# Chapter06Ax=b的可解性与解的结构，行列满秩的解情况

## Section1.AX=b什么时候有解?

我们针对同样的系数矩阵A，改变右侧的目标向量，来考虑是否有解.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2&2\\2&4&6&8\\3&6&8&10\end{bmatrix}$$

而我们考虑:

$$b=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$$

我们仍然利用消元法，同时我们考虑增广矩阵,有:

$$[U\mid b]=\begin{bmatrix}1&2&2&2|&b_1\\0&0&2&4|&b_2-2b_1\\0&0&0&0|&b_3-b_1-b_2\end{bmatrix}$$

那么这里我们观察到，显然最后一行的右侧向量$b_3-b_1-b_2=0$，才能有解.

我们其实在列空间中已经提到过，这里如果$AX=b$要有解，需要$b$在$A$的列空间中，这是一种说法;
根据上面这个例子，我们有另外一种说法，就是:系数矩阵做了某些行变换得到零行，那么$b$的分量做同样的变化也要得到0.

## Section2.Ax=b解的结构:特解＋通解

我们这里让$b=\begin{bmatrix}1\\5\\6\end{bmatrix}$,满足上面的可解性条件$b_3-b_2-b_1=0$，我们会得到两个方程:

$$x_1+2x_2+2x_3+2x_4=1$$
$$2x_3+4x_4=3$$

这个时候我们令自由变量$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,那么我们可以得到一个方程的解为

$$X_{particular} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

,这个我们称之为方程的特解.

我们在Chapter05AX=0的具体算法，秩与特解的得到中已经知道了$AX = 0$的解，即

$$X_{null} = k_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

那么我们这里就认为$AX = b$的解就是

$$X = X_{null} + X_{paticular}$$

**向量空间的形式:**

注意到$X_{null} = k_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，这是一个位于$R^4$的$R^2$平面(因为只有$k_1$和$k_2$两个变量，那么只能构成一个平面)，而$X_{particular} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$是一个直线向量，所以相当于一个平面上的任意向量加一个直线向量.

**prove:为什么AX=b的结构是特解＋零空间的通解?**

一个简单的证明:

$$\because AX_{paticular} = b \;\; AX_{null} = 0$$
$$\therefore A(X_{paticular} + X_{null}) = b$$

因此我们可以知道$AX = b$的解为

$$X = X_p + X_n$$

### addition:为什么我们取$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$来求特解?

因为我们取其他的值，会发现这个与$X_{null}$重复(这个证明很容易，因为我们得到$X_{null}$是通过利用$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$来得到的，我们取其他值只不过是$k$倍的罢了.)

## Section2.行满秩，列满秩，矩阵秩，解的形式之间的关系.

### 列满秩，$n = r$

$$\text{列秩}n = r \rightarrow \text{变量数目}=\text{有用的方程数} \rightarrow \text{没有自由变量} \rightarrow \text{零空间只有零向量} \rightarrow \text{如果}b\text{符合要求，}$$

### 行满秩，$m = r$

$$\text{行秩}m = r \rightarrow \text{每一行一定会有主元} \rightarrow \text{对于}b\text{没有要求} \rightarrow AX = b\text{一定会有解}$$

### 列满秩且行满秩

$$m = n = r\text{意味着一定是方阵} \rightarrow AX = b\text{一定有解，为特解}$$

| r=m=n | r=m<n | r=n<m | r<n,r<m |
|---|---|---|---|
| $R = [I]$ | $R = [I \quad F]$ | $R = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$ | $R = \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ |
| 存在唯一解，即特解 | 一定有解，且有无穷多解 | 对零行的b有要求，如果符合要求则为唯一解 | 0解(b不符合要求)或无穷解 |