Chapter31复习三

Section1.回顾

我们从特征值开始来学习的

- 特征值与特征向量可以通过解特征方程来求解，也可以利用一些特殊矩阵的特殊情况来求解，例如正交矩阵的特征值只有1或者-1，例如行列式为0的时候一定有特征值0.
- 解微分方程$\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dt}}=Au$，并介绍了指数矩阵$e^{At}$；
- 介绍了对称矩阵的性质$A=A^T$，其最重要的性质是一定可以进行相似对角化，并且特征向量正交，对角化的结果可以表示为$A=Q\Lambda Q^T$；
- 说明了对称矩阵中最好的子类为正定矩阵，其特征值，顺序行列式，主元均大于0，还有最重要的$x^TAx>0$.
- 学习了相似矩阵和$Jordan$标准型，$B=M^{-1}AM$，矩阵A,B特征值相同，介绍了什么情况下什么矩阵会相似。
- 最后我们学习了奇异值分解$A=U\Sigma V^T$。

Section2.例题

T1.微分方程

解方程$\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dt}}=Au=\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}u$。

1. 可以知道关于微分方程的通解应该写成$u(t)=c_1e^{\lambda_1t}x_1+c_2e^{\lambda_2t}x_2+c_3e^{\lambda_3t}x_3$，因此我们应该求解其特征值与特征向量。
2. 矩阵是奇异的，所以有$\lambda_1=0$，且$A^T=-A$，这是一个反对称矩阵或斜对称矩阵，它的特征值应该为纯虚数（特征值在虚轴上）通过解$\det(A-\lambda I)=0$验证一下：

$$\begin{bmatrix}-\lambda&-1&0\\1&-\lambda&-1\\0&1&\lambda\end{bmatrix}=\lambda^3+2\lambda=0,\lambda_2=\sqrt{2}i,\lambda_3=-\sqrt{2}i$$

3. 此时$u(t)=c_1+c_2e^{\sqrt{2}it}x_2+c_3e^{-\sqrt{2}it}x_3$，$e^{\sqrt{2}it}$始终在复平面单位圆上，所以$u(t)$及不发散也不收敛，它只是具有周期性。当$t=0$时有$u(0)=c_1+c_2+c_3$，如果使$e^{\sqrt{2}iT}=1$即$\sqrt{2}iT=2\pi i$则也能得到$u(T)=c_1+c_2+c_3$，周期$T=\sqrt{2}\pi$。
4. 另外，反对称矩阵同对称矩阵一样，具有正交的特征向量。

矩阵在什么情况下特征向量正交?

必须满足$AA^T=A^TA$。

验证一下会发现
对称矩阵$A=A^T$满足此条件，同时反对称矩阵$A=-A^T$也满足此条件，而正交矩阵$Q^{-1}=Q^T$同样满足此条件。

当然我们也可以考虑使用指数矩阵来处理：

注意到定理：如果矩阵可以对角化（在本例中显然可以），则

$$A=S\Lambda S^{-1},e^{At}=Se^{\Lambda t}S^{-1}=S\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_1 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix}S^{-1}$$

那么可以知道$u=e^{At}u_0$.

T2.特征值与对角化，对称矩阵，正定矩阵，马尔可夫矩阵，投影矩阵的关系

已知矩阵的特征值$\lambda_1=0,\lambda_2=c,\lambda_3=2$，特征向量

$$x_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},x_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},x_3=\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}$$

1. *c如何取值才能保证矩阵可以对角化?
   可以对角化的矩阵要求S可逆，即特征向量线性无关，显然这里满足要求，因此c是可以取任意值。
2. *c如何取值才能保证矩阵对称?
   实对称矩阵的特征值为实数，且特征向量正交，因此这里我们考虑c为实数即可。
3. *c如何取值才能使得矩阵正定?
   正定矩阵是在对称矩阵的前提下，特征值/主元/顺序主子式大于0即可，那么基于2的前提下，由于已经有一个0特征值，因此矩阵不可能正定。
4. *c如何取值才能使得矩阵是一个马尔科夫矩阵?
   马尔科夫矩阵的性质：必有特征值等于1，其余特征值均小于1，所以A不可能是马尔科夫矩阵。

5. *c取何值才能使得$P=\frac{A}{2}$是一个投影矩阵?
投影矩阵要求P是一个对称矩阵，$P^2=P$，因此根据$P^2=P$，可以知道P的特征值需要为1或0，则$\lambda_{\frac{A}{2}}=\frac{\lambda_A}{2}$，故$c=0,2$。

特殊矩阵的特征值情况

1.正交矩阵的实特征值只能是1或-1(但是很多时候都是有复特征值，但是绝对值都是1)，这也意味着正交矩阵是可逆的，同时他在复数域是一定可以对角化的(酉对角化)

证明:

$$Qx=\lambda x\to(Qx)^T=(\lambda x)^T\to x^TQ^T=\lambda x^T\overset{\text{右乘}Qx}{\to}x^Tx=\lambda x^TQx=\lambda^2x^Tx\to 1=\lambda^2$$

2.基于1，实对称的正交矩阵的特征值只能是1或-1
证明：因为实对称因此矩阵只能有实数的特征值，因此只能是1或-1。

3.秩为r的矩阵的非零特征值的重数≤r。

证明:可知$n\times n$的矩阵一共拥有n重特征值，且$Ax=0x$实际是在求$\lambda=0$时候特征向量，可知零向量的维数为$n-r$，则$\lambda=0$的重数$\geq n-r$，因此非零特征值的重数$\leq n-(n-r)$

4.正定矩阵的特征值需要大于0.

有一点比较复杂要拿出来单独讨论:

5.满足$A^2=A$的或者$(A-aE)(A-bE)=0$的A可以相似对角化

证明:$(A-aE)(A-bE)=0$,可以知道$A-bE$是$A-aE$的零空间，则可以知道$r(A-bE)\leq n-r(A-aE)$，则

$$r(A-bE)+r(A-aE)\leq n \tag{1}$$

,我们设a是k重特征值，那么b就是$n-k$重特征值，那么这里我们有

$$n-r(A-aE)\leq k\ \text{与}n-r(A-bE)\leq n-k \tag{2}$$

，则

$$r(A-aE)+r(A-bE)\geq n \tag{3}$$

，因此我们可以得到$r(A-aE)+r(A-bE)=n$，这意味着a是k重特征值也有k个线性无关的特征向量，那么b就是$n-k$重特征值也有$n-k$个线性无关的特征向量。因此可以相似对角化

这里我们要注意，我们实际上引入了一个引理，即$(A-aE)(A-bE)=0$的时候我们认为A只有a与b两个特征值，实际上我们考虑的是A的特征值是λ，那$f(A)$的特征值就是$f(\lambda)$,这是特征多项式的应用，经过证明会得知此时不会引入新的特征值，证明比较复杂。[关于矩阵多项式的特征值 (//•/ω/•//) - 知乎 (zhihu.com)]

另外，我们可以考虑一个引理

$$r(A)+r(B)\geq r(A+B)$$

，这个我想是显然的，我们考虑A与B的列空间，显然左边比右边宽敞的多。

T3.复习奇异值分解，$A=U\Sigma V^T$：

先求正交矩阵V：$A^TA=V\Sigma^TU^TU\Sigma V^T=V\left(\Sigma^T\Sigma\right)V^T$，所以$V$是矩阵$A^TA$的特征向量矩阵，而矩阵$\Sigma^T\Sigma$是矩阵$A^TA$的特征值矩阵，即$A^TA$的特征值为$\sigma^2$。

接下来应该求正交矩阵U：$AA^T=U\Sigma^TV^TV\Sigma U^T=U\left(\Sigma^T\Sigma\right)U^T$，实际上我们不应该这样子求，应该基于定下来的$V$来确定，我们需要使用$Av_i=\sigma_iu_i$，通过已经求出的$v_i$来确定$u_i$的符号（因为$AV=U\Sigma$），进而求出$U$。

已知$A=\begin{bmatrix}u_1 & u_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1 & v_2\end{bmatrix}^T$

从已知的Σ矩阵可以看出，A矩阵是非奇异矩阵，因为它没有零奇异值。另外，如果把Σ矩阵中的2改成-5，则题目就不再是奇异值分解了，因为奇异值不可能为负；如果将2变为0，则A是奇异矩阵，它的秩为1，零空间为1维，v_2在其零空间中。

T4.*A是正交对称矩阵，那么它的特征值具有什么特点?*

这里实际上在

> **特殊矩阵的特征值情况**

> 1.正交矩阵的实特征值只能是1或-1(但是很多时候都是有复特征值，但是绝对值都是1)，这也意味着正交矩阵是可逆的，同时他在复数域是一定可以对角化的(酉对角化)
>
> 证明:
>
> $$Qx = \lambda x \rightarrow (Qx)^T = (\lambda x)^T \rightarrow x^T Q^T = \lambda x^T \overset{\text{右乘}Qx}{\rightarrow} x^T x = \lambda x^T Qx = \lambda^2 x^T x \rightarrow 1 = \lambda$$
>
> 2.基于1，实对称的正交矩阵的特征值只能是1或-1
> 证明：因为实对称因此矩阵只能有实数的特征值，因此只能是1或-1。
>
> 3.秩为r的矩阵的非零特征值的重数≤r。
>
> 证明:可知$n \times n$的矩阵一共拥有n重特征值，且$Ax = 0x$实际是在求$\lambda = 0$时候特征向量，可知零向量的维数为$n - r$，则$\lambda = 0$的重数$\geq n - r$，因此非零特征值的重数$\leq n - (n - r)$
>
> 4.正定矩阵的特征值需要大于0.

我们已经讲过了,这里给出$Gilbert$的证明，有:

对于对称矩阵，有特征值均为实数；然后是正交矩阵，直觉告诉我们$|\lambda| = 1$。来证明一下，对于$Qx = \lambda x$，我们两边同时取模有$\|Qx\| = |\lambda|\|x\|$，而**正交矩阵不会改变向量长度**，所以有$\|x\| = |\lambda|\|x\|$，因此$\lambda = \pm 1$。

1. *A是正定的吗?
   并不一定，因为特征向量可以取-1。
2. *A的特征值没有重复吗?
   不是，如果矩阵大于2阶则必定有重复特征值，因为只能取± 1。
3. *A可以被对角化吗?
   是的，任何对称矩阵、任何正交矩阵都可以被对角化。
4. *A是非奇异矩阵吗?
   是的，正交矩阵都是非奇异矩阵。很明显它的特征值都不为零。

T5.投影矩阵的证明与性质

A是正交对称矩阵，*证明*$P=\frac{1}{2}(A+I)$*是投影矩阵*。

我们使用投影矩阵的性质验证：

1. 投影矩阵需要是对称矩阵
2. 投影矩阵需要满足平方等于其本身

首先由于A是对称矩阵，则P一定是对称矩阵；接下来需要验证$P^2=P$，也就是$\frac{1}{4}\left(A^2+2A+I\right)=\frac{1}{2}(A+I)$。来看看$A^2$是什么，$A$是正交矩阵则$A^T=A^{-1}$，而$A$又是对称矩阵则$A=A^T=A^{-1}$，所以$A^2=I$。带入原式有$\frac{1}{4}(2A+2I)=\frac{1}{2}(A+I)$，得证。

我们可以使用特征值验证，A的特征值可以取±1，则$A+I$的特征值可以取$0,2$，$\frac{1}{2}(A+I)$的特征值为$0,1$，特征值满足投影矩阵且它又是对称矩阵，得证。