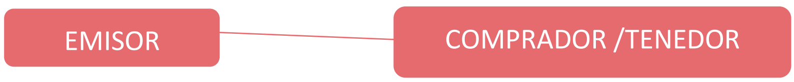
BASES ACTUARIALES DE LAS INVERSIONES Y FINANCIACIONES

Bonos

Definición

Instrumento /Titulo de deuda a través del cual el emisor puede obtener financiamiento en el mercado de capitales. Como emisor del bono lo que hago es salir a buscar financiamiento al mercado financiero.

Por lo general se entiende al bono como un instrumento emitido por una institución gubernamental o por el estado. Cuando los emisores son empresas, hablamos de obligaciones negociables (pero conceptualmente es lo mismo).



Emisor: Quien emite el bono

Tenedor: Quien lo compra

El mercado de bonos tiene dos momentos:

Mercado primario: Cuando se hace la emisión del bono, el emisor sale a buscar el fondo al mercado de capitales. Luego, los inversores le prestarán dinero bajo determinadas condiciones.

Mercado Secundario: Una vez emitido, el tenedor puede venderlo (en funcion al precio que se determina de la oferta y demanda). En este escenario, se hace intercambio entre los tenedores. Y el emisor no forma parte de esta transacción.

Cuando vendo el bono (y pido plata) voy a dejar en claro ciertos aspectos. Se establecen las condiciones:

Cuanta plata necesito, en qué momento te voy a pagar y la estructura de pago.

Entonces hablaremos de las condiciones de emisión.

Condiciones de Emisión

- Valor nominal
- Condiciones de Amortizacion: De qué manera te voy a ir devolviendo el capital (en qué momento). Y cómo será la estructura de devolución de ese dinero.
- Tasa de Interés: cual es el monto de la tasa de interes y cada cuánto.

Hay dos tipos:

Tasa cero y forward (relaciona el precio del bono con el flujo de fondos)

Tasa cero: Mirando el precio de los bonos puedo ver la tasa que está implícita en el precio de los bonos. La tasa cero la obtendré de un bono cupón cero, es decir, no amorticé en el medio y no pagué interes. Solo obtuve una tasa de descuento entre el momento que pago y el capital final.

> Bono que no tiene pago periódico de intereses, sino que estos son abonados en su totalidad en el momento de su amortización. Suele ser emitido al descuento, es decir, que los intereses que devenga se descuentan del precio de adquisición.

Tasa Forward: Mirando bonos con distintos vencimientos puedo mirar la tasa forward. La tasa implícita para un determinado momento futuro del tiempo. La obtengo de comparar distintos bonos.

En el momento de la emisión del bono, en las condiciones de emisión, la información a señalar será:

En la emisión voy a decir cuánto es lo que voy a pagar. Y básicamente, cuando especifiqué cuánto voy a pagar y también definí la tasa (fija o variable), tendré dos opciones:

--> Te pago una tasa de "x" % (trimestral, semestral, etc.)

--> O te voy a pagar una tasa igual a una tasa de referencia más un *spred* (atada a un índice de referencia)

> Financiamiento a tasa fija significa que la tasa de interés de su préstamo no cambiará durante el plazo del préstamo. Financiamiento a tasa variable es cuando la tasa de interés de su préstamo puede cambiar en base a la tasa preferencial de mercado u otra tasa llamada "índice".

TIR: Miraré, en función al FF que espero, cual es el rendimiento promedio que voy a tener si mantengo ese bono hasta el vencimiento.

La tasa forward, la tasa cero, y TIR son métricas de observaciones que van surgiendo del mercado y aparece de entender la relación entre el precio del bono y su FF.

En las condiciones de emisión no aparecen estas últimas. Solo aparecerá cuánto se pagará por el bono y si la tasa será fija o variable.

Ejemplo Morixe:

Amortización, Tasa de interes, tasa de referencia, margen de corte, etc.

Relación entre emisor y tenedor entonces tenemos como condiciones mínimas:

- Valor nominal,
- Condiciones de amortizacion,
- Tasa interes que paga

Condiciones de Emisión diferenciables

Luego de las condiciones iniciales, se pueden sumar cláusulas que van a influir en el precio del bono:

- Reverse floaters: Funciona al revés de una tasa variables. Cuando tenés un bono de tasa variable cuanto más incrementa la tasa, más pago de interés- Lo reverse floaters, ante un incremento de tasa se paga menos de cupón.
- Respaldo de activos: Bonos cuyos pagos depende del valor de un determinado activo
- Catástrofe: el pago de ese bono depende de la ocurrencia de un determinado evento de mucho impacto y poca roba de ocurrencia.
- Bonos indexados: No es únicamente que tiene una tasa variable, sino que lo que se indexa es el capital (es parecido a un plazo fijo uva). Tengo una unidad de referencia que te incrementa no solo la tasa de interes sino el capital. Una indexación del nominal y una indexación, también, de la tasa de interes.

Dentro de las condiciones de emisión diferenciables tendremos clausulas particulares que le darán derechos al emisor o al tenedor del bono.

- Collable Bonds: Bonos en donde el que lo emite, en las condiciones de emisión tiene una cláusula que le permite cancelar la deuda antes del vencimiento. El tenedor del bono puede cancelar de manera anticipada. El emisor puede hacer una cancelación anticipada, lo hace cuando el costo de cancelar es menor que la tasa de interes que debe pagar si no la cancela.

  ¿En qué circunstancias puede darse? Por ejemplo, en un proceso inflacionario, donde fijes una tasa de interés fija por encima del monto de inflación (es decir, la inflación fue menor, el rendimiento es mayor y conviene cancela).

  Si existe una tasa fija asumiendo una inflación de la que mayormente fue. La tasa estan siendo en el mercado mucho más bajas de las que estas pagando. En un contexto de baja de tasas en el mercado (donde quede atado a una tasa fija) me conviene cancelar y volver a tomar ese préstamo a tasas más chicas. Como emisor elegiré eso cuando veo que estoy pagando una tasa alta en relación con la tasa que se está pagando en el mercado.

Bonos con Clausula collable:

Ejemplo donde un bono tienen la cláusula collable y otro no. Pagaré más caro por un bono donde no existe la cláusula ya que le otorga al emisor un derecho mas

Bonos Convertibles: viene del lado del tenedor. Lo que también se especifica en el contrato y se permite hacer es que el tenedor decida pasar parte de la deuda a capital o acciones.

Puttable Bond: es el tenedor del bono el que le puede exigir que le pague al emisor (bajo determinadas condiciones) la deuda antes. Todo previamente estipulado. La decisión de adelantar el pago viene del lado del tenedor.

Medidas de Rendimiento

¿Cuál es el rendimiento que obtengo de una inversión en un bono?

El rendimiento va a calcularse ex post en funcion de hasta cuando mantenga el bono de mi cartera.

Hasta que no se ejecute y yo salga de esa inversión (en el caso de que una acción aumente), no existe rendimiento. El rendimiento será la diferencia entre el precio que lo compré y el precio que lo vendí + los intereses.

$$Rend = \frac{Pcio\,Vta - PcioCompra + Interes}{PcioCompra}$$

Ahora, ex - ante, suelen calcularse distintas medidas que dan cuenta del rendimiento de la inversión.

Existen distintas medidas de rendimiento.

Tasa de cupón:

La tasa cupón es el interés que el inversor recibirá periódicamente por haber comprado dicho bono y es un porcentaje fijo establecido de forma contractual expresado en el prospecto de emisión del título.

Indica el flujo a recibir de intereses en cada momento del tiempo. Puede ser una tasa fija o una tasa variable de referencia. Normalmente se expresa como TNA con capitalización igual a la periodicidad del pago del cupón. Cuanto voy a recibir por interés en cada momento del tiempo en función del valor nominal.

Se expresa como cuanto voy a recibir de intereses en el año divido su valor nominal.

Siempre, la tasa de cupón se suele expresar como tasa nominal anual con capitalización igual a la periodicidad de pago del cupón.

$$Tasa\ cupón = \frac{\sum_{anual} cupón}{VN}$$

La tasa de cupón tiene lógica desde el punto de vista (de cuanto voy a recibir de intereses respecto al nominal) al momento de la emisión o al momento de las condiciones de emisión. Si luego entra al mercado secundario de bonos, en este pago un determinado precio por el bono. Como tenedor de bono, si realizo la operación en el mercado secundario, probablemente la plata que ponga no sea igual al valor nominal. Comienza a hablarse son solo como tasa de cupón sino al *current yield*.

Current Yield:

Es una medida de rendimiento que relaciona el cupón anual con el precio de mercado del bono.

Cuanto cobro del cupón en relación con el valor que pagué y no ya al valor nominal.

Indica el flujo a recibir de intereses en relación con el precio actual del bono.

$$Current\ Yield = \frac{\sum_{anual} cupón}{VN}$$

Yield to Maturity.

Tasa Interna de Retorno (TIR) o yield to matuirity (YTM)

Es la tasa de rendimiento que iguala el valor presente de los flujos de fondos (intereses + amortización) al precio de mercado del bono (o la inversión inicial). A diferencia de la current yield, la TIR no sólo tiene en cuenta el cupón corriente sino también cualquier ganancia o pérdida de capital que obtiene el inversor manteniendo el bono hasta su vencimiento.

La "Tasa Interna de Retorno" calculada al momento de realizar la inversión será igual al rendimiento final de la inversión siempre y cuando se cumplan dos condiciones:

1. que se mantenga el bono en cartera hasta su vencimiento
2. que se reinviertan todos los cupones cobrados a la misma tasa interna de retorno del momento de la compra.

Supone que la inversión mantiene el bono hasta el vencimiento siempre puedo reinvertirlo las inversiones similares.

Asimilable a la TIR del bono. Supone que el inversor mantiene el bono hasta el vencimiento y puede reinvertir los fondos a tasas similares. Es la tasa de interes que hace que el valor teórico del bono coincida con su precio.

Lo que supone es, cuál es el rendimiento promedio que obtendré si mantengo el bono hasta el vencimiento. El valor actual de Flujos de Fondos descontados a esa TIR, coincide con el precio que estoy pagando. Veo la tasa que hace que mi valor actual neto de mi inversión sea cero.

$$Precio = \sum_{t=1}^{n} FF_i . (1 + TIIR)^{-t}$$

Estos tres rendimientos que puedo usar en la comparativa de instrumentos para situar o entender que está pasando con determinados instrumentos y compararlas. No me dicen cuanto efectivamente cual va a rendir. El rendimiento lo obtengo expost.

Valuación

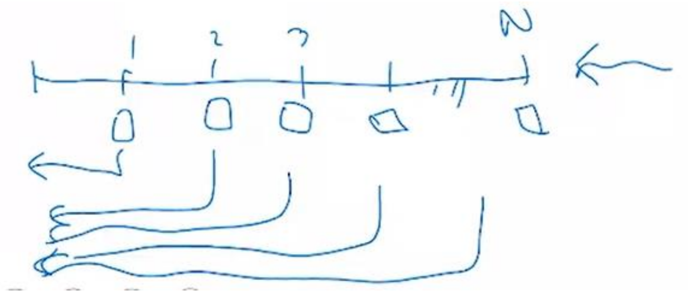
Cuando valuamos un bono buscamos el valor actual del FF.

En ese valor actual, el flujo de fondos debe descontarse a una tasa que representativa al riesgo de este.

El precio teórico de un bono se corresponde con el valor actual del FF.

Busco entender esos fondos en funcion a su valor actual. Cuando se evalúa de manera teórica el bono.

Tener en cuenta que, cuando se habla del precio, lo hago de manera teórica. Luego tengo un mercado donde se negocia (mercado secundario). Puedo pensar que en la cabeza de la persona que invierta está el valor actual de FF pero el precio se terminará determinando por oferta y demanda. Ese será el precio que el bono va a tener. Si miro el valor teórico de ese bono, lo que hago es flujo de fondos proyectados y lo descuento a una tasa (que represente el riesgo de inversión).



Se deberá entender que tasa uso y que información miro para calcular esa tasa.

En Bonos a tasa fija, se conoce el momento y el monto a pagar por el mismo:

$$B_{TF} = \sum_{t=1}^{n} FF_T . FD_t$$

$$FD_t: Factor\ de\ descuento$$

Se denomina de esta manera para que sea genérico. Si utilizo una tasa efectiva el factor de descuento será:

$$FD_t: \frac{1}{(1+i)^t}$$

Si la tasa es continua, el factor de descuento será:

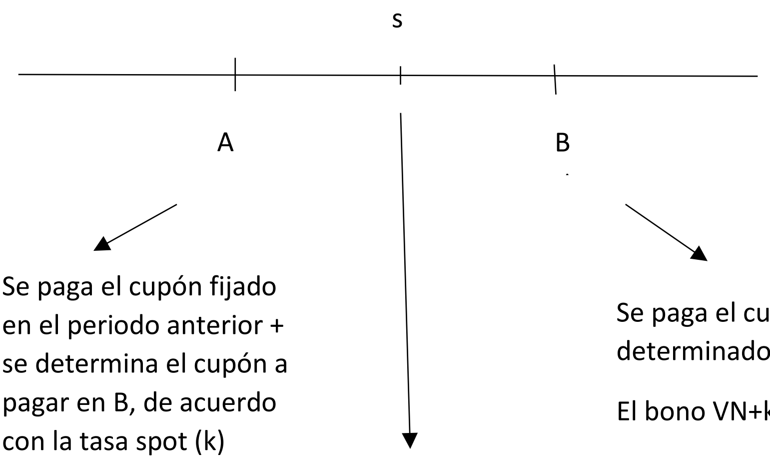
$$FD_t: E^{i.t}$$

En los Bonos tasa variable, la tasa a pagar está atada a la evolución de una tasa de referencia que es representativa del riesgo de ese bono. Usualmente, a la fecha de pago de cupón se pacta una tasa a cobrar por el periodo siguiente.

En consecuencia, para los bonos de tasa variable, el valor al momento de pago de cupón y recalculo de intereses es el valor nominal.

Los flujos de fondos futuros capitalizan y descuentan a la misma tasa

Entonces, en el caso de tasa variable tenemos la opción de proyectar ese flujo de fondos o existen casos en donde en un determinado momento del tiempo, al momento pago de cupón determino cuál es el valor del cupón del periodo siguiente



$$B_{TV} = (VN + k).FD_{s,B}$$

Si tomo el momento s (a mitad de ambos periodos), las tasas pudieron haber cambiado entonces cuando yo descuente el valor que voy a cobrar, puede que la tasa ya no sea la misma (tasa de capitalización ¡= tasa de descuento) entonces, el valor de tasa variable en algún momento intermedio del tiempo va a hacer:

-Lo que yo ya se que va a valer el bono al momento del pago del próximo cupón (valor nominal + lo que establecí que iba a cobrar) descontado a la fecha que quiera evaluarlo y aquí utilizaré las tasas que estén vigentes a ese momento.

Este fujo de fondos, no es un FF cierto, sino que depende de la evolución de las tasas. Si tuviésemos que evaluar ese bono a tasa variable, podríamos estimar, en función a la curva de tasas, cuál es el FF que vamos a tener.

Se estima la tasa que se va a pagar en cada uno de los periodos. Los bonos a tasa variable establecen momentos de pago de cupón en donde al momento de pago de cupón se define también cuál es la tasa que se va a pagar en el próximo periodo.

Cuando tenemos unos bonos a tasa variable, siempre que nosotros estamos en el momento de pago de cupón, lo que sucede es que al momento del pago del cupón el bono vale el valor nominal. Porque ya cobré mi cupón y además al cupón que voy a cobrar el periodo siguiente se va a determinar con la misma tasa que esta vigente hoy. Por lo tanto, capitalizo y descuento a la misma tasa.

Si estoy en un momento "s", un momento intermedio, la tasa de cupón ya la fijé en el momento A (yo ya se cuanto voy a cobrar en el momento B). Entonces diré que mi bono al momento B va a valer el valor nominal + lo que yo ya se que voy a cobrar de cupón y otro eso lo descuento a la tasa vigente.

¿Qué relación hay entre el precio del bono y su valor nominal?

Tanto en el mercado primario como en el mercado secundario, podemos hablar de que los bonos cotizan:

-A la par

-Bajo la par

-Sobre la par

(En relación con el valor nominal y el precio).

Ejemplo bono a tasa fija:

Sabemos que el precio del bono esta dado por:

$$P = \sum FF_t . FD_t$$

Precio del bono

La relación entre ambos me habla de qué pasó con las tasas (suponiendo que el riesgo del bono no haya cambiado).
Será entre el momento en que yo fijé m FF (momento de la emisión donde dije voy a pagar una tasa de cupón que sea igual a x%) y que pasa con las tasas hoy (cuales son sus rendimientos)

Valor Nominal

Entonces tendremos:

A la par → Precio igual al Valor Nominal

Bajo la par → Precio mayor al Valor Nominal

Sobre la par → Precio menor al Valor Nominal

A la par:

La relación que existe con las tasas al momento en que se definió y las tasas vigentes serán las mismas (sin cambios significativos).

Bajo la par:

La relación que existe con las tasas al momento en que se definió y las tasas vigentes será que las mismas bajaron.

¿Qué manera tengo de saberlo?

Usando la fórmula $P = \sum FF_t . FD_t$ entendiendo que pasó con el factor de descuento (El factor de descuento será más alto porque las tasas bajaron).

Otra forma de verlo es, si yo le exijo el mismo nivel de riesgo al bono y miro inversiones similares, inversiones similares me estan dando una tasa de cupón o de interes más chica. Esto se ajusta por precio. En lugar de estar pagando el nominal, estaré pagando un poco mas alto entonces la *current yield* va a estar más acorde a la tasa que este vigente en el momento.

Sobre la par:

Suba de tasas entre el momento de la emisión y el momento de la valuación.

Siempre asumiendo que el riesgo del bono se mantuvo constante. Porque otro suceso que puede pasar para que las tasas suban, es que el riego haya incrementado.

Estructura temporal de tasas de interés (ETTI)

Al momento de considerar los factores de descuento, ¿Se mantiene la tasa constante?

Las tasas, más allá del riesgo, se van modificando por plazos.

Entonces los que relacionamos es el tiempo por el que mantengo la inversión con la tasa. Esto se denomina curva de tasas.

Lo que se observa en el mercado es que el rendimiento varía conforme al plazo.

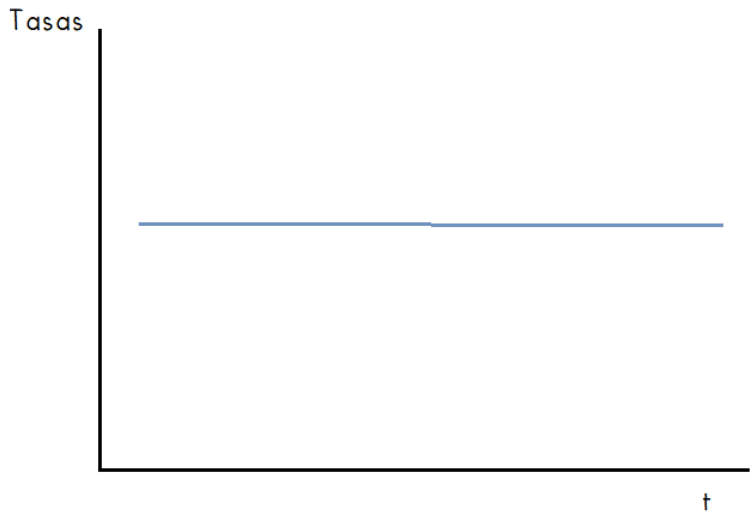
¿Cómo? Hablamos de la forma de la curva de tasas (Creciente, decreciente, flat)

¿Por qué? Distintas teorías que explican el ETTI.

Podemos tener:

Flat: Independientemente del vencimiento, la tasa es la misma.

Comentario: Si la tasa está expresada como TEA, siempre en ese gráfico, la expresión y el periodo es siempre el mismo.

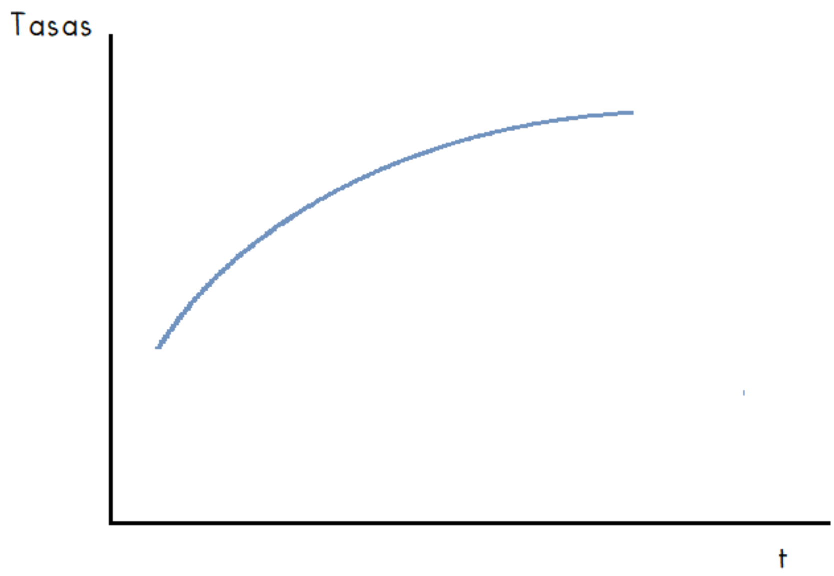


Creciente:

En general, se espera un comportamiento de tasa donde a mayor plazo, mayor sea la tasa que se va a estar pagando.

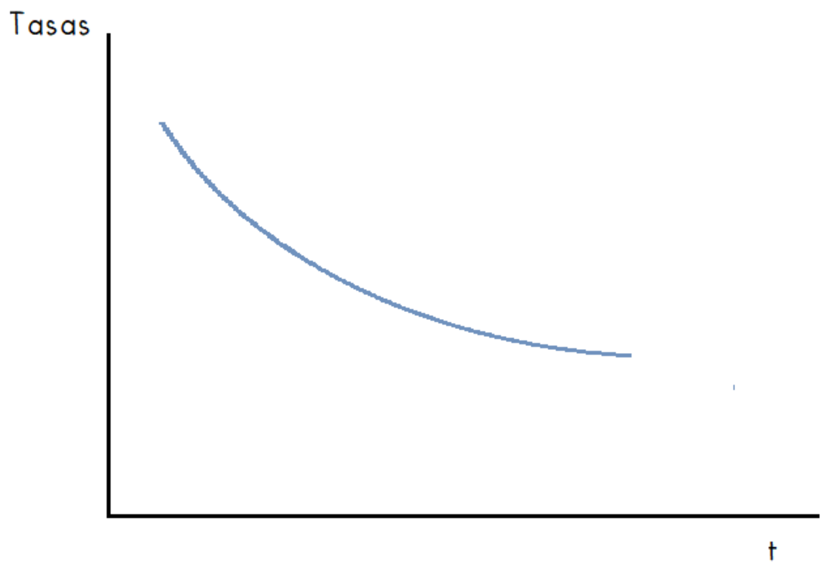
La teoría detrás de que sea mas "normal" este tipo de curvas, es por el incentivo de continuar invirtiendo a largo plazo. También porque a más plazo, mayor incertidumbre entonces la tasa que se pide debería ser siempre mayor.

Entonces se pueden resumir en riesgo, incertidumbre, preferencia por liquidez y, por último, incentivo.



Decreciente:

Por ejemplo, expectativas de baja inflación puede darse tasas negativas.



El ¿Por qué? Está relacionado con:

- Teoría de expectativas: La estructura de tasas refleja las expectativas de mercado para las tasas de interés futuras – las tasas forward se corresponden con el valor con el valor esperado de las tasas short.
- Teoría de preferencia por liquidez: Considera que – a mayor plazo – mayor el rendimiento exigido al resignar liquidez. Las tasas forward son – en ese caso – más altas que las esperadas. Necesitaré de un incentivo. Entonces exigiré un rendimiento mayor si resigno tiempo (corto a largo plazo). Exijo una prima mayor por liquidez.

- Teoría de Segmentación de mercado: Las tasas son independientes unas de otras y se negocian en mercados diferenciados. Cada mercado alcanza su equilibrio de manera independiente. El mercado es independiente. El que quiera invertir a corto, lo hará a corto independientemente del comportamiento de la curva.

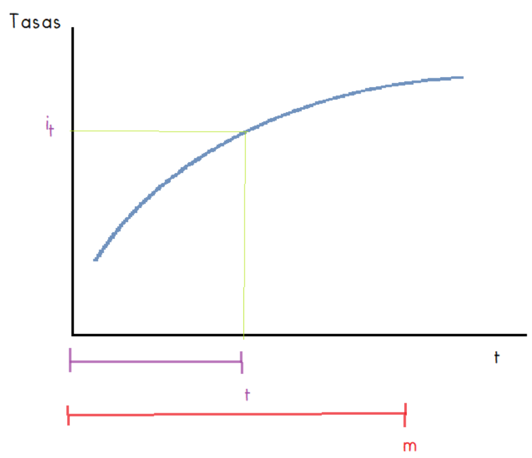
Dentro del comportamiento de las tasas encontraremos distintas "tasas" dentro de las curvas. Serán:

- Tasa Spot
- Tasa Forward
- Tasa Short

Tres definiciones de tasas que vamos a poder ver dentro de la curva.

Tasas Spot

Curva de tasa Spot que me dice que, para un determinado periodo, si yo invierto hoy hasta el periodo t la tasa que gano será la tasa spot para el periodo t / o para el periodo m.



Cuanto gano de tasa de interes si yo invierto hasta el periodo t o hasta el periodo m.

Tasas Forward

Son las tasas que están implícitas para una inversión en un momento futuro del tiempo. Cual será la tasa de interes que estoy ganando entre el periodo t y el periodo m. Cuando veo esa tasa, es una tasa forward entre periodo t y el periodo m. Esta implícita en la curva de tasas. No es la tasa vigente en el periodo t. Es la tasa que hoy me esta dando de rendimiento entre esos dos periodos.

¿Cómo se saca?

$$f_{t,m} = C\,.(1+i_m)^m = C.(1+i_t)^t.(1+f_{t,m})^{m-t}$$

$$\frac{(1+i_m)^m}{(1+i_t)^t} = (1+f_{t,m})^{m-t}$$

Ultima formula es el factor de capitalización de la tasa forward entre el momento t y el momento m

La lógica para sacar la tasa forward es la equivalencia de inversiones.

Asumo que es lo mismo invertir hasta m que invertir hasta t e invertir luego entre el periodo t y el periodo m.

Tasas Short

Tasa vigente en un momento del tiempo futuro. ¿Cuál será la tasa short en t?. Es un concepto teórico. Yo no voy a sabre cuál es la tasa que yo voy a invertir en el periodo t. Es algo que desconozco (por eso se habla de un concepto teórico).

Me sirve para entender que relación hay entre la tasa forward y la tasa short.

Teoría y Tasa Short, Forward y Spot

Asociado con la Teoría de las expectativas

Si suponemos que la curva me la explica la teoría de expectativas, lo que digo es que las tasas forward representan las expectativas que tengo de las tasas futuras. Por lo tanto, la tasa forward sería igual en la teoría de las expectativas al valor esperado de la tasa short. Asocio la forward con lo que espero que pase a futuro.

Tasa short = Tasa forward

Asociado con la Teoría de preferencia por la liquidez

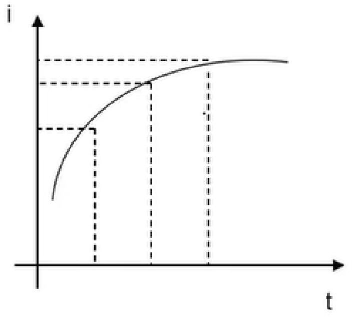
Cuanto mayor sea el plazo, mayor será la prima por liquidez que voy a exigir. Entonces la relación entre la tasa short y la tasa forward es la tasa forward debería ser mas alta que la tasa short.

La forward deberá ser el valor esperado de la short + una prima por liquidez.

Tasa short < Tasa forward

Asociado con la Teoría de preferencia por la liquidez

ETTI – Armado de la Curva



¿Cómo construimos la curva?

¿Cómo usamos esa información?

Para las inversiones libres de riesgo, si estan disponibles, lo que se suele hacer para construir la curva es construirla a partir de los bonos cupón cero.

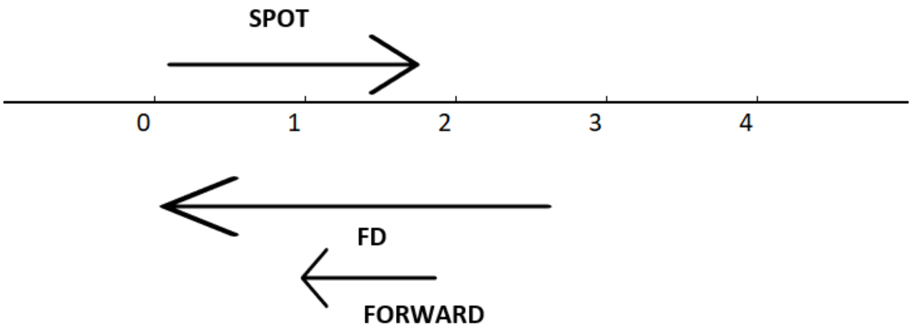
Los bonos cupón cero son aquellos que no pagan cupones de interes y solamente pagan el capital al vencimiento.

Si veo una lista de precios de cupón cero, lo que veo es la tasa que esta implícita en el mercado para ese periodo. Lo que hare luego es buscar alguna manera de interpolar los datos para armar la ETTI.

Ejemplo:

Precio de un bono que paga un nominal de 1000 al finalizar

Periodo	Precio "Cupón Cero"
1	945
2	890
3	835
4	785



Calculo la tasa spot para cada periodo.

Luego calcularé los factores de descuento.

Por último, la tasa forward.

Busco entender cuanto me rinde la inversión entre el periodo t y el periodo t+x.

$$C_0 \cdot FC_{0;t} \cdot FC_{t;(t+x)} = C_0 \cdot FC_{0;t+x}$$

$$FC_{t;(t+x)} = \frac{FC_{0;t+x}}{FC_{0;t}}$$

En violeta resaltado estarán los factores de capitalización calculado en las tasas spot y resaltado en verde calculado con la tasa forward.

$$C_0 \cdot \boxed{FC_{0;t}} \boxed{FC_{t;(t+x)}} = C_0 \boxed{FC_{0;t+x}}$$

$$FC_{t;(t+x)} = \frac{FC_{0;t+x}}{FC_{0;t}}$$

Calcularemos entonces las tasas y los factores de descuento.

Factores de descuento:

Si tengo que traerme una inversión desde el periodo cuatro hasta el momento cero, por qué lo tengo que multiplicar.

Los 785 del periodo cuatro hacer referencia a que ese monto capitalizado a una tasa me va a dar 1000 (que es el valor nominal).

$$785\,(1+i)^4 = 1000$$

Será la tasa spot efectiva del periodo.

Entonces:

$$785 = 1000.\frac{1}{(1+i)^4}$$

$$785 = 1000.\boxed{\frac{1}{(1+i)^4}} \longrightarrow \boxed{\text{Factor de descuento} \rightarrow FD_{0,4}}$$

$$\frac{785}{1000} = \frac{1}{(1+i)^4}$$

$$\frac{785}{1000} = FD_{0,4}$$

=D4/F1

C	D	E	F
		Nominal:	1000

Periodo	Precio "Cupón Cero"	FD
1	945	0,9450
2	890	0,8900
3	835	0,8350
4	785	0,7850

Para obtener la tasa efectiva:

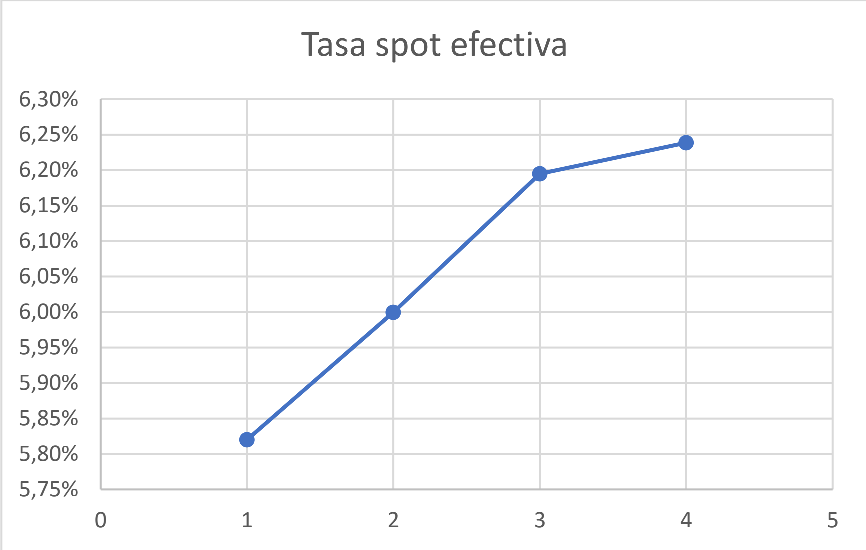
$$(FD_{0,t})^{-\frac{1}{t}} - 1 = i$$

Entonces el resultado será:

=(E4)^(-1/C4) -1

C	D	E	F
		Nominal:	1000

Periodo	Precio "Cupón Cero"	FD	Tasa Spot (Efectiva)
1	945	0,9450	5,82%
2	890	0,8900	6,00%
3	835	0,8350	6,20%
4	785	0,7850	6,24%



la tasa spot continua

$$FD_{0,t} = e^{-i\,.t}$$

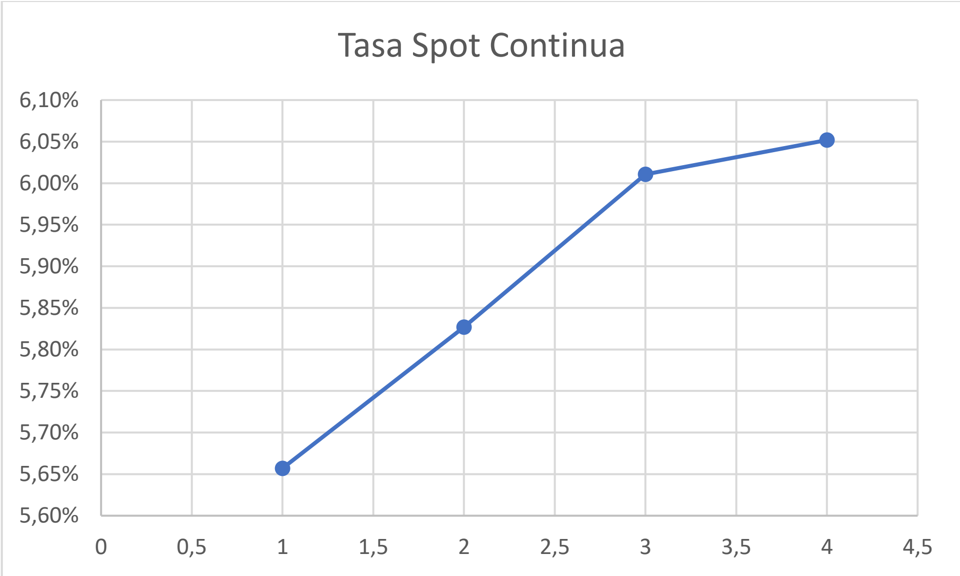
Para la fórmula de la tasa, despejamos:

$$\frac{-\ln\left(FD_{0,t}\right)}{t} = i$$

=-LN(E4)/C4

Nominal: 1000

Periodo	Precio "Cupón Cero"	FD	Tasa Spot (Efectiva)	Tasa Spot (Continua)
1	945	0,9450	5,82%	5,66%
2	890	0,8900	6,00%	5,83%
3	835	0,8350	6,20%	6,01%
4	785	0,7850	6,24%	6,05%



Para obtener la tasa forward efectiva obtengo el factor de capitalización:

$$\frac{FC_{0,t+x}}{FC_{0,t}} = FC_{t,t+x}$$

Teníamos:

$$\frac{(1+i_m)^m}{(1+i_t)^t} = (1+i_{t,m})^{m-t}$$

Entonces la tasa forward será:

$$\left(\frac{(1+i_m)^m}{(1+i_t)^t}\right)^{\frac{1}{(m-t)}} - 1$$

$$\left(\frac{(1+6)^2}{(1+5{,}820)^1}\right)^{\frac{1}{2-1}} - 1$$

Periodo	Precio "Cupón Cero"	FD	Tasa Spot (Efectiva)	Tasa Spot (Continua)
1	945	0,9450	5,82%	5,66%
2	890	0,8900	6,00%	5,83%
3	835	0,8350	6,20%	6,01%
4	785	0,7850	6,24%	6,05%

Tasa forward continua

$$R_F = \frac{R_2T_2 - R_1T_1}{T_2 - T_1}$$

$$R_F = R_2 + (R_2 - R_1)\frac{T_1}{T_2 - T_1}$$

Duration

Cuando calculamos el precio del bono, ese precio depende del riesgo, la tasa de interes y de los flujos de fondo.

Si tengo un FF de bonos con un precio cierto, las variaciones van a poder obedecer a temas de cambios de percepción de riesgo o cambios a la tasa de interes.

El bono es sensible a lo que ocurra con la tasa de interes. Una medida que nos interesa conocer, entonces, será que tan sensible es el bono respecto de la tasa de interes.

$$\frac{\partial B}{\partial y} = \frac{\textbf{cambio del precio del bono}}{\textbf{cambio del rendimiento}}$$

La duration busca entender que tan sensible es el bono a la tasa de interés y asume siempre un cambio paralelo en las tasas. Es decir, busca entender la sensibilidad de que tanto cambio una con respecto a la otra.

Buscamos entender el cambio del precio ante un cambio de tasa haciendo una aproximación si el precio del bono del bono paso de un valor original a un nuevo valor si esa tasa cambió.

$$B(y_o) \rightarrow B(y_0 + \Delta i)$$

La derivada me da una primera aproximación de tipo lineal en donde puedo decir que es una aproximación de primer orden

$$B(y_0 + \Delta i) \cong B(y_0 + \frac{\partial B}{\partial y}.\Delta y)$$

Si analiza la tasa de interes como si fuera una única tasa.

A priori esperamos que:

Sube la tasa -> Cae el precio del bono

Cae la tasa -> Sube el precio del bono

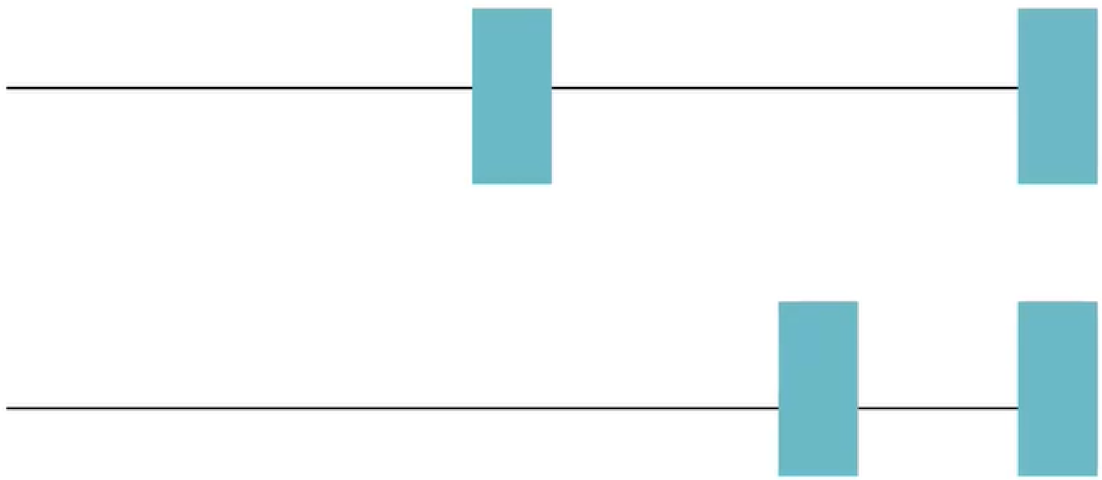
¿De qué depende la sensibilidad?

Espero una:

-Relación negativa

-Relación no lineal

Entonces la sensibilidad va a depender de cuándo cobro:



El segundo será mas sensible a tasas porque si pensamos en la fórmula donde lo que hago es descontar el FF, en ese descuento de FF el segundo está más afectado porque va a descontar por periodos más largos.

Para medir la sensibilidad a la tasa vamos a calcular, en el caso de la TIR como tasa continúa para un bono con FF fjios:

$$\frac{dB}{dy} = \frac{d}{dy}\sum_{t=1}^{n} FF_t \cdot e^{-y \cdot t}$$

Si consideramos el mismo caso, pero con la expresión de la tasa como TNA con capitalización igual a la periodicidad de pago:

$$\frac{dB}{dy} = \frac{d}{dy}\sum_{t=1}^{n} FF_t \cdot \left(1+\frac{y}{m}\right)^{-t}$$

Tasa continua:

$$\frac{dB}{dy} = \frac{d}{dy}\sum_{t=1}^{n} FF_t \cdot e^{-y \cdot t}$$

$$\frac{dB}{dy} = \sum_{t=1}^{n} -t \cdot FF_t \cdot e^{-y \cdot t}$$

$$Duration = -\frac{dB}{dy}\cdot\frac{1}{B} = \sum_{t=1}^{n} t \cdot \frac{FF_t \cdot e^{-y \cdot t}}{B}$$

Cuándo cobro?

Ponderación del monto cobrado

Recordemos que cuando hablamos de duration es una medida de sensibilidad de la tasa de interes. Cuando veo como se mide será solo

$-\frac{dB}{dy}$ lo que hace la duration es mirar en qué momento voy a cobrar y que proporción cobraré en cada momento. Conceptualmente, cuando hablamos de la duration es el tiempo promedio para el cobro del bono.

Cuanto más alejado del tiempo y mayor sea el monto que cobro hacia el final, más alta será la duration.

Promedio ponderado de los flujos de fondos ponderado por su punto en el tiempo. Esto quiere decir que tendremos diferentes pagos a lo largo del tiempo ponderado por el peso de esos pagos. Sería el punto medio donde los pagos se equilibran.

Duration – Aproximación a variación de precio

$$B(y+\Delta y) = B(y) + \Delta y \cdot \frac{dB}{dy} + \Delta y^2 \cdot \frac{1}{2!} \cdot \frac{d^2B}{dy^2} + \Delta y^3 \cdot \frac{1}{3!} \cdot \frac{d^3B(\varepsilon)}{dy^3}$$

Como dijimos, la duration es una aproximación de primer orden. Si hago la segunda derivada, será la aproximación de segundo orden

$$B(y+\Delta y) = B(y) + \underbrace{\boxed{\Delta y \cdot \frac{dB}{dy}}}_{\text{Aproximación de primer orden}} + \Delta y^2 \cdot \underbrace{\boxed{\frac{1}{2!} \cdot \frac{d^2B}{dy^2}}}_{\text{Aproximación de segundo orden}} + \Delta y^3 \cdot \frac{1}{3!} \cdot \frac{d^3B(\varepsilon)}{dy^3}$$

$$B(y+\Delta y) - B(y) \cong -B \cdot Duration \cdot \Delta y$$

$$B(y+\Delta y) - B(y) \cong -B \cdot Duration\ Modif \cdot \Delta y$$

Convexidad

$$B(y+\Delta y) = B(y) + \Delta y \cdot \frac{dB}{dy} + \Delta y^2 \cdot \frac{1}{2!} \cdot \frac{d^2B}{dy^2} + \Delta y^3 \cdot \frac{1}{3!} \cdot \frac{d^3B(\varepsilon)}{dy^3}$$

Aproximación de Segundo Orden

$$Convexidad = \frac{1}{B} \cdot \frac{d^2B}{dy^2}$$

Tasa continua	$Convexidad = \frac{1}{B} \cdot \frac{d^2B}{dy^2} = \sum_{t=1}^{n} \frac{t^2 \cdot FF_t \cdot e^{-y \cdot t}}{B}$
TNA	$Convexidad = \frac{1}{B} \cdot \frac{d^2B}{dy^2} = \frac{1}{B} \cdot \left(1 + \frac{y}{m}\right)^{-2} \sum_{t=1}^{n} (t^2 + t) \cdot FF_t \cdot \left(1 + \frac{y}{m}\right)^{-t}$

Sensibilidad a la Tasa

Bonos a tasa variable

Hay dos opciones:

Si es el momento de pago un bono a tasa variable ajusta exactamente (no tiene sensibilidad).

En cualquier otro momento donde está determinada hay una sensibilidad propia.

$$B_{TV} = (VN + k) \cdot e^{-t \cdot y}$$

$$\frac{dB}{dy} = (VN + k) \cdot e^{-t \cdot y} \cdot (-t)$$

En los bonos tasa fija, se conoce el momento y monto a pagar por los mismos.

$$B_{TF} = \sum_{t=1}^{n} FF_t \cdot FD_t$$

En los bonos a tasa variable, la tasa a pagar está atada a la evolución de la tasa de referencia que es representativa del riesgo de ese bono. Usualmente, a la fecha de pago de ese cupón se pacta la tasa a cobrar por el período siguiente.

En consecuencia, para los bonos de tasa variable, el valor al momento del pago de cupón y recalculo de intereses es el valor nominal.

Modelo CAMP

Introducción

Modelo de valuación de acciones.

Nos sirve para:

Hacer analisis con mercados derivados (me da ciertas herramientas que despues se puede usar para entender posibles coberturas de riesgo de mercado).

Nos da un esquema de cómo podemos pensar las valuaciones o la interrelación de los activos dentro de las carteras.

Si tengo que valuar opciones, hay muchas formas de hacerlo:

Es uno de los posibles modelos que explica el comportamiento de los inversores y que busca relacionar el rendimiento de un instrumento en particular con lo que se observa en el mercado.

Se proyecto el FF dependiendo de cuál es la empresa (como es su balance, cuál es el crecimiento que se espera, cuanto reinvierte, etc.).

Nos da una visión de cómo es su mercado en el conjunto y como responde una acción en particular.

Decisiones de Inversión

Se establece un marco sobre como las personas toman decisiones.

Para eso, partimos de un supuesto: Consideramos que todos los inversores se comportan como individuos racionales, adversos al riesgo y que maximizan la utilidad esperada.

El que decide es un individuo racional, averso al riesgo (prefiera menos riesgo) → Si asume más riesgo, puede haber más rendimiento y, por último, máxima la utilidad esperada de la riqueza futura.

Hay ciertos sesgos que existen al momento de decidir o aspectos emocionales (finanzas conductuales). Por ejemplo, si bien todos recibimos la misma información, en general al momento de tomar la decisión económica, solemos darle más importancia a la información que confirma lo que pensamos.

Hay otras teorías que incorporan el comportamiento de los participantes en el mercado financiero no como racionales sino como sesgos cognitivos + comportamiento de manada → finanzas conductuales

El segundo sesgo es que me afecte más la perdida que ganar.

¿Qué es el riesgo?

La varianza del rendimiento o volatilidad de los retornos.

Lo que vamos a obtener a futuro es incierto. Tendremos un evento incierto a futuro.

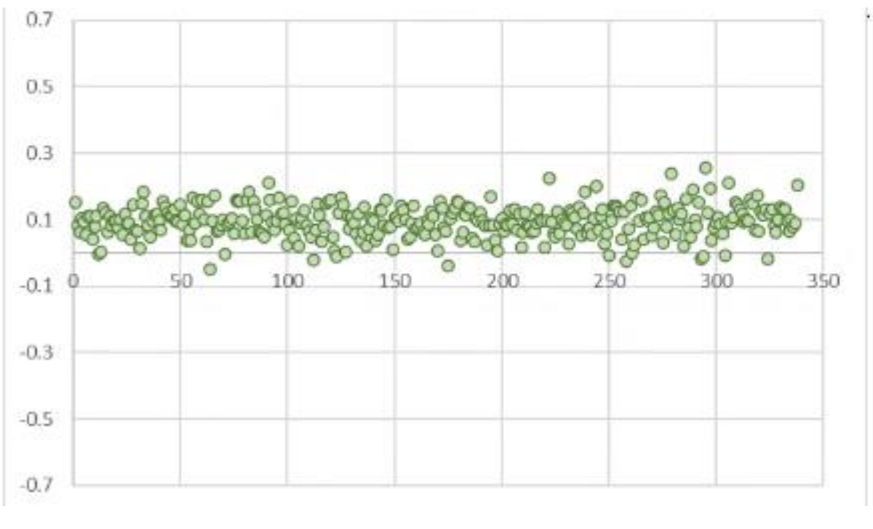
¿Cuál es el grado de incertidumbre?

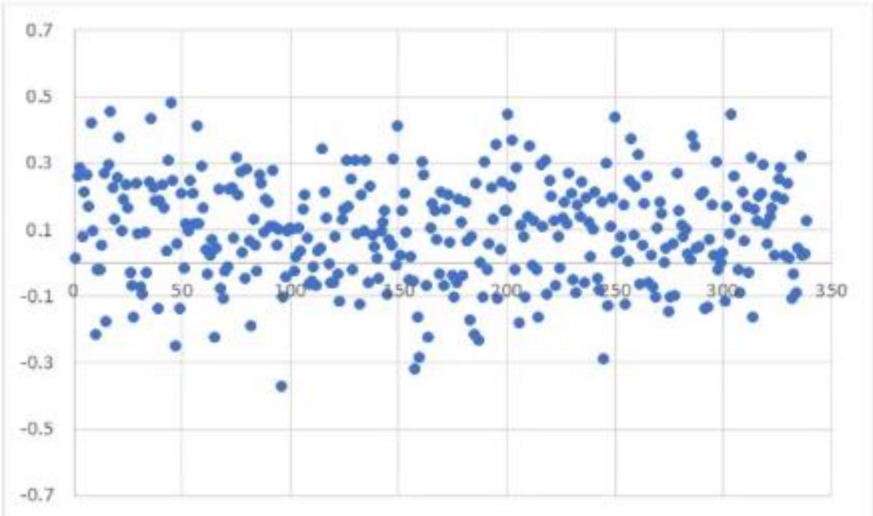
Cuando mayor es el grado de incertidumbre, mayor es el riesgo.

Cuando vemos la varianza o volatilidad de los resultados, miramos que tan distintos son los resultados si los comparo con el punto medio. La distancia con respecto al valor esperado.

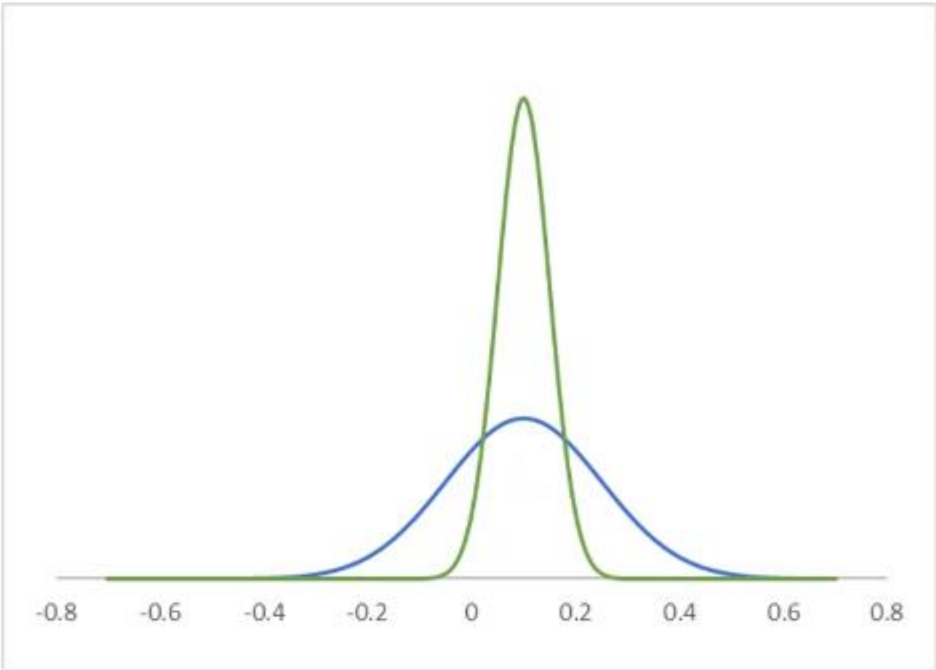
Siguiendo el ejemplo de los gráficos:

En ambos casos, el rendimiento es 0.1. En el primer caso hay más dispersión a diferencia del segundo que esta más condensado.





Si lo traduzco a una funcion de densidad:



En esta comparación, si se representará una serie de rendimientos de una acción, elegiremos la línea verde.

Supuesto media varianza

Supuesto:

Si hablamos de individuos racionales que son aversos al riesgo y que buscan maximizar su utilidad esperada, todos los individuos van a elegir (ante dos opciones) aquella que, si tiene el mismo rendimiento, da el menor riesgo.

Siempre se habla de que una cartera/inversión sea preferida a la otra.

Se considera en el analisis el comportamiento de un inversor promedio.

Supone que los individuos raciones, averso al riesgo que maximizan la utilizada esperada de la riqueza futura.

Deciden de acuerdo con el Criterio de Media Varianza (CMV)

$$A\ pref.B\ si\ \sigma_A \leq \sigma_B\ y\ \ E(r_A) \geq E(r_B)$$

Siendo alguna de las desigualdades estricta

Cartera de un instrumento de riesgo.

Puedo comparar cualquier par de activos.

Si existiesen solo activos riesgosos en el mercado, puedo combinarlos obteniendo distintas combinaciones de riesgo-rendimiento.

$$E(r_c) = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot E(r_i)$$

$$\sigma_c^2 = w^T \cdot \sum \cdot w$$

Matriz de Var y Covar

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \cdots\cdots & \sigma_{1,n} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & \cdots\cdots & \sigma_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n,1} & \sigma_{n,2} & \cdots\cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

Vector de ponderaciones
(en monto)

Parte del riesgo de la cartera me la va a explicar cada uno de los activos y luego iré incorporando activos que más o menos estarán correlacionados entre si-

La correlación puede ser de manera negativa (o actúa de manera independiente) pero lo que hace es contrarrestar los movimientos de uno con otros. Entonces achico esa dispersión con respecto al valor esperados por el hecho de incorporar más instrumentos a la cartera (a menos que todos los instrumentos tengan correlación 1).

Cuando armamos una cartera:

Fórmula de rendimiento esperados

$$E(r_c) = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot E(r_i)$$

Cuando armamos una cartera, calculamos el rendimiento esperado de la cartera (E(rc)) en función del rendimiento esperado de cada instrumento (E(ri)) ponderado por la plata que cada uno de esos activos representa. Ese Wi que es mi ponderador siempre es mi ponderador en plata.

Por otro lado, miro es riesgo (en funcion de la varianza):

$$\sigma_c^2 = w^T \cdot \sum \cdot w$$

La varianza de la cartera se calcula en forma matricial como vector de ponderadores transpuesto por la matriz por los ponderadores. Tendremos la matriz de Var y Covar.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \cdots\cdots & \sigma_{1,n} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & \cdots\cdots & \sigma_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n,1} & \sigma_{n,2} & \cdots\cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

En la diagonal principal las varianzas y luego como covaría cada instrumento con el resto.

Si incorpora cualquier activo a la cartera solo por el hecho de incorporar voy a licuar la varianza propia de los activos. Porque tiene más peso como se mueven los activos entre sí y como se compensan entre si los riesgos.

Se habla del efecto diversificación.

Hay un efecto diversificación solo por sumar activos, pero no se logra eliminar todo el riesgo sino que se elimina únicamente el riesgo especifico del activo (diversificable)

Asumiendo igual ponderación:

$$\text{Portfolio variance} = N\left(\frac{1}{N}\right)^2 \times \text{average variance}$$
$$+ (N^2 - N)\left(\frac{1}{N}\right)^2 \times \text{average covariance}$$
$$= \underbrace{\frac{1}{N} \times \text{average variance}}_{\text{Riesgo específico del activo}} + \underbrace{\left(1 - \frac{1}{N}\right) \times \text{average covariance}}_{\text{Riesgo sistemático, de mercado}}$$

Lo que me da es la varianza promedio de la cartera multiplicado por 1(n (la ponderación que asumo) + 1- 1/n multiplicado por la covarianza promedio.

En este caso estoy trabajando con la varianza propia de los activos y por otro lado como covarían esos activos entre sí. Si incorporo una cantidad alta de activos, el riesgo específico del activo, menor peso tendrá cada peso. Pero, por más que incorpore activo la covarianza promedio va a mantenerse.

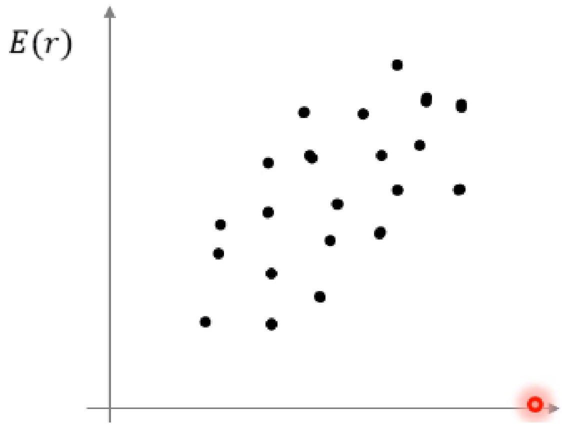
Es decir, a medida que arme una cartera y le voy incorporando instrumentos, deja de tener tanto sentido fijarse cuál es el riesgo de cada uno de los activos en particular sino lo que empieza a tener peso es como se correlacionan esos activos entre sí. También denominado riesgo sistemático o riesgo de mercado (mira como los activos se relacionan entre sí).

A la largo lo que quiero entender es cómo se comporta el activo en la cartera y no el activo solo.

Frontera de Carteras eficientes

Considerando todas las combinaciones posibles de activos en el mercado, podemos entender -primero- cuales son las combinaciones de riesgo rendimiento existentes.

Esto se podría graficar:

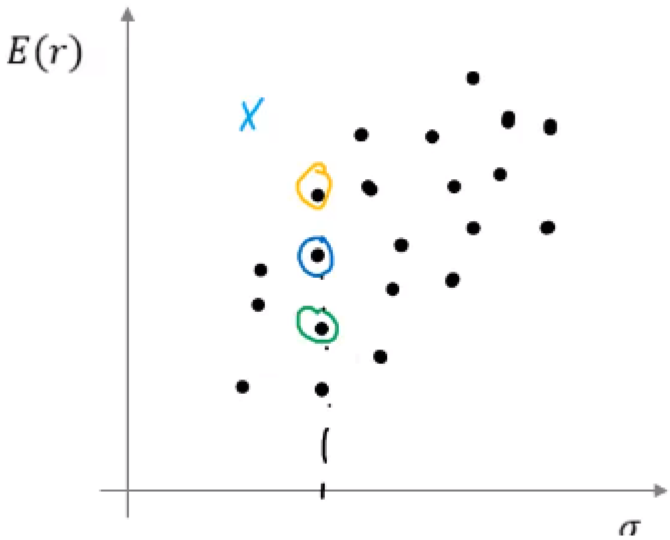


Usamos tanto la relación riesgo-rendimiento de cada activo en particular como el que surja de una cartera armada. Entonces cambiaré la proporción que tengo invertida en cada uno de los activos.

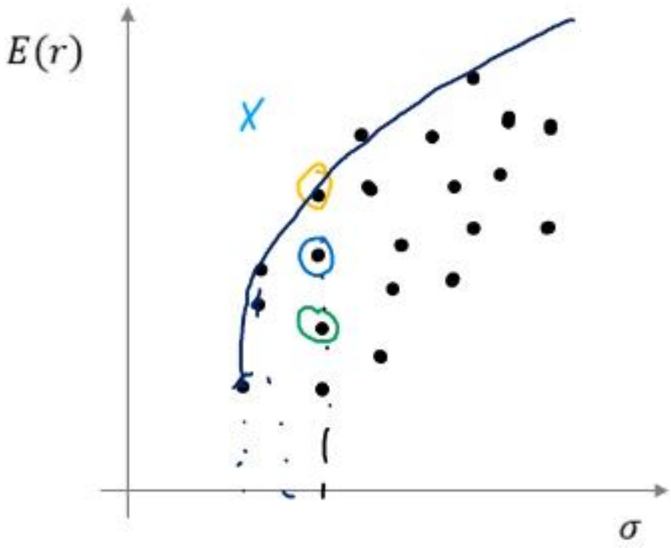
Tendré una nube de puntos que representa lo que puedo obtener en relación riesgo rendimiento.

Puedo también comprar dos carteras cualquieras.

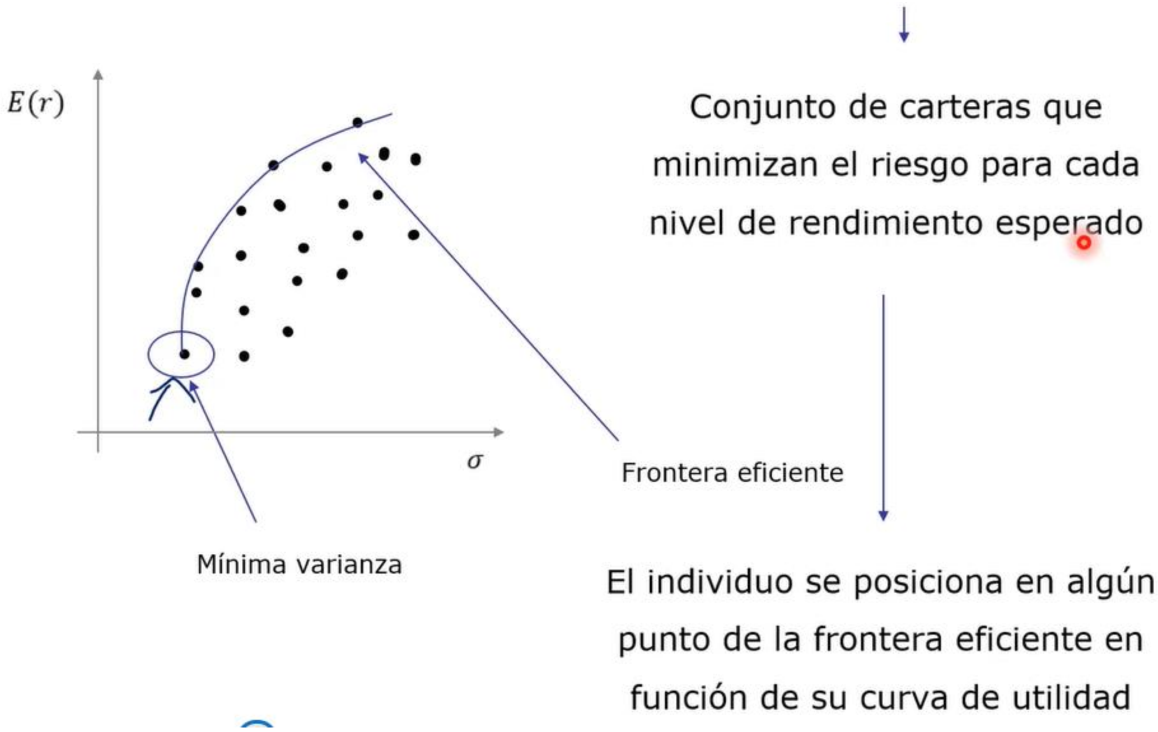
Elegiría la cartera amarilla a la azul y la azul a la verde porque al mismo nivel de riesgo obtendré mayor rendimiento.



Se construye la frontera eficiente, para cada nivel de riesgo cual es la cartera que le proporcione el máximo rendimiento esperado.

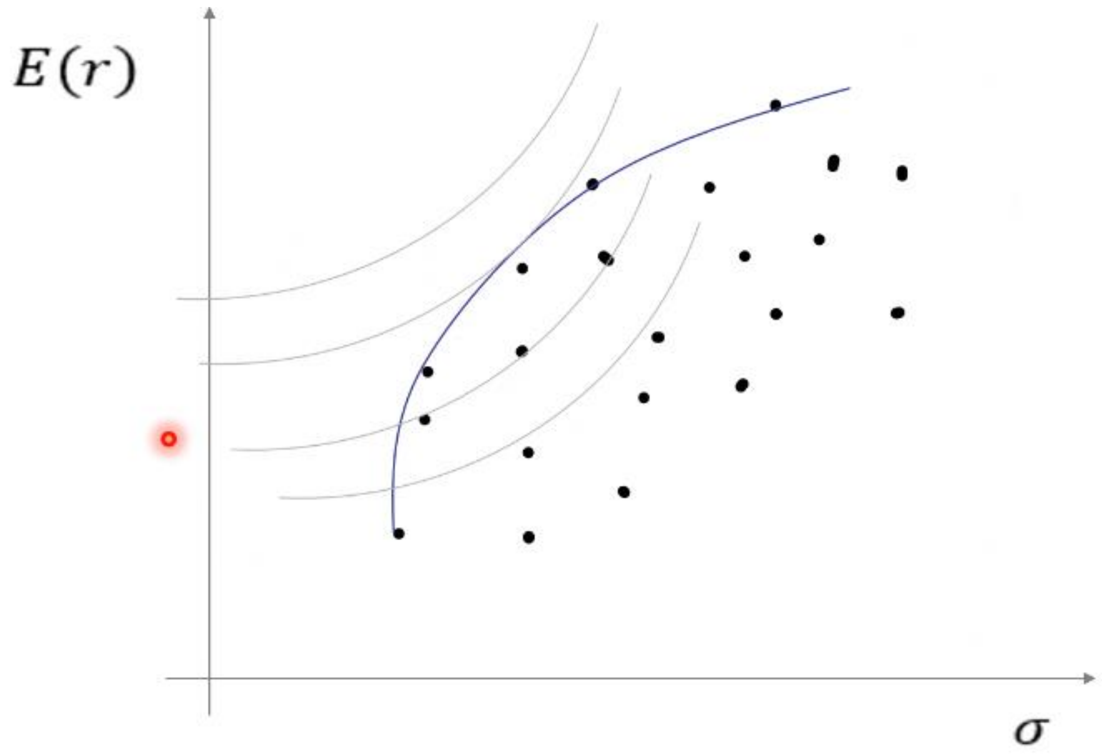


Tendré todas las combinaciones de riesgo y rendimiento.



Diferenciamos: cartera de mínima varianza y la frontera eficiente. La FE es un conjunto de carteras que minimizan el riesgo para cada nivel de rendimiento esperado.

El individuo se posiciona en algun punto de la frontera eficiente en funcion de su curva de utilidad.

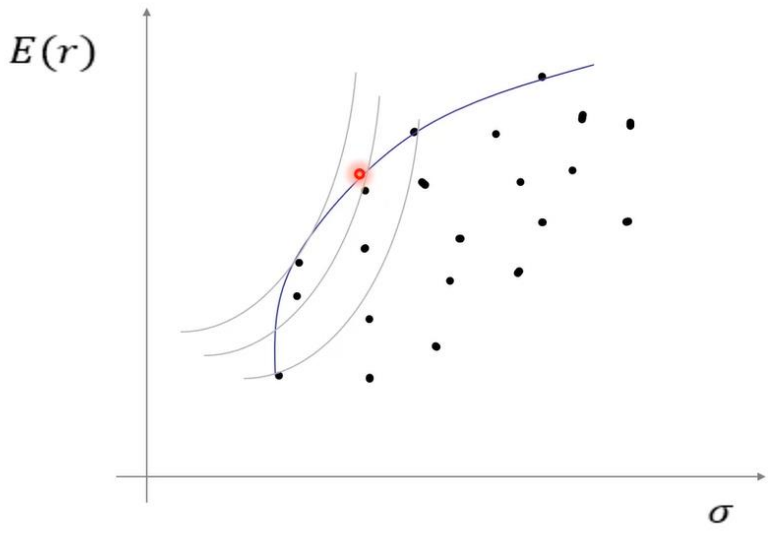


Mi funcion de utilidad me marcará cuales son las carteras que a mí me generan el mismo nivel de utilidad.

Las combinaciones serán las curvas grises. Entonces la decisión no solo se basará en la relación rendimiento riesgo sino también en la frontera de eficiencia y también de la utilidad (perfil del usuario). Siempre me pararé sobre la línea azul y siempre estaré buscando maximizar mi utilidad-

Será donde la curva de utilidad sea tangente a la frontera eficiente.

Ejemplo dos: Individuo con más aversión al riesgo (se ve en función a la curva de utilidad):



Existencia de un activo libre de riesgo

¿Qué pasa si incorporamos activos libres de riesgo?

Para llegar al modelo de valuación, incorporamos luego la existencia de activos libre de riesgos con rendimiento rf y volatilidad 0.

Suponemos, a priori, que podemos tomar o pedir fondos a esa tasa de libre de riesgo.

Consideramos que invertimos en n activo riesgo con cualquiera (P) y en el activo libre de riesgo siendo "y" la proposición invertida el riesgoso.

$$E(r_C) = y \cdot E(r_P) + (1-y) \cdot r_f$$

$$\boxed{\sigma_C^2 = y^2 \cdot \sigma_P^2} \rightarrow \quad \sigma_c = y \cdot \sigma_P$$

El rendimiento esperado me la explica el activo riesgoso y la volatilidad el libre de riesgo.

En funcion del y, podría decir que la proporción que tengo en el activo riesgoso es igual al cociente entre la volatilidad de la cartera y la volatilidad del activo riesgoso. Podré entonces dibujar una recta para encontrar una relación entre el rendimiento que tiene mi cartera y la volatilidad que tiene mi cartera.

Obtenemos la relación entre el rendimiento de mi cartera y la volatilidad que tiene mi cartera.

$$E(r_C) = \sigma_C \cdot \frac{(E(r_P) - r_f)}{\sigma_P} + r_f$$

Capital

Cantidad de riesgo

Prima por unidad de riesgo

El primer "termino" es una constante que multiplica (la prima de riesgo, la dif entre el rendimiento que me da inversión riesgosa respecto la libre de riesgo dividido por su nivel de volatilidad → cuanto me paga de más la unidad riesgosa por cada unidad de riesgo que tengo) multiplicado por la cantidad de riego que tiene la cartera ahora.

$x\ (E(r_p)\ ;\ \sigma_p)$

$,\ y\ (r_f\ ;\ 0)$

$$y = \frac{\sigma_C}{\sigma_P}$$

$$E(r_C) = \frac{\sigma_C}{\sigma_P} \cdot E(r_P) + \left(1 - \frac{\sigma_C}{\sigma_P}\right) \cdot r_f$$

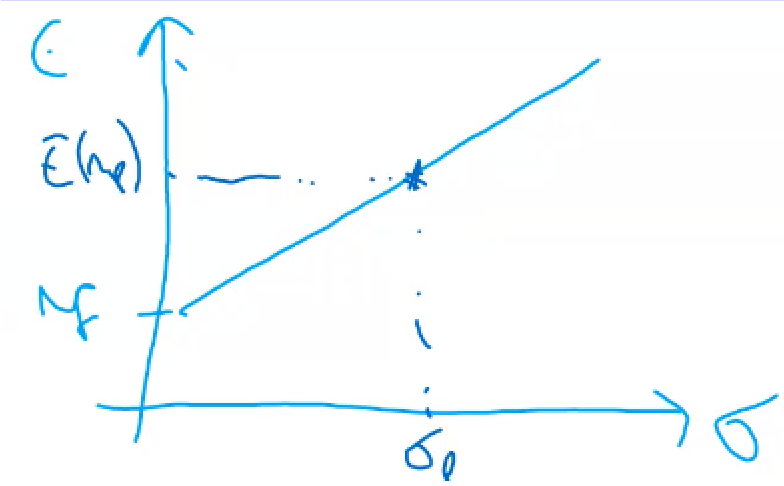
$$E(r_C) = \underbrace{\sigma_C}_{\text{Cantidad de riesgo}} \cdot \underbrace{\frac{(E(r_P) - r_f)}{\sigma_P}}_{\text{Prima por unidad de riesgo}} + r_f$$

Capital Allocation Line	Vincula Riesgo y Rendimiento de una carera dada la elección de una cartera de riesgo

Obtenemos el Capital Allocation Line: Vincula el Riesgo y Rendimiento de una cartera dada una elección de una cartera de riesgo.

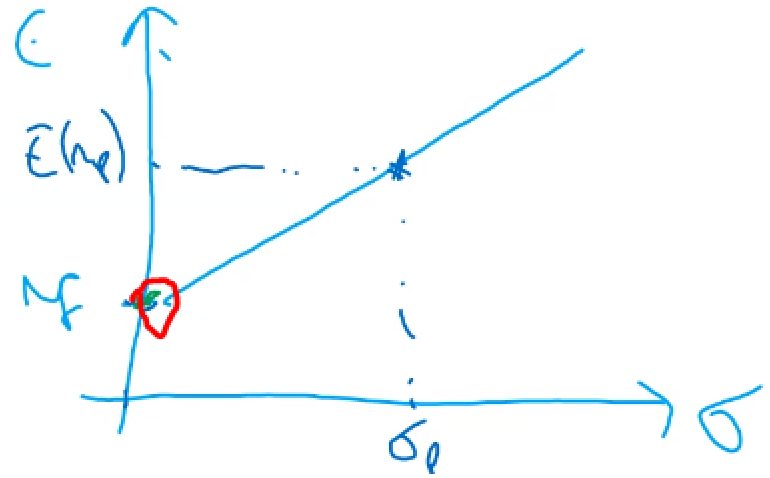
Todo surge entonces de que tengo una parte que esta invertida en riesgo y otra libre de riesgo:

$$y = \frac{\sigma_C}{\sigma_P}$$

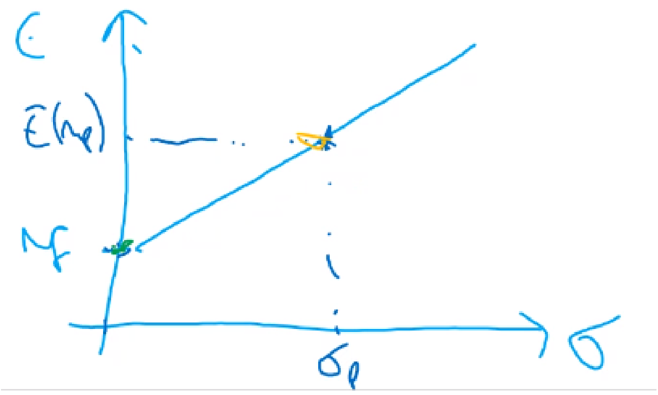


Cuando tengo cero volatilidades estoy ganando rf (la tasa libre de riesgo). La recta, en la CAMP, en donde me puedo situar en cualquier punto de esa recta con la combinación que yo haya elegido de activo riesgoso, libre de riesgo.

Lo que supongo en esta recta es que yo ya elegí cual es la cartera de riesgo a la cuál voy a estar trabajando



La CAMP de arriba, con esa elección de cartera, solo puedo moverme dentro de la recta. Si me sitúo en el punto verde, la proporción invertido en el activo riesgoso, es cero. En cambio,

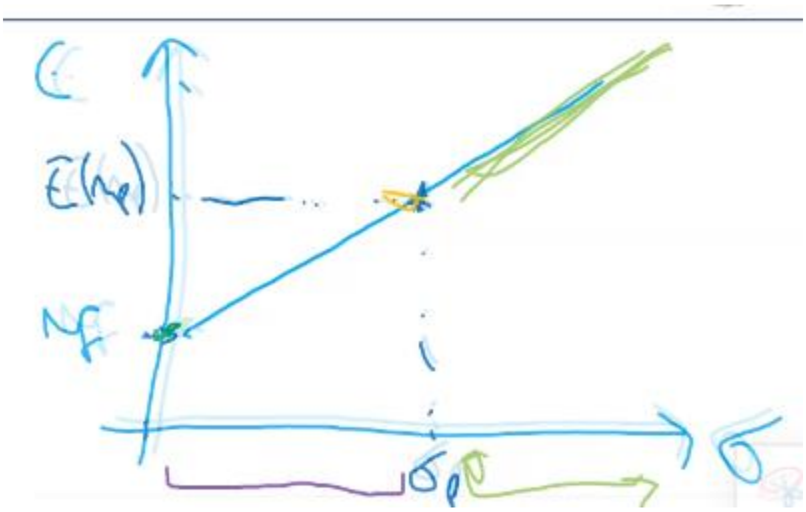


Si estoy en el punto naranja "y" será 1. Sigma p – rendimiento p (quiere decir que no invertí nada a tasa libre de riesgo).

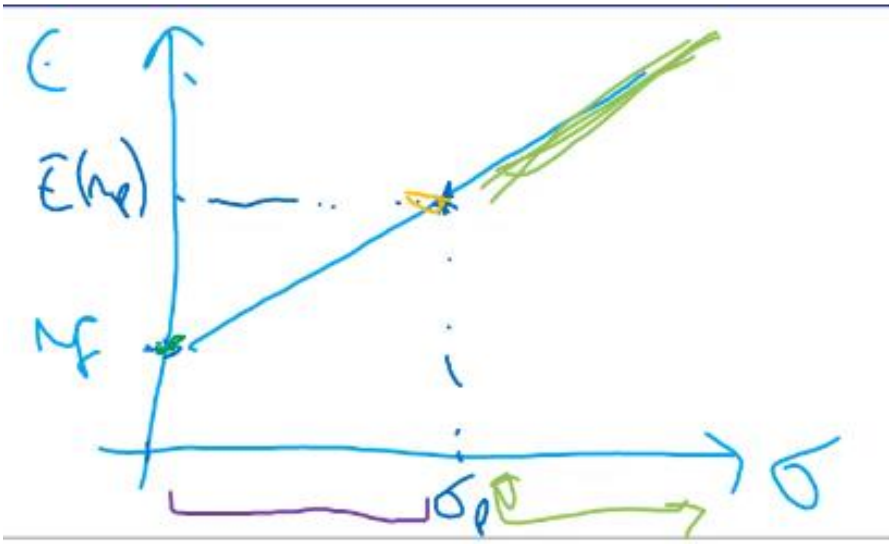
En el medio tendré variaciones.

Una posibilidad en combinaciones riesgo-rendimiento que se encuentren a la izquierda de mi cartera de riesgo. Tendré una "y" que va entre cero y uno, significa que invierto parte en libre de riesgo y la otra a la cartera riesgosa.

En todas las combinaciones alcanzaré niveles de rendimiento menores a la cartera de riesgo que elegí, pero también voy a tener niveles de riesgo menores.



Otra posibilidad es que me mueva hacia la derecha. Me encontraré en un caso donde y > 1 significa que pedí prestado fondos a tasa libre de riesgo. Lo que hago es pedir plata (endeudarme a tasa libre de riesgo) y eso lo aplico a inversiones riesgosas.



Entonces las posibilidades serán:

- Y = 0 → inversión a tasa libre de riesgo
- Y = 1 → inversión a carteras riesgosas
- Y < 1 → posibles combinaciones entre cartera riesgosa y tasa libre de riesgo.
- Y >1 → pido prestado a tasa libre de riesgo para invertir en carteras riesgosas.

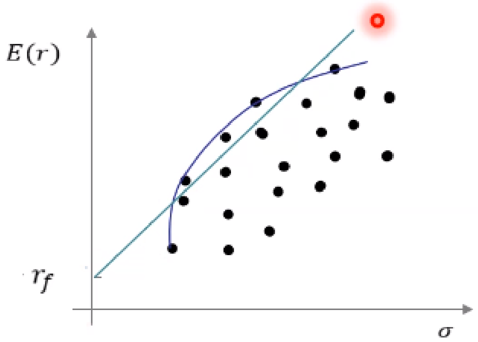
Antes, dejaba fija la inversión de riesgo (la cartera p), pero podría elegir cualquier p (cartera de riesgo).

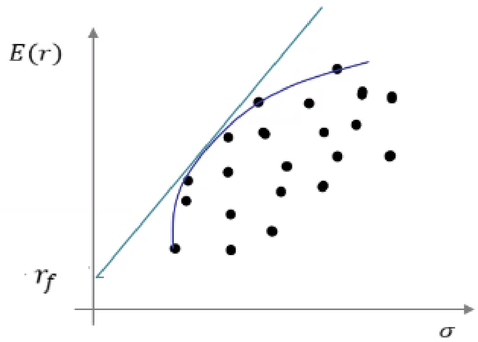
Yo podría calcular la CAL para distintos escenarios y combinaciones.

Gráficamente puedo elegir distintas carteras de riesgo de referencia y combinarlas con un activo no riesgoso.

En función del valor de "y" puedo identificar si tomo o presto plata.

La presencia del activo libre de riesgo me amplía las oportunidades de inversión. En donde me pare como inversor seguirá dependiendo de la función de utilidad de cada uno





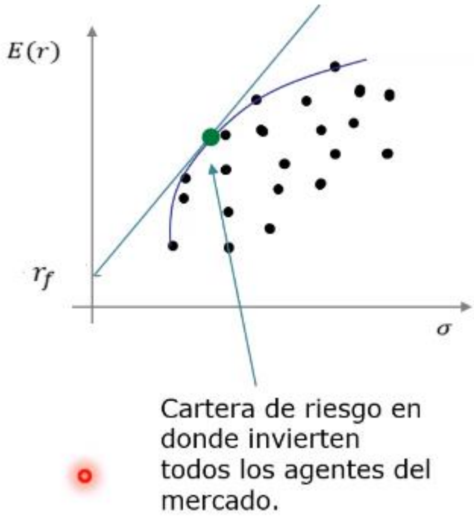
Cuando elijo con que cartera hacer la combinación, me voy a estar moviendo en la Frontera eficiente.

Yo debería buscar algo que me permita eficientizar mis inversiones lo que vemos es que lo que conviene es armar la capital allocaiton line de manera tal que sea r tangente con la Frontera eficiente. En la práctica se me amplían las posibilidades de inversión.

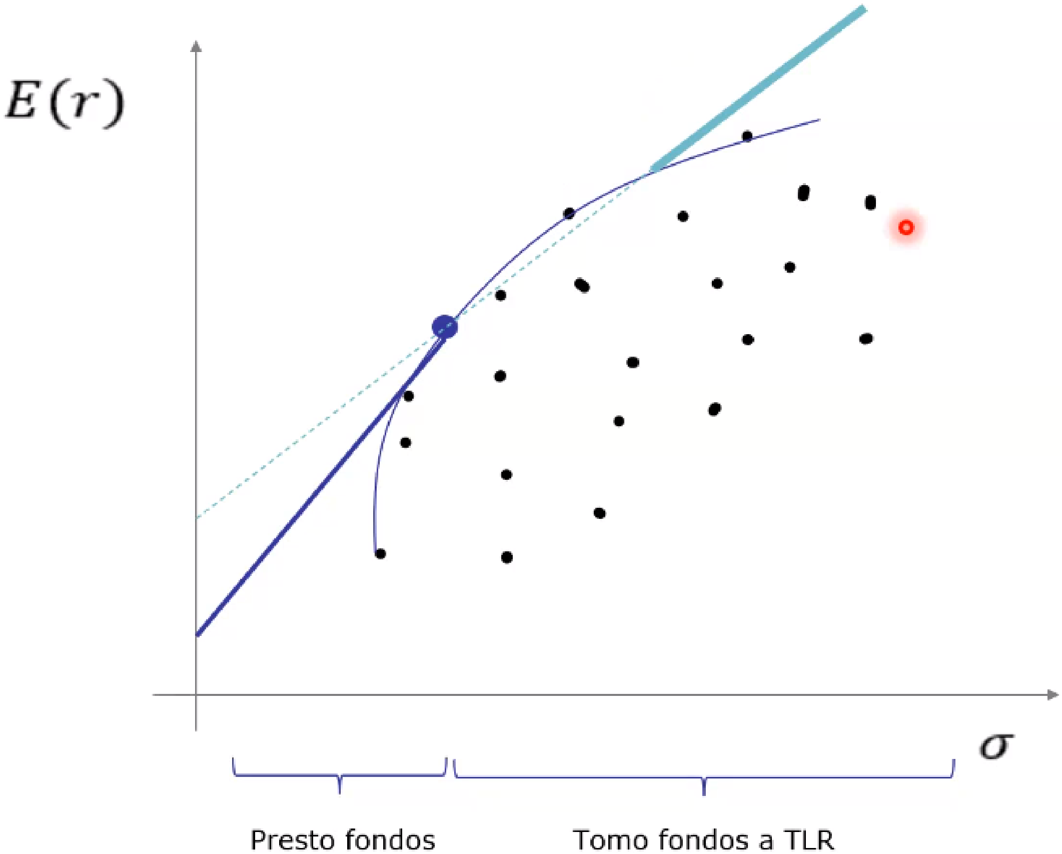
La cartera de riesgo que van a elegir los inversores será la misma, luego se moverán sobre la recta de CAL, y decidirán en base a cuando se quieren endeudar a libre de riesgo.

Existe una cartera de mercado que me permite maximizar la utilidad independientemente de mis preferencias de riesgo y es aquella que es tangente a la frontera eficiente.

Eso implica maximizar la pendiente de la Capital Allocation Line



Esta cartera está formada por todos los activos que operan en el mercado y la proporción que esta invertida se corresponde a la misma proporción de la que significa ese activo en la cartera total.



IA

Levanto el siguiente supuesto del modelo CAMP.

Lo que muchas veces sucede es que pasaría si la tasa a la cual puedo prestar fondo no es la misma a la que a mí me prestan.

El modelo CAMP no considera distintas tasas libres de riesgo. Desde la lógica, los modelos tienen supuesto y en la práctica vemos que sucede que pasa si levantamos ciertos supuestos.

Hay dos tasas libres de riesgos. La tasa a la que presto fondo (más alta) y una tasa que me prestan (más baja),

Si la tasa libre de riesgo sería la recta punteada, si pido prestado fondo, voy a poder moverme en la parte verde agua (y en la punteada debajo de la curva, pero no tiene sentido porque podría alcanzar combinaciones de inversión mejor).

Si yo tuviera invertir mis posibilidades son, la línea azul (si pido plata prestada) y la línea verde.

Si pido prestado me muevo en la verde agua.

Moverme en la parte punteada no tiene sentido.

Modelo CAMP

El modelo considera que en un mercado competitivo todas las inversiones se sitúan sobre la SML (Security Market Line).

De manera teórica, SML es la recta que maximiza la pendiente de la CAL, siendo tangente a la Frontera Eficiente. En lugar de medir el riesgo en funcion de la volatilidad de la cartera, lo hace en funcion de la correlación del riesgo del mercado.

Ahora, considerando que todos manejar igual información en el mercado y el mercado estan en equilibrio. Es decir, considerando que todos manejan igual información en el mercado y el mercado está en equilibrio. La cartera de mercado es la cartera donde tenemos todos los activos del mercado en ponderación proporcional a su valor.

¿Cómo es el modelo Security Market Line?

Entonces, se construye una security market line que relaciona el rendimiento esperado de un activo y el Beta

$$E(r_i) = r_f + \beta_i \cdot (E(r_m) - r_f)$$

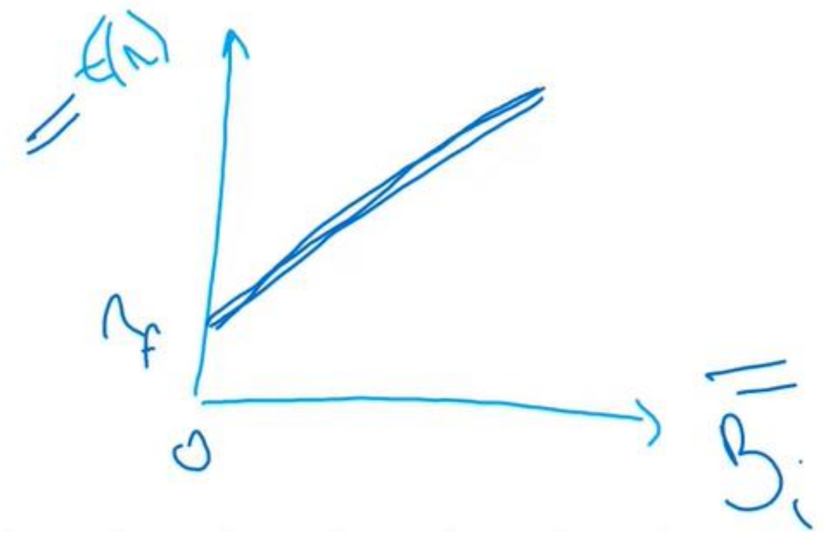
El beta suele calcularse por regresión lineal contra los rendimientos del mercado. Conceptualmente por modelo:

$$\beta_i = \frac{\sigma_{i,m}}{\sigma_m^2}$$

Lo que me interesa es como el activo se correlaciona con el mercado.

Básicamente tengo también una recta. Se calculan esos Betas como una regresión lineal.

La recta va a estar dada por una ordenada al origen (Tasa libre de riesgo) + Beta por la diferencia entre el rendimiento y cartera de mercado y la prima de riesgo.



Veo una relación lineal entre rendimiento de la cartera de merado y rendimiento de un activo en particular.

Por modelo, la beta termina siendo la covarianza del activo de la cartera de mercado divido la varianza del mercado.

Condiciones / Supuestos modelo CAPM

1. Individuos aversos a riesgo que maximizan la utilidad esperada de la riqueza futura
2. Inversores tienen expectativas homogéneas, son tomadores de precio y consideran la distribución normal de los retornos
3. Existe un activo libre de riesgo al cual pueden tomar o prestar fondos
4. Existe una cantidad fija de activos y son perfectamente divisibles
5. No existen fricciones en el mercado y la información está disponible para todos los activos
6. No existen imperfecciones en el mercado: impuestos, costos de transacción, prohibiciones de venta a corto.

! Existen extensiones del modelo que levantan estos supuestos de a uno

Pasos a seguir:

1. Parte de combinar una inversión de "a" en el activo riesgoso y el resto en la cartera de mercado

$$E(r_C) = a \cdot E(r_i) + (1-a) \cdot E(r_m)$$

$$\sigma_c = \sqrt{a^2 \cdot \sigma_i^2 + (1-a)^2 \cdot \sigma_m^2 + 2 \cdot a \cdot (1-a) \cdot \sigma_{im}}$$

2. Calculamos sensibilidad del riesgo y del rendimiento cuando modificamos la proporción invertida en el activo

3. Asumiendo un mercado en equilibrio, a debería ser igual a 0

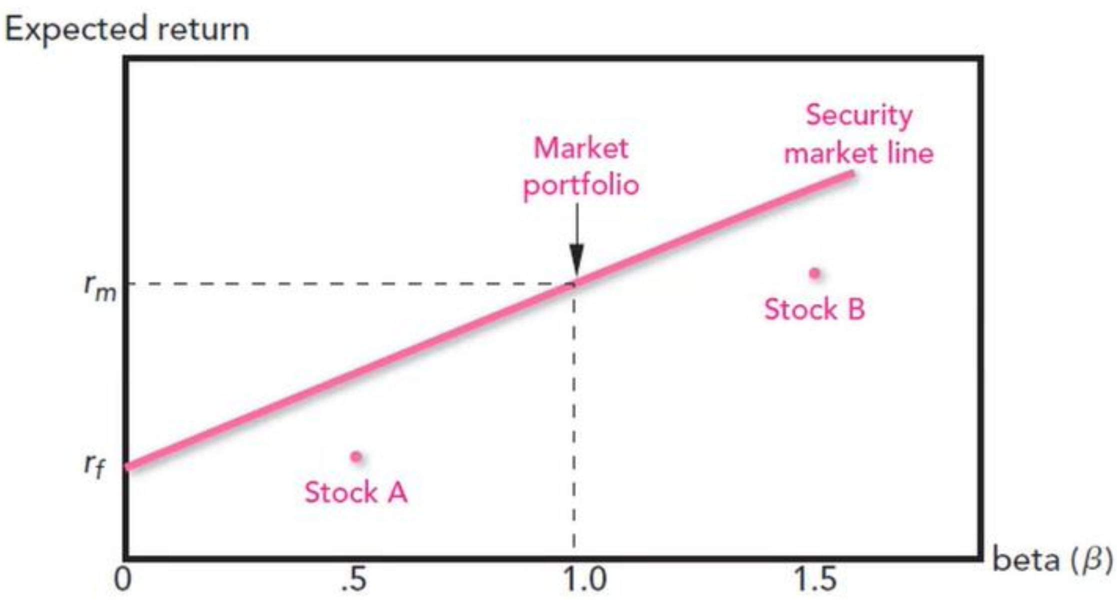
$$\left.\frac{dE(r_C)}{da}\right|_{a=0} = E(r_i) - E(r_m) \qquad \left.\frac{d\sigma_c}{da}\right|_{a=0} = \frac{\sigma_{im} - \sigma_m^2}{\sigma_m}$$

4. En equilibrio, el mercado está sobre la CML, que mide la relación entre retorno y volatilidad. Podemos aproximar cómo cambia el rendimiento ante un cambio en la volatilidad, todo generado por una participación mayor en el activo

$$\frac{dE(r)}{d\sigma} \cong \frac{dE(r)/da}{d\sigma/da}$$

$$\frac{E(r_m) - r_f}{\sigma_m} \cong \frac{E(r_i) - E(r_m)}{(\sigma_{im} - \sigma_m^2)} \cdot \sigma_m \Rightarrow \boxed{E(r_i) = r_f + \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2} \cdot \left(E(r_m) - r_f\right)}$$

SML



Repaso clase anterior

En la duration se usa siempre la TIR (tanto bono real como bonos teóricos).

El t siempre depende en función de qué estemos midiendo la sensibilidad entonces ese tiempo, si nosotros lo que estamos usando es una tasa efectiva mensual, el tiempo será meses, pero lo que se determina es la sensibilidad de la tasa mensual.

La duration viene de la derivada entonces cuando se hace:

$$B = \sum FF_t * e^{-yt}$$

Cuando se calcula la derivada del bono con respecto a "y" queda:

$$\frac{dB}{dy} = \sum FF_t * e^{-yt} * (-t)$$

Si la tasa, es una tasa anual, la t será un t anual.

Si medimos meses entonces será:

$$\frac{dB}{dy} = \sum FF_t * e^{-yt} * (-t)$$

La "y" será anual

1/12

En tasas continuas, el t se mide en periodos de año.

Si, ahora, tengo una tasa efectiva y el bono es la suma de flujo de fondos por:

$$B = \sum FF_t * \frac{1}{(1+y)^t}$$

Si mi tasa efectiva y estoy midiéndolo en meses

$$B = \sum FF_t * \frac{1}{(1+y)^t}$$

Representa meses

Tasa efectiva mensual

Si la tasa fuera nominal anual y pagamos mensual:

$$B = \sum FF_t * \frac{1}{(1+\frac{y}{12})^t}$$

Y el t serán los meses.

La tasa de mercado para calcular la duration es la TIR.

FRA's y Swaps

Mercado de derivados para cobertura de riesgos

Cobertura de riesgo de tasa

Dos instrumentos:

- FRA
- Swaps

FRAs

Definición:

Los FRAs (forward rate agreements) es un contrato por el cuál entre dos partes se fija un intercambio de tasas en un momento futuro del tiempo.

Se firma hoy y yo me pongo de acuerdo con mi contraparte para hacer un intercambio de tasas en el futuro (entre t1 y t2).

Esa tasa que se intercambia involucra que una de las partes le pague a la otra una tasa determinada. Una tasa que se fija en el momento 0 y la otra le pague la tasa que esté vigente en el mercado.

Tengo dos personas, A y B, firman el contrato en el momento cero y luego intercambian un flujo de fondos sobre un nominal por la tasa de interes que va a estar vigente entre t.

A le paga a B una tasa fija (que se determina al momento del contrato)

Y B le va a pagar a A la tasa de mercado que este en el momento (se pone a qué tasa se hace referencia).

Se firma en cero (no hay erogación de fondos). La erogación se da cuando se finaliza el periodo del contrato (puede ser t1 o t2). Normalmente se da en t1 cuando ya es cierta a tasa fija y la tasa de mercado que esta vigente entre los dos periodos.

¿Para qué sirve entrar en este contrato?

Si lo pienso desde el lado de cobertura, lo que puedo tener es que en ese momento del tiempo (entre t1 y t2) tengo algun ingreso a tasa fija y una obligación a tasa variable (de mercado). Mas allá del FRA, tengo otras cosas en mi patrimonio y entre esas cosas me generan ingresos a tasa fija, pero yo tengo que pagar a tasa variable con lo cual tengo incertidumbre de cuál va a ser el resultado.

Para que este instrumento sea funcional entre A y B, lo que tendrían que tener es una estructura patrimonial o necesidades que sean opuestas. Uno no tiene problema en tener una erogación a tasa fija, pero necesita recibir ingresos en tasa variable y la otra parte deberia estar dispuesta a lo contrario.

Una posibilidad (o razones) es una estructura patrimonial determinada que hace que tenga esa necesidad de intercambio. Por ejemplo, yo puedo saber hoy que en t1 voy a recibir mercadería o pagarla y la plata no la tendré en t1 sino en t2 por lo tanto necesito un préstamo en t1.

Dejando de lado la estructura patrimonial se puede pensar como "voy a necesitar un préstamo en t1 para comprar mercadería" esa plata la voy a poder devolver en t2. Yo no quiero asumir riesgo de tasa. Entonces entro en un Fra donde pago una tasa fija y recibo una tasa variable. Lo que hice fue fijar la taa fija de ese préstamo que voy a tener que pedir. Por mas que lo pida a tasa variable del mercado, esos fondos los recibos por el FRA.

Siempre que se piense el FRA como instrumento de cobertura, me estoy cubriendo de algo. Yo uso el FRA para cubrirme.

¿Para que uso el FRA? Para que, utilizado, en conjunto con otras cosas, pueda eliminar el riesgo de tasa.

Por si solo el FRA no cubre nada (es solo un intercambio de fondos entre t1 y t2) que tiene un riesgo de tasa para las dos partes.

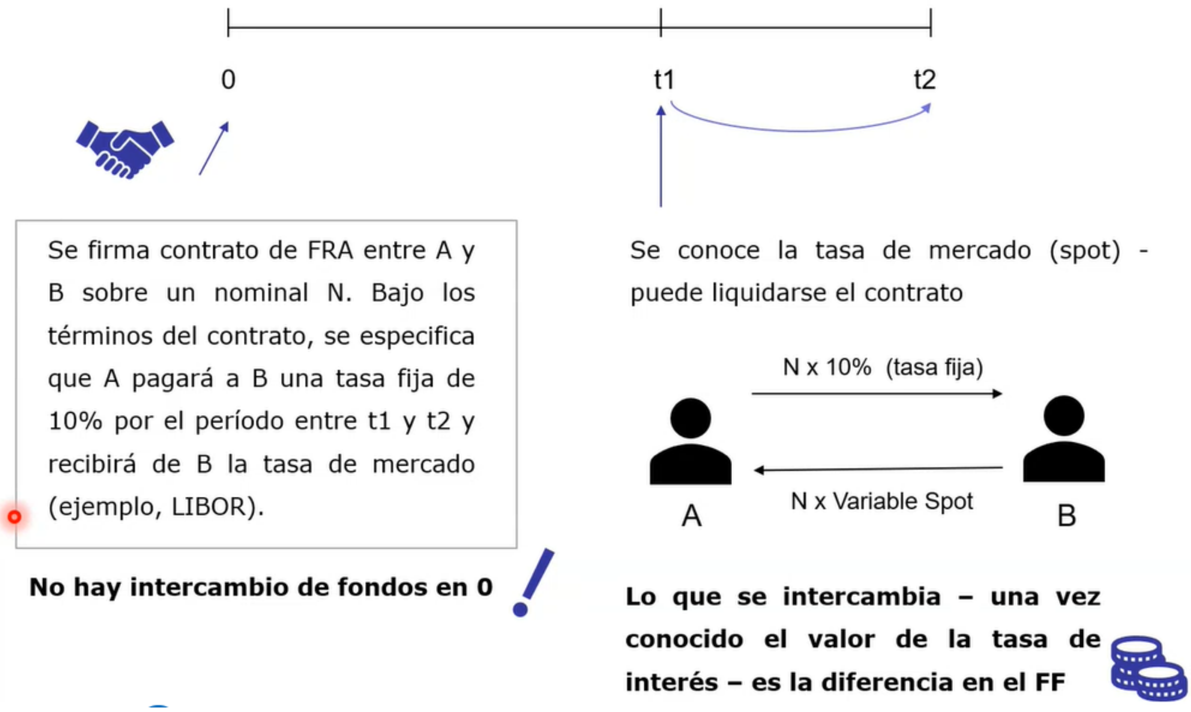
Porque si la tasa es mas alta que la fija, uno sale perdiendo y el otro ganando (o viceversa).

Entonces el FRA por sí solo no cubre el riesgo de tasa, es un instrumento que me permite cubrir riesgo de tasa si yo lo tengo en algún lado.

Cuando fijo ese intercambio al momento cero, lo que voy a tener que establecer en ese contrato es cuál es el nominal que voy a hacer referencia, cuál es la tasa que se va a intercambiar y por qué periodo (cuál será t1 y t2).

Se intercambia, entonces, un flujo cierto (la tasa fija) por un flujo incierto (tasa variable) sobre un nominal de referencia.

Puede ser entre parte o puede intermediar una institución financiera.



Ahora, visto solo el FRA (sin ningún otro instrumento al lado) tiene riesgo de tasa. Ese riesgo está ligado en función a como se mueven las tasas.

SI lo miro en conjunto y digo que me sirve como cobertura de riesgo, es porque tengo un problema que quiero mitigar. Lo que hago al entrar en el FRA es entonces eliminar la incertidumbre. Independientemente lo que pase con la tasa, yo estaré pagando lo mismo.

FRA

Tasa fra:	10%	*(Tasa efectiva entre t1 y t2)*
Nominal	$ 100.000,00	

A: Paga tasa fija
B: Paga tasa variable

Entonces si la tasa está por arriba de 10%, A sale ganando y recibe fondos. B sale perdiendo.
Si la tasa está por debajo de 10% el escenario es al revés

Entonces si vemos el FRA solo, hay un componente de riesgo que dependerá de las tasas que se intercambien.

Si la tasa de mercado es del 12%

El flujo de fondos de:

A:	$	2.000,00
B:	-$	2.000,00
Suma:	**$**	**-**

A necesitaba pedir en t1 un prestamo por $ 100.000,00
No quiere tener riesgo de tasa (quiere eliminar incertdumbre).
Ya en el momento cero quiere saber cuanto va a pagar.

Cuanto paga de interes por el prestamos en t1	-$ 9.000,00
Cuanto recibe del FRA	-$ 1.000,00

¿Cuánto es la erogación de fondos total? -$ 10.000,00 -10%

En el nominal es una tasa del 10%

Si yo juego y vario la tasa de mercado, lo que cambia es el flujo de fondos pero no cambia el flujo de fondos total (los 10.000$)

Sabiendo que existe necesidad de tomar un préstamos de valor N en t1 – y queriendo tener certeza del riesgo de tasa – A entra en un FRA por el que intercambia una tasa fija del 12% por la tasa de mercado de referencia (correlacionada con la que puede endeudarse).

Toma préstamo por N a la tasa de mercado, con vencimiento en t2.

Se liquida el FRA, obteniendo – o pagando – N * (Tasa Mdo – Tasa Fija)

Flujo de intereses: N * (Tasa Mdo – Tasa Mdo + Tasa fija) = N * Tasa fija

! **Cuando hablamos del éxito de una estrategia de cobertura no estamos pensando si a futuro tenemos una ganancia o una pérdida sino si minimizamos el riesgo/incertidumbre**

Valuación

Si se firmó un contrato y hubo un consenso acerca de la tasa de intercambio (por ejemplo del 10%), en el momento cero no va a haber intercambio pero si existe un acuerdo en función a la tasa.

Cuando hablamos de la valuación del FRA en general se habla de dos momentos:

- Primer escenario: Determinación de la tasa (cuando se firma). Yo tengo que elegir la tasa tal que los dos estén de acuerdo con ese valor. De alguna manera lo que implicaría es que el valor actual de ese contrato sea cero para las dos partes.
- Segundo escenario: El contrato ya existe, y quiero evaluar cuanto vale para mi tener ese contrato.

Al momento de poner precio se va a evaluar con no arbitraje, es decir, se pone un precio en equilibrio que sea justo para que no permita arbitrar en el mercado osea tener una ganancia sin riesgo.

Para evaluarlo, veo si existen maneras distintas de hacer la misma cosa.

La idea de no arbitraje me indica que, si yo tengo dos maneras distintas de alcanzar el mismo resultado, esas dos maneras deberían valer hoy lo mismo.

El supuesto que consideramos es que podemos tomar y prestar fondos a la misma tasa.

Primer escenario:

Entonces comenzaremos con:

- Ponerse de acuerdo con la tasa a intercambiar:

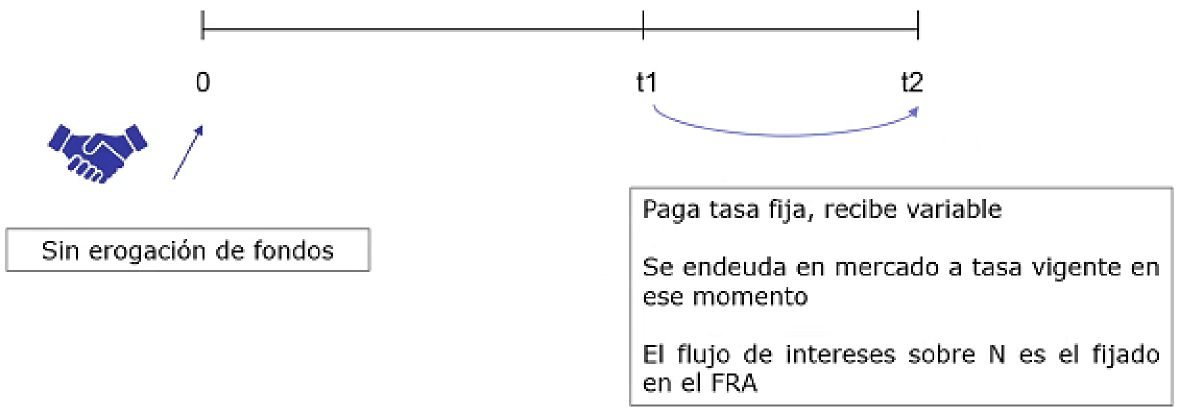
La manera que tengo es que voy a poder arbitrar. Entonces, la tasa que se fija debería ser aquella que no permita arbitrar (que no pueda obtenerse ganancia sin riesgo)

¿Cómo, entonces, fijo la tasa que voy a pagar al momento t1?

-A través del FRA

Objetivo: Fijar la tasa a **pagar** en un período entre t1 y t2 sobre un nominal de N

<u>Alternativa 1</u>: Entrar en un FRA para pagar tasa fija sobre el nominal N



-A través de un préstamo hasta t2 (desde cero) y la invierto desde cero hasta t1.

Tengo en t1 los 100.000, por lo tanto, pediría → 100.000 * FD entre 0 y t1.

(pido x cantidad de plata, tal que, en t1 tenga 100.000)

En t2 devuelvo lo que pedí original (100.000 * FD entre 0 y t1) por el factor de capitalización entre cero y t2.

Pido:

$$100{,}000 * FD_{(0,t1)}$$

Devuelvo:

$$100{,}000 * FD_{0,t1} * FC_{0,t2}$$

Es lo mismo que uno sobre la inversa del FC.

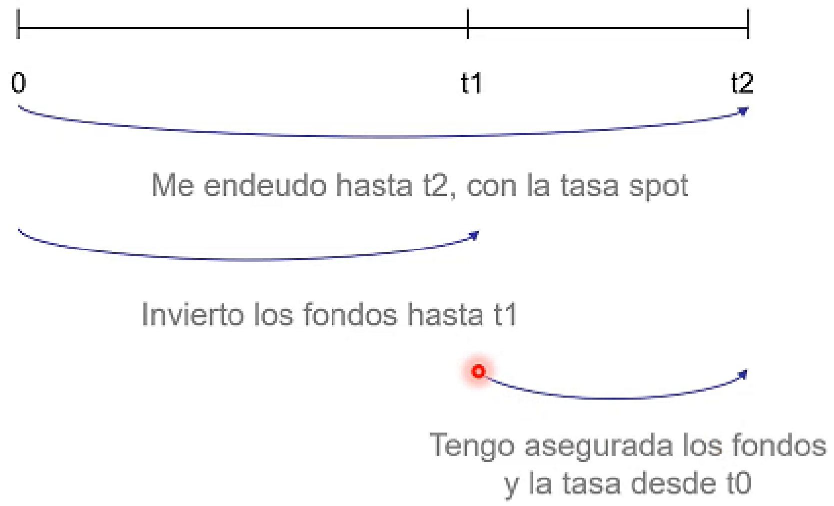
$$\frac{FC_{0,t2}}{FC_{0,t1}}$$

Es decir, será la tasa forward entre t1 y t2.

Alternativa 2:

Me endeudo hoy hasta t2, asegurándome los fondos y la tasa entre t1 y t2

Como no requiero de los fondos hoy, los invierto hasta t1



Terminaré pagando la tasa forward.

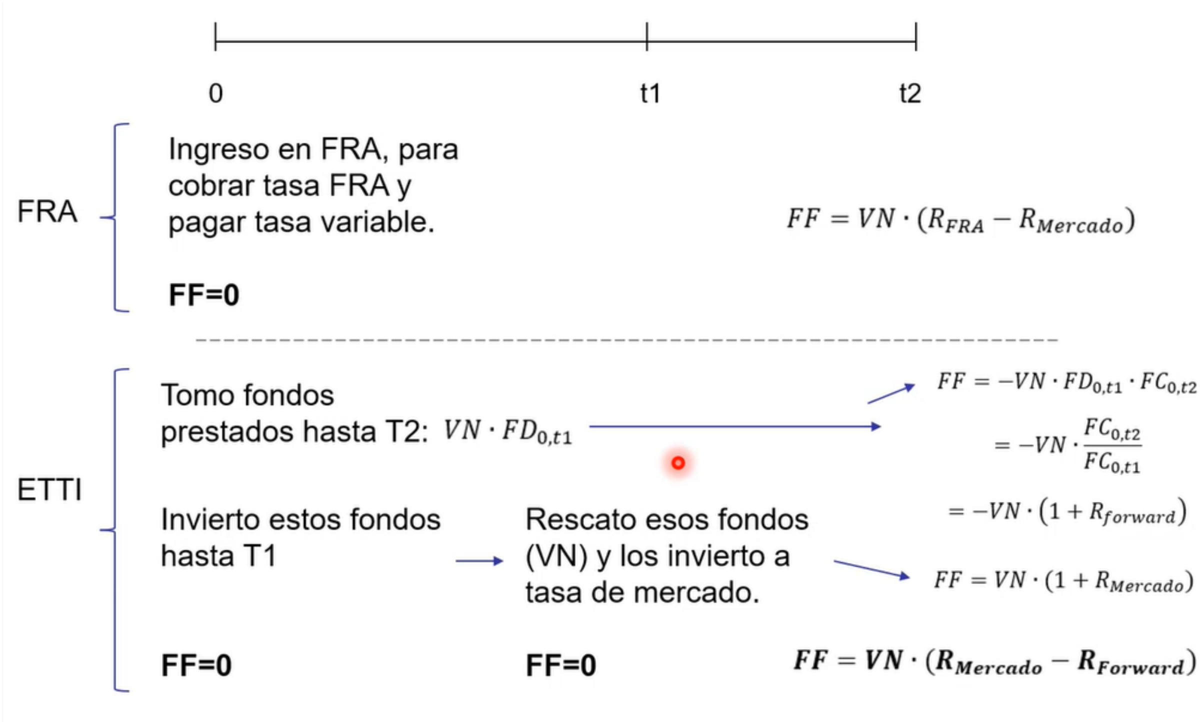
Entonces la tasa que yo firme al momento de entrar en el FRA es la tasa forward ya que el que no me permite arbitrar.

¿Qué sucede si la Tasa del FRA es MAYOR a la forward?

Quiere decir que tendré una manera de ganar plata sin hacer nada.

Puedo obtener una ganancia sin riesgo. Se ajustarían los precios de mercado al estar operando todos en la misma posición. La Tasa FRA es alta con respecto a la Tasa Forward con lo cual puedo fijar la tasa Fra para cobrar y fijar la tasa forward para pagar.

Si se diera esta situación, me conviene cobrarla (porque la tasa está alta). ¿Necesito cubrirme la tasa? No.



En el lado de B se para desde la FRA y quiere cobrar la tasa fija y por el lado de lado de A (por el lado de la ETII) y se paga.

Lado B

Por el lado del FRA me posiciono del lado de B que era el que pagaba la tasa variable y cobraba la fija.

Cobro la tasa FRA y pago la variable. Al momento t2 mi FF será el valor nominal por la diferencia entre la tasa FRA que cobro menos la tasa de mercado que es lo que voy a pagar.

Lado A

Entro y armo mi posicion desde la Estructura temporal de Tasas de interes y hago lo que haría A si no quisiera entrar en el FRA.

Me endeudo hasta t2, lo hago por un monto de el valor nominal por el factor de descuento entre t0 y t1. Estos fondos, los devuelvo en t2.

¿Cuánto devuelvo en t2?

Lo que pedí prestado menos el valor nominal por FD entre 0 t1 por el FC entre 0 y t2

$$FF = -VN \cdot FD_{0,t1} \cdot FC_{0,t2}$$

$$= -VN \cdot \frac{FC_{0,t2}}{FC_{0,t1}}$$

$$= -VN \cdot \left(1 + R_{forward}\right)$$

Por otro lado, esos fondos los invertí hasta t1 y los invertí a la tasa de mercado. El FF es VN* (1+ Tasa de mercado).

$$FF = VN \cdot (1 + R_{Mercado})$$

El Flujo total que tengo en FRA es $FF = VN \cdot (R_{FRA} - R_{Mercado})$

El Flujo total que tengo por ETTI es $\boldsymbol{FF = VN \cdot (R_{Mercado} - R_{Forward})}$

El flujo de fondos total de mi estrategia FRA + ETTI

$$FF = VN \cdot (R_{Mercado} - R_{Forward}) + VN \cdot (R_{FRA} - R_{Mercado})$$

$$FF = VN \cdot (R_{FRA} - R_{Forward})$$

Este flujo de fondos final es cierto desde el momento cero. Entonces, si se diera esta situación, yo tendría una ganancia cierta sin riesgo.

Conclusión:

La tasa RFRA debe ser lo mismo a la tasa RForward.

¿Qué sucede si la Tasa del FRA es MENOR a la forward?

Puedo, nuevamente, obtener una ganancia sin riesgo. Se ajustarían los precios de mercado al estar operando todos en la misma posición.

La tasa FRA es baja respecto de la forward, con lo cual puedo fijar la tasa FRA para pagar fondos y fijar la tasa forward para inversión.

Segundo Escenario

El segundo momento de valuación del FRA es en cualquier momento del tiempo hasta t1.

Si bien, al momento inicial el FRA vale 0 (y por este motivo no hay erogación de fondos) el valor del contrato será menor o mayor dependiendo de como evolucione la curva de tasas.

Lo que se compara es el flujo de fondos en función a la tasa forward en función de cómo se han movido las tasas.

Se compara, entonces, el flujo de fondos que tengo hoy vs el FF que me generaría un FRA si yo entrara en ese contrato hoy.

$$FRA_{paga\ var.} = VN \cdot \left(R_{FRA} - R_{forward}\right) \cdot FD_{val,t2}$$

$$FRA_{paga\ fija} = VN \cdot \left(R_{forward} - R_{FRA}\right) \cdot FD_{val,t2}$$

Dependen de la estructura de tasas al momento de la valuación.

! Considerando las tasas como efectivas

Para el escenario del que paga tasa variable, la diferencia está hecha entre la tasa que va a recibir en función del contrato (la tasa FRA) menos la tasa que recibiría si entrara en el contrato hoy (la tasa forward para el mismo periodo).

Recibo la tasa fija Fra (R_{FRA})) pero en función de que pasaría si yo entro en el contrato hoy, recibiría la tasa forward (($R_{forward}$). Por lo tanto, esa diferencia multiplicada por el Valor Nominal y descontados a hoy (por factor de descuento entre el momento de valuación y t2) es lo que sería el valor del FRA.

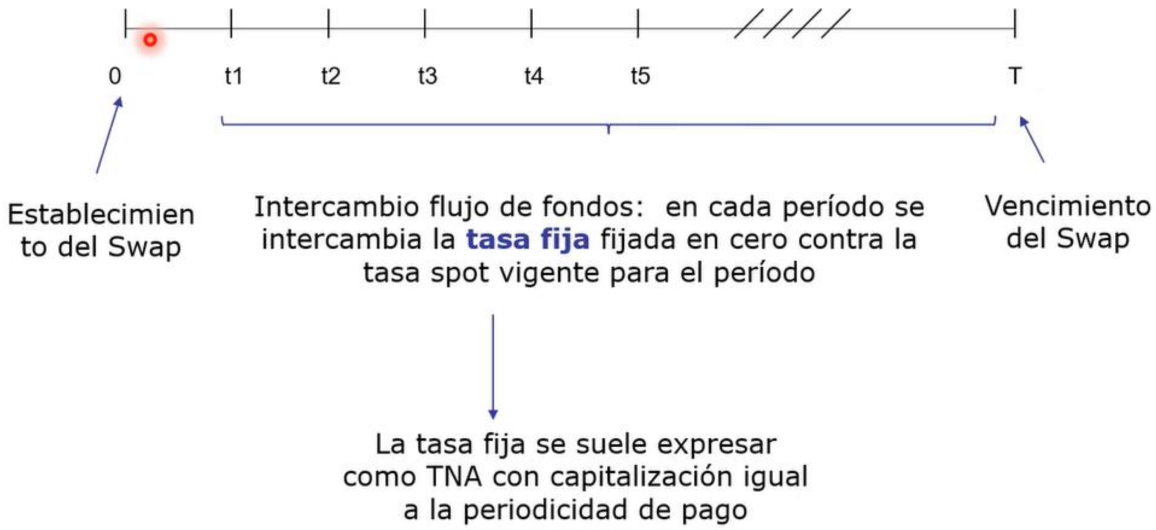
Como paga variable, si la tasa forward baja, respecto de la que había, va a estar ganando. Caso contrario le paga al que pasa tasa fija.

SWAPS

Un Swap es un acuerdo entre dos partes para intercambiar flujos de efectivo en el futuro. En el acuerdo, se definen fechas de pago, el periodo de vigencia y la forma del cálculo.

En el caso particular de un swap de tasas de interes, la forma de cálculo depende de una tasa de interés de referencia.

Puede pensarse como una sumatoria de FRA's en donde, en cada fecha de pago se intercambian (sobre un nominal determinado) una tasa fija por una tasa variable tomada como referencia.



Yo firmo en el momento 0 que durante algún periodo futuro entre t1 y T se va a intercambiar entre las dos partes una tasa fija por una tasa variable.

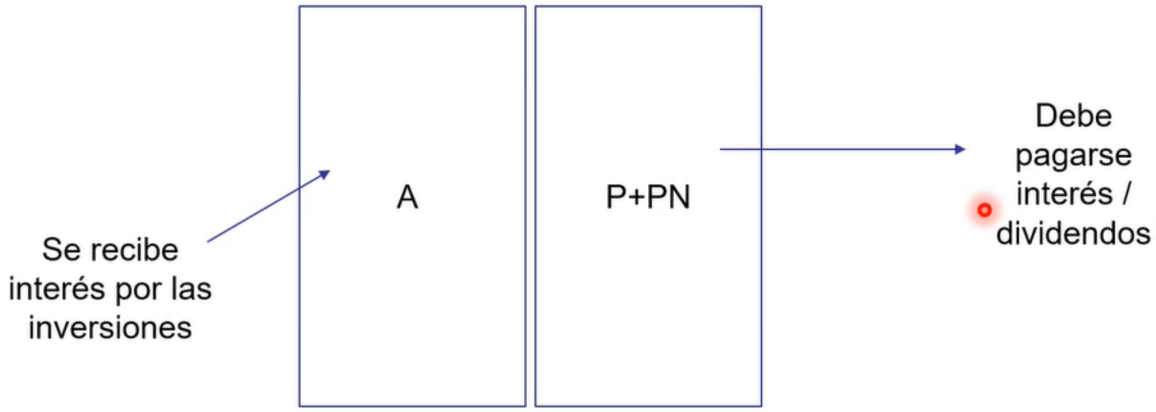
Lo que se cambia en cada uno de los puntos es la tasa fija que se firmó al principio por la tasa spot que esté vigente en el momento para el periodo. A diferencia de tener muchos FRA's, esos muchos FRA's los puedo estar armando a tasas FRA's diferentes (a la forward que corresponda a cada periodo).

Cuando armo un Swap, la tasa fija que se intercambia durante cada uno de los momentos del tiempo es siempre la misma. La fija queda constante y lo que cambia es la tasa variable que se va a intercambiar en cada uno de los momentos del tiempo.

Como en el caso de los bonos, la tasa fija se expresa como tasa nominal anual con capitalización igual a la periodicidad del pago.

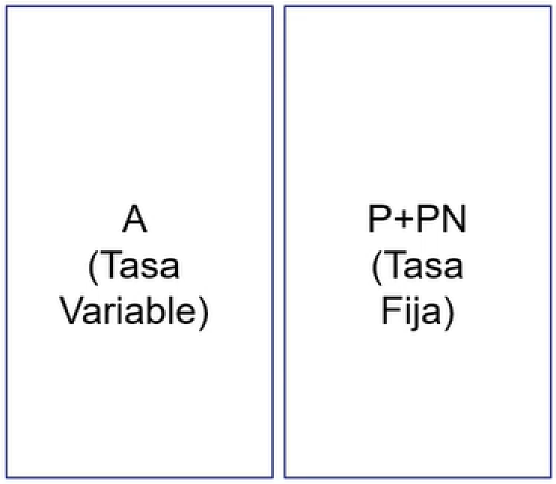
SWAPS como Cobertura

Un uso habitual es para cambiar la composición de balance sin tener riesgo de VN, reduciendo el riesgo de tasa.



El swap me ayuda a modificar mi estructura de balance o mi estructura patrimonial. En general, cuando miramos una estructura patrimonial, tenemos activos que financian a pasivo y patrimonio neto. Los activos reciben intereses por inversión. Por el lado de pasivo y patrimonio neto, tengo que pagar intereses o dividendos (en caso de empresas).

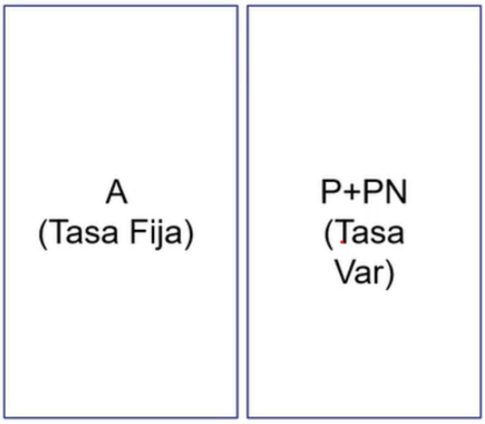
Ejemplo 1:



Supongo que tengo un activo a tasa variable, con lo cual lo que tengo de inversiones esta a la tasa de mercado. Tengo, a su vez, deudas a tasa fija.

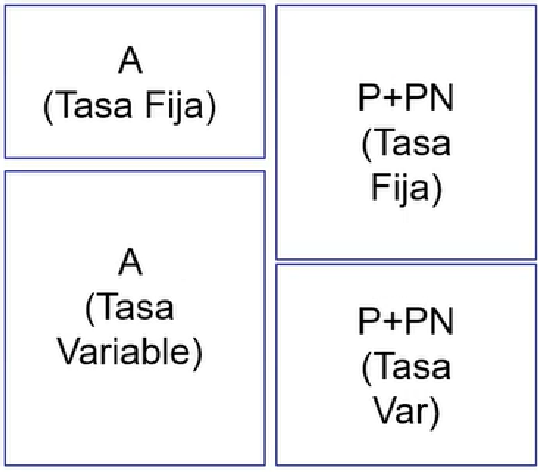
Existe riesgo de tasa porque si la tasa sube, lo que me sucede es que recibís más activos. Si baja, empezamos a mantener las mismas obligaciones, pero la tasa variable empieza a ser pobre para hacer frente a mis obligaciones. Estamos frente a un problema por la baja de tasas.

Ejemplo 2:



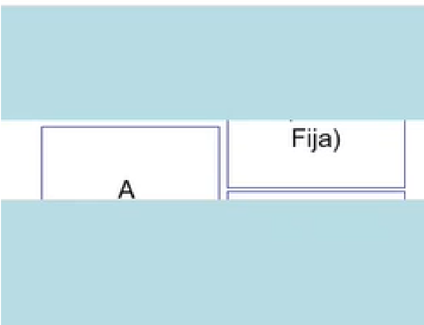
Mi riesgo ahora está en la suba y no en la baja.

Ejemplo 3:



En este ejemplo sigo teniendo riesgo de tasa pero lo tengo por un exposición menor a la anterior.

En este escenario la Tasa Fija de A se compensa con la Tasa fija de P+PN y la tasa variable de A se compensa con la tasa variable de P+PN



Entonces lo que queda es un gap de Activo a tasa variable y deuda a tasa fija.

Es más chica mi exposición a riesgo de tasa. Mi riesgo es también a que mi tasa baje.

SWAPS como Ventaja comparativa

Revisa cuales son las posibilidades de endeudamiento de los distintos agentes y como pueden entrar en un swap para pagar menos de tasa de interes.

El uso de Swap por ventajas comparativas supone que distintos agentes (de diferente riesgo) tienen una ventaja comparativa en endeudarse en el mercado a tasa fija o tasa variable.

	Tasa Fija	Tasa variable
A	4%	Libor + 0.3%
B	5.20%	Libor + 1%
Spread	1.200%	0.70%

Siendo B más riesgoso que A, paga menos *spred* por riesgo al endeudarse a tasa variable respecto a endeudarse a tasa fija.

Las tasas a las que accede B son mas altas que las tasas a las que accede A. De alguna manera B tiene un nivel de riesgo mayor al de A y por eso al momento de endeudarse le cobran más.

Cuando quiero mirar que tanto más es lo que le cobran, B paga 1,2 puntos porcentuales que A en tasa fija pero solo 0,3 p en tasa variable.

Lo que le convendría a B es endeudarse a tasa variable porque está pagando un spred menor. A "A" le convendría endeudarse a tasa fija.

La foto me indica:

A debe endeudarse a tasa fija

B debe endeudarse a tasa variable.

Puede que esto se mezcle, y si bien A le conviene a tasa fija, quiere endeudarse a tasa variable. Y lo mismo con B.

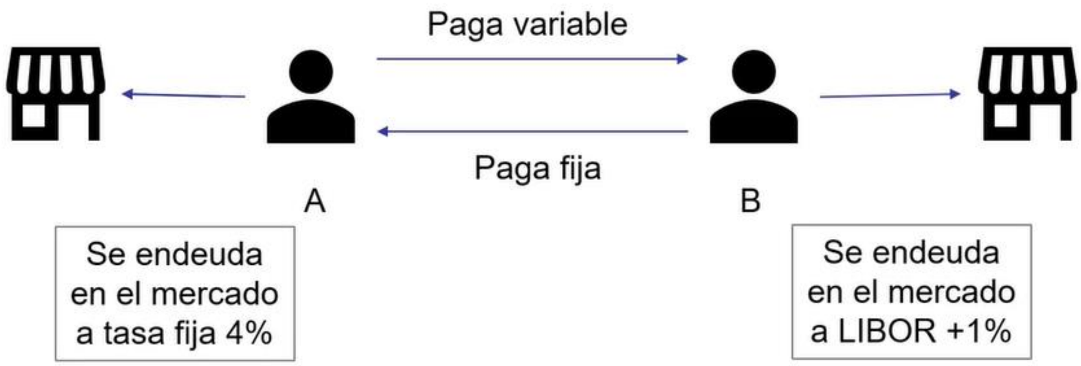
En este caso entran en el swap para aprovechar la mejor tasa.

La ventaja comparativa plantea entonces que, si estoy parada en esa situación, A sale a financiarse al mercado y recibe un préstamo. Lo que reciba, le convenía endeudarse a tasa fija, y B lo contrario. Entonces si cada uno se endeuda a a tasa que quiere, podrían entrar en un swap. Con lo cual B paga una tasa fija y A paga una tasa variable.

En el caso anterior, por más que B quiera endeudarse a tasa fija le conviene hacerlo a tasa variable.

Si después, por su estructura de ingresos, quiero tener egresos a tasa fija, puede entrar en un Swap.

La contraparte debe tener una situación opuesta.



Lo que se hace entonces es ver cuanto es lo que gana cada uno.

Lo que se ahorran es la diferencia del spred entre 1,2 y 0,7. Osea 0,5.

Estan yendo por la que les conviene en lugar de las que buscan. Esa diferencia de spred es la que van a buscar ganar.

Entonces, ese spred de 0,5 gana la mitad cada uno (0,25).

Se vana ahorrar 0,25 en la tasa que tendríamos que pagar para el endeudamiento que queremos.

A se endeuda a tasa fija pero se quería endeudar a tasa variable por lo tanto, lo que a pagará en su foto final es:

Libor + 0.3% – 0.25%

B se endeuda a tasa variable, pero se quería endeudar a tasa fija, por lo tanto:

5.2% - 0.25%

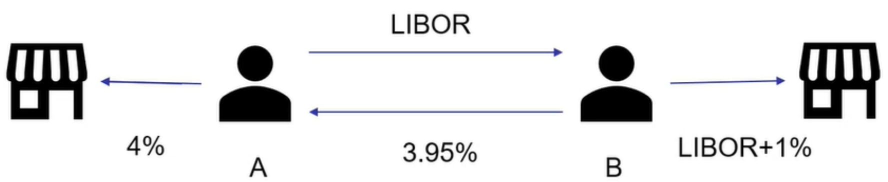
Los pasos se podrían resumir como:

1) Entender que le conviene a cada uno.
2) Reparto la diferencia de spred.
3) Veo cual es el flujo total que va a tener que pagar cada uno.

$$PagoA = LIBOR + 0.3\% - 0.25\% = LIBOR + 0.05\%$$

$$PagoB = 5.2\% - 0.25\% = 4.95\%$$

Ahora, lo que se analizará es en donde ponen esa plata.



Los valores: 4% y LIBOR +1% Salen del enunciado original. Lo que se determina es cuánto es lo que se intercambia por el swap que será LIBOR * 3,95.

Si me paro en el caso de A: la cuenta deberá darme LIBOR +0.05%

¿Cómo los gasta?

4% + LIBOR (en el banco) + una parte de tasa variable que paga a B en el swap – lo que recibe del swap fijo.

$$LIBOR + 0.05 = Tasa\ variable\ que\ paga\ a\ B - Lo\ que\ recibe\ del\ swap$$

$$\cancel{LIBOR} + 0.05 = 4\% + \cancel{LIBOR} - Swap$$

$$Swap = 3.95$$

Del lado de B sería:

$$LIBOR + 1\% - LIBOR + 3.95$$

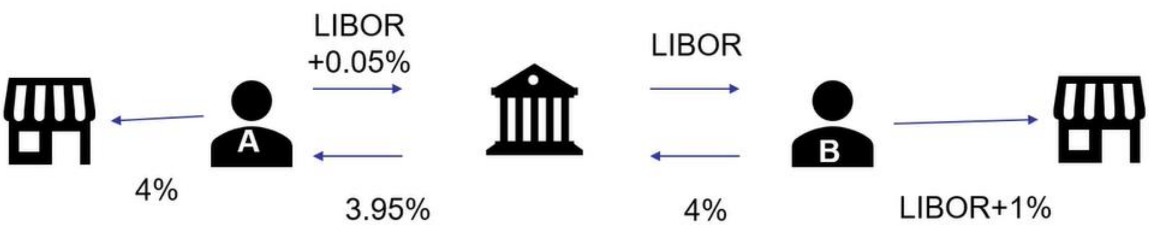
$$4.95$$

En el caso de tener una institución financiera intermediaria:

Si al caso anterior le sumamos la institución financiera que cobra una comisión del 0.1%

$$PagoA = LIBOR + 0.3\% - 0.25\% + 0.05\% = LIBOR + 0.1\%$$

$$PagoB = 5.2\% - 0.25\% + 0.05\% = 5\%$$



Valuación

Tengo dos momentos de valuación:

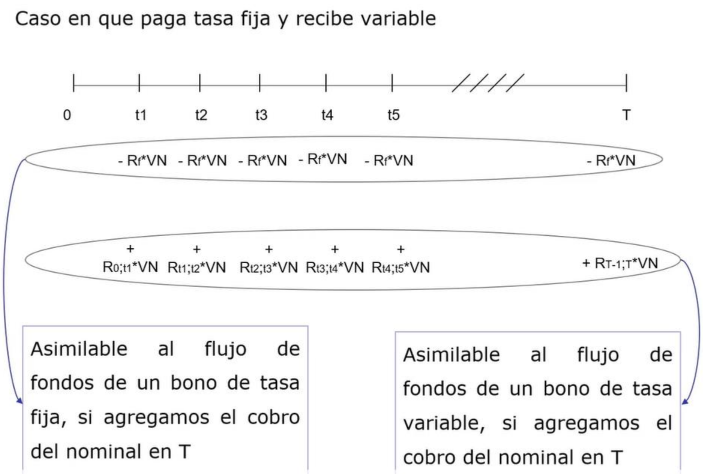
- Primer escenario: El primer momento cuando determino la tasa que quiero intercambiar
- Segundo escenario: El segundo momento es en cualquier momento de la vida del swap y quiero entender cuánto vale ese instrumento.

Primer escenario:

Si bien al momento inicial el Swap vale cero (y por eso no hay erogación de fondos) el valor del contrato será menor o mayor dependiendo de como evolucione la curva de tasas.

Podemos entender la valuación considerando que se trata de una suma de FRA's. Otra alternativa es entender a qué se asemeja el flujo de fondos.

El Flujo de Fondos que el Swap generaría:



Por el lado de la tasa fija voy pagando tasa por valor nominal en cada uno de los periodos.

$- R_f*VN \quad - R_f*VN \quad - R_f*VN \quad - R_f*VN \quad - R_f*VN$

E iré recibiendo la tasa variable que esté en el mercado en ese momento

$+ R_{0;t1}*VN \quad + R_{t1;t2}*VN \quad + R_{t2;t3}*VN \quad + R_{t3;t4}*VN \quad + R_{t4;t5}*VN$

Spot entre t0 t1   Spot entre t1 y t2 y así sucesivamente.

Este flujo de fondos se asemeja a un flujo de fondos de un bono que paga un cupón a tasa fija.

$- R_f*VN \quad - R_f*VN \quad - R_f*VN \quad - R_f*VN \quad - R_f*VN$

Si fuese un bono a tasa variable sería similar a:

$R_{0;t1}*VN \quad R_{t1;t2}*VN \quad R_{t2;t3}*VN \quad R_{t3;t4}*VN \quad R_{t4;t5}*VN$

La diferencia es que el bono incluiría al final el pago de un nominal pero fuera sacando eso, podría tranquilamente asimilarlo. Entonces lo que se suele escribir es que el valor del swap para quien paga tasa fija es:

$$V_{Swap} = B_V - B_F$$

Y para quien paga tasa variable:

$$V_{Swap} = B_F - B_V$$

Segundo escenario:

De la misma manera en la que sucede con el FRA, al momento del origen el valor swap es cero.

Determinar la tasa swap implica calcular cuál es la tasa fija que se va a intercambiar por el flujo variable.

Partiendo de la definición anterior, sería equivalente a determinar cuál es la tasa cupón de un bono a tasa fija que hace que el mismo cotice a la par:

$$VN = B_F^{Tasa\ swap}$$

Ejemplo 1

Siguiendo la ETTI del ejemplo de bonos, determinar la tasa swap para un swap de tasas con vencimiento cuatro años y que realiza pagos anuales.

Hay que buscar cual es la tasa que hace que el bono a tasa fija sea lo mismo que el bono a tasa variable. Como es al momento inicial ese bono a tasa variable vale el valor nominal al momento cero.

Debo buscar la Tasa de cupón que verifica:

$$B_f = VN$$

$$VN = \boxed{VN \cdot TasaSwap \cdot \sum_{i=1}^{4} FD_i} + \boxed{VN \cdot FD_{0,4}}$$

Valor de Flujo de Fondos que tengo por nominal

Valor de Flujo de Fondos que tengo por cupón del bono

$$TasaSwap = \frac{VN \cdot (1 - FD_{0,4})}{VN \cdot \sum_{i=1}^{4} FD_i}$$

$$TasaSwap = \frac{(1 - FD_{0,4})}{\sum_{i=1}^{4} FD_i}$$

$$TasaSwap = 6.2229\%$$

Sabemos que el valor del swap es:

$$V_s = B_f - B_v$$

A los fines de los cálculos, voy a considerar el FF que voy a intercambiar y + el valor nominal que sería lo que el bono me estaría pagando al final.

La tasa swap que calculé sale como tasa efectiva. En general, la tasa swap se suele expresar como TNA con capitalización igual a la periodicidad del pago.

G4 =(1-D7)/SUMA(D4:D7)

Periodo	Precio "Cupon Zero"	FD
1	945	0,945
2	890	0,89
3	835	0,835
4	785	0,785

Tasa swap	6,22%

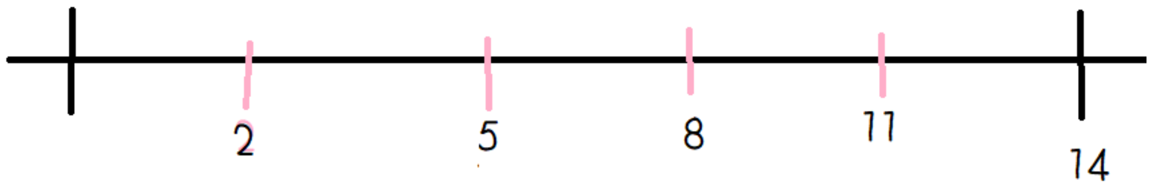
El ejemplo 2 (del libro)

7.21. Under the terms of an interest rate swap, a financial institution has agreed to pay 10% per annum and to receive 3-month LIBOR in return on a notional principal of $100 million with payments being exchanged every 3 months. The swap has a remaining life of 14 months. The average of the bid and offer fixed rates currently being swapped for 3-month LIBOR is 12% per annum for all maturities. The 3-month LIBOR rate 1 month ago was 11.8% per annum. All rates are compounded quarterly. What is the value of the swap?

Estoy en el momento intermedio de valuación

Por los datos se que al instrumento le queda un nivel de vida de 14meses.

Sabemos, a su vez, que los pagos son trimestrales:



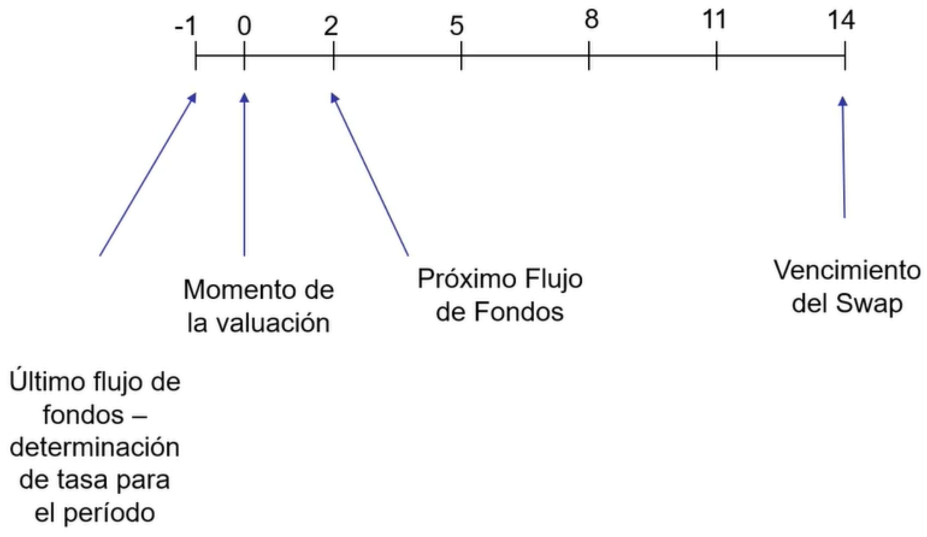
También, tenemos como dato, que pagará tasa fija y recibirá tasa variable por lo tanto el valor del swap será:

$$V_s = B_f - B_v$$

El bono a tasa fija sabemos que nos van a pagar una tasa del 10% trimestral-

Debo valuar el bono a tasa variable. No lo evalúa al momento del pago de cupón sino lo evaluó en un momento intermedio.

Por lógica (ya que el pago el trimestral) el momento del ultimo pago fue 1 mes antes de donde estoy parado ahora. Esa tasa, de hace un mes fue de 11,8%



$$B_V = (VN + k) \cdot FD$$

$$B_V = \left(100 + \frac{11.8\%}{4} \cdot 100\right) \cdot \left(1 + \frac{12\%}{4}\right)^{-2/3}$$

$$\boxed{B_V = 100.941139}$$

El valor nominal del bono es de 100.

11,8 % es la tasa vigente hace un mes dividido 4 (porque era Tasa Nominal Anual con capitalización trimestral).

Todo descontado a la tasa que tengo actualmente, que era 12% flat por lo tanto, el FD pongo primera la tasa efectiva trimestral dividido la cantidad de trimestres en un año. Eso elevado a 2 meses de tres que tiene el trimestre –

Así obtendría el precio del bono a tasa variable.

Para tasa fija,

$$VN * \frac{10\%}{4}$$

Es la tasa cupón del bono a tasa fija que es la tasa swap que ya estaba determinada que se iba a pagar.

Luego tenemos el factor de descuento para cada uno de los momentos:

$$\sum_{i=0}^{4}(1+\frac{12\%}{4})^{\frac{-3+i*3}{3}}$$

Me quedaban 5 pagos (va de cero al 4) medidos en cantidad de trimestres para aplicar el factor de descuento.

Luego le resto el nominal:

$$VN*(1+\frac{12\%}{4})^{\frac{-14}{3}}$$

Todo quedaría:

$$B_F = VN \cdot \frac{10\%}{4} \cdot \sum_{i=0}^{4}\left(1+\frac{12\%}{4}\right)^{-\frac{2+i*3}{3}} + VN \cdot \left(1+\frac{12\%}{4}\right)^{-\frac{14}{3}}$$

$$\boxed{B_F = 98.67764}$$

Una vez obtenido el valor hacemos:

$$V_{Swap} = B_V - B_F$$

$$V_{Swap} = 100.941139 - 98.67764$$

$$V_{Swap} = 2.2635$$

El valor del swap es 2,2635 millones.

Forwards y Futuros

Forwards

Introducción

Los FRA's y swap de tasas permiten administrar la incertidumbre cuando la fuente de riesgo es una tasa de interés.

Sin embargo, tenemos distintas fuentes de riesgo que podemos buscar gestionar, eliminando incertidumbre a futuro y buscando, entonces, cobertura.

Definición

Un contrato forward es un contrato derivado por el cuál se fija entre las partes un precio para el intercambio de un bien en un momento futuro T.

Es un contrato entre privados: *Over the counter*

El precio forward es el precio que se fija para el intercambio.

Firmo en el momento cero un contrato para una operación a futuro en el momento T.

Al igual que el FRA distinguimos dos momentos:

El momento de la firma y el momento de perfeccionamiento o cierre.

No existe intercambio ni erogaciones de fondos al momento inicial.

> Se firma el contrato entre A y B en donde tiene que especificarse:
>
> 1. Qué? Activo a intercambiar (cuál, cuantos, calidad)
> 2. Cuando? Vencimiento
> 3. Cuánto? Precio de intercambio
> 4. Cómo? Contra entrega o compensación
> 5. Dónde? Lugar de entrega

¿Cómo es la entrega del bien y en qué lugar?

Aquí está relacionado con:

Con entrega, lo que se va a producir en el momento T es que la persona que se había comprometido a cobrar, le da el precio que pactaron y el otro el bien que corresponda.

Spot - forward

Con compensación, lo que se intercambia no es el bien sino el flujo de fondos del bien. Yo te pago el precio que pactamos y vos me das el precio del mercado de ese bien. Se intercambia la diferencia entre los dos precios entre pecio spot o el precio forward.

Forward – Spot

Pay Off

En los contratos derivados normalmente hablamos del Pay Off del contrato como las ganancias/perdidas que genera al vencimiento.

¿Cuánto ganamos o perdemos al tener el contrato?

Nomenclatura:

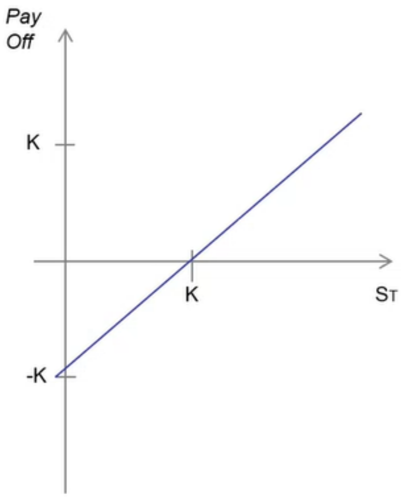
$$S_t: Precio\ spot\ del\ bien\ al\ momento\ t$$

$$F_t: Precio\ forward\ del\ bien\ al\ momento\ t$$

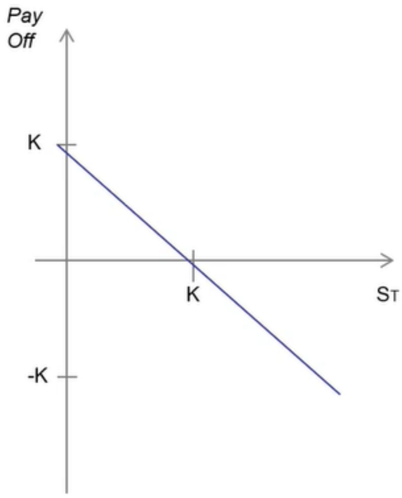
$$K: Precio\ del\ ejercicio\ definido\ por\ el\ contrato. Coicide\ con\ F0$$

Una vez que firmé ese f0 es el precio de ejercicio. Cuanto me comprometí a pagar por ese bien. En algun momento intermedio, voy a seguir comprometido a pagar K pero si firmase de nuevo el contrato, ese precio seria Ft

El pay off se suele graficar en función al precio spot.



$$PayOff = S_T - K$$

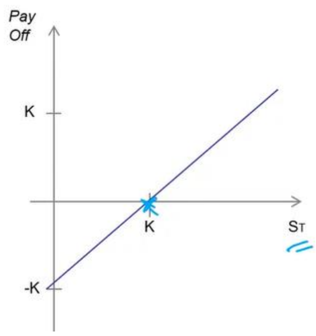


$$PayOff = K - S_T$$

Si tenemos St – k que es el que recibe el bien y paga el precio que se fijó al inicio. Se denomina posición comprada en el forward o una posición long en el forward (donde compro a futuro).

SI hablamos del lado del comprador:

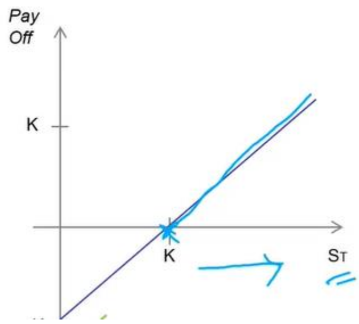
Si llegado al momento del ejercicio el precio spot del bien es exactamente igual a K. No gané ni perdí.



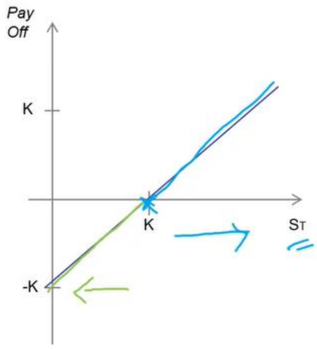
Si el precio está por encima de K, terminé ganando plata porque estoy comprando algo a K que vale más que K-

¿Cuánto gane? La diferencia entre ambas.

La línea celeste.



Si Precio < K, en ese caso estaría perdiendo plata porque estoy pagando K a algo que vale menos que eso.



SI hablamos del lado del Vendedor:

Si tenemos K-St:

En la posición de vendedor, él pierde plata si recibe K y me entrega algo que vale más y gana si el comprador le paga más de lo que vale.

Cuando nos ponemos de acuerdo en el precio que vamos a intercambiar las dos partes tienen posibilidad de perder o de ganar y se sabe que lo que gane uno, pierde el otro.

Como en el caso de FRA's y Swap, lo puedo usar como cobertura, es decir, para eliminar algún tipo de riesgo.

Determinación del Precio Forward

Tal como en el caso de los FRA's y swaps no hay intercambio de fondos inicial. El precio forward que se fije debe ser tal que no permita oportunidades de arbitraje.

El trabajar con los siguientes supuestos nos va a permitir trabajar con un único Precio Forward [Puede seguirse un razonamiento similar y levantar supuestos, pero no definiremos un único precio].

1) No existen costos de transacción.
2) Existe una única tasa libre de riesgo a la que se puede tomar o prestar dinero.
3) Estan todos los agentes sujetos a una misma tasa impositiva de ganancias.
4) Puede operarse al descubierto.

Si consideramos que no existen posibilidades de arbitraje, para fijar el precio forward vamos a comparar las alternativas que nos permitan alcanzar el mismo objetivo de fijar precio a futuro de cualquier bien.

Si no existiesen oportunidades de arbitraje, el costo de las alternativas que generen el mismo resultado tiene que ser el mismo.

Mi objetivo es comprar un determinado bien en el momento T y quiero fijar el precio hoy.

Quiero eliminar el riesgo de precio de ese bien.

Voy a comparar dos alternativas, entrar en el contrato forward y el otro, compro el bien hoy.

	0	T
<u>Alternativa 1.</u> Entro en Contrato Forward	No hay erogación de fondos	1. Pago el precio Forward 2. Recibo el bien
<u>Alternativa 2</u> Compro el bien hoy	1. Compro el bien 2. Pido fondos prestados para pagar el bien (y costos si existieran)	1. Tengo el bien y lo que generó 2. Debo abonar el préstamo

Si entro por la alternativa 1, pago el precio del forward.

Si entro por la alternativa 2, pago el préstamo que haya sacado

¿Qué debería pasar entre el precio forward y lo que voy a pagar del préstamo?

Para que no haya arbitraje, el precio del préstamo y el forward deberían ser iguales (dos formas distintas de hacer lo mismo).

Entonces lo que debería ser igual es la erogación de fondos totales.

Prestamos - ingresos + gastos → Por tener el bien antes.

Veremos a continuación algunos ejemplos con distintos activos:

CASO 1:

Activo que no tienen ningún rendimiento ni costo asociado.

Tenerlo antes de tiempo no me genera una erogación de fondos.

En toda la estructura, miro ambas alternativas-

Si compro hoy pido un préstamo por + S_0 y compro el bien entonces- S_0, El flujo de fondos termina siendo cero. FF = 0.

Al momento del cierre tengo el bien S_t y pago el préstamo $S_0 * FC_{0,T}$ y el FF será: $FF = -S_0 * FC_{0,T}$

Si vamos por la alternativa 1: Entro en el Forward, el FF es cero y al final del periodo recibo el bien y FF=-F_0.

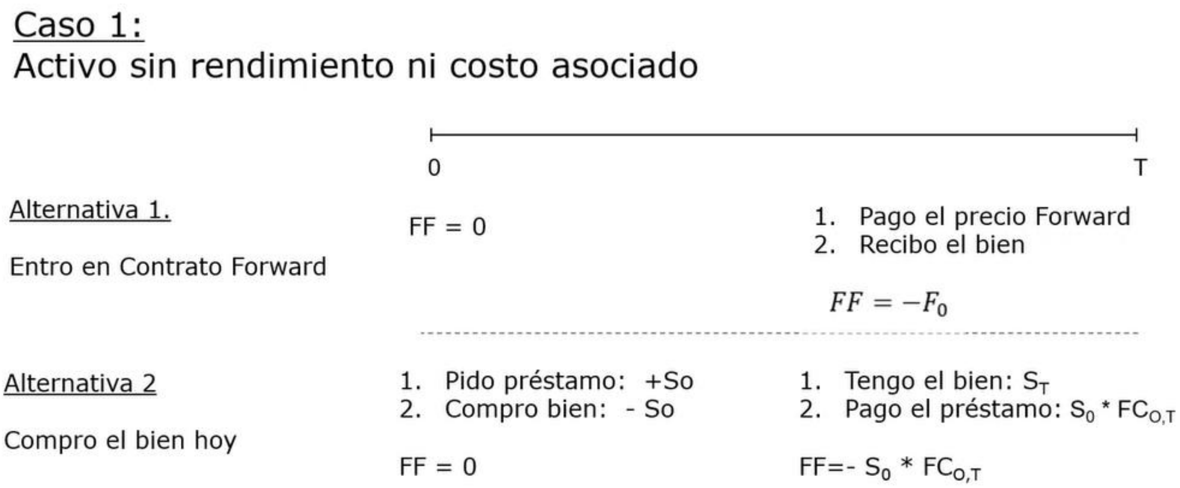
Como en el mercado se aprovecharían las oportunidades de arbitraje, en caso de existir las dos alternativas, deberían valer lo mismo:

(de manera genérica)

$$F_t = S_t * FC_{t,T}$$

(haciendo la igualdad entre las dos alternativas)

$$F_0 = S_0 * FC_{t,T}$$



Como en el mercado se aprovecharían las oportunidades de arbitraje en caso de existir, las dos alternativas deberían valer lo mismo:

$$\boxed{F_t = S_t \cdot FC_{t,T}}$$

¿Cómo arbitrar si F > S0 * FC 0,T?

Si tenemos dos carteras que hacen lo mismo al vencimiento, tienen que valer lo mismo hoy. Si no lo valen, podemos obtener una ganancia "comprando la cartera barata" y "vendiendo la cara".

Al vencimiento, vamos a tener una posicion cubierta y habremos ganado la diferencia de precio.

En este caso: el forward es "caro" por lo que vendemos a plazo y – al mismo tiempo – compramos la cartera que nos permite hacer lo mismo que el forward; en este caso, compramos el activo hoy.

Si veo esta situación, compro lo que esta caro, vendo lo que está barato y gano la diferencia. Entraría en el forward donde vendo el bien y mientras tanto lo compro anticipadamente.

En el momento 0...

1. Pedimos un préstamo $+S_0$
2. Compramos el activo $-S_0$
3. Entramos en el Forward 0

FF = 0

En T...

1. Pagamos el préstamo $-S_0 * FC_{0,T}$
2. Del forward:
   Entregamos el activo (entrega del bien)
   Recibimos el precio F_0

$FF = F_0 - S_0 * FC_{0,T} > 0$

Entonces ¿Qué haríamos para aprovechar esta oportunidad de arbitraje?

En el momento cero, pedimos prestamos, compramos el activo y entro en el forward (no tengo FF).

En T grande, pago el préstamo, recibo el activo y del forward recibo el precio que es F0.

Entonces, obtengo ganancia arbitrando.

En el caso que se cierra por compensación

Si se cerrara por compensación..

<u>En el momento 0...</u>

1. Pedimos un préstamo $+S_0$
2. Compramos el activo $-S_0$
3. Entramos en el Forward 0

$FF = 0$

<u>En T...</u>

1. Pagamos el préstamo $- S_0 * FC_{0,T}$
2. Vendemos el activo $+ S_T$
3. Cierra el forward $F_0 - S_T$

$FF = F_0 - S_0 * FC_{0,T} > 0$

El primer parte en el momento cero pero al momento T pago el préstamo, vendo el activo, recibo el dinero entonces cierro el contrato de forward por la diferencia de precios entre el forward y la venta del activo.

<u>¿Cómo arbitrar si F < S0 * FC 0,T?</u>

Cómo arbitrar si $F < S_0 * FC_{0,T}$?

Compro

Al revés que en el caso anterior:

- Tomo posición comprada a futuro
- Vendo en descubierto el bien

<u>En el momento 0...</u>

1. Entramos en el Forward 0
2. Vendemos el bien en desc. $+S_0$
3. Invertimos lo recibido $-S_0$

$FF=0$

<u>En T...</u>

1. Recibimos del Forward $S_T - F_0$
2. Recompramos bien $- S_T$
3. Tenemos inversión $+ S_0 * FC_{0,T}$

$FF = S_0 * FC_{0,T} - F_0 > 0$

Entro en una posición al revés, en el momento cero entro en el forward pero concesión comprada y luego vendo el bien en descubierto e invierto esos fondos.

Cuando vendo ese bien al descubierto, lo que queda es una deuda en ese activo (tomo una deuda en ese activo). Para cerrar mi posesión en T implica recomprar ese bien.

Entonces en T grande recibo lo que corresponde del forward y recompro el bien que había vendido. Tengo el FF de la inversión de la plata que puse.

En total tendré:

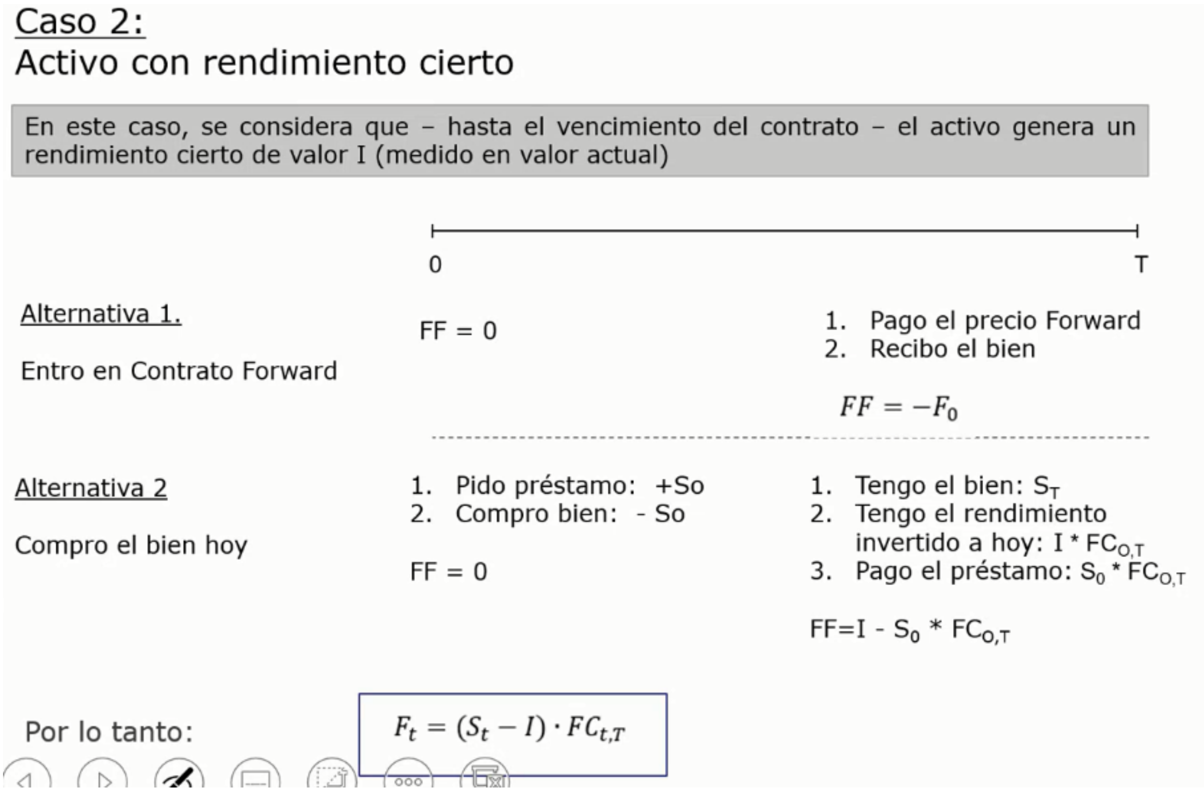
$$FF = S_0 * FC_{0,T} - F_0 > 0$$

<u>CASO 2:</u>

El activo me genera un rendimiento por tenerlo.

El activo desde hoy hasta que el contrato venza en el momento T me genera un beneficio. Ese beneficio que me genera (dividendo o bono) por haber anticipado la compra la vamos a medir en valor actual. En valor actual eso vale i.

Las alternativas son no pago nada en el momento cero y al final pago el precio forward y recibo el bien.



Si compro el bien hoy pido el préstamo que vale F0 compro el bien y tengo el bien en el bolsillo. En T la foto cambia. Tengo el bien "St", voy a pagar prestamos que es FF por el factor de capitalización, pero además tengo el rendimiento a valor del momento T.

El FF que tengo son los ingresos, por el factor de capitalización menos lo que pago de precio (S0 por el factor de capitalización entre momento cero y T).

CASO 3:

En este caso, tener el bien me genera un costo por almacenamiento.

Cuando pido plata, no solo pido plata para comprar el bien, sino que también para me representa ese almacenamiento entones mi erogación de fondos será más alta.

Caso 3:
Activo con costo de almacenamiento

En este caso, se considera que – hasta el vencimiento del contrato – tener el activo implica pagar un costo de almacenamiento de valor U (medido en valor actual)

	0	T
Alternativa 1. Entro en Contrato Forward	FF = 0	1. Pago el precio Forward 2. Recibo el bien $FF = -F_0$
Alternativa 2 Compro el bien hoy	1. Pido préstamo: +So +U 2. Compro bien: - So 3. Pago por almacenamiento: -U FF = 0	1. Tengo el bien: S_T 2. Pago el préstamo: $-(S_0 + U) * FC_{0,T}$ FF= $-(S_0 + U) * FC_{0,T}$

Por lo tanto: $\boxed{F_t = (S_t + U) \cdot FC_{t,T}}$

SI quisiésemos combinar el caso 2 y 3, es decir, activo con rendimiento + gastos de mantención quedaría:

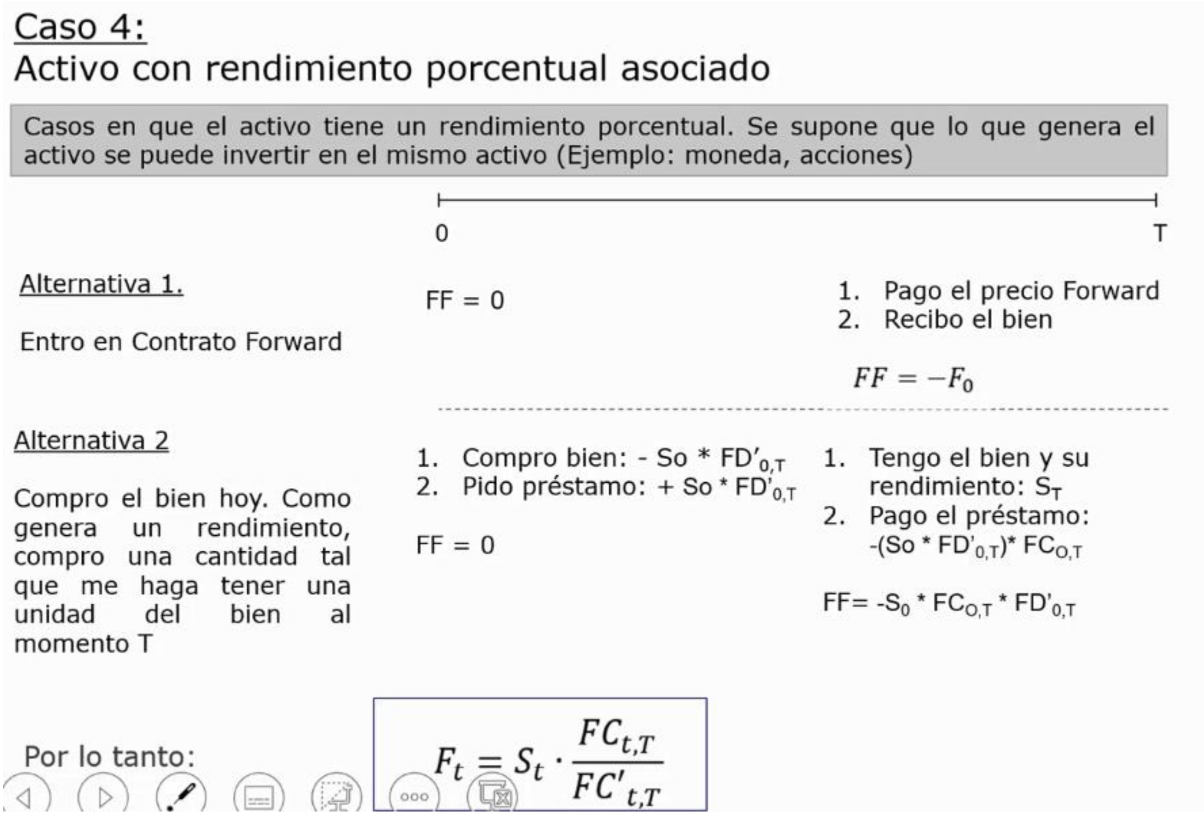
$$F_t = (S_t + U - I) \cdot FC_{t,T}$$

Hasta acá U e I son valores que conocemos (fijos).

CASO 4:

Cuando existe un rendimiento porcentual asociado. En esto casos, la foto va a cambiar.

Los mas usuales son los rendimientos de acciones, tipo dividendos.



Algunos ejemplos:

- ➔ Por rendimientos de acciones → "q"
- ➔ Por moneda extranjera → "r"

CASO MONEDA

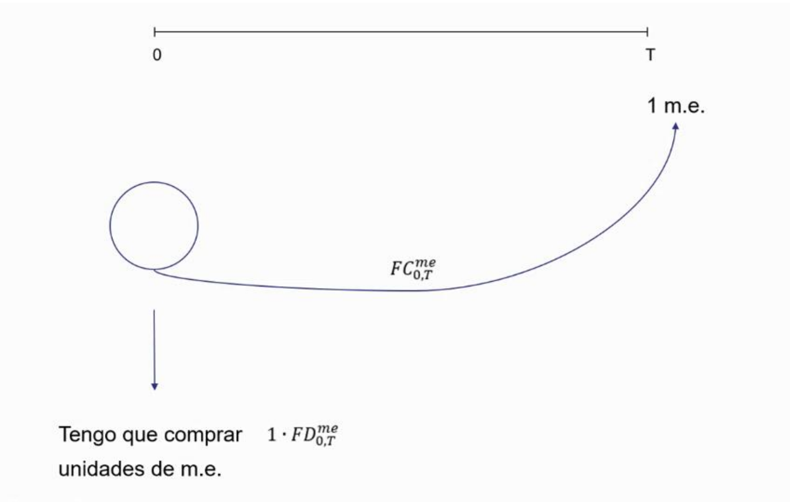
En general, con la moneda podemos invertirla y obtener un rendimiento en esa moneda. Sabíamos que había tasas libres de riesgo a la que podíamos invertir, aquí también existe también una tasa libre de riesgo en la que podemos invertir en moneda extranjera (denominada r_f).

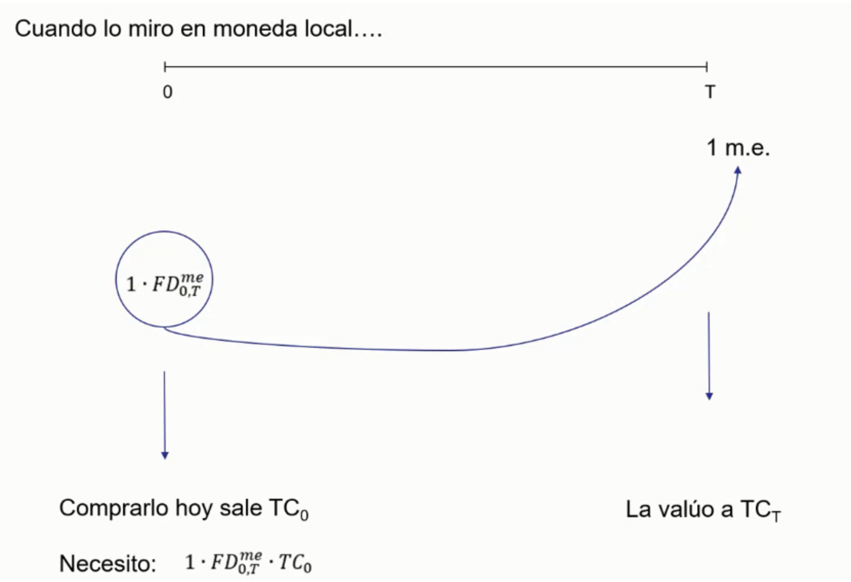
La moneda es susceptible de invertir y esa moneda rinde a una tasa de interés a la que yo puedo invertir. En general, el caso 4 está asociado o acciones con rendimiento o moneda extranjera. Eso que yo compro tiene un determinado rendimiento en el tiempo.

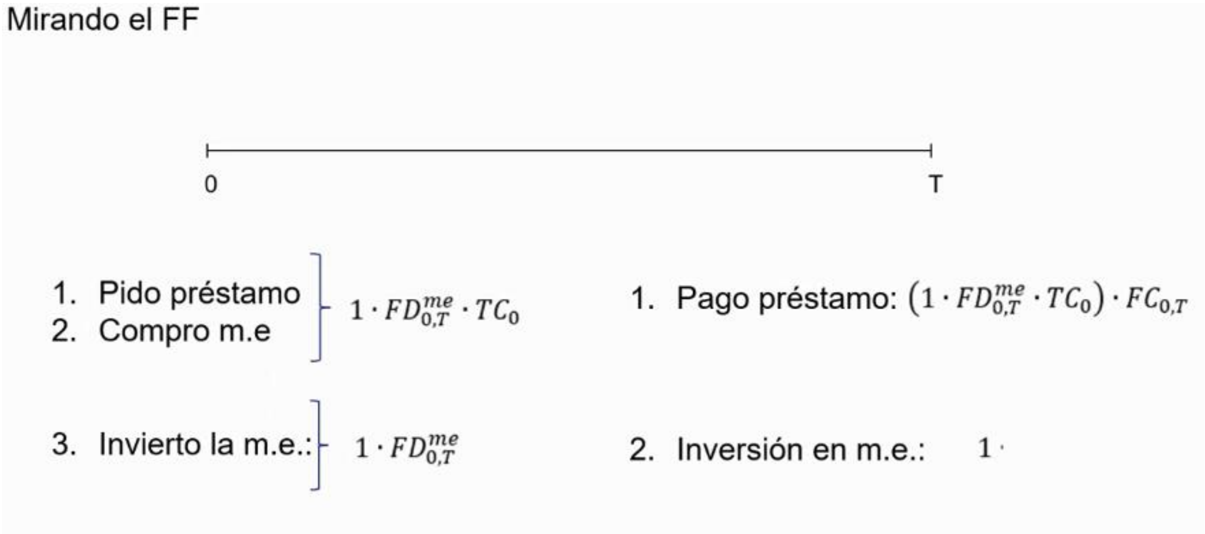
Si necesito en el momento T tener un dólar, tenemos dos alternativas:

- Entrar en el contrato forward (no pago nada, es decir, FF = 0). Cuando llega el momento T pago F0 (o K, lo que pacté pagar) y recibo el dólar (o unidad de moneda extranjera).
- La alternativa para tener un dólar al momento T grande será comprarlo hoy con dinero prestado. Al momento T tendré la moneda extranjera y pago el préstamo.

En ambas alternativas debo tener una unidad de moneda extranjera. Cuando en el momento cero compro la moneda extranjera, debo comprar una unidad de moneda extranjera tal que me permita tener una unidad al momento del vencimiento. Como la moneda genera rendimiento, entonces al momento cero yo compraría "un poquito menos". Sería S1 por FD de la tasa extranjera entre 0 y T. El préstamo lo pediré por la cantidad. Al final pago el préstamo (tipo de cambio inicial por el FD de moneda extrajera por el FC en moneda local ambos entre cero y T).







CASO ACCIONES CON RENDIMIENTO

Asumimos que reinvierto en acciones todo lo que esa acción me genera.

Cálculo del valor del contrato

Si bien al inicio del contrato forward tiene valor 0, una vez que esté fijado el precio de ejercicio su valuación dependerá de:

-Evolución del precio

-Evolución de las tasas de interés

Lo que comparamos es la diferencia entre el precio forward fijado y el precio que fijaríamos si hiciéramos nuevamente el contrato:

$$Valor\ Forward\ \ (F_t - k) * \ FD_{t,T}$$

En el valor de contrato comparo el precio que voy a estar pagando al momento t por el bien (valor forward al momento cero) y lo comparo con el precio al que yo compraría si entrara al contrato hoy.

Entonces, si ese precio es mas alto, gano plata al tener el contrato. Al revés si es más bajo (si comprase hoy a futuro es más bajo, pierdo plato).

Miro, entonces, la diferencia entre precio, PERO como lo voy a pagar en el momento T grande debo descontarlo con el factor de descuento.

¿De qué depende? Posición comprada

Básicamente cuando vemos que pasa con el valor forward, el precio que voy a estar pagando (o voy a estar dispuesto a pagar) va a despender como evolucione el precio del bien y cómo evolucione la tasa de interés.

En el caso de la moneda extrajera me va a estar pegando como evolucione el tipo de cambio y la tasa de interés, sino también, cómo evolucione el spred de tasas.

Ejemplos

1.

Forward sobre soja, con vencimiento a 6 meses. Tasa libre de riesgo: 30% TNA cap. mensual. Precio spot $14260. Costo de almacenamiento por seis meses (a valor actual) $300

Ejemplo de caso donde tenemos un activo con costo de almacenamiento.

Si tuviese que ponerle precio haría la siguiente cuenta:

$$F = (14260 + 300) * (1 + \frac{30\%}{12})^6$$

2.

Forward sobre una acción que paga rendimientos del 5%, con vencimiento a 8 meses. Tasa libre de riesgo: 30% TNA cap. mensual. Precio spot de la acción 150.

Aquí tendríamos:

$$F = S_0 * \frac{FC_{0,T}}{FC'_{0,T}}$$

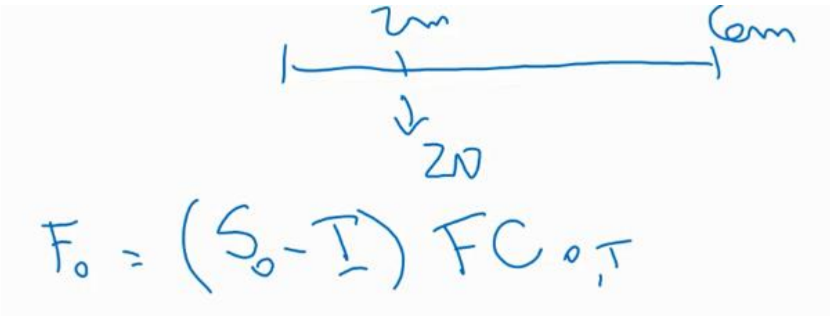
$$F = 150 * \frac{(1 + \frac{30\%}{12})^8}{1 + \frac{5\%}{12}}$$

Tenemos en cuenta el rendimiento de la moneda y el rendimiento de la acción.

La acción que compraba la pago al precio de hoy y luego debo cobrar tasa de interés del préstamo.

3.

Forward sobre una acción que paga un dividendo cierto de 20 dentro de dos meses. El Forward vence en 6 meses. Tasa libre de riesgo: 30% TNA cap. mensual. Precio spot de la acción 500.



$$F_0 = (s_0 - I) * FC_{0,T}$$

$$F_0 = \left(500 - (20 * 1 + \frac{30}{12})^{-2}\right) * \ (1 + \frac{20\%}{12})^6$$

Levantando supuestos

Un cliente se acerca a la institución financiera solicitando cotización para un Forward sobre moneda.

Las operaciones que puede realizar el banco tienen los siguientes supuestos, asumiendo tasa efectiva anual:

		P/Inver.	P/Financ.
Tasa interés	Local Extranjera	32% 1.20%	50% 3.71%
Cotización ME	Pcio Compra Pcio Venta	61.98 66.97	

Cálculo del valor del contrato

Si bien al inicio el contrato forward tiene valor 0, una vez que esté fijado el precio de ejercicio su valuación dependerá de:

- Evolución del precio
- Evolución de las tasas de interés

Lo que comparamos es la diferencia entre el precio forward fijado y el precio que fijaríamos si hiciéramos nuevamente el contrato.

$$ValorForward = (F_t - K) \cdot FD_{t,T}$$ Para quien compra a plazo

Para la cotización tenemos que tener en cuenta que – de entrar en el contrato – la institución financiera no querrá tener el riesgo de tipo de cambio.

Entonces:

1.

Si compra a plazo con el Forward, deberá asegurarse estar vendido a plazo para – de esta manera – no tener una posición abierta de TC

2.

Si vende a plazo con el Forward, deberá asegurarse estar comprado a plazo para – de esta manera – no tener una posición abierta de TC

1.

Si compra a plazo con el Forward, deberá asegurarse estar vendido a plazo para – de esta manera – no tener una posición abierta de TC

- Tomo préstamo en USD, tal de estar endeudado por un dólar al vencimiento
- El dólar que recibo lo vendo
- Invierto el resultante hasta el vencimiento

1.

Si compra a plazo con el Forward, deberá asegurarse estar vendido a plazo para – de esta manera – no tener una posición abierta de TC

- Tomo préstamo en USD, tal de estar endeudado por un dólar al vencimiento --- **3.71%**
- El dólar que recibo lo vendo --- **61.98**
- Invierto el resultante hasta el vencimiento – **32%**

$$\boxed{\left(\frac{1}{1+3.71\%}\cdot 61.98\right)\cdot(1+32\%) = 78.8869}$$

2.

Si vende a plazo con el Forward, deberá asegurarse estar comprado a plazo para – de esta manera – no tener una posición abierta de TC

- Compra la moneda extranjera hoy, sabiendo que la va a poder invertir
- Pide un préstamo para obtener esos fondos
- Invierte la moneda extranjera

2.

Si vende a plazo con el Forward, deberá asegurarse estar comprado a plazo para – de esta manera – no tener una posición abierta de TC

- Compra la moneda extranjera hoy, sabiendo que la va a poder invertir --- **66.97**
- Pide un préstamo para obtener esos fondos -- **50%**
- Invierte la moneda extranjera – **1.2%**

$$\boxed{\left(\frac{1}{1+1.2\%}\cdot 66.97\right)\cdot(1+50\%) = 99.26383}$$

Mercados Futuros

En el mercado de derivados tenemos operaciones OTC (las que venimos viendo en la materia que son contratos entre privados o contratos en mercados organizados)

Un caso particular de mercado organizado es el mercado de futuro donde tenemos un mercado que organiza transacciones entre partes en donde lo que se comercializa son contratos de futuros que son también contratos a plazo. Entonces estos contratos de futuro conceptualmente serían similares a un forward, pero van a tener otra dinámica y otros agentes que participan en este mercado. Los forwards en general se manejan entre particulares y siempre acompañados de una necesidad de cobertura en particular. Esto te ata a que por lo general lo mantenés hasta el vencimiento.

En los contratos de futuro tenemos un mercado organizado para estos contratos a plazo. Podemos entrar y salir continuamente de la posición. Esto hace que el mercado sea mucho mas grande en el sentido de que no va a estar formado únicamente por posiciones coberturitas sino también por aquellos que ingresen al mercado con el fin de obtener algún rendimiento por la variación de precio de esos contratos a futuro. Entonces el mercado, es un mercado ampliado con respecto del que podemos considerar en lo que sería forward. Además, no tenemos que estar manteniendo un riesgo de crédito con la parte.

Los contratos futuros son contratos a plazo para comprar o vender un activo en una fecha especifica en el futuro que se negocien en un mercado organizado.

A diferencia de los contratos forward, se negocian en un mercado y están sujetos a un sistema de márgenes y garantías que reducen el riesgo a crédito y – al mismo tiempo – generan:

- Movimientos iniciales de fondos
- Ingresos y egresos de fondos aún antes del vencimiento.

En contratos a futuro, ingresamos en el mercado tomando posición sobre un contrato de futuro (puede ser una posición comprada o una posición vendida) pero como lo que hace el mercado es regular la parte de riesgo de crédito (las perdidas) lo va a hacer es que al momento de ingresar al contrato se me exige un margen de plata (margen de garantía o margen inicial) en donde para poder operar (si bien el contrato de futuro no tiene un precio sino que entro en un contrato en determinado valor) lo que si me va a exigir el mercado es que tenga plata depositada en mi cuenta de manera de poder hacer frente a posibles pérdidas. En los futuros al igual que los forwards, yo puedo salir ganando o perdiendo en función a la evolución de los precios. Lo que se asegura el mercado al exigirme a mi tener un margen de efectivo depositado es que voy a tener plata con la cual responder ante variaciones de precios que sean desfavorables para mi situación.

Además, hay un proceso denominado cash settlement en donde las perdidas o ganancias que yo tenga por variación de precio se van a ir descontando o acreditando en mi cuenta conforma vaya pasando el tiempo.

El precio va a estar dado por oferta y demanda.

Siempre que hablamos de una posición compradora implica una compra a futuro del bien y una posición short (vendida) implica una venta a futuro.

Vamos a distinguir distintas posiciones:

1. Long / Comprador – Compra a futuro.
2. Short / Vendedor – Vende a futuro.

<u>Características</u>:

1- Son estandarizados – van a generar, al momento de usarse como cobertura, un riesgo de base y una necesidad de adecuación del riesgo a los contratos disponibles. Entonces, hay determinados contratos que se negocian en el mercado, hay un reglamento que me indica cual es el subyacente y que me indica cual es el tipo de cambio que estoy utilizando.

2- Sujetos a sistema de márgenes y garantías
3- Permiten distintas formas de "cerrar el contrato". Si estoy comprado en un bien para un determinado vencimiento, puede cerrar posición tomando una posición vendida en el mismo futuro. Al contrario, si estoy vendido, puedo cerrar la posición tomando una posición long en el mismo contrato (al precio que se negocie cuando cierro la posición). En ambos casos, ya tengo fijado precio de compra y venta – no tengo más riesgo-.

El ajuste diario tiene en cuenta el resultado si se cerrara hoy la operación.

Dólar futuro – Cotizaciones del dólar futuro entre el 7 de agosto al 7 de septiembre

https://www.rofex.com.ar/cem/FyO.aspx

Fecha	Posición	Tipo	Ejercicio	Primero	Mínimo	Máximo	Ultimo	Volumen	Ajuste	Interés Abierto	Prima Desc.
22/09/2021	DLR092021	Futuro		98,9300	98,9300	98,9800	98,9800	15690	98,9800	1.118.595	
22/09/2021	DLR102021	Futuro		101,0500	100,9500	101,1000	101,0000	46550	101,0000	716.611	
22/09/2021	DLR112021	Futuro		104,1900	103,9000	104,1900	103,9900	28118	103,9900	633.782	
22/09/2021	DLR122021	Futuro		109,2000	108,9100	109,2000	109,0000	12952	109,0000	427.175	
22/09/2021	DLR012022	Futuro		114,7500	114,7500	114,7600	114,7600	3470	114,7700	172.564	
22/09/2021	DLR022022	Futuro		119,0000	118,9500	119,1500	118,9600	4141	118,9600	146.244	
22/09/2021	DLR032022	Futuro		124,2500	124,0000	124,2500	124,1000	6730	124,1000	84.475	

DLR09 dólar septiembre

DLR10 dólar octubre y así sucesivamente.

Tomamos el ajuste, el dólar futuro con vencimiento en septiembre cotiza a 98,9800.

Con vencimiento en octubre a 101. Lo que juega en este precio es oferta y demanda de ese dólar futuro. En un mercado donde no tengamos imperfecciones esto debería reflejar el comportamiento del tipo de cambio de las tasas (el spred de tasas locales vs extranjeras).

Puedo tener un tema de expectativa de precios (pero este no debería jugar).

En cada una de estas series encontramos el volumen operado.

La columna de interés abierto lo que significa es la cantidad de contratos que están abiertos.

La diferencia entre el mercado a futuro y el forward es que se operan los futuros dentro de un mercado organizado. El contrato en sí busca poner el precio a un bien para un momento futuro en el tiempo.

Lo que cambia, con respecto al forward, es la manera como se cierra el contrato:

- Contra entrega del bien
- Por compensación
- Tomando posición contraria

¿Qué es, entonces, lo que hace el mercado?

Al estar operando en un mercado estandarizado, lo que se va a asegurar es reducir el riesgo de crédito (riesgo de incumplimiento).

Cuando entre en el mercado forward, tanto yo como mi contraparte estamos comprometidos a que ese contrato se ejerza. Puede suceder que alguna de las partes no cumple con el compromiso habrá acciones judiciales, pero, digamos, existe de algún modo un riesgo.

En los mercados a término se busca que ese mercado reduca ese riesgo de crédito eso lo hace pidiendo márgenes y garantías a lo largo de la vida del contrato.

<u>Sistemas de Márgenes y Garantías</u>

Los márgenes y garantías son propias del mercado en el que operemos.

Se distinguen en:

1) Margen Inicial
2) Margen de mantenimiento

Sobre los fondos, las cámaras compensadoras realizan ajuste diario en función de la variación en ellos precios (*Daily settlement – Marking to Market*)

$$\Delta Margen_{long\ t} = F_t - F_{t-1}$$

$$\Delta Margen_{short\ t} = F_t - F_{t-1}$$

Cuando operamos en los mercados de futuro, nos exigen un sistema de márgenes y garantías. Al entrar en el contrato (sea posición comprada o vendida) se me exige que deposita una cantidad de plata (margen inicial). De están manera, se aseguran de que yo voy a responder con el contrato que tengo. Existe un margen inicial y un margen de mantenimiento.

El margen inicial (no puede ser mas bajo que el margen de mantenimiento), lo que hace la cámara compensadora, me ira reconociendo las ganancias o perdidas que haya tenido en el día a partir de la variación del precio. Entonces mide cuando ganaría o perdería si yo cerrara la condición en ese momento.

Fecha	Posicion	Tipo	Volumen	Ajuste / Pr	Interes Abi
10/09/2021 12:00:00 a.m.	DLR112021	Futuro	125,419	104.190	543041
09/09/2021 12:00:00 a.m.	DLR112021	Futuro	100,777	104.220	485932
08/09/2021 12:00:00 a.m.	DLR112021	Futuro	75,250	104.280	459306
07/09/2021 12:00:00 a.m.	DLR112021	Futuro	15,633	104.530	462818
06/09/2021 12:00:00 a.m.	DLR112021	Futuro	9,128	104.710	462057
03/09/2021 12:00:00 a.m.	DLR112021	Futuro	29,422	104.800	463963
02/09/2021 12:00:00 a.m.	DLR112021	Futuro	14,165	104.800	459737
01/09/2021 12:00:00 a.m.	DLR112021	Futuro	23,883	104.750	466462
31/08/2021 12:00:00 a.m.	DLR112021	Futuro	95,713	104.750	459006
30/08/2021 12:00:00 a.m.	DLR112021	Futuro	67,946	105.430	469214
27/08/2021 12:00:00 a.m.	DLR112021	Futuro	31,790	105.650	474766
26/08/2021 12:00:00 a.m.	DLR112021	Futuro	4[illegible]881	105.900	468024
25/08/2021 12:00:00 a.m.	DLR112021	Futuro	58,033	105.900	458450
24/08/2021 12:00:00 a.m.	DLR112021	Futuro	51,264	105.940	461840
23/08/2021 12:00:00 a.m.	DLR112021	Futuro	28,602	106.400	447787
20/08/2021 12:00:00 a.m.	DLR112021	Futuro	55,442	106.600	441541
19/08/2021 12:00:00 a.m.	DLR112021	Futuro	11,392	106.510	425275
18/08/2021 12:00:00 a.m.	DLR112021	Futuro	12,770	106.700	423964
17/08/2021 12:00:00 a.m.	DLR112021	Futuro	18,520	106.850	423315
13/08/2021 12:00:00 a.m.	DLR112021	Futuro	24,257	106.840	421872

Siguiendo con el ejemplo, tendremos

Volumen: Cantidad de operación que se realización

Ajuste/: Ajuste o prima que se toma como referencia para hacer el daily settlemente (para reconocer pérdidas y ganancias).

¿Cómo funciona el Daily Settelment?

22/07/2021 12:00:00 a.m.	DLR112021	Futuro	19,227	109.800	376141
21/07/2021 12:00:00 a.m.	DLR112021	Futuro	15,801	109.800	373704
20/07/2021 12:00:00 a.m.	DLR112021	Futuro	36,570	109.550	367274
19/07/2021 12:00:00 a.m.	DLR112021	Futuro	12,757	108.800	355323
16/07/2021 12:00:00 a.m.	DLR112021	Futuro	8,955	108.100	350337
15/07/2021 12:00:00 a.m.	DLR112021	Futuro	3[illegible]725	108.110	348965
14/07/2021 12:00:00 a.m.	DLR112021	Futuro	5,325	108.380	341732
13/07/2021 12:00:00 a.m.	DLR112021	Futuro	21,512	108.450	339075
12/07/2021 12:00:00 a.m.	DLR112021	Futuro	7,351	108.750	338597
08/07/2021 12:00:00 a.m.	DLR112021	Futuro	28,119	109.050	338657
07/07/2021 12:00:00 a.m.	DLR112021	Futuro	18,091	109.090	335052
06/07/2021 12:00:00 a.m.	DLR112021	Futuro	16,175	109.280	328391
05/07/2021 12:00:00 a.m.	DLR112021	Futuro	138	109.500	325728

Si yo el 8 de julio entro a una posición long en el contrato (estoy comprada).

9/7/2021: Posición Comprada a futuro

Supongo que entre a un precio 109 (antes del cierre)

A nivel cobertura, sería equivalente a decir que entro a comprar a futuro dólar a 109) Compro para el 30 de nov de 2021, voy a comprar dólar BCRA a 109.

Significa que, si el 30/11 el dólar está por encima, voy a recibir fondo y viceversa.

Estas perdidas y ganancias sobre mi margen van a ir sucediendo todos los días.

Cuando cierra el mercado está a 109,5 el día 08/07. Gané la diferencia entre los dos precios. Eso se acredita en mi cuenta, luego la cámara compensadora me dira cuando retirar esos fondos.

Entonces tengo 0,05. El día siguiente cierra en 108,75 entonces pierdo plata porque si entrara a cerrar el contrato estaría comprado a 109,5 y vendido a 108,75 entonces pierdo 0,3.

A partir del 12/07 en adelante, todo lo que vaya ganando o perdiendo será respecto del último precio, porque voy acumulando las pérdidas y ganancias.

Podemos mantenernos con ese contrato hasta fines de noviembre o puedo salir del contrato.

Si yo salgo antes del contrato, por ejemplo, 20 de agosto con precio 104,8 lo hago con la posición contraria. Entonces, si yo estaba en una posición comparada, lo que hago es tomar una posición vendida. Es decir, estoy vendida en el mismo subyacente. El 20 de agosto varío entre 104,4, y 106,7. Si lo vendí en 106,5. A partir de este momento yo estaba comprada en 0.090 (por las variaciones de precio que hubo en el daily settelment). Como también tengo el contrato vendido y se pensaría al revés. Gano si el precio baja y pierdo si el precio sube. En este caso estaría vendida en 106,5, el contrato cerró en 106,6 con lo cuál terminé perdiendo. A partir de este momento lo que tengo:

De mi posición comprada: 0,200

De mi posición vendida: -0,1

Cuando salgo del contrato o cierro una posición antes de tiempo, se puede ver de dos maneras:

1) Haciendo las dos operaciones, yo estoy comprado y vendido en el mismo bien. Con lo cual eliminé la incertidumbre.
2) Si lo miro desde la perspectiva de como son los movimientos de fondo. En el momento que tengo la posición comprada y vendida, lo que tenga en movimiento de garantía va a compensar una posición con la otra. No tendré movimiento en mi cuenta de margen.

Fecha	Posicion	Tipo	Volumen	Ajuste / Pr	Interes Abierto	Gcia / pérdida				
09/09/2021 12:00:00 a.m.	DLR112021	Futuro	100,777	104.220	485932			8/7/2021	Posición comprada en Futurp	109
08/09/2021 12:00:00 a.m.	DLR112021	Futuro	75,250	104.280	459306				(antes del cierre)	
07/09/2021 12:00:00 a.m.	DLR112021	Futuro	15,633	104.530	462818					
06/09/2021 12:00:00 a.m.	DLR112021	Futuro	9,128	104.710	462057					
03/09/2021 12:00:00 a.m.	DLR112021	Futuro	29,422	104.800	463963					
02/09/2021 12:00:00 a.m.	DLR112021	Futuro	14,165	104.800	459737			20-ago	Salida del contrato	
01/09/2021 12:00:00 a.m.	DLR112021	Futuro	23,883	104.750	466462				Posición vendida	106.5
31/08/2021 12:00:00 a.m.	DLR112021	Futuro	95,713	104.750	459006					
30/08/2021 12:00:00 a.m.	DLR112021	Futuro	67,946	105.430	469214	-0.220	0.220			
27/08/2021 12:00:00 a.m.	DLR112021	Futuro	31,790	105.650	474766	-0.250	0.250			
26/08/2021 12:00:00 a.m.	DLR112021	Futuro	45,881	105.900	468024	0.000	0.000			
25/08/2021 12:00:00 a.m.	DLR112021	Futuro	58,033	105.900	458450	-0.040	0.040			
24/08/2021 12:00:00 a.m.	DLR112021	Futuro	51,264	105.940	461840	[illegible]460	0.460			
23/08/2021 12:00:00 a.m.	DLR112021	Futuro	28,602	106.400	447787	-0.200	0.200			
20/08/2021 12:00:00 a.m.	**DLR112021**	**Futuro**	**55,442**	**106.600**	**441541**	0.090	-0.100			
19/08/2021 12:00:00 a.m.	DLR112021	Futuro	11,392	106.510	425275	-0.190				
18/08/2021 12:00:00 a.m.	DLR112021	Futuro	12,770	106.700	423964	-0.150				
17/08/2021 12:00:00 a.m.	DLR112021	Futuro	18,520	106.850	423315	0.010				
13/08/2021 12:00:00 a.m.	DLR112021	Futuro	24,257	106.840	421872	0.130				
12/08/2021 12:00:00 a.m.	DLR112021	Futuro	19,087	106.710	416566	-0.290				
11/08/2021 12:00:00 a.m.	DLR112021	Futuro	48,521	107.000	416117	-0.300				

Ejemplo Banco | Futuros - Cotización

Lo que gané o perdí quedó determinado cuando cerré la posición.

8/7/2021	Posición comprada en Futurp	**109**
	(antes del cierre)	
20-ago	Salida del contrato	
	Posición vendida	**106.5**
	Resultado	-2.500
	Gcia / pérdida márgenes	-2.500

Lo que tenemos es: entro con x valor y salgo con otro valor.

Cuando nosotros operemos en futuro, vamos a mirar el precio de mercado (oferta y demanda determinarán el precio por el cuál terminaremos operando) pero uno tiende a poner un precio para ver si esta caro o barato o en función de mis expectativas.

El precio futuro o forward, no necesariamente van a ser el mismo pero en general si no hay diferencia significativa en la tasa de interés en la que podemos invertir nuestro fondos y tengo asegurada los márgenes y garantías los precios suelen ser bastante similar.

Ratio de Cobertura

Si vemos las operaciones anteriores desde una perspectiva de cobertura, siempre buscamos reducir el riesgo. Busco ponerle un precio a futuro, pero tengo otra operación con la que compenso.

Si tenemos un contrato forward, en general lo puedo hacer a medida de lo que necesito. Ahora si busco cobertura en el mercado de futuros no tengo exactamente el contrato por el nominal que quiero, el vencimiento que necesito y la entrega del bien.

Si tomo la posición de cobertura en el mercado de futuro, cambian un poco las opciones con las que contamos. Buscaremos más como adaptar la cobertura de contratos existentes.

Entonces al tomar una estrategia de cobertura, el objetivo es reducir la incertidumbre respecto del resultado futuro.

Cuando operamos en el mercado de futuros, posiblemente no podamos tomar coberturas por exactamente la misma exposición que tenemos; en consecuencia, se analiza la mejor de las opciones.

¿Qué hace que una estrategia de cobertura no sea perfecta?

El mercado tendrá diferentes agentes operando de manera distintas con objetivos distintos. Mi cobertura puede no funcionar a la perfección, alguna de las razones:

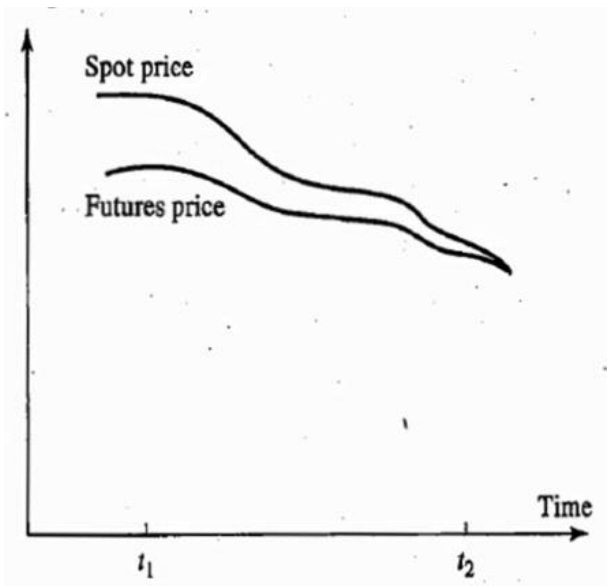
- Diferencia entre el subyacente en el mercado de futuros y el activo sobre el que necesitamos cobertura.
- Fecha para la que se requiere cobertura.
- Coincidencia de fecha entre el vencimiento de los contratos futuros y momento de la cobertura.

Riesgo Base

Riesgo base es el que marca la diferencia entre el precio spot del bien y el precio futuro. El precio spot no es el subyacente del futuro sino el precio del bien del cual yo me quiero cubrir.

$$Riego\ Base_t = S_t^* - F_t$$

Cuando el subyacente del precio spot y del precio futuro es el mismo, converge. Esa convergencia es casi a cero cuando el bien es el mismo. Si son bienes distintos, esta convergencia puede no ser cero.



$$Riesgo\ Base_t = (S_t^* - S_t) - (F_t - S_t)$$

$$S_t: Precio\ spot\ del\ subyacente\ del\ futuro$$

El riesgo: $F_t - S_t$ es el que va a converger y después hay un riesgo adicional que tiene que ver con qué tan distinto es el bien del cual me quiero cubrir y el precio del bien con el cual me estoy cubriendo $S_t^* - S_t$.

¿Qué tenemos que elegir al buscar cobertura?

Qué contrato operar:

- Vencimiento
- Subyacente

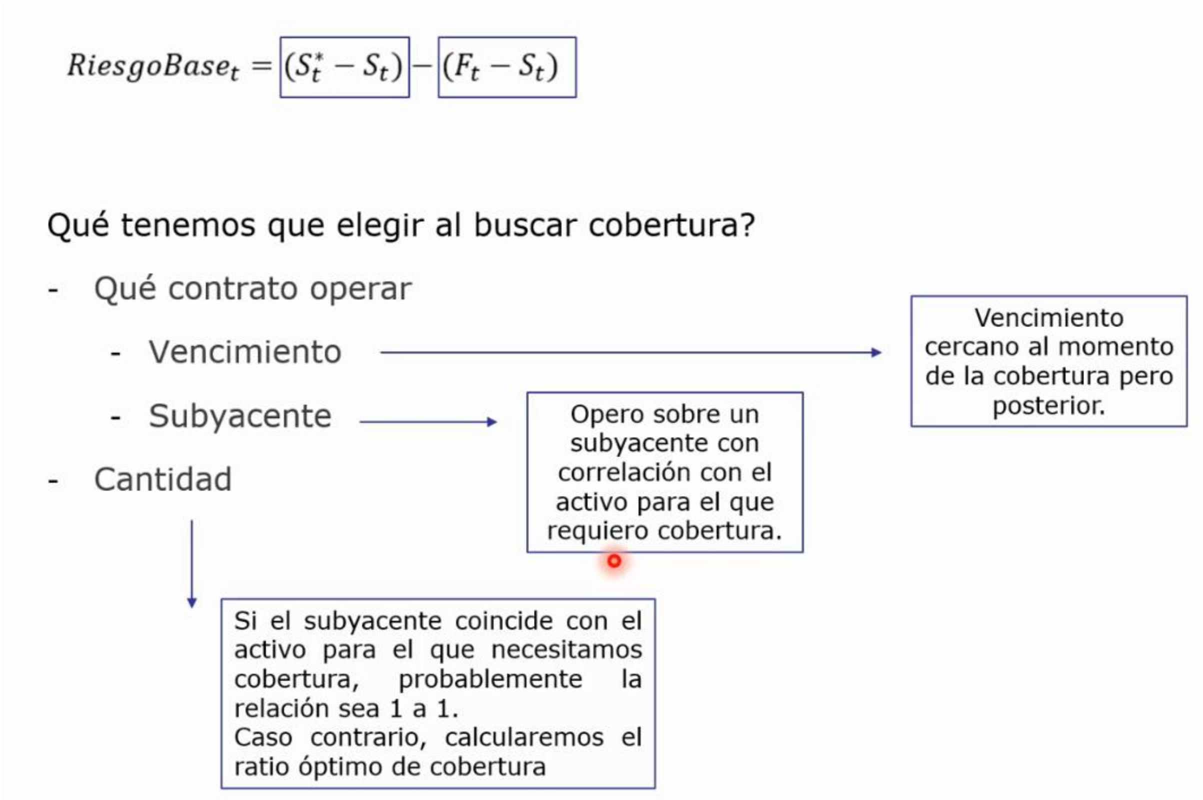
Cantidad

Cuando elijo un subyacente, elegiría alguno que correlacione bien con lo que a mí me interesa cubrir.

Respecto al vencimiento elegiré un vencimiento posterior a la fecha que yo necesito. Como yo puedo salir del contrato en cualquier momento por eso se recomienda que será temprano pero superior.

Con respecto a la cantidad, si hablamos de moneda será más sencillo y probablemente la relación sea 1:1.

Si hablamos de aceite para cubrir de la oleginosa será más complicado.



Si mirásemos Vencimiento y Subyacente, voy a tener que determinar la cantidad y en esa cantidad voy a mirar el ratio óptimo de cobertura.

El ratio óptima se puede definir como cuál es la exposición que tengo a futuro por cada exposición que tengo en el activo.

Cuando el subyacente con el que nos cubrimos no es el mismo sobre el que operamos no hay una relación 1 a 1 entre la exposición en futuros y la exposición en el activo.

Lo que hacemos entonces es buscar la mejor forma de cubrirnos, teniendo en cuenta qué relación existirá entre la exposición en futuros y la exposición en activo:

$$h = \frac{N_F}{N_A}$$

El $N_A$es la exposición en activos que tengo a riesgo.

El N_F la exposición que tomo en futuro.

Cuando hablo de exposición debo mirar Nf y Na con la misma vara.

En el caso de moneda, la exposición son las unidades de monedas, si hablo de algún otro activo puden ser las toneladas.

Debo entonces buscar el optimo del h. El objetivo es cubrirnos de un precio, si mi objetivo es lograr disminuir la incertidumbre, entones buscamos entender que cantidad necesito.

Entonces tenemos en cuenta qué el objetivo es minimizar la incertidumbre.

Caso Cobertura de precio de venta:

$$y_2 = N_A * S_{2+} N_F * (F_1 - F_2)$$

Donde:

$$N_F \; es\; la\; cantidad\; a\; determinar$$

$$S_2 \; y\; F_2 \; son\; las\; fuentes\; de\; incertidumbre.$$

$$y_2 = N_A \cdot S_2 + N_F \cdot (F_1 - F_2) - N_A \cdot S_1 + N_A \cdot S$$

$$y_2 = N_A \cdot S_1 + N_A \cdot (S_2 - S_1) - N_F \cdot (F_2 - F_1)$$

$$y_2 = N_A \cdot \left(S_1 + \Delta S - \frac{N_F}{N_A} \cdot \Delta F\right)$$

$$Si\;\; h = \frac{N_F}{N_A} => y_2 = N_A \cdot (S_1 + \Delta S - h \cdot \Delta F)$$

¿Cuál seria la plata que yo recibiría en caso de tener que fijar un precio de venta?

Supongamos que vendo un bien y necesito cobertura para el momento t2.

Cuando veo cuanto voy a cobrar en t2 lo separo en dos partes:

$N_A * S_2$ → Será cuanto voy a recibir en t2 por la venta del bien.

NA será la cantidad y se multiplica por S2 (el precio que vayan a tener).

Como S2 es incierto lo que me fijo es que entro en una posición de futuro donde me quiero cubrir de un precio de venta, la posición de futuro que tomaré será short. Por lo tanto, entro en short en F1, cuando tenga que salir voy a tener que vender entonces tomo una posición long en F2.

Entro para cubrir precio de venta, salí para cerrar la posición. Lo que gano/pierdo será la diferencia entre F1 y F2 todo por la cantidad de futuro en los que termine operando.

$$(F_1 - F_1) * N_F$$

Entonces en la segunda parte tendré:

$$N_F * (F_1 - F_2)$$

Mira cual es el resultado de mi posición en futuro.

El primer termino es el resultado de mi posición en subyacente y el segundo es el resultado de mi posición de futuro.

De esta fórmula conozco cuál es la cantidad de activos que tengo y conozco que precio puedo entrar en el futuro hoy. La cantidad de futuro es lo que quiero decidir cuál es, después cuanto va a estar el futuro o el subyacente, no tengo idea.

Mi objetivo es que y_2 sea lo más cierto posible. Que mi resultado total al incorporarle el contrato de futuro reduzca la incertidumbre.

Si quiero reducir la incertidumbre, la variable de riesgo que se usaba era el desvío estándar. Necesito reducir el desvío estándar de y_2.

Lo primero que debo consideras es cuál es el desvió estándar. Una vez obtenido, lo que podemos tocar para reducirlo es la cantidad tal que minimice el desvío estándar.

Se calculará, entonces, la derivada del desvío estándar respecto la variable que puedo tocar (cantidad) y a eso se iguala a cero.

La fórmula que queda es

$$y_2 = N_A * (S_1 + \Delta S - h * \Delta F$$

Lo que haremos ahora será calcular la varianza:

$$Var(y_2) = N_A^2 \cdot Var(S_1 + \Delta S - h \cdot \Delta F)$$

$$Var(y_2) = N_A^2 \cdot \left(\sigma_{\Delta S}^2 - h^2 \cdot \sigma_{\Delta F}^2 - 2 \cdot h \cdot \rho_{\Delta F, \Delta S} \cdot \sigma_{\Delta F} \cdot \sigma_{\Delta S}\right)$$

Minimizamos la varianza modificando el ratio de cobertura:

$$\frac{d}{dh}Var(y_2) = 2 \cdot h \cdot N_A^2 \cdot \sigma_{\Delta F}^2 + 2 \cdot N_A^2 \cdot \rho_{\Delta F,\Delta S} \cdot \sigma_{\Delta F} \cdot \sigma_{\Delta S}$$

$$0 = 2 \cdot h^* \cdot N_A^2 \cdot \sigma_{\Delta F}^2 - 2 \cdot N_A^2 \cdot \rho_{\Delta F,\Delta S} \cdot \sigma_{\Delta F} \cdot \sigma_{\Delta S}$$

$$h^* = \rho_{\Delta F,\Delta S} \cdot \frac{\sigma_{\Delta S}}{\sigma_{\Delta F}}$$

Vemos que el ratio optimo de cobertura será el coeficiente de correlación de como varia el precio del futuro con el precio del spot (subyacente del cual me quiero cubrir) por la volatilidad del subyacente con respecto a la volatilidad del futuro.

Para verificar la cantidad de contratos en las que operar, tengo que entender la exposición que me da cada uno de los contratos:

$$N_F = h^* * N_A$$

Modificación de Beta de una cartera

Introducción

Otro uso que tienen los futuros es cubrirme del riesgo de mercado. Existen contratos donde el subyacente es un índice. Entonces puedo operar un contrato de futuros que se mueve en función de como se mueve un índice de mercado (como puede ser el S&P). Ese contrato de futuro me permite tomar exposición en riesgo de mercado – pero puedo también bajar exposición de riesgo de mercado tomando u operando sobre estos contratos-

En los casos en donde lo que se negocia es un índice, si tengo un índice de mercado como subyacente, nunca se va a perfeccionar este contrato por contra entrega de bien, sino que lo hace por compensación de valor (cual es el precio futuro del índice que estoy trabajando, cual es el precio con el que cierro y pierdo o gano la diferencia).

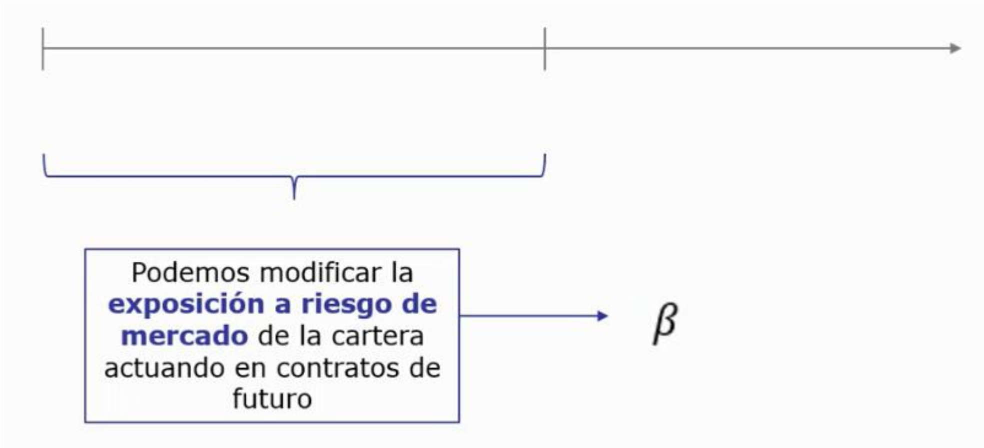
Estos contratos establecen cuantas veces el contrato paga el índice ("te pago x veces lo que vale el índice").

Objetivo

Podemos usar este tipo de contrato para distintas cosas:

1) Para invertir en el riesgo de mercado invirtiendo en el futuro sobre índice (se especula sobre las variaciones del precio del mercado)
2) Me permite cubrirme de riesgo de mercado desde una cartera.

Modificar el riesgo de una cartera de inversión, considerando la operatoria en contratos futuros.



Si quiero reducir mi exposición de mercado y bajar mi Beta de 1,2 a 0,9.

Mis opciones son, deshacerme de un activo (cambiando la composición de mi cartera). También puedo entrar en contrato de futuros.

Beta 1,2

Quiero reducir el riesgo de mercado

Mi cartera se mueve en el mismo sentido que el mercado

Si quiero compensar los riesgos tengo que tomar algo que se mueva al revés

Por ejemplo, una posición short (posición short en futuros sobre el índice)

Estoy comprado en el mercado por mi cartera y estoy vendido en futuro.
Un movimiento se va a compensar con el otro disminuyendo mi exposición al riesgo.

Si quiero hacer un cambio drástico de cartera, lo que haré será cambiar la composición de mi cartera.

Si quiero reducir o aumentar mi exposición al resigo por un periodo de tiempo, habrá que usar contratos a futuro.

$$B^{*}: Beta\ objetivo.$$

Si quiero eliminar el riesgo de mercado (B = Cero) estaría buscando eliminar el riesgo y el rendimiento será a libre de riesgo.

¿Sobre qué contrato operar?

Futuros sobre índice:

Esperaríamos que el rendimiento de estos futuros sea similar al rendimiento de mercado, dado que el subyacente es un índice representativo del mismo.

- Tienen cancelación por compensación.
- El activo subyacente es un índice representativo de mercado.
- Como el índice no tiene precio asociado, en el contrato de futuro se especifica cuánto se paga por puntos del índice.
- El precio teórico se calcula de forma similar al de una acción con tasa de rendimiento q (si tuviera rendimientos).

Si el objetivo es aumentar la exposición de mercado, la posición que tendría en el contrato sería long.

Si el objetivo es reducir la exposición de mercado, la posición que tendríamos sería vender, entonces short.

Similar a buscar el ratio óptimo de cobertura, en este caso lo que buscamos es modificar el beta de la cartera.

$$r_c = \beta \cdot (r_m - r_f) + r_f \longrightarrow r_c^* = \beta^* \cdot (r_m - r_f) + r_f$$

$$\pi = P$$

$$\pi^* = P + N_F \cdot F \longrightarrow \begin{array}{l} E(\pi) = P \cdot (1 + r_c) \\ E(\pi^*) = P \cdot (1 + r_c^*) \end{array}$$

$r_c = \beta * (r_m - r_f) + r_f$: Tenemos el rendimiento de la cartera: Beta por rendimiento del mercado menos tasa de riesgo más tasa libre de riesgo. Esta búsqueda de cobertura se basa en el modelo de CAMP.

$r_c^* = \beta^* * (r_m - r_f) + r_f$: Quiero llegar a un rendimiento óptimo.

$\pi = P$: La cartera que tengo hoy se va a llamar pi y será una cartera que está formada por una cantidad de plata que es donde tengo una exposición a mercado.

$E(\pi) = P * (1 + r_c)$: El valor esperado de esa cartera, es el valor que tengo hoy multiplicado por uno mas el rendimiento de la cartera.

$\pi^* = P + N_F * F$: Lo que armo es una cartera nueva, estará compuesta por la cartera original más una posición en futuros.

$E(\pi^*) = P * (1 + r_c^*)$: Mi objetivo es que el rendimiento esperado de mi cartera nueva se corresponda a la plata que tengo invertida por uno mas el rendimiento que yo quiero.

Lo que hago es poner la foto: donde estoy y donde quiero estas.

A mi cartera original le agrego una posición de futuros.

<u>¿Cómo se mueve mi cartera en función del mercado?</u>

Mi cartera nueva se va a mover, en función de lo que se movía mi cartera vieja, más como se mueva la parte que yo tenga a futuros.

Entonces en la segunda línea reemplazo el valor esperado del precio de futuros pondré (1 + r_{FUT}). Luego hago distributivo y en la cuarta línea reemplazo por lo que cada uno significa.

$$E(\pi^*) = E(\pi) + N_F \cdot (E(F) - F_0)$$

$$E(\pi^*) = E(\pi) + N_F \cdot (F_0 \cdot (1 + r_{FUT.}) - F_0)$$

$$E(\pi^*) = E(\pi) + N_F \cdot F_0 \cdot r_{FUT.}$$

$$E(\pi^*) = P \cdot \left(1 + \beta_C \cdot \left(r_m - r_f\right) + r_f\right) + N_F \cdot F_0 \cdot \left(\beta_F \cdot \left(r_m - r_f\right) + r_f\right)$$

$$E(\pi^*) = P + P \cdot \beta_C \cdot \left(r_m - r_f\right) + P \cdot r_f + N_F \cdot F_0 \cdot \left(\beta_F \cdot \left(r_m - r_f\right) + r_f\right)$$

En este desarrollo tendríamos cual es el valor esperado de mi cartera nueva y además tenemos que es lo que quiero lograr, que es que:

$$E(\pi^*) = P * (1 + r_c^*)$$

Entonces igualamos ambos:

$$P \cdot (1 + r_c^*) = P + P \cdot \beta_C \cdot (r_m - r_f) + P \cdot r_f + N_F \cdot F_0 \cdot (\beta_F \cdot (r_m - r_f) + r_f)$$

$$P \cdot (1 + \beta^* \cdot (r_m - r_f) + r_f) = P + P \cdot \beta_C \cdot (r_m - r_f) + P \cdot r_f + N_F \cdot F_0 \cdot (\beta_F \cdot (r_m - r_f) + r_f)$$

$$\downarrow$$

$$P \cdot \beta^* \cdot (r_m - r_f) = P \cdot \beta_C \cdot (r_m - r_f) + N_F \cdot F_0 \cdot \beta_F \cdot (r_m - r_f) + \boxed{N_F \cdot F_0 \cdot r_f}$$

$$P \cdot (\beta^* - \beta_C) \cdot (r_m - r_f) \cong N_F \cdot F_0 \cdot \beta_F \cdot (r_m - r_f) \longrightarrow \boxed{N_F \cong \frac{P}{F_0} \cdot \frac{(\beta^* - \beta_C)}{\beta_F}}$$

Mi objetivo es entender cuál es mi Nf (cantidad de futuros).

Por eso busco despejar ese término de la ecuación.

→$N_F * F_0 * r_f$: Dado que la tasa libre de riesgo es por lo general baja y ese término de por sí no tiene incertidumbre, entonces desestima el cuadro celesta y se queda con el resto de los términos.

Llegamos a que, la cantidad de futuros con el cuál voy a operar se calcula:

$$N_F \cong \frac{P}{F_0} * \frac{(B^* - B_c)}{B_f}$$

Exposición que tengo de mi cartera original dividido la exposición que tengo en mi contrato de futuros (en función del precio) MULTIPLICADO POR el beta que yo quiero lograr menos el beta de la cartera original dividido por el beta de futuros (Libro Hull el BF es igual a uno).

Si lo que quiero un beta que es más chico que el beta de la cartera – es decir, quiero reducir riesgo – el segundo término me quedará negativa y la cantidad Nf me quedará también negativa, por lo tanto, implica que yo tome una posición short.

En cambio, si quiero un beta más agresivo, y el Beta asterisco es mas grande que el beta de la cartera lo que me termina quedando es una posición long.

$$N_F \cong \frac{P}{F_0} \cdot \frac{(\beta^* - \beta_C)}{\beta_F}$$

En el libro de Hull asume Beta=1

La cobertura no es exactamente igual a la tasa libre de riesgo si el objetivo es Beta 0, pero neutraliza rendimientos ante variaciones en el rendimiento de mercado

Se considera la exposición que nos da un contrato de futuro

Otra alternativa que tenemos para entender qué posición tomar es a partir de lo que esperamos que pase frente a una variación en la tasa de mercado y hacer el desarrollo correspondiente.

$$Ante\ \Delta r_m \rightarrow P \cdot \beta_C \cdot \Delta r_m$$

$$Ante\ \Delta r_m \rightarrow P \cdot \beta^* \cdot \Delta r_m \rightarrow P \cdot \beta_C \cdot \Delta r_m + F_0 \cdot N_F \cdot \beta_F \cdot \Delta r_m$$

Punto de partida

Objetivo

¿Qué sucede con mi rendimiento ante una variación de mercado?

Hoy mi cartera hace: $P * \beta_c * \Delta r_m$ es la volatilidad que maneja ante variaciones del rendimiento de mercado.

Mi objetivo es que sea mayor o menor, con Beta asterisco. Ante una variación de los rendimientos de mercado yo quiero que mi cartera se mueva y estará representado como:

$$Ante\ \Delta r_m \rightarrow P \cdot \beta^* \cdot \Delta r_m \rightarrow P \cdot \beta_C \cdot \Delta r_m + F_0 \cdot N_F \cdot \beta_F \cdot \Delta r_m$$

Compuesto por una primera parte de como varia la cartera original mas como varía la parte de contrato a futuros.

Sabiendo que deben ser iguales llegaríamos al mismo resultado:

$$N_F \cong \frac{P}{F_0} * \frac{(B^* - B_c)}{B_f}$$

Nos daría la cantidad de contratos sobre la que operaría.

Cobertura Mixta

Si quiero cubrir el tipo de cambio para una cartera de inversión en el extranjero puedo operar sobre futuro sobre divisa.

El esquema de cobertura es como hacer si nosotros lo que tenemos es una cartera de inversión en moneda extranjera y queremos cubrirnos del riesgo de tipo de cambio.

El objetivo es:

Dado que tenemos dos economías

¿Qué exposición tomar?

Actúan dos riesgos de manera conjunta:

- Riesgo de Mercado externo
- Riesgo de tipo de cambio

Necesito cubrir (1) riesgo de mercado (2) tipos de cambio, teniendo en cuenta que se ganará la tasa libre de riesgo.

A

↓

toda nestra actividad en esta economia medido los resultados en esta moneda

B

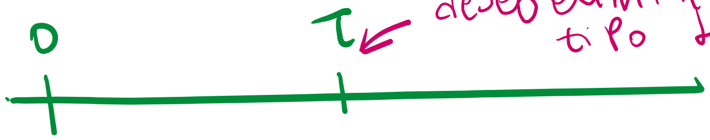
↓

tengo inversiones en moneda B en otro país

determinado momento del

objetivo: cubrirme para un tiempo ~~por~~ riesgo de tipo de cambio.
(no busco eliminar mi riesgo de cartera)

deseo eliminar el riesgo por tipo de cambio



Si quiero reducir riesgo de tipo de cambio y tengo una exposición en moneda extranjera al momento t1, la posición que puedo tomar en contratos de futuro será venta (short).

Si sube la moneda extranjera, sube el valor de mi cartera en B (como estoy vendida, esa suba por tener esa posición se compensa con la baja de precios por estar short en el futuro). Por lo tanto, mi posición debería ser tomar una posición short en moneda extranjera para cubrirme del tipo de cambio.

Debería ver por que nominal de moneda extranjera tomar esa posición short. Para definir ese nominal, suponemos que, en lugar de tener una cartera de inversión en moneda extranjera, yo tengo una posición libre de riesgo de 100 unidades de moneda extranjera al momento cero.

Si me quiero cubrir, me cubrir ante variaciones del tipo de cambio, tomo una posición short en el mercado futuro sobre el dólar por los 100.

En el caso de cobertura mixta, la cartera B no son 100 dólares, es una cartera que tengo invertida hasta el momento que necesite de cobertura.

¿Cuál sería el nominal en este caso?

Recordar que estamos operando en dos mercado distintos:

Si supongo que tengo x cantidad de acciones de Apple al momento cero y x cantidad de acciones en el momento t1, donde la negocio en USD en una cuenta de USA y mientras tanto tengo acá mi actividad principal en donde quiero que en el balance no se refleje el riesgo de moneda.

Yo tengo que elegir esa posición short en el contrato de futuros

El problema que se tiene es que es muy difícil saber cual va a ser el nominal. No puedo cubrirme totalmente.

Podría decir que como nominal voy a tomar el rendimiento esperado de Apple. Si estoy es del 5% y tengo invertido 100USD en el momento t1 tendré que poner 100USD * (1 + 0.05).

Debería poner ese nominal de referencia que voy a necesitar en t.

Si quiero una cobertura completa, esto no me va a servir porque me baso en un rendimiento esperado que está sujeto a aleatoriedad también. No elimino completamente el riesgo de tipo de cambio.

Tengo incertidumbre sobre:

- moneda extranjera
- tipo de cambio

Por este motivo se habla de una cobertura mixta donde, si yo estoy en una situación donde en el momento cero quiero cubrirme del tipo de cambio y tengo una inversión en moneda extranjera lo que tendré que hacer es cubrirme de ambas cosas. Primero me cubriré del riesgo que tiene la cartera y luego voy a cubrirme del riesgo de tipo de cambio.

Lo primero que haré es darle certeza al monto en moneda extranjera que voy a tener en t1 y cuando conozco con certeza ese momento, voy a poder cubrirme del tipo de cambio tomando una posición short por los nominales que correspondan en ese caso.

¿Cómo me aseguro, si tengo una cartera de inversión en moneda extranjera, el rendimiento entre cero y t1?

Modifico la cartera de inversión y la paso a libre de riesgo.

En lugar de modificar el riesgo de inversión puedo llevar el Beta a cero actuando en el mercado de futuro sobre índice. Para no modificar toda la cartera, para un corto plazo, lo que hago es actuar en el mercado de futuros sobre el índice dentro del mercado de extranjeros, llevando el Beta de esa cartera a cero.

Si lo llevo a cero, el nominal que espero tener al momento t1 será:

$$VN_{me_{t0}}(1+r_f^e)$$

$VN_{m.e_{t1}} =$ $\underbrace{\quad\quad\quad}_{\text{generaría la tasa libre de riesgo extranjera}}$

Resumen:

Si tuviera que cubrirme momentáneamente del riesgo de tipo de cambio de una cartera que tengo afuera, no podría solamente cubrir el tipo de cambio sin eliminar también el riesgo de mercado. Si no elimino riesgo de mercado, tengo incertidumbre con respecto al nominal que voy a tener en t1. Por lo tanto, desconozco cual va a ser la posición short a futuro que voy a tener que tomar.

Entonces, a demás de eliminar el riesgo de tipo de cambio, voy a tener que eliminar también el riego de mercado extranjero:

1) Tomo futuro sobre índice en el mercado extranjero de manera tal de modificar el beta de mi cartera para que sea igual a cero.
2) Tomar una cobertura en tipo de cambio en una posición short ya en el mercado local sobre moneda extranjera por un nominal igual a la exposición (valor Nominal + (uno mas la tasa libre de riesgo extranjera)).

Siguiendo con el ejemplo:

$$N_F \cong \frac{P}{F_0} \cdot \frac{(\beta^* - \beta_C)}{\beta_F}$$

$$N_F \cong \frac{50MM}{1259 \cdot 250} \cdot \frac{(0 - 0.87)}{1} = -138.2049$$

Valor índice	1000	1100	1200	1300	1400
Rend. Cap. Mercado	-20.00%	-12.00%	-4.00%	4.00%	12.00%
Rend. Total Mercado	-19.50%	-11.50%	-3.50%	4.50%	12.50%
Rend. Cartera	-16.84%	-9.88%	-2.92%	4.05%	11.01%
Valor cartera	41,582,500	45,062,500	48,542,500	52,022,500	55,502,500
Pcio Futuro	1,002.50	1,102.75	1,203.00	1,303.25	1,403.50
Gcia por Futuro	8,862,391	5,398,630	1,934,869	-1,528,892	-4,992,653
Valor cartera+futuros	50,444,891	50,461,130	50,477,369	50,493,608	50,509,847
Rendimiento total	0.89%	0.92%	0.95%	0.99%	1.02%

Lo que podemos ver que aproximadamente va a rendir ante cualquier escenario lo mismo que la tasa libre de riesgo. Puede haber variaciones, pero de alguna manera, acotó el riesgo.

Swap de Divisas

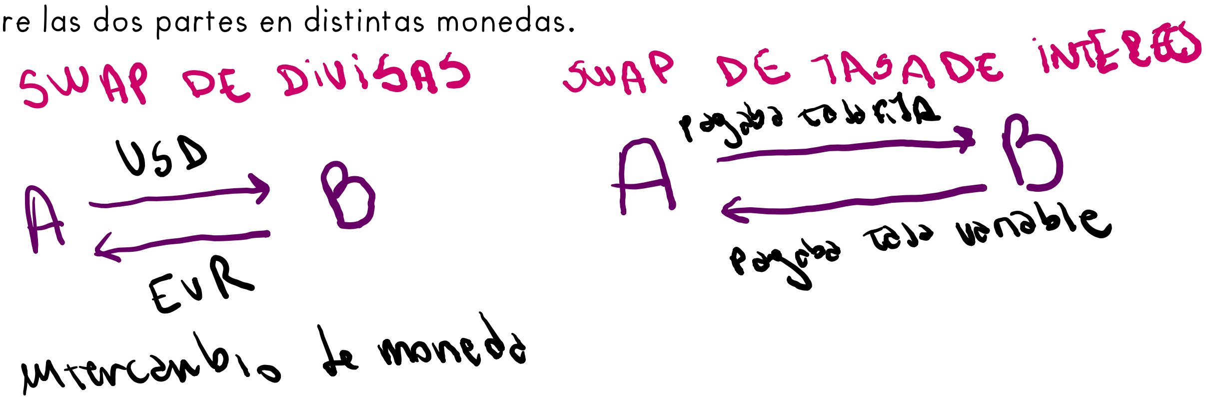
Definición

Un swap es un acuerdo entre dos partes para intercambiar **flujos de efectivo** en el futuro. En el acuerdo, se definen las **fechas de pago**, el **periodo de vigencia** y la **forma de cálculo.**

En el caso particular de Swap de Divisas, la forma de cálculo depende de la moneda y – dependiendo de cómo se estructure – también de la evolución de las tasas de interés.

Es una manera de cubrirnos también del tipo de cambio. Cuando veíamos Swap de tasa de interés lo que hacíamos era un acuerdo para intercambiar estos flujos de efectivo y este, estaba relacionado con una tasa de interés.

Otro caso particular son los Swap de divisas en donde el intercambio se hace entre las dos partes en distintas monedas.



¿Cómo se estructura ese Swap de Monedas?

Se hace un intercambio entre A y B y está atado también a un nominal. Cuando se estructura el swap, ese intercambio de dolares por Euros se estructura en función a un nominal en moneda extranjera.

A tiene un valor nominal en dólares

B tiene un valor nominal en euros

A a B le paga un porcentaje de tasa sobre ese valor nominal en dólares.

B a A le paga un porcentaje de tasa sobre ese valor nominal en euros.

Lo que se pagan entre ellos, es el flujo. No se intercambia la diferencia entre ambos FF sino que A le entrega los dólares y B le entrega los Euros a A.

Entonces, al momento de estructurase el Swap, el nominal se elige de manera que sean equivalentes en ambas monedas. Luego de constituido, éste queda fijo.

Tal como el caso de swap de tasas, al momento 0 no hay intercambio nominal. Luego, hay intercambio de nominal periódico de acuerdo a la forma de estructuración:

Formas de estructuración:

1. Tasa fija vs tasa fija
2. Tasa variable vs tasa variable
3. Tasa fija vs tasa variable.

1. A paga una tasa de referencia estadounidense y B paga una tasa de referencia europea pero fija.
2. Uno paga tasa LIBOR y el otro paga tasa de tesoro con algún spred.
3. Cruzado en distintas monedas (menos común).

Además del intercambio de tasa de interés, cuando se constituye el swap de divisas el nominal que se establece para el pago de interés, al momento en que se estructura vale lo mismo por tipo de cambio.

Las ganancias o perdidas que puedo tener en función de permanecer en ese swap o no van a depender de como funcione la tasa de interés y de como evolucione el tipo de cambio porque ese nominal quedó fijo desde el momento de la firma.

Valuación

De forma similar a lo que sucede con los swap de tasa, se considera la equivalencia del flujo de fondos generados por el swap al de dos bonos, uno en distinta moneda al otro.

El Flujo de fondos se asimila al flujo de fondos de un bono. El que recibe moneda A y paga moneda B, el valor del swap va a ser:

$$ValorSwap_{moneda\ A} = B_{moneda\ A} - TC \cdot B_{moneda\ B}$$

Caso del que paga en moneda B y recibe fondos en moneda A.

Cada bono se valúa con las tasas correspondientes a las monedas en las que se opere.

Lo que me hace mover el valor del swap el cambio en la tasa de interés en moneda A o en moneda B me afecta la parte de la valuación de los bonos y, después, el tipo de cambio que haya entre las dos monedas termina afectando al valor del swap.

TASA DE INTERES

↳ Afecta al valor del bono
como evalúo el bono en moneda A,
como valúo el bono en moneda B

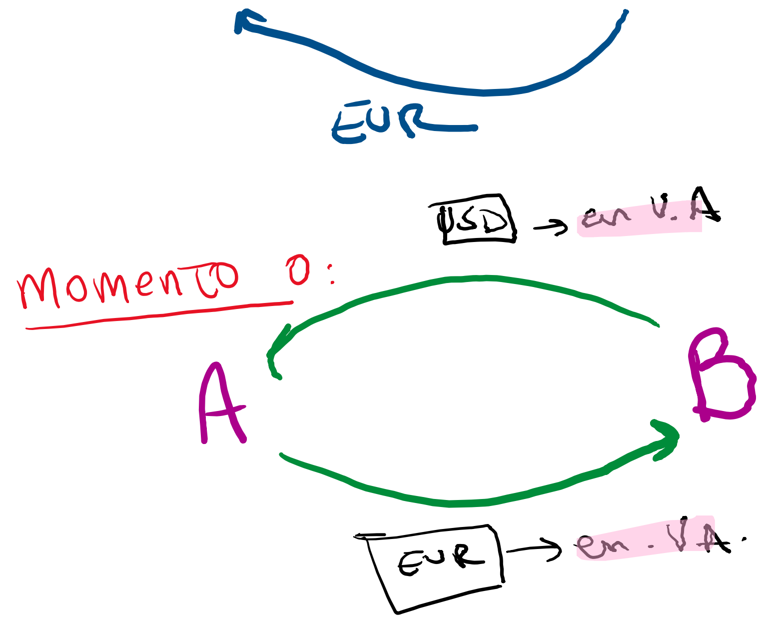
TIPO DE CAMBIO

↳ lo que impacta en mi posición total

En los swap de monedas es usual hacer un cambio de nominal al momento inicial.

$$\left.A \xrightarrow{USD} B\ \right\}$$

momento de constitución del SWAP



es usual que haya intercambio de nominal

Opciones

Definición

Una opción es un contrato derivado en donde el tenedor tiene el derecho – pero no la obligación – de ejercer una transacción futura.

Cuando hablamos de Derecho, quien tiene la opción decide si le resulta conveniente ejercer o no ejercer esa transacción llegada la fecha. Su contraparte No. Implica pagar una prima por tener ese derecho.

El contrato, también define, cuál es la transacción a la que hace referencia. Las más usuales:

- opciones de compra
- opciones de venta

Sin embargo, podría definirse cualquier transacción.

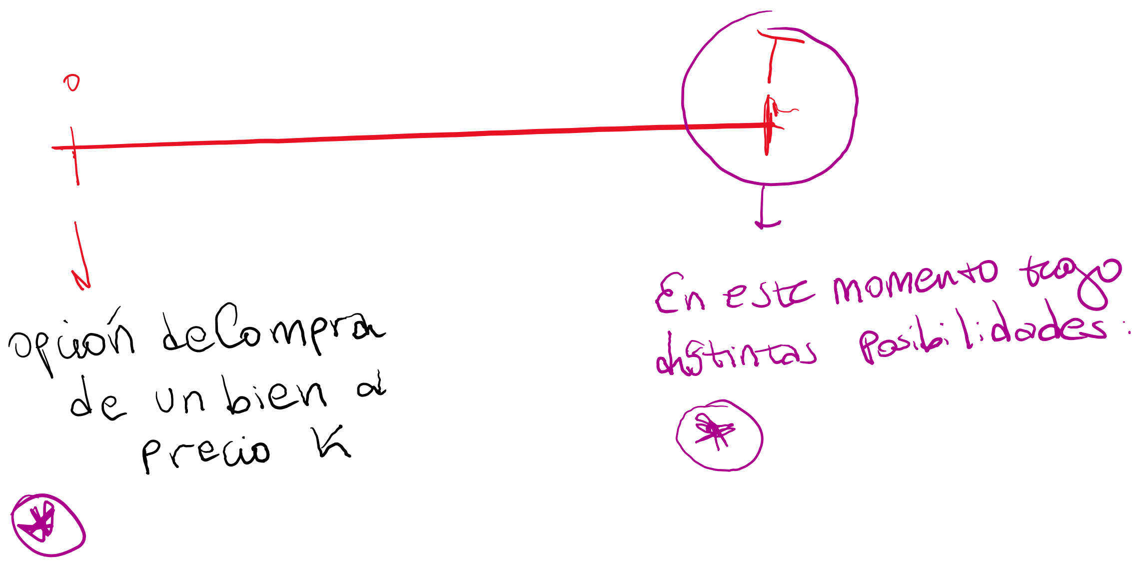
Por otro lado, el contrato también define el momento en que puede realizarse la transacción.

En las opciones, estoy en el momento cero y quiero saber que va a pasar con un determinado precio all momento t. La diferencia con otros derivados es que cuando yo compro esta opción, tengo el derecho de comprar o de vender un bien en un momento futuro t.

La palabra clave es que ahora si tengo este instrumento voy a poder realizar una transacción en el momento t solo en caso de que yo quiera hacerlo. No me comprometo a realizar esa acción, tengo la alternativa de realizarla en un momento futuro del tiempo.

En general esas opciones son transacción de compra o vende de un bien en un momento futuro. Puedo tener una opción que me de el derecho a comprar un bien a un precio en el momento T.

Bajo este esquema, si lo que tengo es una opción de compra:



POSICIÒN COMPRADA (Call):

$S_t > K$: Si el precio de mercado está por encima de K, me conviene comprar porque en este escenario el precio del bien pactado está más barato que el precio al cuál ese bien se vende en el mercado. El que me vendió a mi va a perder porque pierde plata. Si yo no lo ejerzo, no sucede nada. Hay erogación de fondos inicial y es el pago de una prima. Si uno quiere asegurarse un precio de compra debe pagar algo como compensación porque el vendedor pierde si lo ejerzo y si no lo ejerces, el vendedor tiene la prima.

Compro a K → Ejerzo el derecho

$K > S_t$: Me conviene comprar al precio de mercado porque esta mas económico. En este caso no ejerzo. Compro a St.

T
- $S_T > K \rightarrow$ Compro K. Ejerzo el derecho
- $K > S_t \rightarrow$ Compro S_t. No ejerzo

Cuando tengo una opción de compra, me aseguro un precio máximo de compra. Si el precio se dispara tengo un contrato que me permite comprar.

Pagando la prima me aseguro un precio máximo de compra.

En el caso de las opciones con posición comparada, habíamos dicho que ganaba en el caso que St > K, y ganaba la diferencia entre los dos precios.

Cuando es mas chico, gano cero (porque no ejerzo).

Se puede representar la posición Call - Short:

Fórmula	Acción	Pay off
$S_t > K$	Compro K, Ejerzo el derecho	La diferencia entre St – K
$S_t < K$	No ejerzo	Cero

Entonces Posición Call short:

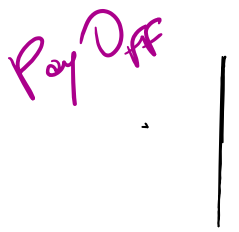
$Pay\ Off$: $\max(S_t - K; 0)$

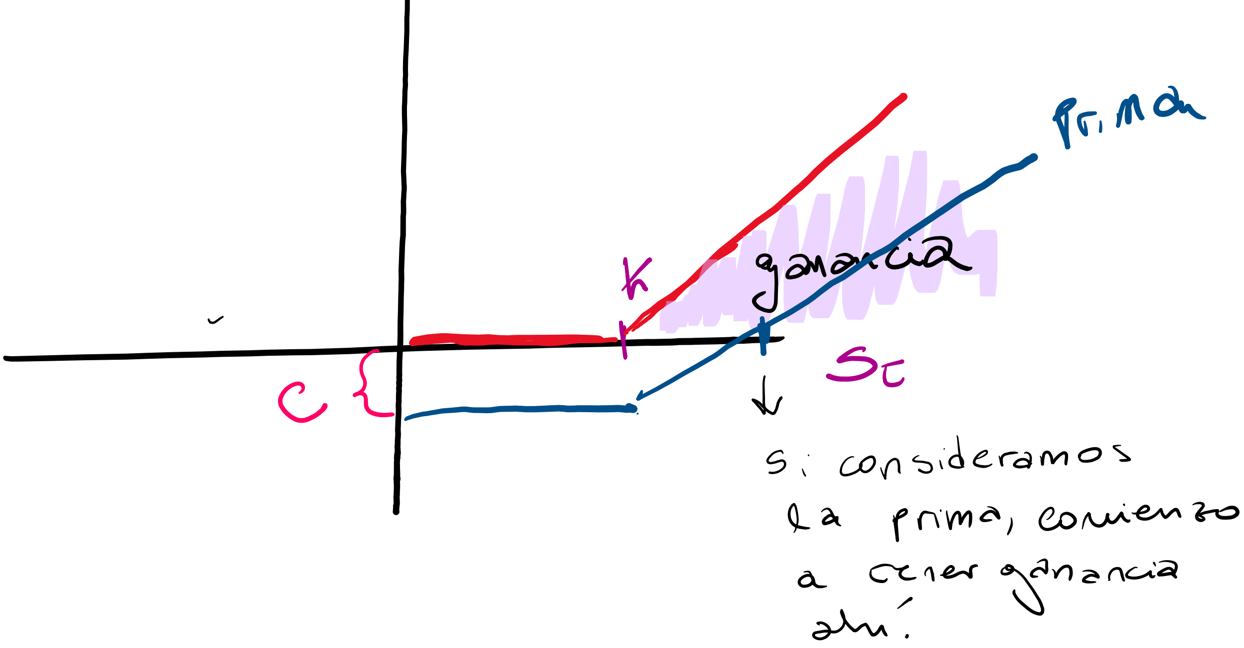
Quien tiene la posición long (el que vendió) en el Call:

$Pay\ Off$: $-\max(S_t - K; 0)$

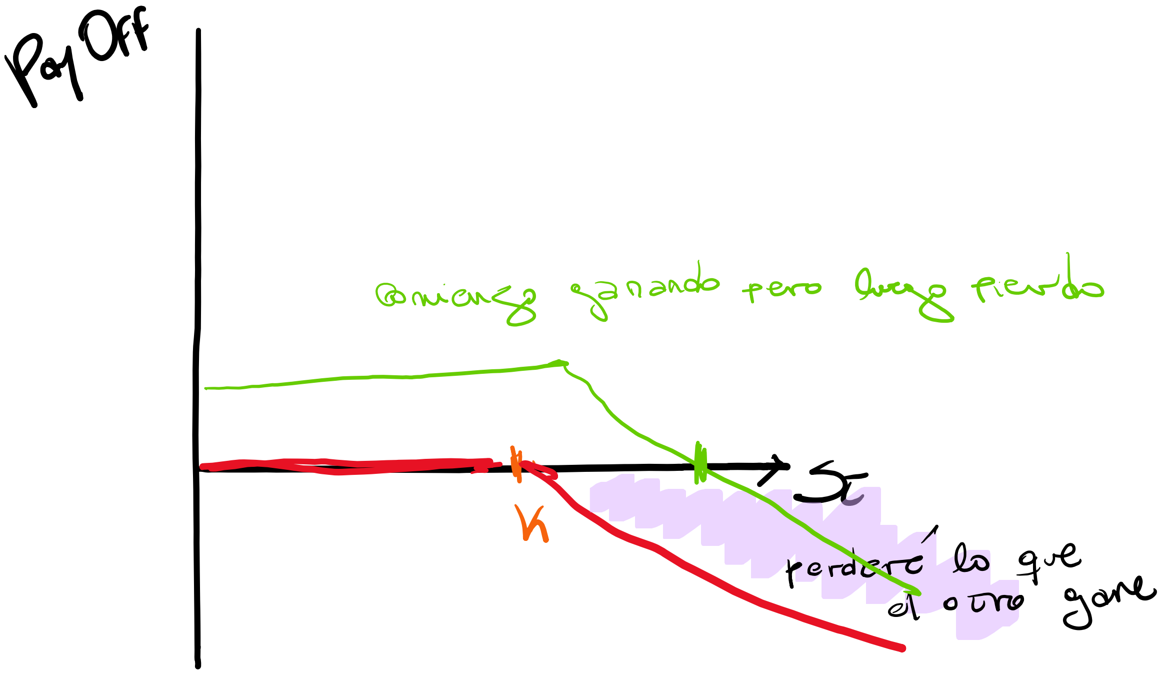
Como mejor escenario, no pierde nada.

Posición Long





Posición Short



Cuando hablamos de riesgo en las inversiones, en riesgo que tiene un call o una posición en un Put, en general se ve una inversión de riesgo.

En el caso del long, pago una prima por el Call y después puedo llegar a ganar plata. También puede darse el caso en donde pierda el 100% de lo que invertí. Si yo no ejerzo, pagué la prima y me quedé con nada.

Si invierto en este tipo de instrumentos puedo llegar a perder el 100% pero el rendimiento que puedo llegar a tener por sobre la prima si gano es también muy alto (desde la perspectiva de especulo tomando una posición).

POSICIÒN VENDIDA (Put):

Puedo estar comprado en una opción de venta a precio K.

$S_t > K$: No ejerces la opción

$K > S_t$: Ejerzo

$S_t \rightarrow S_t < K \rightarrow$ Ejerzo

$S_t \rightarrow S_t > K \rightarrow 0$ (No ejerzo)

Cuando compro una posición de compra me aseguro un precio máximo de compra. Cuando estoy en una opción de venta, me aseguro un precio mínimo de venta.

Si el precio está por encima, venderé a más pero a priori me aseguro un precio mínimo de venta.

Por ese precio mínimo de venta, pagaré una prima. Será como comprar un seguro. En general, cuando hablamos de derivados, hablamos de una transacción futura y la representamos en función al periodo. Entonces cuanto gano al momento t por tener este contrato hoy.

Se puede representar la posición Put - Short:

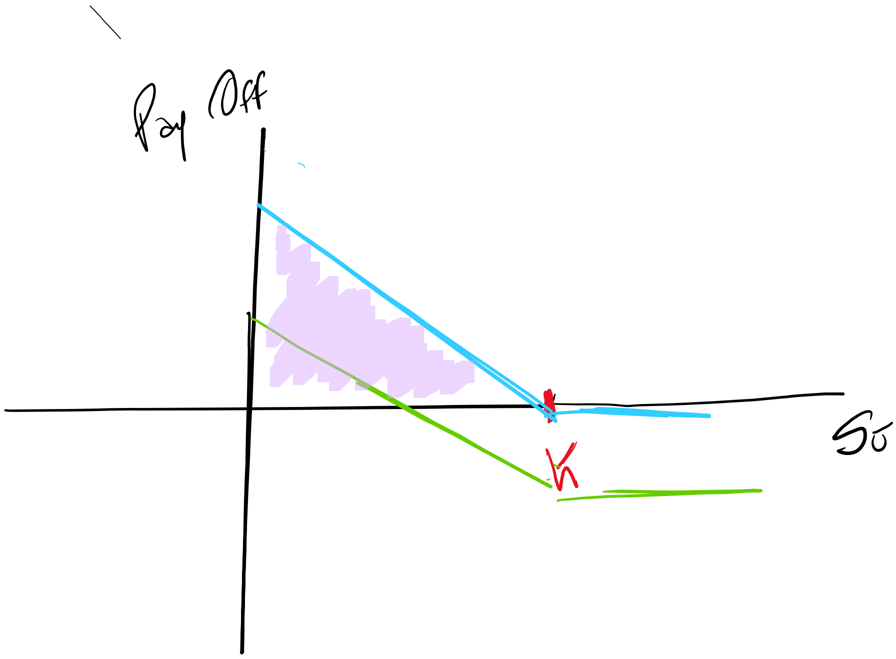
Fórmula	Acción	Pay off
$S_t > K$	No ejerzo	Cero
$S_t < K$	Ejerzo	La diferencia entre K-St

Entonces Posición Put long:

$Pay\ Off$: $\max(K - S_t; 0)$

Quien tiene la Put Short:

$Pay\ Off$: $-\max(K - S_t; 0)$



¿Dónde se operan?

Igual que en el caso de los contratos a corto plazo, pueden operarse contratos entre particulares (Contratos privados, "over the counter") o en mercados organizados, operando contra el mercado y sujeto a sistemas de márgenes y garantías.

¿Cómo se ejercen?

Normalmente, contra entrega o por compensación.

Dependiendo del tipo de transacción que se trata, hay veces que la única forma de ejercicio es por compensación. Es decir, si lo que estoy poniendo como subyacente es un índice, los contratos sobre índices se cierran por compensación o diferencia de precios.

¿Cuándo se cancelan?

El mismo contrato lo especifica.

Usualmente se trabaja con dos tipos de opciones:

- Opciones Europeas: Se pueden ejercer sólo al vencimiento
- Opciones Americanas: Se pueden ejercer en cualquier momento antes del vencimiento. No tengo un momento especifico del tiempo de ejercicio de la opción sino que durante un periodo hasta la fecha del vencimiento puedo [illegible] mismo.

Opciones usuales

¿Cómo se definen?

Usualmente definimos las opciones por el *Pay Off* que generan.

Tal como en el caso de los Forwards o Futuros, ese *Pay Off* representa el resultado que genera el ejercicio de la opción.

De esa manera podría generar cualquier contrato cuyo valor depende de algún subyacente.

Los casos frecuentes son los anteriormente vistos.

Un resumen de ellos:

Opción de compra Call

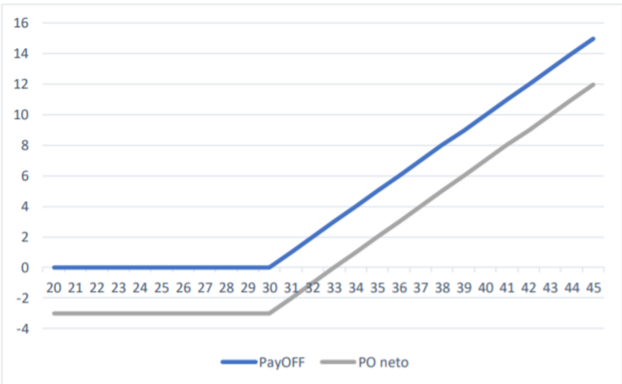
La opción de compra le da al tenedor la opción de comprar un subyacente a un precio y momento determinado.

Por un lado, se especifica cual es el activo / subyacente de referencia.

El precio será el precio de ejercicio K. En el caso de ser una opción europea, será una fecha el momento determinado y en el caso de ser una opción americana, será un periodo.

¿Cómo funcionaría? Caso opciones Europeas

$$PayOff = max(S_T - K; 0)$$



Precio de ejercicio: 30

Prima: 3

La contraparte:

$$PayOff = -max(S_T - K; 0)$$

Tanto contra entrega como por compensación nos permite asegurar un techo al precio de compra ante la necesidad de cobertura.

Desde la perspectiva de expectativas sobre precios: posición long espera aumentos de precios, posición short esperará la baja.

Opción de Venta Put

La opción de venta le da al tenedor la opción de vender el subyacente a un precio y momento determinado.

Se especifica cual es el activo / subyacente de referencia.

El precio de ejercicio será K

Si es una opción europea, será la fecha. Si es americana, será un periodo.

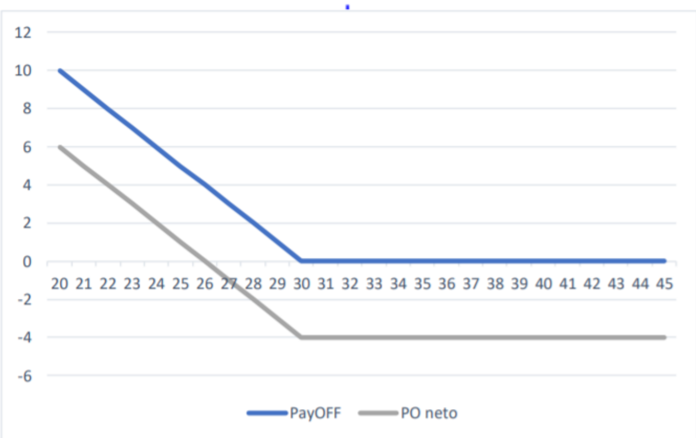
Cómo funcionaría?

(Caso de opciones europeas)

Si $S_T > K$ → conviene no ejercer la opción y vender a precio de mercado → $PayOff = 0$

Si $S_T < K$ → Conviene ejercer la opción y vender al precio de ejercicio, teniendo un Pay Off positivo → $PayOff = K - S_T$

$$PayOff = max(K - S_T; 0)$$



Precio de ejercicio: 30

Prima: 4

La contraparte:

$$PayOff = -max(K - S_T; 0)$$

Precio de ejercicio: 30

Prima: 4

Tanto contra entrega como por compensación nos permite asegurar un piso al precio de venta ante la necesidad de cobertura.

Desde la perspectiva de expectativas sobre precios: posición long espera baja de precios, posición short espera suba.

Términos usuales

En función del valor intrínseco de la opción (*pay-off* si se ejerciera en ese momento) podemos decir que la opción está:

ITM (In the Money)→ Valor intrínseco positivo. Si yo lo ejerciera en ese momento, está en un *pay off* positivo.

ATM (At the Money) → Precio de mercado coincide con el Precio de Ejercicio. Tomo una posición en una opción que está ATM, es decir, el precio de ejercicio está igual al precio spot del bien.

OTM (Out of the Money) → Valos intrinseco negativo. Si yo lo ejerciera en ese momento, está en un *pay off* negativo.

¿De qué depende el valor de la prima?

Para saber cuál es el valor de la prima, lo que deberíamos pensar es que cosa me parece que influenciaría en eso que yo estoy dispuesto a pagar por el Call o por el Put.

- Precio de Ejercicio
- Precio del activo
- Tiempo al vencimiento
- Tasa libre de riesgo
- Tasa de rendimiento del activo
- Volatilidad

¿Cómo influye?

	Call Eu	Put Eu	Call Am	Put Am
S	+	-	+	-
K	-	+	-	+
T	?	?	+	+
σ	+	+	+	+
r	+/-	-	+/-	-
D	-	+	-	+

S - Precio del bien:

Si aumenta el precio, los call aumentan tanto europeo como americano.

Si aumento el precio, los put se desvalorizan. Hay relación de precios, pero inversa. Suba en el precio, baja en put.

K – Precio de ejercicio:

Si el precio de ejercicio sube, el precio del call es más barato porque el pay off del call era Max(St-K.0) con lo cual si aumento el K, el pay off que voy a estar teniendo es mas chiquito y además la probabilidad de ejercicio va a ser más chica porque va a tener que cruzar un umbral más alto para poder ejercer.

Si el precio de ejercicio sube, el precio del put aumenta ya que el *pay off* era MAX(K-St,0).

δ – Volatilidad:

Si tengo más incertidumbre, ¿Qué sucede con el precio que estoy dispuesto a pagar para fijar el precio máximo de compra?

Va a salir mas caro el Call y el Put. Cuanto menos cierto sea lo que va a pasar con los precios más valor está teniendo este tipo de instrumentos.

Mas caro será tener este tipo de seguros.

T – Tiempo:

El paso del tiempo influye, cuanto mas largo sea el rango, tengo mas incertidumbre (mas volatilidad), en ese sentido me jugaría como algo positivo por el efecto de incertidumbre. Entonces me tiraría para arriba.

Luego tengo otro efecto, impacto de en qué momento lo ejerzo termina generándome un impacto de precio hacia abajo. En el caso de los Call o Put americano, el paso del tiempo me termina jugando a favor porque tengo una ventana de tiempo mas larga sobre la cuál poder ejercer ese derecho.

r – Tasa de interés:

La tasa interés tiene dos efectos:

Tasa de interés sube y tiene tendencia a suba de precios.

Efecto sobre descontar el flujo de fondos entonces el aumento de precios le va a pegar al put bajándolo y el descontar a una tasa más alta también lo baja.

Con respecto al Call están los dos efectos, el efecto (no directo) de tasa de interés que aumenta precios y el efecto de tasa a la que descuenta que lo baja. Suele primar el efecto sobre precios mas que el de tasa de descuento.

D – Pago de dividendos:

Sobre el activo que estemos hablando hay una tasa de rendimiento o hay un dividendo sobre ese subyacente y el efecto de ese dividendo es una caída en los precios. No todas las ganancias de esa acción se reflejan en el precio, sino que parte se paga en dividendo, entonces ante un escenario que pague dividendo o que no, si hay presencia de pago, afectan igual que una caída en los precios. Va al revés de cómo van los precios.

¿Cuáles son los subyacentes que podemos llegar a trabajar?

- Activo sin rendimientos ni costos asociados
- Acción con dividendo cierto
- Activo con tasa de rendimiento
- Contrato de futuro
- Índices de mercado
- Índices climáticos

Estrategias con opciones al momento de combinarlas

Yo puedo ponerle un techo/piso a lo que iba a perder/ganar combinando posiciones en distintas opciones.

Opciones de Compra

$$PayOff = \max(S_t - K; 0)$$

No ponemos un precio sino entender ciertas cotas a ese precio.

A nivel general usamos la nomenclatura c para opciones europeas y C para opciones americanas.

El análisis de cotas no depende de demasiados supuestos salvo que podamos invertir efectivo a una determinada tasa y no hace referencia a movimientos particulares que tenga el subyacente, en general son relaciones que vamos a observar - precios de mercado-

Por lo general, en los gráficos tenemos el Pay off y luego descontamos la prima que estamos pagando:

Primera relación que tenemos es que siempre una opción americana vale al menos lo mismo que su par europeo porque en teoría me deja hacer lo mismo Y más cosas.

$$c \leq C$$

Cotas de Precios Maximo

Tanto el Call europeo como el call americano tiene que valer menos que el subyacente hoy.

$$c_0 \leq S_0$$

$$C_0 \leq S_0$$

Yo no voy a estar comprando un derecho que lo que vale el bien hoy, para esos casos me conviene comprar el bien directamente.

Precios mínimos – Acciones sin dividendos

Cartera A

$$c + K * e^{-r*T}$$

Cartera B

$$S_0$$

Empiezo a mirar cuanto es lo mínimo que voy a pagar por este derecho a comprar el bien en un momento futuro t.

Siempre trabajamos comparando carteras, en esa comparación vamos a entender que relación de precios hay entre esas carteras al vencimiento (cuando se trata de opciones europeas) y entender que relación de precios va a haber entre esas carteras hoy.

En la comparación comparamos la cartera A donde tenemos un call europeo con un monto efectivo de K * E a la rt y en la cartera B tenemos un subyacente.

Cuando las comparo veo cuanto vale esa cartera al momento del vencimiento, entonces estoy con la cartera A, se que vale al vencimiento lo que sea el Pay off del Call (ósea el máximo entre St-K;0) y además el monto que tengo en efectivo lo voy a capitalizar (lo invierto). Desde cero hasta t al momento de invertirlo me queda K.

El valor de la primer cartera:

Si se eserce

El payoff será

0 T

Cartera A → $\max(S_T - K; 0) + K$ $\begin{cases} Si\ S_T \geq K \quad => S_T - K + K : S_T \\ Si\ S_T \leq K \quad => 0 + K : K \end{cases}$

Cartera B → S_T

Si no se eserce

el pay off será

Comienzo a ver los dos escenarios:

- Cuál es el escenario si la opción se ejerce.
- Cuál es el escenario si la opción no se ejerce.

La cartera B esta conformada por el activo S0, por lo tanto, cuando llegue el vencimiento va a valer lo que el activo valga en ese momento.

La cartera B vale St y la cartera A va a valer el Max(K-St;0).

Si comparo las dos carteras al momento t, la relación que hay entre ellas al momento del vencimiento:

- $S_t > K$, la relación es que son iguales.
- $S_t > K$, la relación es que la cartera A es mejor

Cuando miro la relación entre ambas carteras al momento t, las dos carteras o son iguales o A es mejor que B.

No hay escenario donde A valga menos que B.

A es al menos tan grande como B.

Cuando comparo las dos alternativas de inversión lo que veo es que en el momento T, A es al menos tan valiosa como B (y a veces un poco más valiosa).

Al momento cero estaré dispuesto a pagar más por la cartera A. Porque se que al momento del vencimiento A va a ser al menos tan valiosa como B, pero existen escenarios donde puede tener un valor superior, esa relación al momento cero se mantiene. Cuando este en cero lo que va a pasar es que la cartera A va a ser mayor o igual a la cartera B porque a futuro A me va a dar al menos tanto como me da B y puede que me dé más.

Cuando digo que hoy estoy dispuesto a pagar mas por A que por B, voy a mirar cuando sale cada una de las carteras:

"A" va a valer lo que sale la prima del call (lo que todavía no tiene número) más ese efectivo que ese después voy a tener que invertir.

La cartera B va a valer lo que sale el subyacente en ese momento.

De aquí saldrá la primera cota o precio mínimo que vemos para opciones europeas:

$$\left.\begin{array}{l} Cartera_{A,T} = max(S_T; K) \\ Cartera_{B,T} = S_T \end{array}\right\} \longrightarrow Cartera_{A,T} \geq Cartera_{B,T}$$

$$\downarrow$$

$$Cartera_A \geq Cartera_B$$

$$\downarrow$$

$$c_0 + K \cdot e^{-r \cdot T} \geq S_0$$

$$\boxed{c_0 \geq S_0 - K \cdot e^{-r \cdot T}}$$

Si hablo de un Call europeo, el call va a valer al menos tanto como:

$$\boxed{c_0 \geq S_0 - K \cdot e^{-r \cdot T}}$$

Todas estas comparaciones de precios que hacemos la hacemos a partir de comparación de carteras.

Supongamos que, lo que tendré que hacer es precios mínimos con acciones con dividendos o que tienen un rendimiento a una determinada tasa – como el caso de moneda extranjera-

El objetivo será comparar dos carteras en donde la lógica será mirar que pasa con esa cartera al momento T (vencimiento).

Tenemos:

$A \rightarrow c + K e^{-rT}$

$B \rightarrow S_0$

Si consideramos dividendo que rinde a tasa q

El payoff de la cartera A será

$A \longrightarrow max(S_T - K; 0) + K$

$max(S_T; K)$

(si no lo toco será el mismo)

generaba:

el dividendo no me afecta

$$B \rightarrow [S_0] \longrightarrow S_T \cdot e^{qT}$$

tendré un poco más (x por intereses)

Cuando hago la comparación entre Cartera A y Cartera B el problema que tendré es que la cartera A → Max(St;K) y la B →St Exp(q*t).

Si tengo que hacer una comparación más clara, tendré que modificar la cartera B. La armaría con un poco menos de unidad de cartera. No estará armada con una acción sino con e^{-q*t} acciones o e^{-rf*t}moneda extranjera.

Si modifico esa cantidad, lo que pasará es que al principio tenía S_0e^{-qt} cuando llega al final tendré $S_0e^{-qt} * e^{q*t}$

Lo que hago es ajustar las carteras y voy a decir que la Cartera B la voy a armar de manera tal de tener E a la menos q¨T cantidad de acciones.

Cartera A $\quad c + K \cdot e^{-r \cdot T}$

Cartera B $\quad S_0 \cdot e^{-qT}$

0 T

Cartera A $\longrightarrow \max(S_T - K; 0) + K$

Cartera B $\longrightarrow S_T$

$$c + K \cdot e^{-r \cdot T} \geq S_0 \cdot e^{-qT} \longrightarrow \boxed{c \geq S_0 \cdot e^{-qT} - K \cdot e^{-r \cdot T}}$$

Contratos de futuro

Parte del subyacente de la opción puede ser un contrato de futuro entonces si tenemos que ver precios mínimos para contratos de futuros, estas serán las carteras a comparar:

Cartera A $\quad c + K \cdot e^{-r \cdot T} - \underbrace{F_0 \cdot e^{-rT}}_{\text{cantidad de dinero adicional}}$

Cartera B $\quad F_0$

↳ tiene posición larga a el contrato de futuro

En esta comparación tenemos:

0 T

Cartera A $\longrightarrow \max(F_T - K; 0) + K - F_0$

Cartera B $\longrightarrow F_T - F_0$

$$\boxed{c \geq F_0 \cdot e^{-rT} - K \cdot e^{-r \cdot T}}$$

Al momento del Vencimiento:

Tendremos la Cartera A va a valer:

$$\max(F_T - K; 0) + K - F_0$$

El último termino hace referencia a plata que tengo invertida. Tenemos dos escenarios:

1. Donde se ejerza Ft >K → Si se ejerce → Ft-K+K-F0 → Ft -F0
2. Donde no se ejerza Ft < K → Si no se ejerce →K-F0

Ahora, tendremos la cartera B que tiene una posición long en el futuro.

Al momento T grande va a valer:

$$F_t - F_0$$

Tendré dos opciones:

En el escenario 1 de la cartera A, ambas carteras valdrán lo mismo

En el escenario 2 de la cartera A, la relación es que la está será al menos tan buena como la cartera B. Cuando K es mas grande que Ft vale más la cartera A.

Al momento cero:

Tiene que suceder que la Cartera A en 0 tiene que ser al menos tan grande como la Cartera B en cero.

$$Cartera\ A_0 = C + K.e^{-rT} - F_0\,.e^{-rT}$$

$$Cartera\ B_0 = 0$$

Si quisiera salir, saldría al mismo precio, por eso vale cero la cartera B al momento cero.

¿Qué sucedería si esta relación no se verifica?

$$c_0 \leq S_0 - K \cdot e^{-r \cdot T}$$

Lo que podría hacer es ver como arbitrar. Lo que veré es que voy a tener que comprar lo que a mi esta barato y vender lo que para mí está caro.

$$c_0 \leq S_0 - K \cdot e^{-r \cdot T}$$

Compro Vendo

1. Compro el Call
2. Vendo en descubierto el subyacente
3. La diferencia la invierto a libre de riesgo

Cuando antes buscábamos oportunidades de arbitraje no partíamos de una desigualdad – como este caso - . Cuando estoy en este escenario, no tenemos una ganancia cierta pero algo ganamos.

1. Supongamos que compro el call entonces tendré en el momento T un PayOff que va a ser el máximo entre: max(St-K;0)
2. Vendo al descubierto el subyacente implica que al momento T tendré una deuda por el valor del subyacente -St
3. La diferencia la invierto a libre de riesgo. Básicamente la diferencia será lo que obtuve en el momento inicial por el subyacente menos lo que pagué por la prima del call y cuando llegó al final tengo ese valor capitalizado a la tasa libre de riesgo (S0 – C0) * e ^ r*T.

¿Qué sucede si el precio está por encima del precio de ejercicio?

$$Si\ S_T \geq K \quad => \cancel{S_T} - K - \cancel{S_T} + (S_0 - c_0) \cdot e^{rT}$$

$$=> \underbrace{(S_0 - c_0) \cdot e^{rT} - K}_{\text{Resultado}} \quad \rightarrow \ por\ def.\ K \cdot e^{-r \cdot T} \leq S_0 - c_0$$

Resultado → debo probar que me permita tener una ganancia

Para obtener una ganancia se debe dar que:

$$\underbrace{(S_0 - c_0) \cdot e^{rT}}\ \underbrace{- K}$$

debe ser más grande que el strike

Por definición esto sucedía porque es la relación que se mantiene:

$c_0 \leq S_0 - K \cdot e^{-r \cdot T}$ entonces gané plata en este escenario.

¿Qué sucede si el precio está por debajo del precio de ejercicio?

$$Si\ S_T \leq K \quad => \ 0 - S_T + (S_0 - c_0) \cdot e^{rT}$$
$$=> \ (S_0 - c_0) \cdot e^{rT} - S_T \qquad \rightarrow \ por\ def.\ K \leq (S_0 - c_0) \cdot e^{-r \cdot T}$$
$$\rightarrow \ S_T \leq K \leq (S_0 - c_0) \cdot e^{-r \cdot T}$$

En este caso el PayOff no se ejerce, lo que me queda es menos Deuda de St mas la plata que tengo invertida y puedo mostrar que:

$=> \ (S_0 - c_0) \cdot e^{rT} - S_T$ es mayor a cero por la relación o definición que yo tenía de la cartera al momento inicial, donde K era mas chico. Como además St es más chico que K, esto me dará un número positivo.

En este arbitraje, en los dos casos, pase lo que pase con el activo el payoff es positivo, no será el mismo valor, pero en ambos casos aseguro que es positivo. Por lo cual, yo me armé una estrategia sin poner nada de plata mía y con esto obtuve una ganancia.

Opciones americanas

Caso acciones sin dividendos

Las opciones americanas decíamos que valían al menos lo mismo que las opciones europeas. Hay un caso particular de las acciones sin dividendos. Es decir, tengo un call sobre una acción que no paga dividendos, en sete caso la opción europea vale lo mismo que la opción americana porque nunca conviene hacer ejercicio anticipado de estas opciones.

En el caso de una opción que no paga dividendo, entonces, no resulta conveniente hacer ejercicio anticipado. Por lo tanto: c=C.

Tiene dos justificaciones:

$$c_0 \geq S_0 - K \cdot e^{-r \cdot T}$$

(El valor mínimo de la prima si yo me quedo con el call)

1. Efecto tasa: Siguiendo la lógica de la comparación de carteras.

Si hago ejercicio anticipado en cualquier momento del tiempo. El valor de la prima será:

$$C_t > S_t - K * e^{-r(T-t)}$$

Si hiciera el ejercicio anticipado de la opción, el *PayOff* será:

$$S_t - K$$

Si yo lo mantengo y lo tengo hasta el vencimiento sería:

$$S_t - K * e^{-r(T-t)}$$

¿Cuál de las dos valdría más?

Será el mantenerlo hasta el vencimiento porque si lo ejerzo vale St – K entonces en esa comparación parece ser que ese derecho de ejercerlo al vencimiento vale más que hacer un ejercicio anticipado.

2. Efecto seguro: Aún sin ganar intereses sobre el monto, se asegura tener el máximo entre el activo y K.

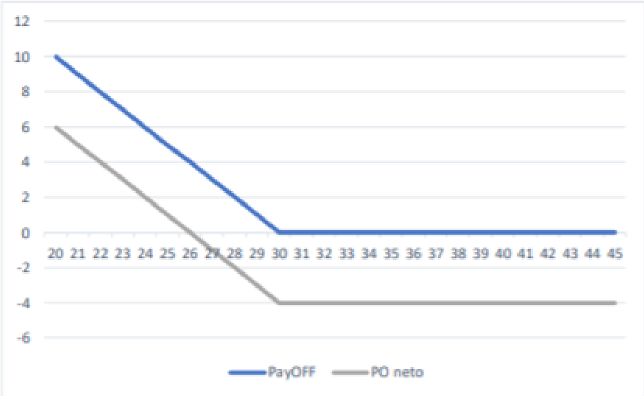
Aunque la tasa de interés sea cero, yo me aseguro siempre tener el máximo entre el valor del activo y K. Si hago el ejercicio anticipado, yo gano St-K y me quedo con el activo al momento T del vencimiento.

Si no lo ejerzo, me estoy asegurando tener por más tiempo, el máximo entre lo que es el precio del activo y K.

Opciones de Venta

En este caso, ganábamos ante escenarios de precios bajos en una posición long. Vamos a trabajar con precio máximos y precios mínimos.

$$PayOff = max(K - S_T; 0)$$



Precios máximos

El put me da derecho a vender a un determinado valor, nunca pagaré por ese derecho más de lo que yo estoy asegurando como precio de venta.

$$p_0 \leq K \cdot e^{-rT}$$

$$P_0 \leq K$$

Nunca pagará mas que K (en el caso de opciones americanas) o K- e^-rT (En opciones europeas) en donde se que ese ejercicio está limitado al momento T.

Precios mínimos – Acciones que no pagan dividendos

Las carteras que comparo cambiarán un poco pero el objetivo es el mismo.

Cartera A	$p_0 + S_0$
Cartera B	$K \cdot e^{-rT}$

La cartera A va a estar armada por un Put y un subyacente.

La cartera B va a estar formada por efectivo.

Entonces, la cartera A al final va a valer:

lo que valdrá el activo a ese momento

$$\boxed{\text{Cartera A}} \longrightarrow \underbrace{\max(K - S_T; 0)}_{\text{por el lado del Put}} + S_T \begin{cases} Si\ S_T \geq K \quad => \ 0 + S_T : S_T \\ Si\ S_T \leq K \quad => \ K - S_T + S_T : K \end{cases}$$

Surgirán de aquí dos escenarios:

En el caso que no se ejerza:

$$Si\ S_T \geq K \quad => \ 0 + \ S_T \ : \ S_T$$

En el caso de que se ejerza:

$$Si\ S_T \leq K \quad => \ K - S_T + S_T \ : \ K$$

La cartera B vale efectivo. Por lo tanto, la cartera A es mas grande que la cartera B:

$$p_0 + S_0 \geq K \cdot e^{-rT} \longrightarrow \boxed{p_0 \geq K \cdot e^{-rT} - S_0}$$

Precios mínimos – Acciones con dividendo cierto

Donde las carteras valdrán:

Cartera A	$p_0 + S_0$
Cartera B	$K \cdot e^{-rT} + D$

No hablamos de un rendimiento sino de un monto cierto que sabemos que vamos a cobrar, D.

La cartera A está formada por el Put mas el subyacente y la cartera B tiene el efectivo por K * e a la menos r*t y el efectivo equivalente al dividendo que voy a cobrar.

La cartera A valdrá:

$$\boxed{\text{Cartera A}} \longrightarrow \max(K - S_T; 0) + S_T + D \cdot e^{rT}$$

La cartera B valdrá:

$$\boxed{\text{Cartera B}} \longrightarrow K + D \cdot e^{rT}$$

La relación entre ambas carteras será similar a la anterior. Cartera A valdrá al menos tanto como la cartera B:

$$\boxed{p_0 \geq K \cdot e^{-rT} + D - S_0}$$

Precios mínimos – Acciones con rendimiento cierto

Se ajusta cantidades por en donde tenga subyacente.

Cartera A $\quad p_0 + e^{-qT} \cdot S_0$

Cartera B $\quad K \cdot e^{-rT}$

Las carteras valdrán:

Cartera A $\longrightarrow \max(K - S_T; 0) + S_T$

Cartera B $\longrightarrow K$

La relación que se establecen entre ellas:

$$\boxed{p_0 \geq K \cdot e^{-rT} - S_0 \cdot e^{-qT}}$$

Precios mínimos – Opciones sobre futuros

En el caso de la Cartera A tenemos el put + efectivo + una posición long en el futuro:

Cartera A $\quad p_0 + e^{-rT} \cdot F_0 + Pos.LongF$

La posición Long, cuando hacemos la comparación en t=0 vale cero.

La cartera B será:

Cartera B $\quad K \cdot e^{-rT}$

Al momento del vencimiento valdrán:

Cartera A $\longrightarrow$ $\max(K - F_T; 0) + F_0 + (F_T - F_0)$

$\max(K - F_T; 0) + F_T$

Cartera B $\longrightarrow$ K

La relación que hay entre ambas:

$$\boxed{p_0 \geq K \cdot e^{-rT} - F_0 \cdot e^{-rT}}$$

Put-Call Parity

Anteriormente, veníamos comparando relaciones entre los precios de lo que yo estoy dispuesto a pagar por un Call y por un Put mirando las cotas mínimas y máximas, haciendo comparación de cartera.

Compararemos ahora, la relación que existen entre los call y los puts del mismo subyacente del mismo vencimiento.

Vamos a comparar carteras y ver que es lo que pasa con esas carteras en los distintos momentos del tiempo.

Opciones europeas – Acciones que no pagan dividendos

Lo que compararemos son:

La Cartera A que está formada por un Call + Efectivo por valor K * E a la -r*T

1. Call + Efectivo por valor $K \cdot e^{-r \cdot T}$

Y la Cartera B:

2. Put + Acción

0 ——————————— T

Cartera A $\longrightarrow$ $\max(S_T - K; 0) + K$

Cartera B $\longrightarrow$ $\max(K - S_T; 0) + S_T$

En la cartera A está formada por un Call y se disparan dos opciones:

- $S_t > K$: Me quedará St

- $S_t < K$: Si no se ejerce, me queda K

En la cartera B está formada por un Put y se disparan nuevamente dos opciones:

- $S_t > K$: Me quedará St porque no se ejerce
- $S_t < K$: Si se ejerce, me queda K

A diferencia de las comparaciones que hacíamos antes donde la cartera A era al menos tan buena como la cartera B, en este caso, las dos carteras valen lo mismo. Por lo tanto, si ambas carteras valen lo mismo al momento T, lo que debería pasar es que valdrán lo mismo al momento cero.

Aquí aparecerá la relación denominada Call-Put Parity que compara las dos carteras:

$$\boxed{c_t + K \cdot e^{-r(T-t)} = p_t + S_t}$$

Si valen lo mismo en T grande, entonces valdrán lo mismo en cualquier momento donde me pare para evaluarlas. Siempre que sean opciones con el mismo subyacente, mismo precio de ejercicio y misma fecha de vencimiento.

¿Cómo arbitrar si...?

Podemos ver, ahora, como arbitrar en alguno de estos escenarios:

En el caso que se dé la relación:

$$c_t + K \cdot e^{-r(T-t)} > p_t + S_t$$

Para aprovechar la oportunidad de arbitraje deberíamos

$$\underbrace{c_t + K \cdot e^{-r(T-t)}}_{\text{Vender}} > \underbrace{p_t + S_t}_{\text{Comprar}}$$

Con esto obtengo una ganancia.

Opciones europeas – Opciones sobre futuros

Lo importante es que tanto cuando sacábamos los valores de mínimos como los máximos, siempre tenemos una parte "ciega" en la fórmula. Porque si no estuviera, no nos daría esa paridad.

Cuando comparamos esas dos carteras, la primera es call y efectivo y la segunda cartera es Put más efectivo y una posición long en futuro:

Comparamos carteras:

1. Call + Efectivo por valor $K \cdot e^{-r \cdot T}$
2. Put + **posición long en futuro** + efectivo por $F_0 \cdot e^{-rT}$

Esta posición long en el futuro si tuviésemos que arbitrar, no hay que olvidar porque no cerraría la paridad.

0 T

Cartera A → $\max(F_T - K; 0) + K$

Cartera B → $\max(K - F_T; 0) + (F_T - F_0) + F_0$

$\max(K - F_T; 0) + F_T$

Cuando miramos la cartera dos, esta no tiene esa posición en futuro, porque en el momento cero, la posición en futuro vale cero:

$$\boxed{c_0 + K \cdot e^{-rT} = p_0 + F_0 \cdot e^{-rT}}$$

Otros casos serían:

Opciones europeas **Acciones con dividendo cierto**

$$c + D + Ke^{-rT} = p + S_0$$

Opciones europeas **Activos con tasa de rendimiento**

$$c + Ke^{-rT} = p + S_0 e^{-qT}$$

Opciones americanas

Acciones sin dividendos

$$S_0 - K \leq C - P \leq S_0 - K \cdot e^{-rT}$$

Surge de comparar carteras:

1. Cartera A: Call + Efvo K Cartera B: Put + Acción
2. La relación entre opciones europeas y americanas

En acciones americanas no existe una CallPut Parity como en el caso de las europeas, donde tengo siempre relaciones de igualdad entre los instrumentos.

En cambios, lo que estoy teniendo son relaciones de desigualdad.

Es importante que en acciones americanas nosotros no podemos comprar que es lo que va a pasar con las carteras en t=0 y en el momento t=T porque en las acciones americanas se pueden ejercer en cualquier momento intermedio. Entonces no me alcanza con comparar la cartera A y la Cartera B al momento T sino que tengo que ver qué pasa en cualquier momento intermedio de ejercicio.

Opciones americanas

Opciones sobre acciones con dividendos ciertos

$$S_0 - D - K \leq C - P \leq S_0 - K \cdot e^{-rT}$$

Opciones sobre futuros

$$F_0 e^{-rT} - K < C - P < F_0 - Ke^{-rT}$$

Opciones sobre activos con rendimiento

$$S_0 e^{-qT} - K \leqslant C - P \leqslant S_0 - Ke^{-rT}$$

Modelo Binomial

Cuando trabajemos con valuación, va a motivar la valuación, la estrategia de no arbitraje. Cuando mirábamos estrategias de no arbitraje observábamos dos carteras que valían lo mismo en un determinado momento del tiempo y que por lo tanto tenían que valer lo mismo hoy.

Si nos centramos específicamente el precio que pagaríamos por un call o por un put, lo que será mas importante para modelizar será el subyacente.

Las variables que jugaban en el valor de la opción:

- Impactaba en K → Es contractual

- En la volatilidad →(Junto con el precio del activo) lo conocemos, pero no sabemos como se va a mover en el tiempo.

- En la tasa libre de riesgo → La consideramos constante

- En el precio del subyacente →Que precio vaya asumiendo el precio esta relacionado con su volatilidad.

- En T → También es contractual (tendré en cuenta si es americana o europea y en qué momento me interesa ver el subyacente)

- Si tenía q → es un atributo del subyacente y lo voy a poder estimar

Necesito modelizar estas variables para saber cuánto voy a pagar por ese Call o por ese Put.

Cuando hacíamos estas comparaciones, más allá de los que nos imaginemos la trayectoria del activo intuitivamente si tenemos que calcular el valor de la prima, pensamos en calcular cual va a ser el valor esperado del PayOff. Ya que no tendremos una relación lineal.

Voy a mirar posibles precios que tendré para el subyacente el T y sobre estoy voy a ver a cada uno de esos precios cual es el pay off que corresponde y tendría una especie de valor esperado de ese payoff.

Lo que tendría que hacer luego para ponerle valor al instrumento es traerlo al presente, es decir actualizándolo con r.

Lo que haremos es traer valor esperado del subyacente descontado a r.

Descuento a una tasa libre de riesgo, si bien no es una inversión a libre de riesgo, también estaré sumando el spred (+ la prima de riesgo).

En la lógica debería descontar ese pay off a una tasa que sea representativa del riesgo de la opción. Desde la lógica, si yo tuviera que ponerle un precio a esto, me fijaría cual es el valor esperado que yo voy a ganar por tener esta prima y lo descuento a una tasa que sea representativa del riesgo que estoy considerando.

Necesitaría tener la prima de riesgo que correspondería al Call o al Put y calcular el valor esperado del Pay Off.

Para calcular el valor esperado del Payoff quiero modelizar el precio del subyacente.

El valor de los derivados depende de factores ya mencionados (Subyacente, tiempo al vencimiento, volatilidad, entre otros) pero en todos ellos lo que estamos buscando es entender qué es lo que va a pasar con el valor del activo subyacente al momento del vencimiento.

Procesos estocásticos:

Un proceso estocástico es una sucesión de variables aleatorias en el tiempo. Los procesos estocásticos pueden ser discretos o continuos, tanto en la variable de estado como en la variable tiempo.

Como decíamos, modelizaron que pasará con el subyacente a lo largo del tiempo. Me interesa lo que pasa entre 0 y al momento de vencimiento.

Modelizaremos un proceso estocástico que es una sucesión de variables aleatorias en el tiempo que en este caso se asimilan al precio del subyacente.

A lo largo del tiempo irá tomando distintos valores. Esa variable St es una variable aleatoria, st1, st2, st3, ... etc y lo que tengo es una sucesión de variables aleatorias a lo largo del tiempo.

De proceso estocástico sabemos que pueden ser discretos o continuas, tanto en la variable de estado (el precio en este caso) como en el tiempo.

Cuando tenemos un proceso estocástico discreto en el tiempo, hablamos de una sucesión de valores aleatorias (hasta el momento T) pero decimos que los cambios en los valores de la variable de estado se pueden dar en momentos específicos del tiempo y no en cualquier momento. SI hablo del precio, estoy parada en el momento cero, y tengo una variable aleatoria Ssubt1 en un momento puntual (un día, un mes, un minuto, etc), lo que fijo en el proceso estocástico discreto es en que momento discreto del tiempo se pueden producir cambios en la variable de estado que es S. El tiempo constituye un conjunto numerable.

La otra alternativa es que el tiempo constituya un intervalo y que en cualquier momento del mismo (cualquier punto de la recta) la variable de estado pude cambiar de valor. No tengo un momento donde voy a observar la variable, sino que la variable puede cambiar de valor en cualquier momento del tiempo si hablamos de procesos estocásticos continuos en el tiempo.

Lo que haremos es empezar con procesos estocásticos discretos en el tiempo para modelizar el subyacente y valuar entonces cualquier opción.

Para la valuación vamos a buscar modelizar el proceso estocástico que siguen los precios.

1. Modelo binomial

Trabaja con procesos discretos en tiempo y continuo en las variables de estado

2. Modelo Black & Scholes

Trabaja con procesos continuos tanto en el tiempo como en las variables.

En particular, vamos a usar en la valuación procesos de Markov, en donde el valor de la variable aleatoria en un determinado momento del tiempo depende exclusivamente de su última realización:

$$E[X_T \ / \ x_{t-1}, x_{t-2}, x_{t-3} \dots] = E[X_T \ / \ x_{t-1}]$$

Los procesos de Markov son procesos en donde nosotros siempre que vamos a calcular el valor esperado de la variable de estado en un momento t depende de todas las realizaciones que haya tenido anteriormente. Son procesos autorregresivos donde el valor esperado del subyacente dependerá de la trayectoria (y realizaciones) que haya seguido ese subyacente hasta llegar al momento donde estoy parada hoy.

Son un caso particular en donde la información que está contenida en el último precio, es la única que condiciona lo que va a pasar el periodo siguiente.

Entonces en particular vamos a trabajar con modelos binomiales. En el modelo binomial siguen un proceso estocástico discreto en el tiempo y continua en las variables y es un proceso de Markov. Esto implica que el valor esperado del subyacente en determinado momento se explica por la última realización de ese precio.

Modelizando el proceso que siguen los precios podemos modelizar, a su vez, que es lo que pasa con el payoff.

Modelo Binomial

El modelo binomial va a armar una trayectoria de activos discreta en el tiempo.

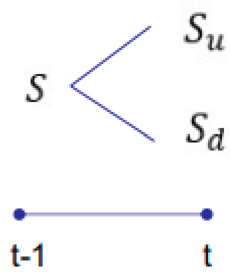
A mí me interesa saber que va a pasar con el activo en el momento T.

Como voy a generar un proceso estocástico discreto en el tiempo, voy a mirar que pasa con el activo en t1, t2, t3, etc.

Voy a tener marcados los momentos del tiempo donde puedo llegar a tener un cambio en el valor del precio.

Siempre arranco de un precio cierto (el que tengo hoy).

Se denomina modelo binomial porque entre un momento y otro, lo que asume el modelo es que el activo puede tomar únicamente dos valores distintos. Puede tomar un valor up y un valor down.

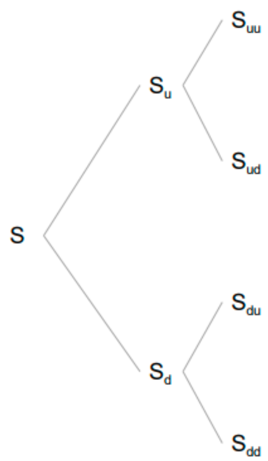


Hoy estoy en un escenario S y al momento siguiente el precio puede estar en el escenario Su o en el escenario Sd.

El valor de Su o Sd depende únicamente de cual sea S0. Hablamos de un proceso de Markov donde el valor esperado de St1 depende únicamente de S0.

En el modelo binomial se considera al precio del subyacente como un proceso estocástico discreto en el tiempo y continuo en las variables. Es binomial porque del momento t-1 al momento t se consideran únicamente dos escenarios (sólo hay dos eventos posibles partiendo de la situación inicial).

Cada intervalo [t − 1,t] constituye un paso del modelo binomial. Para modelar el comportamiento del subyacente para un periodo de [0,T] puedo replicar este comportamiento teniendo en cuenta la cantidad de intervalos que defina.



Al momento siguiente, en t2, el proceso estocastico sigue con la misma idea.

En cada punto tendré dos ramas más.

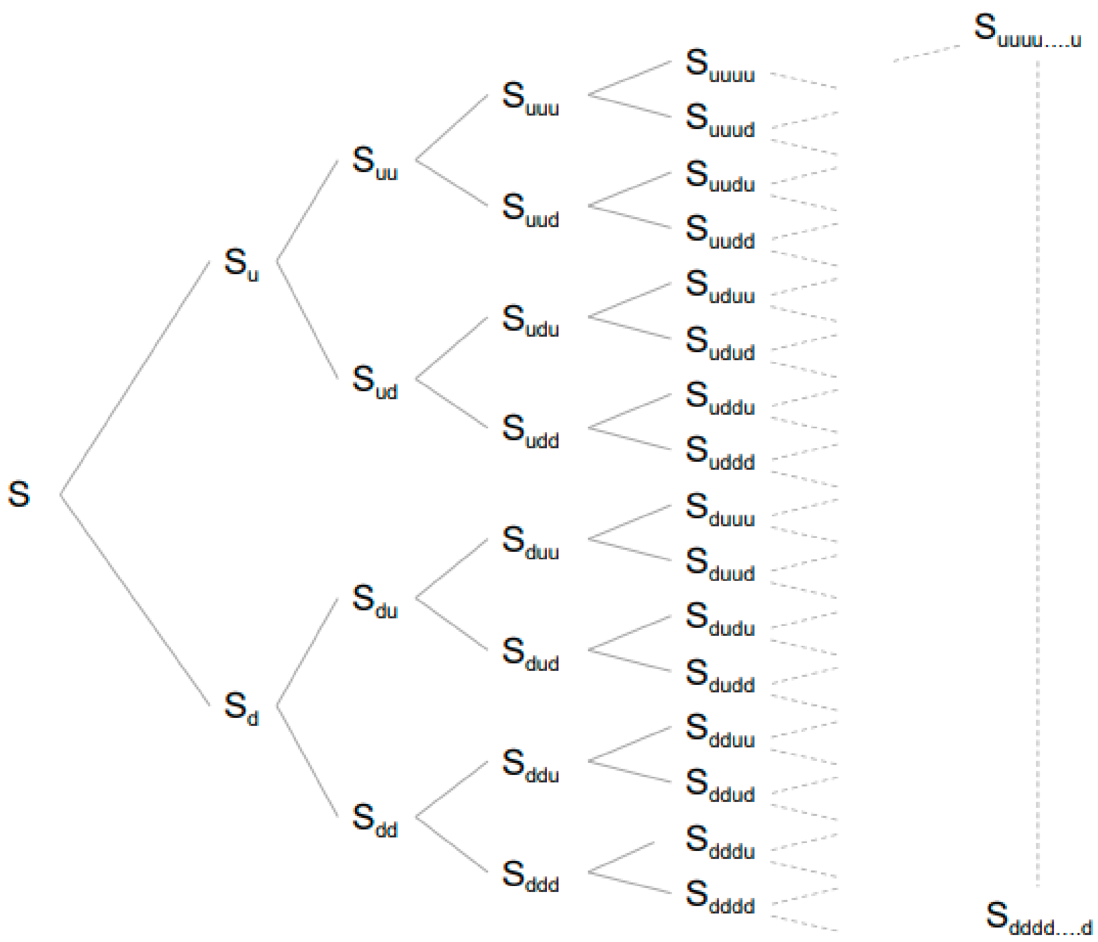
Tendremos entonces Suu, Sud, Sdu y Sdd. El precio solo admite dos opciones, o subir o bajar.

Lo que se arma es una trayector de precios en cada uno de los momentos discretos del tiempo en donde me interesa conocer que va a pasar. Voy a llegar al momento T con una distribución de precio discreta (para cada precio tendré una probabilidad de ocurrencia) por lo cual, yo voy a poder calcular el Pay Off que corresponde a cada uno de esto precios y calcular el valor esperado del que hablamos.

Obviamente hablo de que el momento cero y el momento T lo divivo en intervalo de tiempo de igual longitud y obviamente cuanto mas chico sea el intervalo mayor va a ser la cantidad de precios que voy a considerar en T.

Si t1 converge a cero voy a estar muy cerca de uns distribución continua de precios.

A modo de valuación empezaremos a analizar como funciona el modelo con árboles chicos.

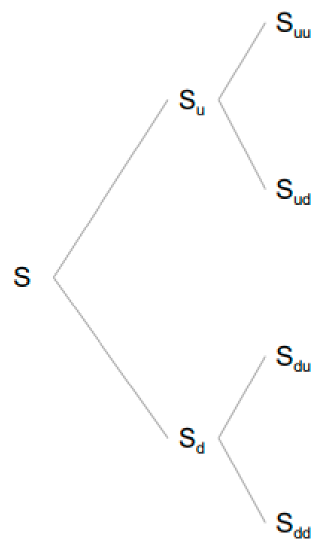


De un paso:

Modelo binomial de un paso es cuando yo considero unicamente el activo puede tomar dos valores.

De dos pasos:

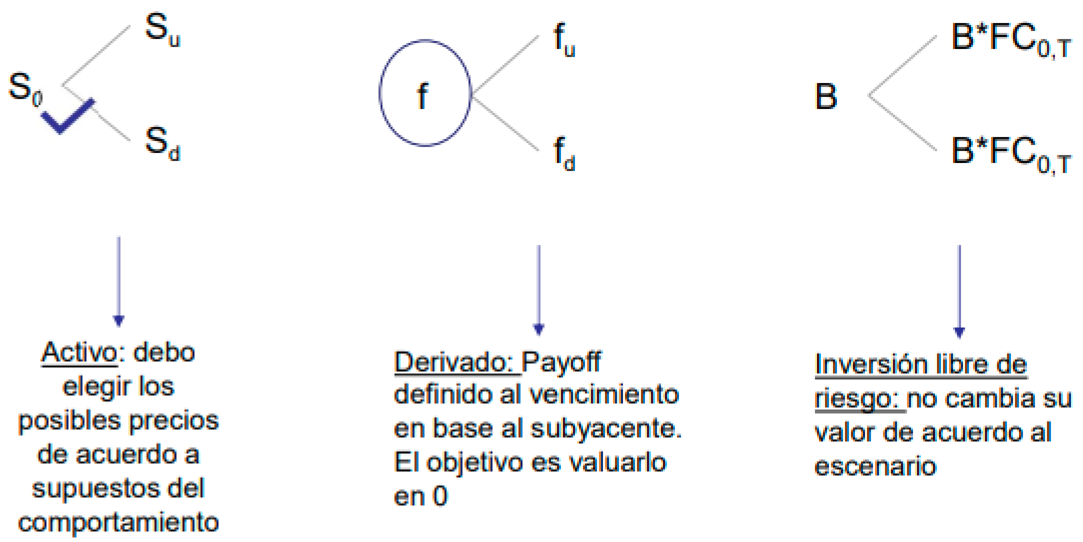
Hasta el vencimiento puede tomar cuatro valores .



El objetivo es – dado ese supuesto que hacemos del activo – valuar un derivado cualquiera.

Suponemos, además, que podemos prestar y tomar fondos a una tasa libre de riesgo y que el mercado es completo y no permite arbitrar. Empezamos con el caso de que el subyacente es una acción que no paga dividendos. Para después generalizar, iniciamos con el modelo binomial de un paso para valuación de opciones europeas.

Modelo Binomial de un paso de una acción que no paga dividendos



Su y Sd los eligiré en función de la distribución que creo que va a tener el activo en un determinado momento. Lo único que conozco es S0.

Después tendré el valor del Derivado. Esta puesto como f que es un derivado generico (Call, put o cualquier payoff). Basicamente tendré una árbol que va a ser lo que voy a pagar hoy por el derivado y cuánto valdría ese debería en caso de que el precio suba o en caso de que el precio bajo.

En el árbol S conozco el precio del activo y voy a elegir que valor poner en Su y Sd en función de la volatilidad. El árbol de derivados, el valor f es el valor que quiero encontrar. SI bien no lo conozco, si conozco cual sería el valor del derivado en donde el precio sea Su y cual sería el valor del derivado en donde el precio sea Sd. Entonces Su, fu y Sd, fd son los valores del payoff que corresponden a los valores del subyacente que yo estoy modelizando.Lo que buscamos hacer si yo quisiera calcular el valor esperado del payoff y traerlo al momento cero, me estaría faltando cuál es la probabilidad de que se de fu y se de fd. Necesito tener esa probabilidad para luego descontarlo a una tasa (que tampoco se) pero que debe ser representativa.

Sumo, luego, un tercer árbol de los bonos, sería un árbol de libre de riesgo que tiene el supuesto que solemos trabajar para la valuación donde decimos que podemos invertir o tomar fondos a una tasa libre de riesgo.

Si hoy el precio del bono es B, al periodo siguiente será B por el factor de capitalizacion porque es una inversión libre de riesgo. Recordar que, que esa libre de riesgo implica que independientemente de lo que pase, la cartera valdrá lo mismo-

Entonces, tengo planteadas las tres cosas que vamos a utilizar en el modelo binomial:

Subyacente

Derivado

Tasa libre de riesgo.

Entonces se buscará dos maneras distintas de conseguir el mismo resultado (posibilidad de no arbitraje).

Esto se denomina <u>replica de cartera</u>

Lo que hacemos es plantear una relación entre los activos disponibles de manera tal que no pueda arbitrarse:

1. Replicar el derivado
2. Armar una cartera libre de riesgo con el derivado y el subyacente

Primera alternativa: Voy a buscar armar una cartera qu este compuesta por una determinada cantidad de subyacente y una determinada cantidad de bonos tal que esa cartera sea igual al derivado. Que la cartera replique al derivado.

Segunda alternativa: Lo que hago es una armar una cartera que este formada por una determinada cantidad en subyacente y una cantidad en el derivado tal que esa cartera sea libre de riesgo.

Primera alternativa

Cualquiera de las dos alternativas implica hacer dos carteras que valgan lo mismo.

En la primera de las alternativas, elegimos una cantidad de subyacente y una cantidad de bonos que funcione como el derivado. Al momento de armar la cartera la incognita es la cantidad. Como el bono siempre vale lo mismo, debe valer lo mismo en los escenarios. ¿Qué sucede si el precio subre y que sucede si el precio baja?

Si el precio sube, el derivado vale fu, nuestra cartera valdrá:

$$\#_s * S_n + \#_B * FC_{0,T}$$

Si el precio baja, el derivado vale fd, mi cartera valdrá lo mismo que el derivado:

$$\#_s * S_d + \#_B * FC_{0,T}$$

Lo que tengo es un sistema de ecuaciones donde do ecuaciones, dos incognitas y será compatible determinado. Podría resolverlo y sacaré un valor de cantidad de S y un valor de cantidad de Bono.

Dado que tengo la restriccion de que debe valer lo mismo cuando el precio subre y cuando el precio baja, cuando armo la cartera que replica el derivado, puedo calcular la cantidad de subyacente y la cantidad de bonos que hace que mi cartera replique al derivado.

Una vez que lo calculo, lo que haré es si las carteras valen lo mismo en los dos escenarios, necesariamente valen lo mismo hoy porque sino estoy en la situacion donde compraría barato, vendería barato y tengo una ganancia por arbitraje. Entonces una vez que saco cual es la cantidad de subyacente y cual es la cantidad de bonos que necesito para replicar el derivado, voy a poder sacar el valor del derivado viendo lo que vale el sibyacente o el bono hoy. Aquí tendría solucionado la valuacion por replica de cartera.

Segunda alternativa:

Deciamos que teniamos una posicion en el derivado y en subyacente tal que era libre de riesgo (replicaba el bono).

Cuando se arma esta cartera libre de riesgo, en general se construye de manera tal que la posicion que tenemos en el derivado será menos uno y una determinada cantidad de subyacente.

$$f, s$$

-1 #S

Terminaré replicando la cartera libre de riesgo.

Para que sea libre de riesgo, la cartera que yo arme, la condicion que debe tener, es que independientemente del valor del subyacente va a valer lo mismo.

Uno de los escenario es:

$$-fu + \#s * su = -fd + \#s * sd$$

Primer condición: Independientemente de lo que pase con el precio, las dos carteras tendrán que tener valer lo mismo. Aquí podria despejar cual es el valor del subyacente que necesito.

Segunda condición: SI la cartera es libre de riesgo, el rendimiento que obtengo es el factor de capitalizacion libre de riesgo.Como la cartera es libre de riesgo, voy a tener que ganar tambien la tasa libre de riesgo.

Lo que pago hoy y lo que obtengo la diferencia deberia ser el factor de capitalizacion entre cero y T. Y este Factor de capitalizacion es el de la tasa libre de riesgo.

$$-fu + \#s * su = -fd + \#s * sd$$

Lo que voy a recibir (a la derecha), puedo elegir cualquiera de las dos (fd o fu). Entonces lo que hacemos será:

$$(-f + \#s * s0) * FC_{0,T} = -fu + \#s * su$$

Despejo el valor de f:

$$-f = (-fd + \#s * su) * \frac{1}{FC_{0,T}} - \#s * So$$

$$f = (f - \#s * su) * \frac{1}{FC_{0,T}} + \#s * So$$

Trabajaría sacando cual es la cantidad de subyacente que necesitaría y después saco el valor de f teniendo en cuenta que lo que gano es la tasa libre de riego.

1. Réplica de derivado

$$\begin{cases} a \cdot S_u + b \cdot e^{rT} = f_u \\ a \cdot S_d + b \cdot e^{rT} = f_d \end{cases} \rightarrow f = a \cdot S_0 + b$$

$$a = \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d}$$

$$b = \left(f_u - \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d} \cdot S_u\right) \cdot e^{-rT}$$

En la replica del derivado tenemos arriba resuelto cual es la cantidad de subyacente y de bonos que replican.

La fórmula de a representa cual es la cantidad de subyacente que voy a terminar considerando para replica y esto va a ser la diferencia entre el PayOff respecto la diferencia del subyacente. Que tanto varía el PayOff ante una modificación del subyacente. También se denomina el delta de la opción y representa cantidad de subyacente que yo necesito para replicar la cartera y también es una medida de sensibilidad, que tan sensible son las variaciones en el payoff ante cambios en el subyacente.

Una vez obtenido a y b podemos sacar el valor de f.

2. Cartera libre de riesgo

$$\begin{cases} x \cdot S_u - f_u = x \cdot S_d - f_d \\ (x \cdot S_0 - f) \cdot e^{rT} = x \cdot S_u - f_u \end{cases}$$

$$x = \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d}$$

En este caso, llamo x a la cantidad de subyacente que usabamos para replicar basicamente teniendo este valor teniamos las dos condiciones

1) Condicion de que vale lo mismo en cualquier escenario y condicion de que gana la tasa libre de riesgo y mi objetivo será despejar f.

Con esto tendremos la foto de como deberiamos hacer la valuación.

Valuación - PNR

Tanto el punto 1 como el 2 me darán el mismo resultado y es de donde surge el modelo binomial.

En la valuación, trabajamos en esas relaciones que se marcaron en el anterior y llegamos a una forma más "cerrada" para hacer la valuación.

La valuación por probabilidades neutrales al riesgo, en realidad lo que hace es partir de lo que es replica de cartera y reacomodar los términos.

Partiendo del segundo caso de réplica de cartera podemos acomodar los términos escribiendo:

$$x = \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d}$$

$$(x \cdot S_0 - f) \cdot e^{rT} = x \cdot S_u - f_u$$

Sin pérdida de generalidad, expresamos los precios:

$$S_u = u \cdot S_0$$

$$S_d = d \cdot S_o$$

Partimos de una de las expresiones anteriores

$$f = x \cdot S_0 - (x \cdot S_0 \cdot u - f_u) \cdot e^{-rT}$$

$$f = \frac{f_u - f_d}{S_0 \cdot u - S_0 \cdot d} \cdot S_0 - \left(\frac{f_u - f_d}{S_0 \cdot u - S_0 \cdot d} \cdot S_0 \cdot u - f_u\right) \cdot e^{-rT}$$

$$f = \left(f_u \cdot \left(\frac{-u}{u-d} + 1 + \frac{e^{rT}}{u-d}\right) + f_d \cdot \left(\frac{u}{u-d} - \frac{e^{rT}}{u-d}\right)\right) \cdot e^{-rT}$$

$$f = \left(f_u \cdot \left(\frac{-u + u - d + e^{rT}}{u-d}\right) + f_d \cdot \left(\frac{u - e^{rT}}{u-d}\right)\right) \cdot e^{-rT}$$

$$f = \left(f_u \cdot \left(\frac{e^{rT} - d}{u-d}\right) + f_d \cdot \left(\frac{u - e^{rT}}{u-d}\right)\right) \cdot e^{-rT}$$

$$\left(\frac{u - e^{rT}}{u-d}\right) = 1 - \left(\frac{e^{rT} - d}{u-d}\right)$$

$$\boxed{Si\ \ p = \frac{e^{rT} - d}{u-d} \quad \rightarrow \quad f = (f_u \cdot p + f_d \cdot (1-p)) \cdot e^{-rT}}$$

Lo que resultará es como un valor esperado del PayOff y al mutiplicarlo por e a la menor r t, entonces lo tendré descontado a la tasa libre de riesgo.

Lo que uso como probabilidad es una probabilidad neutral al riesgo y es valida para los casos donde el subyacente es una acción que no paga dividendos ni tiene costos asociados. No es una probabilidad real de suba o baja de precio. Cambiamos el espacio de probabilidades, en lugar de movermos en un espacio de probabilidades real, de suba o baja, lo hacemos en un entorno en donde el individuo es indiferente al riesgo (no exije prima por riesgo).

$$f = \underbrace{\left(f_u \cdot p + f_d \cdot (1-p)\right)}_{\text{Valor esperado del PayOff}} \cdot \underbrace{e^{-rT}}_{\text{Descontado a tasa libre de riesgo}}$$

<u>Consideraciones</u>

- Las probabilidades "p" no son las probabilidades reales de movimiento del activo – la valuación surge de realizar réplica de cartera

- Estamos usando probabilidades neutrales a riesgo: bajo ese esquema de probabilidades (no real) consideramos que los inversores no tienen ninguna exigencia por riesgo y por eso descontamos a TLR la inversión.

<u>Verificamos PNR</u>

$$Si\ \ p = \frac{e^{rT} - d}{u - d} \quad \rightarrow \quad E[S] = p \cdot S_0 \cdot u + (1-p) \cdot S_0 \cdot d$$

$$E[S] = \frac{e^{rT} - d}{u - d} \cdot S_0 \cdot u + \frac{u - e^{rT}}{u - d} \cdot S_0 \cdot d$$

$$E[S] = \frac{e^{rT} \cdot S_0 \cdot u}{u - d} + \frac{-e^{rT} \cdot S_0 \cdot d}{u - d}$$

$$E[S] = e^{rT} \cdot S_0$$

Modelo Binomial de más de un paso – Opciones Europeas

Para simplificar, podemos considerar – sin pérdida de generalidad- que los árboles recombinan (no es necesario para esta metodología).

Es es: $d = \frac{1}{u}$

El intervalo hasta el vencimiento de la opción se divide en subintervalos de igual longitud y se sigue una metodología similar al modelo de un paso en cada uno de los nodos.

En cada nodo, se hace replica de la cartera. Puedo usar PNR.

Verificamos PNR:

$$Si\ \ p = \frac{e^{rT} - d}{u - d} \quad \rightarrow \quad E[S] = p \cdot S_0 \cdot u + (1 - p) \cdot S_0 \cdot d$$

$$E[S] = \frac{e^{rT} - d}{u - d} \cdot S_0 \cdot u + \frac{u - e^{rT}}{u - d} \cdot S_0 \cdot d$$

$$E[S] = \frac{e^{rT} \cdot S_0 \cdot u}{u - d} + \frac{-e^{rT} \cdot S_0 \cdot d}{u - d}$$

$$E[S] = e^{rT} \cdot S_0$$

Ejemplo

Valuación de un Call, vencimiento en 6 meses.

Tasa libre de riesgo: 5% (cont.)

Subyacente, acción que no paga dividendos. Precio 35

Precio de ejercicio: 36

En 6 meses la acción puede subir o bajar un 10%

Precio?

Verificar arbitraje cuando el precio no es igual al precio teórico.

Parametros de Cox-Ross-Rubinstein

¿Cómo elegimos la trayectoria que sigue el activo?

Los parámetros CRR buscan adaptar el modelo binomial al supuesto de que los rendimientos de los activos tienen volatilidad: $\sigma\sqrt{T}$

Lo cual se logra tomando lo parámetros:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

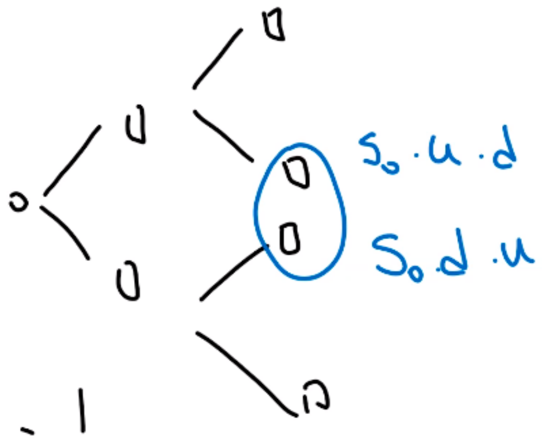
Mas allá de decir si de un momento a otro el precio puede subir o bajar un 10% la realidad es que cuando queremos modelizar un activo que conocemos una manera de adaptarnos a una distribución de activos o la volatilidad que nosotros observamos en los activos es considerar que, en cada uno de los pasos del modelo binomial, lo que sube o baja del precio del activo se puede escribir en función de la volatilidad de los rendimientos. Así se dan dos situaciones, una, que queda atado la distribución final sea la que mas se asemeje a una distribución con la volatilidad que nosotros estimamos del mercado para este momento futuro de los activos.

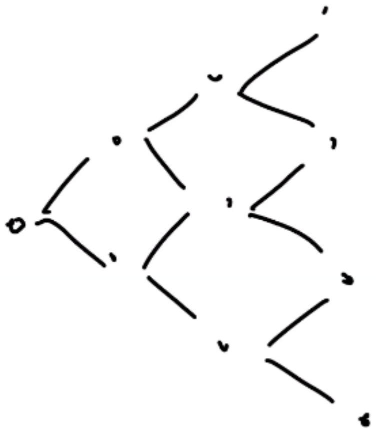
Ingresando los parámetros de Cox-Ross-Rubinstein en cada una de las subas o bajas logramos una foto final en donde el activo tenga una volatilidad similar a la sigma que nosotros estimamos o esperamos.

Siempre que hablamos de $e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ esta sigma se refiere al tamaño de cada uno de los pasos que yo tenga en el modelo binomial.

Una característica que tiene el utilizar los parámetros de Cox-Ross-Rubinstein es que además permite que los árboles recombinen. Lo que elegimos que dé sea igual $d = \frac{1}{u}$.

Que significa que recombine, si parto de determinado precio, que el precio puede ir para arriba para abajo. Cuando el árbol recombina, el circulo azul quiere decir que los valores son lo mismo. Terminaras valiendo lo mismo, cuando usamos parámetros Cox-Ross-Rubinstein (o cuando se da esta relación), nos quedan un árbol mas sencillo al momento de modelar. Tiene sentido que recombine porque cuando empezamos a trabajar con más de un paso, empieza a tener más sentido.





$$u = \frac{1}{d}$$

Caso de Tres pasos

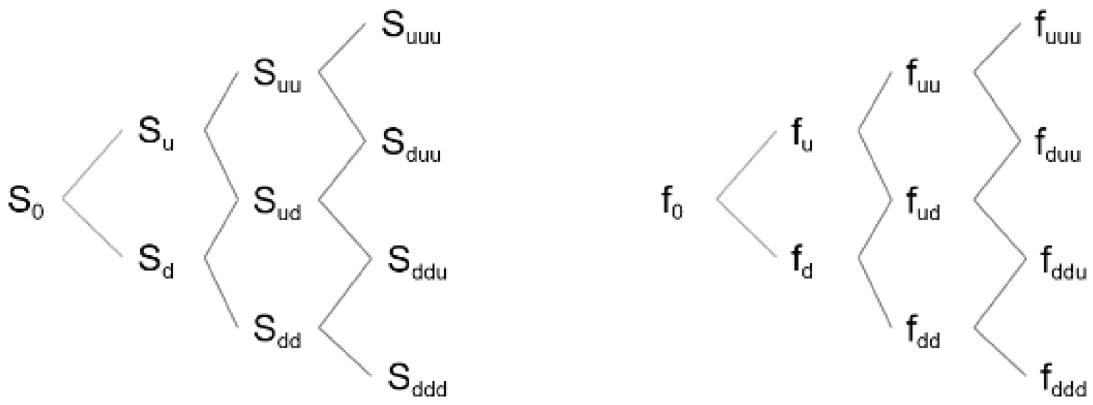
¿Cómo hago para resolver cuando tengo más de un paso?

Si yo me muevo a un esquema donde tengo mas de un paso, lo primero que hago es los árboles (el de bonos, el de subyacentes, el de derivados).

Distinguimos el momento de vencimiento, de evaluación y momentos intermedios.

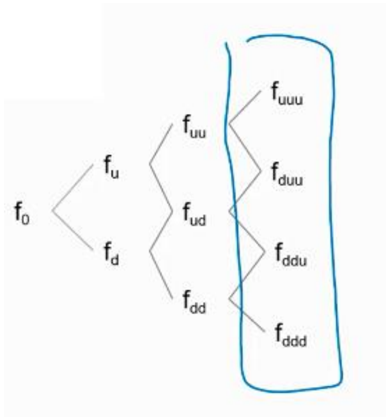
Los momentos intermedios son delta t (y los elegimos de la misma longitud)-

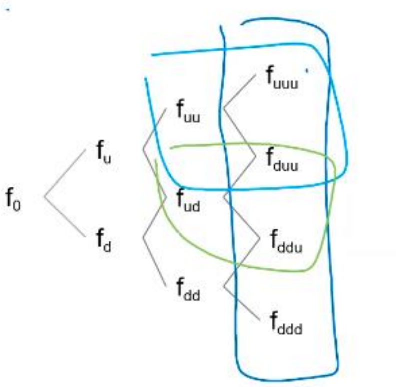
Caso de tres pasos



Si hacemos un árbol de tres pasos sabemos que divididos el tiempo en tres periodos iguales donde se mira el subyacente.

El armar el árbol, surge de entender el parámetro de suba o baja de precio en cada uno de los intervalos de delta t. Una vez que armé el árbol del subyacente, empieza a armar el árbol del derivado.



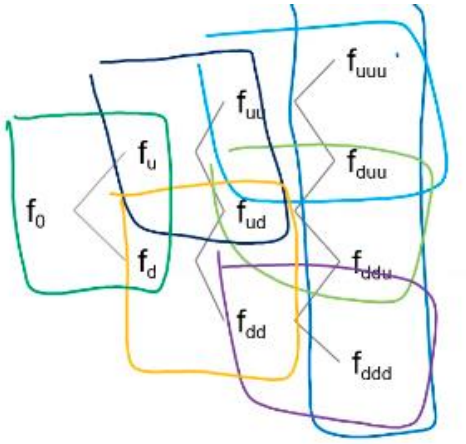


Si el derivado es europeo primero completo la columna (en azul) de la derecha porque voy a saber el pay off que corresponde al derivado a cada valor del subyacente al vencimiento.

Una vez que obtengo eso, lo segundo es replicar la metodología que binomial para cada uno de los cuadrados y resuelvo cada cuadrado como lo que hicimos anteriormente.

Consideraciones:

Si usamos replica de cartera, la cantidad de subyacente que voy a tener en cada uno de esos nodos va a ser distinto. En cada nodo debo evaluar la cantidad de subyacente que debería usar y libre de riesgo que iré a usar.



Una vez que completamos la columna con los nodos y luego con los valores de derivados al momento t1, t2 y comienzo a resolver por modelo binomial los cuadrados azul oscuro y amarillo y luego el cuadrado verde y saco el valor.

Si hago replica de cartera, va a ir cambiándome la cantidad de subyacente en cada cuadrado que dibujé, pero si lo hago con probabilidades neutrales a riesgo los paramentos de la p serán siempre los mismos.

Si recordamos como calculábamos estos valores. Si miro las probabilidades neutrales a riesgo:

$$p = \frac{e^{eT} - d}{u - d}$$

La tasa libre de riesgo es constante, en todo el periodo (supuesto del modelo). "u" y "d" también son constantes.

Por último, e^{rT} al ser la r constante y ser todos los intervalos de la misma longitud también me quedarán todos iguales.

Si voy por esta metodología (PNR) cálculo las probabilidades neutrales de riego, solo lo calculo una vez y luego arrastro los resultados.

Cuando hablemos del tiempo, cuando tenga mas de un paso, el delta va a ser el tiempo de cada uno de los noditos

Valuación - PNR

$$f = \left(f_u \cdot \left(\frac{-u}{u-d} + 1 + \frac{e^{rT}}{u-d}\right) + f_d \cdot \left(\frac{u}{u-d} - \frac{e^{rT}}{u-d}\right)\right) \cdot e^{-rT}$$

$$f = \left(f_u \cdot \left(\frac{-u+u-d+e^{rT}}{u-d}\right) + f_d \cdot \left(\frac{u-e^{rT}}{u-d}\right)\right) \cdot e^{-rT}$$

$$f = \left(f_u \cdot \left(\frac{e^{rT}-d}{u-d}\right) + f_d \cdot \left(\frac{u-e^{rT}}{u-d}\right)\right) \cdot e^{-rT}$$

$$\left(\frac{u-e^{rT}}{u-d}\right) = 1 - \left(\frac{e^{rT}-d}{u-d}\right)$$

$$\boxed{Si\ p = \frac{e^{rT}-d}{u-d} \quad \rightarrow \quad f = (f_u \cdot p + f_d \cdot (1-p)) \cdot e^{-rT}}$$

Ejemplo

- Valuación de un put ATM (At the money[1]) europeo, vencimiento en 6 meses.
- Tasa libre de riesgo 5% (continua)
- Subyacente, acción que no paga dividendos. Precio 40
- En 3 meses las acciones pueden subir o bajar un 10%.

[1] Coincide el precio del ejercicio con el precio del subyacente hoy.

Valuación con PNR

Datos

K	40	T	0.5
u	1.1	t	0.25
d	0.9		
r	5%		

Subyacente

	0	3m	6m
Subyacente			
	40	44	48.4
		36	39.6
			32.4

Put europeo

	0	3m	6m		
Put europeo					
	1.608204	0.172671	0	p	0.562892
		3.503112	0.4	1-p	0.437108
			7.6	FD	0.987578

Pay Off

Valuación con réplica de cartera

	0	3m	6m
Subyacente			
	40	44	48.4
		36	39.6
			32.4
FD	0.987578		

	0	3m	6m
Put europeo			
	1.608204	0.17	0
		3.503112	0.4
			7.6

Pay Off

Cuántos subyacentes necesito para la réplica?

0	3m
-0.41631	-0.04545
	-1

$$a = \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d}$$

Cuál es la inversión libre de riesgo?

18.26041	2.17
	39.50

$$b = \left(f_u - \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d} \cdot S_u\right) \cdot e^{-rT}$$

Calculado con los subyacentes
y la inversión libre de riesgo

Primer nodo requiere
el cálculo de los anteriores

Posibilidad de arbitraje?

1. Caso put = 2

   - Vendo put
   - Compro cartera que replica
   - Rebalanceo en función de la trayectoria

2. Caso put = 1.4

   - Compro put
   - Vendo cartera que replica
   - Rebalanceo en función de la trayectoria

Posibilidad de arbitraje?

1. Caso put = 2

Asumimos trayectoria de precios

Subyacente	0	3m	6m
	40	44	48.4
		36	39.6
			32.4

Supuesto p=2

T=0

Acción	Cantidad	Precio	FF
Vendo put	-1	2	2
Compro subyacente	-0.41631	40	16.6522
Libre de Riego (Inv.)	18.6522		-18.6522
		FF	**0**

T=3m

Acción	Cantidad	Precio	FF
Variación subyacente	0.370851	44	-16.3174
Libre de riesgo (Prést.)	-16.3174		16.31742
		FF 3m	**0**

T=6m

Acción	Cantidad	Precio	FF
Put			-0.4
Pos. Suby	-0.04545	39.6	-1.8
Inv. t=0			19.12439
Préstamo t=3m			-16.5227
FF 6m			0.401714
Valor actual			0.391796
Dif prima			0.391796

Rebalanceo de cartera

Cuando el objetivo es trabajar con mas de un nodo, usar PNR tiene la ventaja de que "p" y el factor de descuento se mantienen constantes.

Si usamos réplica de cartera, vemos que la cantidad de subyacente que replica el valor del derivado varía en función de la trayectoria.

En la práctica, esto implica que – de encontrar oportunidad de arbitraje o de estar cubriendo nuestra posición – deberíamos ajustarla periódicamente en función de la trayectoria que observemos.

En cada nodo deberíamos:

1. Evaluar el camio de la posición de subyacente para mantener la réplica de la cartera.

Si $\Delta_i = \frac{f_{u,i+1} - f_{d,i+1}}{S_{u,i+1} - S_{d,i+1}}$ es la cantidad de subyacente para replicar la cartera, entonces el rebalanceo en cada momento del tiempo implicara evaluar la diferencia entre la posición requerida y la que traído de base

$$Rebalanceo_i = \Delta_i - \Delta_{i-1}$$

En el rebalanceo miro la posición del delta que tengo que tener en ese momento vs la que tenia anteriormente.

2. Ajustar la cartera para que se mantenga la réplica, actuando en el mercado libre de riesgo.

El rebalanceo implicará un ingreso o erogación de fondos que se invertirá o se pedirá prestado a una tasa libre de riesgo:

$$FF_i = S_i . Rebalanceo_i$$

Modelo Binomial de más de un paso – Opciones Americanas

Las opciones americanas se diferencias de las europeas en su posibilidad de tener ejercicio anticipado.

Por lo tanto, en el modelo binomial, incorporamos esta posibilidad.

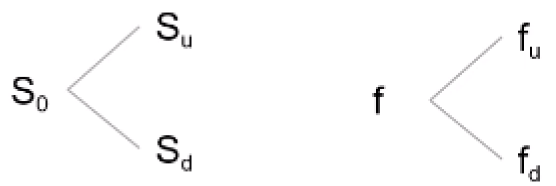
Para la valuación en cada nodo se compara:

- El valor de la opción en caso de ejercicio inmediato
- El valor de la opción en caso de mantenerse

El tenedor del instrumento optará por lo de mayor valor – lo mismo se hace al momento de plantear el precio-

¿Qué pasa cuando cambiamos el subyacente?

Caso de activos con rendimientos asociado



Al considerar la réplica de cartera estamos teniendo en cuenta cuantos activos son necesarios para equiparar el valor del derivado en el nodo futuro

$$\begin{cases} \Delta \cdot S_u + b \cdot e^{rT} = f_u \\ \Delta \cdot S_d + b \cdot e^{rT} = f_d \end{cases}$$

Rendimiento asociado puede ser un bono (rendimiento q) o una moneda (rendimiento rf).

Cuando hacíamos replica de cartera, lo que hacíamos era que la cartera replique el valor del derivado. Teníamos una determinada cantidad de subyacente por una posición en bono capitalizada, Fu y la posición de subyacentes más la posición de bonos capitalizada era fd.

Elegia una cantidad s que me cerrase en ese sentido.

Si tenemos un activo que tiene un rendimiento asociado (acción o moneda), entre que tomo posición de la cartera y llevo al vencimiento de la opción, voy a sumar ese rendimiento.

Los deltas de la fórmula deberían reflejar la cantidad que yo tengo que tener al final. Esta comparando el delta Su más el bono capitalizado, comprado por el ejercicio en Fu.

Ese delta me habla de la cantidad de activos que yo tengo que tener para replicar la cartera al final.

Si esa es la cantidad que debo tener al final, cuando calcule el valor del derivado y tengo que calcular cuanto vale el derivado hoy, como la acción no pagaba dividendos, decíamos que la acción valía cantidad de activos por S0 más lo que invierta en bonos:

$$f = \Delta * S_0 + b$$

Si ese activo tiene un rendimiento, la cantidad de activos que tengo comprar en el momento cero para que al momento t tenga una cantidad delta de activos es:

$$f = \Delta \cdot e^{-q\cdot\Delta t} \cdot S_0 + b$$

No me cambia el calculo de delta pero lo que cambia es la cantidad que voy a estar usando para rebalancear la cartera y con eso sacaré el precio del derivado. El precio del derivado será cantidad que necesito al final, menos el rendimiento por S0 mas lo que invierta a libre de riesgo.

Esto será válido, tanto para contratos sobre moneda como contratos con acciones que paguen alguna tasa q.

Si el activo tiene un rendimiento "q" asociado y reinvertimos en él mismo todo lo que obtenemos como rendimiento, la cantidad de subyacente que debe tenerse en el período anterior es menor.

Tiene que ser tal que – invertido el subyacente – me permita tener la cantidad delta en el periodo siguiente

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d}$$

$$b = \left(f_u - \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d} \cdot S_u\right) \cdot e^{-rT} \longrightarrow f = \Delta \cdot e^{-q\cdot\Delta t} \cdot S_0 + b$$

El otro caso que vamos a mirar es, el de casos de contrato de futuro.

Cuando trabajamos con contratos de futuros, tenemos que considerar:

1. El valor del subyacente es 0 al momento inicial
2. En cada uno de los nodos:
   a. Se ajusta el delta de la opción
   b. Existe una ganancia o pérdida por la tenencia del contrato, derivada del ajuste de mercado (Daily settlement).
   c. La ganancia o pérdida de (2) se invierte o se pide prestado a tasa libre de riesgo.

Modificación de las PNR

SI hacemos con PNR la valuación, la único que cambia (cuando cambia el subyacente) es la p.

La probabilidad que voy a usar. La forma que tiene es la siguiente:

$$Si\ \ p = \frac{e^{(r-a)t} - d}{u - d} \quad con \quad \begin{cases} a = 0 \ \ si\ el\ suy.no\ tiene\ rendimiento \\ a = r_f\ en\ el\ caso\ de\ moneda\ extranjera \\ a = q\ en\ acciones\ con\ rendimiento\ conoc. \\ a = r\ en\ caso\ de\ futuros\ como\ subyacente \end{cases}$$

Puede verificarse que – bajo este esquema de probabilidades – el rendimiento exigido por los inversores para los activos es la tasa libre de riesgo.

¡Importante!

Entender el por qué es que van cambiando los deltas y la manera de arbitrar. Básicamente cambia porque es un delta al final (que compara valores finales del subyacente cuando el subyacente tiene un rendimiento asociado).

Martingalas (TD)

- Bibliografía: Rebonato "Interest Rate options models", Willey, Chichester, 1998

Complementa el porqué de la valuación neutral el riesgo (que venía de la réplica de cartera).

Esas probabilidades "p" no son reales (de suba o o baja) sino que son probabilidades en un determinado mundo donde el agente no exige ninguna prima.

Venía de esta posibilidad de no arbitraje, y si bien hoy es lo que resulta cómodo para valuar, puede darse casos que esa tasa no exista o no la conozcamos o la volatilidad no se fija a lo largo del tiempo. Entonces hablar de una réplica de cartera con bono libre de riesgo no tiene sentido, entonces debemos buscar una forma distinta de valuación.

Presenta una metodología cuando no tengamos la información de la PNR.

Trabajaremos entonces con medidas de Martingalas

Valuación de derivados

La fuente de incertidumbre al momento de valuar al derivado es el activo subyacente.

La trayectoria que sigue el activo es un proceso estocástico, por lo tanto, si conocemos el comportamiento estocástico del activo podemos entender qué es lo que pasa con el derivado.

Para modelizar vamos a describir un espacio de probabilidad dentro del cual vamos a movernos:

(definimos un espacio de probabilidad)

Espacio de estados: ¿Cuáles son los eventos que pueden suceder? Puede llegar a pasar. Por ejemplo, todos los posibles estados de la economía.

Eventos observables: ¿Qué es lo que vos observas? (es el índice o precio que me importa, lo que efectivamente observo) será por ejemplo el precio del subyacente para cada escenario probable. Siguiente con el ejemplo será el precio para cada escenario probable.

Información que sé que sucedió hasta determinado momento

Probabilidad asociada a cada uno de los eventos observables

Tendré precios y una probabilidad asociada a esos precios.

Cuando hablamos de un mundo neutral al riesgo o la valuación con martingala, cambiamos el espacio de probabilidad con el que trabajamos. Tengo la probabilidad de que el precio suba o baje, pero para la valuación del derivado me muevo en un entorno neutral al riesgo (uso las p que decíamos que no eran probabilidades reales). Cambio el espacio de probabilidad y la valuación del derivado va a ser el mismo.

El mensaje final, es que podré moverme dentro de un espacio de probabilidad que a mí me quede cómodo para valuar.

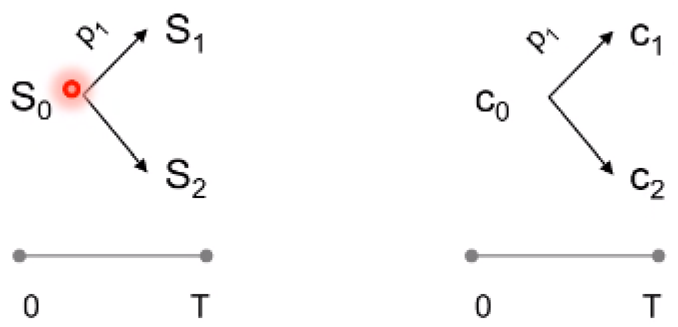
Nos movemos en el espacio neutral al riesgo, y con Martingala no movemos en algún proceso sea una martingala.

El objetivo es plantar distintas alternativas para la valuación del derivado de acuerdo a la información disponibles

1. Réplica de cartera → Busco replicar el derivado con otros activos que tenga disponible.
2. Naive Approach
3. Modificación en el espacio de probabilidad
   a. Teorema de Girsanov
   b. PNR
   c. Martingalas

Naïve Approach

Considera que no solo conocemos el valor del subyacente sino también la probabilidad de ocurrencia de cada escenario:



<u>Donde</u>:

S0: Subyacente

C0: Derivado

A diferencia de la réplica de cartera donde no necesitamos conocer la probabilidad asociada a cada escenario en *naive* si asumo que conozco la probabilidad.

Si buscara hacer la valuación del derivado (C0 es lo que no se cuánto vale) lo que puedo hacer es el valor esperado del derivado y descontarlo a una tasa.

$$E(c).e^{-it}$$

La tasa a la que descuento debiera ser representativa del riesgo de esa inversión. Debiera, entonces, completar con una tasa del riesgo de aquello que estoy valuando.

Conocemos So, el valor esperado de E(st), y también E(ct). Pero para saber c0 tendría que descontar a alguna tasa.

Al introducir la probabilidad de ocurrencia de los escenarios podemos conocer:

$$E(S_T) = p_1 \cdot S_1 + p_2 \cdot S_2 \qquad con\, p_2 = 1 - p_1$$

$$E(c_T) = p_1 \cdot c_1 + p_2 \cdot c_2 \qquad con\, p_2 = 1 - p_1$$

Solo restaría para la valuación descontar a una tasa que sea representativa del riesgo de la inversión.

Precio de riesgo de Mercado

Aparece el concepto riesgo de mercado (λ)

Se conoce como una compensación por riesgo. Que tanto mas exijo que la tasa libre de riesgo de mi inversión en función de la volatilidad. Cuanto mas pago por cada unidad de volatilidad.

Podemos definir al precio de riesgo del mercado como la compensación exigida por riesgo:

$$\lambda = \frac{u_x - r}{\sigma_x}$$

El rendimiento que se va a exigir a la inversión depende de la incertidumbre de la misma.

Se puede demostrar que el precio de riesgo de mercado es el mismo para todos los instrumentos que depende del mismo factor de riesgo.

El λ para la acción y para el call sobre la acción es siempre el mismo.

No así el μ:

$$\mu_x = \lambda \cdot \sigma_x + r$$

Entonces voy a tener que el rendimiento de la acción es:

$$\mu_{acción} = \lambda * \sigma_{acc} + r$$

$$Call_{acción} = \lambda * \sigma_{call} + r$$

El precio de riesgo de mercado es el mismo siempre que el factor de riesgo sea el mismo también.

Si el factor de riesgo, esos λ son iguales.

Entonces ¿A qué tasa puedo desconectar el valor esperado del derivado?

Con la información anterior podríamos sacar la información del precio de riesgo de mercado.

$$E(S_T) = p_1 \cdot S_1 + p_2 \cdot S_2$$
$$E(S_T) = S_0 + \mu_S \cdot \Delta t$$

Tengo el valor esperado de E(St).

Sabemos que St será:

$$S_t = S_0 * e^{u\Delta t}$$

Ahí estaría pudiendo sacar el dato del mu. Además, podría calcular la varianza de st:

$$\sigma_S^2 = p_1 \cdot (S_1 - E(S_T))^2 + p_2 \cdot (S_2 - E(S_T))^2 \longrightarrow$$ Si consideramos que el activo tiene distribución lognormal en T, puede considerarse la volatilidad del proceso.

Esto me sirve porque la varianza la puedo calcular con la fórmula de arriba, y me sirve de proxy siempre que el activo tenga distribución log normal en t.

Si asumo esto, tengo el dato de mu, el sigma y, por lo tanto, puedo calcular el λ:

$$\lambda = \frac{u_S - r}{\sigma_S}$$

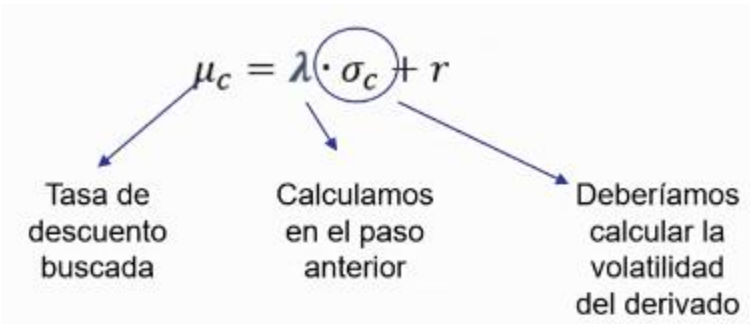
Una vez que tengo el λ debo ver la tasa a la cual voy a descontar el derivado con el λ que calculamos en el paso anterior y calcular cual sería la volatilidad del mercado.

El <u>problema</u> del enfoque es que, si calculo el derivado y hago los mismos cálculos que en el caso del subyacente, también asumo que ese derivado tiene log normal, este supuesto luego se terminará cayendo. La distribución del *pay off* del derivado no tiene distribución log normal. El pay off luego del strike es igual a cero-

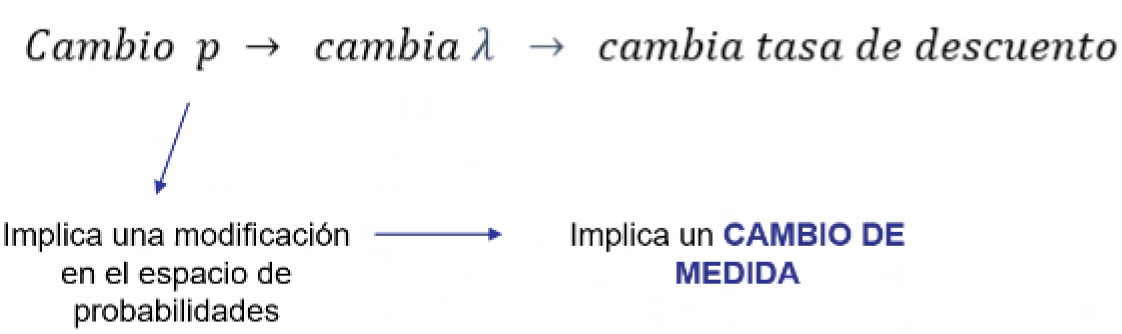
Difícilmente será sostenible el calculo de varianza asumiendo distribución log normal. Por eso es un bloque "*naive*".

Por más que conozca las probabilidades reales, usándolo de esta manera, me hace hacer supuestos sobre la distribución del derivado que no son tales.

El problema entonces de este camino es que asume una distribución para el derivado que es difícil de probar:



Modificación en el espacio de probabilidad



Siempre que cambie el espacio de probabilidades, cambia el precio del riesgo.

Si cambiamos el espacio de probabilidades, se modifica el precio de riesgo y las tasas de descuento exigidas.

Sin embargo, puede demostrarse que el valor del derivado se mantiene constante. Puedo moverme, en algunos casos, en espacio de probabilidades donde cambie la "p" pero no cambia la volatilidad.

Esto se plantea en el teorema de Girsanov

Teorema de Girsanov

Es posible encontrar alguna medida de probabilidad tal que si yo modifico la tendencia del proceso (υ) no me cambia la volatilidad del proceso.

Entonces valúa un derivado con este cambio de medida y que el valor del derivado sea siempre el mismo.

Debo elegir una medida que modifique la tendencia del proceso, pero mantenga constante la volatilidad. Este teorema será valido cuando tomo un delta t chiquito.

Entonces este teorema me permitirá mover en espacios de probabilidad que a mí me resulte cómodo.

Puedo modificar las medidas de manera tal que resulten prácticas para la valuación, no afectando el resultado de la valuación siempre que mantenga la volatilidad real del proceso.

Este teorema tiene validez cuando $\Delta t \rightarrow 0$

Probabilidades Neutrales al Riesgo

Este teorema, entonces me permite moverme en los espacios de probabilidad en los que me conviene trabajar. Uno de ellos es el caso de PNR.

En el caso que elijo PNR, yo asumo un λ igual a cero. No exijo ninguna prima por riesgo.

Con eso, el rendimiento exigido para cualquier inversión es la tasa libre de riesgo. Entonces, cálculos las probabilidades de suba o baja de escenarios en función de esa elección.

El cambio de medida me permite trabajar en un espacio de proba que requiera menores supuesta para trabajar – en ese caso, no necesitamos hacer supuestos respecto de la volatilidad del derivado.

Si asumo que $\lambda = 0$ en ningún momento necesito estimar el sigma C.

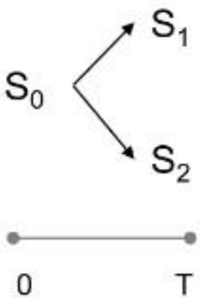
Si asumo que λ es cero, en nigua momento necesito estimar (para descontar el pay off) el sigma sub c porque yo ya que como λ es cero me queda:

$$\mu_c = \cancel{\lambda \cdot \sigma_c} + r$$

No estoy teniendo el problema del enfoque Naive que era estimar esa volatilidad asumiendo una distribución que no era.

Me estoy moviendo del mundo real al mundo PNR onde λ es cero sin afectar la volatilidad del proceso.

Cuando hacemos replica y usamos PNR, el rendimiento total que el inversor le exige a la inversión es la tasa libre de riesgo.



$$\hat{E}(S) = S_0 \cdot e^{r \cdot \Delta t} = \pi_1 \cdot S_1 + (1 - \pi_1) \cdot S_2$$

$$\downarrow$$

$$S_0 \cdot e^{r \cdot \Delta t} = \pi_1 \cdot S_1 - \pi_1 \cdot S_2 + S_2$$

$$S_0 \cdot e^{r \cdot \Delta t} - S_2 = \pi_1 \cdot (S_1 - S_2)$$

$$\downarrow$$

$$\pi_1 = \frac{S_0 \cdot e^{r \cdot \Delta t} - S_2}{(S_1 - S_2)}$$

$$c = (\pi_1 \cdot c_1 + (1 - \pi_1) \cdot c_2) \cdot e^{-r \cdot \Delta t}$$

Elegimos como probabilidad aquella que hace que el rendimiento de la inversión sea igual a la tasa libre de riesgo.

Martingalas – Cambio de Numerario

Esa segunda parte me dice que alternativas tengo si en algún momento para mi usar $\lambda = 0$ ya no me resulta cómodo-

Puede suceder cuando:

Desconozco la tasa libre de riesgo o cuando estoy valuando un instrumento que depende de la tasa de interés donde la tasa libre de riesgo no es constante.

No siempre este supuesto de λ cero me resulta cómodo para trabajar.

La elección de PNR tiene sentido cuando existe y conocemos una tasa libre de riesgo a la cual descontar. Si hay incertidumbre respecto de esta tasa, puede optarse por elegir otra medida

Medida Martingala

Otro caso de uso de alguna medida donde cambio el espacio de probabilidad y con eso valúa un derivado es una medida Martingala. Es un proceso sin tendencia.

Puedo elegir las medidas de probabilidad que el proceso sea una martingala

$$E[X_t/X_{t-1}] = X_{t-1}$$

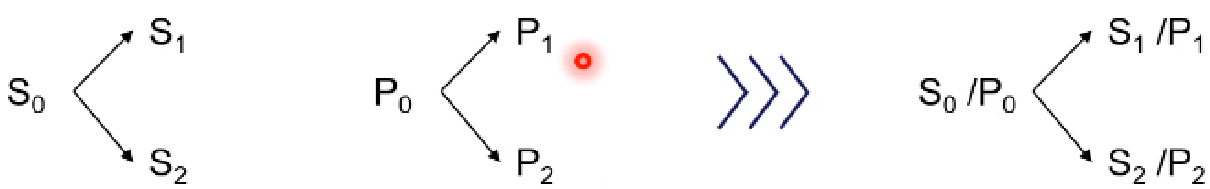
Lo que espero para el periodo siguiente es la situación que tengo hoy.

¿Como elijo este proceso?

En un mercado completo, podemos elegir cualquier activo como numerario y elegir el esquema de probabilidad tal que el proceso sea martingala.

Que el mercado sea completo implica que está formado por activo LI (linealmente independientes) y que – en consecuente- pueden replicar el valor del derivado-

Supongo un mercado que tiene el activo S0 y P0:



Tengo un mercado completo, me interesa encontrar una medida martingala, entonces estandarizo un valor en función del otro. Uso un activo como numerario del otro.

Los activos están normalizados en función del activo P.

El activo S esta expresado en función del activo P. Esto relativizando precios en función de P.

Podemos elegir las medidas de probabilidad tal que el proceso sea martingala y trasladarlas a la valuación del derivado.

Hacer esto implica cambiar de numerario, es decir, cambiar la forma de cómo expreso los activos. Digo que P es un numerario y que los activos están normalizados en función del activo P.

Puedo elegir un esquema de probabilidad donde el activo normalizado sea una martingala, esto es que el $E\left(\frac{S_t}{P_t}\right) = \frac{S_0}{P_0}$ busco una probabilidad que haga que el proceso constituya una martingala.