Contratos de Opción: Martingalas en tiempo continuo

R. Darío Bacchini
Actuario (UBA), Magíster en Finanzas (UdeSA)

Contenidos

Contratos de Opción: Martingalas.

OBJETIVO:
Comprender el precio de mercado del riesgo y sus implicancias en la definición de martingalas (procesos sin tendencia).

Temas:

- Determinación del precio de riesgo de mercado
- Cambio de medida
- Martingalas – elección de medida de riesgo
- Cambio de numerario

Martingalas

Precio de riesgo de mercado

Cuando analizamos las diferentes opciones para valuación, vimos que todos los instrumentos que tenían el mismo factor de riesgo compartían el precio de riesgo de mercado λ

$$\lambda = \frac{u_S - r}{\sigma_S}$$

$$\mu_c = \lambda \cdot \sigma_c + r$$

Tasa de descuento buscada

Calculamos en el paso anterior

Deberíamos calcular la volatilidad del derivado

¿Cómo se demuestra?

Consideramos un activo θ que sigue un proceso geométrico browniano y dos derivados que lo tienen como factor de riesgo: f1 y f2

$$\frac{d\theta}{\theta} = m \cdot dt + s \cdot dz$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{df_1}{f_1} &= \mu_1 \cdot dt + \sigma_1 \cdot dz \\ \frac{df_2}{f_2} &= \mu_2 \cdot dt + \sigma_2 \cdot dz \end{aligned}\right\}$$

Por aplicación de Lema de Itô son un proceso de Itô

UBA FCE
Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Económicas

Podemos armar una cartera libre de riesgo con los derivados f1 y f2

$$\frac{df_1}{f_1} = \mu_1 \cdot dt + \sigma_1 \cdot dz \qquad \frac{df_2}{f_2} = \mu_2 \cdot dt + \sigma_2 \cdot dz$$

Para que sea libre de riesgo…

$$\#_1 \cdot \sigma_1 \cdot f_1 + \#_2 \cdot \sigma_2 \cdot f_2 = 0$$

$$\#_1 \cdot \sigma_1 \cdot f_1 = -\#_2 \cdot \sigma_2 \cdot f_2 \quad \boxed{\rightarrow \#_1 = \sigma_2 f_2 \;\; ; \; \#_2 = -\sigma_1 f_1}$$

Además, si es libre de riesgo…

$$d\pi = r \cdot \pi \cdot dt \qquad (1)$$

2

$$d\pi = (\sigma_2 f_2) \cdot f_1 \cdot \frac{df_1}{f_1} + (-\sigma_1 f_1) \cdot f_2 \cdot \frac{df_2}{f_2}$$

$$d\pi = (\mu_1 \cdot \sigma_2 \cdot f_2 \cdot f_1 - \sigma_1 \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot \mu_2) \cdot dt + (\sigma_2 \cdot f_2 \cdot f_1 \cdot \sigma_1 - \sigma_2 \cdot f_2 \cdot f_1 \cdot \sigma_1) \cdot dz$$

$$d\pi = (\mu_1 \cdot \sigma_2 \cdot f_2 \cdot f_1 - \sigma_1 \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot \mu_2) \cdot dt$$

$$d\pi = (\mu_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_1 \cdot \mu_2) \cdot f_2 \cdot f_1 \cdot dt$$

1 = 2

1 = 2

$$(\mu_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_1 \cdot \mu_2) \cdot f_2 \cdot f_1 = r \cdot \pi$$

$$(\mu_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_1 \cdot \mu_2) \cdot f_2 \cdot f_1 = r \cdot \big((\sigma_2 f_2) \cdot f_1 + (-\sigma_1 f_1) \cdot f_2\big)$$

$$(\mu_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_1 \cdot \mu_2) \cdot f_2 \cdot f_1 = r \cdot f_2 \cdot f_1 \cdot (\sigma_2 - \sigma_1)$$

$$(\mu_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_1 \cdot \mu_2) = r \cdot (\sigma_2 - \sigma_1)$$

$$\mu_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_1 \cdot \mu_2 - r \cdot \sigma_2 + r \cdot \sigma_1 = 0$$

$$(\mu_1 - r) \cdot \sigma_2 - (\mu_2 - r) \cdot \sigma_1 = 0$$

$$(\mu_1 - r) \cdot \sigma_2 = (\mu_2 - r) \cdot \sigma_1$$

$$\boxed{\frac{(\mu_1 - r)}{\sigma_1} = \frac{(\mu_2 - r)}{\sigma_2}}$$

Un cambio de medida (modificación del precio de riesgo de mercado) modifica el **componente de tendencia de la variable, pero no su volatilidad**

Aplicación

¿Cómo se modifica la tendencia cuando trabajamos con activos que tienen un rendimiento “q”? (Ejercicio 27.7)

Consideremos un activo f que tiene un rendimiento q – podemos considerar al proceso f* que se reinvierte a sí mismo

$$df = \mu \cdot f \cdot dt + \sigma \cdot f \cdot dt$$

$$f^* = f \cdot e^{qt}$$

Por Ito

$$df^* = (\mu + q) \cdot f^* \cdot dt + \sigma \cdot f^* \cdot dz$$

Como el riesgo depende del mismo subyacente:

$$\frac{\mu^* - r}{\sigma} = \frac{\mu - r}{\sigma} \rightarrow \mu + q - r = \lambda \cdot \sigma$$

Martingalas y cambio de numerario

Definimos a las martingalas como procesos sin tendencia

$$\theta \; es \; martingala \; => \quad d\theta = \sigma \cdot dz$$

Podemos encontrar una medida de probabilidad que haga que determinado proceso, medido en un numerario específico, constituya una martingala.

UBA FCE
Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Económicas

Medida de martingala equivalente

Si tenemos dos activos (f y g) que dependen del mismo factor de riesgo (θ) y que no generan ingresos durante el tiempo en análisis es posible encontrar una medida de riesgo que haga que el proceso f / g constituya una martingala.

Esa medida se denomina **medida de martingala equivalente.**

¿Cuál es esa medida?

$$\lambda = \sigma_g$$

Demostración

$$df = \mu_f \cdot f \cdot dt + \sigma_f \cdot f \cdot dz$$

$$dg = \mu_g \cdot g \cdot dt + \sigma_g \cdot g \cdot dz$$

Si consideramos un cambio de medida tal que $\lambda = \sigma_g$

$$df = (\lambda \cdot \sigma_f + r) \cdot f \cdot dt + \sigma_f \cdot f \cdot dz = (\sigma_g \cdot \sigma_f + r) \cdot f \cdot dt + \sigma_f \cdot f \cdot dz$$

$$dg = (\lambda \cdot \sigma_g + r) \cdot g \cdot dt + \sigma_g \cdot g \cdot dz = (\sigma_g \cdot \sigma_g + r) \cdot g \cdot dt + \sigma_g \cdot g \cdot dz$$

Y calculamos el comportamiento de los logaritmos, a fin de poder entender el proceso que sigue f / g

$$dln(f) = (r + \sigma_g \cdot \sigma_f - \sigma_f^2/2) \cdot dt + \sigma_f \cdot dz$$

$$dln(g) = (r + \sigma_g^2/2) \cdot dt + \sigma_g \cdot dz$$

$$dln(f) - dln(g) = d(\ln(f) - \ln(g)) = dln\left(\frac{f}{g}\right)$$

$$= \left(r + \sigma_g \cdot \sigma_f - \frac{\sigma_f^2}{2} - r - \sigma_g^2/2\right) \cdot dt + (\sigma_f - \sigma_g) \cdot dz$$

$$dln\left(\frac{f}{g}\right) = \left(\sigma_g \cdot \sigma_f - \frac{\sigma_f^2}{2} - \sigma_g^2/2\right) \cdot dt + (\sigma_f - \sigma_g) \cdot dz$$

Podemos aplicar nuevamente Lema de Ito

$$x = ln\left(\frac{f}{g}\right)$$

$$dx = \left(\sigma_g \cdot \sigma_f - \frac{\sigma_f^2}{2} - \sigma_g^2/2\right) \cdot dt + (\sigma_f - \sigma_g) \cdot dz$$

$$G(x) = e^x$$

$$dG(x) = \left(e^x \cdot \left(\sigma_g \cdot \sigma_f - \frac{\sigma_f^2}{2} - \frac{\sigma_g^2}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot e^x \cdot (\sigma_f - \sigma_g)^2\right) \cdot dt + (\sigma_f - \sigma_g) \cdot e^x \cdot dz$$

$$dG(x) = \left(e^x \cdot \left(\sigma_g \cdot \sigma_f - \frac{\sigma_f^2}{2} - \frac{\sigma_g^2}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot e^x \cdot (\sigma_f^2 + \sigma_g^2 - 2 \cdot \sigma_g \cdot \sigma_f)\right) \cdot dt + (\sigma_f - \sigma_g) \cdot e^x \cdot dz$$

$$dG(x) = (\sigma_f - \sigma_g) \cdot e^x \cdot dz$$

Mostrando que el proceso es una martingala

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = (\sigma_f - \sigma_g) \cdot \left(\frac{f}{g}\right) \cdot dz$$

Aplicaciones

Al tener un proceso que sea forward risk neutral respecto a un numerario g , podemos escribir:

$$\frac{f_0}{g_0} = E_g\left(\frac{f_T}{g_T}\right)$$

$$\boxed{f_0 = g_0 \cdot E_g\left(\frac{f_T}{g_T}\right)}$$

Ejemplos:

- Money market
- Bono cupón cero como numerario
- Anualidades
- Tasas de interés

Efecto de un cambio de numerario

Cuando nos movemos de un mundo que es *forward risk neutral* respecto a un numerario g hacia uno que es *forward risk neutral* respecto a un nuevo numerario h vemos que:

- El componente de volatilidad no se modifica
- El componente de tendencia del proceso se modifica en el siguiente factor:

$$\alpha_v = \rho_{v,w} \cdot \sigma_v \cdot \sigma_w$$

$$v = proceso\ original$$

$$w = \frac{h}{g}$$

27.10. The variable S is an investment asset providing income at rate q measured in currency A. It follows the process

$$dS = \mu_S S\,dt + \sigma_S S\,dz$$

in the real world. Defining new variables as necessary, give the process followed by S, and the corresponding market price of risk, in:

(a) A world that is the traditional risk-neutral world for currency A
(b) A world that is the traditional risk-neutral world for currency B
(c) A world that is forward risk neutral with respect to a zero-coupon currency A bond maturing at time T

Caso A

$$\frac{\mu + q - r}{\sigma} = 0 \rightarrow \mu = r - q$$

$$dS = (r - q) \cdot S \cdot dt + \sigma_S \cdot S \cdot dz$$

Caso B

$$Q = \frac{B}{A}$$

$$dS = \left(r - q + \rho_{Q,S} \cdot \sigma_Q \cdot \sigma_S\right) \cdot S \cdot dt + \sigma_S \cdot S \cdot dz$$

Caso C

$$\frac{\mu + q - r}{\sigma_S} = \sigma_B$$

$$\mu = \sigma_B \cdot \sigma_S + r - q$$

$$dS = (r - q + \sigma_B \cdot \sigma_S) \cdot S \cdot dt + \sigma_S \cdot S \cdot dz$$

¿Dudas?
Por favor remitirlas al campus virtual de la materia.