怎么通俗理解 Nyquist 稳定判据?

李狗嗨
数学话题下的优秀回答者

Nyquist判据确实是工程领域的一大利器，突破了劳斯判据和赫尔维兹判据等**代数判据**不能处理带有延时环节系统的瓶颈，在我研究的延时系统中，就需要用到该判据来判断系统的稳定性。与代数判据不同的是，Nyquist判据是一种**几何判据**。

学过控制工程的都应该知道，在 s 域中，线性系统传递函数的一般通式可以写为[1]:

$$F(s)=K\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)} \qquad (1)$$

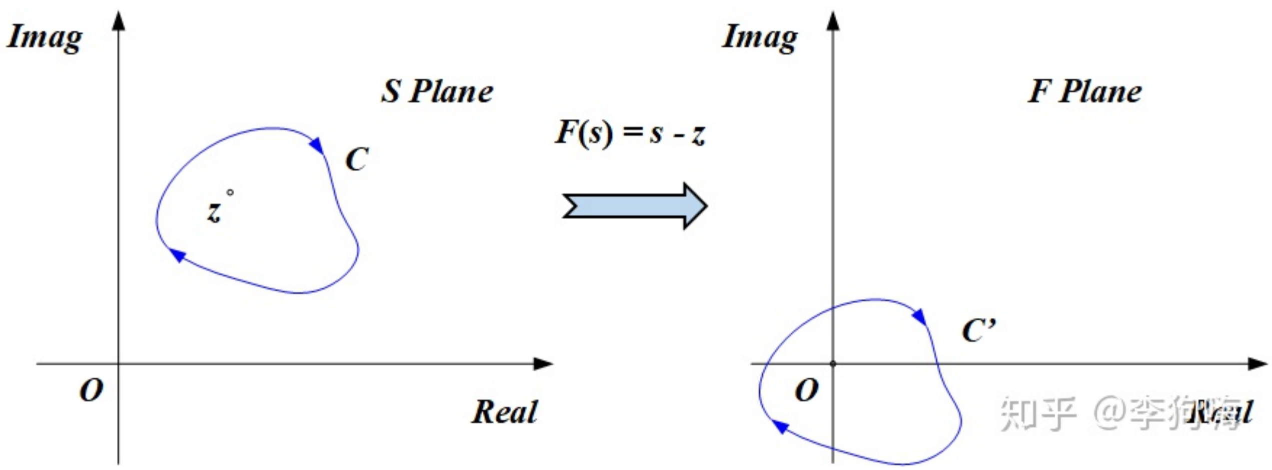
其中， z_i 和 p_i 分别为系统传递函数的零点（Zeros）和极点（Poles），它们既可以是实数也可以是复数。另外，一般来说，式 (1) 中分母的阶次高于分子的阶次，即 $n>m$ 。

想理解Nyquist判据，最重要的是要明白“**映射定理**”，该定理是从单个零点的系统开始到多个零点的系统，再到单个极点的系统，以及多个极点的系统，最终推导到一般化的系统模型。下面介绍“**映射定理**”。

1. 单个零点系统 $F(s)=s-z$

z 是系统的零点，如果其为复数，那么显然其可以表达为复平面，也就是所谓 S 平面中的一点。现在我们要做的一件事是，**绕着**这个零点**顺时针**画一个**封闭曲线** C 。其中，“绕着”意味着，不穿过该点，即 z 点不在该封闭曲线上。

那么 $F(s)=s-z$ 就将这个复平面上的所有点都映射到了所谓 F 平面上，如下图：



单个零点的映射

注意一点：自变量是 s ，即自变量 s 取一系列值，这些值按顺序连起来构成了顺时针的封闭曲线 C 。

所以在复平面内的那条封闭曲线 C 通过 $F(s)=s-z$ 映射的效果其实就是复平面上的所有点都沿着 $-z$ 平移，最后封闭曲线 C 经过平移得到了封闭曲线 C' 。例如，原来复平面上的 z 点沿着 $-z$ 平移到了坐标原点上。

那么在映射后的 F 平面上，原本绕 z 点**顺时针一圈**的封闭曲线 C 对应的就是绕着原点 O **顺时针一圈**的封闭曲线 C' ，也可以说封闭曲线 C' 从起点到终点**相对原点**的**相位增量**为 -2π （因为一般规定逆时针旋转，相位增大）。

同样可以推知，如果在复平面中， z 点不在该封闭曲线 C 的包围圈内，那么对应的 F 平面中，封闭曲线 C' 也不围绕原点，也可以说封闭曲线 C' 从起点到终点**相对原点**的**相位增量**为 0 。

2. 多个零点系统 $F(s)=\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)$

其实，和单个零点类似，只是将零点数目增多了而已。现在系统包含 m 个零点，然后顺时针画了一个封闭曲线 C ，但封闭曲线 C 仅包围了其中的 k 个零点（ $k \le m$ ），那么经过映射后，在 F 平面中，封闭曲线 C' 将会**顺时针绕原点 k 圈**。也可以说封闭曲线 C' 从起点到终点**相对原点**的**相位增量**为 $-2k\pi$ 。

3. 单个极点系统 $F(s)=\frac{1}{s-p}$

类比单个零点的情况， $\frac{1}{s-p}$ 与 $s-p$ 的相位互为相反数，这意味着，在映射后的 F 平面上，原本绕 z 点**顺时针一圈**的封闭曲线 C 对应的就是绕着原点 O **逆时针一圈**的封闭曲线 C' ，也可以说封闭曲线 C' 从起点到终点**相对原点**的**相位增量**为 2π 。

4. 多个极点系统 $F(s)=\frac{1}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$

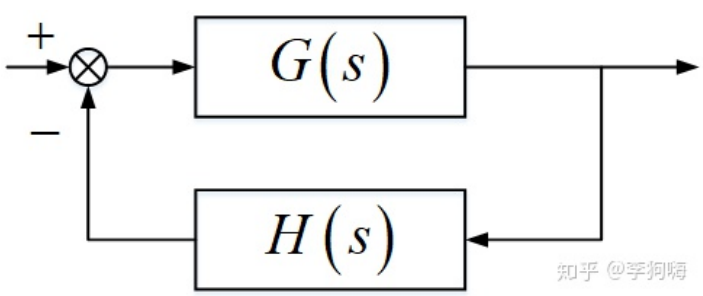
和单个极点类似，只是将极点数目增多了而已。现在系统包含 n 个极点，然后顺时针画了一个封闭曲线 C ，但封闭曲线 C 仅包围了其中的 l 个极点（ $l \le n$ ），那么经过映射后，在 F 平面中，封闭曲线 C' 将会**逆时针绕原点 l 圈**。也可以说封闭曲线 C' 从起点到终点**相对原点**的**相位增量**为 $2l\pi$ 。

综合 2 和 4，就可以知道：

> 复平面（或称 S 平面）上，封闭曲线 C 如果顺时针包围了系统传递函数的 k 个零点和 l 个极点，那么在 F 平面中，封闭曲线 C' 将逆时针绕着原点 $l-k$ 圈，这就是所谓“映射定理”。

负反馈系统

常见的负反馈系统可以用下图表示：



负反馈系统

其闭环传递函数为：

$$\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \tag{2}$$

其中 $G(s)$ 为前项通道传递函数； $H(s)$ 为反馈通道传递函数； $G(s)H(s)$ 为开环传递函数。

设 $G(s)=\dfrac{N_1(s)}{D_1(s)}$ ，$H(s)=\dfrac{N_2(s)}{D_2(s)}$. 其中 $N_1(s),D_1(s),N_2(s),D_2(s)$ 均为 s 的多项式。

系统的开环传递函数为：

$$G(s)H(s)=\frac{N_1(s)N_2(s)}{D_1(s)D_2(s)} \tag{3}$$

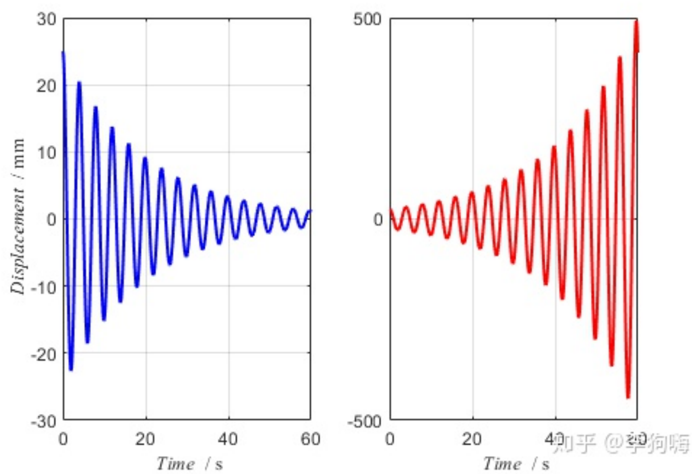
系统的闭环传递函数为：

$$\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}=\frac{N_1(s)D_2(s)}{D_1(s)D_2(s)+N_1(s)N_2(s)} \tag{4}$$

我们最终需要知道是闭环系统的稳定性。

> 闭环系统稳定的充要条件是闭环系统传递函数在复平面（或 S 平面）的右半平面上没有极点。

该定理的验证可以通过拉式反变换来证明。如果系统传递函数包含复平面右半平面的极点，那么拉式反变换后，时域信号中将包含以时间为自变量的正指数项，这些项随时间指数最大，系统显然不稳定。要使系统稳定，则要求极点都在负半平面，那么拉式反变换后，时域信号中将包含以时间为自变量的负指数项，这些项随时间指数衰减，系统最终趋于稳定。



稳定系统（左）与不稳定系统（右）的时域响应

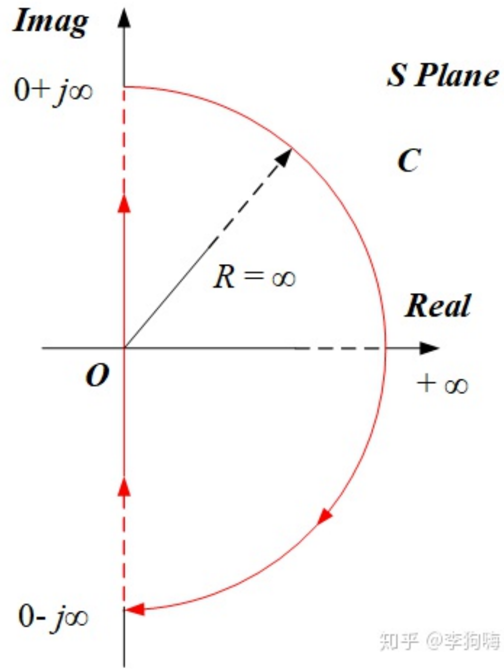
由式 (4) 知，**闭环系统**稳定的充要条件是 $D_1(s)D_2(s)+N_1(s)N_2(s)$ 没有**右半平面的零点**。

现在定义：

$$F(s)=1+G(s)H(s)=\frac{D_1(s)D_2(s)+N_1(s)N_2(s)}{D_1(s)D_2(s)} \tag{5}$$

注意，分子和分母分别为**闭环**和**开环**传递函数的特征多项式（其实分别是闭环和开环传递函数的分母）。

那么，在 S 平面上，如果有一条顺时针闭合曲线 C 包围了整个 S 右半平面（如下图），那么经过 $F(s)$ 的映射后，可以根据 F 平面上的闭合曲线 C' 包围原点的方向和圈数来判断系统稳定性。



包围复右半平面的封闭曲线

> 假设闭环系统稳定，则曲线 C 包围 $F(s)$ 的零点的个数为零。如果**系统开环没有右极点**，则曲线 C' 不围绕原点；如果**系统开环有右极点**，则曲线 C' 应该逆时针围绕原点，且围绕的圈数等于开环系统右极点的个数。

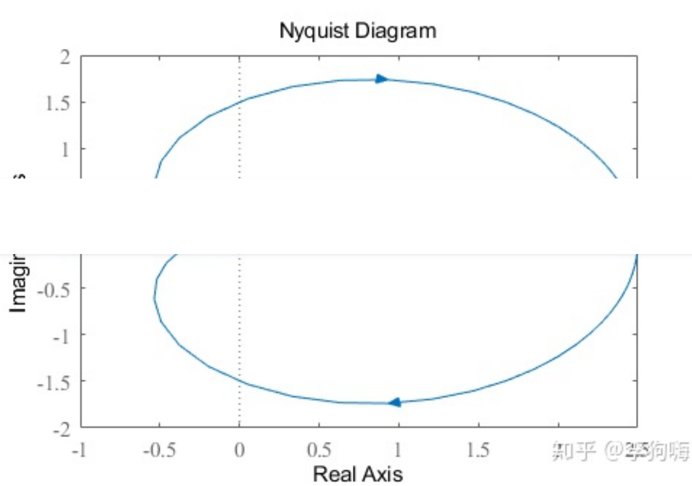
由于 $F(s)$ 是开环传递函数 $G(s)H(s)$ 加 1 ，所以 C' 包围原点的圈数也就是曲线 C 经过开环传递函数 $G(s)H(s)$ 映射后包围 $(-1, j0)$ 点的圈数。

在通过开环传递函数 $G(s)H(s)$ 映射的时候，其实只需要取 s 从 $-j\infty$ 到 $+j\infty$ 变化即可，这点很重要，因为原曲线 C 在图示半圆部分趋于无穷大，如果开环传递函数分母的阶数高于分子的阶数，则半圆处无穷远的点将映射到坐标原点。

例子

1、如果一个闭环系统，其对应的开环传递函数为： $\dfrac{15}{(s+1)(s+2)(s+3)}$ ，判断闭环稳定性。

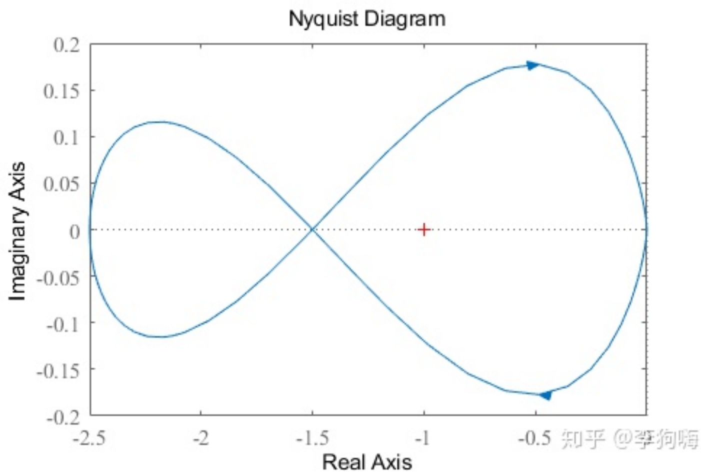
其Nyquist图如下：



由于开环传递函数无右极点，且Nyquist图没有包围 $(-1, j0)$ 点，所以对应的闭环系统稳定。

2、如果一个闭环系统，其对应的开环传递函数为： $\dfrac{15}{(s-1)(s+2)(s+3)}$ ，判断闭环稳定性。

其Nyquist图如下：



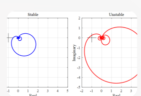
由于开环传递函数有一个右极点，且Nyquist图顺时针包围（$-1, j0$）点一圈，根据稳定条件，应当需要逆时针包围（$-1, j0$）点一圈，所以对应的闭环系统不稳定。

Matlab 代码

```
clc
clear
close all
s1 = zpk(
figure(1)
nyquist(s

set(gcf,'
set(gca,'

s2 = zpk(
figure(2)
nyquist(s2);

set(gcf,'unit','centimeters','position',[0 10 13.53 9.03],'color','white');
set(gca,'FontSize', 11 ,'FontName', 'Times New Roman')
```


更多内容请见：

李狗嗨：Nyquist判据基本原理及在延时系统中的应用
zhuanlan.zhihu.com



参考

1. ^ 董景新, 赵长德, 郭美凤等. 控制工程基础(第3版)[M], 清华大学出版社, 2009.

编辑于 2019-11-12