# Chapter24实对称矩阵与正定矩阵

## Section1.实对称矩阵

### Subsection1,实对称矩阵的特性

1. 特征值为实数；（对比第二十一讲介绍的旋转矩阵，其特征值为纯虚数。）
2. 特征向量相互正交。（当特征值重复时，特征向量也可以从子空间中选出相互正交正交的向量。）
3. 主元符号的正负数量与特征值的正负数量相同。

证明:

$$Ax=\lambda x \xrightarrow{\text{取共轭}} \bar{A}\bar{x}=\bar{\lambda}\bar{x} \xrightarrow{A\text{是实数矩阵}} A\bar{x}=\bar{\lambda}\bar{x} \xrightarrow{\text{取转置}} \bar{x}^TA=\bar{x}^T\bar{\lambda}$$

那么我们得到两个等式:$Ax=\lambda x$与$\bar{x}^TA=\bar{x}^T\bar{\lambda}$:
那么

$$\begin{gathered}Ax=\lambda x \xrightarrow{\text{左乘}\bar{x}^T} =\bar{x}^TAx=\bar{x}^T\lambda x\\ \bar{x}^TA=\bar{x}^T\bar{\lambda} \xrightarrow{\text{右乘}x} \bar{x}^TAx=\bar{x}^T\bar{\lambda}x\\ \therefore \bar{x}^T\lambda x = \bar{x}^T\bar{\lambda}x\\ \therefore \lambda=\bar{\lambda}(\bar{x}^Tx\neq 0)\text{则}\lambda\text{虚部为}0\end{gathered}$$

这里有一个假设，就是$\bar{x}^Tx\neq 0$，如果$x$是实数向量显然是易证的，但是此时$x$是复数向量，因此我们还要一个证明:

$\bar{x}^Tx=\begin{bmatrix}\bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \cdots & \bar{x}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\bar{x}_1x_1+\bar{x}_2x_2+\cdots+\bar{x}_nx_n$，设$x_1=a+ib,\bar{x}_1=a-ib$则 $\bar{x}_1x_1=a^2+b^2$，所以有$\bar{x}^Tx>0$。而$\bar{x}^Tx$就是$x$长度的平方。

**拓展(如果A是复数矩阵那何时才能成立呢？)**

则需要在第一步取共轭的时候保留$\bar{A}$的共轭形式，因此在进行后面两个相同的量的比较，也需要$A=\bar{A}^T$

### Subsection2.实对称矩阵的写法

在通常（可对角化）情况下，一个矩阵可以化为：$A=S\Lambda S^{-1}$,在矩阵对称的情况下，通过性质2可知，由特征向量组成的矩阵$S$中的列向量是相互正交的，此时如果我们把特征向量的长度统一化为$1$，就可以得到一组标准正交的特征向量。则对于对称矩阵有$A=Q\Lambda Q^{-1}$，而对于标准正交矩阵，有$Q=Q^T$，所以对称矩阵可以写为

$$A=Q\Lambda Q^T$$

也可以写为:

$$A=Q\Lambda Q^T=\begin{bmatrix}q_1\ q_2\ \cdots\ q_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \cdots & \\ & \lambda_2 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1^T \\ q_1^T \\ \vdots \\ q_1^T\end{bmatrix}=\lambda_1q_1q_1^T+\lambda_2q_2q_2^T+\cdots+\lambda_nq_nq_n^T$$

注意这个展开式中的$qq^T$，$q$是单位列向量所以$q^Tq=1$，结合我们在第十五讲所学的投影矩阵的知识有$\frac{qq^T}{q^Tq}=qq^T$是一个投影矩阵，很容易验证其性质，比如平方它会得到$qq^Tqq^T=qq^T$于是多次投影不变等。

**每一个对称矩阵都可以分解为一系列相互正交的投影矩阵。**

## Section2.正定矩阵

### Subsection1.概念

正定矩阵是对称矩阵中性质更好的一个子类(对称矩阵本身的性质就已经很好了)，正定矩阵指特征值均为正数的矩阵（根据上面的性质3有矩阵的主元均为正）。

举个例子，$\begin{bmatrix}5 & 2\\2 & 3\end{bmatrix}$，由行列式消元知其主元为$5,\frac{11}{5}$，按一般的方法求特征值有$\begin{vmatrix}5-\lambda & 2\\ 2 & 3-lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-8\lambda+11=0,\lambda=4\pm\sqrt{5}$。

### Subsection2.性质

正定矩阵的另一个性质是，所有子行列式为正。对上面的例子有$|5|=5,\begin{vmatrix}5 & 2\\2 & 3\end{vmatrix}=11$。(这是显然的，因为所有的主元都大于0，那么所有的子行列式包含的主元都会大于0)

**正定矩阵的特性**

1.本身就是对称矩阵
2.特征值均大于0
3.主元均大于0(对称矩阵都有这个性质)
4.所有的子行列式均大于0

我们看到正定矩阵将早期学习的的消元主元、中期学习的的行列式、后期学习的特征值结合在了一起。