

447916

迭代学习控制

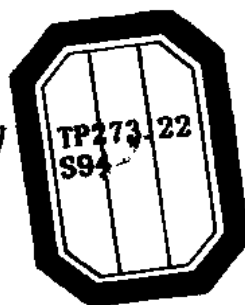
Iterative Learning Control

孙明轩 黄宝健 著



国防工业出版社

·北京·



1999/5

图书在版编目(CIP)数据

迭代学习控制/孙明轩,黄宝健著. - 北京:国防工业出版社,1999.5

ISBN 7-118-01990-9

I.迭… II.①孙… ②黄… III.学习系统,迭代 IV. TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 24834 号

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)

(邮政编码 100044)

国防工业出版社印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 850×1168 1/32 印张 10 251 千字

1999 年 5 月第 1 版 1999 年 5 月北京第 1 次印刷

印数:1—3000 册 定价:19.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

致 读 者

本书由国防科技图书出版基金资助出版。

国防科技图书出版工作是国防科技事业的一个重要方面。优秀的国防科技图书既是国防科技成果的一部分,又是国防科技水平的重要标志。为了促进国防科技事业的发展,加强社会主义物质文明和精神文明建设,培养优秀科技人才,确保国防科技优秀图书的出版,国防科工委于1988年初决定每年拨出专款,设立国防科技图书出版基金,成立评审委员会,扶持、审定出版国防科技优秀图书。

国防科技图书出版基金资助的对象是:

1. 学术水平高,内容有创见,在学科上居领先地位的基础科学理论图书;在工程技术理论方面有突破的应用科学专著。
2. 学术思想新颖,内容具体、实用,对国防科技发展具有较大推动作用的专著;密切结合科技现代化和国防现代化需要的高新技术内容的专著。
3. 有重要发展前景和有重大开拓使用价值,密切结合科技现代化和国防现代化需要的新工艺、新材料内容的科技图书。
4. 填补目前我国科技领域空白的薄弱学科和边缘学科的科技图书。
5. 特别有价值的科技论文集、译著等。

国防科技图书出版基金评审委员会在国防科工委的领导下开展工作,负责掌握出版基金的使用方向,评审受理的图书选题,决定资助的图书选题和资助金额,以及决定中断或取消资助等。经评审给予资助的图书,由国防工业出版社列选出版。

国防科技事业已经取得了举世瞩目的成就。国防科技图书承

担着记载和弘扬这些成就,积累和传播科技知识的使命。在改革开放的新形势下,国防科工委率先设立出版基金,扶持出版科技图书,这是一项具有深远意义的创举。此举势必促使国防科技图书的出版随着国防科技事业的发展更加兴旺。

设立出版基金是一件新生事物,是对出版工作的一项改革。因而,评审工作需要不断地摸索、认真地总结和及时地改进,这样,才能使有限的基金发挥出巨大的效能。评审工作更需要国防科技工业战线广大科技工作者、专家、教授,以及社会各界朋友的热情支持。

让我们携起手来,为祖国昌盛、科技腾飞、出版繁荣而共同奋斗!

国防科技图书出版基金
评审委员会

国防科技图书出版基金

第三届评审委员会组成人员

名誉主任委员	怀国模			
主任委员	黄 宁			
副主任委员	殷鹤龄	高景德	陈芳允	曹 铎
秘书长	崔士义			
委员 (以姓氏笔划为序)	于景元	王小谟	尤予平	冯允成
	刘 仁	朱森元	朵英贤	宋家树
	杨星豪	吴有生	何庆芝	何国伟
	何新贵	张立周	张汝果	张均武
	张涵信	陈火旺	范学虹	柯有安
	侯正明	莫梧生	崔尔杰	

序 一

在工业机器人控制需要的推动下,对于具有重复运行特点的被控对象,以实现其理想(预期)输入的完全跟踪为目标,近年来在控制技术与理论中发展了“迭代学习控制”这一新的研究方向。尽管目前已经取得的研究成果的技术和理论,在应用范围上还有局限性,与人工智能意义的“学习控制”也还有一定距离,但是,它仍以其学习规则的简易可行,在一定范围内对于非线性系统的良好鲁棒性以及实现预期轨迹的完全跟踪等独特优点,吸引了众多自动控制领域内的专家学者的关注,日益成为一富有前景的研究方向。

本书作者从“迭代学习控制”这一研究方向的早期发展时期就开始从事有关专题的综合研究和探索。近年来,在国家自然科学基金的支持下,作者及其合作者更在此研究方向上的一些很重要的专题上得到一系列饶有价值的重要的研究成果。这些研究成果表明,作者对于此研究方向的发展历史、现状及发展动向具有相当全面和深入的了解,掌握了此领域内的关键技术和理论。在此基础上,本书形成对于“迭代学习控制”的各个有关重要专题的已有成果的相当全面的阐述和总结,其内容既包含了国内外专家学者在此方向上的主要研究成果,也收进了作者及其合作者近年来的研究成果。

本书在体裁结构上,根据有关专题的层次和理论的系统面展开,顺乎自然,不留斧凿痕迹。全书论述清晰严谨,行文流畅。本书是国内外目前在此领域内的前沿性专著,它既可说是在此研究方向上从事研究的工作者的一本必备的参考读物,又可作为控制

科学与工程学科及相关学科的一本良好的教学参考书。

吴沧浦

1998 年 8 月

序 二

迭代学习控制(ILC, Iterative Learning Control)是人工智能与自动控制相结合的新的学习控制技术,是智能控制领域中研究、开发及应用的重要发展方向之一。

迭代学习控制具有拟人的学习过程与特性,类似于人的“循序渐进”的学习规律、“边学边干”的学习方法。因而可用于不确定、不确定对象,非线性复杂系统的智能控制。并且,控制器的技术实现相对简便经济,具有广阔的应用前景。

该书是我国第一本关于迭代学习控制的专著,是作者孙明轩等同志多年从事迭代学习控制的科研与教学工作的总结。该书内容充实,取材新颖,不仅系统地介绍了迭代学习控制的基本概念、理论方法和国内外研究的新进展,而且总结了作者们在迭代学习控制理论和应用方面取得的开拓性、创新性研究成果。

《迭代学习控制》的出版,将对迭代学习控制新技术的研究开发与推广应用,对我国人工智能与智能控制科学技术的发展产生积极的促进作用。

中国人工智能学会理事长

涂序彦

1997年11月1日

前 言

学习是人类的智能行为之一。目前已有多种关于学习的定义,其中所描述的学习策略不尽相同。“在重复中学习”(Learning by Trials)的定义中所规定的学习策略看起来更为具体一些。例如,学习是“系统为了适应环境而产生的某种长远变化,这种变化使得系统能够更有效地在下一次完成同一或同类工作”(H. A. Simon);“系统中的学习一词,我们理解为一种过程,通过重复各输入信号并从外部校正该系统,从而使系统对于特定的输入信号(输入作用)具有特定的响应”(Y. Z. Tsypkin)。可以概括地说,“在重复中学习”的定义中所规定的学习策略是经验积累。

宏观上看,迭代学习控制采用“在重复中学习”的学习策略,它具有记忆系统和经验修正机制。具体地说,它通过对被控系统进行控制尝试,以输出轨迹与给定轨迹的偏差修正不理想的控制信号,产生新的控制信号,使得系统跟踪性能得以提高。这种控制技术以非常简单的方式和需要较少的先验知识处理不确定程度相当高的动态系统。它有以下显著的特点:(1)适合于具有某种重复运动(运行)性质的被控对象。(2)实现完全跟踪。这不同于渐近跟踪。(3)在不精确已知(甚至未知)被控对象动力学特性的情况下设计控制器。它适用于一般非线性控制系统。(4)在线计算负担小,适合于快速运动控制。(5)具有记忆功能。在遇到类似控制任务时,它能根据记忆系统中的信息迅速调整控制信号。

执行诸如搬运、装配、焊接、喷涂等任务时的工业机器人具有重复运动性质。这类控制任务是寻取控制输入,使得被控对象的运动轨迹在有限时间区间上沿整个期望轨迹实现零误差跟踪,并且整个控制过程要求快速完成。就这种控制背景来说,迭代学习

控制的提出是非常自然和直接的。迭代学习控制的概念与方法是由日本学者 Uchiyama 于 1978 年首先提出的,但因他的文章是以日文发表,当时并未引起人们的注意。1978—1984 年间一直未见到这方面的文章发表(除重复控制外)。Uchiyama 的做法后来被 Arimoto 和他的同事详尽地描述为正式的迭代学习控制(Iterative Learning Control, ILC)理论。从 1984 年起,他们以英文发表了一系列研究结果。Craig、Casalino 及 Bartolini 也独立地将这种思想应用于机器人控制中,其结果先后都在 1984 年发表。从此,大量的迭代学习控制方面的文章发表,特别是许多重要文章都是在一年一度的 IEEE 决策与控制会议(CDC)及 AUTOMATICA 上发表的。这样,迭代学习控制逐渐引起人们的关注。

作者多年来致力于迭代学习控制理论与应用的研究。取得的成果主要包括:系统正则性与学习律的构造,它涉及正则系统、完全非正则系统、部分非正则系统;系统因果性与学习律的构造,它涉及高阶学习律、闭环学习律、开闭环学习律;含时滞动态系统的迭代学习控制,它涉及状态时滞、控制时滞的情形;控制不可分离动态系统的迭代学习控制,其收敛性分析分别采用线性化手段,以及未采用线性化手段的全局分析;初始条件问题,它涉及 D 型、PD 型学习律的极限轨迹、模型参考学习律、带初始误差修正的学习律;鲁棒性分析,它涉及 D 型学习律、P 型学习律、选择学习算法、鲁棒收敛性;线性定常离散系统迭代学习控制的 2-D 分析;迭代学习辨识及其在外弹道气动系数提取中的应用。

十余年来,迭代学习控制领域已取得了十分丰富的理论结果,有必要系统地予以总结。鉴于国内目前尚无这方面的著作发表,我们结合近年来自己的工作撰写了这本书。本书力图能反映迭代学习控制理论的主脉络,希望它的出版能为推动国内这一领域的研究尽一点力。

本书共八章。第一章概述迭代学习控制系统的机理、特点和主要内容,并从动力学特性的可重复性、跟踪任务、初始定位、学习律、停止条件以及干扰环境六个方面具体描述迭代学习控制过程。

第二章从线性系统正则性的角度展开讨论。它表明利用输出误差的高阶导数构造学习律可保证高阶非正则系统的迭代收敛性。但为了说明学习律中使用输出误差导数并不总是必需的,又给出了非正则系统在 P 型学习律作用下的收敛结果。第三章针对非线性系统构造几种学习律:利用历史迭代数据的高阶学习律,以滤波后的误差信号直接作为控制修正信号的学习律,适于以全状态输出的被控对象的模型算法学习律和模型参考学习律。为了进一步阐述迭代学习控制的适用范围,该章还讨论含状态时滞、控制时滞的被控对象;具有 r 阶相对度的完全非正则被控对象。第四章讨论带遗忘因子的 PID 型和 P 型学习律的鲁棒性。在实施遗忘因子学习律时,选择学习算法给出一种确定初始修正项的方法。对于反馈控制系统,系统因果性允许人们采用迭代学习控制技术。因此,本章还讨论高增益反馈学习律以及反馈-前馈学习控制算法。第五章研究任意初态下的迭代学习控制问题。这里的任意初态是指在每次迭代时,将系统初态固定在一点上,该点可任意给定。该章首先给出 D 型和 PD 型学习律在这种初始条件下的极限轨迹,然后将初始误差引入 D 型学习律,使得迭代输出轨迹在后一段区间上与期望轨迹完全重合。对于非正则及高阶非正则系统,我们也构造相应的带有初始误差修正的学习律。第六章阐述迭代学习控制算法收敛性的另外一种分析手段:迭代学习控制系统的 2-D 分析。本章利用这种分析手段,分别给出正则、非正则、高阶非正则以及含时滞的线性定常离散系统迭代学习控制的收敛性分析。第七章提出迭代学习辨识。首先给出迭代学习辨识问题的提法,然后就系统初态已知、初态扰动和初态固定但未知的情形分别讨论所构造学习律的收敛性。应用雷达实测的弹丸飞行数据,本章给出了外弹道气动系数的实际辨识结果。第八章总结已取得的结果,并提出值得研究的专题。附录给出了相关的数学基础。

本书是在国家自然科学基金资助的研究课题下完成的,其中第五章、第六章以及 7.4 节由黄宝健执笔,其余章节由孙明轩执

笔。陈阳泉、张学智二同志参与该课题的研究工作,为本书提供大量参考资料,对本书的撰写给予了大力支持,在此向二位致以衷心的感谢。另外,感谢北京理工大学吴沧浦教授、北京科技大学涂序彦教授、西安理工大学万伯任教授和新加坡南洋理工大学王郇维博士对作者研究工作提出的各种有益建议和给予的热心支持。还要感谢邓泽英同志帮助整理录入了全部书稿,为本书的写作付出了艰辛的劳动。

同时,感谢国家自然科学基金委员会、国防科技图书出版基金评审委员会、国防工业出版社对本书的资助和出版。

目前,迭代学习控制理论的研究方兴未艾,仍在全面深入地发展。因此,写这本书的主要目的只在于能够起到抛砖引玉的作用。由于我们理论水平有限,以及所做工作的局限性,书中难免有遗漏、谬误和不尽人意之处,恳切希望读者提出宝贵意见。

作 者

目 录

第一章 迭代学习控制系统	1
1.1 迭代学习控制系统概论	1
1.2 迭代学习控制过程的表述	7
1.3 简单实例	12
第二章 线性系统的迭代学习控制	17
2.1 D 型学习律	17
2.2 PID 型学习律	30
2.3 正则线性系统的迭代学习控制	34
2.4 非正则线性系统的迭代学习控制	37
2.5 P 型学习律	42
2.6 最优学习律	52
2.7 基于脉冲响应的学习律	56
第三章 非线性系统的迭代学习控制	64
3.1 高阶学习律	64
3.2 滤波器型学习律	70
3.3 模型算法学习律	74
3.4 模型参考学习律	86
3.5 非线性时滞系统的迭代学习控制	92
3.6 非正则非线性系统的迭代学习控制	105
第四章 鲁棒迭代学习控制	116
4.1 PID 型遗忘因子学习律	117
4.2 P 型遗忘因子学习律	123
4.3 选择学习算法	130

4.4 鲁棒收敛性	143
4.5 高增益反馈学习律	148
4.6 反馈-前馈迭代学习控制	158
4.7 非正则系统的反馈-前馈迭代学习控制	163
第五章 任意固定初态下的迭代学习控制	174
5.1 D 型学习律的极限轨迹	174
5.2 PD 型学习律的极限轨迹	179
5.3 带有初始误差修正的学习律	182
5.4 其它形式的学习律	184
5.5 非正则系统的迭代学习控制	186
5.6 高阶非正则系统的迭代学习控制	195
第六章 迭代学习控制系统的 2-D 分析	203
6.1 Roesser 模型	203
6.2 正则线性离散系统的迭代学习控制	207
6.3 非正则线性离散系统的迭代学习控制	209
6.4 含初始修正的学习律	216
6.5 线性时滞系统的迭代学习控制	221
第七章 迭代学习辨识	230
7.1 迭代学习辨识的表述	230
7.2 系统初态已知时的迭代学习辨识	233
7.3 鲁棒迭代学习辨识	241
7.4 系统初态未知时的迭代学习辨识	247
7.5 外弹道气动系数辨识	253
第八章 迭代学习控制的回顾与展望	257
8.1 研究现状	257
8.2 研究方向	267
附录 迭代学习控制理论的数学基础	271
A.1 Bellman-Gronwall 引理	271
A.2 差分不等式	272
A.3 向量函数的微分中值定理	277

A.4 向量与矩阵的范数	278
A.5 λ 范数	285
参考文献	288

Contents

Chapter1	Iterative Learning Control Systems	1
1.1	Introduction to Iterative Learning Control Systems	1
1.2	Description of Iterative Learning Control Processes	7
1.3	A Simple Example	12
Chapter2	Iterative Learning Control for Linear Systems	17
2.1	D-type Learning Law	17
2.2	PID-type Learning Law	30
2.3	Iterative Learning Control for Regular Linear Systems	34
2.4	Iterative Learning Control for Irregular Linear Systems	37
2.5	P-type Learning Law	42
2.6	Optimal Learning Law	52
2.7	Learning Law Using Impulse Response Sequence	56
Chapter3	Iterative Learning Control for Nonlinear Systems	64
3.1	Higher-Order Learning Law	64
3.2	Filtered-Version Learning Law	70
3.3	Model Algorithmic Learning Law	74
3.4	Model Reference Learning Law	86
3.5	Iterative Learning Control for Nonlinear Time-Delay	

	Systems	92
3.6	Iterative Learning Control for Irregular Nonlinear Systems	105
Chapter4	Robust Iterative Learning Control	116
4.1	PID-type Learning Law With a Forgetting Factor	117
4.2	P-type Learning Law With a Forgetting Factor ...	123
4.3	Selective Learning Scheme	130
4.4	Robust Convergence	143
4.5	Iterative Learning Control Using High-gain Feedback	148
4.6	Feedback-Feedforward Iterative Learning Control	158
4.7	Feedback-Feedforward Iterative Learning Control for Irregular Systems	163
Chapter5	Iterative Learning Control with fixed Initial error	174
5.1	Limit Trajectory Using D-type Learning Law	174
5.2	Limit Trajectory Using PD-type Learning Law ...	179
5.3	Learning Law with Initial Updating Action	182
5.4	Other Types of Learning Laws	184
5.5	Iterative Learning Control for Irregular Systems	186
5.6	Iterative Learning Control for High-Order Irregular Systems	195
Chapter6	2-D Analysis for Iterative Learning Control Systems	203
6.1	Rocsser Model	203
6.2	Iterative Learning Control for Regular Linear Discrete-Time Systems	207

6.3	Iterative Learning Control for Irregular Linear Discrete-Time Systems	209
6.4	Learning Law with Initial Error	216
6.5	Iterative Learning Control for Linear Time-Delay Systems	221
Chapter7	Iterative Learning Identification	230
7.1	Problem Formulation	230
7.2	Iterative Learning Identification with Known Initial States	233
7.3	Robust Iterative Learning Identification	241
7.4	Iterative Learning Identification with Unknown Initial States	247
7.5	Aerodynamic Drag Coefficient Identification from Radar Measured Velocity Data	253
Chapter8	Review and Perspective of Iterative Learning Control	257
8.1	State of the Art of Iterative Learning Control	257
8.2	Future Research Issues of Iterative Learning Control	267
Appendix	Mathematic Foundation of Iterative Learning Control	271
A.1	Bellman-Gronwall Lemma	271
A.2	Difference Inequalities	272
A.3	Mean Value Theorem of Vector-Valued Functions	277
A.4	Vector Norms and Induced Matrix Norms	278
A.5	λ Norm	285

第一章 迭代学习控制系统

迭代学习控制适合于具有某种重复运动(运行)性质的被控对象,可实现有限时间区间上的完全跟踪任务。它通过对被控系统进行控制尝试,以系统输出与给定轨迹的偏差信号修正不理想的控制信号,产生一个新的控制信号,使得系统跟踪性能得以提高。本章概述迭代学习控制系统的特点及其主要内容。从动力学特性的可重复性、跟踪任务、初始定位、学习律、停止条件以及干扰环境六个方面具体描述迭代学习控制过程。为了加深对于这类系统的认识,本章在 1.3 节给出了一个简单迭代学习控制的例子。

1.1 迭代学习控制系统概论

长久以来,在工程中基于模型(model-based)的系统综合方法得到了广泛应用。以这种方法进行控制系统综合的步骤是先建模,再利用数学模型设计控制器。它把系统设计扩展成建模与控制器设计两个任务进行。由此,其控制器结构与参数依赖于受控对象的模型结构和参数。最优控制技术正是如此。它可以给出某种性能指标下的最优输入信号。例如,传统的基于二次指标的最优跟踪控制在已知受控对象动力学特性的精确数学模型时,通过求解微分 Riccati 方程,可以获得这种指标下的最优控制输入信号。

利用机理建模方法或实验建模方法,人们可以建立一个实际动力学对象的数学模型。通常,对象的复杂性导致理想数学模型的复杂性,实际中往往利用简化了的数学模型对实际对象进行分析与综合;另外,随着运行环境的变化,如果对象的特性也随之变

化, 偏离设计时所依据的标称特性, 这样便导致了模型误差。适应控制在控制对象的参数未知或变化的情况下, 通过对控制器的在线自动调整, 最优实现某性能指标。例如, 基于最小方差控制技术设计出的自校正控制器, 当递推辨识过程收敛于精确的系统模型后, 能够达到最小方差指标。

当实际的动力学系统存在未知或不可预计的输入(例如干扰、噪声等), 甚至存在不可预计的动力学特性时, 一个数学系统往往很难准确地描述该系统。鲁棒控制在系统存在不确定性因素的情况下设计控制器, 可确保系统的某种性能指标, 例如鲁棒稳定性、渐近跟踪等。

基于模型的系统综合方法往往仅考虑线性模型结构, 忽略系统中的非线性因素。例如, 伺服系统作为一类控制系统, 要求快速高精度强鲁棒性的跟踪指标。频域法在伺服系统的设计中占有十分重要的地位。然而, 实际的伺服系统中或多或少地存在着限幅、空回、干摩擦和弹变等非线性因素, 仅就线性模型进行控制器设计会降低系统的跟踪性能。无模型(model-free)系统综合方法只利用系统的输入输出信息设计控制器, 其控制器结构不依赖于受控对象动力学特性的结构, 它本质上适用于非线性控制系统。因此, 对于实际系统中固有的非线性因素, 这类综合方法可望获得更高的跟踪性能。

一般来说, 控制系统的任务就是寻求控制 $u(t)$ 使得输出 $y(t)$ 达到所要求的形式。例如, 一种控制任务是使输出 $y(t)$ 尽量小(或尽可能地接近某平衡点); 另一种控制任务是使偏差 $e(t) = r(t) - y(t)$ 尽量小($r(t)$ 为参考或指令信号)。前者被称为调节问题, 后者即所谓的跟踪问题。显然, 调节问题是跟踪问题的特殊情况。目前, 大多数控制技术都是渐近地实现上述控制任务的, 即寻找控制 $u(t)$, 使得 $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ (渐近调节); 或使得 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ (渐近跟踪)。在工程上, 常常以稳态性能指标和瞬态性能指标衡量渐近调节或渐近跟踪的控制效果。我们知道已

有众多的控制方法致力于提高系统的稳态性能和(或)瞬态性能。

实际场合也存在另外一类跟踪问题,它的控制任务是寻找控制 $u(t)$, 使得输出 $y(t)$ 在有限的时间区间 $[0, T]$ 上沿整个期望轨迹实现零误差跟踪, 即 $e(t) = 0, t \in [0, T]$ 。我们称其为有限时间区间上的完全跟踪问题。纵观各阶段控制理论用于系统描述的数学工具和采用的分析与综合方法, 不难看出, 这类跟踪问题是具有挑战性的控制问题。研究这类跟踪问题是具有实际背景的, 例如, 执行诸如焊接、喷涂、装配、搬运等重复任务的工业机器人; 参考或指令信号为周期函数的伺服系统; 数控机床; 磁盘光盘驱动系统; 机械制造中使用的坐标测量机等等。

人们在处理实际场合中的重复操作任务时, 往往依据对象的可重复动态行为与期望行为的差距来调整决策, 通过重复操作, 使得对象行为与期望行为的配合达到要求。这时, 衡量动态行为的指标是某种满意指标, 而不是像最优控制理论中要求达到的那种最优指标。例如, 人们的运动姿式大多是通过学习获得的, 而学习的方法和手段主要是对一系列特定运动动作的不断重复。1978年 Uchiyama 以及 1984 年 Arimoto 等、Craig 及 Casalino 等借鉴人们这种在重复过程中追求满意指标达到期望行为的简单原理, 成功地使得具有强耦合非线性多变量特性的工业机器人快速高精度执行轨迹跟踪任务。其基本作法是对于一个在有限时间区间上执行轨迹跟踪任务的机器人, 利用前一次或前几次操作时测得的误差信息修正控制输入, 使得该重复任务在下次操作过程中做得更好。如此不断重复, 直至在整个时间区间上输出轨迹跟踪上期望轨迹。在 1984 年以后的几年里, Arimoto 等人进一步地提出了迭代学习控制, 并促进了这种理论的发展与完善。这种理论在不精确已知受控对象动力学特性的情形下综合结构简单、在线计算负担小的控制器。由于它属于无模型控制系统综合方法, 因此它本质上适用于非线性控制系统。采用这种学习控制技术达到的完全跟踪性能优越于其它控制方法。渐近跟踪与迭代学习两种控制过程的比较如图 1.1.1 所示。

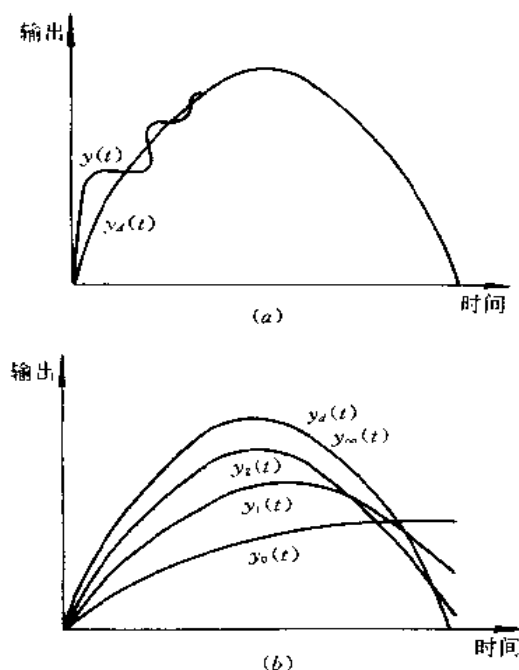


图 1.1.1 两种控制过程的比较
(a) 渐近跟踪过程; (b) 迭代学习过程。

具体地说, 迭代学习控制问题是, 对于一个被控系统, 给定时间区间 $[0, T]$ 上的期望轨迹 $y_d(t)$, 寻找一控制输入 $u(t)$, 使得在该控制输入作用下系统的输出 $y(t)$ 在区间 $[0, T]$ 上尽可能地跟踪上 $y_d(t)$ 。迭代学习控制是通过函数迭代方法寻找 $u(t)$ 的, 即构造用于修正控制的学习律, 使得它产生一函数序列 $\{u_k(t)\}$ 收敛于 $u(t)$ 。学习律的典型形式为

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + U(e_k(t), t)$$

$$e_k(t) = y_d(t) - y_k(t)$$

其中 $k = 0, 1, 2, \dots$ 为迭代次数; $y_k(t)$ 为输入 $u_k(t)$ 时系统产生的输出。这种控制技术之所以被称为是一种学习控制是因为它类似于通过重复达到期望行为的学习方式。 $u_k(t)$ 实际上可以

被看作是第 k 次迭代以前(不包括第 k 次)积累下来的控制经验,而 $U(e_k(t), t)$ 则是第 k 次迭代时获得的有效信息,用以修正以往的控制经验 $u_k(t)$ 。这里 $u_{k+1}(t)$ 作为以往控制经验与修正信息的累加须存储记忆系统中,作为下一次的控制输入。通常, U 采用含定常增益矩阵的线性形式,这时的学习律类似于“死记硬背”式的学习,对搜集到的信息没有经过诸如联想、演绎、归纳等智能处理便被记忆下来。

就所解决的问题而言,收敛性是迭代学习控制理论现有成就中的中心问题。即提出新的学习律和解决与之相应的迭代收敛性分析问题。其中具有开环结构的非适应学习控制受到极大关注。我们知道,给出学习律的形式是迭代学习控制器的设计问题,其中学习增益的设定也是工程实现时不容回避的控制器设计问题。在被控对象动力学特性完全未知时,算法分析给出的收敛性条件并不能用于指导学习增益的选取;但由于收敛性条件所表达的学习增益的收敛域比较宽,在动力学特性不精确已知时,可猜测设置学习增益。显然,这种情形下学习增益的设置具有一定的盲目性。

为了克服猜测设置学习增益的盲目性,直接的方法是采用系统模型。最优学习控制利用被控对象的模型在某种指标函数下最优设定学习增益;适应学习控制可在线调整学习增益。尽管在控制器设计时均需要被控对象的数学模型,但最优学习控制与最优控制的不同之处是,当被控对象动力学特性变化时,最优控制器便不再是最优的了,跟踪性能也随之下落;然而,当特性变化处在一定范围内时,最优学习控制器给出的控制输入仍能达到高跟踪性能。适应学习控制与适应控制相异的地方是,适应学习控制的算法收敛性允许较大的模型失配,即欲达到高跟踪性能并不要求辨识算法收敛于精确的数学模型。

迭代学习控制与鲁棒控制一样,也能够处理实际动力学系统中的不确定性。但迭代学习控制可实现完全跟踪且控制器形式更为简单;鲁棒控制只能实现渐近跟踪。

迭代总要从某初始点开始,几乎所有的收敛性证明都要求初

始条件。解决迭代学习控制理论中的初始条件问题一直是人们追求的目标之一。现已提出的迭代学习控制算法大多要求系统的迭代初态在每一次迭代时严格定位在期望初态上。将初态在每一次迭代时设置在一固定点上(可以与期望初态不同),看来似乎是不能再放宽的初始条件了,除非改变迭代学习控制问题的提法。例如,Inoue 提出的重复控制(Repetitive Control)方法对初始条件就没有要求,但它要求期望轨迹是连续周期函数且控制系统连续运行。由于要求系统连续运行,故此这种理论对系统稳定性以及所给出的收敛性条件比迭代学习控制理论均较为严格。目前,重复控制理论与迭代学习控制理论一起各自在独立地发展着。另外,已提出的周期控制(Periodic Control, Cyclic Control)方法同样不要求初始条件,但对系统的动力学特性也提出了相应的要求。因此,放宽迭代学习控制中的初始条件仍然是具有重要意义的课题。

实际环境中重复定位操作会导致系统存在初态偏移。另外,又由于不具有可重复性的状态扰动和测量噪声也会使得系统动态行为变得不完全可重复,这样,在理想情况下证明是收敛的系统不能保证在非理想情况下也都是收敛的。因此,迭代学习控制系统的稳定性问题和鲁棒性问题成为现有文献中另一个讨论比较多的问题。稳定性问题讨论初态偏移对学习系统的影响;鲁棒性问题讨论存在各种干扰时学习系统的跟踪性能,即学习系统对各种干扰抑制有界性的不变性质,这些干扰包括初态偏移、状态扰动、量测噪声、输入扰动、期望轨迹变动以及学习区间偏移等等。从工程角度看,更值得关注的是鲁棒收敛性问题,它讨论在什么干扰条件下迭代算法是一致收敛的。

迭代学习控制系统的动态过程不仅表现为在控制作用下沿时间轴方向的运动,而且也表现为在学习律修正作用下沿迭代轴方向的运动,它们使得整个运动轨迹向期望轨迹不断靠近。因此,可以应用 2-D 系统理论统一描述这种包括沿时间轴和迭代轴两个方向的运动。与以压缩映射为证明手段不同,2-D 系统理论给出了

分析迭代学习控制算法收敛性的另外一种手段。目前,这方面的结果集中在线性定常离散系统。

许多研究结果还集中于将迭代学习控制应用于各种具有某种重复运动(运行)性质的受控对象,它们扩大了迭代学习控制理论的适用范围。例如,将这种控制技术应用于具有某种重复运行性质的工业过程的课题极其诱人。其控制目的在于改善控制系统的瞬态性能;或实现控制系统的稳态补偿;或抑制系统的不确定性干扰。其基本做法是在反馈控制环基础上,增加一个学习控制环。但是,目前关于其它类型控制系统的研究结果远不如机器人迭代学习控制的研究结果多。

迭代学习控制理论的提出本身有着浓厚的工程背景,这种理论的建立发展与完善必然导致复杂动力学对象的重复操作任务的快速高性能实现。可以相信,随着其应用领域的不断扩展,会愈来愈显示出这门学科分支的光辉前景。

1.2 迭代学习控制过程的表述

迭代学习控制过程可具体地从以下几个方面表述:

1. 动力学特性的可重复性

记 $x(t)$ 为系统的状态向量,它是 n 维的; $u(t)$ 为控制向量,它是 r 维的。当输出 $y(t)$ (m 维向量)为状态的某种向量函数时,连续控制系统可表示为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t) \\ y(t) &= g(x(t), t) \end{aligned} \right\} \quad (1.2.1)$$

式中 f, g 为具有相应维数的向量函数。假设系统在有限时间区间 $[0, T]$ 上重复运行,这里,给定 $T > 0$ 。如果向量函数 f, g 在每一次重复运行时所表示的函数关系不变,则称由它们描述的系统动力学特性(1.2.1)具有可重复性。以 $k = 0, 1, 2, \dots$ 表示重复操作次数,并以 $x_k(t), u_k(t), y_k(t)$ 分别为第 k 次重复时系统的状态向量、控制向量和输出向量,那么,可重复的控制系统(1.2.1)

可以表示为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_k(t) &= f(x_k(t), u_k(t), t) \\ y_k(t) &= g(x_k(t), t) \end{aligned} \right\} \quad (1.2.2)$$

式中 $t \in [0, T]$ 。下述状态空间表达式描述了更一般的可重复动态系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_k(t) &= f(x_k(t), u_k(t), t) \\ y_k(t) &= g(x_k(t), u_k(t), t) \end{aligned} \right\} \quad (1.2.3)$$

对于离散控制系统

$$\left. \begin{aligned} x(t+1) &= f(x(t), u(t), t) \\ y(t) &= g(x(t), t) \end{aligned} \right\} \quad (1.2.4)$$

假设系统在有限离散时间区间 $\{0, 1, 2, \dots, T\}$ 上重复运行。与上述类似, 如果向量函数 f, g 在每一次重复运行时所表示的函数关系不变, 则由式(1.2.4)描述的系统是可重复的, 且可以表示为

$$\left. \begin{aligned} x_k(t+1) &= f(x_k(t), u_k(t), t) \\ y_k(t) &= g(x_k(t), t) \end{aligned} \right\} \quad (1.2.5)$$

与式(1.2.3)相对应, 更一般的可重复离散动态系统可以表示为

$$\left. \begin{aligned} x_k(t+1) &= f(x_k(t), u_k(t), t) \\ y_k(t) &= g(x_k(t), u_k(t), t) \end{aligned} \right\} \quad (1.2.6)$$

2. 跟踪任务

在有限时间区间 $[0, T]$ 上, 给定可达的期望轨迹 $y_d(t)$ ($t \in [0, T]$) 和相应的期望初态 $x_d(0)$ 。这里期望轨迹 $y_d(t)$ 的可达性是指以 $x_d(0)$ 为初态的被控对象存在控制 $u_d(t)$ ($t \in [0, T]$), 在该控制作用下产生相应于期望轨迹 $y_d(t)$ 的状态轨迹 $x_d(t)$ ($t \in [0, T]$)。这里 $u_d(t)$ ($t \in [0, T]$), $x_d(t)$ ($t \in [0, T]$) 分别被称为期望控制和期望状态。

3. 初始定位

自 $t = 0$ 时刻起, 系统的每一次重复操作须从某初始点开始进行。这里初始点是指初始状态 $x_k(0)$ 和(或)初始输出 $y_k(0)$ 。因此, 在每一次迭代开始前须进行初始定位操作。初始点的设置

须满足初始条件。所谓初始条件是指在每次迭代时为保证迭代收敛性,对于系统初始点的重复定位操作所限定的条件。目前,在迭代学习控制系统的收敛性分析中,常见的初始条件有

(1) 迭代初态与期望初态一致,即 $\mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}_d(0) (k = 0, 1, 2, \dots)$ 。这时,称初态是严格重复的。

(2) 迭代初态固定,即 $\mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}^0 (k = 0, 1, 2, \dots)$, \mathbf{x}^0 为某给定初态,它与期望初态 $\mathbf{x}_d(0)$ 不一致。这时,称初态是重复的。

针对不同的系统结构而言,初始条件(1)有时与初始条件(2)是一致的,有时又与如下初始条件等价:迭代初态固定,迭代初始输出与期望初始输出一致,即 $\mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}^0$, $\mathbf{e}_k(0) = 0 (k = 0, 1, 2, \dots)$, \mathbf{x}^0 为某给定初态(详见 2.1 节的讨论)。

4. 学习律

定义输出误差

$$\mathbf{e}_k(t) = \mathbf{y}_d(t) - \mathbf{y}_k(t) \quad (1.2.7)$$

由当前控制 $\mathbf{u}_k(t)$ 和输出误差 $\mathbf{e}_k(t)$ 构成学习律,产生下一次迭代时的控制 $\mathbf{u}_{k+1}(t)$

$$\mathbf{u}_{k+1}(t) = \mathbf{u}_k(t) + \mathbf{U}(\mathbf{e}_k(t), t) \quad (1.2.8)$$

式中 \mathbf{U} 为给定映射,大多取为线性函数;也常常取初始控制输入 $\mathbf{u}_0(t) = 0 (t \in [0, T])$ 。学习律(1.2.8)的常见形式有

D 型学习律

$$\mathbf{u}_{k+1}(t) = \mathbf{u}_k(t) + \Gamma \dot{\mathbf{e}}_k(t) \quad (1.2.9)$$

P 型学习律

$$\mathbf{u}_{k+1}(t) = \mathbf{u}_k(t) + \mathbf{L} \mathbf{e}_k(t) \quad (1.2.10)$$

组合型学习律(PD 型, PI 型, PID 型学习律)一般地可以 PID 型学习律表示

$$\mathbf{u}_{k+1}(t) = \mathbf{u}_k(t) + \Gamma \dot{\mathbf{e}}_k(t) + \mathbf{L} \mathbf{e}_k(t) + \Psi \int_0^t \mathbf{e}_k(\tau) d\tau \quad (1.2.11)$$

式中 Γ, \mathbf{L}, Ψ 为定常增益矩阵。

5. 停止条件

在每一次重复操作结束时,需要检验停止条件。若停止条件成立,则停止迭代运行。常见的停止条件为

$$\|y_d(t) - y_k(t)\| < \varepsilon \quad (t \in [0, T]) \quad (1.2.12)$$

式中 ε 为给定的允许跟踪精度。另外,停止条件也可以通过限定最大迭代次数给出。

6. 干扰环境

在第 k 次迭代时,记 $w_k(t)$ 为状态干扰向量,它是 p 维的; $v_k(t)$ 为输出干扰向量,它是 q 维的。它们或为确定性干扰,或为随机干扰。在干扰环境中重复运行的控制系统(1.2.2)可表示为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_k(t) &= f(x_k(t), u_k(t), w_k(t), t) \\ y_k(t) &= g(x_k(t), v_k(t), t) \end{aligned} \right\} \quad (1.2.13)$$

实际中,学习控制系统受到的干扰除状态和输出干扰外,还包括初态偏移、输入扰动、期望轨迹变动以及学习区间偏移等等。

迭代学习控制的算法流程如图 1.2.1 所示。

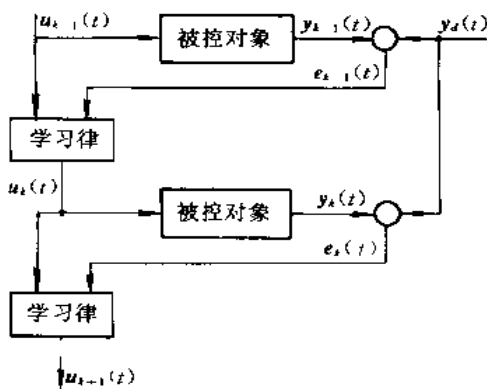


图 1.2.1 迭代学习控制的算法流程

该算法流程可总结为如下步骤:

- (1) 置 $k = 0$ 。给定并存储期望轨迹 $y_d(t)$ 以及初始控制

$u_0(t)(t \in [0, T])$ 。

(2) 通过初始定位操作,使得系统初始输出位于 $y_k(0)$, 相应的初态位于 $x_k(0)$ 。

(3) 对被控系统施加控制输入 $u_k(t)(t \in [0, T])$, 开始重复操作。同时, 采样并存储系统输出 $y_k(t)(t \in [0, T])$ 。

(4) 重复操作结束时, 计算输出误差 $e_k(t) = y_d(t) - y_k(t)(t \in [0, T])$ 。由学习律计算并存储新的控制输入 $u_{k+1}(t)(t \in [0, T])$ 。

(5) 检验迭代停止条件。若条件满足则停止运行; 否则置 $k = k + 1$, 转步骤(2)。

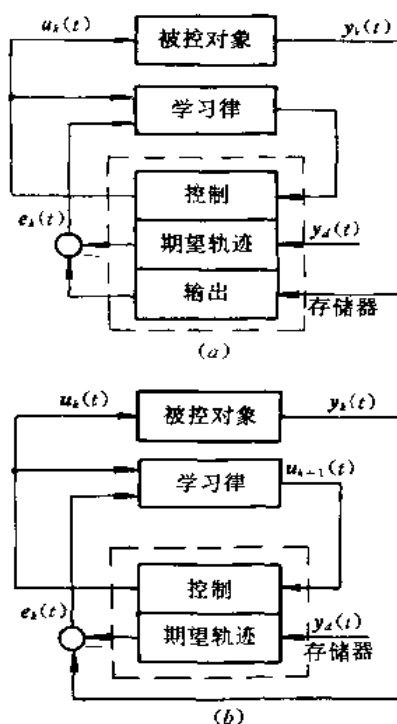


图 1.2.2 学习律的两种计算方式
(a) 离线计算方式; (b) 在线计算方式。

由上述步骤可以看出,在施加控制时,需从存储器中取出控制量。在每一次重复操作结束时计算新控制量存入存储器,刷新旧控制量。我们称这种方式为学习律的离线计算方式(图 1.2.2 (a))。这种方式需要输出信号存储器,但没有在线计算量。另一种方式是学习律的在线计算方式(图 1.2.2 (b))。这种方式在每次采样获得输出信号的同时计算新控制量,并将新控制量存入存储器,作为下一次迭代时的控制量。因此,这种方式不需要输出信号存储器,在线计算量由学习律所需要的计算量决定。

1.3 简单实例

下面,给出一个迭代学习控制的例子。考虑以直流电动机驱动的单自由度线性机械系统,图 1.3.1 为系统方框图。 $y(t)$ 为电动机的角速度, $u(t)$ 为输入电压。图示的闭环系统可以如下微

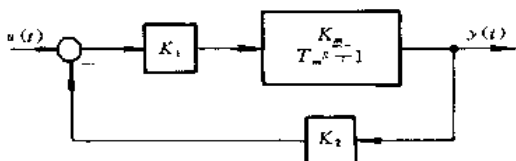


图 1.3.1 直流电动机驱动的单自由度线性机械系统

分方程表示

$$\dot{y}(t) + ay(t) = bu(t)$$

其中 $a = (1 + K_1 K_2 K_m) / T_m$, $b = K_1 K_m / T_m$ 。

当初始时刻取为零时,方程的解为

$$y(t) = e^{-at}y(0) + \int_0^t b e^{-a(t-\tau)} u(\tau) d\tau$$

在区间 $[0, T]$ 上给定一期望角速度轨迹 $y_d(t)$, 现在的问题是寻找输入电压 $u(t)$, 使得在该输入电压作用下, 输出角速度在 $[0, T]$ 上与 $y_d(t)$ 一致。假定 $y_d(t)$ 连续可导。选择任一输入电压 $u_0(t)$ ($t \in [0, T]$), 将 $y_d(t)$ 、 $u_0(t)$ 存入存储器中。将

$u_0(t)$ 加到电动机上, 产生输出 $y_0(t)$ 。同时, 通过采样将 $y_0(t) (t \in [0, T])$ 也存入存储器中。利用实际输出与期望轨迹存在的误差

$$e_0(t) = y_d(t) - y_0(t)$$

可产生新的输入电压

$$u_1(t) = u_0(t) + b^{-1}\dot{e}_0(t)$$

并将其存入存储器中。将该电压加到电动机两端, 可得到第二次操作的输出误差

$$e_1(t) = y_d(t) - y_1(t)$$

$y_1(t)$ 为加入 $u_1(t)$ 时系统所产生的输出。同时, 将 $y_1(t)$ 也存入存储器中。如此下去, 得到以下迭代过程

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + b^{-1}\dot{e}_k(t)$$

$$e_k(t) = y_d(t) - y_k(t)$$

$$y_k(t) = e^{-at}y_k(0) + \int_0^t b e^{-a(t-\tau)} u_k(\tau) d\tau$$

假设 $y_k(0) = y_d(0) (k = 0, 1, 2, \dots)$ 。输出误差可写成

$$\dot{e}_k(t) =$$

$$\dot{y}_d(t) - \dot{y}_k(t) =$$

$$\dot{y}_d(t) - [-ae^{-at}y_k(0) + bu_k(t) - \int_0^t abe^{-a(t-\tau)} u_k(\tau) d\tau] =$$

$$\dot{y}_d(t) - [-ae^{-at}y_{k-1}(0) + bu_{k-1}(t) - \int_0^t abe^{-a(t-\tau)} u_{k-1}(\tau) d\tau] -$$

$$[\dot{e}_{k-1}(t) - \int_0^t ae^{-a(t-\tau)} \dot{e}_{k-1}(\tau) d\tau] =$$

$$\dot{y}_d(t) - \dot{y}_{k-1}(t) - \dot{e}_{k-1}(t) + \int_0^t ae^{-a(t-\tau)} \dot{e}_{k-1}(\tau) d\tau =$$

$$a \int_0^t e^{-a(t-\tau)} \dot{e}_{k-1}(\tau) d\tau$$

记 $z_k(t) = e^{at}\dot{e}_k(t)$, 则有

$$|z_k(t)| \leq |a| \int_0^t |z_{k-1}(\tau)| d\tau$$

一般地

$$\begin{aligned}
 |z_k(t)| &\leq |a|^2 \int_0^t \int_0^{t_1} |z_{k-2}(t_2)| dt_2 dt_1 \leq \\
 &|a|^k \int_0^t \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{k-1}} |z_0(t_k)| dt_k dt_{k-1} \cdots dt_1 \leq \\
 &\frac{M |a|^k t^k}{k!} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)
 \end{aligned}$$

这里 $M = \sup_{0 \leq t \leq T} |e^{at} \dot{e}_0(t)|$ 。

对于可导函数 $a_1(t)$ 和 $a_2(t)$, 使得 $a_1(t) = a_2(t) (t \in [0, T])$ 的充要条件是

$$\begin{aligned}
 a_1(0) &= a_2(0) \\
 \dot{a}_1(t) &= \dot{a}_2(t) \quad (t \in [0, T])
 \end{aligned}$$

因此, 由初始条件 $y_k(0) = y_d(0) (k = 0, 1, 2, \cdots)$ 知, 输出误差一致收敛, 即 $\lim_{k \rightarrow \infty} e_k(t) = 0 (t \in [0, T])$ 。

上面给出的学习律是在 b 已知时构造的。若 b 未知, 则可由其估计值 β 构造学习律

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \beta^{-1} \dot{e}_k(t)$$

可以证明, 当 $|1 - b\beta^{-1}| < 1$ 时, 该迭代过程也收敛。仍假设

$y_k(0) = y_d(0) (k = 0, 1, 2, \cdots)$ 。这时, 输出误差可写成

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_k(t) &= \\
 \dot{y}_d(t) - [-ae^{-at}y_{k-1}(0) + bu_{k-1}(t) - \int_0^t abe^{-a(t-\tau)}u_{k-1}(\tau)d\tau] - \\
 [b\beta^{-1}\dot{e}_{k-1}(t) - \int_0^t ab\beta^{-1}e^{-a(t-\tau)}\dot{e}_{k-1}(\tau)d\tau] = \\
 \dot{y}_d(t) - \dot{y}_{k-1}(t) - b\beta^{-1}\dot{e}_{k-1}(t) + \int_0^t ab\beta^{-1}e^{-a(t-\tau)}\dot{e}_{k-1}(\tau)d\tau = \\
 (1 - b\beta^{-1})\dot{e}_{k-1}(t) + \int_0^t ab\beta^{-1}e^{-a(t-\tau)}\dot{e}_{k-1}(\tau)d\tau
 \end{aligned}$$

两端同乘正函数 $e^{-\lambda t} (t \in [0, T])$, 然后取绝对值

$$e^{-\lambda t} |\dot{e}_k| \leq$$

$$\begin{aligned}
& |1 - b\beta^{-1}| \{ e^{-\lambda t} | \dot{e}_{k-1}(t) | \} \\
& + |ab\beta^{-1}| \int_0^t e^{-(a+\lambda)(t-\tau)} | e^{-\lambda \tau} | \dot{e}_{k-1}(\tau) | | d\tau \leq \\
& (|1 - b\beta^{-1}| + |ab\beta^{-1}| \frac{1 - e^{-(a+\lambda)T}}{\lambda + a}) \sup_{t \in [0, T]} \{ e^{-\lambda t} | \dot{e}_{k-1}(t) | \}
\end{aligned}$$

进一步地, 当 $\lambda > -a$ 时

$$\begin{aligned}
& \sup_{t \in [0, T]} \{ e^{-\lambda t} | \dot{e}_k(t) | \} \leq \\
& (|1 - b\beta^{-1}| + |ab\beta^{-1}| \frac{1 - e^{-(a+\lambda)T}}{\lambda + a}) \sup_{t \in [0, T]} \{ e^{-\lambda t} | \dot{e}_{k-1}(t) | \}
\end{aligned}$$

由于 $|1 - b\beta^{-1}| < 1$, 可选取足够大的 λ 使得

$$|1 - b\beta^{-1}| + |ab\beta^{-1}| \frac{1 - e^{-(a+\lambda)T}}{\lambda + a} < 1$$

因此 $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} | e^{-\lambda t} | \dot{e}_k(t) | = 0$ 。又由 $\sup_{t \in [0, T]} | \dot{e}_k(t) | \leq e^{\lambda T}$

$\sup_{t \in [0, T]} \{ e^{-\lambda t} | \dot{e}_k(t) | \}$ 可知, $\lim_{k \rightarrow \infty} \dot{e}_k(t) = 0 (t \in [0, T])$ 。进一步地, 由初始条件 $y_k(0) = y_d(0) (k = 0, 1, 2, \dots)$ 可得输出误差的一致收敛性。

上述表明, 当 b 不精确已知时, 只要 β 满足 $|1 - b\beta^{-1}| < 1$, 迭代过程仍能够收敛。满足这一条件的 β 的范围是非常宽的, 只要 $b\beta^{-1} \in (0, 2)$ 即可。

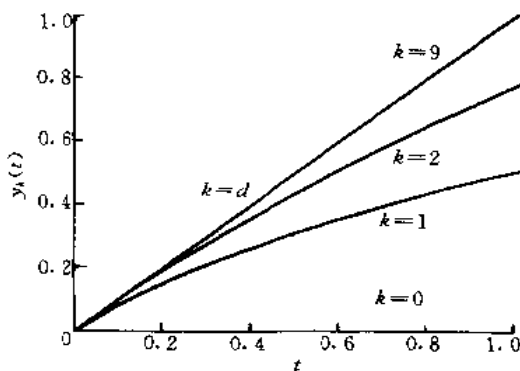


图 1.3.2 迭代输出轨迹

下面给出算例。设期望轨迹为

$$y_d(t) = t \quad (t \in [0, 1])$$

设 $a = b = 1$ 。只要取 $\beta \in (0.5, \infty)$, 便能够满足收敛性条件。这里取 $\beta = 1.25$ 。在初始条件 $y_k(0) = y_d(0) (k = 0, 1, 2, \dots)$ 下, 选取初始控制 $u_0(t) = 0$ 。迭代输出轨迹如图 1.3.2 所示。图中 $y_9(t)$ 与 $y_d(t)$ 重合, 表明算法一致收敛。

第二章 线性系统的迭代学习控制



两种基本形式的学习律是 D 型学习律和 P 型学习律。本章首先给出 D 型学习律中学习增益需满足的三种收敛性充分条件和相应的初始条件。同时, 对于 PID 型学习律, 给出了以谱半径表示的收敛性充分条件。关于系统正则性的讨论表明, 利用输出误差的高阶导数构造学习律可保证迭代过程的收敛性。但为了说明学习律中使用输出误差导数信号并不总是必须的, 又给出了非正则系统在 P 型学习律作用下的收敛结果。最优学习律给出了一种通过最优化目标函数确定控制器参数的设计方法。最后, 讨论利用被控对象脉冲响应构造的一种学习律。

2.1 D 型学习律

在已提出的多种学习律中, D 型学习律是首先被提出来的的一种。其修正作用项仅仅利用输出误差 $e_k(t) = y_d(t) - y_k(t)$ 的导数信号 $\dot{e}_k(t)$ 。最简单的 D 型学习律为

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \Gamma \dot{e}_k(t) \quad (2.1.1)$$

式中 $t \in [0, T]$, k 为迭代次数, Γ 为定常增益矩阵。容易看出, 学习律(2.1.1)又可写成

$$u_k(t) = u_0(t) + \Gamma \sum_{i=0}^{k-1} \dot{e}_i(t)$$

由此可知, 学习律(2.1.1)的含义即是, 以输出误差导数信号的累加构成控制输入信号。采用 D 型学习律的迭代学习控制系统的结构图如图 2.1.1 所示。

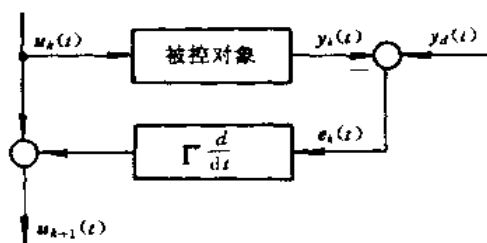


图 2.1.1 D型学习律

以差商代替学习律(2.1.1)中的导数,可得到该学习律的近似离散化公式。设采样周期为 h , 则

$$u_{k+1}(th) = u_k(th) + \Gamma \frac{1}{h} (e_k(th+h) - e_k(th))$$

这里 $t = 0, 1, \dots, [T/h]$ 。不把 h 明显地表示出来,它又可写成

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \Gamma(e_k(t+1) - e_k(t)) \quad (2.1.2)$$

式中 $t = 0, 1, \dots, T$ 。

另一种离散形式的学习律是

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \Gamma e_k(t+1) \quad (2.1.3)$$

可以看出,将式(2.1.2)中的 $e_k(t)$ 略掉便得到式(2.1.3)。实际上,两种学习律的收敛条件是相同的。

2.1.1 连续时间系统

考虑具有重复运行性质的线性定常系统

$$\dot{x}_k(t) = Ax_k(t) + Bu_k(t) \quad (2.1.4a)$$

$$y_k(t) = Cx_k(t) \quad (2.1.4b)$$

式中 $t \in [0, T]$, $x_k(t) \in \mathbf{R}^n$, $u_k(t) \in \mathbf{R}^r$, $y_k(t) \in \mathbf{R}^m$ 。

给定在 $[0, T]$ 上可微的期望轨迹 $y_d(t)$ ($t \in [0, T]$)。设 $u_d(t)$ ($t \in [0, T]$) 为一控制,它使得系统(2.1.4)的初态位于 $x_d(0)$ 时的输出轨迹为

$$y_d(t) = Cx_d(t)$$

$$\mathbf{x}_d(t) = e^{At} \mathbf{x}_d(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}_d(\tau) d\tau$$

$\mathbf{x}_d(t)$ 为相应的状态轨迹。为叙述方便, 这里称 $\mathbf{u}_d(t)$ 、 $\mathbf{x}_d(t)$ 分别为期望控制、期望状态, $\mathbf{x}_d(0)$ 为期望初态。对该系统施加学习律(2.1.1)时, 可选取在 $[0, T]$ 上分段连续的初始控制 $\mathbf{u}_0(t)$ 。

定理 2.1.1 给定由式(2.1.4)和式(2.1.1)描述的迭代学习控制系统。若条件

$$(1) \quad \|\mathbf{I} - \mathbf{FCB}\| < 1$$

$$(2) \quad \mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}_d(0) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

则当 $k \rightarrow \infty$ 时, 系统的迭代输出 $\mathbf{y}_k(t)$ 在 $[0, T]$ 上一致收敛于期望轨迹 $\mathbf{y}_d(t)$, 即 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{y}_k(t) = \mathbf{y}_d(t) (t \in [0, T])$ 。

证明 利用式(2.1.1)和条件(2)可将第 $k+1$ 次迭代时的控制误差写成

$$\Delta \mathbf{u}_{k+1}(t) =$$

$$\Delta \mathbf{u}_k(t) - \mathbf{F} \dot{\mathbf{e}}_k(t) =$$

$$\Delta \mathbf{u}_k(t) - \mathbf{FC} \frac{d}{dt} \int_0^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}_k(\tau) d\tau =$$

$$[\mathbf{I} - \mathbf{FCB}] \Delta \mathbf{u}_k(t) - \int_0^t \mathbf{FCA} e^{A(t-\tau)} \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}_k(\tau) d\tau$$

式中 $\Delta \mathbf{u}_k(t) = \mathbf{u}_d(t) - \mathbf{u}_k(t)$ 。两端取范数

$$\begin{aligned} \|\Delta \mathbf{u}_{k+1}(t)\| &\leq \|\mathbf{I} - \mathbf{FCB}\| \|\Delta \mathbf{u}_k(t)\| + \\ &\quad \int_0^t \|\mathbf{FCA} e^{A(t-\tau)} \mathbf{B}\| \|\Delta \mathbf{u}_k(\tau)\| d\tau \end{aligned}$$

两端同乘正函数 $e^{-\lambda t} (t \in [0, T])$

$$e^{-\lambda t} \|\Delta \mathbf{u}_{k+1}(t)\| \leq \|\mathbf{I} - \mathbf{FCB}\| e^{-\lambda t} \|\Delta \mathbf{u}_k(t)\| +$$

$$b_1 \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} e^{-\lambda \tau} \|\Delta \mathbf{u}_k(\tau)\| d\tau$$

式中 $b_1 = \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{FCA} e^{At} \mathbf{B}\|$ 。由 λ 范数的定义可知

$$\|\Delta u_{k+1}\|_{\lambda} \leq \|I - \mathbf{FCB}\| + b_1 \frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda} \|\Delta u_k\|_{\lambda}$$

当选取足够大的 λ 时, 条件(1)蕴涵

$$\|I - \mathbf{FCB}\| + b_1 \frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda} < 1$$

因此

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\Delta u_k\|_{\lambda} = 0 \quad (2.1.5)$$

又由

$$e_k(t) = \int_0^t C e^{A(t-\tau)} B \Delta u_k(\tau) d\tau$$

知

$$\|e_k\|_{\lambda} \leq cb \frac{1 - e^{(a-\lambda)T}}{\lambda - a} \|\Delta u_k\|_{\lambda} \quad (2.1.6)$$

式中 $\lambda > a$, $a = \|A\|$, $b = \|B\|$, $c = \|C\|$ 。结合式(2.1.5)和式(2.1.6)知, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|e_k\|_{\lambda} = 0$ 。进一步地, 由 $\sup_{t \in [0, T]} \|e_k(t)\| \leq e^{\lambda T} \|e_k\|_{\lambda}$, 证得 $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \|e_k(t)\| = 0$ 。证毕。

该定理对于满足 $y_d(0) = Cx_d(0)$ 的初态 $x_d(0)$ 均成立。在一些特殊情况下, 条件(2)可以放松为允许某些初态设定在任意点上。例如, 当 $C = [0, \hat{C}]$ 时, 相应的状态可分为 $x = [x_1^T, x_2^T]^T$ 。这时 x_1 的初值便可以设定在任意点上, 但 x_2 的初值需满足 $y_d(0) = \hat{C}x_{2,d}(0)$ 。下面的定理给出了初态存在某种特定偏移时的算法收敛条件。

定理 2.1.2 给定由式(2.1.4)和式(2.1.1)描述的迭代学习控制系统。若条件

$$(1) \quad \|I - \mathbf{CBF}\| < 1$$

$$(2) \quad x_{k+1}(0) = x_k(0) + \mathbf{BF}e_k(0) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

则当 $k \rightarrow \infty$ 时, 系统的迭代输出 $y_k(t)$ 在 $[0, T]$ 上一致收敛于期望轨迹 $y_d(t)$, 即 $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k(t) = y_d(t) (t \in [0, T])$ 。

证明 由式(2.1.4a)和条件(2)知, 在控制 $u_{k+1}(t)$ 作用下, 有

$$\begin{aligned}
x_{k+1}(t) &= e^{At}x_{k+1}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu_{k+1}(\tau) d\tau = \\
&= e^{At}(x_k(0) + B\Gamma e_k(0)) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B(u_k(\tau) + \Gamma \dot{e}_k(\tau)) d\tau = \\
&= e^{At}x_k(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu_k(\tau) d\tau \\
&+ e^{At}B\Gamma e_k(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\Gamma \dot{e}_k(\tau) d\tau = \\
&= x_k(t) + e^{At}B\Gamma e_k(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\Gamma \dot{e}_k(\tau) d\tau
\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}
&\int_0^t e^{A(t-\tau)} B\Gamma \dot{e}_k(\tau) d\tau = \\
&= B\Gamma e_k(t) - e^{At}B\Gamma e_k(0) + \int_0^t A e^{A(t-\tau)} B\Gamma e_k(\tau) d\tau
\end{aligned}$$

所以

$$x_{k+1}(t) = x_k(t) + B\Gamma e_k(t) + \int_0^t A e^{A(t-\tau)} B\Gamma e_k(\tau) d\tau \quad (2.1.7)$$

利用式(2.1.7), 可将第 $k+1$ 次迭代时的输出误差写成

$$\begin{aligned}
e_{k+1}(t) &= y_d(t) - Cx_{k+1}(t) = \\
&= y_d(t) - C\{x_k(t) + B\Gamma e_k(t) + \int_0^t A e^{A(t-\tau)} B\Gamma e_k(\tau) d\tau\} = \\
&= [I - CB\Gamma]e_k(t) - \int_0^t CA e^{A(t-\tau)} B\Gamma e_k(\tau) d\tau
\end{aligned}$$

两端取范数

$$\begin{aligned}
\|e_{k+1}(t)\| &\leq \|I - CB\Gamma\| \|e_k(t)\| + \\
&\int_0^t \|CA e^{A(t-\tau)} B\Gamma\| \|e_k(\tau)\| d\tau \leq \\
&\|I - CB\Gamma\| \|e_k(t)\| + b_1 \int_0^t \|e_k(\tau)\| d\tau
\end{aligned}$$

式中 $b_1 = \sup_{t \in [0, T]} \|CA e^{At} B\Gamma\|$ 。两端同乘正函数 $e^{-\lambda t}$ ($t \in [0,$

$T))$

$$e^{-\lambda t} \|e_{k+1}(t)\| \leq \|I - \mathbf{CB}\Gamma\| e^{-\lambda t} \|e_k(t)\| + b_1 \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} e^{-\lambda \tau} \|e_k(\tau)\| d\tau$$

由 λ 范数的定义可知

$$\|e_{k+1}\|_\lambda \leq \{ \|I - \mathbf{CB}\Gamma\| + b_1 \frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda} \} \|e_k\|_\lambda$$

至此,由条件(1)容易证得该定理。

由定理 2.1.2 的条件(2)可知

$$e_{k+1}(0) = [I - \mathbf{CB}\Gamma]e_k(0)$$

两端取范数,可得

$$\|e_{k+1}(0)\| \leq \|I - \mathbf{CB}\Gamma\| \|e_k(0)\|$$

这样,条件(1)蕴涵 $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k(0) = y_d(0)$ 。仍由该定理的条件(2)可知

$$x_d(0) - x_{k+1}(0) = [I - \mathbf{B}\Gamma\mathbf{C}](x_d(0) - x_k(0))$$

因此

$$\|x_d(0) - x_{k+1}(0)\| \leq \|I - \mathbf{B}\Gamma\mathbf{C}\| \|x_d(0) - x_k(0)\|$$

显然,使得条件(1)成立的增益矩阵 Γ 并不一定使得 $\|I - \mathbf{B}\Gamma\mathbf{C}\| < 1$ 。因此,对于某个给定的初态 $x_d(0)$, $x_k(0) \rightarrow x_d(0)$ ($k \rightarrow \infty$) 不一定成立,但 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{C}x_k(0) = \mathbf{C}x_d(0)$ 总是成立的。故在迭代过程中,条件(2)是一种允许迭代初态相对于某给定期望初态存在偏移的初始条件。然而,在进行每次迭代的初始定位操作时,这种初始条件较难实现。这主要是因为它要求精确已知系统参数矩阵 \mathbf{B} 以及上次迭代时的初态。这里可以给出一种不需要已知系统参数矩阵 \mathbf{B} 的初始条件

$$\left. \begin{aligned} x_k(0) &= x^0 \\ e_k(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.1.8)$$

式中 x^0 为一给定初态。容易看出,由式(2.1.8)可推知条件(2)成立。因此,定理 2.1.2 中的条件(2)可以用初始条件(2.1.8)替换。

同样,初始条件(2.1.8)也与定理 2.1.1 中的条件(2)一致。

实际上,式(2.1.8)又可写成

$$\mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}^0$$

$$\mathbf{y}_d(0) = \mathbf{C}\mathbf{x}^0$$

由式(2.1.4 b)和式(2.1.8)可得

$$\mathbf{y}_{k+1}(0) = \mathbf{C}\mathbf{x}_{k+1}(0) = \mathbf{C}\mathbf{x}_k(0) = \mathbf{y}_k(0)$$

因此,初始条件(2.1.8)等价于

$$\mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}^0$$

$$\mathbf{e}_0(0) = 0$$

增益矩阵 \mathbf{F} 是 $r \times m$ 维的, \mathbf{CB} 是 $m \times r$ 维的。在定理 2.1.1 中,欲使条件(1)成立的 \mathbf{F} 存在,要求 \mathbf{CB} 列满秩。因此,当输入维数多于输出维数时,即 $r > m$,不存在 \mathbf{F} 使得定理 2.1.1 中的条件(1)成立。而在定理 2.1.2 中,欲使条件(1)成立的 \mathbf{F} 存在,必须有 \mathbf{CB} 行满秩。因此,当输出维数多于输入维数时,即 $m > r$,不存在 \mathbf{F} 使得定理 2.1.2 中的条件(1)成立(参见附录定理 A.4.6)。在许多文献中,假设输入维数与输出维数相同,即 $r = m$, \mathbf{CB} 为 $m \times m$ 维方阵。这时,欲使以上两定理中的 \mathbf{F} 存在,需要 \mathbf{CB} 满秩。值得说明的是,这两个定理给出的只是充分条件,当某个 \mathbf{F} 不能使得 $\|\mathbf{I} - \mathbf{F}\mathbf{C}\mathbf{B}\| < 1$ 或 $\|\mathbf{I} - \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{F}\| < 1$ 成立时,并不意味着该 \mathbf{F} 不能使得算法收敛。下述的定理和算例说明了可能存在这种例外情形。

定理 2.1.3 给定由式(2.1.4)和式(2.1.1)描述的迭代学习控制系统。若条件

$$(1) \quad \|\mathbf{I} - \mathbf{B}\mathbf{F}\mathbf{C}\| < 1$$

$$(2) \quad \mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}^0, \mathbf{y}_k(0) = \mathbf{y}_d(0) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

则当 $k \rightarrow \infty$ 时,系统的迭代输出 $\mathbf{y}_k(t)$ 在 $[0, T]$ 上一致收敛于期望轨迹 $\mathbf{y}_d(t)$, 即 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{y}_k(t) = \mathbf{y}_d(t) \quad (t \in [0, T])$ 。

证明 由式(2.1.7)可知

$$\Delta \mathbf{x}_{k+1}(t) = [\mathbf{I} - \mathbf{B}\mathbf{F}\mathbf{C}] \Delta \mathbf{x}_k(t) - \int_0^t \mathbf{A} e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{F}\mathbf{C} \Delta \mathbf{x}_k(\tau) d\tau$$

式中 $\Delta x_k(t) = x_d(t) - x_k(t)$ 。两端取 λ 范数

$$\|\Delta x_{k+1}\|_\lambda \leq \left\{ \|I - \mathbf{B}\Gamma\mathbf{C}\| + b_1 \frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda} \right\} \|\Delta x_k\|_\lambda$$

式中 $b_1 = \sup_{t \in [0, T]} \|A e^{At} \mathbf{B}\Gamma\mathbf{C}\|$ 。由条件(1)知, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\Delta x_k\|_\lambda = 0$ 。又由 $\|e_k\|_\lambda \leq \|\mathbf{C}\| \|\Delta x_k\|_\lambda$ 以及 λ 范数的定义可证得该定理。

例 2.1.1 考虑 LTI 系统

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

容易看出

$$\mathbf{CB} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

取

$$\Gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

当范数 $\|\cdot\|$ 取为 l_∞ 范数时, 定理 2.1.1 中的条件(1)可写成

$$\max\{|1 - a - b| + |a + b|, |c + d| + |1 - c - d|\} < 1$$

定理 2.1.2 中的条件(1)可写成

$$\max\{|1 - a - c| + |b + d|, |a + c| + |1 - b - d|\} < 1$$

定理 2.1.3 中的条件(1)可写成

$$\max\{1, |a + c| + |1 - a - c - b - d|\} < 1$$

容易证明使以上三式成立的 Γ 不存在。

对于另一 LTI 系统, 其中

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{CB} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

定理 2.1.1 中的条件(1)可写成

$$\max\{|1 - a - b| + |a + 2b|, |c + d| + |1 - c - 2d|\} < 1$$

定理 2.1.2 中的条件(1)可写成

$$\max\{|1 - a - c| + |b + d|, |a + 2c| + |1 - b - 2d|\} < 1$$

定理 2.1.3 中的条件(1)可写成

$$\max\{|1 - a - c - b - d| + |b + d|, \\ |c + d| + |1 - d|\} < 1$$

当选取

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1.5 & 1 \end{bmatrix}$$

时,定理 2.1.1 中的条件(1)和定理 2.1.2 中的条件(1)不能成立,而定理 2.1.3 中的条件(1)能够成立。在该增益矩阵下,给出如下算例。给定输出期望轨迹为

$$\mathbf{y}_d(t) = \begin{bmatrix} t(1-t) \\ 1.5t \end{bmatrix} \quad (t \in [0,1])$$

选取 $\mathbf{u}_0(t) = [0,0]^T (t \in [0,1])$, $\mathbf{x}_k(0) = [0,0]^T (k = 0, 1, 2, \dots)$ 。输出迭代轨迹如图 2.1.2 所示,当 k 足够大时,系统的迭代输出 $\mathbf{y}_k(t)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于期望轨迹 $\mathbf{y}_d(t)$ 。

2.1.2 离散时间系统

考虑重复操作下的线性时变系统

$$\mathbf{x}_k(t+1) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}_k(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}_k(t) \quad (2.1.9a)$$

$$\mathbf{y}_k(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}_k(t) \quad (2.1.9b)$$

式中 $t \in \{0, 1, \dots, T\}$, $\mathbf{x}_k(t) \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{u}_k(t) \in \mathbf{R}^r$, $\mathbf{y}_k(t) \in \mathbf{R}^m$ 。

当系统初态为 $\mathbf{x}_k(0)$, 输入 $\mathbf{u}_k(t)$, $0 \leq t \leq T$ 时, (2.1.9a) 的解可写成

$$\mathbf{x}_k(t) = \Phi(t, 0)\mathbf{x}_k(0) + \sum_{s=0}^{t-1} \Phi(t, s+1)\mathbf{B}(s)\mathbf{u}_k(s) \\ (1 \leq t \leq T+1) \quad (2.1.10)$$

这里 $\Phi(t, s)$ 是由 (2.1.9a) 中的 $\mathbf{A}(t)$ 确定的状态转移矩阵, 它满足

$$\Phi(t, s) = \mathbf{A}(t-1)\mathbf{A}(t-2)\cdots\mathbf{A}(s) \quad (t > s)$$

$$\Phi(s, s) = \mathbf{I}$$

在学习律

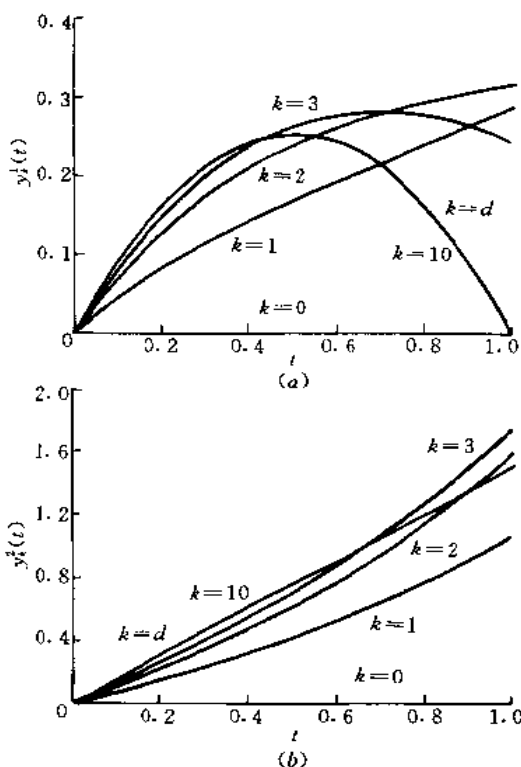


图 2.1.2 例 2.1.1 的迭代输出轨迹

(a) $y_k^1(t)$; (b) $y_k^2(t)$ 。

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \Gamma(t)(e_k(t+1) - e_k(t)) \quad (2.1.11)$$

的作用下, 下述定理给出了在区间 $0 \leq t \leq T+1$ 上输出误差的收敛性。这里考虑区间 $0 \leq t \leq T$ 上而不是区间 $0 \leq t \leq T-1$ 上的控制是为了与 λ 范数的定义相吻合。

定理 2.1.4 对于由式(2.1.9)描述的系统, 给定可达的期望轨迹 $y_d(t)$ ($0 \leq t \leq T+1$), 如果条件

- (1) $\|I - \Gamma(t)C(t+1)B(t)\| \leq \rho < 1 \quad (0 \leq t \leq T)$
- (2) $x_k(0) = x_d(0) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$

那么, 学习律(2.1.11)使得输出轨迹一致收敛于期望轨迹, 即当 $k \rightarrow \infty$ 时, $y_k(t) \rightarrow y_d(t)$ ($0 \leq t \leq T+1$)。

证明 考察第 $k+1$ 次迭代时的控制误差

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{u}_{k+1}(t) &= \\ \Delta \mathbf{u}_k(t) - \mathbf{F}(t)\mathbf{C}(t+1)\Delta \mathbf{x}_k(t+1) + \mathbf{F}(t)\mathbf{C}(t)\Delta \mathbf{x}_k(t) &= \\ [\mathbf{I} - \mathbf{F}(t)\mathbf{C}(t+1)\mathbf{B}(t)]\Delta \mathbf{u}_k(t) + \\ \mathbf{F}(t)[\mathbf{C}(t) - \mathbf{C}(t+1)\mathbf{A}(t)]\Delta \mathbf{x}_k(t)\end{aligned}$$

式中 $0 \leq t \leq T$, $\Delta \mathbf{u}_k(t) = \mathbf{u}_d(t) - \mathbf{u}_k(t)$, $\Delta \mathbf{x}_k(t) = \mathbf{x}_d(t) - \mathbf{x}_k(t)$ 。

两端取范数

$$\begin{aligned}\|\Delta \mathbf{u}_{k+1}(t)\| &\leq \|\mathbf{I} - \mathbf{F}(t)\mathbf{C}(t+1)\mathbf{B}(t)\| \|\Delta \mathbf{u}_k(t)\| + \\ &\quad \|\mathbf{F}(t)[\mathbf{C}(t) - \mathbf{C}(t+1)\mathbf{A}(t)]\| \|\Delta \mathbf{x}_k(t)\| \leq \\ &\quad \rho \|\Delta \mathbf{u}_k(t)\| + b_1 \|\Delta \mathbf{x}_k(t)\| \quad (2.1.12)\end{aligned}$$

式中 $b_1 = \sup_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{F}(t)[\mathbf{C}(t) - \mathbf{C}(t+1)\mathbf{A}(t)]\|$ 。利用式(2.1.10)可将式(2.1.12)写成

$$\begin{aligned}\|\Delta \mathbf{u}_{k+1}(t)\| &\leq \\ \rho \|\Delta \mathbf{u}_k(t)\| + b_1 \sum_{s=0}^{t-1} \|\Phi(t, s+1)\mathbf{B}(s)\| \|\Delta \mathbf{u}_k(s)\| &\leq \\ \rho \|\Delta \mathbf{u}_k(t)\| + b_1 b_2 \sum_{s=0}^{t-1} \|\Delta \mathbf{u}_k(s)\| \quad (1 \leq t \leq T)\end{aligned}$$

式中 $b_2 = \sup_{1 \leq t \leq T, 0 \leq s \leq t-1} \|\Phi(t, s+1)\mathbf{B}(s)\|$ 。上式两端同乘 λ^t , $0 < \lambda < 1$, 可得

$$\begin{aligned}\lambda^t \|\Delta \mathbf{u}_{k+1}(t)\| &\leq \rho \lambda^t \|\Delta \mathbf{u}_k(t)\| + b_1 b_2 \sum_{s=0}^{t-1} \lambda^{t-s} \lambda^s \|\Delta \mathbf{u}_k(s)\| \leq \\ &\quad \rho \lambda^t \|\Delta \mathbf{u}_k(t)\| + b_1 b_2 \sum_{s=0}^{t-1} \lambda^{t-s} \cdot \\ &\quad \sup_{0 \leq \tau \leq T} \{\lambda^\tau \|\Delta \mathbf{u}_k(\tau)\|\} \leq \\ &\quad \rho \lambda^t \|\Delta \mathbf{u}_k(t)\| + b_1 b_2 \sum_{s=0}^{t-1} \lambda^{t-s} \|\Delta \mathbf{u}_k\|_\lambda \leq \\ &\quad \rho \lambda^t \|\Delta \mathbf{u}_k(t)\| + b_1 b_2 \frac{\lambda(1-\lambda^{T+1})}{1-\lambda} \|\Delta \mathbf{u}_k\|_\lambda\end{aligned}$$

$$(1 \leq t \leq T) \quad (2.1.13)$$

由式(2.1.12)及条件(2)可知, 式(2.1.13)对 $t = 0$ 也成立。因此, 根据 λ 范数的定义

$$\|\Delta \mathbf{u}_{k+1}\|_{\lambda} \leq \bar{\rho} \|\Delta \mathbf{u}_k\|_{\lambda}$$

这里 $\bar{\rho} = \rho + b_1 b_2 \frac{\lambda(1-\lambda^T)}{1-\lambda}$ 。显然, 由 $\rho < 1$ 可找到足够小的 λ 使得 $\bar{\rho} < 1$ 。因此, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\Delta \mathbf{u}_k\|_{\lambda} = 0$ 。又由式(2.1.9b)和式(2.1.10)可知, 对于 $0 < \lambda < 1$

$$\lambda^t \|\mathbf{e}_k(t)\| \leq$$

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{C}(t)\| \sum_{s=0}^{t-1} \|\Phi(t, s+1)\mathbf{B}(s)\| \lambda^{t-s} \lambda^s \|\Delta \mathbf{u}_k(s)\| \leq \\ & cb_2 \sum_{s=0}^{t-1} \lambda^{t-s} \|\Delta \mathbf{u}_k\|_{\lambda} \leq \\ & cb_2 \frac{\lambda(1-\lambda^T)}{1-\lambda} \|\Delta \mathbf{u}_k\|_{\lambda}, \quad 1 \leq t \leq T+1 \end{aligned}$$

式中 $c = \sup_{0 \leq t \leq T+1} \|\mathbf{C}(t)\|$ 。根据 λ 范数的定义得到

$$\sup_{1 \leq t \leq T+1} \{\lambda^t \|\mathbf{e}_k(t)\|\} \leq cb_2 \frac{\lambda(1-\lambda^T)}{1-\lambda} \|\Delta \mathbf{u}_k\|_{\lambda}$$

因此, $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{1 \leq t \leq T+1} \{\lambda^t \|\mathbf{e}_k(t)\|\} = 0$ 。至此, 利用条件(2)可证得该定理。

下面的定理给出了另外一种保证算法收敛性的充分条件。

定理 2.1.5 对于由式(2.1.9)描述的系统, 给定可达的期望轨迹 $\mathbf{y}_d(t)$ ($0 \leq t \leq T+1$), 如果条件

- (1) $\|\mathbf{I} - \mathbf{C}(t+1)\mathbf{B}(t)\mathbf{\Gamma}(t)\| \leq \rho < 1$ ($0 \leq t \leq T$)
- (2) $\mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}^0, \mathbf{e}_k(0) = 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)

那么, 学习律(2.1.11)使得输出轨迹一致收敛于期望轨迹, 即当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\mathbf{y}_k(t) \rightarrow \mathbf{y}_d(t)$ ($0 \leq t \leq T+1$)。

证明 考察第 $k+1$ 次迭代时的输出误差

$$\mathbf{e}_{k+1}(t+1) =$$

$$\mathbf{e}_k(t+1) - \mathbf{C}(t+1)(\mathbf{x}_{k+1}(t+1) - \mathbf{x}_k(t+1)) =$$

$$\begin{aligned}
& e_k(t+1) = \\
& \sum_{s=0}^t C(t+1)\Phi(t+1, s+1)B(s)\Gamma(s)e_k(s+1) + \\
& \sum_{s=0}^t C(t+1)\Phi(t+1, s+1)B(s)\Gamma(s)e_k(s) = \\
& [I - C(t+1)B(t)\Gamma(t)]e_k(t+1) - \\
& \sum_{s=0}^{t-1} C(t+1)\Phi(t+1, s+1)B(s)\Gamma(s)e_k(s+1) + \\
& \sum_{s=0}^t C(t+1)\Phi(t+1, s+1)B(s)\Gamma(s)e_k(s) \\
& (0 \leq t \leq T) \tag{2.1.14}
\end{aligned}$$

式(2.1.14)两端取范数

$$\begin{aligned}
& \|e_{k+1}(t+1)\| \leq \\
& \|I - C(t+1)B(t)\Gamma(t)\| \|e_k(t+1)\| + \\
& \sum_{s=0}^{t-1} \|C(t+1)\Phi(t+1, s+1)B(s)\Gamma(s)\| \|e_k(s+1)\| + \\
& \sum_{s=0}^t \|C(t+1)\Phi(t+1, s+1)B(s)\Gamma(s)\| \|e_k(s)\| \leq \\
& \rho \|e_k(t+1)\| + 2b_1 \sum_{s=0}^{t-1} \|e_k(s+1)\| \quad (0 \leq t \leq T)
\end{aligned}$$

式中 $b_1 = \sup_{0 \leq t \leq T, 0 \leq s \leq t} \|C(t+1)\Phi(t+1, s+1)B(s)\Gamma(s)\|$ 。上式利用了初始条件 $e_k(0) = 0 (k = 0, 1, 2, \dots)$ 。上式两端同乘 $\lambda^{t+1} (0 < \lambda < 1)$

$$\begin{aligned}
& \lambda^{t+1} \|e_{k+1}(t+1)\| \leq \\
& \rho \lambda^{t+1} \|e_k(t+1)\| + 2b_1 \sum_{s=0}^{t-1} \lambda^{t-s} \lambda^{s+1} \|e_k(s+1)\| \leq
\end{aligned}$$

$$\rho \lambda^{t+1} \|e_k(t-1)\| + 2b_1 \sum_{s=0}^{t-1} \lambda^{t-s} \sup_{0 \leq s \leq T} |\lambda^{s+1} \|e_k(s+1)\|| \leq$$

$$\rho \lambda^{t+1} \|e_k(t+1)\| + 2b_1 \frac{\lambda(1-\lambda^T)}{1-\lambda} \sup_{0 \leq t \leq T} |\lambda^{t+1} \|e_k(t+1)\||$$

$$(0 \leq t \leq T)$$

上式又可写成

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |\lambda^{t+1} \|e_{k+1}(t+1)\|| \leq \tilde{\rho} \sup_{0 \leq t \leq T} |\lambda^{t+1} \|e_k(t+1)\||$$

$$(0 \leq t \leq T) \quad (2.1.15)$$

式中 $\tilde{\rho} = \rho + 2b_1 \frac{\lambda(1-\lambda^T)}{1-\lambda}$ 。显然, 由 $\rho < 1$ 可找到足够小的 λ 使得 $\tilde{\rho} < 1$ 。因此, $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq T+1} \{\lambda^t \|e_k(t)\|\} = 0$ 。至此, 利用条件(2)可证得该定理。

从定理 2.1.4 和定理 2.1.5 的证明中不难看出, 将式(2.1.11)中的 $e_k(t)$ 项去掉, 两定理仍然成立。

2.2 PID 型学习律

单纯的 D 型学习律(2.1.1)可调整的参数只有学习增益 Γ 。当 Γ 确定以后, 学习系统的跟踪性能和收敛速度也基本上随之确定。为了提高收敛速度, 改善跟踪性能, 需要在学习律中增添可调整的参数项。例如

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \Gamma(t) \dot{e}_k(t) + L(t) e_k(t) \quad (2.2.1)$$

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \Gamma(t) \dot{e}_k(t) + \Psi(t) \int_0^t e_k(\tau) d\tau \quad (2.2.2)$$

它们分别被称为 PD 型和 DI 型学习律。一般地, 它们可以用 PID 型学习律来表示

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \Gamma(t) \dot{e}_k(t) +$$

$$L(t) e_k(t) + \Psi(t) \int_0^t e_k(\tau) d\tau \quad (2.2.3)$$

PD 型学习律(2.2.1)比 D 型学习律(2.1.1)增加了可调整增益

$L(t)$, DI 型学习律(2.2.2)比 D 型学习律(2.1.1)增加了可调整增益 $\Psi(t)$, 而 PID 型学习律(2.2.3)增加了两项可调整增益 $L(t)$ 和 $\Psi(t)$ 。

考虑线性时变系统

$$\dot{x}_k(t) = A(t)x_k(t) + B(t)u_k(t) \quad (2.2.4a)$$

$$y_k(t) = C(t)x_k(t) \quad (2.2.4b)$$

式中 $x_k(t) \in \mathbf{R}^n$, $u_k(t) \in \mathbf{R}^r$, $y_k(t) \in \mathbf{R}^m$ 。

当初态位于 $x_k(0)$ 时施加控制 $u_k(t)$, 式(2.2.4a)的解为

$$x_k(t) = \Phi(t, 0)x_k(0) + \int_0^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u_k(\tau)d\tau \quad (2.2.5)$$

这里 $\Phi(t, \tau)$ 为式(2.2.4a)中由 $A(t)$ 确定的状态转移矩阵, 它满足矩阵微分方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0)$$

$$\Phi(t_0, t_0) = I$$

式中 $t_0 \in [0, T]$ 。

给定可达的期望轨迹 $y_d(t)$ ($t \in [0, T]$)。对于该系统施加学习律(2.2.3)时, 选取在 $[0, T]$ 上分段连续的初始控制输入 $u_0(t)$ 。假设

$$G(t, \tau) = C(t)\Phi(t, \tau)B(\tau)\Gamma(\tau)$$

关于 $\tau \in [0, T]$ 可导。通过输出误差估计, 下面的定理 2.2.1 给出了 PID 型学习律较弱的收敛性充分条件。定理中记 $\rho(A)$ 为方阵 A 的谱半径。

定理 2.2.1 若由式(2.2.4)和式(2.2.3)描述的系统满足条件

$$(1) \quad \rho(I - C(t)B(t)\Gamma(t)) \leq \bar{\rho} < 1$$

$$(2) \quad x_k(0) = x^0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$y_0(0) = y_d(0)$$

则当 $k \rightarrow \infty$ 时, $y_k(t) \rightarrow y_d(t)$ ($t \in [0, T]$)。

证明 由式(2.2.4b)及条件(2)可知

$$\begin{aligned}y_{k+1}(0) &= Cx_{k+1}(0) = \\Cx_k(0) &= y_k(0)\end{aligned}$$

因此, $e_k(0) = 0 (k = 0, 1, 2, \dots)$ 。这样, 第 $k+1$ 次迭代时的输出误差可写成

$$\begin{aligned}e_{k+1}(t) &= \\e_k(t) - \int_0^t C(t) \Phi(t, \tau) B(\tau) (u_{k+1}(\tau) - u_k(\tau)) d\tau &= \\e_k(t) - \int_0^t C(t) \Phi(t, \tau) B(\tau) \\[\Gamma(\tau) \dot{e}_k(\tau) + L(\tau) e_k(\tau) + \Psi(\tau) \int_0^\tau e_k(\sigma) d\sigma] d\tau &\quad (2.2.6)\end{aligned}$$

利用分部积分公式

$$\begin{aligned}\int_0^t G(t, \tau) \dot{e}_k(\tau) d\tau &= \\G(t, \tau) e_k(\tau) \Big|_0^t - \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} G(t, \tau) e_k(\tau) d\tau &= \\C(t) B(t) \Gamma(t) e_k(t) - \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} G(t, \tau) e_k(\tau) d\tau &\quad (2.2.7)\end{aligned}$$

将式(2.2.7)代入式(2.2.6), 则有

$$\begin{aligned}e_{k+1}(t) &= [I - C(t) B(t) \Gamma(t)] e_k(t) + \\&\int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} G(t, \tau) e_k(\tau) d\tau - \\&\int_0^t C(t) \Phi(t, \tau) B(\tau) L(\tau) e_k(\tau) d\tau - \\&\int_0^t \int_0^\tau C(t) \Phi(t, \tau) B(\tau) \Psi(\tau) e_k(\sigma) d\sigma d\tau &\quad (2.2.8)\end{aligned}$$

由附录引理 A.4.5 知, 对于每个固定的 t 及任给的 $\epsilon > 0$, 存在一非奇异矩阵 $Q(t) \in \mathbf{R}^{m \times m}$ 满足

$$\begin{aligned}\|Q(t)[I - C(t)B(t)\Gamma(t)]Q^{-1}(t)\| &\leqslant \\&\rho(I - C(t)B(t)\Gamma(t)) + \epsilon < \bar{\rho} + \epsilon\end{aligned}$$

因此, 将式(2.2.8)两端同乘 $Q(t)$, 然后取范数

$$\begin{aligned}
& \|Q(t)e_{k+1}(t)\| \leq \\
& \|Q(t)[I - C(t)B(t)F(t)]Q^{-1}(t)\| \|Q(t)e_k(t)\| + \\
& \int_0^t \|Q(t) \frac{\partial}{\partial \tau} G(t, \tau) Q^{-1}(\tau)\| \|Q(\tau)e_k(\tau)\| d\tau + \\
& \int_0^t \|Q(t)C(t)\Phi(t, \tau)B(\tau)L(\tau)Q^{-1}(\tau)\| \|Q(\tau)e_k(\tau)\| d\tau + \\
& \int_0^t \int_0^\tau \|Q(t)C(t)\Phi(t, \tau)B(\tau)\Psi(\tau)Q^{-1}(\sigma)\| \\
& \|Q(\sigma)e_k(\sigma)\| d\sigma d\tau \leq \\
& \{\rho(I - C(t)B(t)F(t)) + \varepsilon\} \|Q(t)e_k(t)\| + \\
& \int_0^t b_1 \|Q(\tau)e_k(\tau)\| d\tau + \int_0^t \int_0^\tau b_2 \|Q(\sigma)e_k(\sigma)\| d\sigma d\tau \quad (2.2.9)
\end{aligned}$$

式中 $b_1 = \max\{\sup_{t, \tau \in [0, T]} \|Q(t) \frac{\partial}{\partial \tau} G(t, \tau) Q^{-1}(\tau)\|, \sup_{t \in [0, T]} \|Q(t)C(t)\Phi(t, \tau)B(\tau)L(\tau)Q^{-1}(\tau)\|, b_2 = \sup_{t, \tau, \sigma \in [0, T]} \|Q(t)C(t)\Phi(t, \tau)B(\tau)\Psi(\tau)Q^{-1}(\sigma)\|$ 。

(2.2.9)两端同乘正函数 $e^{-\lambda t}, \lambda > 0$ 可得

$$\|Qe_{k+1}\|_\lambda \leq \bar{\rho} \|Qe_k\|_\lambda \quad (2.2.10)$$

式中 $\bar{\rho} = \bar{\rho} + \varepsilon + b_1 \frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda} + b_2 (\frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda})^2$ 。由 ε 的任意性及条件(1)知, 足够大的 λ 使得 $\bar{\rho} < 1$ 。因此 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|Qe_k\|_\lambda = 0$ 。又由 $\|e_k\|_\lambda \leq \sup_{t \in [0, T]} \|Q^{-1}(t)\| \|Qe_k\|_\lambda$, 则该定理得证。

注意到上述定理的条件 $\rho(I - F(t)C(t)B(t)) < 1$ 与条件 $\|I - F(t)C(t)B(t)\| < 1$ 是不同的, 这是因为

$$\rho(I - F(t)C(t)B(t)) \leq \|I - F(t)C(t)B(t)\|$$

值得说明的是, 在 $m = r$ 且 $F(t)$ 可逆时

$$\begin{aligned}
\rho(I - F(t)C(t)B(t)) &= \\
\rho(F(t)[I - C(t)B(t)F(t)]F^{-1}(t)) &= \\
\rho(I - C(t)B(t)F(t)) & \quad (2.2.11)
\end{aligned}$$

上述关系容易由矩阵谱半径的定义推知。

2.3 正则线性系统的迭代学习控制

考虑线性定常系统

$$\dot{\mathbf{x}}_k(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_k(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}_k(t) \quad (2.3.1a)$$

$$\mathbf{y}_k(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}_k(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}_k(t) \quad (2.3.1b)$$

式中 $t \in [0, T]$; $\mathbf{x}_k(t) \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{u}_k(t) \in \mathbf{R}^r$, $\mathbf{y}_k(t) \in \mathbf{R}^m$ 。

虽然本节针对 LTI 系统讨论,但结果容易被推广到 LTV 系统。系统(2.3.1)与系统(2.1.4)不同的是其输出方程中存在控制的直接传输项 $\mathbf{D} \in \mathbf{R}^{m \times r}$ 。

系统(2.3.1)的两种正则情形是直接传输矩阵 \mathbf{D} 行满秩或 \mathbf{D} 列满秩($\text{rank } \mathbf{D} = m$ 或 $\text{rank } \mathbf{D} = r$)。这一节我们将证明,学习律中只需采用输出误差便可保证正则系统迭代学习控制的收敛性。另外,利用正则性也可以推知,系统(2.1.4)在学习律(2.1.1)作用下的收敛性。

采用学习律

$$\mathbf{u}_{k+1}(t) = \mathbf{u}_k(t) + \mathbf{L}\mathbf{e}_k(t) \quad (2.3.2)$$

假设期望轨迹 $\mathbf{y}_d(t)$ 在 $[0, T]$ 上是可达的,即,当初态位于 $\mathbf{x}_d(0)$ 时,存在 $\mathbf{u}_d(t)$ 使得由其产生的状态轨迹 $\mathbf{x}_d(t)$ 满足

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}_d(t) &= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_d(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}_d(\tau)d\tau \\ \mathbf{y}_d(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}_d(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}_d(t) \end{aligned} \right\} \quad (2.3.3)$$

在每一次迭代时,若初始定位操作使得 $\mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}_d(0)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) 则

$$\Delta \mathbf{x}_k(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\Delta \mathbf{u}_k(\tau)d\tau \quad (2.3.4)$$

式中 $\Delta \mathbf{x}_k(t) = \mathbf{x}_d(t) - \mathbf{x}_k(t)$, $\Delta \mathbf{u}_k(t) = \mathbf{u}_d(t) - \mathbf{u}_k(t)$ 。这样,第 $k+1$ 次迭代时的控制误差可写成

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}_{k+1}(t) &= \Delta \mathbf{u}_k(t) - \mathbf{L}\mathbf{e}_k = \\ &= [\mathbf{I} - \mathbf{LD}]\Delta \mathbf{u}_k(t) - \mathbf{LC}\Delta \mathbf{x}_k(t) = \end{aligned}$$

$$[\mathbf{I} - \mathbf{LD}]\Delta \mathbf{u}_k(t) - \int_0^t \mathbf{LC}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\Delta \mathbf{u}_k(\tau)d\tau$$

两端取范数

$$\begin{aligned} \|\Delta \mathbf{u}_{k+1}(t)\| &\leq \\ \|\mathbf{I} - \mathbf{LD}\| \|\Delta \mathbf{u}_k(t)\| + \int_0^t \|\mathbf{LC}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\| \|\Delta \mathbf{u}_k(\tau)\| d\tau &\leq \\ \|\mathbf{I} - \mathbf{LD}\| \|\Delta \mathbf{u}_k(t)\| + b_1 \int_0^t \|\Delta \mathbf{u}_k(\tau)\| d\tau \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

式中 $b_1 = \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{LC}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}\|$ 。两端同乘 $e^{-\lambda t}$, 并计算 λ 范数

$$\|\Delta \mathbf{u}_{k+1}\|_\lambda \leq \left\{ \|\mathbf{I} - \mathbf{LD}\| + b_1 \frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda} \right\} \|\Delta \mathbf{u}_k\|_\lambda \quad (2.3.6)$$

又由式(2.3.4)及式(2.3.1b)可知

$$\begin{aligned} \|\Delta \mathbf{x}_k\|_\lambda &\leq b_2 \frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda} \|\Delta \mathbf{u}_k\|_\lambda \\ \|\mathbf{e}_k\|_\lambda &\leq \left\{ cb_2 \frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda} + d \right\} \|\Delta \mathbf{u}_k\|_\lambda \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

式中 $b_2 = \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}\|$, $c = \|\mathbf{C}\|$, $d = \|\mathbf{D}\|$ 。结合式(2.3.6)和式(2.3.7), 可给出定理 2.3.1。

定理 2.3.1 若由式(2.3.1)和学习律(2.3.2)描述的迭代学习控制系统满足条件

- (1) $\|\mathbf{I} - \mathbf{LD}\| < 1$
- (2) $\mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}_d(0) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$

则在 $[0, T]$ 上, $\mathbf{e}_k(t) \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$ 。

定理 2.3.1 通过给出控制误差的估计证明正则系统学习控制的收敛性, 也可以通过对输出误差的估计证明正则系统学习控制的收敛性。设每一次迭代时系统初态维持不变, 即 $\mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}^0 (k = 0, 1, 2, \dots)$, \mathbf{x}^0 为某一给定初态。施加控制 $\mathbf{u}_{k+1}(t)$, 式(2.3.1a)的解可写成

$$\mathbf{x}_{k+1}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_{k+1}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}_{k+1}(\tau)d\tau -$$

$$e^{At}x_k(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu_k(\tau)d\tau + \int_0^t e^{A(t-\tau)}BL e_k(\tau)d\tau = \\ x_k(t) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}BL e_k(\tau)d\tau$$

又由式(2.3.1b)知

$$e_{k+1}(t) = e_k(t) - (y_{k+1}(t) - y_k(t)) = \\ [I - DL]e_k(t) - C(x_{k+1}(t) - x_k(t)) = \\ [I - DL]e_k(t) - \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}BL e_k(\tau)d\tau$$

两端取范数

$$\|e_{k+1}(t)\| \leqslant \\ \|I - DL\| \|e_k(t)\| + \int_0^t \|Ce^{A(t-\tau)}BL\| \|e_k(\tau)\| d\tau \leqslant \\ \|I - DL\| \|e_k(t)\| + b_1 \int_0^t \|e_k(\tau)\| d\tau \quad (2.3.8)$$

式中 $b_1 = \sup_{t \in [0, T]} \|Ce^{At}BL\|$ 。式(2.3.8)两端同乘 $e^{-\lambda t}$, 并计算两端的 λ 范数

$$\|e_{k+1}\|_{\lambda} \leqslant \{ \|I - DL\| + b_1 \frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda} \} \|e_k\|_{\lambda} \quad (2.3.9)$$

至此, 可证得定理 2.3.2。

定理 2.3.2 若由式(2.3.1)和学习律(2.3.2)描述的迭代学习控制系统满足条件

- (1) $\|I - DL\| < 1$
- (2) $x_k(0) = x^0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$

则在 $[0, T]$ 上, $e_k(t) \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$ 。

由于式(2.3.3)中的 $x_d(0)$ 可以任意设定, 因此, 上述两定理中的初始条件是一致的。换句话说, 这时的初始条件仅要求初态固定。学习律(2.3.2)中 L 为 $r \times m$ 维矩阵, 直接传输矩阵 D 为 $m \times r$ 维矩阵。定理 2.3.1 中的条件(1)要求 D 列满秩, 而定理 2.3.2 中的条件(1)要求 D 行满秩。实际上, 它们对应着正则系

统的两种情形。

当输出方程(2.3.1b)中 $D = 0$ 时, 上述两定理中的条件(1)显然都不能成立。它表明直接传输矩阵在两定理的证明中起重要作用。这时的系统不满足正则性要求。但是, 若考虑输出速度跟踪, 则可得到类似于上述定理的结果。这时需定义 $e_k(t) = \dot{y}_d(t) - \dot{y}_k(t)$ 。对式(2.3.1b)两端求导, 有

$$\begin{aligned} \dot{y}_k(t) &= C\dot{x}_k(t) = \\ &CAx_k(t) + CBu_k(t) \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

对于由式(2.3.1a)和式(2.3.10)描述的系统, 由定理 2.3.2 知, 若 CB 行满秩, 选取 L 使得 $\|I - CBL\| < 1$, 且 $x_k(0) = x^0 (k = 0, 1, 2, \dots)$, 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} \dot{y}_k(t) = \dot{y}_d(t) (t \in [0, T])$ 。又由 $y_k(0) = y_d(0) (k = 0, 1, 2, \dots)$, 可推知 $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k(t) = y_d(t) (t \in [0, T])$ 。这样, 我们就由定理 2.3.2 推知保证 2.1 节 D 型学习律收敛性的充分条件。同理, 也可由定理 2.3.1 推知 D 型学习律的另一收敛性充分条件。

从收敛性分析的角度来看, 迭代学习控制系统(2.3.1)、(2.3.2)是较为一般的系统。上述说明了对于 $D = 0$ 、 CB 满秩这种非正则情形, 可使用输出误差的导数来构造学习律。但由于 2.2 节中保证 D 型学习律收敛性的带有初态偏移的初始条件不能由上述两定理推出, 因此, 由式(2.1.4)和式(2.1.1)描述的迭代学习控制系统的收敛性质并不能完全由迭代学习控制系统(2.3.1)、(2.3.2)的收敛性质推出。这也说明对于 $D = 0$ 、 CB 满秩这种非正则情形, 采用 D 型学习律进行收敛性分析是必要的。

2.4 非正则线性系统的迭代学习控制

讨论正则系统的目的之一是为非正则系统提供一种分析方法。其基本做法是对非正则系统输出方程的两端不断求导直到将其转化为正则情形。然后, 构造相应的学习律, 并由正则系统收敛

性定理推出非正则系统的收敛性结果。本节讨论 $D = 0, CB = 0$ 或 D, CB 不满秩这种具有更高阶非正则性质的系统。为了使问题清晰一些,限定讨论具有 m 个输入 m 个输出的系统。

2.4.1 完全非正则系统

系统的完全非正则性可以用相对度的概念来描述。对于 SISO LTI 系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \quad (2.4.1a)$$

$$y(t) = cx(t) + du(t) \quad (2.4.1b)$$

式中 $x(t) \in \mathbf{R}^n, u(t), y(t) \in \mathbf{R}^1$, 设其相对度为 $r \geq 1$ 。这时, 该系统的 Markov 参数满足

$$\left. \begin{aligned} h_0 &= d = 0 \\ h_i &= cA^{i-1}b = 0 \quad (1 \leq i \leq r-1) \\ h_r &= cA^{r-1}b \neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.4.2)$$

对式(2.4.1b)两端求导 r 次, 可得

$$y^{(i)}(t) = cA^i x(t) \quad (1 \leq i \leq r-1)$$

$$y^{(r)}(t) = cA^r x(t) + cA^{r-1}bu(t) \quad (2.4.3)$$

对于相对度为 r 的非正则系统, 可以利用输出误差的 r 阶导数构造学习律

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \gamma e_k^{(r)}(t) \quad (2.4.4)$$

式中 $e_k(t) = y_d(t) - y_k(t)$, $y_d(t) (t \in [0, T])$ 为给定的可达期望轨迹; γ 为学习增益。

由式(2.4.1a)、式(2.4.3)和式(2.4.4)描述的迭代学习控制系统的收敛性条件, 可由定理 2.3.1 或定理 2.3.2 给出。其中, 增益 γ 需满足 $|1 - \gamma cA^{r-1}b| < 1$ 。因为相对度为 $r \geq 1$ 的系统, $cA^{r-1}b \neq 0$, 所以总存在 γ 使得该条件成立。故对于 SISO LTI 系统(2.4.1), 相对度为 r 的系统即为 r 阶完全非正则系统。另外, 由 $\lim_{k \rightarrow \infty} e_k^{(r)}(t) = 0 (t \in [0, T])$, 以及初始条件

$$x_k(0) = x^0, e_k(0) = 0, e_k^{(1)}(0) = 0, \dots, e_k^{(r-1)}(0) = 0$$

可保证 $\lim_{k \rightarrow \infty} e_k(t) = 0 (t \in [0, T])$ 。

对于 MIMO LTI 系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.4.5a)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2.4.5b)$$

式中 $x(t) \in \mathbf{R}^n, u(t), y(t) \in \mathbf{R}^m, C = [c_1, \dots, c_m]^T, D = [d_1, \dots, d_m]^T$, 设其相对度为 $r = (r_1, \dots, r_m)$, 则有

$$d_j = 0$$

$$c_j A^{i-1} B = 0 \quad (1 \leq i \leq r_j - 1)$$

$$c_j A^{r_j-1} B \neq 0$$

若 $r_j \geq 1$, 则对式(2.4.5b)的第 j 个输出分量求导 r_j 次, 可得

$$y_j^{(i)}(t) = c_j A^i x(t) \quad (1 \leq i \leq r_j - 1)$$

$$y_j^{(r_j)}(t) = c_j A^{r_j} x(t) + c_j A^{r_j-1} B u(t) \quad (2.4.6)$$

式中 $y_j(t), j = 1, \dots, m$ 为 $y(t)$ 的第 j 个分量。将式(2.4.6)写成矩阵形式

$$\begin{aligned} y^{(r)}(t) &= \begin{bmatrix} y_1^{(r_1)}(t) \\ \vdots \\ y_m^{(r_m)}(t) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} c_1 A^{r_1} \\ \vdots \\ c_m A^{r_m} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} c_1 A^{r_1-1} B \\ \vdots \\ c_m A^{r_m-1} B \end{bmatrix} u(t) \triangleq \\ &\bar{C}x(t) + \bar{D}u(t) \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

构造学习律

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \Gamma e_k^{(r)}(t) \quad (2.4.8)$$

$$e_k^{(r)}(t) = \begin{bmatrix} e_{1,k}^{(r_1)}(t) \\ \vdots \\ e_{m,k}^{(r_m)}(t) \end{bmatrix}$$

式中 Γ 为增益矩阵。

由式(2.4.5a)、式(2.4.7)和式(2.4.8)描述的迭代学习控制

系统的收敛性条件,也可由定理 2.3.1 或定理 2.3.2 给出。其中,增益 Γ 需满足 $\|I - \Gamma D\| < 1$ 或 $\|I - D\Gamma\| < 1$ 。故当 \bar{D} 满秩时,该系统即为 r 阶完全非正则的。

2.4.2 部分非正则系统

当输入输出间的直接传输矩阵 $D \neq 0$ 不满秩,但 CB 满秩时,称系统(2.4.5)是一阶部分非正则的。这时,可采用学习律

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \Gamma_0 e_k(t) + \Gamma_1 \dot{e}_k(t) \quad (2.4.9)$$

式中 $e_k(t) = y_d(t) - y_k(t)$, $y_d(t)$ ($t \in [0, T]$) 为可达的期望轨迹。由式(2.4.5 a)可知

$$\begin{aligned} \delta x_{k+1}(t) = & e^{At} \delta x_{k+1}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B (\Gamma_0 e_k(\tau) + \Gamma_1 \dot{e}_k(\tau)) d\tau + \\ & e^{At} (\delta x_{k+1}(0) - B\Gamma_1 e_k(0)) + B\Gamma_1 e_k(t) + \\ & \int_0^t e^{A(t-\tau)} [B\Gamma_0 + AB\Gamma_1] e_k(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

式中 $\delta x_{k+1}(t) = x_{k+1}(t) - x_k(t)$ 。这样,第 $k+1$ 次迭代时的输出误差可写成

$$\begin{aligned} e_{k+1}(t) = & e_k(t) - D(\Gamma_0 e_k(t) + \Gamma_1 \dot{e}_k(t)) - C\delta x_{k+1}(t) = \\ & [I - D\Gamma_0 - CB\Gamma_1] e_k(t) - D\Gamma_1 \dot{e}_k(t) - \\ & \int_0^t C e^{A(t-\tau)} [B\Gamma_0 + AB\Gamma_1] e_k(\tau) d\tau - \\ & C e^{At} (\delta x_{k+1}(0) - B\Gamma_1 e_k(0)) \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

由式(2.4.11)容易看出,如果学习增益 Γ_0, Γ_1 满足

$$D\Gamma_1 = 0, \quad \|I - D\Gamma_0 - CB\Gamma_1\| < 1 \quad (2.4.12)$$

以及初始条件

$$x_{k+1}(0) = x_k(0) + B\Gamma_1 e_k(0) \quad (2.4.13)$$

成立,可证得,当系统(2.4.5)一阶部分非正则时,学习律(2.4.9)的收敛性。

当系统(2.4.5)是 r 阶部分非正则时,有

$$\left. \begin{aligned} \text{rank } D &< m \\ \text{rank } CA^{i-1}B &< m \quad (1 \leq i \leq r-1) \\ \text{rank } CA^{r-1}B &= m \end{aligned} \right\} \quad (2.4.14)$$

定理 2.4.1 给出了 r 阶部分非正则系统在含输出误差 r 阶导数的学习律的收敛性。

定理 2.4.1 设系统 (2.4.5) 是 r 阶部分非正则的。若采用学习律

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \sum_{i=0}^r \Gamma_i e_k^{(i)}(t) \quad (2.4.15)$$

及条件

$$(1) \quad D\Gamma_r = 0$$

$$D\Gamma_{i-1} + \sum_{j=i}^r CA^{j-i}B\Gamma_j = 0 \quad (i = 2, 3, \dots, r)$$

$$(2) \quad \|I - D\Gamma_0 - \sum_{i=1}^r CA^{i-1}B\Gamma_i\| < 1$$

$$(3) \quad x_{k+1}(0) = x_k(0) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=i}^r A^{j-i}B\Gamma_j e_k^{(i-1)}(0)$$

则 $\lim_{k \rightarrow \infty} e_k(t) = 0, t \in [0, T]$

证明 由式 (2.4.5a) 知

$$\delta x_{k+1}(t) = e^{At} \delta x_{k+1}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \sum_{i=0}^r \Gamma_i e_k^{(i)}(\tau) d\tau$$

利用分部积分公式可得

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^r \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \Gamma_i e_k^{(i)}(\tau) d\tau = \\ & \sum_{i=1}^r A^{i-1} B \Gamma_i e_k(t) + \sum_{i=0}^r \int_0^t e^{A(t-\tau)} A^i B \Gamma_i e_k(\tau) d\tau + \\ & \sum_{i=2}^r \sum_{j=i}^r A^{j-i} B \Gamma_j e_k^{(i-1)}(t) - \\ & e^{At} \sum_{i=1}^r \sum_{j=i}^r A^{j-i} B \Gamma_j e_k^{(i-1)}(0) \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

因此,利用条件(3),有

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{x}_{k+1}(t) = & \sum_{i=1}^r \mathbf{A}^{i-1} \mathbf{B} \Gamma_i \mathbf{e}_k(t) + \\ & \sum_{i=0}^r \int_0^t \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{A}^i \mathbf{B} \Gamma_i \mathbf{e}_k(\tau) d\tau + \\ & \sum_{i=2}^r \sum_{j=i}^r \mathbf{A}^{j-i} \mathbf{B} \Gamma_j \mathbf{e}_k^{(i-1)}(t)\end{aligned}\quad (2.4.17)$$

利用条件(1),第 $k+1$ 次迭代时输出误差可写成

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_{k+1}(t) = & \mathbf{e}_k(t) - \sum_{i=0}^r \mathbf{D} \Gamma_i \mathbf{e}_k^{(i)}(t) - \mathbf{C} \delta \mathbf{x}_{k+1}(t) = \\ & [\mathbf{I} - \mathbf{D} \Gamma_0 - \sum_{i=1}^r \mathbf{C} \mathbf{A}^{i-1} \mathbf{B} \Gamma_i] \mathbf{e}_k(t) - \\ & \sum_{i=0}^r \int_0^t \mathbf{C} \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{A}^i \mathbf{B} \Gamma_i \mathbf{e}_k(\tau) d\tau - \\ & \mathbf{D} \Gamma_r \mathbf{e}_k^{(r)}(t) - \sum_{i=2}^r [\mathbf{D} \Gamma_{i-1} + \sum_{j=i}^r \mathbf{C} \mathbf{A}^{j-i} \mathbf{B} \Gamma_j] \mathbf{e}_k^{(i-1)}(t) = \\ & [\mathbf{I} - \mathbf{D} \Gamma_0 - \sum_{i=1}^r \mathbf{C} \mathbf{A}^{i-1} \mathbf{B} \Gamma_i] \mathbf{e}_k(t) - \\ & \sum_{i=0}^r \int_0^t \mathbf{C} \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{A}^i \mathbf{B} \Gamma_i \mathbf{e}_k(\tau) d\tau\end{aligned}\quad (2.4.18)$$

由条件(2)可证得该定理。

定理 2.4.1 中的初始条件(3)允许初态按给定的关系偏置。这和初始条件不能由正则系统的收敛性定理推出,这反映了部分非正则系统的特殊性。

2.5 P 型学习律

对于 E 则系统,学习律中只需使用输出误差本身;对于 r 阶非 E 则系统,学习律中可使用输出误差的 r 阶导数。然而,当实际运行中的学习控制系统存在量测噪声时,量测噪声会严重影响

学习律中的高阶导数运算。为了提高系统跟踪性能,应采取有效措施抑制噪声。显然,一种主要途径是在学习律中回避对输出误差信号的高阶导数运算,而使用尽可能的低阶导数运算,或直接使用输出误差信号。我们称仅使用输出误差信号的学习律为 P 型学习律。最简单的 P 型学习律为

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + L e_k(t) \quad (2.5.1)$$

式中 $e_k(t)$ 为输出误差, L 为学习增益矩阵。学习律(2.5.1)又可写成

$$u_k(t) = u_0(t) + L \sum_{i=0}^{k-1} e_i(t)$$

该学习律的含义是,以输出误差信号的累加构成控制输入信号。图 2.5.1 给出了采用 P 型学习律的迭代学习控制系统结构图。

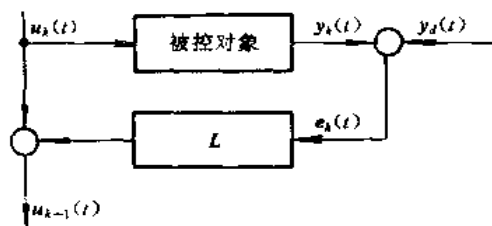


图 2.5.1 P 型学习律

2.5.1 一阶线性系统

针对一阶 LTI 系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \right\} \quad (2.5.2)$$

式中 $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t), y(t) \in \mathbb{R}^m$, 首先考虑下述简单的 P 型学习律

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \gamma I_m e_k(t) \quad (2.5.3)$$

式中 γ 为学习系数。假设初态在每一次迭代时固定于一点,即存在 x^0 , 使得

$$\mathbf{y}_k(t) = \mathbf{g}(t) + \int_0^t \mathbf{H}(t-\tau) \mathbf{u}_k(\tau) d\tau \quad (2.5.4)$$

式中 $\mathbf{g}(t) = \mathbf{C}e^{At}\mathbf{x}^0$, $\mathbf{H}(t-\tau) = \mathbf{C}e^{A(t-\tau)}\mathbf{B}$ 。

定义 2.5.1 由式(2.5.2)描述的线性时不变系统是严格正的, 如果对于任意 $T > 0$ 和任意控制 $\mathbf{u}(t) (t \in [0, T])$, 存在 $\alpha > 0$, 使得

$$\int_0^T \int_0^t \mathbf{u}^T(t) \mathbf{H}(t-\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau dt \geq \alpha \int_0^T \mathbf{u}^T(t) \mathbf{u}(t) dt$$

对于严格正的线性系统(2.5.2), 容易证明 P 型学习律(2.5.3)的收敛性^[7]。

由式(2.5.4)可知

$$\mathbf{e}_{k+1}(t) = \mathbf{e}_k(t) - \gamma \mathbf{w}_k(t)$$

式中 $\mathbf{w}_k(t) = \int_0^t \mathbf{H}(t-\tau) \mathbf{e}_k(\tau) d\tau$ 。

记 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \int_0^T \mathbf{x}^T(\tau) \mathbf{y}(\tau) d\tau$, 以及 L_2 范数 $\|\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$,

则有

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_{k+1}\|^2 &= \langle \mathbf{e}_k - \gamma \mathbf{w}_k, \mathbf{e}_k - \gamma \mathbf{w}_k \rangle = \\ &\|\mathbf{e}_k\|^2 + \gamma^2 \|\mathbf{w}_k\|^2 - 2\gamma \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{w}_k \rangle \end{aligned}$$

利用严格正性和 L_2 范数的性质

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{w}_k \rangle &\geq a \|\mathbf{e}_k\|^2 \\ \|\mathbf{w}_k\|^2 &\leq \lambda_0^2 \|\mathbf{e}_k\|^2 \end{aligned}$$

式中 λ_0^2 为矩阵 $\int_0^T \mathbf{H}^T(\tau) \mathbf{H}(\tau) d\tau$ 的谱半径, 于是有

$$\|\mathbf{e}_{k+1}\|^2 \leq (1 + \lambda_0^2 \gamma^2 - 2a\gamma) \|\mathbf{e}_k\|^2$$

因此, 选择 $\gamma > 0$ 使得

$$\rho = \lambda_0^2 \gamma^2 - 2a\gamma < -\epsilon$$

可保证输出误差按照 L_2 范数严格单调衰减

$$\|\mathbf{e}_{k+1}\|^2 < (1 - \epsilon) \|\mathbf{e}_k\|^2$$

此即证得收敛性。

由上面的推导可以看出,这时的收敛性充分条件可以写成

$$\left. \begin{aligned} 1 + \lambda_0^2 \gamma^2 - 2a\gamma &< 1 \\ \mathbf{x}_k(0) &= \mathbf{x}^0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (2.5.5)$$

在一定条件下,采用一般形式的 P 型学习律(2.5.1)也是收敛的^[61]。假设系统(2.5.2)是满足下述条件的一严格正实传函的最小实现,那么

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top \mathbf{P} &= -\mathbf{Q} \\ \mathbf{P}\mathbf{B} &= \mathbf{C}^\top \end{aligned} \right\} \quad (2.5.6)$$

式中 $\mathbf{Q}, \mathbf{P} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 为对称正定矩阵。第 k 次迭代时的误差系统为

$$\left. \begin{aligned} \Delta \dot{\mathbf{x}}_k(t) &= \mathbf{A}\Delta \mathbf{x}_k(t) + \mathbf{B}\Delta \mathbf{u}_k(t) \\ \mathbf{e}_k(t) &= \mathbf{C}\Delta \mathbf{x}_k(t) \end{aligned} \right\} \quad (2.5.7)$$

式中 $\Delta \mathbf{u}_k(t) = \mathbf{u}_d(t) - \mathbf{u}_k(t)$, $\Delta \mathbf{x}_k(t) = \mathbf{x}_d(t) - \mathbf{x}_k(t)$ 。 \mathbf{u}_d 和 \mathbf{x}_d 分别为期望控制和期望状态。

定义

$$V(\Delta \mathbf{x}_k(t)) = \Delta \mathbf{x}_k^\top(t) \mathbf{P} \Delta \mathbf{x}_k(t)$$

有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(\Delta \mathbf{x}_k(t)) &= \frac{d}{dt} (\Delta \mathbf{x}_k^\top(t) \mathbf{P} \Delta \mathbf{x}_k(t)) = \\ &\Delta \dot{\mathbf{x}}_k^\top(t) \mathbf{P} \Delta \mathbf{x}_k(t) + \Delta \mathbf{x}_k^\top(t) \mathbf{P} \Delta \dot{\mathbf{x}}_k(t) = \\ &\Delta \mathbf{x}_k^\top(t) (\mathbf{A}^\top \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \Delta \mathbf{x}_k(t) + \\ &2 \Delta \mathbf{x}_k^\top(t) \mathbf{P} \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}_k(t) = \\ &-\Delta \mathbf{x}_k^\top(t) \mathbf{Q} \Delta \mathbf{x}_k(t) + 2 \mathbf{e}_k^\top(t) \Delta \mathbf{u}_k(t) \end{aligned}$$

上式两端从 0 至 t 积分,可证得误差系统(2.5.7)满足

$$\begin{aligned} V(\Delta \mathbf{x}_k(t)) - V(\Delta \mathbf{x}_k(0)) &= - \int_0^t \Delta \mathbf{x}_k^\top(\tau) \mathbf{Q} \Delta \mathbf{x}_k(\tau) d\tau + \\ &2 \int_0^t \mathbf{e}_k^\top(\tau) \Delta \mathbf{u}_k(\tau) d\tau \quad (2.5.8) \end{aligned}$$

现在可以给出系统(2.5.2)在 P 型学习律(2.5.1)作用下的收敛性证明。假设学习增益 L 为对称矩阵,并记

$$\delta \mathbf{u}_k(t) = \Delta \mathbf{u}_k(t) - \Delta \mathbf{u}_{k-1}(t)$$

$$J_k(t) = \int_0^t \Delta \mathbf{u}_k^T(\tau) \mathbf{L}^{-1} \Delta \mathbf{u}_k(\tau) d\tau$$

$$\delta J_k(t) = J_k(t) - J_{k-1}(t)$$

有

$$\delta \mathbf{u}_k(t) = -\mathbf{L} \mathbf{e}_{k-1}(t)$$

由 $J_k(t)$ 的定义可知

$$\begin{aligned} \delta J_k(t) &= \int_0^t \{ \Delta \mathbf{u}_k^T(\tau) \mathbf{L}^{-1} \Delta \mathbf{u}_k(\tau) - \Delta \mathbf{u}_{k-1}^T(\tau) \mathbf{L}^{-1} \Delta \mathbf{u}_{k-1}(\tau) \} d\tau = \\ &= \int_0^t \{ (\delta \mathbf{u}_k(\tau) + \Delta \mathbf{u}_{k-1}(\tau))^T \mathbf{L}^{-1} (\delta \mathbf{u}_k(\tau) + \Delta \mathbf{u}_{k-1}(\tau)) - \\ &\quad \Delta \mathbf{u}_{k-1}^T(\tau) \mathbf{L}^{-1} \Delta \mathbf{u}_{k-1}(\tau) \} d\tau = \\ &= \int_0^t \{ \delta \mathbf{u}_k^T(\tau) \mathbf{L}^{-1} \delta \mathbf{u}_k(\tau) + 2 \delta \mathbf{u}_k^T(\tau) \mathbf{L}^{-1} \Delta \mathbf{u}_{k-1}(\tau) \} d\tau = \\ &= \int_0^t \{ \mathbf{e}_{k-1}^T(\tau) \mathbf{L} \mathbf{e}_{k-1}(\tau) - 2 \mathbf{e}_{k-1}^T(\tau) \Delta \mathbf{u}_{k-1}(\tau) \} d\tau \quad (2.5.9) \end{aligned}$$

设初始设置使得 $\Delta \mathbf{x}_k(0) = 0 (k = 0, 1, 2, \dots)$ 。由式(2.5.7)和式(2.5.8)可知

$$\begin{aligned} \delta J_k(t) &= -\Delta \mathbf{x}_{k-1}^T(t) \mathbf{P} \Delta \mathbf{x}_{k-1}(t) - \\ &\quad \int_0^t \Delta \mathbf{x}_{k-1}^T(\tau) (\mathbf{Q} - \mathbf{C}^T \mathbf{L} \mathbf{C}) \Delta \mathbf{x}_{k-1}(\tau) d\tau \leq 0 \\ &\quad (\mathbf{Q} - \mathbf{C}^T \mathbf{L} \mathbf{C} \geq 0) \end{aligned}$$

当 $\mathbf{u}_0(t)$ 、 $\mathbf{u}_d(t)$ 在 $[0, T]$ 上有界时, $J_0(t)$ 也有界。因此, $J_k(t)$ 极限存在, $\delta J_k(t) \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$ 。它意味着 $\Delta \mathbf{x}_k(t) \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$ 以及 $\mathbf{e}_k(t) \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$ 。至此, 可以给出保证算法收敛性的充分条件

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Q} &\geq \mathbf{C}^T \mathbf{L} \mathbf{C} \\ \mathbf{x}_k(0) &= \mathbf{x}_d(0) \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (2.5.10)$$

例 2.5.1 考虑 LTI 系统

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [0 \quad 1]$$

采用学习律 (2.5.1), 其中取 $L = 1$ 。若取

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

则条件(2.5.6)和条件(2.5.10)成立。给定期望轨迹为 $y_d(t) = 12t^2(1-t)$, 并设定迭代初态 $\mathbf{x}_k(0) = 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)。图 2.5.2 给出了迭代输出误差的均方根值。图示表明, 当迭代次数足够大时, 算法一致收敛。

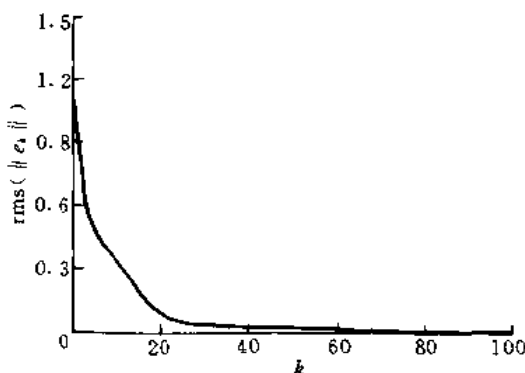


图 2.5.2 例 2.5.1 的迭代输出误差

2.5.2 二阶线性系统

下面, 讨论一类二阶线性定常系统的 P 型迭代学习控制。

考虑下述二阶线性定常系统

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}}_k(t) + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{x}}_k(t) + \mathbf{P}\mathbf{x}_k(t) &= \mathbf{u}_k(t) \\ \mathbf{y}_k(t) &= \dot{\mathbf{x}}_k(t) \end{aligned} \right\} \quad (2.5.11)$$

式中 $\mathbf{x}_k(t), \mathbf{u}_k(t) \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{R}, \mathbf{Q}, \mathbf{P}$ 为对称正定矩阵。

定义状态为 $\tilde{\mathbf{x}}_k = [\mathbf{x}_k^T \dot{\mathbf{x}}_k^T]^T$, 可写出系统(2.5.11)的状态空间表达式

$$\left. \begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_k(t) &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{P} & -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_k(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{R}^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{u}_k(t) \\ \mathbf{y}_k(t) &= [0 \ I] \tilde{\mathbf{x}}_k(t) \end{aligned} \right\} \quad (2.5.12)$$

使用速度信号($\dot{x}_k(t)$ 为位置信号)构造学习律

$$\begin{aligned} u_{k+1}(t) &= u_k(t) + \Lambda(\dot{x}_d(t) - \dot{x}_k(t)) = \\ &u_k(t) + \Lambda(y_d(t) - y_k(t)) \end{aligned} \quad (2.5.13)$$

式中 Λ 为对称正定矩阵。

由于 $CB = R^{-1}$, 所以该系统是一阶完全非正则系统。但定理 2.2.1 和定理 2.2.3 不能保证该学习控制系统的收敛性, 这是因为学习律(2.5.13)是 P 型学习律, 而不是 D 型学习律。

实际上, 在一定条件下, 该学习控制系统是收敛的。下面给予证明^[6]。

假设 $u_0(t)$ 连续以及 $y_d(t)$ 连续可微, 即 $u_0(t) \in C[0, T]$ 、 $y_d(t) \in C^1[0, T]$ 。由式(2.5.11)知, $x_0(t) \in C^2[0, T]$ 、 $e_0(t) = y_d(t) - y_0(t) = y_d(t) - \dot{x}_0(t) \in C^1[0, T]$ 。记 $d_k(t) = x_{k+1}(t) - x_k(t)$, $e_k(t) = y_d(t) - y_k(t)$ 。由式(2.5.11)和式(2.5.13)可知

$$R\ddot{d}_k + Q\dot{d}_k + Pd_k = Ae_k \quad (2.5.14)$$

因此, $d_0(t) \in C^3[0, T]$, $x_1(t) = d_0(t) + x_0(t) \in C^2[0, T]$, $e_1(t) = y_d(t) - y_1(t) = y_d(t) - \dot{x}_1(t) \in C^1[0, T]$ 。如此递推下去, 在第 k 次迭代时, $e_k(t) \in C^1[0, T]$ 、 $d_k(t) \in C^3[0, T]$ 。定义

$$\langle x, y \rangle = \int_0^t x^T(\tau) y(\tau) d\tau$$

$$J_k = \langle e_k, Ae_k \rangle$$

利用 $e_{k+1}(t) = e_k(t) - \dot{d}_k(t)$, 有

$$J_{k+1} = \langle e_{k+1}, Ae_{k+1} \rangle =$$

$$J_k + \langle \dot{d}_k, A\dot{d}_k \rangle - 2\langle \dot{d}_k, Ae_k \rangle =$$

$$J_k + \langle \dot{d}_k, A\dot{d}_k \rangle - 2\langle \dot{d}_k, R\ddot{d}_k + Q\dot{d}_k + Pd_k \rangle =$$

$$J_k - \langle \dot{d}_k, (2Q - A)\dot{d}_k \rangle -$$

$$2\langle \dot{d}_k, R\ddot{d}_k \rangle - 2\langle \dot{d}_k, Pd_k \rangle \quad (2.5.15)$$

利用 $2\langle \dot{x}, A\dot{x} \rangle = \dot{x}^T A \dot{x} - x^T(0) A x(0)$, 其中 A 为对称矩阵, 可

得

$$2\langle \dot{\mathbf{d}}_k, \mathbf{R}\ddot{\mathbf{d}}_k \rangle = \dot{\mathbf{d}}_k^T \mathbf{R} \dot{\mathbf{d}}_k - \dot{\mathbf{d}}_k^T(0) \mathbf{R} \dot{\mathbf{d}}_k(0) \quad (2.5.16)$$

$$2\langle \mathbf{d}_k, \mathbf{P}\dot{\mathbf{d}}_k \rangle = \mathbf{d}_k^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{d}}_k - \mathbf{d}_k^T(0) \mathbf{P} \dot{\mathbf{d}}_k(0) \quad (2.5.17)$$

设 $\mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}^0$, $\dot{\mathbf{x}}_k(0) = \mathbf{y}_d(0)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)。将式(2.5.16), 式(2.5.17)代入式(2.5.15), 则有

$$J_{k+1} = J_k - \langle \dot{\mathbf{d}}_k, (2\mathbf{Q} - \mathbf{A})\dot{\mathbf{d}}_k \rangle - \dot{\mathbf{d}}_k^T \mathbf{R} \dot{\mathbf{d}}_k - \mathbf{d}_k^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{d}}_k \quad (2.5.18)$$

另外, 由于 $\dot{\mathbf{d}}_k(t) = \mathbf{e}_k(t) - \mathbf{e}_{k+1}(t)$, 故 $\ddot{\mathbf{d}}_k(t) = \dot{\mathbf{e}}_k(t) - \dot{\mathbf{e}}_{k+1}(t)$ 。记 $\dot{J}_k = \langle \dot{\mathbf{e}}_k, \mathbf{A}\dot{\mathbf{e}}_k \rangle$, 有

$$\begin{aligned} \dot{J}_{k+1} &= \langle \dot{\mathbf{e}}_{k+1}, \mathbf{A}\dot{\mathbf{e}}_{k+1} \rangle = \\ &= \dot{J}_k + \langle \ddot{\mathbf{d}}_k, \mathbf{A}\dot{\mathbf{d}}_k \rangle - 2\langle \ddot{\mathbf{d}}_k, \mathbf{A}\dot{\mathbf{e}}_k \rangle = \\ &= \dot{J}_k + \langle \ddot{\mathbf{d}}_k, \mathbf{A}\dot{\mathbf{d}}_k \rangle - 2\langle \ddot{\mathbf{d}}_k, \mathbf{R}\dot{\mathbf{d}}_k + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{d}}_k + \mathbf{P}\dot{\mathbf{d}}_k \rangle = \\ &= \dot{J}_k - \langle \ddot{\mathbf{d}}_k, (2\mathbf{Q} - \mathbf{A})\dot{\mathbf{d}}_k \rangle - \\ &= 2\langle \ddot{\mathbf{d}}_k, \mathbf{R}\dot{\mathbf{d}}_k \rangle - 2\langle \ddot{\mathbf{d}}_k, \mathbf{P}\dot{\mathbf{d}}_k \rangle \end{aligned} \quad (2.5.19)$$

因为 $\mathbf{d}_k(0) = 0$, $\dot{\mathbf{d}}_k(0) = 0$, $\mathbf{e}_k(0) = 0$, 所以, 由式(2.5.14)及 \mathbf{R} 的正定性知 $\dot{\mathbf{d}}_k(0) = 0$ 。这样, 式(2.5.19)可写成

$$J_{k+1} = J_k - \langle \dot{\mathbf{d}}_k, (2\mathbf{Q} - \mathbf{A})\dot{\mathbf{d}}_k \rangle - \dot{\mathbf{d}}_k^T \mathbf{R} \dot{\mathbf{d}}_k - \mathbf{d}_k^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{d}}_k \quad (2.5.20)$$

假设 $2\mathbf{Q} - \mathbf{A} > 0$, 由式(2.5.18), 式(2.5.20)及 \mathbf{P} , \mathbf{R} 的正定性可知

$$J_k - J_{k+1} \geq \mathbf{d}_k^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{d}}_k \geq 0 \quad (2.5.21)$$

$$J_k - J_{k+1} \geq \dot{\mathbf{d}}_k^T \mathbf{R} \dot{\mathbf{d}}_k \geq 0 \quad (2.5.22)$$

$$J_k - J_{k+1} \geq \dot{\mathbf{d}}_k^T \mathbf{R} \dot{\mathbf{d}}_k \geq 0 \quad (2.5.23)$$

式(2.5.21)及式(2.5.23)说明序列 $\{J_k\}$, $\{\dot{J}_k\}$ 单调减。由 \mathbf{A} 的正定性知, $J_k \geq 0$, $\dot{J}_k \geq 0$, 故 $\{J_k\}$ 、 $\{\dot{J}_k\}$ 极限存在。这样, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, 式(2.5.21)~式(2.5.23)蕴涵 $\mathbf{d}_k(t) \rightarrow 0$, $\dot{\mathbf{d}}_k(t) \rightarrow 0$, $\ddot{\mathbf{d}}_k(t) \rightarrow 0$ (对于固定的 $t \in [0, T]$)。因此, 由式(2.5.14)知 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{e}_k(t) = 0$ (对于固定的 $t \in [0, T]$)。

上述推导证明了输出误差 $\mathbf{e}_k(t)$ 的逐点收敛性, 它要求 $2\mathbf{Q} -$

\mathbf{A} 正定及初始条件 $\mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}^0$, $\mathbf{e}_k(0) = 0 (k = 0, 1, 2, \dots)$ 。这一结论是在 \mathbf{R} 、 \mathbf{Q} 、 \mathbf{P} 及 \mathbf{A} 对称正定的前提下得到的。然而, 许多机械系统并不满足 \mathbf{Q} 、 \mathbf{P} 是对称正定的这一条件。下面便讨论仅要求 \mathbf{R} 、 \mathbf{A} 为对称正定的情形。记

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \int_0^t e^{-\rho\tau} \mathbf{x}^T(\tau) \mathbf{y}(\tau) d\tau, \rho > 0$$

$$J_k = \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{A} \mathbf{e}_k \rangle + \lambda \langle \dot{\mathbf{e}}_k, \mathbf{A} \dot{\mathbf{e}}_k \rangle, \lambda > 0$$

由式(2.5.14)知

$$\begin{aligned} J_{k+1} &= \langle \mathbf{e}_{k+1}, \mathbf{A} \mathbf{e}_{k+1} \rangle + \lambda \langle \dot{\mathbf{e}}_{k+1}, \mathbf{A} \dot{\mathbf{e}}_{k+1} \rangle = \\ &J_k + \langle \dot{\mathbf{d}}_k, \mathbf{A} \dot{\mathbf{d}}_k \rangle + \lambda \langle \ddot{\mathbf{d}}_k, \mathbf{A} \ddot{\mathbf{d}}_k \rangle - 2 \langle \dot{\mathbf{d}}_k, \mathbf{A} \mathbf{e}_k \rangle - 2\lambda \langle \ddot{\mathbf{d}}_k, \mathbf{A} \dot{\mathbf{e}}_k \rangle = \\ &J_k + \langle \dot{\mathbf{d}}_k, \mathbf{A} \dot{\mathbf{d}}_k \rangle + \lambda \langle \ddot{\mathbf{d}}_k, \mathbf{A} \ddot{\mathbf{d}}_k \rangle - 2 \langle \dot{\mathbf{d}}_k, \mathbf{R} \ddot{\mathbf{d}}_k + \mathbf{Q} \dot{\mathbf{d}}_k + \mathbf{P} \mathbf{d}_k \rangle - \\ &2\lambda \langle \ddot{\mathbf{d}}_k, \mathbf{R} \ddot{\mathbf{d}}_k + \mathbf{Q} \dot{\mathbf{d}}_k + \mathbf{P} \mathbf{d}_k \rangle = \\ &J_k + \langle \dot{\mathbf{d}}_k, (-2\mathbf{Q} + \mathbf{A}) \dot{\mathbf{d}}_k \rangle + \langle \ddot{\mathbf{d}}_k, \lambda(-2\mathbf{Q} + \mathbf{A}) \ddot{\mathbf{d}}_k \rangle - \\ &2 \langle \dot{\mathbf{d}}_k, \mathbf{R} \ddot{\mathbf{d}}_k \rangle - 2 \langle \dot{\mathbf{d}}_k, \mathbf{P} \mathbf{d}_k \rangle - \\ &2\lambda \langle \ddot{\mathbf{d}}_k, \mathbf{R} \ddot{\mathbf{d}}_k \rangle - 2\lambda \langle \ddot{\mathbf{d}}_k, \mathbf{P} \mathbf{d}_k \rangle \end{aligned} \quad (2.5.24)$$

由初始条件 $\mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}^0$ 、 $\mathbf{e}_k(0) = 0$ 知, $\mathbf{d}_k(0) = 0$ 、 $\dot{\mathbf{d}}_k(0) = 0$ 、 $\ddot{\mathbf{d}}_k(0) = 0 (k = 0, 1, 2, \dots)$ 。因此, 利用

$$2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{A} \dot{\mathbf{x}} \rangle = e^{-\rho t} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^T(0) \mathbf{A} \dot{\mathbf{x}}(0) + \langle \mathbf{x}, \rho \mathbf{A} \mathbf{x} \rangle$$

其中 \mathbf{A} 为对称矩阵, 可得

$$2 \langle \dot{\mathbf{d}}_k, \mathbf{R} \ddot{\mathbf{d}}_k \rangle = e^{-\rho t} \dot{\mathbf{d}}_k^T \mathbf{R} \ddot{\mathbf{d}}_k + \langle \dot{\mathbf{d}}_k, \rho \mathbf{R} \dot{\mathbf{d}}_k \rangle \quad (2.5.25)$$

$$2 \langle \ddot{\mathbf{d}}_k, \mathbf{R} \ddot{\mathbf{d}}_k \rangle = e^{-\rho t} \ddot{\mathbf{d}}_k^T \mathbf{R} \ddot{\mathbf{d}}_k + \langle \ddot{\mathbf{d}}_k, \rho \mathbf{R} \dot{\mathbf{d}}_k \rangle \quad (2.5.26)$$

将式(2.5.25)、式(2.5.26)代入式(2.5.24)

$$\begin{aligned} J_{k+1} &= J_k - e^{-\rho t} \dot{\mathbf{d}}_k^T \mathbf{R} \dot{\mathbf{d}}_k - e^{-\rho t} \ddot{\mathbf{d}}_k^T \mathbf{R} \ddot{\mathbf{d}}_k + \\ &\langle \dot{\mathbf{d}}_k, (-\rho \mathbf{R} - 2\mathbf{Q} + \mathbf{A}) \dot{\mathbf{d}}_k \rangle - 2 \langle \dot{\mathbf{d}}_k, \mathbf{P} \mathbf{d}_k \rangle + \\ &\langle \ddot{\mathbf{d}}_k, \lambda(-\rho \mathbf{R} - 2\mathbf{Q} + \mathbf{A}) \ddot{\mathbf{d}}_k \rangle - 2\lambda \langle \ddot{\mathbf{d}}_k, \mathbf{P} \mathbf{d}_k \rangle \end{aligned} \quad (2.5.27)$$

注意到以下关系

$$\langle \dot{\mathbf{d}}_k + \mathbf{P} \mathbf{d}_k, \dot{\mathbf{d}}_k + \mathbf{P} \mathbf{d}_k \rangle \geqslant 0 \quad (2.5.28)$$

$$\langle \ddot{\mathbf{d}}_k + \mathbf{P}\dot{\mathbf{d}}_k, \ddot{\mathbf{d}}_k + \mathbf{P}\dot{\mathbf{d}}_k \rangle \geq 0 \quad (2.5.29)$$

$$\langle \dot{\mathbf{d}}_k - \mathbf{d}_k, \dot{\mathbf{d}}_k - \mathbf{d}_k \rangle \geq 0 \quad (2.5.30)$$

将式(2.5.28)~式(2.5.30)一式展开

$$2\langle \dot{\mathbf{d}}_k, \mathbf{P}\dot{\mathbf{d}}_k \rangle \geq -\langle \dot{\mathbf{d}}_k, \dot{\mathbf{d}}_k \rangle - \langle \mathbf{d}_k, \mathbf{P}^T \mathbf{P}\dot{\mathbf{d}}_k \rangle \quad (2.5.31)$$

$$2\langle \ddot{\mathbf{d}}_k, \mathbf{P}\dot{\mathbf{d}}_k \rangle \geq -\langle \ddot{\mathbf{d}}_k, \ddot{\mathbf{d}}_k \rangle - \langle \dot{\mathbf{d}}_k, \mathbf{P}^T \mathbf{P}\ddot{\mathbf{d}}_k \rangle \quad (2.5.32)$$

$$\langle \dot{\mathbf{d}}_k, \dot{\mathbf{d}}_k \rangle - 2\langle \dot{\mathbf{d}}_k, \mathbf{d}_k \rangle + \langle \mathbf{d}_k, \mathbf{d}_k \rangle \geq 0 \quad (2.5.33)$$

由式(2.5.27)和式(2.5.31)~式(2.5.33),有

$$J_k - J_{k+1} \geq e^{-\rho} \mathbf{d}_k^T \mathbf{d}_k + e^{-\rho} \dot{\mathbf{d}}_k^T \mathbf{R} \dot{\mathbf{d}}_k + e^{-\rho} \ddot{\mathbf{d}}_k^T \lambda \mathbf{R} \ddot{\mathbf{d}}_k + \langle \dot{\mathbf{d}}_k, \mathbf{A} \ddot{\mathbf{d}}_k \rangle + \langle \dot{\mathbf{d}}_k, \mathbf{B} \dot{\mathbf{d}}_k \rangle + \langle \mathbf{d}_k, \mathbf{C} \mathbf{d}_k \rangle \quad (2.5.34)$$

式中

$$\mathbf{A} = \lambda(\rho \mathbf{R} + 2\mathbf{Q} - \mathbf{A} - \mathbf{I})$$

$$\mathbf{B} = \rho \mathbf{R} + 2\mathbf{Q} - \mathbf{A} - 2\mathbf{I} - \lambda \mathbf{P}^T \mathbf{P}$$

$$\mathbf{C} = (\rho - 1)\mathbf{I} - \mathbf{P}^T \mathbf{P}$$

由于 \mathbf{R} 为正定矩阵,故可选取足够大的 $\rho > 1$,使得 $\mathbf{A} \geq 0$ 、 $\mathbf{B} \geq 0$ 、 $\mathbf{C} \geq 0$ 。因此,对于固定的 $t \in [0, T]$,由式(2.5.34)可知

$$J_k(t) \geq J_{k+1}(t) \quad (2.5.35)$$

又由于 \mathbf{A} 正定, $J_k(t) \geq 0$ 。故序列 $\{J_k\}$ 收敛。进一步地,由式(2.5.34)可知

$$J_k - J_{k+1} \geq e^{-\rho} \ddot{\mathbf{d}}_k^T \lambda \mathbf{R} \ddot{\mathbf{d}}_k \quad (2.5.36)$$

$$J_k - J_{k+1} \geq e^{-\rho} \dot{\mathbf{d}}_k^T \mathbf{R} \dot{\mathbf{d}}_k \quad (2.5.37)$$

$$J_k - J_{k+1} \geq e^{-\rho} \mathbf{d}_k^T \mathbf{d}_k \quad (2.5.38)$$

利用 \mathbf{R} 的正定性及式(2.5.35),可由式(2.5.36)~式(2.5.38)推知,对固定的 $t \in [0, T]$,当 $k \rightarrow \infty$ 时

$$\ddot{\mathbf{d}}_k(t) \rightarrow 0 \quad \dot{\mathbf{d}}_k(t) \rightarrow 0 \quad \mathbf{d}_k(t) \rightarrow 0$$

因此,由式(2.5.14)知, $\lim_{k \rightarrow \infty} e_k(t) = 0$ (对于固定的 $t \in [0, T]$)。

上述推导结果可表述为定理 2.5.1。

定理 2.5.1 如果由式(2.5.11)和式(2.5.13)描述的迭代学习控制系统满足条件

(1) \mathbf{R}, \mathbf{A} 正定对称

(2) $\mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}^0, \mathbf{e}_k(0) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$

那么, 对于足够大的 $\rho > 1$, 输出误差以下列形式递减

$$J_k(t) \geq J_{k+1}(t) \\ (\text{对于固定的 } t \in [0, T])$$

式中 $J_k(t) = \int_0^t e^{\rho\tau} [\mathbf{e}_k^T(\tau) \mathbf{A} \mathbf{e}_k(\tau) + \lambda \dot{\mathbf{e}}_k^T(\tau) \mathbf{A} \dot{\mathbf{e}}_k(\tau)] d\tau, \lambda > 0$ 。

并且

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{e}_k(t) = 0 (\text{对于固定的 } t \in [0, T])$$

上面仅证明了输出误差的逐点收敛性。进一步地, 利用 Ascoli-Arzela 定理可证得 $\mathbf{x}_k(t)$ 在 $[0, T]$ 上一致收敛于 $\mathbf{x}_d(t)$, 即 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k(t) = \mathbf{x}_d(t) (t \in [0, T])$ 。

2.6 最优学习律

连续形式的迭代学习控制算法需要通过采样控制技术实现。因此, 从实现的角度来看, 离散形式的迭代学习控制算法更为直接, 并方便应用。另外, 前面几节注重迭代学习控制算法的收敛性分析, 未涉及控制器的综合问题。本节针对离散时间系统, 给出一种通过最优化目标函数确定控制器参数的设计方法。考虑线性定常系统

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{aligned} \right\} \quad (2.6.1)$$

式中 $t \in [0, T]$, 这里 $[0, T]$ 表示离散时间区间 $\{0, 1, \dots, T\}$; $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n, \mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^r, \mathbf{y}(t) \in \mathbf{R}^m$ 。

式(2.6.1)的解可以表示为

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{A}^t \mathbf{x}(0) + \sum_{i=0}^{t-1} \mathbf{C}\mathbf{A}^{t-1-i} \mathbf{B}\mathbf{u}(i) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \\ (t = 1, 2, \dots, T) \quad (2.6.2)$$

可以看出, 该系统的 Markov 参数为

$$h_0 = D$$

$$h_i = CA^{i-1}B \quad (i = 1, 2, \dots)$$

记

$$u_k = [u_k(0), u_k(1), \dots, u_k(T)]^T$$

$$y_k = [y_k(0), y_k(1), \dots, y_k(T)]^T$$

$$y_k^0 = [C^T, (CA)^T, \dots, (CA^{T-1})^T]^T x_k(0)$$

$$G = \begin{bmatrix} D & & & & \\ CB & D & & & \\ CAB & CB & D & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ CA^{T-1}B & CA^{T-2}B & CA^{T-3}B & \cdots & CB & D \end{bmatrix}$$

式(2.6.1)的解又可写成矩阵形式

$$y_k = y^0 + Gu_k \quad (2.6.3)$$

这里,假定初始条件固定,即对于某个给定的初始输出 y^0 , $y_k^0 = y^0$ ($k=0, 1, 2, \dots$)。

给定可达的期望轨迹 $y_d = [y_d(0), y_d(1), \dots, y_d(T)]^T$ 。现在的问题是,在 $[0, T]$ 上,寻找控制输入 u_k ,使得系统输出 y_k 完全跟踪上 y_d 。

考虑目标函数

$$\begin{aligned} J_{k+1}(u_{k+1}) = & \|e_{k+1}\|_Q^2 + \|u_{k+1} - u_k\|_R^2 = \\ & e_{k+1}^T Q e_{k+1} + (u_{k+1} - u_k)^T R (u_{k+1} - u_k) \end{aligned} \quad (2.6.4)$$

式中 Q, R 为对称正定矩阵;输出误差

$$e_k = y_d - y_k =$$

$$[y_d(0) - y_k(0), y_d(1) - y_k(1), \dots, y_d(T) - y_k(T)]^T$$

当完成第 k 次迭代时,第 $k+1$ 次迭代时的控制取为

$$u_{k+1} = \arg \min_{u_{k+1}} \{J_{k+1}(u_{k+1})\} \quad (2.6.5)$$

由式(2.6.3)知

$$\mathbf{e}_{k+1} = \mathbf{e}_k - \mathbf{G}(\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k) \quad (2.6.6)$$

这样, 目标函数又可写成

$$\begin{aligned} J_{k+1}(\mathbf{u}_{k+1}) &= [\mathbf{e}_k - \mathbf{G}(\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k)]^T \mathbf{Q} [\mathbf{e}_k - \mathbf{G}(\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k)] + \\ &\quad (\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k)^T \mathbf{R} (\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k) = \\ &\quad \mathbf{e}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{e}_k - 2\mathbf{e}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{G} (\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k) + \\ &\quad (\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k)^T [\mathbf{G}^T \mathbf{Q} \mathbf{G} + \mathbf{R}] (\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k) \quad (2.6.7) \end{aligned}$$

利用最优性条件

$$\frac{1}{2} \frac{\partial J_{k+1}}{\partial \mathbf{u}_{k+1}} = -\mathbf{G}^T \mathbf{Q} \mathbf{e}_k + [\mathbf{G}^T \mathbf{Q} \mathbf{G} + \mathbf{R}] (\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k) = 0$$

可得第 $k+1$ 次迭代时的最优控制输入

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{k+1} &= \mathbf{u}_k + [\mathbf{G}^T \mathbf{Q} \mathbf{G} + \mathbf{R}]^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{Q} \mathbf{e}_k \triangleq \\ &\quad \mathbf{u}_k + \mathbf{L}^* \mathbf{e}_k \end{aligned} \quad (2.6.8)$$

式中 $\mathbf{L}^* = [\mathbf{G}^T \mathbf{Q} \mathbf{G} + \mathbf{R}]^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{Q}$ 为最优学习增益矩阵。

下面讨论最优学习律(2.6.8)作用下的收敛性。由目标函数(2.6.4)可知

$$\|\mathbf{e}_{k+1}\|_Q^2 \leq J_{k+1}(\mathbf{u}_{k+1})$$

又由式(2.6.6)可知

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_{k+1}\|_Q^2 &= \\ &= \|\mathbf{e}_k\|_Q^2 + \|\mathbf{G}(\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k)\|_Q^2 - 2\mathbf{e}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{G} (\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k) \end{aligned}$$

因此

$$J_{k+1}(\mathbf{u}_{k+1}) \leq J_{k+1}(\mathbf{u}_k) = \|\mathbf{e}_k\|_Q^2$$

结合两式

$$\|\mathbf{e}_{k+1}\|_Q^2 \leq J_{k+1}(\mathbf{u}_{k+1}) \leq \|\mathbf{e}_k\|_Q^2 \quad (2.6.9)$$

该单调性质保证 $\|\mathbf{e}_k\|_Q^2$ 极限存在。因此

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}_k\|_Q^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} J_k(\mathbf{u}_k) \triangleq J_\infty \geq 0$$

这样由式(2.6.4)知 $\|\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k\|_R^2 \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$)。它意味着

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k) = 0$$

又由式(2.6.8)可知

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{L}^* e_k = 0$$

若 $\ker G^T = 0$, 则不存在非零 e , 使得 $G^T e = 0$ 。因此, $\lim_{k \rightarrow \infty} e_k = 0$, 并且 $J_\infty = 0$ 。此即证得收敛性, 同时收敛充分条件也可从中给出。

通常不能精确已知系统参数 $\{A, B, C, D\}$ 。这时, 可利用系统模型进行控制器设计。设已知系统模型 $\{\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}\}$ 。记

$$\bar{G} = \begin{bmatrix} \bar{D} & & & \\ \bar{C} \bar{B} & \bar{D} & & \\ \bar{C} \bar{A} \bar{B} & \bar{C} \bar{B} & \bar{D} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \bar{C} \bar{A}^{T-1} \bar{B} & \bar{C} \bar{A}^{T-2} \bar{B} & \bar{C} \bar{A}^{T-3} \bar{B} & \cdots & \bar{C} \bar{B} & \bar{D} \end{bmatrix}$$

$$\bar{L}^* = [\bar{G}^T Q \bar{G} + R]^{-1} \bar{G}^T Q$$

采用学习律

$$u_{k+1} = u_k + \bar{L}^* e_k \quad (2.6.10)$$

由式(2.6.6)可知

$$\begin{aligned} e_k &= [I - G \bar{L}^*] e_{k-1} = \\ &[I - G \bar{L}^*]^k e_0 \end{aligned} \quad (2.6.11)$$

只要 $I - G \bar{L}^*$ 的所有特征值位于单位圆内, 则仍然有 $\lim_{k \rightarrow \infty} e_k = 0$ 。因此, 最优学习律(2.6.8)允许一定的模型失配。

对于 $D=0$ 这种非正则情形, 也容易给出其最优学习律。这时, 系统的解仍可由式(2.6.3)表示, 只是

$$\begin{aligned} u_k &= [u_k(0), u_k(1), \cdots, u_k(T-1)]^T \\ y_k &= [y_k(1), y_k(2), \cdots, y_k(T)]^T \\ y_k^0 &= [(CA)^T, (CA^2)^T, \cdots, (CA^T)^T]^T x_k(0) \end{aligned}$$

$$G = \begin{bmatrix} CB & & & \\ CAB & CB & & \\ CA^2 B & CAB & CB & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ CA^{T-1} B & CA^{T-2} B & CA^{T-3} B & \cdots & CAB & CB \end{bmatrix}$$

因为最优学习律(2.6.8)是依据式(2.6.3)和式(2.6.4)导出的,与 u_k 、 y_k 、 y_k^0 、 G 的具体形式无关,所以 $D=0$ 这种非正则情形下的最优学习律仍与式(2.6.8)相同。

2.7 基于脉冲响应的学习律

基于被控对象的脉冲响应序列,本节讨论迭代学习控制器的设计方法,并分析控制系统的跟踪性能。考虑下述输入输出描述的 SISO 线性系统

$$y(t+r) = \sum_{s=0}^{\infty} a(s)u(t-s) \quad (2.7.1)$$

式中 $t \in [0, T-1]$, 这里 $[0, T-1]$ 表示离散时间区间 $\{0, 1, \dots, T-1\}$; $u(t), y(t) \in \mathbf{R}^1$ 分别为系统的输入和输出; $\{a(t), t \in [0, T-1]\}$ 为该系统的脉冲响应序列, 这里设 $a(0) \neq 0$; r 是系统的相对度。给定一控制输入序列 $\{u(t), t \in [0, T-1]\}$, 假设 $u(t) = 0 (t < 0)$, 系统(2.7.1)的响应为

$$\begin{aligned} y(r) &= a(0)u(0) \\ y(r+1) &= a(0)u(1) + a(1)u(0) \\ y(r+2) &= a(0)u(2) + a(1)u(1) + a(2)u(0) \\ &\vdots \\ y(T+r-1) &= a(0)u(T-1) + \dots + a(T-1)u(0) \end{aligned}$$

量测得到输入输出数据 $\{u(t), y(r+t), t \in [0, T-1]\}$ 。设 $u(0) \neq 0$, 则 $\{a(i), i \in [0, T-1]\}$ 可由下式确定

$$\begin{aligned} a(0) &= \frac{y(0)}{u(0)} \\ a(i) &= \frac{1}{u(0)} \left\{ y(r+i) - \sum_{j=0}^{i-1} a(j)u(i-j) \right\} \end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= [u(0), u(1), \dots, u(T-1)]^T \\ \mathbf{y} &= [y(r), y(r+1), \dots, y(T+r-1)]^T \end{aligned}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} a(0) & & & \\ a(1) & a(0) & & \\ \vdots & \vdots & & \\ a(T-1) & a(T-2) & \cdots & a(0) \end{bmatrix}$$

可将系统(2.7.1)的输出响应写成矩阵形式

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}\mathbf{u} \quad (2.7.2)$$

现在的问题是, 给定可达的期望轨迹 $\mathbf{y}_d = [y_d(r), y_d(r+1), \dots, y_d(T+r-1)]^T$ 。在区间 $[0, T-1]$ 上寻找控制输入序列 \mathbf{u} , 使得该输入序列 \mathbf{u} 产出的输出轨迹 \mathbf{y} 在区间 $[r, T+r-1]$ 上完全跟踪上期望轨迹 \mathbf{y}_d 。

若该系统的脉冲响应序列 $\{a(t), t \in [0, T-1]\}$ 精确已知, 则可取控制

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) & h(0) \\ \vdots & \vdots \\ h(T-1) & h(T-2) & \cdots & h(0) \end{bmatrix} \mathbf{y}_d \triangleq \mathbf{H}\mathbf{y}_d \quad (2.7.3)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{G}^{-1}$$

式中

$$\left. \begin{aligned} h(0) &= \frac{1}{a(0)} \\ h(i) &= -\frac{1}{a(0)} \sum_{j=0}^{i-1} a(i-j)h(j) \end{aligned} \right\} \quad (2.7.4)$$

由式(2.7.3)给出的控制可使得

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{G}\mathbf{u} = \\ &\mathbf{G}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{y}_d = \mathbf{y}_d \end{aligned}$$

即实现“一步收敛”。

若该系统的脉冲响应序列 $\{a(t), t \in [0, T-1]\}$ 不精确已知, 则可采用迭代学习控制技术实现跟踪任务。以下标 k 表示迭代次数, 记

$$\mathbf{u}_k = [u_k(0), u_k(1), \dots, u_k(T-1)]^T$$

$$\mathbf{y}_k = [y_k(r), y_k(r+1), \dots, y_k(T+r-1)]^T$$

第 k 次迭代时, 系统(2.7.1)的输出响应可写成

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{G}\mathbf{u}_k \quad (2.7.5)$$

采用学习律

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{y}_d \quad (2.7.6)$$

$$\mathbf{H}_{k+1} = \mathbf{H}_k + \Delta \mathbf{H}_k \quad (2.7.7)$$

$$\Delta \mathbf{H}_k = \begin{bmatrix} b(0)e_k(r) & & & \\ b(0)e_k(r+1) & b(1)e_k(r) & & \\ \vdots & \vdots & & \\ b(0)e_k(r+T-1) & b(1)e_k(r+T-2) & \cdots & b(T-1)e_k(r) \end{bmatrix} \quad (2.7.8)$$

由于

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{H}_k \mathbf{y}_d &= \begin{bmatrix} b(0)e_k(r) \\ b(0)e_k(r+1) & b(1)e_k(r) \\ \vdots & \vdots \\ b(0)e_k(r+T-1) & b(1)e_k(r+T-2) & \cdots & b(T-1)e_k(r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_d(r) \\ y_d(r+1) \\ \vdots \\ y_d(r+T-1) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} b(0)y_d(r)e_k(r) \\ b(0)e_k(r+1)y_d(r) + b(1)e_k(r)y_d(r+1) \\ \vdots \\ b(0)e_k(r+T-1)y_d(r) + b(1)e_k(r+T-2)y_d(r+1) + \cdots + b(T-1)e_k(r)y_d(r+T-1) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} b(0)y_d(r) \\ b(1)y_d(r+1) & b(0)y_d(r) \\ \vdots & \vdots \\ b(T-1)y_d(r+T-1) & b(T-2)y_d(r+T-2) & \cdots & b(0)y_d(r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_k(r) \\ e_k(r+1) \\ \vdots \\ e_k(r+T-1) \end{bmatrix} \triangleq \mathbf{L}e_k \end{aligned}$$

式中 $\mathbf{e}_k = [e_k(r), e_k(r+1), \dots, e_k(T+r-1)]^T$ 。该学习律又可写成

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + \Delta \mathbf{H}_k \mathbf{y}_d =$$

$$u_k + Le_k \quad (2.7.9)$$

由式(2.7.5)和式(2.7.9)可知

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= e_k - G(u_{k+1} - u_k) = \\ &[I - GL]e_k = \\ &[I - GL]^{k+1}e_0 \end{aligned} \quad (2.7.10)$$

因此, 当 $\rho(I - GL) < 1$ 时, 则有 $\lim_{k \rightarrow \infty} e_k = 0$ 。进一步地

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} y_k &= \lim_{k \rightarrow \infty} Gu_k = \\ &\lim_{k \rightarrow \infty} GH_k y_d = y_d \end{aligned}$$

上式对所有 y_d 成立, 故 $\lim_{k \rightarrow \infty} H_k = G^{-1}$ 。

下面, 给出基于被控对象脉冲响应序列的迭代学习控制算法的另一种收敛性分析方法^[82]。

由式(2.7.2)可以看出, 其右端的系数矩阵是 $T \times T$ 的下三角 Toeplitz 矩阵。为了叙述简便, 以 $L[a]$ 记之, 它的第一列是向量

$$a = [a(0), a(1), \dots, a(T-1)]^T \quad (2.7.11)$$

这样, 式(2.7.2)又可写成

$$y = L[a]u \quad (2.7.12)$$

假设系统的脉冲响应序列不能精确已知, 利用迭代学习控制技术来获得该控制输入序列

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \sum_{s=0}^{T-1} c(s)e_k(t+r-s) \quad (2.7.13)$$

式中 $c(t), t \in [0, T-1]$ 为增益系数; 若定义 $e_k(t) = 0, t \leq r-1$, 则由(2.7.13)知

$$\begin{bmatrix} u_{k+1}(0) \\ u_{k+1}(1) \\ \vdots \\ u_{k+1}(T-1) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} u_k(0) \\ u_k(1) \\ \vdots \\ u_k(T-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c(0) & & & \\ c(1) & c(0) & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ c(T-1) & c(T-2) & \cdots & c(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_k(r) \\ e_k(r+1) \\ \vdots \\ e_k(T+r-1) \end{bmatrix} \quad (2.7.14)$$

记

$$c = [c(0), c(1), \dots, c(T-1)]^T \quad (2.7.15)$$

那么,学习律(2.7.13)又可表示成

$$u_{k+1} = u_k + L[c]e_k \quad (2.7.16)$$

该学习律与学习律(2.7.9)形式上是一致的。

定理 2.7.1 对于任意的初始误差 e_0 , 当 $k \rightarrow \infty$ 时, e_k 收敛于零的充要条件是

$$|1 - a(0)c(0)| < 1 \quad (2.7.17)$$

证明 在第 k 次迭代时, 由式(2.7.12)可知

$$y_k = L[a]u_k \quad (2.7.18)$$

由式(2.7.18)和式(2.7.16)可得

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= y_d - L[a]u_{k+1} = \\ &= y_d - L[a]u_k - L[a]L[c]e_k = \\ &= [I - L[a]L[c]]e_k \end{aligned} \quad (2.7.19)$$

由式(2.7.19)可知, e_k 收敛于零的充要条件是 $I - L[a]L[c]$ 的所有特征值位于单位圆内。由于 $L[a]$ 和 $L[c]$ 均是下三角形 Toeplitz 矩阵, 故 $I - L[a]L[c]$ 也是下三角形 Toeplitz 矩阵, 并且它的第一列为

$$f(c | a) = I_T - L[a]c \quad (2.7.20)$$

其中 $I_T = [1 \ 0 \ \cdots \ 0]^T$ 是 T 维向量。因此, $I - L[a]L[c]$ 且有 T 重特征值 $1 - a(0)c(0)$ 。此即证得式(2.7.17)是输出误差收敛于零的充要条件。

下面, 讨论输出误差沿着迭代轴的单调递减性质。

定理 2.7.2 设 $\|\cdot\|$ 为 \mathbf{R}^T 上的任一种向量范数。

(1) 若 $1 - a(0)c(0) \neq 0$, 则对于任意初始误差 $e_0 \neq 0$, 输出误差满足

$$\|e_{k+1}\| < \|e_k\| \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (2.7.21)$$

当且仅当

$$\|L[f(c|a)]\| < 1 \quad (2.7.22)$$

(2) 若 $1 - a(0)c(0) = 0$, 则对于任意初始误差 $e_0 \neq 0$, 存在整数 K 使得

$$\left. \begin{aligned} \|e_{k+1}\| &< \|e_k\| \quad (k = 0, 1, \dots, K-1) \\ \|e_K\| &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.7.23)$$

当且仅当式(2.7.22)成立。

证明 (1) 由于 $I - L[a]L[c]$ 是下三角形 Toeplitz 矩阵, 且其第一列为 $f(c|a)$, 故 $L[f(c|a)] = I - L[a]L[c]$, 且(2.7.19)可写成

$$e_{k+1} = L[f(c|a)]e_k \quad (2.7.24)$$

因此, 当 $1 - a(0)c(0) \neq 0$, 且 $e_0 \neq 0$ 时, 可推知对于有限的 k , $e_k \neq 0$ 。上式两端取范数

$$\|e_{k+1}\| = \|L[f(c|a)]e_k\| \leq \|L[f(c|a)]\| \|e_k\| \quad (2.7.25)$$

由式(2.7.22)及式(2.7.25)知式(2.7.21)成立。此即证得充分性, 下面证明必要性。对于任意的 $e_0 \neq 0$, 由式(2.7.21)和式(2.7.24)可知

$$\frac{\|e_{k+1}\|}{\|e_k\|} = \frac{\|L[f(c|a)]e_k\|}{\|e_k\|} < 1 \quad (2.7.26)$$

又由矩阵的诱导范数的定义可知

$$\|L[f(c|a)]\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|L[f(c|a)]x\|}{\|x\|} \quad (2.7.27)$$

由式(2.7.26)和式(2.7.27)可推知, 式(2.7.22)必要性得证。

(2) 当 $1 - a(0)c(0) = 0$ 时, 矩阵 $L[f(c|a)]$ 变成 Nilpotent 矩阵, 即, 存在有限整数 N 使得

$$L^i[f(c|a)] \neq 0 \quad (i \in [0, N-1])$$

$$L^N[f(c|a)] = 0$$

因此, 存在一整数 $K \leq N$ 使得

$$e_i \neq 0 \quad (i \in [0, K-1])$$

$$e_K = 0$$

这样, 与(1)类似, 可以证明式(2.7.22)是使得式(2.7.21)成立的充要条件。

下面, 讨论在 L_1 、 L_∞ 、 L_2 范数意义下输出误差沿迭代轴的单调递减性质。

定理 2.7.3 对于任一初始误差 e_0 , 则

(1) $\|e_{k+1}\|_1 \leq \|e_k\|_1$, $\|e_{k+1}\|_\infty \leq \|e_k\|_\infty$ ($k = 0, 1, \dots$), 当且仅当

$$\|f(c|a)\|_1 < 1 \quad (2.7.28)$$

(2) $\|e_{k+1}\|_2 \leq \|e_k\|_2$ ($k = 0, 1, \dots$), 的充分条件是式(2.7.28), 而必要条件为

$$\|f(c|a)\|_2 < 1 \quad (2.7.29)$$

证明 (1) 由列和范数以及行和范数的定义可知

$$\|L[f(c|a)]\|_1 = \|L[f(c|a)]\|_\infty = \|f(c|a)\|_1 \quad (2.7.30)$$

因此, 由定理 2.7.2 可证得(1)。

(2) 注意到 $\|L[f(c|a)]\|_2^2 = \rho\{L^T[f(c|a)]L[f(c|a)]\}$, 有

$$\begin{aligned} \|L[f(c|a)]\|_2^2 &\leq \|L^T[f(c|a)]L[f(c|a)]\|_1 \leq \\ &\|L^T[f(c|a)]\|_1 \|L[f(c|a)]\|_1 \end{aligned} \quad (2.7.31)$$

因为 $L[f(c|a)]$ 是下三角形 Toeplitz 矩阵, 所以利用式(2.7.30)得

$$\|L^T[f(c|a)]\|_1 = \|L[f(c|a)]\|_1 = \|f(c|a)\|_1 \quad (2.7.32)$$

由式(2.7.31)和式(2.7.32), 可得

$$\|L[f(c|a)]\|_2 \leq \|f(c|a)\|_1 \quad (2.7.33)$$

因此, 式(2.7.28)蕴涵 $\|L[f(c|a)]\|_2 < 1$ 此即证得式(2.7.28)是输出误差按 L_2 范数单调递减的充分条件。下面证明必要条件。由定理 2.7.2 知, 输出误差按 L_2 范数单调递减的充要条件是 $\|L[f(c|a)]\|_2 < 1$ 。它等价于

$$I - L^T[f(c|a)]L[f(c|a)] > 0 \quad (2.7.34)$$

由于矩阵 $I - L^T[f(c|a)]L[f(c|a)]$ 的对角线上的元素为 $1 - \|f(c|a)\|_2^2$ 。由 Sylvester 判据可知, 式(2.7.34)成立要求 $1 - \|f(c|a)\|_2^2 > 0$ 。必要性得证。

第三章 非线性系统的迭代学习控制

本章针对非线性系统讨论迭代学习控制问题。当被控对象以状态函数输出时,高阶学习律利用历史迭代数据构造学习律,以提高敛速;当量测信号存在噪声时,对量测信号进行滤波处理是一种通常作法。而滤波器型学习律中的滤波器不仅仅只起到滤波作用,部分滤波器参数也会影响算法收敛性。当被控对象全状态输出时,利用系统模型构造学习律,即模型算法学习律。由于算法公式中使用了误差和误差导数信号,故它属于 PD 型学习律。参考模型学习律也是一种 PD 型学习律,它的跟踪性能取决于参考模型的选取。这时讨论的被控对象状态方程中的右端函数存在不可分的控制项。

为了进一步阐述迭代学习控制的适用范围,本章还讨论了几种非线性系统的迭代学习控制:含状态时滞的被控对象,这时初始条件是关于状态的初始函数提出的,而不仅是关于 $t = 0$ 时的状态;具有 r 阶相度度的完全非正则系统,其中学习律使用了输出误差的 r 阶导数。

3.1 高阶学习律

在第 $k + 1$ 次迭代 t 时刻产生 $u_{k+1}(t)$ 时,2.1 节~2.4 节讨论的学习律所使用的数据有

(1) $u_k(t) (t \in [0, T])$

(2) $e_k(t) (t \in [0, T])$ 或 $\dot{e}_k(t) (t \in [0, T])$ 及其更高阶导数。

这些学习律可一般地表示为

$$u_{k+1}(t) = h(u_k(t), e_k(t), t)$$

称其为二阶学习律。实际上,还可以利用迭代历史数据

$$(3) u_{k-1}(t), u_{k-2}(t), \dots (t \in [0, T])$$

(4) $e_{k-1}(t), e_{k-2}(t), \dots (t \in [0, T])$ 或 $\dot{e}_{k-1}(t), \dot{e}_{k-2}(t), \dots (t \in [0, T])$ 及其更高阶导数

构造学习律。若使用数据 $\{u_k(t), u_{k-1}(t), \dots, u_{k-N+1}(t), e_k(t), e_{k-1}(t), e_{k-N+1}(t), t \in [0, T]\}$ 构造学习律, 则这时的学习律可一般地表示为

$$u_{k+1}(t) = h(u_k(t), u_{k-1}(t), \dots, u_{k-N+1}(t), e_k(t), e_{k-1}(t), \dots, e_{k-N+1}(t), t)$$

称其为 N 阶学习律。参考文献[30~32]提出并讨论了这种高阶学习律(higher-order learning law)。一般认为, 迭代学习控制系统采用高阶学习律的主要目的在于提高收敛速度。图 3.1.1 给出了二阶迭代学习控制的算法流程。

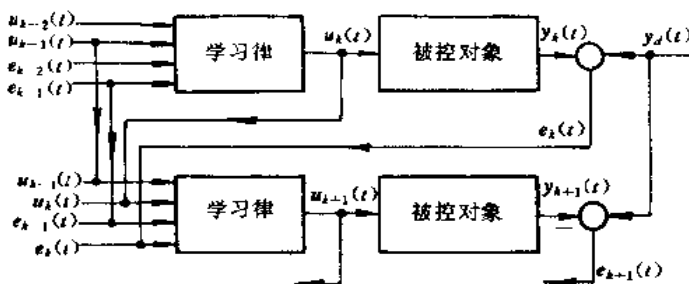


图 3.1.1 二阶迭代学习控制的算法流程

定义 3.1.1 一迭代学习控制算法是因果的, 如果第 $k+1$ 次迭代时 t 时刻的控制是由第 $k+1$ 次迭代时 $[0, t]$ 上的数据以及以前迭代时 $[0, T]$ 上的数据计算得到的。

由该定义知, 上述 N 阶学习律是因果的。第四章讨论具有反馈通道的迭代学习控制系统, 其学习律也是因果的。它采用本次

迭代 t 时刻的数据修正上一次迭代时 t 时刻的控制, 以获得本次迭代 t 时刻的控制。

考虑非线性系统

$$\dot{\mathbf{x}}_k(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k(t), t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}_k(t), t)\mathbf{u}_k(t) \quad (3.1.1a)$$

$$\mathbf{y}_k(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}_k(t), t) + \mathbf{D}(\mathbf{x}_k(t), t)\mathbf{u}_k(t) \quad (3.1.1b)$$

式中 $t \in [0, T]$, $\mathbf{x}_k(t) \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{u}_k(t) \in \mathbf{R}^r$, $\mathbf{y}_k(t) \in \mathbf{R}^m$; 非线性向量函数 $\mathbf{f}: \mathbf{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^n$, $\mathbf{B}: \mathbf{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^{n \times r}$, $\mathbf{g}: \mathbf{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^m$ 以及 $\mathbf{D}: \mathbf{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^{m \times r}$ 。假设 \mathbf{f} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{g} 、 \mathbf{D} 关于 \mathbf{x} 满足一致全局 Lipschitz 条件, 即, 对于 $t \in [0, T]$, \mathbf{x}_1 、 $\mathbf{x}_2 \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{a} \in \{\mathbf{f}, \mathbf{B}, \mathbf{g}, \mathbf{D}\}$, $\|\mathbf{a}(\mathbf{x}_1, t) - \mathbf{a}(\mathbf{x}_2, t)\| \leq k_a \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|$; \mathbf{B} 、 \mathbf{D} 在 $\mathbf{R}^n \times [0, T]$ 上有界。

称给定的期望轨迹 $\mathbf{y}_d(t)$ ($t \in [0, T]$) 和初态 $\mathbf{x}_d(0)$ 是可达的, 是指存在唯一的控制 $\mathbf{u}_d(t)$ ($t \in [0, T]$), 使得

$$\dot{\mathbf{x}}_d(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_d(t), t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}_d(t), t)\mathbf{u}_d(t)$$

$$\mathbf{y}_d(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}_d(t), t) + \mathbf{D}(\mathbf{x}_d(t), t)\mathbf{u}_d(t)$$

式中 $\mathbf{x}_d(t)$ 为期望状态轨迹。

对于系统 (3.1.1), 记由 $(\mathbf{x}_k(0), \mathbf{u}_k(t))$ ($t \in [0, T]$) 到 $(\mathbf{x}_k(t))$ ($t \in [0, T]$) 的映射为状态映射 \mathbf{S} ; 由 $(\mathbf{x}_k(0), \mathbf{u}_k(t))$ ($t \in [0, T]$) 到 $(\mathbf{y}_k(t))$ ($t \in [0, T]$) 的映射为输出映射 \mathbf{O} 。对于每个给定的初态 $\mathbf{x}_k(0)$, 假设状态映射 \mathbf{S} 和输出映射 \mathbf{O} 是一一对一的, 可保证期望轨迹 $\mathbf{y}_d(t)$ 和初态 $\mathbf{x}_d(0)$ 的可达性。

采用 N 阶学习律

$$\mathbf{u}_{k+1}(t) = \sum_{i=1}^N \mathbf{P}_i \mathbf{u}_{k-i+1}(t) + \sum_{i=1}^N \mathbf{Q}_i \mathbf{e}_{k-i+1}(t) \quad (3.1.2)$$

式中 N 为迭代学习阶次; \mathbf{P}_i 、 \mathbf{Q}_i 为增益矩阵。

定理 3.1.1 给定可达的期望轨迹 $\mathbf{y}_d(t)$ ($t \in [0, T]$)。如果由式 (3.1.1) 描述的系统满足条件

$$(1) \quad \sum_{i=1}^N \mathbf{P}_i = \mathbf{I}$$

(2) 存在 $\rho_i > 0 (i = 1, 2, \dots, N)$ 使得

$$\|P_i - Q_i D(x, t)\| \leq \rho_i, (x, t) \in \mathbf{R}^n \times [0, T]$$

且多项式

$$R(z) = z^N - \rho_1 z^{N-1} - \dots - \rho_{N-1} z - \rho_N$$

的所有零点位于单位圆内。

那么,当初态 $x_k(0) = x_d(0) (k = 0, 1, 2, \dots)$ 时,学习律(3.1.2)作用下产生的迭代输出一致收敛于期望轨迹。即, $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k(t) = y_d(t) (t \in [0, T])$ 。

证明 为了叙述简便,本书在定理证明中常略写函数自变量,例如, $x_k = x_k(t)$, $x_d = x_d(t)$, $f_k = f(x_k(t), t)$, $f_d = f(x_d(t), t)$ 等等,以后不再赘述。记 $j = k - i + 1$ 。由式(3.1.2),式(3.1.1b)和条件(1)可知

$$\begin{aligned} \Delta u_{k+1} &= \sum_{i=1}^N P_i \Delta u_j - \sum_{i=1}^N Q_i e_j = \\ &= \sum_{i=1}^N P_i \Delta u_j - \sum_{i=1}^N Q_i [g_d - g_j + (D_d - D_j) u_d + D_j \Delta u_j] = \\ &= \sum_{i=1}^N (P_i - Q_i D_j) \Delta u_j - \sum_{i=1}^N Q_i [g_d - g_j + (D_d - D_j) u_d] \end{aligned}$$

式中 $\Delta u_k = u_d - u_k$ 。

两端取范数

$$\begin{aligned} \|\Delta u_{k+1}\| &\leq \sum_{i=1}^N \|P_i - Q_i D_j\| \|\Delta u_j\| + \\ &\quad \sum_{i=1}^N \|Q_i\| (\|g_d - g_j\| + \|D_d - D_j\| \|u_d\|) \leq \\ &\quad \sum_{i=1}^N \rho_i \|\Delta u_j\| + \sum_{i=1}^N b_Q (k_g + k_D b_{ud}) \|\Delta x_j\| \quad (3.1.3) \end{aligned}$$

式中 $\Delta x_k = x_d - x_k$, $b_{ud} = \sup_{t \in [0, T]} \|u_d(t)\|$, b_Q 为矩阵 $Q_i (1 \leq i \leq N)$ 的界。

下面给出 Δx_k 的估计。由于 $x_k(0) = x_d(0) (k = 0, 1, 2, \dots)$

$$\begin{aligned} \|\Delta x_k\| &= \left\| \int_0^t (f_d + B_d u_d - f_k - B_k u_k) d\tau \right\| \leq \\ &\int_0^t (\|f_d - f_k\| + \|B_d - B_k\| \|u_d\| + \\ &\|B_k\| \|\Delta u_k\|) d\tau \leq \\ &\int_0^t [(k_f + k_B b_{ud}) \|\Delta x_k\| + b_B \|\Delta u_k\|] d\tau \end{aligned}$$

式中 b_B 为矩阵 B 的界。应用 Bellman-Gronwall 引理可得

$$\|\Delta x_k\| \leq \int_0^t e^{(k_f + k_B b_{ud})\tau} b_B \|\Delta u_k\| d\tau \quad (3.1.4)$$

将式(3.1.4)代入式(3.1.3), 则

$$\|\Delta u_{k+i}\| \leq \sum_{i=1}^N (\rho_i \|\Delta u_j\| + \gamma \int_0^t e^{\gamma(t-\tau)} \|\Delta u_j\| d\tau)$$

式中 $\gamma = \max\{k_f + k_B b_{ud}, b_Q b_B (k_g + k_D b_{ud})\}$ 。两端同乘正函数 $e^{-\lambda\tau}$ ($\lambda > \gamma$), 有

$$\|\Delta u_{k+1}\|_\lambda \leq \sum_{i=1}^N \bar{\rho}_i \|\Delta u_j\|_\lambda \quad (3.1.5)$$

式中 $\bar{\rho}_i = \rho_i + \gamma \frac{1 - e^{(\gamma-\lambda)T}}{\lambda - \gamma}$ 。因此, 当多项式

$$\bar{R}(z) = z^n - \bar{\rho}_1 z^{n-1} - \cdots - \bar{\rho}_{N-1} z - \rho_N$$

的所有零点位于单位圆内时, $\|\Delta u_k\|_\lambda \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$)。只要 $\lambda > \gamma$ 充分大时, 条件(2)中的多项式 $R(z)$ 的所有零点位于单位圆内蕴涵 $\bar{R}(z)$ 的所有零点位于单位圆内。因此, 由条件(2)可推知 $\|\Delta u_k\|_\lambda \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$)。进一步地, 由式(3.1.4)和式(3.1.1b)可知

$$\|\Delta x_k\|_\lambda \leq b_B \frac{1 - e^{(\gamma-\lambda)T}}{\lambda - \gamma} \|\Delta u_k\|_\lambda, \quad \lambda > \gamma \quad (3.1.6)$$

$$\|e_k\|_\lambda \leq (k_g + k_D b_{ud}) \|\Delta x_k\|_\lambda + b_D \|\Delta u_k\|_\lambda \quad (3.1.7)$$

式中 b_D 为矩阵 D 的界。当选取 $\lambda > \gamma$ 时, 由式(3.1.5)~式(3.1.7)可证得该定理。

由附录引理 A.2.2 可知, 该定理的条件(2)可以换成下述易

于验证的条件

$$\sum_{i=1}^N \rho_i < 1$$

当系统(3.1.1)中不存在控制的直接传输通道时,其输出方程可写成

$$y_k(t) = g(x_k(t), t)$$

若以输出误差的导数信号代替学习律(3.1.2)中的输出误差信号 $e_k(t)$, 则

$$u_{k+1}(t) = \sum_{i=1}^N P_i u_{k-i+1}(t) + \sum_{i=1}^N Q_i \dot{e}_{k-i+1}(t) \quad (3.1.8)$$

仍可证明输出误差的一致收敛性。将输出方程两端求导

$$\begin{aligned} \dot{y}_k(t) &= \\ g_t(x_k(t), t) + g_x(x_k(t), t) \dot{x}_k(t) &= \\ g_t(x_k(t), t) + g_x(x_k(t), t) f(x_k(t), t) + \\ g_x(x_k(t), t) B(x_k(t), t) u_k(t) & \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

记

$$\begin{aligned} \hat{g}(x_k(t), t) &= g_t(x_k(t), t) + g_x(x_k(t), t) f(x_k(t), t) \\ \hat{D}(x_k(t), t) &= g_x(x_k(t), t) B(x_k(t), t) \end{aligned}$$

则式(3.1.9)可写成

$$\dot{y}_k(t) = \hat{g}(x_k, t) + \hat{D}(x_k, t) u_k \quad (3.1.10)$$

显然,式(3.1.10)与式(3.1.1b)形式一致。当 \hat{g} 、 \hat{D} 满足系统(3.1.1)关于 g 、 D 的假设时,学习律(3.1.8)的收敛性充分条件可由定理 3.1.1 给出。

例 3.1.1 考虑下述系统

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(2+5t) & -(3+2t) \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [0 \quad 1] x(t) \\ y_d(t) &= 12t^2(1-t), 0 \leq t \leq 1 \end{aligned}$$

采用二阶学习律

$$u_{k+1}(t) = P_1 u_k(t) + P_2 u_{k-1}(t) + Q_1 \dot{e}_k(t) + Q_2 \dot{e}_{k-1}(t)$$

设定 $x_k(0) = [0, 0]^T (k = 0, 1, 2, \dots)$ 。并取 $u_{-1}(t) = 0, u_0(t) = 0, e_{-1}(t) = 0 (0 \leq t \leq 1)$ 。给定输出误差的允许均方根值为 0.01。仿真分两种情形进行：其一，取 $P_1 = 1, P_2 = 0, Q_1 = 1, Q_2 = 0$ 。这时的学习律即为一阶 D 型学习律。系统需要迭代 11 次输出误差才能达到允许均方根值。另一种情形，取 $P_1 = 1.11, P_2 = -0.11, Q_1 = 1.38, Q_2 = -0.171$ ，这时，系统只需迭代 6 次输出误差便可达到允许均方根值。迭代过程见图 3.1.2 所示。

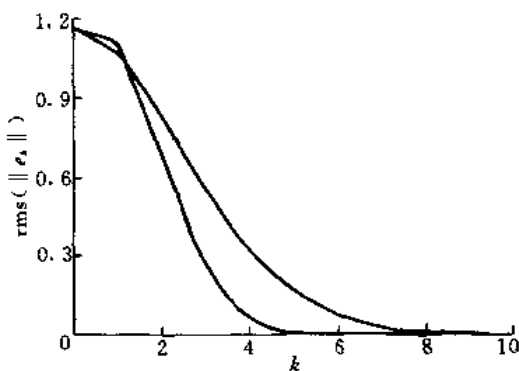


图 3.1.2 例 3.1.1 的迭代输出误差

3.2 滤波器型学习律

当实际运行中的迭代学习控制系统存在量测噪声时，直接的作法就是对量测信号进行滤波处理。然后，使用滤波后的信号构造学习律。我们称这种使用滤波器的学习律为滤波器型学习律 (filtered version learning law)。其系统结构如图 3.2.1 所示。可以看出，图中所示迭代学习控制算法采用的是滤波后的输出误差信号，而不是滤波后的输出信号。现在的问题是使用这种由滤波器构成的学习律，如何保证其迭代收敛性。

参考文献 [4] 首先提出了一种滤波器型学习律

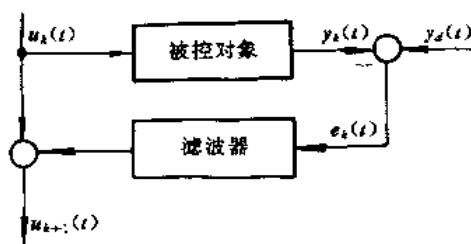


图 3.2.1 滤波器型学习律

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + p(t) * e_k(t) \quad (3.2.1)$$

式中 $p(t)$ 为一线性滤波器的脉冲响应函数, “ $*$ ” 表示卷积运算。参考文献[22]提出了以状态方程描述的滤波器型学习律。其中滤波器是由线性时变系统 $|\tilde{A}(t), \tilde{B}(t), \tilde{C}(t), \tilde{D}(t)|$ 构成。与式(3.2.1)相同,它也是将输出误差信号 $e_k(t)$ 滤波后,不使用学习增益,直接将其作为控制修正信号,即

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}_k(t) &= \tilde{\mathbf{A}}(t)\mathbf{z}_k(t) + \tilde{\mathbf{B}}(t)e_k(t) \\ \tilde{\mathbf{u}}_k(t) &= \tilde{\mathbf{C}}(t)\mathbf{z}_k(t) + \tilde{\mathbf{D}}(t)e_k(t) \\ u_{k+1}(t) &= u_k(t) + \tilde{\mathbf{u}}_k(t) \end{aligned} \right\} \quad (3.2.2)$$

参考文献[27]在其提出的学习律中使用了非线性形式的滤波器

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}_k(t) &= \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{z}_k(t)) + \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{z}_k(t))e_k(t) \\ \tilde{\mathbf{u}}_k(t) &= \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{z}_k(t)) + \tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{z}_k(t))e_k(t) \\ u_{k+1}(t) &= u_k(t) + \tilde{\mathbf{u}}_k(t) \end{aligned} \right\} \quad (3.2.3)$$

本节考虑下述含较一般非线性滤波器的学习律

$$\dot{\mathbf{z}}_k(t) = \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{z}_k(t), e_k(t), t) \quad (3.2.4a)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_k(t) = \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{z}_k(t), t) + \tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{z}_k(t), t)e_k(t) \quad (3.2.4b)$$

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \tilde{\mathbf{u}}_k(t) \quad (3.2.4c)$$

以及比系统(3.1.1)更为一般的非线性系统

$$\dot{\mathbf{x}}_k(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k(t), u_k(t), t) \quad (3.2.5a)$$

$$y_k(t) = g(x_k(t), t) + D(x_k(t), t)u_k(t) \quad (3.2.5b)$$

式中 $t \in [0, T]$, $x_k(t) \in \mathbf{R}^n$, $u_k(t) \in \mathbf{R}^r$, $y_k(t) \in \mathbf{R}^m$, $z_k(t) \in \mathbf{R}^s$; $z_k(t)$ 为滤波器状态向量, 它具有零初值 $z_k(0) = 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)。假设: 对于 $t \in [0, T]$, $x_1, x_2 \in \mathbf{R}^n$, $u_1, u_2 \in \mathbf{R}^r$, f, g, D 满足一致全局 Lipschitz 条件

$$\begin{aligned} \|f(x_1, u_1, t) - f(x_2, u_2, t)\| &\leq k_f (\|x_1 - x_2\| + \|u_1 - u_2\|) \\ \|h(x_1, t) - h(x_2, t)\| &\leq k_h \|x_1 - x_2\|, h \in \{g, D\} \end{aligned}$$

对于 $t \in [0, T]$, $z \in \mathbf{R}^s$, $e \in \mathbf{R}^m$, \tilde{f}, \tilde{g} 满足线性增长条件

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}(z, e, t)\| &\leq k_{\tilde{f}} (\|z\| + \|e\|) \\ \|\tilde{g}(z, t)\| &\leq k_{\tilde{g}} \|z\| \end{aligned}$$

D 在 $\mathbf{R}^n \times [0, T]$ 上有界; \tilde{D} 在 $\mathbf{R}^s \times [0, T]$ 上有界。

定理 3.2.1 给定可达的期望轨迹 $y_d(t)$ ($t \in [0, T]$)。系统 (3.2.5) 在学习律 (3.2.4) 的作用下, 如果

$$\begin{aligned} \|I - \tilde{D}(z, t)D(x, t)\| &\leq \rho < 1 \\ (z, x, t) &\in \mathbf{R}^s \times \mathbf{R}^n \times [0, T] \end{aligned}$$

那么, 当迭代初态 $x_k(0) = x_d(0)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) 时, 迭代输出轨迹一致收敛于期望轨迹, 即 $y_k(t) \rightarrow y_d(t)$ ($k \rightarrow \infty$) ($t \in [0, T]$)。

证明 由式 (3.2.5b) 可知

$$e_k = g_d - g_k + (D_d - D_k)u_d + D_k \Delta u_k \quad (3.2.6)$$

第 $k+1$ 次迭代时的控制误差可写成

$$\begin{aligned} \Delta u_{k+1} &= \Delta u_k - \tilde{g}_k - \tilde{D}_k e_k = \\ &\Delta u_k - \tilde{g}_k - \tilde{D}_k [g_d - g_k + (D_d - D_k)u_d + D_k \Delta u_k] - \\ &[I - \tilde{D}_k D_k] \Delta u_k - \tilde{g}_k - \tilde{D}_k [g_d - g_k + (D_d - D_k)u_d] \end{aligned}$$

两端取范数

$$\begin{aligned} \|\Delta u_{k+1}\| &\leq \|I - \tilde{D}_k D_k\| \|\Delta u_k\| + \|\tilde{g}_k\| + \\ &\|\tilde{D}_k\| (\|g_d - g_k\| + \|D_d - D_k\| \|u_d\|) \leq \\ &\rho \|\Delta u_k\| + k_{\tilde{g}} \|z_k\| + b_{\tilde{D}} (k_{\tilde{g}} + k_D b_{ud}) \|\Delta x_k\| \end{aligned}$$

式中 $b_{ud} = \sup_{t \in [0, T]} \|u_d(t)\|$, $b_{\tilde{D}}$ 为矩阵 \tilde{D} 的界。记 $c_1 = \max\{k_{\tilde{g}},$

$b_D(k_g + k_D b_{ud})\}$, 上式可写成

$$\|\Delta u_{k+1}\| \leq \rho \|\Delta u_k\| + c_1 (\|\Delta x_k\| + \|z_k\|) \quad (3.2.7)$$

由式(3.2.5a)及初始条件 $x_k(0) = x_d(0)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) 可知

$$\|\Delta x_k\| \leq \int_0^t k_f (\|\Delta x_k\| + \|\Delta u_k\|) d\tau \quad (3.2.8)$$

由式(3.2.4a)及式(3.2.6)可知

$$\begin{aligned} \|z_k\| &\leq \int_0^t k_{\bar{f}} (\|z_k\| + \|e_k\|) d\tau \leq \\ &\int_0^t k_{\bar{f}} [\|z_k\| + (k_g + k_D b_{ud}) \|\Delta x_k\| + b_D \|\Delta u_k\|] d\tau \end{aligned}$$

式中 b_D 为矩阵 D 的界。将以上两式相加可得

$$\begin{aligned} \|\Delta x_k\| + \|z_k\| &\leq \int_0^t [(k_f + k_{\bar{f}}(k_g + k_D b_{ud})) \|\Delta x_k\| + \\ &k_{\bar{f}} \|z_k\| + (k_f + k_{\bar{f}} b_D) \|\Delta u_k\|] d\tau \leq \\ &\int_0^t [c_2 (\|\Delta x_k\| + \|z_k\|) + c_3 \|\Delta u_k\|] d\tau \end{aligned}$$

式中 $c_2 = \max\{k_{\bar{f}}, k_f + k_{\bar{f}}(k_g + k_D b_{ud})\}$, $c_3 = k_f + k_{\bar{f}} b_D$ 。应用 Bellman-Gronwall 引理, 得

$$\|\Delta x_k\| + \|z_k\| \leq c_3 \int_0^t e^{c_2(t-\tau)} \|\Delta u_k(\tau)\| d\tau \quad (3.2.9)$$

将式(3.2.9)代入式(3.2.7)有

$$\|\Delta u_{k+1}\| \leq \rho \|\Delta u_k\| + c_1 c_3 \int_0^t e^{c_2(t-\tau)} \|\Delta u_k\| d\tau$$

两端同乘正函数 $e^{-\lambda t}$, 并由 λ 范数的定义可知

$$\|\Delta u_{k+1}\|_{\lambda} \leq (\rho + c_1 c_3 \frac{1 - e^{(c_2 - \lambda)T}}{\lambda - c_2}) \|\Delta u_k\|_{\lambda} \quad (3.2.10)$$

另外, 由式(3.2.8)及式(3.2.6)可知

$$\|\Delta x_k\|_{\lambda} \leq k_f \frac{1 - e^{(k_f - \lambda)T}}{\lambda - k_f} \|\Delta u_k\|_{\lambda} \quad (\lambda > k_f) \quad (3.2.11)$$

$$\|e_k\|_{\lambda} \leq (k_g + k_D b_{ud}) \|\Delta x_k\|_{\lambda} + b_D \|\Delta u_k\|_{\lambda} \quad (3.2.12)$$

当 $\lambda > \max\{c_2, k_f\}$ 时, 由式(3.2.10)~式(3.2.12), 可证得该定

理。

由上述定理可以看出,因为可以通过选取滤波器的参数矩阵 $\tilde{\mathbf{D}}$ 使得收敛性条件成立,所以,在式(3.2.4c)中不使用学习增益,而是直接将输出误差 $e_k(t)$ 滤波后的信号作为控制修正信号。另外,收敛性条件与 $\{f, g\}$ 无关,也不依赖于 $\{\tilde{f}, \hat{g}\}$ 。但是,式(3.2.10)~式(3.2.12)表明,这些参数与收敛速度有关。因此,该学习算法的基本作法是通过综合滤波器来达到和改善跟踪性能的。

当 \mathbf{D} 列满秩时,容易找到 $\tilde{\mathbf{D}}$ 使得收敛性条件成立。这时系统(3.2.5)是正则的。设存在 $\beta > 0$,使得

$$|\lambda_i(\mathbf{D}^T \mathbf{D})| \geq \beta \quad (i = 1, 2, \dots, r) \quad (3.2.13)$$

$\lambda_i(\mathbf{D}^T \mathbf{D})$ 表示 $\mathbf{D}^T \mathbf{D}$ 的第 i 个特征值。这时 $\mathbf{D}^T \mathbf{D}$ 非奇异。取

$$\tilde{\mathbf{D}} = \alpha (\mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^T \quad (3.2.14)$$

其中,对于 $0 < \rho < 1$, α 满足

$$1 - \rho \leq \alpha \leq 1 + \rho$$

由于

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{D}}\|_2 &= \alpha \|(\mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^T\|_2 \leq \\ &\alpha \|(\mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1}\|_2 \|\mathbf{D}^T\|_2 = \\ &\alpha \lambda_{\max}((\mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1}) \|\mathbf{D}^T\|_2 = \\ &\frac{\alpha \|\mathbf{D}^T\|_2}{\lambda_{\min}(\mathbf{D}^T \mathbf{D})} \leq \frac{\alpha}{\beta} \|\mathbf{D}^T\|_2 \end{aligned}$$

故存在 $b_{\tilde{\mathbf{D}}} > 0$,使得 $\|\tilde{\mathbf{D}}\|_2 \leq b_{\tilde{\mathbf{D}}}$ 。而且

$$\begin{aligned} \|I - \tilde{\mathbf{D}} \mathbf{D}\|_2 &= \|I - \alpha (\mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^T \mathbf{D}\|_2 = \\ &|1 - \alpha| \leq \rho < 1 \end{aligned}$$

3.3 模型算法学习律

迭代学习控制器的设计问题包括两个方面,一是构造学习律,二是确定所构造学习律中的增益矩阵。当系统参数完全未知时,

3.1 节和 3.2 节中所给出的收敛性充分条件只能说明系统参数的收敛域存在,而不能用来确定学习增益矩阵。当系统参数不精确已知时,通过对参数的猜测,可利用充分条件来确定学习增益矩阵。这种试凑的方法需要已知充分条件关于系统参数的依赖关系。从已发表的文献中可以看出,对于以工业机器人为背景的非线性系统,不采用线性化手段,可以通过全局收敛性分析获得这种关系。

实际上,有许多系统可以得到它足够精确的模型。这时,应该采用系统模型构造学习律,实现迭代学习控制。参考文献[13]提出了一种基于模型的学习律。参考文献[14]讨论了利用模型构造学习律的直接方法,并且没有采用线性化手段给出了收敛性证明。其中给出的结果表明,这种算法允许一定程度的模型失配。参考文献[15~18]提出模型算法学习(model algorithmic learning)方法,其中利用对控制偏差的不同近似公式,针对连续和离散时间系统构造了模型算法学习律。

3.3.1 连续时间系统

首先讨论构造模型算法学习律的一种直接方法。考虑下述非线性系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}(t), t)\mathbf{u}(t) \quad (3.3.1)$$

式中 $t \in [0, T]$, $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^r$ 分别为系统的状态和控制向量,非线性函数 $\mathbf{f}: \mathbf{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{B}: \mathbf{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^{n \times r}$ 关于 t 分段连续, \mathbf{f} 、 \mathbf{B} 关于 \mathbf{x} 满足一致全局 Lipschitz 条件, \mathbf{B} 在 $\mathbf{R}^n \times [0, T]$ 上列满秩,且在 $\mathbf{R}^n \times [0, T]$ 上有界。

设该系统全状态输出。现在的问题是,给定一可微的期望轨迹 $\mathbf{x}_d(t)$ ($t \in [0, T]$),寻找一控制 $\mathbf{u}(t)$ ($t \in [0, T]$),使得由其产生的轨迹 $\mathbf{x}(t)$ ($t \in [0, T]$) 尽可能地跟踪上该期望轨迹。即给定跟踪精度 $\epsilon > 0$, 使得

$$\|\mathbf{x}_d(t) - \mathbf{x}(t)\| < \epsilon \quad (t \in [0, T])$$

由于 \mathbf{B} 在 $\mathbf{R}^n \times [0, T]$ 上列满秩,期望控制 $\mathbf{u}_d(t)$ 可由状态方程

解出

$$u_d(t) = B^+(x_d(t), t)[\dot{x}_d(t) - f(x_d(t), t)] \quad (3.3.2)$$

式中 $B^+(x_d(t), t) = [B^T(x_d(t), t)B(x_d(t), t)]^{-1}B^T(x_d(t), t)$ 。

为了构造学习律, 假设已知系统(3.3.1)的模型 $\{\tilde{f}, \tilde{B}\}$ 。选取一初始控制 $u_0(t) (t \in [0, T])$ 施加给系统(3.3.1)产生轨迹 $x_0(t) (t \in [0, T])$ 。这时, $x_0(t)$ 与 $x_d(t)$ 的偏差是由于控制的偏差所产生的。该控制偏差为

$$\begin{aligned} \Delta u_0(t) &= u_d(t) - u_0(t) = \\ &B^+(x_d(t), t)[\dot{x}_d(t) - f(x_d(t), t)] - \\ &B^+(x_0(t), t)[\dot{x}_0(t) - f(x_0(t), t)] \approx \\ &\tilde{B}^+(x_d(t), t)[\dot{x}_d(t) - \tilde{f}(x_d(t), t)] - \\ &\tilde{B}^+(x_0(t), t)[\dot{x}_0(t) - \tilde{f}(x_0(t), t)] \end{aligned}$$

上式最后一项利用模型 $\{\tilde{f}, \tilde{B}\}$ 给出了控制偏差的估计。我们可以利用这一控制偏差的估计修正控制, 不断进行迭代, 即

$$\begin{aligned} u_{k+1}(t) &= u_k(t) + \tilde{B}^+(x_d(t), t)[\dot{x}_d(t) - \tilde{f}(x_d(t), t)] - \\ &\tilde{B}^+(x_k(t), t)[\dot{x}_k(t) - \tilde{f}(x_k(t), t)] \quad (3.3.3) \end{aligned}$$

式中 $k = 0, 1, 2, \dots$ 。

记 $L(x, t) = \tilde{B}^+(x, t)$, $h(x, t) = L(x, t)[\dot{x}_d(t) - \tilde{f}(x, t)]$ 。设 h 关于 x 满足一致全局 Lipschitz 条件, L 在 $\mathbf{R}^n \times [0, T]$ 上有界。由 h 的定义知, 只要 $L, L\tilde{f}$ 关于 x 满足 Lipschitz 条件, 便可保证 h 关于 x 满足 Lipschitz 条件。

由于状态可量测得到, 所以学习律(3.3.3)中直接使用状态是可以的。也可以看出, 利用控制偏差的不同近似公式, 可构造不同的模型算法学习律。

定理3.3.1 如果由式(3.3.1)、式(3.3.3)描述的迭代学习控制系统满足

$$(1) \quad \|I - \tilde{B}^+(x, t)B(x, t)\| \leq \rho < 1$$

$$(x, t) \in \mathbf{R}^n \times [0, T]$$

$$(2) \quad x_k(0) = x_d(0) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

那么, 给定可达的期望轨迹 $x_d(t)$ ($t \in [0, T]$), 学习律(3.3.3)将产生一控制序列, 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_d(t) - x_k(t)\| = 0$ ($t \in [0, T]$)。

证明 由式(3.3.3)可知

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= u_k - L_k(\dot{x}_k - \dot{f}_k) + h_d = \\ &= u_k + L_k(\dot{x}_d - \dot{x}_k) + h_d - h_k = \\ &= u_k + L_k\{f_d - f_k + (B_d - B_k)u_d + B_k\Delta u_k\} + h_d - h_k \end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned} \Delta u_{k+1} &= [I - L_k B_k] \Delta u_k + \\ &+ L_k\{f_d - f_k + (B_d - B_k)u_d\} - (h_d - h_k) \end{aligned}$$

上式两端取范数, 有

$$\begin{aligned} \|\Delta u_{k+1}\| &\leq \|I - L_k B_k\| \|\Delta u_k\| + \|L_k\| (\|f_d - f_k\| + \\ &+ \|B_d - B_k\| \|u_d\|) + \|h_d - h_k\| \leq \\ &= \rho \|\Delta u_k\| + (k_h + b_L(k_f + k_B b_{ud})) \|\Delta x_k\| = \\ &= \rho \|\Delta u_k\| + b_1 \|\Delta x_k\| \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

式中 b_L 为增益矩阵 L 的界, $b_{ud} = \sup_{t \in [0, T]} \|u_d(t)\|$, $b_1 = k_h + b_L(k_f + k_B b_{ud})$ 。

下面估计式(3.3.4)右端的第二项。由状态方程(3.3.1)和条件(2)可知

$$\begin{aligned} \|\Delta x_k\| &= \left\| \int_0^t \{f_d + B_d u_d - (f_k + B_k u_k)\} d\tau \right\| \leq \\ &= \int_0^t (\|f_d - f_k\| + \|B_d - B_k\| \|u_d\| + \\ &+ \|B_k\| \|\Delta u_k\|) d\tau \leq \\ &= \int_0^t (k_f + k_B b_{ud}) \|\Delta x_k\| + b_B \|\Delta u_k\| d\tau \end{aligned}$$

式中 b_B 为矩阵 B 的界。应用 Bellman-Gronwall 引理, 可得

$$\|\Delta \mathbf{x}_k\| \leq b_B \int_0^t e^{b_2(t-\tau)} \|\Delta \mathbf{u}_k\| d\tau \quad (3.3.5)$$

式中 $b_2 = k_f + k_B b_{ud}$ 。将式(3.3.5)代入式(3.3.4), 则

$$\|\Delta \mathbf{u}_{k+1}\| \leq \rho \|\Delta \mathbf{u}_k\| + b_1 b_B \int_0^t e^{b_2(t-\tau)} \|\Delta \mathbf{u}_k\| d\tau$$

两端同乘正函数 $e^{-\lambda t} (t \in [0, T])$, 则

$$e^{-\lambda t} \|\Delta \mathbf{u}_{k+1}\| \leq \rho e^{-\lambda t} \|\Delta \mathbf{u}_k\| + b_1 b_B \int_0^t e^{(b_2-\lambda)(t-\tau)} e^{-\lambda \tau} \|\Delta \mathbf{u}_k\| d\tau$$

由 λ 范数的定义可知

$$\|\Delta \mathbf{u}_{k+1}\|_\lambda \leq (\rho + b_1 b_B \lambda_{b_2}) \|\Delta \mathbf{u}_k\|_\lambda \quad (3.3.6)$$

式中 $\lambda_{b_2} = \frac{1 - e^{(b_2-\lambda)T}}{\lambda - b_2}$ 。又由式(3.3.5)可知 $\|\Delta \mathbf{x}_k\|_\lambda \leq b_B \lambda_{b_2} \|\Delta \mathbf{u}_k\|_\lambda$ 至此, 利用 λ 范数的性质容易证得定理。

下面, 给出另外一种模型算法学习律, 模型中并不直接使用量测到的原系统状态, 而是使用模型状态。模型状态由原系统状态预报获得。设已知非线性系统(3.3.1)的模型为

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}(t), t) + \tilde{\mathbf{B}}(\tilde{\mathbf{x}}(t), t) \mathbf{u}(t) \quad (3.3.7)$$

式中 $\tilde{\mathbf{x}}(t) \in \mathbf{R}^n$ 为该系统模型的状态向量。 $\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{B}}$ 分别为 \mathbf{f}, \mathbf{B} 的模型。在第 $k+1$ 次迭代时, 以误差 $\mathbf{e}_k(t) = \mathbf{x}_d(t) - \mathbf{x}_k(t)$ 对模型状态 $\tilde{\mathbf{x}}_k(t)$ 进行修正, 构造模型状态的预报公式

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}(t) = \tilde{\mathbf{x}}_k(t) + \Gamma \mathbf{e}_k(t) \quad (3.3.8a)$$

式中 $\Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ 为增益矩阵。

式(3.3.1)的逆模型可由式(3.3.7)给出

$$\mathbf{u}_{k+1}(t) = \tilde{\mathbf{B}}^+(\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}(t), t)(\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_{k+1}(t) - \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}(t), t))$$

矩阵 $\tilde{\mathbf{B}}^+$ 表示矩阵 $\tilde{\mathbf{B}}$ 的广义逆, 即 $\tilde{\mathbf{B}}^+ = [\tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{B}}]^{-1} \tilde{\mathbf{B}}^T$ 。

在式(3.3.7)中, 以 $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x}_d(t), t)$ 代替 $\tilde{\mathbf{B}}(\tilde{\mathbf{x}}(t), t)$, 上式可写成

$$u_{k+1}(t) = \tilde{B}^+(x_d(t), t)(\dot{\tilde{x}}_{k+1}(t) - \tilde{f}(\tilde{x}_{k+1}(t), t)) \quad (3.3.8b)$$

假设 f, \tilde{f}, B 关于 x 满足一致全局 Lipschitz 条件, B 在 $\mathbf{R}^n \times [0, T]$ 上列满秩, 且在 $\mathbf{R}^n \times [0, T]$ 上有界。

定理 3.3.2^[17] 如果由式(3.3.1)、式(3.3.8)描述的迭代学习控制系统满足

$$(1) \quad \|I - \tilde{B}^+(x_d(t), t)\Gamma B(x(t), t)\| \leq \rho < 1 (t \in [0, T])$$

$$(2) \quad x_k(0) = \tilde{x}_k(0) = x_d(0) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

那么, 给定可达的期望轨迹 $x_d(t) (t \in [0, T])$, 学习律(3.3.8)产生一控制序列, 使得 $x_d(t) - x_k(t)$ 在 $[0, T]$ 上一致收敛于零, 即 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_d(t) - x_k(t)\| = 0 (t \in [0, T])$ 。

证明 由式(3.3.1)、式(3.3.7)和式(3.3.8)可知

$$\begin{aligned} u_{k+1} - \tilde{B}^+(\dot{\tilde{x}}_{k+1} - \tilde{f}_{k+1}) &= \\ \tilde{B}^+(\dot{\tilde{x}}_k + \Gamma \dot{e}_k - \tilde{f}_{k+1}) &= \\ \tilde{B}^+(\tilde{f}_k + \tilde{B}u_k + \Gamma f_d + \Gamma B_d u_d - \Gamma f_k - \Gamma B_k u_k - \tilde{f}_{k+1}) &= \\ \tilde{B}^+(\tilde{f}_k - \tilde{f}_{k+1}) + \tilde{B}^+(\tilde{B} - \Gamma B_k)u_k + \\ \tilde{B}^+\Gamma(f_d - f_k) + \tilde{B}^+\Gamma B_d u_d \end{aligned}$$

式中 $\tilde{B}^+ = \tilde{B}^+(x_d(t), t)$, $\tilde{B} = \tilde{B}(x_d(t), t)$ 。记 $\Delta u_{k+1}(t) = u_d(t) - u_{k+1}(t)$, 则由上式可知

$$\begin{aligned} \Delta u_{k+1}(t) &= \Delta u_k + u_k - u_{k+1} = \\ \Delta u_k + u_k - \tilde{B}^+(\tilde{f}_k - \tilde{f}_{k+1}) - \tilde{B}^+(\tilde{B} - \Gamma B_k)u_k - \\ \tilde{B}^+\Gamma(f_d - f_k) - \tilde{B}^+\Gamma B_d u_d - \\ \Delta u_k - \tilde{B}^+(\tilde{f}_k - \tilde{f}_{k+1}) + \tilde{B}^+\Gamma B_k u_k - \\ \tilde{B}^+\Gamma(f_d - f_k) - \tilde{B}^+\Gamma B_d u_d &= \\ \Delta u_k - \tilde{B}^+\Gamma B_k \Delta u_k + \tilde{B}^+\Gamma B_k u_d - \tilde{B}^+\Gamma B_d u_d - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \tilde{B}^+ \Gamma (f_d - f_k) - \tilde{B}^+ (\tilde{f}_k - \tilde{f}_{k+1}) = \\
& [I - \tilde{B}^+ \Gamma B_k] \Delta u_k - \tilde{B}^+ \Gamma (B_d - B_k) u_d - \\
& \tilde{B}^+ \Gamma (f_d - f_k) - \tilde{B}^+ (\tilde{f}_k - \tilde{f}_{k+1}) \quad (3.3.9)
\end{aligned}$$

式(3.3.9)两端取范数,有

$$\begin{aligned}
\|\Delta u_{k+1}\| & \leq \|I - \tilde{B}^+ \Gamma B_k\| \|\Delta u_k\| + \\
& \|\tilde{B}^+ \Gamma\| \|B_d - B_k\| \|u_d\| + \\
& \|\tilde{B}^+ \Gamma\| \|f_d - f_k\| + \|\tilde{B}^+\| \|\tilde{f}_k - \tilde{f}_{k+1}\| \leq \\
& \rho \|\Delta u_k\| + b_1 k_B b_{ud} \|\Delta x_k\| + \\
& b_1 k_f \|\Delta x_k\| + b_2 k_{\tilde{f}} \|\tilde{x}_k - \tilde{x}_{k+1}\| \leq \\
& \rho \|\Delta u_k\| + b_1 k_B b_{ud} \|\Delta x_k\| + \\
& b_1 k_f \|\Delta x_k\| + b_2 k_{\tilde{f}} \gamma \|\Delta x_k\|
\end{aligned}$$

式中 b_1, b_2 分别为 $\tilde{B}^+ \Gamma, \tilde{B}^+$ 的界, $\gamma = \|\Gamma\|$, $b_{ud} = \sup_{t \in [0, T]} \|u_d(t)\|$ 。记 $k_1 = b_1(k_f + k_B b_{ud}) + b_2 k_{\tilde{f}} \gamma$, 上式可写成

$$\|\Delta u_{k+1}\| \leq \rho \|\Delta u_k\| + k_1 \|\Delta x_k\| \quad (3.3.10)$$

与式(3.3.5)的推导相同,利用条件(2),可得

$$\|\Delta x_k\| \leq \int_0^t b_B e^{k_2(t-\tau)} \|\Delta u_k\| d\tau \quad (3.3.11)$$

式中 $k_2 = k_f + k_B b_{ud}$, b_B 为矩阵 B 的界。

将式(3.3.11)代入式(3.3.10),则

$$\|\Delta u_{k+1}\| \leq \rho \|\Delta u_k\| + k_3 \int_0^t e^{k_3(t-\tau)} \|\Delta u_k\| d\tau$$

式中 $k_3 = \max\{k_1 b_B, k_2\}$ 。上式两端同乘正函数 $e^{-\lambda t}$, 则

$$e^{-\lambda t} \|\Delta u_{k+1}\| \leq \rho e^{-\lambda t} \|\Delta u_k\| + k_3 \int_0^t e^{(k_3-\lambda)(t-\tau)} e^{-\lambda \tau} \|\Delta u_k\| d\tau$$

因此

$$\|\Delta u_{k+1}\|_{\lambda} \leq \left\{ \rho + k_3 \frac{1 - e^{(k_3-\lambda)T}}{\lambda - k_3} \right\} \|\Delta u_k\|_{\lambda} \quad (3.3.12)$$

又由式(3.3.11)可知

$$\|\Delta x_k\|_\lambda \leq b_p k_3 \frac{1 - e^{(k_3 - \lambda)T}}{\lambda - k_3} \|\Delta u_k\|_\lambda$$

至此, 由 λ 范数的性质容易证得该定理。

由模型状态预报公式 (3.3.8a) 可以看出, 当 $x_k(t) \rightarrow x_d(t) (k \rightarrow \infty)$ 时, 模型状态也收敛。进一步地, 初始条件 $x_k(0) = \tilde{x}_k(0) = x_d(0) (k = 0, 1, 2, \dots)$ 可保证 $\tilde{x}_k(t) \rightarrow x_d(t) (k \rightarrow \infty)$ 。

实际上, 学习律 (3.3.8) 仍然可以表示成像传统学习律那样的迭代公式。将式 (3.3.8a) 代入式 (3.3.8b), 则

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \hat{B}^+ (\dot{\tilde{x}}_k + \Gamma \dot{e}_k - \tilde{f}_{k+1}) = \\ &\quad \tilde{B}^+ (\dot{\tilde{x}}_k - \tilde{f}_k + \Gamma \dot{e}_k + \tilde{f}_k - \tilde{f}_{k+1}) = \\ &\quad u_k + \tilde{B}^+ (\Gamma \dot{e}_k + \tilde{f}_k - \tilde{f}_{k+1}) \end{aligned}$$

取 $\Gamma = I$, 该学习律可表示成

$$\begin{aligned} u_{k+1}(t) &= u_k(t) + \hat{B}^+ (x_d(t), t) [\dot{e}_k(t) + \\ &\quad \tilde{f}(\tilde{x}_k(t), t) - \tilde{f}(\tilde{x}_{k+1}(t), t)] \end{aligned}$$

特别地, 考虑下述线性时变系统

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

它的模型为

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \hat{A}(t)\tilde{x}(t) + \tilde{B}(t)u(t)$$

这时, 学习律 (3.3.8) 可写成

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \hat{B}^+ (\dot{\tilde{x}}_{k+1} - \hat{A}\tilde{x}_{k+1}) \\ \tilde{x}_{k+1} &= \tilde{x}_k + \Gamma e_k \end{aligned}$$

又可写成

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \hat{B}^+ (\dot{\tilde{x}}_k + \Gamma \dot{e}_k - \hat{A}\tilde{x}_{k+1}) = \\ &\quad \tilde{B}^+ (\dot{\tilde{x}}_k - \hat{A}\tilde{x}_k + \Gamma \dot{e}_k + \hat{A}(\tilde{x}_k - \tilde{x}_{k+1})) = \\ &\quad u_k + \tilde{B}^+ (\Gamma \dot{e}_k - \hat{A}\Gamma e_k) \end{aligned}$$

取 $\Gamma = I$, 有

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \tilde{B}^+(x_d(t), t)(\dot{e}_k(t) - \tilde{A}(t)e_k(t))$$

这一学习律与参考文献[16]中的学习律相同。

由条件(1)可以看出, 当存在模型失配时, 可选取 Γ 使得该条件成立。应该说明的是, 由于学习律(3.3.8 b)中的函数 \tilde{B}^+ 仅与 $x_d(t)$ 有关, 因此, 在每次迭代时该项是不变的。这样, 我们可以选取任意的函数作为 \tilde{B}^+ 。这也说明这种学习律允许较大的模型失配。

3.3.2 离散时间系统

下面, 讨论一类非线性离散系统的模型算法学习控制。考虑下述非线性离散系统

$$x(t+1) = f(x(t), t) + B(x(t), t)u(t) \quad (3.3.13)$$

式中 $0 \leq t \leq T-1$, 它表示 $t \in \{0, 1, \dots, T\}$ 。 $x(t) \in \mathbf{R}^n$, $u(t) \in \mathbf{R}^r$ 分别为系统的状态和控制向量。设该系统全状态输出, 并已知 $\{f, B\}$ 的模型为 $\{\tilde{f}, \tilde{B}\}$ 。给定期望轨迹 $x_d(t)$ ($0 \leq t \leq T$)。当 B 列满秩时, 期望控制 $u_d(t)$ 可由式(3.3.13)解出

$$u_d(t) = B^+(x_d(t), t)[x_d(t+1) - f(x_d(t), t)]$$

式中 $B^+(x_d(t), t) = [B^T(x_d(t), t)B(x_d(t), t)]^{-1}B^T(x_d(t), t)$ 。

任意选取一连续控制 $u_0(t)$, $0 \leq t \leq T$, 施加给系统(3.3.13), 产生输出轨迹 $x_0(t)$ 。这时, $x_0(t)$ 与 $x_d(t)$ 的偏差是由于控制的偏差产生的。该控制偏差为

$$\begin{aligned} \Delta u_0(t) &= u_d(t) - u_0(t) = \\ &= B^+(x_d(t), t)[x_d(t+1) - f(x_d(t), t)] - \\ &= B^+(x_0(t), t)[x_0(t+1) - f(x_0(t), t)] \end{aligned}$$

利用模型 $\{\tilde{f}, \tilde{B}\}$ 可以给出控制偏差 $\Delta u_0(t)$ 的几种不同程度的近似公式

$$\Delta u_0(t) \approx \tilde{B}^+(x_d(t), t)[x_d(t+1) - \tilde{f}(x_d(t), t)]$$

$$\tilde{\mathbf{B}}^+(x_0(t), t)[x_0(t+1) - \tilde{f}(x_0(t), t)] \quad (3.3.14a)$$

$$\Delta u_0(t) \approx \tilde{\mathbf{B}}^+(x_0(t), t)[x_d(t+1) - x_0(t+1) - \tilde{f}(x_d(t), t) + \tilde{f}(x_0(t), t)] \quad (3.3.14b)$$

$$\Delta u_0(t) \approx \tilde{\mathbf{B}}^+(e_0(t), t)[e_0(t+1) - \tilde{f}(e_0(t), t)] \quad (3.3.14c)$$

式中 $e_0(t) = x_d(t) - x_0(t)$ 。我们可以利用控制偏差的近似公式修正控制, 构造学习律。这里, 采用(3.3.14c)构造学习律

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \tilde{\mathbf{B}}^+(e_k(t), t)[e_k(t+1) - \tilde{f}(e_k(t), t)] \quad (3.3.15)$$

假设 f, \mathbf{B} 关于 x 满足一致全局 Lipschitz 条件; 对于 $x \in \mathbf{R}^n$, $0 \leq t \leq T$, \tilde{f} 满足 $\|\tilde{f}(x, t)\| \leq M_{\tilde{f}} \|x\|$; $\mathbf{B}, \tilde{\mathbf{B}}^+$ 有界。

定理 3.3.3^[18] 对于可达的期望轨迹 $x_d(t)$ ($0 \leq t \leq T$), 如果被控系统(3.3.13)满足条件

$$(1) \quad \|\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{B}}^+(e(t), t)\mathbf{B}(x(t), t)\| < 1 \quad (0 \leq t \leq T)$$

$$(2) \quad x_k(0) = x_d(0) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

那么, 在学习律(3.3.15)的作用下, $\|e_k(t)\| \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty) (0 \leq t \leq T)$ 。

证明 由式(3.3.15)可知

$$\Delta u_{k+1}(t) = \Delta u_k(t) + \tilde{\mathbf{B}}^+(e_k(t), t)[e_k(t+1) - \tilde{f}(e_k(t), t)]$$

因为

$$e_k(t+1) = \mathbf{B}(x_k(t), t)\Delta u_k(t) + f(x_d(t), t) - f(x_k(t), t) + [\mathbf{B}(x_d(t), t) - \mathbf{B}(x_k(t), t)]u_d(t) \quad (3.3.16)$$

所以

$$\begin{aligned} \Delta u_{k+1}(t) = & \Delta u_k(t) + \tilde{\mathbf{B}}^+(e_k(t), t)\mathbf{B}(x_k(t), t)\Delta u_k(t) - \\ & \tilde{\mathbf{B}}^+(e_k(t), t)[\mathbf{B}(x_d(t), t) - \mathbf{B}(x_k(t), t)]u_d(t) + \\ & \tilde{\mathbf{B}}^+(e_k(t), t)[f(x_d(t), t) - f(x_k(t), t) - \end{aligned}$$

$$\tilde{f}(e_k(t), t)] \quad (3.3.17)$$

式(3.3.16)两端取范数, 有

$$\begin{aligned} \|e_k(t+1)\| &\leq \|B(x_k(t), t)\| \|\Delta u_k(t)\| + \\ &k_f \|x_d(t) - x_k(t)\| + \\ &k_B \|x_d(t) - x_k(t)\| \|u_d(t)\| = \\ &k_{1,t} \|\Delta u_k(t)\| + k_{2,t} \|e_k(t)\| \quad (3.3.18) \end{aligned}$$

式中 $k_{1,t} = \|B(x_k(t), t)\|$, $k_{2,t} = k_f + k_B \|u_d(t)\| \propto k_{2,t}$ 与 k 无关。

式(3.3.17)两端取范数, 有

$$\begin{aligned} \|\Delta u_{k+1}(t)\| &\leq \|\rho_k(t)\| \|\Delta u_k(t)\| + \\ &\|\tilde{B}^{-1}(e_k(t), t)\| (k_B \|e_k(t)\| \|u_d(t)\| + \\ &k_f \|e_k(t)\| + M_{\tilde{f}} \|e_k(t)\|) + \\ &\|\rho_k(t)\| \|\Delta u_k(t)\| + k_t \|e_k(t)\| \quad (3.3.19) \end{aligned}$$

式中 $\rho_k(t) = I - \tilde{B}^{-1}(e_k(t), t)B(x_k(t), t)$, $k_t = \|\tilde{B}^{-1}(e_k(t), t)\| (k_B \|u_d(t)\| + k_f + M_{\tilde{f}})$ 。它们与 k 有关。由式(3.3.18)和式(3.3.19)可知

$$\begin{aligned} \|\Delta u_{k+1}(t)\| &\leq \|\rho_k(t)\| \|\Delta u_k(t)\| + k_t (k_{1,t-1} \|\Delta u_k(t-1)\| + \\ &k_{2,t-1} \|e_k(t-1)\|) \leq \\ &\|\rho_k(t)\| \|\Delta u_k(t)\| + K_{t-1} \|\Delta u_k(t-1)\| + \\ &\cdots + K_0 \|\Delta u_k(0)\| \quad (3.3.20) \end{aligned}$$

式中 $K_p = k_t k_{2,t-1} \cdots k_{2,p+1} k_{1,p}$ ($p = 0, 1, 2, \cdots, t-1$)。将式(3.3.20)由 $t = 0$ 到 $t = T$ 逐项写出

$$\begin{aligned} \|\Delta u_{k+1}(0)\| &\leq \|\rho_k(0)\| \|\Delta u_k(0)\| \\ \|\Delta u_{k+1}(1)\| &\leq \|\rho_k(1)\| \|\Delta u_k(1)\| + K_0 \|\Delta u_k(0)\| \\ &\cdots \\ \|\Delta u_{k+1}(T)\| &\leq \|\rho_k(T)\| \|\Delta u_k(T)\| + K_{T-1} \|\Delta u_k(T-1)\| \\ &+ \cdots + K_0 \|\Delta u_k(0)\| \end{aligned}$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \|\Delta u_{k+1}(0)\| \\ \vdots \\ \|\Delta u_{k+1}(T)\| \end{bmatrix} \leq \Psi_k \begin{bmatrix} \|\Delta u_k(0)\| \\ \vdots \\ \|\Delta u_k(T)\| \end{bmatrix} \quad (3.3.21)$$

式中

$$\Psi_k = \begin{bmatrix} \|\rho_k(0)\| & 0 & \cdots & 0 \\ K_0 & \|\rho_k(1)\| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_0 & K_1 & \cdots & \|\rho_k(T)\| \end{bmatrix}$$

如果矩阵 Ψ_k 的所有特征值位于单位圆内, 那么 $\|\Delta u_k(t)\| \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty) (0 \leq t \leq T)$ 。由于 Ψ_k 为下三角矩阵, 故当 $\|I - \tilde{B}^+(e_k(t), t)B(x_k(t), t)\| < 1 (0 \leq t \leq T)$ 时, 矩阵 Ψ_k 的所有特征值位于单位圆内。这时, 由式 (3.3.18) 及条件 (1) 可推知 $x_k(t) \rightarrow x_d(t) (k \rightarrow \infty) (0 \leq t \leq T)$ 。证毕。

下面考虑定理 3.3.3 的一种特殊情况。对于线性离散时变系统

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

如果其估计参数 $\{\tilde{A}_k(t), \tilde{B}_k(t)\}$ 使得 $I - \tilde{B}_k^+(t)B(t)$ 的所有特征值位于单位圆内, 或

$$\|I - \tilde{B}^+(t)B(t)\| < 1 \quad (0 \leq t \leq T) \quad (3.3.22)$$

那么, 由定理 3.3.3 知, 在初始条件 $x_k(0) = x_d(0) (k = 0, 1, 2, \dots)$ 成立时, 学习律

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + [\tilde{B}_k^+(t), -\tilde{B}^+(t)\tilde{A}_k(t)][e_k^T(t+1), e_k^T(t)]^T$$

使得 $x_k(t) \rightarrow x_d(t) (k \rightarrow \infty) (0 \leq t \leq T)$ 。

举一例子。设

$$B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ b(t) \end{bmatrix} \quad \tilde{B}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{b}(t) \end{bmatrix} \quad (3.3.23)$$

那么, 条件 (3.3.22) 可写成

$$|1 - \frac{\bar{b}(t)}{b(t)}| < 1$$

即

$$0 < \frac{b(t)}{\bar{b}(t)} < 2 \quad (3.3.24)$$

显然, 式(3.3.24)允许较大的模型失配。

对于连续时间系统(3.3.1), 也可以采用学习律(3.3.15)的连续形式

$$\mathbf{u}_{k+1}(t) = \mathbf{u}_k(t) + \hat{\mathbf{B}}^*(\mathbf{e}_k(t), t)[\dot{\mathbf{e}}_k(t) - \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{e}_k(t), t)] \quad (3.3.25)$$

它的收敛性充分条件可参考定理 3.3.2 给出。

3.4 模型参考学习律

迭代学习控制适用于具有重复运动性质的被控对象。特别是众多的研究结果是以机器人运动控制为背景的。然而, 将这种控制技术应用具有某种重复运行性质的过程控制对象是极具吸引力的课题。这里, 给出几个具有某种运行性质的过程控制例子:

(1) 恒值调节是过程控制中最常见的控制任务。完成恒值调节任务的系统是具有重复运行性质的, 这是因为恒值给定信号可视为任意周期信号。

(2) 在工业过程稳态优化控制中, 为了维持最优工况, 常常需要改变设定值。在稳态优化操作过程中, 设定值以小幅度的方式逐渐施加到工业过程, 以避免工业过程失稳。被控过程反复多次地从一个稳态到另一个稳态变化。这里, 人们可以借助于这种操作过程从一个稳态到另一个稳态的重复性质。

(3) 工业间歇过程控制对象具有明显的重复运行性质。这是因为在每一次运行中, 间歇反应器的控制程序是相同的。又例如一些工业产品需批量生产时, 其控制任务也是相同的。

对于这些系统, 欲改善其动态响应品质(如要求上升时间、调节时间极短, 甚少或没有超调), 可以采用迭代学习控制技术来实现。日前, 工业过程控制中应用这些技术已有一些结果^[67-69]。迭代学习控制技术可实现完全跟踪。因此, 人们还可以从实现过

程控制系统的稳态补偿、完全抑制系统的未知确定性干扰的目的出发,应用这种技术。过程学习控制系统如图 3.4.1 所示。

将迭代学习控制技术应用于过程控制对象时,控制作用幅值往往是受到限制的。为了达到良好的动态品质,需改变原期望轨迹,设计适当的轨迹作为期望轨迹。另外,对于恒值调节,要求实际系统满足 $x_k(0) = x_d(0)$ 或 $y_k(0) = y_d(0)$ 的初始条件是困难的。应开发要求容易实现的初始条件的学习律。

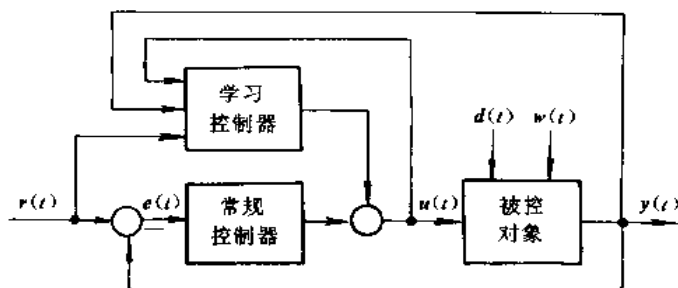


图 3.4.1 过程学习控制系统

早期机器人力/位置控制主要有两种方式,一种方式称为力/位置混合控制(Hybrid Position/Force Control);另一种方式称之为阻抗控制(Impedance Control)。参考文献[51]在阻抗控制思想的启发下,提出了一类模型参考学习控制(Model Reference Learning Control, MRLC)。本节我们将应用 MRLC 方法解决迭代学习控制技术用于过程控制时遇到的问题(包括期望轨迹设计和初始条件问题)。

考虑受扰线性系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + \varepsilon\varphi(x(t), u(t), t) \quad (3.4.1)$$

式中 $x(t) \in \mathbf{R}^n$, $u(t) \in \mathbf{R}^r$, $\varepsilon \geq 0$ 为一足够小的数。 $\varepsilon = 0$ 时系统是未受扰的。显然,未受扰系统的控制量是分离的(即状态方程(3.4.1)的右端函数关于控制是线性的)。非线性扰动 φ 中 u 一般不可分离。设非线性扰动 φ 是可重复的,且关于自变量 x, u 满足一致全局 Lipschitz 条件, Lipschitz 常数记为 k_φ 。

取参考模型为

$$\dot{\mathbf{x}}_d(t) - \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{G}\mathbf{x}_d(t) - \mathbf{G}\mathbf{x}(t) \quad (3.4.2)$$

式中 $\mathbf{x}_d(t)$ ($t \in [0, T]$) 为给定的期望轨迹。设该系统渐近稳定。对于初态 $\mathbf{x}_e(0)$, 其解记为 $\mathbf{x}_e(t)$ ($t \in [0, T]$)。它满足

$$\dot{\mathbf{x}}_d(t) - \dot{\mathbf{x}}_e(t) = \mathbf{G}\mathbf{x}_d(t) - \mathbf{G}\mathbf{x}_e(t)$$

对于受扰线性系统(3.4.1), 设 $\mathbf{x}_e(t)$, $t \in [0, T]$ 是可达的, 即存在 $\mathbf{u}_e(t)$, $t \in [0, T]$, 使得

$$\dot{\mathbf{x}}_e(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_e(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}_e(t) + \varepsilon\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_e(t), \mathbf{u}_e(t), t)$$

定义

$$\mathbf{w}_k(t) = \dot{\mathbf{x}}_d(t) - \dot{\mathbf{x}}_k(t) - \mathbf{G}(\mathbf{x}_d(t) - \mathbf{x}_k(t)) \quad (3.4.3)$$

显然, $\mathbf{w}_e(t) = 0$, $t \in [0, T]$ 。

现在的控制问题是设计学习律, 经过足够多次迭代之后, 使得被控系统的动态响应在 $[0, T]$ 上与参考模型的动态响应一致, 即

$$\mathbf{w}_k(t) \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty, t \in [0, T])$$

该控制问题并不是直接要求 $\mathbf{x}_d(t) - \mathbf{x}_k(t) \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$)。但由于

$$\mathbf{X}_d(s) - \mathbf{X}_k(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{G}]^{-1}(\mathbf{W}_k(s) + \mathbf{x}_d(0) - \mathbf{x}_k(0))$$

当 $k \rightarrow \infty$ 时

$$\mathbf{X}_d(s) - \mathbf{X}_\infty(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{G}]^{-1}(\mathbf{x}_d(0) - \mathbf{x}_\infty(0))$$

因此, 通过设计参考模型的响应品质, 可以达到改善被控系统动态响应品质的目的。

为了解决这一控制问题, 采用学习律

$$\mathbf{u}_{k+1}(t) = \mathbf{u}_k(t) + \mathbf{L}\mathbf{w}_k(t) \quad (3.4.4)$$

容易证得定理 3.4.1。

定理 3.4.1 若由式(3.4.1)、式(3.4.4)描述的模型参考学习控制系统满足

$$(1) \quad \|\mathbf{I} - \mathbf{L}\mathbf{B}\| + \varepsilon k_\varphi \|\mathbf{L}\| < 1$$

$$(2) \quad \mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}_e(0) \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

则当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\mathbf{w}_k(t) \rightarrow 0$ ($t \in [0, T]$)。

定理中的初始条件(2)并不要求 $\mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}_d(0)$ ($k=0, 1,$

2, \dots)。因此, 在工程实现时可以选择适当的 $x_e(0)$, 以使得条件 (2) 易于满足。

由条件 (1) 可知

$$k_{\varphi} < \frac{1}{\varepsilon \|L\|} \quad (3.4.5)$$

它表明该学习控制算法的收敛性对被控系统的非线性扰动程度有一定限制。

下面, 考虑一般非线性系统

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (3.4.6)$$

式中 $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$; 对于 $t \in [0, T]$, 非线性函数 f 关于 x, u 可微; 并且, 对于 $x_k, x_{k+1} \in \mathbb{R}^n$, $u_k \in \mathbb{R}^r$, 记

$$A_k(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x^1, u_k, t)}{\partial x} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n(x^n, u_k, t)}{\partial x} \end{bmatrix}$$

式中 $x^i = \theta^i x_k + (1 - \theta^i) x_{k+1}$ ($0 \leq \theta^i \leq 1$; $i = 1, 2, \dots, n$); 对于 $x_k \in \mathbb{R}^n$, $u_k, u_{k+1} \in \mathbb{R}^r$, 记

$$B_k(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_{k+1}, u^1, t)}{\partial u} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n(x_{k+1}, u^n, t)}{\partial u} \end{bmatrix}$$

式中 $u^i = \theta^i u_k + (1 - \theta^i) u_{k+1}$ ($0 \leq \theta^i \leq 1$; $i = 1, 2, \dots, n$)。设 $B_k(t)$ 有界, 且关于 t 可微。

给定期望轨迹 $x_d(t)$ ($t \in [0, T]$)。取参考模型

$$\dot{x}_d(t) - \dot{x}(t) = g(x_d(t), t) - g(x(t), t)$$

非线性函数 g 关于 x 可微。该系统渐近稳定, 且存在唯一解 $x_e(t)$ ($t \in [0, T]$), 即

$$\dot{x}_d(t) - \dot{x}_e(t) = g(x_d(t), t) - g(x_e(t), t)$$

对于系统(3.4.6), 设 $x_e(t) (t \in [0, T])$ 是可达的, 即存在 $u_e(t) (t \in [0, T])$, 使得

$$\dot{x}_e(t) = f(x_e(t), u_e(t), t)$$

定义

$$w_k(t) = \dot{x}_d(t) - \dot{x}_k(t) - (g(x_d(t), t) - g(x_k(t), t)) \quad (3.4.7)$$

显然, $w_e(t) = 0 (t \in [0, T])$ 。因此

$$w_k(t) = \dot{x}_e(t) - \dot{x}_k(t) - (g(x_e(t), t) - g(x_k(t), t)) = \dot{e}_k(t) - G_k(t)e_k(t)$$

$$\text{式中 } e_k(t) = x_e(t) - x_k(t), G_k(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(x^1, t)}{\partial x} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_n(x^n, t)}{\partial x} \end{bmatrix},$$

$x^i = \theta^i x_e + (1 - \theta^i) x_k (0 \leq \theta^i \leq 1; i = 1, 2, \dots, n)$ 。设 $G_k(t)$ 有界。

采用学习律

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + L_k(t)w_k(t) \quad (3.4.8)$$

式中增益矩阵 $L_k(t)$ 有界, 并且 $\frac{d[B_k(t)L_k(t)]}{dt}$ 有界。

由式(3.4.6)可知

$$\begin{aligned} x_k(t) - x_{k+1}(t) &= \\ x_k(0) - x_{k+1}(0) + \int_0^t [\dot{x}_k(\tau) - \dot{x}_{k+1}(\tau)] d\tau &= \\ x_k(0) - x_{k+1}(0) + \int_0^t [f(x_k(\tau), u_k(\tau), \tau) - \\ f(x_{k+1}(\tau), u_k(\tau), \tau) + f(x_{k+1}(\tau), u_k(\tau), \tau) - \\ f(x_{k+1}(\tau), u_{k+1}(\tau), \tau)] d\tau &= \\ x_k(0) - x_{k+1}(0) + \int_0^t [A_k(\tau)(x_k(\tau) - x_{k+1}(\tau)) - \end{aligned}$$

$$\mathbf{B}_k(\tau)\mathbf{L}_k(\tau)(\dot{\mathbf{e}}_k(\tau) - \mathbf{G}_k(\tau)\mathbf{e}_k(\tau))]\mathrm{d}\tau \quad (3.4.9)$$

若令

$$\mathbf{x}_{k+1}(0) = \mathbf{x}_k(0) + \mathbf{B}_k(0)\mathbf{L}_k(0)\mathbf{e}_k(0) \quad (3.4.10)$$

由

$$\begin{aligned} \int_0^t \mathbf{B}_k(\tau)\mathbf{L}_k(\tau)\dot{\mathbf{e}}_k(\tau)\mathrm{d}\tau = \\ \mathbf{B}_k(\tau)\mathbf{L}_k(\tau)\mathbf{e}_k(\tau) \Big|_0^t - \int_0^t \frac{\mathrm{d}[\mathbf{B}_k(\tau)\mathbf{L}_k(\tau)]}{\mathrm{d}\tau} \mathbf{e}_k(\tau)\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

可知

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k(t) - \mathbf{x}_{k+1}(t) = \int_0^t \mathbf{A}_k(\tau)(\mathbf{x}_k(\tau) - \mathbf{x}_{k+1}(\tau)) - \\ \mathbf{B}_k(t)\mathbf{L}_k(t)\mathbf{e}_k(t) + \int_0^t \left(\frac{\mathrm{d}[\mathbf{B}_k(\tau)\mathbf{L}_k(\tau)]}{\mathrm{d}\tau} + \right. \\ \left. \mathbf{B}_k(\tau)\mathbf{L}_k(\tau)\mathbf{G}_k(\tau) \right) \mathbf{e}_k(\tau)\mathrm{d}\tau \quad (3.4.11) \end{aligned}$$

计算两端的 λ 范数, 可得

$$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k+1}\|_\lambda \leq \frac{b_{BL} + b_1\lambda_0}{1 - b_A\lambda_0} \|\mathbf{e}_k\|_\lambda \quad (3.4.12)$$

式中 b_A, b_{BL}, b_1 分别为 $\mathbf{A}_k(t), \mathbf{B}_k(t)\mathbf{L}_k(t), \frac{\mathrm{d}[\mathbf{B}_k(t)\mathbf{L}_k(t)]}{\mathrm{d}t} + \mathbf{B}_k(t)\mathbf{L}_k(t)\mathbf{G}_k(t)$ 的界, $\lambda_0 = \frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda}$ 。这里, λ 选取得足够大以使得

$$1 - b_A\lambda_0 > 0$$

若选取 $\mathbf{L}_k(t)$, 使得

$$\|\mathbf{I} - \mathbf{B}_k(t)\mathbf{L}_k(t)\| \leq \rho < 1, t \in [0, T] \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.4.13)$$

则有

$$\|\mathbf{e}_{k+1}\|_\lambda \leq \bar{\rho} \|\mathbf{e}_k\|_\lambda$$

式中 $\bar{\rho} = \rho + b_1\lambda_0 + \frac{b_A\lambda_0}{1 - b_A\lambda_0}(b_{BL} + b_1\lambda_0)$ 。当选取 λ 足够大时, 则由式 (3.4.13) 知 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}_k\|_\lambda = 0$ 。又由 $\|\mathbf{w}_k\|_\lambda = \|\dot{\mathbf{e}}_k\|_\lambda +$

$b_G \|e_k\|_\lambda$ (b_G 为 $G_k(t)$ 的界) 知 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|w_k\|_\lambda = 0$ 。

至此, 可将上述推导整理为定理 3.4.2。

定理 3.4.2 对于由式(3.4.6)、式(3.4.8)描述的模型参考学习控制系统, 设条件(3.4.10)、(3.4.13)成立, 则当 $k \rightarrow \infty$ 时, $w_k(t) \rightarrow 0$ ($t \in [0, T]$)。

在迭代过程中, 初始条件(3.4.10)允许迭代初态 $x_k(0)$ 相对于初态 $x_r(0)$ 存在偏移。容易看出

$$e_{k+1}(0) = [I - B_k(0)L_k(0)]e_k(0)$$

两端取范数, 并利用条件(3.4.13), 则

$$\|e_{k+1}(0)\| \leq \rho \|e_k(0)\|$$

故 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|e_k(0)\| = 0$ 。但是, 式(3.4.10)仅具有理论意义, 在实现时存在困难。这是因为 $B_k(0)$ 中有待定常数 θ^i ($i = 1, 2, \dots, n$)。一般地, 为了工程实现方便, 仍可要求 $x_k(0) = x_r(0)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)。

3.5 非线性时滞系统的迭代学习控制

众所周知, 许多工业过程中是存在时滞的, 包括状态时滞和控制时滞。不确定时滞系统的稳定化控制问题已受到相当重视, 但其研究对象大多是线性时滞系统或具有不确定非线性项的线性时滞系统。时滞系统跟踪控制方面也有不少结果, 但大多需要已知精确的数学模型。因此, 本节讨论时滞系统的迭代学习控制问题是有实际背景的。

3.5.1 含状态时滞的系统

考虑具有 r 个输入和 m 个输出 (n 个状态) 的非线性时滞系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_k(t) &= f(x_k(t), x_k(t-h), t) + \\ &\quad B(x_k(t), x_p(t-d), t)u_k(t) \end{aligned} \quad (3.5.1a)$$

$$y_k(t) = g(x_k(t), t) \quad (3.5.16)$$

式中 $t \in [0, T]$ 。当 $t \in [-s, 0]$ 时, $x_k(t) = \psi_k(t)$, $s = \max\{h, d\}$, 初始状态函数 ψ_k 在 $[-s, 0]$ 上分段连续。 f, B 关于 t 分段连续, g 关于 x_k, t 可微, 并将 g 关于 x_k, t 的导数表示为 g_x, g_t 。假定 f 关于 $x_k(t), x_k(t-h), B$ 关于 $x_k(t), x_k(t-d), g_x, g_t$ 关于 $x_k(t)$ 满足一致全局 Lipschitz 条件, 并且 g_x, B 有界。

给定期望轨迹 $y_d(t) (t \in [0, T])$ 和初始状态函数 $\psi_d(t) (t \in [-s, 0])$, 称其是可达的, 如果存在控制 $u_d(t) (t \in [0, T])$ 使得被控系统产生该期望轨迹。相应的状态轨迹记为 $x_d(t) (t \in [0, T])$ 。

对于系统(3.5.1)采用 N 阶 PID 型学习律

$$\begin{aligned} u_{k+1}(t) = & \sum_{i=1}^N P_i(y_{k-i+1}(t), t)u_{k-i+1}(t) + \\ & \sum_{i=1}^N [Q_i(y_{k-i+1}(t), t)e_{k-i+1}(t) + \\ & R_i(y_{k-i+1}(t), t)\dot{e}_{k-i+1}(t) + \\ & S_i(y_{k-i+1}(t), t)\int_0^t e_{k-i+1}(\tau)d\tau] \quad (3.5.2) \end{aligned}$$

式中 $e_k(t) = y_d(t) - y_k(t)$ 。 N 为学习阶次。 P_i, Q_i, R_i, S_i 为具有相应维数的增益矩阵。

定理 3.5.1 给定在学习律(3.5.2)作用下的系统(3.5.1)以及可达的期望轨迹 $y_d(t) (t \in [0, T])$ 。若条件

- (1) $\sum_{i=1}^N P_i(g(x(t), t), t) = I \quad (t \in [0, T])$
- (2) 存在 $\rho_i \geq 0 (i = 1, 2, \dots, N)$, 使得

$$\|P_i(g(x(t), t), t) - R_i(g(x(t), t), t)g_x(x(t), t)B(x(t), x(t-d), t)\| \leq \rho_i \quad (t \in [0, T])$$

$$\text{且} \quad \sum_{i=1}^N \rho_i < 1$$

- (3) $\psi_k(t) = \psi_d(t) \quad (k = 0, 1, 2, \dots; t \in [-s, 0])$

则 $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k(t) = y_d(t) (t \in [0, T])$ 。

证明 记 $j = k - i + 1$ 。由式(3.5.2)及条件(1)可知

$$\begin{aligned} u_d - u_{k+1} &= \sum_{i=1}^N P_i(u_d - u_j) - \\ &\quad \sum_{i=1}^N \{ Q_i e_j + R_i \dot{e}_j + S_i \int_0^t e_j d\tau \} \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

由式(3.5.1)知

$$\begin{aligned} \dot{e}_j &= g_{td} + g_{xd} \dot{x}_d - g_{tj} - g_{xj} \dot{x}_j = \\ &= g_{td} + g_{xd}(f_d + B_d u_d) - g_{tj} - g_{xj}(f_j + B_j u_j) = \\ &= g_{xj} B_j(u_d - u_j) + g_{td} - g_{tj} + \\ &= g_{xd}(f_d + B_d u_d) - g_{xj}(f_j + B_j u_d) \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

将式(3.5.4)代入式(3.5.3)

$$\begin{aligned} u_d - u_{k+1} &= \\ &= \sum_{i=1}^N [P_i - R_i g_{xj} B_j](u_d - u_j) - \sum_{i=1}^N \{ Q_i (g_d - g_j) + \\ &= R_i [g_{td} - g_{tj} + (g_{xd} - g_{xj})(f_d + B_d u_d) + \\ &= g_{xj}(f_d - f_j) - g_{xj}(B_d - B_j)u_d] + S_i \int_0^t (g_d - g_j) d\tau \} \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

记 $\Delta u_k = u_d - u_k$ 。估计 Δu_{k+1} ，有

$$\begin{aligned} \|\Delta u_{k+1}\| &\leq \\ &= \sum_{i=1}^N \{ \|P_i - R_i g_{xj} B_j\| \|\Delta u_j\| + \\ &= \sum_{i=1}^N \{ \|Q_i\| \|g_d - g_j\| + \|R_i\| [\|g_{td} - g_{tj}\| + \\ &= \|g_{xd} - g_{xj}\| \|f_d + B_d u_d\| + \|g_{xj}\| \|f_d - f_j\| + \\ &= \|g_{xj}\| \|B_d - B_j\| \|u_d\|] + \\ &= \|S_i\| \int_0^t \|g_d - g_j\| d\tau \} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N \rho_i \| \Delta \mathbf{u}_j \| - \sum_{i=1}^N \{ b_Q k_g \| \mathbf{x}_d - \mathbf{x}_j \| + \\
& b_R [k_{gt} \| \mathbf{x}_d - \mathbf{x}_i \| + k_{gx} b_d \| \mathbf{x}_d - \mathbf{x}_i \| + \\
& b_{gx} k_f (\| \mathbf{x}_d - \mathbf{x}_j \| + \\
& \| \mathbf{x}_d(t-h) - \mathbf{x}_j(t-h) \|) + \\
& b_{gx} k_B b_{ud} (\| \mathbf{x}_d - \mathbf{x}_j \| + \\
& \| \mathbf{x}_d(t-d) - \mathbf{x}_j(t-d) \|) \} + \\
& b_S k_g \int_0^t \| \mathbf{x}_d - \mathbf{x}_j \| d\tau \} = \\
& \sum_{i=1}^N \rho_i \| \Delta \mathbf{u}_j \| + \sum_{i=1}^N \{ b_1 \| \mathbf{x}_d - \mathbf{x}_j \| + \\
& b_2 \| \mathbf{x}_d(t-h) - \mathbf{x}_j(t-h) \| + \\
& b_3 \| \mathbf{x}_d(t-d) - \mathbf{x}_j(t-d) \| + \\
& b_4 \int_0^t \| \mathbf{x}_d - \mathbf{x}_j \| d\tau \} \quad (3.5.6)
\end{aligned}$$

式中 k_f, k_g, k_{gt}, k_{gx} 分别为 f, g, g_t, g_x 的 Lipschitz 常数; b_{gx}, b_Q, b_R, b_S 分别为 g_x, Q, R, S 的界; $b_{ud} = \sup_{t \in [0, T]} \| \mathbf{u}_d(t) \|$; $b_d = \sup_{t \in [0, T]} \| f_d + B_d \mathbf{u}_d \|$; $b_1 = b_Q k_g - b_R (k_{gt} + k_{gx} b_d + b_{gx} k_f + b_{gx} k_B b_{ud})$; $b_2 = b_R b_{gx} k_f$; $b_3 = b_R b_{gx} k_B b_{ud}$; $b_4 = b_S k_g$ 。

估计 $\mathbf{x}_d - \mathbf{x}_j$ 。由式(3.5.1a)及条件(3)可知

$$\begin{aligned}
& \| \mathbf{x}_d - \mathbf{x}_j \| = \\
& \| \mathbf{x}_d(0) - \mathbf{x}_j(0) + \int_0^t (f_d + B_d \mathbf{u}_d - f_j - B_j \mathbf{u}_j) d\tau \| = \\
& \| \int_0^t [f_d - f_j + (B_d - B_j) \mathbf{u}_d + B_j \Delta \mathbf{u}_j] d\tau \| \leq \\
& \int_0^t (\| f_d - f_j \| + \| B_d - B_j \| \| \mathbf{u}_d \| + \\
& \| B_j \| \| \Delta \mathbf{u}_j \|) d\tau \leq \\
& \int_0^t [k_f (\| \mathbf{x}_d - \mathbf{x}_j \| + \| \mathbf{x}_d(\tau-h) - \mathbf{x}_j(\tau-h) \|) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& k_B b_{ud} (\|x_d - x_j\| + \|x_d(\tau - d) - x_j(\tau - d)\|) + \\
& b_B \| \Delta u_j \|] d\tau = \\
& \int_0^t [(k_f + k_B b_{ud}) \|x_d - x_j\| + \\
& k_f \|x_d(\tau - h) - x_j(\tau - h)\| + \\
& k_B b_{ud} \|x_d(\tau - d) - x_j(\tau - d)\| + \\
& b_B \| \Delta u_j \|] d\tau
\end{aligned} \tag{3.5.7}$$

记 $\theta \in [h, d]$, 考察

$$\begin{aligned}
I & \triangleq \int_0^t \|x_d(\tau - \theta) - x_j(\tau - \theta)\| d\tau = \\
& \int_{-\theta}^{t-\theta} \|x_d - x_j\| d\tau
\end{aligned} \tag{3.5.8}$$

当 $0 \leq t \leq \theta$ 时, 利用条件(3)可得

$$I = \int_{-\theta}^{t-\theta} \|\psi_d - \psi_j\| d\tau = 0 \tag{3.5.9}$$

当 $\theta < t \leq T$ 时

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\theta}^0 \|x_d - x_j\| d\tau + \int_0^{t-\theta} \|x_d - x_j\| d\tau = \\
& \int_0^{t-\theta} \|x_d - x_j\| d\tau \leq \\
& \int_0^t \|x_d - x_j\| d\tau
\end{aligned} \tag{3.5.10}$$

由式(3.5.9)和式(3.5.10)可得

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \|x_d(\tau - \theta) - x_j(\tau - \theta)\| d\tau \leq \\
& \int_0^t \|x_d - x_j\| d\tau
\end{aligned} \tag{3.5.11}$$

将式(3.5.11)代入式(3.5.7), 则

$$\|x_d - x_j\| \leq \int_0^t (b_5 \|x_d - x_j\| + b_B \| \Delta u_j \|) d\tau$$

式中 $b_5 = 2(k_f + k_B b_{ud})$ 。利用 Bellman-Gronwall 引理, 得

$$\|x_d - x_j\| \leq b_B \int_0^t e^{b_s(t-\tau)} \|\Delta u_j\| d\tau \quad (3.5.12)$$

估计 $x_d(t - \theta) - x_j(t - \theta)$ 。利用条件(3)知, 当 $0 \leq t \leq \theta$ 时

$$\|x_d(t - \theta) - x_j(t - \theta)\| = \|\psi_d(t - \theta) - \psi_j(t - \theta)\| = 0 \quad (3.5.13)$$

当 $\theta < t \leq T$ 时

$$\begin{aligned} \|x_d(t - \theta) - x_j(t - \theta)\| &= \\ \|x_d(0) - x_j(0) + \int_0^{t-\theta} (f_d + B_d u_d - f_j - B_j u_j) d\tau\| &= \\ \|\int_0^{t-\theta} [f_d - f_j + (B_d - B_j) u_d + B_j \Delta u_j] d\tau\| &\leq \\ \int_0^{t-\theta} [k_f (\|x_d - x_j\| + \|x_d(\tau - h) - x_j(\tau - h)\|) + \\ k_B b_{ud} (\|x_d - x_j\| + \|x_d(\tau - d) - x_j(\tau - d)\|) + \\ b_B \|\Delta u_j\|] d\tau &\leq \\ \int_0^{t-\theta} (b_5 \|x_d - x_j\| + b_B \|\Delta u_j\|) d\tau &\quad (3.5.14) \end{aligned}$$

因此, 利用 Bellman-Gronwall 引理

$$\begin{aligned} \|x_d(t - \theta) - x_j(t - \theta)\| &\leq e^{-b_5 \theta} b_B \int_0^{t-\theta} e^{b_5(t-\tau)} \|\Delta u_j\| d\tau \leq \\ b_B \int_0^t e^{b_5(t-\tau)} \|\Delta u_j\| d\tau &\quad (3.5.15) \end{aligned}$$

将式(3.5.12)及式(3.5.15)代入式(3.5.6), 有

$$\begin{aligned} \|\Delta u_{k+1}\| &\leq \sum_{i=1}^N \rho_i \|\Delta u_i\| + \\ &\sum_{i=1}^N (b_1 + b_2 + b_3) b_B \int_0^t e^{b_5(t-\tau)} \|\Delta u_i\| d\tau + \\ &\sum_{i=1}^N b_4 b_B \int_0^t \int_0^\tau e^{b_5(\tau-\sigma)} \|\Delta u_j\| d\sigma d\tau \quad (3.5.16) \end{aligned}$$

式(3.5.16)两端取 λ 范数, 有

$$\|\Delta \mathbf{u}_{k+1}\|_{\lambda} \leq \sum_{i=1}^N \bar{\rho}_i \|\Delta \mathbf{u}_i\|_{\lambda} \quad (3.5.17)$$

式中

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_i = & \rho_i + (b_1 + b_2 + b_3)b_B \frac{1 - e^{(b_5 - \lambda)T}}{\lambda - b_5} + \\ & b_4 b_B \frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda} \frac{1 - e^{(b_5 - \lambda)T}}{\lambda - b_5} \end{aligned}$$

由条件(2)知, 当 λ 足够大时, 有 $\sum_{i=1}^N \bar{\rho}_i < 1$ 。由附录引理 A.2.4 可得 $\|\Delta \mathbf{u}_k\|_{\lambda} \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$ 。又由式(3.5.12)及式(3.5.1b)可知

$$\|\mathbf{x}_d - \mathbf{x}_k\|_{\lambda} \leq b_B \frac{1 - e^{(b_5 - \lambda)T}}{\lambda - b_5} \|\Delta \mathbf{u}_k\|_{\lambda} \quad (3.5.18)$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_k\|_{\lambda} & \leq k_g \|\mathbf{x}_d - \mathbf{x}_k\|_{\lambda} \leq \\ & k_g b_B \frac{1 - e^{(b_5 - \lambda)T}}{\lambda - b_5} \|\Delta \mathbf{u}_k\|_{\lambda} \end{aligned} \quad (3.5.19)$$

因此, 由式(3.5.17)~(3.5.19)可证得该定理。

值得说明的是, 上述定理中的条件(3)要求状态的初始函数在区间 $[-s, 0]$ 上严格重复, 而不是仅仅要求 $t = 0$ 时的状态严格重复。学习律(3.5.2)中没有用到时滞 h, d 。因此, 该学习律适用于时滞 h, d 未知的情形。

例 3.5.1 对于非线性时滞系统

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}^1(t) \\ \dot{x}^2(t) \\ \dot{x}^3(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -x^1(t - \theta) - x^3(t) + u^1(t) \\ \cos(x^1(t)x^2(t - \theta)) + u^2(t) \\ \sin(x^2(t)x^3(t - \theta))u^2(t) \end{bmatrix} \\ \mathbf{y}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

给定期望轨迹

$$\mathbf{y}_d(t) = \begin{bmatrix} \sin(\pi t) \\ 12t^2(1 - t) \end{bmatrix} \quad (t \in [0, 1])$$

并设定状态时滞 $\theta = 0.5$, $\psi_k(t) = [0, 0]^T (t \in [-\theta, 0])$ 。对于该系统施加一阶学习律

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.0 \\ 0.0 & 0.7 \end{bmatrix} (\dot{y}_d(t) - \dot{y}_k(t))$$

该系统迭代 5 次输出误差达到允许均方根值 0.01。图 3.5.1 给出了迭代输出轨迹。

下面, 考虑具有 r 个输入 m 个输出 (n 维状态) 的含多重状态

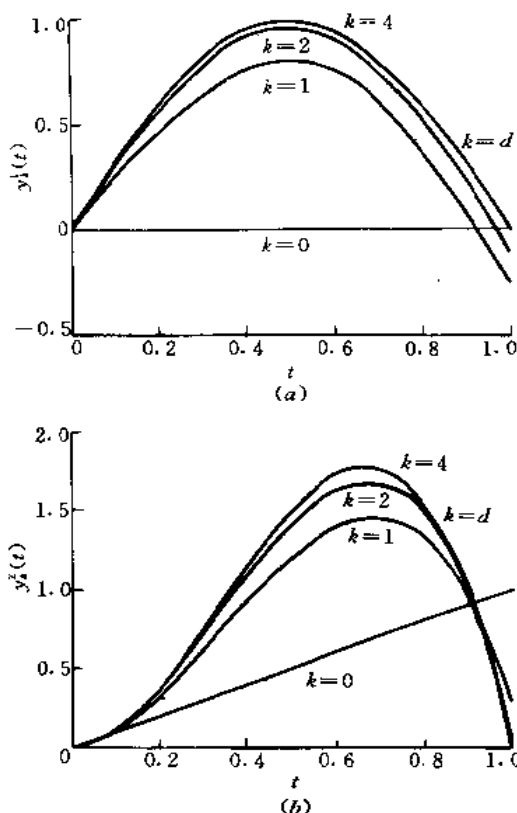


图 3.5.1 例 3.5.1 的迭代输出轨迹

(a) $y_k^1(t)$; (b) $y_k^2(t)$ 。

时滞的非线性系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_k(t) = & f(x_k(t), x_k(t-h_1), \dots, x_k(t-h_{m_1}), t) + B(x_k(t), \\ & x_k(t-d_1), \dots, x_k(t-d_{m_2}), t)u_k(t) \end{aligned} \quad (3.5.20a)$$

$$y_k(t) = g(x_k(t), t) \quad (t \in [0, T]) \quad (3.5.20b)$$

$$x_k(t) = \psi_k(t) \quad (t \in [-s, 0]) \quad (3.5.20c)$$

式中 $s = \max\{h_1, h_2, \dots, h_{m_1}, d_1, d_2, \dots, d_{m_2}\}$, 初始状态函数 $\psi_k(t)$ 在 $[-s, 0]$ 上分段连续; f, B 关于 t 分段连续, g 关于 x_k, t 可微; f 关于 $x_k(t), x_k(t-h_1), \dots, x_k(t-h_{m_1}), B$ 关于 $x_k(t), x_k(t-d_1), \dots, x_k(t-d_{m_2}), g_x, g_t$ 关于 $x_k(t)$ 满足一致全局 Lipschitz 条件, 并且 g_x, B 有界。

定理 3.5.2 给定在学习律(3.5.2)作用下的系统(3.5.20)以及可达的期望轨迹 $y_d(t) (t \in [0, T])$ 。若

$$(1) \quad \sum_{i=1}^N P_i(g(x(t), t), t) = I \quad (t \in [0, T])$$

$$(2) \quad \text{存在 } \rho_i \geq 0 (i = 1, 2, \dots, N), \text{ 使得}$$

$$\begin{aligned} & \|P_i(g(x(t), t), t) - R_i(g(x(t), t), t)g_x(x(t), t) \\ & B(x(t), x(t-d_1), \dots, x(t-d_{m_2}), t)\| \leq \rho_i (t \in [0, T]) \end{aligned}$$

$$\text{且} \quad \sum_{i=1}^N \rho_i < 1$$

$$(3) \quad \psi_k(t) = \psi_d(t) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, t \in [-s, 0])$$

则 $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k(t) = y_d(t) (t \in [0, T])$ 。

证明 记 $j = k - i + 1$ 。首先估计 $\|\Delta u_{k+1}\|$ 的界, 可得

$$\|\Delta u_{k+1}\| \leq$$

$$\sum_{i=1}^N \|P_i - R_i g_{x_j} B_j\| \|\Delta u_j\| +$$

$$\sum_{i=1}^N \{ \|Q_i\| \|g_d - g_j\| + \|R_i\| [\|g_{td} - g_{tj}\| +$$

$$\|g_{xd} - g_{xj}\| \|f_d + B_d u_d\| +$$

$$\begin{aligned}
& \|g_{x_j}\| (\|f_d - f_j\| + \|B_d - B_j\| \|u_d\|) + \\
& \|S_i\| \int_0^t \|g_d - g_j\| d\tau \leq \\
& \sum_{i=1}^N \rho_i \|\Delta u_j\| + \sum_{i=1}^N (b_Q k_g \|x_d - x_j\| + \\
& b_R [(k_{g1} + k_{gx} b_d) \|x_d - x_j\| + \\
& h_{gx} (k_f \sum_{l=0}^{m_1} \|x_d(t - h_l) - x_j(t - h_l)\| + \\
& k_B b_{ud} \sum_{l=0}^{m_2} \|x_d(t - d_l) - x_j(t - d_l)\|)] + \\
& b_S k_g \int_0^t \|x_d - x_j\| d\tau) \quad (3.5.21)
\end{aligned}$$

式中 $h_0, d_0 = 0$ 。

估计 $\|x_d - x_j\|$ 的界。由式(3.5.20a)可知

$$\begin{aligned}
\|x_d - x_j\| & \leq \int_0^t (\|f_d - f_j\| + \|B_d - B_j\| \|u_d\| + \\
& \|B_j\| \|\Delta u_j\|) d\tau \leq \int_0^t (k_f \sum_{l=0}^{m_1} \|x_d(\tau - h_l) - \\
& x_j(\tau - h_l)\| \leq k_B b_{ud} \sum_{l=0}^{m_2} \|x_d(\tau - d_l) - \\
& x_j(\tau - d_l)\| + b_B \|\Delta u_j\|) d\tau \quad (3.5.22)
\end{aligned}$$

与式(3.5.11)类似,则

$$\begin{aligned}
\int_0^t \|x_d(\tau - \theta) - x_j(\tau - \theta)\| & \leq \int_0^t (\|x_d - x_j\| d\tau \\
& (\theta \in \{h_l (l = 1, \dots, m_1), d_l (l = 1, \dots, m_2)\}) \quad (3.5.23)
\end{aligned}$$

将式(3.5.23)代入式(3.5.22),则

$$\|x_d - x_j\| \leq \int_0^t (b_1 \|x_d - x_j\| + b_B \|\Delta u_j\|) d\tau \quad (3.5.24)$$

式中 $b_1 = k_f(m_1 + 1) + k_B b_{ud}(m_2 + 1)$ 。利用 Bellman-Gronwall 引

理,得

$$\|x_d - x_j\| \leq b_B \int_0^t e^{b_1(t-\tau)} \|\Delta u_j\| d\tau \quad (3.5.25)$$

与式(3.5.15)类似,则

$$\|x_d(t-\theta) - x_j(t-\theta)\| \leq b_B \int_0^t e^{b_1(t-\tau)} \|\Delta u_j\| d\tau$$

$$\theta \in \{h_l(l=1, \dots, m_1), d_l(l=1, \dots, m_2)\} \quad (3.5.26)$$

将式(3.5.25)及式(3.5.26)代入式(3.5.21),可得

$$\|\Delta u_{k+1}\| \leq \sum_{i=1}^N \rho_i \|\Delta u_j\| + \sum_{i=1}^N b_2 \int_0^t e^{b_1(t-\tau)} \|\Delta u_j\| d\tau +$$

$$\sum_{i=1}^N b_3 \int_0^t \int_0^\tau e^{b_1(\tau-\sigma)} \|\Delta u_j\| d\sigma d\tau$$

式中 $b_2 = [b_{Qg}k_g + b_R(k_g + k_{gx}b_d + b_{gx}b_i)]b_B$, $b_3 = b_S k_g b_B$ 。因此

$$\|\Delta u_{k+1}\|_\lambda \leq \sum_{i=1}^N \rho_i \|\Delta u_j\|_\lambda \quad (3.5.27)$$

式中 $\rho_i = \rho_i + b_2 \frac{1 - e^{(b_1 - \lambda)T}}{\lambda - b_1} + b_3 \frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda} \frac{1 - e^{(b_1 - \lambda)T}}{\lambda - b_1}$

至此,利用条件(2)容易证得定理。

3.5.2 含控制时滞的系统

考虑下述非线性时滞系统

$$\dot{x}_k(t) = f(x_k(t), t) + B(x_k(t), t)u_k(t - \theta) \quad (3.5.28a)$$

$$y_k(t) = g(x_k(t), t) \quad (3.5.28b)$$

式中 $t \in [0, T]$ 。 f, B 关于 t 分段连续; g 关于 x_k, t 可微, 并记 g 关于 x_k, t 的导数为 g_x, g_t ; f, B, g_x, g_t 关于 x_k 满足一致全局 Lipschitz 条件; g_x, B 有界。假定控制时滞 $\theta > 0$ 已知。

对于系统(3.5.28)采用 N 阶 PID 型学习律

$$u_{k+1}(t) = \sum_{i=1}^N P_i(y_{k-i+1}(t), t)u_{k-i+1}(t) +$$

$$\sum_{i=1}^N \{Q_i(y_{k-i+1}(t), t)e_{k-i+1}(t + \theta) +$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{R}_i(\mathbf{y}_{k-i+1}(t), t) \dot{\mathbf{e}}_{k-i+1}(t + \theta) + \\ & \mathbf{S}_i(\mathbf{y}_{k-i+1}(t), t) \int_{-\theta}^t \mathbf{e}_{k-i+1}(\tau + \theta) d\tau \} \quad (3.5.29) \end{aligned}$$

式中 $t \in [-\theta, T - \theta]$ 。

定理 3.5.3 给定在学习律(3.5.29)作用下的系统(3.5.28)以及可达的期望轨迹 $\mathbf{y}_d(t), t \in [0, T]$ 。若

$$(1) \quad \sum_{i=1}^N \mathbf{P}_i(\mathbf{g}(\mathbf{x}, t), t) = \mathbf{I}, (\mathbf{x}, t) \in \mathbf{R}^n \times [0, T]$$

$$(2) \quad \text{存在 } \rho_i \geq 0 (i = 1, 2, \dots, N), \text{ 使得}$$

$$\|\mathbf{P}_i(\mathbf{g}(\mathbf{x}, t), t) - \mathbf{R}_i(\mathbf{g}(\mathbf{x}, t), t) \mathbf{g}_x(\mathbf{x}, t) \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)\| \leq \rho_i$$

$$((\mathbf{x}, t) \in \mathbf{R}^n \times [0, T])$$

$$\sum_{i=1}^N \rho_i < 1$$

$$(3) \quad \mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}_d(0) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

则 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{y}_k(t) = \mathbf{y}_d(t), t \in [0, T]$ 。

证明 记 $j = k - i + 1$ 由式(3.5.28b)及条件(1)可知, 对于 $t \in [-\theta, T - \theta]$, 则

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}_{k+1}(t) = & \sum_{i=1}^N [\mathbf{P}_i - \mathbf{R}_i \mathbf{g}_{xj}(t + \theta) \mathbf{B}_j(t + \theta)] \Delta \mathbf{u}_j(t) - \\ & \sum_{i=1}^N \{ \mathbf{Q}_i(\mathbf{g}_d(t + \theta) - \mathbf{g}_j(t + \theta)) + \\ & \mathbf{R}_i[\mathbf{g}_{id}(t + \theta) - \mathbf{g}_{ij}(t + \theta) + \\ & (\mathbf{g}_{xd}(t + \theta) - \mathbf{g}_{xy}(t + \theta))(\mathbf{f}_d(t + \theta) + \\ & \mathbf{B}_d(t + \theta) \mathbf{u}_d(t)) + \\ & \mathbf{g}_{xy}(t + \theta)(\mathbf{f}_d(t + \theta) - \mathbf{f}_j(t + \theta)) + \\ & \mathbf{g}_{xy}(t + \theta)(\mathbf{B}_d(t + \theta) - \mathbf{B}_j(t + \theta)) \mathbf{u}_d(t) \} + \\ & \mathbf{S}_i \int_{-\theta}^t (\mathbf{g}_d(\tau + \theta) - \mathbf{g}_j(\tau + \theta)) d\tau \} \quad (3.5.30) \end{aligned}$$

估计 $\|\Delta \mathbf{u}_{k+1}(t)\|$ 的界, 可得

$$\begin{aligned} \|\Delta \mathbf{u}_{k+1}(t)\| \leq & \sum_{i=1}^N \rho_i \|\Delta \mathbf{u}_j(t)\| + \\ & \sum_{i=1}^N \{b_1 \|\mathbf{x}_d(t+\theta) - \mathbf{x}_j(t+\theta)\| + \\ & b_2 \int_{t-\theta}^t \|\mathbf{x}_d(\tau+\theta) - \mathbf{x}_j(\tau+\theta)\| d\tau\} \end{aligned} \quad (3.5.31)$$

式中 $b_1 = b_Q k_R + b_R(k_R + k_{gR} b_d + b_{gR} k_f + b_{gR} k_B b_{ud})$, $b_2 = b_R k_g$,
 $b_d = \sup_{t \in [-\theta, T-\theta]} \|\mathbf{f}_d(t+\theta) + \mathbf{B}_d(t+\theta)\mathbf{u}_d(t)\|$ 。

估计 $\|\mathbf{x}_d(t+\theta) - \mathbf{x}_j(t+\theta)\|$ 的界, 可得

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_d(t+\theta) - \mathbf{x}_j(t+\theta)\| \leq & \\ b_3 \int_{t-\theta}^t e^{b_3(t-\tau)} \|\Delta \mathbf{u}_j(\tau)\| d\tau \end{aligned} \quad (3.5.32)$$

式中 $b_3 = \max\{k_f + k_B b_{ud}, b_B\}$ 。

将式(3.5.32)代入式(3.5.31), 有

$$\begin{aligned} \|\Delta \mathbf{u}_{k+1}(t)\| \leq & \sum_{i=1}^N \rho_i \|\Delta \mathbf{u}_j(t)\| + \\ & \sum_{i=1}^N b_1 b_3 \int_{t-\theta}^t e^{b_3(t-\tau)} \|\Delta \mathbf{u}_j(\tau)\| d\tau + \\ & \sum_{i=1}^N b_2 b_3 \int_{t-\theta}^t \int_{-\theta}^{\tau} e^{b_3(\tau-\sigma)} \|\Delta \mathbf{u}_j(\sigma)\| d\sigma d\tau \end{aligned}$$

两端同乘 $e^{-\lambda t}$, 可得

$$\begin{aligned} e^{-\lambda t} \|\Delta \mathbf{u}_{k+1}(t)\| \leq & \\ \sum_{i=1}^N (\rho_i + b_1 b_3 \frac{1 - e^{(b_3-\lambda)(t+\theta)}}{\lambda - b_3} + & \\ b_2 b_3 \frac{1 - e^{(b_3-\lambda)T}}{\lambda - b_3} \frac{1 - e^{-\lambda(t+\theta)}}{\lambda}) \sup_{t \in [-\theta, T-\theta]} \{e^{-\lambda t} \|\Delta \mathbf{u}_j(t)\|\} \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [-\theta, T-\theta]} \{e^{-\lambda t} \|\Delta \mathbf{u}_{k+1}(t)\|\} \leq & \\ \sum_{i=1}^N (\rho_i + b_1 b_3 \frac{1 - e^{(b_3-\lambda)T}}{\lambda - b_3} + b_2 b_3 \frac{1 - e^{(b_3-\lambda)T}}{\lambda - b_3} \frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda}) \end{aligned}$$

$$\sup_{t \in [\theta, T-\theta]} \|e^{-\lambda t} \|\Delta u_j(t)\| \} \quad (3.5.33)$$

至此, 容易证得该定理。

3.6 非正则非线性系统的迭代学习控制

针对连续与离散两种情形, 本节讨论由相对度刻划的完全非正则非线性系统的迭代学习控制问题。

3.6.1 连续时间系统

首先给出要用到的一些基本概念。

状态 $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$ 的向量函数 $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})]^T$ 的光滑性是指该函数具有所要求的任意阶连续偏导数。状态 \mathbf{x} 的标量函数 $g(\mathbf{x})$ 的梯度定义为

$$\nabla g = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} = \left[\frac{\partial g}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n} \right] \quad (3.6.1)$$

$g(\mathbf{x})$ 对 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 的李导数定义为

$$L_{\mathbf{f}}g = \nabla g \mathbf{f} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} f_i \quad (3.6.2)$$

实际上, $g(\mathbf{x})$ 对 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 的李导数就是 $g(\mathbf{x})$ 沿 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 的方向导数, 给定另一 \mathbf{x} 的向量函数 $\mathbf{b}(\mathbf{x})$, $g(\mathbf{x})$ 先沿 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, 然后又沿 $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ 的方向导数为

$$L_{\mathbf{b}}L_{\mathbf{f}}g = \nabla(L_{\mathbf{f}}g)\mathbf{b} \quad (3.6.3)$$

据此, 可以递归地定义 $g(\mathbf{x})$ 对 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 的高阶李导数

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{f}}^0 g &= g \\ L_{\mathbf{f}}^i g &= L_{\mathbf{f}}(L_{\mathbf{f}}^{i-1}g) = \nabla(L_{\mathbf{f}}^{i-1}g)\mathbf{f} \end{aligned} \quad (3.6.4)$$

下面, 首先考虑 SISO 非线性系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{b}(\mathbf{x}(t))u(t) \quad (3.6.5a)$$

$$y(t) = g(\mathbf{x}(t)) \quad (3.6.5b)$$

式中 $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$, $u(t), y(t) \in \mathbf{R}^1$, $\mathbf{f}, \mathbf{b}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 以及 $g: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^1$ 均

是光滑的非线性函数。

称系统(3.6.5)在点 x_0 的相对度为 r , 如果对于 x_0 的一个邻域中的所有 x 有

$$\left. \begin{aligned} L_b L_f^i g(x) &= 0 \quad (0 \leq i < r-1) \\ L_b L_f^{r-1} g(x) &\neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.6.6)$$

系统在时间 t_0 的状态记为 $x(t_0) = x_0$ 。若系统在 x_0 的相对度为 $r > 1$, 则有

$$\begin{aligned} y^{(1)}(t_0) - \frac{\partial g(x_0)}{\partial x} \dot{x}(t_0) &= \\ \frac{\partial g(x_0)}{\partial x} [f(x_0) + b(x_0)u(t_0)] - \\ L_f g(x_0) + L_b L_f^0 g(x_0)u(t_0) &= \\ L_f g(x_0) \\ y^{(2)}(t_0) - \frac{\partial(L_f g(x_0))}{\partial x} \dot{x}(t_0) &= \\ \frac{\partial(L_f g(x_0))}{\partial x} [f(x_0) + b(x_0)u(t_0)] - \\ L_f^2 g(x_0) + L_b L_f g(x_0)u(t_0) - \\ L_f^2 g(x_0) \end{aligned}$$

一般地, 有

$$y^{(i)}(t_0) = L_f^i g(x_0) \quad (0 \leq i \leq r-1) \quad (3.6.7a)$$

$$y^{(r)}(t_0) = L_f^r g(x_0) + L_b L_f^{r-1} g(x_0)u(t_0) \quad (3.6.7b)$$

式中 $y^{(i)}(t)$ 为 $y(t)$ 的 i 阶导数。

显然, 对于相对度为 r 的系统, 需要对系统的输出求 r 次导数才能在输入和输出之间建立直接关系。假设对于所有的 $x(t)$ ($t \in [0, T]$), 系统(3.6.5)的相对度为 r 。给定 r 阶连续可微的期望轨迹 $y_d(t)$ ($t \in [0, T]$), 并设该期望轨迹可达。当 $y_k^{(r)}(t)$ 可量测时, 可采用学习律

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \gamma_k(t)e_k^{(r)}(t) \quad (3.6.8)$$

式中 $e_k(t) = y_d(t) - y_k(t)$; $e_k^{(r)}(t)$ 为 $e_k(t)$ 的 r 阶导数; $\gamma_k(t)$ 为第 k 次迭代时的有界增益。可以看出, 由式(3.6.5a)、式(3.6.7b)描述的系统满足正则性要求。

由式(3.6.7)知, 输出误差的各阶导数为

$$\begin{aligned} e_k^{(i)}(t) &= L_f^i g(x_d(t)) - L_f^i g(x_k(t)) \\ (0 \leq i \leq r-1) \\ e_k^{(r)}(t) &= L_f^r g(x_d(t)) + L_b L_f^{r-1} g(x_d(t)) u_d(t) - \\ &\quad L_f^r g(x_k(t)) - L_b L_f^{r-1} g(x_k(t)) u_k(t) \quad (3.6.9) \end{aligned}$$

因此, 第 $k+1$ 次迭代时的控制误差可写成

$$\begin{aligned} u_d(t) - u_{k+1}(t) &= \\ u_d(t) - u_k(t) - \gamma_k(t) e_k^{(r)}(t) &= \\ u_d(t) - u_k(t) - \gamma_k(t) [L_f^r g(x_d(t)) - L_f^r g(x_k(t)) + \\ L_b L_f^{r-1} g(x_d(t)) u_d(t) - L_b L_f^{r-1} g(x_k(t)) u_k(t)] &= \\ [1 - \gamma_k(t) L_b L_f^{r-1} g(x_k(t))] (u_d(t) - u_k(t)) - \\ \gamma_k(t) [L_f^r g(x_d(t)) - L_f^r g(x_k(t)) + \\ [L_b L_f^{r-1} g(x_d(t)) - L_b L_f^{r-1} g(x_k(t))] u_d(t)] &\quad (3.6.10) \end{aligned}$$

式(3.6.10)两端取范数, 则有

$$\begin{aligned} \|u_d(t) - u_{k+1}(t)\| &\leq \\ \|1 - \gamma_k(t) L_b L_f^{r-1} g(x_k(t))\| \|u_d(t) - u_k(t)\| &+ \\ \|\gamma_k(t)\| [\|L_f^r g(x_d(t)) - L_f^r g(x_k(t))\| &+ \|L_b L_f^{r-1} \\ g(x_d(t)) - L_b L_f^{r-1} g(x_k(t))\| \|u_d(t)\|] &\quad (3.6.11) \end{aligned}$$

若 f, b, g 关于 x 满足一致全局 Lipschitz 条件; $L_f^r g(x)$ 和 $L_b L_f^{r-1} g(x)$ 关于 x 满足一致全局 Lipschitz 条件, 即存在 k_1, k_2 使得

$$\|L_f^r g(x_d) - L_f^r g(x_k)\| \leq k_1 \|x_d - x_k\| \quad (3.6.12a)$$

$$\|L_b L_f^{-1} g(\mathbf{x}_d) - L_b L_f^{-1} g(\mathbf{x}_k)\| \leq k_2 \|\mathbf{x}_d - \mathbf{x}_k\| \quad (3.6.12b)$$

并且

$$\|1 - \gamma_k(t) L_b L_f^{-1} g(\mathbf{x}_k(t))\| \leq \rho < 1 \quad (3.6.13)$$

则式(3.6.11)可写成

$$\begin{aligned} \|\Delta u_{k+1}(t)\| &\leq \rho \|\Delta u_k(t)\| + \\ &\quad c_1 \|\mathbf{x}_d(t) - \mathbf{x}_k(t)\| \end{aligned} \quad (3.6.14)$$

式中 $\Delta u_k(t) = u_d(t) - u_k(t)$, $c_1 = \sup_{t \in [0, T]} \{\|\gamma_k(t)\| (k_1 + k_2 \|u_d(t)\|)\}$ 。当 $\mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}_d(0)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) 时, 利用 Bellman-Gronwall 引理, 有

$$\|\mathbf{x}_d(t) - \mathbf{x}_k(t)\| \leq \int_0^t c_3 e^{c_2(t-\tau)} \|\Delta u_k(\tau)\| d\tau \quad (3.6.15)$$

式中 $c_2 = \sup_{t \in [0, T]} (k_f + k_b \|u_d(t)\|)$, $c_3 = \sup_{t \in [0, T]} \|b(\mathbf{x}_k(t))\|$ 。 k_f, k_b 分别为 f, b 的 Lipschitz 常数。将式(3.6.15)代入式(3.6.14), 则

$$\|\Delta u_{k+1}(t)\| \leq \rho \|\Delta u_k(t)\| + c_1 c_3 \int_0^t e^{c_2(t-\tau)} \|\Delta u_k(\tau)\| d\tau$$

因此, 由 λ 范数的定义可知

$$\|\Delta u_{k+1}\|_\lambda \leq (\rho + c_1 c_3 \frac{1 - e^{(c_2 - \lambda)T}}{\lambda - c_2}) \|\Delta u_k\|_\lambda \quad (3.6.16)$$

由于 $\rho < 1$, 故此可找到 $\lambda > c_2$ 使得 $\bar{\rho} < 1$, 所以 $\|\Delta u_k\|_\lambda \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$)。进一步地, 由式(3.6.15)及式(3.6.5b)可推知输出误差一致收敛, 即 $\lim_{k \rightarrow \infty} e_k(t) = 0$ ($t \in [0, T]$)。上述推导给出了学习律(3.6.8)的收敛性充分条件。

下面, 考虑 MIMO 非线性系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{B}(\mathbf{x}(t))\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) \end{cases} \quad (3.6.17)$$

这里 $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t) \in \mathbf{R}^m$; $\mathbf{f} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{B} = [b_1, \dots, b_m] \in$

$\mathbf{R}^{n \times m}$, $\mathbf{g} = [g_1, \dots, g_m]^T \in \mathbf{R}^m$ 均是 \mathbf{R}^n 上的光滑函数。

在给出收敛性定理之前, 定义 MIMO 非线性系统(3.6.17) 的相对度。

称系统(3.6.17) 在点 \mathbf{x}_0 的相对度为 $\mathbf{r} = \{r_1, \dots, r_m\}$, 如果对于 \mathbf{x}_0 的一个邻域中的所有 \mathbf{x} 有

$$L_{b_j} L_f^k g_i(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.6.18a)$$

$$(1 \leq j, i \leq m; k < r_i - 1)$$

且当 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ 时

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} L_{b_1} L_f^{r_1-1} g_1(\mathbf{x}) & \cdots & L_{b_n} L_f^{r_1-1} g_1(\mathbf{x}) \\ \cdots & & \\ L_{b_1} L_f^{r_m-1} g_m(\mathbf{x}) & \cdots & L_{b_n} L_f^{r_m-1} g_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (3.6.18b)$$

非奇异。

对所有的 $\mathbf{x}(t) (t \in [0, T])$, 设系统(3.6.17) 的相对度为 $\{r_1, \dots, r_m\}$ 。 \mathbf{f} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{g} 关于 \mathbf{x} 满足一致全局 Lipschitz 条件, 并且

$$\left\| \begin{bmatrix} L_f^{r_1} g_1(\mathbf{x}_d) - L_f^{r_1} g_1(\mathbf{x}_k) \\ \vdots \\ L_f^{r_m} g_m(\mathbf{x}_d) - L_f^{r_m} g_m(\mathbf{x}_k) \end{bmatrix} \right\| \leq k_1 \|\mathbf{x}_d - \mathbf{x}_k\|$$

$$\|\mathbf{D}(\mathbf{x}_d) - \mathbf{D}(\mathbf{x}_k)\| \leq k_2 \|\mathbf{x}_d - \mathbf{x}_k\|$$

给定可达的期望轨迹 $\mathbf{y}_d(t) = [y_{1,d}(t), \dots, y_{m,d}(t)]^T$, $y_{i,d}(t)$ 是 r_i 阶连续可微的。采用学习律

$$\mathbf{u}_{k+1}(t) = \mathbf{u}_k(t) + \mathbf{\Gamma}_k(t) \mathbf{e}_k^{(r)}(t) \quad (3.6.19)$$

式中, $\mathbf{e}_k(t) = [e_{1,k}(t), \dots, e_{m,k}(t)]^T$, $e_{i,k}(t) = y_{i,d}(t) - y_{i,k}(t)$; $\mathbf{\Gamma}_k(t) \in \mathbf{R}^{m \times m}$ 为有界增益矩阵。

定理 3.6.1^[23] 对于满足假设的系统(3.6.17)施加学习律(3.6.19)。如果

$$\|\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}_k(t) \mathbf{D}(\mathbf{x}_k(t))\| \leq \rho < 1 \quad (t \in [0, T]) \quad (3.6.20)$$

那么, 当 $\mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}_d(0) (k = 0, 1, 2, \dots)$ 时, 输出误差一致收敛, 即 $\lim_{k \rightarrow \infty} e_k(t) = 0 (t \in [0, T])$ 。

证明 由相对度的定义, 可给出 $e_{i,k}(t) (1 \leq i \leq m)$ 各阶导数的表达式

$$\begin{aligned} e_{i,k}^{(j)} &= L_f^j g_i(\mathbf{x}_d) - L_f^j g_i(\mathbf{x}_k) \quad (j \leq r_i - 1) \\ e_{i,k}^{(r_i)} &= L_f^{r_i} g_i(\mathbf{x}_d) - L_f^{r_i} g_i(\mathbf{x}_k) + \\ &\quad [L_{b_1} L_f^{r_1-1} g_1(\mathbf{x}_d), \dots, L_{b_m} L_f^{r_m-1} g_m(\mathbf{x}_d)] \mathbf{u}_d - \\ &\quad [L_{b_1} L_f^{r_1-1} g_1(\mathbf{x}_k), \dots, L_{b_m} L_f^{r_m-1} g_m(\mathbf{x}_k)] \mathbf{u}_k \quad (3.6.21) \end{aligned}$$

这样, 第 $k+1$ 次迭代时的控制误差可写成

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_d - \mathbf{u}_{k+1} &= \mathbf{u}_d - \mathbf{u}_k - \mathbf{\Gamma}_k \mathbf{e}_k^{(r)} = \\ &\quad \mathbf{u}_d - \mathbf{u}_k - \mathbf{\Gamma}_k \begin{bmatrix} L_f^{r_1} g_1(\mathbf{x}_d) - L_f^{r_1} g_1(\mathbf{x}_k) \\ \vdots \\ L_f^{r_m} g_m(\mathbf{x}_d) - L_f^{r_m} g_m(\mathbf{x}_k) \end{bmatrix} - \\ &\quad \mathbf{\Gamma}_k [\mathbf{D}(\mathbf{x}_d) \mathbf{u}_d - \mathbf{D}(\mathbf{x}_k) \mathbf{u}_k] - \\ &\quad [\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}_k \mathbf{D}(\mathbf{x}_k)] (\mathbf{u}_d - \mathbf{u}_k) - \\ &\quad \mathbf{\Gamma}_k \begin{bmatrix} L_f^{r_1} g_1(\mathbf{x}_d) - L_f^{r_1} g_1(\mathbf{x}_k) \\ \vdots \\ L_f^{r_m} g_m(\mathbf{x}_d) - L_f^{r_m} g_m(\mathbf{x}_k) \end{bmatrix} - \\ &\quad \mathbf{\Gamma}_k [\mathbf{D}(\mathbf{x}_d) - \mathbf{D}(\mathbf{x}_k)] \mathbf{u}_d \quad (3.6.22) \end{aligned}$$

式(3.6.22)两端取范数, 并利用 Lipschitz 条件, 可得

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_d - \mathbf{u}_{k+1}\| &\leq \\ &\quad \|\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}_k \mathbf{D}(\mathbf{x}_k)\| \|\mathbf{u}_d - \mathbf{u}_k\| + \|\mathbf{\Gamma}_k\| k_1 \|\mathbf{x}_d - \mathbf{x}_k\| + \\ &\quad \|\mathbf{\Gamma}_k\| k_2 \|\mathbf{x}_d - \mathbf{x}_k\| \|\mathbf{u}_d\| = \\ &\quad \|\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}_k \mathbf{D}(\mathbf{x}_k)\| \|\mathbf{u}_d - \mathbf{u}_k\| + \\ &\quad \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{\Gamma}_k\| (k_1 + k_2 \|\mathbf{u}_d\|) \|\mathbf{x}_d - \mathbf{x}_k\| \quad (3.6.23) \end{aligned}$$

至此, 容易证得该定理。

3.6.2 离散时间系统

下面, 考察非线性离散系统

$$\left. \begin{aligned} x(t+1) &= f(x(t)) + B(x(t))u(t) \\ y(t) &= g(x(t)) \end{aligned} \right\} \quad (3.6.24)$$

式中 $t \in [0, T]$, $[0, T]$ 表示 $\{0, 1, \dots, T\}$; $x(t) \in \mathbf{R}^n$, $u(t)$ 、 $y(t) \in \mathbf{R}^m$; $f \in \mathbf{R}^n$, $B \in \mathbf{R}^{n \times m}$, $g = [g_1, \dots, g_m]^T$ 均是 \mathbf{R}^n 上的光滑函数。

称 MIMO 非线性系统 (3.6.24) 在 (x_0, u_0) 处具有相对度 $r = \{r_1, \dots, r_m\}$, 如果对于 (x_0, u_0) 邻域中的 (x, u) 有

$$(i) \quad \frac{\partial}{\partial u} g_l \circ f^j (f(x) + B(x)u) = 0^T \quad (1 \leq i \leq m, j < r_l - 1)$$

这里, $g \circ f$ 表示复合函数; f^l 记 l 次复合函数。

(ii) $m \times m$ 维矩阵

$$D(x, u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u} g_1 \circ f^{r_1-1} (f(x) + B(x)u) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial u} g_m \circ f^{r_m-1} (f(x) + B(x)u) \end{bmatrix} \quad (3.6.25)$$

在 $(x, u) = (x^0, u^0)$ 处非奇异。

假设对所有的 $x \in \mathbf{R}^n$, $u \in \mathbf{R}^m$, 系统 (3.6.24) 的相对度为 $r = \{r_1, \dots, r_m\}$, 且对每个 $l = 1, 2, \dots, m$

$$\frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j} g_l \circ f^{r_l-1} (f(x) + B(x)u) = 0 \quad (3.6.26)$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, m)$$

在该假设下, 知 $\frac{\partial}{\partial u} g_l \circ f^{r_l-1} (f(x) + B(x)u)$ 与 u 无关, 故 $D(x, u) = D(x)$ 。假设 f, B, g 关于 x 满足一致全局 Lipschitz 条件, 其 Lipschitz 常数分别为 $k_h, h \in \{f, B, g\}$; $D(x)$ 以及 $g_j \circ f^{r_j}(x)$ (j

$= 1, 2, \dots, m)$ 关于 x 满足一致全局 Lipschitz 条件, 即存在常数 k_1, k_2 , 使得

$$\left\| \begin{bmatrix} g_1 \circ f^{r_1}(x_d(t)) - g_1 \circ f^{r_1}(x_k(t)) \\ \vdots \\ g_m \circ f^{r_m}(x_d(t)) - g_m \circ f^{r_m}(x_k(t)) \end{bmatrix} \right\|$$

$$\leq k_1 \|x_d(t) - x_k(t)\|$$

$$\|D(x_d(t)) - D(x_k(t))\| \leq k_2 \|x_d(t) - x_k(t)\|$$

采用下述学习律

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \Gamma_k(t) \begin{bmatrix} e_{1,k}(t + r_1) \\ \vdots \\ e_{m,k}(t + r_m) \end{bmatrix} \quad (3.6.27)$$

式中 $\Gamma_k: [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^{m \times m}$ 为有界增益矩阵; $e_{l,k}(t) = y_{l,d}(t) - y_{l,k}(t) (t \in [0, T + r_{\max}])$, $r_{\max} = \max_{1 \leq l \leq m} r_l$, $y_{l,d}(t) (t \in [0, T + r_{\max}])$ 为给定的可达期望轨迹。由于控制 $u_k(0)$ 不会影响 $y_{l,k}(t) (t \in [0, r_l - 1])$, 故假设 $y_{l,d}(t) = y_{l,k}(t) (t \in [0, r_l - 1])$ 。否则, 期望轨迹不可达。

定理 3.6.2 对于满足假设的系统(3.6.24)施加学习律(3.6.27)。若

$$\|I - \Gamma_k(t)D(x_k(t))\| \leq \rho < 1 \quad (t \in [0, T]) \quad (3.6.28)$$

则当 $x_k(0) = x_d(0) (k = 0, 1, 2, \dots)$ 时, $\lim_{k \rightarrow \infty} e_k(t) = 0 (t \in [0, T])$ 。

证明 由相对度定义和式(3.6.26)可知, 对于 $j = 1, 2, \dots,$

m

$$e_{j,k}(t + i) = g_j \circ f^i(x_d(t)) - g_j \circ f^i(x_k(t)) (0 \leq i \leq r_j - 1)$$

$$\begin{aligned} e_{j,k}(t + r_j) &= g_j \circ f^{r_j-1}(f(x_d(t)) + B(x_d(t))u_d(t)) - \\ &\quad g_j \circ f^{r_j-1}(f(x_k(t)) + B(x_k(t))u_k(t)) = \\ &\quad \int_0^{u_d(t)} \frac{\partial}{\partial u_d} g_j \circ f^{r_j-1}(f(x_d(t)) + B(x_d(t))u_d) du_d + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& g_j \circ f^{r_j-1}(f(x_d(t)) + B(x_d(t))u_d(t))|_{u_d(t)=0} - \\
& \int_0^{u_k(t)} \frac{\partial}{\partial u_k} g_j \circ f^{r_j-1}(f(x_k(t)) + B(x_k(t))u_k) du_k - \\
& g_j \circ f^{r_j-1}(f(x_k(t)) + B(x_k(t))u_k(t))|_{u_k(t)=0} = \\
& \left[\frac{\partial}{\partial u_d} g_j \circ f^{r_j-1}(f(x_d(t)) + B(x_d(t))u_d) \right] u_d(t) - \\
& \left[\frac{\partial}{\partial u_k} g_j \circ f^{r_j-1}(f(x_k(t)) + B(x_k(t))u_k) \right] u_k(t) + \\
& g_j \circ f^{r_j}(x_d(t)) - g_j \circ f^{r_j}(x_k(t)) \quad (3.6.29)
\end{aligned}$$

这样,第 $k+1$ 次迭代时的控制误差可写成

$$\begin{aligned}
& u_d(t) - u_{k+1}(t) = \\
& u_d(t) - u_k(t) - \Gamma_k(t) \begin{bmatrix} e_{1,k}(t+r_1) \\ \vdots \\ e_{m,k}(t+r_m) \end{bmatrix} = \\
& u_d(t) - u_k(t) - \Gamma_k(t) [D(x_d(t))u_d(t) - D(x_k(t))u_k(t)] - \\
& \Gamma_k(t) \begin{bmatrix} g_1 \circ f^{r_1}(x_d(t)) - g_1 \circ f^{r_1}(x_k(t)) \\ \vdots \\ g_m \circ f^{r_m}(x_d(t)) - g_m \circ f^{r_m}(x_k(t)) \end{bmatrix} = \\
& [I - \Gamma_k(t)D(x_k(t))](u_d(t) - u_k(t)) - \\
& \Gamma_k(t)(D(x_d(t)) - D(x_k(t))u_d - \\
& \Gamma_k(t) \begin{bmatrix} g_1 \circ f^{r_1}(x_d(t)) - g_1 \circ f^{r_1}(x_k(t)) \\ \vdots \\ g_m \circ f^{r_m}(x_d(t)) - g_m \circ f^{r_m}(x_k(t)) \end{bmatrix} \quad (3.6.30)
\end{aligned}$$

(3.6.30)两端取范数,有

$$\begin{aligned}
& \|\Delta u_{k+1}(t)\| \leq \\
& \|I - \Gamma_k(t)D(x_k(t))\| \|\Delta u_k(t)\| + k_1 \|\Gamma_k(t)\| \|\Delta x_k(t)\| + \\
& k_2 \|\Gamma_k(t)\| \|\Delta x_k(t)\| \|u_d(t)\| = \\
& \|\rho_k(t)\| \|\Delta u_k(t)\| + c_{1,k}(t) \|\Delta x_k(t)\| \quad (3.6.31)
\end{aligned}$$

式中 $\Delta \mathbf{u}_k(t) = \mathbf{u}_d(t) - \mathbf{u}_k(t)$, $\Delta \mathbf{x}_k(t) = \mathbf{x}_d(t) - \mathbf{x}_k(t)$; $\boldsymbol{\rho}_k(t) = \mathbf{I} \cdot \mathbf{F}_k(t) \mathbf{D}(\mathbf{x}_k(t))$, $c_{1,k}(t) = \| \mathbf{F}_k(t) \| (k_1 + k_2 \| \mathbf{u}_d(t) \|)$ 。由式(3.6.24)及初始条件 $\mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}_d(0)$ 可知

$$\begin{aligned} & \| \Delta \mathbf{x}_k(t+1) \| = \\ & \| \mathbf{f}(\mathbf{x}_d(t)) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_k(t)) + [\mathbf{B}(\mathbf{x}_d(t)) - \mathbf{B}(\mathbf{x}_k(t))] \mathbf{u}_d(t) + \\ & \mathbf{B}(\mathbf{x}_k(t)) \Delta \mathbf{u}_k(t) \| \leqslant \\ & (k_f + k_B \| \mathbf{u}_d(t) \|) \| \Delta \mathbf{x}_k(t) \| + \| \mathbf{B}(\mathbf{x}_k(t)) \| \| \Delta \mathbf{u}_k(t) \| + \\ & c_3(t) \| \Delta \mathbf{x}_k(t) \| + c_{2,k}(t) \| \Delta \mathbf{u}_k(t) \| \end{aligned}$$

式中 $c_3(t) = k_f + k_B \| \mathbf{u}_d(t) \|$, $c_{2,k}(t) = \| \mathbf{B}_k(t) \parallel$ 。因此

$$\begin{aligned} & \| \Delta \mathbf{x}_k(t) \| \leqslant \\ & \sum_{i=1}^t c_{2,k}(i-1) \prod_{j=i}^{t-1} c_3(j) \| \Delta \mathbf{u}_k(i-1) \| \quad (3.6.32) \end{aligned}$$

将式(3.6.32)代入式(3.6.31), 有

$$\begin{aligned} \| \Delta \mathbf{u}_{k+1}(t) \| & \leqslant \| \boldsymbol{\rho}_k(t) \| \| \Delta \mathbf{u}_k(t) \| + \\ & c_{1,k}(t) \sum_{i=1}^t c_{2,k}(i-1) \prod_{j=i}^{t-1} c_3(j) \| \Delta \mathbf{u}_k(i-1) \| = \\ & \| \boldsymbol{\rho}_k(t) \| \| \Delta \mathbf{u}_k(t) \| + \sum_{i=0}^{t-1} C_{i,k}(t) \| \Delta \mathbf{u}_k(i) \| \end{aligned}$$

式中 $C_{i,k}(t) = c_{1,k}(t) c_{2,k}(i) \prod_{j=i+1}^{t-1} c_3(j)$ 。将上式由 $t=0$ 到 $t=T$ 逐项写出

$$\begin{aligned} \| \Delta \mathbf{u}_{k+1}(0) \| & \leqslant \| \boldsymbol{\rho}_k(0) \| \| \Delta \mathbf{u}_k(0) \| \\ \| \Delta \mathbf{u}_{k+1}(1) \| & \leqslant \| \boldsymbol{\rho}_k(1) \| \| \Delta \mathbf{u}_k(1) \| + C_{0,k}(1) \| \Delta \mathbf{u}_k(0) \| \\ & \vdots \\ \| \Delta \mathbf{u}_{k+1}(T) \| & \leqslant \| \boldsymbol{\rho}_k(T) \| \| \Delta \mathbf{u}_k(T) \| + \sum_{i=0}^{T-1} C_{i,k}(T) \| \Delta \mathbf{u}_k(i) \| \end{aligned}$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \| \Delta \mathbf{u}_{k+1}(0) \| \\ \vdots \\ \| \Delta \mathbf{u}_{k+1}(T) \| \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Psi}_k \begin{bmatrix} \| \Delta \mathbf{u}_k(0) \| \\ \vdots \\ \| \Delta \mathbf{u}_k(T) \| \end{bmatrix} \quad (3.6.33)$$

式中

$$\Psi_k = \begin{bmatrix} \|\mathbf{p}_k(0)\| & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ C_{0,k}(1) & \|\mathbf{p}_k(1)\| & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ C_{0,k}(T) & C_{1,k}(T) & \cdots & C_{T-1,k}(T) & \|\mathbf{p}_k(T)\| \end{bmatrix}$$

如果矩阵 Ψ_k 的所有特征值位于单位圆内, 那么 $\|\Delta \mathbf{u}_k(t)\| \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty), (0 \leq t \leq T)$ 。由于 Ψ_k 为下三角矩阵, 故当 $\|\mathbf{I} - \mathbf{F}_k(t)\mathbf{D}(\mathbf{x}_k(t))\| < 1 (0 \leq t \leq T)$ 时, 矩阵 Ψ_k 的所有特征值位于单位圆内。因此, 结合式(3.6.32)、式(3.6.24)两式可证得, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\mathbf{x}_k(t) \rightarrow \mathbf{x}_d(t), \mathbf{e}_k(t) \rightarrow 0 (0 \leq t \leq T)$ 。证毕。

第四章 鲁棒迭代学习控制

由于迭代学习控制理论的提出有着浓厚的工程背景,因此人们注意到仅仅在无干扰条件下讨论收敛性是不够的,还应讨论存在各种干扰的情形下系统的跟踪性能。例如,这种控制技术要求从期望初始点起进行迭代。然而,实际的重复定位操作会导致系统存在初始偏移,Arimoto及其合作者最早提出迭代学习控制系统的稳定性问题,它讨论初始偏移对系统跟踪性能的影响^[38]。具体地说,一个迭代学习控制系统是稳定的,是指当初始偏移有界时,由学习控制算法产生的迭代轨迹与期望轨迹的偏差有界;而当初始偏移被消除时,迭代轨迹与期望轨迹的偏差也会被消除。

一个实际运行的迭代学习控制系统除了存在初始偏移外,还或多或少存在状态扰动、量测噪声、输入扰动等各种干扰。鲁棒性问题讨论存在各种干扰时迭代学习控制系统的跟踪性能。具体地说,一个迭代学习控制系统是鲁棒的,是指系统在各种有界干扰的影响下,其迭代轨迹能收敛到期望轨迹的邻域内;而当这些干扰被消除时,迭代轨迹会收敛于期望轨迹。由此看来,迭代学习控制系统的鲁棒性问题是比稳定性问题更广泛一些的问题。从目前已获得的鲁棒性结果来看,有些学习律作用下的系统是鲁棒的。但也确实存在一些学习律,在干扰的影响下,系统的迭代轨迹与期望轨迹的偏差不是有界的。例如,Heinzinger等给出了由初始偏移造成系统迭代发散的例子^[39]。

本章首先讨论带遗忘因子的学习律(这里称其为遗忘因子学习律)的鲁棒性,其中分别讨论PID型和P型两种学习律。在实施遗忘因子学习律时,为保证迭代收敛性,随着迭代次数的增加需不断调整初始修正项。直接的方法是逐渐减小初始修正项的影响。选

择学习算法给出了一种确定修正项的方法,即不断调整初始控制的方法。这种算法不要求将初始修正项衰减为零。

迭代学习控制算法的收敛性分析通常是在无干扰情形下进行的。而鲁棒性分析指出,当干扰消除时,迭代算法才会收敛。现在的问题是,在什么样的干扰环境下,迭代学习控制算法是收敛的?我们称其为迭代学习控制算法的鲁棒收敛性问题。4.4节给出了一些初步的结果。

前面几章讨论的学习律仅具有开环结构(通常称为开环学习律),由此构成的系统为开环控制系统。显然,这类学习律对系统无镇定作用。这一章讨论的高增益反馈学习律和反馈-前馈学习控制算法,相应的控制系统具有闭环结构。值得指出的是,单纯采用高增益反馈的学习律,欲达到较高的跟踪精度,往往需要足够高的增益。这时,系统中存在的饱和执行器会影响系统的跟踪性能。而反馈-前馈迭代学习控制算法弥补了这一点,其中反馈环的控制任务只是镇定系统,而高精度跟踪任务交给前馈环实现。它是一种开闭环配合的学习控制算法。

4.1 PID型遗忘因子学习律

通过在PID型学习律中引入遗忘因子,构造PID型遗忘因子学习律,这一节讨论在这种学习律作用下的一类非线性系统的鲁棒性。

考虑下述受扰非线性系统

$$\dot{x}_k(t) = f(x_k(t), t) + B(x_k(t), t)u_k(t) + w_k(t) \quad (4.1.1a)$$

$$y_k(t) = g(x_k(t), t) + v_k(t) \quad (4.1.1b)$$

式中 $t \in [0, T]$, k 为迭代次数, $x_k(t) \in \mathbf{R}^n$, $u_k(t) \in \mathbf{R}^r$, $y_k(t) \in \mathbf{R}^m$ 分别为系统的状态、控制、输出向量; $w_k(t) \in \mathbf{R}^n$, $v_k(t) \in \mathbf{R}^m$ 分别为状态扰动和量测噪声; $f: \mathbf{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^n$, $B: \mathbf{R}^n \times [0, T]$

$\rightarrow \mathbf{R}^{n \times r}$ 关于 t 分段连续, $\mathbf{g}; \mathbf{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^m$ 关于 \mathbf{x} 和 t 可微。

当系统受到输入扰动 $\boldsymbol{\eta}_k(t)$ ($t \in [0, T]$) 时, $\mathbf{u}_k(t) + \boldsymbol{\eta}_k(t)$ 作为输入信号作用在系统上。记 $\mathbf{w}_k(t) = \mathbf{B}(\mathbf{x}_k(t), t)\boldsymbol{\eta}_k(t)$, 式 (4.1.1a) 中的 $\mathbf{w}_k(t)$ 不仅描述了状态扰动, 也描述了输入扰动。

对于系统 (4.1.1) 做以下假设:

(1) 对于系统 (4.1.1), 当 $\mathbf{w}(t), \mathbf{v}(t) = 0$ ($t \in [0, T]$) 时, 记 \mathbf{S} 为状态映射 $(\mathbf{x}(0), \mathbf{u}(t)) (t \in [0, T]) \rightarrow (\mathbf{x}(t)) (t \in [0, T])$, \mathbf{O} 为输出映射 $(\mathbf{x}(0), \mathbf{u}(t)) (t \in [0, T]) \rightarrow (\mathbf{y}(t)) (t \in [0, T])$ 。映射 \mathbf{S} 和 \mathbf{O} 是一一对应的。

给定可微的期望轨迹 $\mathbf{y}_d(t)$ ($t \in [0, T]$)。显然, 映射 \mathbf{S} 和 \mathbf{O} 是一一对应的保证了该期望轨迹是可达的。本节记 $\mathbf{u}_d(t)$ ($t \in [0, T]$) 为产生该期望轨迹的期望控制, 它满足

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_d(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_d(t), t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}_d(t), t)\mathbf{u}_d(t) \\ \mathbf{y}_d(t) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}_d(t), t)\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{x}_d(t)$ ($t \in [0, T]$) 为相应的期望状态, $\mathbf{x}_d(0)$ 为期望初态。

(2) $\mathbf{f}, \mathbf{B}, \mathbf{g}_x, \mathbf{g}_t$ 在 $[0, T]$ 上关于 \mathbf{x} 满足一致全局 Lipschitz 条件, 且 Lipschitz 常数为 k_h ($h \in \{\mathbf{f}, \mathbf{B}, \mathbf{g}_x, \mathbf{g}_t\}$)。

(3) \mathbf{g}_x, \mathbf{B} 在 $\mathbf{R}^n \times [0, T]$ 上有界, 且其界为 b_h ($h \in \{\mathbf{g}_x, \mathbf{B}\}$)。

(4) 存在 $\beta > 0$, 使得 $|\lambda((\mathbf{g}_x \mathbf{B})^T \mathbf{g}_x \mathbf{B})| \geq \beta$ 。这里, $\lambda((\mathbf{g}_x \mathbf{B})^T \mathbf{g}_x \mathbf{B})$ 表示矩阵 $(\mathbf{g}_x \mathbf{B})^T \mathbf{g}_x \mathbf{B}$ 的特征值。

(5) 初态偏移满足 $\|\mathbf{x}_d(0) - \mathbf{x}_k(0)\| \leq b_{x0}$ 。状态干扰和量测噪声满足 $\|\mathbf{w}_k(t)\| \leq b_w$, $\|\mathbf{v}_k(t)\| \leq b_{v1}$, $\|\dot{\mathbf{v}}_k(t)\| \leq b_{v2}$ 。

这里, 假设 (3) 中 \mathbf{g}_x 有界蕴涵 \mathbf{g} 在 $[0, T]$ 上关于 \mathbf{x} 满足一致全局 Lipschitz 条件。假设 (4) 蕴涵存在有界增益矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{y}, t)$, 使得

$$\begin{aligned}\|(1-\gamma)\mathbf{I} - \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{y}, t)\mathbf{g}_x(\mathbf{x}, t)\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)\| &\leq \rho < 1 \quad (4.1.2) \\ (\mathbf{y}, \mathbf{x}, t) &\in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \times [0, T] \quad (0 \leq \gamma < 1)\end{aligned}$$

采用 PID 型遗忘因子学习律

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_{k+1}(t) = & (1 - \gamma)\mathbf{u}_k(t) + \gamma\mathbf{u}_0(t) + \\
& \mathbf{F}(\mathbf{y}_k(t), t)\dot{\mathbf{e}}_k(t) - \mathbf{L}(\mathbf{y}_k(t), t)\mathbf{e}_k(t) + \\
& \mathbf{\Psi}(\mathbf{y}_k(t), t)\int_0^t \mathbf{e}_k(\tau)d\tau \quad (4.1.3)
\end{aligned}$$

式中 $0 \leq \gamma < 1$ 是遗忘因子; 学习增益矩阵 $\mathbf{F}: \mathbf{R}^m \times [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^{r \times m}$, $\mathbf{L}: \mathbf{R}^m \times [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^{r \times m}$, $\mathbf{\Psi}: \mathbf{R}^m \times [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^{r \times m}$ 有界。选取分段连续的初始控制 $\mathbf{u}_0(t)$ 。对于所有的 k , 控制 $\mathbf{u}_k(t)$ 分段连续。当学习律中的 $\mathbf{u}_0(t)$ 适当选取时, 初始修正项 $\gamma\mathbf{u}_0(t)$ 可以避免迭代轨迹的大幅度摆动, 从而可以加快迭代收敛。

定理 4.1.1 给定可达的期望轨迹 $\mathbf{y}_d(t) (t \in [0, T])$ 。如果系统(4.1.1)满足假设(1)~(5), 那么在学习律(4.1.3)的作用下, 对于 $t \in [0, T]$ 以及 $k = 0, 1, 2, \dots$, $\mathbf{u}_d(t) - \mathbf{u}_k(t)$, $\mathbf{x}_d(t) - \mathbf{x}_k(t)$, $\mathbf{y}_d(t) - \mathbf{y}_k(t)$ 有界; 当 $\gamma, b_{x0}, b_w, b_{v1}, b_{v2} \rightarrow 0$ 时, $\|\mathbf{u}_d(t) - \mathbf{u}_k(t)\|, \|\mathbf{x}_d(t) - \mathbf{x}_k(t)\|, \|\mathbf{y}_d(t) - \mathbf{y}_k(t)\| \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$)。

证明 由式(4.1.1a)可知

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}_d - \mathbf{x}_k\| = & \|\mathbf{x}_d(0) - \mathbf{x}_k(0) + \\
& \int_0^t \{(\mathbf{f}_d + \mathbf{B}_d\mathbf{u}_d) - (\mathbf{f}_k + \mathbf{B}_k\mathbf{u}_k - \mathbf{w}_k)\} d\tau\| \leq \\
& \|\mathbf{x}_d(0) - \mathbf{x}_k(0)\| + \\
& \int_0^t \{\|\mathbf{f}_d - \mathbf{f}_k\| + \|\mathbf{B}_d - \mathbf{B}_k\| \|\mathbf{u}_d\| + \\
& \|\mathbf{B}_k\| \|\mathbf{u}_d - \mathbf{u}_k\| + \|\mathbf{w}_k\|\} d\tau
\end{aligned}$$

利用 Lipschitz 条件和有界性, 可得

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}_d - \mathbf{x}_k\| \leq & b_{x0} + \int_0^t \{ (k_f + k_B b_{ud}) \|\mathbf{x}_d - \mathbf{x}_k\| + \\
& b_B \|\mathbf{u}_d - \mathbf{u}_k\| + b_w \} d\tau
\end{aligned}$$

式中 $b_{ud} = \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{u}_d(t)\|$ 。记 $c_1 = k_f + k_B b_{ud}$ 。利用 Bellman-Gronwall 引理得

$$\|x_d - x_k\| \leq b_{x0} e^{c_1 t} + \int_0^t e^{c_1(t-\tau)} (b_B \|u_d - u_k\| + b_w) d\tau \quad (4.1.4)$$

记 $\Delta u_k = u_d - u_k$ 。考察第 $k+1$ 次迭代时的控制误差

$$\begin{aligned} \Delta u_{k+1} = & u_d - (1-\gamma)u_k - \gamma u_0 - \Gamma_k \dot{e}_k - L_k e_k - \Psi_k \int_0^t e_k d\tau = \\ & (1-\gamma)\Delta u_k + \gamma \Delta u_0 - \Gamma_k \{g_{xd}(f_d + B_d u_d) + g_{td} - \\ & g_{xk}(f_k + B_k u_k + w_k) - g_{tk} - \dot{v}_k\} - \\ & L_k(g_d - g_k - v_k) - \Psi_k \int_0^t (g_d - g_k - v_k) d\tau = \\ & [(1-\gamma)I - \Gamma_k g_{xk} B_k] \Delta u_k + \gamma \Delta u_0 - \\ & \Gamma_k \{g_{td} - g_{tk} + g_{xd}(f_d + B_d u_d) - \\ & g_{xk}(f_k + B_k u_k + w_k) - \dot{v}_k\} - \\ & L_k(g_d - g_k - v_k) - \Psi_k \int_0^t (g_d - g_k - v_k) d\tau \quad (4.1.5) \end{aligned}$$

式(4.1.5)两端取范数

$$\begin{aligned} \|\Delta u_{k+1}\| \leq & \|(1-\gamma)I - \Gamma_k g_{xk} B_k\| \|\Delta u_k\| + \gamma \|\Delta u_0\| + \\ & \|\Gamma_k\| \{ \|g_{td} - g_{tk}\| + \|g_{xd} - g_{xk}\| \|f_d + B_d u_d\| + \\ & \|g_{xk}\| (\|f_d - f_k\| + \|B_d - B_k\| \|u_d\| + \|w_k\|) + \\ & \|\dot{v}_k\| \} + \|L_k\| (\|g_d - g_k\| + \|v_k\|) + \\ & \|\Psi_k\| \int_0^t (\|g_d - g_k\| + \|v_k\|) d\tau \leq \\ & \rho \|\Delta u_k\| + \gamma \|\Delta u_0\| + \\ & b_I \{ k_{gI} \|x_d - x_k\| + k_{gB} b_d \|x_d - x_k\| + \\ & b_{gx} (k_f \|x_d - x_k\| + k_B b_{ud} \|x_d - x_k\| + b_w) + b_{v2} \} + \\ & b_L (k_g \|x_d - x_k\| + b_{v1}) + \\ & b_\Psi \int_0^t (k_g \|x_d - x_k\| + b_{v1}) d\tau \quad (4.1.6) \end{aligned}$$

式中 $b_d = \sup_{t \in [0, T]} \|f_d + B_d u_d\|$, b_I 、 b_L 、 b_Ψ 分别为矩阵 Γ 、 L 、 Ψ 的界。记 $c_2 = b_I \{ k_{gI} + k_{gx} b_d + b_{gx} (k_f + k_B b_{ud}) \} + b_L k_g$ 。式(4.1.

6)可写成

$$\begin{aligned} \|\Delta \mathbf{u}_{k+1}\| &\leq \rho \|\Delta \mathbf{u}_k\| + \gamma \|\Delta \mathbf{u}_0\| + \\ &c_2 \|x_d - x_k\| + b_{\Psi} k_g \int_0^t \|x_d - x_k\| d\tau + \\ &b_I b_{gx} b_w + b_I b_{v2} + b_L b_{v1} + b_{\Psi} b_{v1} T \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

记式(4.1.4)的右端为 $\text{RHS}(t)$ 。显然, $\text{RHS}(t)$ 为单调函数。即对于 $\tau \in [0, t]$

$$\text{RHS}(\tau) \leq \text{RHS}(t)$$

将式(4.1.4)代入式(4.1.7),并应用 RHS 的单调性质,可得

$$\begin{aligned} \|\Delta \mathbf{u}_{k+1}\| &\leq \rho \|\Delta \mathbf{u}_k\| + \gamma \|\Delta \mathbf{u}_0\| + \\ &c_3 b_B \int_0^t e^{c_1(t-\tau)} \|\Delta \mathbf{u}_k\| d\tau + \\ &c_3 b_{x0} e^{c_1 t} + c_3 b_w \int_0^t e^{c_1(t-\tau)} d\tau + \\ &b_I b_{gx} b_w + b_I b_{v2} + b_L b_{v1} + b_{\Psi} b_{v1} T \end{aligned}$$

$c_3 = c_2 + b_{\Psi} k_g T$ 。记 $c_4 = \max\{c_3 b_B, c_1\}$ 。上式两端同乘 $e^{-\lambda t}$, 则

$$\begin{aligned} e^{-\lambda t} \|\Delta \mathbf{u}_{k+1}\| &\leq \\ \rho e^{-\lambda t} \|\Delta \mathbf{u}_k\| &+ \gamma e^{-\lambda t} \|\Delta \mathbf{u}_0\| + c_4 \int_0^t e^{(c_4-\lambda)(t-\tau)} e^{-\lambda \tau} \|\Delta \mathbf{u}_k\| d\tau + \\ c_3 b_{x0} e^{(c_1-\lambda)t} &+ c_3 b_w \int_0^t e^{(c_1-\lambda)(t-\tau)} e^{-\lambda \tau} d\tau + \\ e^{-\lambda t} \{ &b_I b_{gx} b_w + b_I b_{v2} + b_L b_{v1} + b_{\Psi} b_{v1} T \} \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

式(4.1.8)两端取 λ 范数 ($\lambda > c_4$), 可得

$$\begin{aligned} \|\Delta \mathbf{u}_{k+1}\|_{\lambda} &\leq (\rho + c_4 \frac{1 - e^{(c_4-\lambda)T}}{\lambda - c_4}) \|\Delta \mathbf{u}_k\|_{\lambda} + \gamma \|\Delta \mathbf{u}_0\|_{\lambda} + \\ &c_3 b_{x0} + c_3 b_w \frac{1 - e^{(c_1-\lambda)T}}{\lambda - c_1} + \\ &b_I b_{gx} b_w + b_I b_{v2} + b_L b_{v1} + b_{\Psi} b_{v1} T \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

记

$$\rho = \rho + c_4 \frac{1 - e^{(c_4-\lambda)T}}{\lambda - c_4}$$

$$\varepsilon = \gamma \|\Delta u_0\|_\lambda + c_3 b_{x0} + c_3 b_w \frac{1 - e^{(c_1 - \lambda)T}}{\lambda - c_1} +$$

$$b_I b_{gx} b_w + b_I b_{v2} + b_L b_{v1} + b_v b_{v1} T$$

式(4.1.9)可写成

$$\|\Delta u_{k+1}\|_\lambda \leq \bar{\rho} \|\Delta u_k\|_\lambda + \varepsilon \quad (4.1.10)$$

因为 $\rho < 1$, 所以可选取足够大的 $\lambda > c_4$ 以使得 $\bar{\rho} < 1$ 。利用引理 A.2.3, 可得

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|\Delta u_k\|_\lambda \leq \frac{\varepsilon}{1 - \bar{\rho}} \quad (4.1.11)$$

另一方面, 式(4.1.4)两端同乘 $e^{-\lambda t}$, 并取 λ 范数, 有

$$\|x_d - x_k\|_\lambda \leq b_{x0} + \frac{1 - e^{(c_1 - \lambda)T}}{\lambda - c_1} (b_B \|\Delta u_k\|_\lambda + b_w) \quad (4.1.12)$$

由式(4.1.11)和式(4.1.12)可知

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|x_d - x_k\|_\lambda \leq b_{x0} + \frac{1 - e^{(c_1 - \lambda)T}}{\lambda - c_1} \left(\frac{b_B \varepsilon}{1 - \bar{\rho}} + b_w \right) \quad (4.1.13)$$

又由式(4.1.1b)可知

$$\|e_k\| \leq \|g_d - g_k\| + \|v_k\| \leq k_g \|x_d - x_k\| + b_{v1} \quad (4.1.14)$$

由式(4.1.13)和式(4.1.14)可知

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|e_k\|_\lambda \leq k_g \left\{ b_{x0} + \frac{1 - e^{(c_1 - \lambda)T}}{\lambda - c_1} \left(\frac{b_B \varepsilon}{1 - \bar{\rho}} + b_w \right) \right\} + b_{v1} \quad (4.1.15)$$

由于 λ 为一有限数, 故当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\gamma \rightarrow 0$ 、 $b_{x0} \rightarrow 0$ 、 $b_w \rightarrow 0$ 、 $b_{v2} \rightarrow 0$ 蕴涵 $\varepsilon \rightarrow 0$ 、 $\|\Delta u_k\|_\lambda \rightarrow 0$ 、 $\|x_d - x_k\| \rightarrow 0$; 又由 $\varepsilon \rightarrow 0$ 、 $b_{v1} \rightarrow 0$ 可推知 $\|e_k\|_\lambda \rightarrow 0$ 。因此, 利用 λ 范数的性质可证得定理。

上述定理表明, 迭代学习控制算法(4.1.3)是鲁棒的。但值得说明的是, 算法收敛性不仅要求消除各种干扰, 而且还要求逐渐减小 $\gamma u_0(t)$ 的作用, 直至取为零。

4.2 P型遗忘因子学习律

首先, 给出一个简单的例子说明 P 型学习律的鲁棒性问题。
对于具有重复运动性质的 MIMO LTI 系统

$$\dot{\mathbf{x}}_k(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_k(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}_k(t)$$

$$\mathbf{y}_k(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}_k(t)$$

给定期望轨迹 $\mathbf{y}_d(t) (t \in [0, T])$, 采用 P 型学习律

$$\mathbf{u}_{k+1}(t) = \mathbf{u}_k(t) + \Phi(\mathbf{y}_d(t) - \mathbf{y}_k(t))$$

设 $\mathbf{y}_d(0) = 0, \mathbf{u}_0 = 0$, 有

$$\mathbf{u}_1(0) = \mathbf{u}_0(0) + \Phi(\mathbf{y}_d(0) - \mathbf{C}\mathbf{x}_0(0))$$

$$= -\Phi\mathbf{C}\mathbf{x}_0(0)$$

$$\mathbf{u}_2(0) = \mathbf{u}_1(0) + \Phi(-\mathbf{C}\mathbf{x}_1(0)) =$$

$$= -\Phi\mathbf{C}(\mathbf{x}_0(0) + \mathbf{x}_1(0))$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{u}_k(0) = \mathbf{u}_{k-1}(0) + \Phi(-\mathbf{C}\mathbf{x}_{k-1}(0)) =$$

$$= -\sum_{i=0}^{k-1} \Phi\mathbf{C}\mathbf{x}_i(0)$$

由此可知, 当初态偏移使得级数 $\sum_{i=0}^{k-1} \Phi\mathbf{C}\mathbf{x}_i(0)$ 发散时, 序列 $\{\mathbf{u}_k(0)\}$ 发散, 从而导致迭代学习控制系统不稳定。从这一例子可以看出, 对于迭代学习控制系统, 特别是对于使用 P 型学习律的系统, 研究初态偏移的影响是有意义的。

下面, 通过在 P 型学习律中引进一遗忘因子, 构造 P 型遗忘因子学习律, 并讨论其鲁棒性。

考虑非线性系统

$$\dot{\mathbf{x}}_k(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k(t), t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}_k(t), t)(\mathbf{u}_k(t) + \mathbf{w}_k(t)) \quad (4.2.1a)$$

$$\mathbf{y}_k(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}_k(t), t) \quad (4.2.1b)$$

式中 $t \in [0, T]$, $x_k(t) \in \mathbf{R}^n$, $u_k(t) \in \mathbf{R}^m$, $y_k(t) \in \mathbf{R}^m$; $f: \mathbf{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^n$, $B: \mathbf{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^{n \times m}$ 关于 t 分段连续; $g: \mathbf{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^m$ 关于 x 和 t 可微, 并记 g_x, g_t 分别为 g 关于 x, t 的偏导数; $w_k(t) \in \mathbf{R}^m$ 为输入干扰。

对系统(4.2.1)做以下假设:

(1) 对于系统(4.2.1), 记 S 为状态映射($x(0), u(t)(t \in [0, T]) \rightarrow (x(t)(t \in [0, T]))$), O 为输出映射($x(0), u(t)(t \in [0, T]) \rightarrow (y(t)(t \in [0, T]))$)。映射 S 和 O 是一对一的。

(2) f, B, g_x, g_t 在 $[0, T]$ 上关于 x 满足一致全局 Lipschitz 条件, 即存在 $k_h < \infty$, $\|h(x_1(t), t) - h(x_2(t), t)\| \leq k_h \|x_1(t) - x_2(t)\|$ ($h \in \{f, B, g_x, g_t\}$)。

(3) B, g_x 在 $\mathbf{R}^n \times [0, T]$ 上一致有界。

(4) $g_x B \in \mathbf{R}^{m \times m}$ 在 $\mathbf{R}^n \times [0, T]$ 上对称正定。因此, 存在 $\gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0$, 使得

$$\gamma_1 I \leq g_x B \leq \gamma_2 I \quad ((x, t) \in \mathbf{R}^n \times [0, T])$$

(5) $\frac{d}{dt}(g_x B)^{-1} \in \mathbf{R}^{m \times m}$ 在 $\mathbf{R}^n \times [0, T]$ 上一致有界, 即存在 $\eta > 0$

$$\left\| \frac{d}{dt}(g_x B)^{-1} \right\| \leq \eta \quad ((x, t) \in \mathbf{R}^n \times [0, T])$$

(6) 初态偏移和输入干扰满足

$$\|x_d(0) - x_k(0)\| \leq b_{x0}$$

$$\|w_k(t)\| \leq b_w \quad (t \in [0, T], k = 0, 1, 2, \dots)$$

(7) $y_d(t), \dot{y}_d(t), u_d(t)$ 在 $[0, T]$ 上一致有界

采用学习律

$$u_{k+1} = (1 - \alpha)u_k(t) + \alpha u_0(t) + \Phi e_k(t) \quad (4.2.2)$$

式中 $e_k(t) = y_d(t) - y_k(t)$, $t \in [0, T]$, $0 < \alpha < 1$ 为遗忘因子, 增益矩阵 Φ 是对称正定的。

引理 4.2.1 若 $e_k(t)$ 在 $[0, T]$ 上关于 k 一致有界, 则由学习律(4.2.2)产生的 $u_k(t)$ 也在 $[0, T]$ 上关于 k 一致有界。

证明 对于 $t \in [0, T]$ 及 $k \geq 1$, 式(4.2.2)可写成

$$\begin{aligned} u_k(t) = & (1-\alpha)^k u_0(t) + \alpha u_0(t) \sum_{i=0}^{k-1} (1-\alpha)^i + \\ & \Phi \sum_{i=0}^{k-1} (1-\alpha)^i e_{k-1-i}(t) \end{aligned}$$

由 $e_k(t)$ 的一致有界性知, $\forall k, \exists M > 0$, 使得 $\|e_k(t)\| \leq M$ 。因此

$$\begin{aligned} \|u_k(t)\| & \leq (1-\alpha)^k \|u_0(t)\| + \alpha \|u_0(t)\| \sum_{i=0}^{k-1} (1-\alpha)^i + \\ & \|\Phi\| M \sum_{i=0}^{k-1} (1-\alpha)^i = \\ & \|u_0(t)\| + \|\Phi\| M \frac{1-(1-\alpha)^k}{\alpha} \leq \\ & \|u_0(t)\| + \|\Phi\| M \frac{1}{\alpha} \end{aligned}$$

此即证得该引理。

定理 4.2.1 给定满足假设(1)~(7)的系统(4.2.1)以及可达的期望轨迹 y_d 。在学习律(4.2.2)的作用下, 控制误差 $u_d - u_k$, 状态误差 $x_d - x_k$ 以及输出误差 e_k 一致有界。

证明 记 $\|\cdot\|$ 为 l_2 范数, 即 $\|x\| = \sqrt{x^T x}$, $\langle x, y \rangle = \int_0^T e^{-\lambda \tau} x^T(\tau) y(\tau) d\tau$, $\Delta u_k = u_k - u_d$ 。

由式(4.2.2)可知

$$\Delta u_{k+1} - \alpha \Delta u_0 = (1-\alpha) \Delta u_k + \Phi e_k(t) \quad (4.2.3)$$

定义

$$s_k = \langle \Delta u_k - \alpha \Delta u_0, \Phi^{-1}(\Delta u_k - \alpha \Delta u_0) \rangle$$

显然

$$s_0 = (1-\alpha)^2 \langle \Delta u_0, \Phi^{-1} \Delta u_0 \rangle$$

下面估计 s_{k+1} , 可得

$$s_{k+1} = \langle (1-\alpha) \Delta u_k + \Phi e_k, (1-\alpha) \Phi^{-1} \Delta u_k + e_k \rangle =$$

$$(1-\alpha)^2 \langle \Delta u_k, \Phi^{-1} \Delta u_k \rangle + \langle e_k, \Phi e_k \rangle + 2(1-\alpha) \langle e_k, \Delta u_k \rangle$$

由于

$$\begin{aligned} & (1-\alpha)^2 \langle \Delta u_k, \Phi^{-1} \Delta u_k \rangle = \\ & (1-\alpha) s_k + \alpha s_0 - \\ & \alpha(1-\alpha) \langle \Delta u_k - \Delta u_0, \Phi^{-1} (\Delta u_k - \Delta u_0) \rangle \leqslant \\ & (1-\alpha) s_k + \alpha s_0 \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} s_{k+1} & \leqslant (1-\alpha) s_k + \alpha s_0 + \\ & \langle e_k, \Phi e_k \rangle + 2(1-\alpha) \langle e_k, \Delta u_k \rangle \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

考察 e_k 与 Δu_k 的关系。由式(4.2.1)可知

$$\begin{aligned} \dot{e}_k &= g_{td} + g_{xd}(f_d + B_d u_d) - \\ & g_{tk} - g_{xk}(f_k + B_k u_k + B_k w_k) = \\ & - g_{xk} B_k \Delta u_k + g_{td} - g_{tk} + \\ & g_{xd}(f_d + B_d u_d) - g_{xk}(f_k + B_k u_d + B_k w_k) \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

记 $A_k = [g_{xk} B_k]^{-1}$, $r_k = A_k [g_{td} - g_{tk} + g_{xd}(f_d + B_d u_d) - g_{xk}(f_k + B_k u_d + B_k w_k)]$, 则有

$$\Delta u_k = -A_k \dot{e}_k + r_k \quad (4.2.6)$$

将式(4.2.6)代入式(4.2.4), 可得

$$\begin{aligned} s_{k+1} & \leqslant (1-\alpha) s_k + \alpha s_0 + \langle e_k, \Phi e_k \rangle - \\ & 2(1-\alpha) \langle e_k, A_k \dot{e}_k \rangle + \\ & 2(1-\alpha) \langle e_k, r_k \rangle \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

应用分部积分公式

$$2 \langle e_k, A_k \dot{e}_k \rangle = e^{-\lambda t} e_k^T A_k e_k \Big|_{t=0}^{t=1} + \lambda \langle e_k, A_k e_k \rangle - \langle e_k, \dot{A}_k e_k \rangle \quad (4.2.8)$$

式(4.2.7)可写成

$$\begin{aligned} s_{k+1} & \leqslant (1-\alpha) s_k + \alpha s_0 + \\ & \langle e_k, [\Phi - (1-\alpha)\lambda A_k - (1-\alpha)\dot{A}_k] e_k \rangle \end{aligned}$$

$$2(1-\alpha)\langle e_k, r_k \rangle - (1-\alpha)e^{-\lambda t}e_k^T A_k e_k \Big|_{t=0}^T \quad (4.2.9)$$

由假设(4)和假设(5)可知

$$\frac{1}{\gamma_2}I \leq A_k \leq \frac{1}{\gamma_1}I \quad (4.2.10)$$

$$\|\dot{A}_k\| \leq \eta \quad (4.2.11)$$

因此

$$e_k^T [\Phi - (1-\alpha)\lambda A_k + (1-\alpha)\dot{A}_k] e_k \leq [\varphi + (1-\alpha)(-\frac{\lambda}{\gamma_2} + \eta)] \|e_k\|^2 \quad (4.2.12)$$

式中 $\varphi = \|\Phi\|$ 。

估计 r_k 的模。由 r_k 的定义可知

$$\begin{aligned} \|r_k\| &= \|A_k[g_{td} - g_{tk} + (g_{xd} - g_{xk})(f_d + B_d u_d) + \\ &\quad g_{xk}(f_d - f_k) + g_{xk}(B_d - B_k)u_d - g_{xk}B_k w_k]\| \leq \\ &\|A_k\| [\|g_{td} - g_{tk}\| + \|g_{xd} - g_{xk}\| \|f_d + B_d u_d\| + \\ &\|g_{xk}\| \|f_d - f_k\| + \|g_{xk}\| \|B_d - B_k\| \|u_d\| + \\ &\|g_{xk}\| \|B_k\| \|w_k\|] \leq \\ &b_A [(k_{gt} + k_{gx}b_d + b_{gx}k_f + b_{gx}b_B b_{ud}) \|x_d - x_k\| + \\ &b_{gx}b_B b_w] \triangleq c_1 \|x_d - x_k\| + c_2 b_w \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

式中 b_A, b_B, b_{gx} 分别为 A_k, B_k, g_{xk} 的界; $b_{ud} = \sup_{t \in [0, T]} \|u_d(t)\|$, $b_d = \sup_{t \in [0, T]} \|f_d + B_d u_d\|$ 。利用假设(3), 可得

$$e_k^T r_k \leq \|e_k\| \|r_k\| \leq k_g c_1 \|x_d - x_k\|^2 + k_g c_2 b_w \|x_d - x_k\| \quad (4.2.14)$$

式中 k_g 为 g 的 Lipschitz 常数。记

$$c_3 = [\varphi + (1-\alpha)\eta] k_g^2 + 2(1-\alpha) k_g c_1$$

$$c_4 = 2(1-\alpha) k_g c_2$$

$$c_\lambda = (1-\alpha) \frac{\lambda}{\gamma_2} k_g^2 - c_3$$

可以看出, 当 λ 足够大时, $c_\lambda > 0$ 。由式(4.2.12)和式(4.2.14)可知

$$\begin{aligned}
 & \langle e_k, [\Phi - (1-\alpha)\lambda A_k + (1-\alpha)\dot{A}_k] e_k \rangle + \\
 & 2(1-\alpha) \langle e_k, r_k \rangle \leq \\
 & \int_0^T e^{-\lambda\tau} \{ (\varphi + (1-\alpha)(-\frac{\lambda}{\gamma_2} + \eta)) k_g^2 + 2(1-\alpha) k_g c_1 \} \\
 & \|x_d - x_k\|^2 + 2(1-\alpha) k_g c_2 b_w \|x_d - x_k\| d\tau = \\
 & \int_0^T e^{-\lambda\tau} (-c_\lambda \|x_d - x_k\|^2 + c_4 b_w \|x_d - x_k\|) d\tau = \\
 & \int_0^T e^{-\lambda\tau} (-c_\lambda (\|x_d - x_k\| - \frac{c_4 b_w}{2c_\lambda})^2 + \frac{(c_4 b_w)^2}{4c_\lambda}) d\tau \leq \\
 & \frac{(c_4 b_w)^2}{4c_\lambda} \frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda} \quad (4.2.15)
 \end{aligned}$$

将式(4.2.15)代入式(4.2.9), 则

$$\begin{aligned}
 s_{k+1} & \leq (1-\alpha)s_k + \alpha s_0 + \frac{(c_4 b_w)^2}{4c_\lambda} \frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda} + \frac{(1-\alpha)}{\gamma_1} k_g^2 b_{x0}^2 - \\
 & \frac{(1-\alpha)}{\gamma_2} e^{-\lambda T} \|e_k(T)\|^2 \quad (4.2.16)
 \end{aligned}$$

记 $\varepsilon_1(s_0, b_w, b_{x0}) = \alpha s_0 + \frac{(c_4 b_w)^2}{4c_\lambda} \frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda} + \frac{(1-\alpha)}{\gamma_1} k_g^2 b_{x0}^2$, $\rho = 1 - \alpha$, 式(4.2.16)可写成

$$s_{k+1} \leq \rho s_k + \varepsilon_1(s_0, b_w, b_{x0}) \quad (4.2.17)$$

因此, s_k 关于 k 一致有界, 且渐近界为

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} s_k \leq \frac{1}{1-\rho} \varepsilon_1(s_0, b_w, b_{x0}) \quad (4.2.18)$$

估计 $x_d - x_k$ 。由式(4.2.1a)可知

$$\begin{aligned}
 \|x_d - x_k\| & \leq b_{x0} + \int_0^t [(k_f + k_B b_{ud}) \|x_d - x_k\| + \\
 & b_B \|\Delta u_k\| + b_B b_w] d\tau
 \end{aligned}$$

记 $c_5 = k_f + k_B b_{ud}$, $c_6 = \max\{\lambda, c_5\}$ 。利用 Bellman-Gronwall 引理, 可得

$$\begin{aligned}
\|x_d - x_k\| &\leq e^{c_6 t} b_{x0} + \int_0^t e^{c_6(t-\tau)} (b_B \|\Delta u_k\| + b_B b_w) d\tau \leq \\
&e^{c_6 T} b_{x0} + b_B \frac{e^{c_6 T} - 1}{c_6} b_w + e^{c_6 t} b_B \int_0^T e^{-c_6 \tau} \|\Delta u_k\| d\tau \leq \\
&e^{c_6 T} b_{x0} + b_B \frac{e^{c_6 T} - 1}{c_6} b_w + \\
&e^{c_6 T} b_B \sqrt{\int_0^T e^{-2c_6 \tau} \|\Delta u_k\|^2 d\tau} \sqrt{\int_0^T 1^2 d\tau} \leq \\
&e^{c_6 T} b_{x0} + b_B \frac{e^{c_6 T} - 1}{c_6} b_w + \\
&e^{c_6 T} b_B \sqrt{T} \sqrt{\langle \Delta u_k, \Delta u_k \rangle} \quad (4.2.19)
\end{aligned}$$

由于 Φ 正定对称, 故存在 $\varphi_1 > 0, \varphi_2 > 0$, 使得

$$\frac{1}{\varphi_2} I \leq \Phi^{-1} \leq \frac{1}{\varphi_1} I \quad (4.2.20)$$

并且

$$\begin{aligned}
\langle \Delta u_k, \Delta u_k \rangle &\leq \varphi_2 \langle \Delta u_k, \Phi^{-1} \Delta u_k \rangle \leq \\
&\varphi_2 \left(\frac{1}{1-\alpha} s_k + \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} s_0 \right) \quad (4.2.21)
\end{aligned}$$

因此, $\langle \Delta u_k, \Delta u_k \rangle$ 有界。进一步地, 可推知, $x_d - x_k, e_k$ 有界。又由引理 4.2.1, 可推知 Δu_k 的有界性。定理证毕。

上述定理表明, 当存在初始修正项 αu_0 , 并且存在有界的输入扰动和初始状态偏移时, 系统输出轨迹能够收敛到期望轨迹的邻域里, 不会迭代发散。因此, 将遗忘因子 α 引入 P 型学习律构造了一种鲁棒学习控制算法。在实际应用中, 随着干扰被消除, 可以通过不断减小 α 来减弱初始修正项 αu_0 的作用, 以保证这种学习控制算法的收敛性。下面考虑遗忘因子 $\alpha = 0$ 以及干扰被消除 (即 $b_{x0} = 0, b_w = 0$) 时, 学习律 (4.2.2) 的收敛性。

定理 4.2.2 对于定理 4.2.1 考虑的系统, 假设 $b_{x0} = 0, b_w = 0$ 。P 型学习律

$$u_{k+1} = u_k(t) + \Phi e_k(t) \quad (4.2.22)$$

产生的控制序列使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{e}_k(t) = 0 (t \in [0, T])$ 。

证明 由式(4.2.4)~式(4.2.9)知

$$\begin{aligned} s_{k+1} &= s_k + \langle \mathbf{e}_k, \Phi \mathbf{e}_k \rangle - 2 \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{A}_k \dot{\mathbf{e}}_k \rangle + 2 \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{r}_k \rangle = \\ &= s_k + \langle \mathbf{e}_k, (\Phi - \lambda \mathbf{A}_k + \dot{\mathbf{A}}_k) \mathbf{e}_k \rangle + 2 \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{r}_k \rangle - \\ &\quad \mathbf{e}^{-\lambda t} \mathbf{e}_k^T \mathbf{A}_k \mathbf{e}_k \Big|_{t=0}^{t=T} \end{aligned} \quad (4.2.23)$$

式中 $s_k = \langle \Delta \mathbf{u}_k, \Phi^{-1} \Delta \mathbf{u}_k \rangle$ 。由 $\mathbf{e}_k(0) = 0, \mathbf{w}_k(t) = 0 (t \in [0, T])$ 知

$$\begin{aligned} s_k - s_{k+1} &\geq \int_0^T e^{-\lambda \tau} \left[\left(\frac{\lambda}{\gamma_2} - \varphi - \eta \right) k_g^2 - 2c_1 k_g \right] \|\Delta \mathbf{x}_k\|^2 d\tau + \\ &\quad e^{-\lambda T} \frac{1}{\gamma_2} \|\mathbf{e}_k(T)\|^2 \end{aligned} \quad (4.2.24)$$

当 λ 足够大时, 若 $\mathbf{e}_k(t) \neq 0 (t \in [0, T])$, 则 s_k 严格单调递减, 因此

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = 0 \quad (4.2.25)$$

进一步地, $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle \Delta \mathbf{u}_k, \Delta \mathbf{u}_k \rangle = 0$ 。

由式(4.2.19)~式(4.2.21)可知

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_k\| &\leq k_g \|\mathbf{x}_d - \mathbf{x}_k\| \leq \\ &k_g b_B \int_0^t e^{c_s(t-\tau)} \|\Delta \mathbf{u}_k\| d\tau \leq \\ &k_g b_B e^{c_s T} \int_0^T e^{-c_s \tau} \|\Delta \mathbf{u}_k\| d\tau \leq \\ &k_g b_B e^{c_s T} \sqrt{T} \sqrt{\langle \Delta \mathbf{u}_k, \Delta \mathbf{u}_k \rangle} \end{aligned} \quad (4.2.26)$$

由式(4.2.25)和式(4.2.26)可证得该定理。

4.3 选择学习算法

遗忘因子学习算法的鲁棒性分析结果表明, 为保证算法收敛性, 随着迭代次数的增加需减弱初始修正项的作用, 直至衰减为零。为了做到这一点, 可采取逐渐减小遗忘因子的措施。并且, 经

过足够多次迭代后, 置遗忘因子为零。

对学习律(4.2.2)而言, 对于给定的初始控制 $u_0(t)$, 减小 α 是减弱 $\alpha u_0(t)$ 的作用的直接方法。但直观地来看, 我们也可以采取调整初始控制 $u_0(t)$ 的措施。例如, 采用如下的选择学习方案:

- (1) 选择适当的初始控制 $u_0(t)$ 。
- (2) 在遗忘因子学习律作用下, 系统重复运行 M 次, $k = 0, 1, 2, \dots, M-1$ 。在某种性能指标下, 从中选择并存储最佳控制 $u_{k^*}(t)$, $0 \leq k^* \leq M-1$ 。
- (3) 调整初始控制 $u_0(t) = (1 - \alpha)u_{M-1}(t) + \alpha u_{k^*} + \Phi e_{M-1}(t)$ 。
- (4) 转方案(2), 进行下一轮重复操作, 直至满足所要求的跟踪精度。

当算法收敛时 $u_k(t) \rightarrow u_\infty(t)$ ($k \rightarrow \infty$), 上述选择学习方案也可使得 $u_0(t) \rightarrow u_\infty(t)$ 。这样, 当迭代次数足够大时, 遗忘因子学习律(4.2.2)可写成

$$u_{k+1}(t) \approx u_k(t) + \Phi e_k(t)$$

即, 随着迭代次数的不断增大, 采用选择学习方案, 学习律(4.2.2)会逐渐变得与无遗忘因子的 P 型学习律一致。

这一节针对一类受约束非线性系统给出上述选择学习算法的收敛性条件。考虑如下受约束非线性系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), t) + B(x(t), t)u(t) \\ y(t) &= g(x(t), t) + C(x(t), t)u(t) + D(x(t), t)v(t) \end{aligned} \right\} \quad (4.3.1)$$

式中 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 是状态向量, $u(t) \in \mathbb{R}^r$ 是控制输入向量, $v(t) \in \mathbb{R}^p$ 是约束输入向量, $y(t) \in \mathbb{R}^m$ 是约束输出向量。

式(4.3.1)描述了包括受限机器人在内的一类受约束非线性系统的动力学特性。例如下述受限机器人动力学特性^[47]

$$M(q)\ddot{q} + h(q, \dot{q}) + d(t) = J^T(q)\lambda + \tau \quad (4.3.2)$$

$$\varphi(q) = 0 \quad (4.3.3)$$

式中 $q^T = (q_1^T, q_2^T) \in \mathbf{R}^n$ 是关节坐标向量, $q_1 \in \mathbf{R}^m, q_2 \in \mathbf{R}^{n-m}$; $M(q): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n \times n}$ 是对称正定惯性矩阵; $h(q, \dot{q}): \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 为表示离心力, 哥氏力和重力的向量; $\tau \in \mathbf{R}^n$ 是关节驱动力矩。 $d(t) \in \mathbf{R}^n$ 是外部扰动向量。 $\varphi(q): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ 为约束向量函数; $J^T(q)\lambda$ 是与约束有关的广义接触力向量, $\lambda \in \mathbf{R}^m$ 是 Lagrange 乘子向量, J 是约束函数的 Jacobi 矩阵

$$J(q) = \frac{\partial \varphi}{\partial q}$$

对于约束函数, 假设存在函数 $\omega: \mathbf{R}^{n-m} \rightarrow \mathbf{R}^m$, 使得

$$q_1 = \omega(q_2)$$

由此, 约束函数可写成 $\varphi(\omega(q_2), q_2) = 0$ 。

为保证系统稳定性, 可设计反馈控制器

$$\tau = c(q, \dot{q}, q_d, \dot{q}_d, \lambda_d) + \bar{\tau}$$

式中 q_d, λ_d 为期望轨迹。在该反馈控制器作用下, 有

$$M(q)\ddot{q} + f(q, \dot{q}, t) + d(t) = J^T(q)\lambda + \bar{\tau} \quad (4.3.4)$$

式中 $f(q, \dot{q}, t) = h(q, \dot{q}) - c(q, \dot{q}, q_d, \dot{q}_d, \lambda_d)$ 。

为将该受限机器人表示为式(4.3.1)的形式, 可采用坐标变换 $X(q): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$

$$x = X(q) = \begin{bmatrix} q_1 - \omega(q_2) \\ q_2 \end{bmatrix} \quad (4.3.5)$$

式中 $x^T = (x_1^T, x_2^T)$, $x_1 \in \mathbf{R}^m$, $x_2 \in \mathbf{R}^{n-m}$ 。式(4.3.5)的逆变换 $Q(x): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 为

$$q = Q(x) = \begin{bmatrix} x_1 + \omega(x_2) \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (4.3.6)$$

逆变换(4.3.6)的非奇异 Jacobi 矩阵为

$$T(x) = \frac{\partial Q(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} I_m & \frac{\partial \omega(x_2)}{\partial x_2} \\ 0 & I_{n-m} \end{bmatrix} \quad (4.3.7)$$

应用该变换, 式(4.3.4)可写成

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) + \mathbf{T}^T(\mathbf{x})\mathbf{d}(t) = \\ \mathbf{T}^T(\mathbf{x})\mathbf{J}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{T}^T(\mathbf{x})\bar{\boldsymbol{\tau}} \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

这里

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{x}) &= \mathbf{T}^T(\mathbf{x})\mathbf{M}(\mathbf{Q}(\mathbf{x}))\mathbf{T}(\mathbf{x}) \\ \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) &= \mathbf{T}^T(\mathbf{x})\mathbf{M}(\mathbf{Q}(\mathbf{x}))\dot{\mathbf{T}}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} + \\ &\quad \mathbf{T}^T(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{Q}(\mathbf{x}), \mathbf{T}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}}, t) \end{aligned}$$

记 $\mathbf{I}_n = [\mathbf{E}_1^T \mathbf{E}_2^T]$, $\mathbf{E}_1 \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $\mathbf{E}_2 \in \mathbf{R}^{(n-m) \times n}$, 式(4.3.8)可写成

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H}_1(\mathbf{x}_2) \ddot{\mathbf{x}}_2 + \bar{\mathbf{f}}_1(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2, t) + \mathbf{d}_1(\mathbf{x}_2, t) &= \mathbf{D}_1(\mathbf{x}_2)\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{v} \\ \mathbf{H}_2(\mathbf{x}_2) \ddot{\mathbf{x}}_2 + \bar{\mathbf{f}}_2(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2, t) + \mathbf{d}_2(\mathbf{x}_2, t) &= \mathbf{D}_2(\mathbf{x}_2)\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{u} \end{aligned} \right\} \quad (4.3.9)$$

式中

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1(\mathbf{x}_2) &= \mathbf{E}_1 \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{x}_2) \mathbf{E}_2^T \\ \mathbf{H}_2(\mathbf{x}_2) &= \mathbf{E}_2 \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{x}_2) \mathbf{E}_2^T \\ \bar{\mathbf{f}}_1(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2, t) &= \mathbf{E}_1 \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2, t) \\ \bar{\mathbf{f}}_2(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2, t) &= \mathbf{E}_2 \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2, t) \\ \mathbf{d}_1(\mathbf{x}_2, t) &= \mathbf{E}_1 \mathbf{T}^T(\mathbf{x}) \mathbf{d}(t) \\ \mathbf{d}_2(\mathbf{x}_2, t) &= \mathbf{E}_2 \mathbf{T}^T(\mathbf{x}) \mathbf{d}(t) \\ \mathbf{D}_1(\mathbf{x}_2) &= \mathbf{E}_1 \mathbf{T}^T(\mathbf{x}) \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \\ \mathbf{D}_2(\mathbf{x}_2) &= \mathbf{E}_2 \mathbf{T}^T(\mathbf{x}) \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \\ \mathbf{u} &= \mathbf{E}_2 \mathbf{T}^T(\mathbf{x}) \bar{\boldsymbol{\tau}} \\ \mathbf{v} &= \mathbf{E}_1 \mathbf{T}^T(\mathbf{x}) \bar{\boldsymbol{\tau}} \end{aligned}$$

下面证明 $\mathbf{D}_2(\mathbf{x}_2) = \mathbf{0}$, $\mathbf{x}_2 \in \mathbf{R}^{n-m}$ 。由式(4.3.3)及

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{q})}{\partial q_1} & \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{q})}{\partial q_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \\ \dot{q}_1 &= \frac{\partial \boldsymbol{\omega}(\mathbf{q}_2)}{\partial q_2} \dot{q}_2 \end{aligned}$$

可知

$$\left(\frac{\partial \Phi(q)}{\partial q_1} \frac{\partial \omega(q_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial \Phi(q)}{\partial q_2} \right) \dot{q}_2 = 0$$

而

$$\begin{aligned} D_2^T(x_2) &= J(q) T(x) E_2^T = \\ &= \frac{\partial \Phi(q)}{\partial q_1} \frac{\partial \omega(q_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial \Phi(q)}{\partial q_2} \end{aligned}$$

因此证得 $D_2(x_2) = 0$ 。这样, 式(4.3.9)可写成

$$\dot{\sigma} = f(\sigma) + B(\sigma)u \quad (4.3.10)$$

$$\lambda = g(\sigma) + C(\sigma)u + D(\sigma)v \quad (4.3.11)$$

式中

$$\sigma = \begin{bmatrix} x_2 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$$

$$f(\sigma) = \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ -H_2^{-1}(x_2)(\bar{f}_2(x_2, \dot{x}_2, t) + d_2(x_2, t)) \end{bmatrix}$$

$$B(\sigma) = \begin{bmatrix} 0 \\ H_2^{-1}(x_2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} g(\sigma) &= -D_1^{-1}(x_2)H_1(x_2)H_2^{-1}(x_2)\{\bar{f}_2(x_2, \dot{x}_2, t) + d_2(x_2, t)\} + \\ &+ D_1^{-1}(x_2)\{\bar{f}_1(x_2, \dot{x}_2, t) + d_1(x_2, t)\} \end{aligned}$$

$$C(\sigma) = D_1^{-1}(x_2)H_1(x_2)H_2^{-1}(x_2)$$

$$D(\sigma) = -D_1^{-1}(x_2)$$

下面, 考虑在重复操作下的系统(4.3.1), 则它可写成

$$\begin{aligned} \dot{x}_k(t) &= f(x_k(t), t) + B(x_k(t), t)u_k(t) + \eta_k(t) \\ & \quad (4.3.12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_k(t) &= g(x_k(t), t) + C(x_k(t), t)u_k(t) + \\ &+ D(x_k(t), t)v_k(t) + \xi_k(t) \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

式中 $t \in [0, T]$, k 为迭代次数, 非线性函数 $f: \mathbf{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^n$ 和 $B: \mathbf{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^{n \times r}$ 关于 t 分段连续; $g: \mathbf{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^m$,

$C: \mathbf{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^{m \times r}$ 和 $D: \mathbf{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^{m \times p}$ 关于 t 连续。
 $\eta_k(t) \in \mathbf{R}^r$ 和 $\xi_k(t) \in \mathbf{R}^m$ 分别为状态扰动和量测噪声。

现在的问题是, 分别给定期望轨迹 $x_d(t)$ 和 $y_d(t)$ ($t \in [0, T]$) 以及允许跟踪精度 $\varepsilon > 0$, 寻找输入信号 $u_k(t)$, $v_k(t)$ ($t \in [0, T]$), 使得系统 (4.3.12)、(4.3.13) 产生的轨迹 $x_k(t)$ 和 $y_k(t)$ 在 $[0, T]$ 上尽可能地接近期望轨迹, 即

$$\begin{aligned} \|x_d(t) - x_k(t)\| &< \varepsilon \\ \|y_d(t) - y_k(t)\| &< \varepsilon \quad (t \in [0, T]) \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

在解决该问题之前, 对系统 (4.3.12)、(4.3.13) 做以下假设:

(1) 对于每个固定 $x_k(0)$ 及 $\eta_k(t)$ 、 $\xi_k(t) = 0$ ($t \in [0, T]$), 记 S 为映射 $(x_k(0), u_k(t) (t \in [0, T])) \rightarrow (x_k(t) (t \in [0, T]))$, O 为映射 $(x_k(0), u_k(t), v_k(t) (t \in [0, T])) \rightarrow (y_k(t) (t \in [0, T]))$ 。映射 S 和 O 是一对一的。

(2) 非线性函数 f 、 B 、 g 、 C 、 D 在 $[0, T]$ 上关于 x 满足一致全局 Lipschitz 条件, 即存在 $k_h < \infty$ ($h \in \{f, B, g, C, D\}$) 有

$$\|h(x_1, t) - h(x_2, t)\| \leq k_h \|x_1 - x_2\|$$

(3) 非线性函数 B 、 C 、 D 在 $\mathbf{R}^n \times [0, T]$ 上一致有界, 其界分别为 b_h ($h \in \{B, C, D\}$)。

(4) 期望轨迹 $x_d(t)$ 和 $y_d(t)$ 预先分别给定。

(5) 初态偏移有界, 即

$$\|x_d(0) - x_k(0)\| \leq b_{x0} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

(6) 干扰 $\eta_k(t)$ 和 $\xi_k(t)$ 影响下的信号 $\dot{x}_k(t)$ 和 $y_k(t)$ 可量测得到, 且

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \|\eta_k(t)\| &\leq b_\eta \\ \sup_{t \in [0, T]} \|\xi_k(t)\| &\leq b_\xi \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

对于给定的期望轨迹 $x_d(t)$ 和 $y_d(t)$ ($t \in [0, T]$), 假设 (1) 保证存在期望输入信号 $u_d(t)$ 和 $v_d(t)$, 使得

$$\begin{aligned} \dot{x}_d(t) &= f(x_d(t), t) + B(x_d(t), t)u_d(t) \quad (4.3.15) \\ y_d(t) &= g(x_d(t), t) + C(x_d(t), t)u_d(t) + \end{aligned}$$

$$D(\mathbf{x}_d(t), t) \mathbf{v}_d(t) \quad (4.3.16)$$

采用学习律

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{k+1}(t) &= (1 - \alpha) \mathbf{w}_k(t) + \alpha \mathbf{w}_{k-j}(t) + \\ &\quad \Phi(\mathbf{x}_k(t), t) \mathbf{e}_k(t) \end{aligned} \quad (4.3.17)$$

式中 $0 \leq j \leq N-1$, N 为选择学习周期; $\alpha \in (0, 1)$ 是遗忘因子;

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_k(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k(t) \\ \mathbf{v}_k(t) \end{bmatrix} \\ \Phi(\mathbf{x}_k(t), t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{F}(\mathbf{x}_k(t), t) & 0 \\ 0 & \mathbf{L}(\mathbf{x}_k(t), t) \end{bmatrix} \\ \mathbf{e}_k(t) &= \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_d(t) - \dot{\mathbf{x}}_k(t) \\ \mathbf{y}_d(t) - \mathbf{y}_k(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

\mathbf{F} 、 \mathbf{L} 为在 $\mathbf{R}^n \times [0, T]$ 上的有界增益矩阵。

学习律(4.3.17)由两部分构成, 其一为控制输入学习律

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{k+1}(t) &= (1 - \alpha) \mathbf{u}_k(t) + \alpha \mathbf{u}_{k-j}(t) + \\ &\quad \mathbf{F}(\mathbf{x}_k(t), t) (\dot{\mathbf{x}}_d(t) - \dot{\mathbf{x}}_k(t)) \end{aligned} \quad (4.3.18)$$

另一为约束输入学习律

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{k+1}(t) &= (1 - \alpha) \mathbf{v}_k(t) + \alpha \mathbf{v}_{k-j}(t) + \\ &\quad \mathbf{L}(\mathbf{x}_k(t), t) (\mathbf{y}_d(t) - \mathbf{y}_k(t)) \end{aligned} \quad (4.3.19)$$

可以看出, 本节开始时给出的选择学习方案可以用学习律(4.3.17)来描述。下面的定理给出了这种选择学习控制算法的鲁棒性结果。

定理 4.3.1 对于满足假设(1)~(6)的系统(4.3.12)、(4.3.13)施加学习律(4.3.17)。给定可达的期望轨迹 $\mathbf{x}_d(t)$ 和 $\mathbf{y}_d(t)$ ($t \in [0, T]$), 如果条件

- (1) $\| (1 - \alpha) \mathbf{I} - \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \| \leq \rho_1 < 1 - \alpha$
 - (2) $\| (1 - \alpha) \mathbf{I} - \mathbf{L}(\mathbf{x}, t) \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) \| \leq \rho_2 < 1 - \alpha$
- ($(\mathbf{x}, t) \in \mathbf{R}^n \times [0, T]$)

那么, 控制输入误差 $\mathbf{u}_d(t) - \mathbf{u}_k(t)$ 、状态误差 $\mathbf{x}_d(t) - \mathbf{x}_k(t)$ 、约

束输入误差 $v_d(t) - v_k(t)$ 以及约束输出误差 $y_d(t) - y_k(t)$ 在 $[0, T]$ 上渐近有界 ($k \rightarrow \infty$); 并且当 $b_{x0} \rightarrow 0, b_\eta \rightarrow 0, b_\xi \rightarrow 0$ 时, 这些误差在 $[0, T]$ 一致趋于零 ($k \rightarrow \infty$)。

证明 首先考虑控制输入的渐近有界性。记 $\Delta u_k(t) = u_d(t) - u_k(t)$ 。由式(4.3.12), 式(4.3.15)及式(4.3.18)可知

$$\begin{aligned} \Delta u_{k+1} &= (1 - \alpha) \Delta u_k + \alpha \Delta u_{k-j} - \\ &\quad \Gamma_k (f_d + B_d u_d - f_k - B_k u_k - \eta_k) = \\ &\quad [(1 - \alpha) I - \Gamma_k B_k] \Delta u_k + \alpha \Delta u_{k-j} - \\ &\quad \Gamma_k [f_d - f_k + (B_d - B_k) u_d - \eta_k] \end{aligned} \quad (4.3.20)$$

式(4.3.20)两端取范数, 并利用 Lipschitz 条件和有界性, 可得

$$\begin{aligned} \|\Delta u_{k+1}\| &\leq \\ &\quad \|(1 - \alpha) I - \Gamma_k B_k\| \|\Delta u_k\| + \alpha \|\Delta u_{k-j}\| + \\ &\quad \|\Gamma_k\| (\|f_d - f_k\| + \|B_d - B_k\| \|u_d\| + \|\eta_k\|) \leq \\ &\quad \rho_1 \|\Delta u_k\| + \alpha \|\Delta u_{k-j}\| + b_\Gamma b_1 \|\Delta x_k\| + b_\Gamma b_\eta \end{aligned} \quad (4.3.21)$$

式中 $\Delta x_k(t) = x_d(t) - x_k(t)$, b_Γ 是 Γ 的界, $b_1 = k_f + k_B b_{ud}$, $b_{ud} = \sup_{t \in [0, T]} \|u_d(t)\|$ 。

估计 $\Delta x_k(t)$, 由式(4.3.12)和式(4.3.15)可得

$$\begin{aligned} \|\Delta x_k\| &= \|\Delta x_k(0) + \int_0^t (f_d + B_d u_d - f_k - B_k u_k - \eta_k) d\tau\| \leq \\ &\quad \|\Delta x_k(0)\| + \int_0^t (\|f_d - f_k\| + \|B_d - B_k\| \|u_d\| + \\ &\quad \|B_k\| \|\Delta u_k\| + \|\eta_k\|) d\tau \leq \\ &\quad b_{x0} + \int_0^t (b_1 \|\Delta x_k\| + b_B \|\Delta u_k\| + b_\eta) d\tau \end{aligned} \quad (4.3.22)$$

对于式(4.3.22)应用 Bellman-Gronwall 引理

$$\|\Delta x_k\| \leq b_{x0} e^{b_1 t} + \int_0^t e^{b_1(t-\tau)} (b_B \|\Delta u_k\| + b_\eta) d\tau \quad (4.3.23)$$

将式(4.3.23)代入式(4.3.21), 则得

$$\begin{aligned} \|\Delta \mathbf{u}_{k+1}\| \leq & \rho_1 \|\Delta \mathbf{u}_k\| + \alpha \|\Delta \mathbf{u}_{k-j}\| + b_F b_1 b_B \int_0^t e^{b_1(t-\tau)} \|\Delta \mathbf{u}_k\| d\tau \\ & + b_F b_1 b_{x0} e^{b_1 t} + (1 + b_1) \int_0^t e^{b_1(t-\tau)} d\tau b_F b_\eta \quad (4.3.24) \end{aligned}$$

式(4.3.24)两端同乘正函数 $e^{-\lambda t}$ ($\lambda > b_1$), 并利用 λ 范数的定义, 得

$$\begin{aligned} \|\Delta \mathbf{u}_{k+1}\|_\lambda \leq & (\rho_1 + b_F b_1 b_B \lambda_{b1}) \|\Delta \mathbf{u}_k\|_\lambda + \alpha \|\Delta \mathbf{u}_{k-j}\|_\lambda + \\ & b_F b_1 b_{x0} + (1 + b_1 \lambda_{b1}) b_F b_\eta \quad (4.3.25) \end{aligned}$$

式中 $\lambda_{b1} = \frac{1 - e^{(b_1 - \lambda)T}}{\lambda - b_1}$, 记 $\hat{\rho}_1 = \rho_1 + b_F b_1 b_B \lambda_{b1}$, $\varepsilon_1 = b_F b_1 b_{x0} + (1 + b_1 \lambda_{b1}) b_F b_\eta$, 式(4.3.25)可写成

$$\|\Delta \mathbf{u}_{k+1}\|_\lambda \leq \hat{\rho}_1 \|\Delta \mathbf{u}_k\|_\lambda + \alpha \|\Delta \mathbf{u}_{k-j}\|_\lambda + \varepsilon_1 \quad (4.3.26)$$

因为 $\rho_1 < 1 - \alpha$, 故选取足够大的 λ 使得 $\hat{\rho}_1 < 1 - \alpha$ 。因此, 由附录引理 A.2.4 可知

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|\Delta \mathbf{u}_k\|_\lambda \leq \frac{\varepsilon_1}{1 - (\hat{\rho}_1 + \alpha)} \quad (4.3.27)$$

式(4.3.23)两端取 λ 范数

$$\|\Delta \mathbf{x}_k\|_\lambda \leq b_B \lambda_{b1} \|\Delta \mathbf{u}_k\|_\lambda + b_{x0} + \lambda_{b1} b_\eta \quad (4.3.28)$$

这样, 由式(4.3.27)和式(4.3.28)可证得 $\|\Delta \mathbf{x}_k\|_\lambda$ 的渐近有界性

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|\Delta \mathbf{x}_k\|_\lambda \leq b_B \lambda_{b1} \frac{\varepsilon_1}{1 - (\hat{\rho}_1 + \alpha)} + b_{x0} + \lambda_{b1} b_\eta \quad (4.3.29)$$

下面, 考察约束输入的渐近有界性。由式(4.3.13)、式(4.3.16)及式(4.3.19)可知

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{v}_{k+1} = & (1 - \alpha) \Delta \mathbf{v}_k + \alpha \Delta \mathbf{v}_{k-j} - \\ & \mathbf{L}_k (\mathbf{g}_d + \mathbf{C}_d \mathbf{u}_d + \mathbf{D}_d \mathbf{v}_d - \mathbf{g}_k - \mathbf{C}_k \mathbf{u}_k - \mathbf{D}_k \mathbf{v}_k - \xi_k) = \\ & [(1 - \alpha) \mathbf{I} - \mathbf{L}_k \mathbf{D}_k] \Delta \mathbf{v}_k + \alpha \Delta \mathbf{v}_{k-j} - \\ & \mathbf{L}_k \{\mathbf{g}_d - \mathbf{g}_k + \mathbf{C}_k \Delta \mathbf{u}_k + (\mathbf{C}_d - \mathbf{C}_k) \mathbf{u}_d + \\ & (\mathbf{D}_d - \mathbf{D}_k) \mathbf{v}_d - \xi_k\} \quad (4.3.30) \end{aligned}$$

式中 $\Delta \mathbf{v}_k(t) = \mathbf{v}_d(t) - \mathbf{v}_k(t)$ 。式(4.3.30)两端取范数, 并利用

Lipschitz 条件和有界性, 可得

$$\begin{aligned} \|\Delta \mathbf{v}_{k+1}\| &\leq \|(1-\alpha)\mathbf{I} - \mathbf{L}_k \mathbf{D}_k\| \|\Delta \mathbf{v}_k\| + \alpha \|\Delta \mathbf{v}_{k-j}\| \times \\ &\quad \|\mathbf{L}_k\| (\|\mathbf{g}_d - \mathbf{g}_k\| + \|\mathbf{C}_k\| \|\Delta \mathbf{u}_k\| + \\ &\quad \|\mathbf{C}_d - \mathbf{C}_k\| \|\mathbf{u}_d\| + \\ &\quad \|\mathbf{D}_d - \mathbf{D}_k\| \|\mathbf{v}_d\| + \|\boldsymbol{\xi}_k\|) \leq \\ &\quad \rho_2 \|\Delta \mathbf{v}_k\| + \alpha \|\Delta \mathbf{v}_{k-j}\| + \\ &\quad b_L b_C \|\Delta \mathbf{u}_k\| + b_L b_2 \|\Delta \mathbf{x}_k\| + b_L b_\xi \quad (4.3.31) \end{aligned}$$

式中 b_L 是 \mathbf{L} 的界, $b_2 = k_g + k_C b_{ud} + k_D b_{vd}$, $b_{vd} = \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{v}_d(t)\|$ 。将式(4.3.23)代入式(4.3.31), 则

$$\begin{aligned} \|\Delta \mathbf{v}_{k+1}\| &\leq \rho_2 \|\Delta \mathbf{v}_k\| + \alpha \|\Delta \mathbf{v}_{k-j}\| + b_L b_C \|\Delta \mathbf{u}_k\| + \\ &\quad b_L b_2 b_B \int_0^t e^{b_1(t-\tau)} \|\Delta \mathbf{u}_k\| d\tau + b_L b_2 b_{x0} e^{b_1 t} + \\ &\quad b_L b_2 b_\eta \int_0^t e^{b_1(t-\tau)} d\tau + b_L b_\xi \quad (4.3.32) \end{aligned}$$

式(4.3.32)两端同乘正函数 $e^{-\lambda t}$ ($\lambda > b_1$), 并利用 λ 范数的定义, 得

$$\begin{aligned} \|\Delta \mathbf{v}_{k+1}\|_\lambda &\leq \rho_2 \|\Delta \mathbf{v}_k\|_\lambda + \alpha \|\Delta \mathbf{v}_{k-j}\|_\lambda + \\ &\quad b_3 \|\Delta \mathbf{u}_k\|_\lambda + \varepsilon_2 \quad (4.3.33) \end{aligned}$$

式中 $b_3 = b_L b_C + b_L b_2 b_B \lambda_{b1}$, $\varepsilon_2 = b_L b_2 b_{x0} + b_L b_2 \lambda_{b1} b_\eta + b_L b_\xi$ 。

对式(4.3.26)应用附录引理 A.2.4, 知存在 K , 使得

$$\begin{aligned} \|\Delta \mathbf{u}_k\|_\lambda &\leq (\hat{\rho}_1 + \alpha)^K \max\{\|\Delta \mathbf{u}_0\|_\lambda, \dots, \|\Delta \mathbf{u}_{N-1}\|_\lambda\} + \\ &\quad \frac{1 - (\hat{\rho}_1 + \alpha)^K}{1 - (\hat{\rho}_1 + \alpha)} \varepsilon_1, k = N, N+1, \dots \quad (4.3.34) \end{aligned}$$

将式(4.3.34)代入式(4.3.33), 则

$$\begin{aligned} \|\Delta \mathbf{v}_{k+1}\|_\lambda &\leq \rho_2 \|\Delta \mathbf{v}_k\|_\lambda + \alpha \|\Delta \mathbf{v}_{k-j}\|_\lambda + \\ &\quad b_3 (\hat{\rho}_1 + \alpha)^K \max\{\|\Delta \mathbf{u}_0\|_\lambda, \dots, \|\Delta \mathbf{u}_{N-1}\|_\lambda\} + \\ &\quad b_3 \frac{1 - (\hat{\rho}_1 + \alpha)^K}{1 - (\hat{\rho}_1 + \alpha)} \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad (4.3.35) \end{aligned}$$

因为 $\rho_2 < 1 - \alpha$, 故利用附录引理 A.2.4, 可得

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|\Delta v_k\|_{\lambda} \leq \frac{\varepsilon_3}{1 - (\hat{\rho}_2 + \alpha)} \quad (4.3.36)$$

式中 $\varepsilon_3 = b_3 \frac{\varepsilon_1}{1 - (\hat{\rho}_1 + \alpha)} + \varepsilon_{2c}$

估计约束输出误差 $y_d(t) - y_k(t)$, 由式(4.3.13)及式(4.3.16)可知

$$\begin{aligned} \|y_d - y_k\| &= \\ \|g_d + C_d u_d + D_d v_d - g_k - C_k u_k - D_k v_k - \xi_k\| &\leq \\ \|g_d - g_k\| + \|C_k\| \|\Delta u_k\| + \|C_d - C_k\| \|u_d\| + \\ \|D_k\| \|\Delta v_k\| + \|D_d - D_k\| \|v_d\| + \|\xi_k\| &\leq \\ b_C \|\Delta u_k\| + b_2 \|\Delta x_k\| + b_D \|\Delta v_k\| + b_{\xi} &\quad (4.3.37) \end{aligned}$$

这样, 由式(4.3.27)、式(4.3.29)及式(4.3.36)可证得 $\|y_d - y_k\|_{\lambda}$ 的渐近有界性

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} \|y_d - y_k\|_{\lambda} &\leq \\ b_4 \frac{\varepsilon_1}{1 - (\hat{\rho}_1 + \alpha)} + b_D \frac{\varepsilon_3}{1 - (\hat{\rho}_2 + \alpha)} + \varepsilon_4 &\quad (4.3.38) \end{aligned}$$

式中 $b_4 = b_C + b_2 b_B \lambda_{b1}$, $\varepsilon_4 = b_2 b_{x0} + b_2 \lambda_{b1} b_{\eta} + b_{\xi}$ 。进一步地, 利用 λ 范数的性质

$$\sup_{t \in [0, T]} \|h(t)\| \leq e^{\lambda T} \|h\|_{\lambda} (h \in \{\Delta u_k, \Delta x_k, \Delta v_k, y_d - y_k\})$$

知式(4.3.27)、式(4.3.29)、式(4.3.36)及式(4.3.38)蕴涵控制输入误差 $\|\Delta u_k(t)\|$ 、状态误差 $\|\Delta x_k(t)\|$ 、约束输入误差 $\|\Delta v_k(t)\|$ 及约束输出误差 $\|y_d(t) - y_k(t)\|$ 的渐近有界性 ($k \rightarrow \infty$)。当 $b_{x0} \rightarrow 0$ 、 $b_{\eta} \rightarrow 0$ 、 $b_{\xi} \rightarrow 0$ 时, $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ 、 $\varepsilon_3 \rightarrow 0$ 、 $\varepsilon_4 \rightarrow 0$ 。因此, $\sup_{t \in [0, T]} \|h(t)\| \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty) (h \in \{\Delta u_k, \Delta x_k, \Delta v_k, y_d - y_k\})$ 。证毕。

定理 4.3.1 表明, 选择学习控制算法的收敛性并不要求遗忘因子 $\alpha \rightarrow 0$ 。这与前两节讨论的遗忘因子学习律不同。这时设定遗忘因子 α 的最简单做法是将其固定不变, 取 $\alpha \in (0, 1)$ 。目前尚无具体的设计方法设定选择学习周期 N 。它需依具体被控对象

的迭代过程来确定。可以看出,学习律(4.3.17)中的 $j=1$ 时,它相当于二阶迭代学习控制算法。但值得说明的是,利用这种学习律构造的选择学习方案,从设计方法的角度看,与高阶学习律是不同的。

采样控制系统中的控制算法需采用离散化算法。因此,讨论连续形式学习律的离散化算法的收敛性质是有实际意义的。下面讨论学习律(4.3.17)的离散化算法。以差商代替式(4.3.18)中的导数运算,可得到控制输入学习律的近似离散化公式

$$\begin{aligned} u_{k+1}(t) = & (1-\alpha)u_k(t) + \alpha u_{k-j}(t) + \\ & F(x_k(t), t) \frac{x_d(t+h) - x_k(t+h) - x_d(t) + x_k(t)}{h} \end{aligned} \quad (4.3.39)$$

$t = ih (i = 0, 1, \dots, T_h - 1, (T_h = T/h))$ 。约束输入学习律(4.3.19)的离散化公式形式上与(4.3.19)一致,即

$$\begin{aligned} v_{k+1}(t) = & (1-\alpha)v_k(t) + \alpha v_{k-j}(t) + \\ & L(x_k(t), t)(y_d(t) - y_k(t)) \end{aligned} \quad (4.3.40)$$

式中 $t = ih (i = 0, 1, \dots, T_h - 1, (T_h = T/h))$ 。

定理 4.3.2 对于满足假设(A1~A6)的系统(4.3.12)、(4.3.13),应用学习律(4.3.39)、(4.3.40)。给定可达的期望轨迹 $x_d(t)$ 和 $y_d(t) (t \in [0, T])$, 如果条件

$$(1) \quad \|(1-\alpha)I - F(x(t), t) \frac{1}{h} \int_t^{t+h} B(x(\tau), \tau) d\tau\| \leq$$

$$\rho_1 < 1 - \alpha$$

$$(2) \quad \|(1-\alpha)I - L(x(t), t)D(x(t), t)\| \leq \rho_2 < 1 - \alpha$$

$$(t \in [0, T])$$

那么,控制输入误差 $u_d(t) - u_k(t)$, 状态误差 $x_d(t) - x_k(t)$, 约束输入误差 $v_d(t) - v_k(t)$ 以及约束输入误差 $y_d(t) - y_k(t)$ 在 $t \in [0, T]$ 上渐近有界 ($k \rightarrow \infty$); 并且当 $b_{x0} \rightarrow 0, b_{\eta} \rightarrow 0, b_{\xi} \rightarrow 0$ 时, 这些误差在 $[0, T]$ 一致收敛于零 ($k \rightarrow \infty$)。

证明 由式(4.3.12)可知

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_d(t+h) - \mathbf{x}_k(t+h) &= \\ \mathbf{x}_d(t) - \mathbf{x}_k(t) + \int_t^{t+h} (\mathbf{f}_d + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_d - \mathbf{f}_k - \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k - \boldsymbol{\eta}_k) d\tau \end{aligned} \quad (4.3.41)$$

进一步地, 利用

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_d(\tau) &= \mathbf{u}_d(t) \\ \mathbf{u}_k(\tau) &= \mathbf{u}_k(t) \quad (\tau \in [t, t+h]) \end{aligned}$$

第 $k+1$ 次的控制输入误差可写成

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}_{k+1} &= \\ \{ (1-\alpha) \mathbf{I} - \mathbf{F}_k \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \mathbf{B}_k d\tau \} \Delta \mathbf{u}_k + \alpha \Delta \mathbf{u}_{k-j} - \\ \mathbf{F}_k \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \{ \mathbf{f}_d - \mathbf{f}_k + (\mathbf{B}_d - \mathbf{B}_k) \mathbf{u}_d - \boldsymbol{\eta}_k \} d\tau \end{aligned} \quad (4.3.42)$$

两端取范数

$$\begin{aligned} \|\Delta \mathbf{u}_{k+1}\| &\leq \| (1-\alpha) \mathbf{I} - \mathbf{F}_k \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \mathbf{B}_k d\tau \| \|\Delta \mathbf{u}_k\| + \alpha \|\Delta \mathbf{u}_{k-j}\| + \\ &\|\mathbf{F}_k\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|\mathbf{f}_d - \mathbf{f}_k\| + \\ &\|\mathbf{B}_d - \mathbf{B}_k\| \|\mathbf{u}_d\| + \|\boldsymbol{\eta}_k\| d\tau \leq \\ &\rho_1 \|\Delta \mathbf{u}_k\| + \alpha \|\Delta \mathbf{u}_{k-j}\| + \\ &b_{\mathbf{F}} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \{ b_1 \|\Delta \mathbf{x}_k\| + \|\boldsymbol{\eta}_k\| \} d\tau \end{aligned} \quad (4.3.43)$$

式中, $\Delta \mathbf{x}_k(t) = \mathbf{x}_d(t) - \mathbf{x}_k(t)$, $b_{\mathbf{F}}$ 为矩阵 \mathbf{F} 的界, $b_1 = k_f + k_B b_{\mathbf{u}_d}$, $b_{\mathbf{u}_d} = \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{u}_d(t)\|$ 。

两端同乘 $e^{-\lambda t}$ ($\lambda > 0$), 并利用 λ 范数的定义, 得

$$\begin{aligned} \|\Delta \mathbf{u}_{k+1}\|_{\lambda} &\leq \\ \rho_1 \|\Delta \mathbf{u}_k\|_{\lambda} + \alpha \|\Delta \mathbf{u}_{k-j}\|_{\lambda} + \\ b_{\mathbf{F}} b_1 \frac{e^{\lambda h} - 1}{\lambda h} \|\Delta \mathbf{x}_k\|_{\lambda} + b_{\mathbf{F}} \frac{e^{\lambda h} - 1}{\lambda h} b_{\boldsymbol{\eta}} \end{aligned} \quad (4.3.44)$$

将式(4.3.28)代入式(4.3.44)

$$\|\Delta u_{k+1}\|_{\lambda} \leq \rho_1 \|\Delta u_k\|_{\lambda} + \alpha \|\Delta u_{k-j}\|_{\lambda} + \epsilon_1 \quad (4.3.45)$$

$$\rho_1 = \rho_1 + b_I b_1 b_B \lambda b_1 \frac{e^{\lambda h} - 1}{\lambda h}$$

$$\epsilon_1 = b_I b_1 \frac{e^{\lambda h} - 1}{\lambda h} b_{x0} + (1 + b_1 \lambda b_1) \frac{e^{\lambda h} - 1}{\lambda h} b_I b_{\eta}$$

至此,该定理证明的其余部分与定理 4.3.1 类似,故略去。

可以看出,当 h 充分小时,定理 4.3.2 的条件(1)与定理 4.3.1 的条件(1)是一致的。

4.4 鲁棒收敛性

迭代学习控制系统的收敛性分析大多是在无初态偏移、状态扰动、量测噪声等各种干扰的条件下进行的。另外,鲁棒性分析指出,当各种干扰消除时,学习控制算法才收敛。因此两者给出的算法收敛性条件均要求无扰环境。这里称干扰环境下收敛的迭代学习控制系统是鲁棒收敛的。下面针对离散系统讨论迭代学习控制的鲁棒收敛性问题。

考虑 m 个输入 m 个输出(n 维状态)的离散非线性系统

$$x_k(t+1) = f(x_k(t), t) + B(x_k(t), t)(u_k(t) + \eta_k(t)) \quad (4.4.1a)$$

$$y_k(t) = Cx_k(t) \quad (4.4.1b)$$

式中 $t \in \{0, 1, \dots, T\}$, 记为 $t \in [0, T]$ 。 f 、 B 关于 x_k 满足一致全局 Lipschitz 条件, 且 B 有界; $\eta_k(t)$ 为输入扰动且满足 $\sup_{t \in [0, T]} \|\eta_k(t)\| \leq b_{\eta}$; 对于给定的初态 x^0 , 系统的初始扰动有界, 即 $\|x_k(0) - x^0\| \leq b_{x0} (k=0, 1, 2, \dots)$ 。

采用学习律

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \Gamma_k(t)e_k(t+1) \quad (4.4.2)$$

式中 $e_k(t) = y_d(t) - y_k(t)$; $\Gamma_k(t)$ 为可逆增益矩阵。

定理 4.4.1 给定可达期望轨迹 $y_d(t) (t \in [0, T])$, 对于系

统(4.4.1)施加学习律(4.4.2)。如果

$$\|I - \Gamma_k(t)CB(x_k(t), t)\| \leq \rho < 1 \quad (4.4.3)$$

$$(t \in [0, T]; k = 0, 1, 2, \dots)$$

那么控制序列 $\{u_k(t), t \in [0, T]\}$ 对于所有的 k 一致有界。即存在 b_u , 使得 $\sup_{t \in [0, T]} \|u_k\| \leq b_u (k = 0, 1, 2, \dots)$ 。

证明 略。

定理 4.4.2 给定可达的期望轨迹 $y_d(t) (t \in [0, T])$, 对于系统(4.4.1)施加学习律(4.4.2)。如果

$$\|\Gamma_k(t)\| \|\Gamma_k^{-1}(t)\| \|I - CB(x_k(t), t)\Gamma_k(t)\| \leq \bar{\rho} < 1$$

$$(t \in [0, T]; k = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.4.4)$$

且对于任给的初态 x^0 , 及确定性输入扰动 $\eta^0(t) (t \in [0, T])$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k(0) = x^0 \quad (4.4.5)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \eta_k(t) = \eta^0(t) \quad (t \in [0, T]) \quad (4.4.6)$$

那么, 迭代输出轨迹 $y_k(t)$ 在 $[1, T]$ 上一致收敛于 $y_d(t)$, 即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k(t) = y_d(t) \quad (t \in [1, T])$$

证明 第 $k+1$ 次迭代时的输出轨迹可写成

$$\begin{aligned} e_{k+1}(t+1) = & e_k(t+1) - C[f_{k+1}(t) + B_{k+1}(t)(u_{k+1}(t) - \eta_{k+1}(t)) - \\ & f_k(t) - B_k(t)(u_k(t) + \eta_k(t))] = \\ & [I - CB_k(t)\Gamma_k(t)]e_k(t+1) - C[f_{k+1}(t) - f_k(t) + \\ & (B_{k+1}(t) - B_k(t))(u_{k+1}(t) + \eta_{k+1}(t)) + \\ & B_k(t)(\eta_{k+1}(t) - \eta_k(t))], t \in [0, T-1] \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

式中 $B_k(t) = B(x_k(t), t)$ 。由式(4.4.4)可知

$$\|I - CB_k(t)\Gamma_k(t)\| \leq \bar{\rho} < 1 \quad (t \in [0, T]; k = 0, 1, 2, \dots)$$

这样, 式(4.4.7)两端取范数, 并利用 Lipschitz 条件和有界性可得

$$\begin{aligned} \|e_{k+1}(t+1)\| \leq & \|I - CB_k(t)\Gamma_k(t)\| \|e_k(t+1)\| + \\ & \|C\| [\|f_{k+1}(t) - f_k(t)\| + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \|B_{k+1}(t) - B_k(t)\| (\|u_{k+1}(t)\| + \|\eta_{k+1}(t)\|) + \\
& \|B_k(t)\| \|\eta_{k+1}(t) - \eta_k(t)\| \leq \\
& \bar{\rho} \|e_k(t+1)\| + \\
& b_C [k_f + k_B (\|u_{k+1}(t)\| + b_\eta) \|x_{k+1} - x_k(t)\| + \\
& b_B \|\eta_{k+1}(t) - \eta_k(t)\|] \quad (t \in [0, T-1]) \quad (4.4.8)
\end{aligned}$$

式中 $b_C = \|C\|$ 。利用范数的性质及式(4.4.4)可知

$$\begin{aligned}
& \|I - \Gamma_k(t)CB(x_k(t), t)\| \leq \\
& \|\Gamma_k(t)\| \|\Gamma_k^{-1}(t)\| \|I - CB(x_k(t), t)\Gamma_k(t)\| \leq \\
& \bar{\rho} < 1 \quad (4.4.9)
\end{aligned}$$

因此,若定理 4.4.2 的条件成立,则定理 4.4.1 的条件也成立。由定理 4.4.1 知控制序列 $\{u_k(t)\}$ 关于 k 一致有界,即存在 b_u ,使得 $\sup_{t \in [1, T]} \|u_k(t)\| \leq b_u$ 。这样,式(4.4.8)可写成

$$\begin{aligned}
\|e_{k+1}(t+1)\| & \leq \bar{\rho} \|e_k(t+1)\| + b_C c_1 \|x_{k+1}(t) - x_k(t)\| + \\
& b_C b_B \|\eta_{k+1}(t) - \eta_k(t)\| \\
& (t \in [0, T-1]) \quad (4.4.10)
\end{aligned}$$

式中 $c_1 = k_f + k_B(b_u + b_\eta)$

估计 $\|x_{k+1}(t) - x_k(t)\|$, 由式(4.4.1a)及式(4.4.2)可知

$$\begin{aligned}
& \|x_{k+1}(t+1) - x_k(t+1)\| = \\
& \|f_{k+1}(t) - f_k(t) + (B_{k+1}(t) - B_k(t))(u_k(t) + \eta_k(t)) + \\
& B_{k+1}(t)\Gamma_k(t)e_k(t+1) + B_{k+1}(t)(\eta_{k+1}(t) - \eta_k(t))\| \leq \\
& c_1 \|x_{k+1}(t) - x_k(t)\| + b_B b_\Gamma \|e_k(t+1)\| + \\
& b_B \|\eta_{k+1}(t) - \eta_k(t)\| \quad (t \in [0, T-1])
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
& \|x_{k+1}(t) - x_k(t)\| \leq \\
& c'_1 \|x_{k+1}(0) - x_k(0)\| + \sum_{s=0}^{t-1} c_1^{t-s-1} (b_B b_\Gamma \|e_k(s+1)\| + \\
& b_B \|\eta_{k+1}(s) - \eta_k(s)\|) \quad (t \in [1, T]) \quad (4.4.11)
\end{aligned}$$

将式(4.4.11)代入式(4.4.10), 则

$$\begin{aligned} \|e_{k+1}(t+1)\| &\leq \bar{\rho} \|e_k(t+1)\| + \sum_{s=0}^{t-1} c_2 c_1^{t-s} \|e_k(s+1)\| + \\ &b_C c_1^{t+1} \|x_{k+1}(0) - x_k(0)\| + \sum_{s=0}^{t-1} b_C b_B c_1^{t-s} \|\eta_{k+1}(s) - \eta_k(s)\| + \\ &b_C b_B \|\eta_{k+1}(t) - \eta_k(t)\| \quad (t \in [1, T-1]) \end{aligned} \quad (4.4.12)$$

式中 $c_2 = b_C b_B b_F$ 。将式(4.4.12)两端乘 λ^{t+1} ($c_1 \lambda < 1$), 有

$$\begin{aligned} \lambda^{t+1} \|e_{k+1}(t+1)\| &\leq \\ &\bar{\rho} \sup_{t \in [0, T-1]} \lambda^{t+1} \|e_k(t+1)\| + \\ &\sum_{s=0}^{t-1} c_2 (c_1 \lambda)^{t-s} \sup_{t \in [0, T-1]} \lambda^{t+1} \|e_k(t+1)\| + \\ &b_C (c_1 \lambda)^{t+1} \|x_{k+1}(0) - x_k(0)\| + \\ &\sum_{s=0}^{t-1} b_C b_B \lambda (c_1 \lambda)^{t-s} \|\eta_{k+1} - \eta_k\|_\lambda + \\ &b_C b_B \lambda \|\eta_{k+1} - \eta_k\|_\lambda \leq \\ &(\bar{\rho} + c_2 c_1 \lambda \frac{1 - (c_1 \lambda)^T}{1 - c_1 \lambda}) \sup_{t \in [0, T-1]} \lambda^{t+1} \|e_k(t+1)\| + \\ &b_C \|x_{k+1}(0) - x_k(0)\| + \\ &b_C b_B \lambda (1 + c_1 \lambda \frac{1 - (c_1 \lambda)^T}{1 - c_1 \lambda}) \|\eta_{k+1} - \eta_k\|_\lambda \\ &(t \in [1, T-1]) \end{aligned} \quad (4.4.13)$$

由式(4.4.10)可以看出, 上式对于 $t=0$ 也成立。因此

$$\sup_{t \in [0, T-1]} \lambda^{t+1} \|e_k(t+1)\| \leq \hat{\rho} \sup_{t \in [0, T-1]} \lambda^{t+1} \|e_k(t+1)\| + \varepsilon_{k+1} \quad (4.4.14)$$

$$\begin{aligned} \text{式中 } \bar{\rho} &= \bar{\rho} + c_2 c_1 \lambda \frac{1 - (c_1 \lambda)^T}{1 - c_1 \lambda}, \varepsilon_{k+1} = b_C \|x_{k+1}(0) - x_k(0)\| + \\ &b_C b_B \lambda (1 + c_1 \lambda \frac{1 - (c_1 \lambda)^T}{1 - c_1 \lambda}) \|\eta_{k+1} - \eta_k\|_\lambda \end{aligned}$$

利用定理中的初始条件和干扰条件,有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in [1, T]} \lambda^t \|e_k(t)\| = 0$$

又由 $\sup_{t \in [1, T]} \|e_k(t)\| \leq \lambda^{-T} \sup_{t \in [1, T]} \lambda^t \|e_k(t)\|$

可知 $\sup_{t \in [1, T]} \|e_k(t)\| \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$ 。证毕。

值得说明的是,定理 4.4.2 中的初态 x^0 可以任意指定。这与连续系统存在初态偏移的情形是不同的。下面,通过算例作进一步说明。

例 4.4.1 考虑下述非线性离散系统

$$y(t+1) = \theta_1[y(t)y(t-1) + y(t-1)y(t-2) + y(t-2)y(t-3)] + [\theta_2 + \theta_3 \cos(y(t))]^{-1}(u(t) + \eta(t))$$

式中, $t \in [0, 50]$; $\theta_1 = 0.1$, $\theta_2 = 1$, $\theta_3 = 0.1$; 输入干扰 $\eta(t) = 0.1 \sin(\frac{\pi}{10}t)$ 。定义 $x_1(t) = y(t)$, $x_2 = y(t-1)$, $x_3(t) = y(t-2)$, $x_4(t) = y(t-3)$, 可写出系统的状态空间表达式

$$\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \\ x_4(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1(x) + a_2(x)(u(t) + \eta(t)) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}$$

式中 $a_1(x) = \theta_1[x_1(t)x_2(t) + x_2(t)x_3(t) + x_3(t)x_4(t)]$, $a_2(x) = [\theta_2 + \theta_3 \cos(x_1(t))]^{-1}$ 。设定系统初态为 $x_{i,k}(0) = i (i = 1, 2, 3, 4)$ 。采用学习律(4.4.2), 其中学习增益 $\Gamma = 0.8$ 。迭代 10 次。迭代输出轨迹如图 4.4.1 所示。由图中可以看出, 除 $t=0$ 点外, 迭代轨迹收敛于期望轨迹 $y_d(t) = \sin(\frac{\pi}{10}t)$ 。

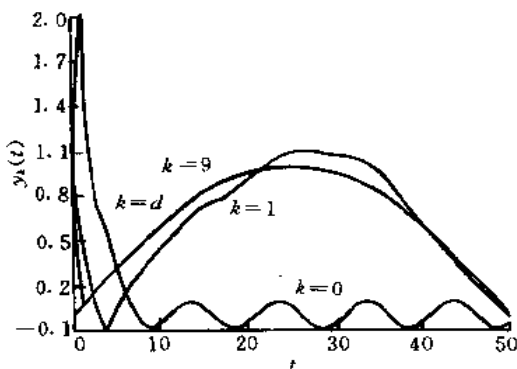


图 4.4.1 例 4.4.1 的迭代输出轨迹

4.5 高增益反馈学习律

本节讨论闭环系统的迭代学习控制问题。考虑 n 关节机器人动力学方程

$$A(q)\ddot{q} + B(q, \dot{q})\dot{q} + C(q) = M \quad (4.5.1)$$

式中 $q \in \mathbb{R}^n$ 为广义位置坐标向量, $M \in \mathbb{R}^n$ 为广义关节力矩向量; $A(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为对称正定惯性矩阵, $B(q, \dot{q})\dot{q} \in \mathbb{R}^n$ 为哥氏力、向心力及粘滞摩擦力等作用向量, $C(q) \in \mathbb{R}^n$ 为重力作用向量; 矩阵 A 、 B 、 C 关于各自变量连续, 且满足局部一致 Lipschitz 条件。

采用反馈律

$$M = m - K_A \ddot{q} - K_B \dot{q} - K_C q \quad (4.5.2)$$

这里 K_A 、 K_B 、 K_C 分别为加速度、速度、位移增益; m 为学习控制分量。

将式(4.5.2)代入式(4.5.1), 系统闭环方程为

$$[K_A + A(q)]\ddot{q} + [K_B + B(q, \dot{q})]\dot{q} + K_C q + C(q) = m \quad (4.5.3)$$

式(4.5.3)可被看作为下述方程的扰动方程

$$K_A \ddot{q} + K_B \dot{q} + K_C q = m \quad (4.5.4)$$

相应地, $A(q)$ 、 $B(q, \dot{q})$ 、 $C(q)$ 被看作为增益 K_A 、 K_B 、 K_C 的扰动项。

给定期望轨迹 $q^*(t \in [0, T])$ 。设 q^* 、 \dot{q}^* 、 \ddot{q}^* 在 $[0, T]$ 上有界。记使系统(4.5.3)跟踪 q^* 的控制输入为 m^* , 则

$$m^* = [K_A + A(q^*)]\ddot{q}^* + [K_B + B(q^*, \dot{q}^*)]\dot{q}^* + K_C q^* + C(q^*)$$

由于 A 、 B 、 C 未知, 故不可能由该式直接计算得出 m^* 。可利用迭代学习控制技术获得 m^* 。采用学习律

$$m_{k+1} = m_k - K_A \delta \ddot{q}_k - K_B \delta \dot{q}_k - K_C \delta q_k \quad (4.5.5)$$

式中 $\delta q_k = q_k - q^*$ 、 $\delta \dot{q}_k = \dot{q}_k - \dot{q}^*$ 、 $\delta \ddot{q}_k = \ddot{q}_k - \ddot{q}^*$ 。式(4.5.5)又可写成

$$m_k = m_0 - \sum_{i=0}^{k-1} (K_A \delta \ddot{q}_i + K_B \delta \dot{q}_i + K_C \delta q_i)$$

这里, 可取 $m_0 = K_A \ddot{q}^* + K_B \dot{q}^* + K_C q^*$ 。

选取增益矩阵

$$K_A = \alpha \bar{K}_A \quad K_B = \alpha \bar{K}_B \quad K_C = \alpha \bar{K}_C \quad (\alpha > 0) \quad (4.5.6)$$

这里 \bar{K}_A 、 \bar{K}_B 、 \bar{K}_C 为给定增益矩阵。记

$$\{u, \bar{A}(q), \bar{B}(q, \dot{q}), \bar{C}(q)\} = \frac{1}{\alpha} \{m, A(q), B(q, \dot{q}), C(q)\}$$

则式(4.5.3)和式(4.5.4)可写成

$$[\bar{K}_A + \bar{A}(q)]\ddot{q} + [\bar{K}_B + \bar{B}(q, \dot{q})]\dot{q} + \bar{K}_C q + \bar{C}(q) = u \quad (4.5.7)$$

$$\bar{K}_A \ddot{q} + \bar{K}_B \dot{q} + \bar{K}_C q = u \quad (4.5.8)$$

对于任何有限 q 、 \dot{q} , 有

$$\bar{A}(q) \rightarrow 0 \quad \bar{B}(q, \dot{q}) \rightarrow 0 \quad \bar{C}(q) \rightarrow 0 \quad (\alpha \rightarrow \infty)$$

因此, 式(4.5.7)可以看作是由参数 α 描述的一类系统, 而式(4.5.8)是它的极限方程。

当存在初始扰动 $(\delta q_k(0), \delta \dot{q}_k(0))$ 时, 下面证明该迭代学习控制系统的误差轨迹 $(\delta q_k, \delta \dot{q}_k, \delta \ddot{q}_k)$ 的一致有界性。

引理 4.5.1^[62] 考虑由参数 α 描述的系统

$$\dot{x} = f_\alpha(x, y(x, t)) \quad (4.5.9)$$

式中 $x \in \mathbb{R}^n$, $\|y(x, t)\| \leq h(t)$, h 为连续函数; f 关于各自变量连续。如果

(1) 在任何紧集 $W \subset \mathbb{R}^{2n}$ 上, 当 $\alpha \rightarrow \infty$ 时 $f_\alpha(x, y)$ 一致收敛于 $f(x)$, $(x, y) \in W$

(2) $f_\alpha(0, y) = 0, y \in \mathbb{R}^n$

(3) 极限方程

$$\dot{x} = f(x) \quad (4.5.10)$$

的零解一致渐近稳定。

那么 $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_\varepsilon > 0, \rho_\varepsilon > 0, \theta_\varepsilon > 0$, 当 $\alpha \geq \alpha_\varepsilon, \|x_0\| \leq \rho_\varepsilon, \|g(x, t)\| \leq \theta_\varepsilon$ (对于 $\|x(t)\| \leq \varepsilon, \forall t$) 时, $\|x_\alpha(t, x_0)\| \leq \varepsilon, \forall t$ 。这里 $x_\alpha(t, x_0)$ 为下述扰动系统的解

$$\dot{x} = f_\alpha(x, y) + g(x, t), \quad x_\alpha(0, x_0) = x_0 \quad (4.5.11)$$

证明 对于极限方程(4.5.10)的假设(3)保证了下述扰动极限系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x, t), \quad x(0, x_0) = x_0 \quad (4.5.12)$$

具有性质: $\forall \varepsilon > 0, \exists \rho_\varepsilon > 0, \bar{\theta}_\varepsilon > 0$, 当 $\|x_0\| \leq \rho_\varepsilon, \|g(x, t)\| \leq \bar{\theta}_\varepsilon$ (对于 $\|x\| \leq \varepsilon, \forall t$) 时, $\|x(t, x_0)\| \leq \varepsilon, \forall t$ 。

式(4.5.11)可写成

$$\dot{x} = f(x) + [g(x, t) + f_\alpha(x, y) - f(x)] \quad (4.5.13)$$

$$x(0, x_0) = x_0$$

这里, 将 $[g(x, t) + f_\alpha(x, y) - f(x)]$ 作为扰动项。因此, 与(4.5.12)相比较, 欲使 $\|x_\alpha(t, x_0)\| \leq \varepsilon$, 只要 $\|x_0\| \leq \rho_\varepsilon$, 以及

$$\|g(x, t) + f_\alpha(x, y) - f(x)\| \leq \bar{\theta}_\varepsilon$$

对于

$$(\|x\| \leq \varepsilon, \forall t) \quad (4.5.14)$$

由假设(1)知, $\forall \delta > 0, \exists \alpha_{\delta, \varepsilon} > 0$, 当 $\|x\| \leq \varepsilon, \alpha \geq \alpha_{\delta, \varepsilon}$ 时

$$\|f_a(x, y) - f(x)\| \leq \delta \quad (4.5.15)$$

取

$$\delta = \lambda \bar{\theta}_\epsilon \quad (0 < \lambda < 1)$$

$$\alpha_\epsilon = \alpha_\lambda \bar{\theta}_\epsilon, \epsilon$$

当

$$\|g(x, t)\| \leq (1 - \lambda)\bar{\theta}_\epsilon \triangleq \bar{\theta}_\epsilon \quad (\text{对于 } \|x\| \leq \epsilon, \forall t)$$

时

$$\begin{aligned} \|g(x, t) + f_a(x, y) - f(x)\| &\leq \\ \|g(x, t)\| + \|f_a(x, y) - f(x)\| &\leq \\ (1 - \lambda)\bar{\theta}_\epsilon + \lambda\bar{\theta}_\epsilon &= \bar{\theta}_\epsilon \end{aligned}$$

即式(4.5.14)成立。证毕。

给定 $\alpha > 0$, 记 u_a^* 为系统(4.5.7)跟踪期望轨迹 q^* 时的控制输入, 有

$$\begin{aligned} &[\bar{K}_A + \bar{A}]\delta\ddot{q} + [\bar{K}_B + \bar{B}]\delta\dot{q} + \bar{K}_C\delta q + [\bar{A} - \bar{A}^*]\ddot{q}^* + \\ &[\bar{B} - \bar{B}^*]\dot{q}^* + \bar{C} - \bar{C}^* = \delta u \end{aligned} \quad (4.5.16)$$

式中 $\delta u = u - u_a^*$; $\bar{A} = \bar{A}(q)$, $\bar{A}^* = \bar{A}(q^*)$, $\bar{B} = \bar{B}(q, \dot{q})$, $\bar{B}^* = \bar{B}(q^*, \dot{q}^*)$, $\bar{C} = \bar{C}(q)$, $\bar{C}^* = \bar{C}(q^*)$ 。假设系统(4.5.16)存在初始扰动 $(\delta q(0), \delta\dot{q}(0))$ 。

引理 4.5.2 若

$$K \triangleq \begin{pmatrix} 0 & I \\ \bar{K}_A^{-1}\bar{K}_C & \bar{K}_A^{-1}\bar{K}_B \end{pmatrix} \quad (4.5.17)$$

的所有特征值位于单位圆内, 则 $\forall \epsilon > 0, \exists \alpha_\epsilon > 0, \rho_\epsilon > 0, \theta_\epsilon > 0$, 当

$$\alpha \geq \alpha_\epsilon, \|\delta q(0), \delta\dot{q}(0)\| \leq \rho_\epsilon, \|\delta u\| \leq \theta_\epsilon, \forall t$$

时, 有 $\|\delta q_\alpha, \delta\dot{q}_\alpha, \delta\ddot{q}_\alpha\| \leq \epsilon, \forall t$ 。这里 $(\delta q_\alpha, \delta\dot{q}_\alpha, \delta\ddot{q}_\alpha)$ 为给定 $\alpha > 0$ 时系统(4.5.16)产生的误差轨迹。

证明 定义 $x = [x_1^T, x_2^T]^T = [\delta q_\alpha^T, \delta\dot{q}_\alpha^T]^T$, 则式(4.5.16)可写成

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = & -[\bar{K}_A + \bar{A}]^{-1}([\bar{K}_B + \bar{B}]x_2 + \bar{K}_C x_1 + [\bar{A} - \dot{A}^*]\ddot{q}^* \\ & + [\bar{B} - \dot{B}^*]\dot{q}^* + \bar{C} - \dot{C}^*) + [\bar{K}_A + \bar{A}]^{-1}\delta u \end{aligned} \quad (4.5.18)$$

这里, $[\bar{K}_A + \bar{A}]^{-1}\delta u$ 与式(4.5.11)中的 $g(x, t)$ 相对应, 扰动极限方程(4.5.12)中的 $f(x)$ 对应为

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\bar{K}_A^{-1}(\bar{K}_B x_2 + \bar{K}_C x_1) \end{bmatrix}$$

条件(4.5.17)保证极限方程 $\dot{x} = f(x)$ 零解的渐近稳定性。利用 $q^*, \dot{q}^*, \ddot{q}^*$ 的有界性以及 $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ 满足局部一致 Lipschitz 条件, 容易得知引理 4.5.1 的各条件成立。这样, 由引理 4.5.1 可证得该引理。

定理 4.5.1 若条件(4.5.17)成立, 则 $\forall \epsilon > 0, \exists \rho_\epsilon > 0, \alpha_\epsilon > 0$, 当 $\|\delta q_k(0), \delta \dot{q}_k(0)\| \leq \rho_\epsilon, \alpha \geq \alpha_\epsilon$ 时, $\|\delta q_{k,\alpha}, \delta \dot{q}_{k,\alpha}, \delta \ddot{q}_{k,\alpha}\| \leq \epsilon, \forall t, \forall k$ 。这里, $(\delta q_k(0), \delta \dot{q}_k(0))$ 为第 k 次迭代时的初始扰动, $(\delta q_{k,\alpha}, \delta \dot{q}_{k,\alpha}, \delta \ddot{q}_{k,\alpha})$ 为给定 α 时系统(4.5.16)产生的误差轨迹。

证明 由式(4.5.16)及式(4.5.5)可知

$$\begin{aligned} \delta u_{k+1,\alpha} = & \bar{A}_k \delta \ddot{q}_{k,\alpha} + \bar{B}_k \delta \dot{q}_{k,\alpha} + (\bar{A}_k - \bar{A}^*)\ddot{q}^* + \\ & (\bar{B}_k - \bar{B}^*)\dot{q}^* + \bar{C}_k - \bar{C}^* \end{aligned} \quad (4.5.19)$$

由 $q^*, \dot{q}^*, \ddot{q}^*$ 的有界性及 $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ 满足局部一致 Lipschitz 条件, 知在紧集 $\{(\delta q_{k,\alpha}, \delta \dot{q}_{k,\alpha}, \delta \ddot{q}_{k,\alpha}) : \|\delta q_{k,\alpha}, \delta \dot{q}_{k,\alpha}, \delta \ddot{q}_{k,\alpha}\| \leq \epsilon\}$ 上, $\exists \beta_\epsilon < \infty$ 使得

$$\begin{aligned} \|\delta u_{k+1,\alpha}\| & \leq \beta_\epsilon \|\delta q_{k,\alpha}, \delta \dot{q}_{k,\alpha}, \delta \ddot{q}_{k,\alpha}\| \leq \\ & \beta_\epsilon \epsilon \triangleq \theta_\epsilon \end{aligned} \quad (4.5.20)$$

考虑 $k=0$ 的情形。由于

$$u_0 = \bar{K}_A \ddot{q}^* + \bar{K}_B \dot{q}^* + \bar{K}_C q^*$$

将该 u_0 作用于系统(4.5.16), 则

$$\begin{aligned}\delta u_{0,\alpha} &= u_0 - u_\alpha^* = \\ &= \bar{A}^* \ddot{q}^* - \bar{B}^* \dot{q}^* - \bar{C}^*\end{aligned}$$

由于 $\bar{A}^* \rightarrow 0, \bar{B}^* \rightarrow 0, \bar{C}^* \rightarrow 0, (\alpha \rightarrow \infty)$ 以及 $q^*, \dot{q}^*, \ddot{q}^*$ 的一致有界性, 故对于引理 4.5.2 中给定的 $\epsilon > 0, \exists \alpha_\epsilon > 0$, 当 $\alpha \geq \alpha_\epsilon$ 时, $\|\delta u_{0,\alpha}\| \leq \theta_\epsilon, \forall t$ 。进一步地, 由引理 4.5.2 知, 当 $\|\delta q_0(0), \delta \dot{q}_0(0)\| \leq \rho_\epsilon, \|\delta q_{0,\alpha}, \delta \dot{q}_{0,\alpha}, \delta \ddot{q}_{0,\alpha}\| \leq \epsilon, \forall t$ 。

考虑第 k 次迭代时的情形。由引理 4.5.2 知, 当 $\alpha \geq \bar{\alpha}_\epsilon, \|\delta q_k(0), \delta \dot{q}_k(0)\| \leq \rho_\epsilon, \|\delta u_{k,\alpha}\| \leq \theta_\epsilon$ 时, $\|\delta q_{k,\alpha}, \delta \dot{q}_{k,\alpha}, \delta \ddot{q}_{k,\alpha}\| \leq \epsilon, \forall t$ 。因而, 由式(4.5.20)可知

$$\|\delta u_{k+1,\alpha}\| \leq \theta_\epsilon$$

至此, 容易证得该定理。

当不存在初始扰动, 即 $\delta q_k(0) = 0, \delta \dot{q}_k(0) = 0 (\forall k)$ 时, 下面讨论该迭代学习控制系统的收敛性。

定理 4.5.2 若条件(4.5.17)成立, 且 $\delta q_k(0) = 0, \delta \dot{q}_k(0) = 0, \forall k$ 。则存在 $\bar{\alpha} > 0$, 当 $\alpha \geq \bar{\alpha}$ 时, 学习律(4.5.5)作用下的系统(4.5.7)产生的轨迹 $(q_{k,\alpha}, \dot{q}_{k,\alpha}, \ddot{q}_{k,\alpha})$ 一致收敛于期望轨迹 $(q^*, \dot{q}^*, \ddot{q}^*)$ 。即 $\delta q_{k,\alpha} \rightarrow 0, \delta \dot{q}_{k,\alpha} \rightarrow 0, \delta \ddot{q}_{k,\alpha} \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty) (t \in [0, T])$ 。

证明 由式(4.5.16)及式(4.5.19)可知

$$\begin{aligned}\ddot{q}_{k,\alpha} &= [\bar{K}_A + \bar{A}_k]^{-1} [-\bar{K}_B \delta \dot{q}_{k,\alpha} - \bar{K}_C \delta q_{k,\alpha} - \bar{B}_k \delta \dot{q}_{k,\alpha} + \\ &\quad \bar{A}_{k-1} \ddot{q}_{k-1,\alpha} + \bar{B}_{k-1} \delta \dot{q}_{k-1,\alpha} + (\bar{A}_{k-1} - \bar{A}_k) \ddot{q}^* + \\ &\quad (\bar{B}_{k-1} - \bar{B}_k) \dot{q}^* + \bar{C}_{k-1} - \bar{C}_k] \triangleq \\ &\quad \bar{f}(\delta q_{k,\alpha}, \delta \dot{q}_{k,\alpha}, \delta q_{k-1,\alpha}, \delta \dot{q}_{k-1,\alpha}, \delta \ddot{q}_{k-1,\alpha}) \quad (4.5.21)\end{aligned}$$

记 $\bar{f}(\delta q_{k,\alpha}, \delta \dot{q}_{k,\alpha}, \delta q_{k-1,\alpha}, \delta \dot{q}_{k-1,\alpha}, \delta \ddot{q}_{k-1,\alpha}) = (\delta \ddot{q}_{k,\alpha}, \bar{f}(\delta q_{k,\alpha}, \delta \dot{q}_{k,\alpha}, \delta q_{k-1,\alpha}, \delta \dot{q}_{k-1,\alpha}, \delta \ddot{q}_{k-1,\alpha}))$ 。由于 $q^*, \dot{q}^*, \ddot{q}^*$ 的有界性及 $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ 满足局部一致 Lipschitz 条件, 可知在紧集 $(\delta q_{k,\alpha}, \delta \dot{q}_{k,\alpha},$

$\delta \ddot{q}_{k,\alpha}$): $\|\delta q_{k,\alpha}, \delta \dot{q}_{k,\alpha}, \delta \ddot{q}_{k,\alpha}\| \leq \epsilon, \forall t, \forall k$ 上, $\exists k_{f1}, k_{f2}, k_f$
 $< \infty$, 使得

$$\begin{aligned} & \| \bar{f}(\delta q_{k,\alpha}, \delta \dot{q}_{k,\alpha}, \delta q_{k-1,\alpha}, \delta \dot{q}_{k-1,\alpha}, \delta \ddot{q}_{k-1,\alpha}) \| \leq \\ & k_{f1} \|\delta q_{k,\alpha}, \delta \dot{q}_{k,\alpha}\| + k_{f2} \|\delta q_{k-1,\alpha}, \delta \dot{q}_{k-1,\alpha}, \delta \ddot{q}_{k-1,\alpha}\| \\ & \| f(\delta q_{k,\alpha}, \delta \dot{q}_{k,\alpha}, \delta q_{k-1,\alpha}, \delta \dot{q}_{k-1,\alpha}, \delta \ddot{q}_{k-1,\alpha}) \| \leq \\ & k_f (\|\delta q_{k,\alpha}, \delta \dot{q}_{k,\alpha}\| + \|\delta q_{k-1,\alpha}, \delta \dot{q}_{k-1,\alpha}, \delta \ddot{q}_{k-1,\alpha}\|) \end{aligned}$$

由于 $\bar{A} \rightarrow 0, \bar{B} \rightarrow 0, \bar{C} \rightarrow 0 (\alpha \rightarrow \infty)$, 设选取 α 足够大以使得 $k_{f2} < 1$ 。

由初始条件 $\delta q_k(0), \delta \dot{q}_k(0) = 0 (\forall k)$, 得

$$\begin{aligned} & \|\delta q_{k,\alpha}, \delta \dot{q}_{k,\alpha}\| \leq \\ & \int_0^t \|f(\delta q_{k,\alpha}, \delta \dot{q}_{k,\alpha}, \delta q_{k-1,\alpha}, \delta \dot{q}_{k-1,\alpha}, \delta \ddot{q}_{k-1,\alpha})\| d\tau \leq \\ & \int_0^t k_f (\|\delta q_{k,\alpha}, \delta \dot{q}_{k,\alpha}\| + \|\delta q_{k-1,\alpha}, \delta \dot{q}_{k-1,\alpha}, \delta \ddot{q}_{k-1,\alpha}\|) d\tau \end{aligned}$$

应用 Bellman-Gronwall 引理, 得

$$\|\delta q_{k,\alpha}, \delta \dot{q}_{k,\alpha}\| \leq \int_0^t k_f e^{k_f(t-\tau)} \|\delta q_{k-1,\alpha}, \delta \dot{q}_{k-1,\alpha}, \delta \ddot{q}_{k-1,\alpha}\| d\tau$$

两端同乘函数 $e^{-\lambda t} (\lambda > k_f)$, 并利用 λ 范数的定义, 有

$$e^{-\lambda t} \|\delta q_{k,\alpha}, \delta \dot{q}_{k,\alpha}\| \leq k_f \lambda_f \|\delta q_{k-1,\alpha}, \delta \dot{q}_{k-1,\alpha}, \delta \ddot{q}_{k-1,\alpha}\|_\lambda \quad (4.5.22)$$

式中 $\lambda_f = \frac{1 - e^{(k_f - \lambda)T}}{\lambda - k_f}$ 。另外, 由式(4.5.21)可知

$$\|\delta \ddot{q}_{k,\alpha}\| \leq k_{f1} \|\delta q_{k,\alpha}, \delta \dot{q}_{k,\alpha}\| + k_{f2} \|\delta q_{k-1,\alpha}, \delta \dot{q}_{k-1,\alpha}, \delta \ddot{q}_{k-1,\alpha}\|$$

两端也同乘函数 $e^{-\lambda t}$, 有

$$\begin{aligned} & e^{-\lambda t} \|\delta \ddot{q}_{k,\alpha}\| \leq \\ & k_{f1} e^{-\lambda t} \|\delta q_{k,\alpha}, \delta \dot{q}_{k,\alpha}\| + k_{f2} \|\delta q_{k-1,\alpha}, \delta \dot{q}_{k-1,\alpha}, \delta \ddot{q}_{k-1,\alpha}\|_\lambda \leq \\ & (k_{f1} k_f \lambda_f + k_{f2}) \|\delta q_{k-1,\alpha}, \delta \dot{q}_{k-1,\alpha}, \delta \ddot{q}_{k-1,\alpha}\|_\lambda \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} & \| \delta \mathbf{q}_{k,\alpha}, \delta \dot{\mathbf{q}}_{k,\alpha}, \delta \ddot{\mathbf{q}}_{k,\alpha} \|_{\lambda} \leq \\ & (k\bar{j}_2 + (k\bar{j}_1 + 1)k_f\lambda_f) \| \delta \mathbf{q}_{k-1,\alpha}, \delta \dot{\mathbf{q}}_{k-1,\alpha}, \delta \ddot{\mathbf{q}}_{k-1,\alpha} \|_{\lambda} \end{aligned} \quad (4.5.23)$$

选取 $\lambda > k_f$ 足够大, 使得

$$k\bar{j}_2 + (k\bar{j}_1 + 1)k_f\lambda_f < 1$$

则有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \| \delta \mathbf{q}_{k,\alpha}, \delta \dot{\mathbf{q}}_{k,\alpha}, \delta \ddot{\mathbf{q}}_{k,\alpha} \|_{\lambda} = 0$$

因此

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \| \delta \mathbf{q}_{k,\alpha}, \delta \dot{\mathbf{q}}_{k,\alpha}, \delta \ddot{\mathbf{q}}_{k,\alpha} \| = 0 \quad (t \in [0, T])$$

证毕。

从迭代学习控制系统因果性的定义知, 计算第 $k+1$ 次迭代时刻 t 的控制 $u_{k+1}(t)$ 时, 可使用该次迭代时刻 t 的跟踪误差信号 $e_{k+1}(t)$, 即采用学习律

$$u_{k+1}(t) = U(u_k(t), e_{k+1}(t), t)$$

这种学习律称为闭环学习律。由上面的讨论可以看出, 与开环学习律相比较, 有直接的设计方法整定闭环学习律中的增益矩阵。采用闭环学习律的迭代学习控制系统结构图如图 4.5.1 所示。

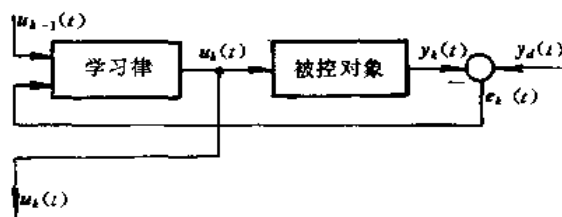


图 4.5.1 闭环学习律

在式(4.5.2)、式(4.5.5)中, 均采用了加速度信号。下面讨论不采用加速度信号的闭环学习律。这里仅讨论算法收敛性。式(4.5.1)可写成

$$\dot{\mathbf{x}}^1 = \mathbf{x}^2$$

$$\dot{\mathbf{x}}^2 = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (4.5.24)$$

式中 $\mathbf{x}^T = [\mathbf{x}^{1T}, \mathbf{x}^{2T}] \triangleq [\mathbf{q}^T, \dot{\mathbf{q}}^T]$, $\mathbf{x}^1 \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{x}^2 \in \mathbf{R}^n$; $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$ 。设 \mathbf{f} 、 \mathbf{B} 关于 \mathbf{x} 满足一致全局 Lipschitz 条件, Lipschitz 常数分别记为 k_f 、 k_B 。 \mathbf{B} 对称正定, 且 \mathbf{B}^{-1} 、 $\frac{d}{dt}\mathbf{B}^{-1}$ 有界。

给定可达的期望轨迹 $\mathbf{x}_d \triangleq [\mathbf{x}_d^{1T}, \mathbf{x}_d^{2T}]^T (t \in [0, T])$ 。采用闭环学习律

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + \mathbf{\Gamma} \mathbf{e}_{k+1}$$

取 $\mathbf{\Gamma} = [a\gamma \mathbf{I}, \gamma \mathbf{I}]$, $a > 0$, $\gamma > 0$,

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + a\gamma \mathbf{e}_{k+1}^1 + \gamma \mathbf{e}_{k+1}^2 \quad (4.5.25)$$

式中 $\mathbf{e}_k^1 = \mathbf{x}_d^1 - \mathbf{x}_k^1$, $\mathbf{e}_k^2 = \mathbf{x}_d^2 - \mathbf{x}_k^2$ 。设 $\mathbf{u}_0(t) = \mathbf{0} (t \in [0, T])$ 。记 $\mathbf{z}_k = a\mathbf{e}_k^1 + \mathbf{e}_k^2$, $\Delta \mathbf{u}_k = \mathbf{u}_d - \mathbf{u}_k$, 则

$$\Delta \mathbf{u}_k = \Delta \mathbf{u}_{k+1} + \gamma \mathbf{z}_{k+1} \quad (4.5.26)$$

$$\dot{\mathbf{z}}_k = a\mathbf{e}_k^2 + \Delta \mathbf{f}_k + \Delta \mathbf{B}_k \mathbf{u}_d + \mathbf{B}_k \Delta \mathbf{u}_k$$

由

$$\Delta \mathbf{u}_k = \mathbf{B}_k^{-1} [\dot{\mathbf{z}}_k - a\mathbf{e}_k^2 - \Delta \mathbf{f}_k - \Delta \mathbf{B}_k \mathbf{u}_d] \quad (4.5.27)$$

式中 $\Delta \mathbf{f}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_d) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$, $\Delta \mathbf{B}_k = \mathbf{B}(\mathbf{x}_d) - \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)$ 。定义

$$V_k = \frac{1}{\gamma} \int_0^t \Delta \mathbf{u}_k^T \Delta \mathbf{u}_k d\tau \quad (4.5.28)$$

由式(4.5.26)、式(4.5.27)可知

$$\begin{aligned} \Delta V_{k+1} &\triangleq V_{k+1} - V_k = \\ &= -\gamma \int_0^t \mathbf{z}_{k+1}^T \mathbf{z}_{k+1} d\tau - 2 \int_0^t \mathbf{z}_{k+1}^T \Delta \mathbf{u}_{k+1} d\tau = \\ &= -\gamma \int_0^t \mathbf{z}_{k+1}^T \mathbf{z}_{k+1} d\tau - \\ &= 2 \int_0^t \mathbf{z}_{k+1}^T \mathbf{B}_{k+1}^{-1} (\dot{\mathbf{z}}_{k+1} - a\mathbf{e}_{k+1}^2 - \Delta \mathbf{f}_{k+1} - \Delta \mathbf{B}_{k+1} \mathbf{u}_d) d\tau \end{aligned}$$

由于 \mathbf{B}_{k+1}^{-1} 对称

$$2 \int_0^t \mathbf{z}_{k+1}^T \mathbf{B}_{k+1}^{-1} \dot{\mathbf{z}}_{k+1} d\tau = \mathbf{z}_{k+1}^T \mathbf{B}_{k+1}^{-1} \mathbf{z}_{k+1} \Big|_0^t - \int_0^t \mathbf{z}_{k+1}^T \dot{\mathbf{B}}_{k+1}^{-1} \mathbf{z}_{k+1} d\tau \quad (4.5.29)$$

因此

$$\begin{aligned}
 \Delta V_{k+1} = & -\mathbf{z}_{k+1}^T \mathbf{B}_{k+1}^{-1} \mathbf{z}_{k+1} \Big|_0^t - \int_0^t \mathbf{z}_{k+1}^T (\gamma \mathbf{I} - \dot{\mathbf{B}}_{k+1}^{-1}) \mathbf{z}_{k+1} d\tau + \\
 & 2 \int_0^t \mathbf{z}_{k+1}^T \mathbf{B}_{k+1}^{-1} (a \mathbf{e}_{k+1}^2 + \Delta \mathbf{f}_{k+1} + \Delta \mathbf{B}_{k+1} \mathbf{u}_d) d\tau = \\
 & -\mathbf{z}_{k+1}^T \mathbf{B}_{k+1}^{-1} \mathbf{z}_{k+1} \Big|_0^t - \int_0^t [a^2 \mathbf{e}_{k+1}^1{}^T (\gamma \mathbf{I} - \dot{\mathbf{B}}_{k+1}^{-1}) \mathbf{e}_{k+1}^1 + \\
 & a \mathbf{e}_{k+1}^1{}^T (\gamma \mathbf{I} - \dot{\mathbf{B}}_{k+1}^{-1} - 2a \mathbf{B}_{k+1}^{-1}) \mathbf{e}_{k+1}^2 + \\
 & a \mathbf{e}_{k+1}^2{}^T (\gamma \mathbf{I} - \dot{\mathbf{B}}_{k+1}^{-1}) \mathbf{e}_{k+1}^1 + \\
 & \mathbf{e}_{k+1}^2{}^T (\gamma \mathbf{I} - \dot{\mathbf{B}}_{k+1}^{-1} - 2a \mathbf{B}_{k+1}^{-1}) \mathbf{e}_{k+1}^2] d\tau + \int_0^t \Delta \mathbf{W}_{k+1}^1 d\tau = \\
 & -\mathbf{z}_{k+1}^T \mathbf{B}_{k+1}^{-1} \mathbf{z}_{k+1} \Big|_0^t - a \gamma \mathbf{e}_{k+1}^1{}^T \mathbf{e}_{k+1}^1 \Big|_0^t - \\
 & \int_0^t (\Delta \mathbf{W}_{k+1}^2 - \Delta \mathbf{W}_{k+1}^1) d\tau \quad (4.5.30)
 \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned}
 \Delta \mathbf{W}_{k+1}^1 = & 2(a \mathbf{e}_{k+1}^1 + \mathbf{e}_{k+1}^2)^T \mathbf{B}_{k+1}^{-1} (\Delta \mathbf{f}_{k+1} + \Delta \mathbf{B}_{k+1} \mathbf{u}_d) \\
 \Delta \mathbf{W}_{k+1}^2 = & a^2 \mathbf{e}_{k+1}^1{}^T (\gamma \mathbf{I} - \dot{\mathbf{B}}_{k+1}^{-1}) \mathbf{e}_{k+1}^1 - \\
 & a \mathbf{e}_{k+1}^1{}^T (\dot{\mathbf{B}}_{k+1}^{-1} + 2a \mathbf{B}_{k+1}^{-1}) \mathbf{e}_{k+1}^2 - \\
 & a \mathbf{e}_{k+1}^2{}^T \dot{\mathbf{B}}_{k+1}^{-1} \mathbf{e}_{k+1}^1 + \mathbf{e}_{k+1}^2{}^T (\gamma \mathbf{I} - \dot{\mathbf{B}}_{k+1}^{-1} - 2a \mathbf{B}_{k+1}^{-1}) \mathbf{e}_{k+1}^2
 \end{aligned}$$

记 \mathbf{B}_k^{-1} , $\dot{\mathbf{B}}_k^{-1}$ 的界分别为 b_1, b_2 , $b_{ud} = \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{u}_d(t)\|$, $b_3 = k_f +$

$k_p b_{ud}$, 则有

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_{k+1}^1{}^T (\gamma \mathbf{I} - \dot{\mathbf{B}}_{k+1}^{-1}) \mathbf{e}_{k+1}^1 & \geq (\gamma - b_2) \|\mathbf{e}_{k+1}^1\|^2 \\
 \mathbf{e}_{k+1}^1{}^T (\dot{\mathbf{B}}_{k+1}^{-1} + 2a \mathbf{B}_{k+1}^{-1}) \mathbf{e}_{k+1}^2 & \leq (b_2 + 2ab_1) \|\mathbf{e}_{k+1}^1\| \|\mathbf{e}_{k+1}^2\| \\
 \mathbf{e}_{k+1}^2{}^T \dot{\mathbf{B}}_{k+1}^{-1} \mathbf{e}_{k+1}^1 & \leq b_2 \|\mathbf{e}_{k+1}^1\| \|\mathbf{e}_{k+1}^2\| \\
 \mathbf{e}_{k+1}^2{}^T (\gamma \mathbf{I} - \dot{\mathbf{B}}_{k+1}^{-1} - 2a \mathbf{B}_{k+1}^{-1}) \mathbf{e}_{k+1}^2 & \geq (\gamma - b_2 - 2ab_1) \|\mathbf{e}_{k+1}^2\|^2 \\
 (a \mathbf{e}_{k+1}^1 + \mathbf{e}_{k+1}^2)^T \mathbf{B}_{k+1}^{-1} (\Delta \mathbf{f}_{k+1} + \Delta \mathbf{B}_{k+1} \mathbf{u}_d) & \leq b_1 b_3 (a \|\mathbf{e}_{k+1}^1\|^2 + \\
 & \|\mathbf{e}_{k+1}^2\|^2 + (a+1) \|\mathbf{e}_{k+1}^1\| \|\mathbf{e}_{k+1}^2\|)
 \end{aligned}$$

因此

$$\Delta W_{k+1}^2 - \Delta W_{k+1}^1 \geq e_{k+1}^T W \bar{e}_{k+1} \quad (4.5.31)$$

式中 $\bar{e}_{k+1} = [\|e_{k+1}^1\|, \|e_{k+1}^2\|]^T$,

$W =$

$$\begin{bmatrix} a^2(\gamma - b_2) - 2ab_1b_3 & -a(b_2 + ab_1) - (a+1)b_1b_3 \\ -a(b_2 + ab_1) - (a+1)b_1b_3 & \gamma - b_2 - 2ab_1 - 2b_1b_3 \end{bmatrix} \quad (4.5.32)$$

由式(4.5.30)可知

$$\begin{aligned} \Delta V_{k+1} \leq & -z_{k+1}^T B_{k+1}^{-1} z_{k+1} \Big|_0^t - a\gamma e_{k+1}^{1T} e_{k+1}^1 \Big|_0^t - \int_0^t \bar{e}_{k+1}^T W \bar{e}_{k+1} d\tau \end{aligned} \quad (4.5.33)$$

通过上述推导,可得定理4.5.3。

定理 4.5.3 若选取 $\gamma > 0$, 使得 $W \geq 0$, 且 $e_k^1(0) = 0, e_k^2(0) = 0, \forall k$ 。由式(4.5.24)、式(4.5.25)描述的迭代学习控制系统, 对于 $t \in [0, T]$ 则

$$\begin{aligned} V_{k+1}(t) &\leq V_k(t) \\ \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t) &= x_d(t) \\ \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(t) &= u_d(t) \end{aligned}$$

利用式(4.5.33)容易证明该定理。由式(4.5.33)可知 V_k 单调递减。而 $V_0 = \frac{1}{\gamma} \int_0^t u_d^T u_d d\tau < \infty$ 。因此, $\{V_k\}$ 收敛且 $\Delta V_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$)。由此可推知 $z_k \rightarrow 0, e_k^1 \rightarrow 0, e_k^2 \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$)。由于 $z_k \rightarrow 0$, 故 $\dot{z}_k \rightarrow 0$ 。这样, 由(4.5.27)可推知 $\Delta u_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$)。

4.6 反馈-前馈迭代学习控制

当控制器使用开环学习律时, 迭代学习控制系统为开环系统。这时, 控制器对被控对象无镇定作用。当控制器使用闭环学习律时, 往往需要高增益反馈。但对于一些含饱和执行器的系统, 高增益反馈会产生过大的控制信号。由于饱和执行器的限幅作用, 学

习控制系统的收敛速度会受到影响。因而,高增益反馈失去意义。显然,对开环迭代学习控制系统引入一反馈环,构成反馈-前馈迭代学习控制系统是提高系统跟踪性能的有效途径。反馈-前馈迭代学习控制系统的控制器由反馈控制器和前馈控制器两部分构成,它使用开闭环配合的学习律。反馈控制器主要用于实现系统镇定任务。它使得系统输出不偏离期望轨迹太远。在反馈控制器的镇定作用下,前馈控制器可期望快速实现完全跟踪任务。

设反馈控制器为

$$u_{fb,k}(t) = h_{fb}(e_k(t))$$

前馈控制器采用开环学习律

$$u_{ff,k+1}(t) = u_{ff,k}(t) + h_{ff}(e_k(t))$$

这时,系统的控制输入可写成

$$\begin{aligned} u_{k+1}(t) &= u_{ff,k+1}(t) + u_{fb,k+1}(t) \\ &= u_{ff,k}(t) + h_{ff}(e_k(t)) + h_{fb}(e_{k+1}(t)) \end{aligned}$$

图 4.6.1(a)给出采用这种反馈-前馈迭代学习控制算法的系统结构图。图 4.6.1(b)给出了另一种采用反馈-前馈迭代学习控制算法的系统结构图。其中,前馈控制器采用开环学习律

$$u_{ff,k+1}(t) = u_k(t) + h_{ff}(e_k(t))$$

这时,系统的控制输入为

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + h_{ff}(e_k(t)) + h_{fb}(e_{k+1}(t))$$

本节讨论由图 4.6.1(a)所示的反馈-前馈迭代学习控制系统。下一节讨论由图 4.6.1(b)所示的反馈-前馈迭代学习控制系统。考虑 n 关节机器人控制系统

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ f(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ B(x) \end{pmatrix} r \quad (4.6.1)$$

设 f, B 关于 x 满足一致全局 Lipschitz 条件, Lipschitz 常数分别记为 k_f, k_B 。 B 对称正定, 且 $B^{-1}, \frac{d}{dt}B^{-1}$ 有界。

给定可达期望轨迹 $x_d(t) \triangleq [x_d^{1T}, x_d^{2T}]^T (t \in [0, T])$ 。采用

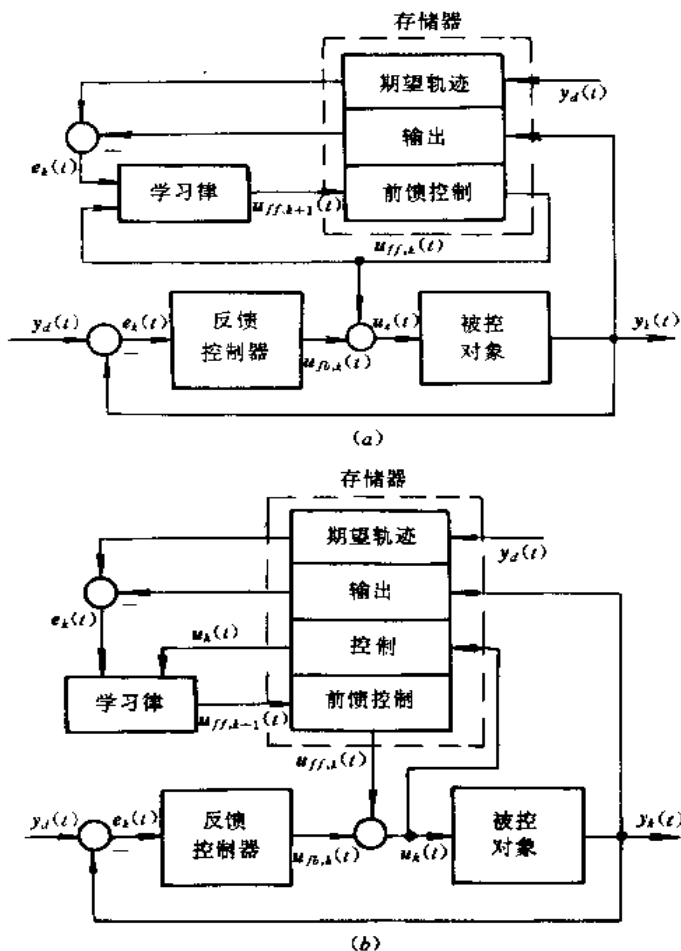


图 4.6.1 反馈-前馈迭代学习控制算法

(a) 算法一; (b) 算法二。

学习控制器

$$r_k = \Gamma e_k + u_k, \Gamma = [a\gamma I, \gamma I] \quad (a > 0, \gamma > 0) \quad (4.6.2a)$$

$$u_{k+1} = u_k + \beta \Gamma e_k \quad (\beta > 0) \quad (4.6.2b)$$

式中 $e_k \triangleq [e_k^{1T}, e_k^{2T}]^T \triangleq x_d - x_k$ 。取 $u_0(t) = 0 (t \in [0, T])$ 。记

$\mathbf{z}_k = a\mathbf{e}_k^1 + \mathbf{e}_k^2$, $\Delta\mathbf{u}_k = \mathbf{r}_d - \mathbf{u}_k$, 则

$$\Delta\mathbf{u}_{k+1} = \Delta\mathbf{u}_k - \beta\gamma\mathbf{z}_k \quad (4.6.3)$$

由

$$\dot{\mathbf{z}}_k = a\mathbf{e}_k^2 + \Delta\mathbf{f}_k + \Delta\mathbf{B}_k\mathbf{r}_d + \mathbf{B}_k\Delta\mathbf{u}_k - \gamma\mathbf{B}_k\mathbf{z}_k$$

解得

$$\Delta\mathbf{u}_k = \mathbf{B}_k^{-1}[\dot{\mathbf{z}}_k + \gamma\mathbf{B}_k\mathbf{z}_k - a\mathbf{e}_k^2 - \Delta\mathbf{f}_k - \Delta\mathbf{B}_k\mathbf{r}_d] \quad (4.6.4)$$

式中 $\Delta\mathbf{f}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_d) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$, $\Delta\mathbf{B}_k = \mathbf{B}(\mathbf{x}_d) - \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)$ 。

定义

$$V_k = \frac{1}{\beta\gamma} \int_0^t \Delta\mathbf{u}_k^T \Delta\mathbf{u}_k d\tau \quad (4.6.5)$$

由于 $\Delta\mathbf{u}_0 = \mathbf{r}_d$, 故

$$V_0 = \frac{1}{\beta\gamma} \int_0^t \mathbf{r}_d^T \mathbf{r}_d d\tau < \infty$$

由式(4.6.3)、式(4.6.4)知

$$\Delta V_k \triangleq V_{k+1} - V_k =$$

$$\beta\gamma \int_0^t \mathbf{z}_k^T \mathbf{z}_k d\tau - 2 \int_0^t \mathbf{z}_k^T \Delta\mathbf{u}_k d\tau =$$

$$\beta\gamma \int_0^t \mathbf{z}_k^T \mathbf{z}_k d\tau - 2 \int_0^t \mathbf{z}_k^T \mathbf{B}_k^{-1} (\dot{\mathbf{z}}_k + \gamma\mathbf{B}_k\mathbf{z}_k - a\mathbf{e}_k^2 - \Delta\mathbf{f}_k - \Delta\mathbf{B}_k\mathbf{r}_d) d\tau$$

由于 \mathbf{B}_k^{-1} 对称

$$2 \int_0^t \mathbf{z}_k^T \mathbf{B}_k^{-1} \dot{\mathbf{z}}_k d\tau = \mathbf{z}_k^T \mathbf{B}_k^{-1} \mathbf{z}_k \Big|_0^t - \int_0^t \mathbf{z}_k^T \dot{\mathbf{B}}_k^{-1} \mathbf{z}_k d\tau \quad (4.6.6)$$

因此

$$\Delta V_k = - \mathbf{z}_k^T \mathbf{B}_k^{-1} \mathbf{z}_k \Big|_0^t + \int_0^t \mathbf{z}_k^T [(2 - \beta)\gamma\mathbf{I} - \dot{\mathbf{B}}_k^{-1}] \mathbf{z}_k d\tau +$$

$$2 \int_0^t \mathbf{z}_k^T \mathbf{B}_k^{-1} (a\mathbf{e}_k^2 + \Delta\mathbf{f}_k + \Delta\mathbf{B}_k\mathbf{r}_d) d\tau =$$

$$- \mathbf{z}_k^T \mathbf{B}_k^{-1} \mathbf{z}_k \Big|_0^t - \int_0^t (a^2 \mathbf{e}_k^{1T} [\mathbf{L} - \dot{\mathbf{B}}_k^{-1}] \mathbf{e}_k^1 +$$

$$a \mathbf{e}_k^{1T} [\mathbf{L} - \dot{\mathbf{B}}_k^{-1} - 2a\mathbf{B}_k^{-1}] \mathbf{e}_k^2 + a \mathbf{e}_k^{2T} [\mathbf{L} - \dot{\mathbf{B}}_k^{-1}] \mathbf{e}_k^1 +$$

$$\mathbf{e}_k^{2T} [\mathbf{L} - \dot{\mathbf{B}}_k^{-1} - 2a\mathbf{B}_k^{-1}] \mathbf{e}_k^2) d\tau + \int_0^t \Delta\mathbf{W}_k^1 d\tau =$$

$$- \mathbf{z}_k^T \mathbf{B}_k^{-1} \mathbf{z}_k \Big|_0^t - a \mathbf{e}_k^{1T} \mathbf{L} \mathbf{e}_k^1 \Big|_0^t - \int_0^t (\Delta \mathbf{W}_k^2 - \Delta \mathbf{W}_k^1) d\tau \quad (4.6.7)$$

式中 $\mathbf{L} = (2 - \beta)\gamma \mathbf{I}$,

$$\Delta \mathbf{W}_k^1 = 2(a\mathbf{e}_k^1 + \mathbf{e}_k^2)^T \mathbf{B}_k^{-1} (\Delta \mathbf{f}_k + \Delta \mathbf{B}_k \mathbf{r}_d)$$

$$\Delta \mathbf{W}_k^2 = a^2 \mathbf{e}_k^{1T} (\mathbf{L} - \dot{\mathbf{B}}_k^{-1}) \mathbf{e}_k^1 - a \mathbf{e}_k^{1T} (\dot{\mathbf{B}}_k^{-1} + 2a\mathbf{B}_k^{-1}) \mathbf{e}_k^2 - a \mathbf{e}_k^{2T} \dot{\mathbf{B}}_k^{-1} \mathbf{e}_k^1 + \mathbf{e}_k^{2T} (\mathbf{L} - \dot{\mathbf{B}}_k^{-1} - 2a\mathbf{B}_k^{-1}) \mathbf{e}_k^2$$

下面, 考虑 $\Delta \mathbf{W}_k^2 - \Delta \mathbf{W}_k^1$ 的正定性. 记 $\mathbf{B}_k^{-1}, \dot{\mathbf{B}}_k^{-1}$ 的界分别为 $b_1, b_2, b_{rd} = \sup_{t \in [0, t]} \|\mathbf{r}_d(t)\|$, $b_3 = k_f + k_B b_{rd}$, 则有

$$\mathbf{e}_k^{1T} (\mathbf{L} - \dot{\mathbf{B}}_k^{-1}) \mathbf{e}_k^1 \geq [(2 - \beta)\gamma - b_2] \|\mathbf{e}_k^1\|^2$$

$$\mathbf{e}_k^{1T} (\dot{\mathbf{B}}_k^{-1} + 2a\mathbf{B}_k^{-1}) \mathbf{e}_k^2 \leq (b_2 + 2ab_1) \|\mathbf{e}_k^1\| \|\mathbf{e}_k^2\|$$

$$\mathbf{e}_k^{2T} \dot{\mathbf{B}}_k^{-1} \mathbf{e}_k^1 \leq b_2 \|\mathbf{e}_k^1\| \|\mathbf{e}_k^2\|$$

$$\mathbf{e}_k^{2T} (\mathbf{L} - \dot{\mathbf{B}}_k^{-1} - 2a\mathbf{B}_k^{-1}) \mathbf{e}_k^2 \geq [(2 - \beta)\gamma - b_2 - 2ab_1] \|\mathbf{e}_k^2\|^2$$

$$(a\mathbf{e}_k^1 + \mathbf{e}_k^2)^T \mathbf{B}_k^{-1} (\Delta \mathbf{f}_k + \Delta \mathbf{B}_k \mathbf{r}_d) \leq 2b_1 b_3 (a \|\mathbf{e}_k^1\|^2 + \|\mathbf{e}_k^2\|^2 +$$

$$(a + 1) \|\mathbf{e}_k^1\| \|\mathbf{e}_k^2\|)$$

因此

$$\Delta \mathbf{W}_k^1 - \Delta \mathbf{W}_k^2 \geq \bar{\mathbf{e}}_k^T \mathbf{W} \bar{\mathbf{e}}_k \quad (4.6.8)$$

式中 $\bar{\mathbf{e}}_k = [\|\mathbf{e}_k^1\|, \|\mathbf{e}_k^2\|]^T$,

$\mathbf{W} =$

$$\begin{bmatrix} a^2[(2 - \beta)\gamma - b_2] - 2ab_1 b_3 & -a(b_2 + ab_1) - (a + 1)b_1 b_3 \\ -a(b_2 + ab_1) - (a + 1)b_1 b_3 & (2 - \beta)\gamma - b_2 - 2ab_1 - 2b_1 b_3 \end{bmatrix}$$

由式(4.6.7)可知

$$\Delta V_k \leq - \mathbf{z}_k^T \mathbf{B}_k^{-1} \mathbf{z}_k \Big|_0^t - a \mathbf{e}_k^{1T} \mathbf{L} \mathbf{e}_k^1 \Big|_0^t - \int_0^t \bar{\mathbf{e}}_k^T \mathbf{W} \bar{\mathbf{e}}_k d\tau \quad (4.6.9)$$

通过上述推导, 可得定理 4.6.1。

定理 4.6.1 若选取 $\beta > 0, \gamma > 0$, 使得 $\mathbf{W} \geq 0$, 且 $\mathbf{e}_k^1(0) = 0, \mathbf{e}_k^2(0) = 0, \forall k$. 在学习控制算法(4.6.2)作用下的系统(4.6.1), 对于 $t \in [0, T]$ 则

$$V_{k+1}(t) \leq V_k(t),$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t) = x_d(t),$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(t) = r_d(t)$$

据上述推导容易证得该定理。由 $W \geq 0$ 知 V_k 单调递减。由于 $V_0 = \frac{1}{\beta\gamma} \int_0^t r_d^T r_d d\tau < \infty$ 。故 $\{V_k\}$ 收敛且 $\Delta V_k \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$ 。因而可推知 $k \rightarrow \infty$ 时, $z_k \rightarrow 0, e_k^1 \rightarrow 0, e_k^2 \rightarrow 0$ 。由于 $z_k \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$, 故 $\dot{z} \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$, 这样, 由式(4.6.4)即可证得 $\Delta u_k \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$ 。

4.7 非正则系统的反馈-前馈迭代学习控制

本节讨论由图 4.6.1(b)所示的反馈-前馈迭代学习控制系统。

4.7.1 连续时间系统

考虑非线性连续系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + B(x(t))u(t) \\ y(t) = g(x(t)) \end{cases} \quad (4.7.1)$$

式中 $x \in \mathbf{R}^n, u, y \in \mathbf{R}^m$ 。非线性函数 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n, B = [b_1, \dots, b_m]: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n \times m}$ 以及 $g = [g_1, \dots, g_m]^T: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ 是 \mathbf{R}^n 上的光滑函数。设对所有的 $x \in \mathbf{R}^n$, 系统(4.7.1)的相对度为 $r = \{r_1, \dots, r_m\}$ 。记跟踪误差 $e(t) = [e_1(t), \dots, e_m(t)]^T = y_d(t) - y(t)$, $y_d(t) = [y_{1,d}(t), \dots, y_{m,d}(t)]^T$ 为给定的期望轨迹。

采用含饱和执行器的反馈-前馈迭代学习控制器

$$\dot{z}(t) = \tilde{f}(z(t)) + \tilde{B}(z(t))e(t) \quad (4.7.2a)$$

$$u_{fb}(t) = \tilde{g}(z(t)) + \tilde{D}(z(t))e(t) \quad (4.7.2b)$$

$$v(t) = u_{ff}(t) + u_{fb}(t) \quad (4.7.2c)$$

$$u(t) = \text{sat}(v(t)) \quad (4.7.2d)$$

式中 $z \in \mathbf{R}^p, u_{fb}, u_{ff} \in \mathbf{R}^m, v = [v_1, \dots, v_m]^T \in \mathbf{R}^m, u \in \mathbf{R}^m$ 。

非线性函数 $\tilde{f}: \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^p, \tilde{g}: \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^m$ 是 \mathbf{R}^p 上的光滑函数, 并且 $\tilde{f}(0), \tilde{g}(0) = 0$; $\tilde{B}: \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^{p \times m}$ 和 $\tilde{D}: \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^{m \times m}$ 在 \mathbf{R}^p 上分段连续。控制器状态 $z(t)$ 具有零初值。饱和函数 $\text{sat}: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$ 定义为 $\text{sat}(v(t)) = [\text{sat}_1(v_1(t)), \dots, \text{sat}_m(v_m(t))]^T$, 其中

$$\text{sat}_i(v_i(t)) = \begin{cases} v_i & v_i(t) \leq \underline{v}_i \\ v_i(t) & \underline{v}_i < v_i(t) < \bar{v}_i \\ \bar{v}_i & v_i(t) \geq \bar{v}_i \end{cases} \quad (4.7.3)$$

这里, $\underline{v}_i, \bar{v}_i (i = 1, \dots, m)$ 为限幅值。

对于学习控制系统(4.7.1)、(4.7.2), 设输出期望轨迹在饱和执行器的线性区内是可达的, 即存在满足

$$u_d(t) = \text{sat}(u_d(t)) \quad (t \in [0, T])$$

的有界输入 $u_d(t) (t \in [0, T])$ 产生给定的输出期望轨迹 $y_d(t) (t \in [0, T])$ 。

记有界控制集 $U = \{u \mid u = \text{sat}(u), u \in \mathbf{R}^m\}$ 。对于给定的期望轨迹 $y_d(t) (t \in [0, T])$ 和初态 $x(0)$ 及 $z(0)$, 设存在紧集 $X \subset \mathbf{R}^n$ 和 $Z \subset \mathbf{R}^p$ 使得当 $u(t) \in U (t \in [0, T])$ 时, $x(t) \in X$ 和 $z(t) \in Z (t \in [0, T])$ 。由于实际机械系统的能量限制, 这一假设对实际机械系统是成立的。在这一假设下, 系统(4.7.1)和(4.7.2)具有以下性质:

(1) 因为 f, B 和 g 在 \mathbf{R}^n 上光滑, 所以在 X 上满足局部一致 Lipschitz 条件。即 $\forall x_1, x_2 \in X, \|h(x_1) - h(x_2)\| \leq k_h \|x_1 - x_2\|, h \in \{f, B, g\}$ 。

(2) 因为 \tilde{f} 和 \tilde{g} 在 \mathbf{R}^p 上是光滑的, 并且 $\tilde{f}(0) = 0, \tilde{g}(0) = 0$, 所以存在 $k_{\tilde{f}}$ 和 $k_{\tilde{g}}$ 使得 $\forall z \in Z, \|h(z)\| \leq k_h \|z\|, h \in \{\tilde{f}, \tilde{g}\}$ 。

(3) 因为 \tilde{B} 和 \tilde{D} 在 \mathbf{R}^p 上分段连续, B 在 \mathbf{R}^n 上光滑, 所以存在 $b_{\tilde{B}}, b_{\tilde{D}}, b_B$ 使得 $\forall z \in Z, \|\tilde{B}(z)\| \leq b_{\tilde{B}}, \|\tilde{D}(z)\| \leq b_{\tilde{D}}; \forall x \in X, \|B(x)\| \leq b_B$ 。

在(4.7.2c)中,前馈控制器采用学习律

$$u_{ff,k+1}(t) = (1 - \alpha)u_k(t) + \alpha u_{k-j}(t) + \Gamma(y_k(t), t)e_k^{(r)}(t) \quad (4.7.4)$$

式中 $e_k^{(r)}(t) = [e_{1,k}^{(r)}(t), \dots, e_{m,k}^{(r)}(t)]^T$; $0 < \alpha < 1$ 是遗忘因子; $0 \leq j \leq N-1$, N 为选择学习周期; $\Gamma \in \mathbf{R}^{m \times m}$ 为有界学习增益矩阵。

由相对度定义知 $e_k^{(r)}$ 可表示为

$$e_k^{(r)} = \hat{g}(x_d) - \hat{g}(x_k) + D(x_d)u_d - D(x_k)u_k \quad (4.7.5)$$

其中

$$\hat{g}(x) = \begin{bmatrix} L_f^r g_1(x) \\ \vdots \\ L_f^r g_m(x) \end{bmatrix}$$

$$D(x) = \begin{bmatrix} L_{b_1} L_f^{r_1-1} g_1(x) \cdots L_{b_m} L_f^{r_1-1} g_1(x) \\ \vdots \\ L_{b_1} L_f^{r_m-1} g_m(x) \cdots L_{b_m} L_f^{r_m-1} g_m(x) \end{bmatrix}$$

定理4.7.1 对于由式(4.7.1)、式(4.7.2)和式(4.7.4)描述的迭代学习控制系统,给定可达的期望轨迹 $y_d(t)$ ($t \in [0, T]$)。如果

$$\| (1 - \alpha)I - \Gamma(g(x), t)D(x) \| \leq \rho < 1 - \alpha \quad (4.7.6)$$

$$(x, t) \in \mathbf{R}^n \times [0, T]$$

那么,当 $x_k(0) = x_d(0)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), 跟踪误差在 $[0, T]$ 上一致收敛于零,即 $\lim_{k \rightarrow \infty} \| e_k(t) \| = 0$ ($t \in [0, T]$)。

证明 记 $\Delta u_{ff,k} = u_d - u_{ff,k}$ 。由式(4.7.4)、式(4.7.5)可知

$$\begin{aligned} \|\Delta u_{ff,k+1}\| &= \|(1 - \alpha)(u_d - u_k) + \alpha(u_d - u_{k-j}) - \\ &\quad \Gamma(y_k)\{\hat{g}(x_d) - \hat{g}(x_k) + D(x_d)u_d - D(x_k)u_k\}\| \leq \\ &\quad \|(1 - \alpha)I - \Gamma(y_k)D(x_k)\| \|u_d - u_k\| + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \alpha \|u_d - u_{k-j}\| + \\ & \|\Gamma(y_k)\| (\|\hat{g}(x_d) - \hat{g}(x_k)\| + \\ & \|\mathbf{D}(x_d) - \mathbf{D}(x_k)\| \|u_d\|) \end{aligned} \quad (4.7.7)$$

由于 f, B 和 g 关于 x 是光滑的, 故 \hat{g} 和 D 的元素在 \mathbf{R}^n 上连续, 又由对系统(4.7.1)的假设知, $x_d, x_k \in X$ 。因此, \hat{g}, D 在 X 上满足局部一致 Lipschitz 条件, 即存在 $k_{\hat{g}}, k_D > 0$, 使得 $\|h(x_d) - h(x_k)\| \leq k_h \|x_d - x_k\|$ ($h \in \{\hat{g}, D\}$)。这样, 由式(4.7.7)得

$$\begin{aligned} \|\Delta u_{ff, k+1}\| & \leq \rho \|u_d - u_k\| + \alpha \|u_d - u_{k-j}\| + \\ & b_{\Gamma}(k_{\hat{g}} + k_D b_{ud}) \|x_d - x_k\| \end{aligned} \quad (4.7.8)$$

式中 b_{Γ} 为 Γ 的界, $b_{ud} = \sup_{t \in [0, T]} \|u_d(t)\|$ 。因为期望轨迹在饱和执行器的线性区内是可达的, 所以

$$\|u_d - u_k\| = \|u_d - \text{sat}(v_k)\| \leq \|u_d - v_k\|$$

利用这一性质, 由式(4.7.2c)和式(4.7.2b)可知

$$\begin{aligned} \|u_d - u_k\| & \leq \|\Delta u_{ff, k} - u_{fb, k}\| \leq \\ & \|\Delta u_{ff, k}\| + k_{\hat{g}} \|z_k\| + b_{\hat{D}} \|e_k\| \leq \\ & \|\Delta u_{ff, k}\| + k_{\hat{g}} \|z_k\| + \\ & b_{\hat{D}} k_g \|x_d - x_k\| \end{aligned} \quad (4.7.9a)$$

同理

$$\begin{aligned} \|u_d - u_{k-j}\| & \leq \|\Delta u_{ff, k-j}\| + k_{\hat{g}} \|z_{k-j}\| + \\ & b_{\hat{D}} k_g \|x_d - x_{k-j}\| \end{aligned} \quad (4.7.9b)$$

由式(4.7.8)、式(4.7.9)可得

$$\begin{aligned} \|\Delta u_{ff, k+1}\| & \leq \rho (\|\Delta u_{ff, k}\| + k_{\hat{g}} \|z_k\| + b_{\hat{D}} k_g \|x_d - x_k\|) + \\ & \alpha (\|\Delta u_{ff, k-j}\| + k_{\hat{g}} \|z_{k-j}\| + \\ & b_{\hat{D}} k_g \|x_d - x_{k-j}\|) + \\ & b_{\Gamma}(k_{\hat{g}} + k_D b_{ud}) \|x_d - x_k\| \leq \\ & \rho \|\Delta u_{ff, k}\| + \alpha \|\Delta u_{ff, k-j}\| + \\ & b_1 (\|x_d - x_k\| + \|z_k\|) + \\ & b_2 (\|x_d - x_{k-j}\| + \|z_{k-j}\|) \end{aligned} \quad (4.7.10)$$

式中 $b_1 = \max\{\rho k_g^*, \rho b_{\bar{D}} k_g + b_{\Gamma}(k_g^* + k_D b_{ud})\}$, $b_2 = \max\{a k_g^*, a b_{\bar{D}} k_g\}$ 。利用初始条件 $x_k(0) = x_d(0)$, $z_k(0) = 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) 有

$$x_d - x_k = \int_0^t \{f(x_d) - f(x_k) + (B(x_d) - B(x_k))u_d + B(x_k)(u_d - u_k)\} d\tau \quad (4.7.11)$$

$$z_k = \int_0^t \{\tilde{f}(z_k) + \tilde{B}(z_k)e_k\} d\tau \quad (4.7.12)$$

对式(4.7.11)和式(4.7.12)两式分别取范数, 可得

$$\begin{aligned} \|x_d - x_k\| &\leq \int_0^t \{ (k_f + k_B b_{ud} + b_B b_{\bar{D}} k_g) \|x_d - x_k\| + \\ &\quad b_B k_g^* \|z_k\| + b_B \|\Delta u_{ff,k}\| \} d\tau \\ \|z_k\| &\leq \int_0^t \{ k_{\tilde{f}} \|z_k\| + b_{\tilde{B}} k_g \|x_d - x_k\| \} d\tau \end{aligned}$$

上面两式相加

$$\begin{aligned} \|x_d - x_k\| + \|z_k\| &\leq \int_0^t \{ b_3 (\|x_d - x_k\| + \|z_k\|) + \\ &\quad b_B \|\Delta u_{ff,k}\| \} d\tau \end{aligned} \quad (4.7.13)$$

式中 $b_3 = \max\{k_f + k_B b_{ud} + b_B b_{\bar{D}} k_g + b_{\tilde{B}} k_g^*, b_B k_g^* + k_{\tilde{f}}\}$ 。对式(4.7.13)应用 Bellman-Gronwall 引理, 得

$$\|x_d - x_k\| + \|z_k\| \leq b_B \int_0^t e^{b_3(t-\tau)} \|\Delta u_{ff,k}\| d\tau \quad (4.7.14a)$$

同样, 有

$$\|x_d - x_{k-j}\| + \|z_{k-j}\| \leq b_B \int_0^t e^{b_3(t-\tau)} \|\Delta u_{ff,k-j}\| d\tau \quad (4.7.14b)$$

将式(4.7.14)代入式(4.7.10), 则

$$\begin{aligned} \|\Delta u_{ff,k+1}\| &\leq \rho \|\Delta u_{ff,k}\| + \alpha \|\Delta u_{ff,k-j}\| + \\ &\quad b_1 b_B \int_0^t e^{b_3(t-\tau)} \|\Delta u_{ff,k}\| d\tau + \end{aligned}$$

$$b_2 b_B \int_0^t e^{b_3(t-\tau)} \|\Delta u_{ff, k-j}\| d\tau$$

上式两端同乘 $e^{-\lambda t}$ ($\lambda > b_3$), 并取 λ 范数, 可得

$$\begin{aligned} \|\Delta u_{ff, k+1}\|_\lambda &\leq \{\rho + b_1 b_B \frac{1 - e^{(b_1 - \lambda)T}}{\lambda - b_1}\} \|\Delta u_{ff, k}\|_\lambda + \\ &\quad \{\alpha + b_2 b_B \frac{1 - e^{(b_3 - \lambda)T}}{\lambda - b_3}\} \|\Delta u_{ff, k-j}\|_\lambda \quad (4.7.15) \end{aligned}$$

由式(4.7.6)可知, $\rho < 1 - \alpha$ 。因此, 对于充分大的 $\lambda > b_3$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\Delta u_{ff, k}\|_\lambda = 0$ 。利用 λ 范数的性质和式(4.7.14a), 可证得当 $k \rightarrow \infty$, $\sup_{t \in [0, T]} \|\Delta u_{ff, k}(t)\| \rightarrow 0$, $\sup_{t \in [0, T]} \|z_k(t)\| \rightarrow 0$, $\sup_{t \in [0, T]} \|x_d(t) - x_k(t)\| \rightarrow 0$ 。进一步地, 由 $\|e_k(t)\| \leq k_g \|x_d(t) - x_k(t)\|$, 可证得该定理。

从证明中可以看出, 算法收敛性仅与前馈控制器(4.7.4)的增益矩阵 \mathbf{F} 有关, 与反馈控制器(4.7.2)的系数矩阵无关。这与开环滤波器学习算法不同。

4.7.2 离散时间系统

考虑非线性离散系统

$$\begin{aligned} x_k(t+1) &= f(x_k(t)) + B(x_k(t))u_k(t) \\ y_k(t) &= g(x_k(t)) \end{aligned} \quad (4.7.16)$$

式中 $t \in [0, T]$; $x_k(t) \in \mathbf{R}^n$, $u_k(t), y_k(t) \in \mathbf{R}^m$; f, B, g 是 \mathbf{R}^n 上的光滑函数。设对所有的 $x \in \mathbf{R}^n, u \in \mathbf{R}^m$, 该系统的相对度为 $r = \{r_1, \dots, r_m\}$, 且对每个 $l = 1, 2, \dots, m$

$$\frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j} g_l \circ f^{r_l-1}(f(x) + B(x)u) = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, m) \quad (4.7.17)$$

式中 g_l 为 g 的第 l 个分量。由这一假设知 $\frac{\partial}{\partial u} g_l \circ f^{r_l-1}(f(x) + B(x)u)$ 与 u 无关。因此,

$$D(x, u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u} g_1 \circ f^{r_1-1}(f(x) + B(x)u) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial u} g_m \circ f^{r_m-1}(f(x) + B(x)u) \end{bmatrix}$$

可简写为 $D(x)$ 。

采用反馈-前馈迭代学习控制器

$$z_k(t+1) = \tilde{f}(z_k(t)) + \tilde{B}(z_k(t))e_k(t) \quad (4.7.18a)$$

$$u_{fb,k}(t) = \tilde{g}(z_k(t)) + \tilde{D}(z_k(t))e_k(t) \quad (4.7.18b)$$

$$u_{ff,k+1}(t) = (1-\alpha)u_k(t) + \alpha u_{k-j}(t) + \Gamma(y_k(t), t) \begin{bmatrix} e_{1,k}(t+r_1) \\ \vdots \\ e_{m,k}(t+r_m) \end{bmatrix} \quad (4.7.18c)$$

$$v_k(t) = u_{ff,k}(t) + u_{fb,k}(t) \quad (4.7.18d)$$

$$u_k(t) = \text{sat}(v_k(t)) \quad (4.7.18e)$$

式中 $0 < \alpha < 1$ 是遗忘因子; $0 \leq j \leq N-1$, N 为选择学习周期。 $\text{sat}: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$ 为式(4.7.3)定义的饱和函数。 $z_k(t) \in \mathbf{R}^n$ 为控制器状态; 且具有零初值 $z_k(0) = 0, \forall k$; \tilde{f}, \tilde{g} 是 \mathbf{R}^n 上的光滑函数, 且 $\tilde{f}(0), \tilde{g}(0) = 0$; \tilde{B}, \tilde{D} 有界, 其界分别记为 $b_k, h \in \|\tilde{B}, \tilde{D}\| \circ e_{l,k}$ 为 e_k 的第 l 个分量; $e_k(t) = y_d(t) - y_k(t), t \in [0, T + r_{\max}]$, $r_{\max} = \max_{1 \leq l \leq m} r_l$ 。为了保证期望轨迹的可达性, 设 $y_{l,d}(t) = y_{l,k}(t) (t \in [0, r_l - 1])$, $y_{l,k}$ 为 y_k 的第 l 个分量。

与连续时间情形一样, 为了给出该学习控制算法的收敛性结果, 需对系统(4.7.16)做如下假设: 记有界控制集 $U = \{u \mid u = \text{sat}(u), u \in \mathbf{R}^m\}$ 。对于给定的输出期望轨迹 $y_d(t)$ 和初态 $x(0)$ 及 $z(0)$, 设存在紧集 $X \subset \mathbf{R}^n$ 和 $Z \subset \mathbf{R}^p$ 使得当 $u(t) \in U$ 时, $x(t) \in X$ 和 $z(t) \in Z$ 。

定理 4.7.2 对于满足假设的系统(4.7.16)施加学习控制算法(4.7.18)。给定可达的期望轨迹 $y_d(t) (t \in [0, T + r_{\max}])$ 。

若

$$\| (1 - \alpha) \mathbf{I} - \mathbf{F}(\mathbf{g}(\mathbf{x}), t) \mathbf{D}(\mathbf{x}) \| \leq \rho < 1 - \alpha$$

$$((\mathbf{x}, t) \in \mathbf{R}^n \times [0, T]) \quad (4.7.19)$$

则当 $\mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}_d(0) (k = 0, 1, 2, \dots)$ 时, 该学习控制算法一致收敛, 即 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{y}_k(t) = \mathbf{y}_d(t) (t \in [0, T])$ 。

证明 由相对度的定义及式(4.7.17)可知

$$\begin{bmatrix} e_{1,k}(t + r_1) \\ \vdots \\ e_{m,k}(t + r_m) \end{bmatrix} = \mathbf{D}(\mathbf{x}_d(t)) \mathbf{u}_d(t) - \mathbf{D}(\mathbf{x}_k(t)) \mathbf{u}_k(t) +$$

$$\hat{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_d(t)) - \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_k(t)) \quad (4.7.20)$$

其中

$$\hat{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} g_1 \circ f^{r_1}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ g_m \circ f^{r_m}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

这样, 第 $k + 1$ 次迭代时的前馈控制误差 $\Delta \mathbf{u}_{ff,k+1}(t) = \mathbf{u}_d(t) - \mathbf{u}_{ff,k+1}(t)$ 可写成

$$\Delta \mathbf{u}_{ff,k+1}(t) = (1 - \alpha)(\mathbf{u}_d(t) - \mathbf{u}_k(t)) + \alpha(\mathbf{u}_d(t) - \mathbf{u}_{k-j}(t)) -$$

$$\mathbf{F}_k(t) \begin{bmatrix} e_{1,k}(t + r_1) \\ \vdots \\ e_{m,k}(t + r_m) \end{bmatrix} =$$

$$(1 - \alpha)(\mathbf{u}_d(t) - \mathbf{u}_k(t)) + \alpha(\mathbf{u}_d(t) - \mathbf{u}_{k-j}(t)) -$$

$$\mathbf{F}_k(t) [\mathbf{D}(\mathbf{x}_d(t)) \mathbf{u}_d(t) - \mathbf{D}(\mathbf{x}_k(t)) \mathbf{u}_k(t) +$$

$$\hat{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_d(t)) - \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_k(t))] =$$

$$[(1 - \alpha) \mathbf{I} - \mathbf{F}_k(t) \mathbf{D}(\mathbf{x}_k(t))](\mathbf{u}_d(t) - \mathbf{u}_k(t)) +$$

$$\alpha(\mathbf{u}_d(t) - \mathbf{u}_{k-j}(t)) -$$

$$\mathbf{F}_k(t) \{ [\mathbf{D}(\mathbf{x}_d(t)) - \mathbf{D}(\mathbf{x}_k(t))] \mathbf{u}_d(t) +$$

$$\hat{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_d(t)) - \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_k(t)) \} \quad (4.7.21)$$

式中 $\mathbf{F}_k(t) = \mathbf{F}(\mathbf{y}_k(t), t)$ 。因为函数 $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ 和 $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ 在

\mathbf{R}^n 上光滑, 所以 $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ 和 $\hat{\mathbf{g}}(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{R}^n 上连续。又由对系统(4.7.16)的假设知, $\mathbf{x}_d, \mathbf{x}_k \in X$ 。因此, $\mathbf{D}, \hat{\mathbf{g}}$ 在 X 上满足局部一致 Lipschitz 条件, 即存在 $k_D, k_{\hat{\mathbf{g}}} > 0$, 使得 $\|\mathbf{h}(\mathbf{x}_d) - \mathbf{h}(\mathbf{x}_k)\| \leq k_h \|\mathbf{x}_d - \mathbf{x}_k\|$, $\mathbf{h} \in \{\mathbf{D}, \hat{\mathbf{g}}\}$ 。这样, 式(4.7.21)两端取范数可得

$$\begin{aligned} \|\Delta \mathbf{u}_{ff, k+1}(t)\| &\leq \\ &\|(1-\alpha)\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}_k(t) \mathbf{D}(\mathbf{x}_k(t))\| \|\mathbf{u}_d(t) - \mathbf{u}_k(t)\| + \\ &\alpha \|\mathbf{u}_d(t) - \mathbf{u}_{k-j}(t)\| + \\ &\|\mathbf{\Gamma}_k(t)\| (\|\mathbf{D}(\mathbf{x}_d(t)) - \mathbf{D}(\mathbf{x}_k(t))\| \|\mathbf{u}_d(t)\| + \\ &\|\hat{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_d(t)) - \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_k(t))\|) \leq \\ &\rho \|\mathbf{u}_d(t) - \mathbf{u}_k(t)\| + \alpha \|\mathbf{u}_d(t) - \mathbf{u}_{k-j}(t)\| + \\ &b_{\mathbf{r}}(k_D b_{ud} + k_{\hat{\mathbf{g}}}) \|\mathbf{x}_d(t) - \mathbf{x}_k(t)\| \end{aligned} \quad (4.7.22)$$

式中 $b_{\mathbf{r}}$ 为 $\mathbf{\Gamma}$ 的界, $b_{ud} = \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{u}_d(t)\|$ 。因为 $\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}}$ 在 \mathbf{R}^p 上光滑, 且 $\tilde{\mathbf{f}}(0), \tilde{\mathbf{g}}(0) = 0$, 所以, $\forall \mathbf{z} \in Z$, 存在 $k_{\tilde{\mathbf{f}}}, k_{\tilde{\mathbf{g}}}$ 使得 $\|\mathbf{h}(\mathbf{z})\| \leq k_h \|\mathbf{z}\|$, $\mathbf{h} \in \{\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}}\}$ 。这样, 由式(4.7.18d)及式(4.7.18b)可知

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_d(t) - \mathbf{u}_k(t)\| &\leq \|\mathbf{u}_d(t) - \mathbf{v}_k(t)\| \leq \\ &\|\Delta \mathbf{u}_{ff, k}(t)\| + \|\mathbf{u}_{fb, k}(t)\| \leq \\ &\|\Delta \mathbf{u}_{ff, k}(t)\| + \|\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{z}_k(t))\| + \\ &\|\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{z}_k(t))\| \|\mathbf{e}_k(t)\| \leq \\ &\|\Delta \mathbf{u}_{ff, k}(t)\| + k_{\tilde{\mathbf{g}}} \|\mathbf{z}_k(t)\| + \\ &b_{\tilde{\mathbf{D}}} k_{\tilde{\mathbf{g}}} \|\mathbf{x}_d(t) - \mathbf{x}_k(t)\| \end{aligned} \quad (4.7.23)$$

由式(4.7.22)、式(4.7.23)可知

$$\begin{aligned} \|\Delta \mathbf{u}_{ff, k+1}(t)\| &\leq \rho \|\Delta \mathbf{u}_{ff, k}(t)\| + \alpha \|\Delta \mathbf{u}_{ff, k-j}(t)\| + \\ &b_1 (\|\mathbf{x}_d(t) - \mathbf{x}_k(t)\| + \|\mathbf{z}_k(t)\|) + \\ &b_2 (\|\mathbf{x}_d(t) - \mathbf{x}_{k-j}(t)\| + \\ &\|\mathbf{z}_{k-j}(t)\|) \end{aligned} \quad (4.7.24)$$

式中, $b_1 = \max\{\rho k_{\tilde{\mathbf{g}}}, \rho b_{\tilde{\mathbf{D}}} k_{\tilde{\mathbf{g}}} + b_{\mathbf{r}}(k_D b_{ud} + k_{\hat{\mathbf{g}}})\}$, $b_2 = \max\{\alpha k_{\tilde{\mathbf{g}}},$

$ab\bar{D}k_g\}$ 。由式(4.7.16)和式(4.7.18)可知

$$\begin{aligned}x_d(t+1) - x_k(t+1) &= f(x_d(t)) - f(x_k(t)) + \\&\quad [B(x_d(t)) - B(x_k(t))]u_d(t) + \\&\quad B(x_k(t))\Delta u_k(t) \\z_k(t+1) &= \tilde{f}(z_k(t)) \\&\quad + \tilde{B}(z_k(t))[g(x_d(t)) - g(x_k(t))]\end{aligned}$$

对以上两式分别取范数, 可得

$$\begin{aligned}\|x_d(t+1) - x_k(t+1)\| &\leqslant \\&\quad (k_f + k_B b_{ud} + b_B b_{\bar{D}} k_g) \|x_d(t) - x_k(t)\| + \\&\quad b_B k_g \|z_k(t)\| + b_B \|\Delta u_{ff,k}(t)\| \\ \|z_k(t+1)\| &\leqslant k_{\tilde{f}} \|z_k(t)\| + b_{\tilde{B}} k_g \|x_d(t) - x_k(t)\|\end{aligned}$$

两式相加

$$\begin{aligned}\|x_d(t+1) - x_k(t+1)\| + \|z_k(t+1)\| &\leqslant \\&\quad b_3 (\|x_d(t) - x_k(t)\| + \|z_k(t)\|) + b_B \|\Delta u_{ff,k}(t)\|\end{aligned}\quad (4.7.25)$$

式中 $b_3 = \max\{k_f + k_B b_{ud} + b_B b_{\bar{D}} k_g + b_{\tilde{B}} k_g, b_{\tilde{B}} k_g + k_{\tilde{f}}\}$ 。利用初始条件 $x_k(0) = x_d(0)$, $z_k(0) = 0$ ($k=0, 1, 2, \dots$), 由式(4.7.25)可知

$$\begin{aligned}\|x_d(t) - x_k(t)\| + \|z_k(t)\| &\leqslant \sum_{s=0}^{t-1} b_B b_3^{t-s-1} \|\Delta u_{ff,k}(s)\| \\&\quad (t \in [1, T])\end{aligned}\quad (4.7.26a)$$

同样, 易得

$$\begin{aligned}\|x_d(t) - x_{k-j}(t)\| + \|z_{k-j}(t)\| &\leqslant \sum_{s=0}^{t-1} b_B b_3^{t-s-1} \|\Delta u_{ff,k-j}(s)\| \\&\quad (t \in [1, T])\end{aligned}\quad (4.7.26b)$$

将式(4.7.26)代入式(4.7.24), 有

$$\begin{aligned}\|\Delta u_{ff,k+1}(t)\| &\leqslant \rho \|\Delta u_{ff,k}(t)\| + \alpha \|\Delta u_{ff,k-j}(t)\| + \\&\quad \sum_{s=0}^{t-1} b_1 b_B b_3^{t-s-1} \|\Delta u_{ff,k}(s)\| +\end{aligned}$$

$$\sum_{s=0}^{t-1} b_2 b_B b_3^{t-s-1} \|\Delta u_{ff, k-j}(s)\| \quad (t \in [1, T])$$

上式两端同乘 λ^t ($0 < \lambda < 1$)

$$\begin{aligned} \lambda^t \|\Delta u_{ff, k+1}(t)\| &\leq \rho \lambda^t \|\Delta u_{ff, k}(t)\| + \alpha \lambda^t \|\Delta u_{ff, k-j}(t)\| + \\ &\quad \sum_{s=0}^{t-1} b_1 b_B \lambda (b_3 \lambda)^{t-s-1} \|\Delta u_{ff, k}\|_{\lambda} + \\ &\quad \sum_{s=0}^{t-1} b_2 b_B \lambda (b_3 \lambda)^{t-s-1} \|\Delta u_{ff, k-j}\|_{\lambda} \\ &\quad (t \in [1, T]) \end{aligned} \quad (4.7.27)$$

由式(4.7.24)及初始条件可知, 式(4.7.27)对 $t = 0$ 也成立。因此, 式(4.7.27)两端取 λ 范数, 得

$$\begin{aligned} \|\Delta u_{ff, k+1}(t)\|_{\lambda} &\leq \\ &\quad \left\{ \rho + b_1 b_B \lambda \frac{1 - (b_3 \lambda)^T}{1 - b_3 \lambda} \right\} \|\Delta u_{ff, k}\|_{\lambda} + \\ &\quad \left\{ \alpha + b_2 b_B \lambda \frac{1 - (b_3 \lambda)^T}{1 - b_3 \lambda} \right\} \|\Delta u_{ff, k-j}\|_{\lambda} \quad (4.7.28) \end{aligned}$$

因为 $\rho < 1 - \alpha$, 可选取足够小的 λ 使得 $\rho + b_1 b_B \lambda \frac{1 - (b_3 \lambda)^T}{1 - b_3 \lambda} < 1 - \alpha$ 。因此, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\|\Delta u_{ff, k}\|_{\lambda} \rightarrow 0$ ($t \in [0, T]$)。利用 λ 范数的性质可知 $\sup_{t \in [0, T]} \|\Delta u_{ff, k}(t)\|_{\lambda} \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$)。进一步地, 由式(4.7.26)可证得, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\sup_{t \in [0, T]} \|z_k(t)\| \rightarrow 0$, $\sup_{t \in [0, T]} \|x_d(t) - x_k(t)\| \rightarrow 0$ 。又由 $\|e_k(t)\| \leq k_g \|x_d(t) - x_k(t)\|$, 可证得该定理。

与定理 4.7.1 类似, 上述定理给出的算法收敛性也仅与前馈控制器(4.7.18c)的增益矩阵 Γ 有关, 而与反馈控制器(4.7.18a)和(4.7.18b)的系数矩阵无关。

第五章 任意固定初态下的迭代学习控制

在设计迭代学习控制器时,为了保证算法的收敛性,常对系统的初态限定一定的条件。目前已发表的文献大多要求每次迭代的初态与期望轨迹对应的初态严格一致。然而,实际的重复定位操作往往会引起迭代初态相对于期望初态的偏移。在很多情况下期望初态是未知的,而系统初态也是固定的。本章主要讨论在迭代初态与期望初态有固定偏差时,各种迭代学习控制算法的收敛性问题以及怎样实现对预先给定的期望轨迹的跟踪问题。

5.1 D型学习律的极限轨迹

考虑D型学习律

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \Gamma(y_k(t))\dot{e}_k(t) \quad (5.1.1)$$

式中 $t \in [0, T]$, $\Gamma(y_k(t))$ 是学习增益矩阵, 满足 $\|\Gamma(y(t))\| \leq \gamma$, γ 是一个非负常数, $e_k(t) = y_d(t) - y_k(t)$ 是第 k 次迭代的输出误差。在一定条件下, 由学习律(5.1.1)所产生的控制输入会产生一输出极限轨迹, 但此极限轨迹未必就是预先给定的期望轨迹。本节讨论在任意固定初态下控制算法(5.1.1)的收敛性问题以及相应的极限轨迹。

考虑一类非线性系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t)) + B(x(t))u(t) \\ y(t) &= g(x(t)) \end{aligned} \right\} \quad (5.1.2)$$

式中 $t \in [0, T]$, $x, f(x) \in \mathbb{R}^n$, $B(x) \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $y, g(x) \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^r$ 。对于该系统, 作如下假定: $f(x)$ 关于 x 满足全局一致 Lipschitz 条件, 即对于 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, $\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq k_f \|x_1 -$

x_2 的范数; $B(x)$ 关于 x 满足全局一致 Lipschitz 条件, $B(x)$ 有界, 即对于 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}^n$, $\|B(x_1) - B(x_2)\| \leq k_B \|x_1 - x_2\|$, $\|B(x)\| \leq M_1$; $g(x)$ 关于 x 的导数 $g_x(x)$ 存在, $g_x(x)$ 关于 x 满足全局一致 Lipschitz 条件, 且 $g_x(x)$ 有界, 即对于 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}^n$, $\|g_x(x_1) - g_x(x_2)\| \leq k_g \|x_1 - x_2\|$, $\|g_x(x)\| \leq M_2$ 。这一假定意味着 $g(x)$ 关于 x 也满足全局一致 Lipschitz 条件, 即 $\|g(x_1) - g(x_2)\| \leq M_2 \|x_1 - x_2\|$ 。

定理 5.1.1 对由式(5.1.2)及式(5.1.1)所描述的系统及学习律, 如果满足条件

$$(1) \quad \|I - \Gamma(g(x))g_x(x)B(x)\| \leq \rho < 1 \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

$$(2) \quad x_k(0) = x^0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

则当 $k \rightarrow \infty$ 时, $y_k(t)$ 在 $[0, T]$ 上一致收敛于 $y_d^*(t)$, 即

$$y_d^*(t) = y_d(t) + (g(x^0) - y_d(0)) \quad (5.1.3)$$

证明 取一控制输入 u_d^* , 使系统初态位于 x^0 时的输出轨迹为 y_d^* 。令 $\Delta u_k^* = u_d^* - u_k$, 于是由系统(5.1.1), 有

$$\begin{aligned} \Delta u_{k+1}^* &= \Delta u_k^* - \Gamma(y_k)\dot{e}_k = \\ &= \Delta u_k^* - \Gamma(y_k)\dot{e}_k^* - \Gamma(y_k)[\dot{y}_d - \dot{y}_d^*] = \\ &= \Delta u_k^* - \Gamma(y_k)\dot{e}_k^* \end{aligned}$$

其中 $e_k^* = y_d^* - y_k$, 而由式(5.1.2)可知,

$$\begin{aligned} \dot{e}_k^* &= g_x(x_d^*)\dot{x}_d^* - g_x(x_k)\dot{x}_k = \\ &= g_x(x_d^*)f(x_d^*) + g_x(x_d^*)B(x_d^*)u_d^* - \\ &= g_x(x_k)f(x_k) - g_x(x_k)B(x_k)u_k = \\ &= g_x(x_k)B(x_k)\Delta u_k^* + \\ &= g_x(x_k)[B(x_d^*) - B(x_k)]u_d^* + \\ &= [g_x(x_d^*) - g_x(x_k)][f(x_d^*) + B(x_d^*)u_d^*] + \\ &= g_x(x_k)[f(x_d^*) - f(x_k)] \end{aligned}$$

因此,

$$\Delta u_{k+1}^* = \Delta u_k^* - \Gamma(y_k)g_x(x_k)B(x_k)\Delta u_k^* -$$

$$\begin{aligned} & \Gamma(y_k)g_x(x_k)[B(x_d^*) - B(x_k)]u_d^* - \\ & \Gamma(y_k)[g_x(x_d^*) - g_x(x_k)][f(x_d^*) + B(x_d^*)u_d^*] - \\ & \Gamma(y_k)g_x(x_k)[f(x_d^*) - f(x_k)] \end{aligned}$$

对上式两端取范数, 则有

$$\|\Delta u_{k+1}^*\| \leq \rho \|\Delta u_k^*\| + k \|x_d^* - x_k\| \quad (5.1.4)$$

式中 $k = \gamma M_2 b_1 k_B + \gamma b_2 k_g + \gamma M_2 k_f$, 而

$$b_1 = \sup_{0 \leq t \leq T} \|u_d^*\|, b_2 = \sup_{0 \leq t \leq T} \|f(x_d^*) + B(x_d^*)u_d^*\|$$

另一方面, 由式(5.1.2)可知

$$\begin{aligned} x_d^*(t) - x_k(t) &= \int_0^t [f(x_d^*(\tau)) - f(x_k(\tau))] d\tau + \\ & \int_0^t [B(x_d^*(\tau))u_d^*(\tau) - B(x_k(\tau))u_k(\tau)] d\tau = \\ & \int_0^t [(f(x_d^*(\tau)) - f(x_k(\tau)))] d\tau + \\ & \int_0^t B(x_k(\tau))\Delta u_k^*(\tau) d\tau + \\ & \int_0^t [B(x_d^*(\tau)) - B(x_k(\tau))]u_d^*(\tau) d\tau \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} \|x_d^*(t) - x_k(t)\| &\leq k_1 \int_0^t \|x_d^*(\tau) - x_k(\tau)\| d\tau + \\ & M_1 \int_0^t \|\Delta u_k^*(\tau)\| d\tau \end{aligned}$$

式中 $k_1 = k_f + b_1 k_B$ 。由 Bellman-Gronwall 引理知

$$\|x_d^*(t) - x_k(t)\| \leq M_1 \int_0^t e^{k_1(t-\tau)} \|\Delta u_k^*(\tau)\| d\tau \quad (5.1.5)$$

将式(5.1.5)代入式(5.1.4), 并令 $k_2 = kM_1$, 有

$$\|\Delta u_{k+1}^*(t)\| \leq \rho \|\Delta u_k^*(t)\| + k_2 \int_0^t e^{k_1(t-\tau)} \|\Delta u_k^*(\tau)\| d\tau$$

用 $e^{-\lambda t}$ ($\lambda > k_1$) 乘上式两端, 并取 λ 范数, 则有

$$\begin{aligned}
\|\Delta \mathbf{u}_{k+1}^*\|_\lambda &\leq \rho \|\Delta \mathbf{u}_k^*\|_\lambda + \\
&\quad \sup_{0 \leq t \leq T} k_2 \int_0^t e^{-(\lambda - k_1)(t-\tau)} e^{-\lambda \tau} \|\Delta \mathbf{u}_k^*(\tau)\|_\lambda d\tau \leq \\
&\quad \rho \|\Delta \mathbf{u}_k^*\|_\lambda + \\
&\quad \cdot \frac{k_2}{\lambda - k_1} [1 - e^{-(\lambda - k_1)T}] \|\Delta \mathbf{u}_k^*\|_\lambda
\end{aligned}$$

若取 λ 充分大, 使

$$\tilde{\rho} = \rho + \frac{k_2}{\lambda - k_1} [1 - e^{-(\lambda - k_1)T}] < 1$$

则从 $\|\Delta \mathbf{u}_{k+1}^*\|_\lambda \leq \tilde{\rho} \|\Delta \mathbf{u}_k^*\|_\lambda$ 知 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}_k^*\|_\lambda = 0$. 由 $\|\Delta \mathbf{u}_k^*(t)\| \leq e^{\lambda t} \|\Delta \mathbf{u}_k^*\|_\lambda$ 知, 当 $k \rightarrow \infty$ 时 $\Delta \mathbf{u}_k^*(t)$ 在 $[0, T]$ 上一致收敛于 0, 再由式(5.1.5)知, 当 $k \rightarrow \infty$ 时 $\mathbf{x}_k(t)$ 在 $[0, T]$ 上一致收敛于 $\mathbf{x}_d^*(t)$, 从而该定理得证。

定理 5.1.1 说明了, 在定理的条件下, 学习律(5.1.1)所产生的极限轨迹与期望轨迹之间有一恒定的偏差。当 $\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}_d(0)$, 即迭代初态严格重复时, 极限轨迹即为期望轨迹。在任意固定初态条件下, 如何构造新的学习律, 消除或部分消除其极限轨迹与期望轨迹间的偏差, 是本章讨论的重点。

例 5.1.1 设有如下的非线性系统

$$\begin{aligned}
\dot{x}^1(t) &= -x^1(t) + u^1(t) \\
\dot{x}^2(t) &= \cos(x^1(t)x^3(t)) + u^2(t) \\
\dot{x}^3(t) &= -x^2(t) - x^3(t) + \sin(x^1(t))u^2(t) \\
y^1(t) &= x^1(t) \\
y^2(t) &= x^2(t)
\end{aligned}$$

其中 $t \in [0, 1]$, 又设期望轨迹为

$$\begin{aligned}
y_d^1(t) &= 12t^2(1-t) \\
y_d^2(t) &= \cos(\pi t)
\end{aligned}$$

易知期望初态满足

$$x_d^1(0) = 0 \quad x_d^2(0) = 1$$

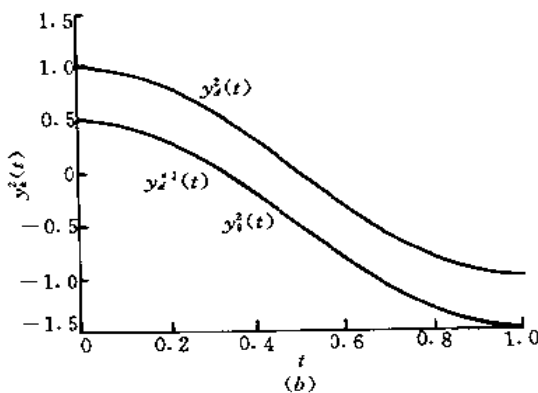
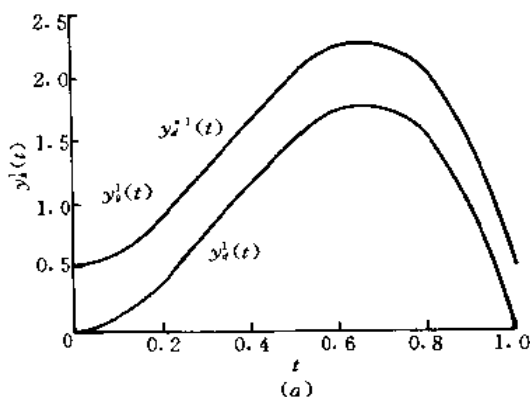


图 5.1.1 例 5.1.1 的迭代输出轨迹

(a) $y_k^1(t)$; (b) $y_k^2(t)$ 。

选取学习增益矩阵为

$$\mathbf{F}(y_k) = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix}$$

假定迭代初态满足

$$x_k^1(0) = x_k^2(0) = x_k^3(0) = 0.5 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

并选取

$$u_0^1(t) = u_0^2(t) = 0$$

则迭代输出的极限轨迹与期望轨迹有恒定偏差 $[0.5, -0.5]^T$ (图 5.1.1)。

5.2 PD 型学习律的极限轨迹

单纯的 D 型学习律会引起极限轨迹相对于期望轨迹的偏移。针对这种情况, 在学习律(5.1.1)中增加 P 型成分, 使之成为如下形式的 PD 型学习律

$$\mathbf{u}_{k+1}(t) = \mathbf{u}_k(t) + \mathbf{\Gamma}(\mathbf{y}_k(t))(\dot{\mathbf{e}}_k(t) + L\mathbf{e}_k(t)) \quad (5.2.1)$$

其中 $t \in [0, T]$, $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{y}_k(t))$ 、 L 为增益矩阵, $\|\mathbf{\Gamma}(\mathbf{y}(t))\| \leq \gamma$ 。

考虑由式(5.1.2)所描述的系统, 并对该系统做同样的假定。

定理 5.2.1 设系统(5.1.2)及学习律(5.2.1)满足条件

$$(1) \quad \|\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))\mathbf{g}_x(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\| \leq \rho < 1 \quad (\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n)$$

$$(2) \quad \mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}^0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

则当 $k \rightarrow \infty$ 时 $\mathbf{y}_k(t)$ 在 $[0, T]$ 上一致收敛于 $\mathbf{y}_d^*(t)$, 这里

$$\mathbf{y}_d^*(t) = \mathbf{y}_d(t) + e^{-Lt}[\mathbf{g}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{y}_d(0)] \quad (5.2.2)$$

证明 取一控制输入 \mathbf{u}_d^* , 使系统初态为 \mathbf{x}^0 时的输出轨迹为 \mathbf{y}_d^* 。这时, 若令 $\Delta\mathbf{u}_k^* = \mathbf{u}_d^* - \mathbf{u}_k$, $\mathbf{e}_k^* = \mathbf{y}_d^* - \mathbf{y}_k$, 则

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{u}_{k+1}^* &= \Delta\mathbf{u}_k^* - \mathbf{\Gamma}(\mathbf{y}_k)[\dot{\mathbf{e}}_k + L\mathbf{e}_k] = \\ &\Delta\mathbf{u}_k^* - \mathbf{\Gamma}(\mathbf{y}_k)[\dot{\mathbf{e}}_k^* + L\mathbf{e}_k^*] - \\ &\mathbf{\Gamma}(\mathbf{y}_k)[(\dot{\mathbf{y}}_d - \dot{\mathbf{y}}_d^*) + L(\mathbf{y}_d - \mathbf{y}_d^*)] = \\ &\Delta\mathbf{u}_k^* - \mathbf{\Gamma}(\mathbf{y}_k)[\dot{\mathbf{e}}_k^* + L\mathbf{e}_k^*] \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

由于

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_k^* &= \mathbf{g}_x(\mathbf{x}_k)\mathbf{B}(\mathbf{x}_k)\Delta\mathbf{u}_k^* + \\ &\mathbf{g}_x(\mathbf{x}_k)[\mathbf{B}(\mathbf{x}_d^*) - \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]\mathbf{u}_d^* + \\ &[\mathbf{g}_x(\mathbf{x}_d^*) - \mathbf{g}_x(\mathbf{x}_k)][\mathbf{f}(\mathbf{x}_d^*) + \mathbf{B}(\mathbf{x}_d^*)\mathbf{u}_d^*] + \\ &\mathbf{g}_x(\mathbf{x}_k)[\mathbf{f}(\mathbf{x}_d^*) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)] \end{aligned}$$

而由附录引理 A.3.1 可知, 存在 $\tilde{x}_i(t) = x_k(t) + \theta_i(t)(x_d^*(t) - x_k(t))$ ($0 < \theta_i(t) < 1, i = 1, 2, \dots, m$) 使

$$e_k^* = g(x_d^*) - g(x_k) = \begin{bmatrix} g_{1x}(\tilde{x}_1) \\ \vdots \\ g_{mx}(\tilde{x}_m) \end{bmatrix} (x_d^* - x_k) \triangleq g_x(\tilde{x})(x_d^* - x_k)$$

因此,

$$\begin{aligned} \Delta u_{k+1}^* &= [I - \Gamma(y_k)g_x(x_k)B(x_k)]\Delta u_k^* - \\ &\Gamma(y_k)g_x(x_k)[B(x_d^*) - B(x_k)]u_d^* - \\ &\Gamma(y_k)[g_x(x_d^*) - g_x(x_k)][f(x_d^*) + B(x_d^*)u_d^*] - \\ &\Gamma(y_k)g_x(x_k)[f(x_d^*) - f(x_k)] - \\ &\Gamma(y_k)Lg_x(\tilde{x})(x_d^* - x_k) \end{aligned}$$

上式两端取范数, 则有

$$\|\Delta u_{k+1}^*\| \leq \rho \|\Delta u_k^*\| + k \|x_d^* - x_k\|$$

式中 $k = \gamma M_2 b_1 k_B + \gamma b_2 k_g + \gamma M_2 k_f + \gamma l M_2, l = \|L\|$ 。类似于定理 5.1.1 的证明, 易知定理结论成立。证毕。

由上定理知, 当 $x_k(0) \neq x_d(0)$ 时, 在学习律(5.2.1)作用下, 系统输出的极限轨迹虽然不是期望轨迹, 但若选取适当的增益矩阵 L , 例如可取 $L = lI$ ($l > 0$), 利用 e^{-Ll} 的衰减模态, 实现对期望轨迹的跟踪。 l 越大, 跟踪性能也越高, 但 l 过大, 会引起最初几次迭代的振荡, 也就会引起输出轨迹的振荡, 从而导致收敛速度的减慢。在实际系统中, 控制输入的过度振荡会导致系统的振荡, 甚至会引起系统饱和, 无法正常工作。

例 5.2.1 仍考虑例 5.1.1, 其中 $x_d^1(0) = 0, x_d^2(0) = 1$, 假定迭代初态固定 $x_k(0) = [0.5, 0.5, 0.5]^T$, 选取

$$\Gamma(y_k(t)) = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_0(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (t \in [0, 1])$$

从图 5.2.1 可看出经过 20 次迭代以后, 在输出轨迹的后半段实现了对期望轨迹较好的跟踪。

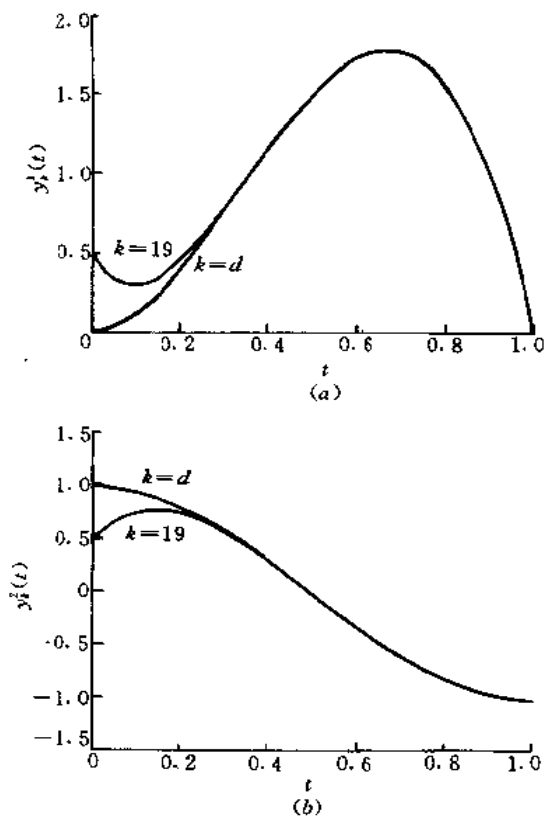


图 5.2.1 例 5.2.1 的迭代输出轨迹

(a) $y_1^k(t)$; (b) $y_2^k(t)$ 。

5.3 带有初始误差修正的学习律

PD 型学习律的极限轨迹是靠 e^{-Lt} 的衰减作用来跟踪期望轨迹,至于跟踪到何种程度以及选择怎样的 L ,无从知道。本节讨论带有初始误差修正的学习律

$$\mathbf{u}_{k+1}(t) = \mathbf{u}_k(t) + \mathbf{F}(\mathbf{y}_k(t))\dot{\mathbf{e}}_k(t) + \theta_h(t)\mathbf{F}(\mathbf{y}_k(t))\mathbf{e}_k(0) \quad (5.3.1)$$

其中 $t \in [0, T]$, $\|\mathbf{F}(\mathbf{y}(t))\| \leq \gamma$, 而

$$\theta_h(t) = \begin{cases} \frac{2}{h}(1 - \frac{t}{h}) & (0 \leq t \leq h) \\ 0 & (h < t \leq T) \end{cases} \quad (5.3.2)$$

由 5.1 节可知,单纯的 D 型学习律的极限轨迹与期望轨迹有一恒定的偏差,这一偏差只与这两个轨迹的初值差有关。学习律 (5.3.1)就是在 D 型学习律基础上增加了初值差(即 $\mathbf{e}_k(0)$)的修正,并且这种修正只作用一小段时间。

定理 5.3.1 对于由式 (5.1.2) 所描述的系统及学习律 (5.3.1), 如果满足条件

- (1) $\|\mathbf{I} - \mathbf{F}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))\mathbf{g}_x(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\| \leq \rho < 1 \quad (\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n)$
- (2) $\mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}^0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$

则当 $k \rightarrow \infty$ 时 $\mathbf{y}_k(t)$ 在 $[0, T]$ 上的极限轨迹为

$$\mathbf{y}_d^*(t) = \begin{cases} \mathbf{y}_d(t) + \int_h^t \theta_h(\tau) d\tau (\mathbf{y}_d(0) - \mathbf{g}(\mathbf{x}^0)) & (0 \leq t \leq h) \\ \mathbf{y}_d(t) & (h < t \leq T) \end{cases} \quad (5.3.3)$$

即当 $k \rightarrow \infty$ 时 $\mathbf{y}_k(t)$ 在 $[h, T]$ 上一致收敛于 $\mathbf{y}_d(t)$ 。

证明 由式 (5.3.3) 可知

$$\mathbf{y}_d^*(0) = \mathbf{g}(\mathbf{x}^0)$$

因此

$$e_k^*(0) = y_d^*(0) - y_k(0) = 0$$

$$y_d^*(h) = y_d(h) \quad \dot{y}_d^*(h) = \dot{y}_d(h)$$

取一控制输入 $u_d^*(t)$, 使系统初态位于 x^0 的输出轨迹为 $y_d^*(t)$ 。记 $\Delta u_k^* = u_d^* - u_k$, $e_k^* = y_d^* - y_k$ 。于是由式(5.3.1), 当 $0 \leq t \leq h$ 时

$$\begin{aligned} \Delta u_{k+1}^*(t) &= \Delta u_k^*(t) - \Gamma(y_k(t))\dot{e}_k(t) - \theta_h(t)\Gamma(y_k(t))e_k(0) = \\ &= \Delta u_k^*(t) - \Gamma(y_k(t))\dot{e}_k^*(t) - \theta_h(t)\Gamma(y_k(t))e_k^*(0) \\ &\quad - \Gamma(y_k(t))(\dot{y}_d(t) - \dot{y}_d^*(t)) - \\ &\quad - \theta_h(t)\Gamma(y_k(t))(y_d(0) - y_d^*(0)) = \\ &= \Delta u_k^*(t) - \Gamma(y_k(t))\dot{e}_k^*(t) \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

当 $h < t \leq T$ 时, 由于 $y_d^*(t) = y_d(t)$, 即 $e_k^*(t) = e_k(t)$, 而 $\theta_h(t) = 0$, 故式(5.3.4)也成立, 即式(5.3.4)对任何 $t \in [0, T]$ 均成立。完全类似于定理 5.1.1 的证明, 可证该定理成立。

定理 5.3.1 表明, 在学习律(5.3.1)作用下, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, 在 $[h, T]$ 上可以实现对期望轨迹的完全跟踪。虽然在 $[0, h]$ 极限轨迹与期望轨迹未必重合, 但由 h 的任意性, 可使得这一区间任意小。特别当 $x^0 = x_d(0)$ 时 $e_k(0) = 0$, 学习律(5.3.1)便为 5.1 节中 D 型学习律; 在式(5.3.3)中令 $h \rightarrow 0^+$, 可知极限轨迹与期望轨迹在 $[0, T]$ 上完全重合。

例 5.3.1 为了便于比较, 仍采用例 5.1.1。假定迭代初态恒定 $x_k(0) = [0.5, 0.5, 0.5]^T$, 选取

$$\Gamma(y_k(t)) = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix} \quad u_0(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (t \in [0, 1])$$

图 5.3.1 给出了当 $h = 0.4$ 时的迭代输出轨迹。

从定理 5.3.1 的证明过程看, $\theta_h(t)$ 的结构与证明本身无关, 即 $\theta_h(t)$ 的选取可以是多样的, 只要满足非负连续, 当 $t \in [0, h]$ 时, $\theta_h(t) = 0$, 且 $\int_0^h \theta_h(\tau) d\tau = 1$ 即可。例如, 也可取

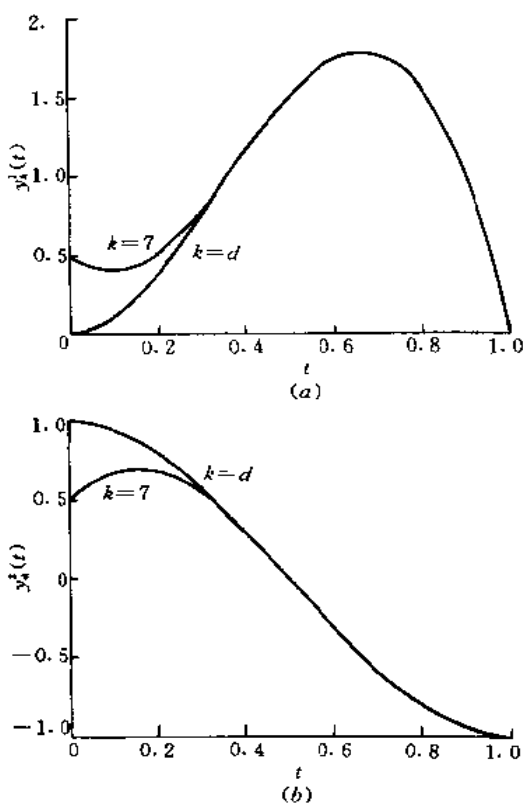


图 5.3.1 例 5.3.1 的迭代输出轨迹

(a) $y_k^1(t)$; (b) $y_k^2(t)$ 。

$$\theta_h(t) = \begin{cases} \frac{1}{h}(1 - \cos \frac{2\pi t}{h}) & (0 \leq t \leq h) \\ 0 & (h < t \leq T) \end{cases}$$

但 $\theta_h(t)$ 的不同可能影响在 $[0, h]$ 上的跟踪。

5.4 其它形式的学习律

为消除或减小极限轨迹与期望轨迹的偏差,可以有多种方案,

但它们都不能实现对期望轨迹的完全跟踪。本节主要从改进跟踪和提高敛速这两个角度介绍几种学习律,讨论它们的极限轨迹。

5.4.1 带有初始修正的 PD 型学习律

为了改善带有初始修正的 D 型学习律在 $[0, h]$ 上的跟踪,考虑如下形式的学习律

$$\begin{aligned} u_{k+1}(t) = & u_k(t) + \Gamma(y_k(t))(\dot{e}_k(t) + L e_k(t)) + \\ & \Gamma(y_k(t))e^{-Lt}\theta_h(t)e_k(0) \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

其中 $\theta_h(t)$ 仍可取作

$$\theta_h(t) = \begin{cases} \frac{2}{h}(1 - \frac{t}{h}) & (0 \leq t \leq h) \\ 0 & (h < t \leq T) \end{cases} \quad (5.4.2)$$

对于由式(5.1.2)所描述的系统,容易证明定理 5.4.1。

定理 5.4.1 设系统(5.1.2)及学习律(5.4.1)满足条件

- (1) $\|I - \Gamma(g(x))g_x(x)B(x)\| \leq \rho < 1$, 其中 $x \in \mathbb{R}^n$;
- (2) $x_k(0) = x^0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$

则当 $k \rightarrow \infty$ 时 $y_k(t)$ 在 $[0, T]$ 上一致收敛于 $y_d^*(t)$, 即

$$y_d^*(t) = \begin{cases} y_d(t) + e^{-Lt} \int_h^t \theta_h(\tau) d\tau (y_d(0) - Cx^0) & (0 \leq t \leq h) \\ y_d(t) & (h < t \leq T) \end{cases} \quad (5.4.3)$$

从极限轨迹(5.4.3)可以看出,如果选择适当的增益矩阵 L 及适当的 h , 利用 e^{-Lt} 的衰减和 $\theta_h(t)$ 的修正的共同作用,可以改善对期望轨迹的跟踪。

5.4.2 带有初始修正的高阶学习律

为提高带有初始修正的学习律的收敛速度,可以利用前几次迭代的输出误差信息建立如下的高阶学习律

$$\begin{aligned}
u_{k+1}(t) = & \sum_{j=1}^N P_j(y_{k-j+1}(t)) u_{k-j+1}(t) + \\
& \sum_{j=1}^N \Gamma_j(y_{k-j+1}(t)) \dot{e}_{k-j+1}(t) + \\
& g_h(t) \sum_{j=1}^N \Gamma_j(y_{k-j+1}(t)) e_{k-j+1}(0) \quad (5.4.4)
\end{aligned}$$

式中 $t \in [0, T]$, $P_j(y(t))$, $\Gamma_j(y(t))$ 为学习增益矩阵, 满足 $\|P_j(y(t))\| \leq \gamma$, $\|\Gamma_j(y(t))\| \leq \gamma$ ($y(t) \in \mathbf{R}^m$; $j = 1, 2, \dots, N$)。对于由式(5.1.2)所描述的系统, 可证明定理 5.4.2。

定理 5.4.2 设系统(5.1.2) 及学习律(5.4.3) 满足条件

$$(1) \sum_{j=1}^N P_j(g(x)) = I \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

$$(2) \sum_{j=1}^N \|P_j(g(x)) - \Gamma_j(g(x))g_x(x)B(x)\| \leq \rho < 1$$

($x \in \mathbf{R}^n$)

$$(3) x_k(0) = x^0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

则当 $k \rightarrow \infty$ 时, $y_k(t)$ 在 $[0, T]$ 上一致收敛于 $y_d^*(t)$, 这里 $y_d^*(t)$ 仍如式(5.3.3) 所示, 即

$$y_d^*(t) = \begin{cases} y_d(t) + \int_h^t \theta_h(\tau) d\tau (y_d(0) - g(x^0)) & (0 \leq t \leq h) \\ y_d(t) & (h < t \leq T) \end{cases}$$

本节及前面的几节讨论, 实际上给出了构造学习律的一个很重要的方法——主动构造法。这一方法的核心就是, 首先按照对期望轨迹的跟踪要求构造一轨迹, 然后构造相应的学习律, 使其极限轨迹为所构造的轨迹。在后面的几节中, 将看到这一方法的有效性。

5.5 非正则系统的迭代学习控制

第二章中, 在初态严格重复下讨论了非正则系统的迭代学习

控制。现设有如下可重复的线性定常系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (5.5.1)$$

其中, $t \in [0, T]$, $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n \times m}$, $\mathbf{C} \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $\mathbf{D} \in \mathbf{R}^{m \times m}$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{u}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^m$ 。当 $\text{rank}(\mathbf{D}) < m$, 则称系统(5.5.1)为非正则系统, 此时若 $\text{rank}(\mathbf{D}) < m$, 而 $\text{rank}(\mathbf{CB}) = m$, 则称式(5.5.1)为一阶非正则系统; 若 $\text{rank}(\mathbf{D}) < m$, $\text{rank}(\mathbf{CA}^{i-2}\mathbf{B}) < m$ ($i = 2, \dots, p$) 而 $\text{rank}(\mathbf{CA}^{p-1}\mathbf{B}) = m$, 则称式(5.5.1)为 p 阶非正则系统。

由第二章的讨论知, 对于非正则系统, 通常的 P 型学习律的收敛条件不能满足。为使得符合正则系统的收敛条件的要求, 学习律中用到了输出误差的导数或高阶导数。

本节首先讨论一阶非正则系统的情形。

任取一控制输入 $\mathbf{u}_0(t)$, $\mathbf{u}_0(t)$ 在 $[0, T]$ 上连续可导, 设系统(5.5.1)的输出轨迹为 $\mathbf{y}_0(t)$, 可利用 $\mathbf{y}_0(t)$ 构造如下轨迹

$$\mathbf{y}_d^*(t) = \begin{cases} \mathbf{y}_d(t) + \int_h^t \theta_h(\tau) d\tau (\mathbf{y}_d(0) - \mathbf{y}_0(0)) & (0 \leq t \leq h) \\ \mathbf{y}_d(t) & (h < t \leq T) \end{cases} \quad (5.5.2)$$

这里, 选取

$$\theta_h(t) = \begin{cases} \frac{1}{h} (1 - \cos \frac{2\pi t}{h}) & (0 \leq t \leq h) \\ 0 & (h < t \leq T) \end{cases} \quad (5.5.3)$$

由式(5.5.2)知, $\mathbf{y}_d^*(0) = \mathbf{y}_0(0)$, 且对任何 $t \in [0, T]$, 有

$$\begin{aligned} & \mathbf{F}_0(\mathbf{y}_d^*(t) - \mathbf{y}_d(t)) + \mathbf{F}_1(\dot{\mathbf{y}}_d^*(t) - \dot{\mathbf{y}}_d(t)) = \\ & \left(\int_h^t \theta_h(\tau) d\tau \mathbf{F}_0 + \theta_h(t) \mathbf{F}_1 \right) (\mathbf{y}_d(0) - \mathbf{y}_0(0)) \end{aligned} \quad (5.5.4)$$

式中 $\mathbf{F}_0, \mathbf{F}_1 \in \mathbf{R}^{m \times m}$, 据此构造如下学习律

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{k+1}(t) = & \mathbf{u}_k(t) + \mathbf{F}_0 \mathbf{e}_k(t) + \mathbf{F}_1 \dot{\mathbf{e}}_k(t) + \\ & \left(\int_h^t \theta_h(\tau) d\tau \mathbf{F}_0 + \theta_h(t) \mathbf{F}_1 \right) (\mathbf{y}_d(0) - \mathbf{y}_0(0)) \end{aligned} \quad (5.5.5)$$

因此,由式(5.5.4)可知

$$\mathbf{u}_{k+1}(t) = \mathbf{u}_k(t) + \mathbf{F}_0 \mathbf{e}_k^*(t) + \mathbf{F}_1 \dot{\mathbf{e}}_k^*(t) \quad (5.5.6)$$

式中, $\mathbf{e}_k^*(t) = \mathbf{y}_d^*(t) - \mathbf{y}_k(t)$ 。

定理 5.5.1 设系统(5.5.1)及学习律(5.5.5)满足条件

$$(1) \quad \mathbf{F}_1 \mathbf{D} = 0$$

$$(2) \quad \rho = \|\mathbf{I} - \mathbf{F}_0 \mathbf{D} - \mathbf{F}_1 \mathbf{C} \mathbf{B}\| < 1$$

$$(3) \quad \mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}^0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

则当 $k \rightarrow \infty$ 时 $\mathbf{y}_k(t)$ 在 $[0, T]$ 上一致收敛于 $\mathbf{y}_d^*(t)$ 。

证明 取一控制输入 $\mathbf{u}_d^*(t)$, 使系统初态位于 \mathbf{x}^0 时的输出轨迹为 $\mathbf{y}_d^*(t)$ 。令 $\Delta \mathbf{u}_k^*(t) = \mathbf{u}_d^*(t) - \mathbf{u}_k(t)$, 由式(5.5.1)可知

$$\dot{\mathbf{e}}_k^*(t) = \mathbf{C} \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}_k^*(\tau) d\tau + \mathbf{D} \Delta \mathbf{u}_k^*(t) \quad (5.5.7)$$

$$\mathbf{F}_1 \dot{\mathbf{e}}_k^*(t) = \mathbf{F}_1 \mathbf{C} \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}_k^*(t) + \mathbf{F}_1 \mathbf{C} \mathbf{A} \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}_k^*(\tau) d\tau$$

故由式(5.5.6)可知

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}_{k+1}^*(t) &= \Delta \mathbf{u}_k^*(t) - (\mathbf{F}_0 \mathbf{D} + \mathbf{F}_1 \mathbf{C} \mathbf{B}) \Delta \mathbf{u}_k^*(t) - \\ &\quad (\mathbf{F}_0 \mathbf{C} + \mathbf{F}_1 \mathbf{C} \mathbf{A}) \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}_k^*(\tau) d\tau \end{aligned}$$

两端取范数, 并利用条件(2), 有

$$\|\Delta \mathbf{u}_{k+1}^*(t)\| \leq \rho \|\Delta \mathbf{u}_k^*(t)\| + \alpha \int_0^t \|\Delta \mathbf{u}_k^*(\tau)\| d\tau$$

式中 $\alpha = \sup_{0 \leq t \leq T} \|(\mathbf{F}_0 \mathbf{C} + \mathbf{F}_1 \mathbf{C} \mathbf{A}) e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B}\|$ 。用 $e^{-\lambda t}$ 乘上式两端, 并取 λ 范数, 则有

$$\begin{aligned} \|\Delta \mathbf{u}_{k+1}^*\|_\lambda &\leq \rho \|\Delta \mathbf{u}_k^*\|_\lambda + \alpha \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau \|\Delta \mathbf{u}_k^*\|_\lambda \leq \\ &\quad \rho \|\Delta \mathbf{u}_k^*\|_\lambda + \frac{\alpha}{\lambda} (1 - e^{-\lambda T}) \|\Delta \mathbf{u}_k^*\|_\lambda \end{aligned}$$

取 λ 充分大, 使

$$\bar{\rho} = \rho + \frac{\alpha}{\lambda} (1 - e^{-\lambda T}) < 1$$

则可推得 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\Delta \mathbf{u}_k^*\|_\lambda = 0$, 再由式(5.5.7)可证该定理的结论。

由极限轨迹(5.5.2), 还可以构造如下学习律

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{k+1}(t) = & \mathbf{u}_k(t) + \mathbf{\Gamma}_0 \mathbf{e}_k(t) + \mathbf{\Gamma}_1 \dot{\mathbf{e}}_k(t) + \\ & \left(\int_h^t \theta_h(\tau) d\tau \mathbf{\Gamma}_0 + \theta_h(t) \mathbf{\Gamma}_1 \right) \mathbf{e}_k(0) \end{aligned} \quad (5.5.8)$$

这样,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{k+1}(t) = & \mathbf{u}_k(t) + \mathbf{\Gamma}_0 \mathbf{e}_k^*(t) + \mathbf{\Gamma}_1 \dot{\mathbf{e}}_k^*(t) + \\ & \left(\int_h^t \theta_h(\tau) d\tau \mathbf{\Gamma}_0 + \theta_h(t) \mathbf{\Gamma}_1 \right) \mathbf{e}_k^*(0) \end{aligned} \quad (5.5.9)$$

定理5.5.2 设系统(5.5.1) 及学习律(5.5.8) 满足条件

- (1) $D\mathbf{\Gamma}_1 = 0$
- (2) $\rho = \|\mathbf{I} - D\mathbf{\Gamma}_0 - C\mathbf{B}\mathbf{\Gamma}_1\| < 1$
- (3) $\mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}^0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$

则当 $k \rightarrow \infty$ 时 $\mathbf{y}_k(t)$ 在 $[0, T]$ 上一致收敛于 $\mathbf{y}_d^*(t)$ 。

证明 由式(5.5.1) 及条件(1) 可知

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{k+1}(t) = & \\ & C e^{At} \mathbf{x}^0 + C \int_0^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}_{k+1}(\tau) d\tau + D \mathbf{u}_{k+1}(t) = \\ & \mathbf{y}_k(t) + C \int_0^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B} [\mathbf{\Gamma}_0 \mathbf{e}_k^*(\tau) + \mathbf{\Gamma}_1 \dot{\mathbf{e}}_k^*(\tau)] d\tau + \\ & C \int_0^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B} \left[\int_h^\tau \theta_h(\tau_1) d\tau_1 \mathbf{\Gamma}_0 + \theta_h(\tau) \mathbf{\Gamma}_1 \right] d\tau \mathbf{e}_k^*(0) + \\ & D \mathbf{\Gamma}_0 \mathbf{e}_k^*(t) + D \left(\int_h^t \theta_h(\tau) d\tau \mathbf{\Gamma}_0 + \theta_h(t) \mathbf{\Gamma}_1 \right) \mathbf{e}_k^*(0) \end{aligned} \quad (5.5.10)$$

在式(5.5.10) 中令 $t = 0$, 则有

$$\mathbf{y}_{k+1}(0) = \mathbf{y}_k(0)$$

由 $\mathbf{y}_d^*(0) = \mathbf{y}_0(0)$, 可知对任何 $k = 0, 1, 2, \dots$, 均有 $\mathbf{e}_k^*(0) = 0$ 。

再由式(5.5.10) 可知

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{k+1}(t) = & \mathbf{y}_k(t) + D \mathbf{\Gamma}_0 \mathbf{e}_k^*(t) + C \mathbf{B} \mathbf{\Gamma}_1 \mathbf{e}_k^*(t) + \\ & C \int_0^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{\Gamma}_0 \mathbf{e}_k^*(\tau) d\tau + C \mathbf{A} \int_0^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{\Gamma}_1 \mathbf{e}_k^*(\tau) d\tau \end{aligned}$$

因此

$$e_{k+1}^*(t) = (I - D\Gamma_0 - CB\Gamma_1)e_k^*(t) - C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\Gamma_0 e_k^*(\tau) d\tau -$$

$$CA \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\Gamma_1 e_k^*(\tau) d\tau$$

两端取范数, 并利用条件(2) 有

$$\|e_{k+1}^*(t)\| \leq \rho \|e_k^*(t)\| + (\alpha + \beta) \int_0^t \|e_k^*(\tau)\| d\tau$$

式中 $\alpha = \sup_{0 \leq t \leq T} \|Ce^{At}B\Gamma_0\|$, $\beta = \sup_{0 \leq t \leq T} \|CAe^{At}B\Gamma_1\|$ 。

上式两端同乘 $e^{-\lambda t}$, 并取 λ 范数, 则有

$$\|e_{k+1}^*\|_\lambda \leq \rho \|e_k^*\|_\lambda + (\alpha + \beta) \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau \|e_k^*\|_\lambda \leq$$

$$\rho \|e_k^*\|_\lambda + \frac{\alpha + \beta}{\lambda} (1 - e^{-\lambda T}) \|e_k^*\|_\lambda$$

取 λ 充分大, 使

$$\bar{\rho} = \rho + \frac{\alpha + \beta}{\lambda} (1 - e^{-\lambda T}) < 1$$

可证 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|e_k^*\|_\lambda = 0$, 再由 $\|e_k^*(t)\| \leq e^{\lambda T} \|e_k^*\|_\lambda$ 知, 该定理的结论成立。

下面, 讨论非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + B(x(t))u(t) \\ y(t) = g(x(t)) + D(x(t))u(t) \end{cases} \quad (5.5.11)$$

式中 $t \in [0, T]$, $f, x \in \mathbf{R}^n, g, y, u \in \mathbf{R}^m, B \in \mathbf{R}^{n \times m}, D \in \mathbf{R}^{m \times m}$ 。对该系统作如下的假定: $f(x), B(x), D(x)$ 关于 $x \in \mathbf{R}^n$ 满足全局一致 Lipschitz 条件, 即 $\|h(x_1) - h(x_2)\| \leq k_h \|x_1 - x_2\|$ ($h \in \{f, B, D\}$); $g(x)$ 对 x 的导数 $g_x(x)$ 存在, 且 $g_x(x)$ 关于 $x \in \mathbf{R}^n$ 满足全局一致 Lipschitz 条件, 即 $\|g_x(x_1) - g_x(x_2)\| \leq k_g \|x_1 - x_2\|$; $B(x), g_x(x)$ 有界, 即 $\|g_x(x)\| \leq M, \|B(x)\| \leq M$ 。此外, 还假定 $\text{rank}(D(x)) < m, \text{rank}(g_x(x)B(x)) = m$ ($x \in \mathbf{R}^n$)。

任取一控制输入 $u_0(t), u_0(t)$ 在 $[0, T]$ 上有连续的导数, 并

设系统(5.5.11)的输出轨迹为 $y_0(t)$, 仍构造如式(5.5.2)所示的轨迹及如式(5.5.5)所示的学习律, 此时式(5.5.6)仍成立。

定理 5.5.3 设系统(5.5.11)及学习律(5.5.2)满足条件

- (1) $\Gamma_1 D(x) = 0 \quad (x \in \mathbf{R}^n)$;
- (2) $\|I - \Gamma_0 D(x) - \Gamma_1 g_x(x) B(x)\| \leq \rho < 1 (x \in \mathbf{R}^n)$
- (3) $x_k(0) = x^0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$

则当 $k \rightarrow \infty$ 时 $y_k(t)$ 在 $[0, T]$ 上一致收敛于 $y_d^*(t)$ 。

证明 仍取一控制输入 $u_d^*(t)$, 使系统初态位于 x^0 时的输出轨迹为 $y_d^*(t)$ 。令 $\Delta u_k^* = u_d^* - u_k$, 于是由式(5.5.11)可知

$$\begin{aligned} e_k^* &= g(x_d^*) - g(x_k) + \\ &\quad D(x_d^*)u_d^* - D(x_k)u_k = \\ &\quad D(x_k)\Delta u_k^* + [D(x_d^*) - D(x_k)]u_d^* + \\ &\quad g(x_d^*) - g(x_k) \\ \Gamma_1 \dot{e}_k^* &= \Gamma_1 g_x(x_d^*)\dot{x}_d^* - \Gamma_1 g_x(x_k)\dot{x}_k + \\ &\quad \Gamma_1 g_x(x_k)B(x_k)\Delta u_k^* + \\ &\quad \Gamma_1 g_x(x_k)[B(x_d^*) - B(x_k)]u_d^* + \\ &\quad \Gamma_1 [g_x(x_d^*) - g_x(x_k)][f(x_d^*) + B(x_d^*)u_d^*] + \\ &\quad \Gamma_1 g_x(x_k)[f(x_d^*) - f(x_k)] \end{aligned}$$

代入式(5.5.6)后两端取范数, 并利用条件(2), 则有

$$\|\Delta u_{k+1}^*\| \leq \rho \|\Delta u_k^*\| + k_1 \|x_d^* - x_k\| \quad (5.5.12)$$

式中 $k_1 = \gamma_0 b_1 k_D + \gamma_0 M + \gamma_1 M b_1 k_B + \gamma_1 b_2 k_g + \gamma_1 M k_f$, 而 $\gamma_0 = \| \Gamma_0 \|$, $\gamma_1 = \| \Gamma_1 \|$, $b_1 = \sup_{0 \leq t \leq T} \| u_d^*(t) \|$, $b_2 = \sup_{0 \leq t \leq T} \| f(x_d^*(t)) + B(x_d^*(t))u_d^*(t) \|$ 。

再由式(5.5.11)可知

$$\begin{aligned} x_d^*(t) - x_k(t) &= \int_0^t [f(x_d^*(\tau)) - f(x_k(\tau))] d\tau + \\ &\quad \int_0^t B(x_k(\tau))\Delta u_k^*(\tau) d\tau + \int_0^t [B(x_d^*(\tau)) - B(x_k(\tau))]u_d^*(\tau) d\tau \end{aligned}$$

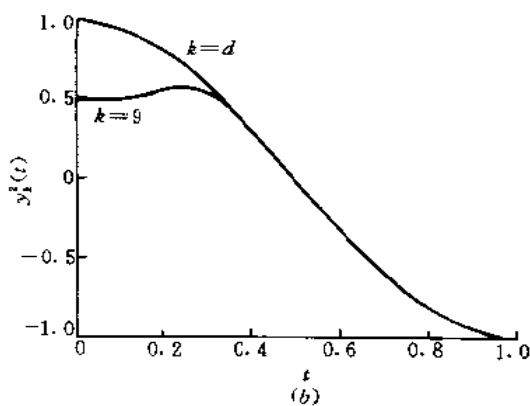
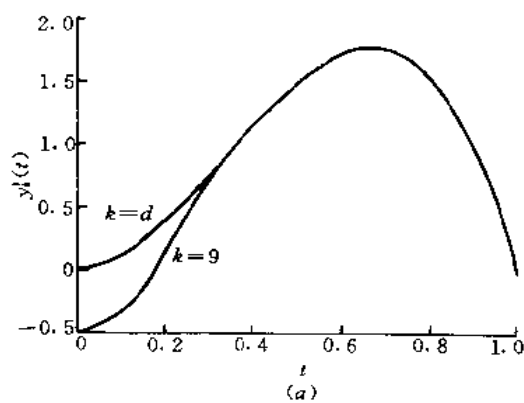
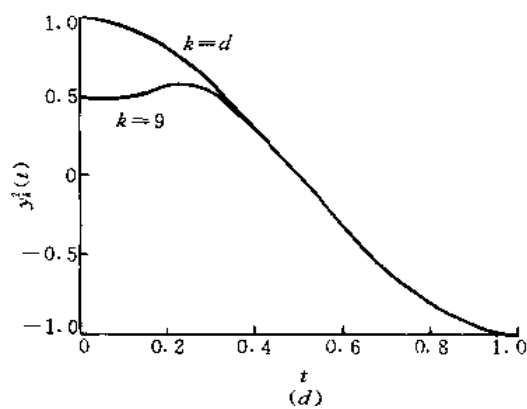
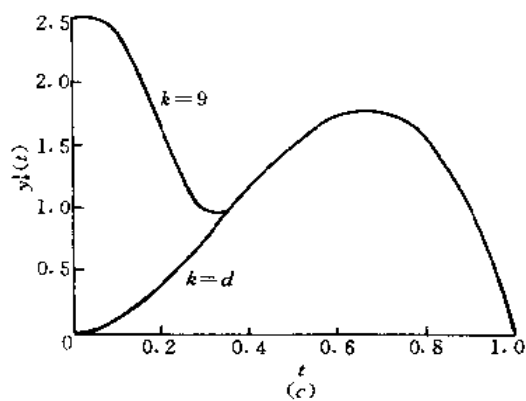


图 5.5.1 例 5.5.1 的

(a) $y_k^1(t), u_0(t) = [0, 0]^T$;

(c) $y_k^1(t), u_0(t) = [1, 1]^T$;



迭代输出轨迹

$$(b) \quad y_1^2(t), u_0(t) = [0, 0]^T;$$

$$(d) \quad y_1^2(t), u_0(t) = [1, 1]^T.$$

因此,

$$\begin{aligned} \|x_d^*(t) - x_k(t)\| &\leq k_2 \int_0^t \|x_d^*(\tau) - x_k(\tau)\| d\tau + \\ &\quad M \int_0^t \|\Delta u_k^*(\tau)\| d\tau \end{aligned} \quad (5.5.13)$$

式中 $k_2 = k_f + b_1 k_B$ 。由 Bellman-Gronwall 引理可知

$$\|x_d^*(t) - x_k(t)\| \leq M \int_0^t e^{k_2(t-\tau)} \|\Delta u_k^*(\tau)\| d\tau$$

代入式(5.5.12),有

$$\|\Delta u_{k+1}^*\| \leq \rho \|\Delta u_k^*\| + Mk_1 \int_0^t e^{k_2(t-\tau)} \|\Delta u_k^*(\tau)\| d\tau$$

上式两端同乘 $e^{-\lambda t}$ ($\lambda > k_2$), 并取 λ 范数, 则有

$$\begin{aligned} \|\Delta u_{k+1}^*\|_\lambda &\leq \\ \rho \|\Delta u_k^*\|_\lambda + Mk_1 \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t e^{-(\lambda-k_2)(t-\tau)} d\tau \|\Delta u_k^*\|_\lambda &\leq \\ \left\{ \rho + \frac{Mk_1}{\lambda - k_2} [1 - e^{-(\lambda - k_2)T}] \right\} \|\Delta u_k^*\|_\lambda \end{aligned}$$

取 λ 充分大, 使

$$\tilde{\rho} = \rho + \frac{Mk_1}{\lambda - k_2} [1 - e^{-(\lambda - k_2)T}] < 1$$

则可证 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\Delta u_k^*\|_\lambda = 0$, 再由式(5.5.13)及式(5.5.11)可得该定理的结论。

关于定理 5.5.1, 定理 5.5.2 及定理 5.5.3, 作如下几点说明:

(1) 学习律(5.5.5)与学习律(5.5.8)的极限轨迹与 $u_0(t)$ (主要是 $u_c(0)$) 的选取有关, 因而收敛速度也与之有关, 特别当 $y_0(0) = y_d(0)$ 时极限轨迹就是期望轨迹。

(2) 当 $D = 0$ ($D(x) \equiv 0$) 时, 系统属于完全非正则的情形, 这时条件(1)自然满足, 若再取 $\Gamma_0 = 0$, 就是在 5.3 节中讨论的内容。

(3) 当 $\text{rank}(\mathbf{D}) = m$ (或 $\text{rank}(\mathbf{D}(x)) = m$) 时, 即系统属于正则的情形, 取 $\mathbf{F}_1 = \mathbf{0}$, 即为在第二章中讨论的内容。

例 5.5.1 考虑如下的重复系统

$$\begin{aligned}\dot{x}^1(t) &= -x^1(t) + u^1(t) \\ \dot{x}^2(t) &= \cos(x^1(t)x^3(t)) + u^2(t) \\ \dot{x}^3(t) &= -x^2(t) - x^3(t) + \sin(x^1(t))u^2(t) \\ y^1(t) &= x^1(t) + u^1(t) + u^2(t) \\ y^2(t) &= x^2(t)\end{aligned}$$

其中 $t \in [0, 1]$, 又设期望轨迹为

$$\begin{cases} y_d^1(t) = 12t^2(1-t) \\ y_d^2(t) = \cos(\pi t) \end{cases}$$

此时, $\text{rank}(\mathbf{D}) = 1$, $\text{rank}(\mathbf{g}_r(x)\mathbf{B}(x)) = 2$, 假定迭代初态恒定 $x_k^i(0) = 0.5 (i = 1, 2, 3)$, 且选取学习律为式(5.5.5), 学习增益为

$$\mathbf{F}_0 = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -0.9 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix}$$

图 5.5.1 分别给出了当 $\mathbf{u}_0(t) = [0, 0]^T, h = 0.4$ 和 $\mathbf{u}_0(t) = [1, 1]^T, h = 0.4$ 时的极限轨迹。

5.6 高阶非正则系统的迭代学习控制

考虑线性定常系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (5.6.1)$$

式中 $t \in [0, T]$, $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n \times m}$, $\mathbf{C} \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{u}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^m$, 又设 $\text{rank}(\mathbf{D}) < m$, $\text{rank}(\mathbf{C}\mathbf{A}^{i-2}\mathbf{B}) < m (i = 2, \dots, p)$, 而 $\text{rank}(\mathbf{C}\mathbf{A}^{p-1}\mathbf{B}) = m$, 即式(5.6.1) 是一个 p 阶非正则系统。

任取一控制输入 $\mathbf{u}_0(t)$, $\mathbf{u}_0(t)$ 在 $[0, T]$ 上有连续的 p 阶导

数, 并设相应的输出轨迹是 $y_0(t)$, 构造轨迹

$$y_d^*(t) = \begin{cases} y_d(t) + \sum_{j=0}^{p-1} \left(\frac{t^j}{j!} \int_h^t \theta_{p,h}(\tau) d\tau \right) (y_d^{(j)}(0) - y_0^{(j)}(0)) & (0 \leq t \leq h) \\ y_d(t) & (h < t \leq T) \end{cases} \quad (5.6.2)$$

式中

$$\theta_{p,h}(t) = \begin{cases} \frac{1}{h^{2p+1}} \frac{(2p+1)!}{(p!)^2} t^p (h-t)^p & (0 \leq t \leq h) \\ 0 & (h < t \leq T) \end{cases} \quad (5.6.3)$$

显然, $\theta_{p,h}(t)$ 有如下的性质:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \int_0^h \theta_{p,h}(t) dt = 1 \\ (2) \quad & \left(\frac{t^q}{q!} \int_h^t \theta_{p,h}(\tau) d\tau \right) \Big|_{t=0}^{(q)} = \begin{cases} -1 & (q = j) \\ 0 & (q \neq j) \end{cases} \\ & (q = 0, 1, \dots, p) \end{aligned}$$

于是, $y_d^{*(j)}(0) = y_0^{(j)}(0) (j = 0, 1, \dots, p-1)$ 。

根据式(5.6.3)可构造学习律

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \sum_{j=0}^p \Gamma_j e_k^{(j)}(t) + \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{q=0}^p \left(\frac{t^q}{q!} \int_h^t \theta_{p,h}(\tau) d\tau \right)^{(q)} \Gamma_q (y_d^{(j)}(0) - y_0^{(j)}(0)) \quad (5.6.4)$$

这里 $\Gamma_j (j = 0, 1, 2, \dots, p)$ 是学习增益矩阵。

定理 5.6.1 设系统(5.6.1)及学习律(5.6.4)满足条件

$$\begin{aligned} (1) \quad & \Gamma_p D = 0, \sum_j \Gamma_j C A^{j-1} B + \Gamma_{i-1} D = 0 \quad (i = 2, \dots, p) \\ (2) \quad & \rho = \| I - \sum_{j=0}^p \Gamma_j C A^{j-1} B - \Gamma_0 D \| < 1 \end{aligned}$$

$$(3) \quad \mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}^0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

则当 $k \rightarrow \infty$ 时 $\mathbf{y}_k(t)$ 在 $[0, T]$ 上一致收敛于 $\mathbf{y}_d^*(t)$ 。

证明 取一控制输入 $\mathbf{y}_d^*(t)$, 使系统初态位于 \mathbf{x}^0 时的输出轨迹为 $\mathbf{y}_d^*(t)$ 。这时, 若令 $\mathbf{e}_k^*(t) = \mathbf{y}_d^*(t) - \mathbf{y}_k(t)$, 则由式 (5.6.4), 对任何 $t \in [0, T]$, 有

$$\mathbf{u}_{k+1}(t) = \mathbf{u}_k(t) + \sum_{j=0}^p \mathbf{F}_j \mathbf{e}_k^{*(j)}(t) \quad (5.6.5)$$

由式 (5.6.1) 可知

$$\mathbf{e}_k^*(t) = \mathbf{C} \int_0^t \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}_k^*(\tau) d\tau + \mathbf{D} \Delta \mathbf{u}_k^*(t) \quad (5.6.6)$$

因此

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k \mathbf{F}_j \mathbf{e}_k^{*(j)}(t) &= \{[(\mathbf{F}_p \mathbf{e}_k^*(t))' + \mathbf{F}_{p-1} \mathbf{e}_k^*(t)]' + \dots + \mathbf{F}_1 \mathbf{e}_k^*(t)]' \\ &\quad + \mathbf{F}_0 \mathbf{e}_k^*(t) = \\ &= \left(\sum_{j=1}^p \mathbf{F}_j \mathbf{C} \mathbf{A}^{j-1} \mathbf{B} + \mathbf{F}_0 \mathbf{D} \right) \Delta \mathbf{u}_k^*(t) + \\ &\quad \left(\sum_{j=0}^p \mathbf{F}_j \mathbf{C} \mathbf{A}^j \right) \int_0^t \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}_k^*(\tau) d\tau \end{aligned}$$

$$\text{从而} \quad \Delta \mathbf{u}_{k+1}^*(t) = \left(\mathbf{I} - \sum_{j=1}^p \mathbf{F}_j \mathbf{C} \mathbf{A}^{j-1} \mathbf{B} - \mathbf{F}_0 \mathbf{D} \right) \Delta \mathbf{u}_k^*(t) +$$

$$\left(\sum_{j=0}^p \mathbf{F}_j \mathbf{C} \mathbf{A}^j \right) \int_0^t \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}_k^*(\tau) d\tau$$

两端取范数, 则有, $\|\Delta \mathbf{u}_{k+1}^*(t)\| \leq \rho \|\Delta \mathbf{u}_k^*(t)\| + \alpha \int_0^t \|\Delta \mathbf{u}_k^*(\tau)\| d\tau$, $\alpha = \sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \left(\sum_{j=0}^p \mathbf{F}_j \mathbf{C} \mathbf{A}^j \right) \mathbf{e}^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} \right\|$ 。由此可以证

明当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\Delta \mathbf{u}_k^*(t)$ 在 $[0, T]$ 上一致趋于 0, 再由式 (5.6.6) 可知该定理的结论成立。

根据轨迹(5.6.2)还可构造学习律

$$\begin{aligned} u_{k+1}(t) = & u_k(t) + \sum_{j=0}^p \Gamma_j e_k^{(j)}(t) + \\ & \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{q=0}^p \left\{ \frac{t^i}{j!} \int_h^t \theta_{p,h}(\tau) d\tau \right\}^{(q)} \Gamma_q e_k^{(j)}(0) \quad (5.6.7) \end{aligned}$$

式中 $\theta_{p,h}(t)$ 仍如式(5.6.3)所示。

定理 5.6.2 设系统(5.6.1)及学习律(5.6.7)满足

$$(1) \quad D\Gamma_p = 0$$

$$\sum_{j=1}^p CA^{j-1} B \Gamma_j + D \Gamma_{i-1} = 0 \quad (i = 2, 3, \dots, p)$$

$$(2) \quad \rho = \|I - \sum_{j=1}^p CA^{j-1} B \Gamma_j - D \Gamma_0\| < 1$$

$$(3) \quad x_k(0) = x^0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

则当 $k \rightarrow \infty$ 时, $y_k(t)$ 在 $[0, T]$ 上一致收敛于 $y_d^*(t)$ 。

证明 令 $e_k^*(t) = y_d^*(t) - y_k(t)$, 则由轨迹(5.6.2)及学习律(5.6.7)可知

$$\begin{aligned} u_{k+1}(t) = & u_k(t) + \sum_{j=0}^p \Gamma_j e_k^{(j)}(t) + \\ & \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{q=0}^p \left\{ \frac{t^i}{j!} \int_h^t \theta_{p,h}(\tau) d\tau \right\}^{(q)} \Gamma_q e_k^{(j)}(0) \quad (5.6.8) \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} e_{k+1}^*(t) = & y_d^*(t) - y_{k+1}(t) = \\ & y_d^*(t) - [C e^{At} x^0 + C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u_{k+1}(\tau) d\tau + D u_{k+1}(t)] = \\ & e_k^*(t) - C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \left[\sum_{j=0}^p \Gamma_j e_k^{(j)}(\tau) \right] d\tau - \\ & C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \left[\sum_{j=0}^{p-1} \sum_{q=0}^p \left\{ \frac{\tau^i}{j!} \int_h^t \theta_{p,h}(\tau_1) d\tau_1 \right\}^{(q)} \Gamma_q e_k^{(j)}(0) \right] d\tau - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& D \sum_{j=0}^p \Gamma_j e_k^{*(j)}(t) - D \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{q=0}^p \left\{ \frac{t^j}{j!} \int_h^t \theta_{p,h}(\tau) d\tau \right\}^{(q)} \Gamma_q e_k^{*(j)}(0) = \\
& (I - \sum_{j=1}^p CA^{j-1} B \Gamma_j - D \Gamma_0) e_k^*(t) - \sum_{j=0}^p CA^j \times \\
& \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \Gamma_j e_k^*(\tau) d\tau - \sum_{i=2}^p \left(\sum_{j=i}^p CA^{j-i} B \Gamma_j \right) e_k^{*(i-1)}(t) - \\
& D \sum_{j=2}^p \Gamma_{j-1} e_k^{*(j-1)}(t) - D \Gamma_p e_k^*(t) + \\
& \sum_{i=1}^p \left(\sum_{j=i}^p CA^{j-i} e^{A\tau} B \Gamma_j \right) e_k^{*(i-1)}(0) - \\
& C \int_h^t e^{A(t-\tau)} B \left[\sum_{j=0}^{p-1} \sum_{q=0}^p \left\{ \frac{\tau^j}{j!} \int_h^\tau \theta_{p,h}(\tau_1) d\tau_1 \right\}^{(q)} \Gamma_q e_k^{*(j)}(0) \right] d\tau - \\
& D \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{q=0}^p \left\{ \frac{\tau^j}{j!} \int_h^\tau \theta_{p,h}(\tau) d\tau \right\}^{(q)} \Gamma_q e_k^{*(j)}(0)
\end{aligned}$$

利用条件(1), 有

$$\begin{aligned}
e_{k,1}^*(t) &= (I - \sum_{j=1}^p CA^{j-1} B \Gamma_j - D \Gamma_0) e_k^*(t) - \\
& \sum_{j=0}^p CA^j \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \Gamma_j e_k^*(\tau) d\tau + \\
& \sum_{i=1}^p \left(\sum_{j=i}^p CA^{j-i} e^{A\tau} B \Gamma_j \right) e_k^{*(i-1)}(0) - \\
& C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \left[\sum_{j=0}^{p-1} \sum_{q=0}^p \left\{ \frac{\tau^j}{j!} \int_h^\tau \theta_{p,h}(\tau_1) d\tau_1 \right\}^{(q)} \Gamma_q e_k^{*(j)}(0) \right] d\tau
\end{aligned} \tag{5.6.9}$$

由 $e_0^{*(j)}(0) = 0 (j = 0, 1, 2, \dots, p-1)$, 结合式(5.6.9)不难推得

对任何 k 均有 $e_k^{*(j)}(0) = 0 (j = 0, 1, 2, \dots, p-1)$, 故式(5.6.9)又可写成

$$e_{k+1}^*(t) = (I - \sum_{j=1}^p CA^{j-1} B \Gamma_j - D \Gamma_0) e_k^*(t) - \sum_{j=0}^p CA^j \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \Gamma_j e_k^*(\tau) d\tau$$

利用条件(2), 由此可证当 $k \rightarrow \infty$ 时 $e_k^*(t)$ 在 $[0, T]$ 上一致收敛于 0。

同 5.5 节一样, 由极限轨迹(5.6.2)可看出, $y_d^*(t)$ 与 $y_0(t)$ 有关, 也即与 $u_0(t)$ 有关。当 $y_0^{(j)}(0) = y_d^{(j)}(0) (j = 0, 1, 2, \dots, p-1)$ 时极限轨迹即为期望轨迹。

例 5.6.1 考虑如下线性定常系统

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t) \end{aligned}$$

此时

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad CB = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad CAB = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

即该系统是一个 2 阶非正则系统。又设期望轨迹为

$$y_d(t) = \begin{bmatrix} 12t^2(1-t) \\ \cos(\pi t) \end{bmatrix} \quad (t \in [0, 1])$$

迭代初态恒定, 即 $x_k(0) = [0.5, 0.5, 0.5]^T, u_0(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(1) 用式(5.6.4)所表示的学习律, 即

$$\begin{aligned} u_{k+1}(t) &= \\ u_k(t) &+ \Gamma_0 e_k(t) + \Gamma_1 \dot{e}_k(t) + \Gamma_2 \ddot{e}_k(t) + \end{aligned}$$

$$\left[\int_h^t \theta_{2,h}(\tau) d\tau \Gamma_0 + \theta_{2,h}(t) \Gamma_1 + \dot{\theta}_{2,h}(t) \Gamma_2 \right] (y_d(0) - y_0(0)) +$$

$$\left[t \int_h^t \theta_{2,h}(\tau) d\tau \Gamma_0 + \left(\int_h^t \theta_{2,h}(\tau) d\tau + t \theta_{2,h}(t) \right) \Gamma_1 + \right.$$

$$\left. (2\theta_{2,h}(t) + t \dot{\theta}_{2,h}(t)) \Gamma_2 \right] (\dot{y}_d(0) - \dot{y}_0(0))$$

此时

$$\theta_{2,h}(t) = \begin{cases} \frac{30}{h^5} t^2 (h-t)^2 & (0 \leq t \leq h) \\ 0 & (h < t \leq T) \end{cases}$$

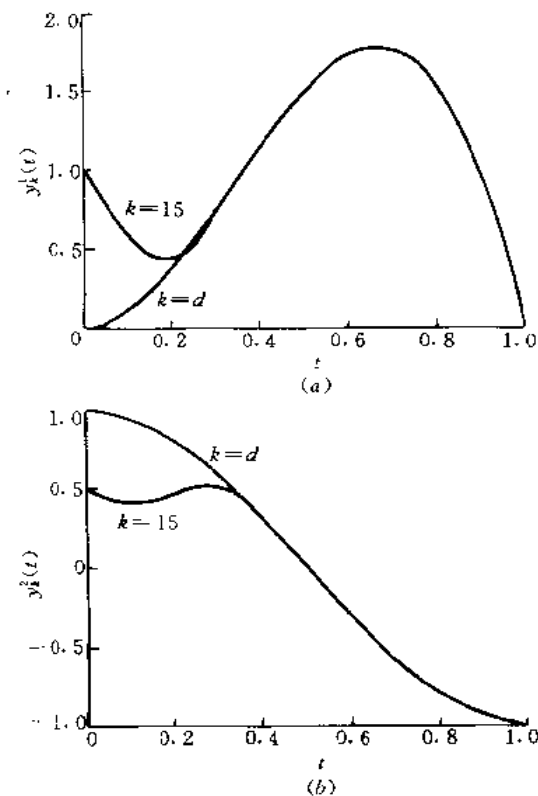


图 5.6.1 例 5.6.1 的迭代输出轨迹

(a) $y_k^1(t)$; (b) $y_k^2(t)$.

选取 $h = 0.4$, 及

$$\mathbf{\Gamma}_0 = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ -0.8 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Gamma}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Gamma}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix}$$

图 5.6.4 给出了极限输出轨迹及期望轨迹。

(2) 用式(5.6.7)所表示的学习律, 即

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{k+1}(t) = & \mathbf{u}_k(t) + \mathbf{\Gamma}_0 \mathbf{e}_k(t) + \mathbf{\Gamma}_1 \dot{\mathbf{e}}_k(t) + \mathbf{\Gamma}_2 \ddot{\mathbf{e}}_k(t) + \\ & \left(\int_h^t \theta_{2,h}(\tau) d\tau \mathbf{\Gamma}_0 + \theta_{2,h}(t) \mathbf{\Gamma}_1 + \dot{\theta}_{2,h}(t) \mathbf{\Gamma}_2 \right) \mathbf{e}_k(0) + \\ & \left[t \int_h^t \theta_{2,h}(\tau) d\tau \mathbf{\Gamma}_0 + \left(\int_h^t \theta_{2,h}(\tau) d\tau + t\theta_{2,h}(t) \right) \mathbf{\Gamma}_1 + \right. \\ & \left. (2\theta_{2,h}(t) + t\dot{\theta}_{2,h}(t)) \mathbf{\Gamma}_2 \right] \dot{\mathbf{e}}_k(0) \end{aligned}$$

选取 $h = 0.4$, 及

$$\mathbf{\Gamma}_0 = \begin{bmatrix} 0.9 & -0.9 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Gamma}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.9 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Gamma}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}$$

极限输出轨迹及期望轨迹可如图 5.6.1 所示。

第六章 迭代学习控制系统的 2-D 分析

从本质上来说,迭代学习控制包含了两个过程,即时间过程和迭代过程。前面的几章中,仅基于时间变量的一维(1-D)分析讨论了迭代学习算法的收敛性。本章将以二维(2-D)系统模型,特别是以 Roesser 模型为基础,讨论线性离散系统的迭代学习控制及其收敛性。

6.1 Roesser 模型

2-D 系统理论及分析方法始于 70 年代,其中 Roesser 模型是最常见也是最有代表性的模型,它的状态方程及输出方程分别是

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^h(i+1, j) \\ \mathbf{x}^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^h(i, j) \\ \mathbf{x}^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(i, j) \quad (6.1.1)$$

$$\mathbf{y}(i, j) = [\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{x}^h(i, j) \\ \mathbf{x}^v(i, j) \end{bmatrix} + \mathbf{D}\mathbf{u}(i, j) \quad (6.1.2)$$

其中 i, j 分别是垂直与水平整值坐标, $\mathbf{x}^h(i, j) \in \mathbf{R}^{n_1}$, $\mathbf{x}^v(i, j) \in \mathbf{R}^{n_2}$ 分别是水平与垂直状态向量, $\mathbf{u}(i, j) \in \mathbf{R}^r$, $\mathbf{y}(i, j) \in \mathbf{R}^m$ 分别是系统的输入输出向量, \mathbf{A}_{ij} 、 \mathbf{B}_i 、 \mathbf{C}_i ($i, j = 1, 2$)、 \mathbf{D} 是具有恰当维数的矩阵,其边界条件为 $\mathbf{x}^h(0, j)$, $\mathbf{x}^v(i, 0)$ ($i, j = 0, 1, 2, \dots$)。

同 1-D 系统类似,为建立系统的状态响应公式,引入状态转移矩阵的概念,称满足

$$\begin{aligned} \Phi^{i,j} &= \Phi^{1,0} \Phi^{i-1,j} + \Phi^{0,1} \Phi^{i,j-1} \\ \Phi^{0,0} &= \mathbf{I} \\ \Phi^{i,j} &= 0 \quad (i < 0 \text{ 或 } j < 0) \end{aligned} \quad (6.1.3)$$

的矩阵 $\Phi^{i,j}$ 为 Roesser 模型 (6.1.1) 的状态转移矩阵, 其中

$$\Phi^{1,0} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Phi^{0,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

状态转移矩阵有如下的几个性质:

- (1) $\Phi^{i,0} = (\Phi^{1,0})^i, \Phi^{0,j} = (\Phi^{0,1})^j$
- (2) $\Phi^{1,0}\Phi^{i-1,j} + \Phi^{0,1}\Phi^{i,j-1} = \Phi^{i-1,j}\Phi^{1,0} + \Phi^{i,j-1}\Phi^{0,1}$

其中 $i, j = 0, 1, 2, \dots$ 。

性质(1)可直接由 (6.1.3) 得到。

性质(2)的证明。显然当 $i=0$ 或 $j=0$ 时性质(2)成立, 当 $i=0, j=1$ 及 $i=1, j=0$ 时性质(2)也成立。假定性质(2)对 $i \leq k$, 或 $j \leq l$ 均成立, 下证当 $i=k+1, j=l$ 时亦成立。事实上

$$\begin{aligned} & \Phi^{1,0}\Phi^{k,l} + \Phi^{0,1}\Phi^{k+1,l-1} = \\ & \Phi^{1,0}(\Phi^{1,0}\Phi^{k-1,l} + \Phi^{0,1}\Phi^{k,l-1}) + \Phi^{0,1}(\Phi^{1,0}\Phi^{k,l-1} + \Phi^{0,1}\Phi^{k+1,l-2}) = \\ & \Phi^{1,0}(\Phi^{k-i,l}\Phi^{1,0} + \Phi^{k,l-1}\Phi^{0,1}) + \Phi^{0,1}(\Phi^{k,l-1}\Phi^{1,0} + \Phi^{k+1,l-2}\Phi^{0,1}) = \\ & (\Phi^{1,0}\Phi^{k-1,l} + \Phi^{0,l}\Phi^{k,l-1})\Phi^{1,0} + (\Phi^{1,0}\Phi^{k,l-1} + \Phi^{0,1}\Phi^{k+1,l-2})\Phi^{0,1} = \\ & \Phi^{k,l}\Phi^{1,0} + \Phi^{k+1,l-1}\Phi^{0,1} \end{aligned}$$

类似可证当 $i=k, j=l+1$ 时性质(2)也成立。由归纳原理知性质(2)对 $i, j \geq 0$ 均成立。

关于状态转移矩阵, 还有如下的引理。

引理 6.1.1 对任何给定的 i , 当 $j \rightarrow \infty$ 时 $\Phi^{i,j} \rightarrow 0$ 的充分必要条件是

$$\rho(\Phi^{0,1}) < 1$$

即 $\Phi^{0,1}$ 是渐近稳定的, 式中 $\rho(\Phi^{0,1})$ 是 $\Phi^{0,1}$ 的谱半径。

证明 必要性。由 $\lim_{j \rightarrow \infty} \Phi^{0,j} = 0$ 及性质(1)可直接得到。

充分性。设 $\rho(\Phi^{0,1}) < 1$, 则级数 $\sum_{j=0}^{\infty} \Phi^{0,j}$ 即 $\sum_{j=0}^{\infty} (\Phi^{0,1})^j$ 收敛,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \Phi^{0,j} = (1 - \Phi^{0,1})^{-1}$$

而且, 由状态转移矩阵的定义, 易知

$$\Phi^{i,j} = \sum_{h=0}^j \Phi^{0,h} \Phi^{1,0} \Phi^{i-1,j-h}$$

所以

$$\sum_{j=0}^{\infty} \Phi^{i,j} = \left(\sum_{h=0}^{\infty} \Phi^{0,h} \Phi^{1,0} \right) \sum_{j=0}^{\infty} \Phi^{i-1,j}$$

故对任何固定的 i , 级数 $\sum_{j=0}^{\infty} \Phi^{i,j}$ 均收敛, 从而 $\lim_{j \rightarrow \infty} \Phi^{i,j} = 0$ 。证毕。

关于 Roesser 模型 (6.1.1) 的状态响应公式, 先证明定理 6.1.1。

定理 6.1.1 模型 (6.1.1) 的零输入响应为

$$\begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^j \Phi^{i-k,j} \begin{bmatrix} 0 \\ x^v(k, 0) \end{bmatrix} + \sum_{l=0}^j \Phi^{i,j-l} \begin{bmatrix} x^h(0, l) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.1.4)$$

($i, j \geq 0$)

证明 当 $i = j = 0$ 时, 式 (6.1.4) 显然成立。当 $i = 0$ 时, 由式 (6.1.1) 可知

$$\begin{bmatrix} x^h(1, j) \\ x^v(0, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(0, j) \\ x^v(0, j) \end{bmatrix}$$

故

$$\begin{bmatrix} 0 \\ x^v(0, j+1) \end{bmatrix} = \Phi^{0,1} \begin{bmatrix} x^h(0, j) \\ x^v(0, j) \end{bmatrix} \quad (6.1.5)$$

由此即知

$$\begin{bmatrix} 0 \\ x^v(0, j+1) \end{bmatrix} = \sum_{l=0}^j \Phi^{0,j+1-l} \begin{bmatrix} x^h(0, l) \\ 0 \end{bmatrix} + \Phi^{0,j+1} \begin{bmatrix} 0 \\ x^h(0, l) \end{bmatrix}$$

因此

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x^h(0, j+1) \\ x^v(0, j+1) \end{bmatrix} &= \\ \begin{bmatrix} x^h(0, j+1) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x^v(0, j+1) \end{bmatrix} &= \\ \begin{bmatrix} x^h(0, j+1) \\ 0 \end{bmatrix} + \Phi^{0,1} \begin{bmatrix} x^h(0, j) \\ x^v(0, j) \end{bmatrix} &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Phi^{0,0} \begin{bmatrix} x^h(0, j+1) \\ 0 \end{bmatrix} + \Phi^{0,1} \begin{bmatrix} x^h(0, j) \\ 0 \end{bmatrix} + \Phi^{0,1} \begin{bmatrix} 0 \\ x^v(0, j) \end{bmatrix} = \\
& \Phi^{0,0} \begin{bmatrix} x^h(0, j+1) \\ 0 \end{bmatrix} + \Phi^{0,1} \begin{bmatrix} x^h(0, j) \\ 0 \end{bmatrix} + \Phi^{0,1} \Phi^{0,1} \begin{bmatrix} x^h(0, j-1) \\ -x^v(0, j-1) \end{bmatrix} + \\
& \Phi^{0,0} \begin{bmatrix} x^h(0, j+1) \\ 0 \end{bmatrix} + \Phi^{0,1} \begin{bmatrix} x^h(0, j) \\ 0 \end{bmatrix} + \Phi^{0,2} \begin{bmatrix} x^h(0, j-1) \\ 0 \end{bmatrix} + \\
& \dots + \Phi^{0,j+1} \begin{bmatrix} x^h(0, 0) \\ 0 \end{bmatrix} + \Phi^{0,j+1} \begin{bmatrix} 0 \\ x^v(0, 0) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

即式(6.1.4)成立。类似可证当 $j=0$ 时式(6.1.4)也成立。假定式(6.1.4)对式 $i \leq k, j \leq l$ 均成立, 现证对 $i=k+1, j=l$ 也成立。

由式(6.1.1)可知

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x^h(k+1, l) \\ -x^v(k+1, l) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x^h(k+1, l) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x^v(k+1, l) \end{bmatrix} = \\
& \Phi^{1,0} \begin{bmatrix} x^h(k, l) \\ x^v(k, l) \end{bmatrix} + \Phi^{0,1} \begin{bmatrix} x^h(k+1, l-1) \\ x^v(k+1, l-1) \end{bmatrix} = \\
& \Phi^{1,0} \left(\sum_{s=0}^k \Phi^{k-s, l} \begin{bmatrix} 0 \\ x^v(s, 0) \end{bmatrix} + \sum_{t=0}^l \Phi^{k, l-t} \times \right. \\
& \left. \begin{bmatrix} x^h(0, t) \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \Phi^{0,1} \sum_{s=0}^{k+1} \Phi^{k+1-s, l-1} \begin{bmatrix} 0 \\ x^v(s, 0) \end{bmatrix} + \\
& \Phi^{0,1} \sum_{t=0}^{l-1} \Phi^{k+1, l-1-t} \begin{bmatrix} x^h(0, t) \\ 0 \end{bmatrix} = \\
& \sum_{s=0}^{k+1} \Phi^{k+1-s, l} \begin{bmatrix} 0 \\ x^v(s, 0) \end{bmatrix} + \sum_{t=0}^l \Phi^{k+1, l-t} \begin{bmatrix} x^h(0, t) \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

类似可证, 当 $i=k, j=l+1$ 时式(6.1.4)也成立, 从而式(6.1.4)对 $i \geq 0, j \geq 0$ 均成立。

当 Roesser 模型的边界条件是 $x^h(p, j), x^v(i, q) (i, j=0, 1, 2, \dots)$ 时, 有定理 6.1.2。

定理 6.1.2 Roesser 模型(6.1.1)的零输入状态响应公式为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^h(i, j) \\ \mathbf{x}^v(i, j) \end{bmatrix} = \sum_{k=p}^i \Phi^{i-k, j} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{x}^v(k, q) \end{bmatrix} + \sum_{l=q}^j \Phi^{i-p, j-l} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^h(p, l) \\ 0 \end{bmatrix} \\ (i = p, p+1, \dots, j = q, q+1, \dots)$$

6.2 正则线性离散系统的迭代学习控制

考虑线性离散系统

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (6.2.1)$$

式中 $t=0, 1, 2, \dots, T$; $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ 、 $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^r$ 、 $\mathbf{y}(t) \in \mathbf{R}^m$ 分别是系统的状态向量、输入向量、输出向量; \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{C} 、 \mathbf{D} 是有适当维数的矩阵。若用 i 表示时间变量, j 表示学习迭代次数, 则式(6.2.1)可写成如下的 2-D 模型

$$\begin{cases} \mathbf{x}(i+1, j) = \mathbf{A}\mathbf{x}(i, j) + \mathbf{B}\mathbf{u}(i, j) \\ \mathbf{y}(i, j) = \mathbf{C}\mathbf{x}(i, j) + \mathbf{D}\mathbf{u}(i, j) \end{cases} \quad (6.2.2)$$

采用学习律

$$\mathbf{u}(i, j+1) = \mathbf{u}(i, j) + \mathbf{\Gamma}\mathbf{e}(i, j) \quad (6.2.3)$$

式中 $i=0, 1, 2, \dots, T$; $\mathbf{\Gamma}$ 是学习增益矩阵; $\mathbf{e}(i, j) = \mathbf{y}_d(i) - \mathbf{y}(i, j)$ 是第 j 次学习输出误差; $\mathbf{y}_d(i)$ 是给定的期望轨迹。

定理 6.2.1 设系统(6.2.2)及学习律(6.2.3)满足条件

- (1) $\rho(\mathbf{I} - \mathbf{D}\mathbf{\Gamma}) < 1$
- (2) $\mathbf{x}(0, j) = \mathbf{x}^0 \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$

则对任何 $0 \leq i \leq T$, 当 $j \rightarrow \infty$ 时 $\mathbf{y}(i, j)$ 均收敛于 $\mathbf{y}_d(i)$ 。

证明 令 $\boldsymbol{\eta}(i, j) = \mathbf{x}(i, j+1) - \mathbf{x}(i, j)$, 则 $\boldsymbol{\eta}(0, j) = 0$ ($j = 0, 1, 2, \dots$) 且

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(i, j+1) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(i, j+1) + \mathbf{D}\mathbf{u}(i, j+1) = \\ &\mathbf{y}(i, j) + \mathbf{C}\boldsymbol{\eta}(i, j) + \mathbf{D}\mathbf{\Gamma}\mathbf{e}(i, j) \end{aligned}$$

于是

$$\mathbf{e}(i, j+1) = (\mathbf{I} - \mathbf{D}\mathbf{\Gamma})\mathbf{e}(i, j) - \mathbf{C}\boldsymbol{\eta}(i, j) \quad (6.2.4)$$

另一方面,由式(6.2.2)可知

$$\begin{aligned}\eta(i+1, j) &= x(i+1, j+1) - x(i+1, j) = \\ &= A\eta(i, j) + B\Gamma e(i, j)\end{aligned}\quad (6.2.5)$$

因此式(6.2.5)及式(6.2.4)可写成如下的 Roesser 模型

$$\begin{bmatrix} \eta(i+1, j) \\ e(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B\Gamma \\ -C & I - D\Gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta(i, j) \\ e(i, j) \end{bmatrix}$$

由定理 6.1.1 可知

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \eta(i, j) \\ e(i, j) \end{bmatrix} &= \sum_{k=0}^i \Phi^{i-k, j} \begin{bmatrix} 0 \\ e(k, 0) \end{bmatrix} = \\ &= \sum_{k=0}^i \Phi^{i, j} \begin{bmatrix} 0 \\ e(i-k, 0) \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (6.2.6)$$

式中 $\Phi^{i, j}$ 是状态转移矩阵, 其中

$$\Phi^{1,0} = \begin{bmatrix} A & B\Gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Phi^{0,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -C & I - D\Gamma \end{bmatrix}$$

由条件(1)知, $\rho(\Phi^{0,1}) = \rho(I - D\Gamma) < 1$, 利用引理 6.1.1 即知, 对任何 $0 \leq i \leq T$, 当 $j \rightarrow \infty$ 时 $\Phi^{i, j} \rightarrow 0$, 再由式(6.2.6)可知, 对任何 $0 \leq i \leq T$, 当 $j \rightarrow \infty$ 时 $e(i, j) \rightarrow 0$, 从而该定理得以证明。

由附录引理 A.4.6 知, 定理 6.2.1 中的条件(1)成立, 即 $\rho(I - D\Gamma) < 1$, 当且仅当 $\text{rank}(D) = m$, 即矩阵 D 行满秩。

对于学习律(6.2.3), 还有定理 6.2.2。

定理 6.2.2 设系统(6.2.2)及学习律(6.2.3)满足条件

- (1) $\rho(I - \Gamma D) < 1$
- (2) $x(0, j) = x_d(0) \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$

则对任何 $0 \leq i \leq T$, 当 $j \rightarrow \infty$ 时 $e(i, j) \rightarrow 0$ 。

证明 令 $\xi(i, j) = x_d(i) - x(i, j)$, 则 $\xi(0, j) = 0 (j = 0, 1, 2, \dots)$ 且

$$\begin{aligned}\Delta u(i, j+1) &= u_d(i) - u(i, j+1) = \\ &= \Delta u(i, j) - \Gamma e(i, j) = \\ &= \Delta u(i, j) - \Gamma C \xi(i, j) - \Gamma D \Delta u(i, j) = \\ &= (I - \Gamma D) \Delta u(i, j) - \Gamma C \xi(i, j)\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\xi(i+1, j) &= x_d(i+1) - x(i+1, j) = \\ &= A\xi(i, j) + B\Delta u(i, j)\end{aligned}$$

故上两式可写成如下的 2-D Roesser 模型

$$\begin{bmatrix} \xi(i+1, j) \\ \Delta u(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ -\Gamma C & I - \Gamma D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(i, j) \\ \Delta u(i, j) \end{bmatrix}$$

由定理 6.1.1 可知

$$\begin{bmatrix} \xi(i, j) \\ \Delta u(i, j) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^i \Phi^{i-k, j} \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta u(k, 0) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^i \Phi^{i, j} \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta u(i-k, 0) \end{bmatrix}$$

式中

$$\Phi^{1,0} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Phi^{0,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\Gamma C & I - \Gamma D \end{bmatrix}$$

由引理 6.1.1 及条件(1)可知, 对于任何 $0 \leq i \leq T$, 当 $j \rightarrow \infty$ 时 $\Phi^{i,j} \rightarrow 0$, 从而 $\xi(i, j) \rightarrow 0$, $\Delta u(i, j) \rightarrow 0$, 由此即知该定理的结论成立。

类似地, 在定理 6.2.2 中, 条件(1)成立当且仅当 $\text{rank}(\mathbf{D}) = r$ (即矩阵 \mathbf{D} 列满秩), 即定理(6.2.1)及定理(6.2.2)要求矩阵 \mathbf{D} 行满秩或列满秩。在系统(6.2.2)中, 如果矩阵 \mathbf{D} 行满秩或列满秩, 称为正则系统。

6.3 非正则线性离散系统的迭代学习控制

本节讨论非正则的情形。如果系统(6.2.2)中矩阵 \mathbf{D} 既非行满秩, 又非列满秩, 就称为非正则系统。此时由引理 A.4.6 可知, 6.2 节定理中的收敛条件不能满足。

为了讨论方便, 假定 $r = m$, 即系统的输入输出维数相同。同连续系统类似, 若 $\text{rank}(\mathbf{D}) < m$, $\text{rank}(\mathbf{CB}) = m$, 则称系统(6.2.2)为一阶非正则系统; 若 $\text{rank}(\mathbf{D}) < m$, $\text{rank}(\mathbf{CA}^{i-2}\mathbf{B}) < m$ ($i = 2, \dots, p$), 而 $\text{rank}(\mathbf{CA}^{p-1}\mathbf{B}) = m$ 。则称系统(6.2.2)为 p 阶非正则系统。对于一阶非正则系统, 选用的学习律

$$u(i, j+1) = u(i, j) + \Gamma_0 e(i, j) + \Gamma_1 e(i+1, j) \quad (6.3.1)$$

式中 $\Gamma_i (i=0, 1)$ 为学习增益矩阵, $e(i, j) = y_d(i) - y(i, j)$ 。关于此学习律, 首先证明定理 6.3.1。

定理 6.3.1 设系统(6.2.2)及学习律(6.3.1)满足

$$(1) \quad D\Gamma_1 = 0$$

$$(2) \quad \rho(I - CB\Gamma_1 - D\Gamma_0) < 1$$

$$(3) \quad x(0, j) = x^0, \quad e(0, j) = 0 \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

则对任何 $0 \leq i \leq T$, 当 $j \rightarrow \infty$ 时 $y(i, j) \rightarrow y_d(i)$ 。

证明 令 $\eta(i, j) = A[x(i-1, j+1) - x(i-1, j)] + B\Gamma_0 e(i-1, j)$, 则由条件(3)知, $\eta(1, j) = 0 (j = 0, 1, 2, \dots)$, 且根据条件(1)及条件(2)可知

$$\begin{aligned} y(i, j+1) &= \\ Cx(i, j+1) + Du(i, j+1) &= \\ Cx(i, j+1) + Du(i, j) + D\Gamma_0 e(i, j) &= \\ y(i, j) + C[x(i, j+1) - x(i, j)] + D\Gamma_0 e(i, j) &= \\ y(i, j) + CA[x(i-1, j+1) - x(i-1, j)] + \\ CB\Gamma_0 e(i-1, j) + CB\Gamma_1 e(i, j) + D\Gamma_0 e(i, j) &= \\ y(i, j) + C\eta(i, j) + (CB\Gamma_1 + D\Gamma_0)e(i, j) \end{aligned}$$

因此,

$$e(i, j+1) = (I - CB\Gamma_1 - D\Gamma_0)e(i, j) - C\eta(i, j)$$

又由于

$$\begin{aligned} \eta(i+1, j) &= A[x(i, j+1) - x(i, j)] + B\Gamma_0 e(i, j) = \\ AA[x(i-1, j+1) - x(i-1, j)] + \\ AB\Gamma_0 e(i-1, j) + AB\Gamma_1 e(i, j) + B\Gamma_0 e(i, j) &= \\ A\eta(i, j) + (AB\Gamma_1 + B\Gamma_0)e(i, j) \end{aligned}$$

因此, 上两式可写成如下的 Roesser 模型

$$\begin{bmatrix} \eta(i+1, j) \\ e(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & AB\Gamma_1 + B\Gamma_0 \\ -C & I - CB\Gamma_1 - D\Gamma_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta(i, j) \\ e(i, j) \end{bmatrix}$$

由定理 6.1.2 可知

$$\begin{bmatrix} \eta(i, j) \\ e(i, j) \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^i \Phi^{i-k, j} \begin{bmatrix} 0 \\ e(k, 0) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{i-1} \Phi^{i, j} \begin{bmatrix} 0 \\ e(i-k, 0) \end{bmatrix}$$

由此即知, 当 $j \rightarrow \infty$ 时, $e(i, j) \rightarrow 0 (1 \leq i \leq T)$, 再由 $e(0, j) = 0$, 可证明该定理结论成立。

需要说明, 当 $D = 0$, 即系统 (6.6.2) 为一阶完全非正则系统时, 条件 (1) 自然满足, 条件 (3) 即为 $x(0, j) = x_d(0)$, 可取 $\Gamma_0 = 0$, 这时学习律 (6.3.1) 变为

$$u(i, j+1) = u(i, j) + \Gamma_1 e(i+1, j)$$

此时若将条件 (3) 改成 $x(0, j) = x^0$, 从定理 6.3.1 的证明中可以看出, 当 $1 \leq i \leq T$ 时, $e(i, j) \rightarrow 0 (j \rightarrow \infty)$ 仍成立。这也说明了与连续系统的不同。

关于学习律 (6.3.1), 还可以证明定理 6.3.2。

定理 6.3.2 设系统 (6.2.2) 及学习律 (6.3.1) 满足条件

- (1) $\Gamma_1 D = 0$
- (2) $\rho(I - \Gamma_1 CB - \Gamma_0 D) < 1$
- (3) $x(0, j) = x_d(0) \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$

则当 $j \rightarrow \infty$ 时, $y(i, j) \rightarrow y_d(i) (0 \leq i \leq T)$ 。

证明 设 $\Delta u(i, j) = u_d(i) - u(i, j)$, 则由条件 (1) 可知

$$\begin{aligned} \Delta u(i, j+1) &= \\ \Delta u(i, j) - \Gamma_0 e(i, j) - \Gamma_1 e(i+1, j) &= \\ \Delta u(i, j) - \Gamma_0 C[x_d(i) - x(i, j)] - \Gamma_0 D \Delta u(i, j) - \\ \Gamma_1 C[x_d(i+1) - x(i+1, j)] &= \\ \Delta u(i, j) - \Gamma_0 C[x_d(i) - x(i, j)] - \Gamma_0 D \Delta u(i, j) - \\ \Gamma_1 CA[x_d(i) - x(i, j)] - \Gamma_1 CB \Delta u(i, j) &= \\ (I - \Gamma_1 CB - \Gamma_0 D) \Delta u(i, j) - (\Gamma_0 C + \Gamma_1 CA) \xi(i, j) \end{aligned}$$

式中 $\xi(i, j) = x_d(i) - x(i, j)$ 。显然 $\xi(0, j) = 0 (j = 0, 1, 2, \dots)$, 且

$$\xi(i+1, j) = x_d(i+1) - x(i+1, j) =$$

$$A\xi(i, j) + B\Delta u(i, j)$$

故可得到如下的 Roesser 模型

$$\begin{bmatrix} \xi(i+1, j) \\ \Delta u(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ -F_0C - F_1CA & I - F_1CB - F_0D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(i, j) \\ \Delta u(i, j) \end{bmatrix}$$

由此可证明该定理的结论。

在系统(6.2.2)中,若 $\text{rank}(D) = m$, 即系统是一正则系统时, 可在学习律(6.3.1)中取 $F_1 = 0$ 。因此, 定理 6.3.2 是定理 6.2.2 的推广。

下面, 讨论更一般的非正则系统。设系统(6.2.2)是一 p 阶非正则系统, 采用学习律

$$u(i, j+1) = u(i, j) + \sum_{k=0}^p \Gamma_k e(i+k, j) \quad (6.3.2)$$

这里 $\Gamma_k (k=0, 1, \dots, p)$ 是学习增益矩阵。关于此学习律, 有定理 6.3.3 和定理 6.3.4。

定理 6.3.3 设系统(6.2.2)及学习律 (6.3.2) 满足条件

$$(1) D\Gamma_p = 0, \sum_{k=s}^p CA^{k-s}B\Gamma_k + D\Gamma_{s-1} = 0 \quad (s = 2, \dots, p)$$

$$(2) \rho(I - \sum_{k=1}^p CA^{k-1}B\Gamma_k - D\Gamma_0) < 1$$

$$(3) x(0, j) = x^0, e(i, j) = 0$$

$$(0 \leq i \leq p-1; j = 0, 1, 2, \dots)$$

则当 $j \rightarrow \infty$ 时, $y(i, j)$ 收敛于 $y_d(i) (0 \leq i \leq T)$ 。

证明 根据式(6.2.2)可知, 当 $p \leq i \leq T$ 时,

$$y(i, j+1) =$$

$$y(i, j) + C[x(i, j+1) - x(i, j)] + D \sum_{k=0}^p \Gamma_k e(i+k, j) =$$

$$y(i, j) + CA^p[x(i-p, j+1) - x(i-p, j)] +$$

$$CA^{p-1}B \sum_{k=0}^p \Gamma_k e(i-p+k, j) +$$

$$CA^{p-2}B \sum_{k=0}^p \Gamma_k e(i-p+1+k, j) +$$

$$\cdots + \mathbf{CAB} \sum_{k=0}^p \mathbf{\Gamma}_k \mathbf{e}(i-2+k, j) +$$

$$\mathbf{CB} \sum_{k=0}^p \mathbf{\Gamma}_k \mathbf{e}(i-1+k, j) + \mathbf{D} \sum_{k=0}^p \mathbf{\Gamma}_k \mathbf{e}(i+k, j)$$

令

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}(i, j) = & \mathbf{A}^p [\mathbf{x}(i-p, j+1) - \mathbf{x}(i-p, j)] + \\ & \sum_{s=1}^p \mathbf{A}^{p-s} \mathbf{B} \sum_{k=0}^{p-s} \mathbf{\Gamma}_k \mathbf{e}(i-p+s-1+k, j) \end{aligned}$$

则由条件(3)易知

$$\boldsymbol{\eta}(p, j) = 0 \quad (j = 0, 1, 2, \cdots)$$

且由条件(1)可知

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(i, j+1) = & \mathbf{y}(i, j) + \mathbf{C}\boldsymbol{\eta}(i, j) + \\ & \sum_{s=2}^p [\sum_{k=s}^p \mathbf{CA}^{k-s} \mathbf{B}\mathbf{\Gamma}_k + \mathbf{D}\mathbf{\Gamma}_{s-1}] \mathbf{e}(i+s-1, j) + \\ & \mathbf{D}\mathbf{\Gamma}_p \mathbf{e}(i+p, j) + (\sum_{k=1}^p \mathbf{CA}^{k-1} \mathbf{B}\mathbf{\Gamma}_k + \mathbf{D}\mathbf{\Gamma}_0) \mathbf{e}(i, j) = \\ & \mathbf{y}(i, j) + (\sum_{k=1}^p \mathbf{CA}^{k-1} \mathbf{B}\mathbf{\Gamma}_k + \mathbf{D}\mathbf{\Gamma}_0) \mathbf{e}(i, j) + \mathbf{C}\boldsymbol{\eta}(i, j) \end{aligned}$$

因此

$$\mathbf{e}(i, j+1) = (\mathbf{I} - \sum_{k=1}^p \mathbf{CA}^{k-1} \mathbf{B}\mathbf{\Gamma}_k - \mathbf{D}\mathbf{\Gamma}_0) \mathbf{e}(i, j) - \mathbf{C}\boldsymbol{\eta}(i, j)$$

又由于

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}(i+1, j) = & \mathbf{A}^p [\mathbf{x}(i+1-p, j+1) - \mathbf{x}(i+1-p, j)] + \\ & \sum_{s=1}^p \mathbf{A}^{p-s} \sum_{k=0}^{p-s} \mathbf{\Gamma}_k \mathbf{e}(i+1-p+s-1+k, j) = \\ & \mathbf{A}^p [\mathbf{A}(\mathbf{x}(i-p, j+1) - \mathbf{x}(i-p, j)) + \\ & \mathbf{B} \sum_{k=0}^p \mathbf{\Gamma}_k \mathbf{e}(i-p+k, j)] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{s=1}^p A^{p-s} B \sum_{k=0}^{p-s-1} \Gamma_k e(i+1-p+s-1+k, j) = \\
& AA^p [x(i-p, j+1) - x(i-p, j)] + \\
& A^p B \sum_{k=0}^p \Gamma_k e(i-p+k, j) + \\
& \sum_{s=1}^{p-1} A^{p-s} B \sum_{k=0}^{p-s-1} \Gamma_k e(i+1-p+s-1+k, j) + \\
& \sum_{s=1}^p A^{p-s} B \Gamma_{p-s} e(i, j) = \\
& AA^p [x(i-p, j+1) - x(i-p, j)] + \\
& \sum_{s=0}^p A^{p-s} B \Gamma_{p-s} e(i, j) + \\
& \sum_{s=0}^{p-1} A^{p-s} B \sum_{k=0}^{p-s-1} \Gamma_k e(i+1-p+s-1+k, j) = \\
& A\eta(i, j) + \sum_{s=0}^p A^{p-s} B \Gamma_{p-s} e(i, j)
\end{aligned}$$

故可得到如下的 Roesser 模型

$$\begin{bmatrix} \eta(i+1, j) \\ e(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \sum_{s=0}^p A^{p-s} B \Gamma_{p-s} \\ -C & I - \sum_{k=1}^p C A^{k-1} B \Gamma_k - D \Gamma_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta(i, j) \\ e(i, j) \end{bmatrix}$$

由定理 6.1.2 可知

$$\begin{bmatrix} \eta(i, j) \\ e(i, j) \end{bmatrix} = \sum_{k=p}^i \Phi^{i-k, j} \begin{bmatrix} 0 \\ e(k, 0) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{i-p} \Phi^{k, j} \begin{bmatrix} 0 \\ e(i-k, 0) \end{bmatrix}$$

由此可证明该定理的结论。

定理 6.3.4 设系统(6.2.2)及学习律 (6.3.2)满足条件

$$(1) \quad D\Gamma_p = 0, \sum_{k=s}^p \Gamma_k C A^{k-s} B + \Gamma_{s-1} D = 0 (s = 2, \dots, p)$$

$$(2) \quad \rho(I - \sum_{k=1}^p \Gamma_k C A^{k-1} B - D \Gamma_0) < 1$$

$$(3) \quad x(0, j) = x_d(0) \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

则对于任何 $0 \leq i \leq T$, 当 $j \rightarrow \infty$ 时, $y(i, j)$ 均收敛于 $y_d(i)$ 。

证明 设相应于 $y_d(i)$ 的控制输入为 $u_d(i)$, 状态为 $x_d(i)$ ($0 \leq i \leq T$)。记 $\Delta u(i, j) = u_d(i) - u(i, j)$, 并令 $\xi(i, j) = x_d(i) - x(i, j)$, 则由式(6.2.2)可知

$$\begin{aligned} \xi(i+k, j) &= \\ x_d(i+k) - x(i+k, j) &= \\ A^k \xi(i, j) + A^{k-1} B \Delta u(i, j) + A^{k-2} B \Delta u(i+1, j) + \dots + \\ AB \Delta u(i+k-2, j) + B \Delta u(i+k-1, j) \end{aligned} \quad (6.3.3)$$

这里 $k \geq 1$, 于是再由条件(1)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^p \Gamma_k e(i+k, j) &= \\ \sum_{k=0}^p \Gamma_k [C \xi(i+k, j) + D \Delta u(i+k, j)] &= \\ (\sum_{k=0}^p \Gamma_k C A^k) \xi(i, j) + (\sum_{k=1}^p \Gamma_k C A^{k-1} B + \Gamma_0 D) \Delta u(i, j) \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \Delta u(i, j+1) &= (I - \sum_{k=1}^p \Gamma_k C A^{k-1} B - \Gamma_0 D) \Delta u(i, j) - \\ &\quad (\sum_{k=0}^p \Gamma_k C A^k) \xi(i, j) \end{aligned} \quad (6.3.4)$$

在式(6.3.3)中取 $k=1$, 得

$$\xi(i+1, j) = A \xi(i, j) + B \Delta u(i, j) \quad (6.3.5)$$

由式(6.3.4)及式(6.3.5)可得如下的 Roesser 模型

$$\begin{bmatrix} \xi(i+1, j) \\ \Delta u(i, j+1) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\sum_{k=0}^p \mathbf{\Gamma}_k \mathbf{C} \mathbf{A}^k & \mathbf{I} - \sum_{k=1}^p \mathbf{\Gamma}_k \mathbf{C} \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{B} - \mathbf{\Gamma}_0 \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(i, j) \\ \Delta \mathbf{u}(i, j) \end{bmatrix}$$

由定理 6.1.2 可知

$$\begin{bmatrix} \xi(i, j) \\ \Delta \mathbf{u}(i, j) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^i \Phi^{k,j} \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta \mathbf{u}(i-k, 0) \end{bmatrix}$$

其中

$$\Phi^{0,i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\sum_{k=0}^p \mathbf{\Gamma}_k \mathbf{C} \mathbf{A}^k & \mathbf{I} - \sum_{k=1}^p \mathbf{\Gamma}_k \mathbf{C} \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{B} - \mathbf{\Gamma}_0 \mathbf{D} \end{bmatrix}$$

由条件(2)及引理 6.1.1 可知, 对任何 $0 \leq i \leq T$, 当 $j \rightarrow \infty$ 时, $\mathbf{u}(i, j) \rightarrow \mathbf{u}_d(i)$, $\mathbf{x}(i, j) \rightarrow \mathbf{x}_d(i)$, 从而有 $\mathbf{y}(i, j) \rightarrow \mathbf{y}_d(i)$ 。

6.4 含初始修正的学习律

本节主要讨论迭代初态与期望初态有固定偏差时非正则系统的迭代学习控制问题。设系统(6.2.2)是 p 阶非正则系统, 在迭代初态 $\mathbf{x}(0, j) = \mathbf{x}^0$ 时, 选用如下的学习律

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(i, j+1) = & \mathbf{u}(i, j) + \sum_{k=0}^p \mathbf{\Gamma}_k \mathbf{e}(i+k, j) - \\ & \sum_{k=0}^{p-1} \mathbf{\Gamma}_k \sum_{s=0}^{p-1} \theta(i+k-s) \mathbf{e}(s, j) \end{aligned} \quad (6.4.1)$$

式中 $\mathbf{\Gamma}_k (k=0, 1, \dots, p)$ 是学习增益矩阵, $\mathbf{e}(i, j) = \mathbf{y}_d(i) - \mathbf{y}(i, j)$, 而

$$\theta(i) = \begin{cases} 1, & i=0 \\ 0, & i \neq 0 \end{cases} \quad (6.4.2)$$

首先证明定理 6.4.1。

定理 6.4.1 设系统(6.2.2)及学习律(6.4.1)满足条件

$$(1) \quad \mathbf{D} \mathbf{\Gamma}_p = \mathbf{0}, \sum_{k=s}^p \mathbf{C} \mathbf{A}^{k-s} \mathbf{B} \mathbf{\Gamma}_k + \mathbf{D} \mathbf{\Gamma}_{s-1} = \mathbf{0} \quad (s=2, \dots, p)$$

$$(2) \quad \rho(I - \sum_{k=1}^p \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}\mathbf{\Gamma}_k - \mathbf{D}\mathbf{\Gamma}_0) < 1$$

$$(3) \quad \mathbf{x}(0, j) = \mathbf{x}^0 \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

则对任何 $0 \leq i \leq T$, 当 $j \rightarrow \infty$ 时, $\mathbf{y}(i, j)$ 的极限轨迹是

$$\mathbf{y}_d^*(i) = \mathbf{y}_d(i) + \sum_{k=0}^{p-1} \theta(i+k)(\mathbf{y}(k, 0) - \mathbf{y}_d(k)) \quad (6.4.3)$$

式中 $\mathbf{y}(i, 0)$ 是初次迭代的输出轨迹。

由式(6.4.2)及式(6.4.3)可以看出, 当 $i \geq p$ 时, $\mathbf{y}_d^*(i) = \mathbf{y}_d(i)$ 。因此, 由定理 6.4.1 知对任何 $p \leq i \leq T$, 当 $j \rightarrow \infty$ 时 $\mathbf{y}(i, j) \rightarrow \mathbf{y}_d(i)$ 。

证明 令 $\mathbf{e}^*(i, j) = \mathbf{y}_d^*(i) - \mathbf{y}(i, j)$, 于是

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(i, j+1) &= \mathbf{u}(i, j) + \sum_{k=0}^p \mathbf{\Gamma}_k \mathbf{e}^*(i+k, j) - \\ &\quad \sum_{k=0}^{p-1} \mathbf{\Gamma}_k \sum_{s=0}^{p-1} \theta(i+k-s) \mathbf{e}^*(s, j) + \\ &\quad \sum_{k=0}^p \mathbf{\Gamma}_k (\mathbf{y}_d(i+k) - \mathbf{y}_d^*(i+k)) - \\ &\quad \sum_{k=0}^{p-1} \mathbf{\Gamma}_k \sum_{s=0}^{p-1} \theta(i+k-s) (\mathbf{y}_d(s) - \mathbf{y}_d^*(s)) \end{aligned}$$

因为

$$\mathbf{y}_d^*(i) = \mathbf{y}(i, 0) \quad (i = 0, 1, \dots, p-1)$$

$$\mathbf{y}_d^*(i) = \mathbf{y}_d(i) \quad (i \geq p)$$

故

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^p \mathbf{\Gamma}_k (\mathbf{y}_d(i+k) - \mathbf{y}^*(i+k)) - \\ &\sum_{k=0}^{p-1} \mathbf{\Gamma}_k \sum_{s=0}^{p-1} \theta(i+k-s) (\mathbf{y}_d(s) - \mathbf{y}^*(s)) = 0 \end{aligned}$$

所以

$$u(i, j+1) = u(i, j) + \sum_{k=0}^p \Gamma_k e^*(i+k, j) - \sum_{k=0}^{p-1} \Gamma_k \sum_{s=0}^{p-1} \theta(i+k-s) e^*(s, j) \quad (6.4.4)$$

下面证明, 当 $0 \leq i \leq p-1$ 时, $e^*(i, j) = 0, j = 0(1, 2, \dots)$ 。

事实上, 当 $0 \leq i \leq p-1$ 时, 式(6.4.4)变成

$$u(i, j+1) = u(i, j) + \sum_{k=p-i}^p \Gamma_k e^*(i+k, j)$$

因此, 当 $i=0$ 时, 由条件(1)

$$\begin{aligned} y(0, j+1) &= Cx(0, j+1) + Du(0, j+1) = \\ & Cx^0 + Du(0, j) + D\Gamma_p e^*(p, j) = \\ & Cx^0 + Du(0, j) = y(0, j) \quad (j = 0, 1, \dots) \end{aligned}$$

即 $e^*(0, j) = e^*(0, 0) = 0 (j = 1, 2, \dots)$ 。

当 $0 < i \leq p-1$ 时, 由条件(1)

$$\begin{aligned} y(i, j+1) &= Cx(i, j+1) + Du(i, j+1) = \\ & C[A^i x^0 + \sum_{k=0}^{i-1} A^{i-1-k} Bu(k, j+1)] + Du(i, j+1) = \\ & y(i, j) + \sum_{k=0}^{i-1} CA^{i-1-k} B \left[\sum_{s=p-k}^p \Gamma_s e^*(k+s, j) \right] + \\ & D \sum_{k=p-i}^p \Gamma_k e^*(i+k, j) = y(i, j) \\ & \quad (j = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

即 $e^*(i, j) = e^*(i, 0) = 0 (j = 1, 2, \dots)$ 。

这样式(6.4.4)变为

$$u(i, j+1) = u(i, j) + \sum_{k=0}^p \Gamma_k e^*(i+k, j) \quad (6.4.5)$$

利用式(6.4.5)及定理 6.3.3 可知, 对 $0 \leq i \leq T$, 当 $j \rightarrow \infty$ 时, $y(i, j) \rightarrow y_d^*(i)$, 从而该定理证明完毕。

需要指出, 在定理 6.4.1 的条件下, 算法(6.4.1)不能保证当 $0 < i \leq p-1$ 时 $y(i, j)$ 收敛于 $y_d(i)$ 。从轨迹(6.4.3)可以看出

$y_d^*(i)$ 与 $y(i, 0)$ 有关, 因此, 在一定条件下, 通过恰当选取 $u(i, 0)$ (即初次控制输入) 可以改善当 $0 < i \leq p-1$ 时的跟踪。

若选用学习律

$$\begin{aligned} u(i, j+1) = & \\ & u(i, j) + \sum_{k=0}^p \Gamma_k e(i+k, j) - \\ & \sum_{k=0}^{p-1} \Gamma_k \sum_{s=0}^{p-1} \theta(i+k-s)(y_d(s) - y(s, 0)) \end{aligned} \quad (6.4.6)$$

用类似于 6.4.1 定理的证明方法及定理 6.3.4, 可以证明如下的定理 6.4.2。

定理 6.4.2 设系统(6.2.2)及学习律 (6.4.6)满足条件

$$(1) \Gamma_p D = 0, \sum_{k=s}^p \Gamma_k C A^{k-s} B + \Gamma_{s-1} D = 0 \quad (s = 2, \dots, p)$$

$$(2) \rho(I - \sum_{k=1}^p \Gamma_k C A^{k-1} B - \Gamma_0 D) < 1$$

$$(3) x(0, j) = x^0 \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

则当 $j \rightarrow \infty$ 时, 对 $0 \leq i \leq T$, $y(i, j)$ 均收敛于 $y_d^*(i)$ 。这里 $y_d^*(i)$ 仍如式(6.4.3)所示。

例 6.4.1 考虑如下的离散系统

$$\begin{aligned} x(i+1, j) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(i, j) + \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u(i, j) \\ y(i, j) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(i, j) + \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(i, j) \end{aligned}$$

式中 $0 \leq i \leq 50$ 。由于

$$D = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, CB = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, CAB = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

即此系统是一 2 阶非正则系统。假定期望轨迹为

$$y_d(i) = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{50} i \\ \sin \frac{\pi}{50} i \end{bmatrix}$$

设迭代初态为 $x(0, j) = [0.5, 0.5, 0.5]^T$, 取 $u(i, 0) = [0, 0]^T$, ($0 \leq i \leq 50$)。

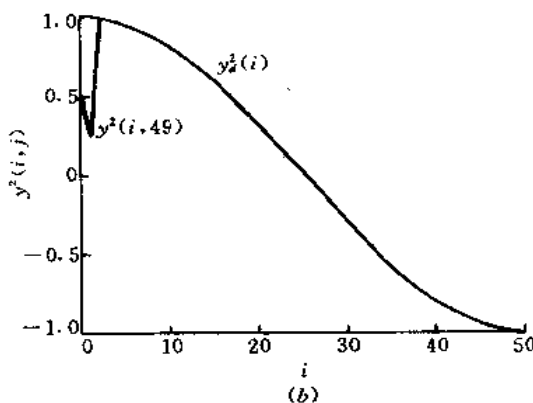
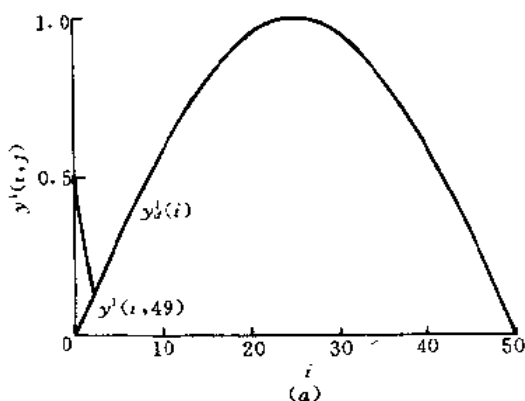


图 6.4.1 例 6.4.1 的迭代输出轨迹

(a) $y^1(i, j)$; (b) $y^2(i, j)$ 。

(1) 选取学习律(6.4.2)

$$u(i, j+1) = u(i, j) + \sum_{k=0}^2 \Gamma_k e(i+k, j) - \theta(i) \Gamma_0 e(0, j) - (\theta(i-1) \Gamma_0 + \theta(i) \Gamma_1) e(1, j)$$

式中

$$\Gamma_0 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \Gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \Gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 0 & -9 \end{bmatrix}$$

图 6.4.1 给出了第 50 次迭代时的输出轨迹与期望轨迹。

(2) 选取学习律(6.6.4)

$$u(i, j+1) = u(i, j) + \sum_{k=0}^2 \Gamma_k e(i+k, j) - \theta(i) \Gamma_0 (y_d(0) - y(0, 0)) - (\theta(i-1) \Gamma_0 + \theta(i) \Gamma_1) (y_d(1) - y(1, 0))$$

式中

$$\Gamma_0 = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \quad \Gamma_1 = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \quad \Gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$$

第 50 次迭代的输出轨迹与期望轨迹与图 6.4.1 相同。

6.5 线性时滞系统的迭代学习控制

本节讨论含有时滞的线性离散系统,按含状态时滞和控制时滞两种情况分别讨论。

6.5.1 含状态时滞的系统

设有如下的时滞系统

$$\left. \begin{aligned} x(i+1, j) &= Ax(i, j) + A_1 x(i-\tau, j) + Bu(i, j) \\ y(i, j) &= Cx(i, j) + Du(i, j) \end{aligned} \right\} \quad (6.5.1)$$

式中 $x(i, j) \in \mathbb{R}^n$, $u(i, j) \in \mathbb{R}^r$, $y(i, j) \in \mathbb{R}^m$ ($i=0, 1, \dots, T; j=0, 1, \dots$); A, A_1, B, C, D 是有恰当维数的矩阵;此外假定期望轨

迹 $y_d(i)$ ($0 \leq i \leq T$) 是可达的, 即存在控制 $u_d(i)$ ($0 \leq i \leq T$) 及迭代初态 $x_d(i)$ ($-\tau \leq i \leq 0$) 产生相应的状态 $x_d(i)$ ($0 \leq i \leq \tau$), 使得 $y_d(i) = Cx_d(i) + Du_d(i)$ ($0 \leq i \leq T$)。

与 6.3 节相对应地, 当系统 (6.5.1) 是一个正则系统 (即矩阵 D 行满秩或列满秩) 时, 采用学习律

$$u(i, j+1) = u(i, j) + \Gamma e(i, j) \quad (6.5.2)$$

则有定理 6.5.1 及定理 6.5.2。

定理 6.5.1 设系统 (6.5.1) 及学习律 (6.5.2) 满足条件

$$(1) \quad \rho(I - D\Gamma) < 1$$

$$(2) \quad x(i, j) = x^0(i) \quad (-\tau \leq i \leq 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots)$$

则当 $j \rightarrow \infty$ 时 $y(i, j)$ 收敛于 $y_d(i)$ ($0 \leq i \leq T$)。

证明 令 $\eta(i, j) = x(i, j+1) - x(i, j)$, 则由条件 (2) 可知, 当 $-\tau \leq i \leq 0$ 时, $\eta(i, j) = 0$ ($j = 0, 1, 2, \dots$), 于是

$$\begin{aligned} y(i, j+1) &= Cx(i, j+1) + Du(i, j+1) = \\ &= Cx(i, j+1) + Du(i, j) + D\Gamma e(i, j) = \\ &= y(i, j) + C\eta(i, j) + D\Gamma e(i, j) \end{aligned}$$

从而

$$e(i, j+1) = -C\eta(i, j) + (I - D\Gamma)e(i, j) \quad (6.5.3)$$

又由于

$$\begin{aligned} \eta(i+1, j) &= x(i+1, j+1) - x(i+1, j) = \\ &= A\eta(i, j) + A_1\eta(i-\tau, j) + B\Gamma e(i, j) \end{aligned} \quad (6.5.4)$$

因此, 若令

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}(i, j) &= \begin{bmatrix} \eta(i, j) \\ \eta(i-1, j) \\ \vdots \\ \eta(i-\tau, j) \end{bmatrix} \\ \tilde{A} &= \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_1 \\ I & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B\Gamma \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

则 $\tilde{\eta}(0, j) = 0 (j = 0, 1, 2, \dots)$, 且由式(6.5.4)可知

$$\tilde{\eta}(i+1, j) = \tilde{A}\tilde{\eta}(i, j) + \tilde{B}e(i, j) \quad (6.5.5)$$

因此, 由式(6.5.3)及式(6.5.5)可得到 Roesser 模型

$$\begin{bmatrix} \tilde{\eta}(i+1, j) \\ e(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ -\tilde{C} & I - D\Gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\eta}(i, j) \\ e(i, j) \end{bmatrix} \quad (6.5.6)$$

式中 $\tilde{C} = [C \ 0 \ \dots \ 0]$ 。由定理 6.1.2 可知

$$\begin{bmatrix} \tilde{\eta}(i, j) \\ e(i, j) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^i \Phi^{i-k, j} \begin{bmatrix} 0 \\ e(k, 0) \end{bmatrix}$$

式中

$$\Phi^{1,0} = \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Phi^{0,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\tilde{C} & I - D\Gamma \end{bmatrix}$$

由条件(1)可知, $\rho(\Phi^{0,1}) = \rho(I - D\Gamma) < 1$, 故由定理 6.1.1 可知, 对 $0 \leq i \leq T$, 当 $j \rightarrow \infty$ 时 $\Phi^{i,j} \rightarrow 0$, 于是该定理得以证明。

定理 6.5.2 设系统(6.5.1)及学习律(6.5.2)满足条件

- (1) $\rho(I - \Gamma D) < 1$
- (2) $x(i, j) = x_d(i) \ (-\tau \leq i \leq 0, j = 0, 1, 2, \dots)$

则当 $j \rightarrow \infty$ 时, $y(i, j)$ 收敛于 $y_d(i) (0 \leq i \leq T)$ 。

此定理的证明类似于定理 6.5.1。

讨论系统(6.5.1)是非正则的情形类似于 6.3 节。下面给出当系统是一阶非正则时的两个定理, 采用的学习律为

$$u(i, j+1) = u(i, j) + \Gamma_0 e(i, j) + \Gamma_1 e(i+1, j) \quad (6.5.7)$$

定理 6.5.3 设系统(6.5.1)及学习律(6.5.7) 满足条件

- (1) $D\Gamma_1 = 0$
- (2) $\rho(I - C\Gamma_1 - D\Gamma_0) < 1$
- (3) $x(i, j) = x^0(i), e(0, j) = 0 (-\tau \leq i \leq 0, j = 0, 1, 2, \dots)$

则当 $j \rightarrow \infty$ 时, $y(i, j) \rightarrow y_d(i) (0 \leq i \leq T)$ 。

证明 令 $\eta(i, j) = x(i-1, j+1) - x(i-1, j)$, 由式(6.5.1)及条件(1)可知

$$\begin{aligned} y(i, j+1) &= \\ Cx(i, j+1) + Du(i, j+1) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& y(i, j) + C\eta(i+1, j) + D\Gamma_0 e(i, j) = \\
& y(i, j) + CA\eta(i, j) + CA_1\eta(i-\tau, j) + \\
& CBF_0 e(i-1, j) + CBF_1 e(i, j) + D\Gamma_0 e(i, j)
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
e(i, j+1) = & (I - CBF_1 - D\Gamma_0)e(i, j) - CA\eta(i, j) - \\
& C[A_1\eta(i-\tau, j) + B\Gamma_0 e(i-1, j)] \quad (6.5.8)
\end{aligned}$$

但

$$\begin{aligned}
\eta(i+1, j) = & A\eta(i, j) + A_1\eta(i-\tau, j) + \\
& B\Gamma_0 e(i-1, j) + B\Gamma_1 e(i, j) \quad (6.5.9)
\end{aligned}$$

因此, 若令

$$\begin{aligned}
\tilde{\eta}(i, j) = & \begin{bmatrix} \eta(i, j) \\ \eta(i-1, j) \\ \vdots \\ \eta(i-\tau+1, j) \\ A_1\eta(i-\tau, j) + B\Gamma_0 e(i-1, j) \end{bmatrix} \\
\tilde{A} = & \begin{bmatrix} A & 0 & \cdots & 0 & 0 & I \\ I & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B\Gamma_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B\Gamma_0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

则由条件(3)知 $\tilde{\eta}(1, j) = 0 (j=0, 1, 2, \cdots)$, 且由式(6.5.9)可知

$$\tilde{\eta}(i+1, j) = \tilde{A}\tilde{\eta}(i, j) + \tilde{B}e(i, j) \quad (6.5.10)$$

式(6.5.8)又可写成

$$\begin{aligned}
e(i, j+1) = & [-CA \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad -C]\tilde{\eta}(i, j) + \\
& (I - CBF_1 + D\Gamma_0)e(i, j) \quad (6.5.11)
\end{aligned}$$

因此, 可得到 Roesser 模型

$$\begin{bmatrix} \tilde{\eta}(i+1, j) \\ e(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ -\tilde{C} & I - CBF_1 + D\Gamma_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\eta}(i, j) \\ e(i, j) \end{bmatrix}$$

式中 $\tilde{C} = [CA \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad C]$ 。由此及条件(2)即可证得该定

理的结论。

本定理中条件(3)要求每次迭代时,在 $[-\tau, 0]$ 段初态固定(未必是期望初态),在 $i=0$ 点输出误差为零。因此,本定理与无时滞时的有关结论是相似的。

定理 6.5.4 设系统(6.5.1)及学习律(6.5.7)满足条件

$$(1) \quad D\Gamma_1 = 0$$

$$(2) \quad \rho(I - \Gamma_1 CB - \Gamma_0 D) < 1$$

$$(3) \quad x(i, j) = x_d(i) \quad (-\tau \leq i \leq 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots)$$

则当 $j \rightarrow \infty$ 时 $y(i, j)$ 收敛于 $y_d(i) (0 \leq i \leq T)$ 。

下面,讨论含多重时滞的线性系统

$$\left. \begin{aligned} x(i+1, j) &= Ax(i, j) + \sum_{s=1}^l A_s x(i - \tau_s, j) + Bu(i, j) \\ y(i, j) &= Cx(i, j) + Du(i, j) \end{aligned} \right\} \quad (6.5.12)$$

式中 $\tau_s > 0 (s = 1, 2, \dots, l)$ 是时滞。假定轨迹 $y_d(i) (0 \leq i \leq T)$ 是可达的,即存在控制 $u_d(i) (0 \leq i \leq T)$ 及迭代初态 $x_d(i) (-\tau \leq i \leq 0)$,产生相应的状态 $x_d(i) (0 \leq i \leq T)$,使得 $y_d(i) = Cx_d(i) + Du_d(i) (0 \leq i \leq T)$ 。这里 $\tau = \max_{1 \leq s \leq l} \tau_s$ 。

与前段讨论类似,可以按照系统的正则性建立相应的定理。下面给出与定理 6.5.3 相对应的定理,学习律仍如式(6.5.7)所示。

定理 6.5.5 设系统(6.5.12)及学习律(6.5.7)满足条件

$$(1) \quad D\Gamma_1 = 0$$

$$(2) \quad \rho(I - CB\Gamma_1 - D\Gamma_0) < 1$$

$$(3) \quad x(i, j) = x^0(i), e(0, j) = 0 \\ (-\tau \leq i \leq 0, j = 0, 1, 2, \dots),$$

则当 $j \rightarrow \infty$ 时 $y(i, j) \rightarrow y_d(i) (0 \leq i \leq T)$ 。

证明 不妨假定 $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_l$, 这时 $\tau = \tau_l$ 。令 $\eta(i, j) = x(i-1, j+1) - x(i-1, j)$, 因此

$$y(i, j+1) =$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{C}x(i, j+1) + \mathbf{D}u(i, j+1) = \\
& y(i, j) + \mathbf{C}\boldsymbol{\eta}(i+1, j) + \mathbf{D}\boldsymbol{\Gamma}_0 e(i, j) = \\
& y(i, j) + \mathbf{C}\mathbf{A}\boldsymbol{\eta}(i, j) + \mathbf{C} \sum_{s=1}^l \mathbf{A}_s \boldsymbol{\eta}(i - \tau_s, j) + \\
& \mathbf{C}\mathbf{B}\boldsymbol{\Gamma}_0 e(i-1, j) + \mathbf{C}\mathbf{B}\boldsymbol{\Gamma}_1 e(i, j) + \mathbf{D}\boldsymbol{\Gamma}_0 e(i, j)
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
& e(i, j+1) = \\
& (\mathbf{I} - \mathbf{C}\mathbf{B}\boldsymbol{\Gamma}_1 - \mathbf{D}\boldsymbol{\Gamma}_0)e(i, j) - \mathbf{C}\mathbf{A}\boldsymbol{\eta}(i, j) - \\
& \mathbf{C} \left[\sum_{s=1}^l \mathbf{A}_s \boldsymbol{\eta}(i - \tau_s, j) + \mathbf{B}\boldsymbol{\Gamma}_0 e(i-1, j) \right] \quad (6.5.13)
\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\eta}(i+1, j) &= \mathbf{A}\boldsymbol{\eta}(i, j) + \sum_{s=1}^l \mathbf{A}_s \boldsymbol{\eta}(i - \tau_s, j) + \\
&\quad \mathbf{B}\boldsymbol{\Gamma}_0 e(i-1, j) + \mathbf{B}\boldsymbol{\Gamma}_1 e(i, j) \quad (6.5.14)
\end{aligned}$$

再令

$$\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{\eta}}(i, j) &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}(i, j) \\ \boldsymbol{\eta}(i-1, j) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\eta}(i-\tau, j) \\ \sum_{s=1}^l \mathbf{A}_s \boldsymbol{\eta}(i - \tau_s, j) + \mathbf{B}\boldsymbol{\Gamma}_0 e(i-1, j) \end{bmatrix} \\
\tilde{\mathbf{A}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \cdots & 0 & \mathbf{A}_1 & \cdots & 0 & \mathbf{A}_s & 0 \\ \mathbf{I} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \mathbf{I} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \mathbf{A}_1 & 0 & \cdots & \mathbf{A}_s & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}\boldsymbol{\Gamma}_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathbf{B}\boldsymbol{\Gamma}_0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

则由条件(3)可知, $\tilde{\boldsymbol{\eta}}(1, j) = 0 (j = 1, 2, \cdots)$, 式(6.5.14)及式

(6.5.13)可分别写成

$$\begin{aligned}\tilde{\eta}(i+1, j) &= \tilde{A}\tilde{\eta}(i, j) + \tilde{B}e(i, j) \\ e(i, j+1) &= -\tilde{C}\tilde{\eta}(i, j) + (I - \mathbf{CB}\Gamma_1 - \mathbf{D}\Gamma_0)e(i, j)\end{aligned}$$

式中 $\tilde{C} = [\mathbf{CA} \ 0 \ \cdots \ 0 \ -\mathbf{C}]$ 。由此即知该定理结论成立。

6.5.2 含控制时滞的系统

考虑如下的系统

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(i+1, j) &= \mathbf{Ax}(i, j) + \sum_{s=1}^l \mathbf{B}_s \mathbf{u}(i - \tau_s, j) \\ \mathbf{y}(i, j) &= \mathbf{Cx}(i, j) \end{aligned} \right\} \quad (6.5.15)$$

式中 $0 \leq \tau_s < T, s=1, 2, \dots, l$ 。假定轨迹 $\mathbf{y}_d(i)$ 是可达的, 即存在控制 $\mathbf{u}_d(i) (-\tau \leq i \leq T)$, 产生相应的状态 $\mathbf{x}_d(i) (0 \leq i \leq T)$, 使得 $\mathbf{y}_d(i) = \mathbf{Cx}_d(i) (0 \leq i \leq T)$, 这里 $\tau = \max_{1 \leq s \leq l} |\tau_s|$ 。若记 $\tau_{i_0} = \min_{1 \leq s \leq l} |\tau_s|$, 采用学习律

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(i, j+1) &= \mathbf{u}(i, j) + \mathbf{Fe}(i + \tau_{i_0} + 1, j) \quad (6.5.16) \\ &\quad (-\tau \leq i \leq T) \end{aligned}$$

若规定当 $i < 0$ 时 $\mathbf{e}(i, j) = 0$, 则有定理 6.5.6。

定理 6.5.6 设系统(6.5.15)及学习律(6.5.16)满足条件

- (1) $\rho(\mathbf{I} - \mathbf{CB}_{i_0}\mathbf{F}) < 1$
- (2) $\mathbf{x}(0, j) = \mathbf{x}^0(i), \quad \mathbf{e}(0, j) = 0 (j = 0, 1, 2, \dots)$

则当 $j \rightarrow \infty$ 时 $\mathbf{y}(i, j) \rightarrow \mathbf{y}_d(i) (0 \leq i \leq T)$ 。

证明 由式(6.5.15)及式(6.5.16)知, 当 $i > 0$ 时

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(i, j+1) &= \\ \mathbf{Cx}(i, j+1) &= \\ \mathbf{CAx}(i-1, j+1) + \mathbf{C} \sum_{s=1}^l \mathbf{B}_s \mathbf{u}(i-1 - \tau_s, j+1) &= \\ \mathbf{y}(i, j) + \mathbf{CA}[\mathbf{x}(i-1, j+1) - \mathbf{x}(i-1, j)] + \\ \mathbf{C} \sum_{s=1}^l \mathbf{B}_s \mathbf{Fe}(i - \tau_s + \tau_{i_0}, j) \end{aligned}$$

为了讨论方便,不妨设 $0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_l$, 则 $s_0 = 1, \tau = \tau_l$ 。再令 $\eta(i, j) = x(i-1, j+1) - x(i-1, j)$, 则

$$\begin{aligned} y(i, j+1) &= y(i, j) + \mathbf{CA}\eta(i, j) + \\ &\quad \sum_{s=1}^l \mathbf{CB}_s \mathbf{F}e(i - \tau_s + \tau_1, j) = \\ &\quad y(i, j) + \mathbf{CA}\eta(i, j) + \mathbf{CB}_1 \mathbf{F}e(i, j) + \\ &\quad \sum_{s=2}^l \mathbf{CB}_s \mathbf{F}e(i - \tau_s + \tau_1, j) \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} e(i, j+1) &= (\mathbf{I} - \mathbf{CB}_1 \mathbf{F})e(i, j) - \mathbf{CA}\eta(i, j) - \\ &\quad \sum_{s=2}^l \mathbf{CB}_s \mathbf{F}e(i - \tau_s + \tau_1, j) \end{aligned} \quad (6.5.17)$$

而

$$\begin{aligned} \eta(i+1, j) &= x(i, j+1) - x(i, j) = \\ &= \mathbf{A}\eta(i, j) + \sum_{s=1}^l \mathbf{B}_s \mathbf{F}e(i - \tau_s + \tau_1, j) = \\ &= \mathbf{A}\eta(i, j) + \mathbf{B}_1 \mathbf{F}e(i, j) + \sum_{s=2}^l \mathbf{B}_s \mathbf{F}e(i - \tau_s + \tau_1, j) \end{aligned} \quad (6.5.18)$$

令

$$\tilde{\eta}(i, j) = \begin{bmatrix} \eta(i, j) \\ e(i-1, j) \\ e(i-2, j) \\ \vdots \\ e(i-\tau+\tau_1, j) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 & \cdots & \mathbf{B}_2 & \cdots & 0 & \mathbf{B}_l \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \mathbf{I} & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \mathbf{F} \\ \mathbf{I} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = [-CA \quad 0 \quad \cdots \quad -CB_2\Gamma \quad \cdots \quad 0 \quad -CB_1\Gamma]$$

则由式(6.5.18)及式(6.5.17)可得

$$\tilde{\eta}(i+1, j) = \tilde{A}\tilde{\eta}(i, j) + \tilde{B}e(i, j)$$

$$e(i, j+1) = \tilde{C}\tilde{\eta}(i, j) + (I - CB\Gamma_1)e(i, j)$$

注意到 $\tilde{\eta}(1, j) = 0 (j = 0, 1, 2, \cdots)$, 类似于定理 6.5.5 的证明, 可知定理的结论成立。

由条件(2)及关于 $e(i, j) = 0 (i < 0)$ 的规定可知, 当 $-\tau \leq i \leq -\tau_{s_0} - 1$ 时, $e(i + \tau_{s_0} + 1, j) = 0$, 即当 $-\tau \leq i \leq -\tau_{s_0} - 1$ 时, $u(i, j+1) = u(i, j)$ 。这说明使 $y_d(i)$ 可达的控制 $u_d(i)$ 并不唯一。这是含控制时滞的系统与其它系统的不同之处。

类似可证如下的定理 6.5.7。

定理 6.5.7 设系统(6.5.15)及学习律(6.5.16)满足条件

$$(1) \quad \rho(I - \Gamma CB_{s_0}) < 1$$

$$(2) \quad x(0, j) = x_d(0) (j = 0, 1, 2, \cdots)$$

则当 $j \rightarrow \infty$ 时 $y(i, j) \rightarrow y_d(i) (0 \leq i \leq T)$ 。

第七章 迭代学习辨识

对于在有限时间区间上运行的动态系统,可以应用迭代学习的方法辨识出系统中的时变参数。本章首先给出这类问题的提法。然后,就系统初态已知和初态未知两种情形分别讨论所构造的辨识算法的性能和收敛性。最后一节给出外弹道方程中气动系数的实际辨识结果。由于确定性过程的迭代学习控制理论较为成熟,因此本章只给出确定性过程的迭代学习辨识的收敛性结果,但 7.5 节的应用是在含有量测噪声的情形下进行的。

7.1 迭代学习辨识的表述

在实际应用场合中,存在一些在有限时间区间上运行的动态系统。有时,需要辨识这类系统动力学特性中的时变参数。这类系统参数是其运行时间区间上的函数。例如,在外弹道学里,弹丸质点运动方程中的阻力系数 $C_d(t)$ 。弹丸质点运动方程为

$$\dot{v}_x = -\frac{\rho s}{2m} v(v_x - w_x) C_d$$

$$\dot{v}_y = -\frac{\rho s}{2m} v v_y C_d - g$$

$$\dot{v}_z = -\frac{\rho s}{2m} v(v_z - w_z) C_d$$

式中 g ——重力加速度;

ρ ——空气密度;

s ——弹丸参考面积($s = \frac{\pi}{4} d^2$, d 为弹丸参考直径);

m ——弹丸质量;

C_d ——阻力系数;

v_x, v_y, v_z ——弹丸速度分量;

w_x, w_z ——风速度分量;

v ——弹丸速度, $v = \sqrt{(v_x - w_x)^2 + v_y^2 + (v_z - w_z)^2}$ 。

从实际弹丸飞行数据中提取上述质点运动方程中的阻力系数 $C_d(t)$ 是获取阻力系数 $C_d(t)$ 的一种方法。我们知道, 大多数系统辨识方法用于辨识时不变参数或缓变参数。因此, 仅具有渐近收敛性的参数估计算法, 不适合于从实际弹丸飞行数据中完全辨识阻力系数 $C_d(t)$ 。

一般地, 考虑含时变参数的动态系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), \theta(t), t) \\ y(t) &= g(x(t), t) \end{aligned} \right\} \quad (7.1.1)$$

式中状态 $x(t) \in \mathbb{R}^n$, 控制输入 $u(t) \in \mathbb{R}^r$, 输出 $y(t) \in \mathbb{R}^m$, 时变参数 $\theta(t) \in \mathbb{R}^p$ 。设已知非线性函数 f 及 g 。

当系统在有限时间区间 $[0, T]$ 上运行时, 其动力学特性中的时变参数 $\theta(t)$ 即为该有限时间区间上的函数 (可能为非线性函数), 现在的问题是如何从量测数据中提取出整个函数 $\theta(t)$ 。详细地说, 对系统 (7.1.1) 施加控制输入信号 $u(t) (t \in [0, T])$, 量测得到输出信号 $y(t), t \in [0, T]$ 。利用 $(u(t), y(t)) (t \in [0, T])$ 构造辨识器, 使得辨识器的输出 $\hat{\theta}(t)$ 在区间 $[0, T]$ 上尽可能接近参数真值 $\theta(t)$, 即对于足够小的 $\bar{\varepsilon} > 0$, 要求 $\hat{\theta}(t)$ 满足

$$\|\theta(t) - \hat{\theta}(t)\| < \bar{\varepsilon} \quad (t \in [0, T]) \quad (7.1.2)$$

式 (7.1.2) 要求在整个时间区间 $[0, T]$ 上成立, 它与沿时间轴渐近收敛的估计是不同的。我们称这种问题为有限时间区间上的参数完全辨识问题。将这类问题描述为最优控制问题是一种解决途径。但由于迭代学习控制技术对于最优控制理论难以处理的一大类非线性系统是适用的, 因此, 本章将迭代学习控制的概念和方法应用于有限时间区间上时变参数的辨识。

为叙述方便, 将系统 (7.1.1) 的参数真值 $\theta(t)$ 记为 $\theta_d(t)$ 。

对该系统施加控制输入信号 $u_d(t)$ ($t \in [0, T]$), 当系统的初态位于 $x_d(0)$ 时, 可测得输出信号 $y_d(t)$ ($t \in [0, T]$)。并记相应的状态轨迹为 $x_d(t)$ ($t \in [0, T]$)。

考虑迭代学习辨识模型

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_k(t) &= f(x_k(t), u_d(t), \theta_k(t), t) \\ y_k(t) &= g(x_k(t), t) \end{aligned} \right\} \quad (7.1.3)$$

式中 $t \in [0, T]$, k 为迭代次数; $x_k(t) \in \mathbf{R}^n$ 为模型状态, $\theta_k(t) \in \mathbf{R}^p$ 为迭代估计函数。

迭代学习辨识器一般可表示为

$$\theta_{k+1}(t) = \Theta(\theta_k(t), e_k(t), t) \quad (7.1.4)$$

这里 $e_k(t) = y_d(t) - y_k(t)$ 。该迭代算法的停止条件可取为

$$\|y_d(t) - y_k(t)\| < \varepsilon \quad (t \in [0, T]) \quad (7.1.5)$$

式中 ε 为给定的估计精度。

欲解决的问题现在可以描述为, 对于迭代学习辨识模型 (7.1.3), 构造迭代学习辨识器, 使得由它给出的估计参数序列 $\{\theta_k(t)\}$ 满足停止条件。

具体的迭代学习辨识步骤如下:

(1) 获取量测数据 $\{u_d(t), y_d(t), t \in [0, T]\}$ 。给定初始参数估计 $\theta_0(t)$ ($t \in [0, T]$), 并置 $k=0$ 。

(2) 设置系统初态为 $x_k(0)$, 控制输入为 $u_d(t)$ ($t \in [0, T]$)。将 $\theta_k(t)$ 代入迭代学习辨识模型, 通过微分方程数值求解, 得到 $y_k(t)$, $t \in [0, T]$ 。

(3) 计算输出误差 $e_k(t) = y_d(t) - y_k(t)$ ($t \in [0, T]$), 并利用学习律计算 $\theta_{k+1}(t)$ ($t \in [0, T]$)。

(4) 检验迭代停止条件。若条件满足则停止迭代, 否则置 $k = k+1$, 转步骤(2)。

迭代学习辨识问题如图 7.1.1 所示。图中 $\xi_d(t)$ 和 $\eta_d(t)$ 分别是量测时的状态扰动和量测噪声。因为只考虑确定性过程迭代学习辨识算法的收敛性质, 所以在 7.2~7.4 节中假定 $\xi_d(t) \equiv 0$ 、

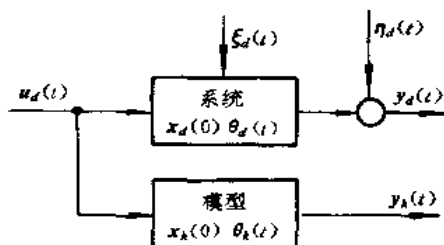


图 7.1.1 迭代学习辨识

$\eta_d(t) \equiv 0 (t \in [0, T])$ 。

7.2 系统初态已知时的迭代学习辨识

7.2.1 线性系统

考虑线性系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{D}\boldsymbol{\theta}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{aligned} \right\} \quad (7.2.1)$$

式中 $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ 、 $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^r$ 、 $\mathbf{y}(t) \in \mathbf{R}^m$ 分别为系统状态、控制输入和输出向量。系统的定常参数矩阵 $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$ 已知, 而时变参数 $\boldsymbol{\theta}(t) \in \mathbf{R}^p$ 未知。

当初态位于 $\mathbf{x}_d(0)$ 时, 对系统 (7.2.1) 输入 $\mathbf{u}_d(t) (t \in [0, T])$, 可量测到输出信号 $\mathbf{y}_d(t) (t \in [0, T])$ 。记 $\boldsymbol{\theta}_d(t) = \boldsymbol{\theta}(t) (t \in [0, T])$ 。这时系统 (7.2.1) 可写成

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_d(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}_d(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}_d(t) + \mathbf{D}\boldsymbol{\theta}_d(t) \\ \mathbf{y}_d(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}_d(t) \end{aligned} \right\} \quad (7.2.2)$$

设系统初态 $\mathbf{x}_d(0)$ 已知。为了利用迭代学习辨识方法估计 $\boldsymbol{\theta}_d(t) (t \in [0, T])$, 采用下述迭代学习辨识模型

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_k(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}_d(t) + \mathbf{D}\boldsymbol{\theta}_k(t) \\ \mathbf{y}_k(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}_k(t) \end{aligned} \right\} \quad (7.2.3)$$

式中 $t \in [0, T]$, k 为迭代次数。 $\mathbf{x}_k(t) \in \mathbf{R}^n$ 、 $\mathbf{y}_k(t) \in \mathbf{R}^m$ 和 $\boldsymbol{\theta}_k(t)$

$\in \mathbf{R}^p$ 分别为模型状态、输出和参数估计向量。 $\mathbf{u}_d(t) \in \mathbf{R}^r$ 为量测时的输入信号。迭代时取 $\mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}_d(0) (k=0, 1, 2, \dots)$ 。

辨识器采用学习律

$$\boldsymbol{\theta}_{k+1}(t) = \boldsymbol{\theta}_k(t) + \Gamma(\dot{\mathbf{y}}_d(t) - \dot{\mathbf{y}}_k(t)) \quad (7.2.4)$$

式中 $\Gamma \in \mathbf{R}^{p \times m}$ 为增益矩阵。

第 $k+1$ 次迭代时的估计误差为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta}_d - \boldsymbol{\theta}_{k+1} &= \\ \boldsymbol{\theta}_d - \boldsymbol{\theta}_k - \Gamma \mathbf{C}(\mathbf{A}\mathbf{x}_d + \mathbf{B}\mathbf{u}_d + \mathbf{D}\boldsymbol{\theta}_d - \mathbf{A}\mathbf{x}_k - \mathbf{B}\mathbf{u}_d - \mathbf{D}\boldsymbol{\theta}_k) &= \\ [\mathbf{I} - \Gamma \mathbf{C} \mathbf{D}](\boldsymbol{\theta}_d - \boldsymbol{\theta}_k) - \Gamma \mathbf{C} \mathbf{A}(\mathbf{x}_d - \mathbf{x}_k) &= \\ [\mathbf{I} - \Gamma \mathbf{C} \mathbf{D}](\boldsymbol{\theta}_d - \boldsymbol{\theta}_k) - \int_0^t \Gamma \mathbf{C} \mathbf{A} e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{D}(\boldsymbol{\theta}_d - \boldsymbol{\theta}_k) d\tau & \end{aligned} \quad (7.2.5)$$

(7.2.5) 两端取范数, 并乘 $e^{-\lambda t} (t \in [0, T])$, 可得

$$\|\boldsymbol{\theta}_d - \boldsymbol{\theta}_{k+1}\|_\lambda \leq (\|\mathbf{I} - \Gamma \mathbf{C} \mathbf{D}\| + b_1 \frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda}) \|\boldsymbol{\theta}_d - \boldsymbol{\theta}_k\|_\lambda \quad (7.2.6)$$

式中 $b_1 = \|\Gamma \mathbf{C} \mathbf{A}\| \|\mathbf{D}\| \sup_{t \in [0, T]} \|e^{\mathbf{A}t}\|$ 。

由此, 容易证得定理 7.2.1。

定理 7.2.1 对于辨识模型(7.2.3)采用迭代学习辨识算法(7.2.4), 并设定 $\mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}_d(0) (k=0, 1, 2, \dots)$ 。如果

$$\|\mathbf{I} - \Gamma \mathbf{C} \mathbf{D}\| < 1 \quad (7.2.7)$$

成立, 那么该算法在 $[0, T]$ 上一致收敛, 即 $\lim_{k \rightarrow \infty} \boldsymbol{\theta}_k(t) = \boldsymbol{\theta}_d(t) (t \in [0, T])$ 。

再考虑下述系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(\mathbf{u}(t), t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{u}(t), t)\boldsymbol{\theta}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) \end{aligned} \right\} \quad (7.2.8)$$

注意系统(7.2.8)中系数矩阵 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 含控制 $\mathbf{u}(t)$ 。采用迭代学习辨识系统模型

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_k(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}_k(t) + \mathbf{D}(t)\boldsymbol{\theta}_k(t) \\ \mathbf{y}_k(t) &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x}_k(t) \end{aligned} \right\} \quad (7.2.9)$$

式中 $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{u}_d(t), t)$, $\mathbf{D}(t) = \mathbf{B}(\mathbf{u}_d(t), t)$ 。对于式(7.2.9)采用迭代学习辨识算法(7.2.4), 其中学习增益取为时变矩阵 $\mathbf{F}(t)$ 。容易证明, 当设定 $\mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}_d(0)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) 时, 保证算法一致收敛的充分条件为

$$\|\mathbf{I} - \mathbf{F}(t)\mathbf{C}(t)\mathbf{D}(t)\| \leq \rho < 1 \quad (t \in [0, T]) \quad (7.2.10)$$

例 7.2.1 考虑含时变参数的线性系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)\theta(t)$$

$$y(t) = [0 \quad 1] \mathbf{x}(t)$$

设 $\theta_d(t) = \cos(\pi t)$ 。当系统初态为 $\mathbf{x}_d(0) = [0, 0]^T$ 时, 输入 $u_d(t) = 1.0, t \in [0, 1]$ 。量测得到 $y_d(t), t \in [0, 1]$ 。采用迭代学习辨识算法(7.2.4), 取 $\Gamma = 0.9$, 并设定 $\mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}_d(0)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)。迭代学习辨识结果如图 7.2.1 所示。

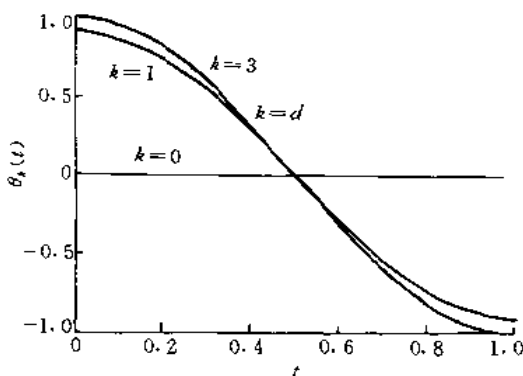


图 7.2.1 例 7.2.1 的迭代参数 $\theta_k(t)$

7.2.2 非线性系统

考虑一类非线性系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)\boldsymbol{\theta}(t) \\ y(t) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), t) \end{aligned} \right\} \quad (7.2.11)$$

式中 $x(t) \in \mathbf{R}^n$, $u(t) \in \mathbf{R}^r$, $y(t) \in \mathbf{R}^m$, $\theta(t) \in \mathbf{R}^p$ 。非线性函数 f, B, g 已知。 f, B 关于 t 分段连续, g 关于 x, t 可微; f, B, g_x, g_t 关于 x 满足一致全局 Lipschitz 条件, k_h ($h \in \{g_x, g_t\}$) 为相应的 Lipschitz 常数; B, g_x 有界, 其界记为 b_h ($h \in \{B, g_x\}$)。

由例 7.2.1 可以看出, 存在被估参数的可辨识性问题。对于系统(7.2.11), 记 S 为由 $(x(0), u(t), \theta(t)) (t \in [0, T])$ 到 $(x(t)) (t \in [0, T])$ 的状态映射, O 为由 $(x(0), u(t), \theta(t)) (t \in [0, T])$ 到 $(y(t)) (t \in [0, T])$ 的输出映射。映射 S 及映射 O 是一一对应的可保证被估参数的可辨识性。在本章中, 总假定被估参数的可辨识性。

对于系统(7.2.11), 输入 $u_d(t) (t \in [0, T])$, 可测得输出信号 $y_d(t) (t \in [0, T])$ 。记 $\theta_d(t) = \theta(t) (t \in [0, T])$ 。这时系统(7.2.11)可表示为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_d(t) &= f(x_d(t), u_d(t), t) + B(x_d(t), u_d(t), t)\theta_d(t) \\ y_d(t) &= g(x_d(t), t) \end{aligned} \right\} \quad (7.2.12)$$

式中, $x_d(t) (t \in [0, T])$ 为相应的状态轨迹。设迭代学习辨识模型为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_k(t) &= f(x_k(t), u_d(t), t) + B(x_k(t), u_d(t), t)\theta_k(t) \\ y_k(t) &= g(x_k(t), t) \end{aligned} \right\} \quad (7.2.13)$$

式中 $t \in [0, T]$, k 为迭代次数。辨识器采用学习律

$$\theta_{k+1}(t) = \theta_k(t) + \Gamma(y_k(t), t)(\dot{y}_d(t) - \dot{y}_k(t)) \quad (7.2.14)$$

式中 Γ 为有界增益矩阵。

定理 7.2.2 给定迭代学习辨识模型(7.2.13), 并设定 $x_k(0) = x_d(0) (k=0, 1, 2, \dots)$ 。如果

$$\|I - \Gamma(g(x, t), t)g_x(x, t)B(x, u_d(t), t)\| \leq \rho < 1 \quad (7.2.15)$$

$$: (\mathbf{x}, t) \in \mathbf{R}^n \times [0, T])$$

那么, 迭代学习辨识算法(7.2.14)产生的估计参数序列 $\{\boldsymbol{\theta}_k(t)\}$ 满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} \boldsymbol{\theta}_k(t) = \boldsymbol{\theta}_d(t) (t \in [0, T])$ 。

证明 由式(7.2.14)可知

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{\theta}_{k+1} &= \Delta \boldsymbol{\theta}_k - \boldsymbol{\Gamma}_k (\mathbf{g}_{td} + \mathbf{g}_{xt} \dot{\mathbf{x}}_d - \mathbf{g}_{tk} - \mathbf{g}_{xk} \dot{\mathbf{x}}_k) = \\ &= \Delta \boldsymbol{\theta}_k - \boldsymbol{\Gamma}_k [\mathbf{g}_{td} + \mathbf{g}_{xd}(\mathbf{f}_d + \mathbf{B}_d \boldsymbol{\theta}_d) - \\ &\quad \mathbf{g}_{tk} - \mathbf{g}_{xk}(\mathbf{f}_k + \mathbf{B}_k \boldsymbol{\theta}_k)] = \\ &= [\mathbf{I} - \boldsymbol{\Gamma}_k \mathbf{g}_{xk} \mathbf{B}_k] \Delta \boldsymbol{\theta}_k - \boldsymbol{\Gamma}_k [\mathbf{g}_{td} + \mathbf{g}_{xd}(\mathbf{f}_d + \mathbf{B}_d \boldsymbol{\theta}_d) - \\ &\quad \mathbf{g}_{tk} - \mathbf{g}_{xk}(\mathbf{f}_k + \mathbf{B}_k \boldsymbol{\theta}_k)] \end{aligned} \quad (7.2.16)$$

式中 $\Delta \boldsymbol{\theta}_k(t) = \boldsymbol{\theta}_d(t) - \boldsymbol{\theta}_k(t)$ 。

式(7.2.16)两端取范数

$$\begin{aligned} \|\Delta \boldsymbol{\theta}_{k+1}\| &\leq \|\mathbf{I} - \boldsymbol{\Gamma}_k \mathbf{g}_{xk} \mathbf{B}_k\| \|\Delta \boldsymbol{\theta}_k\| + \|\boldsymbol{\Gamma}_k\| [\|\mathbf{g}_{td} - \mathbf{g}_{tk}\| + \\ &\quad \|\mathbf{g}_{xd} - \mathbf{g}_{xk}\| \|\mathbf{f}_d + \mathbf{B}_d \boldsymbol{\theta}_d\| + \\ &\quad \|\mathbf{g}_{xk}\| (\|\mathbf{f}_d - \mathbf{f}_k\| + \|\mathbf{B}_d - \mathbf{B}_k\| \|\boldsymbol{\theta}_d\|)] \leq \\ &\quad \rho \|\Delta \boldsymbol{\theta}_k\| + b_1 \|\mathbf{x}_d - \mathbf{x}_k\| \end{aligned} \quad (7.2.17)$$

式中 $b_{\mathbf{r}}$ 为增益矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}$ 的界, $b_{\boldsymbol{\theta}_d} = \sup_{t \in [0, T]} \|\boldsymbol{\theta}_d(t)\|$, $b_d = \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{f}_d + \mathbf{B}_d \boldsymbol{\theta}_d\|$, $b_1 = b_{\mathbf{r}}[k_{\mathbf{g}t} + k_{\mathbf{g}x} b_d + b_{\mathbf{g}x}(k_f + k_{\mathbf{B}} b_{\boldsymbol{\theta}_d})]$ 。

由于设定 $\mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}_d(0) (k = 0, 1, 2, \dots)$, 故

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_d - \mathbf{x}_k\| &= \left\| \int_0^t (\mathbf{f}_d + \mathbf{B}_d \boldsymbol{\theta}_d - \mathbf{f}_k - \mathbf{B}_k \boldsymbol{\theta}_k) d\tau \right\| \leq \\ &\quad \int_0^t (\|\mathbf{f}_d - \mathbf{f}_k\| + \|\mathbf{B}_d - \mathbf{B}_k\| \|\boldsymbol{\theta}_d\| + \\ &\quad \|\mathbf{B}_k\| \|\Delta \boldsymbol{\theta}_k\|) d\tau \leq \\ &\quad \int_0^t (b_2 \|\mathbf{x}_d - \mathbf{x}_k\| + b_{\mathbf{B}} \|\Delta \boldsymbol{\theta}_k\|) d\tau \end{aligned} \quad (7.2.18)$$

式中 $b_2 = k_f + k_{\mathbf{B}} b_{\boldsymbol{\theta}_d}$ 。应用 Bellman-Gronwall 引理

$$\|\mathbf{x}_d - \mathbf{x}_k\| \leq \int_0^t b_{\mathbf{B}} e^{b_2(t-\tau)} \|\Delta \boldsymbol{\theta}_k\| d\tau \quad (7.2.19)$$

将式(7.2.19)代入式(7.2.17)有

$$\|\Delta\theta_{k+1}\| \leq \rho \|\Delta\theta_k\| + b_3 \int_0^t e^{b_3(t-\tau)} \|\Delta\theta_k\| d\tau \quad (7.2.20)$$

式中 $b_3 = \max\{b_2, b_1 b_B\}$ 。(7.2.20)两端同乘正函数 $e^{-\lambda t}$ ($t \in [0, T]$), 可得

$$\|\Delta\theta_{k+1}\|_\lambda \leq \left(\rho + b_3 \frac{1 - e^{(b_3 - \lambda)T}}{\lambda - b_3}\right) \|\Delta\theta_k\|_\lambda \quad (7.2.21)$$

至此, 容易证得该定理。

下面, 考虑一般非线性系统(7.1.1)中时变参数的迭代学习辨识。假设 f 关于 x 和 θ 满足一致全局 Lipschitz 条件, g_t, g_x 关于 x 满足一致全局 Lipschitz 条件, 其 Lipschitz 常数为 k_h ($h \in \{f, g_t, g_x\}$); $g_x(x, t)$ 在 $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ 上有界; f 关于 θ 可微, 并记

$$B_k(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} f_1(x_k, u_d, \tilde{\theta}^1, t) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \theta} f_n(x_k, u_d, \tilde{\theta}^n, t) \end{bmatrix}$$

$\tilde{\theta}^i \in [s^i \theta_k + (1 - s^i) \theta_d]$, $0 \leq s^i \leq 1$ ($i = 1, \dots, n$); 这里设 $B_k(t)$ 有界。

输入 $u_d(t)$ ($t \in [0, T]$), 得到输出 $y_d(t)$ ($t \in [0, T]$)。记 $\theta_d(t) = \theta(t)$ ($t \in [0, T]$)。 $x_d(t)$ ($t \in [0, T]$) 为相应的状态轨迹。系统(7.1.1)可表示成

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_d(t) &= f(x_d(t), u_d(t), \theta_d(t), t) \\ y_d(t) &= g(x_d(t), t) \end{aligned} \right\} \quad (7.2.22)$$

为了叙述方便, 下面将学习律(7.2.14)中的增益矩阵记为 $\Gamma_k(t)$ 。

定理 7.2.3 给定迭代学习辨识模型(7.1.3), 并设定 $x_k(0) = x_d(0)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ 。如果

$$\|I - \Gamma_k(t) g_x(x_k(t), t) B_k(t)\| \leq \rho < 1 \quad (7.2.23)$$

$$(t \in [0, T], k = 0, 1, 2, \dots)$$

那么, 由迭代学习辨识算法(7.2.14)产生的估计参数序列

$\{\theta_k(t)\}$ 满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} \theta_k(t) = \theta_d(t) (t \in [0, T])$ 。

证明 第 $k+1$ 次迭代时的参数估计误差可写成

$$\begin{aligned} \Delta \theta_{k+1} &= \Delta \theta_k - \Gamma_k (\dot{g}_{td} + g_{xd} \dot{x}_d - \dot{g}_{tk} - g_{xk} \dot{x}_k) = \\ &= \Delta \theta_k - \Gamma_k [g_{td} - g_{tk} + g_{xd} f(x_d, u_d, \theta_d, t) - \\ &\quad g_{xk} f(x_k, u_d, \theta_k, t)] = \\ &= \Delta \theta_k - \Gamma_k [g_{td} - g_{tk} + (g_{xd} - g_{xk}) f(x_d, u_d, \theta_d, t) + \\ &\quad g_{xk} (f(x_d, u_d, \theta_d, t) - f(x_k, u_d, \theta_k, t))] = \\ &= [I - \Gamma_k g_{xk} B_k] \Delta \theta_k - \Gamma_k [g_{td} - g_{tk} + \\ &\quad (g_{xd} - g_{xk}) f(x_d, u_d, \theta_d, t) + \\ &\quad g_{xk} (f(x_d, u_d, \theta_d, t) - f(x_k, u_d, \theta_k, t))] \end{aligned} \quad (7.2.24)$$

上式两端取范数

$$\begin{aligned} \|\Delta \theta_{k+1}\| &\leq \|I - \Gamma_k g_{xk} B_k\| \|\Delta \theta_k\| + \\ &+ \|\Gamma_k\| [\|g_{td} - g_{tk}\| + \|g_{xd} - g_{xk}\| \|f(x_d, u_d, \theta_d, t)\| + \\ &+ \|g_{xk}\| \|f(x_d, u_d, \theta_d, t) - f(x_k, u_d, \theta_k, t)\|] \leq \\ &\rho \|\Delta \theta_k\| + b_1 \|x_d - x_k\| \end{aligned} \quad (7.2.25)$$

式中 b_{Γ} 和 b_{g_x} 分别为 Γ 和 g_x 的界; $b_d = \sup_{t \in [0, T]} \|f(x_d(t), u_d(t), \theta_d(t), t)\|$; $b_1 = b_{\Gamma}(k_{g_x} + k_{g_x} b_d + b_{g_x} k_f)$ 。设定 $x_k(0) = x_d(0)$, 有

$$\begin{aligned} \|x_d - x_k\| &= \left\| \int_0^t (f(x_d, u_d, \theta_d, \tau) - f(x_k, u_d, \theta_k, \tau)) d\tau \right\| \leq \\ &\int_0^t k_f (\|x_d - x_k\| + \|\Delta \theta_k\|) d\tau \end{aligned}$$

应用 Bellman-Gronwall 引理

$$\|x_d - x_k\| \leq \int_0^t k_f e^{k_f(t-\tau)} \|\Delta \theta_k\| d\tau \quad (7.2.26)$$

将式(7.2.26)代入式(7.2.25)得

$$\|\Delta \theta_{k+1}\| \leq \rho \|\Delta \theta_k\| + \int_0^t b_2 e^{b_2(t-\tau)} \|\Delta \theta_k\| d\tau$$

式中 $b_2 = \max\{k_f, b_1 k_f\}$ 。上式两端正函数 $e^{-\lambda t} (t \in [0, T])$, 并由 λ 范数的定义可知

$$\|\Delta \theta_{k+1}\|_{\lambda} \leq (\rho + b_2 \frac{1 - e^{(b_2 - \lambda)T}}{\lambda - b_2}) \|\Delta \theta_k\|_{\lambda} \quad (7.2.27)$$

至此, 容易证得定理。

例 7.2.2 考虑含时变参数的非线性系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^1(t) \\ \dot{x}^2(t) \\ \dot{x}^3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2(t) + \theta^1(t) \\ x^3(t) + \theta^2(t) \\ \sin(x^3(t)\theta^1(t)) + \cos(x^2(t)\theta^2(t)) \end{bmatrix}$$

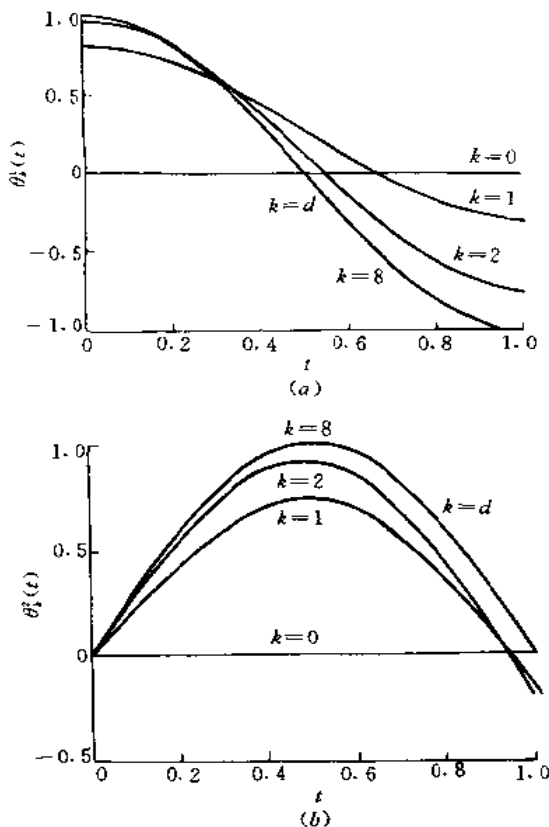


图 7.2.2 例 7.2.2 的迭代参数

(a) $\theta_k^1(t)$; (b) $\theta_k^2(t)$ 。

$$\begin{bmatrix} y^1(t) \\ y^2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \\ x^3(t) \end{bmatrix}$$

$$\text{设} \quad \begin{bmatrix} \theta_d^1(t) \\ \theta_d^2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\pi t) \\ \sin(\pi t) \end{bmatrix}$$

当系统初态为 $\mathbf{x}_d(0) = [0, 0, 0]^T$ 时, 量测得到 $y_d(t) (t \in [0, 1])$ 。

采用迭代学习辨识算法 (7.2.14), 取 $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.0 \\ 0.0 & 0.7 \end{bmatrix}$ 并设定

$\mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}_d(0) (k = 0, 1, 2, \dots); \theta_0^1(t) = 0, \theta_0^2(t) = 0 (t \in [0, 1])$ 。

迭代学习辨识结果如图 7.2.2 所示。

7.3 鲁棒迭代学习辨识

当系统初态不精确已知时, 可对初态进行估计。设初态满足

$$\|\mathbf{x}_d(0) - \mathbf{x}_k(0)\| \leq b_{x0} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

采用 P 型遗忘因子学习律

$$\boldsymbol{\theta}_{k+1}(t) = (1 - \alpha)\boldsymbol{\theta}_k(t) + \Phi \mathbf{e}_{k+1}(t) \quad (7.3.1)$$

式中 $\mathbf{e}_k(t) = y_d(t) - y_k(t)$, $t \in [0, T]$, $0 < \alpha < 2$ 为遗忘因子, 增益矩阵 Φ 对称正定。

引理 7.3.1 若 $\mathbf{e}_k(t)$ 在 $[0, T]$ 上关于 k 一致有界, 则由学习律 (7.3.1) 产生的 $\boldsymbol{\theta}_k(t)$ 在 $[0, T]$ 上关于 k 一致有界。

证明 对于 $t \in [0, T]$ 及 $k \geq 1$, 式 (7.3.1) 可写成

$$\boldsymbol{\theta}_k(t) = (1 - \alpha)^k \boldsymbol{\theta}_0(t) + \Phi \sum_{i=0}^{k-1} (1 - \alpha)^i \mathbf{e}_{k-i}(t)$$

由 $\mathbf{e}_k(t)$ 的一致有界性知, $\|\mathbf{e}_k(t)\| \leq M$ 。因此

$$\|\boldsymbol{\theta}_k(t)\| \leq (1 - \alpha)^k \|\boldsymbol{\theta}_0(t)\| + \|\Phi\| M \sum_{i=0}^{k-1} (1 - \alpha)^i \leq$$

$$\|\boldsymbol{\theta}_0(t)\| + \|\Phi\| M \frac{1}{1 - (1 - \alpha)}$$

证毕。

在给出主要定理之前,对系统(7.2.11)做进一步假设:时变参数的维数与输出维数相同,即 $r = m$; $g_s B \in \mathbf{R}^{m \times m}$ 对称正定,并且 $\frac{d}{dt}(g_s B)^{-1}$ 有界,即 $\exists \eta > 0$,使得

$$\left\| \frac{d}{dt}(g_s B)^{-1} \right\| \leq \eta$$

定理7.3.1 给定迭代学习辨识模型(7.2.13)。在学习律(7.3.1)的作用下,参数误差 $\theta_d - \theta_k$, 状态误差 $x_d - x_k$ 以及输出误差 e_k 一致有界。

证明 记 $\|\cdot\|$ 为 l_2 范数,即 $\|x\| = \sqrt{x^T x}$, $\langle x, y \rangle = \int_0^T e^{-\lambda \tau} x^T(\tau) y(\tau) d\tau$; 且记 $\Delta \theta_k = \theta_d - \theta_k$, $\delta \theta_{k+1} = \theta_{k+1} - (1 - \alpha)\theta_k$ 。由式(7.3.1)可知

$$\begin{aligned} \delta \theta_k &= \Phi e_k \\ (1 - \alpha)\Delta \theta_k &= \Delta \theta_{k+1} + \delta \theta_{k+1} - \alpha \theta_d \end{aligned} \quad (7.3.2)$$

定义

$$v_k = \langle \Delta \theta_k, \Delta \theta_k \rangle \quad (7.3.3)$$

有

$$\begin{aligned} v_{k+1} - (1 - \alpha)^2 v_k &= \\ \langle \Delta \theta_{k+1}, \Delta \theta_{k+1} \rangle - \langle (1 - \alpha)\Delta \theta_k, (1 - \alpha)\Delta \theta_k \rangle &= \\ \langle \Delta \theta_{k+1}, \Delta \theta_{k+1} \rangle - \langle \Delta \theta_{k+1} + \delta \theta_{k+1} - \alpha \theta_d, \Delta \theta_{k+1} + \delta \theta_{k+1} - \alpha \theta_d \rangle &= \\ - \langle \delta \theta_{k+1}, \delta \theta_{k+1} \rangle - 2 \langle \delta \theta_{k+1}, \Delta \theta_{k+1} \rangle + 2\alpha \langle \Delta \theta_{k+1}, \theta_d \rangle + \\ 2\alpha \langle \delta \theta_{k+1}, \theta_d \rangle - \alpha^2 \langle \theta_d, \theta_d \rangle \end{aligned} \quad (7.3.4)$$

考察 $\Delta \theta_k$ 与 $\delta \theta_k$ 的关系。由式(7.2.13)可知

$$\begin{aligned} \Phi^{-1} \delta \dot{\theta}_k &= \dot{e}_k = g_{td} + g_{xd}(f_d + B_d \theta_d) - \\ &g_{tk} - g_{xk}(f_k + B_k \theta_k) = \\ &g_{xk} B_k \Delta \theta_k + g_{td} - g_{tk} + \\ &g_{xd}(f_d + B_d \theta_d) - g_{xk}(f_k + B_k \theta_d) \end{aligned}$$

记

$$\mathbf{A}_k = [\Phi \mathbf{g}_{xk} \mathbf{B}_k]^{-1}$$

$$\mathbf{r}_k = -\mathbf{A}_k \Phi [\mathbf{g}_{td} - \mathbf{g}_{tk} + \mathbf{g}_{xd}(\mathbf{f}_d + \mathbf{B}_d \boldsymbol{\theta}_d) - \mathbf{g}_{xk}(\mathbf{f}_k + \mathbf{B}_k \boldsymbol{\theta}_k)]$$

则有

$$\Delta \boldsymbol{\theta}_k = \mathbf{A}_k \delta \dot{\boldsymbol{\theta}}_k + \mathbf{r}_k \quad (7.3.5)$$

将式(7.3.5)代入式(7.3.4), 则

$$\begin{aligned} v_{k+1} - (1-\alpha)^2 v_k = & -\langle \delta \boldsymbol{\theta}_{k+1}, \delta \boldsymbol{\theta}_{k+1} \rangle - \\ & 2\langle \delta \boldsymbol{\theta}_{k+1}, \mathbf{A}_{k+1} \delta \dot{\boldsymbol{\theta}}_{k+1} \rangle - 2\langle \delta \boldsymbol{\theta}_{k+1}, \mathbf{r}_{k+1} \rangle + \\ & 2\alpha \langle \boldsymbol{\theta}_d, \mathbf{A}_{k+1} \delta \dot{\boldsymbol{\theta}}_{k+1} \rangle + 2\alpha \langle \boldsymbol{\theta}_d, \mathbf{r}_{k+1} \rangle + \\ & 2\alpha \langle \boldsymbol{\theta}_d, \delta \boldsymbol{\theta}_{k+1} \rangle - \alpha^2 \langle \boldsymbol{\theta}_d, \boldsymbol{\theta}_d \rangle \end{aligned} \quad (7.3.6)$$

应用分部积分公式

$$\begin{aligned} 2\langle \delta \boldsymbol{\theta}_{k+1}, \mathbf{A}_{k+1} \delta \dot{\boldsymbol{\theta}}_{k+1} \rangle &= e^{-\lambda t} \delta \boldsymbol{\theta}_{k+1}^T \mathbf{A}_{k+1} \delta \boldsymbol{\theta}_{k+1} \Big|_{t=0}^{t=T} + \\ & \quad \langle \delta \boldsymbol{\theta}_{k+1}, (\lambda \mathbf{A}_{k+1} - \dot{\mathbf{A}}_{k+1}) \delta \boldsymbol{\theta}_{k+1} \rangle \\ \langle \boldsymbol{\theta}_d, \mathbf{A}_{k+1} \delta \dot{\boldsymbol{\theta}}_{k+1} \rangle &= e^{-\lambda t} \boldsymbol{\theta}_d^T \mathbf{A}_{k+1} \delta \boldsymbol{\theta}_{k+1} \Big|_{t=0}^{t=T} + \lambda \langle \boldsymbol{\theta}_d, \mathbf{A}_{k+1} \delta \boldsymbol{\theta}_{k+1} \rangle - \\ & \quad \langle \dot{\boldsymbol{\theta}}_d, \mathbf{A}_{k+1} \delta \boldsymbol{\theta}_{k+1} \rangle - \langle \boldsymbol{\theta}_d, \dot{\mathbf{A}}_{k+1} \delta \boldsymbol{\theta}_{k+1} \rangle \end{aligned}$$

这样, 式(7.3.6)可写成

$$\begin{aligned} v_{k+1} - (1-\alpha)^2 v_k = & -e^{-\lambda t} \delta \boldsymbol{\theta}_{k+1}^T \mathbf{A}_{k+1} \delta \boldsymbol{\theta}_{k+1} \Big|_{t=0}^{t=T} + 2\alpha e^{-\lambda t} \boldsymbol{\theta}_d^T \mathbf{A}_{k+1} \delta \boldsymbol{\theta}_{k+1} \Big|_{t=0}^{t=T} + \\ & \langle \delta \boldsymbol{\theta}_{k+1}, (-\mathbf{I} - \lambda \mathbf{A}_{k+1} + \dot{\mathbf{A}}_{k+1}) \delta \boldsymbol{\theta}_{k+1} \rangle + \\ & 2\alpha \langle \boldsymbol{\theta}_d, (\lambda \mathbf{A}_{k+1} - \dot{\mathbf{A}}_{k+1}) \delta \boldsymbol{\theta}_{k+1} \rangle - \\ & 2\alpha \langle \boldsymbol{\theta}_d, \mathbf{A}_{k+1} \delta \boldsymbol{\theta}_{k+1} \rangle - 2\langle \delta \boldsymbol{\theta}_{k+1}, \mathbf{r}_{k+1} \rangle + \\ & 2\alpha \langle \boldsymbol{\theta}_d, \mathbf{r}_{k+1} \rangle + 2\alpha \langle \boldsymbol{\theta}_d, \delta \boldsymbol{\theta}_{k+1} \rangle - \alpha^2 \langle \boldsymbol{\theta}_d, \boldsymbol{\theta}_d \rangle \end{aligned} \quad (7.3.7)$$

估计 \mathbf{r}_k 的模。由 \mathbf{r}_k 的定义可知

$$\|\mathbf{r}_k\| \leq \|\mathbf{A}_k \Phi\| (\|\mathbf{g}_{td} - \mathbf{g}_{tk}\| + \|\mathbf{g}_{xd} - \mathbf{g}_{xk}\| \|\mathbf{f}_d + \mathbf{B}_d \boldsymbol{\theta}_d\| +$$

$$\begin{aligned} & \|g_{xk}\| \|f_d - f_k\| + \|g_{xk}\| \|B_d - B_k\| \|\theta_d\| \leq \\ & \varphi b_A (k_{gt} + k_{gx} b_d + b_{gx} k_f + b_{gx} k_B b_{\theta d}) \cdot \\ & \|x_d - x_k\| \triangleq c_0 \|\Delta x_k\| \end{aligned} \quad (7.3.8)$$

式中 $\varphi = \|\Phi\|$, b_A 、 b_{gx} 分别为 A_k 、 g_{xk} 的界, $b_{\theta d} = \sup_{t \in [0, T]} \|\theta_d(t)\|$, $b_d = \sup_{t \in [0, T]} \|f_d + B_d \theta_d\|$ 。

由于 $g_x B$ 对称正定, 故 $\exists \gamma_1, \gamma_2 > 0$, 使得

$$\gamma_2 I \leq A_k \leq \gamma_1 I$$

因此

$$\begin{aligned} & -e^{-\lambda t} \delta \theta_{k+1}^T A_{k+1} \delta \theta_{k+1} \Big|_{t=0}^{t=T} + 2\alpha e^{-\lambda t} \theta_d^T A_{k+1} \delta \theta_{k+1} \Big|_{t=0}^{t=T} \leq \\ & \quad \gamma_2 e^{-\lambda T} \|\delta \theta_{k+1}(T)\|^2 + \gamma_1 \|\delta \theta_{k+1}(0)\|^2 + \\ & \quad 2\alpha e^{-\lambda T} b_A \|\theta_d(T)\| \|\delta \theta_{k+1}(T)\| + \\ & \quad 2\alpha b_A \|\theta_d(0)\| \|\delta \theta_{k+1}(0)\| = \\ & \quad -\gamma_2 e^{-\lambda T} [\|\delta \theta_{k+1}(T)\|^2 - \\ & \quad 2\alpha \frac{b_A}{\gamma_2} \|\delta \theta_{k+1}(T)\| \|\theta_d(T)\| + \\ & \quad (\alpha \frac{b_A}{\gamma_2} \|\theta_d(T)\|)^2] + \gamma_2 e^{-\lambda T} (\alpha \frac{b_A}{\gamma_2} \|\theta_d(T)\|)^2 + \\ & \quad \gamma_1 \varphi^2 k_g^2 b_{x0}^2 + 2\alpha b_A \|\theta_d(0)\| \varphi k_g b_{x0} \leq \\ & \quad e^{-\lambda T} \frac{\alpha^2 b_A^2}{\gamma_2} \|\theta_d(T)\|^2 + \gamma_1 \varphi^2 k_g^2 b_{x0}^2 + \\ & \quad 2\alpha b_A \|\theta_d(0)\| \varphi k_g b_{x0} \triangleq c_1 \alpha^2 + c_2 b_{x0}^2 + c_3 \alpha b_{x0} \end{aligned}$$

进一步地, 有

$$\begin{aligned} & \delta \theta_{k+1}^T (-I - \lambda A_{k+1} + \dot{A}_{k+1}) \delta \theta_{k+1} \leq \\ & \quad (-1 - \lambda \gamma_2 + \eta \|\Phi^{-1}\|) \|\delta \theta_{k+1}\|^2 \\ & \quad 2\alpha (\theta_d^T \dot{\lambda} A_{k+1} - \theta_d^T \dot{A}_{k+1} - \dot{\theta}_d^T A_{k+1}) \delta \theta_{k+1} \leq \\ & \quad 2\alpha \sup_{t \in [0, T]} (\lambda b_A \|\theta_d\| + \eta \|\Phi^{-1}\| \|\theta_d\| \leq \\ & \quad b_A \|\theta_d\|) \|\delta \theta_{k+1}\| \triangleq \alpha c_4(\lambda) \|\delta \theta_{k+1}\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-2 \delta \theta_{k+1}^T r_{k+1} &\leq 2c_0 \|\delta \theta_{k+1}\| \|\Delta x_{k+1}\| \\
2\alpha \theta_d^T r_{k+1} &\leq 2\alpha c_0 \sup_{t \in [0, T]} \|\theta_d\| \|\Delta x_{k+1}\| \triangleq \alpha c_5 \|\Delta x_{k+1}\| \\
2\alpha \theta_d^T \delta \theta_{k+1} &\leq 2\alpha \sup_{t \in [0, T]} \|\theta_d\| \|\delta \theta_{k+1}\| \triangleq \alpha c_6 \|\delta \theta_{k+1}\| \\
&\quad - \alpha^2 \theta_d^T \theta_d \leq 0
\end{aligned}$$

利用以上关系, 式(7.3.7)可写成

$$\begin{aligned}
v_{k+1} - (1 - \alpha)^2 v_k &\leq c_1 \alpha^2 + c_2 b_{x0}^2 + c_3 \alpha b_{x0} + \\
&\quad \int_0^T e^{-\lambda \tau} \{ (-1 - \lambda \gamma_2 + \eta \|\Phi^{-1}\|) \|\delta \theta_{k+1}\|^2 + \\
&\quad \alpha c_4(\lambda) \|\delta \theta_{k+1}\| + 2c_0 \|\delta \theta_{k+1}\| \|\Delta x_{k+1}\| + \\
&\quad \alpha c_5 \|\Delta x_{k+1}\| + \alpha c_6 \|\delta \theta_{k+1}\| \} d\tau \leq \\
&\quad c_1 \alpha^2 + c_2 b_{x0}^2 + c_3 \alpha b_{x0} + \\
&\quad \int_0^T e^{-\lambda \tau} \{ -c_\lambda \|\Delta x_{k+1}\|^2 + \alpha c_7(\lambda) \|\Delta x_{k+1}\| \} d\tau \leq \\
&\quad c_1 \alpha^2 + c_2 b_{x0}^2 + c_3 \alpha b_{x0} + \int_0^T e^{-\lambda \tau} \left\{ -c_\lambda (\|\Delta x_{k+1}\|^2 - \right. \\
&\quad \left. \frac{\alpha c_7(\lambda)}{c_\lambda} \|\Delta x_{k+1}\| + \left(\frac{\alpha c_7(\lambda)}{2c_\lambda} \right)^2 + \frac{(\alpha c_7(\lambda))^2}{4c_\lambda} \right\} d\tau
\end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned}
c_7(\lambda) &= c_4(\lambda) \varphi k_g + c_5 + c_6 \varphi k_g \\
c_\lambda &= (1 + \lambda \gamma_2 - \eta \|\Phi^{-1}\|) \varphi^2 k_g^2 - 2c_0 \varphi k_g
\end{aligned}$$

可以看出, 当 λ 足够大时, $c_\lambda > 0$ 。因此

$$\begin{aligned}
v_{k+1} - (1 - \alpha)^2 v_k &\leq c_1 \alpha^2 + \\
&\quad c_2 b_{x0}^2 + c_3 \alpha b_{x0} + \frac{(\alpha c_7(\lambda))^2}{4c_\lambda} \frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda} \triangleq \varepsilon_1(\alpha, b_{x0})
\end{aligned} \tag{7.3.9}$$

由于 $0 < \alpha < 2$, v_k 关于 k 一致有界且渐近界为

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} v_k \leq \frac{1}{\alpha(2 - \alpha)} \varepsilon_1(\alpha, b_{x0}) \tag{7.3.10}$$

估计 Δx_k 的模, 记 $c_g = \max\{\lambda, k_f + k_B b_{\theta d}\}$, 由式(7.2.18)可知

$$\begin{aligned} \|\Delta x_k\| &\leq e^{c_g t} b_{x0} + \int_0^t e^{c_g(t-\tau)} b_B \|\Delta \theta_k\| d\tau \leq \\ &e^{c_g T} b_{x0} + e^{c_g T} b_B \int_0^T e^{-c_g \tau} \|\Delta \theta_k\| d\tau \leq \\ &e^{c_g T} b_{x0} + e^{c_g T} b_B \sqrt{\int_0^T e^{-2c_g \tau} \|\Delta \theta_k\|^2 d\tau} \sqrt{\int_0^T 1^2 d\tau} \leq \\ &e^{c_g T} b_{x0} + e^{c_g T} b_B \sqrt{T} \sqrt{\langle \Delta \theta_k, \Delta \theta_k \rangle} \end{aligned}$$

因此

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|\Delta x_k\| \leq e^{c_g T} b_{x0} + e^{c_g T} b_B \sqrt{\frac{T \varepsilon_1(\alpha, b_{x0})}{\alpha(2-\alpha)}} \triangleq \varepsilon_2(\alpha, b_{x0}) \quad (7.3.11)$$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|e_k\| \leq k_g \varepsilon_2(\alpha, b_{x0}) \quad (7.3.12)$$

进一步地, 由引理 7.3.1, 可推知 $\Delta \theta_k$ 的有界性。定理证毕。

上述定理表明, 当存在有界的初始状态偏移时, 初始修正项 $\alpha \theta_0$ 的引入构造了一种鲁棒学习辨识算法。被估参数能够收敛到系统参数的邻域里, 不会迭代发散。在实际应用中, 若初态已知, 可设置 $x_k(0) = x_d(0)$ 。这时, 可以通过减小 α 来减弱初始修正项 $\alpha \theta_0$ 的作用, 以保证这种学习律的收敛性。

定理 7.3.2 对于定理 7.3.1 考虑的迭代学习辨识模型 (7.2.13), 设 $b_{x0} = 0$ 。P 型学习律

$$\theta_{k+1} = \theta_k(t) + \Phi e_{k+1}(t) \quad (7.3.13)$$

产生的参数序列使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle \theta_d - \theta_k, \theta_d - \theta_k \rangle = 0 (t \in [0, T])$ 。

证明 当 $e_k(0) = 0$ 时, $\delta \theta_k(0) = 0, \forall k$ 。因此, 由式(7.3.7)、式(7.3.9)可知

$$\begin{aligned} v_{k+1} - (1-\alpha)^2 v_k &= e^{-\lambda t} \delta \theta_{k+1}^T A_{k+1} \delta \theta_{k+1} \Big|_{t=0}^{t=T} + \\ &\langle \delta \theta_{k+1}, (-I - \lambda A_{k+1} + \dot{A}_{k+1}) \delta \theta_{k+1} \rangle - \\ &2 \langle \delta \theta_{k+1}, r_{k+1} \rangle \leq -e^{-\lambda T} \gamma_2 \|\delta \theta_{k+1}(T)\|^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^T e^{-\lambda \tau} \{(-1 - \lambda \gamma_2 + \eta \|\Phi^{-1}\|) \|\delta \theta_{k+1}\|^2 + \\
& 2c_0 \|\delta \theta_{k+1}\| \|\Delta x_{k+1}\| \} d\tau \leq \\
& -e^{-\lambda T} \gamma_2 \|\delta \theta_{k+1}(T)\|^2 + \\
& \int_0^T e^{-\lambda \tau} \{(-1 - \lambda \gamma_2 + \eta \|\Phi^{-1}\|) \varphi^2 k_g^2 + \\
& 2c_0 \varphi k_g\| \|\Delta x_{k+1}\| \} d\tau
\end{aligned}$$

当 λ 足够大时, 若 $\Delta x_k(t) \neq 0$, 则

$$v_{k+1} - (1 - \alpha)^2 v_k < 0$$

即 v_k 严格单调递减。由 $\langle \Delta \theta_0, \Delta \theta_0 \rangle \geq 0$ 知, $\langle \Delta \theta_k, \Delta \theta_k \rangle \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$ 。进一步推知 $\|\Delta x_k\|, \|e_k\| \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$ 。

7.4 系统初态未知时的迭代学习辨识

本节讨论当系统初态未知时时变参数的迭代学习辨识问题。首先仍考虑由式(7.2.1)所描述的线性系统, $\theta(t) = \theta_d(t)$ 是待辨识的参数。任取一控制输入 $u_d(t)$, 设系统相应的状态向量是 $x_d(t)$, 则相应的输出为 $y_d(t) = Cx_d(t)$ 。采用迭代学习辨识模型

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_k(t) &= Ax_k(t) + Bu_d(t) + D\theta_k(t) \\ y_k(t) &= Cx_k(t) \end{aligned} \right\} \quad (7.4.1)$$

式中 $t \in [0, T]$, k 是迭代次数, $x_k(t) \in \mathbb{R}^n$, $y_k(t) \in \mathbb{R}^m$, $\theta_k(t) \in \mathbb{R}^p$ 分别是模型状态向量, 输出向量和参数估计向量。由于系统初态 $x_d(0)$ 未知, 故假定迭代初态 $x_k(0) = x^0$, 并考虑如下的状态向量

$$x_d^*(t) = \begin{cases} x_d(t) + \int_h^t \delta_k(\tau) d\tau (x_d(0) - x^0) & (0 \leq t \leq h) \\ x_d(t) & (h < t \leq T) \end{cases} \quad (7.4.2)$$

式中

$$\delta_h(t) = \begin{cases} \frac{2}{h}(1 - \frac{t}{h}) & (0 \leq t \leq h) \\ 0 & (h < t \leq T) \end{cases} \quad (7.4.3)$$

令 $y_d^*(t) = Cx_d^*(t)$, 并构造如下的辨识学习律

$$\theta_{k+1}(t) = \theta_k(t) + \Gamma \dot{e}_k(t) + \delta_h(t) \Gamma e_k(0) \quad (7.4.4)$$

式中 Γ 是增益矩阵, $e_k(t) = y_d(t) - y_k(t)$ 。容易证明定理 7.4.1。

定理 7.4.1 设迭代学习辨识模型(7.4.1)及学习律(7.4.4)满足

$$\rho = \|I - \Gamma C D\| < 1 \quad (7.4.5)$$

则当 $k \rightarrow \infty$ 时 $\theta_k(t)$ 在 $[h, T]$ 一致收敛于 $\theta_d(t)$ 。

证明 设 $\theta_d^*(t)$ 是这样的参数, 使当模型初态位于 x^0 时的状态向量是 $x_d^*(t)$ 。由于对任何 $0 \leq t \leq T$, 则

$$\begin{aligned} \theta_{k+1}(t) &= \theta_k(t) + \Gamma \dot{e}_k^*(t) + \delta_h(t) \Gamma e_k^*(0) + \\ &\quad \Gamma (\dot{y}_d(t) - \dot{y}_d^*(t)) + \delta_h(t) \Gamma (y_d(0) - y_d^*(0)) = \\ &\quad \theta_k(t) + \Gamma \dot{e}_k^*(t) + \delta_h(t) \Gamma e_k^*(0) = \\ &\quad \theta_k(t) + \Gamma \dot{e}_k^*(t) \end{aligned}$$

式中 $e^*(t) = y_d^*(t) - y_k(t)$ 。因此, 若令 $\Delta \theta_k^*(t) = \theta_d^*(t) - \theta_k(t)$, 则

$$\begin{aligned} \Delta \theta_{k+1}^*(t) &= \Delta \theta_k^*(t) - \Gamma \dot{e}_k^*(t) = \\ &\quad \Delta \theta_k^*(t) - \Gamma C A (x_d^*(t) - x_k(t)) - \Gamma C D \Delta \theta_k^*(t) = \\ &\quad (I - \Gamma C D) \Delta \theta_k^*(t) - \Gamma C A \int_0^t e^{A(t-\tau)} D \Delta \theta_k^*(\tau) d\tau \end{aligned}$$

从而

$$\|\Delta \theta_{k+1}^*(t)\| \leq \rho \|\Delta \theta_k^*(t)\| + \alpha \int_0^t \|\Delta \theta_k^*(\tau)\| d\tau$$

式中 $\alpha = \sup_{0 \leq t \leq T} \|\Gamma C A e^{At} D\|$ 。上式两端同乘 $e^{-\lambda t} (\lambda > 0)$, 并取 λ 范数, 则有

$$\|\Delta \theta_{k+1}^*\|_\lambda \leq \rho \|\Delta \theta_k^*\|_\lambda + \frac{\alpha}{\lambda} (1 - e^{-\lambda T}) \|\Delta \theta_k^*\|_\lambda$$

取 λ 充分大, 使

$$\tilde{\rho} = \rho + \frac{\alpha}{\lambda}(1 - e^{-\lambda T}) < 1$$

由此可证当 $k \rightarrow \infty$ 时 $\theta_k(t)$ 在 $[0, T]$ 上一致收敛于 $\theta_d^*(t)$, 于是当 $k \rightarrow \infty$ 时 $x_k(t)$, $y_k(t)$ 在 $[0, T]$ 上分别一致收敛于 $x_d^*(t)$, $y_d^*(t)$ 。

根据附录引理 A.4.6 知, 条件(7.4.5)成立意味着 $\text{rank}(CD) = p$, 故 $\text{rank}((CD)^T CD) = p$ 。再由式(7.4.1)可知

$$\dot{y}_d(t) = CAx_d(t) + CBu_d(t) + CD\theta_d(t)$$

$$\dot{y}_d^*(t) = CAx_d^*(t) + CBu_d(t) + CD\theta_d^*(t)$$

所以, 当 $h \leq t \leq T$ 时, 有 $CD\theta_d(t) = CD\theta_d^*(t)$, 即 $\theta_d^*(t) = \theta_d(t)$ 。由此即知该定理结论成立。

从定理 7.4.1 可以看出, 当迭代初态 $x^0 \neq x_d(0)$ 时, 按照(7.4.4)所示的辨识算法, 只能得到 $\theta_d(t)$ 在 $[h, T]$ 的值。但由于 h 可以任意小, 故总可选择充分大的 k 及充分小的 h , 用 $\theta_k(t)$ 在 $[h, T]$ 上的值来近似逼近 $\theta_d(t)$ 在 $[0, T]$ 上的值。

下面, 讨论一类非线性系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) + B(x(t), u(t))\theta(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \right\} \quad (7.4.6)$$

式中 $t \in [0, T]$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^r$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$ 分别是系统的状态向量及输入输出向量, $\theta(t) = \theta_d(t) \in \mathbb{R}^p$ 是待辨识的参数, f 、 $B \in \mathbb{R}^n$ 为已知的函数, C 为已知矩阵。此外, 对系统还作如下假定: f 、 B 关于 x 满足全局一致 Lipschitz 条件, 即对于 $h \in \{f, B\}$, $x_1(t), x_2(t) \in \mathbb{R}^n$, $\|h(x_1(t), u(t)) - h(x_2(t), u(t))\| \leq k_h \|x_1(t) - x_2(t)\|$; B 关于 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 有界, 即 $\|B(x(t), u(t))\| \leq M$ 。

任取一控制输入 $u_d(t)$, 并设系统相应的状态向量、输出向量分别是 $x_d(t)$ 、 $y_d(t)$ 。采用如下的迭代学习辨识模型

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_k(t) &= f(x_k(t), u_d(t)) + B(x_k(t), u_d(t))\theta_k(t) \\ y_k(t) &= Cx_k(t) \end{aligned} \right\} \quad (7.4.7)$$

式中 $t \in [0, T]$, k 是迭代次数。假定迭代初态为 \mathbf{x}^0 , 仍构造如式 (7.4.2) 所示的状态向量及学习律 (7.4.4), 故仍有

$$\boldsymbol{\theta}_{k+1}(t) = \boldsymbol{\theta}_k(t) + \Gamma \dot{\mathbf{e}}_k^*(t)$$

式中 $\mathbf{e}_k^*(t) = \mathbf{y}_d^*(t) - \mathbf{y}_k(t)$ 。

定理 7.4.2 设迭代学习辨识模型 (7.4.7) 及学习律 (7.4.4) 满足

$$\| \mathbf{I} - \Gamma \mathbf{C} \mathbf{B}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_d(t)) \| \leq \rho < 1 \quad (7.4.8)$$

这里 $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$, 则当 $k \rightarrow \infty$ 时 $\boldsymbol{\theta}_k(t)$ 在 $[0, T]$ 上一致收敛于 $\boldsymbol{\theta}_d(t)$ 。

证明 取一时变参数 $\boldsymbol{\theta}_d^*(t)$, 使模型 (7.4.7) 初态 \mathbf{x}^0 时的输出轨迹为 $\mathbf{y}_d^*(t)$ 。令 $\Delta \boldsymbol{\theta}_k^*(t) = \boldsymbol{\theta}_d^*(t) - \boldsymbol{\theta}_k(t)$, 则

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{\theta}_{k+1}^*(t) &= \Delta \boldsymbol{\theta}_k^*(t) - \Gamma \mathbf{C} [f(\mathbf{x}_d^*(t), \mathbf{u}_d(t)) - \\ &\quad f(\mathbf{x}_k(t), \mathbf{u}_d(t))] - \Gamma \mathbf{C} \mathbf{B}(\mathbf{x}_k(t), \mathbf{u}_d(t)) \Delta \boldsymbol{\theta}_k^*(t) - \\ &\quad \Gamma \mathbf{C} [\mathbf{B}(\mathbf{x}_d^*(t), \mathbf{u}_d(t)) - \mathbf{B}(\mathbf{x}_k(t), \mathbf{u}_d(t))] \boldsymbol{\theta}_d^*(t) \end{aligned}$$

上式两端取范数, 有

$$\| \Delta \boldsymbol{\theta}_{k+1}^*(t) \| \leq \rho \| \Delta \boldsymbol{\theta}_k^*(t) \| + k_1 \| \mathbf{x}_d^*(t) - \mathbf{x}_k(t) \| \quad (7.4.9)$$

这里 $k_1 = \gamma k_f + \gamma k_b b$, 其中 $\gamma = \| \Gamma \mathbf{C} \|$, $b = \sup_{0 \leq t \leq T} \| \boldsymbol{\theta}_d^*(t) \|$ 。而

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_d^*(t) - \mathbf{x}_k(t) &= \int_0^t [f(\mathbf{x}_d^*(\tau), \mathbf{u}_d(\tau)) - f(\mathbf{x}_k(\tau), \mathbf{u}_k(\tau))] d\tau + \\ &\quad \int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{x}_k(\tau), \mathbf{u}_d(\tau)) \Delta \boldsymbol{\theta}_k^*(\tau) d\tau + \\ &\quad \int_0^t [\mathbf{B}(\mathbf{x}_d^*(\tau), \mathbf{u}_d(\tau)) - \\ &\quad \mathbf{B}(\mathbf{x}_k(\tau), \mathbf{u}_d(\tau))] \boldsymbol{\theta}_d^*(\tau) d\tau \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \| \mathbf{x}_d^*(t) - \mathbf{x}_k(t) \| &\leq k_2 \int_0^t \| \mathbf{x}_d^*(\tau) - \mathbf{x}_k(\tau) \| d\tau + \\ &\quad M \int_0^t \| \Delta \boldsymbol{\theta}_k^*(\tau) \| d\tau \end{aligned}$$

式中 $k_2 = k_f + k_B b$ 。由 Bellman-Gronwall 引理可知

$$\|x_d^*(t) - x_k(t)\| \leq M \int_0^t e^{k_2(t-\tau)} \|\Delta \theta_k^*(\tau)\| d\tau$$

将上式代入(7.4.9)式, 有

$$\|\Delta \theta_{k+1}^*(t)\| \leq \rho \|\Delta \theta_k^*(t)\| + k_1 M \int_0^t e^{k_2(t-\tau)} \|\Delta \theta_k^*(\tau)\| d\tau$$

上式两端同乘 $e^{-\lambda t} (\lambda > k_2)$, 并取 λ 范数, 则有

$$\|\Delta \theta_{k+1}^*\|_\lambda \leq \left| \rho + k_1 M \frac{1 - e^{-(\lambda - k_2)T}}{\lambda - k_2} \right| \|\Delta \theta_k^*\|_\lambda$$

取 λ 充分大使

$$\tilde{\rho} = \rho + k_1 M \frac{1 - e^{-(\lambda - k_2)T}}{\lambda - k_2} < 1$$

由此可证当 $k \rightarrow \infty$ 时 $\theta_k(t)$ 在 $[0, T]$ 上一致收敛于 $\theta_d^*(t)$, 于是当 $k \rightarrow \infty$ 时, $x_k(t)$ 、 $y_k(t)$ 分别在 $[0, T]$ 上一致收敛于 $x_d^*(t)$ 、 $y_d^*(t)$ 。由类似于定理 7.4.1 的证明可知, 当 $h \leq t \leq T$ 时, $\theta_d^*(t) = \theta_d(t)$ 。从而该定理得证。

例 7.4.1 考虑含时变参数的非线性系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^1(t) \\ \dot{x}^2(t) \\ \dot{x}^3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x^1(t) + \theta^1(t) \\ \cos(x^1(t)x^3(t)) + \theta^2(t) \\ -x^2(t) - x^3(t) + \sin(x^1(t))\theta^2(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y^1(t) \\ y^2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \\ x^3(t) \end{bmatrix}$$

设

$$\begin{bmatrix} \theta_d^1(t) \\ \theta_d^2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\pi t) \\ \sin(\pi t) \end{bmatrix}$$

当系统初态为 $x_d(0) = [0, 0, 0]^T$ 时, 量测得到 $y_d(t) (t \in [0, 1])$ 。采用迭代学习辨识算法(7.2.14), 并取

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix}$$

设定系统初态为 $x_k^1(0) = 2, x_k^2(0) = 0.5, x_k^3 = 1$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), 这时存在初态偏移。时变参数 $[\theta^1(t), \theta^2(t)]^T$ 的辨识结果如图 7.4.1 所示。图示结果表明迭代参数未收敛于真值。

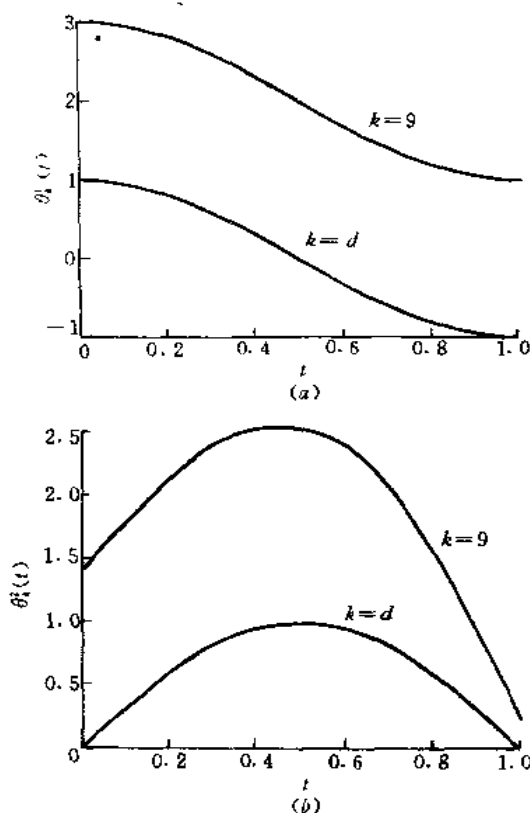


图 7.4.1 例 7.4.1 中采用学习律(7.2.14)得到的迭代参数

(a) $\theta_k^1(t)$; (b) $\theta_k^2(t)$ 。

采用带初始修正的迭代学辨识算法(7.4.4), 取 $h = 0.1, \Gamma$ 同前。这时时变参数 $[\theta^1(t), \theta^2(t)]^T$ 的辨识结果见图 7.4.2 所示。图示表明在区间 $[0.1, 1]$ 上, 迭代参数收敛于真值。

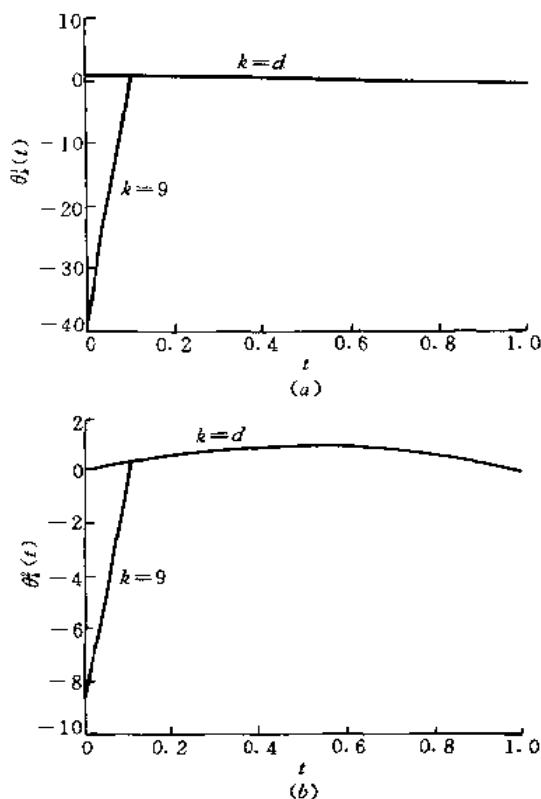


图 7.4.2 例 7.4.1 中采用学习律 7.4.4 得到的迭代参数
(a) $\theta_k^1(t)$; (b) $\theta_k^2(t)$ 。

7.5 外弹道气动系数辨识

火炮攻击的效力与编制火炮射表的精度有关,而影响射表精度的重要因素是确定气动阻力系数 $C_d(Ma)$ (Ma 为马赫数)。通常确定阻力系数 $C_d(Ma)$ 的主要方法有二:其一是通过风洞试验确定,另一是通过弹丸飞行的雷达测试数据估计 $C_d(Ma)$ 。将从雷达测试数据中提取阻力系数 $C_d(Ma)$ 归结为最优控制问题已有

一些结果。本节将其归结为迭代学习辨识问题,并利用实际测试数据给出辨识结果,通过迭代学习辨识方法得到的阻力系数需经过拟合处理后才能使用。这里,我们称由迭代学习辨识方法得到的阻力系数为符合阻力系数,记为 $C_{df}(Ma)$ 或 $C_{df}(t)$ 。

考虑弹丸质心运动方程

$$\left. \begin{aligned} \dot{v}_x &= -\frac{\rho s}{2m} v(v_x - w_x) C_{df} \\ \dot{v}_y &= -\frac{\rho s}{2m} v v_y C_{df} - g \\ \dot{v}_z &= -\frac{\rho s}{2m} v(v_z - w_z) C_{df} \end{aligned} \right\} \quad (7.5.1)$$

式中 $[x(t), y(t), z(t)]^T$ 为弹丸在地球坐标系(ECS)下的位置向量。 $C_{df}(t)$ 或 $C_{df}(Ma)$ 为符合阻力曲线,其它参数见本章开始时的说明。

设雷达在该 ESC 的位置向量为 $[x_r, y_r, z_r]^T$ 。雷达量测弹丸的位置向量 $[r_x(t), r_y(t), r_z(t)]^T$ 为

$$\begin{aligned} [r_x(t), r_y(t), r_z(t)]^T &= \\ [x(t) - x_r, y(t) - y_r, z(t) - z_r]^T \end{aligned} \quad (7.5.2)$$

雷达与弹丸的径向距离为

$$r(t) = \sqrt{r_x^2(t) + r_y^2(t) + r_z^2(t)} \quad (7.5.3)$$

雷达量测弹丸的径向意义上的飞行速度为

$$v_r(t) = \frac{1}{r} (r_x v_x + r_y v_y + r_z v_z) \quad (7.5.4)$$

现在的问题是,给定量测数据 $v_{r,d}(t) (t \in [0, T])$, 寻找 $C_{df}(t)$, 使得在该气动阻力曲线下得到的 $v_r(t)$ 尽可能沿整个 $[0, T]$ 区间接近 $v_{r,d}(t)$ 。

进一步地,为了叙述方便,将式(7.5.1)改写为式(7.2.13)的形式。定义状态 $\mathbf{X} = [v_x, v_y, v_z, x, y, z]^T$ 。相应地,有

$$\mathbf{f}(\mathbf{X}) = [0, -g, 0, v_x, v_y, v_z]^T \quad (7.5.5a)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{X}) = -\frac{\rho s}{2m} v [v_x - w_x, v_y - w_y, 0, 0, 0]^T \quad (7.5.5b)$$

$$g(\mathbf{X}) = v_r \quad (7.5.5c)$$

采用学习律

$$C_{df,k+1}(t) = C_{df,k}(t) + \gamma \dot{e}_k(t) \quad (7.5.6)$$

式中 k 为迭代次数, $e_k(t) = v_{r,d}(t) - v_{r,k}(t)$, γ 为学习增益。因为

$$g_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) = \frac{1}{r} [r_r, r_v, r_z, v_x - \frac{r_x}{r} v_r, v_y - \frac{r_y}{r} v_r, v_z - \frac{r_z}{r} v_r] \quad (7.5.7)$$

所以定理 7.2.2 中给出的算法收敛性条件(7.2.15)可写成

$$\left| 1 + \gamma \frac{\rho s}{2m} v (v_r - \frac{r_x}{r} w_x - \frac{r_z}{r} w_z) \right| < 1 \quad (7.5.8)$$

令式(7.5.8)左端为零,可解得增益系数

$$\gamma = -\frac{2m}{\rho s} \frac{1}{v(v_r - \frac{r_x}{r} w_x - \frac{r_z}{r} w_z)} \quad (7.5.9)$$

又由于 $w_x \ll v_r$, $w_z \ll v_r$, 故增益系数又可取为

$$\gamma = -\frac{2m}{\rho s} \frac{1}{vv_r} \quad (7.5.10)$$

下面我们利用某雷达实测数据, 辨识符合阻力曲线 C_{df} , 以说明所提出的迭代学习辨识算法的有效性。图 7.5.1 所示为 C_{df} 辨识结果。

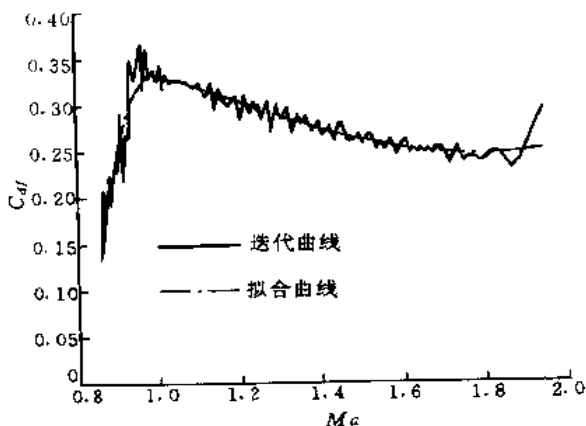
辨识采用的雷达实测数据为

$$d = 0.155\text{m}, \quad m = 44.99\text{kg}, \quad w_x = w_z = 0$$

$$[x_r, y_r, z_r]^T = [-67.4, 150, 0]^T$$

$$\mathbf{X}(0) = [480.03, 447.38, 0, 274.6, 410.7, 0]^T$$

$$\text{采样间隔 } h = 0.3\text{s}$$

图 7.5.1 C_d 迭代辨识曲线及其拟合曲线

采样区间[0.6s, 30.6s]

实测弹丸飞行速度 v_r 如下:

652.9757	644.2016	635.4464	627.0872	618.8109
610.3392	602.2492	594.5349	586.8960	579.4882
572.0804	565.0996	557.9661	551.2083	544.5161
538.0422	531.5992	525.3740	519.2748	513.2719
507.3897	501.6705	495.9301	490.4462	484.9349
479.6691	474.3199	469.1093	464.0607	459.0376
454.1041	449.2432	444.4515	439.6902	435.0269
430.4870	426.0405	421.5356	417.1813	412.8641
408.7190	404.4716	400.4320	396.3070	392.3452
388.3574	384.5102	380.7192	376.9328	373.1922
369.5753	365.9011	362.3417	358.8414	355.2994
351.8651	348.4608	345.0592	341.7309	338.4507
335.2063	331.9882	328.8130	325.6838	322.6044
319.5674	316.5649	313.5905	310.6943	307.7371
304.9160	302.0498	299.2961	296.4955	293.7404
291.0726	288.3348	285.7450	283.1665	280.6173
278.1360	275.9500	273.6631	271.5456	269.4207
267.2413	265.2183	263.2231	261.2731	259.3871
257.4787	255.6622	253.8853	252.1319	250.3103
248.6151	246.9184	245.2147	243.5340	241.9693
240.3281				

第八章 迭代学习控制的回顾与展望

8.1 研究现状

本节从系统正则性、学习律、初始条件问题、稳定性与鲁棒性、分析手段五个方面,回顾 1984 年以来迭代学习控制理论中已取得的主要结果。

1. 系统正则性

考虑输出通道中含控制直接传输项的系统

$$\dot{\mathbf{x}}_k(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_k(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}_k(t)$$

$$\mathbf{y}_k(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}_k(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}_k(t)$$

或

$$\dot{\mathbf{x}}_k(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k(t)) + \mathbf{B}(\mathbf{x}_k(t))\mathbf{u}_k(t)$$

$$\mathbf{y}_k(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}_k(t)) + \mathbf{D}(\mathbf{x}_k(t))\mathbf{u}_k(t)$$

或

$$\dot{\mathbf{x}}_k(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k(t), \mathbf{u}_k(t))$$

$$\mathbf{y}_k(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}_k(t), \mathbf{u}_k(t))$$

正则系统是指系统矩阵 \mathbf{D} 行满秩或列满秩的系统;非正则系统包括两种情形:完全非正则系统与部分非正则系统^[19-29]。某学习律中采用输出误差的导数信号或高阶导数信号,可由系统的正则性来解释。通常, r 阶非正则系统可采用输出误差的 r 阶导数信号构造学习律。

由于所采用的证明手段的限制,许多文献仅讨论具有特定正则性的系统。因此,所获得的结果也仅适用于那些具有特定正则性的系统。比较常见的是一阶完全非正则系统

$$\dot{\mathbf{x}}_k(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_k(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}_k(t)$$

$$\mathbf{y}_k(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}_k(t)$$

或

$$\dot{\mathbf{x}}_k(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k(t)) + \mathbf{B}(\mathbf{x}_k(t))\mathbf{u}_k(t)$$

$$\mathbf{y}_k(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}_k(t))$$

或

$$\dot{\mathbf{x}}_k(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k(t), \mathbf{u}_k(t))$$

$$\mathbf{y}_k(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}_k(t))$$

目前已有大量文章讨论机器人迭代学习控制。除刚性关节机器人外,还有弹性关节机器人,终端受限机器人等。典型的刚性关节机器人、弹性关节机器人的动力学特性均为二阶完全非正则的。Wang 讨论终端受限机器人^[42,47]

$$\lambda = \mathbf{G}_2(\mathbf{z})\mathbf{m} - \mathbf{G}_1(\mathbf{z})\mathbf{f} + \mathbf{h}(\mathbf{z}) + \mathbf{w}_1(\mathbf{z}, t)$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{g}_2(\mathbf{z}, t) + \mathbf{B}_2(\mathbf{z})\mathbf{m} + \mathbf{w}_2(\mathbf{z}, t)$$

其中以 \mathbf{m} 实现 \mathbf{z} 轨迹跟踪,以 \mathbf{f} 实现 λ 力跟踪。它相当于两个具有不同正则性的控制系统。

2. 学习律

(1) PID 型学习律

Arimoto 和他的合作者首先提出 D 型学习律^[2,3]

$$\mathbf{u}_{k+1}(t) = \mathbf{u}_k(t) + \mathbf{\Gamma}\dot{\mathbf{e}}_k(t)$$

他们又相继提出 PD 型、PID 型学习律^[7,38]

$$\mathbf{u}_{k+1}(t) = \mathbf{u}_k(t) + (\mathbf{\Phi} + \mathbf{\Gamma} \frac{d}{dt})\mathbf{e}_k(t)$$

$$\mathbf{u}_{k+1}(t) = \mathbf{u}_k(t) + (\mathbf{\Gamma} \frac{d}{dt} + \mathbf{\Phi} + \mathbf{\Psi} \int dt)\mathbf{e}_k(t)$$

同时, P 型、PI 型学习律也引起关注

$$\mathbf{u}_{k+1}(t) = \mathbf{u}_k(t) + \mathbf{\Phi}\mathbf{e}_k(t)$$

$$\mathbf{u}_{k+1}(t) = \mathbf{u}_k(t) + (\mathbf{\Phi} + \mathbf{\Psi} \int dt)\mathbf{e}_k(t)$$

对于部分非正则 LTI 系统,Porter 和 Mohamed 提出学习律^[21]

$$\mathbf{u}_{k+1}(t) = \mathbf{u}_k(t) + \sum_{i=1}^{l+1} \mathbf{K}_i \mathbf{e}_k^{(i)}(t)$$

对于完全非正则系统, Jang、Choi 和 Ahn 提出学习律^[27]

$$\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{v}(t))$$

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{u}_{ff}(t) + \mathbf{u}_{fb}(t)$$

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{a}(\mathbf{z}(t)) + \mathbf{B}(\mathbf{z}(t))\mathbf{e}(t)$$

$$\mathbf{u}_{fb}(t) = \mathbf{c}(\mathbf{z}(t)) + \mathbf{D}(\mathbf{z}(t))\mathbf{e}(t)$$

$$\mathbf{u}_{ff}^{k+1}(t) = \mathbf{u}^k(t) + \mathbf{S}^k(t) \begin{bmatrix} e_1^{k(r_1)}(t) \\ \vdots \\ e_m^{k(r_m)}(t) \end{bmatrix}$$

(2) 最优学习律

对于 LTI 离散系统, Togai 和 Yamano 提出学习律^[88]

$$\mathbf{u}_{i+1}(k) = \mathbf{u}_i(k) + \mathbf{G}\mathbf{e}_i(k+1)$$

式中 \mathbf{G} 通过最小化下述指标函数确定

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{e}_i^T(k+1)\mathbf{e}_i(k+1)$$

应用 Newton-Raphson 法, 则

$$\mathbf{G}_i = - \frac{\|\mathbf{e}_i(k+1)\|^2}{\|\mathbf{B}^T \mathbf{e}_i(k+1)\|^2} \mathbf{B}^T$$

式中 \mathbf{B} 为状态方程中控制项的系数矩阵, 这时 \mathbf{G} 为时变的。应用 Gauss-Newton 法

$$\mathbf{G} = -(\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T$$

应用最速下降法

$$\mathbf{G} = -\mathbf{K}\mathbf{B}^T$$

Amann 等^[90]讨论的指标函数是

$$J_{k+1} = \sum_{t=1}^N \mathbf{e}_{k+1}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{e}_{k+1}(t) + \sum_{t=1}^{N-1} [\mathbf{u}_{k+1}(t) - \mathbf{u}_k(t)]^T \mathbf{P}(t) [\mathbf{u}_{k+1}(t) - \mathbf{u}_k(t)]$$

式中加权矩阵 $\mathbf{Q}(t)$ 和 $\mathbf{R}(t)$ 是对称正定的; $\mathbf{e} = \mathbf{r} - \mathbf{y}$,

$$y = y_0 + Gu$$

G 是 Toeplitz 矩阵

$$G = \begin{bmatrix} CB \\ CAB & CB \\ \vdots & \vdots \\ CA^{N-1}B & CA^{N-2}B & \cdots & CB \end{bmatrix}$$

第 $k+1$ 次迭代时的最优控制, 可求解下述方程得到

$$\frac{1}{2} \frac{\partial J_{k+1}}{\partial u_{k+1}} = -G^T Q e_{k+1} + R(u_{k+1} - u_k) = 0$$

因此, 第 $k+1$ 次迭代时的最优控制为

$$u_{k+1} = u_k + R^{-1} G^T Q e_{k+1}$$

Phan 和 Juang 也讨论基于二次指标函数的最优学习律^[92]。

(3) 模型算法学习律

Hauser 给出模型算法学习律^[14]

$$\begin{aligned} u_{i+1}(t) = & u_i(t) + L(x_d(t), t)[\dot{x}_d(t) - \tilde{f}(x_d(t), t)] \\ & - L(x_i(t), t)[\dot{x}_i(t) - \tilde{f}(x_i(t), t)] \end{aligned}$$

式中 $L(x, t) = [\tilde{B}(x, t)^T \tilde{B}(x, t)]^{-1} \tilde{B}^T(x, t)$ 。这种学习律要求全状态输出。Oh 等利用 LTV 连续系统的逆模型给出模型算法学习律^[15]

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \tilde{B}_k^+(t)[\dot{x}_k(t) - \tilde{A}_k(t)e_k(t)]$$

式中 $\tilde{B}^+(t) = [\tilde{B}^T(t)\tilde{B}(t)]^{-1}\tilde{B}^T(t)$ 。Bien 和他的合作者提出非线性模型算法学习律^[17]

$$\begin{aligned} u_{k+1}(t) = & \tilde{B}^+(x_d(t), t)(\dot{\tilde{x}}_{k+1}(t) - \tilde{f}(\tilde{x}_{k+1}(t), t)) \\ \tilde{x}_{k+1}(t) = & \tilde{x}_k(t) + \Gamma e_k(t) \end{aligned}$$

对于离散时间系统, Hwang 等提出模型算法学习律^[18]

$$\begin{aligned} u_{k+1}(i) = & u_k(i) + [\tilde{B}_k^+(t), -\tilde{B}_k^+(t)\tilde{A}_k(i)] \times \\ & [e_k^T(i+1), -e_k^T(i)]^T \end{aligned}$$

以及

$$u_{k+1}(i) = u_k(i) + \tilde{B}^+(e_k(i), i)[e_k(i+1) - \tilde{f}(e_k(i), i)]$$

(4) 滤波器型学习律

Craig 首先提出滤波器型学习律^[4]

$$\mathbf{u}_{k+1}(t) = \mathbf{u}_k(t) + \mathbf{p}(t) * (\mathbf{y}_d(t) - \mathbf{y}_k(t))$$

式中 $\mathbf{p}(t)$ 为一线性滤波器的脉冲响应函数, $*$ 表示卷积运算。

Sugie 和 Ono 也提出一种滤波型器学习律^[22]

$$\dot{\mathbf{v}}_k(t) = \mathbf{A}_c(t) \mathbf{v}_k(t) + \mathbf{B}_c(t) \mathbf{e}_k(t)$$

$$\mathbf{w}_k(t) = \mathbf{C}_c(t) \mathbf{v}_k(t) + \mathbf{D}_c(t) \mathbf{e}_k(t)$$

$$\mathbf{u}_{k+1}(t) = \mathbf{u}_k(t) + \mathbf{w}_k(t)$$

其中滤波器是线性时变的。

(5) 模型参考学习律

取参考模型为

$$\dot{\mathbf{x}}_d - \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_m(\mathbf{x}_d - \mathbf{x}) + \mathbf{B}_m \mathbf{r}$$

为使

$$\mathbf{w}_k = (\dot{\mathbf{x}}_d - \dot{\mathbf{x}}_k) - \mathbf{A}_m(\mathbf{x}_d - \mathbf{x}_k) - \mathbf{B}_m \mathbf{r} \rightarrow 0$$

Cheah 和 Wang 构造学习律^[51]

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{K}_c(\mathbf{x}_d - \mathbf{x}_k) + \mathbf{K}_y \mathbf{y}_k + \mathbf{m}_k$$

$$\mathbf{m}_{k+1} = \mathbf{m}_k + \beta \mathbf{K}_c(\mathbf{x}_d - \mathbf{x}_k) + \beta \mathbf{K}_y \mathbf{y}_k$$

$$\dot{\mathbf{y}}_k + \alpha \mathbf{y}_k - \mathbf{L}_x(\mathbf{x}_d - \mathbf{x}_k) + \mathbf{L}_r \mathbf{r}$$

(6) 高阶学习律

应用历史迭代数据, 吴东南等提出高阶学习律^[31]

$$\mathbf{u}_k = \sum_{i=1}^p (\alpha_i \mathbf{u}_{k-i} + \mathbf{h}_i * \mathbf{e}_{k-i})$$

式中 α_i 为常数, $\mathbf{h}_i * \mathbf{e}_{k-i}$ 为卷积。

Bien 和 Huh 也构造了高阶学习律^[32]

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{k+1}(t) = & \mathbf{P}_1 \mathbf{u}_k(t) + \cdots + \mathbf{P}_N \mathbf{u}_{k-N+1}(t) + \\ & \mathbf{Q}_1 \mathbf{e}_k(t) + \cdots + \mathbf{Q}_N \mathbf{e}_{k-N+1}(t) \end{aligned}$$

式中 $\mathbf{P}_i, \mathbf{Q}_i, i = 1, \cdots, N$ 为增益矩阵。

(7) 遗忘因子学习律

Heinzinger 等提出带遗忘因子的 D 型学习律^[39]

$$u_{i+1}(t) = (1 - \gamma)u_i(t) + \gamma u_0(t) + L(y_i(t), t) \times [\dot{y}_d(t) - \dot{y}_i(t)]$$

式中 $0 \leq \gamma < 1$ 是遗忘因子。

Arimoto 等提出带遗忘因子的 P 型学习律^[56,57]

$$u_{k+1}(t) = (1 - \alpha)u_k(t) + \alpha u_0(t) + \Phi[y_d(t) - y_k(t)]$$

式中 $\alpha > 0$ 为遗忘因子。同时, 给出选择学习算法。参考文献 [53] 提出描述选择学习算法的学习律

$$u_{k+1}(t) = (1 - \alpha)u_k(t) + \alpha u_{k-j}(t) + \Phi e_k(t)$$

(8) 闭环学习律与高增益反馈学习律

闭环学习律中使用当前迭代时的输出误差

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \Phi e_{k+1}(t)$$

其中, 增益不需取的足够大, 只要满足收敛性条件即可。而高增益反馈学习律中的增益需取的足够大。参考文献 [64] 讨论高增益反馈学习律。参考文献 [65] 讨论闭环学习律。对于机器人系统, Bondi 等提出学习律^[62]

$$u = m + Q - K\ddot{q} - L\dot{q} - Pq$$

式中 m 为学习控制分量, 以下标 i 表示迭代次数, 学习律为

$$m_i = m_{i-1} - (K\delta\ddot{q}_{i-1} + L\delta\dot{q}_{i-1} + P\delta q_{i-1})$$

$$K = \alpha\bar{K}, L = \alpha\bar{L}, P = \alpha\bar{P} \quad (\alpha > 0)$$

(9) 反馈-前馈迭代学习控制算法

反馈-前馈迭代学习控制算法有两种形式^[107,27], 一种是

$$u_k = u_{ff,k} + u_{fb,k}$$

$$u_{fb,k} = h_{fb}(e_k)$$

$$u_{ff,k+1} = u_{ff,k} + h_{ff}(e_k)$$

另一种是

$$u_k = u_{ff,k} + u_{fb,k}$$

$$u_{fb,k} = h_{fb}(e_k)$$

$$u_{ff,k+1} = u_k + h_{ff}(e_k)$$

(10) 基于脉冲响应的学习律

Ishihara 等基于系统的脉冲响应提出学习律^[82]

$$u_{i+1}(t) = u_i(t) + \sum_{s=0}^{T-1} c(s) e_i(t + d - s)$$

式中 d 为系统的相对度, $c(s)$ 为增益系数。

3. 初始条件问题

迭代学习控制需要初始定位操作。其算法收敛性对于由初始定位操作设置的初始点提出了一定的要求,即所谓的初始条件。大多数参考文献假定在每次迭代时系统的初态位于期望轨迹对应的初态上,即初始条件(1)

$$\mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}_d(0) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

从实际操作的角度看,初始条件(1)要求已知期望初态和精确测得每次迭代时的初态,并使二者重合。在非全状态输出的情形下,不可能精确测得每一次迭代时的初态,又由于实际重复定位精确度的限制,故实现初始条件(1)较为困难。

Arimoto 及其合作者在讨论一阶完全非正则系统时,给出如下初始条件^[2,3]

$$\mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}^0 \quad \mathbf{y}_k(0) = \mathbf{y}_d(0) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

这里 \mathbf{x}^0 为任一初态。该条件又可写成

$$\mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}^0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\mathbf{y}_0(0) = \mathbf{y}_d(0)$$

Sugie 和 Ono 提出下述初始条件(2)^[22]

$$\mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}^0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

这里 \mathbf{x}^0 为任一初态。值得说明的是, Sugie 和 One 讨论的是正则系统。这时,初始条件(1)和(2)是等价的。显然,对于非正则系统,初始条件(2)比初始条件(1)更容易实现,因为它只要求在每一次迭代时将初态固定于一点即可。

还有一种带有初态偏移的初始条件。任雪梅和高为炳给出初始条件^[72]

$$\mathbf{x}_{k+1}(0) = \mathbf{x}_k(0) + \mathbf{B}\mathbf{L}\mathbf{e}_k(0) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Porter 和 Mohamed 在讨论部分非正则 LTI 连续系统时,给出初始条件^[21]

$$\mathbf{x}_{k+1}(0) = \mathbf{x}_k(0) + \sum_{j=2}^{l+1} \sum_{i=j}^{l+1} \mathbf{A}^{i-j} \mathbf{B} \mathbf{K} \mathbf{e}_k^{-1}(0)$$

从已发表的参考文献看,迭代学习控制系统收敛性所要求的初始条件与其系统正则性和学习律有密切关系。因此,对于不同正则性的系统和学习律需要逐一考察其初始条件。

4. 稳定性与鲁棒性

实际的重复定位操作会导致迭代学习控制系统存在初态偏移。如果这种偏移是随机性的,那么初始条件(1)和初始条件(2)都不能成立。另外,不具有可重复性的状态扰动和量测噪声也使得系统动力学特性变的不完全可重复。这样,在理想的情况下被证明是收敛的系统不能保证在非理想情况下也是收敛的。迭代学习控制系统的稳定性与鲁棒性问题最早是由 Arimoto 及其合作者提出的^[38]。稳定性问题讨论初态偏移对系统跟踪性能的影响。而鲁棒性问题则是比稳定性问题更广泛的一类问题,它不仅讨论初态偏移,而且也讨论状态扰动、量测噪声、输入扰动、期望轨迹变动以及学习区间偏移等各种干扰对系统跟踪性能的影响。因此,鲁棒性是指系统初态偏移稳定性和干扰抑制有界性的不变性质。

参考文献[38]的讨论采用了线性化手段。Heinzinger 等未采用线性化手段,首先深入地针对带遗忘因子的 D 型学习律分析了非线性系统 $\{f(x), B(x), g(x)\}$ 的鲁棒性^[39],其中只讨论了两种干扰:初态偏移和状态扰动。其结果指出:当初态偏移和状态扰动有界时,控制误差 $u_d - u_k$ 、状态误差 $x_d - x_k$ 以及输出误差 e_k 渐近有界,即由算法给出的跟踪轨迹线会收敛到期望轨迹的某个邻域内。并且,该邻域大小是关于两种干扰上界的连续函数;当干扰不存在或被消除时,该邻域宽度为零(即算法收敛)。参考文献[52]仍然讨论这种带遗忘因子的 D 型学习律,得到了同样的结果;其干扰包括初态偏移、状态扰动、量测噪声以及期望轨迹变动。应该说明的是,Heinzinger 等^[39]还给出了一个 P 型学习算法是不

鲁棒的例子。考虑下面的线性机械系统

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + h(q) = u$$

以 \dot{q} 作为输出, 它的状态空间表达式为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ -\frac{1}{m}(h(q) + c\dot{q}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u$$

$$\mathbf{y} = [0 \quad 1] \mathbf{x}$$

这里 $\mathbf{x} = (q, \dot{q})^T$ 。设期望轨迹 $\mathbf{x}_d \equiv (0, 0)^T$ 。采用 P 型学习律

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + L(q_k(t), \dot{q}_k(t))[\dot{q}_d(t) - \dot{q}_k(t)]$$

设 $\mathbf{x}_k(0) = (0, v)^T$, $u_0(t) \equiv 0$ 。那么

$$u_1(0) = 0 - L(0, v)v$$

$$u_2(0) = -L(0, v)v - L(0, v)v$$

...

$$u_n(0) = -nL(0, v)v$$

因此, $\{u_k(0)\}$ 为一发散序列。

Arimoto 等^[56, 57]讨论 n 关节机器人动力学特性

$$(\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}(\mathbf{q}))\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{B}_0 + \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}))\dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{u}$$

其中 $\mathbf{K} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}(\mathbf{q})) \dot{\mathbf{q}}$ 。通过在 P 型学习律中引入遗忘因子, 证明了带遗忘因子的 P 型学习律的鲁棒性。其中讨论了三种干扰: 初态偏移、状态扰动和测量噪声。

Wang 等进一步将迭代学习控制用于提高终端受限机器人、弹性关节机器人的跟踪性能^[47, 48]。

Saab 将参考文献 [56, 57] 的鲁棒性结果推广到非线性系统 $\{f(\mathbf{x}), \mathbf{B}(\mathbf{x}), \mathbf{C}\}$ ^[58]。其结果指出: 当初态偏移、状态扰动和量测噪声有界时, 带遗忘因子的 P 型迭代学习控制使得控制、状态和输出误差一致有界; 当各种干扰消除时, 系统输出一致收敛于期望轨迹。

Chien 和 Liu 给出了更为一般的非线性系统 $\{f(\mathbf{x}, t), \mathbf{B}(\mathbf{x},$

$t), g(x, t)|$ 的鲁棒性结果^[59, 60]。

由鲁棒性分析知, 只有当系统初态满足条件(1), 状态扰动和量测噪声被消除时, 才能保证算法收敛性。实际上, 算法收敛性所要求的初始条件和干扰条件是可以放松的。参考文献[20]证明了存在周期状态扰动时 D 型学习律的收敛性。我们称初态不满足初始条件(1)以及扰动不为零情形下收敛的迭代学习控制系统是鲁棒收敛的。参考文献[55]和参考文献[61]分别讨论了存在周期状态扰动和输入扰动时的算法收敛性。

5. 分析手段

已发表的迭代学习控制系统的收敛性分析大多是在 λ 范数意义下给出的, 即, 对于某充分大的 λ , 依 λ 范数的单调性成立

$$\|e_{k+1}\|_{\lambda} \leq \rho \|e_k\|_{\lambda}$$

这里 $\rho \in [0, 1)$, 它意味着

$$\sup_{t \in [0, T]} \{e^{-\lambda t} \|e_k(t)\|\} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

由于

$$\sup_{t \in [0, T]} \|e_k(t)\| \leq e^{\lambda T} \|e_k\|_{\lambda}$$

故依 λ 范数的收敛性蕴涵依 \mathbf{R}^m 上 $(e_k(t) \in \mathbf{R}^m)$ 任意范数的收敛性。但是, 输出误差依 λ 范数的单调性并不能保证依 \mathbf{R}^m 上其它范数的单调性^[126]。

Padieu 和 Su 应用 H_{∞} 方法分析 LTI 系统迭代学习控制的收敛性^[63]。给出了迭代学习控制算法 L_1 收敛和 L_2 收敛的充分条件。Owens 针对 LTI 系统分析了高增益反馈学习律的 L_2 收敛性^[64]。Amann 等基于二次指标函数构造最优学习律, 并证明输出误差依范数收敛。Ishihara 等基于系统的脉冲响应构造学习律, 证明了输出误差沿迭代轴的单调衰减性质^[82]。

Kuc 等提出适应学习控制, 给出了一种分析算法收敛性的方法^[106, 110]: 构造一正定函数, 它与系统参量(状态误差, 控制误差等)有关, 通过证明该函数沿迭代轴的单调递减性质以证明算法的收敛性。Qu 等基于 Lyapunov 直接法分析了机器人迭代学习控制

系统的收敛性^[117,118]。

值得说明的是, Arimoto 等基于无源分析证明了刚性关节机器人、终端受限机器人迭代学习控制的一致有界性和收敛性^[56,57,44]。

对于 LTI 离散时间系统, Geng 以 2-D 系统统一描述迭代学习控制沿实时轴和迭代轴两个方向的运动, 并应用这种 2-D 系统描述, 给出了以矩阵秩表达的收敛条件^[94]。

8.2 研究方向

对于具有重复运动(运行)性质的系统来说, 迭代学习控制概念的提出是非常自然的、直接的。Arimoto 及其合作者的开创性工作导致迭代学习控制的产生, 至今已有 15 个年头。从上面的综述可以看出, 人们一方面努力完善其控制理论, 另一方面致力于将已有的结果推广到更广泛类的动力学系统, 在更广泛的工程背景下尝试这种技术。同时, 解决应用于各种工程场合时可能遇到的问题, 以增强人们使用这种技术的信心。然而, 展望未来, 迭代学习控制领域仍有许多课题有待于进一步深入研究。

1. 完全非正则系统与部分非正则系统

对于高阶非正则系统的研究有助于加深人们对于迭代学习控制的系统认识。目前, 部分非正则系统迭代学习控制的研究结果集中于 LTI 系统。对于非线性系统, 特别是高阶部分非正则系统, 尚未见报道。完全非正则系统的迭代学习控制仍需关注, 例如含状态时滞的动态系统。

2. 不使用导数的学习律或使用低阶导数的学习律

对于非正则系统, 通常称不使用输出误差信号导数的学习律为 P 型学习律。例如, 以关节角速度信号作为输出的刚性关节机器人属二阶完全非正则系统。这时, 使用关节角速度信号的学习律为 P 型学习律。对于 r 阶完全非正则系统, 使用低于 $r-1$ 阶(不包括 $r-1$ 阶)输出误差信号导数的学习律未见报道。例如,

对于刚性关节机器人系统,使用关节角位移信号的学习律。

3. 系统因果性

因果系统允许使用高阶开环学习律、闭环学习律以及高阶开环学习律与闭环学习律的集成算法(即开闭环配合的学习律)。高阶开环学习律能够加快敛速;闭环学习律亦能够加快敛速,同时也能够镇定系统(采用高增益反馈的形式)。目前,对于非正则系统,高阶P型学习律的收敛性分析尚未见报道。对于采用闭环学习律的非正则系统,其初始条件问题也值得关注。

4. 初始条件问题

采用PD型学习律、模型参考学习律及带有初始误差修正的学习律,其算法收敛性要求初始条件(2)。采用带有初始误差修正的学习律,其值得研究的问题是控制信号初始段的幅值较大。对于一个迭代学习控制系统;要求初始条件(2),而不是初始条件(1),其工程价值需结合具体控制任务予以说明。显然,最宽的初始条件是不需要初始定位操作。许多学者指出,应用于连续操作情形(不需初始定位操作)的迭代学习控制等同于重复控制。然而,重复控制对系统稳定性有要求,经典提法的迭代学习控制对系统稳定性没有要求。

5. 鲁棒性与鲁棒收敛性

迭代学习控制算法的停止条件为

$$\sup_{t \in [0, T]} \|e_k(t)\| < \varepsilon$$

ε 为给定精度。鲁棒迭代学习控制可保证,当 k 足够大时

$$\sup_{t \in [0, T]} \|e_k(t)\| \leq \alpha \Delta$$

式中 Δ 为干扰上界。当干扰被抑制得足够小

$$\Delta < \frac{\varepsilon}{\alpha}$$

停止条件成立。鲁棒迭代学习控制可使得,当 $\Delta \rightarrow 0$ 时, $\sup_{t \in [0, T]} \|e_k(t)\| \rightarrow 0$ 。但工程实现时,并不要求做到一致收敛性。因此,为了指导控制器的设计,应给出更准确、更明确的算法收敛性条件

(包括增益条件、初态条件和干扰条件),以及这种条件下收敛性的鲁棒程度。

6. 直接学习

常规的迭代学习控制系统跟踪一新的轨迹时,或以原有控制输入信号作为初始控制输入信号,或刷新原有存储器,重新进行学习。考虑到迭代学习控制的效率,以下两种情形控制信号的产生值得研究:期望轨迹具有相同形状和数值但时间标度不同的情形;期望轨迹具有相同形状和时间标度但数值不同的情形。

7. 基于数值迭代解法的控制器设计

线性方程、非线性方程的迭代解法,对于迭代学习控制器设计具有指导意义。模型算法学习律为非优化学习控制算法,基于优化算法的学习律值的重视。特别是最优控制的数值迭代解法,对于迭代学习控制器设计亦具有指导意义。例如,构造学习律,以学习某最优控制信号。

8. 基于系统响应的控制器设计

已有文献基于系统脉冲响应设计控制器,尚未见基于系统阶跃响应的控制器设计方法。

9. 基于 Lyapunov 直接法的分析与设计方法

基于 Lyapunov 直接法的迭代学习控制系统分析与设计方法不同于基于 Bellman-Gronwall 引理的分析方法。它不要求初始定位,学习区间亦可变。

10. 迭代学习控制的 2-D 系统理论

2-D 系统理论本身十分丰富,但目前迭代学习控制的 2-D 系统理论所获得的结果仅是在应用其渐稳判据下获得的。

11. 采样迭代学习控制系统

连续系统迭代学习控制的实现需要采用计算机控制技术。目前,采样迭代学习控制理论十分薄弱。例如,闭环 D 型学习律的采样形式为

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \Gamma(e_{k+1}(t+1) - e_{k+1}(t))$$

显然,采用这种学习律的系统是非因果的。

12. 终态制导

基于迭代学习控制的终态制导技术,可用于提高点位系统的定位精度。对于存在非线性因素的点位系统,这种 model-free 的系统综合方法可提高其跟踪性能。

13. 迭代学习辨识

迭代学习控制考虑输出收敛性。与它相比较,迭代学习辨识考虑输入收敛性。迭代学习辨识理论中存在可辨识问题,初始条件问题也显得尤为重要。

由于仅考虑确定性情形下的收敛性,在实际场合中,迭代学习控制会受到严峻考验。通常应用滤波器技术来解决。除机器人系统外,将迭代学习控制技术应用于具有某种重复运动(运行)性质的其它工程应用领域,其目的在于提高系统的跟踪性能,但更重要的是,扩大了迭代学习控制的适用领域。迭代学习辨识技术的提出也需要更广泛的应用实例予以支持。

附录 迭代学习控制理论的数学基础

A.1 Bellman-Gronwall 引理

引理 A.1.1 设 $x(t)$, $c(t)$ 和 $a(t)$ 是 $[0, T]$ 上的实值连续函数, 且 $a(t)$ 在 $[0, T]$ 上非负, 如果

$$x(t) \leq c(t) + \int_0^t a(\tau)x(\tau)d\tau \quad (t \in [0, T]) \quad (\text{A.1.1})$$

那么

$$x(t) \leq c(t) + \int_0^t a(\tau)c(\tau)e^{\int_\tau^t a(\sigma)d\sigma}d\tau \quad (t \in [0, T]) \quad (\text{A.1.2})$$

另外, 如果 $c(t)$ 在 $[0, T]$ 上又是单调非减的, 那么

$$x(t) \leq c(t)e^{\int_0^t a(\tau)d\tau} \quad (t \in [0, T]) \quad (\text{A.1.3})$$

证明 记 $r(t) = \int_0^t a(\tau)x(\tau)d\tau$,

那么

$$\dot{r}(t) = a(t)x(t) \leq a(t)c(t) + a(t)r(t)$$

以及

$$\frac{d}{d\tau} [r(\tau)e^{-\int_0^\tau a(\sigma)d\sigma}] \leq a(\tau)c(\tau)e^{-\int_0^\tau a(\sigma)d\sigma}$$

两端由 0 到 t 积分, 并注意到 $r(0)=0$, 有

$$r(t) \leq \int_0^t a(\tau)c(\tau)e^{\int_\tau^t a(\sigma)d\sigma}d\tau$$

将其代入式(A.1.1), 可证得式(A.1.2)。又由于

$$\frac{d}{d\tau} e^{\int_\tau^t a(\sigma)d\sigma} = -a(\tau)e^{\int_\tau^t a(\sigma)d\sigma}$$

两端积分可得

$$\int_0^t a(\tau) e^{\int_{\tau}^t a(\sigma) d\sigma} d\tau = e^{\int_0^t a(\tau) d\tau} - 1$$

将其代入式(A.1.2), 考虑到 $c(t)$ 在 $[0, T]$ 上单调非减, 可得

$$x(t) \leq c(t) + c(t) \int_0^t a(\tau) e^{\int_{\tau}^t a(\sigma) d\sigma} d\tau \leq c(t) e^{\int_0^t a(\tau) d\tau}$$

证得式(A.1.3)成立。

引理 A.1.2 设 $x(t), y(t)$ 是 $[0, T]$ 上的实值连续函数, $a \geq 0$, 若

$$x(t) \leq c + \int_0^t (ax(\tau) + by(\tau)) d\tau \quad (\text{A.1.4})$$

则

$$x(t) \leq c e^{at} + \int_0^t e^{a(t-\tau)} by(\tau) d\tau \quad (\text{A.1.5})$$

证明 记 $r(t) = \int_0^t (ax(\tau) + by(\tau)) d\tau$, 有

$$\dot{r}(t) \leq ar(t) + ac + by(t)$$

它可写成

$$\dot{r}(t) = ar(t) + ac + by(t) - s(t)$$

其中 $s(t) \geq 0, t \in [0, T]$, 它的解为

$$\begin{aligned} r(t) &= \int_0^t e^{a(t-\tau)} (ac + by(\tau) - s(\tau)) d\tau \leq \\ &\int_0^t e^{a(t-\tau)} (ac + by(\tau)) d\tau = \\ &c(e^{at} - 1) + \int_0^t e^{a(t-\tau)} by(\tau) d\tau \end{aligned}$$

将其代入式(A.1.4)可得式(A.1.5)。

A.2 差分不等式

引理 A.2.1 设非负实序列 $\{a_k\}$ 满足如下差分不等式

$$a_k \leq \rho_1 a_{k-1} + \rho_2 a_{k-2} + \cdots + \rho_N a_{k-N} \quad (\text{A.2.1})$$

$$(k = N + 1, N + 2, \dots)$$

它的初始条件为 $a_i (i = 1, 2, \dots, N)$; $\rho_i \geq 0 (i = 1, 2, \dots, N)$ 。如果实系数多项式

$$P(z) = z^N - \rho_1 z^{N-1} - \dots - \rho_{N-1} z - \rho_N \quad (\text{A.2.2})$$

的零点全部位于单位圆内, 那么, $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ 。

证明 定义序列 $\{b_k\}$ 满足

$$b_k = \rho_1 b_{k-1} + \rho_2 b_{k-2} + \dots + \rho_N b_{k-N} \quad (\text{A.2.3})$$

$$(k = N + 1, N + 2, \dots)$$

它的初始条件为 $b_i = a_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 。由 $\rho_i \geq 0 (i = 1, 2, \dots, N)$ 知

$$a_k \leq b_k \quad (k = N + 1, N + 2, \dots) \quad (\text{A.2.4})$$

因为式(A.2.2)表示的多项式 $P(z)$ 的零点全部位于单位圆内, (A.2.3)表示的离散系统渐近稳定, 所以 $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0$ 。由式(A.2.4)知, $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$, 证毕。

下述引理是判断式(A.2.1)表示的实系数多项式 $P(z)$ 的零点全部位于单位圆内的一个充分条件。

引理 A.2.2 对于实系数多项式(A.2.2), 如果 $\rho_i \geq 0 (i = 1, 2, \dots, N)$, 且

$$\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_N < 1 \quad (\text{A.2.5})$$

那么, $P(z)$ 的零点全部位于单位圆内。

证明 用反证法。设存在一个根 γ 位于单位圆上或单位圆外。显然, $\gamma \neq 0, |\gamma| \geq 1$ 。将 γ 代入 $P(z)$ 得

$$\gamma = \rho_1 + \rho_2/\gamma + \dots + \rho_N/\gamma^{N-1}$$

两端取模

$$|\gamma| \leq \rho_1 + \rho_2/|\gamma| + \dots + \rho_N/|\gamma|^{N-1} \leq \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_N$$

因此, 由式(A.2.5)知, $|\gamma| < 1$, 与假设矛盾。引理得证。

引理 A.2.3 设实序列 $\{a_k\}$ 满足

$$pa_k + qa_{k-1} \leq d_k \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (\text{A.2.6a})$$

其中 $\{d_k\}$ 为给定的实扰动序列, 若

$$p > -q \geq 0$$

则

(1) $d_k \leq \bar{d} (\forall k)$ 蕴涵

$$\left. \begin{aligned} a_k &\leq a_0 + \frac{\bar{d}}{p+q}, \quad \forall k \\ \limsup_{k \rightarrow \infty} a_k &\leq \frac{\bar{d}}{p+q} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.2.6b})$$

(2) $\lim_{k \rightarrow \infty} d_k = d_\infty$ 蕴涵

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} a_k \leq \frac{d_\infty}{p+q} \quad (\text{A.2.6c})$$

证明

(1) 记 $\rho = -q/p$, $\varepsilon = \bar{d}/p$, 由式(A.2.6a)可知

$$a_k \leq \rho a_{k-1} + \varepsilon \quad (\text{A.2.7})$$

因此,

$$a_1 \leq \rho a_0 + \varepsilon$$

$$a_2 \leq \rho^2 a_0 + (1 + \rho)\varepsilon$$

...

$$a_k \leq \rho^k a_0 + \sum_{j=1}^k \rho^{k-j} \varepsilon =$$

$$\rho^k a_0 + \frac{1 - \rho^k}{1 - \rho} \varepsilon \quad (\text{A.2.8})$$

由 $0 \leq \rho < 1$ 知, 对于任意的 k

$$a_k \leq a_0 + \frac{\varepsilon}{1 - \rho}$$

当 $k \rightarrow \infty$ 时

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} a_k \leq \frac{\varepsilon}{1 - \rho}$$

证得式(A.2.6b)。

(2)作变换

$$s_k = a_k - \frac{d_\infty}{p+q}$$

$$t_k = \frac{d_k - d_\infty}{p}$$

并记 $\rho = -q/p$, 式(A.2.6a)可写成

$$s_k \leq \rho s_{k-1} + t_k \quad (\text{A.2.9})$$

对于任意的 k , 有

$$s_k \leq \sum_{j=1}^k \rho^{k-j} t_j + \rho^k s_0 \leq \frac{\sum_{j=1}^k \rho^{-j} |t_j| + |s_0|}{\rho^{-k}}$$

由 Stolz 定理知

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^k \rho^{-j} |t_j| + |s_0|}{\rho^{-k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\rho^{-(k+1)} |t_{k+1}|}{\rho^{-(k+1)} - \rho^{-k}} = 0$$

因此

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} s_k \leq 0$$

由 s_k 的定义, 便可证得式(A.2.6c)。

引理 A.2.4 设实序列 $\{a_k\}$ 满足差分不等式

$$a_k \leq \rho_1 a_{k-1} + \rho_2 a_{k-2} + \cdots + \rho_N a_{k-N} + d_k \quad (\text{A.2.10a})$$

$$(k = N+1, N+2, \cdots)$$

它的初始条件为 $a_i (i=1, 2, \cdots, N)$, $\{d_k\}$ 为给定实扰动序列, 若

$$\rho_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, N)$$

$$\rho = \sum_{i=1}^N \rho_i < 1$$

则

(1) $d_k \leq \bar{d}, (\forall k)$ 蕴涵

$$\left. \begin{aligned} a_k &\leq \max\{a_1, a_2, \dots, a_N\} + \frac{\bar{d}}{1-\rho} \quad \forall k \geq N+1 \\ \limsup_{k \rightarrow \infty} a_k &\leq \frac{\bar{d}}{1-\rho} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.2.10b})$$

(2) $\lim_{k \rightarrow \infty} d_k = d_\infty$ 蕴涵

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} a_k \leq \frac{d_\infty}{1-\rho} \quad (\text{A.2.10c})$$

证明 (1) 选取 $a_{k_1} = \max\{a_{k-1}, a_{k-2}, \dots, a_{k-N}\}$, 有

$$a_k \leq \rho_1 a_{k-1} + \rho_2 a_{k-2} + \dots + \rho_N a_{k-N} + d_k \leq \rho a_{k_1} + \bar{d}$$

同样, 选取 $a_{k_2} = \max\{a_{k_1-1}, a_{k_1-2}, \dots, a_{k_1-N}\}$, 有

$$a_{k_1} \leq \rho a_{k_2} + \bar{d}$$

由以上两式可知

$$a_k \leq \rho^2 a_{k_2} + \rho \bar{d} + \bar{d}$$

一般, 可得到

$$a_k \leq \rho^m a_{k_m} + \rho^{m-1} \bar{d} + \rho^{m-2} \bar{d} + \dots + \rho \bar{d} + \bar{d} =$$

$$\rho^m a_{k_m} + \frac{1-\rho^m}{1-\rho} \bar{d}$$

式中, $k_m \leq N$, $[\frac{k-1}{N}] \leq m \leq k-N$. 进一步地, 记 $M = \max\{a_1, a_2, \dots, a_N\}$, 得

$$\begin{aligned} a_k &\leq \rho^m M + \frac{1-\rho^m}{1-\rho} \bar{d} \leq \\ &\rho^{[\frac{k-1}{N}]} M + \frac{1-\rho^k}{1-\rho} \bar{d} \end{aligned}$$

此即证得式(A.2.10b)。

(2) 定义

$$b_k = a_k - \frac{d_\infty}{1-\rho}$$

$$\epsilon_k = d_k - d_\infty$$

有

$$b_k \leq \rho_1 b_{k-1} + \rho_2 b_{k-2} + \cdots + \rho_N b_{k-N} + \varepsilon_k \\ (k = N+1, N+2, \cdots)$$

由于 d_k 的极限存在, 故对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 K , 当 $k > K$ 时, $|\varepsilon_k| \leq \varepsilon$, 且

$$b_k \leq \rho_1 b_{k-1} + \rho_2 b_{k-2} + \cdots + \rho_N b_{k-N} + \varepsilon$$

由(1)知, 对于 $k > K$

$$b_k \leq \rho^{[\frac{k-1}{N}]} M + \frac{1 - \rho^{k-N}}{1 - \rho} \varepsilon$$

由 ε 的任意性知

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} b_k \leq 0$$

此即证得式(A.2.10c)

A.3 向量函数的微分中值定理

设 $f(x)$ 是向量 $x = (x^1, \cdots, x^n)^T$ 的标量函数, 称

$$\frac{df}{dx} = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x^n} \right)$$

为 $f(x)$ 对向量 x 的导数, 记成 $f_x(x)$, 又若 $f(x) = (f_1(x), \cdots, f_m(x))^T$ 是向量 x 的向量函数, 则称

$$\frac{df}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx} \\ \vdots \\ \frac{df_m}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x^n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x^n} \end{bmatrix}$$

为 $f(x)$ 对向量 x 的导数, 也记成 $f_x(x)$ 。

引理 A.3.1 设 $f(x) = (f_1(x), \cdots, f_m(x))^T$ 的每一分量关于 $x = (x^1, \cdots, x^n)^T$ 是可微的, 则对任何 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, 存在 $\hat{x} = x_1 + \theta_i(x_2 - x_1)$ ($0 < \theta_i < 1$, $i = 1, 2, \cdots, m$) 使

$$f(x_1) - f(x_2) = \begin{bmatrix} \frac{df_1(\bar{x}_1)}{dx} \\ \cdots \\ \frac{df_m(\bar{x}_m)}{dx} \end{bmatrix} (x_1 - x_2) \\ \triangleq f_x(\bar{x})(x_1 - x_2)$$

证明 令 $g_i(t) = f_i(tx_1 + (1-t)x_2)$ ($0 \leq t \leq 1, i = 1, 2, \dots, m$), 则 $g_i(t)$ 在 $[0, 1]$ 上可导, 并且

$$g_i'(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x^j} (x_1^j - x_2^j) = \frac{df_i}{dx} (x_1 - x_2)$$

于是由 Lagrange 中值定理可知, 存在 $\tilde{t}_i \in (0, 1)$, 并令 $\tilde{x}_i = \tilde{t}_i x_1 + (1 - \tilde{t}_i)x_2$, 使

$$f_i(x_1) - f_i(x_2) = g_i(1) - g_i(0) = g_i'(\tilde{t}_i) = \\ \frac{df_i(\tilde{x}_i)}{dx} (x_1 - x_2) \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

从而有

$$f(x_1) - f(x_2) = \begin{bmatrix} \frac{df_1(\tilde{x}_1)}{dx} \\ \cdots \\ \frac{df_m(\tilde{x}_m)}{dx} \end{bmatrix} (x_1 - x_2)$$

证毕。

A.4 向量与矩阵的范数

n 维实向量空间 \mathbf{R}^n 由向量

$$x = (x^1, x^2, \dots, x^n)^T$$

构成, 其中分量 x^i ($i = 1, 2, \dots, n$) 为实数, T 表示转置。 \mathbf{R}^n 中的向量 x 的范数 $\|x\|: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 满足以下三个条件

- (1) 正定性: $\|x\| > 0, \forall x \in \mathbf{R}^n (x \neq 0); \|0\| = 0$
- (2) 齐次性: $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \forall \alpha \in \mathbf{R}$

(3)三角不等式: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

可以用长度的概念解释向量的范数。例如, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, 由条件(3)可知

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$$

所以

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$$

同理, 有

$$\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|x - y\|$$

结合两式, 即可推得

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

如果用 $-y$ 代替上式中的 y , 则有

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x + y\|$$

以上两式具有明确的几何意义, 它们表示任一三角形的两边长度之差不大于第三边的长度。

\mathbb{R}^n 上常见的范数是 l_p 范数 (也称 Holder 范数)

$$\|x\|_p = \left\{ \sum_{i=1}^n |x^i|^p \right\}^{1/p} \quad (\text{A.4.1})$$

这里, $1 \leq p < \infty$ 。它的极限情形为 l_∞ 范数 (或称最大范数)

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x^i| \quad (\text{A.4.2})$$

这是因为, 当 $x=0$ 时, 式(A.4.2)自然成立; 对于 $x \neq 0$

$$\left\{ \sum_{i=1}^n |x^i|^p \right\}^{1/p} = \max_{1 \leq i \leq n} |x^i| \cdot \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\frac{|x^i|}{\max_{1 \leq i \leq n} |x^i|} \right)^p \right\}^{1/p}$$

并且

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\frac{|x^i|}{\max_{1 \leq i \leq n} |x^i|} \right)^p \right\}^{1/p} = 1$$

这样就证明了式(A.4.2)成立。

当 $p=1, 2$ 时, 式(A.4.1)可以给出另外两种常用的向量范数 l_1 范数 (和范数)

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x^i| \quad (\text{A.4.3})$$

l_2 范数(Euclid 范数)

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \quad (\text{A.4.4})$$

对于上面给出的 l_∞ 、 l_1 、 l_2 范数, 可以验证它们满足向量范数的三个条件, 而要验证式(A.4.1) 是 \mathbf{R}^n 上的范数, 则需用到 Holder 不等式。容易看出, 当 $n=1$ 时,

$$\|\cdot\|_\infty = \|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_2 = |\cdot|$$

定义 A.4.1 对于给定的 \mathbf{R}^n 上的一种范数 $\|\cdot\|$, 称 \mathbf{R}^n 上的向量序列 $\{x_k\}$ 是收敛的, 如果存在 $x \in \mathbf{R}^n$, 使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x\| = 0$$

x 称为是 $\{x_k\}$ 的极限, 并记为

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$$

定义 A.4.2 称 \mathbf{R}^n 上的两种向量范数 $\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|'$ 是等价的, 如果存在正数 $b_1 > 0$, $b_2 > 0$, 对于一切 $x \in \mathbf{R}^n$, 恒有

$$b_2 \|x\| \leq \|x\|' \leq b_1 \|x\|$$

容易看出, 在等价的范数下考虑向量序列的收敛性问题时, 其结果是一致的。具体地讲, 对于等价的范数 $\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|'$, 如果向量序列 $\{x_k\}$ 在范数 $\|\cdot\|$ 下是收敛的, 且极限为 x , 则该序列在范数 $\|\cdot\|'$ 下仍然收敛, 并且有相同的极限 x 。这种性质在 \mathbf{R}^n 上可以推广到一般, 使得 \mathbf{R}^n 上向量序列的收敛性分析变得十分方便。

引理 A.4.1 \mathbf{R}^n 上任意两种向量范数是等价的。

特别是对于 l_∞ 、 l_1 、 l_2 范数, 容易验证, 对任意的 $x \in \mathbf{R}^n$, 有

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|x\|_2 \leq \|x\|_\infty \leq \|x\|_2$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$$

引理 A.4.2 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x \Leftrightarrow \|x_k - x\| \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$, 其中

$\|\cdot\|$ 为向量的任一种范数。

证明 显然, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x \Leftrightarrow \|x_k - x\|_{\infty} \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$, 而对于 \mathbf{R}^n 上任一种范数 $\|\cdot\|$, 由引理 A.4.1 知, 存在常数 $b_1, b_2 > 0$ 使

$$b_2 \|x_k - x\|_{\infty} \leq \|x_k - x\| \leq b_1 \|x_k - x\|_{\infty}$$

于是有

$$\|x_k - x\|_{\infty} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \|x_k - x\| \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$$

引理 A.4.3 设 $\|\cdot\|$ 是 \mathbf{R}^n 上的任一范数, $x_k = (x_k^1, \dots, x_k^n)^T \in \mathbf{R}^n (k = 0, 1, 2, \dots)$, 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x\| = 0$ 当且仅当 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k^i = x^i (i = 1, 2, \dots, n)$ 。

证明 由引理 A.4.2 容易证明。

定义 A.4.1 中定义的收敛性又称为依范数收敛意义下的收敛性。引理 A.4.3 表明, \mathbf{R}^n 上的依范数收敛等价于按坐标收敛。

对于矩阵 $A = [a_{ij}]_{m \times n} \in \mathbf{R}^{m \times n}$, 记 A^T 为 A 的转置; A^+ 为 A 的广义逆矩阵。对于方阵 $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, 记 A^{-1} 为 A 的逆阵; $\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$ 为 A 的谱半径, 其中 $\lambda_i (i = 1, \dots, n)$ 为 A 的特征值。在 $\mathbf{R}^{m \times n}$ 上 A 的范数 $\|A\|: \mathbf{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbf{R}$ 满足以下条件

(1) 正定性 $\|A\| > 0, \forall A \in \mathbf{R}^{m \times n} (A \neq 0); \|0\| = 0$

(2) 齐次性 $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\| (\alpha \in \mathbf{R})$

(3) 三角不等式 $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \forall A, B \in \mathbf{R}^{m \times n}$

矩阵运算中还有乘法运算, 为了便于利用, 这时需要定义 A.4.3。

定义 A.4.3 设 $A \in \mathbf{R}^{m \times l}, B \in \mathbf{R}^{l \times n}, C = AB \in \mathbf{R}^{m \times n}$, 且

$$\|AB\|_{m \times n} \leq \|A\|_{m \times l} \|B\|_{l \times n}$$

则称范数 $\|\cdot\|_{m \times l}, \|\cdot\|_{l \times n}$ 和 $\|\cdot\|_{m \times n}$ 是相容的。

例 A.4.1 矩阵 $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 的 Frobenius 范数为

$$\|A\|_F = \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right\}^{1/2}$$

它是将 A 视作一个 $m \times n$ 维向量时的 l_2 范数。利用 Cauchy 不等式, 可以证明 $\|\cdot\|_F$ 满足相容性条件。对于 $A \in \mathbf{R}^{m \times l}$, $B \in \mathbf{R}^{l \times n}$, 则有

$$\begin{aligned}\|AB\|_F^2 &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{k=1}^l a_{ik} b_{kj} \right\}^2 \leqslant \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^l a_{ik}^2 \sum_{k=1}^l b_{kj}^2 = \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^l a_{ik}^2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^l b_{kj}^2 = \\ &= \|A\|_F^2 \|B\|_F^2\end{aligned}$$

特别地, 取 $x \in \mathbf{R}^n$, 则有 $\|Ax\|_2 = \|Ax\|_F \leqslant \|A\|_F \|x\|_F = \|A\|_F \|x\|_2$ 。

给出相容的矩阵范数使得在讨论含有矩阵乘法的估计问题时显得方便。下面讨论由向量范数诱导出的矩阵范数。这种矩阵范数与相应的向量范数相容, 它是解决矩阵和向量同时出现时的估计问题的重要手段。

定义 A.4.4 设 $x \in \mathbf{R}^n$, $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $\|\cdot\|$ 是 \mathbf{R}^n 上的一个向量范数, 称

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

是由向量范数 $\|\cdot\|$ 诱导出的矩阵范数。

与定义 A.4.4 中的矩阵范数的等价定义是

$$\|A\| = \sup_{\|z\|=1} \|Az\|$$

这是因为, 取 $z = \frac{x}{\|x\|}$, 有

$$\|Az\| = \left\| A \frac{x}{\|x\|} \right\| = \frac{1}{\|x\|} \|Ax\| = \frac{1}{\|x\|} \|Ax\|$$

由定义 A.4.4 知, $\|Ax\| \leqslant \|A\| \|x\|$ 。因此, 对于 $A \in \mathbf{R}^{m \times l}$, $B \in \mathbf{R}^{l \times n}$, $x \in \mathbf{R}^n$, 有

$$\|ABx\| \leqslant \|A\| \|Bx\| \leqslant \|A\| \|B\| \|x\|$$

当 $\mathbf{x} \neq 0$ 时

$$\frac{\|\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\|$$

所以有

$$\|\mathbf{A}\mathbf{B}\| = \max_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\|$$

即, 定义 A.4.4 中给出的矩阵范数满足相容性条件。显然, 这种矩阵范数依赖于向量范数的具体含义。例如, 对于 $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times n}$, 由向量范数 l_∞, l_1, l_2 诱导出的矩阵范数分别为

行和范数

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (\text{A.4.5})$$

列和范数

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}| \quad (\text{A.4.6})$$

谱范数

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbf{A}^T \mathbf{A})} \quad (\text{A.4.7})$$

例 A.4.2 设 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$, 则有

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max\{1, |a_1| + |a_2|\},$$

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max\{|a_2|, 1 + |a_1|\}$$

当 $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0$ 时, $\|\mathbf{A}\|_\infty \geq 1, \|\mathbf{A}\|_1 > 1$; 另外,

$$\rho(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = \rho \left[\begin{bmatrix} a_2^2 & a_1 a_2 \\ a_1 a_2 & 1 + a_1^2 \end{bmatrix} \right] > 1 + a_1^2 + a_2^2$$

显然, $\|\mathbf{A}\|_2 > 1$ 。

下面讨论方阵的谱半径与其范数的关系。

引理 A.4.4 设 $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\|\cdot\|$ 为 $\mathbf{R}^{n \times n}$ 上的任一种相容的矩阵范数(不一定是由 \mathbf{R}^n 上的向量范数诱导出的), $\rho(\mathbf{A})$ 为 \mathbf{A} 的谱半径。那么

$$\rho(\mathbf{A}) \leq \|\mathbf{A}\|$$

证明 设 A 的一特征值 λ 使得 $|\lambda| = \rho(A)$ 。向量 $p \neq 0$ 为该特征值对应的特征向量, 它满足 $Ap = \lambda p$ 。取一向量 q , 它使得 pq^T 不为零矩阵。因为

$$\rho(A) \|pq^T\| = \|\lambda pq^T\| = \|Apq^T\| \leq \|A\| \|pq^T\|$$

所以证得 $\rho(A) \leq \|A\|$ 。

对 \mathbf{R}^n 上的任一范数 $\|\cdot\|$ 以及任一种非奇异 $n \times n$ 实矩阵 P , 易知 $\|x\|' = \|Px\|$ 是 \mathbf{R}^n 上的一种范数。并且, $\|A\|' = \|PAP^{-1}\|$ 是由它诱导出的矩阵 $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 的范数。下面给予验证

$$\begin{aligned} \|A\|' &= \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|' = \sup_{\|Px\|=1} \|PAx\| = \\ &= \sup_{\|y\|=1} \|PAP^{-1}y\| = \|PAP^{-1}\| \end{aligned}$$

由此, 可以证明引理 A.4.5。

引理 A.4.5^[124] 设 $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 \mathbf{R}^n 上诱导出的矩阵范数, 使得

$$\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$$

证明 设 A 具有 Jordan 形 J 。那么, 存在一非奇异 $n \times n$ 矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = J$ 。现将 J 中每一个非对角元素“1”换成“ ε ”后形成的矩阵记为 J_ε , 并记 $D = \text{diag}(1, \varepsilon, \dots, \varepsilon^{n-1})$ 为一对角矩阵。容易验证 $D^{-1}JD = J_\varepsilon$, 以及 $Q^{-1}AQ = J_\varepsilon$, 其中 $Q = PD$ 。因此, 对任一 $\varepsilon > 0$, A 与 J_ε 相似。

定义 $\|A\| = \|J_\varepsilon\|_\infty$, 它是由 $\|x\| = \|Q^{-1}x\|_\infty, x \in \mathbf{R}^n$ 诱导出的矩阵范数。

由行和范数的定义(式(A.4.5))可知

$$\|J_\varepsilon\|_\infty \leq \rho(A) + \varepsilon$$

因此, 引理得证。

下面的引理可用来说明算法收敛性条件与矩阵秩之间的关系。

引理 A.4.6 设矩阵 $A \in \mathbf{R}^{m \times r}$, I_r 是 r 阶单位矩阵, 则存在矩阵 $\Gamma \in \mathbf{R}^{r \times m}$ 使 $\rho(I_r - \Gamma A) < 1$ 的充要条件为 $\text{rank}(A) = r$; 存

在 $m \times r$ 矩阵 Γ 使 $\rho(I_m - A\Gamma) < 1$ 的充要条件为 $\text{rank}(A) = m$ 。

证明 只证引理的前半部分的结论。

必要性。 设 $\rho(I_r - \Gamma A) < 1$, 即 $I_r - \Gamma A$ 的特征值均在单位圆内。又设 ΓA 的 Jordan 标准形为 J , 即 $\Gamma A \sim J$, 于是 $I_r - \Gamma A \sim I_r - J$ 。由于

$$\begin{aligned}\det(\lambda I_r - I_r + \Gamma A) &= \det(\lambda I_r - I_r + J) = \\ &= (-1)^r \det((1 - \lambda)I_r - J)\end{aligned}$$

因此 J 的特征值均不为 0, 从而 $\text{rank}(\Gamma A) = \text{rank}(J) = r$, 故 $\text{rank}(A) = r$ 。

充分性。 设 $\text{rank}(A) = r$, 令

$$\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \varepsilon_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \cdots \quad \varepsilon_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

则方程组 $A^T x = \varepsilon_i$ 有解 $\gamma_i (i = 1, 2, \dots, r)$ 取

$$\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r)^T$$

则

$$\begin{aligned}\det(\lambda I_r - I_r + \Gamma A) &= \det((\lambda - 1)I_r + A^T \Gamma^T) = \\ &= \det(\lambda I_r) = \lambda^r,\end{aligned}$$

即 $I_r - \Gamma A$ 的特征值均为 0, 从而 $\rho(I_r - \Gamma A) = 0 < 1$ 。证毕。

A.5 λ 范数

向量函数 $h: [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^n$ 的 λ 范数定义为

$$\|h\|_\lambda = \sup_{t \in [0, T]} \{e^{-\lambda t} \|h(t)\|\} \quad (\lambda > 0) \quad (\text{A.5.1})$$

式中 $\|\cdot\|$ 为 \mathbf{R}^n 上的一种范数。它具有以下性质

性质1 对于常向量 $c \in \mathbf{R}^n$

$$\|c\|_\lambda = \|c\| \quad (\text{A.5.2})$$

性质2 对于向量函数 $h: [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^n$

$$\|h\|_{\lambda} \leq \sup_{t \in [0, T]} \|h(t)\| \leq e^{\lambda T} \|h\|_{\lambda} \quad (\text{A.5.3})$$

证明 对于 $\lambda > 0, t \in [0, T]$, 由 $e^{-\lambda t} \|h(t)\| \leq \sup_{\tau \in [0, T]} \|h(\tau)\|$ 知, 左端不等式成立。由于

$$\begin{aligned} \|h(t)\| &= e^{\lambda t} e^{-\lambda t} \|h(t)\| \leq \\ &e^{\lambda T} \sup_{t \in [0, T]} \{e^{-\lambda t} \|h(t)\|\} = e^{\lambda T} \|h\|_{\lambda} \end{aligned}$$

由此证得右端不等式。

性质 3 对于向量函数 $f, h: [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^n$, 如果

$$h(t) = \int_0^t e^{a(t-\tau)} f(\tau) d\tau, \text{ 那么当 } \lambda > a \text{ 时}$$

$$\|h\|_{\lambda} \leq \frac{1 - e^{(a-\lambda)T}}{\lambda - a} \|f\|_{\lambda} \quad (\text{A.5.4})$$

特别地, 当 $a = 0$ 时, $\|h\|_{\lambda} \leq \frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda} \|f\|_{\lambda}$

证明 对于 $\forall t \in [0, T]$ 以及 $\lambda > a$, 有

$$\begin{aligned} e^{-\lambda t} \|h(t)\| &= e^{-\lambda t} \left\| \int_0^t e^{a(t-\tau)} f(\tau) d\tau \right\| \leq \\ &\int_0^t e^{(a-\lambda)(t-\tau)} e^{-\lambda \tau} \|f(\tau)\| d\tau \leq \\ &\int_0^t e^{(a-\lambda)(t-\tau)} d\tau \|f\|_{\lambda} = \\ &\frac{1 - e^{(a-\lambda)t}}{\lambda - a} \|f\|_{\lambda} \end{aligned}$$

因此, 由 $0 \leq t \leq T$ 及 $\lambda > a$ 可证得式(A.5.4)

与性质 3 类似, 可给出以下性质:

对于向量函数 $f, h: [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^n$, 若

$$h(t) = \int_0^t \int_0^{\tau} e^{a(t-\sigma)} f(\sigma) d\sigma d\tau$$

则当 $\lambda > a$ 时,

$$\|h\|_{\lambda} \leq \frac{1 - e^{(a-\lambda)T}}{\lambda - a} \frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda} \|f\|_{\lambda}$$

这是因为, 对于 $\forall t \in [0, T]$ 以及 $\lambda > a$, 有

$$\begin{aligned}
e^{-\lambda t} \| \mathbf{h}(t) \| &= \left\| \int_0^t e^{(a-\lambda)(t-\tau)} \int_0^\tau e^{\lambda(\sigma-\tau)} e^{-\lambda\sigma} \mathbf{f}(\sigma) d\sigma d\tau \right\| \leq \\
&\int_0^t e^{(a-\lambda)(t-\tau)} \int_0^\tau e^{\lambda(\sigma-\tau)} d\sigma d\tau \| \mathbf{f} \|_\lambda \leq \\
&\int_0^t e^{(a-\lambda)(t-\tau)} d\tau \frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda} \| \mathbf{f} \|_\lambda \leq \\
&\frac{1-e^{(a-\lambda)T}}{\lambda-a} \frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda} \| \mathbf{f} \|_\lambda
\end{aligned}$$

对于向量函数 $\mathbf{f}, \mathbf{h}: [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^n$, 若

$$\mathbf{h}(t) = \int_0^t \int_0^\tau e^{a(\tau-\sigma)} \mathbf{f}(\sigma) d\sigma d\tau$$

则当 $\lambda > a$ 时,

$$\| \mathbf{h} \|_\lambda \leq \frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda} \frac{1-e^{(a-\lambda)T}}{\lambda-a} \| \mathbf{f} \|_\lambda$$

在许多文献中, 式(A.5.1)中的向量范数取为 l_∞ 范数, 这时, 式(A.5.1)可写成

$$\| \mathbf{h} \|_\lambda = \sup_{t \in [0, T]} \{ e^{-\lambda t} \max_{1 \leq i \leq n} |h^i(t)| \} \quad (\text{A.5.5})$$

式中 $h^i(t)$ 为 $\mathbf{h}(t)$ 的第 i 个分量。

下面给出离散时间向量函数的 λ 范数。

向量函数 $\mathbf{h}: \{0, 1, \dots, T\} \rightarrow \mathbf{R}^n$ 的 λ 范数定义为

$$\| \mathbf{h} \|_\lambda = \sup_{0 \leq t \leq T} \{ \lambda^t \| \mathbf{h}(t) \| \} \quad (0 < \lambda < 1) \quad (\text{A.5.6})$$

式中 $\| \cdot \|$ 为 \mathbf{R}^n 上的一种向量范数。利用 $\lambda^T \leq \lambda^t \leq \lambda^0, 0 \leq t \leq T$, 可以给出这种范数的以下性质

性质 1 对于常向量 $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^n$

$$\| \mathbf{c} \|_\lambda = \| \mathbf{c} \|$$

性质 2 对于向量函数 $\mathbf{h}: \{0, 1, 2, \dots, T\} \rightarrow \mathbf{R}^n$

$$\| \mathbf{h} \|_\lambda \leq \sup_{0 \leq t \leq T} \| \mathbf{h}(t) \| \leq \lambda^{-T} \| \mathbf{h} \|_\lambda$$

性质 3 $\lambda^t \sum_{s=0}^{t-1} \| \mathbf{h}(s) \| \leq \frac{\lambda(1-\lambda^T)}{1-\lambda} \| \mathbf{h} \|_\lambda$

参考文献

- 1 Uchiyama M. Formation of high-speed motion pattern of a mechanical arm by trial. Transactions of the Society of Instrumentation and Control Engineers, 1978, 14(6): 706-712
- 2 Arimoto S, Kawamura S, Miyazaki F. Bettering operation of robots by learning. Journal of Robotic Systems, 1984, 1(2): 123-140
- 3 Arimoto S, Kawamura S, Miyazaki F. Bettering operation of dynamic systems by learning: A new control theory for servomechanism or mechatronics systems. In: Proceedings of the 23rd IEEE Conference on Decision and Control, Las Vegas, Nevada, 1984, 1064-1069
- 4 Craig J J. Adaptive control of manipulators through repeated trials. In: Proceedings of the 1984 American Control Conference, San Diego, CA 1984, 1566-1573
- 5 Casalino G, Bartolini G. A learning procedure for the control of movements of robotic manipulators. In: Proceedings of the IASTED Symposium on Robotics and Automation, Amsterdam Netherland, 1984, 108-111
- 6 Arimoto S. Mathematical theory of learning with applications to robot control. In: Proceedings of the 4th Yale Workshop on Applications of Adaptive Systems Theory, Yale University, New Haven, Connecticut, 1985, 379-388
- 7 Arimoto S, Kawamura S, Miyazaki F, Tamaki S. Learning Control Theory for Dynamical Systems. In: Proceedings of the 24th IEEE Conference on Decision and Control, Fort Lauderdale, Florida, 1985, 1375-1380
- 8 Kawamura S, Miyazaki F, Arimoto S. Applications of learning method for dynamic control of robot manipulators. In: Proceedings of the 24th IEEE Conference on Decision and Control, Fort Lauderdale, Florida, 1985, 1381-1386
- 9 Kawamura S, Miyazaki F, Arimoto S. Realization of robot motion based on a learning method. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1988, 18(1): 126-134
- 10 Arimoto S. Learning control theory for robotic motion. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, 1990, 4: 543-564
- 11 Arimoto S, Naniwa T. Quasi-natural potential, passivity, and learnability in robot Dynamics. In: Proceedings of the First Asian Control Conference, Tokyo, Japan, 1994, 227-230

- 12 Arimoto S. Ability of motion learning comes from passivity and dissipativity of its dynamics. In: *Proceedings of the Second Asian Control Conference*, Seoul, Korea, 1997
- 13 Atkeson C G, McIntyre J. Robot trajectory learning through practice. In: *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, San Francisco, CA, 1986, 1737-1742
- 14 Hauser J. Learning control for a class of nonlinear systems. In: *Proceedings of the 26th IEEE Conference on Decision and Control*, Los Angeles, California, 1987, 859-860
- 15 Oh S R, Bien Z, Suh I H. An iterative learning control method with application for the robot Manipulator. *IEEE Journal of Robotics and Automation*, 1988, 4(5): 508-514
- 16 Oh S R, Bien Z, Suh I H. A model algorithmic learning method for continuous-path control of a robot manipulator. *Robotica*, 1990, 8: 31-36
- 17 Bien Z, Hwang D H, Oh S R. A nonlinear iterative learning method for robot path control. *Robotica*, 1991, 9: 387-392
- 18 Hwang D H, Bien Z, and Oh S R. Iterative learning control method for discrete-time dynamic systems. *IEE Proceedings-Part D: Control Theory and Applications*, 1991, 138(2): 139-144
- 19 Porter B, Mohamed S S. Iterative learning control of completely irregular plants with initial state shifting. *Electronics Letters*, 1990, 26(2): 106-107
- 20 Ahn H S, Choi C H. Iterative learning controller for linear systems with a periodic disturbance. *Electronics Letters*, 1990, 26(18): 1542-1544
- 21 Porter B, Mohamed S S. Iterative learning control of partially irregular multivariable plants with initial state shifting. *International Journal of Systems Science*, 1991, 22(2): 229-235
- 22 Sugie T, Ono T. An iterative learning control law for dynamical systems. *Automatica*, 1991, 27(4): 729-732
- 23 Ahn H S, Choi C H, Kim K B. Iterative learning control for a class of nonlinear systems. *Automatica*, 1993, 29(6): 1575-1578
- 24 Hwang D H, Kim B K, Bien Z. Decentralized iterative learning control methods for large scale linear dynamic systems. *International Journal of Systems Science*, 1993, 24(12): 2239-2254
- 25 Choi C H, Jang T J, Ahn H S. Iterative learning control for discrete-time nonlinear systems with feedback. In: *Proceedings of the First Asian Control Conference*, 1994, 235-238
- 26 Jang T J, Ahn H S, Choi C H. Iterative learning control for discrete-time nonlinear systems. *International Journal of Systems Science*, 1994, 25(7): 1179-1189
- 27 Jang T J, Choi C H, Ahn H S. Iterative learning control in feedback systems. *Automatica*

- ca, 1995, 31(2):243-248
- 28 Choi C H, Jang T J. Iterative learning control for a general class of nonlinear feedback systems. In: Proceedings of 1995 American Control Conference, 1995, 2444-2448
- 29 Chen W, Liu D. A learning control for a class of nonlinear systems with exogenous disturbances. International Journal of Systems Science, 1996, 27(12):1453-1459
- 30 Lang F. A learning concept for improving robot force control. In: Proceedings of the 2nd IFAC Symposium on Robot Control, Karlsruhe, FRG, 1988, 189-194
- 31 吴东南, 程勉, 高为炳. 多步控制修正下的学习控制. 自动化学报, 1989, 15(5):445-449
- 32 Bien Z, Hub K M. Higher-Order Iterative Learning Control Algorithm. IEE Proceedings-Part D: Control Theory and Applications, 1989, 136(3):105-112
- 33 Chen Y, Sun M, Huang B, Dou H. Robust higher order repetitive learning control algorithm for tracking control of delayed repetitive systems. In: Proceedings of the 31st IEEE Conference on Decision and Control, Tucson, Arizona, 1992, 2504-2510
- 34 Sun M, Ye D, Wan B. A PI-type iterative learning scheme for nonlinear dynamical systems. In: Proceedings of the first Chinese World Congress on Intelligent Control and Intelligent Automation, Beijing, 1993, 2279-2284
- 35 孙明轩, 万伯任. 非线性系统高阶迭代学习控制算法. 控制与决策, 1994, 9(3):195-199
- 36 Sun M. Robustness of higher-order P-type learning control. Control Theory and Applications, 1997, 14(1):12-18
- 37 Chen Y, Wen C, Sun M. A robust high-order P-type iterative learning controller using current iteration tracking error. International Journal of Control, 1997, 68(2):331-342
- 38 Arimoto S, Kawamura S, Miyazaki F. Convergence, stability, and robustness of learning control schemes for robot manipulators. In: M. J. Jamshidi, L. Y. Luh, and M. Shahinpoor, Editors, Recent Trends in Robotics: Modelling, Control, and Education, New York: Elsevier, 1986, 307-316
- 39 Heinzinger G, Fenwick D, Paden D, Miyazaki F. Robust learning control. In: Proceedings of the 28th IEEE Conference on Decision and Control, Tampa, Florida, 1989, 436-440
- 40 Heinzinger G, Fenwick D, Paden D, Miyazaki F. Stability of learning control with disturbances and uncertain initial conditions. IEEE Transactions on Automatic Control, 1992, 37(1):110-114
- 41 Saab S S. Learning control: convergence and robustness. ph.D. Dissertation, University of Pittsburgh, 1992
- 42 Wang D, Soh Y C, Cheah C C. Robust learning control for constrained robots. In: Pro-

- ceedings of the 31st IEEE Conference on Decision and Control, Tucson Arizona, 1992, 608-613
- 43 Tso S K, Ma L Y X. Discrete learning control for robots: strategy, convergence and robustness. *International Journal of Control*, 1993, 57(2): 273-291
 - 44 Arimoto S, Naniwa T. Learning control for robot motion under geometric end-point constraint. *Robotica*, 1994, 12: 101-108
 - 45 Cheah C C, Wang D, Soh Y C. Convergence and robustness of a discrete-time learning control scheme for constrained manipulators. *Journal of Robotic Systems*, 1994, 11(3): 223-238
 - 46 孙明轩, 陈阳泉, 黄宝健. 非线性时滞系统的高阶迭代学习控制. *自动化学报*, 1994, 20(3): 360-365
 - 47 Wang D, Soh Y C, Cheah C C. Robust motion and force control of constrained manipulators by learning. *Automatica*, 1995, 31(2): 257-262
 - 48 Wang D. A simple iterative learning controller for manipulators with flexible joints. *Automatica*, 1995, 31(9): 1341-1344
 - 49 Cheah C C, Wang D, Soh Y C. Learning control of motion and force for constrained robotic manipulators. *Journal of Robotics and Automation*, 1995, 10(3): 79-88
 - 50 Cheah C C, Wang D. Learning control for a class of nonlinear differential-algebraic systems with application to constrained robots. *Journal of Robotic Systems*, 1996, 11(3): 141-151
 - 51 Cheah C C, Wang D. A model reference learning control scheme for a class of nonlinear systems. *International Journal of Control*, 1997, 66(2): 271-287
 - 52 Saab S S, Vogt W G, Mickle M H. Iterative learning control algorithms for tracking "slowly" varying trajectories. *IEEE Transactions on System, Man, and Cybernetics-Part B: Cybernetics*, 1997, 27(4): 657-669
 - 53 Sun M, Huang B, Zhang X, Chen Y, Xu J. Selective learning with a forgetting factor for trajectory tracking of uncertain nonlinear systems. In: *Proceedings of the Second Asian Control Conference*, Seoul, Korea, 1997, 11: 47-50
 - 54 Sun M. Robust convergence analysis of iterative learning control systems. *Control Theory and Applications*, 1998, 15(3): 320-326
 - 55 Hae A. Learning control in the presence of measurement noise. In: *Proceedings of 1990 American Control Conference*, 1990, 2846-2851
 - 56 Arimoto S, Naniwa T, Suzuki H. Robustness of P-type learning control with a forgetting factor for robot motions. In: *Proceedings of the 29th IEEE Conference on Decision and Control*, Honolulu Hawaii, 1990, 2640-2645
 - 57 Arimoto S, Naniwa T, Suzuki H. Selective learning with a forgetting factor for robotic

- motion control. In: Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation, Sacramento, CA, 1991, 728-733
- 58 Saab S S. On the P-type learning control. IEEE Transactions on Automatic Control, 1994, 39(11): 2298-2302
- 59 Chien C J, Liu J S. A P-type iterative learning controller for robust output tracking of nonlinear time-varying systems. In: Proceedings of 1994 American Control Conference, Baltimore, Maryland, 1994, 2595-2599
- 60 Chien C J, Liu J S. A P-type iterative learning controller for robust output tracking of nonlinear time-varying systems. International Journal of Control, 1996, 64(2): 319-334
- 61 Kuc T Y, Lee J S. Learning strictly positive real linear systems with uncertain parameters and unknown input disturbances. Automatica, 1996, 32(5): 791-792
- 62 Bondi P, Casalino G, Gambardella L. On the iterative learning control theory for robotic manipulators. IEEE Journal of Robotics and Automation, 1988, 4(1): 14-22
- 63 Padieu F, Su R. An H_∞ approach to learning control. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, 1990, 4: 465-474
- 64 Owens D H. Universal iterative learning control using adaptive high-gain feedback. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, 1993, 7: 383-388
- 65 Lee, J J, Lee J W. Design of iterative learning controller with VCR servo systems. IEEE Transactions on Consumer Electronics, 1993, 39(1): 13-24
- 66 Amann N, Owens D H, Rogers E, Wahl A. An H_∞ approach to linear iterative learning control design. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, 1996, 10(6): 767-781
- 67 Lee K S, Bang S H, Chang K S. Feedback-assisted iterative learning control based on an inverse process model. Journal of Process Control, 1994, 4(2): 77-89
- 68 Lee K S, Bang S H, Yi S, Son J S, Yoon S C. Iterative learning control of heat-up phase for a batch polymerization reactor. Journal of Process Control, 1996, 6(4): 255-262
- 69 Bone G M. A novel iterative learning control formulation of generalized predictive control. Automatica, 1995, 31(10): 1483-1487
- 70 Porter B, Mohamed S S. Iterative learning control of partially irregular multivariable plants with initial impulsive action. International Journal of Systems Science, 1991, 22(3): 447-454
- 71 Lee, K H, Bien, Z. Initial condition problem of learning control. IEE Proceedings Part D, Control Theory and Applications, 1991, 138(6): 525-528
- 72 任雪梅, 高为炳. 任意初始状态下的迭代学习控制. 自动化学报, 1994, 20(1): 74-79
- 73 Lee H S, Bien Z. Study on robustness of iterative learning control with non-zero initial error. International Journal of Control, 1996, 64(3): 345-359

- 74 Chen Y, Wen C, Xu J, Sun M. An initial state learning method for iterative learning control of uncertain time-varying systems. In: *Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control*, Kobe, Japan, 1996, 3996-4001
- 75 Sun M, Huang B, Zhang X, Chen Y. Robust convergence of the D-type learning control. In: *Proceedings of the Second Chinese World Congress on Intelligent Control and Intelligent Automation*, Xi'an, 1997, 678-683
- 76 Chen Y, Wen C, Sun M. A high-order iterative learning controller with initial state learning. In: *Proceedings of the Second Chinese World Congress on Intelligent Control and Intelligent Automation*, Xi'an, 1997, 684-689
- 77 Messner W, Horowitz R. Identification of a nonlinear function in a dynamical system. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 1993, 115:587-591
- 78 Dou H, Chen Y, Sun M. Iterative learning identification of a nonlinear function in a nonlinear dynamic system. In: *Proceedings of the First IFAC Youth Automation Conference*, Beijing, 1995, 138-143
- 79 Chen Y, Wen C, Xu J, Sun M. Extracting projectile's aerodynamic drag coefficient curve via high-order iterative learning identification. In: *Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control*, Kobe, Japan, 1996, 3070-3071
- 80 Chen Y, Wen C, Dou H, Sun M. Iterative learning identification of aerodynamic drag curve from tracking radar measurements. *IFAC Journal of Control Engineering Practice*, 1997, 5(11):1543-1553
- 81 Shoureshi R, Swedes D, Evans R. Learning control for autonomous machines. *Robotica*, 1991, 9:165-170
- 82 Ishihara T, Abe K, Takeda H. A discrete-time design of robust iterative learning controllers. *IEEE Transactions on System, Man, and Cybernetics*, 1992, 22(1):74-84
- 83 Porter B, Mohamed S S. Digital iterative learning control of linear multivariable plants. *International Journal of Systems Science*, 1992, 23(9):1393-1401
- 84 Porter B, Mohamed S S. Learning rates in the digital iterative learning control of linear multivariable plants. *International Journal of Systems Science*, 1992, 23(10):1539-1547
- 85 Suzuki T, Yasue M, Okuma S, Uchikawa Y. Discrete-time learning control for robotic manipulators. *Advanced Robotics*, 1995, 9(1):1-14
- 86 Xu J X. Analysis of iterative learning control for a class of nonlinear discrete-time systems. *Automatica*, 1997, 33(10):1905-1907
- 87 Chen Y, Wen C, Sun M. Discrete-time iterative learning control of uncertain nonlinear feedback systems. In: *Proceedings of the Second Chinese World Congress on Intelligent Control and Intelligent Automation*, Xi'an, 1997, 1972-1977

- 88 Togai M, Yamano O. Analysis and design of an optimal learning control scheme for industrial robots: A discrete system approach. In: Proceedings of the 24th IEEE Conference on Decision and Control, Fort Lauderdale, FL, 1985, 1399-1404
- 89 Yamakita M, Furuta K. Iterative generation of virtual reference for a manipulator. *Robotica*, 1991, 9: 71-80
- 90 Amann N, Owens D H, Rogers E. Iterative learning control for discrete-time systems with exponential rate of convergence. *IEE Proceedings-Part D: Control Theory and Applications*, 1996, 143(2): 217-224
- 91 Amann N, Owens D H, Rogers E. Iterative learning control using optimal feedback and feedforward actions. *International Journal of Control*, 1996, 15(2): 277-293
- 92 Phan M Q, Juang J N. Design of learning controller based on autoregressive representation of a linear system. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1996, 19(2): 355-362
- 93 Lee-Glauser G J, Juang J N, Longman R W. Comparison and combination of learning controllers: computational enhancement and experiments. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1996, 19(5): 1116-1123
- 94 Geng Z, Carroll R, Xie J. Two-dimensional model and algorithm analysis for a class of iterative learning control systems. *International Journal of Control*, 1990, 52(4): 833-862
- 95 Geng Z, Carroll R, Jamshidi M, Kisner P A. An adaptive learning control approach with application to water tank level control. *Control Theory and Advanced Technology*, 1990, 8(3): 577-592
- 96 Geng Z, Jamshidi M. Learning control system analysis and design based on 2-D system theory. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 1990, 3: 17-26
- 97 Kurek J E, Zaremba M B. Iterative learning control synthesis based on 2-D system theory. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1993, 38(1): 121-125
- 98 Saab S. A discrete-time learning control algorithm for a class of linear time-invariant systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, 40(6): 1138-1142
- 99 Amann N, Owens D H, Rogers E. 2D systems theory applied to learning control systems. In: Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control, Lake Buena Vista, FL, 1994, 985-986
- 100 Moore K L, Dahleh M, Bhattacharyya S P. Iterative learning control: A survey and new results. *Journal of Robotic Systems*, 1992, 9(5): 563-594
- 101 Moore K L. Iterative learning control for deterministic systems. *Advances in Industrial Control*. Springer-Verlag, London, 1992
- 102 Messner W, Horowitz R, Kao W W, Boels M. A new adaptive learning rule. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1991, 36(2): 188-197

- 103 Horowitz R, Messner W, Moore J. Exponential convergence of a learning controller for robot manipulators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992, 36(7):890-894
- 104 Horowitz R. Learning control of robot manipulators. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 1993, 115:402-411
- 105 Kuc T Y, Nam K, Lee J S. An iterative learning control of robot manipulators. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1991, 7(6):835-841
- 106 Kuc T Y, Lee J S. *An adaptive learning control of uncertain robotic systems*. In: *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, Brighton, England, 1991, 1206-1211
- 107 Kuc T Y, Lee J S, Nam K. An iterative learning control theory for a class of nonlinear dynamic systems. *Automatica*, 1992, 28(6):1215-1221
- 108 Kuc T Y, Lee J S, Park B H. Tuning convergence rate of a robust learning controller for robot manipulators. In: *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, LA, 1995, 1714-1719
- 109 Kuc T Y, Lee J S. A unified adaptive learning controller for iterative and repetitive learning of robotic systems. In: *Proceedings of the 13th IFAC World Congress*, San Francisco, 1996, 163-168
- 110 Park B H, Kuc T Y, Lee J S. Adaptive learning control of uncertain robotic systems. *International Journal of Control*, 1996, 65(5):725-744
- 111 Lucibello P. State steering by learning for a class of nonlinear control systems. *Automatica*, 1994, 30(9):1463-1468
- 112 Lucibello P. Repositioning control of robotic arms by learning. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, 39(8):1690-1694
- 113 Lucibello P, Panzieri S. Cyclic control of linear systems: theory and experimental implementation on a flexible arm. In: *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, Lake Buena Vista, FL, 1994, 369-372
- 114 Lucibello P. On the role of high-gain feedback in P-type learning control of robot arms. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1996, 12(4):602-605
- 115 Lucibello P, Panzieri S, Ulivi G. Repositioning Control of a two-link flexible arm by learning. *Automatica*, 1997, 33(4):579-590
- 116 Lucibello P. Output zeroing with internal stability by learning. *Automatica*, 1995, 31(11):1665-1672
- 117 Qu Z, Dorsey J, Dawson D M, Johnson R W. Linear learning control of robot motion. *Journal of Robotic Systems*, 1993, 10(1):123-140.
- 118 Qu Z, Zhuang H. Non-linear learning control of robot manipulators without requiring acceleration measurement. *International Journal of Adaptive Control and Signal Pro-*

- cessing, 1993, 7: 77-90
- 119 Ham C H. Nonlinear learning control: Theory and applications. ph. D. Dissertation, University of Central Florida, 1995
- 120 Canbolat H, Hu J, Dawson D M. A habrid learning/adaptive partial state feedback controller for RLED robot manipulators. *International Journal of Systems Science*, 1996, 27(11): 1123-1132
- 121 Manabe T, Miyazaki F. Learning control based on local linearization by using DFT. *Journal of Robotic Systems*, 1994, 11(2): 129-141
- 122 Lee J W, Lee H S, Bien Z. Iterative learning control with feedback using fourier series with application to robot trajectory tracking. *Robotica*, 1993, 11: 291-298
- 123 Novakovic Z. The principle of self-support in control systems. Amsterdam: Elsevier, 1992
- 124 Ortega J M, Rheinboldt W C. Iterative solution of nonlinear equations in several variables. Academic Press, 1970
- 125 Chen Y, Sun M, Dou H. Dual-staged P-type iterative learning control schemes. In: *Proceedings of the First Asian Control Conference*, Tokyo, Japan, 1994, 239-242
- 126 Lee H S, Bien Z. A note on convergence property of iterative learning controller with respect to sup norm. *Automatica*, 1997, 33(10): 1905-1907
- 127 Mita T, Kato E. Iterative control and its application to motion control control of robot arm; A direct approach to servoproblems. In: *Proceedings of the 24th IEEE Conference on Decision and Control*, Ft. Lauderdale, FL, 1985, 1393-1398
- 128 Roh C L, Lee M N, Chung M J. ILC for non-minimum phase system. *International Journal of Systems Science*, 1996, 27(4): 419-424
- 129 Luca A D, Paesano G, Ulivi G. A frequency-domain approach to learning control: Implementation for a robot manipulator, *IEEE Transactions on Industria. Electronics*, 1992, 39(1): 1-10
- 130 Luca A D, Panzieri S. An iterative scheme for learning gravity compensation in flexible robot arms. *Automatica*, 1994, 30(6): 993-1002
- 131 Caiti A, Cannata G, Casalino G. Implementation of learning control techniques using descriptor systems methods. In: *Proceedings of IEEE Conference on Robotics Automation*, Sacramento, California, 1991, 1451-1456
- 132 Cai G, Zhou Q, Leung T P. On learning control of constrained robots modeled by singular systems. *Control Theory and Applications*, 1994, 11(4): 397-403
- 133 Jeon D, Tomizuka M. Learning hybrid force and position control of robotic manipulators. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1993, 9(4): 423-431
- 134 孙明轩, 黄宝健, 张学智. 非线性系统的 PD 型迭代学习控制. *自动化学报*, 1998,

- 24(5):753-756
- 135 孙明轩. 非线性离散时间系统迭代学习控制的稳定性分析. 自动化学报, 1998, 24(6):816-820
- 136 孙明轩, 黄宝健, 张学智. 任意初态下不确定时滞系统的 PD 型迭代学习控制. 控制理论与应用, 1998, 15(6):853-858
- 137 Chen Y, Wen C, Xu J X, Sun M. High-order iterative learning identification of projectile's aerodynamic drag coefficient curve from radar measured velocity data. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 1998, 6(4):563-570

内 容 简 介

迭代学习控制是 80 年代中期发展起来的一支位于更具体层次的学习控制理论分支。这种控制技术以非常简单的方式和需要较少的先验知识处理不确定程度相当高的动态系统,使得快速重复运动的被控对象实现给定期望轨迹的完全跟踪。它是以工业机器人为背景提出的,已应用于数控加工、坐标测量、光盘驱动系统、化工间歇过程等工程领域。本书系统地介绍迭代学习控制的机理、方法和理论。从系统正则性、因果性的角度,阐述学习律的构造方法。本书总结了迭代学习控制领域的最新研究成果,包括初始条件问题、2-D 分析、迭代学习辨识。取材注重先进性和新颖性,力求反映其理论发展的主脉络。内容循序渐进,由浅入深。本书有助于工程技术人员和科学研究工作者熟悉这种新型的控制技术,也可作为高校自动控制类及其相关专业师生的教学参考书。

Iterative learning control was elaborated as a formal learning control theory in the middle of 1980's. When a controlled system performs the same tasks through repetitive high - speed operations, iterative learning control methodology enables us to design a controller in an iterative form, which generates control inputs progressively improving tracking performance, and eventually leading to the perfect tracking along the entire span of the specified

trajectory. It requires less a priori knowledge about the controlled system and relies on less online – calculation burden. The original work of iterative learning control focussed on the robotic motion control. However, it has applied to an increasing number of practical fields, including CNC machine tools, coordinate measuring machines, optical disk drivers and batch reactors, etc.

We restrict ourselves, in this book, to the deterministic theory of iterative learning control owing to the lack of stochastic theory and fuzzy theory. The up – to – date research results were involved, including the principles, methodologies, theories and techniques of iterative learning control. Specifically, the researches concerning the regularity and causality of controlled systems, initial condition problem, 2 – D analysis, and iterative learning identification are covered. In this book, a number of systems, from linear time – invariant systems to a general class of nonlinear systems, are investigated.

The material in this book should be viewed as important background material to introduce researchers and practitioners to the current theory of iterative learning control. Because the presentation is mostly self – contained, this book is also appropriate for a senior undergraduate and graduate level course. The readers of this book need not be strictly those working or to work in the area of automatic control due to the promising future of iterative learning control, with numerous areas open for continuous research and application.

