Chapter18逆矩阵，克拉默法则，体积

Section1.逆矩阵的求法

Subsection1.利用伴随矩阵求解逆矩阵的方式

我们在高斯-若尔当方法中介绍了求解逆矩阵的方式，我们这里介绍另外一种求解逆矩阵的方式并给出证明:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}C^T$$

C是代数余子式的矩阵: $\begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$,因此$C^T=\begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$
并且$C^T=A^*$，叫做伴随矩阵。

Subsection2.证明:

实际上就是考虑$AC^T=(\det A)I$.

即 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}=Res$其中$Res=Result$
而对角线元素$Res_{nn}=a_{n1}C_{n1}+a_{n2}C_{n2}+\cdots+a_{nn}C_{nn}=detA$，而非对角元素我们处理就很有意思了:$Res_{mn}=a_{m1}C_{n1}+a_{m2}C_{n2}+\cdots+a_{mn}C_{nn}$,我们注意到其中的代数余子式中也会包括$a_{m1},a_{m2}\cdots a_{mn}$,因此我们构造一个新的矩阵:

$$A'=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

由于我们运算中需要用到C_{ni}，因此我们把第n行的元素置换，换的目标成为C_{ni}的系数a_{mi}，因此我们从最后一行展开，即:$Res_{mn}=a_{m1}C_{n1}+a_{m2}C_{n2}+\cdots+a_{mn}C_{nn}$，而这正是$detA'$，显然由于两行相同，因此$detA'=0$.

提示

类似于$Res_{mn}=a_{m1}C_{n1}+a_{m2}C_{n2}+\cdots+a_{mn}C_{nn}$的系数乘以代数余子式相加的形式是可以重新构造为一个新的行列式的。

Section2.克拉默法则

根据Section1.逆矩阵的求法，可以知道

$$Ax=b\to x=A^{-1}b\to x=\frac{C^T}{detA}b$$

我们专注于分析x的每个分量$x_1\cdots x_n$，会有$x_1=C_{11}b_1+C_{21}b_2+\cdots+C_{n1}b_{nn}$,我们说过"类似于这个形式的和是可以重新构造为一个新的行列式的。",因为代数余子式是第一列的代数余子式，在这里的构造的新的行列式相当于把A的第一列换成b的行列式:

$$A_1=\begin{bmatrix}b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

那么$x_1=\frac{detA_1}{detA}$，而x_n的解为:

$$x_n=\frac{detA_n}{detA}\text{，其中}A_n\text{是把第}n\text{列换为}b\text{的矩阵}$$

上面这个就是克拉默法则，我们可以注意到，要求A必须是方阵才可行，并且这个方法计算量很大。

Section3.行列式的几何意义(体积)

我们知道矩阵可以视为是几个向量组成的，我们可以认为是列向量或者是行向量，那么如果我们关注列向量，把列向量视为x,y,z等坐标，那么作为方阵显然他们都会在同一个维度里成为向量，那么他们围成的体积/面积就是行列式的绝对值。(当然，行向量的视角也是一样的，毕竟$detA=detA^T$)

我们考虑一个手法:如果我说明了这些向量组成的体积具有行列式的三性质，那么说明体积就是行列式。

来看三维空间中的情形，对于3阶方阵A，取第一行(a_1,a_2,a_3)，令其为三维空间中点A_1的坐标，同理有点A_2,A_3。连接这三个点与原点可以得到三条边，使用这三条边展开得到一个平

行六面体，$\|\det A\|$就是该平行六面体的体积。

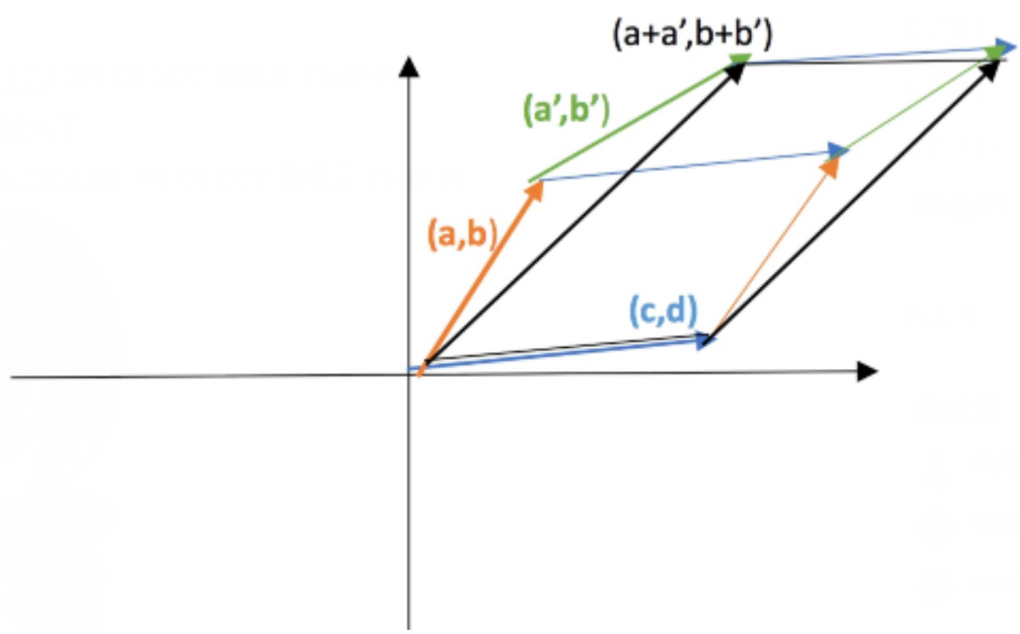
对于行列式性质1,现在我们取矩阵$A=Q$，而Q是一个标准正交矩阵，此时这个箱子是一个立方体，可以看出其实这个箱子就是刚才的单位立方体经过旋转得到的。对于标准正交矩阵，有$Q^TQ=I$，等式两边取行列式得$\det(Q^TQ)=1=|Q^T|\,|Q|$，而根据行列式性质10有$|Q^T|=|Q|$，所以$原式=|Q|^2=1,|Q|=\pm 1$。

对于行列式性质2，我们交换两行并不会改变箱子的大小，同时行列式的绝对值也没有改变，得证。

对于行列式性质3.a,接下来在考虑不再是“单位”的立方体，即长方体。 假设Q矩阵的第一行翻倍得到新矩阵Q_2，此时箱子变为在第一行方向上增加一倍的长方体箱子，也就是两个“标准正交箱子”在第一行方向上的堆叠。易知这个长方体箱子是原来体积的两倍，而根据行列式性质3.a有$\det Q_2=\det Q$，于是体积也符合行列式的数乘性质。

对于行列式性质3.b,首先指出,对于2阶矩阵,其行列式等于一个平行四边形的面积。我们来看2阶方阵的情形。在二阶情况中,行列式就是一个求平行四边形面积的公式,原来我们求由四个点$(0,0),(a,b),(c,d),(a+c,b+d)$围成的四边形的面积,需要先求四边形的底边长度,再作高得到高度来求解;而现在从线性代数的角度出发,令$A=\begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix}$,只需要计算$\det(A)=ad-bc$即可(更加常用的是求由$(0,0),(a,b),(c,d)$围成的三角形的面积,即$\frac{1}{2}(ad-bc)$)。

那么2阶方阵的面积是否具有行列式的性质$|A+A'|=|A|+|A'|$呢?我们很容易从几何上看出这一点,如下图:



上图中，左右两边的三角形显然是全等三角形，故得证。

如果我们考虑一般情形下的三点围成的三角形面积，我们可以把其中一个点视为0点，其余点平移过来然后计算新的三角形面积，即 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \rightarrow (0,0)(x_2 - x_1, y_2 - y_1)(x_3 - x_1, y_3 - y_1)$，接着把 $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)(x_3 - x_1, y_3 - y_1)$组成新的行列式求解就好。

或者采用公式，采用添加1列的方式，在一般情形下,由点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 围成的三角形面积等于 $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$,计算时分别用第二行减去第一行,第三行减去第一行(这些操作实际作用是将三角形移动到原点),得到 $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{vmatrix}$, 再按照第三列将行列式展开,得到三角形面积等于 $\frac{1}{2}((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1))$。