

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	2	3	2	4	30
A_2	3	2	5	1	40
A_3	4	3	2	6	20
b_j	20	30	30	10	90

Метод минимальной стоимости

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A1	20^2	3^3	10^2	4^4	30
A2	3^3	30^2	5^5	10^1	40
A3	4^4	3^3	20^2	6^6	20
b_j	20	30	30	10	90

$$Z = 2 \cdot 20 + 2 \cdot 10 + 2 \cdot 30 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 20 = 170$$

$3 + 4 - 1 = 6 > 5$ - план вырожденный

Метод аппроксимации Фогеля

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	Δc_{ij}
A1	20^2	3^3	10^2	4^4	30	1, 1, 1 В
A2	3^3	30^2	5^5	10^1	40	1, 1, 4 В
A3	4^4	3^3	20^2	6^6	20	1, 1, 4 В
b_j	20	30	30	10	90	
Δc_{ij}	1 В	1 В	3, 3 В	3, 5		

$$Z = 2 \cdot 20 + 2 \cdot 10 + 2 \cdot 30 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 20 = 170$$

$3 + 4 - 1 = 6 > 5$ - план вырожденный

Проверка на оптимальность

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A1	20^2	3^3	10^2	4^4	30
A2	3^3	30^2	5^5	10^1	40
A3	4^4	0^3	20^2	6^6	20
b_j	20	30	30	10	90

$$Z = 2 \cdot 20 + 2 \cdot 10 + 2 \cdot 30 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 20 = 170$$

$$X = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \end{pmatrix}$$

Составим систему уравнений потенциалов:

$$u_1 + v_1 = 2$$

$$u_1 + v_3 = 2$$

$$u_2 + v_2 = 2$$

$$u_2 + v_4 = 1$$

$$u_3 + v_2 = 3$$

$$u_3 + v_3 = 2$$

Полагая $u_1 = 0$, найдем:

$$v_1 = 2$$

$$v_2 = 3 \quad u_2 = -1$$

$$v_3 = 2 \quad u_3 = 0$$

$$v_4 = 2$$

Проверяем на соответствие теореме 5:

$$u_1 + v_2 = 2 < 3$$

$$u_1 + v_4 = 2 < 4$$

$$u_2 + v_1 = 1 < 3$$

$$u_2 + v_3 = 1 < 5$$

$$u_3 + v_1 = 2 < 4$$

$$u_3 + v_4 = 2 < 6$$

План оптимален; это единственный оптимальный план

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	2	7	3	6	2	30
A_2	9	4	5	7	3	70
A_3	5	7	6	2	4	50
b_j	10	40	20	60	20	150

Метод минимальной стоимости

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A1	10^2	7^1	3^3	6^6	20^2	30
A2	9^9	40^4	20^5	10^7	3^3	70
A3	5^5	7^7	6^6	50^2	4^4	50
b_j	10	40	20	60	20	150

$$Z = 2 \cdot 10 + 2 \cdot 20 + 4 \cdot 40 + 5 \cdot 20 + 7 \cdot 10 + 2 \cdot 50 = 490$$

Метод аппроксимации Фогеля

Ai \ Bj	B1	B2	B3	B4	B5	ai	Δcij
A1	10 ²	7	10 ³	10 ⁶	2	30	0, 1, 1, 1, -B
A2	9	40 ⁴	10 ⁵	7	20 ³	70	1, 1, 2, 2, -B
A3	5	7	6	50 ²	4	50	2 B
bj	10	40	20	60	20	150	
Δcij	3, 7 B	3, 3 B	2, 2 B	4, 3 B	1, 1 B		

$$Z = 2 \cdot 10 + 4 \cdot 40 + 3 \cdot 10 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 10 + 2 \cdot 50 + 3 \cdot 20 = 480$$

Проверка на оптимальность:

Ai \ Bj	B1	B2	B3	B4	B5	ai
A1	10 ²	7	10 ³	10 ⁶	2	30
A2	9	40 ⁴	10 ⁵	7	20 ³	70
A3	5	7	6	50 ²	4	50
bj	10	40	20	60	20	150

$$X = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 10 & 10 & 0 \\ 0 & 40 & 10 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 50 & 0 \end{pmatrix}$$

Составим систему уравнений потенциалов:

$$u_1 + v_1 = 2$$

$$u_1 + v_3 = 3$$

$$u_1 + v_4 = 6$$

$$u_2 + v_2 = 4$$

$$u_2 + v_3 = 5$$

$$u_2 + v_5 = 3$$

$$u_3 + v_4 = 2$$

Полагая $u_1 = 0$, найдем:

$$v_1 = 2$$

$$v_2 = 2 \quad u_2 = 2$$

$$v_3 = 3 \quad u_3 = -4$$

$$v_4 = 6$$

$$v_5 = 1$$

Проверяем на соответствие теореме 5:

$$u_1 + v_2 = 2 < 7$$

$$u_1 + v_5 = 1 < 2$$

$$u_2 + v_1 = 4 < 9$$

$$u_2 + v_4 = 8 > 7$$

$$u_3 + v_1 = -2 < 5$$

$$u_3 + v_2 = -2 < 7$$

$$u_3 + v_3 = -1 < 6$$

$$u_3 + v_5 = -3 < 4$$

План не оптимален

Сдвиг по циклу, вершины в точках A2B4 (+), A2B3 (-), A1B3 (+), A1B4 (+). Сдвиг на 10

$A_i \setminus B_j$	B1	B2	B3	B4	B5	a_i
A1	10^{-2}	7^{-}	20^{-3}	6^{-}	2^{-}	30
A2	9^{-}	40^{-4}	5^{-}	10^{-7}	20^{-3}	70
A3	5^{-}	7^{-}	6^{-}	50^{-2}	4^{-}	50
b_j	10	40	20	60	20	150

$$u_2 + v_4 = 7$$

Полагая $u_1 = 0$, найдем:

$$v_4 = 5$$

$$u_3 = -3$$

Проверяем на соответствие теореме 5:

$$u_1 + v_2 = 2 < 7$$

$$u_1 + v_5 = 1 < 2$$

$$u_2 + v_1 = 4 < 9$$

$$u_2 + v_4 = 7 = 7$$

$$u_3 + v_1 = -1 < 5$$

$$u_3 + v_2 = -1 < 7$$

$$u_3 + v_3 = 0 < 6$$

$$u_3 + v_5 = -2 < 4$$

$$Z = 2 \cdot 10 + 4 \cdot 40 + 3 \cdot 20 + 2 \cdot 50 + 3 \cdot 20 + 7 \cdot 10 = 470$$

План оптимален; существуют другие оптимальные планы.

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	4	2	5	7	6	20
A_2	7	8	3	4	5	110
A_3	2	1	4	3	2	120
b_j	70	40	30	60	50	250

Метод минимальной стоимости

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	⁴	²⁰ ²	⁵	⁷	⁶	20
A_2	⁷	⁸	³⁰ ³	⁶⁰ ⁴	²⁰ ⁵	110
A_3	⁷⁰ ²	²⁰ ¹	⁴	³	³⁰ ²	120
b_j	70	40	30	60	50	250

$$Z = 2 \cdot 20 + 3 \cdot 30 + 4 \cdot 60 + 5 \cdot 20 + 2 \cdot 70 + 1 \cdot 20 + 2 \cdot 30 = 690$$

Метод двойного предпочтения

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	⁴	^{2V}	⁵	⁷	²⁰ ⁶	20
A_2	⁷	⁸	³⁰ ^{3VV}	⁵⁰ ⁴	³⁰ ⁵	110
A_3	⁷⁰ ^{2V}	⁴⁰ ^{1VV}	⁴	¹⁰ ^{3V}	^{2V}	120
b_j	70	40	30	60	50	250

$$Z = 2 \cdot 70 + 1 \cdot 40 + 3 \cdot 30 + 4 \cdot 50 + 3 \cdot 10 + 6 \cdot 20 + 5 \cdot 30 = 770$$

Метод аппроксимации Фогеля

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	Δc_{ij}
A_1	⁴	²⁰ ²	⁵	⁷	⁶	20	2, 2 В
A_2	²⁰ ⁷	⁸	³⁰ ³	⁶⁰ ⁴	⁵	110	1, 2, 2, 4, - В
A_3	⁵⁰ ²	²⁰ ¹	⁴	³	⁵⁰ ²	120	1, 1, 1 В
b_j	70	40	30	60	50	250	
Δc_{ij}	2, 5, 3 В	1, 7 В	1, 1, 2 В	1, 1, 3 В	3 В		

$$Z = 7 \cdot 20 + 2 \cdot 50 + 2 \cdot 20 + 1 \cdot 20 + 3 \cdot 30 + 4 \cdot 60 + 2 \cdot 50 = 730$$

Проверка на оптимальность:

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
----------------------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

A1	4	20 ²	5	7	6	20
A2	7	8	30 ³	60 ⁴	20 ⁵	110
A3	70 ²	20 ¹	4	3	30 ²	120
b _j	70	40	30	60	50	250

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 60 & 20 \\ 70 & 20 & 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}$$

$$Z = 2 \cdot 20 + 3 \cdot 30 + 4 \cdot 60 + 5 \cdot 20 + 2 \cdot 70 + 1 \cdot 20 + 2 \cdot 30 = 690$$

$$u_1 + v_2 = 2$$

$$u_2 + v_3 = 3$$

$$u_2 + v_4 = 4$$

$$u_2 + v_5 = 5$$

$$u_3 + v_1 = 2$$

$$u_3 + v_2 = 1$$

$$u_3 + v_5 = 2$$

Полагая $u_1 = 0$, найдем:

$$v_1 = 3$$

$$v_2 = 2 \quad u_2 = 2$$

$$v_3 = 1 \quad u_3 = -1$$

$$v_4 = 2$$

$$v_5 = 3$$

Проверяем на соответствие теореме 5:

$$u_1 + v_1 = 3 < 4$$

$$u_1 + v_3 = 1 < 5$$

$$u_1 + v_4 = 2 < 7$$

$$u_1 + v_5 = 3 < 6$$

$$u_2 + v_1 = 5 < 7$$

$$u_2 + v_2 = 4 < 8$$

$$u_3 + v_3 = 0 < 4$$

$$u_3 + v_4 = 1 < 3$$

План оптимален; это единственный оптимальный план

$B_j \backslash A_i$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	2	8	4	6	3	120
A_2	3	2	5	2	6	30
A_3	6	5	8	7	4	40
A_4	3	4	4	2	1	60
b_j	30	90	80	20	30	250

Метод минимальной стоимости

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	30^2	20^8	70^4	6	3	120
A_2	3	30^2	5	2	6	30
A_3	6	40^5	8	7	4	40
A_4	3	4	10^4	20^2	30^1	60
b_j	30	90	80	20	30	250

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	30^2	10^8	80^4	6	3	120
A_2	3	30^2	5	2	6	30
A_3	6	40^5	8	7	4	40
A_4	3	10^4	4	20^2	30^1	60
b_j	30	90	80	20	30	250

$$Z = 2 \cdot 30 + 8 \cdot 10 + 4 \cdot 80 + 2 \cdot 30 + 5 \cdot 40 + 4 \cdot 10 + 2 \cdot 20 + 1 \cdot 30 = 830$$

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	30^2	8	80^4	6	10^3	120
A_2	3	30^2	5	2	6	30
A_3	6	40^5	8	7	4	40
A_4	3	20^4	4	20^2	20^1	60
b_j	30	90	80	20	30	250

$$Z = 2 \cdot 30 + 4 \cdot 80 + 3 \cdot 10 + 2 \cdot 30 + 5 \cdot 40 + 4 \cdot 20 + 2 \cdot 20 + 1 \cdot 20 = 810$$

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	30^2	8	80^4	6	3	120
A_2	3	30^2	5	10^2	6	30
A_3	6	40^5	8	7	4	40
A_4	3	20^4	4	10^2	30^1	60
b_j	30	90	80	20	30	250

$$Z = 2 \cdot 30 + 4 \cdot 80 + 2 \cdot 30 + 2 \cdot 10 + 5 \cdot 40 + 4 \cdot 20 + 2 \cdot 10 + 1 \cdot 30 = 790$$

$$Z=2*30+8*20+4*70+2*30+5*40+4*10+2*20+1*30=870$$

Метод аппроксимации Фогеля

Ai \ Bj	B1	B2	B3	B4	B5	ai	Δcij
A1	30 ²	10 ⁸	80 ⁴	6	3	120	1, 1, 2, 1
A2	3	30 ²	5	2	6	30	0, 1, 1, 3 B
A3	6	40 ⁵	8	7	4	40	1, 1, 1, 3 B
A4	3	10 ⁴	4	20 ²	30 ¹	60	1, 2, 1, 0 B
bj	30	90	80	20	30	250	
Δcij	1 B	2, 1, -	0, 0, -	4 B	2 B		

Ai \ Bj	B1	B2	B3	B4	B5	ai	Δcij
A1	30 ²	10 ⁸	80 ⁴	6	3	120	1, 1, 2, 4, -
A2	3	30 ²	5	2	6	30	0 B
A3	6	40 ⁵	8	7	4	40	1, 1, 1, 3, -
A4	3	10 ⁴	4	20 ²	30 ¹	60	1, 2, 1, 0, -
bj	30	90	80	20	30	250	
Δcij	1, 1 B	2, 1, 1	0, 0 B	0, 4 B	2, 2 B		

$$Z=2*30+8*10+4*80+2*30+5*40+4*10+2*20+1*30= 830$$

Ai \ Bj	B1	B2	B3	B4	B5	ai
A1	30 ^{2vv}	20 ⁸	70 ^{4v}	6	3	120
A2	3	30 ^{2vv}	5	2vv	6	30
A3	6	40 ⁵	8	7	4v	40
A4	3	4	10 ^{4v}	20 ^{2v}	30 ^{1vv}	60
bj	30	90	80	20	30	250

$$Z=2*30+8*20+4*70+2*30+5*40+4*10+2*20+1*30=870$$

Проверка на оптимальность:

Ai \ Bj	B1	B2	B3	B4	B5	ai
A1	30 ²	8	80 ⁴	6	3	120
A2	3	30 ²	5	10 ²	6	30
A3	6	40 ⁵	8	7	4	40
A4	3	20 ⁴	4	10 ²	30 ¹	60
bj	30	90	80	20	30	250

$$Z=2*30+4*80+2*30+2*10+5*40+4*20+2*10+1*30=790$$

Ai \ Bj	B1	B2	B3	B4	B5	ai
A1	30 ²	10 ⁸	80 ⁴	6	3	120
A2	3	30 ²	5	2	6	30
A3	6	40 ⁵	8	7	4	40
A4	3	10 ⁴	4	20 ²	30 ¹	60
bj	30	90	80	20	30	250

$$Z=2*30+8*10+4*80+2*30+5*40+4*10+2*20+1*30=830$$

Ai \ Bj	B1	B2	B3	B4	B5	ai
---------	----	----	----	----	----	----

A1	30^{2vv}	20^8	70^{4v}	6	3	120
A2	3	30^{2vv}	5	$2vv$	6	30
A3	6	40^5	8	7	$4v$	40
A4	3	4	10^{4v}	20^{2v}	30^{1vv}	60
bj	30	90	80	20	30	250

$$Z=2*30+8*20+4*70+2*30+5*40+4*10+2*20+1*30=870$$

$$u_1+v_1=2$$

$$u_1+v_2=8$$

$$u_1+v_3=4$$

$$u_2+v_2=2$$

$$u_3+v_2=5$$

$$u_4+v_3=4$$

$$u_4+v_4=2$$

$$u_4+v_5=1$$

Полагая $u_1 = 0$, найдем:

$$v_1 = 2$$

$$v_2 = 8 \quad u_2 = -6$$

$$v_3 = 4 \quad u_3 = -3$$

$$v_4 = 2 \quad u_4 = 0$$

$$v_5 = 1$$

Проверяем на соответствие теореме 5:

$$u_1+v_4=2 < 6$$

$$u_1+v_5=1 > 3$$

$$u_2+v_1=-4 < 3$$

$$u_2+v_3=-2 < 5$$

$$u_2+v_4=-4 < 2$$

$$u_2+v_5=-5 < 6$$

$$u_3+v_1=-1 < 6$$

$$u_3+v_3=1 < 8$$

$$u_3+v_4=-1 < 7$$

$$u_3 + v_5 = -2 < 4$$

$$u_4 + v_1 = 2 < 3$$

$$u_4 + v_2 = 8 > 4$$

План не оптимален

Сдвиг по циклу, вершины в точках A2B4 (+), A2B3 (-), A1B3 (+), A1B4 (+). Сдвиг на 10

Ai \ Bj	B1	B2	B3	B4	B5	ai
A1	30 ²	10 ⁸	80 ⁴	6	3	120
A2	3	30 ²	5	2	6	30
A3	6	40 ⁵	8	7	4	40
A4	3	10 ⁴	4	20 ²	30 ¹	60
bj	30	90	80	20	30	250

Ai \ Bj	B1	B2	B3	B4	B5	ai
A1	30 ²	20 ⁸	70 ⁴	6	3	120
A2	3	30 ²	5	2	6	30
A3	6	30 ⁵	10 ⁸	7	4	40
A4	3	10 ⁴	4	20 ²	30 ¹	60
bj	30	90	80	20	30	250

$$u_1 + v_1 = 2$$

$$u_1 + v_2 = 8$$

$$u_1 + v_3 = 4$$

$$u_2 + v_2 = 2$$

$$u_3 + v_2 = 5$$

$$u_3 + v_3 = 8$$

$$u_4 + v_2 = 4$$

$$u_4 + v_4 = 2$$

$$u_4 + v_5 = 1$$

Полагая $u_1 = 0$, найдем:

$$v_1 = 2$$

$$v_2 = 8 \quad u_2 = -6$$

$$v_3 = 4 \quad u_3 = 4$$

$$v_4 = 6 \quad u_4 = -4$$

$$v_5 = 5$$

Проверяем на соответствие теореме 5:

$$u_1 + v_4 = 6 < 6$$

$$u_1 + v_5 = 5 > 3$$

$$u_2 + v_1 = -4 < 3$$

$$u_2 + v_3 = -2 < 5$$

$$u_2 + v_4 = -4 < 2$$

$$u_2 + v_5 = -5 < 6$$

$$u_3 + v_1 = -1 < 6$$

$$u_3 + v_4 = -1 < 7$$

$$u_3 + v_5 = -2 < 4$$

$$u_4 + v_1 = 2 < 3$$

$$u_4 + v_3 = 8 > 4$$