

# **Отчёт по лабораторной работе**

**Лабораторная №3. Модель боевых действий. Вариант 44**

Шемякин Алексей Александрович

# Содержание

<b>1</b>	<b>Цель работы</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Задание</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Выполнение лабораторной работы</b>	<b>7</b>
3.1	Теоретическая справка . . . . .	7
3.2	Задача . . . . .	11
3.3	Код программы . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Выводы</b>	<b>16</b>

## List of Tables

# List of Figures

3.1	Жёсткая модель войны . . . . .	9
3.2	Фазовые траектории системы . . . . .	10
3.3	График численности для случая 1 . . . . .	12
3.4	График численности для случая 2 . . . . .	12

# 1 Цель работы

Рассмотрим некоторые простейшие модели боевых действий – модели Ланчестера. В противоборстве могут принимать участие как регулярные войска, так и партизанские отряды. В общем случае главной характеристикой соперников являются численности сторон. Если в какой-то момент времени одна из численностей обращается в нуль, то данная сторона считается проигравшей (при условии, что численность другой стороны в данный момент положительна).

## 2 Задание

- Изучить три случая модели Ланчестера
- Построить графики изменения численности войск
- Определить победившую сторону

## 3 Выполнение лабораторной работы

### 3.1 Теоретическая справка

Рассмотреть три случая ведения боевых действий: 1. Боевые действия между регулярными войсками 2. Боевые действия с участием регулярных войск и партизанских отрядов 3. Боевые действия между партизанскими отрядами

В первом случае численность регулярных войск определяется тремя факторами:

1. Скорость уменьшения численности войск из-за причин, не связанных с боевыми действиями (болезни, травмы, дезертирство);
2. Скорость потерь, обусловленных боевыми действиями противоборствующих сторон (что связано с качеством стратегии, уровнем вооружения, профессионализмом солдат и т.п.);
3. Скорость поступления подкрепления (задаётся некоторой функцией от времени).

В этом случае модель боевых действий между регулярными войсками описывается следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -a(t)x(t) - b(t)y(t) + P(t) \\ \frac{dy}{dt} = -c(t)x(t) - h(t)y(t) + Q(t) \end{cases}$$

Потери, не связанные с боевыми действиями, описывают члены  $-a(t)x(t)$  и  $-h(t)y(t)$ , члены  $-b(t)y(t)$  и  $-c(t)x(t)$  отражают потери на поле боя. Коэффи-

циенты  $b(t), c(t)$  указывают на эффективность боевых действий со стороны  $y$  и  $x$  соответственно,  $a(t), h(t)$  - величины, характеризующие степень влияния различных факторов на потери. Функции  $P(t), Q(t)$  учитывают возможность подхода подкрепления к войскам  $X$  и  $Y$  в течение одного дня.

Во втором случае в борьбу добавляются партизанские отряды. Нерегулярные войска в отличии от постоянной армии менее уязвимы, так как действуют скрытно, в этом случае сопернику приходится действовать неизбирательно, по площадям, занимаемым партизанами. Поэтому считается, что темп потерь партизан, проводящих свои операции в разных местах на некоторой известной территории, пропорционален не только численности армейских соединений, но и численности самих партизан. В результате модель принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -a(t)x(t) - b(t)y(t) + P(t) \\ \frac{dy}{dt} = -c(t)x(t)y(t) - h(t)y(t) + Q(t) \end{cases}$$

Модель ведение боевых действий между партизанскими отрядами с учетом предположений, сделанном в предыдущем случае, имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -a(t)x(t) - b(t)x(t)y(t) + P(t) \\ \frac{dy}{dt} = -h(t)y(t) - c(t)x(t)y(t) + Q(t) \end{cases}$$

В простейшей модели борьбы двух противников коэффициенты  $b(t)$  и  $c(t)$  являются постоянными. Попросту говоря, предполагается, что каждый солдат армии  $x$  убивает за единицу времени  $c$  солдат армии  $y$  (и, соответственно, каждый солдат армии  $y$  убивает  $b$  солдат армии  $x$ ). Также не учитываются потери, не связанные с боевыми действиями, и возможность подхода подкрепления. Состояние системы описывается точкой  $(x, y)$  положительного квадранта плоскости. Координаты этой точки,  $x$  и  $y$  - это численности противостоящих армий. Тогда модель принимает вид



$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -by \\ \frac{dy}{dt} = -ax \end{cases}$$

Это - жесткая модель, которая допускает точное решение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{by}{cx}$$

$$cxdx = bydy, cx^2 - by^2 = C$$

Эволюция численностей армий  $x$  и  $y$  происходит вдоль гиперболы, заданной этим уравнением (рис. 3.1). По какой именно гиперболе пойдет война, зависит от начальной точки.

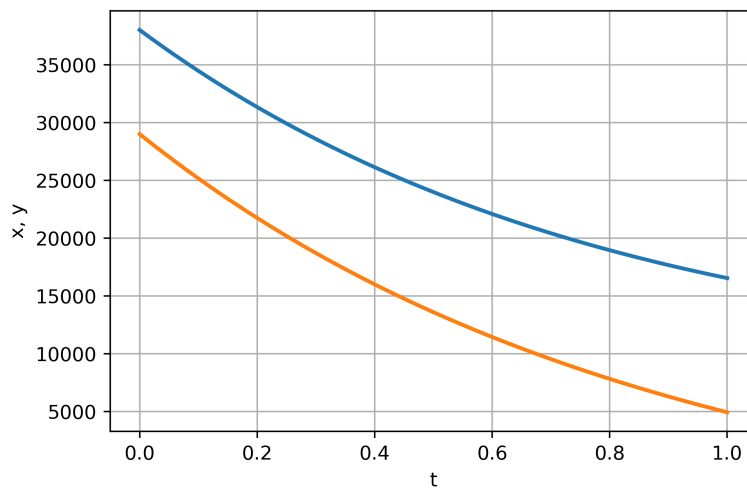


Figure 3.1: Жёсткая модель войны

Эти гиперболы разделены прямой  $\sqrt{cx} = \sqrt{by}$ . Если начальная точка лежит выше этой прямой, то гипербола выходит на ось  $y$ . Это значит, что в ходе войны численность армии  $x$  уменьшается до нуля (за конечное время). Армия  $y$  выигрывает, противник уничтожен. Если начальная точка лежит ниже, то выигрывает армия  $x$ . В разделяющем эти случаи состоянии (на прямой) война заканчивается истреблением обеих армий. Но на это требуется бесконечно большое время: конфликт продолжает тлеть, когда оба противника уже обессилены. Вывод модели таков: для борьбы с вдвое более многочисленным противником нужно в четыре

раза более мощное оружие, с втрое более многочисленным - в девять раз и т. д. (на это указывают квадратные корни в уравнении прямой). Стоит помнить, что эта модель сильно идеализирована и неприменима к реальной ситуации. Но может использоваться для начального анализа. Если рассматривать второй случай (война между регулярными войсками и партизанскими отрядами) с теми же упрощениями, то модель принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -by(t) \\ \frac{dy}{dt} = -cx(t)y(t) \end{cases}$$

Эта система приводится к уравнению  $\frac{d}{dt} (\frac{b}{2}x^2(t) - cy(t)) = 0$  которое при заданных начальных условиях имеет единственное решение:  $\frac{b}{2}x^2(t) - cy(t) = \frac{b}{2}x^2(0) - cy(0) = C_1$

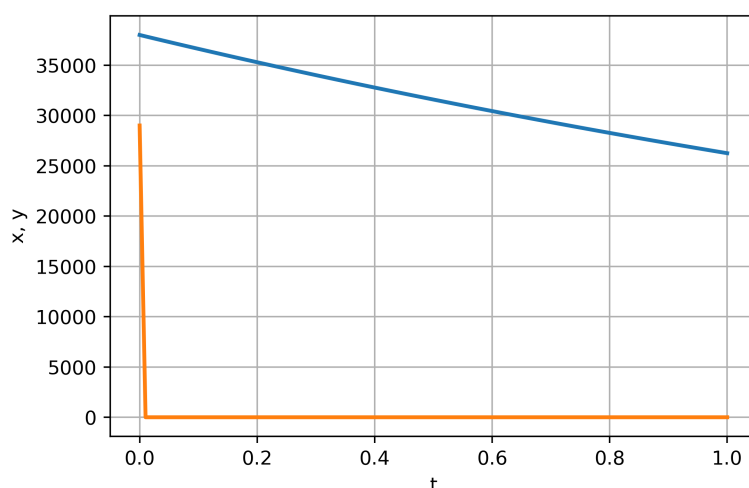


Figure 3.2: Фазовые траектории системы

Из Рисунка fig. 3.2 видно, что при  $C_1 > 0$  побеждает регулярная армия, при  $C_1 < 0$  побеждают партизаны. Аналогично противостоянию регулярных войск, победа обеспечивается не только начальной численностью, но и боевой вырубкой и качеством вооружения. При  $C_1 > 0$  получаем соотношение  $\frac{b}{2}x^2(0) > cy(0)$  Чтобы одержать победу партизанам необходимо увеличить коэффициент  $c$  и

повысить свою начальную численность на соответствующую величину. Причем это увеличение, с ростом начальной численности регулярных войск  $x(0)$  должно расти не линейно, а пропорционально второй степени  $x(0)$ . Таким образом, можно сделать вывод, что регулярные войска находятся в более выгодном положении, так как неравенство для них выполняется при меньшем росте начальной численности войск. Рассмотренные простейшие модели соперничества соответствуют системам обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, широко распространенным при описании многих естественно научных объектов.

## 3.2 Задача

Между страной  $X$  и страной  $Y$  идет война. Численность состава войск исчисляется от начала войны, и являются временными функциями  $x(t)$  и  $y(t)$ . В начальный момент времени страна  $X$  имеет армию численностью 38000 человек, а в распоряжении страны  $Y$  армия численностью в 29000 человек. Для упрощения модели считаем, что коэффициенты  $a, b, c, h$  постоянны. Также считаем  $P(t), Q(t)$  непрерывные функции. Постройте графики изменения численности войск армии  $X$  и армии  $Y$  для следующих случаев:

Модель боевых действий между регулярными войсками

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.29x(t) - 0.66y(t) + \sin(t) \\ \frac{dy}{dt} = -0.36x(t) - 0.29y(t) + \cos(t) \end{cases}$$

0;

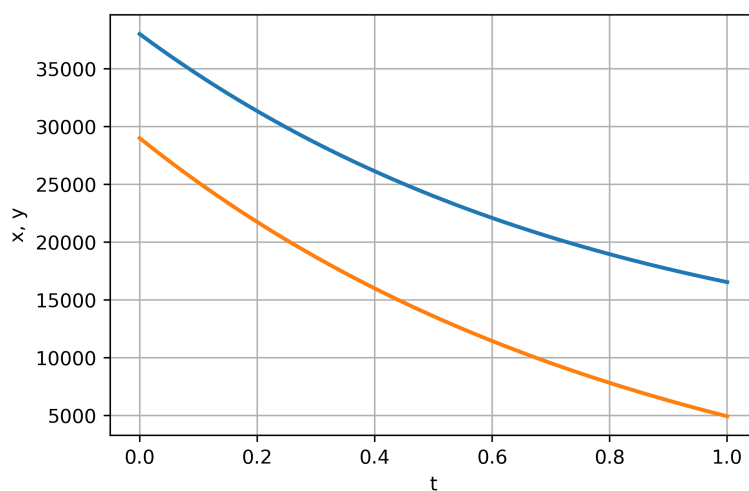


Figure 3.3: График численности для случая 1

Победа достается армии  $X$ .

Модель ведение боевых действий с участием регулярных войск и партизанских отрядов

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.31x(t) - 0.71y(t) + \sin(0.2t) \\ \frac{dy}{dt} = -0.15x(t)y(t) - 0.77y(t) + \cos(0.2t) \end{cases}$$

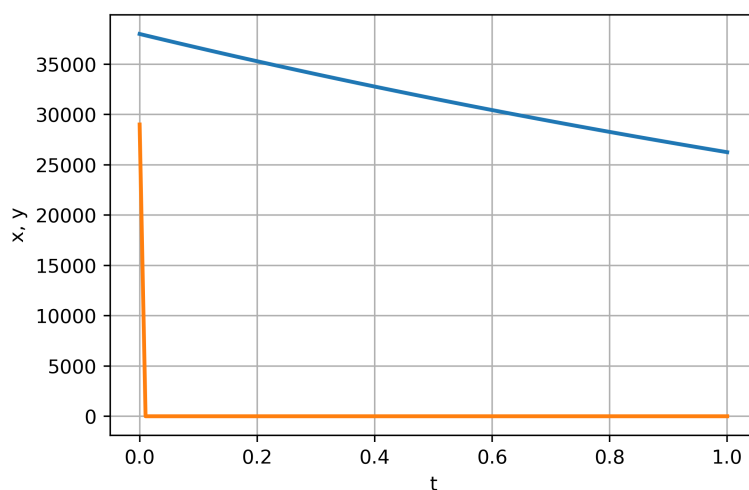


Figure 3.4: График численности для случая 2

Победа достается армии  $X$ .

### 3.3 Код программы

```
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint
import numpy as np
import math
```

```
x0 = 38000
y0 = 29000
t0 = 0 #начальный момент времени
tMax = 1
```

```
a1 = 0.41
b1 = 0.76
c1 = 0.59
h1 = 0.63
```

```
a2 = 0.37
b2 = 0.76
c2 = 0.32
h2 = 0.61
```

```
def P(t):
    p = math.sin(t)
    return p
def Q(t):
```

```

    q = math.cos(t)
    return q

def P2(t):
    p = 2*math.sin(0.2*t)
    return p

def Q2(t):
    q = 2*math.cos(0.2*t)
    return q

def f(y,t):
    y1,y2 = y
    return [-a1*y1 - b1*y2 + P(t), -c1*y1 - h1*y2 + Q(t)]

def f2(y,t):
    y1,y2 = y
    return [-a2*y1 - b2*y2 + P2(t), -c2*y1*y2 - h2*y2 + Q2(t)]

t = np.linspace(0, tMax, num = 100)
y0 = [x0, y0]
w1 = odeint(f,y0,t)
y11 = w1[:,0]
y21 = w1[:,1]
fig = plt.figure(facecolor = "white")
plt.plot(t,y11,t,y21,linewidth = 2)
plt.ylabel("x, y")
plt.xlabel("t")
plt.grid(True)

```

```
plt.show()
fig.savefig('01.png', dpi = 400)

w1 = odeint(f2,y0,t)
y12 = w1[:,0]
y22 = w1[:,1]
fig2 = plt.figure(facecolor = "white")
plt.plot(t,y12,t,y22,linewidth = 2)
plt.ylabel("x, y")
plt.xlabel("t")
plt.grid(True)
plt.show()
fig2.savefig('02.png', dpi = 400)
```

## 4 Выводы

В результате проделанной работы мы познакомились с моделью “Войны и сражения”. Проверили, как работает модель в различных ситуациях, построили графики  $y(t)$  и  $x(t)$  в рассматриваемых случаях.