A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	2	3	2	4	30
A_2	3	2	5	1	40
A_3	4	3	2	6	20
b_j	20	30	30	10	90

Метод минимальной стоимости

Ai \ Bj	B1	B2	B3	B4	ai
A1	20^{2}	^{3}	10^{2}	^{4}	30
A2	^{3}	30^{2}	^{5}	10^{1}	40
A3	^{4}	^{3}	20^{2}	^{6}	20
bj	20	30	30	10	90

Z=2*20+2*10+2*30+1*10+2*20=170

3+4-1=6>5 - план вырожденный

Метод аппроксимации Фогеля

Ai \ Bj	B1	B2	B3	B4	ai	Δcij
A1	20^{2}	^{3}	10^{2}	^{4}	30	1, 1, 1 В
A2	^{3}	30^{2}	^{5}	10^{1}	40	1, 1, 4 В
A3	^{4}	^{3}	20^{2}	^{6}	20	1, 1, 4 В
bj	20	30	30	10	90	
Δcij	1 В	1 В	3, 3 В	3, 5		

Z=2*20+2*10+2*30+1*10+2*20=170

3+4-1=6>5 - план вырожденный

Проверка на оптимальность

Ai \ Bj	B1	B2	B3	B4	ai
A1	20^{2}	^{3}	10^{2}	^{4}	30
A2	^{3}	30^{2}	^{5}	10^{1}	40
A3	^{4}	0^{3}	20^{2}	^{6}	20
bj	20	30	30	10	90

Z=2*20+2*10+2*30+1*10+2*20=170

$$X = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \end{pmatrix}$$

Составим систему уравнений потенциалов:

$u_1 + v_1 = 2$

$u_1 + v_3 = 2$

$u_2 + v_2 = 2$

$u_2 + v_4 = 1$

$u_3 + v_2 = 3$

$u_3 + v_3 = 2$

Полагая $u_1 = 0$, найдем:

$v_1 = 2$

$v_2 = 3 \quad u_2 = -1$

$v_3 = 2 \quad u_3 = 0$

$v_4 = 2$

Проверяем на соответствие теореме 5:

$u_1 + v_2 = 2 < 3$

$u_1 + v_4 = 2 < 4$

$u_2 + v_1 = 1 < 3$

$u_2 + v_3 = 1 < 5$

$u_3 + v_1 = 2 < 4$

$u_3 + v_4 = 2 < 6$

План оптимален; это единственный оптимальный план

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	2	7	3	6	2	30
A_2	9	4	5	7	3	70
A_3	5	7	6	2	4	50
b_j	10	40	20	60	20	150

Метод минимальной стоимости

Ai \ Bj	B1	B2	B3	B4	B5	ai
A1	10 ^{2}	^{7}	^{3}	^{6}	20 ^{2}	30
A2	^{9}	40 ^{4}	20 ^{5}	10 ^{7}	^{3}	70
A3	^{5}	^{7}	^{6}	50 ^{2}	^{4}	50
bj	10	40	20	60	20	150

Z=2*10 + 2*20 + 4*40 +5*20 + 7*10 + 2*50 = 490

Метод аппроксимации Фогеля

Ai \ Bj	B1	B2	B3	B4	B5	ai	Δcij
A1	10 ^{2}	^{7}	10 ^{3}	10 ^{6}	^{2}	30	0, 1, 1, 1, -B
A2	^{9}	40 ^{4}	10 ^{5}	^{7}	20 ^{3}	70	1, 1, 2, 2, -B
A3	^{5}	^{7}	^{6}	50 ^{2}	^{4}	50	2 B
bj	10	40	20	60	20	150	
Δcij	3, 7 B	3, 3 B	2, 2 B	4, 3 B	1, 1 B		

Z = 2*10 + 4*40 + 3*10 + 5*10 + 6*10 + 2*50 + 3*20 = 480

Проверка на оптимальность:

Ai \ Bj	B1	B2	B3	B4	B5	ai
A1	10 ^{2}	^{7}	10 ^{3}	10 ^{6}	^{2}	30
A2	^{9}	40 ^{4}	10 ^{5}	^{7}	20 ^{3}	70
A3	^{5}	^{7}	^{6}	50 ^{2}	^{4}	50
bj	10	40	20	60	20	150

$$X = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 10 & 10 & 0 \\ 0 & 40 & 10 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 50 & 0 \end{pmatrix}$$

Составим систему уравнений потенциалов:

u1 + v1 =2

u1 + v3 =3

u1 + v4 =6

u2 + v2 =4

u2 + v3 =5

u2 + v5 =3

u3 + v4 =2

Полагая u1 = 0, найдем:

v1 = 2

v2 = 2 u2 = 2

v3 = 3 u3 = -4

v4 = 6

$v_5 = 1$

Проверяем на соответствие теореме 5:

$u_1 + v_2 = 2 < 7$

$u_1 + v_5 = 1 < 2$

$u_2 + v_1 = 4 < 9$

$u_2 + v_4 = 8 > 7$

$u_3 + v_1 = -2 < 5$

$u_3 + v_2 = -2 < 7$

$u_3 + v_3 = -1 < 6$

$u_3 + v_5 = -3 < 4$

План не оптимален

Сдвиг по циклу, вершины в точках A2B4 (+), A2B3 (-), A1B3 (+), A1B4 (+). Сдвиг на 10

Ai \ Bj	B1	B2	B3	B4	B5	ai
A1	10 ^{2}	^{7}	20 ^{3}	^{6}	^{2}	30
A2	^{9}	40 ^{4}	^{5}	10 ^{7}	20 ^{3}	70
A3	^{5}	^{7}	^{6}	50 ^{2}	^{4}	50
bj	10	40	20	60	20	150

$u_2 + v_4 = 7$

Полагая $u_1 = 0$, найдем:

$v_4 = 5$

$u_3 = -3$

Проверяем на соответствие теореме 5:

$u_1 + v_2 = 2 < 7$

$u_1 + v_5 = 1 < 2$

$u_2 + v_1 = 4 < 9$

$u_2 + v_4 = 7 = 7$

$u_3 + v_1 = -1 < 5$

$u_3 + v_2 = -1 < 7$

$u_3 + v_3 = 0 < 6$

u3 + v5 =-2 < 4

Z = 2*10 + 4*40 + 3*20 + 2*50 + 3*20 + 7*10 = 470

План оптимален; существуют другие оптимальные планы.

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	4	2	5	7	6	20
A_2	7	8	3	4	5	110
A_3	2	1	4	3	2	120
b_j	70	40	30	60	50	250

Метод минимальной стоимости

Ai \ Bj	B1	B2	B3	B4	B5	ai
A1	^{4}	20 ^{2}	^{5}	^{7}	^{6}	20
A2	^{7}	^{8}	30 ^{3}	60 ^{4}	20 ^{5}	110
A3	70 ^{2}	20 ^{1}	^{4}	^{3}	30 ^{2}	120
bj	70	40	30	60	50	250

Z=2*20+3*30+4*60+5*20+2*70+1*20+2*30=690

Метод двойного предпочтения

Ai \ Bj	B1	B2	B3	B4	B5	ai
A1	^{4}	$^{2\ V}$	^{5}	^{7}	20 ^{6}	20
A2	^{7}	^{8}	30 $^{3\ VV}$	50 ^{4}	30 ^{5}	110
A3	70 $^{2\ V}$	40 $^{1\ VV}$	^{4}	10 $^{3\ V}$	$^{2\ V}$	120
bj	70	40	30	60	50	250

Z = 2*70 + 1*40 + 3*30 + 4*50 +3*10 + 6*20 + 5*30 = 770

Метод аппроксимации Фогеля

Ai \ Bj	B1	B2	B3	B4	B5	ai	Δcij
A1	^{4}	20 ^{2}	^{5}	^{7}	^{6}	20	2, 2 B
A2	20 ^{7}	^{8}	30 ^{3}	60 ^{4}	^{5}	110	1, 2, 2, 4, - B
A3	50 ^{2}	20 ^{1}	^{4}	^{3}	50 ^{2}	120	1, 1, 1 B
bj	70	40	30	60	50	250	
Δcij	2, 5, 3 B	1, 7 B	1, 1, 2 B	1, 1, 3 B	3 B		

Z = 7*20 + 2*50 + 2*20 + 1*20 + 3*30 + 4*60 + 2*50 = 730

Проверка на оптимальность:

Ai \ Bj	B1	B2	B3	B4	B5	ai
A1	4	20 2	5	7	6	20
A2	7	8	30 3	60 4	20 5	110
A3	70 2	20 1	4	3	30 2	120
bj	70	40	30	60	50	250

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 60 & 20 \\ 70 & 20 & 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}$$

Z=2*20+3*30+4*60+5*20+2*70+1*20+2*30=690

u1+v2=2

u2+v3=3

u2+v4=4

u2+v5=5

u3+v1=2

u3+v2=1

u3+v5=2

Полагая u1 = 0, найдем:

v1 = 3

v2 = 2   u2 = 2

v3 = 1   u3 = -1

v4 = 2

v5 = 3

Проверяем на соответствие теореме 5:

u1 + v1 = 3 < 4

u1 + v3 = 1 < 5

u1 + v4 = 2 < 7

u1 + v5 = 3 < 6

u2 + v1 = 5 < 7

u2 + v2 = 4 < 8

u3 + v3 = 0 < 4

u3 + v4 = 1 < 3

План оптимален; это единственный оптимальный план

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	2	8	4	6	3	120
A_2	3	2	5	2	6	30
A_3	6	5	8	7	4	40
A_4	3	4	4	2	1	60
b_j	30	90	80	20	30	250

Метод минимальной стоимости

Ai \ Bj	B1	B2	B3	B4	B5	ai
A1	30^{2}	^{8}	80^{4}	^{6}	10^{3}	120
A2	^{3}	30^{2}	^{5}	^{2}	^{6}	30
A3	^{6}	40^{5}	^{8}	^{7}	^{4}	40
A4	^{3}	20^{4}	^{4}	20^{2}	20^{1}	60
bj	30	90	80	20	30	250

Z=2*30+4*80+3*10+2*30+5*40+4*20+2*20+1*20=810

Метод аппроксимации Фогеля

Ai \ Bj	B1	B2	B3	B4	B5	ai	Δcij
A1	30^{2}	10^{8}	80^{4}	^{6}	^{3}	120	1, 1, 2, 1
A2	^{3}	30^{2}	^{5}	^{2}	^{6}	30	0, 1, 1, 3 B
A3	^{6}	40^{5}	^{8}	^{7}	^{4}	40	1, 1, 1, 3 B
A4	^{3}	10^{4}	^{4}	20^{2}	30^{1}	60	1, 2, 1, 0 B
bj	30	90	80	20	30	250	
Δcij	1 B	2, 1, -	0, 0, -	4 B	2 B		

Z=2*30+8*10+4*80+2*30+5*40+4*10+2*20+1*30= 830

Проверка оптимальности:

Ai \ Bj	B1	B2	B3	B4	B5	ai
A1	30^{2}	^{8}	80^{4}	^{6}	10^{3}	120
A2	^{3}	30^{2}	^{5}	^{2}	^{6}	30
A3	^{6}	40^{5}	^{8}	^{7}	^{4}	40
A4	^{3}	20^{4}	^{4}	20^{2}	20^{1}	60
bj	30	90	80	20	30	250

$$X = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 80 & 0 & 10 \\ 0 & 30 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 20 & 20 \end{pmatrix}$$

u1+v1=2

u1+v3=4

$u1+v5=4$

$u2+v2=2$

$u3+v2=5$

$u4+v2=4$

$u4+v4=2$

$u4+v5=1$

Полагая $u1 = 0$, найдем:

$v1 =2$

$v2 =7$ $u2 =-5$

$v3 =4$ $u3 =-2$

$v4 =5$ $u4 =-3$

$v5 = 4$

Проверяем на соответствие теореме 5:

$u1+v2=7 < 8$

$u1+v4=5 < 6$

$u2+v1=-3 < 3$

$u2+v3=-1 < 5$

$u2+v4=0 < 2$

$u2+v5=-1 < 6$

$u3+v1=0 < 6$

$u3+v3=2 < 8$

$u3+v4=2 < 7$

$u3+v5=2 < 4$

$u4+v1=1 < 3$

$u4+v3=1 < 4$

План оптимален. Это единственный план.