Chapter11复习1，总结与回顾

Section1.Gilbert的习题课

$T1$.设 u,v,w 是 $\mathbb{R}^7$ 空间内的非零向量,它们生成了一个属于 $\mathbb{R}^7$ 的向量子空间,则此空间的维数是多少?

由三个向量构成的空间，显然维数是要小于等于3的，这里我们注意到u,v,w都是非零向量，因此维数不会为0，所以空间的维数是1，2或者3.

$T2$.设 U 为一个 5×3 阶梯型矩阵,其秩为 3,求矩阵 U 的零空间。

这里的情形是列满秩列满秩时候的情况，那么没有自由变量，因此零空间只能是零向量。

$T3$.给定 10×3 的矩阵 B,B 中含有矩阵 R 和 $2R$:$B=\begin{bmatrix}R\\2R\end{bmatrix}$,($R$ 是 RREF 型矩阵)

- 该矩阵的秩是多少，其 RREF 型矩阵是怎样的?

  由于R是RREF矩阵，所以R已经是最简矩阵了，由于B容易做行变换，即容易变成$\begin{bmatrix}R\\0\end{bmatrix}$的形式，显然$rankB=rankR$;
- 设矩阵$C=\begin{bmatrix}R & R\\R & 0\end{bmatrix}$,求矩阵$C$的阶梯行简化形式(RREF)。

$$C=\begin{bmatrix}R & R\\0 & -R\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}R & 0\\0 & R\end{bmatrix}$$

当然如果R中存在0行，需要进一步调整行。

- 设矩阵 R 的秩为 3,那么矩阵 C 的左零空间的维数是多少?

根据上一问的结果，可以知道$rank(C)=6$，由因为R矩阵为5×3的矩阵，因此C是一个10×6的矩阵，因此根据左零空间，可以知道左零空间的维数为$m-r=10-6=4$.

$T4$. 已知: $Ax=\begin{bmatrix}2\\4\\2\end{bmatrix}$,$x=\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

- A 的秩是多少?

显然，A是3×3的矩阵，我们根据Ax=b的解的结构，可以知道$c\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$是零空间，那么$n-r=2$，则$r=1$.

- 矩阵A究竟是怎样的?

我们关注到$Ax=\begin{bmatrix}2\\4\\2\end{bmatrix}$,且$x=\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}$,则可以知道$A$的第一列是$\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$,并且零空间的解有: $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$,由于有$AX_{null}=0$,所以可以得到

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&0\\2&-2&0\\1&-1&0\end{bmatrix}$$

- 若 $Ax=b$ 有解,那么 b 应该满足何种形式?

显然我们根据Ax=b的可解性，知道b需要在A的列空间中，因此需要满足:

$$b=k\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$$

$T5$.如果一个方阵 A 的零空间只包含零向量，那么其左零空间呢?

由于A是方阵，所以$m=n$，由于其$C(A)$只包括零向量，则$n-r=0$,则
$C(A^T)=m-r=n-r=0$

$T6$.所有的 5 阶可逆方阵是否构成向量空间?

这个答案显然是不可以的，因为这个空间甚至不包含零向量，因此一定不可以构成向量空间。

当然我们考虑一个普遍一点的例子,两个可逆矩阵的和$A+B$一定可逆吗?我们后面学到特征值之后，就会发现和的特征值可以包括0，那么就不可逆。

$T7.$如果$B^2=0$,那么$B=0$?

错误的，例如$B=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$

$T8.$方阵的各列线性无关,$Ax=b$ 是否总是有解的?

如果这里不是方阵，只说明$n=r$时，能说明有唯一解(但是不是一定有解，因为b需要与矩阵同步进行行变换，那相应的零行的对应的b也需要是0)

但是这里是方阵，那么就说明$m=n=r$，这样的话就说明A的$RREF$矩阵为$[I]$,那么一定就有解

参见Chapter06Ax=b的可解性与解的结构，行列满秩的解情况 > Section2.行满秩，列满秩，矩阵秩，解的形式之间的关系.,这里还是利用表格最好记忆。

$T9.$已知$B=CD=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&0&-1&2\\0&1&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

- B的零空间

我们注意到C是一个可逆矩阵，注意到一个重要的性质:
$CDX=0\rightarrow C^{-1}CDX=0\rightarrow DX=0$同样的$DX=0\rightarrow CDX=0$所以可以互推，也就是说明$CD$与$D$的零空间是一致的，因此计算$D$的零空间就可以得知$B$的零空间。

这里D已经是一个$RREF$矩阵，因此我们直接考虑求解即可:
令自由变量依次为1,自由列取相反数即可。

$$x=k_1\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\1\end{bmatrix}$$

- 求$BX=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$的解

在上面已经得知了B的零空间的基，这个即通解，那么我们只需要考虑一个方程的特解就好，这里的特解我们注意到

$$C \times Column1\ of\ (D) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

因此我们容易求得:

$$X_{paticular} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

所以这里的解就是:

$$X = X_{null} + X_{paticular} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

一个很重要的有意思的拓展:

在T9中我们知道了当A是一个性质很良好的矩阵(可逆)时，AB的零空间与B是一致的，可以给我们带来很多方便，这里我们能否做一些更多的拓展？弱化条件，增多使用场景?

- 当A列满秩的时候，则$r(AB) = r(B)$,

这里理解是A如果列满秩，则$AX = 0$只有零解，那么$ABX = 0$只能是$BX = 0$,
那么$ABX = 0 \to BX = 0$,很轻易的我们由$BX = 0 \to ABX = 0$,因此我们可以说明，AB与B的零空间一致，所以$r(AB) = r(B)$
我们这里就弱化了条件，只需要A列满秩就可以说明AB与B的零空间一致

- 当A行满秩的时候，则$r(BA) = r(B)$,
  这个形式我们其实很容易考虑到左乘空间这一说法，事实上我们也可以去考虑类似的手法:

$$\begin{aligned} & r(BA) = r(A^T B^T) \\ & \text{可知}A^T\text{列满秩，则}r(A^T B^T) = r(B^T) = r(B) \end{aligned}$$

  这里就拓宽了使用场景，把A的使用条件加上了行满秩

$T10$.如果矩阵是方阵，是否意味着矩阵的行空间等于列空间?

显然是错误的，那如果行列秩相等可以吗?我觉得也是错误的，例如:

$$\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$T11$.如果A和B的四个子空间相同,则A是B的倍数。

错误，任意同阶的可逆矩阵其四个子空间都相同，然而却不一定成倍数。

$T12$.给定矩阵 A，交换其中的两行，哪些子空间没变?

行空间和零空间。

$T13$.为什么向量$\begin{bmatrix}1&2&3\end{bmatrix}$既不能是矩阵$A$的某一行,又在矩阵$A$的零空间中?

这是显然的，直接代入方程 $Ax=0$ 就能知道为什么一个向量既不能是矩阵A的某行,又在矩阵A的零空间中。

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\&\dots&\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}0\\\dots\\\dots\end{bmatrix}$$

实际上， **对于一个给定的矩阵，其行空间和零空间所共享的向量只有零向量，这涉及到了正交的概念，矩阵的零空间与行空间正交。**

一个总结与回顾:

第一章Chapter01线性方程组的求解中，首先我们引入了线性方程组的重新思考，认为对于$AX=b$的求解是对A中的列向量进行一个X的重新组合得到b的过程。那么我们引入一个非常重要的观念:左乘是行变换，右乘是列变换，因此我们在求解$AX=b$的另外一个视角，即我们通常认为的方程之间的相加减，就是对系数矩阵A的行变换，这个行变换我们可以连同b一起做，即增广矩阵(Gauss消元法)，同时我们可以矩阵的方式来书写消元的过程，我们就顺利引入了**初等矩阵(E_{ij})的概念。

第二章Chapter02矩阵的求逆与A=LU分解法中，由于我们在第一章中行变换的视角，我们知道如果要求解$A^{-1}A=I$,如果我们针对$[A\mid I]$ 进行行变换得到$[I\mid M]$,事实上$M=A^{-1}$，这就是Chapter02矩阵的求逆与A=LU分解法 > Section2. 对逆矩阵的求解方式(Gauss-Jordan方法),当然我们还要关心什么矩阵会有逆矩阵。
一系列的知识铺垫就是为了引入$A=LU$的分解，事实上我们在增广矩阵(Gauss消元法)就引入了初等矩阵的概念，从$E_{32}E_{31}E_{21}A=U$走到$L={E_{21}}^{-1}{E_{31}}^{-1}{E_{32}}^{-1}$的过程，是因为我们逆

矩阵的求解不会发生前面一个矩阵对第二行变化而后一个矩阵也要用第二行的窘境，这样的话求解直观，迅速。

第三章Chapter03矩阵的转置，置换中简要讲述了置换矩阵和对称矩阵的概念，对称阵的构造也是有点意思的。

第四章Chapter04向量空间，哦我的老天爷啊，它实在是太重要太美妙了。我们首先介绍向量空间的定义与要求，子空间的定义，要求他是对于数乘与加减封闭，介绍了最重要的两个子空间列空间与零空间，他在矩阵的运算中有着非常非常非常重要的意义，同时简单介绍了一下零空间与零向量空间的区别。

第五章Chapter05AX=0的具体算法，秩与特解的得到,我们在Chapter01线性方程组的求解中其实就介绍过了关于$AX=0$的新的视角(列向量的linear combination)，但是我们没能完全解出一个$AX=0$的答案，利用Gauss消元法我们可以得到U矩阵，即上三角矩阵，其中我们引入了主元，主列，以及秩的概念，那么行秩列秩矩阵秩的关系是什么？化成最简的$RREF$矩阵后，特解是什么怎么书写，特解有几个？以及为什么？还有最势利的省流不看的最终方法Chapter05AX=0的具体算法，秩与特解的得到 > 势利一点的结论 方程化简到了$RREF$的形式，怎么得到最后的特解？

第六章Chapter06Ax=b的可解性与解的结构，行列满秩的解情况中，在第五章对于$AX=0$的求解基础上，我们考虑了一个更复杂的方程求解，而这个方程的解是特解+通解，而最重要最精彩的就是行满秩，列满秩，矩阵秩与解的形式的关系Chapter06Ax=b的可解性与解的结构，行列满秩的解情况 > Section2.行满秩，列满秩，矩阵秩，解的形式之间的关系.

第七章Chapter07线性相关，生成，基，维数,通过介绍向量组的线性相关性，从而关联相应矩阵的性质(秩需要列满秩),再考虑生成的概念，其依赖于基来"生成"某个空间，基也有一些性质，而他组成的矩阵也会有一些性质，**空间的维数就是生成这个空间的基的个数,他们的性质是线性无关的**

第八章Chapter08四个基本子空间，我们在Chapter05AX=0的具体算法，秩与特解的得到和Chapter06Ax=b的可解性与解的结构，行列满秩的解情况的求解中实际上都是在对A的列空间与零空间的考察，在这一章中我们考虑了更多的子空间，考虑了他们的定义，以及在第七章中提到的，他们的维数，基分别多少以及为什么。

第九章Chapter09矩阵空间，秩1矩阵与第十章Chapter10图和网络是一个更高维度的拓展与理解，其中比较贴近考研的内容是Chapter09矩阵空间，秩1矩阵 > Section2.秩为1的矩阵.，提醒我们可以用秩为1的矩阵可以写为uv^T，其中u,v均是列向量。