椅子问题

假设： （1）椅子是长方形的，四条腿一样长，四条腿的连线同样成长方形。（2）地面是数学上的连续曲面。

解： 设 A, B, C, D 为长方形椅子的四个脚。其中 A, B 两脚和 C, D 两脚与地面的距离之和分别为 $f(\theta), g(\theta)$。其中 θ 为椅面绕其法向量旋转的角度。

椅子在任意位置，总有三只脚可以着地，故而对于任意 θ 总有 $f(\theta), g(\theta)$ 中至少一个为零。不妨假设 $g(0) = 0, f(0) > 0$，且 $f(\theta), g(\theta)$ 均为连续函数。

现在需要证明：存在 θ_0，使得 $f(\theta_0) = g(\theta_0) = 0$，此时椅子即放平稳。作辅助函数：

$$h(\theta) = f(\theta) - g(\theta)$$

现将椅子旋转 $180°$，则对边的椅子腿互换，有：

$$f(\pi) = 0, g(\pi) > 0$$

则 $h(x)$ 也是连续函数，且 $h(0) > 0, h(\pi) < 0$, 由连续函数的介值定理可知，比存在 $\theta_0 \in (0, \pi)$ 使得 $h(\theta_0) = 0$, 则有 $g(\theta_0) = f(\theta_0) = 0$，**证毕**。

单摆问题

假设： （1）单摆受到的阻力和速度成正比，比例系数为 k。（2）单摆的周期 t，质量为 m，重力加速度 g，摆长 l，受到的阻力为 F，摆的速度为 v，摆动幅角 θ。

解： 上述物理量(按出现的先后顺序)的量纲分别为 MT^{-1}, T, M, LT^{-2} MLT^{-2}, LT^{-1}，（θ 为无量纲量）构造无量纲量：

$$\sigma = k^{p_1} t^{p_2} m^{p_3} g^{p_4} l^{p_5} F^{p_6} v^{p_7} \theta^{p_8}$$

则有其量纲：

$$M^{p_1+p_3+p_6} L^{p_4+p_5+p_6+p_7} T^{-p_1+p_2-2p_4-2p_6-p_7}$$

故而

$$\begin{cases} p_1+p_3+p_6=0 \\ p_4+p_5+p_6+p_7=0 \\ -p_1+p_2-2p_4-2p_6-p_7=0 \end{cases}$$

其中 p_8 可以任取。原方程组可以写成:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -2 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \end{pmatrix} = 0$$

解得原方程组有四个基础解向量，加上 θ 的次数后一共有五个，如下:

$$\xi_1=(-1,-1,1,0,0,0,0,0)^T$$

$$\xi_2=(0,-2,0,-1,1,0,0,0)^T$$

$$\xi_3=(-1,-1,0,-1,0,1,0,0)^T$$

$$\xi_4=(0,-1,0,-1,0,0,1,0)^T$$

$$\xi_5=(0,0,0,0,0,0,0,1)^T$$

故而有:

$$\sigma_1=\frac{m}{kt}$$

$$\sigma_2=\frac{l}{gt^2}$$

$$\sigma_3=\frac{F}{kgt}$$

$$\sigma_4=\frac{v}{gt}$$

$$\sigma_5=\theta$$

根据 Buckingham Π 定理, 有 $Q(\sigma_1,\cdots,\sigma_5)=0$ 与 $q(k,m,t,l,g,v,F,\theta)=0$ 等价故而 $Q(\sigma_1,\cdots,\sigma_5)=0$ 即为 t 的表达式。