Chapter04向量空间

Section1.向量空间

Subsection1.定义

实际上就是一个向量的集合，在这个集合里面，要求对数乘和加减运算是**封闭的**，也就是说要求进行任意的数乘与加减之后所得的向量仍要属于这个集合.

例如，这里我们考虑一个我们最常见的二维向量空间，即R^2,如果我们把原点扣掉，那么此时我们得到的就不是一个向量空间了，因为我们考虑:$0\times\alpha+0\times\beta=0\notin R^2$,因此这不是向量空间，而这也是我们在下面提到的部分子空间举例中，每个子空间都需要经过原点的原因.

Subsection2.子空间

R^n就是一个非常重要的向量空间。但有时候我们更加关注R^n 内的向量空间，这些较小的向量空间既满足既定的规则，又无需包含所有向量，我们把这些向量空间称为子空间.

那么我们经常考虑的二维向量空间R^2,以及三维的向量空间R^3，有什么向量子空间呢?(Subspace)

- 对于 R^2，我们能找到其子空间有:
  - R^2（即本身， R^2 最大的向量子空间）
  - 任何过原点的直线
  - 零向量空间（最小的向量子空间，其只包含零向量）
- 对于 R^3，我们能找到其子空间有:
  - R^3（即本身， R^3 最大的向量子空间）
  - 任何过原点的平面
  - 任何过原点的直线
  - 零向量空间（最小的向量子空间，其只包含零向量）

Subsection3.向量空间的交并之后的性质

假设 取某个向量空间的两个子空间 P 和L，那么:

- 关于它们的并集$P\cup L$是子空间吗?显然，两个子空间的并，不一定是子空间.

- 关于它们的交集$P \cap L$是子空间吗？是的。实际上，对于任意两子空间的交集都是子空间。这一点很好证明:

$$\begin{aligned}
&\text{假设存在子空间}S\text{和}T\text{，存在向量}v,w\text{且}v,w \in S\bigcap T \\
&\because v \in S\bigcap T, w \in S\bigcap T \therefore v \in S, w \in S, v \in T, w \in T \\
&\therefore v+w \in S, v+w \in T \therefore v+w \in S\bigcap T \\
&\text{加法封闭证闭。} \\
&\text{假设存在任意常数}k\text{，显然有}kv \in S, kv \in T \therefore kv \in S\bigcap T \\
&\text{数乘封闭证闭}
\end{aligned}$$

Section2.列空间与零空间

Subsection1.列空间

我们在考虑$Ax=b$的求解过程中，曾经讲过很多不同的视角，其中我们提到过，[将b视为是A中的列向量的线性组合]，

此时我们把A的列向量的线性组合考虑为一个空间，我们这时候就称这个向量空间为列空间.

那么我们在考察$Ax=b$的有解情况的时候，我们就可以观察b是否在A的列空间中，如果存在那么有解，如果不存在，那么就无解.

矩阵的列空间的大小(维数)和矩阵的各列的线性无关性有关系，换句话说，**如果矩阵各列中有越多的列线性无关，那么矩阵的列空间的大小就越大（我们可把线性无关的列理解为真正对列空间的扩大具有贡献的列，而线性相关的列可以通过其他列的线性组合而得到，所以其无贡献于列空间扩大.)

例如我们考虑一个矩阵:

$$A=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&1&3\\3&1&4\\4&1&5\end{bmatrix}$$

事实上A中的列向量都是R^4的向量，但是由于其中的列向量线性相关，因此他的列空间只是R^4空间里面一个二维的平面。也就是R^2.

Subsection2.零空间

同样的我们还是考虑$Ax=b$这个方程的求解，只不过此时我们考虑b是零向量，即考虑:

$$Ax = 0$$

这个时候x会有很多的解，这些解构成一个向量空间，这个空间我们称为零空间.

根据Chapter04向量空间 > Subsection1.定义，我们知道向量空间是需要满足对于数乘和加减封闭的条件，因此我们需要做一点验证.

$$\begin{aligned} &Av = 0 \\ &Aw = 0 \qquad \therefore (v+w) \in \text{零空间} \\ &A(v+w) = 0 \end{aligned}$$

同样的数乘也很好验证.

如果这里我们考虑$b \neq 0$的情况，那么x的解是否还能构成一个向量空间？答案是否定的，因为x组成的空间甚至不包含0向量，那么一定无法组成一个向量空间.

零空间与零向量空间

零向量空间就是上面提到的某些零向量空间，零空间和零向量空间是不一样的，零向量空间只包含一个零向量，而零空间可包含无数个向量。

Subsection3.总结

上述两种Chapter04向量空间 > Subsection1.列空间与Chapter04向量空间 > Subsection2.零空间这两种都是构造子空间的方式，不过一种是针对b，一种是专注于x.