Chapter16行列式的基本运算法则

迄今为止,我们已经学习了很多关于长方矩阵的知识,现在,把注意力转向方阵,探讨两个大的话题:行列式和特征值,我们需要行列式的重要原因是求特征值。

行列式是跟每个方阵都有关的数,每个方阵都有与其相关的行列式,我们一般记为 $\det A$,或者写作 $|A|$。

行列式最早是应用在用来判断方程组是否有解,在矩阵被发明后,行列式就拥有了更多的性质和应用。行列式是一个神奇的数,一个数很难告诉你整个矩阵是什么样子的,但行列式把矩阵的尽可能多的信息就包含在其中了。就比如,矩阵可逆等价于行列式非零,行列式为零时矩阵是奇异矩阵的。从另外一个角度来理解,行列式从某种程度上代表了这个矩阵的特征,这是学习特征分解的前置概念。

Section1.三个基本运算法则

性质 1: 对于单位矩阵 I,有 $\det I = 1$。

性质 2: 交换行,行列式的值的符号会相反。

对于性质二，我们考虑一个问题，是否会出现我换7行的结果与换10行的结果行列式的长相一样呢?
事实上，对于一个矩阵,我通过 7 次换行得到一种置换,那么同样可以通过 21 或 23 次换行得到甚至是 101 次的,不管具体是多少但这个置换一定是奇数次的而不会是偶数次的。
对于一个给定的矩阵,如果该矩阵是可逆的,那么该矩阵 7 次行交换的结果,绝对不会与 10 次行交换的结果相同。Gilbert教授没有给出具体的证明，这种置换的奇偶区分意味着行列式性质二是严谨且正确的,同时意味着行列式可以被严格定义。

推断

根据性质1与2，我们可以知道置换矩阵的行列式是1或-1，当然具体是1还是-1我们需要考虑行交换的次数:

$$\det P = \begin{cases} 1 & \text{even (偶数)} \\ -1 & \text{odd (奇数)} \end{cases}$$

性质3:行拆分的性质

性质 3.a: 行列式按行提取出矩阵中的系数,也即 $\begin{vmatrix} ta & tb \\ c & d \end{vmatrix} = t\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

性质 3.b: 行列式是一个线性函数,但这个线性单独反映在每一行上,也即:
$\begin{vmatrix} a+k_1 & b+k_2 \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_1 & k_2 \\ c & d \end{vmatrix}$,只要有一行是相同的，就可以对第一行进行任意的拆分组合。

注意

我们注意性质3.b，这个线性特性针对的是单行而不是指整个矩阵，说
$detA+B=detA+detB$是错误的。

$$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' & c+c' \\ d & e & f \\ g+g' & h+h' & i+i' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+g' & h+h' & i+i' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ d & e & f \\ g+g' & h+h' & i+i' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

上面这个实例说明，针对行是能够进行任意的拆分的，如果要拆分两行分别成为两部分，就是2*2=4个部分，这也是好理解的。

关于行列式线性性质的行拆分

我们知道$\begin{vmatrix} a+k_1 & b+k_2 \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_1 & k_2 \\ c & d \end{vmatrix}$
这是只有单行参与的行拆分，实际上我们可以多行同时参与,例如

$$\begin{vmatrix} a+k_1 & b+k_2 \\ c+k_3 & d+k_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ k_3 & k_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_1 & k_2 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{vmatrix}$$

也就是说我们把每一行确定一个组合.第一行:$|a \quad b|$与 $|k_1 \quad k_2|$
第二行:$|c \quad d|$与 $|k_3 \quad k_4|$，接着排列组合就好。

Section2.推导的七个性质

性质4.如果两行相等，行列式等于0

证明:
根据性质 2 交换行,行列式的值的符号会相反。，我们考虑交换过相同两行的行列式$detA'$，

由于交换的是相同的两行，$detA$与$detA'$完全一致，则有$detA = detA' = -detA$，因此$detA = 0$.

性质5.从 k 行中减去第 i 行的 l 倍,行列式不变。

这条性质非常有用，它告诉我们，一个行列式未知的矩阵，消元得到其化简的形式，比如说上三角形式，**行列式并不因消元而改变。**

证明:
根据性质3.b与3.a，我们可以把减去的行做拆分，用简单的三维矩阵举例，即:

$$\begin{vmatrix} a+kg & b+kh & c+ki \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

而根据性质4.如果两行相等，行列式等于0，可知$k \begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 0$,即证。

性质6.如果方阵的某一行全为0，那么其行列式值也为0。

证明:
根据性质3.a,可以知道

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$$

性质7.上三角矩阵对应的行列式的值等于其对角线上元素的乘积。

证明:
设有上三角矩阵 $U = \begin{vmatrix} d_1 & * & \cdots & * \\ 0 & d_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{vmatrix}$,则 $\det U = d_1 d_2 \cdots d_n$。
使用性质5(某行减去其余行行列式不变),从最后一行开始,将对角元素上方的 $*$ 元素依次变为0,则可以得到型为$D = \begin{vmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{vmatrix}$的对角行列式,

再使用行提出t可以放在整个行列式外将对角元素提出得到$d_n \cdots d_1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$,再结合detI=1,得证。

> **Note**
>
> 需要补充说明的是,从矩阵A化简到U可能中间除了消元还有换行过程,故矩阵A的真正的行列式可能不与U的行列式同号,这是由性质 2 交换行,行列式的值的符号会相反。决定的。

性质 8: 当且仅当 A 是奇异矩阵(不可逆)时,$\det A = 0$。

奇异矩阵(不好的矩阵所以不可逆) $\rightarrow$ 不可逆 $\rightarrow$ 秩小于n $\rightarrow$ 行秩小于n, 主元不满，有0行 $\rightarrow$ 根据性

> **一个证明**
>
> 我们知道 $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$
>
> 我们可以验证一下,考虑二阶矩阵的情况, $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} a & 0 \\ b & d - \frac{c}{a}b \end{vmatrix} = ad - bc$
>
> 此时求行列式的值,发现对角元素确实等于主元相乘。

性质9:$det AB = det A det B$

> **有趣的点**
>
> 行列式不具备线性性质，不具备加法性质，但却具备乘法性质。

使用这一性质,我们就很好求得

- A 的逆矩阵的行列式: $\det I = \det A^{-1}A = \det A^{-1}\det A = 1 \therefore \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$
- $\det A^2 = (\det A)^2$:矩阵平方的行列式等于矩阵行列式的平方。
- $\det kA = detkI \times detA = k^n \det A$: k 为常数, A 为 n 阶的矩阵,这里相当于提出了每一行的 k,这个式子就像是在求体积一样，改变立方体的边长为原来的k倍，但是体积变为原来的k^3倍。

给出一个粗略的证明，任何的矩阵都可以化为上三角矩阵，并且根据性质5，可以知道行列式不变，那么我们考虑:

$$AB = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_nb_n \end{bmatrix}$$

而对角矩阵其行列式就等于对角元素之乘积,所以$\det(AB) = (a_1b_1)\cdots(a_nb_n) = (\prod_{i=1}^n a_i)(\prod_{i=1}^n b_i) = \det(A)\det(B)$。(这里我们注意到，哪怕$a_i/b_i = 0$依然成立)

性质 10: $\det A^T = \det A$.

证明:将矩阵化为LU的形式有:$A^T = U^TL^T$, $A = LU$。那么由行列式的乘法法则可得$|A^T| = |U^TL^T| = |U^T||L^T|$, $|A| = |LU| = |L||U|$,又因为L, U的行列式并不因为转置而改变(因为L是上三角矩阵,U是下三角矩阵),于是得证。