Chapter02矩阵的求逆与A=LU分解法

Section1. 矩阵何时会有逆

我们考虑一个矩阵:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 6\end{bmatrix}$$

我们考虑是否会有

$$A^{-1}A=I$$

事实上我们发现并没有，那我们从什么角度去考虑没有的?

- 后面的行列式会告诉我们，他的行列式是0
- 我们从右乘是列变换的视角来看，注意到A 中的两个列向量是共线的，所以我们无法通过他们的`linear combination`去实现形成一个$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 的形式。

我们从第二点出发，其实也就是说明了一点，即:

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=0\rightarrow AX=0$$

是**不应该有非零解**的。

那么我们怎么严谨地去说明呢?

$$if\ \ AX=0\quad \exists A^{-1}\quad s.t.\, A^{-1}A=I$$
$$\therefore A^{-1}AX=0\ \ X=0$$

可以发现，如果存在逆矩阵，则X 只能是0向量.

Section2. 对逆矩阵的求解方式(Gauss-Jordan方法)

由求逆矩阵实际是列向量的线性组合这一角度来看，我们实际上是在做$AX=b\ \ b=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 的解方程过程，实际上我们在Chapter01线性方程组的求解 > Subsecion4.利用初等矩阵进行的Gauss消元(行变换)已经提到过这个方程的解决方案，即通过E_{12} 等初等矩阵进行行变换，使主元暴露。

但是，我们在进行逆矩阵求解的时候，逆矩阵的列很多，因此我们需要做多个方程的求解，那么我们可以把写在一起，即:

$$\begin{bmatrix}1 & 2|1 & 0\\3 & 6|0 & 1\end{bmatrix}$$

进行消元的过程，直到把左侧行变换成为I 的形式，此时右侧就是A^{-1} .

$$\begin{bmatrix}1 & 0|1 & 3\\0 & 1|2 & 7\end{bmatrix}$$

从理论上来分析，我们的左侧做了一个工作:

$$EA = I$$

那么:

$$E = A^{-1}$$

而右侧是:

$$IE = E = A^{-1}$$

忠实的记录了逆矩阵，因此可以得到A^{-1} .

这就是Gauss-Jordan方法.

Section3.转置的逆，逆的转置

$$if\ \ AA^{-1} = I$$

$$\because (AB)^T = B^TA^T$$

$$\therefore (A^{-1})^TA^T = I$$

那么说明:

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

这一点就说明转置与逆运算是可交换的运算.

Section4.A=LU的分解

首先解释一下$A = LU$ 是什么，U 在行变换消元的最后结果中已经有提到，实际上是`Upper triangular`(上三角矩阵)，而L 是`Lower triangular`(下三角矩阵).

我们举几个例子来引入:

Subsection1.二阶矩阵的简单例子

首先我们考虑某个简单的二阶矩阵，例如:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\8 & 7\end{bmatrix}$$

如果我们要把他消成U，显然我们利用E_{21}：

$$E_{21}=\begin{bmatrix}1 & 0\\-4 & 1\end{bmatrix}$$

如此的话，我们可以调整成为:

$$E_{21}A=U=\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 3\end{bmatrix}$$

那么这里我们只需要考虑取${E_{21}}^{-1}=L$,就可以得到L 了:

$$L=\begin{bmatrix}1 & 0\\4 & 1\end{bmatrix}$$

这是个容易的例子，我们在求解E_{21} 和求解L 的难度几乎相差不大.

Subsection2.三阶矩阵陡增的难度

这时，如果我们考虑一个三阶矩阵的例子，我们知道，利用Guass消元法，我们可以顺利地得到:

$$E_{32}E_{31}E_{21}A=U$$

那么我们知道我们可以利用求逆，得到:

$$L={E_{21}}^{-1}{E_{31}}^{-1}{E_{32}}^{-1}$$

这里其实我们就会发现，同样是乘法，为什么我们需要用${E_{21}}^{-1}{E_{31}}^{-1}{E_{32}}^{-1}$ 而非$E_{32}E_{31}E_{21}$ 的形式，例如我们考虑两个如下的初等矩阵:

$$E_{32}\times E_{21}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & -5 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\-2 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\-2 & 1 & 0\\10 & -5 & 1\end{bmatrix}$$

我们会发现，这里竟然出现了10这个并不属于我们初等变化里面的数字!

事实上，这里就是因为我们在E_{21}中第二行有变形，而E_{32}又要用到第二行，导致变形变得更大了。

那假如我们考虑他们的逆矩阵,有:

$$
{E_{21}}^{-1}{E_{32}}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&5&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&5&1\end{bmatrix}
$$

我们会发现这里忠实地保留了初等矩阵中消元乘数的值，而没有去增加新的不必要的内容.

事实上，我们最后得到的$L=\begin{bmatrix}1&0&0\\-i&1&0\\-j&-k&1\end{bmatrix}$正是消元乘数的值的负数，并且求解也不困难.

Subsection3.我们为什么要用A=LU?

就Chapter02矩阵的求逆与A=LU分解法 > Subsection2.三阶矩阵陡增的难度的末尾我们可以知道，L容易得到，并且不会破坏消元乘数(事实上这两者可能是一回事，毕竟就是因为不会破坏我们才容易得到),我们只需要关注U，就比较容易得到L