Chapter20矩阵对角化，差分方程(A的乘方的简便计算)

Section1.矩阵对角化

上一章我们讲述了特征值λ与特征向量x的求法，那这里我们可以考虑一些特殊的方法。

我们在之前介绍了A的很多拆解方法，例如$A=LU$(利用行变换矩阵的求逆来拆解的)与$A=QR$(利用施密特正交化来拆解)的方式，这里我们介绍一个新的拆解方式，即:

$$A = S\Lambda S^{-1}$$

Subsection1.证明

可以知道$S=\begin{bmatrix} x_1x_2\cdots x_n \end{bmatrix}$,而$\lambda=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$,那么:

$$\begin{aligned} AS = A\begin{bmatrix} x_1x_2\cdots x_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \lambda_1x_1 & \lambda_2x_2\cdots & \lambda_nx_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1x_2\cdots x_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = S\lambda \\ AS = S\lambda \rightarrow S^{-1}&AS = \lambda \; or \; A = S\Lambda S^{-1} \end{aligned}$$

注意S的位置，只要记得推导过程先求了AS，那对角化之后右侧肯定是S^{-1}.

Subsection2.使用的条件

我们根据式子形式很明显就可以看出来，由于有S^{-1}的出现，肯定要求S是满秩的，因此特征向量是必须互相线性无关的，因此有两种情况:

- 如果一个矩阵有n个互不相同的特征值（即没有重复的特征值），则该矩阵具有n个线性无关的特征向量，因此该矩阵可对角化。
- 如果一个矩阵的特征值存在重复值，则该矩阵可能具有n个线性无关的特征向量。比如取10阶单位矩阵，I_{10}具有10个相同的特征值1,但是会有十个线性无关的特征向量，那也可以对角化，但是如果是退化矩阵，某个n重特征值只有小于n个线性无关的特征向量，那就不可以对角化。

Subsection3.应用

这个在关于A^n的计算与性质探究中很有用:

$$A^2 = S\Lambda S^{-1}S\Lambda S^{-1} = S\Lambda^2 S^{-1}$$
$$A^n = S\lambda^n S^{-1}$$

因此在求解A^n的时候如果发现A可以对角化的时候，可以采用该方法。

如果$k \to \infty$，则$A^k \to 0$（趋于稳定）的条件是什么？从$S\Lambda^k S^{-1}$易得，$|\lambda_i| < 1$。再次强调，所有运算的前提是矩阵A存在n个线性无关的特征向量。如果没有n个线性无关的特征向量，则矩阵就不能对角化。

一个结论

同时我们也可以发现A^n的性质:如果A可以对角化，那么A^n的特征值为λ^n，而特征向量不会变化

Section2.差分方程的应用(A^nx的计算)

题设:
$u_1 = Au_0$，$u_{k+1} = Au_k$，要求解出u_k.

我们关注的是可以对角化的矩阵，因此S是满秩的，也就是说n维向量可以用S的列向量表示，即用A的特征向量来表示。

$$u_0 = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = \begin{bmatrix} x_1 x_2 \cdots x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = Sc$$

我们又知道:$A = S\Lambda S^{-1}$,那么$Au_0 = A = S\Lambda S^{-1}Sc = S\lambda c = \lambda Sc$,相应的$A^2u_0 = \lambda^2 Sc$,则$A^k u_0 = \lambda^k Sc$

那么我们在考虑$A^{100}u_0$的时候可以考虑两种表达方式，都是一样的：

$$SA^{100}u_0 = \Lambda^{100}c = c_1\lambda_1^{100}x_1 + c_2\lambda_2^{100}x_2 + \cdots + c_n\lambda_n^{100}x_n$$

Tip

这里最重要的一点就是知道u_0可以拆分成特征向量的线性组合。

Section3.基于差分方程的实例(斐波那契数列)

$0,1,1,2,3,5,8,13,\cdots,F_{100}=?$，我们要求第一百项的公式，并观察这个数列是如何增长的。可以想象这个数列并不是稳定数列，因此无论如何该矩阵的特征值并不都小于一，这样才能保持增长。而他的增长速度，则有特征值来决定。

我们现在已知的条件仅有:

$$F_{k+2}=F_{k+1}+F_k$$

但是这个是二阶差分方程，我们需要两个方程来解决，因此也写不出$u_{k+1}=Au_k$的形式，因为A是方阵，而列向量肯定是二维的(因为方程的自变量肯定有至少两个F_{k+1},F_k)，我们需要添加条件来构造。

Subsection1.构造矩阵形式

使用一个**小技巧**，令$u_k=\begin{bmatrix}F_{k+1}\\F_k\end{bmatrix}$，再追加一个方程组成方程组：$\begin{cases}F_{k+2}&=F_{k+1}+F_k\\F_{k+1}&=F_{k+1}\end{cases}$，再把方程组用矩阵表达得到$\begin{bmatrix}F_{k+2}\\F_{k+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_{k+1}\\F_k\end{bmatrix}$，于是我们得到了$u_{k+1}=Au_k,A=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$。我们把二阶标量方程（second-order scalar problem）转化为一阶向量方程组（first-order system）。

Subsection2.求解特征值

我们的矩阵$A=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$是一个对称矩阵，所以它的特征值将会是实数，且他的特征向量将会互相正交。因为是二阶，我们可以直接利用迹与行列式解方程组$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2&=1\\\lambda_1\cdot\lambda_2&=-1\end{cases}$，

$$\begin{cases}\lambda_1=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)\approx1.618\\\lambda_2=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)\approx-0.618\end{cases}$$

我们先来观察这个数列是如何增长的，数列增长由什么来控制？——特征值。哪一个特征值起决定性作用？——较大的一个。

$F_{100}=c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{100}+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{100}\approx c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{100}$，由于$-0.618$在幂增长中趋近于0，所以近似的忽略该项，剩下较大的项，我们可以说数量增长的速度大约是1.618。可以看出，这种问题与求解$Ax=b$不同，这是一个动态的问题，A的幂在不停的增长，而问题的关键就是这些特征值。

Subsection3.求解特征向量

求解特征向量，$A-\lambda I=\begin{bmatrix}1-\lambda & 1\\ 1 & 1-\lambda\end{bmatrix}$，因为有根式且矩阵只有二阶，我们直接观察$\begin{bmatrix}1-\lambda & 1\\ 1 & 1-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}?\\ ?\end{bmatrix}=0$，由于$\lambda^2-\lambda-1=0$，则其特征向量为$\begin{bmatrix}\lambda\\ 1\end{bmatrix}$，即$x_1=\begin{bmatrix}\lambda_1\\ 1\end{bmatrix},x_2=\begin{bmatrix}\lambda_2\\ 1\end{bmatrix}$。

Subsection4.把u_0改写为特征向量的线性组合

最后，计算初始项$u_0=\begin{bmatrix}F_1\\ F_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$，现在将初始项用特征向量表示出来$\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=c_1x_1+c_2x_2$，计算系数得$c_1=\frac{\sqrt{5}}{5},c_2=-\frac{\sqrt{5}}{5}$。

Subsection5.计算$u_k=A^ku_0$

因为要求解F_{100}，而$u_k=\begin{bmatrix}F_{k+1}\\ F_k\end{bmatrix}$,因此求解$u_{100}$或者$u_{99}$都可以，
我们考虑后者:$u_{99}=S\Lambda^{99}c$，且$c=\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}$有:

$$\begin{aligned}u_{99}=\begin{bmatrix}F_{100}\\ F_{99}\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2}\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{99} & 0\\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{99}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{5}}{5}\\ -\frac{\sqrt{5}}{5}\end{bmatrix}\\ &=\left[\lambda_1^{99}c_1x_1+\lambda_2^{99}c_2x_2\right]\overset{x_1\text{和}x_2\text{第一行为两个特征值}}{=}\begin{bmatrix}c_1\lambda_1^{100}+c_2\lambda_2^{100}\\ c_1\lambda_1^{99}+c_2\lambda_2^{99}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

因此:$F_{100}=c_1\lambda_1^{100}+c_2\lambda_2^{100}$，通解为$u_k=c_1\lambda^kx_1+c_2\lambda^kx_2$。