1.Z = x³ + y³ + 3xy

$$\begin{cases} Z'_x = 3x^2 + 3y \\ Z'_y = 3y^2 + 3x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y = 0 \\ 3y^2 + 3x = 0 \ \ |/3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -x^2 \\ y^2 + x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -x^2 \\ (-x^2)^2 + x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -x^2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = -x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

X^1=(0;0) X^2=(-1;-1)

$$\begin{cases} Z''_x = 6x \\ Z''_{xy} = 3 \\ Z''_{yx} = 3 \\ Z''_y = 6y \end{cases}$$

В точке X1 = (0;0) a11=0, a12=3, a21=3, a22=0

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0$$

В точке X2 = (-1;-1) a11=-6, a12=3, a21=3, a22=-6

$$\Delta = \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 27 > 0$$

a11<0

Ответ: В точке X^2 имеется максимум. Z(-1;-1)=1

2.Z = x³y² (12 - x - y), x > 0, y > 0

$$\begin{cases} Z'_x = -x^3y^2 + 3x^2y^2(12 - x - y) \\ Z'_x = -x^3y^2 + 2x^3y(12 - x - y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x^3y^2 + 3x^2y^2(12 - x - y) = 0 \\ -x^3y^2 + 2x^3y(12 - x - y) = 0 \end{cases}$$

Вычитаем из первого уравнения второе, получаем:

$$\left[\begin{array}{l} y = 12 - x \\ y = x^2 \\ y = -2/3x \end{array}\right.$$

Подставив в первое уравнение, получим следующие точки:

X^1=(0;12), X^2=(12;0), X^3=(0;0), X^4=($\frac{-2+\sqrt{67}}{3}$;$\frac{4-4\sqrt{67}+\sqrt{67}}{9}$), X^5=($\frac{-2-\sqrt{67}}{3}$;$\frac{4+4\sqrt{67}+\sqrt{67}}{9}$), X^6=(8;-16/3)

Т. К. x>0 и y>0, то подходит только точка X^4

$$\begin{cases} Z''xx = -6x^2y^2 + 6xy^2(12-x-y) \\ Z''xy = -2x^3y + 6x^2y(12-x-y) - 3x^2y^2 \\ Z''yx = -2x^3y + 6x^2y(12-x-y) - 3x^2y^2 \\ Z''yy = -2yx^3 + 2x^3(12-x-y) - 2x^3y \end{cases}$$

Подставив значения в точке X, имеем:

$$\begin{cases} 9{,}34 \\ 13{,}89 \\ 13{,}89 \\ 6{,}42 \end{cases}$$

$\begin{vmatrix} 9{,}34 & 13{,}89 \\ 13{,}89 & 6{,}42 \end{vmatrix}$=639,95>0 a11>0 В точке X минимум

Z=0,79

Ответ: В точке X^4 имеется минимум Z($\frac{-2+\sqrt{67}}{3}$;$\frac{4-4\sqrt{67}+\sqrt{67}}{9}$)=0,79

3.Z = x² + xy + y² + x – y + 1

$$\begin{cases} Zx' = 2x + y + 1 \\ Zy' = 2y + x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ 2y + x + 1 = 0 \end{cases}$$

2x+y-1-2y-x-1=0

x-y=0

x=y

Подставляя в первое уравнение, получаем:

x=1/3

y=1/3

X=(1/3;1/3)

$$\begin{cases} Z''xx = 2 \\ Z''xy = 1 \\ Z''yx = 1 \\ Z''yy = 2 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0, a11 > 0$$

Z=4/3

Ответ: В точке X имеется минимум Z(1/3;1/3)=4/3

В задачах **4-6** найти глобальный экстремум функции ***Z*** в области решений системы неравенств (или неравенства). Дать геометрическое решение.

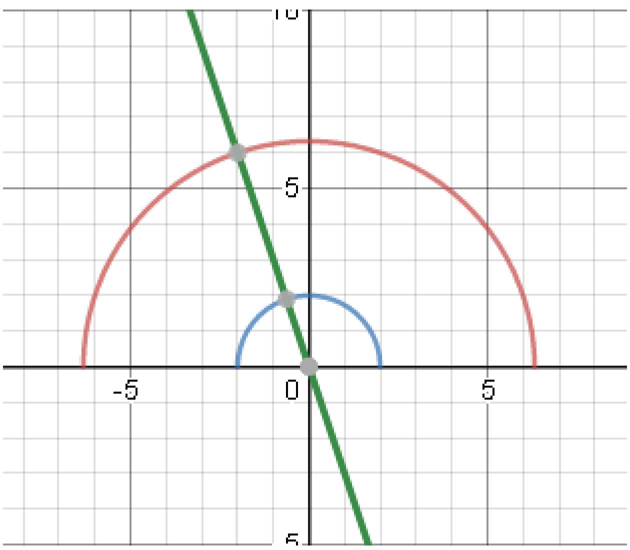
4. ***Z = 3x₁ + x₂***

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 40 \\ x_1^2 + x_2^2 \ge 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x1^2 + x2^2 = 40 \\ x1^2 + x2^2 = 4 \\ x1 = 0, x2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x2 = \sqrt{40 - x1^2} \\ x2 = \sqrt{4 - x1^2} \\ x1 = 0, x2 = 0 \end{cases}$$

Построим графики этих функций и также x2=C-3x1, при C=0



x2=C-3x1 покинет область допустимых решений при пересечении $x2 = \sqrt{40 - x1^2}$

$$Z = 3x1 + \sqrt{40 - x1^2}$$

$$Z' = 3 - \frac{x1}{\sqrt{40 - x1^2}}$$

$$0 = 3 - \frac{x1}{\sqrt{40 - x1^2}}$$

$$x1 = 6 \text{ или } x1 = -6$$

Т.к x1>0, x1=6

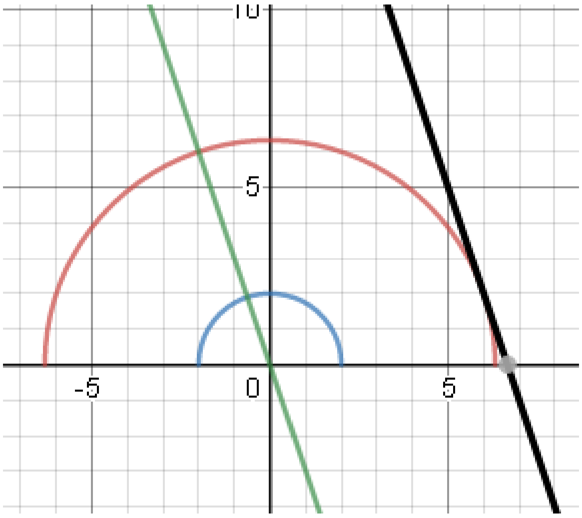
$$\begin{cases} x1^2 + x2^2 = 40 \\ x1 = 6 \\ x1 > 0, x2 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x2 = 2 \\ x1 = 6 \\ x1 > 0, x2 > 0 \end{cases}$$

X=(6;2)

C=2+18

x2=20-3x1



Z=20

Ответ: В точке X имеется максимум Z(6;2)=20

5. $\boldsymbol{Z = x_1^2 + 2x_2 - 3}$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 10 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x1^2 + x2^2 = 10 \\ x1 = 0, x2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x2 = \sqrt{10 - x1^2} \\ x1 = 0, x2 = 0 \end{cases}$$

Построим графики этих функций и также x2=$\frac{C - x1^2 + 3}{2}$, при C=-3

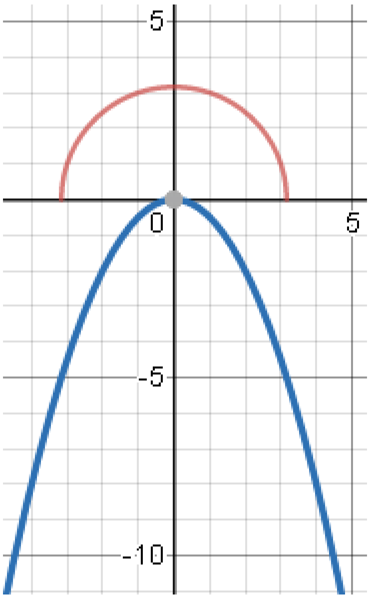


График функции x2=$\frac{C-x1^2+3}{2}$ покинет область допустимых решений при пересечении с $x2 = \sqrt{10-x1^2}$

$$Z = x1^2 + 2\sqrt{10-x1^2} - 3$$

$$Z' = 2x1 - \frac{2x}{\sqrt{10-x1^2}}$$

x1=+-3

Т.к. x1>0, то x1=3

$$\begin{cases} x1^2 + x2^2 = 10 \\ x1 = 3 \\ x1 \geq 0, x2 \geq 0 \end{cases}$$

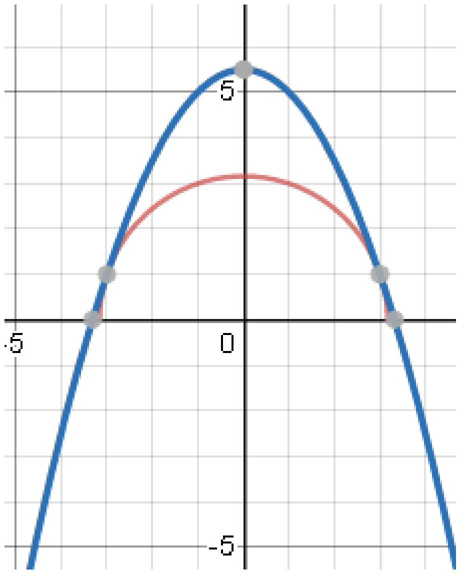
$$\begin{cases} x2 = 1 \\ x1 = 3 \\ x1 \geq 0, x2 \geq 0 \end{cases}$$

X=(3;1)

C=2-3+9

C=8

x2=$\frac{8-x1^2+3}{2}$



Z=8

Ответ: В точке X имеется максимум Z(3;1)=8

6. $Z = x_1 x_2$

$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8 \\ 0 \le x_1 \le 3 \end{cases}$

$\begin{cases} x2 = 8 - 2x1 \\ x1 = 0, x1 = 3 \end{cases}$

Построим графики этих функций и также x2=$\frac{C}{x1}$, при C=1

.

График функции x2=$\frac{C}{x1}$ покинет область допустимых решений при пересечении с $x2 = 8 - 2x1$

Z=x1(8-2x1)

Z'=8-4x1

x1=2

$$\begin{cases} 2x1 + x2 = 8 \\ x1 = 2 \\ x1 \geq 0, x2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x2 = 4 \\ x1 = 2 \\ x1 \geq 0, x2 \geq 0 \end{cases}$$

X=(2;4)

C=8

x2=$\frac{8}{x1}$

Z=8

Ответ: В точке X имеется максимум Z(2;4)=8

В задачах **7-9** найти условный экстремум с помощью метода Лагранжа:

7. $Z = x_1 x_2$ **при** $x_1^2 + x_2^2 = 2$

L=x1x2+λ(x1²+x2²-2)

$$\begin{cases} L'x1 = x2 + 2\lambda x1 \\ L'x2 = x1 + 2\lambda x2 \\ L'\lambda = x1^2 + x2^2 - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x2 + 2\lambda x1 = 0 \\ x1 + 2\lambda x2 = 0 \\ x1^2 + x2^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

X2+2λx1-x1-2λx2=0

$(2\lambda-1)x1-(2\lambda-1)x2=0$

$(2\lambda-1)x1=(2\lambda-1)x2$

$x1=x2$

$x2^2+x2^2-2=0$

$2x2^2=2$

$x2^2=1$

$$x2^2 = \pm 1$$

$X^1=(1;1)$ $X^2=(-1;-1)$

Найдем λ

$1=-2\lambda 1$

$\lambda=-1/2$

$-1=2\lambda 1$

$\lambda=-1/2$

Z(1;1)=1

Z(-1;-1)=1

$Lx1x1''=2\lambda$

$Lx1x2''=1$

$Lx2x2''=2\lambda$

$d^2L=2\lambda+1+2\lambda=2*(-1/2)+1+2*(-1/2)=-1 < 0$, найден условный максимум

Ответ: найден условный максимум Z=1, в точках (1;1) и (-1;-1).

8. ***$Z = x_1 + x_2$*** при $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=1$

$L=x1+x2+\lambda(1/x1+1/x2)$

$$\begin{cases} Lx1' = 1-\dfrac{\lambda}{x1^2} \\ Lx2' = 1-\dfrac{\lambda}{x2^2} \\ L\lambda' = \dfrac{1}{\text{x1}}+\dfrac{1}{\text{x2}}-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1-\frac{\lambda}{x1^2}=0 \\ 1-\frac{\lambda}{x2^2}=0 \\ \frac{1}{\mathrm{x}1}+\frac{1}{\mathrm{x}2}-1=0 \end{cases}$$

$$\frac{\lambda}{x1^2}=-1$$

$$x1=\sqrt{-\lambda}$$

$$\frac{\lambda}{x2^2}=-1$$

$$x2=\sqrt{-\lambda}$$

$$\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}+\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}=1$$

$$\frac{2}{\sqrt{-\lambda}}=1$$

$$\lambda=-4$$

$$x1=\pm 2$$

$$x1=\pm 2$$

X^1=(2;2), X^2=(-2;2), X^3=(2;-2), X^4=(-2;-2)

$$Lx1x1''=\frac{\lambda}{x1^4}$$

$$Lx2x2''=\frac{\lambda}{x2^4}$$

$$Lx1x2''=0$$

$d^2L=\frac{\lambda}{x1^4}+\frac{\lambda}{x2^4}$

(2;2)

4/16+4/16=1/2>0, найден условный минимум

(2;-2)

4/16+4/(-16)=0

(-2;2)

4/(-16)+4/16=0

(-2;-2)

4/(-16)+4/(-16)=-1/2<0, найден условный минимум

Z(2;2)=4 Z(-2;-2)=-4

Ответ: Найдены условный максимум Z=4 и Z=-4 в точках(2;2) и (-2;-2) соответственно.

9. $Z = x_1^3 + x_2^3$ при $x_1 + x_2 = 2$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

L= $x_1^3 + x_2^3 + \lambda(x1+x2-2)$

$$\begin{cases} Lx1' = 3x1^2 + \lambda \\ Lx2' = 3x2^2 + \lambda \\ L\lambda' = \mathrm{x1} + \mathrm{x2} - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x1^2 + \lambda = 0 \\ 3x2^2 + \lambda = 0 \\ \mathrm{x1} + \mathrm{x2} - 2 = 0 \end{cases}$$

$$x1 = \sqrt{\frac{\lambda}{3}}$$

$$x2 = \sqrt{\frac{\lambda}{3}}$$

$$\sqrt{\frac{\lambda}{3}} + \sqrt{\frac{\lambda}{3}} = 2$$

$$\sqrt{\frac{\lambda}{3}} = 1$$

$$\lambda = 3$$

$$x1 = \pm 1$$

$$x2 = \pm 1$$

Т.к. x1>0, x2>0

(1;1)

Lx1x1''=6x1

Lx1x2''=0

Lx2x2''=6x2

d^2L=6x1+6x2=12>0, найден условный минимум

Z=2

Ответ: найден условный минимум Z=2 в точке(1;1)