribe

$$F(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{Y} = Y) = \mathrm{Prob}\{\boldsymbol{X} \leq X \mid \boldsymbol{Y} = Y\}. \tag{1.4.29}$$

La esperanza condicional de $\boldsymbol{X}$, sujeta a que $\boldsymbol{Y}$ sea igual a Y, se escribe

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{Y} = Y) = \int_{-\infty}^{\infty} X\,\mathrm{d}F(X|\boldsymbol{Y} = Y). \tag{1.4.30}$$

Cuando $\boldsymbol{X}$ no depende de $\boldsymbol{Y}$, esta esperanza naturalmente es igual a la esperanza (incondicional) $\mathrm{E}(\boldsymbol{X})$ para cualquier valor Y de $\boldsymbol{Y}$, mientras que si $\boldsymbol{X}$ sí depende de $\boldsymbol{Y}$, $\mathrm{E}(\boldsymbol{X}|Y = Y)$ toma valores diferentes para Y diferentes. Si el valor Y de la variable $\boldsymbol{Y}$ no es fijo, sino aleatorio, entonces la esperanza condicional es una **variable aleatoria**, que se escribe

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{Y}). \tag{1.4.31}$$

Si $\boldsymbol{Y}$ es fija e igual a Y, el valor de esta variable es igual a (1.4.30).

Aquí daremos algunas fórmulas básicas de esperanzas condicionales, que serán suficientes para nuestros propósitos. Para conveniencia de los lectores que están acostumbrados a expresar esperanzas condicionales como integrales y sumas, en los casos continuo y discreto respectivamente, estas expresiones tradicionales para las esperanzas condicionales se darán paralelamente en partes del desarrollo posterior.

Una fórmula básica útil para las esperanzas condicionales describe su **iteratividad**

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{X}) = \mathrm{E}(\mathrm{E}(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{Y})), \tag{1.4.32}$$

que significa que la esperanza de una variable aleatoria puede estimarse tomando primero la esperanza con respecto a la variable condicionante. En el caso en que la variable condicionante $\boldsymbol{Y}$ es discreta, la fórmula puede reducirse a la forma elemental a partir de

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{X}) = \sum_i \mathrm{Prob}\{\boldsymbol{Y} = Y_i\} \cdot \mathbf{E}(\boldsymbol{X} \mid \boldsymbol{Y} = Y_i), \tag{1.4.33}$$

donde Y_i pasa por todos los valores posibles de $\boldsymbol{Y}$. La serie correspondiente para la variable $\boldsymbol{Y}$ de distribución continua será

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\boldsymbol{X}) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\left[\int_{-\infty}^{\infty} X\mathrm{d}F(\mathrm{X} \mid \boldsymbol{Y} = Y)\right]\mathrm{d}Y \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(Y)\mathbf{E}(\boldsymbol{X} \mid \boldsymbol{Y} = Y)\,\mathrm{d}Y \end{aligned} \tag{1.4.34}$$

donde g es la densidad de $\boldsymbol{Y}$.

EJEMPLO Consideremos un juego en el que primero se tira un dado una vez, siendo $\boldsymbol{k}$ el resultado, y luego se tiran tantos dados como indique $\boldsymbol{k}$, lo que da como resultado un puntaje $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_1 + ... + \boldsymbol{X}_k$. ¿Cuál es el valor esperado de la suma de los puntajes?

La fórmula (1.4.32) puede aplicarse directamente, colocando $\boldsymbol{k}$ ahora en el lugar de $\boldsymbol{Y}$. Dado que

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{k} = k) = \mathrm{E}(\boldsymbol{X}_1) + ... + \mathrm{E}(\boldsymbol{X}_k) = k.\mathrm{E}(\boldsymbol{X}_i) = k \,.\, 3{,}5,$$

o $\mathrm{E}(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{k} \,.\, 3{,}5$, entonces:

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{X}) = \mathrm{E}(\mathrm{E}(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{k})) = \mathrm{E}(\boldsymbol{k}\, 3{,}5) = 3{,}5 \,.\, \mathrm{E}(\boldsymbol{k}) = (3{,}5)^2 = 12{,}25.$$

Más adelante, en el Capítulo 3, encontraremos una estricta analogía entre la estructura del ejemplo dado arriba y el modelo de los siniestros acumulados. El resultado $\boldsymbol{k}$ cumplirá el papel del número de siniestros, los $\boldsymbol{X}_i$ serán las cuantías individuales de los siniestros y $\boldsymbol{X}$ será el importe de los siniestros acumulados.

Además de la fórmula (1.4.32), las tres reglas siguientes son suficientes para manejar el cálculo de las esperanzas condicionales para lo que se necesita en este libro. En primer lugar

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{Y}) \equiv \mathrm{E}(\boldsymbol{X}) \text{ si } \boldsymbol{X} \text{ e } \boldsymbol{Y} \text{ son independientes,} \tag{1.4.35}$$

es decir, si se sabe que el valor de $\boldsymbol{Y}$ no da información adicional con respecto a $\boldsymbol{X}$, la esperanza condicional de $\boldsymbol{X}$ es igual a la esperanza incondicional $\mathrm{E}(\boldsymbol{X})$. En segundo lugar, la esperanza condicional, tal como la incondicional, es naturalmente aditiva

$$\mathrm{E}(a \cdot \boldsymbol{X}_1 + b \cdot \boldsymbol{X}_1|\boldsymbol{Y}) = a \cdot \mathrm{E}(\boldsymbol{X}_1|\boldsymbol{Y}) + b \cdot \mathrm{E}(\boldsymbol{X}_2|\boldsymbol{Y}). \tag{1.4.36}$$

La tercera propiedad dice que todo factor unívocamente definido por la variable condicionante $\boldsymbol{Y}$ puede tratarse como constante con respecto a la esperanza condicional

$$\mathrm{E}(g(\boldsymbol{Y}) \cdot \boldsymbol{X}|\boldsymbol{Y}) = g(\boldsymbol{Y}) \cdot \mathrm{E}(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{Y}). \tag{1.4.37}$$

Esto es obvio, dado que bajo la condición de que se sepa que el valor de $\boldsymbol{Y}$ sea igual a Y, $g(\boldsymbol{Y})$ tiene el valor constante $g(Y)$.

La varianza de una variable aleatoria también puede estimarse a menudo fácilmente utilizando los condicionantes, mediante la fórmula

$$\mathrm{Var}(\boldsymbol{X}) = \mathrm{Var}[\mathrm{E}(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{Y})] + \mathrm{E}[\mathrm{Var}(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{Y})], \tag{1.4.38}$$

donde la $\mathrm{Var}(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{Y})$ es la varianza condicional $\mathrm{E}\{[\boldsymbol{X}-\mathrm{E}(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{Y})]^2|\boldsymbol{Y}\} = \mathrm{E}(\boldsymbol{X}^2|\boldsymbol{Y}) - \mathrm{E}(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{Y})^2$ (véase el Ejercicio 1.4.6).

La covarianza $\mathrm{Cov}(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2) = \mathrm{E}[(\boldsymbol{X}_1 - \mathrm{E}\boldsymbol{X}_1) \cdot (\boldsymbol{X}_2 - \mathrm{E}\boldsymbol{X}_2)]$ de las variables aleatorias $\boldsymbol{X}_1$ y $\boldsymbol{X}_2$ tiene una representación en términos de covarianza condicional análoga a (1.4.38); Ejercicio 1.4.7.

Inmediatamente surge de (1.4.32) que la probabilidad condicional, la f.d. condicional y la f.g.m. satisfacen las fórmulas correspondientes

$$\mathrm{Prob}(A) = \mathrm{E}(\mathrm{Prob}(A|\boldsymbol{Y})) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Prob}(A|\boldsymbol{Y} = Y)dG(Y)$$

$$F(x) = E(F(x|\boldsymbol{Y})) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x|\boldsymbol{Y} = Y)dG(Y) \tag{1.4.39}$$

$$M(s) = E(M(s|\boldsymbol{Y})) = \int_{-\infty}^{\infty} M(s|\boldsymbol{Y} = Y)dG(Y),$$

donde G es la f.d. de $\boldsymbol{Y}$ (Ejercicio 1.4.8).

Todas las fórmulas para las cuantías condicionales siguen siendo válidas si la variable de condicionamiento es reemplazada por varias variables de condicionamiento.

Ejercicio 1.4.1. Calcular el desvío estándar de la variable aleatoria (truncada) Z_M del ejemplo en la sección 1.4(b).

Ejercicio 1.4.2. Deducir las ecuaciones (1.4.12),..., (1.4.15).

Ejercicio 1.4.3. Deducir la f.g.c. de la distribución normal.

Ejercicio 1.4.4. Calcular los cuatro cumulantes inferiores de la distribución exponencial (1.4.6) a) utilizando las fórmulas (1.4.22) y b) utilizando la f.g.c.

Ejercicio 1.4.5. Demostrar que los cumulantes κ_j (j = 1,2,3,4) satisfacen las fórmulas (1.4.22).

Ejercicio 1.4.6. Demostrar (1.4.38).

Ejercicio 1.4.7. Demostrar la fórmula

$$\mathrm{Cov}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \mathrm{Cov}[\mathrm{E}(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{Z}),\mathrm{E}(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{Z})] + \mathrm{E}[\mathrm{Cov}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{Z})] \tag{1.4.40}$$

para covarianzas condicionales.

Ejercicio 1.4.8. Demostrar las reglas (1.4.39).

Ejercicio 1.4.9. Demostrar que una transformación lineal $a\boldsymbol{X}+b$ (a>0) no cambia la asimetría de una variable aleatoria $\boldsymbol{X}$. ¿Qué sucede si a es negativa?

Ejercicio 1.4.10. Demostrar que una transformación lineal $a\boldsymbol{X}+b$ (a≠0) no cambia la curtosis de una variable aleatoria $\boldsymbol{X}$.

Ejercicio 1.4.11. Obtener la fórmula (1.4.26) y una fórmula correspondiente para la curtosis.

Ejercicio 1.4.12. Encontrar una fórmula para la asimetría y la curtosis de una suma de k variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas. ¿Cuál es su límite para $k\to\infty$?