Chapter33期末复习

Section1.试题们

T1.方程与系数矩阵秩的关系

已知$m \times n$矩阵A，有$Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$无解；$Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$仅有唯一解，求关于$m, n, rank(A)$的信息。

> **矩阵与秩的关系**
>
> n是用来控制零空间/$Ax = 0$的解情况：
> 1.如果$r > n$，则$Ax = 0$有无穷解，$Ax = b$未必有解，如果有解则有无穷解。
> 2.如果$r = n$，则$Ax = 0$只有$x = 0$这一解,$Ax = b$未必有解，如果有解则有唯一解。
>
> m是用来控制$Ax = b$的解情况:
> 1.如果$r > m$，则$Ax = b$未必有解，因为A消元会产生零行，相应的b也需要是0
> 2.如果$r = m$，则$Ax = b$一定有解，因为A的主元每一行都有，则一定有解。

1. 由于$Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$无解，那么$m$是不能等于$r$的，则$m < r$；
   又因为 $Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$仅有唯一解，那么$Ax = 0$只有零解，因此$n = r = 3$，故$m < n = r = 3$。

写出一个矩阵A的特例：$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$。

2. $\det A^T A \stackrel{?}{=} \det AA^T$
   答案是否定的，因为$A^T A$的秩情况与A的列情况一样，而AA^T的秩情况与A的行情况一样，因此$r(A^T A) = 3, r(AA^T) = 2$，则第一个行列式不等于0，而第二个等于0.（但是对于方阵，$\det AB = \det BA$恒成立。）

3. A^TA可逆吗?
   由2可知，$r(A^TA)=3$，因此可逆。
4. AA^T正定吗?
   显然是不正定的，因为$r(AA^T)=2$,所以会有$\lambda=0$，故不正定，而是半正定矩阵。
5. 求证$A^Ty=c$至少有一个解
   可知$A^T=n\times m$的矩阵，因此行满秩，一定有解，且$n-r>0$，因此零空间也不为0，因此该方程至少有一个解。

T2.一道简单的题目

设$A=\begin{bmatrix} v_1\ v_2\ v_3 \end{bmatrix}$，对于$Ax=v_1-v_2+v_3$，求$x$。

按列计算矩阵相乘，有$x=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$。

若$Ax=v_1-v_2+v_3=0$，则解是唯一的吗？为什么。

如果解释唯一的，则零空间中只有零向量，而在此例中$x=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$就在零空间中，所以解不唯一，$kx$也是解。

若v_1,v_2,v_3是标准正交向量，那么怎样的线性组合$c_1v_1+c_2v_2$能够最接近v_3？此问是考察投影概念，由于是正交向量，所以只有0向量最接近v_3。

T3.马尔可夫矩阵

矩阵$A=\begin{bmatrix} .2 & .4 & .3 \\ .4 & .2 & .3 \\ .4 & .4 & .4 \end{bmatrix}$，求稳态。

这是个马尔科夫矩阵，前两之和为第三列的两倍，奇异矩阵总有一个特征值为0，而马尔科夫矩阵总有一个特征值为1，剩下一个特征值从矩阵的迹得知为$-.2$。

再看马尔科夫过程，设从$u(0)$开始，$u_k=A^ku_0, u_0=\begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$。先代入特征值$\lambda_1=0,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=-.2$查看稳态$u_k=c_1\lambda_1^kx_1+c_2\lambda_2^kx_2+c_3\lambda_3^kx_3$，当$k\to\infty$，第一项与第三项都会消失，剩下$u_\infty=c_2x_2$。

到这里我们只需求出λ_2对应的特征向量即可，带入特征值求解$(A-I)x=0$，有$\begin{bmatrix}-.8&.4&.3\\.4&-.8&.3\\.4&.4&-.6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}?\\?\\?\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$，可以消元得，也可以直接观察得到$x_2=\begin{bmatrix}3\\3\\4\end{bmatrix}$。

剩下就是求c_2了，可以通过u_0一一解出每个系数，但是这就需要解出每一个特征值。另一种方法，我们可以通过马尔科夫矩阵的特性知道，对于马尔科夫过程的每一个u_k都有其分量之和与初始值分量之和相等，所以对于$x_2=\begin{bmatrix}3\\3\\4\end{bmatrix}$，有$c_2=1$。所以最终结果是$u_\infty=\begin{bmatrix}3\\3\\4\end{bmatrix}$。

T4.二阶方阵(已知特征值和特征向量怎么得到原矩阵)

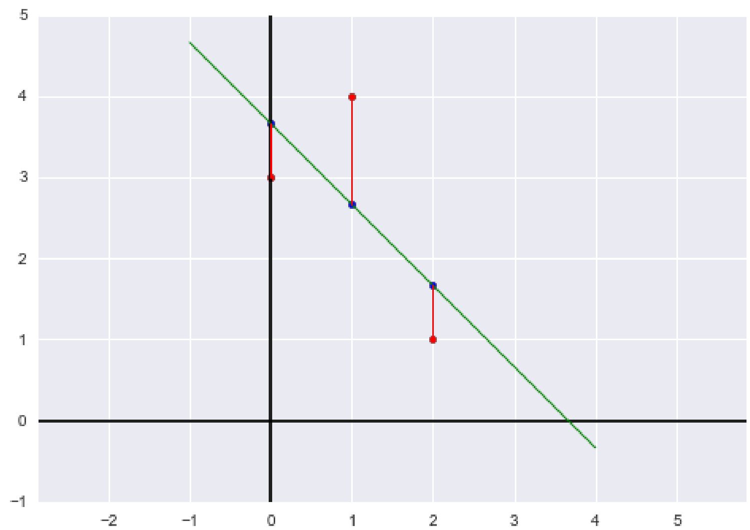
1. 求投影在直线$a=\begin{bmatrix}4\\-3\end{bmatrix}$上的投影矩阵：应为$P=\frac{aa^T}{a^Ta}$。
2. 已知特征值$\lambda_1=2,\ x_1=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\quad\lambda_2=3,\ x_2=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$求原矩阵$A$：从对角化公式得
   $A=S\Lambda S^{-1}=\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}^{-1}$，解之即可。
3. A是一个实矩阵，且对任意矩阵B，A都不能分解成$A=B^TB$，给出A的一个例子：我们知道B^TB是对称的，所以给出一个非对称矩阵即可。
4. 非对称矩阵的特征向量可以是正交的吗？
   可以的，反对称矩阵，因为满足$AA^T=A^TA$而同样具有正交的特征向量，所以有$A=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$或旋转矩阵$\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$，这些矩阵都具有复数域上的正交特征向量组。

T5.最小二乘法问题

最小二乘问题，因为时间的关系直接写出计算式和答案，$\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C\\D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\4\\1\end{bmatrix}(Ax=b)$，解得$\begin{bmatrix}\hat{C}\\\hat{D}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{11}{3}\\-1\end{bmatrix}$。

求投影后的向量p：向量p就是向量b在矩阵A列空间中的投影，所以$p=\begin{bmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{C}\\\hat{D}\end{bmatrix}$
。

求拟合直线的图像：$x=0,1,2$时$y=p_1,p_2,p_2$所在的直线的图像，$y=\hat{C}+\hat{D}x$即$y=\frac{11}{3}-x$
。



求一个向量b使得最小二乘求得的$\begin{bmatrix}\hat{C}\\\hat{D}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$：

我们知道最小二乘求出的向量$\begin{bmatrix}\hat{C}\\\hat{D}\end{bmatrix}$使得$A$列向量的线性组合最接近$b$向量（即$b$在$A$列空间中的投影），如果这个线性组合为0向量（即投影为0），则b向量与A的列空间正交，所以可以取$b=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$同时正交于$A$的两个列向量。