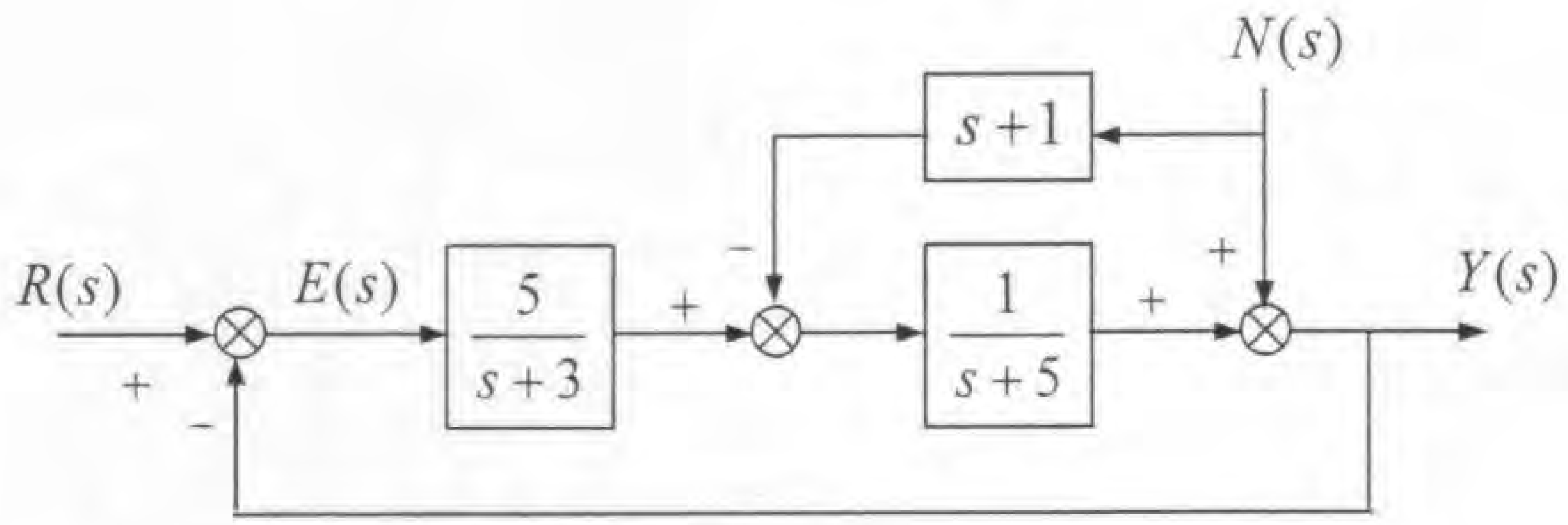
2008 年硕士学位研究生入学考试试题

（自动控制理论）

所有试题答案写在答题纸上，答案写在试卷上无效
答题时可以使用计算器

一、（24 分）单项选择题（将所选题号写在答题纸上，并写出计算过程。）

1．反馈控制系统如下图所示，求闭环传递函数 $E(s)/N(s)$。



A. $\dfrac{E(s)}{N(s)}=-\dfrac{4(s+3)}{s^2+8s+20}$　　B. $\dfrac{E(s)}{N(s)}=-\dfrac{20}{(s+5)(s^2+8s+20)}$

C. $\dfrac{E(s)}{N(s)}=\dfrac{(s+1)(s+3)}{[illegible]}$　　D. $\dfrac{E(s)}{N(s)}=-\dfrac{(s+3)(s+5)}{s^2+8s+20}$

2．单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{k(s+1)}{s^2-2s+6}$$

A． $k=10$ 时，系统有一对正的共轭复根，单位阶跃响应振荡发散。
B． $k=10$ 时，系统有一对负的共轭复根，单位阶跃响应振荡衰减。
C． $k=10$ 时，系统有两个负的重实根，单位阶跃响应无超调。
D． $k=10$ 时，系统有两个负的重实根，单位阶跃响应有超调。

3．系统的单位阶跃响应为

$$y(t)=1-e^{-2t}+2te^{-2t}$$

则系统的单位脉冲响应是

A． $y(t)=\delta(t)+4e^{-2t}-4te^{-2t}$　　B． $y(t)=4e^{-2t}-4te^{-2t}$
C． $y(t)=-e^{-2t}+4te^{-2t}$　　D． $y(t)=-e^{-2t}+2te^{-2t}$

4. 单位负反馈系统的开环传递函数为

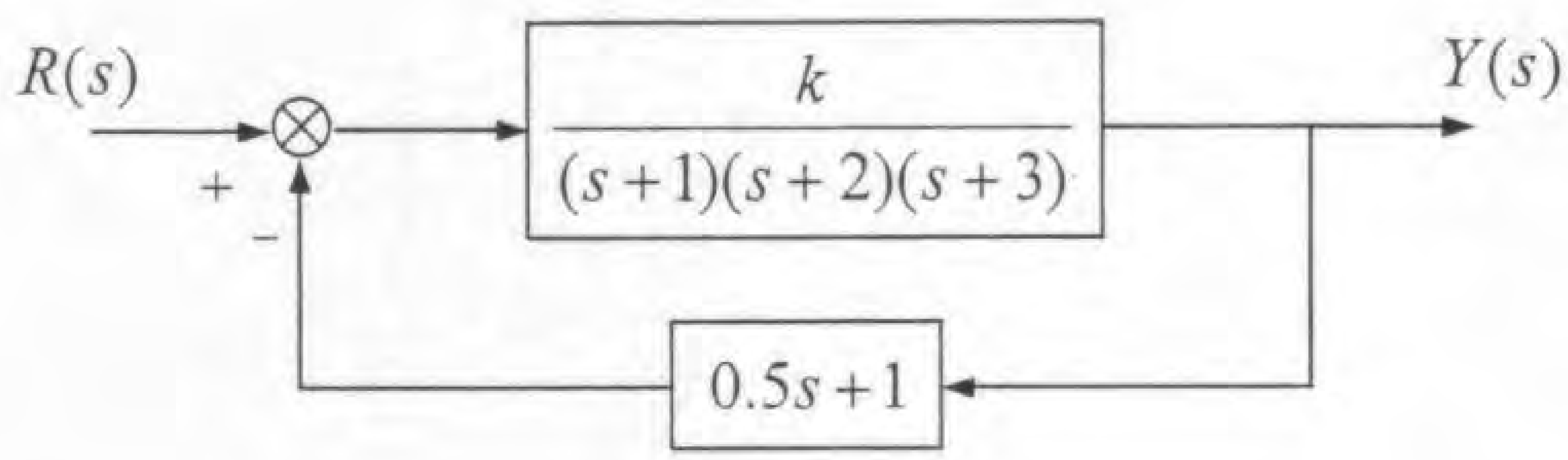
$$G(s)=\frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

当输入 $r(t)=\sin(2t+30^\circ)$ 时，稳态输出 $y(t)$ 的相移是

A. $\phi=-78^\circ$　　B. $\phi=-90^\circ$

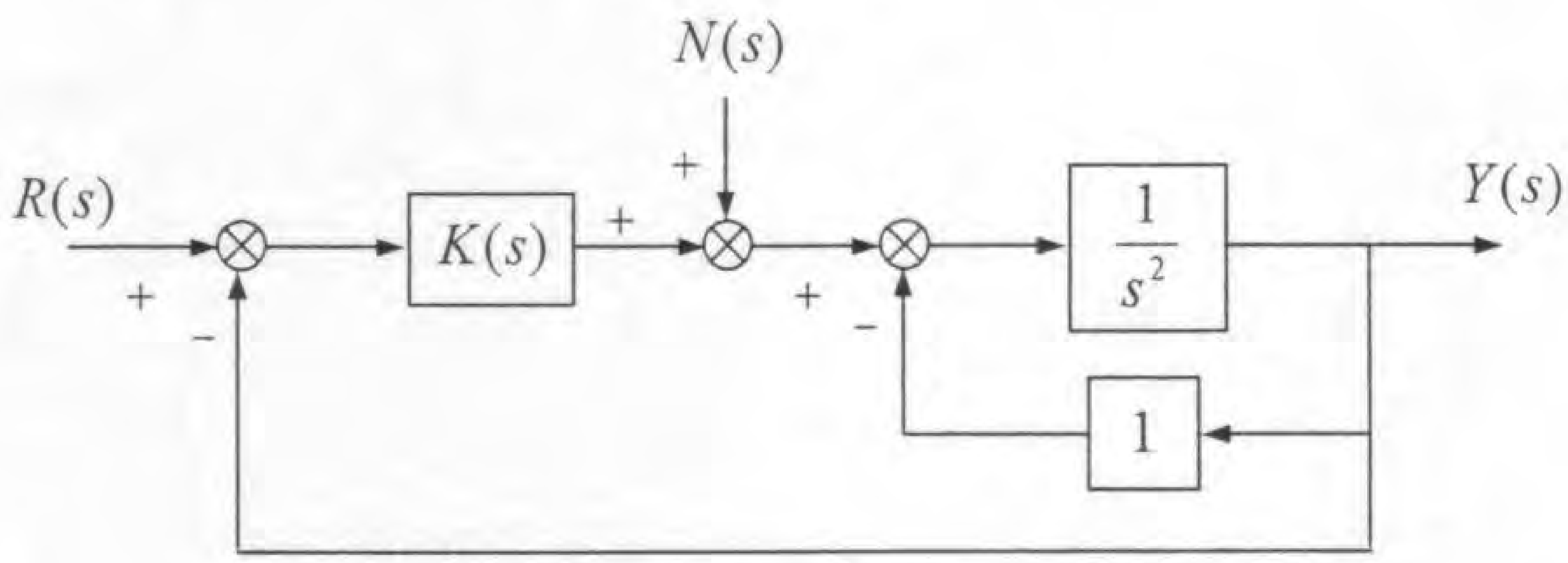
C. $\phi=-60^\circ$　　D. $\phi=-108^\circ$

二、（21 分）反馈控制系统如下图所示。



1. 设系统的一对闭环极点的阻尼比为 0.707，试确定系统的闭环极点。
2. 在题 1 条件下，求系统的单位阶跃响应。

三、（23 分）反馈控制系统如下图所示。

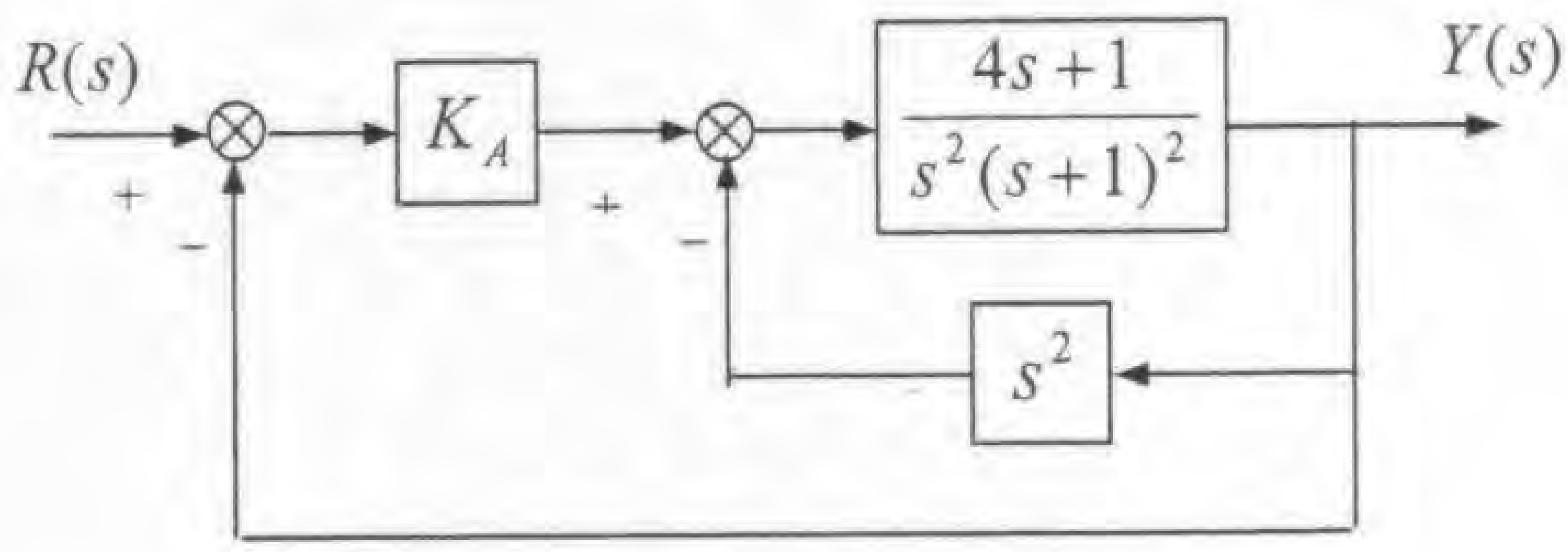


1. 试设计控制器 $K(s)$，使系统跟踪斜坡参考输入信号 $R(s)$ 时，具有常值稳态误差。
2. 在题 1 条件下，若系统对干扰信号的稳态误差为零，问 $N(s)$ 为何种形式的信号？
3. 用根轨迹方法确定题 1 所设计的控制器 $K(s)$ 的参数，使

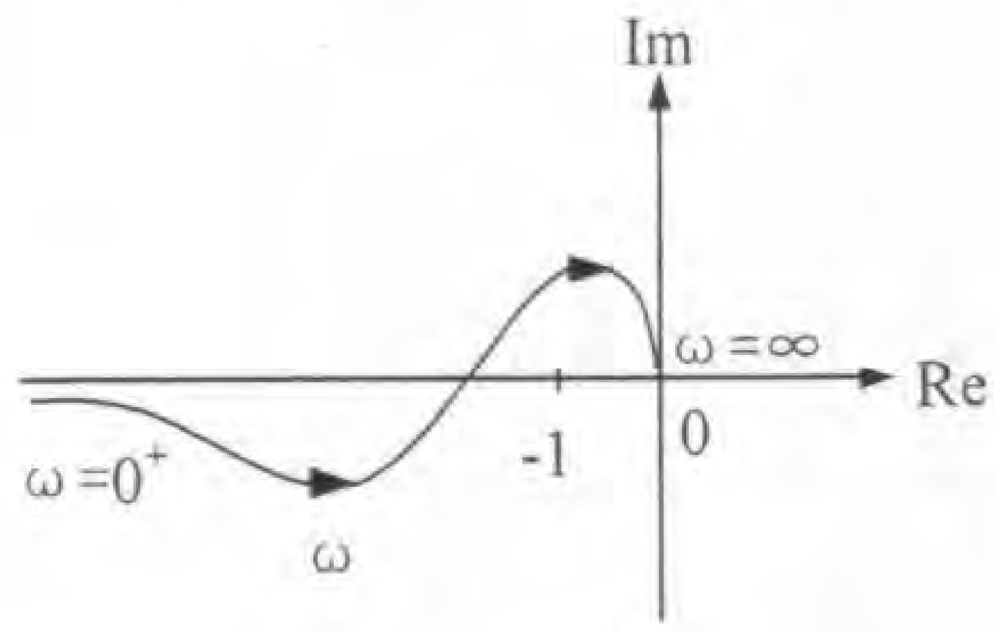
　① 闭环系统稳定；

　② 根轨迹的主要分支过闭环极点 $-5.85\pm j4.34$。
4. 题 3 中的 2 个闭环极点是主导极点吗？如是，简化校正后的高阶系统，并求出它的闭环传递函数。

四、（22 分）控制系统的结构和幅相特性，分别如图(a)和图(b)所示。



(a)



(b)

1. 试用奈氏稳定判据，判断图示系统的稳定性。
2. 调整放大器的增益参数 K_A，求出使系统稳定的开环增益 K 的取值范围。
3. 试设计一串联控制器 $K(s)$，使 $K>0$ 时闭环系统都稳定，并画出校正后系统的完整奈氏图。

五、（20 分）已知系统的动态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -16x_1 + 10x_2 + 4u \\ \dot{x}_2 = -21x_1 + 13x_2 + 5u \\ y = 7x_1 - 5x_2 \end{cases}$$

求初态为 $x_1(0)=2, x_2(0)=3$ 时，系统在单位阶跃输入作用

1. 系统的状态响应表达式；
2. 求系统输出范数最小的时刻 t；
3. 写出系统的传递函数。

六、（24 分）已知系统的动态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + 3x_2 + 3u \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + 5x_2 + 5u \\ y = 5x_1 - x_2 \end{cases}$$

1. 判断系统的稳定性（渐近稳定、BIBO 稳定）；
2. 若有可能，设计状态反馈，使系统的两个闭环极点均位于－2；
3. 若有可能，设计极点位于-8 处的最小维状态观测器；
4. （选做）用第 3 小题得到的观测状态来实现第 2 小题的状态反馈，写出复合系统的（增广的）状态空间方程。

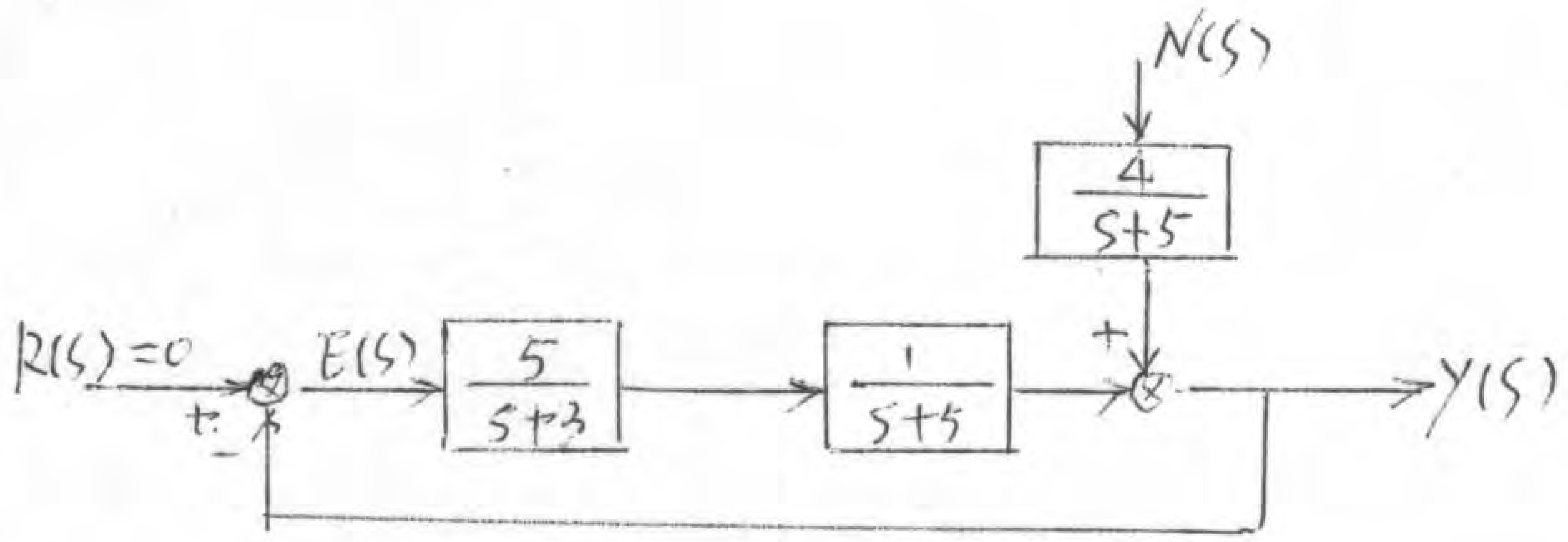
七、（16 分）对线性定常系统，试证明：

1. 状态反馈不改变系统的能控性；
2. 同一传递函数的两个最小实现一定是相互等价的（即它们可通过一个线性变换相互转化）。

2008年硕士研究生入学考试试题参考答案

（自动控制理论）

一. 1. A



$$\frac{E(s)}{N(s)} = -\frac{4(s+3)}{(s+3)(s+5)+5} = -\frac{4(s+3)}{s^2+8s+20}$$

2. D

系统的闭环特征方程为

$D(s)=s^2-2s+6+k(s+1)=s^2+8s+16=0$

∴ $k=10$时，$s_{1,2}=-4$，$\zeta=1$.

但由于其存在闭环零点-1的影响，产生超调。

3. B

∵ $\delta(t)=\frac{d}{dt}[1(t)]$

∴ 系统的单位脉冲响应为

$$y(t)=2e^{-2t}+2e^{-2t}-4te^{-2t}$$
$$=4e^{-2t}-4te^{-2t}$$

4. B

闭环传函 $W(s)=\frac{2}{s^2+3s+4}$

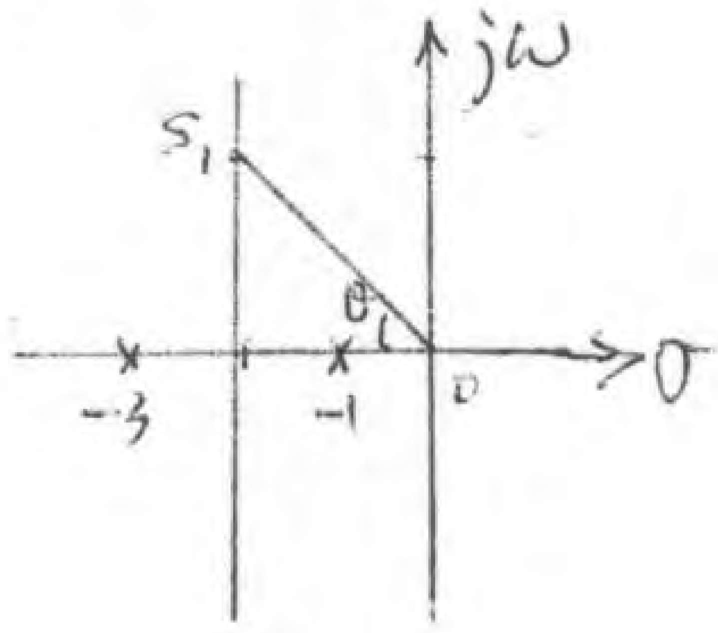
∵ $\omega_n=2$ rad/s

∴ $\angle W(j2)=-90^\circ$

∴ $\varphi_y=\varphi_r+\angle W(j2)=-60^\circ$ （相位）

二.1. 系统的开环传函为

$$G(s)H(s)=\frac{k(0.5s+1)}{(s+1)(s+2)(s+3)}=\frac{k'}{(s+1)(s+3)}\quad (k'=0.5k)$$



$\because \zeta=0.707 \quad \therefore \theta=45^{\circ}$

$\therefore s_{1,2}=-2\pm j2$

$k'=l_1 l_2=\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}=5 \quad \rightarrow k=10$

系统的闭环传递函数为

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{10}{(s+2)[(s+2)^2+2^2]}=\frac{10}{(s+2)(s^2+4s+8)}$$

$$\therefore Y(s)=\frac{10}{s(s+2)(s^2+4s+8)}=\frac{A_1}{s}+\frac{A_2}{s+2}+\frac{B_1 s+B_2}{s^2+4s+8}$$

$$A_1=\lim_{s\to 0} Y(s)\cdot s=\frac{10}{[illegible]}\Big|_{s=0}=\frac{5}{8}$$

$$A_2=\lim_{s\to -2} Y(s)(s+2)=\frac{10}{s(s^2+4s+8)}\Big|_{s=-2}=-\frac{5}{4}$$

$$B_1 s+B_2\Big|_{s=-2+j2}=\frac{10}{s(s+2)}\Big|_{s=-2+j2}$$

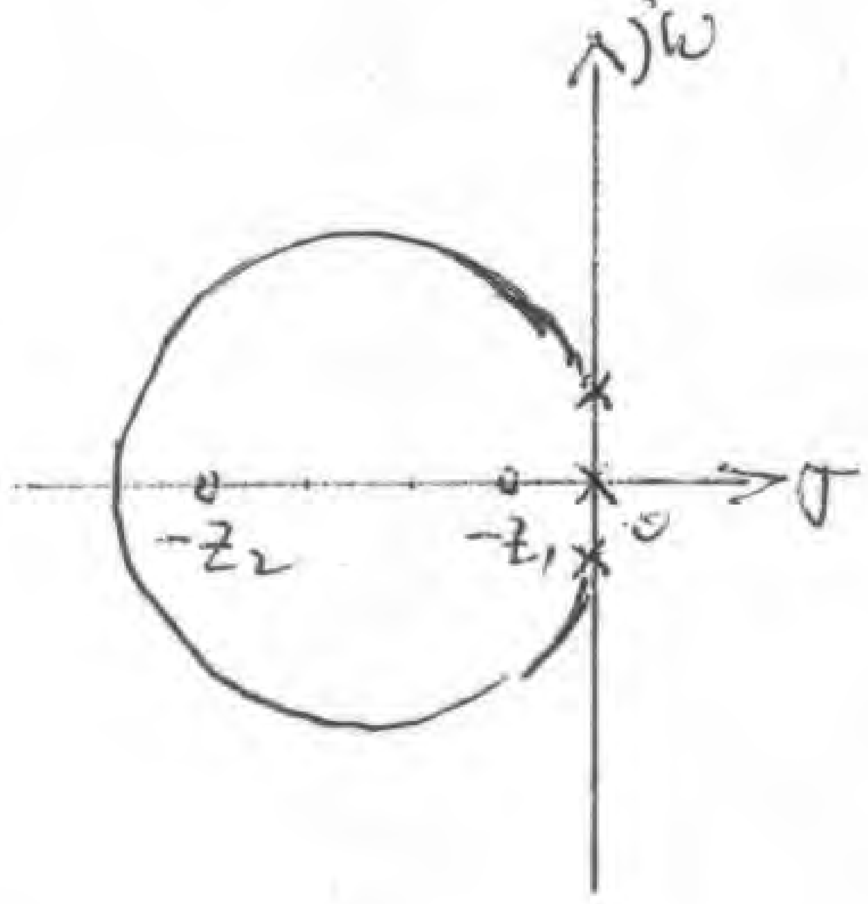
$$-2B_1+j2B_1+B_2=\frac{-10+j10}{8}$$

$$\therefore \begin{cases}-2B_1+B_2=-\frac{5}{4}\\ 2B_1=\frac{5}{4}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}B_1=\frac{5}{8}\\ B_2=0\end{cases}$$

$$\therefore Y(s)=\frac{5}{8}\frac{1}{s}-\frac{5}{4}\frac{1}{s+2}+\frac{5}{8}\frac{s}{(s+2)^2+2^2}$$

$$\rightarrow y(t)=\frac{5}{8}-\frac{5}{4}e^{-2t}+\frac{5}{8}e^{-2t}(\cos 2t-\sin 2t)$$

三. 1. 取 $K(s)=\frac{(s+z_1)(s+z_2)}{s}$



则系统开环传递函数为

$G(s)K(s)=\frac{(s+z_1)(s+z_2)}{s(s^2+1)}$ （I型）

且闭环系统稳定

∴ $r(t)=At$ 时，$e_{ssR}=$ 常值

2. ∵ $e_{ssN}=0$

∴ $N(s)$ 为阶跃信号.

3. $G(s)K(s)=\frac{k(s+z_1)(s+z_2)}{s(s^2+1)}$

已知：$S_d=-5.85\pm j4.34 \rightarrow \angle G(S_d)K(S_d)=-180^\circ$

若取 $z=1$

则 $\angle(S_d+z_2)+\angle(S_d+z_1)-\angle S_d-\angle(S_d+p_1)-\angle(S_d+p_2)=-180^\circ$

∴ $tg^{-1}\frac{4.34}{z_2-5.85}=113.22^\circ \rightarrow z_2=4$

4. $k(S_d)=\left|\frac{s(s^2+1)}{(s+z_1)(s+z_2)}\right|_{s=-5.85+j4.34}=\frac{7.28\times 7.92\times 6.74}{6.51\times 4.72}=12.65$

设另一个闭环极点为 λ_3

则 $(5.85+j4.34)(5.85-j4.34)\lambda_3=12.65\times 1\times 4$

$\lambda_3=0.95$

∵ $\begin{cases}-z_1=-1\\-\lambda_3=-0.95\end{cases} \rightarrow$ 可构成一对闭环偶极子，λ_3 可忽略.

∴ $S_{1,2}=-5.84\pm j4.34$ 是一对主导极点.

简化后的闭环传函为.

$W(s)=\frac{12.56(s+1)(s+4)}{(s+0.95)(s+5.85+j4.34)(s+5.85-j4.34)}=\frac{13.22(s+4)}{s^2+11.7s+53}$

四：1. 据奈氏图可知，轨线顺包围(-1, j0)点2次

∴ $N=2$

又系统的开环传函为 $G(s)=\dfrac{K_A(4s+1)}{s^2(s^2+6s+2)}$

∴ $n_0=0$

由奈氏稳定判据，有

$n_c=n_0+N=2$ → 闭环系统不稳定.

2. $G(s)=\dfrac{K(4s+1)}{s^2(0.18s+1)(2.86s+1)}$ $(K=0.5K_A)$

设奈氏图与负实轴交点频率为 ω_1

则 $\begin{cases}\angle G(j\omega_1)=-180^\circ\\ |G(j\omega_1)|=1\end{cases}$

∴ $\angle G(j\omega_1)=tg^{-1}4\omega_1-180^\circ-tg^{-1}0.18\omega_1-tg^{-1}2.86\omega_1=-180^\circ$

∴ $|G(j0.47)|=\dfrac{K\sqrt{1+16\omega_1^2}}{\omega_1^2\sqrt{1+0.03\omega_1^2}\sqrt{1+8.18\omega_1^2}}=1$

∴ $K=0.35$

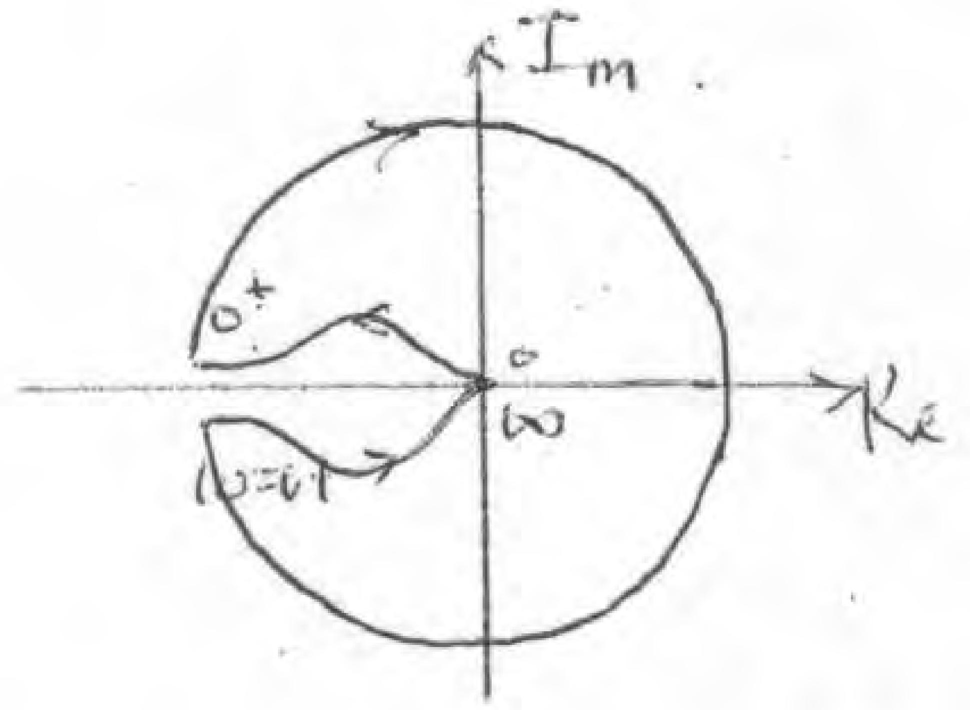
闭环稳定的K值范围：$0<K<0.35$

3. 设计 $K(s)=Ts+1$ （设 $T>2.86$）

则 $G(s)K(s)=\dfrac{K(4s+1)(Ts+1)}{s^2(0.18s+1)(2.86s+1)}$

当 $\omega=0^+$：$G(j0^+)=\infty\angle-180^\circ+0$

$\omega=\infty$：$G(j\infty)=0\angle-180^\circ+0$.



画出校正后的完整奈氏图.

可知 对 $K>0$，系统均稳定。

五、1. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-16 & 10\\ -21 & 13\end{bmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}4\\ 5\end{bmatrix},\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}7 & -5\end{bmatrix}$

$$f(\lambda)=\det(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda+16 & -10\\ 21 & \lambda-13\end{vmatrix}=\lambda^2+3\lambda+2=(\lambda+1)(\lambda+2)$$

故系统特征值为：$\lambda_1=-1,\lambda_2=-2$

令 $e^{At}=\alpha_0\boldsymbol{I}+\alpha_1\boldsymbol{A}$ 则因 $e^{-t}=\alpha_0+\alpha_1(-1),\ e^{-2t}=\alpha_0+\alpha_1(-2)$ 可解得

$\alpha_0=2e^{-t}-e^{-2t}$，$\alpha_1=e^{-t}-e^{-2t}$，于是

$$e^{At}=\alpha_0\boldsymbol{I}+\alpha_1\boldsymbol{A}=(2e^{-t}-e^{-2t})\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+(e^{-t}-e^{-2t})\begin{bmatrix}-16 & 10\\ -21 & 13\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-14e^{-t}+15e^{-2t} & 10e^{-t}-10e^{-2t}\\ -21e^{-t}+21e^{-2t} & 15e^{-t}-14e^{-2t}\end{bmatrix}$$

所以

$$\boldsymbol{x}(t)=e^{At}\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t e^{A\tau}\boldsymbol{b}u(t-\tau)d\tau$$

$$=\begin{bmatrix}-14e^{-t}+15e^{-2t} & 10e^{-t}-10e^{-2t}\\ -21e^{-t}+21e^{-2t} & 15e^{-t}-14e^{-2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-14(1-e^{-t})+7.5(1-e^{-2t}) & 10(1-e^{-t})-5(1-e^{-2t})\\ -21(1-e^{-t})+10.5(1-e^{-2t}) & 15(1-e^{-t})-7(1-e^{-2t})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ 5\end{bmatrix}$$

$$=e^{-t}\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-6(1-e^{-t})+5(1-e^{-2t})\\ -9(1-e^{-t})+7(1-e^{-2t})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8e^{-t}-5e^{-2t}-1\\ 12e^{-t}-7e^{-2t}-2\end{bmatrix}$$

2. $y(t)=\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}7 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8e^{-t}-5e^{-2t}-1\\ 12e^{-t}-7e^{-2t}-2\end{bmatrix}=3-4e^{-t}$

显然，当 $t=\ln\dfrac{4}{3}=0.2877$ 时系统的输出为零，此时输出范数最小。

3. $\hat{g}(s)=\boldsymbol{c}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}7 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s+16 & -10\\ 21 & s-13\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}4\\ 5\end{bmatrix}=\dfrac{3s+6}{s^2+3s+2}$

六、$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ -2 & 5\end{bmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}3\\ 5\end{bmatrix}, \boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}5 & -1\end{bmatrix}$

1. 易求得系统的传递函数为：

$$\hat{g}(s)=\boldsymbol{c}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}=[\,5\ \ -1\,]\begin{bmatrix}s+2 & -3\\ 2 & s-5\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}3\\ 5\end{bmatrix}=\frac{10s+4}{(s-1)(s+4)}$$

易见该二阶系统的两个极点分别为 $s_1=1, s_2=-4$，零点是 $s=-0.4$，即系统有正实部极点且不会被零点对消，故系统非渐近稳定也非 BIBO 稳定。

2. 因 $\boldsymbol{M}_C=[\,\boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{Ab}\,]=\begin{bmatrix}3 & 9\\ 5 & 19\end{bmatrix}$ 满秩，故系统能控，可以用状态反馈任意配置系统的闭环极点。

设实现题目要求的状态反馈为：$u=v-\boldsymbol{kx}=v-k_1x_1-k_2x_2$，则

$$\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{bk})=(s+2)^2=s^2+4s+4$$

$$=\begin{vmatrix}s+2+3k_1 & -3+3k_2\\ 2+5k_1 & s-5+5k_2\end{vmatrix}=s^2+(3k_1+5k_2-3)s+(4k_2-4)$$

解得：$k_1=-1,\ k_2=2$ 即题目要求的状态反馈为

$$u=v-[-1\quad 2\,]\boldsymbol{x}=v+x_1-2x_2$$

3. 因 $\boldsymbol{M}_O=\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{cA}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -1\\ -8 & 10\end{bmatrix}$ 满秩，故系统能观，可以用状态观测器实现状态观测。

又因 $\boldsymbol{c}$ 的秩为 1，故最小维状态观测器应为 1 维，取

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 5 & -1\end{bmatrix},\qquad 则\quad \boldsymbol{Q}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 5 & -1\end{bmatrix}$$

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{QAQ}^{-1}=\begin{bmatrix}13 & -3\\ 42 & -10\end{bmatrix};\quad \overline{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{Qb}=\begin{bmatrix}3\\ 10\end{bmatrix};\quad \overline{\boldsymbol{c}}=\boldsymbol{cQ}^{-1}=[\,0\quad 1\,]$$

即： $\dot{\bar{x}}_1=13\bar{x}_1-3\bar{x}_2+3u$， $\dot{\bar{x}}_2=42\bar{x}_1-10\bar{x}_2+10u$， $y=\bar{x}_2$

或： $\dot{\bar{x}}_1=13\bar{x}_1+(3u-3y)$， $\bar{y}=42\bar{x}_1=\dot{y}+10y-10u$

在上式中以 $3u-3y$ 为输入相关项 $\bar{u}$，$\bar{x}_1$ 为状态 w， $42\bar{x}_1=\dot{y}+10y-10u$ 为输出 $\bar{y}$，构造等维观测器：（$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{lc})\hat{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{b}u+\boldsymbol{l}y$）

$$\dot{w}=(13-l\times 42)w+(3u-3y)+l(\dot{y}+10y-10u),\quad \hat{\bar{x}}_1=w$$

其中 $(13-42l)$ 是观测器的极点-8，故 $l=0.5$

为消去微分项，令 $z=w-ly$，即 $w=z+ly$，这样

$$\dot{z}=-8(z+0.5y)+(3u-3y)+0.5(10y-10u)$$

即：$\dot{z}=-8z-2u-2y$，

而：$\hat{x}=Q^{-1}\begin{bmatrix}\hat{\bar{x}}_1\\ \hat{\bar{x}}_2\end{bmatrix}=Q^{-1}\begin{bmatrix}w\\ y\end{bmatrix}=Q^{-1}\begin{bmatrix}z+ly\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 5 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z+0.5y\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 5\end{bmatrix}z+\begin{bmatrix}0.5\\ 1.5\end{bmatrix}y$

上两式就是要求的观测器

$$\dot{z}=-8z-2u-2y,\quad \hat{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}1\\ 5\end{bmatrix}z+\begin{bmatrix}0.5\\ 1.5\end{bmatrix}y$$

4.

原系统：$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + 3x_2 + 3u \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + 5x_2 + 5u \\ y = 5x_1 - x_2 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 + 3x_2 + 3(v - 9z - 7.5x_1 + 2.5x_2) \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 + 5x_2 + 5(v - 9z - 7.5x_1 + 2.5x_2) \\ y &= 5x_1 - x_2 \end{aligned}$

状态反馈：$u = v - [-1 \quad 2]\hat{x}$ $\quad$ $u = v + \hat{x}_1 - 2\hat{x}_2 = v - 9z - 2.5y = v - 9z - 7.5x_1 + 2.5x_2$

状态观测器：$\begin{cases} \dot{z} = -8z - 2u - 2y \\ \hat{x}_1 = z + 0.5y \\ \hat{x}_2 = 5z + 1.5y \end{cases}$ $\quad$ $\begin{aligned} \dot{z} &= -8z - 2(v - 9z - 7.5x_1 + 2.5x_2) - 2(5x_1 - x_2) \\ \hat{x}_1 &= z + 0.5y = z + 0.5(5x_1 - x_2) \\ \hat{x}_2 &= 5z + 1.5y = 5z + 1.5(5x_1 - x_2) \end{aligned}$

于是，将上述诸方程进行整理，得到复合系统的状态空间方程是：

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24.5 & 10.5 & -27 \\ -39.5 & 17.5 & -45 \\ 5 & -3 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} v, \qquad \begin{bmatrix} y \\ \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 2.5 & -0.5 & 1 \\ 7.5 & -1.5 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z \end{bmatrix}$$

七、

1．注意到：$[\ \lambda I - (A - BK) \vdots B\ ] = [\ \lambda I - A \vdots B\ ]\begin{bmatrix} I & O \\ K & I \end{bmatrix}$，而矩阵$\begin{bmatrix} I & O \\ K & I \end{bmatrix}$满秩，故根据能控性 PBH 校验，矩阵对 (A, B) 与矩阵对 $(A - BK, B)$ 的能控性完全一致。

2．同一传递函数的两个最小实现具有相同的阶；也都能控，于是都存在状态变换使之与相应的能控标准型等价；设实现至能控标准型等价的变换矩阵分别为 P_1 及 P_2，则两个实现之间的变换矩阵为 $P_1P_2^{-1}$