

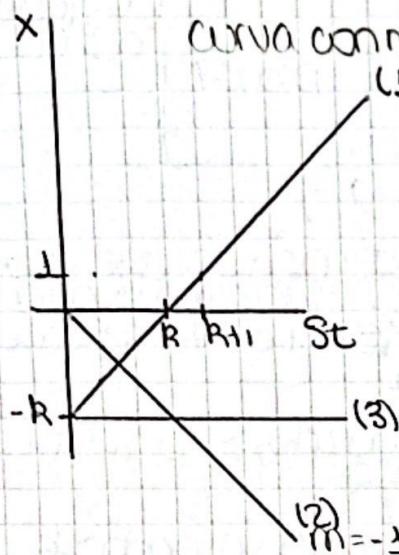
Dani laschinsky CLASE 0

VALUACIÓN DE DERIVADOS

- Forward > obligación de compra en una fecha futura T a un precio fijado K , un determinado activo subyacente.

$$\text{Pay off } (x) = S_T - K \quad (1)$$

Parte compradora del forward:



Curva con $m=1$: Si el activo, al precio del vencimiento termina valiendo cero el valor del forward es negativo ($-K$)

- Si el activo termina valiendo R , el pay off va a ser cero, y si termina valiendo $R_1 \Rightarrow x=1$

- Si necesito comprar el activo en $T \rightarrow$ en T hago frente a un flujo de fondos $-S_T$

$$T = -S_T \quad (2)$$

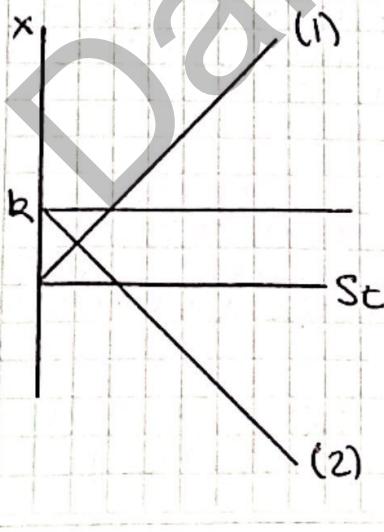
Si S_T termina valiendo cero, voy a tener que pagar cero, si termina valiendo 1 tengo que pagar $-1 \Rightarrow$ curva con pendiente -1

→ Si tengo los contratos (1) y (2) el flujo que vamos a tener en T va a ser: si termina valiendo cero $\rightarrow -K (-K+0)$ se compensan
 ↳ Me quedo con un flujo de fondos negativo $\rightarrow -K$

Cualquier empresa productiva se enfrenta ante esta situación cuando quiere comprar un insumo.

PARTE Vendedora del forward

Fijo el precio de venta de un insumo que no tengo aún



- En T vendo a un valor S_T

$$X = K - S_T \quad (1)$$

- El flujo de fondos antes de la contratación del forward vendido tiene pendiente positiva e igual a $\frac{1}{m}$

- Cuando el forward está vendido (para el emisor). Cuando $S_T=0$, $x=K$ / $S_T=1$, $x=-K$

$$T = S_T \quad (2)$$

En la mayoría de los casos se estudia como el derecho a cobrarlo. Quien recibe el derecho, es quien tiene que poner dinero para obtenerlo.

OPCIONES DE COMPRA, o CALL: el comprador no tiene la obligación de comprar sino el derecho.

$$X = (S_T - k)^+ = \max(S_T - k; 0)$$

- Si $S_T > k \Rightarrow$ conviene cambiar k por el activo "in the money"

- Si $S_T < k \Rightarrow$ no le conviene "out of the money"

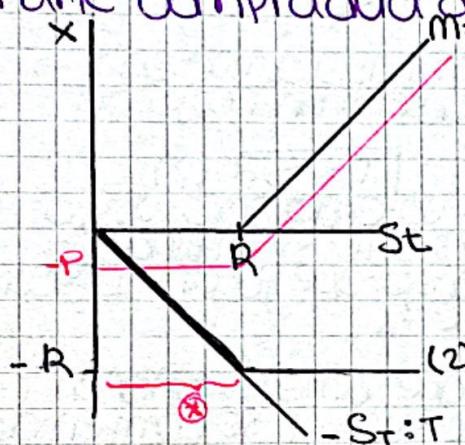
- Si $S_T = k \Rightarrow$ "at the money"

calls

Europeos (solo pueden ejercerse al vencimiento)
Americanos (pueden ser ejercidos en cualquier momento)

vencimiento del contrato

Parte compradora del call



$m=1$ Mientras que el activo esté por debajo de $k \Rightarrow X=0$. Si termina valiendo $S_{T+1} > k \Rightarrow X=1 \Rightarrow$ A partir de k crece con pendiente $=1$

(2) Suma de los dos flujos: a partir de k se compensa

Si el activo termina valiendo $> k$, tengo que poner k . Si termina valiendo $< k$, no pago nada. Es un derecho si no me conviene comprar al valor de mercado

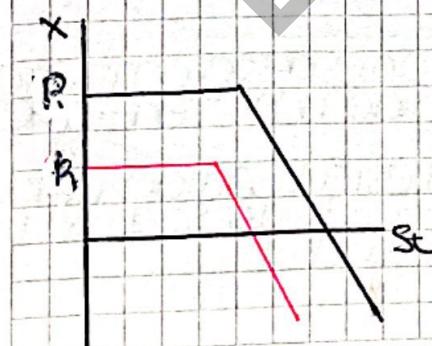
✳ Diferencia entre comprar un forward y un call cuando tenemos la obligación de comprarnos el activo. Es la diferencia entre comprarlo al precio pactado o al precio de mercado, cuando nos conviene el precio de mercado.

* Le resto la prima para ver el beneficio del call

• Si el activo subyacente $< k \Rightarrow$ la acción no será ejercida y el beneficio por tenencia será cero (no tengo obligación). Si no ejerzo el call, pierdo solo la prima.

Emitidor del call

$$X = -(S_T - k)^+$$



Es una situación especulativa. Si crego que no va a bajar, me conviene porque cobro la prima ya vencimiento no pago nada

Es una posición muy riesgosa porque puedo perder mucha, no hay cota.

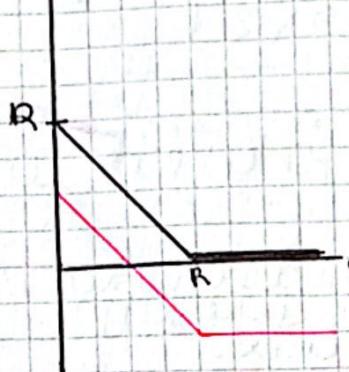
NOTA

PUT O OBLIGACIÓN DE VENTA: ofrecen al tenedor el derecho a vender un determinado subyacente en una fecha futura T a un determinado strike K

$$X = (K - S_T)^+$$

Si $S_T = 0 \Rightarrow X = K$. Tengo el derecho a vender a K algo que vale cero
 Si $S_T = 1 \Rightarrow X = K - 1 \Rightarrow$ bajo con $m = 1$
 Si $S_T = K + 1 \Rightarrow X = 0$

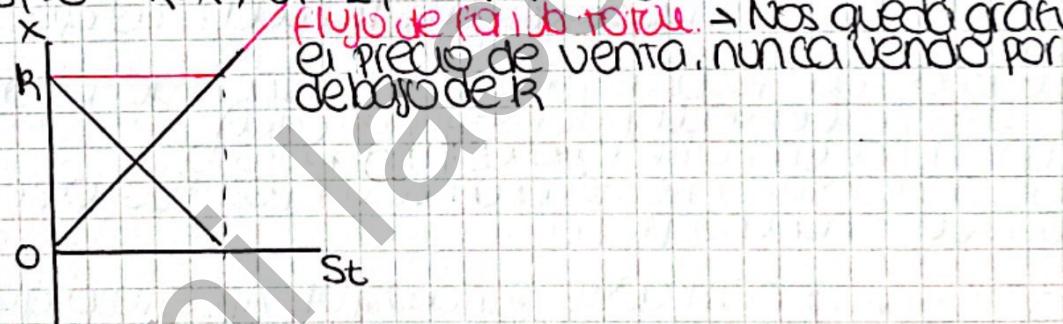
El valor de la prima está dado por la variación que espero que tenga el valor del activo.



• Me convendría tener un PUT cuando quiero vender algo y tengo miedo que el precio baje → compro un PUT que me asegure que si el precio baja, me pagan la diferencia.

En T vendo al valor del activo S_T . Si vale 1, medan 1. Si además compro la opción de venta, el flujo de fondos

es: $S_T = 0 \Rightarrow R = X$, $S_T = 1 \Rightarrow X = K$ ($1 \times$ barrit, $K-1 \times$ Put)



ESTRATEGIAS

ESTÁTICAS: conjunto de instrumentos que me compro al momento zero y los mantengo por un cierto tiempo. No cambia la cantidad

DINÁMICAS: voy cambiando los componentes en el tiempo

ESTRATEGIAS ESTÁTICAS CONOCIDAS

BULL SPREAD: compuesto por dos call. Apuesto a que el activo sube (TORO)

$X = \underbrace{(St - K_1)^+}_{\text{compro call}} - \underbrace{(St - K_2)^+}_{\text{vendo con strike } K_2}$ $K_1 < K_2$

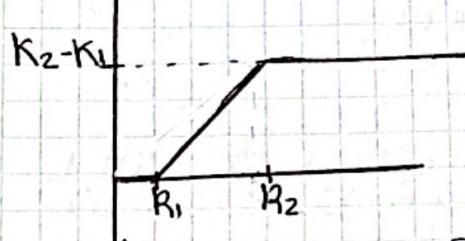
compro call vendo con strike K_2
con strike K_1 (A)

Si St termina valiendo menos que $K_1 \Rightarrow X=0$
 $K_1 + 1 \Rightarrow X=1$
 $K_1 + 2 \Rightarrow X=2$ } $m=1$

Si termina valiendo $K_2 \rightarrow X=0$

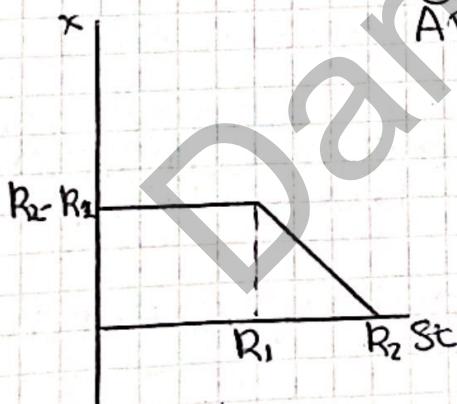
Queda fijo porque cada peso que gano por un lado, lo compenso por el otro, a partir de K_2

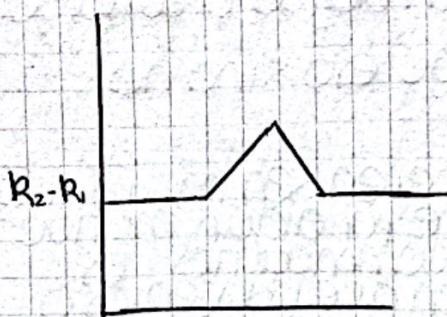
- El bull spread debería valer el valor del call que tengo menos el que debo.



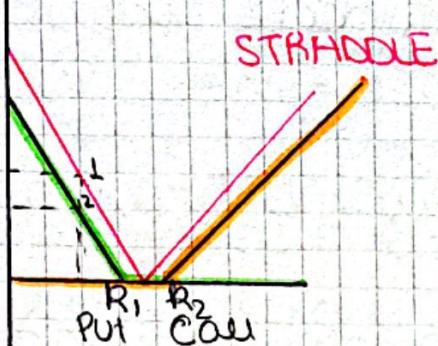
- Queda como un gráfico de un call truncado. Lo que gano por un lado lo pierdo por el otro.
- Lo que tengo que pagar de menos a diferencia del otro gráfico es A. (el valor del segundo call)
- Me convendría un bull porque es muy barato.
- Tener un bull spread es tener un valor positivo o cero \Rightarrow tengo que poner una prima

BEAR SPREAD: compuesto por dos put. Apuesto a que el activo baja. (OSO)



BUTTERFLY

Apuestó a que no va a haber mucha volatilidad en el precio.

STRANGLE: CALL + PUT CON DISTINTO STRIKE

Apostamos aún más a la volatilidad.

STRIP

- Debería pagar más el de dentro. El de fuera paga más en casos muy remotos.
- El de fuera debería ser más barato.
- Tengo más pendiente de un lado que del otro. De un lado tengo $m=2$ (2 puts) y del otro $m=1$ (1 call).
- Apuesto a la volatilidad, pero un poco más a que pierda que a que gane.

STRAP → Idem STIP pero al revés. $m=1$ en put y $m=2$ en call

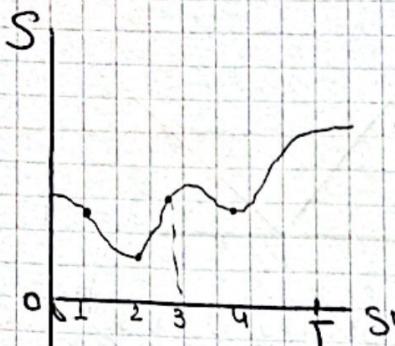
NOTA

STRADDLE: CALL + PUT

Apostamos a la volatilidad, a que el activo va a variar de precio.

CALL ASIÁTICO. Instrumento financiero que permite cambiar un flujo cierto por uno incierto.

$X = \left(\frac{\sum_{i=1}^T S_i}{T} - K \right)^+$ → Pago mas grande por el valor del promedio que vale a tener un activo a lo largo del tiempo.
Si es positivo pago eso, sino no pago nada.



- Estos contratos suelen ser muy utilizados por empresas que por algún motivo compran o venden commodities. Es común en casos en que las ventas o compras se realicen mediante un suministro constante de algún producto, por lo que el precio a conseguir o pagarse de este producto suele surgir como promedio de los distintos valores que toma el producto en cuestión de un determinado tiempo. (Teniendo controlando la volatilidad)

PUT ASIÁTICO

$$X = \left(K - \frac{\sum_{i=1}^T S_i}{T} \right)^+$$

Para definir un derivado hay que definir una regla que nos indique como transformar la trayectoria de precios del activo en un número. En todos los casos un derivado es un pay off que está definido como una función cuyo origen es la trayectoria subyacente del activo de precios y cuya imagen es un número real.

Look back options: provee al tenedor la posibilidad de

conseguir el beneficio en que se habría incurrido si se hubiera comprado un determinado activo en el momento en el que tomó su mínima valor, o si se lo hubiera vendido en el momento en el que tomó su máximo valor y se lo hubiera recomprado a vencimiento.

Lookback call: $X = S_T \cdot M_T^{\text{mínimo}}$

Lookback put

$$X = M_T - S_T^{\text{máximo}}$$

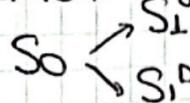
INSTRUMENTO FINANCIERO DERIVADO: contrato a través del cual el tenedor recibe en una fecha futura una cantidad de dinero determinada a través de una función cuyo dominio es el conjunto de trayectorias futuras de precios del activo subyacente y cuya imagen es la red real.

CLASE 1: MODELO DISCRETO

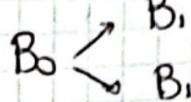
- Sirve para entender todas las técnicas financieras de valuación.

ÁRBOL BINOMIAL UNI PERIODICO

ACTIVOS



BONOS



• sin riesgo (supuesto)

DERIVADO.

X

X^U

↳ cuánto vale el activo un momento antes

→ se intentará replicar el pay off de un derivado pero ahora con carteras formadas por bonos y activos subyacentes.

cartera con ϕ activos y ψ bonos

$$(\phi; \psi) \rightarrow V_0 = \phi S_0 + \psi B_0 \rightarrow \text{valor de la cartera en momento cero.}$$

• ψ y ϕ pueden tomar valores negativos → debo un bono, me obliga a devolver cierta cantidad de dinero.

↳ vender en descubierto (prestamo)

↳ dame lo que vale un bono hoy y te devuelvo lo que valga mañana

REPLICA DE CARTERA: armar algo que arroje un flujo de fondos igual al flujo de fondos del instrumento que queremos valorar.

→ el objetivo es encontrar una cartera formada por ϕ activos subyacentes y ψ bonos que replique el pay-off del derivado.

Matemáticamente significa encontrar un vector $(\phi; \psi)$ que cumpla con:

$$\begin{cases} X^U = \phi S_1^U + \psi (1+i) \\ X^D = \phi S_1^D + \psi (1+i) \end{cases} \Rightarrow (\phi^*, \psi^*)$$

Al momento cero esa cartera vale:

Precio del derivado en ausencia de arbitraje

$$V_0 = \phi^* S_0 + \psi^* B_0 \rightarrow \text{vale lo mismo que } X^U \text{ o } X^D$$

→ el derivado X , en el momento cero es V_0 → como nos ofrecen el mismo flujo de fondos, tienen el mismo valor actual.

$$V_0 = X_0 \Rightarrow V_0 \xrightarrow{X^U} X^D$$

Si existe un contrato con un pay-off que se puede conseguir (replicar) con una cartera en bonos, entonces el valor de ese contrato en ausencia de arbitraje es igual al de la cartera que lo replica.

↳ no existe la posibilidad de ganar dinero sin riesgos

Hay un argumento de indiferencia

ARBITRAJE: ganar dinero sin riesgo.

• Si el valor del arbitraje fuera mayor que $V_0 \rightarrow$ puedo armar un arbitraje con la cartera $(\emptyset, \psi_i, \emptyset)$

↳ Para ganar dinero sin riesgo vendo lo cantidad de activos a comprar caro y compro lo barato.

↳ En este caso lo caro es el derivado, por eso lo emito/venzo con $x = 11$ con los 11 de emitir el derivado, gano 1

$v = 10$ y uso 10 para comprar la cartera.

• Si el activo sube, va a valer lo que recalcule con la cartera \rightarrow vendo la cartera y pago el pay off del derivado. \rightarrow Gane \$1

Si sube \rightarrow vale x^u , si baje \rightarrow vale x^d

con $x = 9$ } vendo la cartera en descuberto y
 $v = 10$ } compre un derivado. Al momento en que tengo que pagar el pay off me devuelven la cartera (que va a valer lo mismo) y pago.

La ganancia la hago con la diferencia inicial: me quedo con plata de vender la cartera más barata que lo que compré el derivado

ARBOL BINOMIAL MULTIPERIÓDICO

$$\boxed{S_1^u \leq S_2^{uu} \quad B_1 = B_2 \quad ? \leq X^{uw}} \quad (1)$$

$$S_0 \begin{cases} S_1^u & S_2^{uu} \\ S_1^d & S_2^{dd} \end{cases} \quad B_0 \begin{cases} B_1 & B_2 \\ B_1 & B_2 \end{cases} \quad ? \begin{cases} V_1^u & X^{uu} \\ ? & X^{dd} \end{cases} \quad (2)$$

$$(1) \begin{cases} X^{uu} = \emptyset^u S_2^{uu} + \psi_1^u B_2 \\ X^{ud} = \emptyset^u S_2^{ud} + \psi_1^u B_2 \end{cases} \Rightarrow \emptyset_1^{u*} \psi_1^{u*} \Rightarrow V_1^u = \emptyset_1^{u*} S_1^u + \psi_1^{u*} B_1 = ?$$

↳ Si no se cumple la igualdad hay posibilidades de Arbitraje (valor de la cartera = valor del derivado en el mismo momento)

$$\begin{cases} X^{du} = \emptyset_1^d S_2^{du} + \psi_1^d B_2 \\ X^{dd} = \emptyset_1^d S_2^{dd} + \psi_1^d B_2 \end{cases} \quad \emptyset_1^{d*}; \psi_1^{d*} \Rightarrow V_1^d = \emptyset_1^{d*} S_1^d + \psi_1^{d*} B_1$$

Armamos una cartera que me compraría en 0 y quiero que valga V_1^U o V_1^D

$$\left. \begin{array}{l} V_1^U = \emptyset_0 S_1^U + \Psi_0 B_1 \\ V_1^D = \emptyset_0 S_1^D + \Psi_0 B_2 \end{array} \right\} \emptyset_0^*; \Psi_0^* \rightarrow V_0 = \emptyset_0^* S_0 + \Psi_0^* B_0$$

Valor del derivado mayor que la cartera V_0 . $V_0 = 10$
 Vendo el derivado, gano \$1 y compro la cartera V_0 . $X_0 = 11$
 La obligación de la venta la tengo que pagar en el momento 2.
 El problema es que la cartera me da un flujo de fondos al
 momento 1, y si no reinvierto y hay fluctuaciones, pierdo
 plata. Como el precio de la cartera aumenta, me pagan
 más y, con esos precios, compro otras cantidades, otra
 cartera que me la pagan en 2, al mismo precio de la
 deuda contraída por el derivado ($V_1 = X$)

Valor del derivado menor que la cartera V_0 . $V_0 = 10$
 Vendo la cartera, gano \$1 y compro el derivado. Ahora
 tengo una deuda en el momento 1, que lo voy a pagar
 vendiendo otra cartera en descuberto. La segunda
 deuda la pago en el momento 2, con el valor del derivado
 ejemplo:

$$10 < \begin{matrix} 12 & < \\ & 10 \end{matrix}$$

$$10 < \begin{matrix} 8 & < \\ & 6 \end{matrix}$$

$$1 < \begin{matrix} 11 & < \\ & 1,2 \end{matrix}$$

$$1 < \begin{matrix} 1,1 & < \\ & 1,2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} & < \\ & 4 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} & < \\ & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} & < \\ & 2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} & < \\ & 0 \end{matrix}$$

El valor del
 derivado depen-
 de de la
 trayectoria y
 no de un
 solo valor

$$X = S_T - \min \rightarrow \text{Lookback call}$$

$$4 (14 - 10)$$

$$0 (10 - 10)$$

$$2 (10 - 8)$$

$$0 (6 - 8) = 0$$

CLASE 2

• Una cartera es una variable aleatoria y una cartera es una sucesión de V.A. \rightarrow una estrategia es un proceso estocástico. \rightarrow sucesión de carteras \Rightarrow sucesión de VA \Rightarrow

• Estrategias cumplen con las siguientes condiciones:

↳ Autofinanciable: se financia sola, no pongo plata

↳ Replica el Pay-Off en el medio que queremos valorar \rightarrow la última cartera coincide con el valor del Pay-Off del derivado \rightarrow Replicabilidad

Matemáticamente:

• Condición de autofinanciabilidad (1)

$$\phi_{t+1} \cdot S_{t+1} + \psi_{t+1} \cdot B_{t+1} = \phi_t \cdot S_t + \psi_t \cdot B_t$$

Para todo t , puede comprarse la cartera del momento $t+1$ con la cartera del momento t .

• Condición de replicabilidad

$$\phi_t \cdot S_t + \psi_t \cdot B_t = x \Rightarrow V_t = x$$

(i) La cartera que me compré en t , valiendo en $t+1$, me tiene que alcanzar para comprar otra cartera en $t+1$.

$$\phi_t \cdot S_t + \psi_t \cdot B_t = \phi_{t+1} \cdot S_{t+1} + \psi_{t+1} \cdot B_{t+1}$$

$$V_{t+1} = V_t + \phi_t (S_{t+1} - S_t) + \psi_t (B_{t+1} - B_t)$$

$\sum_{t=0}^{T-1} [V_{t+1} - V_t] = \sum_{t=0}^{T-1} [\phi_t (S_{t+1} - S_t) + \psi_t (B_{t+1} - B_t)]$

$V_T = V_0 + \sum_{t=0}^{T-1} [\phi_t (S_{t+1} - S_t) + \psi_t (B_{t+1} - B_t)]$

Si una estrategia cumple con esta ecuación es autofinanciable

El valor de la estrategia en $t+1$ se consigue con el valor de la estrategia en t más el cambio en el valor de la cartera que se mantiene desde t hasta $t+1$

Explicación a través de bonos cuántos bonos se pueden comprar con una acción/cartera

$Z_t = \frac{S_t}{B_t}$ Z_t representa la cantidad de bonos que vale 1 activo.

$E_t = \frac{V_t}{B_t}$ E_t representa la cantidad de bonos que vale la cartera.

Condición de autofinanciabilidad: $\int E_{t+1} = \phi_t Z_{t+1} + \psi_t$

$$\phi_{t+1} Z_{t+1} + \psi_{t+1} = \phi_t Z_{t+1} + \psi_t$$

$$E_t = E_s + \sum_{t=s}^{T-1} \phi_t \Delta Z_t$$

Desaparece ψ_t porque el valor de un bono no varía en término de bono.

La cantidad de bonos para comprar la estrategia en el momento T se consigue con la cantidad de bonos que vale la estrategia en los momentos sucesivos.

Condición de replicabilidad: $D_T = \frac{X}{B_T}$

Explicación a través de activo subyacente

$$D_t = \frac{V_t}{S_t} \quad Y_t = \frac{B_t}{S_t}$$

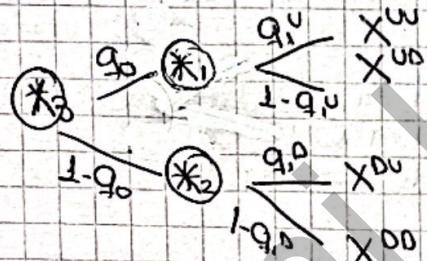
Condición de autofinanciamiento: $D_{t+1} = D_t + \Psi_t Y_{t+1} \Rightarrow$

$$D_{t+1} = D_t + \Psi_t \Delta Y_t \rightarrow D_T = D_s + \sum_{t=s}^{T-1} \Psi_t \Delta Y_t$$

Condición de replicabilidad: $D_T = \frac{X}{S_T}$

La cantidad de acciones que valdrá el P&L-off del derivado coincidirá con la cantidad de activo subyacente que valdrá la estrategia.

ESPERANZA CONDICIONADA



Información / filtración
 $F = \text{donde estoy parado}$
 Matemáticamente: $E(Y|F_s) = Y_s \quad s \leq t$

Si estoy en $\textcircled{1}$, el valor de X :

$$EQ(X|F_1) = q_1^u X^{uu} + (1-q_1^u) X^{u0}$$

Si estoy en $\textcircled{2}$, el valor de X :

$$EQ(X|F_1) = q_1^0 X^{0u} + (1-q_1^0) X^{00}$$

Si estoy en $\textcircled{3}$, el valor de X :

$$EQ(X|F_0) = q_0 q_1^u X^{uu} + q_0 (1-q_1^u) X^{u0} + (1-q_0) q_1^0 X^{0u} + (1-q_0)(1-q_1^0) X^{00}$$

Esperanza según probabilidades q de la VA X dada la info que hay en $\textcircled{1}$.

$$EQ[X|F_1] = \begin{cases} X^{uu} \\ X^{u0} \\ X^{0u} \\ X^{00} \end{cases}$$

NOTA

Propiedades de las esperanzas condicionadas

- La esperanza es un proceso estocástico porque es una sucesión de variables aleatorias. Dependiendo del momento en el que estoy parado. $EQ[X|F_T] = P_E$
- La esperanza de la variable aleatoria al momento que la desubro (T): $EQ(X|F_T) = X$

- Tower Property** $EQ[EQ(X|F_T)|F_S] = EQ(X|F_S)$ $t > S$
Dados dos factores t y S , la esperanza de X en el momento S se calcula con la esperanza de lo que voy a esperar en t . Lo que esperamos respecto de lo que vamos a esperar mañana, coincide con lo que esperamos hoy.

La prima del derivado en términos de bonos sería igual a la esperanza (calculada si los prob. q hacen que el proceso sea martingala) de la vía "Pay Off en término de bonos" cuando

Medidas de probabilidad $EQ\left(\frac{X}{B_T} | F_S\right) = EQ(ES|F_S) + EQ \sum_{t=S}^{T-1} [\phi_t(z_{t+1} - z_t)] | F_S$ (aproxima a la info que hay).

\underbrace{Es}

Hay que hallar las probabilidades que hacen que el término valga cero

Cuánto va a valer la cartera que quiero

$EQ\left(\frac{X}{B_T} | F_S\right) = Es$ general momentos, dada la info que tengo en S .

$$EQ\left(\sum_{t=S}^{T-1} [\phi_t(z_{t+1} - z_t)] | F_S\right) = \sum_{t=S}^{T-1} EQ[\phi_t(z_{t+1} - z_t) | F_S]$$

Aplicando Tower Property: la esperanza que quiero calcular coincide con la esperanza de lo que voy a esperar

$$EQ[\phi_t(z_{t+1} - z_t) | F_S] = EQ\{EQ[\phi_t(z_{t+1} - z_t) | F_T] | F_S\}$$

$$\phi_t = \phi_t^u (z_{t+1}^u - z_t^u) + (1 - \phi_t^u) (z_{t+1}^d - z_t^d)$$

tal momento t es conocido \Rightarrow constante

$$\phi_t = \frac{z_t^u - z_{t+1}^u}{z_{t+1}^u - z_{t+1}^d}$$

Entonces el valor esperado del pay off dividido el valor del bono coincide con Es / No es necesario conocer cada una de las carteras para encontrar el valor del derivado

$$EQ\left(\frac{X}{B_T} | F_S\right) = Es \quad \text{con } Es = \frac{Vs}{Bs} \text{ en ausencia de arbitraje.}$$

valor del bono en el mismo momento

Multiplico por B_S a ambos lados

$$Bs \cdot EQ\left(\frac{X}{B_T} | F_S\right) = \frac{Vs}{Bs} \cdot Bs \Rightarrow Bs \cdot Eq\left(\frac{X}{B_T} | F_S\right) = Vs$$

$$Eq\left(X \frac{Bs}{B_T} | F_S\right) = Vs$$

\hookrightarrow FACTOR DE ACTUARIAZACIÓN

NOTA

CLASE 3

Volvamos un call cuyo strike es $R=9$

$$X = (S_T - R)^+$$

$$\frac{X}{B} = \frac{ES}{B} + \sum_{t=S}^{T-1} [\phi_t (Z_{t+1} - Z_t)]$$

$$EQ\left(\frac{X}{B} / FS\right) = ES + EQ \left\{ \sum_{t=S}^{T-1} [\phi_t (Z_{t+1} - Z_t)] \right\} / FS$$

valor del derivado en término de bono.

$$BS \quad EQ\left(\frac{X}{B} / FS\right) = BS \cdot ES = V_S$$

S

$$10 \begin{cases} < 10,816 \\ > 9,417 \end{cases} \begin{cases} < 10,185 \\ > 8,867 \end{cases}$$

B

$$1 \begin{cases} < 1,012 \\ > 1,012 \end{cases} \begin{cases} < 1,018 \\ > 1,018 \end{cases}$$

$$V_0 \begin{cases} < 2,699 \\ > 1,185 \\ = 0 \end{cases}$$

X

Sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} X^{UU} = \phi_1^U S_2^{UU} + \psi_1^U B_2 \\ X^{UD} = \phi_1^U S_2^{UD} + \psi_1^U B_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} 2,699 &= \phi_1^{U*} 11,699 + \psi_1^{U*} 1,018 \\ 1,185 &= \phi_1^{U*} 10,185 + \psi_1^{U*} 1,018 \end{aligned}$$

$$V_1^U = \phi_1^{U*} S_1^U + \psi_1^{U*} B_1 \Rightarrow \begin{aligned} \phi_1^{U*} &= 1 \quad \psi_1^{U*} = -8,841 \\ V_1^U &= 1.10,816 - 8,841 \cdot 1,018 \end{aligned}$$

$$V_1^U = 1,8689$$

$$\begin{cases} X^{DU} = \phi_1^D S_2^{DU} + \psi_1^D B_2 \\ X^{DD} = \phi_1^D S_2^{DD} + \psi_1^D B_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} 1,185 &= \phi_1^{D*} 10,185 + \psi_1^{D*} 1,018 \\ 0 &= \phi_1^{D*} 8,867 + \psi_1^{D*} 1,018 \end{aligned}$$

$$V_1^D = \phi_1^{D*} S_1^D + \psi_1^{D*} B_1 \Rightarrow \begin{aligned} \phi_1^{D*} &= 0,899 \quad \psi_1^{D*} = -7,831 \\ V_1^D &= 0,899 \cdot 9,417 - 7,831 \cdot 1,012 \\ V_1^D &= 0,5409 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} V_1^U = \phi_0 S_1^U + \psi_0 B_1 \\ V_1^D = \phi_0 S_1^D + \psi_0 B_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} 1,18689 &= \phi_0 10,816 + \psi_0 1,012 \\ 0,5409 &= \phi_0 \cdot 9,417 + \psi_0 1,012 \\ \phi_0^* &= 0,94925 \quad \psi_0^* = -8,2986 \end{aligned}$$

$$V_0 = \phi_0^* S_0 + \psi_0 B_0 \Rightarrow V_0 = 0,94925 \cdot 10 - 8,2986 \cdot 1 \\ V_0 = 1,1939$$

Podemos llegar a V_0, V_1^u, V_1^d con un método alternativo.

Sabiendo:

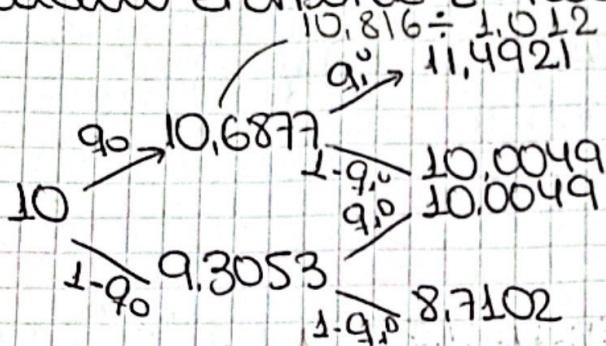
$$Z_t = S_t \cdot B_t^{-1} \quad E_S = V_S B_S^{-1}$$

cuántos pesos vale 1 bono

$$\boxed{B_S \text{ EQ } \left(\frac{X}{B_t} / F_S \right) = E_S B_S = V_S} \rightarrow \text{voy a comprobarlo.}$$

cuántos bonos vale un dividendo.

Calculo el árbol de Z : Todo el arbol se divide por B .



$$\bullet 10 = q_0 \cdot 10,6877 + (1-q_0)9,3053 \quad || \quad q_0 = \frac{10-9,3053}{10,6877-9,3053}$$

$$\Rightarrow \boxed{q_0 = 0,503}$$

$$q_t = \frac{Z_t - Z_{t+1}^u}{Z_{t+1}^u - Z_{t+1}^d}$$

$$\bullet q_1^u = \frac{10,6877 - 10,0049}{11,4921 - 10,0049}$$

$$\boxed{q_1^u = 0,459}$$

$$\bullet q_1^d = \frac{9,3053 - 8,7102}{10,0049 - 8,7102}$$

$$\boxed{q_1^d = 0,459}$$

Calculo el valor esperado del pay off en términos de bonos

$$E_S = \left[\frac{2,699}{1,018} q_1^u + \frac{1,185}{1,018} (1-q_1^u) \right] 1,012 = B_1 \text{ EQ } \left(\frac{X}{B_1} \right)$$

$$E_S = 1,8688 = V_1^u$$

$$E_S^D = \left[\frac{1,185}{1,018} \cdot q_1^d + \frac{0}{1,018} (1-q_1^d) \right] 1,012 \Rightarrow E_1^D = 0,54 = V_1^d$$

$$E_0 = \left[\frac{1,8688}{1,012} q_0 + \frac{0,54}{1,012} (1-q_0) \right] 1 \rightarrow E_0 = 1,1945 \approx V_0$$

= Calculo el valor esperado y lo actualizo

Bs.

$B_t \rightarrow$ Factor de actualización. ESTÁ IMPLICADO en el precio del bono \rightarrow estamos calculando el valor esperado y lo estamos actualizando.

$$S_{t+\Delta t} = S_t e^{\mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t}}$$

$$B_{t+\Delta t} = B_t e^{r \Delta t}$$

$\Delta t \rightarrow$ tiempo esperado en años

$\mu \rightarrow$ modela la tendencia

$\sigma \rightarrow$ modela la volatilidad

En el ejemplo: $\mu = 0,11$ $K = 9$ $T = 2/12$
 $\sigma = 0,24$ $S_0 = 10$
 $r = 0,07$ \rightarrow factorización continua.

- Si aumenta el μ , aumentan los valores del activo.
- Si aumenta σ , la diferencia se hace mayor.
- Si aumenta r , aumentan los factores de actualización.

$\uparrow k \rightarrow \downarrow V_0$ • El valor de V_0 tiene una relación inversa con k . Si $1/k > 1/V_0$, financieramente ya no tengo el derecho a comprar algo a q , sino a 10 , \rightarrow me conviene menos.

$\uparrow S_0 \rightarrow \uparrow k$ • El valor de S_0 tiene una relación directa con k . Si $1/S_0$ el árbol se va para arriba, tengo el derecho a comprar a algo que vale más.

$\uparrow \mu \rightarrow \uparrow V_0$ • El valor de V_0 tiene una relación directa con μ . Si sube μ , espero que valga más el activo, entonces me conviene más el derecho a comprar a q .

• El valor de σ tiene una relación directa con V_0 . Me conviene que pueda valer 20 o 0 o que pueda valer 10 u 8.

$\uparrow T \rightarrow \uparrow V_0$ • Si el T es más grande, el árbol es más largo. Pero se puede demostrar matemáticamente que a mayor vencimiento, más vale V_0 .

$\uparrow r \rightarrow \uparrow V_0$ • Si aumentar, sube V_0 . Necesito pagar menos dinero para devolver lo mismo a medida que r esté más alta \rightarrow el valor de la cartera que replica este Pay Off es más alto.

Interpretación de las Probabilidades q

Nos inventamos tantos derivados como nodos tengamos al final
caso contrario, cero

$$\begin{aligned} Q_{\text{UU}} &= B_T \mathbb{1}_{\text{UU}} \\ Q_{\text{UD}} &= B_T \mathbb{1}_{\text{UD}} \\ \vdots \\ Q_{\text{DD}} &= B_T \mathbb{1}_{\text{DD}} \end{aligned}$$

$$B_T$$

$$\begin{aligned} V_0^{\text{UU}} &= B_0 q^{\text{UU}} \rightarrow \text{El valor actual es una fracción del bono.} \\ V_0^{\text{UD}} &= B_0 q^{\text{UD}} \\ V_0^{\text{DD}} &= B_0 q^{\text{DD}} \end{aligned}$$

$$B_0$$

Si me compro todos estos derivados, voy a tener un bono ya que puede suceder solo una de las posibilidades

La suma de las proporciones "q" da 1, por un motivo de arbitraje: tener todos los derivados me da lo mismo que tener un bono. Da 1 por un motivo de arbitraje, no por ser probabilidades

Supongamos que tenemos un derivado que paga

$$X = \sum_{\forall \square} X^{\square} B_T^{-1} B_T \mathbb{1}^{\square}$$

$\square = \begin{matrix} \text{UU...UU} \\ \text{UD...UD} \end{matrix}$

cant. de derivados

$$V_0 = \sum_{\forall \square} X^{\square} B_T^{-1} B_0 q_0^{\square} = B_0 \sum_{\forall \square} X^{\square} B_T^{-1} q_0^{\square}$$

→ El valor de cualquier derivado tiene que ser el pay off en término de bonos por una proporción que sume 1.

• valor la cartera al momento cero, me debería dar igual al bono si no hay arbitraje:

$$V_0 \left(\sum_B B_T \mathbb{1}^B \right) = B_0$$

$$V_0 (B_T \mathbb{1}^B) \geq 0$$

• Los q no pueden ser negativas. porque se podría armar un arbitraje.

Habrá que demostrar en forma genérica:

$q_{A,BC} = q_{AB} q_{B,C}$: La probabilidad de que estando en A, pague A y C, es igual a la probabilidad de que estando en A pague B x la probabilidad de que estando en B (luego de haber estado en A) pague C.

Como las q son proporciones y no probabilidades, hay que demostrar que esto pasa.

$q_{A,BC}$ = el valor de un derivado en A, que paga un bono si ocurre B y C

> en término de bonos.

$q_{A,B}$ = valor en A de derivado en término de bonos, que paga un bono si ocurre B

$q_{AB,C}$ = el valor de un derivado en B (habiéndose transcurrido A) que paga un bono en C.

Suponiendo que ya hace el sistema de ecuaciones y ya se cuánto va a valer en pesos cada derivado, y, por ende, se cuánto va a valer en términos de bonos > ¿se respeta la regla? Sí, porque sino se podría afirmar un arbitraje.

Para afirmar un arbitraje, compro una cierta cantidad de derivados >

nodo A q^{AB} a una cantidad $q_{AB,C}$

Si ocurre B, tengo $q_{AB,C}$ bonos. Si no cero.

Tengo q^{ABC} bonos > puedo comprar el derivado que paga 1 bono si pagaemos a C.

nodo B q^{ABC}

> Ne do lo mismo que comprar me el derivado que paga

$$X = S_{tii}^{A:u} + S_{tii}^{A:u} + S_{tii}^{A:d} + S_{tii}^{A:D}$$

Parados en el nodo A.
→ Si el activo sube, cubro un activo.
Lo mismo si baja → $X = 1$ activo

$$X = S_{tii}^{A:u} B_{tii}^{-1} B_{tii}^{A:u} + S_{tii}^{A:d} B_{tii}^{-1} B_{tii}^{A:d} = 1$$

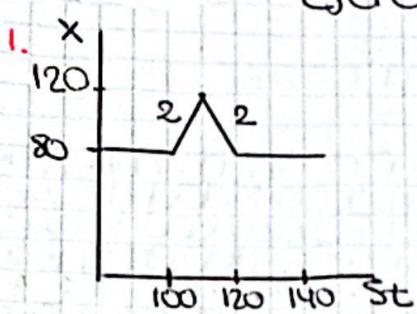
$$X = S_{tii}^{A:u} B_{tii}^{-1} B_{tii}^{A:u} + S_{tii}^{A:d} B_{tii}^{-1} B_{tii}^{A:d} = S_{tii}^A$$

$$\sum q = 1$$

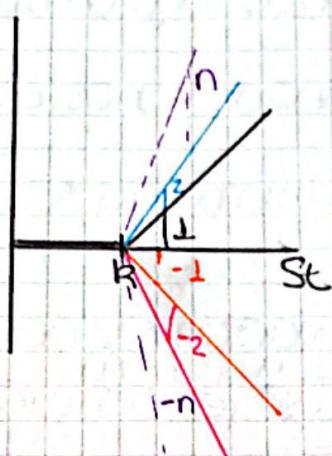
$$q^{A:u} = \frac{2t_i - 2t_{ii}}{2t_i - 2t_{ii}}$$

CLASE 4

Ejercicio:

Pay off de un call: $x = (S_T - K)^+$

2.



A partir de K empieza a ceder con $m=1$
con 2 calls $\Rightarrow m=2 \quad K+2 \Rightarrow x=4$

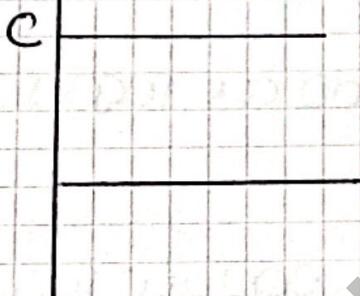
Si debo un call y tengo -1 call $S < K = \text{Pago } 0.$
 $S_T = K+1 \Rightarrow x=1 \Rightarrow m=1$
-2 call $\Rightarrow m=-2$

\Rightarrow La pendiente es igual a cuánto cobra del call.

Replico con bonos Cupón 0. \Rightarrow Único flujo de fondo

3.

El bono tiene $x=c$, con indiferencia del valor que tome el activo



Armo la estrategia: replico el gráfico (1) de izquierda a derecha.

• Primero tengo un bono cupón cero con valor nominal \$80. Al gráfico lesigue una compra de 2 calls con strike 100. Se los tengo que agregar para que a partir de 100, la estrategia me empiece a dar \$2 adicionales respecto de los \$80 por cada \$ adicional que termina valiendo el activo respecto de 100. ($S_T = 101 \Rightarrow x=82, S_T = 102 \Rightarrow x=84$)
En $120 = St$, quiero que el gráfico se mantenga tengo que comprar algo que nos quite \$2 por cada \$ adicional que termina valiendo el activo respecto de \$120. Para que compense con los dos calls que me siguen dando

NOTA

Plata después de 120 \Rightarrow Vender 2 calls con strike 120.
 Ahora, para bajar con $m=2$, le tengo que agregar 2 calls con el mismo strike. $\Rightarrow 4C(120)$
 En 140 tengo que comprar algo que me de \$2 por cada \$ adicional que termine volviendo el activo respecto de 140 \Rightarrow 2 calls con strike = 140.

$$P(80) + 2C(100) - 4C(120) + 2C(140) \quad (\text{mismo gráfico que } 1)$$

Si quiero calcular el valor teórico de (-1), valido los valores del call (valuación de derivados) y los bonos:

\hookrightarrow tengo que descontarlo con la tasa implícita del bono 80. B_0 (B_0 : factor de actualización)

Hay otra forma de valuarlo: armado el árbol

El bono que paga 80, en cero tiene que valer $80 \frac{B_0}{B_t}$ porque sino se puede armar un arbitraje

* \Rightarrow Para valuar la cartera valido el derivado en cada uno de sus momentos, reemplazo los valores en el árbol y hago la cuenta con el sistema de ecuaciones

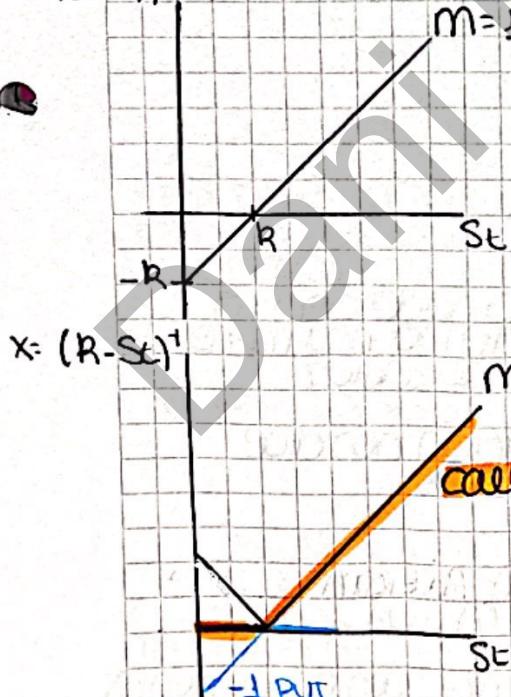
Si al revés, quiero replicar puts y bonos, voy de derecha a izquierda

$$\hookrightarrow B(80) + 2P(140) - 4P(120) + 2P(100)$$

CALL-PUT PARITY

$$X = (S_t - R)^+$$

\Rightarrow Forward: Estamos obligados



$X = (R - S_t)^+$ \Rightarrow PUT: Opción de venta. Gano cuando el activo vale menor de R .

\Rightarrow Tener un forward es lo mismo que tener un forward y deber un PUT (vender)

$$X^F = X^C - X^P$$

Esta relación entre pay-off, por una cuestión de arbitraje, nos da una relación entre los valores de los instrumentos en fechas anteriores

NOTA

$$V_t^F = V_t^C - V_t^P$$

(en una fecha anterior)

porque si no hay arbitraje

↳ call-put parity \rightarrow se cumple en el mercado. (cuando coincide el R y el T)

Ejemplo de arbitraje

$$V_t^F = 3 ; V_t^C = 4 ; V_t^P = 2$$

El forward está más caro que la cartera \rightarrow vendo un forward a 3, me guardo 1 y con 2 compro la cartera. \rightarrow En T mayúscula, cuando tenga que pagar la obligación, pago con la cartera que replica dicha valuación. \rightarrow Para comprar la cartera vendo un put, me dan \$2, junto los \$4 y con eso compro el call)

\Rightarrow Como existe dicha relación entre los pay-off, los valores en fechas anteriores, también deben cumplir con la relación \rightarrow si no hay arbitraje

Demonstración call-put parity

Forward: $(S_T - K)$

$V_T = B_T \text{ Eq}[X B_T^{-1} / F_T]$ \rightarrow da exactamente lo mismo que un sistema de ecuaciones

$$= B_T \text{ Eq}[(S_t - K) B_t^{-1} / F_t] \quad X = (S_T - K)$$

$$= B_T \text{ Eq}[S_t B_t^{-1} - K B_t^{-1} / F_t] \text{ constante}$$

$$= B_t [Eq(S_t B_t^{-1} / F_t) - Eq(K B_t^{-1} / F_t)]$$

$$= B_t Eq[S_t B_t^{-1} / F_t] - K B_t^{-1} B_t$$

$$\text{con } Z = \frac{S_t}{B_t} \text{ y } Eq[\Delta Z_t / F_t] = 0$$

$$V_t = B_t Z_t - B_t K B_t^{-1}$$

$$V_t = S_t - K \frac{B_t}{B_T}$$

Valor de un forward coincide con la fórmula: Valor de un activo hoy menos K por un factor de actualización

↳ solo en este caso, la fórmula de valuación nos dice cuál es la estrategia para replicar este derivado.

$$V_t = \underbrace{\textcircled{1} S_t - \underbrace{K \frac{B_t}{B_T}}_{\psi}}_{\emptyset} \left. \begin{array}{l} \text{constante} \\ \psi \text{ constante} \end{array} \right\} \text{ESTRATEGIA ESTÁTICA}$$

↓
No cambian los componentes en el tiempo.