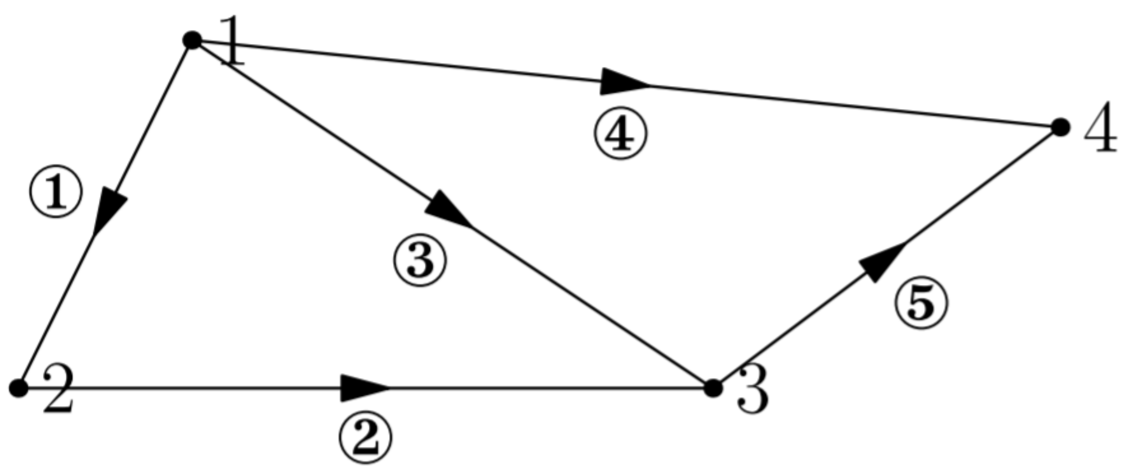
Chapter10图和网络

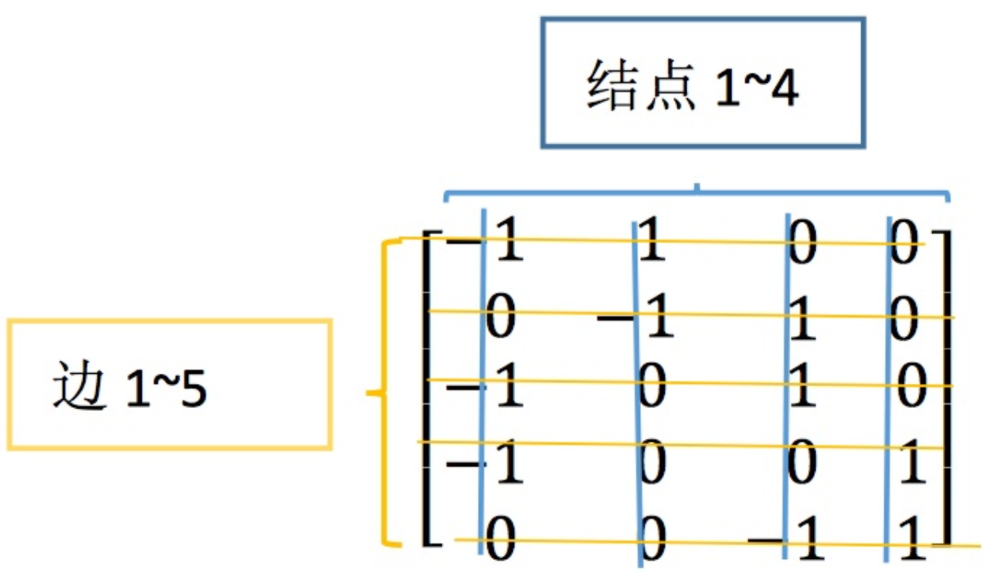
Section1.关联矩阵的引入

为探究图和矩阵之间的联系，我们先给出一个有向图（如下），4 个点（n=4），5 条边（m=5）。

该有向图可以来自于一个电路系统，也可以来自于一个液压系统，甚至表示一个建筑结构，但在本课中我们将其视为一个电路网络。



我们可以使用矩阵来表示一个图，矩阵中包含图中的所有信息。通过构造一个矩阵可以解析相应的图的含义，这样的矩阵叫做 **关联矩阵** 。 **在关联矩阵中，每一列代表一个节点，每一行代表一条边（行中的正负代表方向）。易得上（电路网络）图对应的关联矩阵 A 如下：



$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

观察关联矩阵 A 的第一行，第一行代表了电路网络图中边 1 的情况，在图中，边 1 以 点 1 作为起点，以点 2 作为终点，反映到矩阵上就是 A(1,1)=−1，A(1,2)=1，以此类推。

由图可知，边 1，边 2，边 3 组成了一个回路，而观察矩阵可发现，这三条边对应的矩阵中的前三行是线性相关的，其中行 1 + 行 2 = 行 3 。这说明“回路”意味着“相关”，回路对应的行向量组是线性相关的，这是一个图与矩阵之间很巧妙的联系。

关联矩阵源于问题，描述了问题的拓扑结构。一般来说关联矩阵是一个非常稀疏的矩阵，因为它的每行只有两个非零的元素，用于表示起点和终点。

Section2.关联矩阵的零空间的实际应用

我们考虑一个关联矩阵$Ax=0$：

$$Ax=\begin{bmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\-1&0&1&0\\-1&0&0&1\\0&0&-1&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2-x_1\\x_3-x_2\\x_3-x_1\\x_4-x_1\\x_4-x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Ax=0 的求解是简单的，但在给出答案之前，我们先引入上式的实际意义：将 $x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}$ 视为各结点的电势，比如 x_1 表示结点 1 的电势。于是，上式中诸如 x_2-x_1 的元素就相当于结点 2 与结点 1 这条边上的电势差。

容易得出解为 x=c $\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$ ，这也即等电势情况，当 b=0 时， 每个结点上的电势都必须相等。

这代表了什么呢?

我们都知道，电势差和电流的形成之间有着直接关系，$b=0$，说明我们求解的情况是各个边上都没有电流（或者说电势差）的情况，而我们最后所得到的解就意味着，当各点电势相等时，边上电流（电势差）为零，符合我们的常识。 而这就是零空间的物理意义。

Section3.关联矩阵的左零空间的实际应用

我们求解左零矩阵实际上就是在求解$A^Ty=0$

$$A^Ty=\begin{bmatrix}-1&0&-1&-1&0\\1&-1&0&0&0\\0&1&1&0&-1\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\\y_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-y_1-y_2-y_3\\y_1-y_2\\y_2+y_3-y_5\\y_4+y_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

求解前我们先引入上式中 y 的实际意义：将 y= $\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\\y_5\end{bmatrix}$ 视为各边上的电流 。

已知， 电流和电势差的关系服从欧姆定律：边上的电流值是边上电势差的倍数，这个倍速就是边的电导即电阻的倒数，通常我们把这个常数视为一个系数矩阵记为 C。于是有:

$$y=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\\y_5\end{bmatrix}=C\begin{bmatrix}x_2-x_1\\x_3-x_2\\x_3-x_1\\x_4-x_1\\x_4-x_3\end{bmatrix}$$

观察方程 $A^Ty=0$中的第一个方程 $-y_1-y_3-y_4=0$，这个方程描述了结点 1 上的电流，指出结点 1 上的电流之和为零。

实际上，$A^Ty=0$阐述了基尔霍夫电流定律（Kirchoff's Current Law，简称 KCL）。基尔霍夫电流定律是一个平衡方程，守恒定律，它说明了流入等于流出，电荷在结点上不会积累。

现在，我们开始求解 y。对 A 进行消元可知 A 的秩 r 为 3。所以 A 的左零空间的维数为 $m-r=5-3=2$，即左零空间的基有两个向量。在这里我们不打算使用前面讲过的方法来求解左零空间的基向量，而是直接通过观察求解以发现一些有趣的事情。

假设 $y_1=1$，即 $1A$ 的电流在边 1 上流动，那么由图（或者方程）可知 $y_2=1$。为符合基尔霍夫电流定律，那么只需再令 $y_3=-1$，即让 $1A$ 的电流从结点 2 流回结点 1，此时令 $y_4=y_5=0$，即可得到一个符合 KCL 的向量 ($[1,1,-1,0,0]^T$)。容易发现，该解发生在结点 $1\rightarrow2\rightarrow3$ 组成的回路中。

同理，我们也容易得到发生在结点 $1\rightarrow3\rightarrow4$ 组成的回路中的解 ($[0,0,1,-1,1]^T$)，该解显然也符合 KCL。

注意到，这两个从最小回路得到的向量彼此线性无关，这两个向量所组成的向量组恰好就是A 的左零空间的基。显然，我们似乎找到了一种捷径去求解关联矩阵的左零空间：借助图中的最小回路可以快速求得左零空间的基（注意是最小回路，这样可以确保每个回路所得出的

向量之间都是线性无关的，故我们也称线性无关的回路）。事实上，图中的最小回路数 = $dim(N(A^T))$ = $m-r$。

最后，我们把视角放到结点 $1 \to 2 \to 3 \to 4$ 组成的大回路上，得到符合 KCL 的向量 ($[1,1,0,-1,1]^T$)，恰为上述两个基向量之和。

Section4.欧拉公式与此的联系

矩阵 A 的行空间是什么？这也即求 A^T的列空间。

$$A^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

在求A的左零空间时,我们已经知道A的秩$r=3$,所以A^T的秩也为3。对A^T消元可知,其列1,2,4为主列。而在电路图中,这三列对应的三条边恰好是没有回路的,同时注意到列1,2,3线性相关,在电路图中,这三列对应的三条边存在回路,于是可知,线性相关/无关性与回路有关,线性相关等价于存在回路,线性无关等价于没有回路。一般,我们把没有回路的图称为树。

通过探究矩阵A的行空间,我们发现A^T的秩与图存在的联系:矩阵的秩为r,则图中有r个线性无关的边,转换成图的语言那就是图中的r个边构成了该图的最大无回路(存在回路就线性相关)。这里需要思考最大无回路的概念,就连通图而言,如果该图存在n个结点,那么该图的最大无回路应该包括了$n-1$条边,这条性质是很自然的,因为只要再多一条边,那么就会构成回路,从而线性相关。于是,我们可以得到,**矩阵的秩$r=$ 图中的结点数n再减去1**。

总结一下，就是:

最小回路数目	结点数	边数
$dim(N(A^T))$	$r+1$	m

万事具备,现在我们可以引出欧拉公式了。已知:

$$\begin{aligned} &\dim(N(A^T)) = m - r \\ &\dim(N(A^T)) = \#\text{loops} \\ &m = \#\text{edges} \\ &r = \#\text{nodes} - 1 \end{aligned}$$

其中 $\#$loops为最小回路数,也即线性无关的回路数,$\#$edges为边数,$\#$nodes为结点数

整理上式，即欧拉公式:

$$\text{结点数} - \text{边数} + \text{最小回路} = 1$$

Section5.总结

事实上，上面的内容帮助我们把很多现实生活里面的内容串联起来了:

$$x = [x_1\ \ x_2\ \ \ldots\ \ x_n]^T\text{：各节点的电势} \rightarrow by(e = AX)\text{得到}x_n - x_{n-1}\text{：各点电势差} \rightarrow by(y = Ce\text{欧姆定}$$

上述三式是在 无外部电源 情况下的方程。

考虑添加外部电源的因素,那么电源可以通过 在边上加电压源 和在点上加电流源 两种方式接入。

如果是在边上加电压源,那么会直接体现在 $e = Ax$ 的 e 中(边上两点的电势差改变了,e 中的分量会因此改变)。如果是在点上加电流源,那么会直接体现在 $A^Ty = f$ 的 f 中(点上的电流情况改变了,f 中的分量会因此改变)。

联立上述三个等式 可得 $A^TCAx = f$。需要注明的是,该方程作为一个平衡方程仅描述平衡状态,并没有考虑时间,牛顿定律不适用于此。