Chapter23复习二

Section1.对于复习一到复习二中间的总结

- 我们学习了正交性，有矩阵$Q = \begin{bmatrix} q_1 \ q_2 \ \cdots \ q_n \end{bmatrix}$，若其列向量相互正交，则该矩阵满足$Q^TQ = I$。
- 进一步研究投影，我们了解了Gram-Schmidt正交化法，核心思想是求法向量，即从原向量中减去投影向量$E = b - P, P = Ax = \frac{A^Tb}{A^TA} \cdot A$。
- 接着学习了行列式，根据行列式的前三条性质，我们拓展出了性质4-10。
- 我们继续推导出了一个利用代数余子式求行列式的公式。
- 又利用代数余子式推导出了一个求逆矩阵的公式。
- 接下来我们学习了特征值与特征向量的意义：$Ax = \lambda x$，进而了解了通过$\det(A - \lambda I) = 0$求特征值、特征向量的方法。
- 有了特征值与特征向量，我们掌握了通过公式$AS = \Lambda S$对角化矩阵，同时掌握了求矩阵的幂$A^k = S\Lambda^kS^{-1}$。

Section2.例题

T1.求$a = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$的投影矩阵$P$:

可知$A^TAx = A^Tb \to \hat{x} = (A^TA)^{-1}A^Tb \to \hat{b} = A(A^TA)^{-1}A^Tb$，则$P = A(A^TA)^{-1}A^T$,因此:

$$P = P = A(A^TA)^{-1}A^T$$
$$A^TA = 9 \ AA^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$
$$P = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

小问:

1. 求P矩阵的特征值:
   观察矩阵易知矩阵奇异，且为秩一矩阵，则其零空间为2维，所以由$Px = 0x$得出矩阵的两个特征值为$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$；而从矩阵的迹得知$trace(P) = 1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 + 0 + 1$，则第三个特征值为$\lambda_3 = 1$。

注意对秩为1的矩阵的特征值求法

秩为1的矩阵特征值求法，显然0是其中一个，并且我们可以观察P的零空间维数，从而判断0的可能维数，接着用矩阵的迹来判断另外的特征值

2. 求$\lambda_3 = 1$的特征向量：
   当然可以直接代入计算，但是我们对于特殊矩阵可以采用特殊方法，由$Px = x$我们知道经其意义为，x过矩阵P变换后不变，又有P是向量a的投影矩阵，所以任何向量经过P变换都会落在a的列空间中，则只有已经在a的列空间中的向量经过P的变换后保持不变，即其特征向量为$x = a = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$，也就是$Pa = a$。
3. 有差分方程$u_{k+1} = Pu_k$，$u_0 = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}$，求解$u_k$：
   我们当然可以采用差分方程的基础方法，即$A^k u_0 = c_1 \lambda_1^k x_1 + \cdots + c_n \lambda_n^k x_n$，由于投影矩阵的特征值形式都相当好，因此我们也可以这样做，但是还是那句话，对于特殊矩阵可以采用特殊方法，我们做了一次$u_1 = Pu_0$，就已经把u_0投影在了a的列空间中，后面再投影的时候已经不会改变了，因此:$u_k = P^k u_0 = Pu_0 = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$。

T2.将点$(1,4)$，$(2,5)$，$(3,8)$拟合到一条过零点的直线上：

这实际上就是最小二乘法，设直线为$y = Dt$，写成矩阵形式为$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$，即$AD = b$，很明显$D$不存在。
因此我们为了解出该方程，即求最优解，有:

$$A^T A\hat{D} = A^T b \to 14D = 38,\ \hat{D} = \frac{38}{14} \to y = \frac{38}{14} t$$

T3.求$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$的正交向量:

这其实是对施密特正交化的考察，因此我们利用施密特正交化:

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_1 - \frac{\alpha_1^T \alpha_2}{\alpha_1^T \alpha_1} \alpha_1 = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{1}{7} \\ \frac{-2}{7} \end{bmatrix}$$

$$\text{再做正交化即可}$$

T4.*有4×4矩阵A，其特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$，则矩阵可逆的条件是什么?

矩阵可逆，则行列式显然不能等于0，因此任意的特征值不能为0。
或者理解为零空间中只有零向量，即$Ax = 0x$没有非零解，则零不是矩阵的特征值。

小问:

1. $\det A^{-1}$*是什么*：$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$，而$\det A = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4$，所以有$\det A^{-1} = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}$。
2. $trace(A + I)$*的迹是什么*：我们知道
   $trace(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$，所以有
   $trace(A + I) = a_{11} + 1 + a_{22} + 1 + a_{33} + 1 + a_{44} + 1 = 4 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$。

关于逆矩阵的特征值

$Ax = \lambda x \rightarrow A^{-1}Ax = \lambda A^{-1}x \rightarrow A^{-1}x = \frac{1}{\lambda}x$
则A^{-1}的特征值为$\frac{1}{\lambda}$。

T5.有矩阵$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，求$D_n = ?D_{n-1} + ?D_{n-2}$：求递归式的系数:

使用代数余子式将矩阵安第一行展开得
$\det A_4 = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \det A_3 - \det A_2$。则可以看出有规律$D_n = D_{n-1} - D_{n-2}, D_1 = 1, D_2 = 0$。

小问:

使用我们在差分方程中的知识构建方程组$\begin{cases} D_n & = D_{n-1} - D_{n-2} \\ D_{n-1} & = D_{n-1} \end{cases}$，用矩阵表达有$\begin{bmatrix} D_n \\ D_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{n-1} \\ D_{n-2} \end{bmatrix}$。计算系数矩阵$A_c$的特征值，$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$，解得$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}, \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$，特征值为一对共轭复数。

要判断递归式是否收敛，需要计算特征值的模，即实部平方与虚部平方之和$\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$。它们是位于单位圆$e^{i\theta}$上的点，即$\cos\theta + i\sin\theta$，从本例中可以计算出$\theta = 60^\circ$，也就是可以将特征值写作$\lambda_1 = e^{i\pi/3}, \lambda_2 = e^{-i\pi/3}$。注意，从复平面单位圆上可以看出，这些特征值的六次方将等于1：$e^{2\pi i} = e^{2\pi i} = 1$。继续深入观察这一特性对矩阵的影响，$\lambda_1^6 = \lambda^6 = 1$，则对系数矩阵有$A_c^6 = I$。则系数矩阵$A_c$服从周期变化，既不发散也不收敛。

T6.这样一类矩阵$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$，求投影到$A_3$列空间的投影矩阵。

有$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

通常我们会利用$P = A\left(A^TA\right)A^T$来求，但是我们注意到很重要的一点，如果A是列满秩的话，那么列空间就是满维的空间，投影就会保持不变，所以按行展开求行列式$\det A_4 = -1 \cdot -1 \cdot -3 \cdot -3 = 9$，所以矩阵可逆，则$P = I$。

求A_3的特征值及特征向量：

$|A_3 - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda = 0$，解得$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \sqrt{5}, \lambda_3 = -\sqrt{5}$。

我们可以猜测这一类矩阵的规律：奇数阶奇异，偶数阶可逆。