

2.2 直方图变换

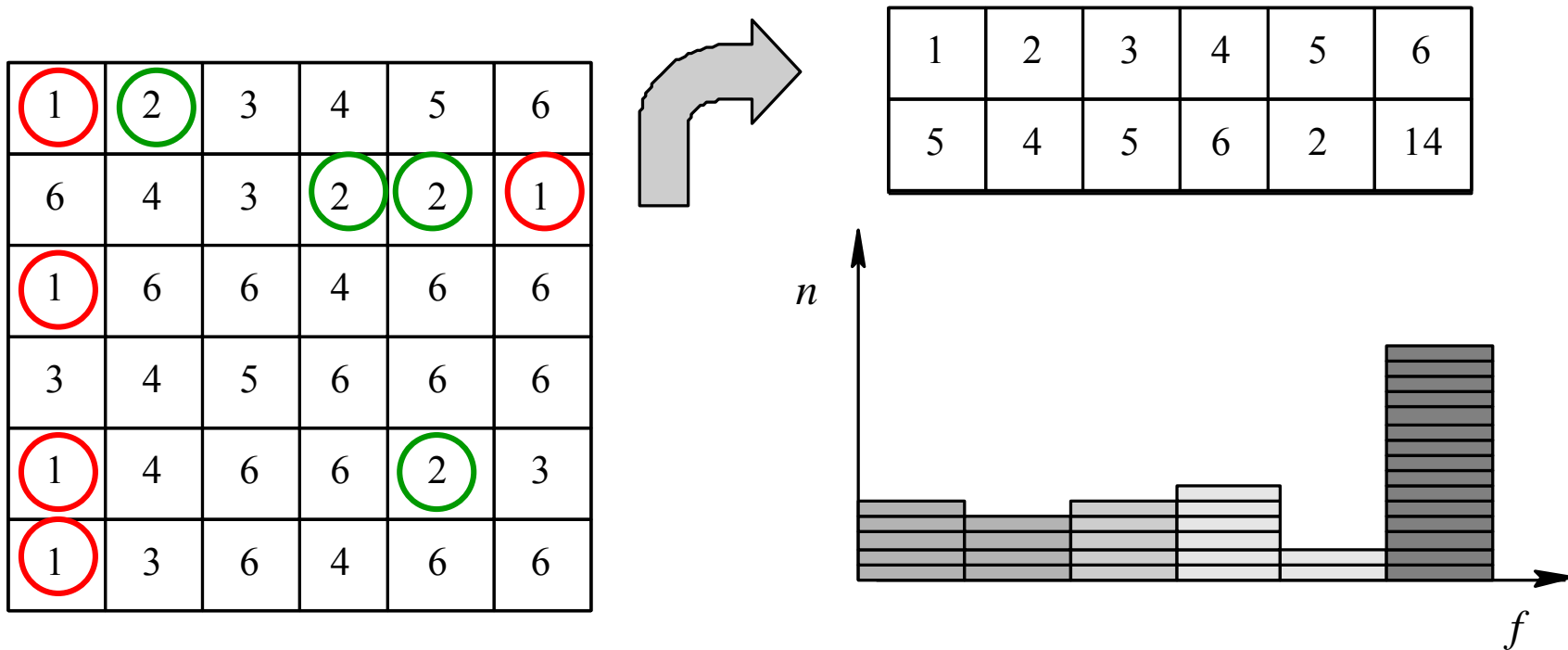
一、直方图（Histogram）的基本概念

如果将图像中像素亮度（灰度级别）看成是一个随机变量，则其分布情况就反映了图像的统计特性。**灰度直方图是灰度级的函数，它表示图像中具有某种灰度级的像素的个数**，反映了图像中每种灰度出现的频率。灰度直方图的横坐标是灰度级，纵坐标是该灰度级出现的频度，它是图像最基本的统计特征。

- **灰度级频数**：指该灰度级在图像中出现的像素个数；
- **灰度级频率**：指该灰度级的频数占图像总像素的百分比

- **图像的总像素数**：
$$n = \sum_{j=0}^{G-1} n_j$$
 其中， n_j 为图像中 f_j 灰度级的频数

- **灰度级频率**： $p(f_j) = n_j / n$



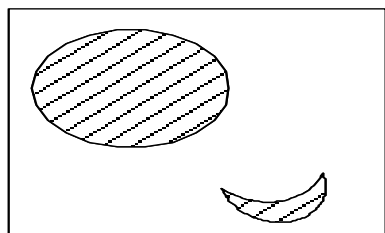
灰度直方图表示图像中具有某种灰度级的像素的个数。

二、特性：

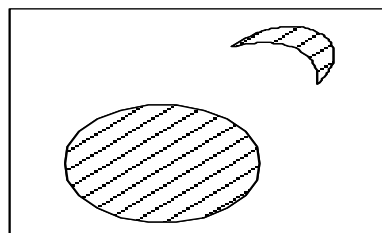
(1) 只含图像各灰度值像素出现的概率，而无位置信息。

- **总体明亮程度：**适当、偏暗或偏亮
- **对比度：**好或差(图像细节是否清楚)
- **对象物的可分性：**

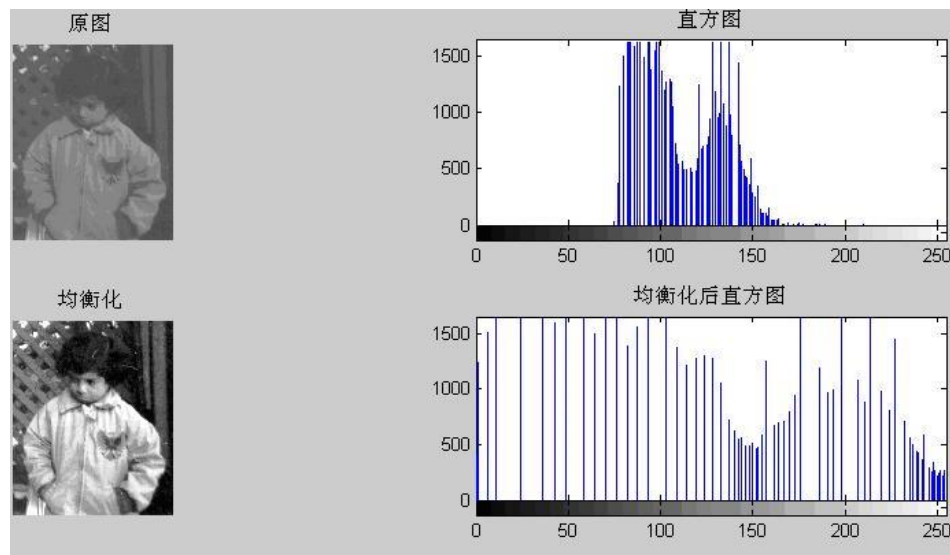
(2) 图像与直方图之间是多对一的映射关系。



(a)

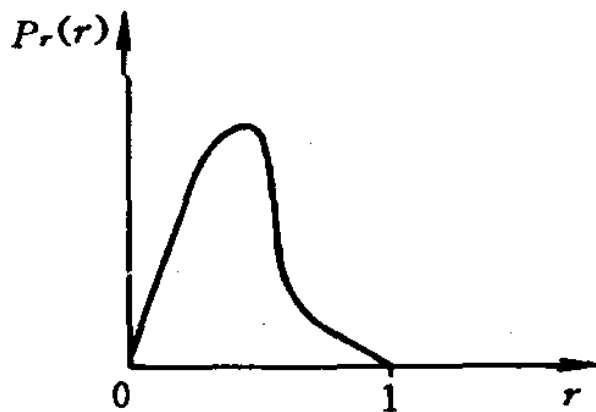


(b)

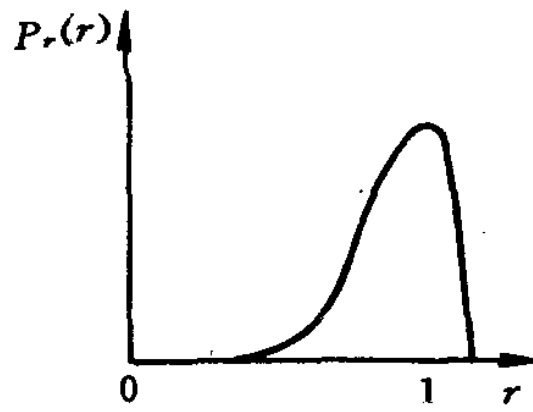


从图像灰度级的分布可以看出一幅图像的灰度分布特性。例如，

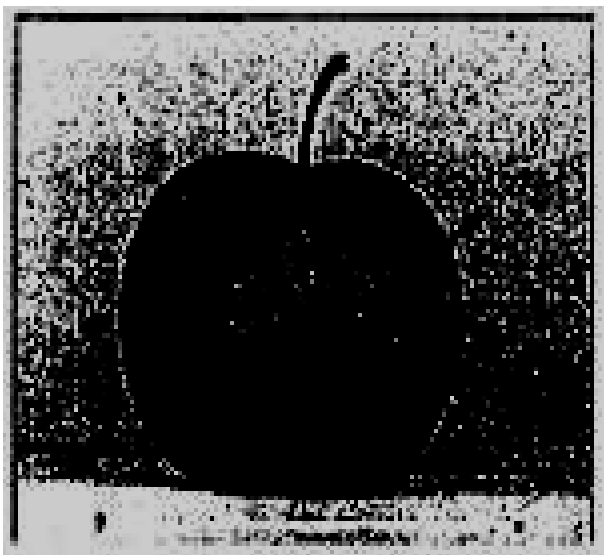
- ◆ 大多数像素灰度值取在较暗的区域，则这幅图像肯定较暗，一般在摄影中曝光太弱将导致这种结果；
- ◆ 若像素灰度值集中在亮区，则图像的特性将偏亮，一般在摄影过程中曝光过强就会造成这种结果。



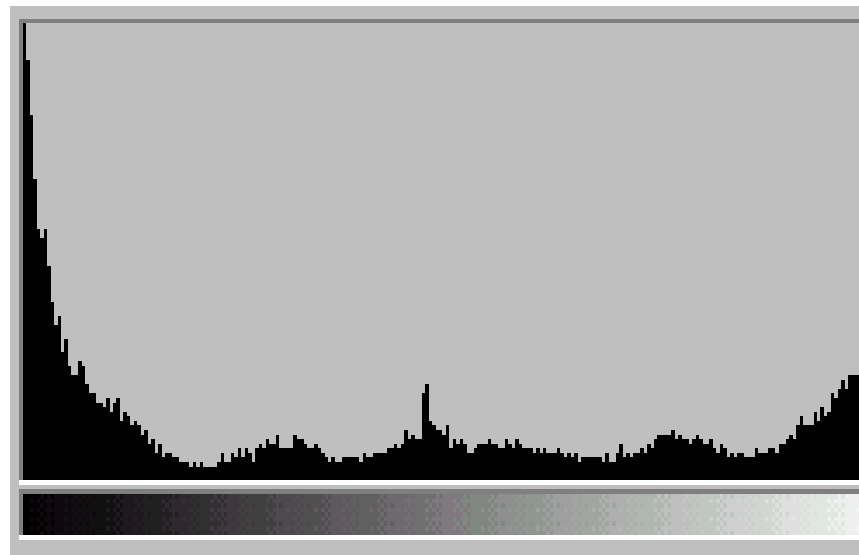
(a)



(b)



整体偏暗的苹果图像



对应的灰度直方图

三、直方图的计算

灰度直方图的计算非常简单，依据定义，在离散形式下，

$$N = \sum_{j=0}^{G-1} n_j \qquad p(f_j) = \frac{n_j}{N}$$

式中： n_j -----图像中出现 f_j 级灰度的像素数量

N -----图像像素总数

n_j / N -----频数

在直角坐标系中画出 f_j 与 $p(f_j)$ 的关系图 → 图像的直方图

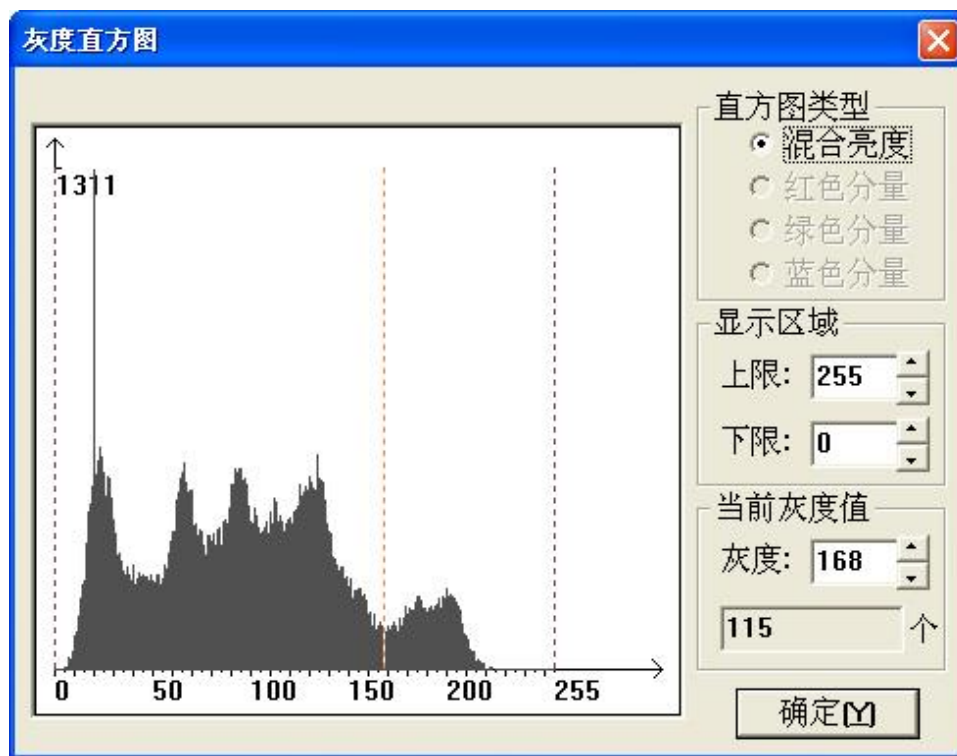


图 Lena图像及直方图

(a) Lena图像; (b) Lena图像的直方图

具体算法:

1. 获取彩色图像每个像素某一颜色分量的灰度值存入数组 $f(x, y)$ 中;
2. 获取图像的高度 m (行) 和宽度 n (列);
3. 计算每级灰度的像素个数存入 hd 数组中, 数组下标值为灰度值

```
for (j 从1 到 m)
    {for( i 从1 到 n
        { k = f(i, j)
            hd(k) = hd(k) + 1
        }
    }
```

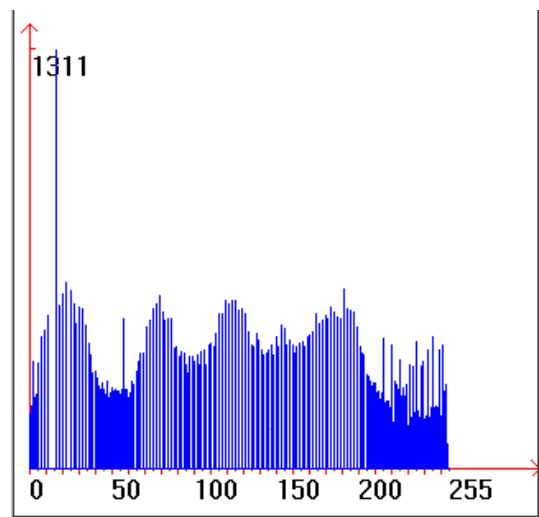
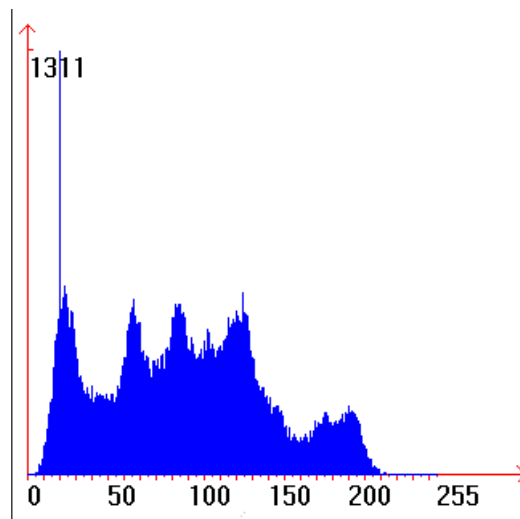
4. 绘制直方图, 每级灰度的像素个数用垂直线表示

```
for( i 从 0 到 255)
    {从 (i,hd(i)) 到 (i,0) 画线
    }
```


四、直方图均衡化处理

直方图变换是改善图像的灰度对比度的有效方法，而直方图变换常用方法为直方图均衡化处理。

1、概念：指灰度分布比较集中的输入图像变换为直方图近似均匀分布的输入图像的处理方法。



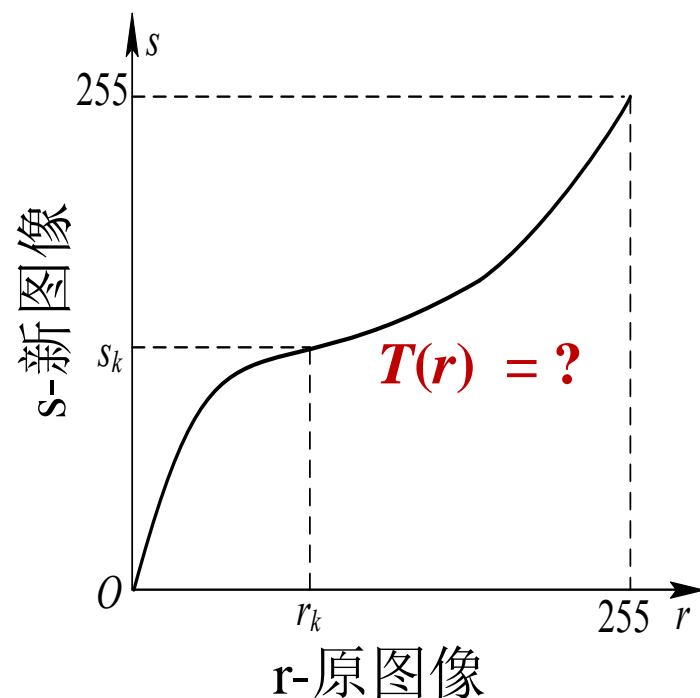
2 直方图均衡方法

一幅给定图像的灰度级分布在 $0 \leq r \leq 255$ 范围内。可以对 $[0, 255]$ 区间内的任一个 r 值进行如下变换： $s = T(r)$ (s -新图像, r -原图像)

通过上述变换, 每个原图像的像素灰度值 r 都对应产生一个 s 值, 从而得到一幅新图像。变换函数 $T(r)$ 应满足下列条件:

(1) 在 $0 \leq r \leq 255$ 区间内, $T(r)$ 值单调增加; (保证灰度级大小次序不变, 即图像上原来亮的地方不比原来暗的地方暗)

(2) 对于 $0 \leq r \leq 255$, 有 $0 \leq T(r) \leq 255$ 。(保证灰度级范围不变)



直方图均衡化处理是以**累积分布函数变换法**为基础的直方图修正法。假定变换函数为

$$s = T(r) = \int_0^r p_r(\omega) d\omega$$

s ----累积分布函数

式中： ω 是积分变量，而 $\int_0^r p_r(\omega) d\omega$ 就是 r 的累积分布函数。

这里，**累积分布函数**是 r 的函数，并且**单调**地从0增加到255，所以这个变换函数满足关于 $T(r)$ 在 $0 \leq r \leq 255$ 内单值单调增加。在 $0 \leq r \leq 255$ 内有 $0 \leq T(r) \leq 255$ 的两个条件。

变换函数 $s = T(r) = \int_0^r p_r(\omega) d\omega$

对式中的 r 求导，则 $\frac{ds}{dr} = p_r(r)$

再把结果代入下式有

$$\begin{aligned} p_s(s) &= \left[p_r(r) \cdot \frac{dr}{ds} \right]_{r=T^{-1}(s)} = \left[p_r(r) \cdot \frac{1}{ds/dr} \right]_{r=T^{-1}(s)} \\ &= \left[p_r(r) \cdot \frac{1}{p_r(r)} \right] = 1 \end{aligned}$$

由上面的推导可见，在变换后的变量 s 的定义域内的概率密度是均匀分布的。因此，用 r 的累积分布函数作为变换函数，可产生一幅灰度级分布具有均匀概率密度的图像。

上述方法是以 **连续随机变量** 为基础进行讨论的。当灰度级是离散值时，可用频数近似代替概率值，即

$$p_r(r_k) = \frac{n_k}{n} \quad 0 \leq r_k \leq 255 \quad k = 0, 1, \dots, l-1$$

式中： l 是灰度级的总数目， $p_r(r_k)$ 是取第 k 级灰度值的概率， n_k 是图像中出现第 k 级灰度的次数， n 是图像中像素总数。

累积分布函数的离散形式可由下式表示：

$$s_k = T(r_k) = \sum_{j=0}^k \frac{n_j}{n} = \sum_{j=0}^k p_r(r_j) \quad 0 \leq r_j \leq 255 \quad k = 0, 1, \dots, l-1$$

其反变换式为

$$r_k = T^{-1}(s_k)$$

处理过程如下：

$$s_0 = T(r_0) = \sum_{j=0}^0 P_r(r_j) = P_r(r_0)$$

$$s_1 = T(r_1) = \sum_{j=0}^1 P_r(r_j) = P_r(r_0) + P_r(r_1)$$

$$s_2 = T(r_2) = \sum_{j=0}^2 P_r(r_j) = P_r(r_0) + P_r(r_1) + P_r(r_2)$$

$$s_3 = T(r_3) = \sum_{j=0}^3 P_r(r_j) = P_r(r_0) + P_r(r_1) + P_r(r_2) + P_r(r_3)$$

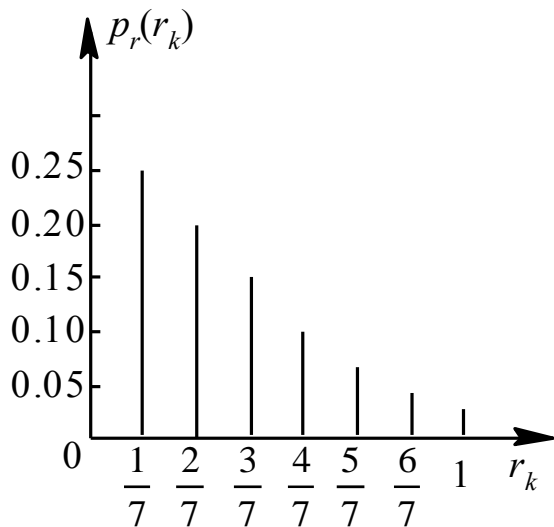
.....

.....

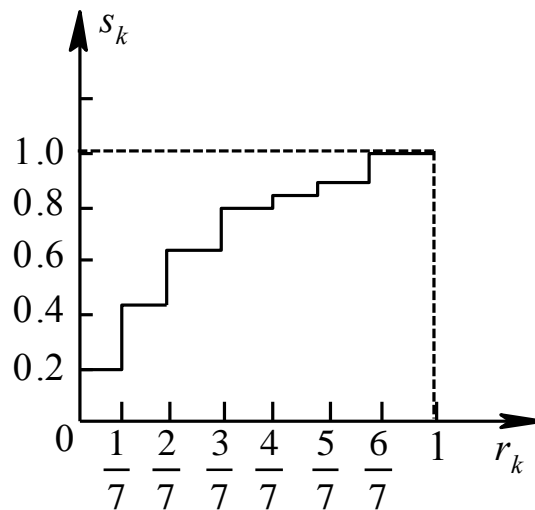
假定一幅大小为 $64 \times 64 = 4096$ ，灰度级为8级的图像，其灰度级分布如下图所示，对其进行均衡化处理。

归一化后的灰度级, r	像素数 n_k	概率 $p_r(r_k) = \frac{n_k}{n}$
$r_0 = 0$	790	0.19
$r_1 = 1/7$	1023	0.25
$r_2 = 2/7$	850	0.21
$r_3 = 3/7$	656	0.16
$r_4 = 4/7$	329	0.08
$r_5 = 5/7$	245	0.06
$r_6 = 6/7$	122	0.03
$r_7 = 1$	81	0.02

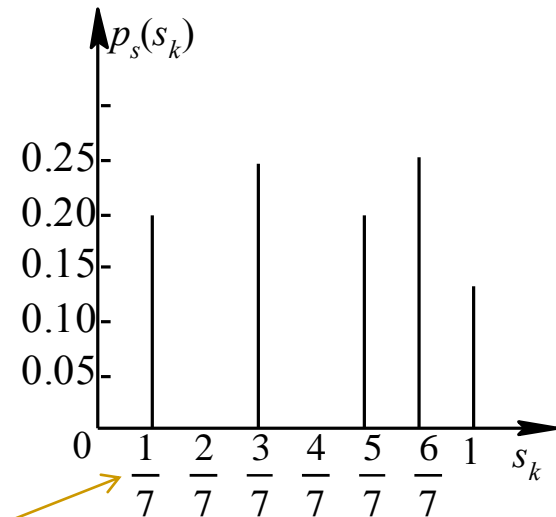
64×64 大小的图像灰度分布表



(a)



(b)



(c)

$$s_0 = T(r_0) = \sum_{j=0}^0 P_r(r_j) = P_r(r_0) = 0.19 \approx \frac{1}{7}$$

$$s_1 = T(r_1) = \sum_{j=0}^1 P_r(r_j) = P_r(r_0) + P_r(r_1) = s_0 + P_r(r_1) = 0.44 \approx \frac{3}{7}$$

$$s_2 = T(r_2) = \sum_{j=0}^2 P_r(r_j) = P_r(r_0) + P_r(r_1) + P_r(r_2) = s_1 + P_r(r_2) = 0.65 \approx \frac{5}{7}$$

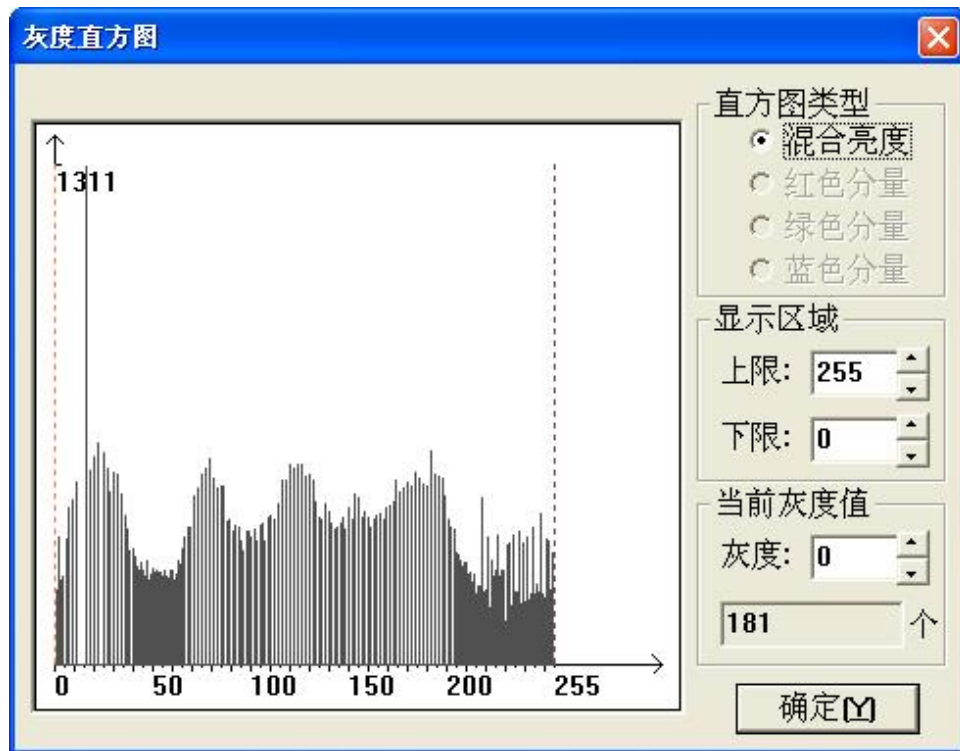
$$s_3 = T(r_3) = \sum_{j=0}^3 P_r(r_j) = P_r(r_0) + P_r(r_1) + P_r(r_2) + P_r(r_3) = s_2 + P_r(r_3) = 0.81 \approx \frac{6}{7}$$

依此类推: $s_4=0.89=6/7$, $s_5=0.95$ 、 $s_6=0.98$ 、 $s_7=1.0=1$

$$s_0 = \frac{1}{7}, s_1 = \frac{3}{7}, s_2 = \frac{5}{7}, s_3 = \frac{6}{7}, s_4 = \frac{6}{7}$$

因为 $r_0=0$ ，经变换得 $s_0=1/7$ ，所以有790个像素取 s_0 这个灰度值。 r_1 映射到 $s_1=3/7$ ，所以有1023个像素取 $s_1=3/7$ 这一灰度值。有850个像素取 $s_2=5/7$ 这个灰度值。 r_3 和 r_4 均映射到 $s_3=6/7$ ，有656+329=985个像素取这个值。有245+122+81=448个像素取 $s_4=1$ 这个新灰度值。用 $n = 4096$ 来除上述这些 n_k 值，便可得到新的直方图。

r_k	n_k	$p_r(r_k) = \frac{n_k}{n}$
$r_0 = 0$	790	0.19
$r_1 = 1/7$	1023	0.25
$r_2 = 2/7$	850	0.21
$r_3 = 3/7$	656	0.16
$r_4 = 4/7$	329	0.08
$r_5 = 5/7$	245	0.06
$r_6 = 6/7$	122	0.03
$r_7 = 1$	81	0.02



经直方图均衡化后的Lena图像及直方图

(a) 经直方图均衡化后的Lena图像; (b) 均衡化后的Lena图像的直方图

```

For j = 0 To m - 1
    For i = 0 To n - 1
        k = f(i, j): hd(k) = hd(k) + 1
    Next i
Next j      '提取各像素的灰度值，并统计该灰度值的像素数

```

```

For i = 0 To 255
    p(i) = hd(i) / (m * n)  '计算该灰度级频率
    For j = 0 To i
        q(i) = q(i) + p(j)  '累计该灰度级前所有的灰度级的频率值
    Next j
    q(i) = Int(q(i) * 100) / 100  取整
Next i

```

```

For j = 0 To m - 1
    For i = 0 To n - 1
        k = q(f(i, j)) * 255: hd1(k) = hd1(k) + 1 '取变换后的新灰度
    Next i
Next j

```

请在实验课上实现

程序实现

重点

- (1) 什么是灰度直方图？
- (2) 程序实现：包含图像的输入与输出，并实现对图像的直方图统计。



(a)



(b)