第 5 章　线性系统的频域分析

书后习题解析

5-1　一环节的传递函数为

$$G(s)=\frac{T_1 s+1}{T_2 s-1}\quad(1>T_1>T_2>0)$$

试绘制该环节的 Nyquist 图(幅相频率特性)和 Bode 图(对数频率特性)。

解　　该环节的频率响应为

$$G(\mathrm{j}\omega)=\frac{1+\mathrm{j}T_1\omega}{-1+\mathrm{j}T_2\omega}$$

(1)幅频特性和相频特性分别为

$$|G(\mathrm{j}\omega)|=\frac{\sqrt{1+(T_2\omega)^2}}{\sqrt{1+(T_2\omega)^2}},\angle G(\mathrm{j}\omega)=\arctan(T_1\omega)+(-180^\circ+\arctan(T_2\omega))$$

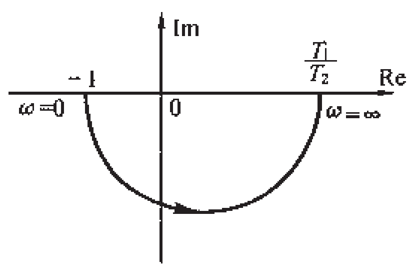
当 $\omega=0$ 时,$|G(\mathrm{j}0)|=1$,$\angle G(\mathrm{j}0)=-180^\circ$;当 $\omega=\infty$ 时,$|G(\mathrm{j}\infty)|=\frac{T_1}{T_2}$,$\angle G(\mathrm{j}\infty)=0^\circ$。

给定环节的 Nyquist 图如题 5-1 解图(1)所示。

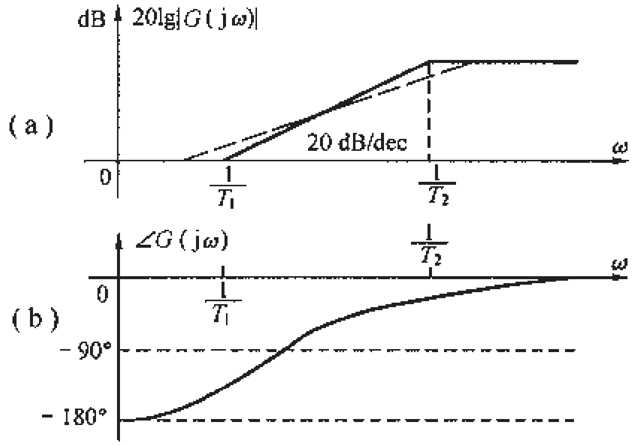
(2)对数幅频特性为

$$20\lg|G(\mathrm{j}\omega)|=20\lg\sqrt{1+(T_1\omega)^2}+20\lg\frac{1}{\sqrt{1+(T_2\omega)^2}}$$

其中$\frac{1}{T_1}$与$\frac{1}{T_2}$分别为一阶微分环节及不稳定惯性环节的转折频率。则在频段内画出该环节的对数幅频特性和相频特性如题 5-1 解图(2)(a),(b)所示。



题 5-1 解图(1)



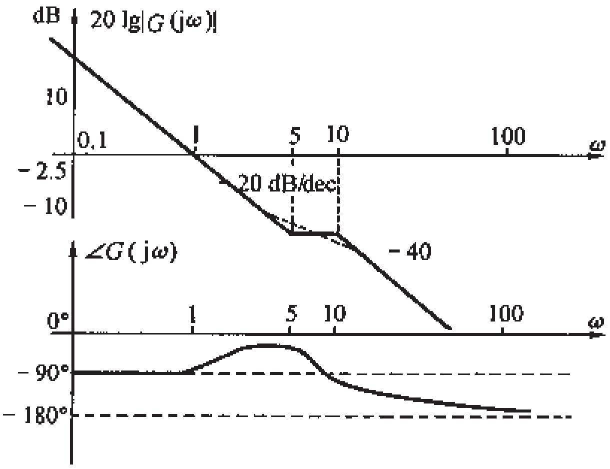
题 5-1 解图(2)

5－2　设某控制系统的开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{75(0.2s+1)}{s(s^2+16s+100)}$，试绘制该系统的 Bode 图，并确定其剪切频率 ω_c 之值。

解　(1)绘制系统的 Bode 图之前，先将构成传递函数的各串联环节化成典型环节所具有的标准形式

$$\frac{0.75(0.2s+1)}{s[(0.1)^2s^2+2\times0.8\times0.1s+1]}$$

则有，开环增益 $K=0.75\ \mathrm{s}^{-1}$，一阶微分环节的时间常数 $\tau=0.2$ s，振荡环节的时间常数 $T=0.1$ s 及阻尼比 $\zeta=0.8$，转折频率分别为 $\frac{1}{\tau}=5$ rad/s及 $\frac{1}{T}=10$ rad/s。绘制系统渐近幅频特性及相频特性如题5－2解图中的实线所示。图中的虚线为修正后的精确幅频特性，转折频率处的修正值为$20\lg\frac{1}{2\zeta}=-4.08$。并且$20\lg|G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)|_{\omega=1}=20\lg K=-2.5$ dB。



题 5－2 解图

(2)对数幅频特性 $20\lg\left|\dfrac{K}{\mathrm{j}\omega_c}\right|=20\lg0.75-20\lg\omega_c=0$，求得 $\omega_c=0.75$ rad/s。

5－3　设某系统的开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{K\mathrm{e}^{-0.1s}}{s(s+1)(0.1s+1)}$，试通过该系统的频率响应确定剪切频率 $\omega_c=5$ rad/s 时的开环增益 K。

解　该系统的开环幅频特性为

$$|G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)|=\left|\frac{K}{\mathrm{j}\omega(1+\mathrm{j}\omega)(1+\mathrm{j}0.1\omega)}\right|=\frac{K}{\omega\sqrt{1+\omega^2}\cdot\sqrt{1+(0.1\omega)^2}}$$

对于时滞环节 $\mathrm{e}^{-\tau s}$，有 $|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\tau\omega}|=1$。所以求取其幅频特性 $|G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)|$ 时，可不考虑时滞环节。

根据剪切频率的定义得

$$|G(\mathrm{j}\omega_c)H(\mathrm{j}\omega_c)|=1$$

因此，将 $\omega_c=5$ rad/s 代入上式，解出开环增益 $K=28.5\ \mathrm{s}^{-1}$。

5－4　若系统的单位阶跃响应为

$$c(t)=1-1.8\mathrm{e}^{-4t}+0.8\mathrm{e}^{-9t}\quad(t\geqslant0)$$

试求取该系统的频率响应。

解　由响应表达式得 $c(0)=0$ 和 $\dot{c}(0)=0$。则求得该系统的传递函数 $G(s)$为

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{36}{(s+4)(s+9)}$$

根据解析法求得该系统的频率响应为

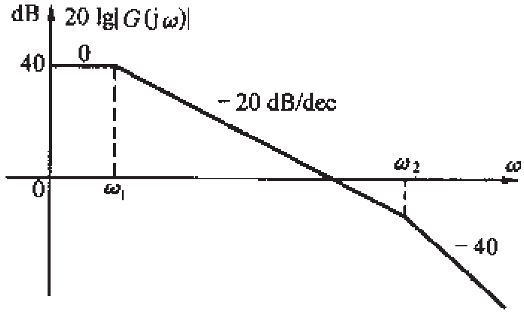
$$G(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{\left(1+\mathrm{j}\,\frac{1}{4}\omega\right)\left(1+\mathrm{j}\,\frac{1}{9}\omega\right)}$$

5－5　已知最小相位系统 Bode 图的幅频特性如题 5－5 图所示。试求取该系统的开环传

递函数。

解 从题 5-5 图所示 Bode 图的幅频特性的斜率变化可知，开环传递函数 $G(s)$ 由放大环节及两个惯性环节构成，其时间常数分别为 $\frac{1}{\omega_1}$ 和 $\frac{1}{\omega_2}$，则

$$G(s)=\frac{K}{\left(\frac{1}{\omega_1}s+1\right)\left(\frac{1}{\omega_2}s+1\right)}$$



题 5-5 图

其中开环增益 K 可由 $20\lg K=40$ dB 求得。

因此得

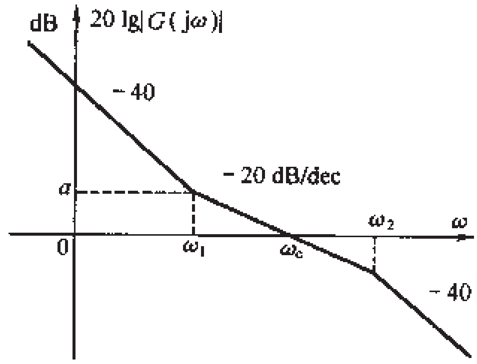
$$K=100$$

所以该系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{100}{\left(\frac{1}{\omega_1}s+1\right)\left(\frac{1}{\omega_2}s+1\right)}$。

5-6 已知最小相位系统 Bode 图的幅频特性如题 5-6 图所示。试求取该系统的开环传递函数。

解 从题 5-6 图所示 Bode 图的幅频特性的斜率及其斜率变化可知，开环传递函数 $G(s)$ 由放大环节、两个积分环节、一阶微分环节及惯性环节构成。一阶微分环节及惯性环节的时间常数分别 $\frac{1}{\omega_1}$ 和 $\frac{1}{\omega_2}$。开环传递函数 $G(s)$ 具有如下形式

$$G(s)=\frac{K\left(\frac{1}{\omega_1}s+1\right)}{s^2\left(\frac{1}{\omega_2}+1\right)}$$



题 5-6 图

设图所示对数幅频特性的低频段可用传递函数 K/s^2 来描述，则其对数幅频特性为

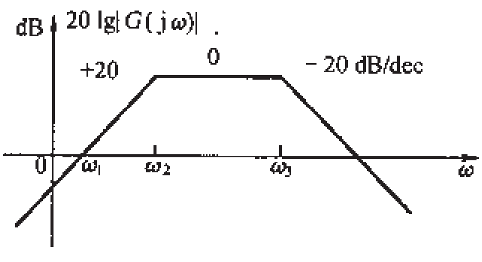
$$L_1(\omega)=20\lg\frac{K}{\omega^2}=20\lg K-20\lg\omega^2$$

并且 $\frac{a-0}{\lg\omega_1-\lg\omega_c}=-20$，求得 $a=20\lg\frac{\omega_c}{\omega_1}$。因为 $a=L_1(\omega_1)$，求得 $K=\omega_1\cdot\omega_c$。

所以该系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{\omega_1\cdot\omega_c\left(\frac{1}{\omega_1}s+1\right)}{s^2\left(\frac{1}{\omega_2}s+1\right)}$。

5-7 已知最小相位系统 Bode 图的幅频特性如题 5-7 图所示。试求取该系统的开环传递函数。

解 由图可知，系统的开环传递函数 $G(s)$ 由放大环节、微分环节及两个惯性环节构成。两个惯性环节的时间常数分别为 $1/\omega_2$ 和 $1/\omega_3$。开环传递函数 $G(s)$ 具有如下形式

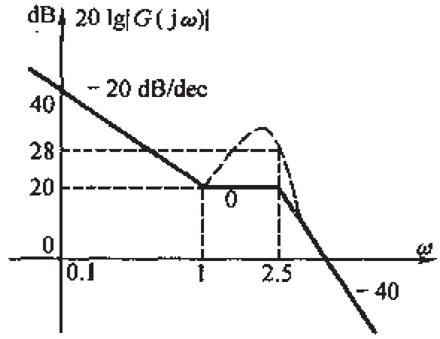


题 5-7 图

$$G(s)=\frac{Ks}{\left(\frac{1}{\omega_2}s+1\right)\left(\frac{1}{\omega_3}s+1\right)}$$

题5-7图所示幅频特性低频段可用式 $L(\omega)=20\lg K\omega$ 表示，由图得 $L(\omega_1)=0$ dB。则求得 $K=\frac{1}{\omega_1}$。所以该系统的开环传递函数为 $G(s)=\frac{\frac{1}{\omega_1}s}{\left(\frac{1}{\omega_2}s+1\right)\left(\frac{1}{\omega_3}s+1\right)}$。

5-8 已知最小相位系统Bode图的幅频特性如题5-8图所示。试求取该系统的开环传递函数。



题5-8图

解 由图可知，系统的开环传递函数由放大环节、积分环节、一阶微分环节及振荡环节构成。一阶微分环节及振荡环节的时间常数分别为1和0.4。开环传递函数可写成如下形式

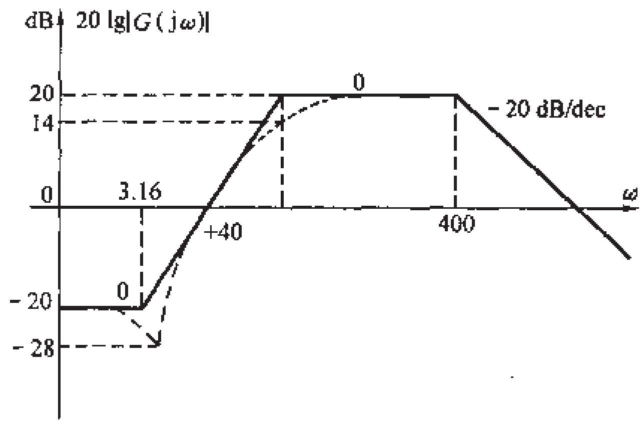
$$G(s)=\frac{K(s+1)}{s[(0.4)^2s^2+2\zeta\times0.4s+1]}$$

幅频特性低频段可用下式表示 $L_1(\omega)=20\lg\frac{K}{\omega}$，并且 $L_1(1)=20$，则求得 $K=10\ \mathrm{s}^{-1}$。

振荡环节在其转折频率 $\omega_n=2.5$ rad/s 处的修正值为 $20\lg\frac{1}{2\zeta}=28-20=8$ dB，解出阻尼比 $\zeta=0.2$。所以该系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{10(s+1)}{s(0.16s^2+0.16s+1)}$$

5-9 已知最小相位系统Bode图的幅频特性如题5-9图所示。试求取该系统的开环传递函数。



题5-9图

解 由图可知，系统的开环传递函数 $G(s)$ 由放大环节、二阶微分环节、振荡环节和惯性环节构成。开环传递函数 $G(s)$ 可写成如下形式

$$G(s)=\frac{K(\tau^2s^2+2\zeta_1\tau s+1)}{(T^2s^2+2\zeta_2Ts+1)(T_1s+1)}$$

其中 $1/\tau=3.16$ rad/s，$1/T=31.6$ rad/s，$1/T_1=400$ rad/s。二阶微分环节和振荡环节相对应的转折频率间幅频特性的斜率为 +40 dB/dec，而上述两转折频率处的对数幅值之差为 +40 dB，可见振荡环节的转折频率为 31.6 rad/s。

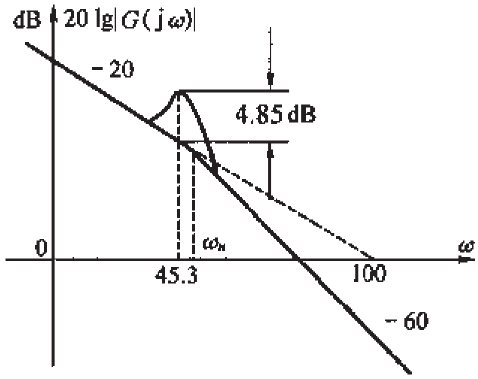
振荡环节在其转折频率处的修正值为 $20\lg\frac{1}{2\zeta_2}=14-20=-6$ dB，解出阻尼比 $\zeta_2=1$。

二阶微分环节在其转折频率处的修正值为 $20\lg2\zeta=-28+20=-8$ dB，解出阻尼比 $\zeta_1=0.2$。

根据幅频特性低频段求得 $20\lg K=-20$ dB，$K=0.1$。

所以该系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{0.1\left[\left(\frac{1}{3.16}\right)^2 s^2+2\times0.2\times\frac{1}{3.16}s+1\right]}{\left[\left(\frac{1}{31.6}\right)^2 s^2+2\times1\times\frac{1}{31.6}s+1\right]\left(\frac{1}{400}s+1\right)}$。

5－10 已知最小相位系统 Bode 的幅频特性如题 5－10 图所示。试求取该系统的开环传递函数。



题 5－10 图

解 根据图中所示幅频特性各段斜率的变化，可写出具有如下形式的开环传递函数

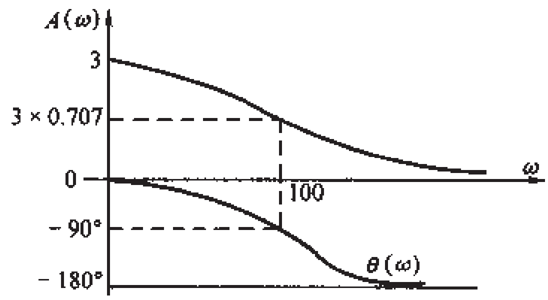
$$G(s)=\frac{K}{s(T^2s^2+2\zeta Ts+1)}$$

幅频特性低频段可用式 $L(\omega)=20\lg K-20\lg\omega$ 表示，由图得 $L(100)=0$，则求得 $K=100$。

对于振荡环节，其谐振峰值处的修正值为 $20\lg\dfrac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}=4.85$，解出振荡环节的阻尼比 $\zeta=0.3$。并且谐振频率 $\omega_m=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}=45.3$ rad/s，解出的无阻尼自振频率 $\omega_n=50$ rad/s，则振荡环节的时间常数 $T=\dfrac{1}{50}=0.02$ s。最后求得开环传递函数为

$$G(s)=\frac{100}{s(0.000\,4s^2+0.012s+1)}$$

5－11 已知某闭环系统的幅频、相频特性如题5－11图所示。试写出该闭环系统的传递函数。



题 5－11 图

解 (1)从题 5－11 图所示相频特性的形状及相角变化规律看出该系统是一个二阶系统，其传递函数的一般形式为

$$\Phi(s)=\frac{K}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

求得相应的幅频与相频特性分别为

$$|\Phi(j\omega)|=A(\omega)=\frac{K}{\sqrt{(\omega^2-\omega_n^2)+(2\zeta\omega_n\omega)^2}}$$

$$\angle\Phi(j\omega)=\theta(\omega)=-\arctan\frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega^2-\omega_n^2}$$

(2)由相频特性有 $\theta(\omega_n)=-\dfrac{\pi}{2}$，因此求得无阻尼自振频率 $\omega_n=100$ rad/s；

(3)由幅频特性有 $A(0)=3$，因此求得 $K=3\times10^4$；

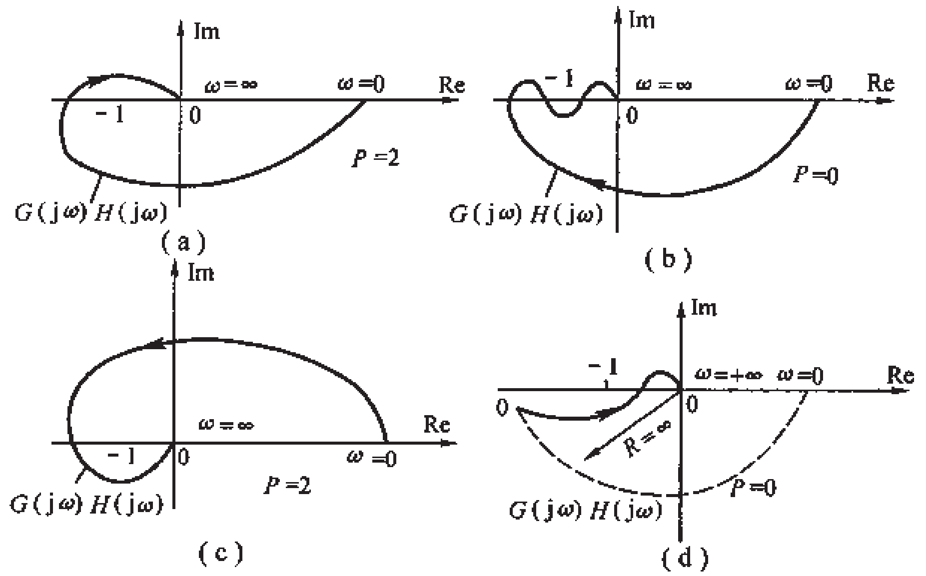
(4)由幅频特性有 $A(\omega_n)=3\times0.707$，解出阻尼比 $\zeta=\sqrt{2}/2$。

根据上述计算结果，求得该闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{3\times10^4}{s^2+\sqrt{2}\times100s+10^4}$$

5－12 题 5－12 图所示为四个负反馈系统的开环频率响应 Nyquist 图，图中 P 为系统含

有的位于 s 平面右半部的开环极点数目。试应用 Nyquist 稳定判据分析各闭环系统的稳定性。



题5－12图

解　(1)(a)图所代表的闭环系统不稳定；

(2)(b)图所代表的闭环系统稳定；

(3)(c)图所代表的闭环系统稳定；

(4)(d)图所代表的闭环系统稳定。

5－13　设某负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{10(1+K_n s)}{s(s-10)}$$

试确定闭环系统稳定时反馈参数 K_n 的临界值。

解　(1)该负反馈系统的特征方程为

$$s^2+10s(K_n-1)+10=0$$

列出 Routh 表

$$\begin{array}{lcc} s^2 & 1 & 10 \\ s^1 & 10(K_n-1) & 0 \\ s^0 & 10 & \end{array}$$

应用 Routh 稳定判据，由 $10(K_n-1)=0$ 求得该负反馈系统稳定时反馈参数 K_n 的临界值为1。

(2)还可应用 Nyquist 稳定判据进行求解。闭环系统处于临界稳定状态时，开环频率响应将通过 $|GH|$ 平面上的点 $(-1,j0)$，则 $|G(j\omega_c)H(j\omega_c)|=1$，$\angle G(j\omega_c)H(j\omega_c)=-180°$。最后求得 K_n 的临界值为1。

5－14　试通过 Bode 图根据相角裕度概念确定5－13题所示系统反馈参数 K_n 的临界值。

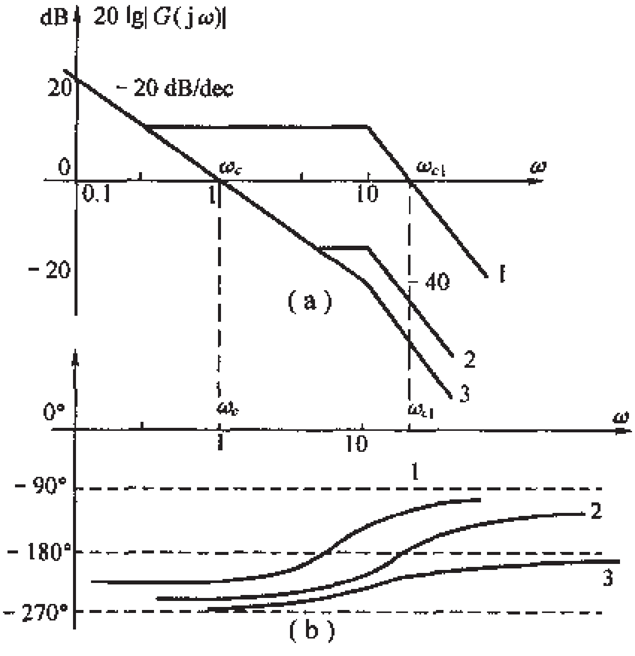
解　首先将开环传递函数化成典型环节表示的标准形式，即

$$G(s)H(s)=\frac{K_n s+1}{s(0.1s-1)}$$

(1)根据积分环节 $1/s$ 及不稳定惯性环节 $1/(0.1s-1)$ 绘制出的 Bode 图如题5－14解图(a)

中的特性 3 所示。可见，当给定系统不考虑一阶微分环节 $K_n s+1$ 时，此时相角裕度 $\gamma<0$，所以闭环系统是不稳定的。

(2)考虑一阶微分环节 $K_n s+1$ 时，若取 $K_n>1$，即转折频率 $(1/K_n)<1$ rad/s，如题 5－14 解图(b)中渐近对数幅频特性 1 所示，则从与之对应的相频特性 1 可见，由于在剪切频率 ω_{c1} 处的相角裕度 $\gamma>0$，所以闭环系统是稳定的。若反馈参数 K_n 稍大于 1，即转折频率 $1/K_n$ 稍小于 1，系统便总是稳定的。若取 $K_n<1$，即 $(1/K_n)>1$，而且只要 K_n 稍小于 1，即 $1/K_n$ 稍大于 1，则系统的剪切频率 ω_c 便总等于 1。由解图(b)的特性 2 可以看到，由于在 ω_c 处的相角裕度 $\gamma<0$，因此在 $K_n<1$ 时系统将是不稳定的。



题 5－14 解图

(3)综上分析，给定系统的反馈参数 K_n 的临界值为 1。这个结论与题 5－13 中所得到的结论是一致的。

5－15　设某单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{\tau s+1}{s^2}$$

试确定使该系统具有相角裕度 $\gamma=+45°$时的 τ 值。

解　给定系统的幅频特性及相频特性分别为

$$|G(j\omega)|=\frac{\sqrt{1+(\tau\omega)^2}}{\omega^2},\quad \angle G(j\omega)=-180°+\arctan(\tau\omega)$$

根据相角裕度定义，有 $\gamma=180°+\angle G(j\omega_c)=180°-180°+\arctan(\tau\omega_c)=\arctan(\tau\omega_c)$，式中 ω_c 为系统的剪切频率。

由 $\gamma=+45°$求得 $\tau\omega_c=1$，并且 $|G(j\omega_c)|=1$，计算得 $\omega_c=\sqrt[4]{2}=1.19$ rad/s。最后求得值系统的相角裕度 $\gamma=+45°$时的 τ 值为

$$\tau=\frac{1}{1.19}=0.84\ \text{s}$$

5－16　设单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K}{(0.01s+1)^3}$$

试确定使相角裕度 $\gamma=45°$的开环增益 K。

解　根据相角裕度定义，有 $\gamma=180°+\angle G(j\omega_c)=180°-3\arctan(0.01\omega_c)=45°$，求得系统的剪切频率 $\omega_c=100$。并且系统的幅频特性 $|G(j\omega_c)|=\dfrac{K}{(\sqrt{1+(0.01\omega_c)^2})^3}=1$，则可确定满足相角裕度 $\gamma=45°$的开环增益 $K=2\sqrt{2}$。

5－17　设某单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{k}{s(s^2+s+100)}$$

若要求系统的幅值裕度为 20 dB,则开环增益 K 应取何值?

解　给定系统的开环幅频特性与开环相频特性分别为

$$|G(j\omega)|=\frac{k}{\omega\sqrt{(100-\omega^2)^2+\omega^2}},\quad \angle G(j\omega)=-90^\circ-\arctan\frac{\omega}{100-\omega^2}$$

(1)由$\angle G(j\omega_g)=-90^\circ-\arctan\dfrac{\omega_g}{100-\omega_g^2}=-180^\circ$,解得 $\omega_g=10$ rad/s;

(2)$|G(j\omega_g)|=\dfrac{k}{10\sqrt{(100-10^2)^2+10^2}}=\dfrac{k}{100}$,则幅值裕度为 $20\lg\left|\dfrac{1}{G(j\omega_g)}\right|=20\lg\dfrac{100}{k}=$ 20 dB,解得 $k=10$。则满足给定系统具有20 dB幅值裕度的开环增益为 $K=\dfrac{k}{100}=0.1$。

5-18　设某单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{16}{s(s+2)}$$

试计算该系统的剪切频率 ω_c 及相角裕度 γ;计算闭环幅频特性的相对谐振峰值 M_r 及谐振频率 ω_r。

解　(1)开环幅频特性及开环相频特性分别为

$$|G(j\omega)H(j\omega)|=\frac{8}{\omega\sqrt{1+(0.5\omega)^2}},\quad \angle G(j\omega)=-90^\circ-\arctan(0.5\omega)$$

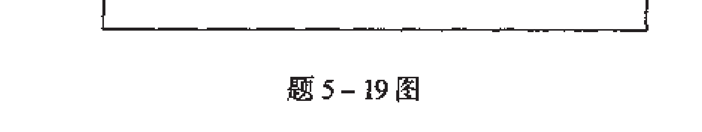
对于 $\omega=\omega_c$,有$|G(j\omega_c)H(j\omega_c)|=\dfrac{8}{\omega_c\sqrt{1+(0.5\omega_c)^2}}=1$,解得 $\omega_c=3.76$ rad/s。

根据相角裕度定义,得 $\gamma=180^\circ+\angle G(j\omega_c)=180^\circ-90^\circ-\arctan(0.5\times3.76)=28^\circ$。

(2)给定系统的闭环传递函数 $\Phi(s)=\dfrac{G(s)}{1+G(s)}=\dfrac{16}{s^2+2s+16}$,与二阶系统闭环传递函数标准形式相比,求得 $\omega_n=4$ rad/s,$\zeta=\dfrac{2}{2\omega_n}=0.25$。根据二阶系统的 M_r 及 ω_r 与其参数 ζ,ω_n 的关系求得

$$M_r=\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}=2.06,\quad \omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}=3.74\text{ rad/s}$$

5-19　设某控制系统的方框图如题 5-19 图所示。试根据该系统响应 10 rad/s 的匀速信号时的稳态误差等于30°的要求确定控制器的增益 K,并计算该系统的相角裕度及幅值裕度。



题 5-19 图

解　(1)确定控制器的增益 K。给定系统为 I 型系统,则响应匀速信号 $r(t)=10t$ 时的稳态误差为

$$e_{ss} = \frac{10}{10K} = 30 \times \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

求得

$$K = 1.19$$

则给定系统的开环传递函数为 $G(s) = \dfrac{19.1}{s(0.1s+1)(s+1)}$

(2)求给定系统的相角裕度

$$|G(j\omega_c)| = \frac{19.1}{\omega_c\sqrt{1+(0.1\omega_c)^2}\cdot\sqrt{1+\omega_c^2}} = 1$$

$$\omega_c = 4.15 \text{ rad/s}$$

解得

$$\gamma = 180° + \angle G(j\omega_c) = 180° - 90° - \arctan(0.1\omega_c) - \arctan\omega_c = -9°$$

(3)求给定系统的幅值裕度

$$\angle G(j\omega_g) = -90° - \arctan(0.1\omega_g) - \arctan\omega_g = -180°$$

$$\omega_g = 3.2 \text{ rad/s}$$

$$|G(j\omega_g)| = \left.\frac{19.1}{\omega_g\sqrt{1+(0.1\omega_g)^2}\cdot\sqrt{1+\omega_g^2}}\right|_{\omega_g=3.2} = 1.7$$

则给定系统的幅值裕度为

$$20\lg K_g = 20\lg\frac{1}{|G(j\omega_g)|} = -4.6 \text{ dB}$$

5-20 设某单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(0.01s+1)(0.1s+1)}$$

(1)计算满足闭环幅频传性的相对谐振峰值 $M_r \leqslant 1.5$ 时的开环增益 K；

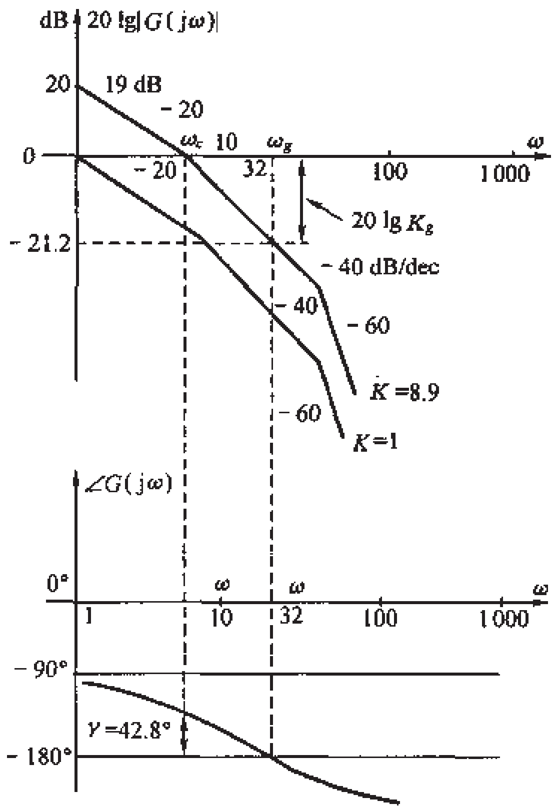
(2)根据相角裕度及幅值裕度分析闭环系统的稳定性；

(3)应用经验公式计算该系统的时域指标：超调量 $\sigma\%$ 及调整时间 t_s。

解 (1)根据相角裕度 γ 与闭环幅频特性的相对谐振峰值M之间的近似关系式

$$\gamma = \arcsin\frac{1}{M_r}$$

当 $M_r \leqslant 1.5$，$\gamma \geqslant 42°$。绘制 $K=1$ 时给定系统的 Bode 图，如题 5-20 解图所示。由 Bode 图得$\angle G(j9) = -137.2°$。则若将给定系统的渐近对数幅频特性平行向上移，使其在 $\omega = 9$ rad/s处经过横轴，即令 $\omega_c = 9$ rad/s，则得给定系统的相角裕度 $\gamma = 42.8°$，满足要求。由于在 $K=1$ 的渐近对数幅频特性上对应 $\omega = 9$ rad/s 的对数幅值为 -19 dB，所以将渐近对数幅频



题 5-20 解图

特性向上平移19 dB,因此在$\omega=1$ rad/s处有$20\lg K=19$ dB,解得

$$K=8.9\ \mathrm{s}^{-1}$$

(2)由上步知 $\gamma=42.8°$,从图求得$\omega_g=32$ rad/s,求得给定系统的幅值裕度$20\lg K_g=+21.2$ dB。因为系统的$\gamma>0°$以及$20\lg K_g>0$ dB,所以闭环系统是稳定的。

(3)应用经验公式

$$\sigma\%=0.16+0.4(M_r-1)$$

$$t_s=\frac{\pi}{\omega_c}[2+1.5(M_r-1)+2.5(M_r-1)^2]$$

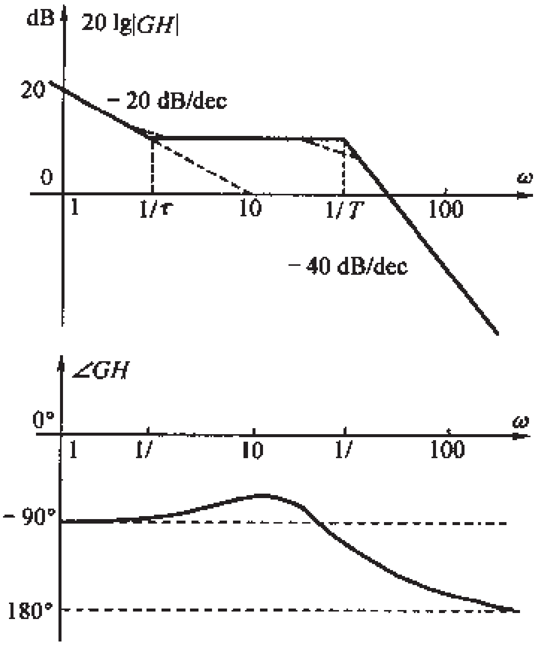
将$M_r=1.5$和$\omega_c=9$ rad/s代入上式,求得

$$\sigma\%=36\%,\quad t_s=1.18\ \mathrm{s}$$

5-21　设某负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{2\,083(s+3)}{s(s^2+20s+625)}$$

试绘制该系统的 Bode 图,并计算剪切频率ω_c。



题5-21解图

解　(1)先将传递函数化成标准形式

$$G(s)H(s)=\frac{\frac{3\times2\,083}{625}\left(\frac{1}{3}s+1\right)}{s(0.04^2s^2+2\times0.04\times0.4s+1)}$$

则开环增益$K\approx10\ \mathrm{s}^{-1}$,一阶微分环节的时间常数$\tau=\frac{1}{3}$ s,振荡环节的时间常数和阻尼比分别为$T=0.04$ s,$\zeta=0.4$。一阶微分环节和振荡环节的转折频率为$\frac{1}{\tau}=3$ rad/s和$\frac{1}{T}=25$ rad/s。绘制系统的 Bode 图如题5-21解图所示。图中转折频率处的修正值为

$$20\lg\frac{1}{2\zeta}=1.94$$

$$20\lg|G(j\omega)H(j\omega)|_{\omega=1}=20\lg K=20\ \mathrm{dB}$$

(2)根据渐近幅频特性有

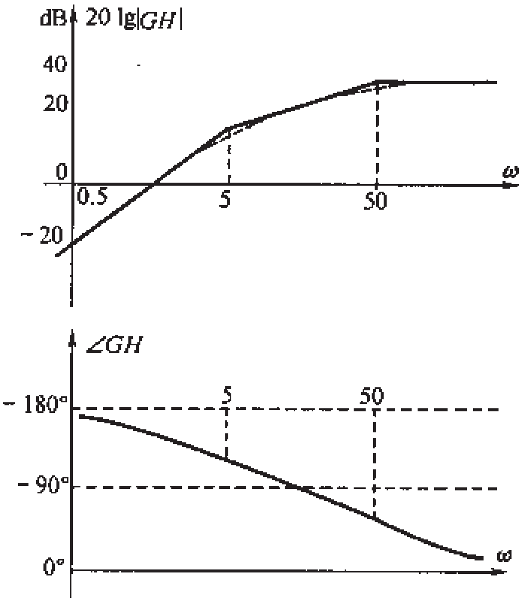
$$\frac{a}{\lg3-\lg10}=-20,\frac{a}{\lg25-\lg\omega_1}=-40$$

则$\omega_1=45.6$ rad/s,剪切频率应稍大于ω_1,试探得剪切频率$\omega_c=50$ rad/s。

5-22　设某控制系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{Ks^2}{(0.02s+1)(0.2s+1)}$$

试绘制该系统的 Bode 图,并确定剪切频率ω_c



题5-22解图

$=5$ rad/s时的 K 值。

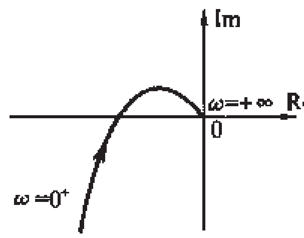
解 (1)该系统的开环传递函数由比例环节、两个微分环节和两个惯性环节组成。两个惯性环节的转折频率分别为 $\omega_{n1}=5$ rad/s 和 $\omega_{n2}=50$ rad/s。绘制系统渐近幅频特性及相频特性如题5-22解图中的实线所示。图中的虚线为修正后的精确幅频特性。

(2)由剪切频率定义有 $|G(j\omega_c)H(j\omega_c)|=1$,则求得当 $\omega_c=5$ rad/s时,$K=0.056\ 8$。

5-23 设某单位负反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{Ke^{-0.1s}}{s(s+1)}$,试确定使闭环系统稳定的开环增益 K 的最大值。

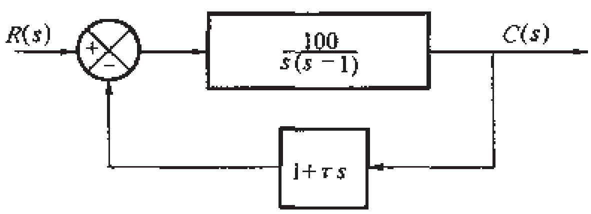
解 系统开环幅频特性 $G(j\omega)=\dfrac{K}{\omega\sqrt{1+\omega^2}}$,相频特性 $\angle G(j\omega)=-0.1\omega-90°-\arctan\omega$。

设 ω_g 为穿越频率,则有 $-0.1\omega_g-90°-\arctan\omega_g=-180°$,解得最小穿越频率 $\omega_{gm}=3.12$。绘 $G(s)$ 的线性部分 $G_1(s)=\dfrac{K}{s(s+1)}$的 Nyquist 曲线如题 5-23 解图所示。其中 $|G_1(j0^+)|=\infty$, $|G_1(j\infty)|=0$。设 $K=K_0$ 时,$G(j\omega_{gm})=-1$,即 $K_0=10$。当 $\omega>\omega_{gm}$时,$|G(j\omega)|<1$,当 $\omega<\omega_{gm}$时,$|G(j\omega)|>1$。已知 $P=0$,根据 Nyquist 稳定判据,为了使闭环系统稳定,系统的 Nyquist 曲线不包围$(-1,0j)$点,所以闭环系统稳定的开环增益 K 的最大值为 $K_{max}=K_0=10$。

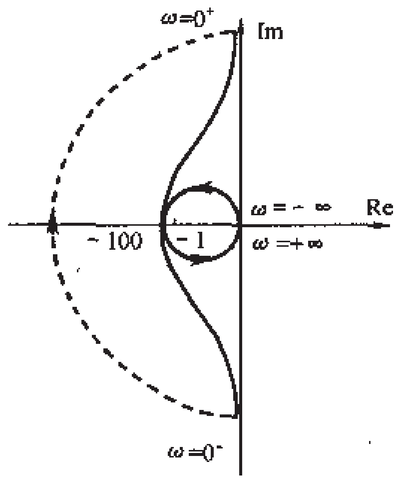


题 5-23 解图

5-24 已知某控制系统的方框图如题 5-24 图所示。试确定闭环系统稳定时反馈系数 τ 的取值范围,并绘制该系统开环频率响应的 Nyquist 图。



题 5-24 图



题 5-24 解图

解 系统的闭环传递函数为$\Phi(s)=\dfrac{100}{s^2+(100\tau-1)s+100}$,则特征方程为

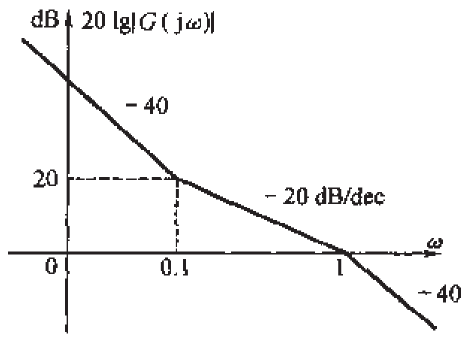
$$s^2+(100\tau-1)s+100=0$$

列劳斯表

$$\begin{array}{ccc} s^1 & 1 & 100 \\ s^1 & 100\tau-1 & 0 \\ s^0 & 100 & 0 \end{array}$$

应用 Routh 稳定判据，闭环系统稳定时反馈系数 τ 的取值范围为 $\tau>0.01$。根据 τ 的取值范围，绘制该系统开环频率响应的 Nyquist 图如题 5－24 解图所示。

5－25　已知最小相位系统 Bode 图的渐近幅频特性如题 5－25 图所示。试求取该系统的开环传递函数。



题 5－25 图

解　由题 5－25 图可知，系统的开环传递函数 $G(s)$ 由放大环节、两个积分环节、一个微分环节及一个馈性环节构成。开环传递函数 $G(s)$ 具有如下形式

$$G(s)=\frac{K(\tau s+1)}{s^2(Ts+1)}$$

且 $\frac{1}{\tau}=0.1$，$\frac{1}{T}=1$，则 $\tau=10$，$T=1$。渐近幅频特性低频段可用下式表示

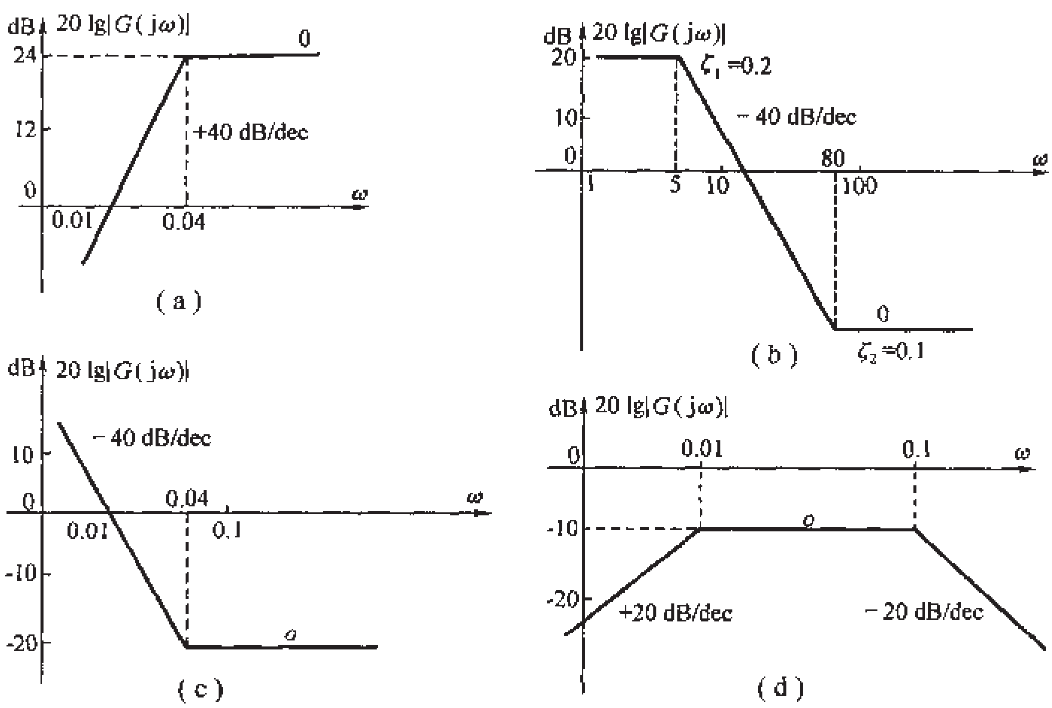
$$L(\omega)=20\lg\frac{K}{\omega^2}$$

由图得，$L(0.1)=20$ dB，则求得 $K=0.1$。所以该系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{0.1(10s+1)}{s^2(s+1)}$$

5－26　已知最小相位系统 Bode 图的渐近幅频特性如题 5－26 图所示。试求取各系统的开环传递函数。

解　方法同上题，求得各系统的开环传递函数为：



题 5－26 图

(a) $G(s)=\dfrac{10^4 s^2}{(25s+1)^2}$;

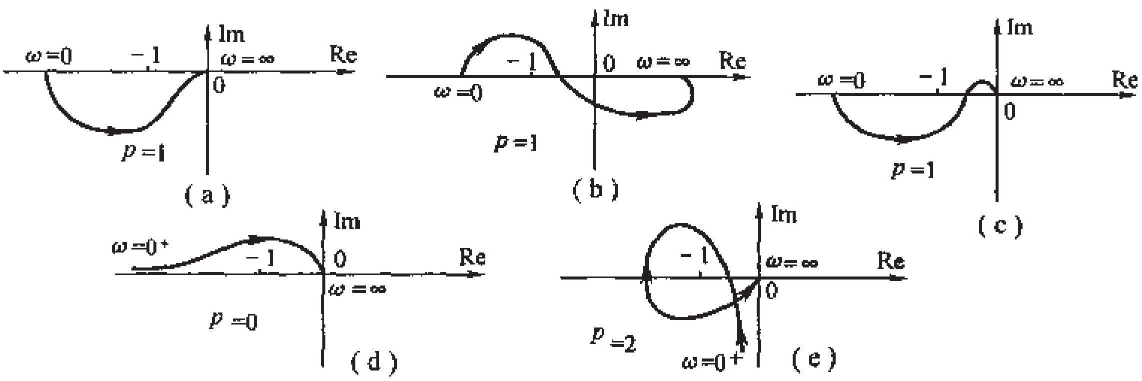
(b) $G(s)=\dfrac{10\left[\left(\frac{1}{80}\right)^2 s^2+2\times0.1\times\frac{1}{80}s+1\right]}{\left(\frac{1}{5}\right)^2 s^2+2\times0.2\times\frac{1}{5}s+1}$;

(c) $G(s)=\dfrac{10^{-4}(25s+1)^2}{s^2}$;

(d) $G(s)=\dfrac{31.62s}{(10s+1)(100+1)}$。

5－27 设控制系统开环频率响应的 Nyquist 图如题 5－27 图所示，试应用 Nyquist 稳定判据判别闭环系统的稳定性。

解 对于(a)，(b)，(c)图，根据系统的开环频率响应当 ω 从 $-\infty$ 变至 0 及从 0 变至 $+\infty$ 时的两部分特性对称于实轴，可将 Nyquist 曲线补全。对于(d)、(e)图，在此基础上，还要将增补的幅频特性补全。



题 5－27 图

(a) $N=-1, P=1, Z=0$，闭环系统稳定；

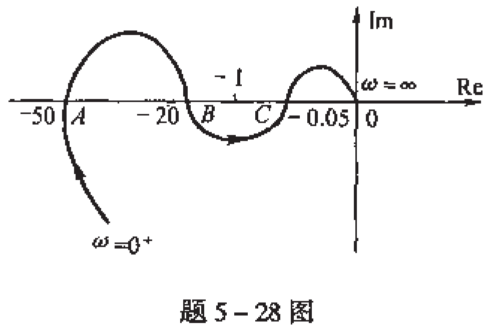
(b) $N=1, P=1, Z=2$，闭环系统不稳定；

(c) $N=-1, P=1, Z=0$，闭环系统稳定；

(d) $N=2, P=0, Z=2$，闭环系统不稳定；

(e) $N=-2, P=2, Z=0$，闭环系统稳定。

5－28 已知某负反馈系统开环频率响应的 Nyquist 图如题 5－28 图所示。该系统的开环增益 $K=500$ 以及在 s 平面右半部的开环极点数 $p=0$。试分析 K 的取值对该闭环系统稳定性的影响。



题 5－28 图

解 改变 K 值只会压缩或扩大该图形，不改变大体的形状。

(1) 当 $K/50=10$，A 点到达 $(-1, 0j)$，则 $K<10$ 时，系统开环频率响应无包围 $(-1, 0j)$ 的正、负穿越，所以闭环系统稳定；

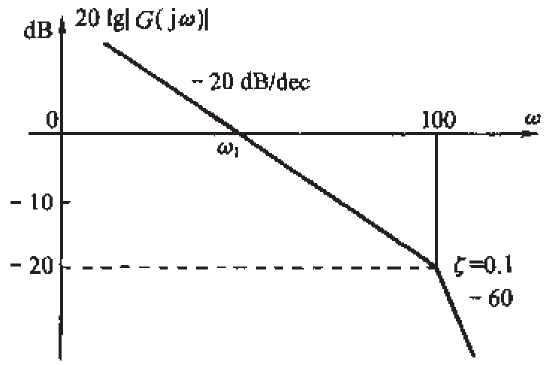
(2) 当 $K/20=25$，B 点到达 $(-1, 0j)$，则 $10<K<25$ 时，系统开环频率响应有包围 $(-1, 0j)$

负穿越一次，所以闭环系统不稳定；

(3)当 $K/0.05=10^4$，C 点到达$(-1,0j)$，则 $25<K<10^4$ 时，系统开环频率响应有包围$(-1,0j)$正、负穿越各一次，所以闭环系统稳定；

(4)当 $K>10^4$ 时，系统开环频率响应有包围$(-1,0j)$正穿越一次、负穿越两次，所以闭环系统不稳定。所以，当 $K<10$ 和 $25<K<10^4$，闭环系统稳定；当 $10<K<25$ 和 $K>10^4$，闭环系统不稳定。

5－29　已知最小相位系统 Bode 图的渐近幅频特性如题 5－29 图所示。试计算该系统的相角裕度及幅值裕度。



题 5－29 图

解　根据该系统 Bode 图的渐近幅频特性低频段知 $K=10\ \mathrm{s}^{-1}$，且开环传函为

$$G(s)=\frac{10}{s(0.01^2s^2+2\times0.01\times0.1s+1)}$$

转折频率处的修正值为 $20\lg\dfrac{1}{2\zeta}=14\ \mathrm{dB}$，根据幅频和相频特性得 $\omega_c=10\ \mathrm{rad/s}$，$\omega_g=100\ \mathrm{rad/s}$。则

(1)$\gamma=180°+\angle G(j\omega_c)=180°+\left(-90°+\arctan\dfrac{0.02}{0.99}\right)=88.8°$；

(2)$20\lg K_g=-20\lg|G(j\omega_g)|=6\ \mathrm{dB}$。

5－30　已知单位负反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{100}{s(Ts+1)}$，试计算当系统的相角裕度 $\gamma=36°$时的 T 值和系统闭环幅频特性的相对谐振峰值M_r。

解　(1)相角裕度 $\gamma=180°+\angle G(j\omega_c)=90°-\arctan T\omega_c=36°$，则 $T\omega_c=\tan54°$。

并且由 $|G(j\omega_c)|=\dfrac{100}{\omega_c\sqrt{1+(T\omega_c)^2}}=1$，得 $\omega_c=58.8\ \mathrm{rad/s}$，则 $T=0.02$。

(2)该单位负反馈系统的闭环传递函数为 $\Phi(s)=\dfrac{100}{s(0.02s+1)+100}=\dfrac{5\,000}{s^2+50s+5\,000}$，则

$$\omega_n=70.7\ \mathrm{rad/s},\ \zeta=0.35$$

相对谐振峰值为

$$M_r=\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}=1.53$$

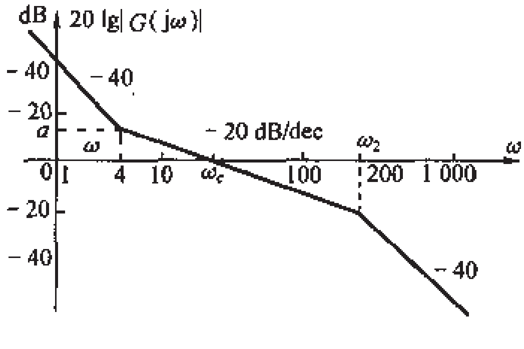
5－31　已知最小相位系统 Bode 图的渐近幅频特性如题 5－31 图所示。试计算该系统在 $r(t)=t^2/2$作用下的稳态误差和相角裕度。

解　由题 5－31 图知该最小相位系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{100(0.25s+1)}{s^2(0.005s+1)}$。

(1)该系统在 $r(t)=t^2/2$ 作用下的稳态误差 $e_{ss}=\dfrac{1}{K_a}=\dfrac{1}{100}=0.01$；

(2)由渐近幅频特性的各频段斜率得$\dfrac{40-a}{\lg1-\lg4}=-40$，$\dfrac{a}{\lg\omega_c-\lg4}=-20$，则初步推断 $\omega_c=25\ \mathrm{rad/s}$，且验证满足 $|G(j\omega_c)|=1$，$\gamma=180°+\angle G(j\omega_c)=180°+\arctan0.25\omega_c-180°-$

$\arctan 0.005\omega_c = 73.7°$。



题 5-31 图

5-32 设单位负反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{7}{s(0.087s+1)}$，试应用频率响应法计算该系统的时域指标：单位阶跃响应的超调量 $\sigma_p\%$ 及调整时间 t_s。

解 该系统的闭环传递函数为 $\Phi(s)=\dfrac{90.5}{s^2+11.5s+90.5}$，则 $\omega_n=9.97\ \text{rad/s}, \zeta=0.58$。

(1)相对谐振峰值为

$$M_r=\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}=1.3$$

单位阶跃响应的超调量 $\sigma_p\% = e^{-\pi\sqrt{\frac{M_r-\sqrt{M_r^2-1}}{M_r+\sqrt{M_r^2-1}}}}\times 100\% = 10.7\%$

(2)谐振峰值为 $\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}=5.7$

调整时间

$$t_s=\frac{1}{\omega_r}\sqrt{\frac{2\sqrt{M_r^2-1}}{M_r-\sqrt{M_r^2-1}}}\cdot\ln\frac{\sqrt{2M_r}}{\Delta\sqrt{M_r+\sqrt{M_r^2-1}}}$$

则当 $\Delta=0.05, t_s=0.553\ \text{s}$，当 $\Delta=0.02, t_s=0.712\ \text{s}$。

5-33 设单位负反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{48(s+1)}{s(8s+1)\left(\frac{1}{20}s+1\right)}$，试计算该系统的剪切频率 ω_c 及相角裕度 γ，并应用经验公式计算该系统的频域指标 M_r 及时域指标 $\sigma_p\%$，t_s。

解 应用 MATLAB 中的 MARGIN 函数画出该系统的 BODE 图，求出剪切频率 $\omega_c\approx 6\ \text{rad/s}$，相角裕度 $\gamma=55°$。应用经验公式计算该系统的频域指标 M_r 及时域指标 $\sigma_p\%$，t_s 有

$$M_r=\frac{1}{\sin\gamma}=1.22$$

$$\sigma_p\% = 0.16+0.4\left(\frac{1}{\sin\gamma}-1\right)=24.8\%$$

$$t_s=\frac{\pi}{\omega_c}\left[2+1.5(M_r-1)+2.5(M_r-1)^2\right]=1.28\ \text{s}$$

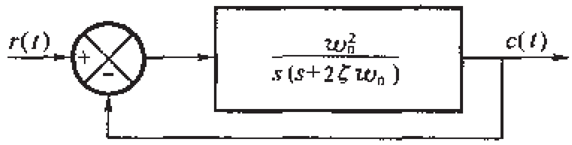
同步训练题

1.系统的结构图如题 1 图所示，当输入 $r(t)=2\sin t$ 时，测得输出 $c(t)=4\sin(t-45°)$，试确定系统的参数 ζ, ω_n。

2.若单位反馈系统的开环传递函数

$$G(s)=\frac{Ke^{-0.8s}}{s+1}$$

试确定使系统稳定的 K 值范围。



题 1 图

3.设单位反馈系统的开环传递函数

$$G(s)=\frac{5s^2e^{-\tau s}}{(s+1)^4}$$

试确定闭环系统稳定时，延迟时间 τ 的范围。

4.对于典型二阶系统，已知 $\sigma\% = 15\%$，试计算相角裕度 γ。

5.设系统的传递函数为

$$G(s)=\frac{K}{s^2(T_1s+1)(T_2s+1)} \quad (T_1,T_2,K>0)$$

试绘制系统概略幅相特性曲线。

6.已知系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{10}{(5s+1)(10s+1)}$$

试用奈氏判据判断系统的闭环稳定性。

7.设最小相位系统对数幅频渐近特性如题 7 图所示，试确定系统的传递函数。

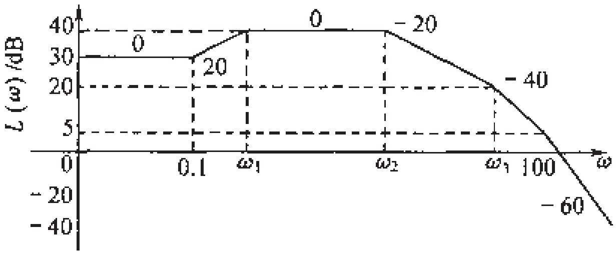
8.已知单位反馈系统的开环传递函数

$$G(s)=\frac{100\left(\frac{s}{2}+1\right)}{s\left(\frac{s}{10}+1\right)\left(\frac{s}{20}+1\right)(s+1)}$$

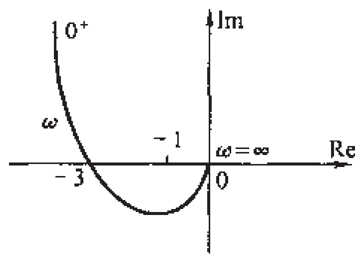
试求系统的相角裕度和幅值裕度。

9.对于高阶系统，若要求时域指标为 $\sigma\% = 18\%$，$t_s = 0.05$，试将其转化成频域指标。

10.某线性系统的开环传递函数为 $G(s)=\frac{K(s+z)}{s(s-p)}$，其中 z,p 为实数，且 $z>0,p>0,K=10$ 时系统的极坐标图如题10图所示，则系统稳定的 K 值范围。



题 7 图



题 10 图

同步训练题答案

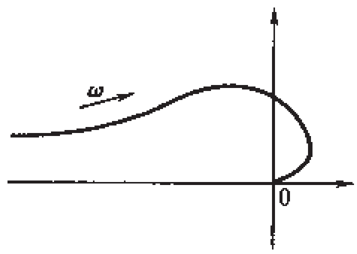
1.解　$\omega_n = 1.244, \zeta = 0.22$。

2.解　$0 < K < 2.65$ 系统稳定。

3.解　$0 < \tau < 1.3685$ 时系统稳定。

4.解　$\gamma = 53.16°$。

5.解　概略幅相特性曲线如题 5 解图所示。



题 5 解图

6.解　系统闭环稳定。

7.解

$$G(s) = \frac{31.62\left(\frac{s}{0.1}+1\right)}{\left(\frac{s}{0.316}+1\right)\left(\frac{s}{3.481}+1\right)\left(\frac{s}{34.81}+1\right)\left(\frac{s}{82.54}+1\right)}$$

8.解　幅值裕度　$h = \frac{1}{G(j\omega_g)} = 0.512$

相角裕度　$\gamma = 180° + \varphi(\omega_c) = -16.1°$

9.解　频域指标为 $\omega_c = 130.75, \gamma = 72.25°$。

10.解　$K > \frac{10}{3}$。