Universidad de Buenos Aires

Facultad de Ciencias Económicas

Teoría Actuarial del Riesgo

Autor:
Juan Francisco Torres Tejerizo

2023

Índice

1. Elementos Básicos

Este documento esta hecho con el fin de analizar los conceptos elementales de las Gestión Empresarial cpn un enfoque moderno basado en el riesgo. En otras palabras, las empresas -especialmente las aseguradoras- tienen que hacer estimaciones para la confección de sus balances. Esto incluye la proyección de gastos, de inversiones, y más. Cada una de estas variables estará definida según las normas contables y financieras del país. Sin embargo, hay una variable que destaca por sobre el resto. Esta es la estimación de los siniestros. La misma será analizada desde diversos puntos de vista (método individual y colectivo) para poder realizar la mejor estimación posible. En su conjunto, se tendrá el siguiente planteo contable

$$U(t) = A(t) - P(t)$$

Donde $U(t)$ es el saldo en el periodo t, $A(t)$ es el activo en el periodo t y $P(t)$ es el pasivo en dicho periodo. Entonces, en base a esto se puede plantear situaciones de *ruina*. Desde un punto de vista dinámico, esto será

$$U(t+1) = U(t)+\pi(t,t+1)-S(t,t+1)-G(t,t+1)+I(t,t+1)-Ig(t,t+1)+Ap(t,t+1)-D(t,t+1)$$

Donde π son las primas cobradas, S los siniestros, G los gastos, I los resultados de las inversiones, Ig los impuestos a las renta que haya, Ap los aportes de capital hechos y D los dividendos. Todas estas variables en flujo, desde t hasta $t+1$.

Habiendo definido estas variables, se plantean dos tipos de resultados. El primero es el técnico, que se centra simplemente en el negocio de la aseguradora

$$RT(t,t+1) = \pi(t,t+1) - S(t,t+1) - G(t,t+1)$$

El segundo es el financiero

$$RF(t,t+1) = I(t,t+1)$$

1.1. Modelización de los Siniestros

Introduciendo mas sobre el análisis, se empezarán a plantear los perfiles de riesgos y de siniestros como *Variables Aleatorias*. Esto se hará tanto en frecuencia como en intensidad. En el modelo individual, se consideran n riesgos independientes. Esto es lógico de suponer ya que no tiene sentido que una póliza de un asegurado afecte a otro si no se conocen. Si a cada riesgo se lo denomina i, entonces al conjunto de riesgos se lo denominará

$$S = X_1 + X_2 + ... + X_n$$

A modo de referencia, en el esquema colectivo a analizar con posterioridad se tendrá una cartera que genera un número aleatoria N de siniestros, cada uno de valor aleatorio Z. En definitiva, se estará buscando tres parámetros esenciales de estos. Estos son la media ($E(S)$), la varianza ($Var(S)$) y el Valor a Riesgo ($VaR(S;p)$). Este último se define como un percentil dada una probabilidad p. Es de interés ya que se puede calcular, por ejemplo, el percentil extremo al 99 % de una distribución de siniestros. Esto brinda información de suma relevancia ya que se puede analizar el patrimonio de la empresa a distintos niveles de confianza. Existen otras caracterizaciones esenciales a considerar, como por ejemplo el rango. Este definirá cuantos valores se pueden tomar en la distribución. Además, será de relevancia tener la distribución de la misma -ya sea discreta o continua- debido a la información sobre sus momentos Absolutos y Centrados. Los mismos podrán ser calculados con la Función Generatriz de Momentos

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} M[X;t]_{=0} = E\left[X^k\right]$$

La última característica a considerar es el Riesgo Relativo (RR). Esta se define como

$$RR = \frac{\sigma(x)}{E(x)}$$

Por ejemplo, sean las siguientes 5 pólizas cada una con sus posibles montos y probabilidades. De cada una se calculará la esperanza, la varianza[1] y el riesgo relativo.

x	$P(X_1 = x)$	$P(X_2 = x)$	$P(X_3 = x)$	$P(X_4 = x)$	$P(X_5 = x)$	Total
0	0.9	0.85	0.8	0.75	0.7	
1000					0.12	
2000				0.2	0.08	
3000			0.19		0.06	
4000		0.14		0.04	0.03	
5000	0.1	0.01	0.01	0.01	0.01	
$E(X_i)$	500	610	620	610	630	2970
$Var(X_i)$	2250000	2117900	1575600	1317900	1313100	8574500
$RR(X_i)$	3	2.39	2.02	1.88	1.82	0.99

Se puede observar algunas conclusiones importantes. La primera tiene que ver con la independencia, como es el caso de esta tabla. Al tener esto, se puede demostrar que

$$E(S) = E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_n)$$

Y que la varianza -notese que no es la dispersión-

$$Var(S) = Var(X_1) + Var(X_2) + ... + Var(X_n)$$

[1]Es práctico recordar que esta surge de $Var(x) = E\left(x^2\right) - E^2(x)$.

Sin embargo, sería erróneo argumentar que pasa lo mismo con el momento centrado de orden dos. Es decir, este se calcula en base a la relación

$$E\left(S^2\right) = Var(S) + E^2(S)$$

Es decir, el mismo **no** es la suma de los momentos centrados de orden dos de las variables aleatorias. Si se tuviera la función generatriz de momentos,

$$M[S;t] = \prod_{h=1}^{n} M[X_h;t]$$

En cambio, si se tuviera que los riesgos son independientes e idénticamente distribuidos se pueden simplificar los cálculos a

$$E(S) = n \cdot E(X)$$

$$Var(S) = n \cdot Var(X)$$

$$M[S;t] = M[X;t]^n$$

Y particularmente, el riesgo relativo se reduce a

$$RR(S) = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sigma(X)}{E(X)}$$

Teniendo n riesgos independientes, puede ser de interés calcular la probabilidad de que en su conjunto se tenga un valor determinado de la variable aleatoria. Para esto, es necesario realizar la **convolución** de forma tal que se obtengan las distintas probabilidades asociadas a cada evento. Esto es

$$P(X_1 + X_2 = x) = \sum_{y<x} P(X_1 = y) \cdot P(X_2 = x - y)$$

Lo que se hace es calcular la probabilidad de que la primera variable X_1 tengo un valor y y se multiplica por la probabilidad de que la segunda variable tenga el valor complementario de y para llegar a x. De esta forma, la suma de ambas variables dará con exactitud x. Cuando se hace referencia a las variables continuas, se tiene

$$F_{X+Y}(x) = \int_0^x f_X(t) \cdot f_Y(x-t)dt$$

Se puede observar que la integral esta acotada al cero debido a que el área de interés son siniestros que siempre son no negativos.

Por ejemplo, si se quiere obtener la distribución de $X_1 + X_2$ de las pólizas previamente expuestas, se parte de

x	$P(X_1 = x)$	$P(X_2 = x)$
0	0.9	0.85
4000	0	0.14
5000	0.1	0.01

Es útil comenzar el análisis viendo cuales son los valores mínimos y máximos que se puede tomar. Estos son 0 (cuando tanto X_1 como X_2 son cero) y 10000 (cuando tanto X_1 como X_2 son cinco mil). También hay que considerar los casos intermedios. Es decir, los casos en los que una variable toma un valor pero la otra toma otro distinto. Los posibles escenarios son

x	$P(S=x)$	$F(x)$
0	$0{,}9 \cdot 0{,}85 = 0{,}765$	0.765
4000	$0{,}9 \cdot 0{,}14 = 0{,}126$	0.891
5000	$0{,}9 \cdot 0{,}01 + 0{,}1 \cdot 0{,}85 = 0{,}094$	0.985
9000	$0{,}1 \cdot 0{,}14 = 0{,}014$	0.999
10000	$0{,}1 \cdot 0{,}01 = 0{,}001$	1

Se observa que se cumple con la Ley de Cierre. Con esto, se pueden buscar características de interés como el Valor a Riesgo. Por ejemplo, si se quiere el $VaR(S; 0{,}95)$, se buscará el percentil que acumula esta probabilidad. Se puede observar que no es el de 4000 debido a que acumula menos que lo deseado. Por ende, este será el siguiente, que es 5000. Este dato debe ser analizado en su conjunto con la variabilidad y con lo esperado. A medida que se introduzcan mas riesgos al conjunto S, la distribución que se tenga será mas concentrada en el valor esperado (bajará el riesgo relativo). Esta misma lógica sirve para la convolución de cualquier variable discreta, ya sea tabulada o conocida por su distribución, como puede ser una Poisson[2]

Todos estos valores calculados sirven para fundamentar el cobro de primas. Es decir, si estos riesgos son pólizas, lo que se espera tener de siniestros es la media. Esto será la prima pura. Además, se puede tener un recargo definido de diversas formas. El mas común es un recargo fijo (un porcentaje estipulado) o un porcentaje sobre el desvio/varianza. A medida que el recargo sea mayor, la probabilidad de tener resultados negativos irá disminuyendo.

Se expondrán dos ejemplos adicionales sobre la convolución con variables continuas. Empezando por el caso de una exponencial, sean las siguientes funciones de probabilidades

$$f_1(x) = e^{-x} \quad f_2(x) = 2e^{-2x}$$

La convolución de la misma será

$$f(x) = \int_0^x f_1(x-y) \cdot f_2(y)dy = \int_0^x e^{-(x-y)} \cdot 2e^{-2y}dy$$

$$= 2e^{-x} \int_0^x e^{-y}dy = 2e^{-x} - 2e^{-2x}$$

El otro ejemplo de interés es con una función uniforme. Esta esta acotada tanto por una cota inferior como superior. Por ejemplo, sea una uniforme $(a_1; a_2)$ y otra uniforme $(b_1; b_2)$. El rango de la suma de ambas irá desde a_1+b_1 hasta a_2+b_2. Por la forma lineal de la uniforme, se tendrán 3 segmentos. Estos son $[a_1+b_1 : a_2+b_1]$, $[a_2+b_1 : a_1+b_2]$ y $[a_1+b_2 : a_2+b_2]$. Los rangos de la integral irán según estos intervalos. En el primero, se observa un crecimiento, en el segundo una constante y en el tercero un decrecimiento. En definitiva, si a cada rango se lo denomina A, B y C respectivamente

$$A = \int_{b_1}^{s-a_1} f_1(x) \cdot f_2(y)dy$$

$$B = \int_{s-a_1}^{s-a_2} f_1(x) \cdot f_2(y)dy$$

$$C = \int_{s-a_2}^{s-b_2} f_1(x) \cdot f_2(y)dy$$

[2]Lo distintivo de este caso es que el dominio de la Poisson, por ejemplo, es mayor. Entonces se tendrán valores mas grandes.

Por ejemplo, sean dos variables aleatorias

$$X_1 \sim U[0;2] \quad X_2 \sim U[0;3]$$

El rango de la variable final irá desde 0 hasta 5. Cada segmento de la misma vendrá definido por

$$0 \leq S \leq 2 \rightarrow f_s = \int_0^s \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} dy = \frac{s}{6}$$
$$2 \leq S \leq 3 \rightarrow f_s = \int_{s-2}^s \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} dy = \frac{1}{3}$$
$$3 \leq S \leq 5 \rightarrow f_s = \int_{s-2}^3 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} dy = \frac{5-s}{6}$$

Esto se deduce del siguiente razonamiento. De las dos uniformes, se sabe que

$$Z = X + Y \rightarrow Y = Z - X$$

Entonces, sabiendo que la variable Y sucede dentro de

$$b_1 \leq Y \leq b_2$$

Que es equivalente a

$$b_1 \leq Z - X \leq b_2$$

Si se despeja a X

$$Z - b_2 \leq X \leq Z - b_1$$

Pero se conoce que también X esta dentro del rango

$$a_1 \leq X \leq a_2$$

Por lo que planteando las distintas condiciones, se deduce que los límites de la integral serán: (i) de a_1 hasta $Z - b_1$, (ii) desde a_1 hasta a_2 y (iii) $Z - b_2$ hasta a_2. Se nota que hay una combinación que no se muestra ya que es equivalente a a_1 hasta a_2. Daría el mismo resultado.

Lo presentado hasta ahora se basa en el **esquema directo**. Es decir, se plantea una distribución de probabilidades y se realizan los cálculos correspondientes con esta. Esta es la forma mas sencilla de modelizar los siniestros. Sin embargo, existen otros tres esquemas muy utilizados en la práctica. A continuación se desarrollarán los mismos.

El segundo esquema a analizar es la **Ponderación de Variables**. Este plantea agregar variabilidad a la modelización sin cambiar el promedio. Es decir, se agregan distintos *contextos* con sus respectivas probabilidades. Estos serán denominados Q_i, y la probabilidad de que el siniestro tome el valor x será definido como

$$P(X = x) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i | Q_i) \cdot P(Q_i)$$

Con

$$\sum_{i=1}^{n} P(Q_i) = 1$$

Esto es generalizable para los momentos centrados de orden k de la siguiente forma

$$E(X^k) = \sum_{\forall x} x^k \cdot P(X = x) = \sum_{i=1}^{n} P(Q_i) E\left(X^k | Q_i\right)$$

En otras palabras, se tienen diversas situaciones posibles. Cada una, tendrá su esperanza y su momento centrado de orden k correspondiente. El momento centrado *des-contextualizado* de la variable aleatoria X será el promedio de estos utilizando las probabilidades de los contextos. Por ejemplo, sean dos contextos

$P(Q_1) = 0{,}7$

x	$P(X = x\|Q_1)$
0	0.8
100	0.1
200	0.06
300	0.04

$P(Q_1) = 0{,}3$

x	$P(X = x\|Q_2)$
0	0.6
100	0.2
200	0.15
300	0.05

La esperanza del primer contexto es 34 y la del segundo 65. Entonces, si se desea la esperanza general de la variable X, se deberá ponderar correspondientemente

$$E(X) = P(Q_1) \cdot E(X|Q_1) + P(Q_2) \cdot E(X|Q_2)$$

$$= 0{,}7 \cdot 34 + 0{,}3 \cdot 65 = 43{,}3$$

Una cuestión fundamental con esto, es que la varianza no se calcula ponderando las varianzas. Esto es incorrecto ya que los momentos absolutos guardan la relación expuesta pero los centrados no. Partiendo de

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$= \sum_{\forall i} Q_i \cdot E(X^2|Q_i) - \sum_{\forall i} Q_i E^2(X|Q_i)$$

Si se suma y se resta un término adicional

$$= \sum_{\forall i} Q_i \cdot E(X^2|Q_i) - \sum_{\forall i} Q_i E^2(X|Q_i) + \sum_{\forall i} Q_i E^2(X|Q_i) - \sum_{\forall i} Q_i E^2(X|Q_i)$$

Y ordenando los términos

$$= \underbrace{\sum_{\forall i} Q_i \left[E(x^2|Q_i) - E^2(X|Q_i)\right]}_{Var(X|Q_i)} + \underbrace{\sum_{\forall i} Q_i E^2(X|Q_i) - \left[\sum_{\forall i} Q_i E(X|Q_i)\right]^2}_{Var(E(X|Q_i))}$$

Por lo que

$$Var(X) = E\left[Var(X|Q_i)\right] + Var\left[E(X|Q_i)\right]$$

Es decir, la varianza des-contextualizada es el promedio de las varianzas sumado a otro término adicional que agrega variabilidad.

Una alternativa para el tratamiento de estos datos puede ser calcular la distribución des-contextualizada. Es decir, se debe ponderar las probabilidades de cada contexto, por la probabilidad de que suceda el mismo. En el ejemplo anteriormente expuesto, esto sería

x	$P(Q_1) \cdot P(X = x\|Q_1) + P(Q_2) \cdot P(X = x\|Q_2) = P(X = x)$
0	$0{,}7 \cdot 0{,}8 + 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}74$
100	$0{,}7 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}13$
200	$0{,}7 \cdot 0{,}06 + 0{,}3 \cdot 0{,}15 = 0{,}087$
300	$0{,}7 \cdot 0{,}04 + 0{,}3 \cdot 0{,}05 = 0{,}043$

De esta forma, se puede tratar esta distribución como el esquema directo.

Finalmente, la Función Generatriz de Momentos tiene la particularidad de que

$$M(X; z) = \sum_{\forall x} e^{x \cdot z} P(X = x) = \sum_{\forall i} P(Q_i) M(X; z|Q_i)$$

El siguiente tratamiento a analizar es el del **Esquema Condicional**. Este separa la frecuencia de la intensidad, donde la primera se define a través de una variable indicadora dicotómica -sucede o no sucede- denominada I. Es decir

$$I = \begin{cases} 0 & \text{Si no sucede el siniestro} \\ 1 & \text{Si sucede el siniestro} \end{cases}$$

Esta tomará el valor 0 con probabilidad p y el valor 1 con probabilidad q. Por ende, la suma de estas dará la unidad. Entonces, se deduce que

$$E(I) = q \quad Var(I) = q \cdot p$$

La intensidad será definida a través de una variable aleatoria Z. Se podría pensar que esta siempre será mayor a cero, pero no necesariamente es así. Esto se debe a que si bien puede ocurrir un siniestro de cierto valor, si existiese una franquicia mayor a este valor la reaseguradora no pagará.

Por ende, el valor final del siniestro será definido como

$$X = I \cdot Z$$

Y su probabilidad

$$P(X = x) = P(I = 0) \cdot P(Z = x|I = 0) + P(I = 1) \cdot P(Z = x|I = 1)$$

Y si se condiciona a que x sea distinto a cero, se termina simplificando a

$$P(X = x) = P(I = 1) \cdot P(Z = x|I = 1)$$

Los momentos se calcularán simplemente como los momentos de Z multiplicados por su variable indicadora. Esto es,

$$E\left(X^k\right) = \sum_{\forall x} x^k P(X = x) = q \sum_{\forall x} x^k P(Z = x) = q \cdot E\left(Z^k\right)$$

Por lo tanto,

$$Var(X) = E\left(X^2\right) - E^2(X) = q \cdot E\left(Z^2\right) - q^2 \cdot E^2(Z)$$

Que si se suma y se resta un término

$$= E\left(X^2\right) - E^2(X) = q \cdot E\left(Z^2\right) - q^2 \cdot E^2(Z) + q \cdot E^2(Z) - q \cdot E^2(Z)$$

$$= q\left[E\left(Z^2\right) - E^2(Z)\right] + E^2(Z) \cdot q \cdot (1-q)$$

Por lo que se concluye que

$$Var(X) = E(I) \cdot Var(Z) + Var(I) \cdot E^2(Z)$$

La Función Generatriz de Momentos

$$M(X;t) = \sum_{\forall x} e^{x \cdot t} P(X = x) = p + q \cdot M(Z;t)$$

Por ejemplo, sea la probabilidad de que ocurra un siniestro igual a 0,3 y la siguiente distribución de Z

z	$P(Z = z \mid I = 1)$
0	0.6
100	0.2
200	0.15
300	0.05

La esperanza se puede encontrar como

$$E(X) = E(I) \cdot E(Z) = 0{,}3 \cdot 65 = 19{,}5$$

Y la varianza

$$Var(X) = E(I) \cdot Var(Z) + Var(I) \cdot E^2(Z)$$

$$= 0{,}3 \cdot 8275 + [0{,}3 \cdot 0{,}7] \cdot 12500 = 3369{,}75$$

De forma similar al enfoque de contextos, se puede plantear la distribución final de X multiplicando las probabilidades correspondientes. Esto se resuelve de forma idéntica

x	$P(X = x)$
0	0.88
100	0.06
200	0.045
300	0.015

El último tratamiento será el **Esquema Compuesto**. El mismo calcula los siniestros en función de la frecuencia (N) y la intensidad (Z)

$$X = N \cdot Z$$

Donde cada componente se modeliza como una variable aleatoria. En general, la frecuencia suele ser una variable discreta y la intensidad continua. Cada una de estas variables tendrá su esperanza, su varianza y su función generatriz de momentos. Lo distintivo será que para cada valor t de la variable aleatoria N, se tiene la ocurrencia de los t idénticamente distribuidos e independientes, de manera que la distribución de la cuantía será el resultado de convolucionar t veces la distribución Z. Esto se analiza de forma mas sencilla pensando que cada siniestro individual puede tomar una cuantía según la variable Z. Entonces, se considera que la variable aleatoria X es una consecuencia de la actuación independiente de las dos variables N y Z.

$$P(X = x) = \sum_{t=0}^{n} P(N = t) \cdot P_Z^{*(t)}(x)$$

Es decir, la probabilidad de que se tenga t siniestros multiplicado por toda la convolución de Z para que en el total, la suma de estos valores de como resultado x. Se demuestra que

$$E(X) = E(N)E(Z)$$

Y que

$$Var(X) = E(N)Var(Z) + Var(N)E^2(Z)$$

Sea un momento absoluto de orden k,

$$E\left(X^k\right) = \sum_{\forall x}\sum_{\forall n} x^k \cdot P(N = n) \cdot P_z^{*(n)}(x) = \sum_{\forall n} P(N = n)E\left(Z^k|N = n\right)$$

De manera que

$$= \sum_{\forall n} P(N = n) \cdot n \cdot E\left(Z^k\right)$$

Entonces, simplemente para el caso de que $k = 1$

$$E(X) = E(N) \cdot E(Z)$$

Para la varianza se demuestra a partir de los dos primeros momentos absolutos.

$$Var(X) = \sum_{\forall n} P(N = n)E\left(Z^2|N = n\right) - E^2(X)$$

Si se suma y se resta el mismo término

$$= \sum_{\forall n} P(N = n)E\left(Z^2|N = n\right) - E^2(Z|N = n) + E^2(Z|N = n) - E^2(X)$$

Se observa que se tiene la varianza condicional de Z

$$= \sum_{\forall n} P(N = n)Var(Z|N = n) + E^2(Z|N = n) - E^2(X)$$

$$= E\left(Var(Z|N = n)\right) + Var\left(E(Z|N = n)\right)$$

$$Var(X) = E\left(Var(Z)\right) + Var\left(E(Z)\right)$$

Las distribuciones típicas con las que se trabaja para el número de siniestros son las dicotómicas (como la binomial) o también la geométrica, la binomial negativa o la poisson. Para la cuantía de cada siniestro se trabajará con la uniforme, la exponencial[3], la normal, log-normal, etc.

Existe un caso particular a estas posibles situaciones, el cual facilita los cálculos. El mismo se trata de la distribución Poisson. Si el número de siniestros se distribuye

$$P(N = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

Esto implica que por propiedad de recurrencia, las sucesivas probabilidades se pueden obtener a partir de la anterior

$$P(N = n + 1) = P(N = n) \cdot \frac{\lambda}{n + 1}$$

[3]La suma de variables aleatorias exponenciales, da como resultado una gamma con parámetro $\alpha = n$.

Entonces, si se tuviese un esquema compuesto se puede expresar la distribución de los siniestros como

$$P(X = x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n) \cdot P(Z_0 + Z_1 + ... + Z_n = x)$$

Entonces, las fórmulas ya conocidas se reducen a

$$E(X) = E(N) \cdot E(Z) = \lambda \cdot E(Z)$$

$$Var(X) = E(N) \cdot Var(Z) + Var(N) \cdot E^2(Z) = \lambda \cdot E\left(Z^2\right)$$

$$M[X; k] = M\left[N; ln\left(M[Z; k]\right)\right] = e^{\lambda\left(e^{ln(M[Z;k])}-1\right)}$$

Pero existen dos propiedades adicionales que son de interés. La primera es la de adición. La suma de dos distribuciones compuestas de poisson, independientes, es igual a otra distribución compuesta de poisson donde el parámetro será la suma de los lambdas y donde la distribución de la cuantía de cada siniestro es resultante de una variable aleatoria ponderada de las cuantías de de siniestro, por el peso de cada media sobre la media total. Esto es, sea r la cantidad de variables poisson que se suman,

$$P(Z = x) = \sum_{i=1}^{r} \frac{\lambda_1}{\lambda} P(Z_i = x)$$

La segunda propiedad es la de ponderación. Si la distribución del número de siniestros es consecuencia de distribuciones poisson ponderadas con una ponderación basada en una distribución Gamma de la media, entonces la distribución ponderada resulta igual a una distribución binomial negativa.

1.2. Aplicación a Reaseguro

Si bien hasta ahora se mencionó como se debe proceder con la modelización de los siniestros según los distintos enfoques, es central el análisis a realizar según los distintos tipos de contratos. Es decir, si se busca analizar lo que pagará la reaseguradora o la cedente bajo un contrato se deberá considerar la información del mismo. En esta sección se busca analizar como es el enfoque bajo el tipo de contratos proporcional y bajo los dos tipos de contratos no proporcionales.

Comenzando con un contrato de **Cuota Pate** (QS), este tiene como fundamento compartir proporcionalmente el riesgo de la cobertura. Se fija un porcentaje de retención y uno de cesión y en base a esto se distribuye el monto a pagar. Suele existir en ocasiones un límite sobre los montos a ceder. Este, por su naturaleza de proporción, no cambia la siniestralidad. Sea la tasa de retención α y la de cesión $1 - \alpha$[4], entonces los siniestros retenidos serán calculados como

$$X_{ret} = \alpha \cdot X$$

Por ende, se deduce de forma sencilla que

$$E(S_{ret}) = \alpha \cdot E(S) \quad Var(S_{ret}) = \alpha^2 \cdot Var(S) \quad \sigma(S_{ret}) = \alpha \cdot \sigma(S)$$

El análisis para lo cedido es simétrico con su respectivo porcentaje. Como se mencionó previamente, se deja constancia de que la siniestralidad no cambia. Otro concepto que permanecerá invariante es el Riesgo Relativo. Este tampoco se modifica debido a que

$$RR(X_{ret}) = \frac{\sigma(X_{ret})}{E(X_{ret})} = \frac{\alpha}{\alpha}\frac{\sigma(X)}{E(X)} = RR(X)$$

Como este contrato cede proporcionalmente los siniestros y también la prima, no existirá variación en el cálculo de las probabilidades sobre resultados. Lo que si se modificará es el Valor a Riesgo. El mismo será calculado como la proporción correspondiente.

$$VaR(S_{ret}; \rho) = \alpha \cdot VaR(S; \rho)$$

En el caso de la primera cobertura no proporcional, se tiene un **Exceso de Pérdida** (XL) que fija una prioridad M. Se puede tener una variante adicional que agrega un límite si se lo desea. Esta cobertura indemniza los siniestros por su intensidad. La prima de este contrato surge a través de otros cálculos y no será una proporción de la total. Se destaca que este contrato si cambia la siniestralidad, ya que se fundamenta en

$$E(S) = E(X_{ret}) + E(X_{ced})$$

Esta relación solo se cumple para la esperanza, no es valida ni para el momento de segundo orden, ni para la varianza ni para los desvíos ni para los riesgos relativos. Lo que se puede generalizar, es que lo que la cedente pagará será el resultado de

$$X_{ret} = \text{mín}\{X; M\}$$

En general se tiene que los riesgos relativos tienden a mejorar debido a que se cubren los siniestros de mayor intensidad, por lo que se disminuye la volatilidad. Teniendo la distribución

[4]En este ejemplo se esta considerando que no existen límites.

de X, se debe aplicar la prioridad -y el límite si hubiera- para encontrar la distribución cedida y retenida. De esta forma, se calculará la esperanza, la varianza, el riesgo relativo, el Valor a Riesgo y todo lo deseado con su distribución. En otras palabras, no existe una forma directa como en el QS de encontrar lo deseado con un calculo sencillo.

Finalmente, la última cobertura a analizar es el **Stop Loss** (SL). Esta cobertura protege el resultado de una línea de negocio completa. Es decir, no se debe analizar el siniestro X puntual si no la cartera en su conjunto S. Es por esto que se debe tener la distribución de la misma. La prioridad y el límite fijado suele estar expresado en forma de porcentaje, aunque para llegar a su valor absoluto simplemente se multiplique por la prima cedida. Sea la prioridad L, los siniestros retenidos se calcularán como

$$S_{ret} = \text{mín}\{X; S\}$$

Como característica a destacar es que al ponerle un mínimo al resultado del contrato, esta cobertura suele ser mas cara. Esto genera también que se ponga un máximo al Valor a Riesgo, desapareciendo los incentivos a la suscripción de buenos riesgos. Es por esto que se suele utilizar con límites.

1.3. Ejercicios

Para esta sección, se estará utilizando diversas distribuciones. Esta modelan tanto la frecuencia como la intensidad. Para su utilización, se recuerdan los parámetros, la función de densidad de probabilidad, la esperanza y la varianza. Además, se estará exponiendo las funciones generatriz de momentos de interés

Distribución	Parámetros	$f(x)$	$E(X)$	$Var(x)$	F.G.M
Binomial	$n\ ;\ p$	$\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$	$n \cdot p$	$n \cdot p \cdot (1-p)$	$(q+pe^t)^n$
Poisson	λ	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$	λ	λ	$e^{\lambda(e^t-1)}$
Geométrica (fracasos)	p	$p(1-p)^x$	$\frac{1-p}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$q+pe^t$
Binomial negativa	$r\ ;\ p$	$\binom{x+r-1}{x}(1-p)^r p^x$	$\frac{r \cdot p}{(1-p)}$	$\frac{r \cdot p}{(1-p)^2}$	$\left(\frac{q}{1-pe^t}\right)^t$
Normal	$\mu\ ;\ \sigma$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$	μ	σ^2	$e^{\mu t+\frac{1}{2}t^2\sigma^2}$
Log-Normal	$\mu\ ;\ \sigma$	$\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{ln(x)-\mu}{\sigma}\right)^2}$	$e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$	$e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2}-1\right)$	$E\left(x^k\right)=e^{k\mu+\frac{k^2\sigma^2}{2}}$
Pareto	$\alpha\ ;\ \sigma$	$\frac{\alpha\sigma^\alpha}{x^{\alpha+1}}$	$\frac{\alpha\sigma}{\alpha-1}$	$\frac{\alpha\sigma^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$	-
Beta	$\alpha\ ;\ \beta$	$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$	-
Gamma	$\alpha\ ;\ \beta$	$\frac{x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta^2$	$\frac{1}{(1-\beta t)^\alpha}$
Exponencial	β	$\frac{1}{\beta}e^{-\frac{x}{\beta}}$	β	β^2	$\frac{1}{1-betat}$

Además, se recuerda las formulas a utilizar según el enfoque deseado

Enfoque	$E(S)$	$Var(S)$
Individual	$E(I)\cdot E(X)$	$E(I)Var(X)+Var(I)E^2(X)$
Colectivo	$E(N)\cdot E(X)$	$E(N)Var(X)+Var(N)E^2(X)$
Condicional	$E(S\|W)$	$E\left(Var(S\|W)\right)+Var\left(E(S\|W)\right)$

Ejercicio 1:

MJM Seguros cuenta con dos carteras: una de robo de automotores y la otra de RC automotores. La primera consta de 250 riesgos homogéneos e independientes, con probabilidad de ocurrencia del 2 %, y cuya severidad se modela a través de una Gamma con media de dos millones y varianza de dos billones, a la que se le aplica un deducible del 15 % y cuya indemnización se limita a cuatro millones por parte del asegurador. La segunda cartera consta de 750 asegurados, con probabilidad de ocurrencia del 20 %, y su intensidad se modela mediante una función exponencial trasladada en 40.000 con media 150.000. Las primas de cada cartera son calculadas como el valor esperado de indemnización con un adicional del 40 % del desvío.

a Calcular la prima de riesgo de cada cartera y la prima de riesgo total.

b Si la prima se calculara individualmente, teniendo cada póliza un valor de prima equivalente al valor esperado con un adicional del 5del desvío, ¿cuál sería el monto de la prima total?

c Mediante una aproximación Log-Normal, plantee el cálculo del costo de un reaseguro XL con prioridad 30.000.000 y límite de 30.000.000, siendo la prima del reaseguro el valor esperado de los siniestros cedidos con un adicional del 25 %. ¿Cuál es el valor esperado de los siniestros retenidos?

d Bajo un supuesto de normalidad, calcule la probabilidad de ruina antes y después de aplicar el reaseguro considerando un capital del 10 % de las primas totales.

Es de utilidad plantear, a modo de resumen, los datos principales del enunciado. Se tienen dos carteras, donde ambas tienen una frecuencia de 0,02. Esto se piensa como una Bernoulli, donde el evento sucede o no. La primera tiene una cantidad de riesgos por $n_1 = 250$ y su intensidad se distribuye como una gamma

$$X_1 \sim \gamma(\alpha; \beta)$$

Se conoce la esperanza de esta distribución (dos millones) y la varianza (dos billones). La misma tiene un deducible del 15 % y un límite de cuatro millones. La segunda cartea tiene una cantidad de riesgos igual a $n_2 = 750$ con una frecuencia de $q = 0{,}2$ y un comportamiento de su intensidad igual a $X_2 \sim exp(\beta)$ Cuya esperanza es de ciento cincuenta mil y tiene un traslado de cuarenta mil (es decir, esta corrida a la derecha por este valor). Se comenzará valuando la primera cartera.

Primero, se busca la esperanza de la frecuencia. Esta, al ser una bernoulli será igual a su probabilidad 0,02. Si se piensa como una binomial, se puede multiplicar por la cantidad de riesgos. Esto se hará mas adelante. A continuación, se tiene que buscar como se comporta la intensidad según el contrato. Es decir, se tiene la distribución de los montos independientes del contrato. Pero se necesita conocer cuanto es lo esperado según las condiciones establecidas. Es por esto, que se despejan los parámetros del siguiente sistema

$$\left.\begin{array}{r} \alpha \cdot \beta = 2000000 \\ \alpha \cdot \beta^2 = 2000000000000 \end{array}\right\} \rightarrow \quad \alpha = 2 \quad \beta = 1000000$$

Quedando la solución que devuelve un $\alpha < \beta$. A continuación, conociendo los parámetros, se calculará la esperanza del contrato. Esta será igual a la integral de todo el dominio de la variable aleatoria de su función de densidad multiplicada por la variable aleatoria. Sin embargo, se puede distinguir que lo que pagará el asegurado cambia de acuerdo a la retención y al límite, por el deducible proporcional. Cuando el monto del siniestro vaya desde 0 hasta L/R (límite dividido la retención), el monto a pagar por la aseguradora es el porcentaje de retención por el monto. Cuando se supere este monto de L/R, lo que se pagará será igual a un monto fijo L. Es decir,

$$E(X_1) = \int_0^{\frac{L}{R}} R \cdot X \cdot f(x)dx + L \int_{\frac{L}{R}}^{\infty} f(x)dx$$

Donde

$$L = 4000000 \quad R = 0{,}85 \quad f(x) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}$$

Entonces,

$$E(X_1) = 1648460{,}985$$

Por ende, lo que se espera de esta cartera es

$$E(S_1) = n_1 \cdot E(I_1) \cdot E(X_1) = 8242304{,}925$$

Para conocer la varianza de esta cartera, se parte de la varianza de la frecuencia. Al ser una bernoulli,

$$Var(I_1) = q(1-q) = 0{,}0196$$

Y para l varianza de la intensidad, se calcula el momento absoluto de orden dos y se le resta el primero elevado al cuadrado.

$$Var(X_1) = \int_0^{\frac{L}{R}} R^2 \cdot X^2 \cdot f(x)dx + L^2 \int_{\frac{L}{R}}^{\infty} f(x)dx - E^2(X_1) = 1104582339000$$

Por ende, la varianza de la cartera,

$$Var(S_1) = n_1 \left[E(I_1)Var(X_1) + Var(I_1)E^2(X_1)\right]$$

$$= 18838287430000$$

Y la prima de esta cartera será de

$$\pi_1 = 8242304{,}925 + 0{,}4 \cdot \sqrt{18838287430000} = 9978428{,}79$$

Para la segunda cartera, se tiene la frecuencia (0,2) y se busca el comportamiento de la intensidad bajo el contrato. Se sabe que en su conjunto la esperanza es de 150000, pero esto es considerando su traslado. Es decir

$$40000 + \beta = 150000 \rightarrow \beta = 110000$$

Por ende,

$$E(X_2) = 110000 \quad Var(X_2) = 110000^2 = 12100000000$$

La varianza de la frecuencia será de 0.16, por lo que la cartera

$$E(S_2) = n_2 \cdot E(I_2) \cdot E(X_2) = 22500000$$

$$Var(S_2) = n_2 \left[E(I_2)Var(X_2) + Var(I_2)E^2(X_2)\right] = 4515000000000$$

Y por ende,

$$\pi_2 = 23349941{,}17$$

La prima total será entonces de

$$\pi_{total} = \pi_1 + \pi_2 = 33328369{,}96$$

Para el siguiente inciso, se calculará cada póliza de forma individual. Se hará el valor esperado adicional a un cinco porciento del desvio. En base a esto, se tendrá la prima de la póliza y se sumará por todas. Es decir,

$$E(S_i^{indiv}) = E(I_i)E(X_i)$$

$$Var(S_i^{indiv}) = E(I_i)Var(X_i) + Var(I_i)E^2(X_i)$$

Para los distintos Rubros, se tiene que

$$\begin{array}{cc} E(S_1^{indiv}) = 32969{,}2197 & E(S_1^{indiv}) = 30000 \\ Var(S_1^{indiv}) = 75353149710 & Var(S_2^{indiv}) = 6020000000 \end{array}$$

Por lo que, la prima individual será

$$\pi_{total} = n_1\pi_1 + n_2\pi_2 = 37083195{,}66$$

Para el siguiente inciso, se supondrá una distribución Log-Normal de toda la cartera, con un contrato XL. La prima será calculado como el valor esperado con un adicional del 25 %. Suponiendo independencia,

$$E(S_{total}) = E(S_1) + E(S_2) = 30742304{,}93 = m_1$$

$$Var(S_{total}) = Var(S_1) + Var(S_2) = 23353287430000$$

$$E(S_{total}^2) = 968442599800000 = m_2$$

Como esta el supuesto de log-normal, se tiene el siguiente sistema

$$\left.\begin{array}{l} m_1 = e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2} \\ m_2 = e^{2\mu+2\sigma^2} \end{array}\right\}$$

Que despejando los parámetros de la misma

$$\mu = ln\left(\frac{m_1}{e^{\frac{1}{2}\sigma^2}}\right)$$

$$\sigma = \sqrt{ln\left(\frac{m_2}{m_1}\right)}$$

Con el valor de estos parámetros, se calculará la esperanza del contrato. Para la Reaseguradora, desde un monto igual a cero hasta la prioridad, la misma no pagará nada. Desde la prioridad, hasta la capacidad esta pagará solo la diferencia entre el siniestro y la retención. Y desde la capacidad en adelante, solo pagará el límite. Esto, multiplicado por la función de densidad es,

$$E(S^{ced}) = \int_P^{L+P} (s-P)f(s)ds + L\int_{L+P}^{\infty} f(s)ds$$

Donde

$$P = 30000000 \quad L = 30000000 \quad f(s) = \frac{1}{s\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{ln(s)-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Resultando en

$$E(S^{ced}) = 2285273{,}933$$

Además, para la esperanza se tiene la siguiente relación

$$E(S^{Total}) = E(S^{Ced}) + E(S^{Ret})$$

Por lo que

$$E(S^{Ret}) = 28457031$$

Para el inciso final, la probabilidad de ruina se define como la probabilidad de que la prima mas el capital de la aseguradora no sea suficiente para afrontar los siniestros. Es decir

$$P(\pi + K < S)$$

Si se asume normalidad, y se estandariza

$$P\left(\frac{\pi + K - E(S)}{\sigma(S)} < Z\right) = 1 - P\left(Z < \frac{\pi + K - E(S)}{\sigma(S)}\right)$$

Se sabe que el capital es el 10 % de las primas, lo que implica

$$1 - P(Z < 1{,}224805531) = 11{,}03243\,\%$$

Esto es la probabilidad antes del Reaseguro. Para ver el impacto del mismo, se necesita calcular la varianza retenida. Esta utiliza la misma lógica expresada previamente.

$$Var(S^{ret}) = \int_0^P s^2 f(s)ds + \int_P^{L+P} P^2 f(s)ds + \int_{L+P}^{\infty} (s-L)^2 f(s)ds - E^2(S^{ret})$$

$$= 5284244645000$$

Entonces, la misma será

$$1 - P\left(\frac{\pi_{total} - Costo_{XL} + K - E(S^{Ret})}{\sigma(S^{Ret})} < Z\right) = 1{,}000846\,\%$$

Ejercicio 2:
SIC Generales desea calcular la prima de riesgo del año próximo para su reducida cartera de combinado familiar. El número de siniestros se modela con una distribución de Poisson con parámetro $\lambda = 15 \cdot h$, donde $h = \{0,8; 1; 1,2\}$ y refiere a los contextos que se esperan para el próximo año, cuyas probabilidades son 20 %, 50 % y 30 % respectivamente. La intensidad de los siniestros se modela mediante una distribución exponencial. A la misma se le aplica un deducible de 10.000 y se limita la indemnización a 1.000.000, lo que causa que el monto esperado de los siniestros sea 500. 000. La prima se calcula como el valor esperado de los siniestros con un adicional del 25 % del desvío de la cartera.

a Calcular la prima de riesgo.

b Calcular el capital necesario para que la probabilidad de ruina, bajo una hipótesis de distribución normal, sea menor al 20 %.

c Si quisiera lograr el mismo objetivo que en el inciso b) pero con un reaseguro QS, si se cuenta con un capital de 500. 000, ¿cómo lo diseñaría?

d Mediante una modelización de la cartera a partir de una distribución normal, calcular la prima a cobrar por un reaseguro SL con prioridad.

Resumiendo la información, se tiene que la frecuencia se comporta según una Poisson que toma valores dependiendo de contextos. En cambio, la intensidad será independiente de los contextos. Esta se comporta como una exponencial con un deducible fijo de 10000 y limitada al millón. El monto de los siniestros esperados, luego de las modificaciones, es de medio millón.

Lo primero que se debe reconocer es que los momentos absolutos se ponderan según los contextos. Lo que no se pondera según esto son los momentos centrados (varianza). Esto quiere decir que

$$m_j = E(S^j) = \sum_{\forall i} Pr(h_i)E(S^j|h = h_i)$$

Las distintas frecuencias esperadas serán

$$E(N|h = h_A) = E(N_A) = Var(N|h = h_A) = Var(N_A) = 15 \cdot 0{,}8 = 12$$

$$E(N|h = h_B) = E(N_B) = Var(N|h = h_B) = Var(N_B) = 15 \cdot 1 = 15$$

$$E(N|h = h_C) = E(N_C) = Var(N|h = h_C) = Var(N_C) = 15 \cdot 1{,}2 = 18$$

Esto se concluye ya que es un poisson, por lo que la media es igual a la varianza. Como el intensidad es independiente del contexto, este siempre será de 500000. Por lo que

$$E(S|h = h_A) = E(S_A) = 12 \cdot 500000 = 6000000$$

$$E(S|h = h_B) = E(S_B) = 15 \cdot 500000 = 7500000$$

$$E(S|h = h_C) = E(S_C) = 18 \cdot 500000 = 9000000$$

Entonces, la esperanza final de la cartera serán estas tres ponderadas por sus respectivas probabilidades

$$E(S^{Total}) = 7650000$$

Para calcular la varianza de la intensidad, se tiene la esperanza aplicada las modificaciones del contrato. Sin embargo, no se tiene el parámetro original de la función de densidad. Es por esto que se despeja de

$$\int_{D}^{L+D} (x - D) f(x) dx + L \int_{L+D}^{\infty} f(x) dx = 500000$$

Con

$$D = 10000 \quad L = 1000000 \quad f(x) = \tfrac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}}$$

Resultando en un

$$\beta = 644277{,}12$$

Entonces, la varianza será el resultado de

$$\int_{D}^{L+D} (x - D)^2 f(x) dx + L^2 \int_{L+D}^{\infty} f(x) dx - 500000^2 = 125568466800$$

Finalmente, la varianza en cada contexto se calculará como

$$Var(S|h = h_i) = \left[E(N|h = h_i)Var(X) + Var(N|h = h_i)E^2(X)\right]$$

Entonces, se calcula el momento segundo de cada contexto. Que si se pondera posteriormente por sus probabilidades, se obtiene

$$Var(S^{Total}) = 385523697500000$$

Finalmente,

$$\pi_{Total} = 12558689{,}35$$

Para el siguiente inciso, se tiene todos los datos a excepción del capital. Es por esto que se despeja de la siguiente ecuación

$$\frac{\pi + K - E(S)}{\sigma(S)} = Z_{80\,\%}$$

$$\frac{12558689{,}35 + K - 7650000}{\sqrt{385523697500000}} = 0{,}841622123$$

$$K = 11616339{,}31$$

En el siguiente inciso, se parte de un QS y se quiere saber el porcentaje de retención necesaria para una cierta probabilidad de ruina. Simplemente se multiplica por el porcentaje de retención la prima, la esperanza y el desvio. Despejando

$$\frac{\pi \cdot R + K - E(S) \cdot R}{\sigma(S) \cdot R} = Z_{80\,\%}$$

$$R = 0{,}043$$

Finalmente, se considera un Stop Loss que en términos relativos plantea un $80\,\% xs 120\,\%$. Si se asume una distribución normal, se quiere calcular la prima del mismo. Los parámetros a utilizar son

$$\mu = 7650000 \quad \sigma^2 = 385523697500000$$

Entonces, la prioridad en términos absolutos viene definida por

$$P = 1{,}2 \cdot \pi_{total}$$

Y la capacidad

$$C = (1{,}2 + 0{,}8) \cdot \pi_{total}$$

Por ende, la esperanza cedida será

$$E(S^{Ced}) = \int_P^C (s - P) f(s) ds + \int_C^\infty (C - P) f(s) ds = 6166454{,}16$$

Para la varianza cedida,

$$\int_P^C (s - P)^2 f(s) ds + \int_C^\infty (C - P)^2 f(s) ds - 6166454{,}16^2 = 21130463210000$$

Con esto se puede calcular el costo del Stop Loss

$$\pi_{SL} = 7545490{,}67$$

Ejercicio 3:
RAD9 Seguros tiene dos carteras (A) y (B): (A) 1.000 pólizas donde cada una cubre dos riesgos independientes, con probabilidades de ocurrencia de un siniestro del 5 % y 8 % respectivamente. Los daños para cada siniestro por cada riesgo se corresponden con distribuciones uniformes comprendidas entre 0 y \$1000000, y 0 y \$2.500.000 respectivamente por cobertura. La indemnización máxima por el conjunto de los siniestros (comprendiendo los dos riesgos) de cada póliza asciende a \$2.600.000. (B) 2.000 pólizas, cada una con una distribución de Poisson del número de siniestros, con valor esperado en cada póliza de 0,15 que a partir de este año se limitará a un máximo de 2 siniestros. Cada siniestro tiene como distribución del daño una función Gamma, con media \$300.000 y dispersión \$400.000 con una indemnización máxima acumulada por póliza de \$1.000.000. El Capital inicial es del 10 % de las primas para riesgo.

i Determine las primas de riesgo de cada cartera si estas se calculan como el valor esperado de los siniestros con un adicional del 50 % del desvío de la cartera.

ii A partir de una aproximación Log-Normal de las carteras en conjunto determine: probabilidad de obtener un resultado negativo en el primer año, probabilidad de ruina a un año, coeficiente de seguridad de la cartera y Valor a Riesgo al 95 %.

iii Mediante la discretización de las variables aleatorias continuas, estime el costo de una cobertura de exceso de pérdida con prioridad de \$300.000.- por siniestro, con recargos iguales al 35 % de la dispersión del riesgo cedido total.

Para comenzar con el ejercicio, se resume la información de la primera cartera. Esta tiene una cantidad de mil pólizas cuya frecuencia sucede según dos probabilidades de riesgos, 5 % y 8 %. La intensidad de cada uno de estos será distribuida uniforme. La distintivo del ejercicio tiene que ver con que el límite de la indemnización sucede a la totalidad de los siniestros y no de forma individual. Es decir, será necesario calcular lo que se espera de las mil pólizas para después ponerle un máximo a la indemnización.

Observando la ocurrencia, se puede obtener fácilmente la total de la cartera. Esto es

n	$P(N=n)$
0	(1-0.05)(1-0.08)=0.874
1	0.05(1-0.08)=0.046
1	(1-0.05)0.08=0.076
2	(0.05)(0.08)=.004

Entonces, se deberá calcular lo esperado bajo cada escenario. Similar al enfoque de la variable ponderada, los momentos serán

$$E\left(S^k\right) = \sum_{i=1}^{m} Pr(N = n_i) \cdot E\left(X^k|N = n_i\right)$$

En caso de que haya cero siniestros, la indemnización será nula. Si solo hubiese un siniestro, se tendría que analizar de que riesgo proviene. Si fuese del primer riesgo, este tiene una distribución de densidad

$$f\left(x_1^A\right) = \frac{1}{1000000}$$

Si fuese del segundo riesgo

$$f\left(x_2^A\right) = \frac{1}{2500000}$$

En cambio, si ocurriesen dos siniestros en conjunto, su distribución será el resultado de la convolución de estas dos.

$$f\left(x_1^A \cdot x_2^A\right) = \begin{cases} \frac{x}{1000000 \cdot 2500000} & 0 \leq x \leq 1000000 \\ \frac{1}{2500000} & 1000000 \leq x \leq 2500000 \\ \frac{3500000-x}{1000000 \cdot 2500000} & 2500000 \leq x \leq 3500000 \end{cases}$$

Se debe realizar esta convolución ya que el limita a aplicar es sobre la póliza y no sobre cada siniestro individual. De esta forma, se tiene el riesgo esperado de cada póliza. Por ende, se calculará la esperanza a pagar según la frecuencia y la intensidad, limitando esta última al pago de 2600000. La esperanza es

$$E(S_A) = 0{,}874 \cdot 0 + 0{,}046 \int_0^{1000000} x \cdot f\left(x_1^A\right) dx + 0{,}076 \int_0^{2500000} x \cdot f\left(x_2^A\right) dx$$

$$+0{,}004 \left[\int_0^{1000000} x \cdot \frac{x}{1000000 \cdot 2500000} dx + \int_{1000000}^{2500000} x \cdot \frac{1}{2500000} dx + \right.$$

$$\left. \int_{2500000}^{2600000} x \cdot \frac{3500000 - x}{1000000 \cdot 2500000} dx + \int_{2600000}^{3500000} 2600000 \cdot \frac{3500000 - x}{1000000 \cdot 2500000} dx \right]$$

$$E(S_A) = 124805{,}6$$

Entonces, el momento de orden dos

$$E(S_A^2) = 0{,}874 \cdot 0^2 + 0{,}046 \int_0^{1000000} x^2 \cdot f\left(x_1^A\right) dx + 0{,}076 \int_0^{2500000} x^2 \cdot f\left(x_2^A\right) dx$$

$$+0{,}004 \left[\int_0^{1000000} x^2 \cdot \frac{x}{1000000 \cdot 2500000} dx + \int_{1000000}^{2500000} x^2 \cdot \frac{1}{2500000} dx + \right.$$

$$\left. \int_{2500000}^{2600000} x^2 \cdot \frac{3500000 - x}{1000000 \cdot 2500000} dx + \int_{2600000}^{3500000} 2600000^2 \cdot \frac{3500000 - x}{1000000 \cdot 2500000} dx \right]$$

$$E(S_A^2) = 187234973300$$

Finalmente, la varianza será entonces

$$Var(S_A) = 171658535500$$

Pero este cálculo es para cada póliza. Sabiendo que se tienen 1000 pólizas, la prima total será

$$\pi_A^{Total} = 1000 \cdot E(S_A) + 0{,}5 \cdot \sqrt{1000 \cdot Var(S_A)} = 131356526{,}20$$

Para la cartera B, se tienen dos mil pólizas cuya frecuencia es poisson limitada a dos. La intensidad en cambio es una Gamma con parámetros desconocidos. También se tiene una indemnización total limitada en un millón. Para encontrar las probabilidades de la frecuencia, utiliza la función de densidad. Esta es

$$Pr(N = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

n	$P(N = n)$
0	$e^{-0,15}$
1	$e^{-0,15} \cdot 0{,}15$
2	$1 - e^{-0,15} \cdot 1{,}15$

Entonces, se tienen los tres escenarios posibles. Si no ocurren siniestros, la densidad de la intensidad será nula. Si ocurre uno, su densidad será

$$f\left(x_1^B\right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}$$

En cambio, si ocurren dos siniestros será necesario calcular la convolución de estas dos distribuciones. Por propiedades de la Gamma, esto es igual a otra Gamma con dos veces el parámetro alpha.

$$f\left(x_1^B \cdot x_1^B\right) = \frac{1}{\Gamma(2\alpha)\beta^{2\alpha}} x^{2\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}$$

Además, se conoce la esperanza y el desvio de la distribución. Por lo que mediante el siguiente sistema de ecuaciones

$$E(X_B) = 300000 = \alpha \cdot \beta$$

$$\sigma^2(X_B) = 400000^2 = \alpha \cdot \beta^2$$

Se concluye que

$$\alpha = 0{,}5625 \quad \beta = 533333{,}33$$

Recordando que

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

Se puede calcular con el alpha correspondiente. Entonces, la esperanza será

$$E(S_B) = e^{-0,15} \cdot 0 + e^{-0,15} 0{,}15 \cdot \left[\int_0^{1000000} x \cdot f\left(x_1^B\right) dx + \int_{1000000}^\infty 1000000 \cdot f\left(x_1^B\right) dx\right]$$

$$+\left(1 - e^{-0,15} 1{,}15\right)\left[\int_0^{1000000} x \cdot f\left(x_1^B \cdot x_1^B\right) dx + \int_{1000000}^\infty 1000000 \cdot f\left(x_1^B \cdot x_1^B\right) dx\right]$$

$$= 39977{,}20952$$

Calculando el momento de orden dos permite obtener la varianza

$$Var(S_B) = 23038295030$$

Lo que permite concluir que

$$\pi_B^{Total} = 2000 \cdot E(S_B) + 0{,}5 \cdot \sqrt{2000 \cdot Var(S_B)} = 83348403$$

Finalmente, entonces

$$\pi_{Total} = \pi_A^{Total} + \pi_B^{Total} = 214704932{,}2$$

Pasando al segundo inciso, se dice que el total de la cartera tiene una distribución log-normal. Es por esto que se buscan el desvio y la media de esta distribución

$$\sigma = \sqrt{ln\left(\frac{E^2(S_{Total}) + Var(S_{Total})}{E^2(S_{Total})}\right)} = 0{,}07197082063$$

$$\mu = ln\left(\frac{E(S_{Total})}{e^{\frac{1}{2}\sigma^2}}\right) = 19{,}13475931$$

A partir de esto, se pueden encontrar las probabilidades deseadas. Empezando por la probabilidad de tener resultados negativos, esta será calculada como la probabilidad de que el logaritmo natural de las primas[5] sea menor a los siniestros.

$$P\left(ln(\pi) < S\right)$$

$$= P\left(\frac{ln(\pi) - \mu}{\sigma} < z\right) = P\left(0{,}69494 < S\right) = 0{,}24354418$$

Para la probabilidad de Ruina esto es idéntico, solo que agregando el capital. Este era un diez porciento de las primas, por lo que

$$P\left(\frac{ln(1{,}1\pi) - \mu}{\sigma} < z\right) = P\left(2{,}019236458 < S\right) = 0{,}02173132$$

Este número al que se le busco la probabilidad, es el coeficiente de seguridad. Finalmente, resta buscar el Valor a Riesgo. Este es un percentil dado un nivel de confianza, por que que

$$P\left(\frac{ln(VaR_{95\,\%}) - \mu}{\sigma} < z\right) = 0{,}05 \rightarrow VaR_{95\,\%} = 229896732$$

El último inciso introduce un contrato no proporcional al problema. Este es un XL con una prioridad de 300000 pero manteniendo el límite agregado a la póliza. Es por esto que se genera un inconveniente. Este XL será aplicado riesgo a riesgo, pero el agregado tendrá que considerar el límite. Entonces, en caso de que sucedan siniestros se debe poner un máximo según corresponda. Se puede ver que el límite solo se alcanza si suceden los dos riesgos. Empezando con la cartera A, la esperanza de lo cedido es

$$E\left(X_1^{Ced}\right) = \int_{300000}^{1000000} (x - 300000)\frac{1}{1000000}dx = 245000$$

[5]Esto se debe a que se trabaja bajo el supuesto de Log-Normal.

$$E\left(X_2^{Ced}\right) = \int_{300000}^{2500000} (x - 300000)\frac{1}{2500000}dx = 968000$$

Hasta ahora no se considera el límite ya que no hace falta. Sin embargo, cuando suceden los dos siniestros si se debe considerar. Es por esto que se discretiza cada distribución uniforme. De esta forma, se simplifica el problema. Para simplificar aún mas, se supondrá que primero ocurre el primer riesgo y posterior a esto ocurre el segundo. Por lo tanto, en caso de tener que ponerle un máximo a un siniestro, solo se modificará el riesgo dos. Empezando por el primero y eligiendo arbitrariamente 4 rangos

Rango	Valor Medio	Probabilidad	Valor Cedido
0-250000	125000	0.25	0
250000-500000	375000	0.25	75000
500000-750000	625000	0.25	325000
750000-1000000	875000	0.25	575000

Se observa que como los 4 rangos son equidistantes y se habla de una uniforme, estos serán equiprobables. Además, el Valor Cedido será sobre el Valor Medio. Para el segundo riesgo, se eligen 5 rangos también equidistantes, y se calcula el valor medio. La principal diferencia es que el valor cedido será calculado junto al primer riesgo

Rango	Valor Medio	Probabilidad
0-500000	250000	0.2
500000-1000000	750000	0.2
1000000-1500000	1250000	0.2
1500000-2000000	1750000	0.2
2000000-2500000	2250000	0.2

Entonces, se arma la siguiente tabla con la información del siniestro 1, el siniestro 2, el siniestro 2 maxeado y los siniestros cedidos final. Se recuerda que lo cedido se trabaja individualmente. Entonces

Siniestro 1	Siniestro 2	Siniestro 2 Maxeado	Siniestro Cedido
125000	250000	250000	0
125000	750000	750000	450000
125000	1250000	1250000	950000
125000	1750000	1750000	1450000
125000	2250000	2250000	1950000
375000	250000	250000	75000
375000	750000	750000	525000
375000	1250000	1250000	1025000
375000	1750000	1750000	1525000
375000	2250000	2250000	2000000
625000	250000	250000	325000
625000	750000	750000	775000
625000	1250000	1250000	1275000
625000	1750000	1750000	1775000
625000	2250000	1975000	2000000
875000	250000	250000	575000
875000	750000	750000	1025000
875000	1250000	1250000	1525000
875000	1750000	1725000	2000000
875000	2250000	1725000	2000000

Entonces, teniendo en cuenta que cada intervalo tiene probabilidad $0{,}2 \cdot 0{,}25$, la esperanza y la varianza sumado a lo previamente ya calculado

$$E\left(S_A^{Ced}\right) = 89483$$

$$Var\left(S_A^{Ced}\right) = 112323234400000$$

Para la siguiente cartera sucede similar. Mientras no ocurran dos riesgos no hay problema con el límite. Entonces se puede calcular sin la discretización.

$$E\left(x_1^{Ced}\right) = \int_{300000}^{1000000} (x-300000) f\left(x_1^B\right) dx + \int_{1000000}^{\infty} (1000000-300000) f\left(x_1^B\right) dx = 109356{,}0611$$

Entonces, para cuando suceden 2 riesgos se discretiza. El primer riesgo será independiente del segundo, por lo que

Rango	Valor Medio	Probabilidad	Valor Cedido
0-400000	200000	0.74758	0
400000-800000	600000	0.15432	300000
800000-1200000	1000000	0.05739	700000
1200000-1600000	1400000	0.02328	700000
1600000-	1800000	0.01743	700000

Para el segundo riesgo se plantean los mismos rangos, por lo que se tendrá las mismas probabilidades. Entonces, planteando la misma tabla que anteriormente, se puede llegar a los siniestros cedidos finales. Con esto mismo, se obtiene

$$E\left(S_B^{Ced}\right) = 190139$$

$$Var\left(S_B^{Ced}\right) = 7967268195$$

Finalmente, se tiene la varianza y la esperanza cedida. Sumando cada una se calcula la prima del contrato XL, obteniendo

$$Costo = E\left(S_{Total}^{ced}\right) + 0{,}35\sqrt{Var\left(S_{Total}^{ced}\right)} = 125557319{,}4$$

2. Medidas de Riesgo

2.1. Principales Criterios

Hasta ahora, lo que se analizó fueron los riesgos íntegramente caracterizados por su rango de valores posibles con sus correspondientes probabilidades. Principalmente, se centro el análisis en la esperanza y la varianza. Esto ya que se baso en el **Principio de Cálculo de Primas**. El mismo indica que la prima del riesgo individual como mínimo debe ser igual a lo que se espera que suceda con el siniestro X. Esto es

$$\pi(X) \geq E(X)$$

Lo que generalmente sucede, es que se plantea una relación del estilo

$$\pi(X) = E(X) + Recargos(X)$$

Se pueden dar diversas situaciones. La primera es la *Equivalencia*, donde la prima es igual a la esperanza

$$\pi(X) = E(X)$$

La segunda plantea un recargo sobre la esperanza en cierto nivel α_1, esta se denomina *Valor Esperado*

$$\pi(X) = E(X) + \alpha_1 E(X_1) = E(X)(1 + \alpha_1)$$

La tercera plantea un recargo sobre el *Desvió Estándar*

$$\pi(X) = E(X) + \alpha_2 \sigma(x)$$

O sobre la *Varianza*

$$\pi(X) = E(X) + \alpha_3 \sigma^2(x)$$

La quinta, se puede plantear que la prima sea igual a un cuantil que acumule cierta probabilidad ρ.

$$\pi(X) = VaR(X; \rho)$$

Finalmente, se plantea el *Principio de Utilidad Nula*. Este se basa en funciones de utilidad, e implica que la satisfacción entre algo incierto y algo cierto debe ser igual. Si se llama W al patrimonio,

$$u\left(E - \pi(X)\right) = E\left[u\left(E - \pi(X)\right)\right]$$

Esta función de utilidad debe ser creciente (derivada primera positiva) pero de forma decreciente (derivada segunda negativa lo que implica concavidad). Entonces, el coeficiente de aversión al riesgo será

$$CAR(z) = -\frac{u''(z)}{u'(z)}$$

Un caso particular de este principio, es la siguiente función de utilidad

$$u(z) = \frac{1 - e^{-\alpha \cdot z}}{\alpha} \quad \alpha > 0$$

Que se demuestra

$$\pi(X) = \frac{1}{\alpha} ln\left(E\left[e^{\alpha x}\right]\right)$$

Partiendo de la igualdad,

$$\frac{1-e^{-\alpha\cdot(W-\pi(x))}}{\alpha} = E\left[\frac{1-e^{-\alpha\cdot(W-\pi(x))}}{\alpha}\right]$$

Entonces, simplificando

$$e^{\alpha\cdot\pi} = E(e^{\alpha\cdot S})$$

Lo que es la función generatriz de momentos del lado derecho. Despejando la prima se llega a la expresión deseada.

Sin embargo, se puede ampliar este resumen de características en términos relativos y absolutos. A continuación se plantearan diversas medias de riesgo. La primera es la **probabilidad de resultados negativos**. Sin mas esto es

$$P(R < 0) = P(S > \pi)$$

Que se calculará dependiendo de la distribución de los siniestros.

La segunda medida es una que ya se mencionó, la **probabilidad de ruina**. Sea $P(u;k)$ la probabilidad de ruina para el año k según un capital inicial de u. Para el primer año

$$P(u;1) = P(S > u+\pi) = P(R < -u)$$

Se deduce a partir de acá, un coeficiente de seguridad tal que

$$u+\pi = E(S) + t\cdot\sigma(S) \rightarrow t = \frac{u+\pi-E(S)}{\sigma(S)}$$

Donde t es un valor estandarizado bajo hipótesis de distribución normal. En otras palabras, si se asume normalizad, se puede encontrar la probabilidad de ruina correspondiente.

Otra medida que puede ser de interés es el **valor esperado de resultados negativos**. Es decir, la esperanza de los resultados negativos. Esto implica que el argumento de la esperanza será cero o el exceso de los siniestros por encima de la prima.

$$E[-\text{mín}(0;R)] = E[\text{máx}(0;S-\pi)] = E[(S-\pi)_+]$$

Se destaca que la probabilidad sigue siendo la de la distribución de S, Esta no se modifica.

Se puede complementar la medida anterior con el **valor esperado del incumplimiento del asegurado**[6]. La misma es la esperanza de la probabilidad de ruina. Similar a antes,

$$E[-\text{mín}(0;R)] = E[\text{máx}(0;S-\pi-u)] = E[(S-\pi-u)_+]$$

Esta, se puede condicionar a que se este en la probabilidad de ruina. En otras palabras, la expresión de arriba probablemente de valores relativamente bajos ya que se calcula en base a las probabilidades totales de S. Pero condicionando a que se este en una probabilidad de ruina, lo que se puede esperar es

$$\frac{E[(S-\pi-u)_+]}{P(u;1)}$$

[6]También conocido como Expected Shortfall.

Agregando otra medida, una ya conocida es el **Valor a Riesgo**. Este es un percentil dado un nivel de confianza ρ, tal que

$$P(S \leq VaR(S;\rho)) = \rho$$

Que se puede expresar en función de la probabilidad de ruina eligiendo el nivel de confianza adecuado, como

$$\rho = \int_0^{u+\pi} f_s(x)dx = 1 - P(u;1)$$

Sin embargo, este criterio tiene una carencia fundamental que es no brindar información sobre los montos que pueden llegar a suceder. En otras palabras, se conoce que un valor x acumula ρ de probabilidad. Pero el exceso por encima de este valor no es conocido. Lo que implica que, una vez superado el Valor a Riesgo, se puede tener un monto muy superior al mismo, aun si se tuvo un nivel de confianza muy elevado. Es por esto que se calcula el **valor esperado del exceso del valor a riesgo**. Es mismo es la esperanza por encima del VaR

$$VEEVaR(S;\rho) = \int_{VaR(S;\rho)}^{\infty} [x - VaR(S;\rho)] f_s(x)dx$$

Que se puede expresar como

$$E\left[\text{máx}(0; S.VaR)\right] = E((S - VaR)_+)$$

Otra medida relacionada con el Valor a Riesgo, es el mismo pero condicionado a que se supere. Es decir, se quiere conocer lo que se puede esperar una vez superado el umbral del valor a riesgo. Esto se conoce como **Tail Value at Risk**

$$TVaR(S;\rho) = \frac{\int_{VaR(S;\rho)}^{\infty} x f_s(x)dx}{1-\rho}$$

O también calculable como

$$TVaR(S;\rho) = E\left[S; S \geq TVaR(S;\rho)\right] = \frac{E\left[\text{máx}(0;S)|S \geq VaR(S;\rho)\right]}{1-\rho}$$

Si se quiere obtener las relaciones entre las medidas expuestas, se observa que a partir del $TVaR(S;\rho)$ se puede expresar con la esperanza de los siniestros

$$TVaR(S;\rho) = \frac{\int_0^{\infty} x f_s(x)dx - \int_0^{VaR(S;\rho)} x f_s(x)dx}{1-\rho}$$

$$= \frac{E(S) - \int_0^{VaR(S;\rho)} x f_s(x)dx}{1-\rho}$$

Y sabiendo que la esperanza del mínimo entre los siniestros y el valor a riesgo

$$E\left[\text{mín}(S; VaR(S;\rho))\right] = \int_0^{\infty} \text{mín}\,(S; VaR(S;\rho) f_s(x)dx)$$

$$= \int_0^{VaR(S;\rho)} x f_s(x)dx + (1-\rho)VaR(S;\rho)$$

Si se despeja el término de la integral y se reemplaza en la expresión de arriba

$$TVaR(S;\rho) = \frac{E(S) - E\left[\text{mín}(S; VaR(S;\rho))\right] - (1-\rho)VaR(S;\rho)}{1-\rho}$$

Que es igual a

$$TVaR(S;\rho) = VaR(S;\rho) + \frac{E(S) - E\left[\text{mín}(S; VaR(S;\rho))\right]}{1-\rho}$$

2.2. Coherencia de las Medidas

Cuando se define una medida de riesgo, se esta hablando de una variable aleatoria X -el riesgo- a la que se le aplica una función $H(x)$ que la transforma, devolviendo un número real. Es decir

$$H : X \to R$$

Estas medidas suelen tener diversas propiedades que son deseadas, y son indicadores para saber que tan bueno es el criterio de riesgo a utilizar. La primera propiedad es la **Invarianza en la Traslación**

$$H(X + \alpha) = H(X) + \alpha$$

Esta propiedad indica que si a la variable aleatoria X se le suma una constante, la medida en cuestión solo se debe modificar según la constante. Esto se cumple en el caso de la esperanza pero no en el caso de la varianza.

$$E(X + \alpha) = E(X) + \alpha \quad Var(X + \alpha) = Var(X) + 0$$

La segunda propiedad es la **Homogenidad Positiva** para todo escalar α

$$H(\alpha \cdot X) = \alpha \cdot H(X)$$

Esto implica que el cambio en las unidades (por ejemplo, las monedas o las proporciones) no cambia la medida de riesgo. De nuevo, la esperanza lo cumple pero la varianza no

$$\alpha E(X) = \alpha E(X) \quad Var(X\alpha) = \alpha^2 Var(X)$$

La tercera propiedad es la **Subaditividad** para dos variables aleatorias X e Y

$$H(X + Y) \leq H(X) + H(Y)$$

Sin mas, la medida de riesgo aplicada en su conjunto para las dos variables no puede ser mayor a la medida de riesgo aplicada de forma individual. Con respecto a la esperanza y la varianza, se observa que

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \quad Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X; Y)$$

Finalmente, la **Monotonicidad** indica que si $X < Y$, entonces

$$H(X) \leq H(Y)$$

Que en el caso de la esperanza se verifica, pero la varianza no se puede comprobar ya que depende del rango de la variable y no de los valores que toma.

2.3. Teoría de Valores Extremos

Una medida de riesgo que puede ser de interés tiene que ver con los valores mas altos de una distribución. En estadística mas básica, lo que se suele utilizar para el cálculo de probabilidades es el *teorema central del límite*. Este teorema se fundamenta en que una serie de variables aleatorias idénticamente distribuidas e independientes, $\{X_1; X_2; ...; X_n\}$, con una función de distribución desconocida en su forma pero conocida en esperanza y varianza finita. Entonces, la media muestral se puede computar como

$$\bar{X} \xrightarrow{d} N\left(\mu; \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Es decir, en el promedio los datos tienden a comportarse como una normal. Entonces, el teorema central del límite se fundamenta en esto para argumentar que sea una suma de variables aleatorias

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Cuya esperanza total será $n \cdot \mu$ y cuyo desvio total será $\sqrt{n} \cdot \sigma$. Entonces

$$\frac{S_n - n \cdot \mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma} \sim N(0; 1)$$

Pero esta medida es certera dentro del promedio de valores. Cuando se quiere analizar la cola de la distribución, la misma pierde efectividad. Es por esto que se desarrolla la teoría de valores extremos[7]. Por ejemplo, si se desea conocer el valor máximo de una secuencia, se tendrá

$$M_n = \text{máx}\{X_1; X_2; ...; X_n\}$$

Es de interés entonces conocer el comportamiento de esta medida de riesgo. Utilizando el **Teorema de Fischer-Tippett-Gnedenko**, sea X_n una sucesión de variables aleatorias idénticamente distribuidas e independientes, y sea M_n el máximo de esa sucesión. Además, se definen dos constantes $a_n > 0$ y b_n. Se demuestra que la correcta normalización de esta variable da como resultado una distribución H.

$$\frac{M_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{d} H$$

Donde la distribución de H puede tomar 3 variaciones

$$H_\xi(x) = \begin{cases} exp\left(-(1 + \xi \cdot x)^{-\frac{1}{\xi}}\right) & \xi \neq 0 \\ exp\left(-e^{-x}\right) & \xi = 0 \end{cases}$$

Donde $1 + \xi \cdot x > 0$. A su vez, se observa que el parámetro ξ puede tomar 3 signos. Esto determinará la forma de la cola. Si $\xi < 0$, se obtendrá una distribución **Weibull**, la cual tiene una cola corta. Si $\xi = 0$, la distribución resultante será una **Gumbel**, la cual decae exponencialmente. Finalmente, si $\xi > 0$ se tendrá una **Fréchet**.

En definitiva se tendrán tres parámetros, a_n, b_n y ξ. Estos deben ser estimados de alguna forma. Lo mas común es por la Estimación Máximo Verosímil. Cada parámetro tendrá su respectiva interpretación. El a_n habla sobre la locación de la distribución, y que tan corrida esta la

[7]Este tema es muy amplio y en esta sección se dará una idea general del tema. Para mayor profundización ver otros documentos del autos.

misma. El b_n brinda información sobre la escala de esta. Finalmente, el ξ indica la forma de la distribución.

Otra medida de riesgo que puede ser de interés tiene que ver con la modelización de las pérdidas que excedan determinado umbral antes que exclusivamente el máximo. Este es el caso de un contrato XL, que define como relevante la prioridad. Para este segundo análisis, se utiliza la variante de **Peaks Over Threshold**. El mismo define un cuantil u, muy elevado, y su función de excedente

$$Y = [X - u | X \geq u]$$

Es decir, el exceso que tiene X por encima de u, dado que es mayor o igual al mismo. Por lo que la función de distribución condicionada para los valores que exceden este umbral,

$$F_u(y) = \frac{F(y+u) - F(u)}{1 - F(u)}$$

Para la gran mayoría de las distribuciones conocidas, esta función de exceso condicionada converge a una *distribución generalizada de pareto* a medida que se aumenta el umbral u. Dicha distribución acumulada es definida como

$$G_{\xi;\sigma}(y) = \begin{cases} \left(1 - (1 + \frac{\xi}{\sigma} \cdot y)^{-\frac{1}{\xi}}\right) & \xi \neq 0 \\ \left(1 - e^{-\frac{y}{\sigma}}\right) & \xi = 0 \end{cases}$$

La pregunta podrá ser entonces, como seleccionar este umbral u. El mismo puede ser elegido arbitrariamente como un cuantil, cuyo caso es habitual la selección del 95 %. O también puede ser encontrado mediante un correlato con la distribución. Sabiendo que la pareto generalizada es una linea recta con pendiente positivo, se puede ir aumentando el umbral hasta observar este comportamiento. Finalmente, una alternativa poco recomendada es estimar el umbral u como si fuese otro parámetro.

2.4. Ejercicios

Ejercicio 1:
Usted se encuentra analizando la cola de la distribución de una variable aleatoria mediante una Pareto Generalizada, la cual cuenta con las siguientes características: escala (σ) = 585; forma (ξ) = 0; umbral (μ) = 600. Los datos por encima del umbral representan el 5 % del total de los datos. Considerando un contrato de reaseguro de exceso de pérdida de 1000 xs 1000, se solicita calcular el valor esperado de los siniestros cedidos. Calcular el Valor a Riesgo para un 98 % de confianza.

Para comenzar, es de utilidad poder identificar que se esta analizando la cola de la distribución con el método de POT[8]. Entonces, lo que se debe analizar es la función de densidad de Pareto Generaliza, teniendo en cuenta que se tiene como variable aleatoria el exceso por encima del umbral. Esto quiere decir que la función ya esta condicionada a que se supero el umbral establecido. Por ende, se puede plantear partiendo de

$$Y = x - \mu$$

Se plantea como los ejercicios de Reaseguro. Esto quiere decir que se tendrá que integrar desde el dominio deseado de la función de densidad multiplicado al monto a pagar. La función de densidad será $g(Y)$ o bien $g(x - \mu)$, ya que son equivalentes. El monto a pagar comenzará en 1000, ya que menos de esto se hará cargo la prioridad. El mismo irá creciendo hasta los 2000 que se alcanza la capacidad contractual. Posterior a este valor, se integrará hasta infinito pero fijando el monto a pagar en el límite. Este monto, expresado en términos de la variable aleatoria Y será $Y - 400$, que surge de a la variable restarle la prioridad -ya que esto no se paga- pero sumarle el umbral -ya que se condiciona a superarlo-. Como se comienza pagando desde cero hasta mil, la integral debe acomodarse a estos valores. Es por esto que se integra desde 400 hasta 1400. Posterior a esto, el valor se fija en mil. Todo esto esta condicionado a que se supera el umbral. Pero si lo que se desea es ver la esperanza de los siniestros cedidos, se quiere analizar la esperanza sin condicionarse a que se supere el μ. Por lo tanto, se multiplica por la probabilidad de estar por encima del mismo. Esto ya que el condicionamiento se piensa como Bayes, donde se divide por la probabilidad de estar en tal zona. Esto es

$$E\left[S^{cedido}\right] = \left[\int_{400}^{1400} (y - 400)g(y)dy + \int_{1400}^{\infty} 1000g(y)dy\right] \cdot 0{,}05$$

El mismo análisis puede ser hecho con la variable X

$$E\left[S^{cedido}\right] = \left[\int_{1000}^{2000} (x - 1000)g(x - 600)dx + \int_{2000}^{\infty} 1000g(x - 600)dx\right] \cdot 0{,}05$$

La función de densidad ahora será reemplazada por la misma pero con una variable $x - 600$, y el monto a pagar será la variable x neta de la prioridad. A su vez, se acomodan los límites de la integral. El resultado de esta integral es 12,09.

Para en contar el $VaR_{98\,\%}$, se puede plantear su definición.

$$P\left[X \le x\right] = 0{,}98$$

[8] Peaks Over Thresholds.

Conociendo que todos los datos por debajo del umbral acumulan el 95 %, se puede separar la probabilidad según esto

$$\underbrace{P[X \leq \mu]}_{0{,}95} + \underbrace{P[X \geq \mu]}_{0{,}05} \cdot G(VaR_{98\,\%} - \mu) = 0{,}98$$

Es decir, la probabilidad de que la variable se encuentre por debajo del umbral mas la probabilidad que lo supere multiplicado a que llegue solo a acumular el 98 %. Esto es,

$$\frac{0{,}98 - 0{,}95}{0{,}05} = 0{,}6 = G(VaR_{98\,\%} - \mu)$$

Por lo que

$$G_{0;585}(y) = 1 - e^{-\frac{y}{585}} = 0{,}6$$

Se debe despejar la variable Y para posterior a esto despejar el Valor a Riesgo.

$$Y = 536{,}03 \rightarrow X = 1136{,}03$$

Ejercicio 2:
Para cotizar un Reaseguro XL se intentó modelizar la cola del riesgo a través de una distribución generalizada de Pareto. Suponga que el modelo escogido cuenta con parámetros $\sigma = 450$; $\xi = 0,3$; $\mu = 1500$; y que hay 173455 valores que superan umbral seleccionado sobre 5781833 valores totales de la muestra tomada. La compañía desea saber cuál es la máxima pérdida potencial del riesgo en cuestión, con una confianza del 99 %.

Lo primero que se puede conocer, es el porcentaje de datos que se encuentran por encima del umbral. Este se calcula sin mas como

$$\frac{173455}{5781833} = 0{,}03$$

Entonces, se puede plantear la probabilidad como

$$\underbrace{P[X \leq \mu]}_{0{,}97} + \underbrace{P[X \geq \mu]}_{0{,}03} \cdot G(VaR_{99\,\%} - \mu) = 0{,}99$$

Entonces,

$$\frac{0{,}99 - 0{,}97}{0{,}03} = \frac{2}{3} = 1 - \left(1 + \frac{0{,}3}{450} \cdot y\right)^{-\frac{1}{0{,}3}}$$

Por lo que

$$Y = 585{,}5837 \rightarrow X = 2085{,}5837$$

Ejercicio 3:
Una compañía de seguros tiene los siguientes dos riesgos

Riesgo 1

x	$P(X = x)$
0	0.6
1000	0.18
2000	0.22

Riesgo 2

x	$P(X = x)$
0	0.5
1000	0.35
3000	0.15

Sabiendo que las primas se calculan como la esperanza adicional a un recargo del 30 % sobre el desvio, y que el capital es el 30 % de las primas, se pide hallar la probabilidad de resultados negativos, la probabilidad de ruina, el valor esperado de los resultados negativos, el valor esperado del incumplimiento del asegurador, el valor a riesgo con una confianza del 95 % y el TVaR para la misma confianza.

Lo primero que se debe encontrar es la distribución total de la cartera. Para esto, se comienza haciendo la convolución

x	$P(X = x)$
0	0.3
1000	0.3
2000	0.173
3000	0.167
4000	0.027
5000	0.033

Entonces, a partir de esta distribución se puede encontrar lo necesario. Comenzando con las primas y el capital,

$$\pi = E(S) + 0{,}3 \cdot \sigma(S) \quad u = 0{,}3 \cdot E(S)$$

Por lo que, si se realizan los cálculos se puede ver que

$$E(S) = 1420 \quad \sigma(S) = 1317{,}42$$

Concluyendo que

$$\pi = E(S) + 0{,}3 \cdot \sigma(S) = 1815{,}22 \quad u = 0{,}3 \cdot E(S) = 544{,}567955$$

Entonces, comenzando con los criterios se van a desarrollar de forma individual. El primero busca que los siniestros sean mayor a la prima. Esto sería

$$P(S > \pi)$$

Sabiendo que la prima es mayor a mil pero menor a dos mil, con que los siniestros valgan dos mil o más, se tendrá resultados negativos. Por ende, para calcular esta probabilidad se debe sumar todas las probabilidades de que los siniestros sean dos mil o más

$$P(S > \pi) = P(S = 2000) + P(S = 3000) + P(S = 4000) + P(S = 5000) = 0{,}4$$

El siguiente criterio es similar, ya que la única diferencia tiene que ver con que se busca la probabilidad de que los siniestros sean superiores a la prima mas el capital. De forma similar, se suman las probabilidades de que los siniestros sean mayores o iguales a tres mil.

$$P(S > \pi + u) = P(S = 3000) + P(S = 4000) + P(S = 5000) = 0{,}227$$

Si se desea el valor esperado de los resultados negativos, se plantea la esperanza de la variable aleatoria Resultado Negativo”. Esta variable aleatoria es calculada como el máximo entre cero o el resultado negativo (la diferencia entre los siniestros y la prima, con S mayor a π). Es de ayuda plantear la tabla con esta variable aleatoria

$\text{máx}(0; S - \pi)$	$P(X = x)$
0	0.3
0	0.3
184.74	0.173
1184.74	0.167
2184.74	0.027
3184.74	0.033

Entonces, la esperanza de esta variable aleatoria es 393.909. Similar sucede con el valor esperado del incumplimiento por parte del asegurador. Se plantea la variable aleatoria ”Monto de Ruina”, que será el máximo entre cero y la diferencia de los siniestros con respecto al capital y la prima. Esto es

$\text{máx}(0; S - \pi - u)$	$P(X = x)$
0	0.3
0	0.3
0	0.173
640.214	0.167
1640.214	0.027
2640.214	0.033

La esperanza de esta variable aleatoria es 238.33. Finalmente, solo resta calcular el valor a riesgo y el valor a riesgo condicional. Para el primero, es necesario plantear la función de distribución acumulada.

x	$P(X = x)$	
0	0.3	0.3
1000	0.3	0.6
2000	0.173	0.773
3000	0.167	0.94
4000	0.027	0.967
5000	0.033	1

Entonces, si se quiere el valor a riesgo al 95 %, sin ms se tiene que ver que cuantil alcanza esta probabilidad. Se observa que el 3000 no la alcanza ya que le falta 0.01. Por ende, es el siguiente

$$VaR_{95\,\%} = 4000$$

Para el valor a riesgo condicionado, se dividirá por la probabilidad de estar en la cola (0.05) y se calculará la esperanza de los valores que lo superan. Una cuestión fundamental es que una parte de los 4000 supera este 95 %. Esto quiere decir que, el cuantil de 4000 agrega una probabilidad de 0.027 al total. Pero para llegar al 0.95 solo hace falta un 0.01. Entonces, el exceso se debe cuantificar en los valores que excedan al valor a riesgo. Por lo que, se tomará este valor con una probabilidad de $0{,}967 - 0{,}95$.

$$TVaR_{95\,\%} = \frac{4000 \cdot (0{,}967 - 0{,}95) + 5000 \cdot 0{,}033}{0{,}05} = 4660$$

3. Simulación Estocástica

En esta sección se analizará otro enfoque a los problemas ya analizados. Existen escenarios donde la complejidad excede a los procedimientos analíticos, y estos dejan de ser prácticos. Por ejemplo, si se desea un Valor a Riesgo de una cartera S que se conforma con la suma de dos riesgos X_1 y X_2, donde el primero se distribuye Log-Normal y el segundo Gamma. La resolución analítica requiere de la convolución de estas dos variables. Sin embargo, si se tiene un programa computacional se puede solucionar de otra forma mas sencilla. Lógicamente, al utilizar este método se tendrá algunas desventajas. La principal de estas es la precisión ya que se requiere una cantidad de datos muy grande para que esta sea precisa.

El planteo base de la simulación se basa en la *distribución acumulada*.

$$P(X \leq x) = F(x)$$

Esta brinda el valor de acumulado de la probabilidad hasta cierto argumento x. Entonces, si se genera un número aleatorio en un rango de cero a uno equi-probable, se puede corresponder con la probabilidad dada de cierto valor de x para alguna función de distribución. Que el número aleatorio, denominado u, sea equi-probable significa que su distribución será uniforme en el rango expuesto

$$u \sim U[0; 1]$$

Esto deberá ser comprobado con un análisis exhaustivo de los datos. Esto quiere decir, realizar los test de bondad de ajuste correspondiente. Esto puede ser por el Test de Kolmogorov Smirnov, que compara una distribución presupuesta (uniforme) con la empírica (la simulada). Los valores críticos para $n > 50$son

Nivel de Significancia	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01	0.005	0.002	0.001
Valor Crítico	$\frac{1,07}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,22}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,36}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,52}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,63}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,73}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,85}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,95}{\sqrt{n}}$

Otra análisis necesario es ver la correlación entre los números aleatorios. Como son equi-probables, no debería observarse ninguna correlación entre los u simulados. Hoy en día, los números aleatorios se generan a partir de tablas predeterminadas con secuencias de números determinadas aleatoriamente. Lo que significa que en realidad son números pseudo-aleatorios. Entonces si se asigna este valor generado de u a la función de distribución,

$$u = F(x) \rightarrow x = F^{-1}(u)$$

Deduciendo este valor de x, se tiene el argumento en cuestión. Esto tendrá cierta frecuencia dada según la función $F(x)$ que se este utilizando. Entonces, si se repite este proceso n veces, para un n tendiendo a infinito, se tendrá una representación certera del comportamiento de la probabilidad. Esto se podrá observar con *histograma*.

Teniendo ya muchos valores de x, se puede aplicar el contrato de reaseguro o calcular lo deseado. Esto implica aplicar el Exceso de Pérdida a cada x, el Stop Loss al total de los siniestros, el Cuota Parte a cada x o calcular la medida de riesgo deseada.

Otra herramienta que se utiliza en relación a la simulación es la **Discretización de Variables Continuas**. Esta opción permite trabajar con una variable continua de forma discreta, a costa de perder precisión. Esto quiere decir que se crean rangos de la variable aleatoria continua para todo el dominio de esta, y se calcula la probabilidad de este rango. Por ejemplo, sea una exponencial

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta} \quad 0 \leq x < \infty$$

Entonces, conformando rangos arbitrarios de 50[9] se conforma la siguiente tabla

Rango	Probabilidad
0-50	$\int_{0}^{50} \frac{e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta}$
50-100	$\int_{50}^{100} \frac{e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta}$
100-150	$\int_{100}^{150} \frac{e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta}$
150-200	$\int_{150}^{100} \frac{e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta}$
200-250	$\int_{200}^{250} \frac{e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta}$
...	...

Lógicamente, como el dominio de la función va hasta infinito se tendrá que frenar en cierto valor k elegido. Por ende, la probabilidad de este último rango (de k hasta infinito) será la correspondiente a que haga que se cumpla la ley de cierre

$$\int_{k}^{\infty} \frac{e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta} = 1 - \int_{0}^{k} \frac{e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta}$$

En base a esto, se puede discretizar dos variables continuas y realizar su convolución de forma sencilla.

[9] A menor sea el rango, mas parecido será a una continua y por ende mas preciso será

4. Probabilidad de Ruina

En esta sección se profundizará en el estudio sobre la probabilidad de ruina. Hasta ahora, solo se enfocó en el caso de que la compañía de seguros quiebre en el primer año. Pero puede darse el caso en que se quiera analizar la solvencia a largo plazo. En sus aspectos tradicionales, sujetos a la capacidad de cálculo, el análisis de la Probabilidad de Ruina se define como un proceso estocástico de la evolución del patrimonio neto del asegurador ("Capital propio" o "Reserva"), que periódicamente se incrementa por las primas para el riesgo (primas netas de gastos y destinada exclusivamente a siniestros) y se reduce por el monto de los siniestros ocurridos (y gastos directos asociados a éstos). Esto quiere decir que el fondo disponible en un periodo t, depende de lo que suceda en el periodo anterior. Genéricamente, si se define a los recursos disponibles como U, se tendrá que

$$U_t = U_{t-1} + \pi_t - S_{t-1}$$

Es decir, los recursos disponibles previos sumados al ingreso de primas pero netos del pago de siniestros ocurridos previamente. En sus aspectos modernos, el planteo se halla integrado al conjunto de la actividad aseguradora, considerado al patrimonio neto como un proceso estocástico, incluyendo además entre otros aspectos los factores de desarrollo de pago de siniestros y sus reservas por siniestros pendientes, las inversiones y sus resultados tanto de capital propio como del originado en reservas de primas y de siniestros, primas en general, gastos, políticas de reaseguro, aspectos tributarios, aportes de capital, pago de dividendos. En la actualidad estos planteos se denominan en general como *Análisis Patrimonial Dinámico*. Esto será un tema a desarrollar a posterior.

Comenzando con el planteo base, se define una cuestión lógica e intuitiva que es la **barrera absorbente**. Esto quiere decir que para que haya alguna probabilidad de ruina no nula en un año t, se tiene que haber sobrevivido los años anteriores. Esto tiene sentido ya que no se puede considerar una probabilidad de que una compañía quiebre en el año t si ya quebró en el año anterior. La segunda cuestión a definir es el **resultado periódico**. El del primer año será simplemente los ingresos menos los egresos

$$R = \pi - S$$

En términos de esperanza

$$E(R) = \pi - E(S)$$

Se puede deducir entonces la función de distribución del resultado periódico como

$$G(x) = P(R < x) = P(S > \pi + x)$$

Esta se asume continua y diferenciable. Entonces, se puede ver que la probabilidad de que el resultado del primer periodo sea menor que la reserva inicial con signo negativo, o sea que los siniestros sobrepasen la suma de la reserva mas la prima

$$P(u; 1) = P(R < -u) = P(S > u + \pi) = G(-u)$$

Esto será dentro del primer año. Sin embargo, para los años siguientes esto cambia. Se quiere la probabilidad de que la compañía quiebre en los dos primeros años. Esto será la probabilidad de quiebra del año anterior en adición a la probabilidad de quiebra del año siguiente condicionado a la supervivencia del uno y considerando el nivel de siniestros que se tuvieron. Es decir, si el año 1 se parte de un capital u y una prima anual π, sabiendo que hubo supervivencia, los recursos disponibles serán

$$u + \pi - S_i^{(1)}$$

Para todo i posible que haga que $S \leq u + \pi$. Este segundo año también tendrá un ingreso de prima anual pero egresos por los siniestros. Entonces, si se quiere siniestros que superen el monto disponible,

$$P(u;2) = P(u;1) + \sum_{y=0}^{\pi+u} P(S = y)P[u + \pi - y; 1]$$

Lo que se interpreta como la probabilidad de ruina del primer año, adicional a la suma ponderada de probabilidad de ruina del siguiente año por cada escancio posible de siniestro que haga que ocurra el evento. Genéricamente

$$P(u;n) = P(u;1) + \sum_{y=0}^{\pi+u} P(S = y)P[u + \pi - y; n - 1]$$

Analizando lo desarrollado con un ejemplo numérico, sea $u = 50$, $\pi = 150$ y la siguiente distribución de siniestros

S	$P(S = s)$
0	0.4
100	0.3
200	0.2
300	0.1

Sabiendo que los recursos disponibles del momento uno son 200 (primas mas capital), la única forma de quebrar es si los siniestros son mayores a este monto. El único escenario posible es que haya siniestros por 300, con probabilidad del 10 %. Esta será la probabilidad de ruina del año 1. Para la del siguiente año, se debe considerar todos los caminos posibles de supervivencia. Esto es que hayan habido cero siniestros, por monto de 100 o por monto de 200. Entonces, dependiendo de esto se tendrán distintos niveles de recursos disponibles. En el primer escenario mencionado se tendrá

$$\begin{aligned} U_1 &= \underbrace{u + \pi}_{U_0} + \pi - S \\ &= 50 + 150 + 150 - 0 = 350 \end{aligned}$$

Este escenario no ‘puede generar ruina ya que los máximos siniestros posibles son por 300. Es por esto que esta situación no tiene ruina. La siguiente variante es el escenario en el que hayan ocurrido siniestros pos 100 en el momento uno. Esto genera

$$U_1 50 + 150 + 150 - 100 = 250$$

Entonces, solo se puede generar ruina bajo la probabilidad de que sucedan siniestros por 300 (0,1) sabiendo que la probabilidad de haber tenido siniestros por 100 antes fue de 0,3. En definitiva, la probabilidad de este evento es de 0,03. Finalmente, en el caso de que hubiesen siniestros por 200,

$$U_1 50 + 150 + 150 - 200 = 150$$

En este escenario, solo se genera la ruina si hay siniestros por 200 (0,2) y por 300 (0,1). Devolviendo una probabilidad de 0,04 y 0,02 total. En definitiva, la probabilidad de ruina se dará por la suma de todos estos eventos.

Lo que se puede demostrar es que esta probabilidad de ruina es creciente pero de forma desacelerada. Esto implica que se puede encontrar una Cota de la Probabilidad, en base a la desigualdad de *Lundberg-Cramer*. Esta es

$$P(u) \leq e^{-r \cdot u}$$

Donde r es la solución no trivial (no nula) de la ecuación

$$-r \cdot \pi + ln\left[M(S\,; r)\right] =$$

Esta Cota quiere decir que como máximo, la probabilidad de ruina a largo plazo puede tomar este valor. No implica que lo vaya a ser ya que no es un valor tendencial. Pero es límite que se puede verificar. Si se realiza una simplificación con el tiempo discreto, se puede ver que

$$r = 2 \cdot \frac{\pi - E(S)}{Var(S)}$$

4.1. Ejercicios

Ejercicio 1:
SIC Generales posee una cartera de combinado familiar con 5 asegurados y estima que la probabilidad de ocurrencia de un siniestro es del 10 %. A su vez, para el caso en que ocurra el siniestro, dadas las condiciones de póliza y las sumas aseguradas, enfrentará un escenario dicotómico para la intensidad: 10.000;25.000,30 %;70 % siendo los primeros los montos de indemnización y los segundos las probabilidades de los mismos. La prima se calcula como el valor esperado de los siniestros con un adicional del 15 % del desvío de la cartera. La aseguradora cuenta con un capital de 50.000.

a. Calcular el coeficiente de ajuste en tiempo continuo y discreto, y una cota de probabilidad de ruina. Utilice Newton-Raphson como método de aproximación con 3 iteraciones, siendo la primera $r_0 = 2 \cdot 10^{-5}$

b. Si se aplicara un deducible del 25 %, siendo el mínimo de 5.000, ¿cómo se modificaría la cota de tiempo continuo? La prima se modifica.

c. Si se aplicara un QS 90/10, calcular la cota de probabilidad de ruina en el largo plazo.

Para comenzar se puede identificar que la cantidad de asegurados es 5 (n), la probabilidad de ocurrencia es 0,1 (q), la intensidad se distribuye según una distribución discreta, que el capital es de 50000 (u) y que la prima se calcula en base al resultado de

$$\pi = E(S) + 0{,}15 \cdot \sigma(S)$$

Por ende, para comenzar con el ejercicio se buscará calcular la prima. Calculando la esperanza y varianza de la frecuencia

$$E(N) = 5 \cdot 0{,}1 = 0{,}5$$

$$Var(N) = 5 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 0{,}45$$

Y por el lado de la intensidad

$$E(X) = 0{,}3 \cdot 10000 + 0{,}7 \cdot 25000 = 20500$$

$$Var(X) = 0{,}3 \cdot 10000^2 + 0{,}7 \cdot 25000^2 - 20500^2 = 47250000$$

Por lo que, utilizando las formulas ya conocidas

$$E(S) = 10250$$

$$Var(S) = 212737500$$

Concluyendo entonces que

$$\pi = 12437{,}82$$

Conociendo esto, se puede calcular el coeficiente de ajuste discreto como

$$r_d = 2 \cdot \frac{12437{,}83 - 10250}{212737500} = 2{,}056835 \cdot 10^{-5}$$

Por lo que la cota será de

$$P(u) = e^{-2{,}056835 \cdot 10^{-5} \cdot 50000} = 0{,}3575723174$$

En el caso de querer analizar el tiempo continuo se debe despejar r de

$$-r \cdot \pi + ln\left[M(S;r)\right] =$$

Para esto, utilizamos la propiedad de que

$$ln\left[M_S(r)\right] = ln\left[M_N\left(M_X(r)\right)\right]$$

Si la frecuencia se distribuye como binomial, se tendrá que

$$M_N(t) = \left(q + p \cdot e^t\right)^n$$

Pero sabiendo que en vez de t tendrá como argumento la función generatriz de momentos de la intensidad. Esta, al ser una tabulada será calculada por definición

$$M_X(r) = \sum_{\forall X} Pr(X = x)e^{r \cdot x}$$

$$= 0{,}3 \cdot e^{10000 \cdot r} + 0{,}7 \cdot e^{25000 \cdot r}$$

Entonces,

$$ln\left[M_N\left(M_X(r)\right)\right] = ln\left[\left(0{,}9 + 0{,}1 \cdot e^{0{,}3 \cdot e^{10000 \cdot r} + 0{,}7 \cdot e^{25000 \cdot r}}\right)^5\right]$$

$$= 5 \cdot ln\left[0{,}9 + 0{,}1\left(0{,}3 \cdot e^{10000r} + 0{,}7 \cdot e^{25000r}\right)\right]$$

Entonces, la función base sobre la cual despejar r queda como

$$H(r) = -12437{,}83 \cdot r + 5 \cdot ln\left[0{,}9 + 0{,}1\left(0{,}3 \cdot e^{10000r} + 0{,}7 \cdot e^{25000r}\right)\right] = 0$$

Y como pide calcular por el método de Newton Raphson, se necesita su derivada. Esta será

$$H'_r = -12437{,}83 + 5\frac{0{,}1\left(0{,}3 \cdot 10000 \cdot e^{10000}r + 0{,}7 \cdot 25000 \cdot e^{25000r}\right)}{0{,}9 + 0{,}1\left(0{,}3 \cdot 10000 \cdot e^{10000}r + 0{,}7 \cdot 25000 \cdot e^{25000r}\right)}$$

Entonces, sabiendo que

$$r_t = r_{t-1} - \frac{H(r_{t-1})}{H'(r_{t-1})}$$

Por lo que

$$r_1 = 0{,}00001835591532$$

Y

$$r_2 = 1{,}8339225881 \cdot 10^{-5}$$

Que a una cota de

$$P(u) \leq e^{-u \cdot r_2} = 0{,}3997312069$$

Mas adelante se pide volver a calcular la cota bajo un contrato QS con 90 % de retención. Entonces, se demuestra que si se utiliza primas y siniestros retenidos

$$-\pi_{ret} \cdot r_{ret} + ln\left[M_{S_{ret}}(r_{ret})\right] =$$

$$-\pi \cdot \alpha \cdot r_{ret} + ln\left[M_{S \cdot \alpha}(r_{ret})\right] =$$

Que por propiedad de FGM

$$-\pi(\alpha \cdot r_{ret}) + ln\left[M_S(\alpha \cdot r_{ret})\right]$$

Que es el mismo despeje que ya se realizó solo que la incógnita será $\alpha \cdot r_{ret}$ en vez de r. Por ende

$$r = \alpha \cdot r_{ret} \rightarrow r_{ret} = \frac{r}{\alpha}$$

Lo que permite concluir que la cota nueva será calculada como

$$cota_{QS} = cota^{-\alpha^{-1}} = 0{,}361010689$$

Para el caso en el que exista un deducible, la nueva esperanza de la intensidad retenida será de

$$E(X_{ret}) = 5000 \cdot 0{,}3 + 18750 \cdot 0{,}7 = 14625$$

$$Var(X_{ret}) = 5000^2 \cdot 0{,}3 + 18750^2 \cdot 0{,}7 - 14625^2 = 39703125$$

Entonces,

$$E(S_{ret}) = 7312{,}5 \quad Var(S_{ret}) = 116102343{,}8 \quad \pi_{ret} = 8928{,}76$$

Por lo que, calculando el r de forma continua

$$-8928{,}76r + 5ln\left[0{,}9 + 0{,}1\left(0{,}3e^{5000r} + 0{,}7e^{18750r}\right)\right] =$$

$$r = 2{,}44911846 \cdot 10^{-5}$$

Dando una cota de 0,2938872084.

Ejercicio 2:
MJM Seguros cuenta con una cartera de RC de terceros completo que, dada las condiciones de póliza, se puede modelar de forma tabular. La probabilidad de ocurrencia de un siniestro es del 30 %, y en caso de ocurrir, podrá tomar los valores $\{1{,}000; 3{,}000; 5{,}000\}$ con probabilidades $\{50\,\%; 33,3\,\%; 16,6\,\%\}$. Por su parte, Las primas se calculan como el valor esperado de los siniestros con un adicional del 50 % del desvío y el capital de la aseguradora es del 20 % de la prima. ¿Qué valor tomarán la probabilidad de ruina teniendo en cuenta tres periodos?

Al tener una distribución tabulada de cuantía, es mas sencillo el plantear la distribución de la cartera S para encontrar la prima y el capital. Para esto

S	$Pr(S = s)$
0	0.7
1000	0.15
3000	0.1
5000	0.05

Entonces, la esperanza de esta cartera será

$$E(S) = 700$$

Y también

$$Var(S) = 1810000$$

Por lo que, la prima, el capital y la totalidad de recursos disponibles serán

$$\pi = 1372,68 \quad K_0 = 274,54 \quad u_0 = 1647,22$$

Entonces, la probabilidad de ruina será el resultado de un gran camino de de posibilidades. La primera de estas es analizar que la compañía quiebre en el primer año, lo cual solo se dará si los siniestros son mayores a u_0. Al tener una distribución discreta, esto solo ocurre cuando S toma valores por 300 (con probabilidad 0,1) o por 5000 (con probabilidad 0,05). Por ende,

$$P(1; u_0) = 0{,}1 + 0{,}05 = 0{,}15$$

Para el segundo año, se puede partir de dos escenarios. Como base se sabe que no hubo ruina en el año anterior, por lo que o se tuvo siniestros por 0 o por 1000. Se comenzará analizando el primero de estos, el cual parte de una probabilidad de 0,7. En este caso, se debe restar el pago de las indemnizaciones (0) y sumar las primas cobradas (1372,67). Esto resulta en

$$u_1 = u_0 + 1372{,}67 - 0 = 3019, 90$$

Con estos recursos disponibles, solo se tiene ruina si los siniestros toman el valor de 5000 (probabilidad de 0,05). Esto termina siendo una probabilidad final de

$$0{,}05 \cdot 0{,}1 = 0{,}005$$

El otro escenario es que en el primer año ocurrieron siniestros por 1000, con una probabilidad implícita de 0,15. Entonces, restando los siniestros a pagar y sumando las primas

$$u_1 = u_0 + 1372{,}67 - 1000 = 2019, 90$$

En este caso, la ruina sucederá en casos de que haya siniestros por 3000 o por 5000. Cada uno tiene probabilidades de 0,1 y 0,05 respectivamente. Por lo que, las probabilidades finales de este escenario terminan siendo

$$0{,}15 \cdot 0{,}1 + 0{,}15 \cdot 0{,}05 = 0{,}0225$$

Para conocer la probabilidad de ruina del tercer año, se analizan todas las posibilidades que hay para llegar al mismo sin ruina. Estas son que en el primer año (i) haya 0 siniestros y 0 en el segundo, (ii) 0 en el primero y 1000 en el segundo,(iii) que haya 0 en el primero y 3000 en el segundo, (iv) 1000 en el primero y 0 en el segundo y (v) 1000 en el primero y 1000 en el segundo. En cada uno se calcula los recursos disponibles

Escenario	*Recursos*	*Probabilidad*
(i)	$u_2 = u_0 - 0 + 1372,68 - 0 + 1372,68 = 4392,58$	$0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}49$
(ii)	$u_2 = u_0 - 0 + 1372,68 - 1000 + 1372,68 = 3392,58$	$0{,}7 \cdot 0{,}15 = 0{,}105$
(iii)	$u_2 = u_0 - 0 + 1372,68 - 3000 + 1372,68 = 1392,58$	$0{,}7 \cdot 0{,}1 = 0{,}07$
(iv)	$u_2 = u_0 - 1000 + 1372,68 - 0 + 1372,68 = 3392,58$	$0{,}15 \cdot 0{,}7 = 0{,}105$
(v)	$u_2 = u_0 - 1000 + 1372,68 - 1000 + 1372,68 = 2392,58$	$0{,}15 \cdot 0{,}15 = 0{,}0225$

Por ende, en (i), (ii) y en (iv) se quiebra con siniestros de 5000 (probabilidad de 0,05) y en (iii) y en (v) se quiebra con siniestros por 3000 o por 5000 (probabilidad de $0{,}1 + 0{,}05$). Multiplicando cada probabilidad por estas, se tiene la probabilidad de que la ruina suceda en este año. En definitiva, la probabilidad de ruina final

$$P(u_0; 3) = 0{,}15 + 0{,}0575 + 0{,}048875 = 0{,}256375$$

5. Análisis Patrimonial Dinámico

Para finalizar el presente documento, se realizará un análisis transversal a la empresa recompilando todo lo desarrollado hasta el momento. Este tiene como objetivo presentar al patrimonio neto como una variable aleatoria, al ser incierto. En base a esto, se podrá analizar cada componente y la interacción con los demás. Para la presentación del tema se utilizarán hipótesis meramente ilustrativas que simplifican el análisis. Se partirá de la base que el Activo en el periodo t (A_t) representará las inversiones de la empresa, mientras que el Pasivo en el mismo periodo (P_t) representará los siniestros pendientes de pagos. Es decir, se piensa como la Reserva Riesgo en Curso. La diferencia dará como resultado el Patrimonio Neto

$$PN_t = A_t - P_t$$

Esta es una formula de cálculo por Stock. Existe otra forma que puede ser considerada como un Flujo.

$$U(t+1) = U(t)+\pi(t,t+1)-S(t,t+1)-G(t,t+1)+I(t,t+1)-Ig(t,t+1)+Ap(t,t+1)-D(t,t+1)$$

Donde π son las primas cobradas, S los siniestros, G los gastos, I los resultados de las inversiones, Ig los impuestos a las renta que haya, Ap los aportes de capital hechos y D los dividendos. Todas estas variables en flujo, desde t hasta $t + 1$. Si bien hasta ahora solo se modelizó la intensidad y la frecuencia de los siniestros, se podrá agregar a los otros conceptos como variables aleatorias. Esto requiere que haya hipótesis de comportamiento. Las mismas pueden ser tratadas con su respectivo valor esperado o sumando algún recargo de seguridad. Aunque lo mas común suele ser que se hagan diversas simulaciones de estas cuentas.

A su vez, se puede ver que la variación del patrimonio neto brinda resultados. El primer a analizar es el Técnico, que tiene que ver con el ingreso por primar y el egreso por parte de siniestros[10] y gastos.

$$RT(t,t+1) = \pi(t,t+1) - S(t,t+1) - G(t,t+1)$$

El otro resultado es el financiero. Este tiene que ver con la rentabilidad generada en el periodo debido a rentas financieras. En un esquema base, se plantea la capitalización del activo durante todo el periodo, se restan los egresos capitalizados desde el momento que suceden hasta el final del periodo y se suman los ingresos capitalizados desde el momento que suceden hasta el final del periodo.

$$RF(t,t+1) = I(t,t+1)$$

Estos resultados serán analizados a través del tiempo, suponiendo la continuidad de los riesgos y de la empresa. Es decir, se analiza un esquema de *Run Off*. Sin embargo, se abre la posibilidad de hacer el análisis en *Cut Off*. Pero que se haga a través del tiempo permite observar que riesgo es el que mas perjudicará a la empresa. Esto es la herramienta de *Control Dinámico*, que permite realizar procesos de optimización sobre la toma de decisiones conociendo no solo el valor esperado de cada variables, si no también su posible fluctuación.

Es importante aclarar que el mismo se basa en la retroalimentación. En un diagrama esto implica

[10]Esto tiene que ver con los totales, no solo los pagados en el periodo

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Hipótesis} & \longrightarrow & \text{Análisis} & \longrightarrow & \text{Resultados} & \longrightarrow & \text{Control Ex-Post} \\ & \longleftarrow & & & & & \end{array}$$

Es decir, se parte de un comportamiento presupuesto como cierto. Al realizar el análisis (ya sea en forma analítica o con simulaciones), se obtendrán los resultados. Los mismos deben ser controlados empíricamente a ver si el comportamiento observado se corresponde al presupuesto. De no ser así, se deben modificar las hipótesis.

Antes de pasar a analizar un ejemplo, se mostrará como debe simularse este proceso de forma correcta. Lo primero que se debería plantear son los contextos si hubiese. Esto definirá el escenario a desarrollar. Una vez que se tenga esto, se simulará la frecuencia de los los siniestros para cada carteta/póliza. Si se tiene una cuantía no nula, deberá simularse para cada uno de estos la intensidad de los mismos. A partir de esta indemnización bruta calculada, se pasará a aplicar el contrato de Reaseguro. Es decir, los límites y franquicias. Todo esto teniendo en cuenta las relaciones de dependencia que puede haber[11]. Además, se deberá considerar cuanto de los siniestros será pagado en este año y cuanto se prorratea. Es decir, un porcentaje de estos siniestros será el pasivo del siguiente periodo. Una vez hechas estas simulaciones, se plantean las demás variables aleatorias como los gastos.

La simulación puede brindar un resultado de Ruina, de liquidación[12] o de resultado positivo. Sin embargo, una sola simulación no brinda información suficiente para concluir un resultado. Se debe realizar k simulaciones, y si se quisiera calcular alguna probabilidad, una esperanza o una medida de riesgo se hará con el total observado sobre el total de simulaciones. Es decir, para analizar la probabilidad de ruina se analiza cuantas simulaciones dieron ruina y se dividen por el total, al ser equi-probables.

[11] Por ejemplo, si la ocurrencia de un siniestro condiciona el suceso de otro.

[12] Este es el escenario en el que no se alcanza el capital mínimo requerido.

5.1. Ejercicio

Ejercicio 1:
Considere los siguientes datos de una compañía de seguros: Capital Inicial= \$500. Pasivo Inicial = \$0. Todo lo siguiente aplica para un único período de análisis: Las primas se cobran al inicio del año, los siniestros retenidos a la mitad y la prima de reaseguro se abona a fin de año. La tasa de interés compuesto que representa el resultado de las inversiones es del 50 %. Las primas emitidas en el año son iguales a 250. Los gastos sobre prima emitida siguen una distribución Log-Normal entre 10 % y 60 %, con valor medio 0,35 y varianza 0,05. La cantidad de siniestros puede ser 0 (70 %), 1 (25 %) o 2 (5 %). La cuantía de cada uno sigue una distribución gamma con valor medio \$500 y varianza \$100.000. Existe un exceso de pérdida por siniestro con prioridad \$1.500 con costo de \$50. El 60 % de los siniestros se paga el primer año y el 40 % el segundo año de run-off. No hay impuesto a las ganancias y la compañía mantiene una política de distribución de dividendos en la que reparte los mismos únicamente si el patrimonio neto excede S1.250, por el mencionado exceso. Determinar numéricamente mediante un proceso de simulación estocástica[13]

a La probabilidad de ruina

b El valor esperado del PN

c Monto esperado de distribución de dividendos

d Valor a Riesgo al 95 %.

Lo que primero se puede hacer, es un resumen de las variables presentadas. Primero están las primas al principio del año por un monto de 250. Los gastos, que están al inicio del año, se distribuyen según una Log-Normal pero no se conocen los parámetros. Para esto, se despeja de

$$\left.\begin{array}{r} e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} = 0{,}35 \\ e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2}-1\right) = 0{,}05 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} \sigma = 0{,}58505231 \\ \mu = -1{,}2209652 \end{array}$$

La cuantía de los siniestros se ve como

n	f(x)	F(x)
0	0.7	0.7
1	0.25	0.95
2	0.05	1

Donde la cuantía se distribuye como una gamma con parámetros desconocidos. En base a sus momentos, se deducen el α y el β

$$\left.\begin{array}{r} \alpha\cdot\beta = 500 \\ \alpha\cdot\beta^2 = 100000 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} \alpha = 2{,}5 \\ \beta = 200 \end{array}$$

Los mismos serán pagados en dos años. El año del suceso se pagará el 60 % y en el siguiente año lo restante. La cobertura de Reaseguro es un *XL* de prioridad de 1500 con un costo de 50 (pago a fin de año). A su vez, la tasa será del 50 % y habrá dividendos en caso de que el PN exceda 1250.

[13]Este ejercicio fue resuelto en Excel y los números son representativos.

Teniendo todos los datos, se empieza a simular. Pero antes, se debe tener los recursos disponibles iniciales (Activo). Este será igual al PN al no tener pasivo (500). Para simular las cuantías, se genera un número aleatorio

$$u_1 = 0{,}7754247$$

Con este valor, se analiza la cantidad de siniestros. Como es mayor a la acumulada hasta 0 pero menor de la acumulada hasta 2, se produjo un solo siniestro. Pasando con su cuantía, se debe generar otro valor aleatorio

$$u_2 = 0{,}83774662$$

Entonces, el monto surge de

$$0{,}83774662 = \int_0^x \frac{y^{\alpha-1}e^{-\frac{y}{\beta}}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} dy \rightarrow x = 789{,}26$$

Aca se debería aplicar el contrato de Reaseguro, sin embargo como no alcanza la priora el monto queda intacto. Solo resta simular los gastos, por lo que se genera otro número aleatorio

$$u_3 = 0{,}3122337$$

Que siguiendo la Log-Normal pero teniendo en cuenta las limitaciones

$$\begin{array}{rl} 0{,}1 & Dentro\ De \displaystyle\int_0^{x_1} \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{ln(x)-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \\ x & Dentro\ De \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{ln(x)-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \\ 0{,}6 & Dentro\ De \displaystyle\int_{x_2}^{\infty} \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{ln(x)-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \end{array}$$

Donde el rango 0 a x_1 es el que hace que se acumule hasta 0,1 de probabilidad, el segundo rango hace que se acumule hasta 0,6 sin considerar el inicial y el último es el que acumula lo restante. En base a esto, el numero simulado devuelve un gasto del 22 %. Por ende, teniendo toda la información se puede calcular el patrimonio del siguiente periodo. Se parte de un activo que se capitaliza todo el periodo, pero se van a ir sumando y yendo distintos conceptos del mismo. Por eso, se capitalizarán los mismos de acuerdo al tiempo que no permanezcan en el activo. Junto al activo al inicio del año, están los gastos y las primas. Entonces, estos también serán capitalizados durante todo el año. El siniestro se paga a la mitad del año, entonces multiplicando el monto total por el 60 % (ya que es lo único que se paga en este año), se capitalizará por medio periodo. Finalmente, el costo de la cobertura de reaseguro se paga a fin de año. Por lo que no será capitalizado por nada. Todo esto es

$$A_1 = (A_0 + \pi - Gastos)(1 + i) - Siniestro\ Pagado(1 + i)^{0{,}5} - Costo\ XL$$

$$A_1 = (500 + 250 - 0{,}22 \cdot 250) \cdot (1{,}5) - 789{,}26 \cdot 0{,}6 \cdot (1{,}5)^{0{,}5} - 50$$

$$A_1 = 412{,}51$$

Y sabiendo que lo que falta pagar es el 40 % del siniestro (Pasivo), se puede obtener el patrimonio neto como

$$PN_1 = 412{,}51 - 789{,}26 \cdot 0{,}4 = 96{,}81$$

En este caso, el patrimonio fue positivo por lo que no se considera como quiebra. Sin embargo, el inicial era de 500 y este bajo a 96,81. Esto implica una pérdida[14] (Resultado Total Negativo)

[14]En caso de que hubiesen impuestos, estos se calculan sobre el resultado total si y solo si este fuese positivo. De otra forma sería nulo.

de 403,19. A su vez, tampoco se observa dividendos.

Esto hecho una vez, se debe repetir k veces. Al hacerlo 1000 veces, el autor obtuvo la suma total de los patrimonios netos positivos es de 798955,59. Y como estos son equiprobables, el valor esperado del patrimonio neto condicional a los resultados positivos es de

$$\frac{798955{,}59}{1000} = 798{,}96$$

De la misma forma, condicional a los resultados negativos se obtuvo

$$\frac{-8966{,}1}{1000} = -8{,}966$$

Se observaron 36 escenarios de Ruina, por lo que

$$P(u; 1))\frac{36}{1000} = 0{,}036$$

Entonces, se puede condicionar la esperanza del patrimonio neto negativo a la probabilidad de ruina

$$\frac{-8{,}966}{0{,}036} = 249{,}05555$$

Nunca en las 1000 simulaciones se observó pago de dividendos, por lo que estos se pagan con probabilidad 0. Finalmente, el Valor a Riesgo requiere que se ordenen de menor a mayor todos los resultado del PN y que se tome el número 950 (el 95 % acumulado). Este es

$$VaR_{95\,\%} = 640{,}5$$

Como adicional, se podría probar si el costo de Reaseguro es justo con las hipótesis expuestas. Se observa que la esperanza de los siniestros cedidos es

$$E(X_{cedido}) = 0{,}78$$

Es decir, se le esta cobrando mucho de más.

Referencias

[1] Alfredo Boietti. "Análisis Patrimonial Dinámico". En: (2011).

[2] NL Bowers et al. "Actuarial mathematics-actuarial mathematics". En: *Transactions of the Faculty of Actuaries* 41 (1987).

[3] DR Cox et al. *Monographs on statistics and applied probability*. Springer, 1984.

[4] Griselda Deelstra, Guillaume Plantin et al. *Risk theory and reinsurance*. Springer, 2014.

[5] Roger J Gray y Susan M Pitts. *Risk modelling in general insurance: From principles to practice*. Cambridge University Press, 2012.

[6] Rob Kaas et al. *Modern actuarial risk theory: using R*. Vol. 128. Springer Science & Business Media, 2008.

[7] George E Rejda. "Risk management and insurance". En: *Person Education Inc* 13 (2005).