
數值分析 110-2 作業 4 (數值積分)

對於以下的函數：

$$f(x) = \frac{x \cos(x)}{e^{0.25x^2}} \quad 0 \leq x \leq \pi$$

■ 請應用數值積分法積分函數 $f(x)$ ：

1. 請分別應用梯形法與 Simpson 法計算 NP=8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 與 1024 的積分值；(NP 為切割之數目)
2. 請進行不同分割數目以及不同方法的誤差分析，並以表與圖表示。
3. (Optional)請試圖分析與推導所得的誤差精準度。

■ 請應用高斯積分法積分函數 $f(x)$ ，C++請應用 double precision

4. 請取切割數目 NP 為 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128，應用高斯法不同點數 M=2 與 3 進行積分之計算，並進行誤差分析；
5. 請取切割數目 NP 為 1(0 至 π)，應用高斯法不同點數 M=2,3,4,5,6 進行積分之計算，並進行誤差分析；
6. (Optional)請進行不同方法的效率比較，並以圖表示。

請注意程式的輸入與輸出，並加上註解，此程式應具備以下之功能：

- (1) 詢問使用者積分方法、N；
- (2) 將計算值輸出於檔案與螢幕。

■ 題 1,2,4,5 佔分 80 分。optional (可選擇不做)之 3 與 6，佔分 40 分。

■ 繳交作業內容應包含：

- (1) 報告：包含對於問題的探討與討論、計算結果、對於結果的驗證與分析等
- (2) C++程式檔

■ 程式請注意格式、註解與風格

■ 由於期中考，作業 4-1 與作業 4-2 繳交時間為 2022.05.04 09:00am，遲交分數打折，請繳交至 TronClass，檔案名為 姓名學號_HW4(.rar)

數值積分方法HW4

~第一次較大型作業~

國立台灣海洋大學

辛敬業

2022

HW4-1

▪ Trap. & Simpson

對於以下的函數：

$$f(x) = \frac{x \cos(x)}{e^{0.25x^2}} \quad 0 \leq x \leq \pi$$

■ 請應用數值積分法積分函數 $f(x)$ ：

1. 請分別應用梯形法與 Simpson 法計算 NP=8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 與 1024 的積分值；(NP 為切割之數目)
2. 請進行不同分割數目以及不同方法的誤差分析，並以表與圖表示。
3. (Optional)請試圖分析與推導所得的誤差精準度。

▪ 2. 參考後面

▪ 3. 分析：參考後面

推導：提示---Taylor Expansion

HW4

■ 解析解

integrate x*cos(x)*exp(-0.25*x*x) dx from x=0 to pi

NATURAL LANGUAGE **MATH INPUT** **EXTENDED KEYBOARD** **EXAMPLES** **UPLOAD** **RANDOM**

Definite integral Fewer digits More digits

$$\int_0^\pi x \cos(x) \exp(-0.25 x x) dx =$$
$$\frac{\sqrt{\pi} \left(-2 \operatorname{erfi}(1) + \operatorname{erfi}\left(1 - \frac{i\pi}{2}\right) + \operatorname{erfi}\left(1 + \frac{i\pi}{2}\right) \right)}{e} + 2 + 2 e^{-\pi^2/4} \approx$$

$-0.0211416975110220184329345527603581855192959950130393817764989729^\circ$ $3932532462062551288305910869186094 + 0. \times 10^{-99} i$

erfi(x) is the imaginary error function

梯形法

N=16

N=32

x	f(x)	T
0.000000	0.000000	
0.196350	0.190730	0.018725
0.392699	0.349086	0.052996
0.589049	0.449081	0.078360
0.785398	0.475994	0.090819
0.981748	0.428640	0.088812
1.178097	0.318662	0.073366
1.374447	0.167208	0.047700
1.570796	0.000000	0.016416
1.767146	-0.157926	-0.015504
1.963495	-0.286605	-0.043642
2.159845	-0.373829	-0.064838
2.356194	-0.415847	-0.077526
2.552544	-0.416304	-0.081696
2.748894	-0.384013	-0.078571
2.945243	-0.330277	-0.070125
3.141593	-0.266423	-0.058581
		-0.0232895
		-0.0021478

x	f(x)	T
0.000000	0.000000	
0.098175	0.097467	0.004784
0.196350	0.190730	0.014147
0.294524	0.275796	0.022901
0.392699	0.349086	0.030674
0.490874	0.407604	0.037144
0.589049	0.449081	0.042052
...		
...		
...		
...		
2.748894	-0.384013	-0.038661
2.847068	-0.359093	-0.036477
2.945243	-0.330277	-0.033839
3.043418	-0.298961	-0.030888
3.141593	-0.266423	-0.027753
		-0.021677
		-0.000536

HW4-2

- 請應用高斯積分法積分函數 $f(x)$ ，C++請應用 **double precision**
- 4. 請取切割數目NP為1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128，應用高斯法不同點數M=2與3進行積分之計算，並進行誤差分析
 - Number of nodes：取2與3
 - 將積分的區域， $0 \leq x \leq \pi$ 之間，切割為NP等份，在每一切割中應用高斯積分法

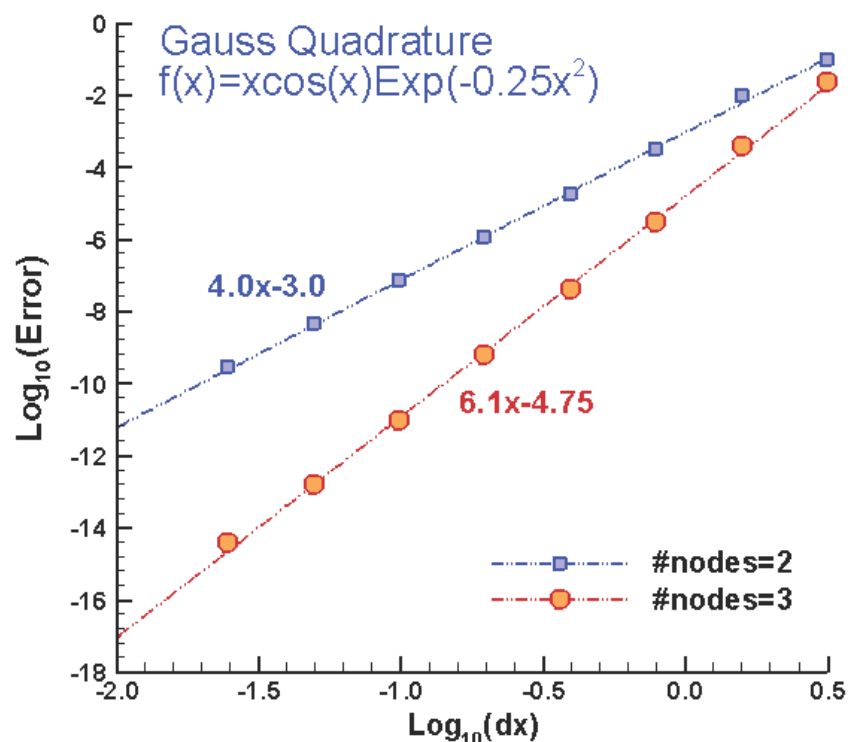
5

HW4-2

▪ #4

$$\begin{aligned} \text{Error } \varepsilon &\sim O[(\Delta x)^k] \\ \log_{10} \varepsilon &\sim \log_{10}[(\Delta x)^k] \\ \log_{10} \varepsilon &\sim k \log_{10}[(\Delta x)] \\ k &\sim \frac{\log_{10} \varepsilon}{\log_{10}[(\Delta x)]} \end{aligned}$$

- (之前的梯形法與Simpson法也是相同的作法)



6

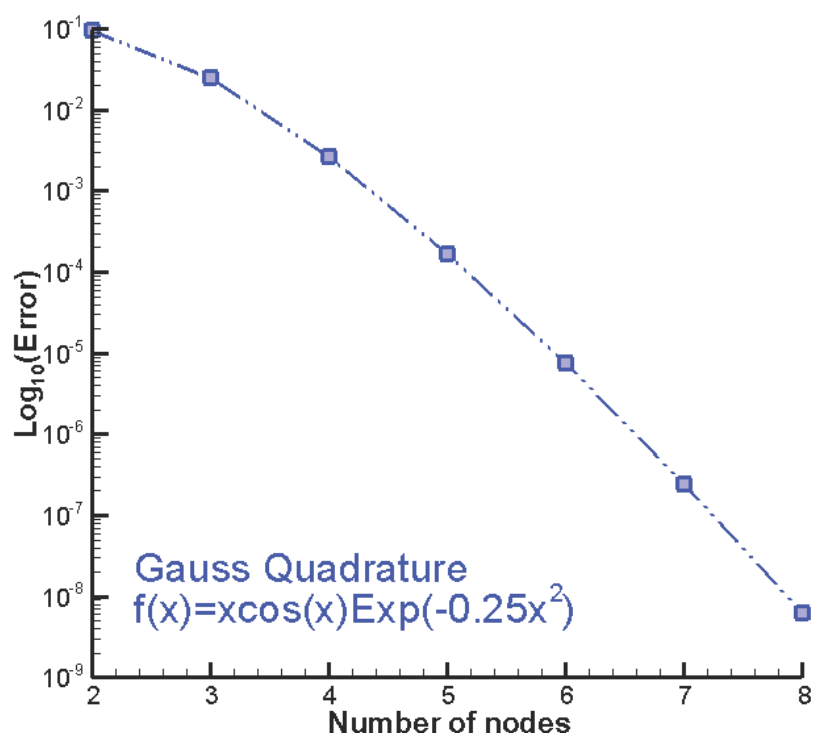
HW4-2

- 請應用高斯積分法積分函數 $f(x)$ ，C++請應用 **double precision**
- 5.請取切割數目 **NP** 為 **1(0至 π)**，應用高斯法不同點數 $M=2,3,4,5,6$ 進行積分之計算，並進行誤差分析

M	x_i	w_i	Degree of Precision
2	$\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$	1.0	3
3	0.0	0.88888889	5
	± 0.77459667	0.55555555	
4	± 0.33998104	0.65214515	7
	± 0.86113631	0.34785485	
5	0.0	0.56888889	9
	± 0.53846931	0.47862867	
	± 0.90617985	0.23692689	
6	± 0.23861918	0.46791393	11
	± 0.66120939	0.36076157	
	± 0.93246951	0.17132449	

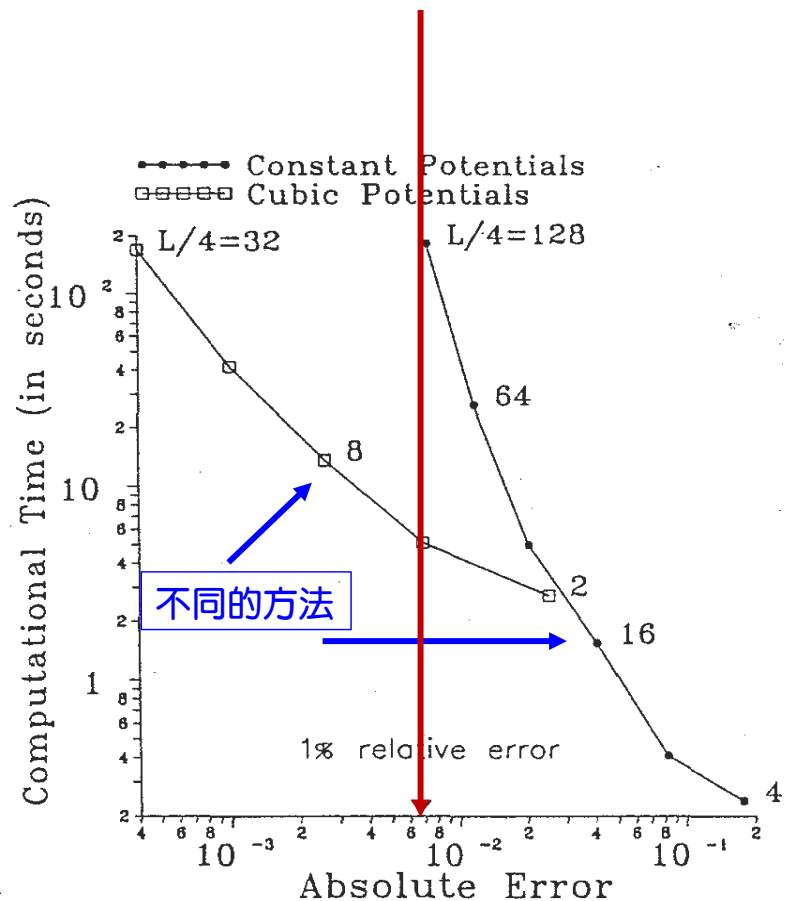
HW4-2

- 比較不同數目的 nodes



HW4

- 請進行不同方法的效率比較，並以圖表示
 - 如何取得計算時間？
 - CPU time
 - Clock time
- 注意：右圖與本題無關!!!



注意事項

- 請注意程式的輸入與輸出，並加上註解，此程式應具備以下之功能：
 - 詢問使用者積分方法、 N
 - 將計算值輸出於檔案與螢幕
- 題1,2,4,5佔分80分
- optional (可選擇不做)之3與6，佔分40分

注意事項

- 繳交作業內容應包含：
 - 報告：包含對於問題的探討與討論、計算結果、對於結果的驗證與分析等
 - C++程式檔
- 程式請注意格式、註解與風格
- 由於期中考，作業4-1與作業4-2繳交時間為2022. 04.27 09:00am，遲交分數打折，請繳交至TronClass，檔案名為 姓名學號_HW4(.rar)