# Stochastic Integral の作り方

Shena:
https://github.com/Shena4746/construction-stochastic-integral

2022 年 6 月 22 日

# 目次

## 本稿について

本稿は, 2014 年頃に有志メンバーによって開催された勉強会における発表資料を整理したものである．本稿の目標は, 局所二乗可積分な Martingale を Integrator とする Stochastic Integral の構成法 (定理 3.8) を紹介し, Stochastic Integral と Lebesgue-Stieltjes 積分等の, その他の積分概念との関係を手早く示すこと (定理 3.13, 命題 3.14) に限定している．予備知識として, 標準的な測度論と入門的な連続時間 Martingale についての知識を想定している．後者については, たとえば, [1] の Chapter 1 や, [5] の Section 5 を挙げておく．

なお, 本稿で述べる内容は, より広い枠組みである Semimartingale を用いた Stochastic Integral で扱うことができる．より一般的な議論は [6][4][3][1] などを参照されたい．本稿は, 主に [3][2] を参考した．

## 概要

局所二乗可積分 martingale を integrator とする stochastic integral を構成し, その基本性質を示す. Stochastic integral は, 二乗可積分 martingale 全体が成す空間 $\mathscr{H}$ の Hilbert 構造を利用することで, $\mathscr{H}$ を integrator とする場合にまず構成され, localization と呼ばれる停止時刻を利用した操作によって integrator が局所二乗可積分 martingale の場合へ拡張される．Stochastic Integral の性質は, 主に, integrand から stochastic integral への写像の等長性と, quadratic variation を通して示される．本稿では, 初めに Ito-Stieltjes 積分の存在から, quadratic variation の存在と一意性を示す．Quadratic variation の性質の多くはこの一意性から従う．その後に stochastic integral を上述の方法で構成し, 優収束定理などの初歩的な性質を示す．最後に, stochastic integral と Ito-Stieltjes 積分の関係, 及び Lebesgue-Stieltjes 積分との関係を示す．

## Notations

初めに, 本稿を通じて利用される記号をまとめておく.

- ◇ $\mathbb{R}$ ：実数全体の集合.
- ◇ $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R}\,;\, x \geqslant 0\}$.
- ◇ $X^c$ ：集合 $X$ の補集合.
- ◇ $A := B$ ：$A$ を $B$ と定義する.
- ◇ $a \wedge b := \min\{a, b\}$.
- ◇ $a \vee b := \max\{a, b\}$.
- ◇ $1_C$： 集合 $C$ の定義関数.
- ◇ $x_n \searrow x$ ：$x_1 > x_2 > \cdots > x_n > x_{n+1} > \cdots$, かつ $x_n \to x$ $(n \to \infty)$. $x_n \nearrow x$ も同様.
- ◇ $f_+(x) := f(x+) := \lim_{z \searrow x} f(z)$.
- ◇ $f_-(x) := f(x-) := \lim_{z \nearrow x} f(z)$.
- ◇ $\Delta f(x) := f_+(x) - f_-(x)$.
- ◇ $t_k^{(n)}$ ：infinitesimal partition. 定義 2.1 参照.
- ◇ $\|\cdot\|$: ノルム.
- ◇ $m\mathscr{A}$ ：$\mathscr{A}$-可測関数全体の集合.
- ◇ $b\mathscr{A}$ ：$\mathscr{A}$-可測かつ有界な関数全体の集合.
- ◇ $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t \geqslant 0}, P)$ ：Filtration 付き確率空間, または確率基.
- ◇ $\xrightarrow{P}$ ：測度 $P$ に関する確率収束. $\xrightarrow{a.s.}$, $\xrightarrow{L^2}$ なども同様.
- ◇ $\mathscr{H}$ ：定義 1.10 参照.
- ◇ $\mathscr{H}_{\mathrm{loc}}$ ：定義 1.10 参照.
- ◇ $\mathscr{L}^2$ ：定義 3.2 参照.
- ◇ $\mathscr{L}^2_{\mathrm{loc}}$ ：定義 3.2 参照.
- ◇ $[M, N]$ ：Quadratic Co-Variation. 定義 2.5, 系 2.9 参照.
- ◇ $[M] := [M, M]$ ：Quadratic Variation. 定義 2.5, 命題 2.7, 定理 2.8 参照.
- ◇ $X \bullet M$ ：Stochastic Integral. 定理 3.5, 定理 3.8 参照.

# 1 Preliminaries

以下において, 確率基は $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\geqslant 0}, P)$ とする．確率過程は常に $\mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ なる関数とする．確率過程 X, Y が indistinguishable であるとき, すなわち $P(X_t = Y_t\ \forall t \geqslant 0) = 1$ であるとき, 単に $X = Y$ と書く.

確率過程 X が RCLL (Right Continuous with Left-hand Limit) であるとは, X の経路, すなわち, $\omega \in \Omega$ 固定したときの $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto X(t,\omega) \in \mathbb{R}$, が 右連続で, 各点 t で有限な左極限を持つときをいう．LCRL (Left Continuous with Right-hand Limit) についても同様である.

**定義 1.1** (通常の仮定)**.** 以下を確率基 $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\geqslant 0}, P)$ に関する通常の仮定と呼ぶ.

- 確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ は完備,
- $\{N \in \mathscr{F}\,;\, P(N) = 0\} \subset \mathscr{F}_0$,
- $\mathscr{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}, \quad \forall t \geqslant 0.$

**定義 1.2** (Martingale)**.** 確率過程 X が次を満たすとき X を *Martingale* という*:*

- X は適合過程である．すなわち*,* $X_t \in m\mathscr{F}_t,\ \forall t \geqslant 0.$
- $X_t \in L^1(\Omega), \quad t \geqslant 0.$
- $E(X_t \,|\, \mathscr{F}_s) \overset{a.s.}{=} X_s, \quad s \leqslant t.$

**定理 1.3** (Martingale の RCLL version の存在. [1], Theorem 3.13, p.16 )**.** 定義 *1.1* の意味での通常の仮定のもとで*,* 任意の *Martingale* X に対して*, RCLL-Martingale* であり*,* かつ X の *version* である Y *,* すなわち*,* 任意の $t \geqslant 0$ に対して $P(X_t = Y_t) = 1$ である Y が存在する.

以下では, 定理 1.3 により, Martingale を考えるときは常に経路が RCLL である version を選ぶこととする.

**定義 1.4** (停止時刻)**.** $[0,\infty]$-値確率変数 $\tau$ が停止時刻であるとは

$$\{\tau \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t, \quad \forall t \geqslant 0$$

であるときをいう．確率過程 X の $\tau$ による停止過程を $X^\tau(t) := X(\tau \wedge t)$ と書く.

**定理 1.5** (任意抽出定理. [5], THEOREM 77.5, p.189 )**.** X を 一様可積分 *RCLL-Martingale* とする．このとき*,* 任意の停止時刻 $\sigma \leqslant \tau$ に対して

$$E(X_\tau | \mathscr{F}_\sigma) \overset{a.s.}{=} X_\sigma.$$

したがって特に

$$E(X_\tau) = E(X_\sigma) = E(X_0).$$

逆に, 与えられた RCLL-適合過程が Martingale であるための一つの十分条件が次である.

**命題 1.6.** X を *RCLL-*適合過程とする.

*(a)* 任意の有界な停止時刻 $\tau$ に対して*,*

$$X(\tau) \in L^1(\Omega),\ E(X(\tau)) = E(X_0)$$

であるとき, X は *Martingale* である.

*(b)* *(a)* が任意の停止時刻 $\tau$ に対して成り立てば, X は一様可積分 *Martingale.*

証明. (a). $s<t$ と $A\in\mathscr{F}_s$ を任意にとる.

$$\tau_A(\omega):=\begin{cases} s\ ;\ \omega\in A \\ t\ ;\ \omega\in A^c\end{cases}$$

とおくと, これは有界停止時刻であるから, 仮定により

$$E(X_0)=E(X(\tau_A))=\int_A X_s\,dP+\int_{A^c}X_t\,dP,$$
$$E(X_0)=E(X_t)=\int_A X_t\,dP+\int_{A^c}X_t\,dP.$$

よって

$$\int_A X_t\,dP=\int_A X_s\,dP.$$

だから X は Martingale である. (b) は $t=\infty$ のときを考えればよい. □

**定義 1.7** (Local Maritingale)**.** *RCLL*-確率過程 X に対して 次を満たす 停止時刻列 $\tau_n$ が存在するとき, X を *Local Martingale* という.

- $\tau_n\nearrow\infty$ *a.s.*
- 任意の $n$ に対し, $X^{\tau_n}-X_0$ は一様可積分 *Martingale.*

また, このような $\tau_n$ を X の *localizing sequence* という.

**定理 1.8** (Class D)**.** *Local Martingale* X に対して,

$$X \text{ が一様可積分 } \mathit{Martingale} \iff \{X(\tau)\,;\,\tau:\text{有限値の停止時刻}\}\text{ が一様可積分 }.$$

右の条件を満たす確率過程全体を *class D* という.

証明. (⇒) 任意抽出定理 ( [5], THEOREM 77.5, p.189 ) によって明らか.

(⇐) X が Martingale であることを示せば十分である. $\tau\equiv 0$ をとることで $X_0=0$ としてよい. $\tau_n$ を X の localizing sequence とすると $s<t$ に対して

$$E\left(X(\tau_n\wedge t)|\mathscr{F}_s\right)=E\left(X_t^{\tau_n}|\mathscr{F}_s\right)\overset{\text{a.s.}}{=}X(\tau_n\wedge s).$$

$\{X_t^{\tau_n}\}_t$ は一様可積分ゆえ $n\to\infty$ とするとき, $X(\tau_n\wedge t)\overset{L^1}{\to}X_t$. よって, 上の式において $n\to\infty$ とすれば X が Martingale とわかる. □

**定理 1.9** (Fisk)**.** 連続かつ有界変動な *Local Martingale* の経路は定数である.

証明. X を Local Martingale, $\tau_n$ をその localizing sequence とする. $V_t$ を X の $[0,t]$ での総変動とする. $X_0=0$ としてよい. いま,

$$\alpha_n:=\inf\{t\geqslant 0\,;\,|X_t|\geqslant n\}$$
$$\beta_n:=\inf\{t\geqslant 0\,;\,V_t\geqslant n\}$$
$$\rho_n:=\tau_n\wedge\alpha_n\wedge\beta_n$$

とおくと $\rho_n$ は X の localizing sequence である．任意の $n$ に対して

$$X(t,\omega)=0,\quad \forall(t,\omega)\in[0,\rho_n]:=\{(t,\omega)\,;\,t\leqslant\rho_n(\omega)\}$$

が示せれば

$$X(t,\omega)=0,\quad \forall(t,\omega)\in\mathbb{R}_+\times\Omega=\bigcup_n[0,\rho_n]$$

を得るから, X を有界な Martingale, $V\leqslant K<\infty$ としてよい．

任意の t に対して $(t_k^{(n)})$ を $[0,t]$ の infinitesimal partition とすると, $X_0=0$ と Martingale 性により

$$E\left(X_t^2\right)=E\left(\sum_k(X_{t_k^{(n)}}-X_{t_{k-1}^{(n)}})^2\right)=KE\left(\max_k\left|X_{t_k^{(n)}}-X_{t_{k-1}^{(n)}}\right|\right)$$

X の $[0,t]$ 上での一様連続性と優収束定理により, 上式右辺は $n\to\infty$ のとき 0 に収束する． ゆえに $X_t\overset{\text{a.s.}}{=}0,\ \forall t\geqslant 0$. X は連続だから $P(X_t=0\ \forall t\geqslant 0)=1$ □

**定義 1.10** (空間 $\mathscr{H}$)**.** *$\mathscr{H}$ を $L^2(\Omega)$-有界な RCLL-Martingale 全体の集合する, すなわち*

$$\mathscr{H}:=\left\{\textit{RCLL-Martingale}\ X\,;\,\sup_t\|X_t\|_{L^2(\Omega)}<\infty\right\}$$

とする．また, $\mathscr{H}_0:=\{X\in\mathscr{H};\ X_0=0\}$ とおく．また, *RCLL*-確率過程 X で, $\tau_n\nearrow\infty$ a.s. なる停止時刻列 $\tau_n$ によって, $X^{\tau_n}\in\mathscr{H}$ となる X 全体を $\mathscr{H}_{\text{loc}}$ とおく．

**命題 1.11.** *$\mathscr{H}$ は 内積 $(X,Y)_{\mathscr{H}}:=E(X_\infty Y_\infty)$ による Hilbert 空間であり．$\mathscr{H}_0$ はその閉部分空間である．ノルムは常に $\|X\|_{\mathscr{H}}:=\|X_\infty\|_{L^2(\Omega)}$ を考える．*

証明. $M\in\mathscr{H}$, $0\leqslant t_n\nearrow\infty$ とすると, Martingale 性により $n>m$ のとき

$$\|M_{t_n}-M_{t_m}\|^2_{L^2(\Omega)}=\|M_{t_n}\|^2_{L^2(\Omega)}-\|M_{t_m}\|^2_{L^2(\Omega)}$$

ゆえ $\|M_{t_n}\|_{L^2(\Omega)}$ は単調増加で, 仮定により上に有界だから, $M_t\overset{L^2}{\to}\exists M_\infty$ $(t\to\infty)$. ゆえに内積とノルムは well-defined である．$(\mathscr{H},\|\cdot\|_{\mathscr{H}})$ の完備性を示す． $X^{(n)}\in\mathscr{H}$ を Cauchy 列とする．すなわち $X_\infty^{(n)}\in L^2(\Omega,\mathscr{F}_\infty,P)$, $\mathscr{F}_\infty:=\sigma\left(\bigcup_{t\geqslant0}\mathscr{F}_t\right)$ を Cauchy 列とする．$L^2$ の完備性から,

$$X_\infty^{(n)}\overset{L^2}{\to}\exists X_\infty,\ (n\to\infty).$$

いま,

$$X_t:=E\left(X_\infty|\mathscr{F}_t\right)$$

とおくと, $X_t$ は $L^2$-有界 Martingale で, Doob 不等式 ( [5], THEOREM 70.2, p.177 ) から

$$E\left(\sup_t\left|X_t^{(n)}-X_t\right|^2\right)\leqslant 4E\left(\left|X_\infty^{(n)}-X_\infty\right|^2\right)\to0\quad(n\to\infty).$$

部分列をとることで

$$\sup_t\left|X_t^{(n_k)}-X_t\right|\overset{\text{a.s.}}{\to}0\quad(k\to\infty)$$

とできるから $X_t$ は RCLL としてよい．ゆえに $X\in\mathscr{H}$. □

## 2 Quadratic Variation

本章では, $\mathscr{H}_{\mathrm{loc}}$ の元に対して Quadratic Variation が一意に存在することを示し, 次いで, Quadratic Variation の停止時刻による任意停止の公式と, $\mathscr{H}$ の元の Quadratic Variation による特徴付けを示す. $\mathscr{H}$ の元に対する Quadratic Variation の存在は, Ito-Stieltjes 積分の存在と部分積分公式から自然に導かれ, Fisk の定理 1.9 によって一意性が保証される. この一意性から Quadratic (Co-)Variation の停止公式が得られ, Localization によって Quadratic Variation の存在は $\mathscr{H}_{\mathrm{loc}}$ の元へと拡張される.

### 2.1 Ito-Stieltjes 積分の存在

Quadratic Variation の存在を示すために, まず Ito-Stieltjes 積分の存在を示そう. Ito-Stieltjes 積分は, Riemann-Stieltjes 積分の構成における, 各小区間での代表値を当該小区間の左端点とした場合の積分である. ここでは, Integrator は $\mathscr{H}$ の元とし, Integrand は, 経路が不連続であるが, 不連続点における挙動が単純であるという意味で Regular な確率過程とする.

まず初めに Ito-Stieltjes 積分と Regular な関数の定義を述べよう.

**定義 2.1** (Ito-Stieltjes 積分). $X, Y$ を確率過程とし, $\left(t_k^{(n)}\right)$ を $[a, b]$ の *infinitesimal partition* とする, すなわち,

$$a = t_1^{(n)} < t_2^{(n)} < \cdots < t_{k(n)-1}^{(n)} < t_{k(n)}^{(n)} = b$$
$$\lim_{n\to\infty} \max_k \left| t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)} \right| = 0$$

であるとする. 任意の *infinitesimal partition* $(t_k^{(n)})$ に対して

$$I_n^{(Y)} := \sum_k Y(t_{k-1}^{(n)}) \left( X(t_k^{(n)}) - X(t_{k-1}^{(n)}) \right)$$

が確率収束し, その極限値が $\left(t_k^{(n)}\right)$ の取り方に依らないとき, $Y$ の $X$ に対する *Ito-Stieltjes* 積分が存在するといい, $I_n^{(Y)}$ の極限を $\int_a^b Y dX$ と書く. ◁

**補題 2.2** (Regularity). $f$ は 有界閉区間 $[a, b]$ 上で *regular* であるとする. すなわち, 任意の $x \in [a, b]$ に対して, $f_+(x) := f(x+) := \lim_{z \searrow x} f(z)$, $f_-(x) := f(x-) := \lim_{z \nearrow x} f(z)$ がともに $\mathbb{R}$ 内に存在するとする. このとき次が成り立つ:

*(a)* $f$ の不連続点は高々可算個である.

*(b)* 任意の $c > 0$ に対して, $\{x; |\Delta f(x)| \geqslant c\}$ は有限集合である.

*(c)* ある $d > 0$ に対し $|\Delta f(x)| \leqslant d, \forall x \in [a, b]$ とする. このとき, 任意の $\epsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在して

$$|x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < d + \epsilon.$$

ただし, $\Delta f(x) := f_+(x) - f_-(x)$.

証明. (a) は (b) から直ちに従う. (b) を背理法で示す. 数列 $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ が $|\Delta f(x_n)| \geqslant c$ をみたすとする. $x_n \nearrow x^* \in [a, b]$ としてよい. $x_n, x^*, w, y$ たちを互いに十分近く, かつ $w < x_n < y$ なるようにとれば, $f$ は

regular ゆえ

$$\begin{aligned}|f(x_n+) - f(y)| &< \frac{c}{4}\\ |f(w) - f(x_n-)| &< \frac{c}{4}\\ |f(y) - f(w)| &< \frac{c}{4}\end{aligned}$$

とできる．よって

$$\begin{aligned}c &\leqslant |f(x_n+) - f(x_n-)|\\ &< |f(x_n+) - f(y)| + |f(y) - f(w)| + |f(w) - f(x_n-)|\\ &< \frac{3}{4}c.\end{aligned}$$

(c) も背理法で示す．$\delta_n \searrow 0$ に対して，

$$|x_n - y_n| \leqslant \delta_n, \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geqslant d + \epsilon_0 \tag{2.1}$$

を満たす $\epsilon_0 > 0$, $x_n, y_n \in [a, b]$ が存在すると仮定する． $x_n \to x^*, y_n \to x^*$ としてよい． さらに，$x_n \leqslant x^* \leqslant y_n$ としてよい．なぜなら，もし無限個の $n$ に対して $x_n, y_n \leqslant x^*$ とすると (2.1) と $f$ の regular 性に反するからである．したがって $x_n \nearrow x^*, y_n \searrow x^*$ としてよいが，このとき $|\Delta f(x)| \geqslant d + \epsilon_0$ となり，(c) の仮定に反する． □

**命題 2.3** (Ito-Stieltjes 積分の存在)**.** $Y$ を $[a, b]$ 上で *regular* な適合過程とし，$X \in \mathscr{H}$ とすると，*Ito-Stieltjes* 積分 $\int YdX$ が存在する．すなわち，任意の *infinitesimal partition* $\left(t_k^{(n)}\right)$ に対して

$$I_n^{(Y)} := \sum_k Y(t_{k-1}^{(n)}) \left(X(t_k^{(n)}) - X(t_{k-1}^{(n)})\right)$$

は確率収束する．このとき，

$$\int YdX = \int Y_- dX = \int Y_+ dX. \tag{2.2}$$

証明．任意に $\eta > 0$, $\epsilon > 0$ をとり，以下のように記号を定める．

$$\begin{aligned}c &:= \sqrt{\frac{\eta\epsilon^2}{48(\|X_b\|^2_{L^2(\Omega)} - \|X_a\|^2_{L^2(\Omega)})}}\\ J_t &:= \Delta Y_t 1_{\{|\Delta Y_t| \geqslant c\}}\\ U_t &:= Y_t - J_t\end{aligned}$$

$J_t$ は有限個のジャンプしか持たないから，$X$ の右連続性により

$$I_n^{(J)} := \sum_k J(t_{k-1}^{(n)}) \left(X(t_k^{(n)}) - X(t_{k-1}^{(n)})\right) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

ゆえに $n, m$ を十分大きくとれば

$$P\left(\left|I_n^{(J)} - I_m^{(J)}\right| > \frac{\epsilon}{2}\right) < \frac{\eta}{3}. \tag{2.3}$$

一方，

$$\begin{aligned}U^*_\delta(u, \omega) &:= \sup\{|U_s - U_t|\,;\, s, t \in \mathbb{Q} \cup \cap [a, b],\, |s - t| < \delta\},\\ \tau := \tau_\delta &:= \inf\{u \geqslant 0\,;\, U^*_\delta(u) > c\} \wedge b,\\ V &:= U^\tau\end{aligned}$$

とおくと $\tau$ は停止時刻である．$\lim_{\delta\to 0} U^*_\delta(u) = \sup_t |\Delta U_t| \leqslant c$ ゆえ $\delta > 0$ を十分小さくとれば

$$P(\tau < b) < \frac{\eta}{3}$$
$$|s-t| < \delta \quad \Rightarrow \quad |V_s - V_t| \leqslant 2c.$$

このとき，infinitesimal partition $t^{(n)}_k$, $t^{(m)}_l$ の幅が $\delta/2$ より小さくなるよう $n$, $m$ を十分大きくとれば，Chebyshev 不等式と $X$ の Martingale 性により

$$\begin{aligned} P\left(\left|I^{(V)}_n - I^{(V)}_m\right| > \frac{\epsilon}{2}\right) &\leqslant 4\left\|I^{(V)}_n - I^{(V)}_m\right\|^2_{L^2(\Omega)} \epsilon^{-2} \\ &\leqslant 16c^2\epsilon^{-2}\left(\|X_b\|^2_{L^2(\Omega)} - \|X_a\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \\ &= \frac{\eta}{3}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

(2.3) (2.4) により $n$, $m$ を十分大きくとれば $A := \{\tau < b\}$ とおくとき

$$\begin{aligned} P\left(\left|I^{(Y)}_n - I^{(Y)}_m\right| > \epsilon\right) &\leqslant P\left(\left|I^{(J)}_n - I^{(J)}_m\right| > \frac{\epsilon}{2}\right) + P\left(\left|I^{(U)}_n - I^{(U)}_m\right| > \frac{\epsilon}{2}\right) \\ &\leqslant \frac{\eta}{3} + P\left(A \cap \left|I^{(U)}_n - I^{(U)}_m\right| > \frac{\epsilon}{2}\right) + P\left(A^c \cap \left|I^{(V)}_n - I^{(V)}_m\right| > \frac{\epsilon}{2}\right) \\ &\leqslant P(A) + P\left(A^c \cap \left|I^{(V)}_n - I^{(V)}_m\right| > \frac{\epsilon}{2}\right) \\ &\leqslant \eta. \end{aligned}$$

よって，$I^{(Y)}_n$ は確率収束する．

(2.2) を示すには

$$S_n := \sum_k \left(Y(t^{(n)}_{k-1}) - Y_-(t^{(n)}_{k-1})\right)\left(X(t^{(n)}_k) - X(t^{(n)}_{k-1})\right) \xrightarrow{P} 0$$

を示せば十分である．

$$W := Y - Y_-$$

とおくと，$|W_t| \geqslant d$ $(d > 0)$ となる $t$ は有限個しかないとわかるから，

$$\sum_k W1_{\{|W|\geqslant d\}}\left(t^{(n)}_{k-1}\right)\left(X(t^{(n)}_k) - X(t^{(n)}_{k-1})\right) \xrightarrow{P} 0.$$

よって，はじめから $|W| < d$ としてよい．いま，任意に $\eta > 0$, $\epsilon > 0$ をとり

$$d := \sqrt{\frac{\eta\epsilon^2}{\|X_b\|^2_{L^2(\Omega)} - \|X_a\|^2_{L^2(\Omega)}}}$$

と選ぶと

$$\begin{aligned} P(|S_n| > \epsilon) &\leqslant \epsilon^{-2}\|S_n\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leqslant d^2\epsilon^{-2}\left(\|X_b\|^2_{L^2(\Omega)} - \|X_a\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \\ &= \eta. \end{aligned}$$

□

上のように構成された Ito-Stieltjes 積分は 区間 $[a,b]$ を定めるごとに確率 1 の集合上で定義された確率変数に過ぎない. 次の命題は, Integrand が有界であれば Ito-Stieltjes 積分を確率過程と見なしてよいことを主張する.

**命題 2.4** (Ito-Stieltjes 積分に対する RCLL version の存在)**.** $Y$ を $[a,b]$ 上で有界かつ *regular* な適合過程とし, $X \in \mathscr{H}$ とする. このとき, $\int YdX$ の *version* で *RCLL-Martingale* なもの $Y \bullet X$ が存在し, 任意の *infinitesimal partition* $\left(t_k^{(n)}\right)$ に対して次が成り立つ.

$$\sup_{a\leqslant s\leqslant t} |I_n^{(Y_+)}(s) - Y \bullet X(s)| \xrightarrow{P} 0.$$

ただし,

$$I_n^{(Y_+)}(s) := \sum_k Y_+(t_{k-1}^{(n)} \wedge s) \left(X(t_k^{(n)} \wedge s) - X(t_{k-1}^{(n)} \wedge s)\right).$$

証明. $K := \sup_{t,\,\omega} |Y(t,\,\omega)|$ とおく. $Y_+$ は適合的で $|Y_+| \leqslant K$ だから $I_n^{(Y_+)}(t)$ は Martingale である. さらに

$$\left\|I_n^{(Y_+)}(t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leqslant K^2 \left(\|X_b\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|X_a\|_{L^2(\Omega)}^2\right), \quad \forall t \in [a,b]$$

だから $I_n^{(Y_+)}(t)$ は $L^2(\Omega)$-有界. よって $I_n^{(Y_+)}(t)$ は一様可積分だから,

$$I_n^{(Y_+)}(t) \xrightarrow{L^1} Y \bullet X(t) \overset{\text{a.s.}}{=} \int_a^t Y_+ dX \overset{\text{a.s.}}{=} \int_a^t YdX.$$

$I_n^{(Y_+)}(t)$ の Martingale 性により

$$I_n^{(Y_+)}(s) \overset{\text{a.s.}}{=} E\left(I_n^{(Y_+)}(t) \,|\, \mathscr{F}_s\right)$$

だから

$$Y \bullet X(s) \overset{\text{a.s.}}{=} E\left(Y \bullet X(t) \,|\, \mathscr{F}_s\right).$$

Doob 不等式により, $\lambda > 0$ に対して

$$P\left(\sup_t \left|I_n^{(Y_+)}(t) - I_m^{(Y_+)}(t)\right| > \lambda\right) \leqslant \lambda^{-1} \left\|I_n^{(Y_+)}(b) - I_m^{(Y_+)}(b)\right\|_{L^1(\Omega)} \to 0.$$

したがって, 部分列を適当に選ぶことで, $Y \bullet X$ は RCLL な $I_{n(k)}^{(Y_+)}$ の一様概収束極限としてよいから, RCLL としてよい. □

## 2.2 Quadratic Varation の構成と性質

Ito-Stieltjes 積分の存在から直ちに従う部分積分公式を用いて $\mathscr{H}$ の元に対する Quadratic Variation が構成される (定理 2.7). 次いで, Localization によって Quadratic variation を $\mathscr{H}_{\text{loc}}$ へと拡張する (定理 2.8).

**定義 2.5** (Quadratic (Co-)Variation)**.** $X, Y$ を $[a,b]$ 上の確率過程, $\left(t_k^{(n)}\right)$ を $[a,b]$ の *infinitesimal partition* とする.

$$\sum_k \left(X(t_k^{(n)}) - X(t_{k-1}^{(n)})\right)\left(Y(t_k^{(n)}) - Y(t_{k-1}^{(n)})\right)$$

が確率収束し, 極限が $\left(t_k^{(n)}\right)$ の選び方に依らないとき, その極限を $[X,Y]_a^b$ と書き, $X$ と $Y$ の $[a,b]$ 上での *Quadratic Co-Variation (QCV)* といい, $[X]_a^b := [X,X]_a^b$ を $X$ の $[a,b]$ 上での *Quadratic Variation (QV)* という. ◁

**定理 2.6** (部分積分公式)**.** 任意の $M, N \in \mathscr{H}$ と，任意の有界区間 $[a, b]$ に対して $[M, N]_a^b$ が存在し，

$$(MN)_b - (MN)_a = \int_a^b M_- dN + \int_a^b N_- dM + [M, N]_a^b$$

が成り立つ．ただし，右辺の積分は *Ito-Stieltjes* 積分である．

証明. $\left(t_k^{(n)}\right)$ を $[a, b]$ の infinitesimal partition とする．

$$\begin{aligned}
&M(t_k^{(n)})N(t_k^{(n)}) - M(t_{k-1}^{(n)})N(t_{k-1}^{(n)}) \\
&\overset{\text{a.s.}}{=} M(t_{k-1}^{(n)})\left(N(t_k^{(n)}) - N(t_{k-1}^{(n)})\right) + N(t_{k-1}^{(n)})\left(M(t_k^{(n)}) - M(t_{k-1}^{(n)})\right) \\
&\quad + \left(M(t_k^{(n)}) - M(t_{k-1}^{(n)})\right)\left(N(t_k^{(n)}) - N(t_{k-1}^{(n)})\right)
\end{aligned}$$

の $k$ についての和をとり，$n \to \infty$ とすればよい． □

定義 2.5 における $[X]_0^t$ は確率過程ではないが，次の命題の意味で QV と一致する $\mathscr{H}$ の元が取れる．

**命題 2.7** (簡易版 Doob-Mayer 分解 1)**.** $M \in \mathscr{H}$ かつ $M_-$ を有界とすると，*RCLL* かつ単調増加な $[M](t)$ で，

- $[M](0) = 0$
- $\Delta[M] = (\Delta M)^2$
- $M^2 - [M]$ が *Maritingale*

であるものが *indistinguishable* の意味で一意に存在する． この $[M]$ も *Quadratic Variation* (または，*Quadratic Variation* 過程) という．また任意の $[0, t]$ の *infinitesimal partition* $\left(t_k^{(n)}\right)$ に対して

$$\sup_{s \leqslant t} |Q_n(s) - [M](s)| \xrightarrow{P} 0. \tag{2.5}$$

ただし，

$$Q_n(s) := \sum_k \left(M(t_k^{(n)} \wedge s) - M(t_{k-1}^{(n)} \wedge s)\right)^2.$$

証明. 任意に $t \geqslant 0$ をとる．部分積分公式 (定理 2.6) により

$$[M]_0^t \overset{\text{a.s.}}{=} M_t^2 - M_0^2 - 2\int_0^t M_- dM.$$

仮定により，右辺第三項は RCLL-Martingale としてよいから

$$[M](t) := M_t^2 - M_0^2 - 2\int_0^t M_- dM.$$

も RCLL としてよく，$M^2 - [M]$ は Maritingale である．単調性は $[M](t)$ の右連続性と次から出る:

$$P\left([M](q_1) \leqslant [M](q_2) \quad \forall q_1, q_2 \in \mathbb{Q},\ q_1 \leqslant q_2\right) = 1.$$

(2.5) は次の変形による:

$$\begin{aligned}
Q_n(s) &= \sum_k \left(M^2(t_k^{(n)} \wedge s) - M^2(t_{k-1}^{(n)} \wedge s)\right) \\
&\quad - 2\sum_k M(t_{k-1}^{(n)} \wedge s)\left(M(t_k^{(n)} \wedge s) - M(t_{k-1}^{(n)} \wedge s)\right) \\
&= M_s^2 - M_0^2 - I_n^{(M)}(s).
\end{aligned}$$

(2.5) は概収束としてもよいから

$$
\begin{aligned}
\Delta[M](s) &\overset{\text{a.s.}}{=} \lim_{n\to\infty} \Delta Q_n(s) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[ \left( M(s) - M(t^{(n)}_{j(n)-1}) \right)^2 - \left( M(s-) - M(t^{(n)}_{j(n)-1}) \right)^2 \right] \\
&= (\Delta M(s))^2 ,
\end{aligned}
$$

ここに $j(n)$ は $t^{(n)}_{j(n)-1} < s \leqslant t^{(n)}_{j(n)}$ を満たすものをとった. P も題意の性質を満たすとすると, $N := P - [M]$ は有界変動な Martingale であり, $\Delta N = \Delta[M] - \Delta P = 0$ ゆえ連続である. よって定理 1.9 より一意性を得る. □

上の命題の仮定のもとでは, 停止時刻 $\tau$ に対して $(M^2 - [M])^\tau = (M^\tau)^2 - [M]^\tau$ が Martingale であることから, 一意性により $[M^\tau] = [M]^\tau$ であることに注意する. この事実と Locailzation によって前命題を拡張しよう.

**定理 2.8** (簡易版 Doob-Mayer 分解 2)**.** $M \in \mathscr{H}_{\mathrm{loc}}$ に対して, *RCLL* かつ単調増加な $[M](t)$ で,

- $[M](0) = 0$.
- $\Delta[M] = (\Delta M)^2$.
- $M^2 - [M]$ が *Local Maritingale.*

であるものが *indistinguishable* の意味で一意に存在する. この $[M]$ も *Quadratic Variation (*または, *Quadratic Variation* 過程*)* という. また任意の $[0, t]$ の *infinitesimal partition* $\left(t^{(n)}_k\right)$ に対して

$$
\sup_{s\leqslant t} |Q_n(s) - [M](s)| \xrightarrow{P} 0 \tag{2.6}
$$

ただし,

$$
Q_n(s) := \sum_k \left( M(t^{(n)}_k \wedge s) - M(t^{(n)}_{k-1} \wedge s) \right)^2 .
$$

証明. $\tau_n$ を M の localizing sequence とする. $\sigma_n := \inf\{t \geqslant 0\,, |M_{t-}| \geqslant n\}$ は停止時刻で $|M^{\sigma_n}_-| \leqslant n$. よって $\rho_n := \tau_n \wedge \sigma_n$ と定めると $M^{\rho_n}_-$ は有界で $M^{\rho_n} \in \mathscr{H}$. いま, $M_n := M^{\rho_n}$ とおくと

$$
[M_{n+1}]^{\rho_n} = [M^{\rho_n}_{n+1}] = [M_n].
$$

よって

$$
[M_{n+1}] = [M_n] \quad \text{on} \quad [0, \rho_n].
$$

$\rho_n \nearrow \infty$ だから

$$
[M](t, \omega) := [M_n](t, \omega), \quad (t, \omega) \in [0, \rho_n]
$$

によって $[M]$ 定めると, $[M]$ は右連続, 単調増加で $[M](0) = 0$, $\Delta[M] = (\Delta M)^2$. また, 前命題により

$$
(M^2 - [M])^{\rho_n} = (M^{\rho_n})^2 - [M^{\rho_n}] = M_n^2 - [M_n]
$$

は Martingale だから, $M^2 - [M]$ は Local Martingale である.

(2.6) を示す．任意に $\epsilon > 0$ をとる．

$$
\begin{aligned}
Q_n^{(m)}(s) &:= \sum_k \left( M^{\rho_m}(t_k^{(n)} \wedge s) - M^{\rho_m}(t_{k-1}^{(n)} \wedge s) \right)^2 \\
A_n &:= \left\{ \sup_{s \leqslant t} |Q_n(s) - [M](s)| > \epsilon \right\} \\
A_n^{(m)} &:= \left\{ \sup_{s \leqslant t} \left| Q_n^{(m)}(s) - [M]^{\rho_m}(s) \right| > \epsilon \right\}
\end{aligned}
$$

とおく．任意の $\delta > 0$ に対して $n, m$ を十分大きくとれば $P(\rho_m < t) < \delta/2$, $P(A_n^{(m)}) < \delta/2$ とできる．よって

$$
\begin{aligned}
P(A_n) &= P(A_n \cap \{\rho_m < t\}) + P(A_n \cap \{\rho_m \geqslant t\}) \\
&\leqslant P(\rho_m < t) + P(A_n^{(m)}) \\
&< \delta.
\end{aligned}
$$

一意性は前命題 2.7 と同様にして示せる． □

**系 2.9** (Quadratic Co-Variation 過程の存在)**.** $M, N \in \mathscr{H}_{\mathrm{loc}}$ に対して，*RCLL* かつ有界変動な $[M, N](t)$ で，

- $[M, N](0) = 0$
- $\Delta[M, N] = \Delta M \Delta N$
- $MN - [M, N]$ が *Local Maritingale*

であるものが *indistinguishable* の意味で一意に存在する．また任意の $[0, t]$ の *infinitesimal partition* $\left(t_k^{(n)}\right)$ に対して

$$
\sup_{s \leqslant t} |R_n(s) - [M, N](s)| \xrightarrow{P} 0. \tag{2.7}
$$

ここで，

$$
R_n(s) := \sum_k (M(t_k^{(n)} \wedge s) - M(t_{k-1}^{(n)} \wedge s))(N(t_k^{(n)} \wedge s) - N(t_{k-1}^{(n)} \wedge s)).
$$

証明．一意性は定理 1.9 による．

$$
[M, N] := \frac{1}{4} ([M + N] - [M - N]) \tag{2.8}
$$

が系の性質を満たすことを示す．実際, RCLL かつ有界変動かつ $[M, N](0) = 0$ は明らかであり

$$
MN - [M, N] = \frac{1}{4} \left[ \left\{ (M + N)^2 - [M + N] \right\} - \left\{ (M - N)^2 - [M - N] \right\} \right]
$$

は Local Martingale である．また

$$
\begin{aligned}
\Delta[M, N] &= \frac{1}{4} (\Delta[M + N] - \Delta[M - N]) \\
&= \frac{1}{4} \left\{ (\Delta(M + N))^2 - (\Delta(M - N))^2 \right\} \\
&= \Delta M \Delta N.
\end{aligned}
$$

(2.7) は (2.8) より明らか． □

以下で QV の性質を述べる．

**命題 2.10** (QV 停止公式). $M, N \in \mathscr{H}_{\mathrm{loc}}$, $\tau$ を停止時刻とすると

$$[M]^\tau = [M^\tau]$$
$$[M,N]^\tau = [M^\tau, N^\tau] = [M^\tau, N].$$

証明. $(M^2 - [M])^\tau = (M^\tau)^2 - [M]^\tau$ は Local Martingale ゆえ $[M^\tau] = [M]^\tau$.

$[M,N]^\tau = [M^\tau, N^\tau]$ は (2.8) より明らか. 最後の等式を示す.

$$\begin{aligned} M^\tau - [M,N]^\tau &= M^\tau N - M^\tau N^\tau + M^\tau N^\tau + M^\tau N^\tau - [M,N]^\tau \\ &= M^\tau(N - N^\tau) + (M^\tau N^\tau - [M,N]^\tau) \end{aligned}$$

だから $M^\tau(N - N^\tau)$ が Local Martingale であることを示せばよい. 一般に, $X, Y \in \mathscr{H}$ と有界な停止時刻 $\sigma$ に対し $X^\tau(Y - Y^\tau)(\sigma) \in L^1(\Omega)$ であり, また

$$E\left[X^\tau(Y - Y^\tau)(\sigma)\right] = E\left[E\left(X_{\tau\wedge\sigma}\left(Y_\sigma - Y_{\tau\wedge\sigma}\right) \mid \mathscr{F}_{\tau\wedge\sigma}\right)\right] = 0$$

だから $X^\tau(Y - Y^\tau)$ は Martingale である. ゆえに $\rho_n$ を $M, N$ の localizing sequence とすると $(M^{\rho_n\wedge\tau} - M_0)(N^{\rho_n} - N^{\rho_n\wedge\tau})$ は Martingale である. これより $M^\tau(N - N^\tau)$ が Local Martingale とわかる. □

次の命題は明らかであろう.

**命題 2.11.** $L, M, N \in \mathscr{H}_{\mathrm{loc}}$ とし, $a, b$ を *a.s.* で有限な $\mathscr{F}_0$-可測確率変数 とすると

$$[M,N] = [N,M]$$
$$[aM + bN, L] = a[M,L] + b[N,L]$$
$$[M - a, N] = [M,N]$$

**命題 2.12** ($\mathscr{H}$ の特徴付け). $M \in \mathscr{H}_{\mathrm{loc}}$ とすると

$$M \in \mathscr{H} \quad \Leftrightarrow \quad M_0 \in L^2(\Omega),\ E\left([M](\infty)\right) < \infty.$$

このうちの一方が成り立つとき $M^2 - [M]$ は一様可積分な *Martingale* である.

証明. ($\Rightarrow$) $M_0 \in L^2(\Omega)$ は明らか. $\tau_n$ を $M^2 - [M]$ の localizing sequence として, $\sigma_n := \tau_n \wedge n$ とおくと

$$E\left(M^2(\sigma_n) - [M](\sigma_n)\right) = E\left(M_0^2\right).$$

仮定と Doob 不等式により

$$E\left(M^2(\sigma_n)\right) \leqslant E\left(\sup_t M_t^2\right) < \infty.$$

ゆえに

$$E\left([M](\sigma_n)\right) = E\left(M^2(\sigma_n)\right) - E\left(M_0^2\right)$$

の右辺は有界となり, 単調収束定理によって $[M](\infty) \in L^1(\Omega)$. またこのとき, $M^2 - [M]$ は class D に属するから一様可積分な Martingale である.

($\Leftarrow$) $\tau$ を停止時刻, $\sigma_n$ を $M$ の localizing sequence とする. $M_-^{\sigma_n} - M_0 \in b\mathscr{H}$ としてよい. $N := M^{\sigma_n\wedge\tau} - M_0$ とおくと

$$N^2(t) = 2\int_0^t N_- dN + [N](t)$$

であり, 右辺第一項は RCLL-Martingale としてよい. すると

$$E\left(N^2(t)\right) = E\left([N](t)\right) = E\left([M^{\sigma_n \wedge \tau}](t)\right) \leqslant E\left([M](\infty)\right) < \infty$$

だから, Fatou の補題により

$$E\left(\left(M - M_0\right)^2(\tau)\right) \leqslant E\left([M](\infty)\right) < \infty.$$

よって $M - M_0$ は class D に属するから Martingale であり, $M - M_0 \in \mathscr{H}$. これと仮定により $M \in \mathscr{H}$. □

**命題 2.13** (Trivial QV の特徴付け)**.** $M \in \mathscr{H}_{\mathrm{loc}}$ に対して

$$M\text{の経路が定数} \quad \Leftrightarrow \quad [M] = 0.$$

証明. ($\Rightarrow$) 明らか.

($\Leftarrow$) $M$ も $M^2$ も Local Martingale とすると $(M - M_0)^2$ も Local Martingale である. これに対する localizing sequence を $\tau_n$ とすると, 任意の $t \geqslant 0$ に対して $E\left[(M(t \wedge \tau_n) - M_0)^2\right] = 0$. よって, $M(t \wedge \tau_n) \overset{\text{a.s.}}{=} M_0$. ゆえに, $M(t) \overset{\text{a.s.}}{=} M_0$. 右連続性から, $P(M_t = M_0\ \forall t \geqslant 0) = 1$. □

# 3 Stochastic Integral

$\mathscr{H}$ の元が定める測度空間上の $L^2$ 空間から $\mathscr{H}$ への, ジャンプについて Lebesgue-Stieltjes 積分と同様の性質を持つ写像として, Stochastic Integral を構成する. このジャンプの性質によって, Stochastic Integral と Quadratic Co-Variation が関連付けられ, 自然に等長性を持つ. 次いで, Stochastic Integral の Integrand と Integrator の空間を Localization によって拡張した後に Stochastic Integral の基本性質を示し, 最後に Ito-Stieltjes 積分, Lebesgue-Stieltjes 積分との関連を示す.

## 3.1 稠密性と Kunita-Watanabe 不等式

以下で見る Stochastic Integral の構成においては, ある Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ 上に定めた線型汎関数が連続であること, また, Integrand の空間に" 単純" な確率過程が稠密に存在すること, すなわち, Integrand の空間が十分に狭いことを利用する. まずこれらの空間を準備しよう.

**定義 3.1** (可予測過程)**.** *LCRL*-適合過程全体が生成する $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ 上の σ- 加法族 $\mathscr{P}$ を可予測 σ- 加法族といい, $X \in m\mathscr{P}$ であるとき, $X$ は可予測 *(Predictable)* であるという.

また, $X$ が次の形であるとき, 可予測階段過程であるという.

$$X := \sum_{i=1}^{n} \xi_i 1_{(t_i, t_{i+1}]}, \quad \xi_i \in b\mathscr{F}_{t_i}.$$

可予測階段過程全体の集合を $\mathscr{S}$ とおく. ◁

$M \in \mathscr{H}_{\mathrm{loc}}$ に対して

$$\alpha_M(C) := E\left(\int_0^\infty 1_C \, d[M]\right), \quad C \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathscr{F}$$

とおくと, $\alpha_M$ は $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\otimes\mathscr{F}$ 上の測度である. ゆえに, 測度空間 $(\mathbb{R}_+\times\Omega,\mathscr{P},\alpha_M)$ 上の二乗可積分関数の同値類全体が成す空間 $L^2(\mathbb{R}_+\times\Omega,\mathscr{P},\alpha_M)$ が定まり, これは

$$\|X\|_M := \sqrt{\int_0^\infty X^2\,d\alpha_M} = \sqrt{E\left(\int_0^\infty X^2\,d[M]\right)}$$

をノルムとして Hilbert 空間になる. また, 任意の停止時刻 $\tau$ に対して,

$$E\left(\int_0^\infty X^2\,d[M^\tau]\right) = E\left(\int_0^\infty X^2 1_{[0,\tau]}\,d[M]\right) = \int_0^\infty X^2 1_{[0,\tau]}\,d\alpha_M$$

である. これを念頭に次のように Integrand の空間を定義する.

**定義 3.2.** $M\in\mathscr{H}_{\mathrm{loc}}$ とするとき,

$$\mathscr{L}^2(M) := L^2(\mathbb{R}_+\times\Omega,\mathscr{P},\alpha_M)$$

は $\|\cdot\|_M$ をノルムとする *Hilbert* 空間を表すこととする. また, 可予測な $X$ で, $\tau_n\nearrow\infty$ a.s. なる停止時刻列 $\tau_n$ によって, $X1_{[0,\tau_n]}\in\mathscr{L}^2(M)\,\forall n$ となるもの全体を $\mathscr{L}^2_{\mathrm{loc}}(M)$ とする. ◁

次の補題は, 可予測階段過程に対する Stochastic Integral の結果を一般の $\mathscr{L}^2(M)$ の元に拡張する際の基礎となる.

**補題 3.3.** 可予測階段過程全体 $\mathscr{S}$ は $\mathscr{L}^2(M)$ で稠密である.

証明. 初めに $\sigma(\mathscr{S})=\mathscr{P}$ を示す. $\sigma(\mathscr{S})\subset\mathscr{P}$ は明らかだから逆の包含関係を示す. それには, 有界な LCRL-適合過程 $L$ が $\mathscr{S}$ の元によって各点で近似されることを示せばよいが, それは

$$L(t,\omega) = \lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k2^n} L\left(\frac{i-1}{2^n}\right)1_{((i-1)/2^n,\,i/2^n]}$$

によって明らか. よって $\sigma(\mathscr{S})=\mathscr{P}$ を得る. $\mathscr{S}$ の $\mathscr{L}^2(M)$ における閉包を $\overline{\mathscr{S}}$ とすると単調族定理 ([5], THEOREM 3.2, p.91) により $b\mathscr{P}=b(\sigma(\mathscr{S}))\subset b\overline{\mathscr{S}}$ であるから $\mathscr{P}\subset\overline{\mathscr{S}}$. □

次の不等式は $\mathscr{L}^2(M)$ における Schwarz 不等式に相当するものである.

**定理 3.4** (Kunita-Watanabe 不等式)**.** $X, Y$ を $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\otimes\mathscr{F}$-可測な確率過程, $M, N\in\mathscr{H}_{\mathrm{loc}}$ とする. 任意の $0\leqslant a\leqslant b\leqslant\infty$ に対して

$$\int_a^b |XY|\,d[M,N] \overset{a.s.}{\leqslant} \sqrt{\int_a^b X^2\,d[M]}\sqrt{\int_a^b Y^2\,d[N]}.$$

証明. 単調収束定理により, $b<\infty$ かつ $X, Y$ は有界としてよい. $\tilde{Y}:=Y\cdot\mathrm{sgn}(XY)$ を考えることで次を示せば十分である:

$$\left|\int_a^b XY\,d[M,N]\right| \overset{\text{a.s.}}{\leqslant} \sqrt{\int_a^b X^2\,d[M]}\sqrt{\int_a^b Y^2\,d[N]}. \tag{3.1}$$

はじめに次を示す.

$$[M,N]_d-[M,N]_c \overset{\text{a.s.}}{\leqslant} \sqrt{[M]_d-[M]_c}\sqrt{[N]_d-[N]_c},\quad \forall c,d\in[a,b], c\leqslant d. \tag{3.2}$$

$c, d$ を固定すると, 任意の $q \in \mathbb{Q}$ に対して

$$0 \overset{\text{a.s.}}{\leqslant} [M+qN]_c^d \overset{\text{a.s.}}{=} ([M]_d - [M]_c) + 2q([M,N]_d - [M,N]_c) \\ + q^2([N]_d - [N]_c). \tag{3.3}$$

よって, ある $A(c,d)$, $P(A(c,d)) = 1$ の上で, $\forall q \in \mathbb{Q}$ に対して, ゆえに $\forall q \in \mathbb{R}$ に対して (3.3) が成り立つ. よって $A(c,d)$ 上で

$$[M,N]_d - [M,N]_c \leqslant \sqrt{[M]_d - [M]_c}\sqrt{[N]_d - [N]_c}.$$

$A := \cap_{c,d\in\mathbb{Q}} A(c,d)$ とおくと, $[M,N], [M], [N]$ の右連続性から (3.2) が成り立つ.

次に $X, Y$ が階段関数の場合に, すなわち

$$X := \sum_k x_k 1_{(t_{k-1},t_k]}, \\ Y := \sum_k y_k (t_{k-1}, t_k] \tag{3.4}$$

の場合に (3.1) を示す. ただし, $(t_k)$ は $[a,b]$ の partition とする. $A$ 上で

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b XY\, d[M,N]\right| &\leqslant \sum_k |x_k y_k|\,|[M,N](t_k) - [M,N](t_{k-1})| \\ &\leqslant \sum_k |x_k y_k| \sqrt{[M](t_k) - [M](t_{k-1})}\sqrt{[N](t_k) - [N](t_{k-1})} \\ &\leqslant \sqrt{\sum_k x_k^2\,([M](t_k) - [M](t_{k-1}))}\sqrt{\sum_k y_k^2\,([N](t_k) - [N](t_{k-1}))} \\ &= \sqrt{\int_a^b X^2\, d[M]}\sqrt{\int_a^b Y^2\, d[N]}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

一般の場合に (3.1) を示す. $\omega \in A$ を固定する. $|X|, |Y| \leqslant K < \infty$ としてよい. Lusin の定理 ([7], 2.24, p.55) により, 以下を満たす (3.4) の形の階段関数 $g_n, h_n$ が存在する:

$$\begin{aligned} &g_n(t) \to X(t,\omega) \quad d[M](\omega) \text{ a.e. } t \\ &h_m(t) \to Y(t,\omega) \quad d[N](\omega) \text{ a.e. } t \\ &\sup_{t,n} |g_n(t)| \vee \sup_{t,m} |h_m(t)| \leqslant K. \end{aligned}$$

ここで, (3.2) により $d[M,N](\omega)$ は $d[M]$, また $d[M]$ について絶対連続ゆえ

$$\begin{aligned} &g_n(t) \to X(t,\omega) \quad d[M,N](\omega) \text{ a.e. } t \\ &h_m(t) \to Y(t,\omega) \quad d[M,N](\omega) \text{ a.e. } t \end{aligned}$$

でもある. (3.5) により

$$\left|\int_a^b g_n h_m\, d[M,N](\omega)\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b g_n^2\, d[M](\omega)}\sqrt{\int_a^b h_m^2\, d[N](\omega)}.$$

$n, m \to \infty$ として, 優収束定理により (3.1) を得る. □

## 3.2 Stochastic Integral の構成と性質

初めに Riesz の表現定理によって Stochastic Integral を構成し, その後, Quadratic Variation の場合と同様に, 停止公式と Localization によって Stochastic Integral を拡張する. 構成により, Integrand から Stochastic Integral への写像は等長性を持ち, これによって Stochastic Integral に対する優収束定理が示される.

**定理 3.5** (Stochastic Integral の構成 1)**.** $M \in \mathscr{H}$, $X \in \mathscr{L}^2(M)$ に対して, 次の結合律 (3.10) を満たす $X \bullet M \in \mathscr{H}_0$ が *indistinguishable* の意味で一意に存在する:

$$[X \bullet M, N] = X \bullet [M, N] \quad \forall N \in \mathscr{H}. \tag{3.6}$$

ただし, 右辺は $X$ の $d[M, N]$ についての *Lebesgue-Stieltjes* 積分 とする. この $X \bullet M$ を $X$ の $M$ に対する *Stochastic Integral* という. このとき,

$$\mathscr{L}^2(M) \ni X \mapsto X \bullet M \in \mathscr{H}_0 \tag{3.7}$$

は等長写像であり,

$$\Delta(X \bullet M) = X\Delta M. \tag{3.8}$$

**注意 3.6.** 定理 3.5 の statement では Integrand $X$ の, 有界変動な Integrator $K$ に対する Stohastic Integral $X \bullet K$ が, 経路ごとの Lebesgue-Stieltjes 積分 $\int X\, dK$ と一致するか否かは述べていない. 当面の間は, $X \bullet [M]$ は Stochastic Integral ではなく, 常に経路ごとの Lebesgue-Stieltjes 積分を意味するものとする. 後に述べる命題 3.14 によって, 可予測な Integrand 上ではこの二つの積分概念が一致することが示される. ◁

証明. まず一意性を示す. (3.10) を満たす $I_1, I_2 \in \mathscr{H}_0$ は $[I_1 - I_2, N] = 0$, $\forall N \in \mathscr{H}$ を満たすから $[I_1 - I_2] = 0$ を満たす. よって $I_1 = I_2$. 存在を示す. Kunita-Watanabe 不等式により

$$\begin{aligned}\left| E\left(\int_0^\infty X d[M, N]\right)\right| &\leqslant \left(E\left(\left|\int_0^\infty X^2 d[M]\right|\right)\right)\left(E\left(\int_0^\infty d[N]\right)\right) \\ &= \|X\|_M \|N\|_{\mathscr{H}} < \infty\end{aligned}$$

だから (3.10) 右辺は確率 1 で有限値で,

$$\mathscr{H}_0 \ni N \mapsto E\left(\int_0^\infty X d[M, N]\right) \in \mathbb{R}$$

は $\mathscr{H}_0$ 上の連続線型汎関数. よって, Riesz の表現定理により, $X \bullet M \in \mathscr{H}_0$ が存在して

$$(X \bullet M, N)_{\mathscr{H}} = E\left(\int_0^\infty X d[M, N]\right).$$

を満たす. ここで, $S := (X \bullet M)N - X \bullet [M, N]$ とおけば, 定理 1.6 により $S$ は Martingale と示せる.

さて, $X \bullet [M, N]$ は Lebesgue-Stieltjes 積分だから,

$$\Delta X \bullet [M, N] = X\Delta[M, N] = X\Delta M \Delta N.$$

ゆえに, (3.8) が示せれば, 二次共変分の一意性により

$$[X \bullet M, N] = X \bullet [M, N] \quad \forall N \in \mathscr{H}_0.$$

これにより, $\mathsf{N} \in \mathscr{H}$ に対して

$$\begin{aligned}[X \bullet M,\ N] &= [X \bullet M,\ N - N_0] \\ &= X \bullet [M,\ N - N_0] \\ &= X \bullet [M,\ N]\end{aligned}$$

が得られ, 定理が示される. (3.8) を示す. はじめに, X が可予測階段過程, すなわち

$$X := \sum_{i=1}^{n} \xi_i 1_{(t_i,\, t_{i+1}]}, \quad \xi_i \in b\mathscr{F}_{t_i}$$

の形であるときに (3.8) を示す. そのためには

$$X \bullet M = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \left(M^{t_{i+1}} - M^{t_i}\right)$$

を示せば十分であるが, $X \mapsto X \bullet M$ は線型であるから,

$$X := \xi 1_{(a,\, b]}, \quad \xi \in b\mathscr{F}_a$$

の場合に示せば十分である. $N \in \mathscr{H}$ に対して

$$\left(M^b - M^a\right) N - \left[M^b - M^a,\ N\right]$$

は一様可積分 Martingale であるから, 定理 1.6 により

$$\xi \left(M^b - M^a\right) N - \xi \left[M^b - M^a,\ N\right]$$

も一様可積分 Martingale である. よって

$$\begin{aligned}E\left(\xi \left[M^b - M^a,\ N\right](\infty)\right) &= E\left(\xi \left(M^b - M^a\right)(\infty) N(\infty)\right) \\ &= \left(\xi \left(M^b - M^a\right),\ N\right)_{\mathscr{H}}\end{aligned}$$

これと $X \bullet M$ の取り方から

$$\begin{aligned}(X \bullet M,\ N) &= E\left(\int_0^\infty X d[M,\ N]\right) \\ &= E\left(\xi\left([M,\ N](b) - [M,\ N](a)\right)\right) \\ &= E\left(\xi \left[M^b - M^a,\ N\right](\infty)\right) \\ &= \left(\xi \left(M^b - M^a\right),\ N\right)_{\mathscr{H}}\end{aligned}$$

よって, $X \bullet M = \xi(M^b - M^a)$. 一般の $X \in \mathscr{L}^2(M)$ に対して (3.8) を示す. 稠密性から $\|X_n - X\|_M \to 0$ なる $X_n \in \mathscr{S}$ が存在するから Doob の不等式, Kunita-Watanabe 不等式により

$$\begin{aligned}E\left(\left(\sup_t |(X \bullet M)_t - (X_n \bullet M)_t|\right)^2\right) &\leqslant 4\, \|((X_n - X) \bullet M)(\infty)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= 4\, \|(X_n - X) \bullet M\|_{\mathscr{H}} \\ &= 4E\left(\int_0^\infty (X_n - X)\, d[M,\ (X_n - X) \bullet M]\right) \\ &\leqslant 4\, \|X_n - X\|_M\, \|(X_n - X) \bullet M\|_{\mathscr{H}} \\ &\leqslant \|X_n - X\|_M \left(\|X_n \bullet M\|_{\mathscr{H}} + \|X \bullet M\|_{\mathscr{H}}\right).\end{aligned}$$

ここで

$$[X_n \bullet M] = [X_n \bullet M, X_n \bullet M] = X_n \bullet [M, X_n \bullet M] = X_n^2 \bullet [M]$$

に注意すると

$$\|X_n \bullet M\|_{\mathscr{H}} = \sqrt{E\left([X_n \bullet M](\infty)\right)} = \sqrt{E\left(\int_0^\infty X_n^2 \, d[M]\right)} = \|X_n\|\, M \tag{3.9}$$

であり, 右辺は取り方より有界列. よって

$$E\left(\left(\sup_t |(X \bullet M)_t - (X_n \bullet M)_t|\right)^2\right) \to 0.$$

部分列をとることで, ある確率 1 の A の上で

$$\sup_t |(X \bullet M)_t - (X_{n_k} \bullet M)_t| \to 0.$$

よって A の上で

$$\Delta X_{n_k} \bullet M \to \Delta X \bullet M.$$

$\Delta X_{n_k} \bullet M = X_{n_k} \Delta M$ に注意すると, A 上では, 全ての M の連続点 s に対し

$$\Delta(X \bullet M)(s) = 0 = X \Delta M(s).$$

M の高々可算個の不連続点 u では $[M]_u > 0$ であり, $X_n$ の取り方より

$$\int_0^\infty (X_n - X)^2 \, d[M] \overset{\text{a.s.}}{\to} 0$$

だから, $X_n(u) \overset{\text{a.s.}}{\to} X(u)$ である. よって

$$\Delta(X \bullet M)(u) \overset{\text{a.s.}}{=} X \Delta M(u)$$

ゆえに

$$\Delta(X \bullet M)(t) \overset{\text{a.s.}}{=} X \Delta M(t). \quad \forall t \geqslant 0.$$

等長性は $X \mapsto X \bullet M$ の線型性と (3.9) より明らか. □

Stochastic Integral を Localization によって拡張するために, 停止公式を示しておく.

**命題 3.7.** $M \in \mathscr{H}$, $X \in \mathscr{L}^2(M)$ とする. 任意の停止時刻 $\tau$ に対して

$$(X \bullet M)^\tau = X \bullet M^\tau = X^\tau \bullet M^\tau = X 1_{[0,\tau]} \bullet M.$$

証明. 任意の $N \in \mathscr{H}$ に対して

$$[(X \bullet M)^\tau, N] = ([(X \bullet M), N])^\tau = (X \bullet [M, N])^\tau = X \bullet [M^\tau, N] = [X \bullet M^\tau, N]$$

だから, $[(X \bullet M)^\tau - X \bullet M^\tau] = 0$. ゆえに, 定理 2.13 により $(X \bullet M)^\tau = X \bullet M^\tau$. 残り 2 つの等式も同様. □

**定理 3.8** (Stochastic Integral の構成 2)**.** $M \in \mathscr{H}_{\text{loc}}$, $X \in \mathscr{L}^2_{\text{loc}}(M)$ とする. このとき, $(X \bullet M)(0) = 0$ なる $X \bullet M \in \mathscr{H}_{\text{loc}}$ で, 次の結合公式 (3.10) を満たすものが一意に存在する*:*

$$[X \bullet M, N] = X \bullet [M, N], \quad \forall N \in \mathscr{H}_{\text{loc}}. \tag{3.10}$$

この $X \bullet M$ は, 次のジャンプ公式と停止公式を満たす.

$$\Delta(X \bullet M) = X\Delta M \tag{3.11}$$

$$(X \bullet M)^{\tau} = X \bullet M^{\tau} = X^{\tau} \bullet M^{\tau} = X1_{[0,\tau]} \bullet M. \tag{3.12}$$

*証明.* 一意性は定理 2.13 による. localizing sequence $\tau_n$ を $M^{\tau_n} \in \mathscr{H}$, $X \in \mathscr{L}(M^{\tau_n})$ なるようにとる. $X \bullet M$ を

$$X \bullet M := X \bullet M^{\tau_n} \quad \text{on} \quad [0, \tau_n]$$

によって定めると, これは well-defined で明らかに RCLL. また定義から

$$(X \bullet M)^{\tau_n} = X \bullet M^{\tau_n} \in \mathscr{H}_0.$$

これより $(X \bullet M)^{\tau_n}$ が一様可積分 Martingale, すなわち $X \bullet M$ が Local Martingale であること, また, $X \bullet M \in \mathscr{H}_{\text{loc}}$ とわかる. また, 構成により

$$\Delta(X \bullet M)^{\tau_n} = \Delta(X \bullet M^{\tau_n}) = X\Delta M^{\tau_n}$$

だから (3.11) は示された. (3.10) は $N^{\tau_n} \in \mathscr{H}$ とするとき

$$[X \bullet M, N]^{\tau_n} = [X \bullet M^{\tau_n}, N^{\tau_n}] = X \bullet [M^{\tau_n}, N^{\tau_n}] = \left(X \bullet [M, N]\right)^{\tau_n}$$

であることによる. (3.12) の初めの等式は

$$((X \bullet M)^{\tau})^{\tau_n} = ((X \bullet M)^{\tau_n})^{\tau} = (X \bullet M^{\tau_n})^{\tau} = X1_{[0,\tau]} \bullet M^{\tau_n} = \left(X1_{[0,\tau]} \bullet M\right)^{\tau_n}.$$

残りの等式も同様にして得られる. □

**定理 3.9** (Stochastic Integral の等長性)**.** $M \in \mathscr{H}_{\text{loc}}$, $X \in \mathscr{L}^2(M)$ とすると,

$$\mathscr{L}^2(M) \ni X \mapsto X \bullet M \in \mathscr{H}_0$$

は等長写像である.

*証明.* $M^{\tau_n} \in \mathscr{H}$ なるように localizing sequence $\tau_n$ をとる. $X1_{[0,\tau_n]} \in \mathscr{L}^2(M)$ である. すると (3.7) により

$$\|(X \bullet M)^{\tau_n}\|_{\mathscr{H}} = \|X \bullet M^{\tau_n}\|_{\mathscr{H}} = \left\|X1_{[0,\tau_n]}\right\|_M.$$

$n \to \infty$ とすると単調収束定理により, $\|X \bullet M\|_{\mathscr{H}} = \|X\|_M < \infty$. □

**命題 3.10** (Stochastic Integral の線形性)**.** $M, M_1, M_2 \in \mathscr{H}_{\text{loc}}$ とし, $X \in \mathscr{L}^2_{\text{loc}}(M_1) \cap \mathscr{L}^2_{\text{loc}}(M_2)$, $X_1, X_2 \in \mathscr{L}^2_{\text{loc}}(M)$ とすると, *a.s.* で有界な $\mathscr{F}_0$-可測確率変数に $a, b$ に対して

$$X \bullet (aM_1 + bM_2) = a(X \bullet M_1) + b(X \bullet M_2),$$
$$(aX_1 + bX_2) \bullet M = a(X_1 \bullet M) + b(X_2 \bullet M).$$

*証明.* ある停止時刻列 $\tau_n \nearrow \infty$ a.s. によって, $\int_0^\infty X^2 1_{[0,\tau_n]}\, d[M_i] < \infty$ とでき, Kunita-Watanabe 不等式から

$$[M_1 + M_2] \leqslant 2\left([M_1] + [M_2]\right)$$

だから

$$\int_0^\infty X^2 1_{[0,\tau_n]}\, d[M_1+M_2] \leqslant 2\left(\int_0^\infty X^2 1_{[0,\tau_n]}\, d[M_1] + \int_0^\infty X^2 1_{[0,\tau_n]}\, d[M_2]\right) < \infty.$$

すなわち, $X \in \mathscr{L}^2_{\mathrm{loc}}(M_1+M_2)$. また, 停止時刻の増大列

$$\sigma_n := \begin{cases} \infty \ ; \ |a| \leqslant n \\ 0 \ \ ; \ |a| > n \end{cases}$$

によって $X1_{[0,\tau_n\wedge\sigma_n]} \in \mathscr{L}^2(aM_1)$ となるから $X \in \mathscr{L}^2_{\mathrm{loc}}(aM_1+bM_2)$. よって, 一つ目の等式の左辺は存在し, $N \in \mathscr{H}_{\mathrm{loc}}$ に対して

$$\begin{aligned}[X \bullet (aM_1 + bX_2), N] &= X \bullet [aM_1 + bX_2, N] \\ &= aX \bullet [M_1, N] + bX[M_2, N] \\ &= [a(X \bullet M_1) + b(X \bullet M_2), N]\end{aligned}$$

これと 定理 2.13 より一つ目の等式を得る. 二つ目の等式も同様. □

**定理 3.11** (Stochastic Integral に対する優収束定理)**.** $M \in \mathscr{H}_{\mathrm{loc}}$ とし, $X_n \in m\mathscr{P}$ が各点 $(t,\omega)$ で $X_\infty$ に収束するとする. このとき, $|X_n| \leqslant Y$ なる $Y \in \mathscr{L}^2_{\mathrm{loc}}(M)$ が存在すれば

$$\sup_{s\leqslant t} |(X_n \bullet M)_s - (X_\infty \bullet M)| \xrightarrow{P} 0 \quad n \to \infty.$$

証明. $X_\infty \equiv 0$ としてよい. $\epsilon, \delta > 0$ をとる. ある停止時刻 $\tau$ によって $Y \in \mathscr{L}^2(M^\tau)$, $P(\tau < t) < \delta/2$ とできる.

$$\begin{aligned} A &:= \left\{\sup_{s\leqslant t} |(X_n \bullet M)_s| > \epsilon\right\}, \\ A^{(n)}_\tau &:= \left\{\sup_{s\leqslant t} |(X_n \bullet M^\tau)_s| > \epsilon\right\}\end{aligned}$$

と定めると,

$$P(A) = P(\{\tau < t\} \cap A) + P(\{\tau \geqslant t\} \cap A) \leqslant \frac{\delta}{2} + P\left(A^{(n)}_\tau\right).$$

いま, $X_n \in \mathscr{L}^2(M^\tau)$ であるから

$$\|X_n\|_{M^\tau} = E\left(\int_0^\infty X_n^2 1_{[0,\tau]}\, d[M]\right) \to 0 \quad n \to \infty.$$

定理 3.9 により $\|X_n \bullet M^\tau\|_{\mathscr{H}} \to 0$ $(n \to \infty)$. ゆえに Doob 不等式により

$$E\left(\left(\sup_{s<\infty} |X_n \bullet M^\tau|_s\right)^2\right) \leqslant 4\,\|X_n \bullet M^\tau\|^2_{\mathscr{H}} \to 0.$$

よって, $P\left(A^{(n)}_\tau\right) \to 0$. ゆえに $n$ を十分大きくとれば $P(A) \leqslant \delta$. □

## 3.3 Ito-Stieltjes 積分, Lebesgue-Stieltjes 積分との関係

Lebesgue 積分論と同様に, 単純な Integrand に対する Stochastic Integral の結果を優収束定理 3.11 によって一般の Integrand に拡張することができる. これを利用すると Stochastic Integral と他の積分との関係を述べることができる (定理 3.13, 命題 3.14).

**補題 3.12.** $M \in \mathscr{H}_{\mathrm{loc}}$ とする. 可予測過程 $X$ は次の形であるとする:

$$X := \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n 1_{(\tau_n, \tau_{n+1}]}.$$

ただし, $\tau_n$ は $\tau_n \nearrow \infty$ なる停止時刻列で, $\xi_n \in b\mathscr{F}_{\tau_n}$ とする. このとき

$$(X \bullet M)(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \left( X(\tau_{n+1} \wedge t) - X(\tau_n \wedge t) \right).$$

証明. $X \in \mathscr{H}_{\mathrm{loc}}$ だから $X^{\pm} \in \mathscr{H}_{\mathrm{loc}}$ である. $X \geqslant 0$ のときに示せば十分である. $X := \xi 1_{(\sigma,\tau]}$, $0 \leqslant \xi \in b\mathscr{F}_\sigma$ のときは

$$[X \bullet M, N] = \int_0^\infty \xi 1_{(\sigma,\tau]} \, d[M,N] = [\xi (M^\tau - M^\sigma), N] \quad \forall N \in \mathscr{H}_{\mathrm{loc}}$$

より補題は成立する. ゆえに $X \mapsto X \bullet M$ の線型性により $X_n := \sum_{i=1}^n \xi_i 1_{(\tau_i, \tau_{i+1}]}$ に対しても補題は成立し, 全ての $n$ に対して $0 \leqslant X_n \leqslant X \in \mathscr{H}_{\mathrm{loc}}$ だから優収束定理 3.11 によって $X \geqslant 0$ に対して補題が成り立つ. □

**定理 3.13** (Ito-Stieltjes 積分との関係)**.** $M \in \mathscr{H}_{\mathrm{loc}}$, $X$ を *LCRL*-適合過程とする. 停止時刻列 $\left(\tau_k^{(n)}\right)$ が

$$\tau_k^{(n)} \leqslant \tau_{k+1}^{(n)} \nearrow \infty \quad k \to \infty,$$
$$\lim_{n\to\infty} \max_k \left| \tau_{k+1}^{(n)}(\omega) - \tau_k^{(n)}(\omega) \right| = 0 \quad \forall \omega$$

を満たすとする. また, $I_n^{(X)}$ を $\left(\tau_k^{(n)}\right)$ に基づく *Ito-Stieltjes* 近似和とする. すなわち

$$I_n^{(X)}(t) := \sum_k X(\tau_k^{(n)} \wedge t) \left( M\left(\tau_{k+1}^{(n)} \wedge t\right) - M\left(\tau_k^{(n)} \wedge t\right) \right)$$

とする. このとき,

$$\sup_{s \leqslant t} \left| I_n^{(X)}(s) - (X \bullet M)(s) \right| \xrightarrow{P} 0 \quad \forall t \geqslant 0.$$

証明. $X_n := \sum_k X(\tau_k^{(n)}) 1_{(\tau_k^{(n)}, \tau_{k+1}^{(n)}]}$ とおく. $X$ は LCRL ゆえ $X(\tau_k^{(n)})$ は $k, n$ を任意に取るごとに有界としてよい. ゆえに補題 3.12 より

$$(X_n \bullet M)_t = \sum_k X(\tau_k^{(n)} \wedge t) \left( M\left(\tau_{k+1}^{(n)} \wedge t\right) - M\left(\tau_k^{(n)} \wedge t\right) \right) = I_n^{(X)}(t).$$

一方で, $X_n$ は左連続ゆえ, 各点 $(t,\omega)$ で $X_n \to X$ であり,

$$X^*(t) := \sup_{s<t} |X(s)| \in \mathscr{L}^2_{\mathrm{loc}}(M)$$

だから, 定理 3.11 により結論を得る. □

**命題 3.14** (Lebesgue-Stieltjes 積分との関係). $M \in \mathscr{H}_{\mathrm{loc}}$ を固定する. $X \in \mathscr{L}^2_{\mathrm{loc}}(M)$ に対して, *Stochastic Integral* $(X \bullet M)_t$ と *Lebesgue-Stieltjes* 積分 $\int_0^t X\,dM$ が任意の $t$ において *a.s.* で有限に存在すれば, 両者は *indistinguishable.*

証明. 単調族定理による.

$$\mathscr{A} := \left\{ X \in b\mathscr{P} \,;\, X \bullet M = \int X\,dM \right\}$$

とおく. 積分の線型性から, $\mathscr{A}$ はベクトル空間であり, 補題 3.12 により, $\mathscr{S} \subset \mathscr{A}$. また, $\mathscr{S}$ は積に閉じる. $\mathscr{A} \ni X_n \to X$, $\sup_{t,\omega} |X_n(t,\omega)| \leqslant K < \infty$ とすると, 任意の $t$ において 優収束定理と定理 3.11 により $(X \bullet M)_t = \int_0^t X\,dM$ a.s. 両辺とも右連続ゆえ, indistinguishable である. よって $X \in \mathscr{A}$. 以上と単調族定理により, $b\mathscr{P} \subset \mathscr{A}$.

ある $X \in m\mathscr{P}$ に対して命題の仮定が成り立つとすると, $X_n := X1_{|X| \leqslant n} \in b\mathscr{P}$ に対して両積分は一致するから, $X_n$ に対して上の議論を繰り返せばよい. □

## 参考文献


[1] Steven E. Shreve Ioannis Karatzas. *Brownian motion and Stochastic Calculus*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2nd edition, 1991.

[2] Hiroshi Kunita and Shinzo Watanabe. *On Square Integrable Martingales*. Nagoya Math. J.30 (1967), 209-245.

[3] Peter Medvegyev. *Stochastic integration theory*. Oxford graduate texts in mathematics 14. Oxford University Press, 2007.

[4] Philip E. Protter. *Stochastic Integration and Differential Equations*. Springer, 2nd edition, 2003.

[5] L.C.G. Rogers and David Williams. *Diffusions, Markov Processes and Martingales. Vol. 1*. Cambridge University Press, 2nd edition, 1994.

[6] L.C.G. Rogers and David Williams. *Diffusions, Markov Processes and Martingales. Vol. 2*. Cambridge University Press, 2nd edition, 1994.

[7] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill Book Co., 1987.