Chapter05AX=0的具体算法，秩与特解的得到

Section1.概念引入

我们之前对于$Ax=0$的计算只考虑了宏观层面的，对于具体的算法我们这个part来进行介绍，首先我们考虑这个矩阵:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2&2\\2&4&6&8\\3&6&8&10\end{bmatrix}$$

我们采用Chapter01线性方程组的求解 > Subsecion3.消元法把A转化为U，即:

$$U=\begin{bmatrix}1&2&2&2\\0&0&2&4\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

那么这里我们注意到几个概念:

- 主元:这里我们这个矩阵有两个主元，分别是a_{11}与a_{23}即阶梯型矩阵的阶梯处.
- 主列与自由列:几列对应几个变量，有主元的列成为主列，其余的列即自由列，都是自由变量.
- 秩:主元的个数.

Section2.一些新的视角

Subsection1.关于$Ax=0$与$Ux=0$

我们在Section1.概念引入中其实已经在把求解$Ax=0$转换为求解$Ux=0$了，那么这两个等式等价吗?

结论是显然肯定的，因为我们做行变换并不破坏这些等式本身，这些行变换前后本身就是等价的，换句话来说，这两个等式:

零空间相同，行变换不会改变零空间

Subsection2.关于行秩，列秩，以及秩

在这个例子里，秩=主元个数=2，且我们注意到列向量与行向量的线性无关的向量数目均是3，其实我们就可以还注意到:

列秩=行秩=矩阵秩

Subsection3.转置的矩阵的秩与原矩阵的关系

r(A)=r(A^T)

矩阵的主元的个数与其转置的主元的个数相同。

主元的概念是伴随消元而生的。假设矩阵 A 消元后所得的主元个数为 a，那么就表示矩阵 A 有 a 行线性无关，有 a 列线性无关；假设矩阵 A^T 消元后所得的主元个数为 b，那么就表示矩阵 A^T 有 b 行线性无关，有 b 列线性无关。

而由矩阵的转置的定义，我们知道，矩阵 A 的行就是矩阵 A^T 的列，因此 $a=b$。

换句话说，A 的主元个数 = A 矩阵线性无关的列的个数 = A^T 矩阵线性无关的行的个数 = A^T 的主元个数。

tip:做行变换为什么可以知道列秩?

行秩等于矩阵秩我想是比较好理解的，因为我们是在对行向量进行变换当然会发现其中的线性相关性，那么我们做行变换为什么会反应列秩呢？这里我们做一个简单的证明:

$$A=\begin{bmatrix} a & c & k_1a+k_2c \\ b & d & k_1b+k_2d \\ e & f & k_1e+k_2f \end{bmatrix}$$

我们经过行变换可以得到:

$$A=\begin{bmatrix} a & c & k_1a+k_2c \\ 0 & \frac{ad-bc}{a} & k_2\frac{ad-bc}{a} \\ 0 & \frac{af-ec}{a} & k_2\frac{af-ec}{a} \end{bmatrix}$$

这个时候我们注意到，我们做了行变换，但是我们的列三(β_3)仍旧满足$\beta_3=k_1\beta_1+k_2\beta_2$，说明:

- 行变换并没有改变列的线性组合

- 即便我们不能确定行向量的线性关系是什么样子的，但是列向量的秩也能说明行向量的秩

Section3.特解与方程的解

我们现在已经得到了

$$U=\begin{bmatrix}1&2&2&2\\0&0&2&4\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

我们可以做一些进一步的化简，把主元所在的列全部清零(除开主元处)

$$R=\begin{bmatrix}1&2&0&-2\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

这个R我们又称为$RREF$(Reduced Row Echelon Form),即约化行阶梯形式，在$matlab$中也有使用.

Subsection1.方程解向量的数量

我们这里主元是x_1, x_3，自由变量是x_2, x_4,那么我们的解向量可以写成如下形式:

$$X=\begin{bmatrix}2x_4-2x_2\\x_2\\-2x_4\\x_4\end{bmatrix}=x_2\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}2\\0\\-2\\1\end{bmatrix}$$

显然，我们解向量的数量依赖于自由变量的数量，而**自由变量的数量是$n(\text{变量数目})-r(\text{秩})$.**

Subsection2.方程的特解

我们在Subsection1.方程解向量的数量中已经写出了两个解向量$\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix}2\\0\\-2\\1\end{bmatrix}$,这就是特解，

当然我们还可以用另一个角度来求解特解，即:
令自由变量$\begin{bmatrix}x_2\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$或$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$这样得到两组解，分别为特解1与特解2.

这种做法是有讲究的，我们令其中一个自由变量为0，另一个为1，是为了专注于观察某一个特定的变量对方程组解的影响.

Section3.对于$RREF$矩阵和解的理解

这是我们得到的$RREF$矩阵:

$$R=\begin{bmatrix}1&2&0&-2\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

我们把自由列x_2和主列x_3交换一下便于观察:

$$R=\begin{bmatrix}1&0&2&-2\\0&1&0&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

我们的解向量放到一个矩阵里并且同样交换x_2和x_3的位置，得到:

$$\begin{bmatrix}-2&2\\0&-2\\1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

我们发现，主元所在的列形成了一个I放到了最下，而自由列则是取了相反数放到了上面.

这也是很多考研的书上告诉我们的求解线性方程组的方式.

Prove:为什么可以这样求解线性方程组?

我们注意到，我们始终可以把$RREF$矩阵化简为如下形式:

$$R=\begin{bmatrix}I&F\\0&0\end{bmatrix}\quad F\text{指的是自由列形成的矩阵}$$

因此我们考虑的:

$$RX=0$$

可以知道:

$$X=\begin{bmatrix}-F\\I\end{bmatrix}$$

那么这里我们可以对为什么$X=\begin{bmatrix}-F\\I\end{bmatrix}$进行多一点的说明:

我们考虑一个零空间矩阵，

$$X=\begin{bmatrix}x_1&x_2&\dots&x_{n-r}\end{bmatrix}\quad \text{其中}x_k\text{是}RX=O\text{的特解}$$

我们可以把X写为:

$$X = \begin{bmatrix} X_{pivot} \\ X_{free} \end{bmatrix}$$

那么我们按照令自由变量一个为1其余都为0的手法，相当于让$X_{free} = I$(真是一个让人惊喜的巧合！)，那么我们顺利地得到:

$$X = \begin{bmatrix} -F \\ I \end{bmatrix}$$

势利一点的结论:方程化简到了$RREF$的形式，怎么得到最后的特解?

$e.g.$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & c \\ 0 & b & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

step1:自由变量是x_2, x_4，那么先把x_2, x_4的位置占住，用$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$或$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

step2:占住之后，最前的一列自由列取相反数与$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$组合，后面的相应组合.