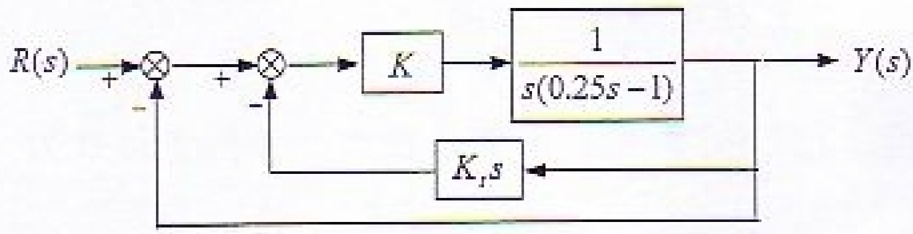
试题名称：自动控制理论

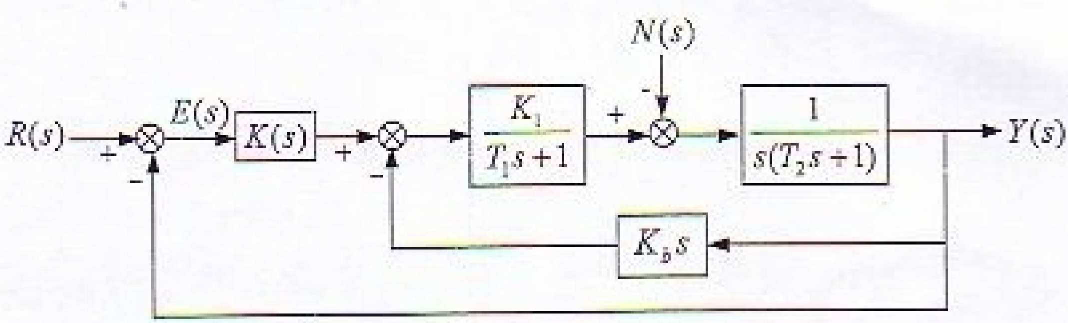
一、(20分)控制系统方块图如下图所示



1. 确定使闭环系统稳定的参数KK_t的取值范围。
2. 若要求：①系统的最大超调量为10%；
   ②调整时间为1.5秒（对于5%的误差范围）；

   试确定参数K和K_t的值。

二、(22分)位置随动系统如下图所示。其中，$K(s)$为控制器。



1. 系统的输入和干扰信号均为单位阶跃信号，当$K(s)=K$时，试确定系统的稳态误差。
2. 欲使系统对单位阶跃信号的稳态误差为零，$K(s)$应取何种形式？（简述理由，不要求计算）

三、(24 分)设负反馈系统中，前向通道的传递函数为

$$G(s)=\frac{k}{s^2(s+2)(s+5)}$$

反馈通道的传递函数为 $H(s)=1$。

1. 绘制系统的根轨迹图，并判断闭环系统的稳定性。
2. 改变反馈通道的传递函数，使 $H(s)=2s+1$，绘制系统的根轨迹图，判断闭环系统的稳定性。简述 $H(s)$ 的这一变化对系统稳定性的影响。

四、(24 分)单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K(1+s)}{s^3(1+0.2s)}$$

1. 画出 $G(s)$ 的完整奈氏图，用奈氏稳定判据判断闭环系统的稳定性。
2. 如果系统不稳定，试设计一种串联校正装置（给定参数），使闭环系统稳定。画出相应的完整奈氏图，并计算使闭环系统稳定的 K 的取值范围。

五、(20 分)某单输入线性定常系统(也叫线性非时变系统)的状态方程是 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}u$，已知:

(1) 当 $x(0)=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$ 时，系统的零输入响应为 $\boldsymbol{x}(t)=e^{-t}\boldsymbol{x}(0)$;

(2) 当 $x(0)=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$ 时，系统的零输入响应为 $\boldsymbol{x}(t)=e^{-2t}\boldsymbol{x}(0)$;

(3) 系统的零状态单位阶跃响应为 $\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}1-e^{-t}\\-1+e^{-t}\end{bmatrix}$

1. 试确定 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{b}$;
2. 以 $T=\ln 2$ 为采样周期，求系统离散化的状态方程。

六、（20分）已知线性定常的离散时间系统的状态方程为：

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -x_2(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = a\,x_1(k) + x_2(k) + bu(k) \end{cases}$$

1. 确定使系统渐近稳定的 a 值范围；
2. 给出系统完全能控的充分必要条件。

七、（20分）已知单输入－单输出系统的传递函数为：

$$G(s) = \frac{s^2+3s+2}{s^3+2s^2+3s+4}$$

1. 给出该传递函数的一个能控标准型实现（输入 u、输出 y、状态 $\boldsymbol{x}$）；
2. 上述能控标准型系统引入状态反馈 $u = v + \boldsymbol{kx}$ 后，问：

（1）闭环系统（输入 v、输出 y、状态 $\boldsymbol{x}$）是否一定能控；若是，请给出证明；若否，给出一个尽可能简单的反例；

（2）闭环系统（输入 v、输出 y、状态 $\boldsymbol{x}$）是否一定能观；若是，请给出证明；若否，给出一个尽可能简单的反例。

注：上述“尽可能简单”是指闭环系统的传递函数阶数最低，且静态增益为 1。要求求出 $\boldsymbol{k}$ 及相应的闭环传递函数 $G_0(s)$

试题名称：自动控制理论

一、

1. 系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K}{s(0.25s-1+KK_t)}$$

系统的闭环传递函数为

$$W(s)=\frac{K}{0.25s^2+(KK_t-1)s+K}$$

故欲使闭环系统稳定，只要满足$KK_t>1$。

2. 由 $M_p=1 \Rightarrow \zeta=0.59$

由 $t_s=\frac{3}{\zeta\omega_n}=1.5 \Rightarrow \omega_n=3.39\ rad/s$

由 $\begin{cases} K=\omega_n^2 \\ KK_t-1=2\zeta\omega_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K=11.49 \\ K_t=0.44 \end{cases}$

二、

1. 内回路闭环传递函数为

$$W_1(s)=\frac{K_1}{s[(T_1s+1)(T_2s+1)+K_1K_b]}$$

系统的开环传递函数为

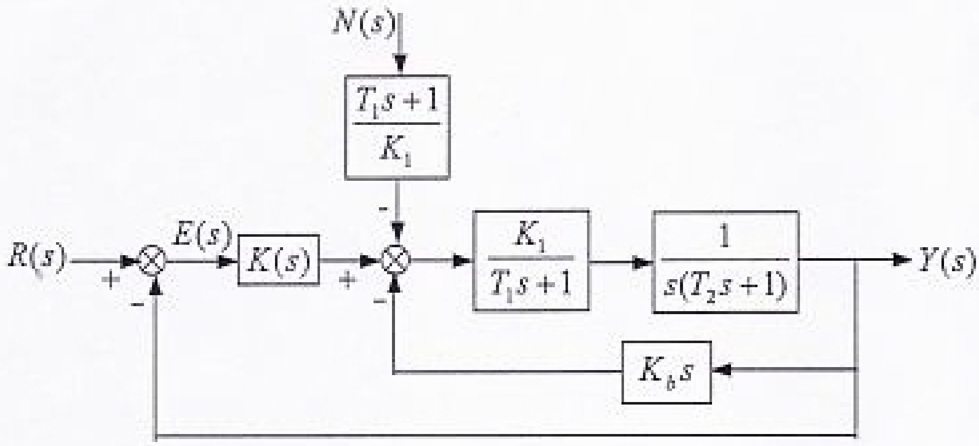
$$G(s)=\frac{KK_1}{s[(T_1s+1)(T_2s+1)+K_1K_b]}$$

① 由 $R(s) \Rightarrow e_{ssR}$ $(N(s)=0)$

系统为1型，故 $e_{ssR}=0$

② $N(s) \Rightarrow e_{ssN}$ $(R(s)=0)$

原系统方块图等效变换为



$$E_N(s)=\frac{T_1 s+1}{s[(T_1 s+1)(T_2 s+1)+K_1 K_b]+K_1 K}\cdot N(s)$$

$\therefore\ e_{ssN}=\lim_{s\to 0} sE_N(s)=\frac{1}{KK_1}$

$\therefore\ e_{ss}=e_{ssR}+e_{ssN}=\frac{1}{KK_1}$

2. 可取 $K(s)$ 为比例-积分控制器，为

$$K(s)=\frac{T_i s+1}{s}$$

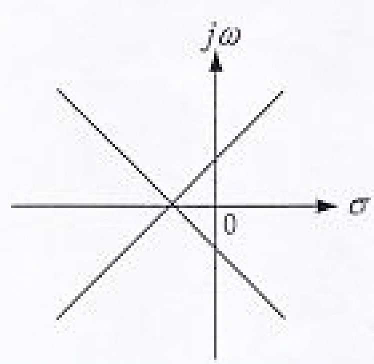
简述：因开环系统增加了一个积分因子，使系统对单位阶跃信号的稳态误差为零；而增加的开环零点，应使根轨迹左移，以保证系统在某一开环增益范围内，闭环稳定。

三、

1. 渐近线：4 条，$\theta_a=\begin{cases}\pm 45^\circ\\ \pm 135^\circ\end{cases}$，$-\sigma_a=-1.75$

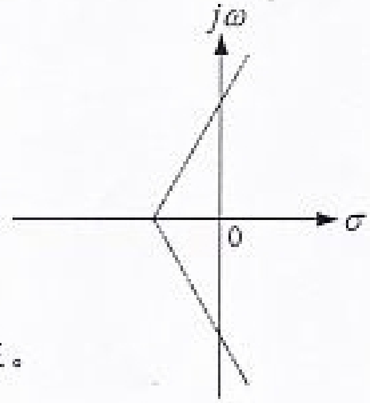
分离点：$s=-4$

与虚轴无交点



2. $G(s)H(s)=\dfrac{k(2s+1)}{s^2(s+2)(s+5)}=\dfrac{k'(s+0.5)}{s^2(s+2)(s+5)}\qquad (k'=2k)$

渐近线：3 条，$\theta_a=\begin{cases}\pm 60^\circ\\ 180^\circ\end{cases}$，$-\sigma_a=-2.17$



与虚轴交点：$\begin{cases}\omega=\pm 2.55\\ k'=45.5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\omega=\pm 2.55\\ k=22.75\end{cases}$

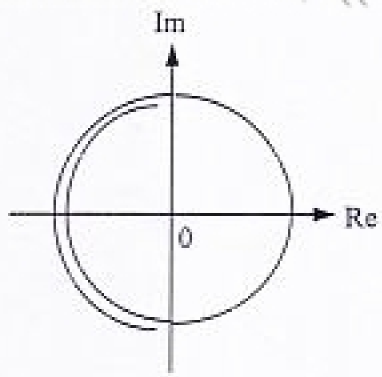
当 $0<k<22.75$ 时，闭环系统稳定。

简述：$H(s)=2s+1$，即系统引入了速度反馈，增加了等效阻尼比，改善了稳定性。

四、

1. 开环传递函数 $G(s)$ 的完整奈氏图如下图所示

。



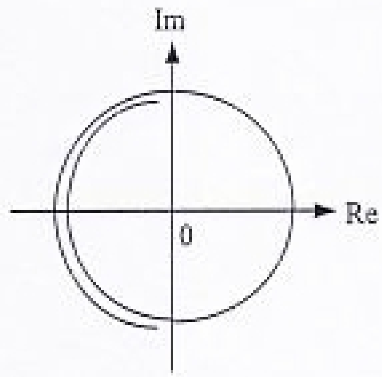
$G(s)$ 的奈氏图顺钟向包围 (-1, j0)点两次，故

$$n_c=N+n_0=2$$

闭环系统不稳定

2. 设计比例–微分控制器 $K(s)=1+Ts \quad (T>0.25)$。

校正后系统的完整奈氏图如下图所示，取 $T=2$。



设 $G(s)K(s)$ 的幅相特性与负实轴的交点为 a，求出该点的坐标值为(-4.2k, j0)。

① $K=0.24$ 时，$\mathrm{Re}[G(j\omega)]=-1$，即 $a=-1$。

则 $G(s)K(s)$ 的幅相特性 (-1, j0)点，闭环系统临界稳定。

② $K>0.24$ 时，$\mathrm{Re}[G(j\omega)]<-1$，即 $a<-1$。

则 $G(s)K(s)$ 的封闭轨迹以顺钟向和反钟向各包围 (-1, j0)点两次，故 $n_c=0$，闭环系统稳定。

③ $K<0.24$ 时，$\mathrm{Re}[G(j\omega)]>-1$，即 $a>-1$。

则 $G(s)K(s)$ 的封闭轨迹以顺钟向包围 (-1, j0)点两次，故 $n_c=2$，闭环系统不稳定。

也可设计超前校正装置 $K(s)=\dfrac{1+T_1 s}{1+T_2 s} \quad (T_1>T_2)$。

五、1. 因状态方程的解为

$$x(t)=e^{At}x(0)+\int_0^t e^{A\tau}bu(t-\tau)d\tau$$

零输入时，$x(t)=e^{At}x(0)$，故由(1)，(2)可得：

$$\begin{bmatrix}-e^{-t} & e^{-2t}\\ e^{-t} & -2e^{-2t}\end{bmatrix}=e^{At}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}$$

两边对 t 求导，再令 $t=0$ 可依次得到：

$$\begin{bmatrix}e^{-t} & -2e^{-2t}\\ -e^{-t} & 4e^{-2t}\end{bmatrix}=Ae^{At}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}$$

同理，系统的零状态单位阶跃响应为：

$$x(t)=\int_0^t e^{A\tau}bd\tau,\quad \dot{x}(t)=e^{At}b\quad \therefore b=\dot{x}(0)=\begin{bmatrix}e^{-t}\\ -e^{-t}\end{bmatrix}_{t=0}=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$$

2. $x[k+1]=Fx[k]+gu[k]$

$$F=e^{AT}=\begin{bmatrix}-e^{-T} & e^{-2T}\\ e^{-T} & -2e^{-2T}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-2^{-1} & 2^{-2}\\ 2^{-1} & -2^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.75 & 0.25\\ -0.5 & 0\end{bmatrix}$$

$$g=\int_0^T e^{A\tau}bd\tau=\begin{bmatrix}1-e^{-\tau}\\ -1+e^{-\tau}\end{bmatrix}_{\tau=T}=\begin{bmatrix}1-e^{-T}\\ -1+e^{-T}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.5\\ -0.5\end{bmatrix}$$

六、$F=\begin{bmatrix}0 & -1\\ a & 1\end{bmatrix}$，$g=\begin{bmatrix}1\\ b\end{bmatrix}$

1. 对 $F^TPF-P=-Q$，选 $Q=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}>0$ 令 $P=\begin{bmatrix}p_1 & p_0\\ p_0 & p_2\end{bmatrix}$ 则可求出

$$p_1=\frac{2a(1+a)}{(1-a)(2+a)};\quad p_0=\frac{2}{(1-a)(2+a)};\quad p_2=\frac{2(1+a)}{a(1-a)(2+a)}$$

为使 $P>0$ 须 $p_1>0,\ p_1p_2-p_0^2>0$，解得：$0<a<1$；

2. $M_r=\begin{bmatrix}1 & -b\\ b & a+b\end{bmatrix}$, $F^2=\begin{bmatrix}-a & -1\\ a & -a+1\end{bmatrix}$; $\det M_r=a+b-b^2$, $\det(F^2)=a^2$

系统能控的充要条件是 $R(M_r)\supset R(F^2)$

当 $a\neq 0$ 时，F 满秩，此时须 M_r 满秩 $\Leftrightarrow a+b-b^2\neq 0$

当 $a=0$ 时，$R(M_r)\supset R(F^2)$ 即

$R(\begin{bmatrix}1 & -b\\ b & b\end{bmatrix})\supset R(\begin{bmatrix}0 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix})\Leftrightarrow b\neq 0$

七、1. $\dot{x}=Ax+bu,\quad y=cx+du$

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -4 & -3 & -2\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix};\quad c=[1\quad 3\quad 2],\quad d=0$$

2. 闭环系统：$\dot{x}=(A+bk)x+bv,\quad y=cx$

(1) 闭环系统一定能控，证明基于以下两个结论

a 能控标准型系统一定能控；

b 状态反馈不改变系统的能控性

(2) 闭环系统不一定能观，因为可通过选择 k 使闭环极点得以任意配置，而闭环零点位置不变，当闭环零极点相同时，对消，能控能观性之一被破坏，因闭环系统一定能控，只能是能观性被破坏。综上所述，符合要求的期望特征多项式是：

$$f(s)=(s^2+3s+2)(s+1)=s^3+4s^2+5s+2$$

而当 $k=[k_1\quad k_2\quad k_3]$ 时闭环系统的特征多项式为

$$f(s)=\det(\lambda I-A-bk)=s^3+(k_3+2)s2+(k_2+3)s+(k_1+4)$$

比较系数得：

$$k=[k_1\quad k_2\quad k_3]=[-2\quad 2\quad 2]$$

此时闭环系统的传递函数为

$$G_o(s)=\frac{1}{s+1}$$