线性代数

一、选择题：1～5 小题，每小题 5 分，共 25 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

（1）设 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}5&3&0&\cdots&0&0\\2&5&3&\cdots&0&0\\0&2&5&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&5&3\\0&0&0&\cdots&2&5\end{vmatrix}$，则 $\dfrac{D_n-3D_{n-1}}{D_{n-1}-3D_{n-2}}=$ （　　）

（A）1.　　（B）2.　　（C）3.　　（D）4.

（2）设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&\dots&0\\0&0&1&\dots&0\\0&0&0&\ddots&\vdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\dots&1\\0&0&0&\dots&0\end{pmatrix}$，记 $\boldsymbol{W}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{n-1}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位阵，则 $\boldsymbol{W}^{-1}=$ （　　）

（A）$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$.　　（B）$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$.　　（C）$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{E}$.　　（D）$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}$.

（3）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 为 n 阶可逆阵，则下列命题中错误的是 （　　）

（A）若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BQ}$，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价.

（B）若 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价.

（C）若 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{QB}$，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价.

（D）若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PBQ}$，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的列（行）向量组等价.

（4）已知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_{3\times3})=1$，非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{3\times3}x=\boldsymbol{b}$ 有解 $\boldsymbol{\xi}_1=(2,0,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=(4,2,-1)^{\mathrm{T}}$，则下列向量中也一定是 $\boldsymbol{A}x=\boldsymbol{b}$ 的解向量的是 （ ）

（A）$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,2,0)^{\mathrm{T}}$.　　（B）$\boldsymbol{\alpha}_2=(3,1,-1)^{\mathrm{T}}$.

（C）$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$.　　（D）$\boldsymbol{\alpha}_4=(2,1,-2)^{\mathrm{T}}$.

（5）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_{33}&a_{32}&a_{31}\\a_{23}&a_{22}&a_{21}\\a_{13}&a_{12}&a_{11}\end{pmatrix}$，则下面说法

①$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$.　②$\boldsymbol{A}$ 等价于 $\boldsymbol{B}$.　③$\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$.　④$\boldsymbol{A}$ 合同于 $\boldsymbol{B}$.

中正确的个数是 （ ）

（A）1.　（B）2.　（C）3.　（D）4.

二、填空题：6～10 小题，每小题 5 分，共 25 分.

（6）设方程 $D_4=\begin{vmatrix}a&b&c&x\\a&b&x&c\\a&x&b&c\\x&a&b&c\end{vmatrix}=0$，则 $x=$________.

（7）已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个不同特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，则

$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\lambda_2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\lambda_3\boldsymbol{E})=$________.

（8）设 $\boldsymbol{A}_{(n-1)\times n}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n-1,1}&a_{n-1,2}&\cdots&a_{n-1,n}\end{pmatrix}$，将 $\boldsymbol{A}$ 中划去第 i 列元素后记为

$\boldsymbol{A}_i,i=1,2,\cdots,n.$ 其中 $|\boldsymbol{A}_i|,i=1,2,\cdots,n$ 不全为零，则方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解为________.

（9）设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶方阵，由特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 对应两个线性无关特征向量分别是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$，$\lambda_3=-1$ 对应特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$，若取 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3)$，则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=$________.

（10）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，若 $k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 正定，则 k 应满足的条件为________.

三、解答题：**10～15** 小题，共 **50** 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（11）（本题满分 10 分）

已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\4&1&3\\-6&-2&-4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 问是否存在可逆阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{\Lambda}$，若不存在，说明理由；若存在，求出可逆阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{\Lambda}$.

（12）（本题满分 10 分）

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$. $\boldsymbol{X}$ 是二阶方阵，满足 $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为二阶单位阵，求 $\boldsymbol{X}$.

（13）（本题满分 10 分）

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均是 n 阶方阵，满足 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})+\mathrm{r}(\boldsymbol{C})=n$，$\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{C}=\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-2\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}$.

证明：$\boldsymbol{A}$ 必可相似于对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，并求出该对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 及 $\left|\boldsymbol{A}\right|$.

（14）（本题满分 10 分）

设 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 经正交变换化为 $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$，又知 $\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}=\left(1,1,-1\right)^{\mathrm{T}}$，求该二次型的表达式.

（15）（本题满分 10 分）

（Ⅰ）设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵，存在 n 维非零列向量 $\boldsymbol{\xi}_0$ 使得 $\boldsymbol{\xi}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_0>0$，证明 $\boldsymbol{A}$ 有大于零的特征值；

（Ⅱ）设 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3+4x_1x_3$，求一个 $\boldsymbol{\xi}$，使得 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}>0$.