Chapter27相似矩阵和若尔当形

Section1.相似矩阵

Subsection1.定义

矩阵A，B对于某矩阵M满足$B=M^{-1}AM$时，称A，B互为相似矩阵。

Subsection2.相似矩阵的存在情形

情形1.能够相似对角化时

矩阵何时才能相似对角化?

> - 如果一个矩阵有n个互不相同的特征值（即没有重复的特征值），则该矩阵具有n个线性无关的特征向量，因此该矩阵可对角化。

> - 如果一个矩阵的特征值存在重复值，则该矩阵可能具有n个线性无关的特征向量。比如取10阶单位矩阵，I_{10}具有10个相同的特征值1,但是会有十个线性无关的特征向量，那也可以对角化，但是如果是退化矩阵，某个n重特征值只有小于n个线性无关的特征向量，那就不可以对角化。

此时$S^{-1}AS=\Lambda$，则有A相似于Λ。

如果两个可以相似对角化的矩阵的特征值一样，那他们就相似，
证明:

$$
\begin{gathered}
A=S\lambda S^{-1}\quad B=C\lambda C^{-1}\\
\lambda=S^{-1}AS\quad\therefore B=CS^{-1}ASC^{-1}\\
\text{令}M=(CS)^{-1}\text{即可}
\end{gathered}
$$

情形2.不能相似对角化的时候

例如$\begin{bmatrix}4&1\\0&4\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}4&1\\0&4\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}5&1\\-1&3\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}4&0\\17&4\end{bmatrix}$，这些矩阵均满足$trace(A)=8$，$\det A=16$。

相似矩阵的共性

相似矩阵有相同的特征值!

证明:
有$Ax=\lambda x$，$B=M^{-1}AM$，第一个式子化为$AMM^{-1}x=\lambda x$，接着两边同时左乘M^{-1}得$M^{-1}AMM^{-1}x=\lambda M^{-1}x$，进行适当的分组得$(M^{-1}AM)M^{-1}x=\lambda M^{-1}x$即$BM^{-1}x=\lambda M^{-1}x$,因此我们发现$B$的特征值没变，特征向量为$M^{-1}x$.

我们关注一个特别糟糕的矩阵:

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

其特征值为四个零。很明显矩阵的秩为2，所以其零空间的维数为$4-2=2$，即该矩阵有两个特征向量。可以发现该矩阵在主对角线的上方有两个1，在对角线上每增加一个1，特征向量个个数就减少一个。

再提出一个矩阵:

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

他的特征值也是四个0，特征向量也是2个，从特征向量的数目看来这两个矩阵是相似的，其实不然。

Section2.$Jordan$形

基于上述两个矩阵，若尔当认为第一个矩阵是由一个3×3的块与一个1×1的块组成的$\left[\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\\hline 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$，而第二个矩阵是由两个$2\times 2$矩阵组成的$\left[\begin{array}{cc|cc}0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\\hline 0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$，这些分块(指的是左上角和右下角的那两个)被称为若尔当块。

那么由于第一个矩阵的若尔当块为J_1和J_3，而第二个矩阵的若尔当块为两个J_2，因此二者不相似。

Subsection1.概念

若尔当块的定义型为$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \cdots & \\ & \lambda_i & 1 & \cdots & \\ & & \lambda_i & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix}$，它的对角线上只为同一个数因此特征值只有1个，仅有一个特征向量。

若尔当矩阵的定义为$J = \left[\begin{array}{c|c|c|c} J_1 & & & \\ \hline & J_2 & & \\ \hline & & \ddots & \\ \hline & & & J_d \end{array}\right]$，若尔当块的个数即为矩阵特征值的个数。

Subsection2.结论

Jordan证明了，任何方阵都能化为$Jordan$标准型，M的若尔当标准型可以写成`P^{-1}MP= J`，因此如果两个矩阵的$Jordan$标准型不同，则说明二者不相似。

具体的$Jordan$化过程比较复杂，未作具体的阐述。

但是，无论两个矩阵是否能够进行相似对角化，只要特征值不一样，那二者就不相似。

另外，能够相似对角化的矩阵只能和能相似对角化的矩阵相似，不能的和不能的相似

对于第二个做一个简单的证明:

$$A = S\lambda S^{-1} \quad B = M^{-1}AM = M^{-1}S\lambda S^{-1}M = (S^{-1}M)^{-1}\lambda S^{-1}M$$

因此B可以相似对角化。

当然在矩阵情况良好的前提下，$Jordan$标准型也适用，n阶矩阵将有n个不同的特征值，它的若尔当矩阵就是Λ，共n个特征向量，有n个若尔当块。