Chapter08四个基本子空间

Section1.引入

在Chapter04向量空间中我们介绍了列空间与零空间两个基本的子空间，我们考虑这两个空间的因素也是基于$AX=b$的求解需求来考虑的，而右乘是列变换，因此我们只考虑了列空间与零空间，事实上，我们不仅仅是利用右乘来考虑问题，行变换也是我们要利用的基本变换，因此在这里我们引入行空间与左零空间的说法。

即四个基本子空间为:

- 列空间($C(A)$)
- 零空间($N(A)$)
- 行空间($C(A^T)$)
- 左零空间($N(A^T)$)

左零空间是什么?

我们考虑行变换的零空间$N(A^T)$，需要考虑:$A^Ty=0$，但是我们往往是考察A而非A^T的性质，因此我们同时取转置，可以得到:

$$y^TA=0$$

这个y^T在左侧，因此我们称之为左零空间。

==by the way,我觉得把行空间考虑成为A^T的列空间是一件很coooooool的事情

Section2.四个基本子空间的维数

Subsection1.列空间和行空间的维数

我们知道列秩=行秩=矩阵秩=r:

$A\text{的主元个数}=A\text{的列向量的线性无关的数目(列的维数)}=A\text{的行向量的线性无关的数目(行的维数)}$

那么我们可以知道$dimension(\text{行空间})=dimension(\text{列空间})=r$

Subsection2.零空间和左零空间

关于$dimension(N(A))$,我们在Chapter05AX=0的具体算法，秩与特解的得到 > Subsection1.方程解向量的数量中提到，解向量的数目正是自由变量的数目，因此:

$$dimension(N(A)) = n - r$$

而$dimension(N(A^T))$是类似的，

$$dimension(N(A^T)) = m - r$$

Subsection3.一个发现

$$dimension(C(A)) + dimension(N(A)) = n$$

$$dimension(C(A^T)) + dimension(N(A^T)) = m$$

事实上这也是很好理解的，A的列空间的基向量数目依赖于主元的个数，而零空间的基向量数目依赖于自由变量的数目，相加刚好就是列数.

Section3.四个基本子空间的基的求法

Subsection1.列空间$C(A)$

利用消元法把A变成$RREF$之后，主元所在的列即为$C(A)$.

Subsection2.零空间$N(A)$

根据Ax=0的求解我们可以顺利得到$AX = 0$的解向量.

Subsection3.行空间$C(A^T)$

==很有意思的想法.

在列空间的基求法中我们提到利用行变换把A变成$RREF$，主元所在的列即为$C(A)$.

但是我们注意到一点，我们在做行变换的时候，行空间始终没有变化，得到某些零行实际就是把线性相关的行消除了，得到的非0行实际上就是线性独立的.

==amazing！我们利用行变换把A变成$RREF$的过程竟然能够把$C(A)$和$C(A^T)$全部得到。

Subsection4.左零空间$C(A^T)$

我们注意到$RREF$的样式:

$$RREF = \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

再关注所需要求$C(A^T)$的格式:

$$y^T A = 0$$

我们注意到我们在得到$RREF$的过程中，我们利用了行变换进行消元，根据Gauss-Jordan方法，提示我们利用初等矩阵来实现行变换，即有:

$$E \times A = RREF$$

我们发现$RREF$的最下几行是0，那么说明E中存储了某个组合，使得A中的行向量组合为0

那么我们考虑利用Gauss-Jordan方法，利用$[A \quad I]$,来进行同步变化，得到$[RREF \quad E]$，观察相关的行为0对应的E,这个就是A的左零空间的基。