Chapter17行列式公式与代数余子式

Section1.行列式公式推导

Subsection1.行列式的推导

我们已经知道$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$，我们可以用很多方法来推导，在消元法改写为上三角矩阵我们可以推导，这里为了引进一般维数的行列式公式，我们考虑另外一种证明方式:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \overset{3.b}{=} \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} \overset{3.b}{=} \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix}$$

$$\text{其中} \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} \overset{6,10}{=} 0, \quad \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} \overset{7}{=} ad, \quad \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix} \overset{2,7}{=} -bc, \quad \begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} \overset{6,10}{=} 0$$

$$\text{综上，} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

我们注意到我们在拆分的过程中，我们保留某一行/列全为0的行列式是没有意义的，因此我们在拆分的过程中需要注意到每行每列都需要保留元素。我们拆分的最终结果一定会是任意位置的0与任意位置的元素的组合，事实上我们可以一点一点的写开，这里就不做具体的证明。

我们接着拿三阶矩阵来举例子:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}\end{aligned}$$

那我们推广一些，考虑n阶矩阵，可以知道n 阶行列式可以分解得到 $n!$ 个非零行列式(占据第1行的元素有n种选择,占据第2行的元素有$n-1$种选择,以此类推即$n!$)，因此我们可以得到任意的n阶矩阵的行列式，为:

$$\det A = \sum_{n!} \pm a_{1\alpha} a_{2\beta} a_{3\gamma} \cdots a_{n\omega}, \quad (\alpha, \beta, \gamma, \cdots, \omega) = P_n^n$$

其中 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots, \omega$ 共 n 个数是列标 1 到 n 的某种排列(这意味着不会重复)。上式即为一般的行列式公式。

Subsection2.逆序数

那么我们需要继续考虑，这个正负号怎么取到呢？我们考虑如下的例子:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \color{red}1 & \color{blue}1 \\ 0 & \color{red}1 & \color{blue}1 & 0 \\ \color{red}1 & \color{blue}1 & 0 & 0 \\ \color{blue}1 & 0 & 0 & \color{red}1 \end{vmatrix}$$

我们按上面的方法来取元素来相乘，第一行我们容易发现,α只能为3或4。选定$\alpha = 3$,则$\beta = 2, \gamma = 1, \omega = 4$;选定$\alpha = 4$,则$\beta = 3, \gamma = 2, \omega = 1$。我们只能找到两组非零行列式。

- 对于第一组非零行列式(图中蓝色部分),其对应的排列是 $(4, 3, 2, 1)$,变为 $(1, 2, 3, 4)$ 需要两步操作,由行列式性质2可知符号应取 $+$.
- 对于第二组非零行列式(图中红色部分),其对应的排列是 $(3, 2, 1, 4)$,变为 $(1, 2, 3, 4)$ 需要一步操作,由行列式性质2可知符号应取 $-$.
  我们会发现，这个正负号的判别依赖于所留存元素的列变换，而这个列变换我们可以抽象为$\alpha, \beta, \gamma, \cdots, \omega$ 这几个数字换成$(1, 2, 3 \cdots n)$的次数，因此我们考虑到逆序数的概念:

逆序数就是从左到右遍历当前排列中的每一个数,统计右侧有几个数比自己小,比如对于排列$(4, 3, 2, 1)$,4后面有3个数比它小,3后面有2个数比它小,2后面有1个数比它小,取其总和$3 + 2 + 1 = 6$即为逆序数，记为$r(j_1, j_2, \cdots, j_n)$。
逆序数为偶数的,则称排列为偶排列,否则为奇排列,偶排列时非零行列式取 $+$,奇排列时非零行列式取 $-$。其中的道理在于奇排列做一次交换后即为偶排列,偶排列做一次交换后即为奇排列,并且初始顺序排列 $(1, 2, 3, \cdots, n)$ 为偶排列。

因此行列式公式可以改写为:

$$\det A = \sum_{n!} (-1)^{r(j_1, j_2, \cdots, j_n)} a_{1\alpha} a_{2\beta} a_{3\gamma} \cdots a_{n\omega}, \quad (\alpha, \beta, \gamma, \cdots, \omega) = P_n^n$$

Section2.代数余子式

我们考虑三阶矩阵的行列式，实际上我们已经推导出来它的值:

$$\text{原式} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

我们如果把第一行的元素做同类项合并，会有:

$$\begin{aligned} &a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})+a_{12}(-a_{21}a_{33}+a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}) \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}) + a_{12}(-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}) + a_{13}(\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}) \end{aligned}$$

容易发现,3×3 的行列式由 2×2 行列式组成。事实上,n阶行列式同样可化为多个 $n-1$ 阶行列式的组合。下面我们正式介绍 a_{ij}的代数余子式 的概念:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot det(\text{去掉}i\text{行和}j\text{列的一个}n-1\text{矩阵})$$

因此我们得到新的求解行列式的方式:

$\text{假设我们选取第一行（}i=1\text{），那么行列式}A\text{沿第一行展开有：}\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + ... + a_{1n}C$

代数余子式和余子式的区别:

余子式即去掉 i行和j列的一个$n-1$行列式;

代数余子式需要在余子式的基础上带上符号, $C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot det(\text{去掉}i\text{行和}j\text{列的一个}n-1\text{矩阵})$。

Section3.求解行列式的三种方式

- 消元,将矩阵化为三角矩阵,主元乘积记为行列式的值(最简单)
- 按照行列式公式将行列式完全展开,找到 $n!$ 种非零行列式,计算这些行列式的值的和(最复杂)

$$\det A = \sum_{n!} (-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)} a_{1\alpha}a_{2\beta}a_{3\gamma}\cdots a_{n\omega}, \quad (\alpha,\beta,\gamma,\cdots,\omega) = P_n^n$$

- 使用代数余子式对行列式进行降阶,展开得到更简单的行列式,然后再求解(介于二者之间)

  $\text{假设我们选取第一行（}i=1\text{），那么行列式}A\text{沿第一行展开有：}\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + ... +$

Section4.一个有趣的例子

我们注意到一个特殊的矩阵，叫做三对角矩阵，这里我们考虑的是由1组成的:

$$A_1=1, A_2=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}, A_3=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}, A_4=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}, \cdots, \text{寻找其行列式值的规律}$$

显然A_1, A_2是容易求得的，$A_1=1, A_2=0.$

我们主要关注A_3与A_4，那么我们首先看A_3，利用代数余子式的方式，我们对第一行展开，会有:

$$\text{显然直接按第一行展开有：} A_3=1\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=0-1=-1\text{。}$$

我们把$\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}$按第一列展开，即 $|1|=A_1$，那么我们会发现$A_3=A_2-A_1$
同样对于A_4，有:

$$A_4=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{vmatrix} \overset{\text{沿第一行展开}}{=} 1\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=A_3-1\times\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=A_3-A_2$$

那么我们根据数学归纳法，可以得到元素为1的上三角行列式值的递推式:

$$A_n=A_{n-1}-A_{n-2}$$

由此规律,易得 $|A_5|=0$, $|A_6|=1$, $|A_7|=1$, $|A_8|=0$, 到这里我们发现:由1组成的n阶三对角矩阵的行列式值从1阶开始按照1,0,-1,-1,0,1循环,周期为6。