Chapter09矩阵空间，秩1矩阵

Section1.对向量空间进行一点拓展

Subsection1.矩阵空间

我们考虑的向量空间都是R^n，而空间的元素是向量，我们可以拓宽一点思路，考虑元素为矩阵，这样的话向量空间就是$R^{n\times n}$。

我们把矩阵看作向量的依据是：矩阵和向量一样可以进行加减，数乘。

既然如此，那么在矩阵的基础上讨论向量空间就存在可能。但矩阵毕竟还是矩阵，所以我们将这种不一样的向量空间称为矩阵空间。

Subsection2.一个例子:

我们考虑一个例子:$R^{3\times 3}$，简记为M，那么这个矩阵的基为9维的(因为基向量的数量为9)，分别是9个3×3的矩阵，一个位置为1，其余均为0,例如:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} and \begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\dots$$

它的子空间我们提出一些具有代表性的:

- 所有的上三角矩阵
- 所有的对称矩阵
- 所有的对角矩阵（可视为所有的上三角矩阵和所有的对称矩阵的交集，子空间的交集当然也是一个子空间）

上三角矩阵构成的向量空间S的基向量:

$$6个: \begin{bmatrix}1/0&1/0&1/0\\0&1/0&1/0\\0&0&1/0\end{bmatrix}$$

其中任意一个为1，其余的为0.

对称矩阵构成的向量空间U的基向量:

$$6个: \begin{bmatrix} 1/0 & 1/0 & 1/0 \\ 0 & 1/0 & 1/0 \\ 0 & 0 & 1/0 \end{bmatrix}$$

其中任意一个为1，其余的为0.(与上三角矩阵的基向量一样)

对角矩阵构成的向量空间D的基向量:

$$3个: \begin{bmatrix} 1/0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/0 \end{bmatrix}$$

矩阵空间的交与和的性质

我们根据上三角矩阵基向量维数，对称矩阵基向量维数，对角矩阵基向量维数可以知道:

$$dim(S) = 6, dim(U) = 6, dim(D) = 3$$

我们注意到$D = S \cap U$,我们关注S和U

为什么这里我们说的是S和U，而不是$S \cup U$? 因为简单的把$S \cup U$，我们的元素可以一个从U取一个从S取，这样的话相加就不属于$S \cup U$,就不是向量空间了。而$S + U$是一个基于$S \cup U$的拓展。

而我们注意到$S + U$，实际上注意到任意的3×3的矩阵都能表示，就相当于M3x3的空间，因此

$$dim(S + U) = 9$$

因此我们会发现

$$\begin{aligned} dim(S) + dim(U) &= dim(S \cap U) + dim(S + U) \\ 6 \quad + \quad 6 \quad &= \quad\quad 3 \quad\quad + \quad\quad 9 \end{aligned}$$

Subsection3.微分方程与向量空间的联系

我们考虑一个:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

考虑实数范围，我们容易找到这个微分方程的解有：$y = sinx$和 $y = cosx$。实际上，所有 $sinx$和 $cosx$的线性组合，也即 $c_1 sinx + c_2 cosx$ 都是该微分方程的解。而 **该微分方程的所有**

解的集合实际上就可以看做是一个“向量空间“，我们可称其为解空间，解空间中的元素是解（而非向量或者矩阵），且 **这些解都满足线性组合封闭的条件。**

从向量空间的角度思考这个解空间，那么 **这个解空间的维数为 2，其具有两个基，恰为 sinx和 cosx。**

Section2.秩为1的矩阵.

秩为1的矩阵可以写为uv^T，其中u,v均是列向量，这个性质在考研中也经常使用

即

$$A=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\dots\\x_n\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & \dots & a_n\end{bmatrix}$$

秩为1的矩阵可以用于搭建其余的矩阵

这里要求我们把$A=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\dots\\x_n\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & \dots & a_n\end{bmatrix}$的视角转化为处理向量的方式，即$\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & \dots & a_n\end{bmatrix}$视为行向量$\beta$，那么$A=\begin{bmatrix}x_1\beta\\x_2\beta\\\dots\\x_n\beta\end{bmatrix}$.

假设有一个 5×17 的矩阵其秩为 4，那么该矩阵可以通过四个秩 1 矩阵搭建出来，具体过程类似于我们在列矩阵×行矩阵中讲到的矩阵乘法中的“列乘行”形式：

$$C=\sum_{i=0}^{n}(Col_i\ of\ A)(Row_i\ of\ B)$$

为什么秩为4就可以用四个秩1矩阵搭建？

$$\text{秩为}4\rightarrow A\text{的行空间为}4\text{个基向量生成}\rightarrow\text{每个秩}1\text{的矩阵来描述一个基向量}$$

有趣的样例:把问题转化为熟悉的内容

在介绍图的知识之前，我们先考虑下面这个例子：

四维空间中的向量都有四个分量v $= [v_1 v_2 v_3 v_4]^T$，设 S 为一个集合， S 中的向量都满足：$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0$ 。则 S 是一个向量空间吗？若是，那么其基和维数是多少？

S 显然是一个向量空间，因为 $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0$ 这个特点，所以 S 对加法和数乘都封闭， S 中也显然包含零向量。那么， S 这样的向量空间其维数和基是什么呢？

我们考虑矩阵 A $= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ，由 S 中向量元素的特殊性质可得：

$$Av = 0$$

那么此时我们就会发现，S和A的零空间是一样的，因此我们分析S只需要分析A的零空间即可.

我们容易知道A的零空间的基向量的求解，因此容易分析S的基与维数.