# Chapter29线性变换与相应矩阵

## Section1.线性变换的引入

线性变换并不依赖于矩阵而存在，或者说矩阵是线性变换的一种。

### Subsection1.定义

如何判断一个操作是不是线性变换？线性变换需满足以下两个要求：

$$T(v+w) = T(v) + T(w)$$
$$T(cv) = cT(v)$$

那么综合起来，就会发现线性变换满足:

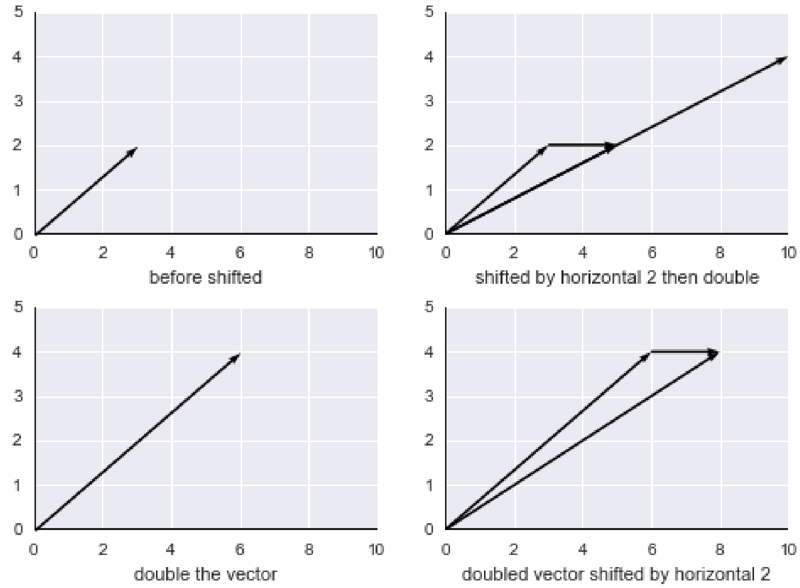
$$T(cv+dw) = cT(v) + dT(w)$$

### Subsection2.实例

例1.二维空间中的投影操作，$T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$，它可以将某向量投影在一条特定直线上。
检查一下投影操作，如果我们将向量长度翻倍，则其投影也翻倍；两向量相加后做投影与两向量做投影再相加结果一致。所以投影操作是线性变换。

例2，旋转$45^\circ$操作，$T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$，也就是将平面内一个向量映射为平面内另一个向量。
检查可知，如果向量翻倍，则旋转后同样翻倍；两个向量先旋转后相加，与这两个向量先相加后旋转得到的结果一样。

反例1.二维空间的平移操作，即平面平移：




可以发现，我们这个变换是沿着$(0,5)$这个向量平移，我们用$(0,2)$来平移，会发现他并不满足向量长度翻倍，而变换后的向量不会翻倍。因此不是线性变换。

反例2.求模运算，$T(v)=\|v\|$, $T:\mathbb{R}^3\rightarrow\mathbb{R}^1$
这显然不是线性变换，比如如果我们将向量翻倍则其模翻倍，但如果我将向量翻倍取负，则其模依然翻倍。所以$T(-v)\neq -T(v)$

例3，矩阵乘以向量，$T(v)=Av$，这也是一个（一系列）线性变换，不同的矩阵代表不同的线性变换。
根据矩阵的运算法则有$A(v+w)=A(v)+A(w)$，$A(cv)=cAv$。
比如取$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$，作用于平面上的向量$v$，会导致$v$的$x$分量不变，而$y$分量取反，也就是图像沿$x$轴翻转。

**验证的一个方式**

如果要验证一个变换是否是线性变换，也可以考虑$T(0)$是否等于$0$，因为根据$T(cv)=cT(v)$，令$c=0$即可

## Section2.线性变换的矩阵

我们在线性变换的实例中提到了

> 例3，矩阵乘以向量，$T(v)=Av$，这也是一个（一系列）线性变换，不同的矩阵代表不同的线性变换。
> 根据矩阵的运算法则有$A(v+w)=A(v)+A(w)$，$A(cv)=cAv$。
> 比如取$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$，作用于平面上的向量$v$，会导致$v$的$x$分量不变，而$y$分量取反，也就是图像沿$x$轴翻转。

### Subsection1.理论基础

因此我们着重关注矩阵的线性变换，而我们注意到一点，实际上我们在做矩阵的线性变换的时候，是在做基的变换：

具体来说，我们可能描述一个向量是:

$$k=c_1v_1+c_2v_2+\cdots+c_nv_n \tag{1}$$

线性变换了之后，就是:

$$T(k)=c_1T(v_1)+c_2T(v_2)+\cdots+c_nT(v_n) \tag{2}$$

但是我们注意到，$T(v_k)$并不一定是$w_k$，因此我们需要考虑:

$$T(v_1)=a_{11}w_1+a_{21}w_2+\cdots+a_{m1}w_m \tag{3}$$

$k$和$T(k)$描述的不一定是同一个向量，因为我们做了变换。

我们定义

$$T(v)=Av=w$$

其中

$$v=\begin{bmatrix}v_1 & v_2 & \cdots & v_n\end{bmatrix}\ w=\begin{bmatrix}w_1 & w_2 & \cdots & w_n\end{bmatrix}$$

因此如果我们需要确定$A$，则根据式3需要考虑

$$T(v_1)=a_{11}w_1+a_{21}w_2+\cdots+a_{m1}w_m$$

说明第一列即为求出的系数$a_i1$

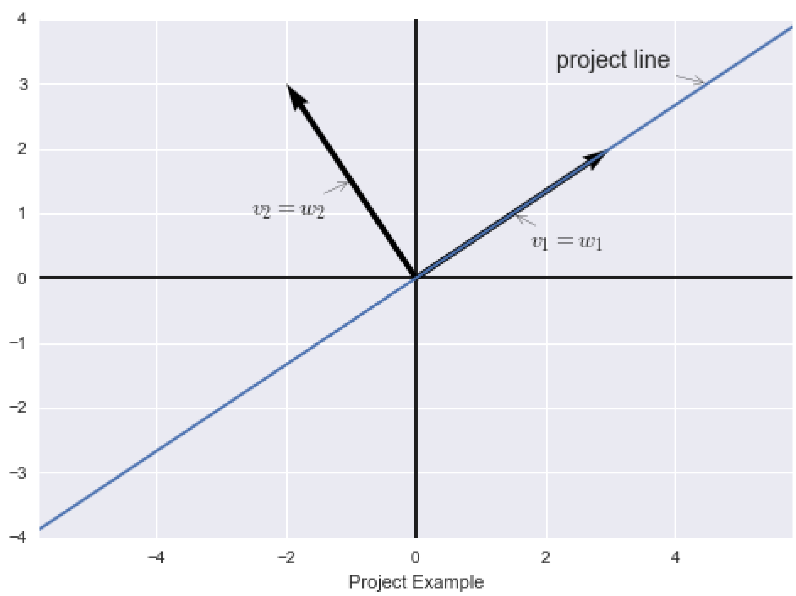
同样类似的，有:

$$T(v_2)=a_{12}w_1+a_{22}w_2+\cdots+a_{m2}w_m$$

最终得到

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right]$$

## Subsection2.实例




我们知道如果要求$A$，则需要选定$v_1, v_2, \cdots, v_n$为输入向量的基，这些向量来自$\mathbb{R}^n$；$w_1, w_2, \cdots, w_m$作为输出向量的基，这些向量来自$\mathbb{R}^m$。

这里我们考察的线性变换为投影矩阵。

step1. 我们选中输入空间的基向量$v_1, v_2$，并考察输出空间的基向量$w_1, w_2$：(注意到一点，$w_1, w_2$都是我们选择的，而不是$T(v_1), T_{(}v_2)$变化而来的。)

$$v_1\text{选择投影线上}, v_2\text{选用法线方向上的单位向量} \\ w_1\text{选择与}v_1\text{相同，}w_2\text{选择与}v_2\text{相同}$$

step2.找到$w_1, w_2$与$T(v_1), T(v_2)$的关系，则有:

$$T(v_1) = w_1 + 0w_2 \;\; T(v_2) = 0w_1 + 0w_2$$

step3.因此写出$A$矩阵的样式:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

step4.写出对应的方程:

$$w_x = Av_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**Note**

需要注意到的一点，这里的$w_x$和$v_x$指的是我们选定了$v_1$和$v_2$作为基底，那么初始向量就是$c_1v_1 + c_2v_2$，可以写为$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$，同样的，变换后的向量写为$w = ?v_1 + ?v_2$，而这些?就依赖于$A$与$v_x$来求

同样的，我们也可以考虑不使用$v_1, v_2$来作为基底，而是选用标准基$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，继续使用相同的基作为输出空间的基，即$v_1 = w_1, v_2 = w_2$,这个时候我们需要知道投射的曲线的信息，假设为$y = x$，则我们需要考虑什么变换才能满足$T(v_1) = a_{11}w_1 + a_{12}w_2$等等，我们有前置知识可以知道，这个时候的变化矩阵为$P = \frac{aa^T}{a^Ta} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$(因为是在平面直角坐标系下进行的，那坐标变换就是我们熟悉的投影矩阵)，这个矩阵就没那么好。

### Subsection3.另一个实例

我们介绍一种不一样的线性变换，$T = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$：

设输入为$c_1 + c_2x + c_3x^3$，基为$1, x, x^2$；则输出为导数：$c_2 + 2c_3x$，基为$1, x$；

有$A\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 \\ 2c_3 \end{bmatrix}$，从输入输出的空间维数可知，$A$是一个$2 \times 3$矩阵，$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$。(这里也说明了可以从坐标来逆推$A$变化矩阵)

所以我们需要求一个从三维输入空间到二维输出空间的线性变换，目的是求导。求导运算其实是线性变换，因此我们只要知道少量函数的求导法则（如$\sin x, \cos x, e^x$），就能求出它们的线性组合的导数。

最后，矩阵的逆相当于对应线性变换的逆运算，矩阵的乘积相当于线性变换的乘积，实际上矩阵乘法也源于线性变换。