Chapter12正交向量与子空间

Section1.正交的概念

Subsection1.向量正交

实际上我们在初高中就已经知道向量正交的概念:

- 从几何上理解:两向量垂直即向量正交
- 从代数上理解:两向量点乘为0

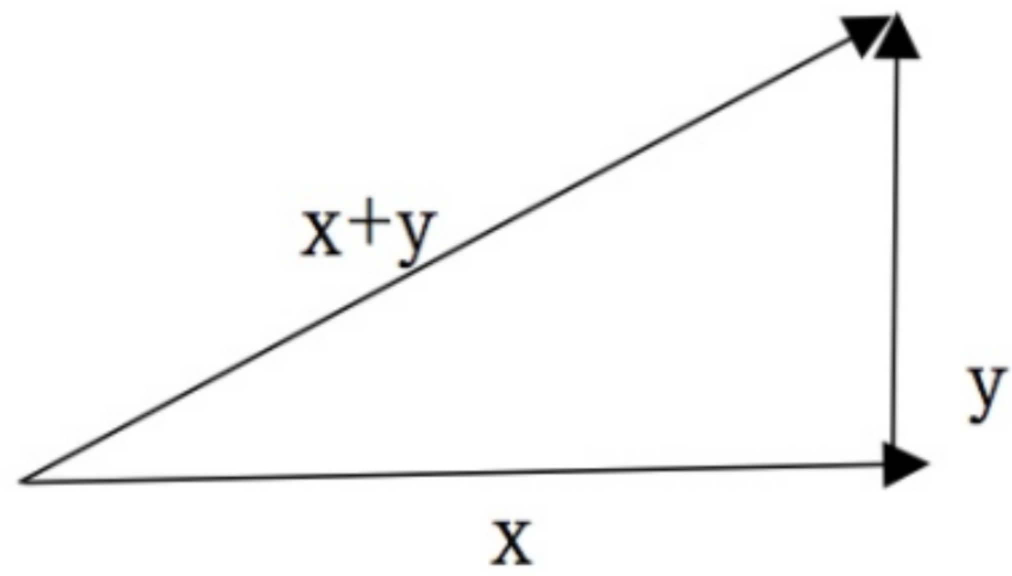
那么我们稍微规范点描述，定义是内积为0，$x^Ty=0$,那么这两个向量互相正交。而这种正交在几何上表现为垂直。

显然零向量与任意向量都是正交的。

prove:为什么内积为0与向量垂直是等价的?

首先有几个重要的前提知识:

- 矩阵乘法拥有分配律，即$(A+B)(C+D)=AB+AD+BC+BD$
- 括号的转置等于转置的括号，即$(A+B)^T=A^T+B^T$
- 向量的模的平方等于内积，即$|x|^2=x^Tx$



现在我们来做证明:

根据勾股定理，有:

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2$$

根据向量的模与内积的关系，原式可以写为:

$$x^T x + y^T y = (x+y)^T (x+y)$$

根据上面的有关定理我们做一些化简最后得到:

$$x^T y + y^T x = 0$$

而实际上$x^T y = y^T x$(毕竟x与y垂直和y与x垂直是没有区别的)，那么可以得到:

$$x^T y = 0$$

Subsection2.空间正交

这里我们需要把正交的概念再明确一下，其实我们对于**正交**的定义的分类不是分为什么"空间的，向量的"，实际上我们已经在前面学过了子空间的概念，无论是三维空间的直线还是平面都是一种$subspace$，因此我们应该把正交的定义规范一下:

正交:若某空间（此空间为内积空间）中两向量的内积为0，则它们正交。类似地，若某空间（内积空间）中的向量v与子空间A中的每个向量”都“正交，那么这个向量和子空间A正交。

若内积空间的子空间A和B满足一者中的每个向量"都"与另一者正交，那么它们互为正交子空间。

所以我们需要注意到:

垂直不是正交的定义！两个空间的任意向量的内积为0才是真正的定义，向量的正交往往才是垂直的。

比如说，我们考虑三维平面直角坐标系中的xoy平面与yoz平面，他们显然是垂直的，但是他们并不是任意向量两两垂直，例如最简单的例子，我取他们的共同向量y轴，这显然内积不为0。

最后我们探究子空间中的正交情况,先简单地以 $\mathbb{R}^2$ 的子空间为例,$\mathbb{R}^2$ 的子空间有三种:整个平面 D ,过原点的直线 L ,零向量。

就这三个子空间而言,显然 L 和 D 是不可能正交的,因为 L 就在平面 D 上,但 L 和零向量,$\mathbb{D}$ 和零向量是正交的。此外, L 和 L' 之间也可能是正交的:两条直线需要在原点处互相垂直。

Subsection3.矩阵的四个基本子空间的正交情况

结论:

一个矩阵，其零空间与行空间是正交的，它们之间的关系类似于将一个空间一分为二所得到的两个子空间(互为正交补)。左零空间与列空间的关系是同理的。

证明:

$$Ax=\begin{bmatrix}\text{row1 of A}\\ \text{row2 of A}\\ \vdots\\ \text{rowm of A}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\text{row1 of A}\cdot x\\ \text{row2 of A}\cdot x\\ \vdots\\ \text{rowm of A}\cdot x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$$

因此行空间与零空间的任意向量的内积为0，因此说明零空间与行空间正交。

而左零空间与列空间通过$A^Ty=0$即可说明。

正交补:

在Chapter08四个基本子空间中我们介绍了四个基本子空间的维数，而巧合的是:

$$dim(N(A/A^T)) + dim(C(A^T/A)) = n/m$$

即零空间与行空间的维数和为n，而左零空间与列空间的为m，而且他们互相正交。

例如:

$$\text{设}A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \end{bmatrix}, Ax = 0\text{可写为}:$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

一眼就可以看出,$A^\top$ 的秩为 1,所以其行空间是 1 维的,其零空间是 2 维的(可以理解为垂直于向量$[1 \;\; 2 \;\; 5]^\top$ 的一个平面),行空间维数与零空间维数相加为 3。而有意思的是行空间和零空间中的向量都是 3 维的,因此说明这两个空间互补成功，一个的垂直向量被另外一个空间完完全全描述。

因此我们称行空间和零空间是$\mathbb{R}^n$里的正交补,是因为行空间和零空间正交且这两个子空间的维数之和为n。举个简单的例子,三维空间中两条过原点的互相垂直的直线显然是相互正交的,但这两条直线对应的空间却不能被称为正交补,正交补的补就意味着,对于其中一个向量空间S,另外一个向量空间 T 则包含了所有垂直于 S 的向量而不是部分。一分为二描述了一种彻底的程度。