Chapter01线性方程组的求解

Section1.引入 (线性方程组的求解)

Subsection1.线性方程组视角转换

我们在考虑线性方程组的求解中，往往是以`row picture`(行图像)的视角来讲述的，例如我们针对如下的方程组:

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$$

视为AX=b

我们可以将系数矩阵A写为:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

我们以`row picture`的视角来理解，实际上就是在考虑两个方程在平面直角坐标系中的相交点。

实际上，我们可以用另一个视角。即`column picuture`的视角来理解,把系数矩阵考虑为两个列向量:

$$\alpha = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

那么我们就考虑:

$$x\alpha + y\beta = b$$

也就是把b视为α与β的线性组合(`linear combination`),这是一种视角的转变

Subsection2.矩阵都对任意b的有解性

答案是否定的，这对系数矩阵`A`的性质有一定要求，即关注`A`是否是奇异矩阵或者叫做是否是可逆矩阵，事实上，这个与Chapter02矩阵的求逆与A=LU分解法的可行性也是有关系的

Subsecion3.消元法

我们需要确定主元，n个变量的方程组当然是n个主元，例如我们这里拿三维的举例，有:

$$
\begin{cases}
x+2y+z=2\\
3x+8y+z=12\\
4y+z=2
\end{cases}
$$

系数矩阵就可以写为:

$$
A=\begin{bmatrix}1&2&1\\3&8&1\\0&4&1\end{bmatrix}
$$

我们确定三个主元并进行 行之间的相减，可以得到:

$$
U=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&2&-2\\0&0&5\end{bmatrix}
$$

这样我们就把主元之前的系数全部写为0了。现在的工作是回代，即`augument matrix`(增广矩阵),将方程右侧的三个数字进行行向量相同的变化。

同样的，不是所有的矩阵都能使用消元法得到解，我们要求**主元是不能为0**的，这里如果最后一个方程是`4y-4z=2`，这个方程组仍旧无法得到我们想要的结果。这个就是我们上面提到的奇异矩阵与可逆矩阵。

Subsecion4.利用初等矩阵进行的Gauss消元(行变换)

在解向量是向量的线性组合中我们已经窥见一点，即:

$$
\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=a\cdot\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}+b\cdot\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}
$$

在某个矩阵进行右乘的时候，实际上是对列向量进行变换。

同样的，我们把这个性质考虑到对行向量上，那么我们可以得到:

$$
\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}
$$

我们将他稍微做一点点拓展，我们这里的结果只有一个向量，我们把左乘的矩阵做一点拓展，就可以得到一个类似的结果:

$$
\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \\ c \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} + d \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix}
$$

而我们注意到，我们上面在做Guass消元的时候，对于系数矩阵做的正是行变化，而这些行变化我们也正是我们在探究的，也就是说，我们可以用**矩阵的方式去书写消元的过程**

例如，我们在上面这个例子中，我们进行的步骤是，先消去第二行第一列的内容，我们做的动作是，第一行第三行保持不动，第二行减去第一行乘以3，我们用矩阵的形式来描述就是:

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times A
$$

这个矩阵我们称之为初等矩阵，由于是消除的第二行第一列的元素，我们写作E_{21} ,同样的,我们可以做E_{32} ，这样就可以形成最后的矩阵U .即:

$$
E_{32}E_{31}E_{21}A = U
$$

如果我们只想用一个矩阵来说明这个变化过程，只需要把$E_{32}E_{31}E_{21}$ 计算出来即可.这说明矩阵乘法满足结合律.

Subsection5.矩阵乘法的几个视角

- 最简单的运算法则，即所求的最终矩阵的某个元素a_{ij} 是$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$;
- 行变化的视角，即

$$
\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \\ c \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} + d \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix}
$$

- 列变化的视角，即

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}
$$

要注意一点，行变化的视角我们一行一行地看，列变化视角我们一列一列地看.

- A每列×B每行的视角，

注意到column of A是$m \times 1$ 的，而 row of B 是$1 \times n$ 的，相乘结果是$m \times n$ 的，因此把每行每列拆开计算得到多个矩阵相加也可以。

- 分块矩阵的视角

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix}$$

这个运算仍然符合最基础的矩阵乘法规则，例如最后结果的矩阵的左上角的结果应该为$A_1B_1 + A_2B_3$.

一个重要的视角:

我们理解矩阵比较容易接受的一个角度是:
列乘以行的视角:

$$Q^TQ = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1^T \\ q_2^T \\ \vdots \\ q_k^T \end{bmatrix} = \left[q_1q_1^T + q_2q_2^T + \cdots + q_kq_k^T\right] \text{\$\$即\$\$} n \times k \text{与} k \times n = [n \times 1 \text{与} 1 \times n] =$$

即

$$n \times k \text{与} n \times k = [n \times n \text{个} 1 \times k \text{与} k \times 1] = n \times n$$

这两种都是正确的，实际上就是根据分块矩阵运算得来的。
只要分块的矩阵符合运算规律，即分的块的前矩阵的列等于后面矩阵的行，就可以计算