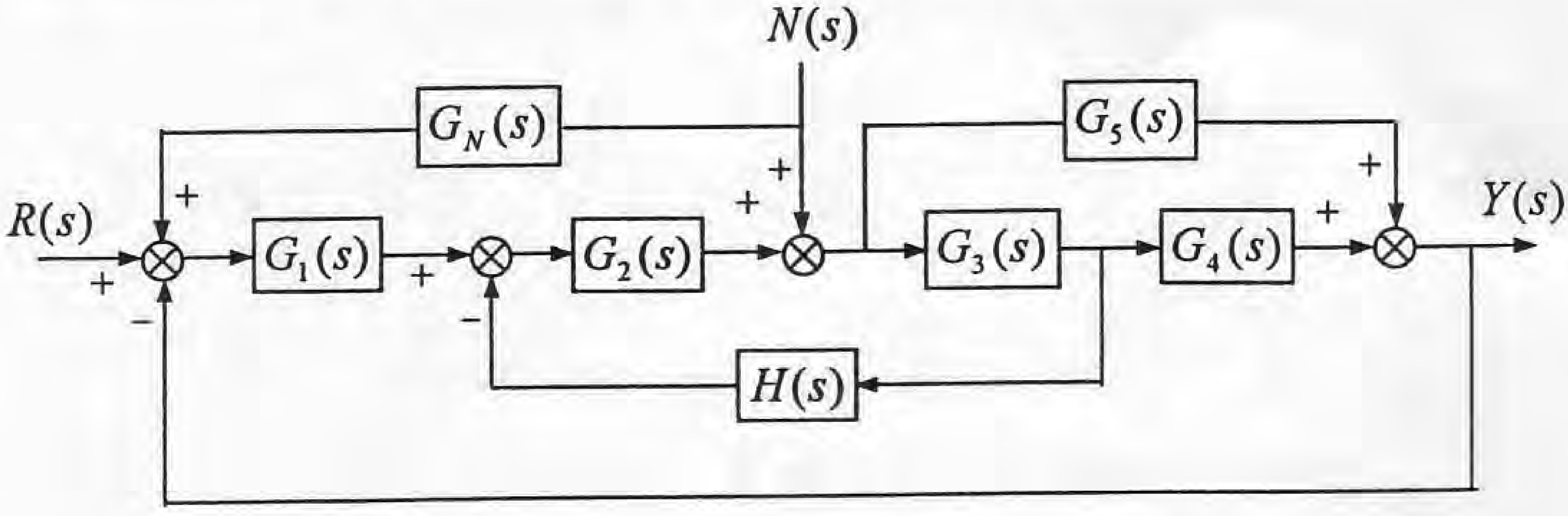
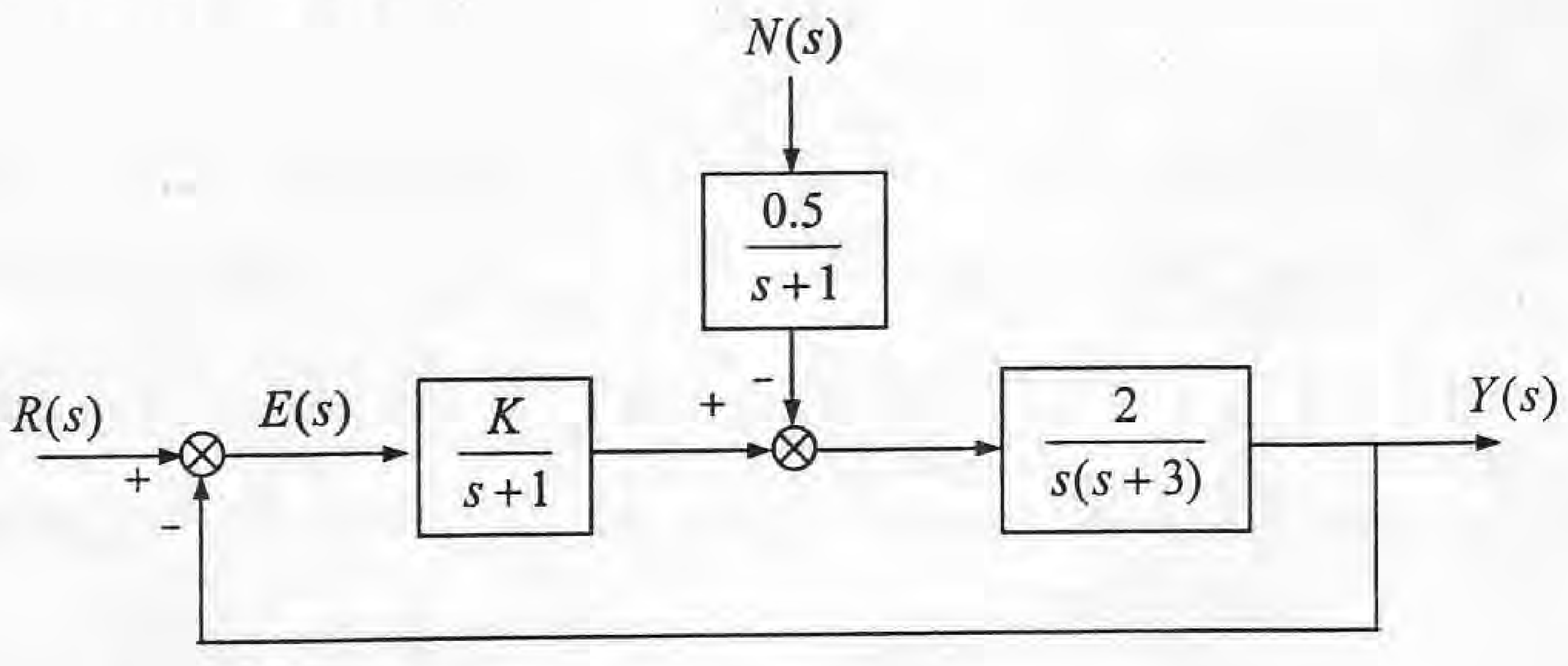
试题名称：　　　　自动控制理论

一、(20 分) 控制系统方块图如下图所示。试用化简方块图方法，求闭环传递函数 $Y(s)/R(s)$ 和 $Y(s)/N(s)$。



二、(22 分) 控制系统如下图所示，设输入信号 $r(t)=2t$，干扰信号 $n(t)=1(t)$。



1. 试确定系统的稳态误差 e_{ss}。
2. 若要求系统的稳态误差 $e_{ss}\le 0.1$，试提出达到这一稳态性能指标的方法。

三、(24 分) 设单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{k(s+1)}{s(s+2)(s+3)}$$

1. 绘制系统的根轨迹图(不要求求出分离点)。
2. 已知系统的一个闭环极点为-0.9，试求出其余的闭环极点。
3. 该系统是否可以用低阶系统来近似？若能，则求出它的闭环传递函数；若否，则给出理由。

四、(24 分) 已知单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{10(5s+1)}{s^2(2s+1)(0.2s+1)}$$

1. 画出$G(s)$的完整奈氏图，用奈氏稳定判据判断闭环系统的稳定性。
2. 如果系统不稳定，试设计一串联校正装置，使闭环系统稳定。画出相应的完整奈氏图，并给出校正装置的参数。

五、(20 分) 已知两单输入单输出系统的状态空间方程分别是:

$$S_1:\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}_1=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{b}_1u_1\\ y_1=\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{x}_1+d_1u_1\end{cases},\qquad S_2:\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}_2=\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{b}_2u_2\\ y_2=\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{x}_2+d_2u_2\end{cases}$$

1. 将它们负反馈联接，即：$u_2=y_1$，$u_1=v-y_2$，试以v为输入，$y=y_1$为输出，$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{x}_2\end{bmatrix}$为状态，求反馈系统的状态空间方程；
2. 当$A_1=-1,b_1=1,c_1=1,d_1=1$，$A_2=-2,b_2=1,c_2=1,d_2=0$，$x_1(0)=1,x_2(0)=-1$，且输入v是幅值为 2 的阶跃信号时，求状态$x(t)$的表达式及输出$y(3)$的值。

六、(24 分)已知系统的动态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 - 3x_2 + 2u \\ y = x_1 - x_2 \end{cases}$$

1. 判断系统的渐近稳定性和 BIBO 稳定性;
2. 若可能,设计状态反馈使闭环系统的极点位于 $-2 \pm j2$;
3. 当系统的状态不可直接量测时,若可能,设计极点均位于-6 处的最小维状态观测器;
4. 用你得到的观测状态实现你设计的状态反馈,给出实现你所设计的复合系统结构图。

七、(16 分)对 n 维线性定常单输入－单输出系统:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u$$

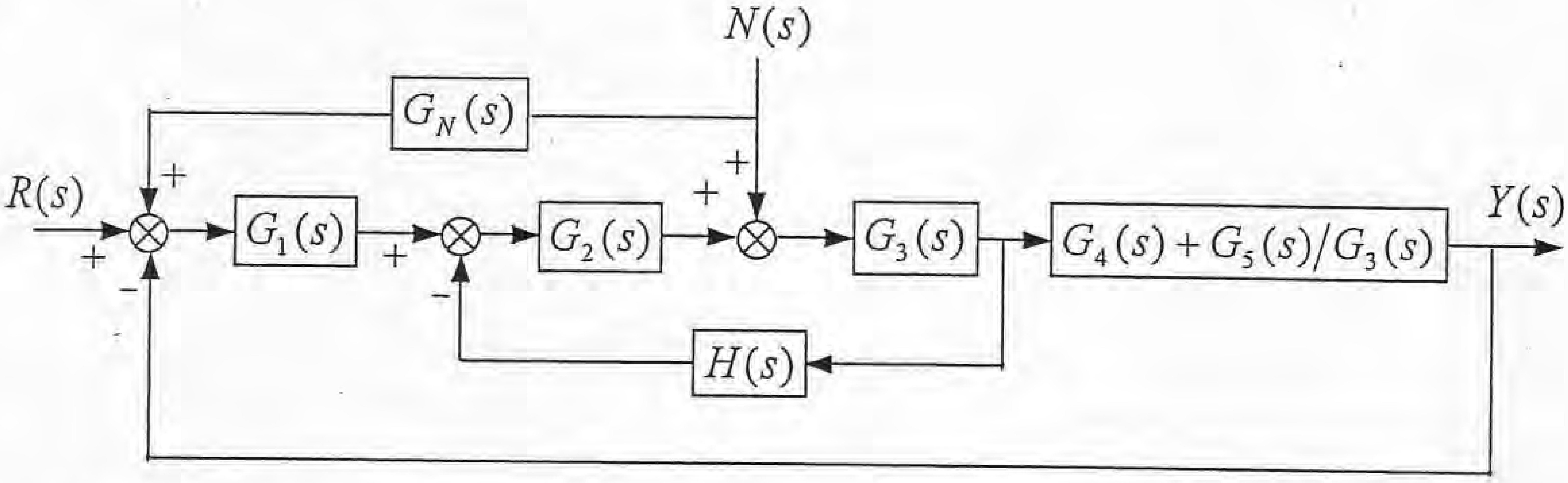
$$y = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}$$

1. 已知 $\boldsymbol{c}\boldsymbol{A}^i\boldsymbol{b} = 0, (i = 1, 2, \cdots, n-2)$,但 $\boldsymbol{c}\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b} \neq 0$,试证明该系统是既能控又能观的;
2. 证明该系统的传递函数是:

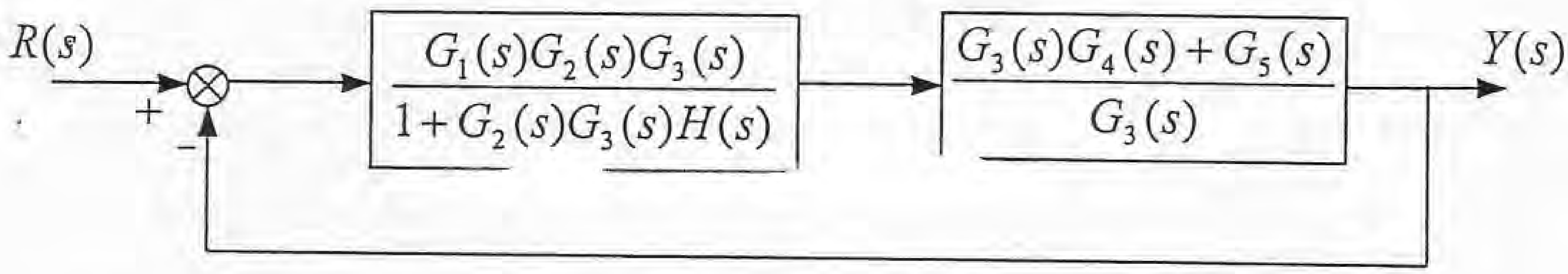
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) - \det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} - \boldsymbol{b}\boldsymbol{c})}{\det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})}$$

试题名称： 自动控制理论

一、

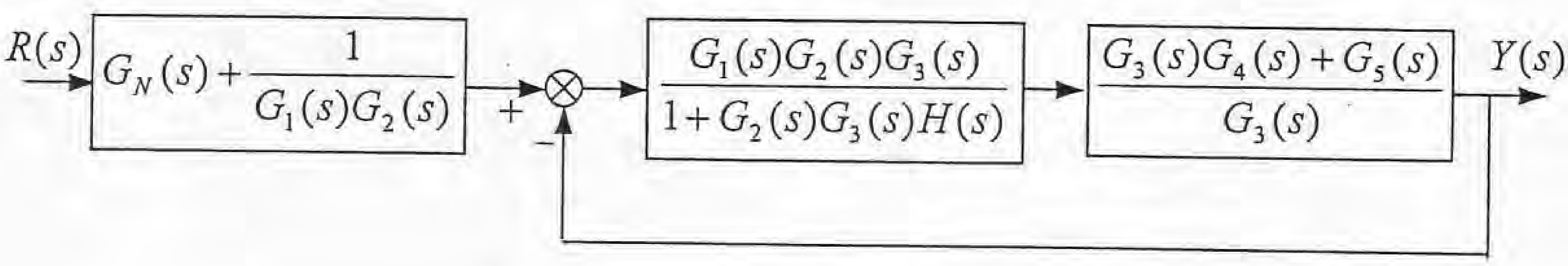


1. $R(s)\neq 0$，$N(s)=0$



$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{G_1(s)G_2(s)[G_3(s)G_4(s)+G_5(s)]}{1+G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)+G_2(s)G_3(s)H(s)+G_1(s)G_2(s)G_5(s)}$$

2. $R(s)=0$，$N(s)\neq 0$



$$\frac{Y(s)}{N(s)}=\frac{[G_N(s)G_1(s)G_2(s)+1][G_3(s)G_4(s)+G_5(s)]}{1+G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)+G_2(s)G_3(s)H(s)+G_1(s)G_2(s)G_5(s)}$$

二、

1. $R(s)=\frac{2}{s^2}$，$N(s)=\frac{1}{s}$

$$e_{ssR}=\frac{2}{K_v}=\frac{3}{K}$$

$$E_N(s)=\frac{1}{s(s+1)(s+3)+2K}\cdot N(s)$$

$$\therefore\ e_{ssN}=\lim_{s\to 0}sE_N(s)=\frac{1}{2K}$$

$$\therefore\ e_{ss}=e_{ssR}+e_{ssN}=\frac{7}{2K}$$

但为保证系统闭环稳定，必须要满足$0<K<6$。

2. $\because\ e_{ss}=\frac{7}{2K}\le 0.1 \quad \Rightarrow \quad K\ge 35$

为保证系统闭环稳定，可在系统的前向通道、扰动的作用点之前，加一比例-微分控制器，取$K(s)=s+2$，使闭环系统在$K>0$ 时均能稳定。

取$K\ge 17.5$，即满足稳态性能要求。

三、

1. 渐近线：2条；

$$\theta_a = \pm 90^\circ;$$

$$-\sigma_a = -2$$

根轨迹图：略。

2. 已知：$-\lambda_1 = -0.9 \quad \Rightarrow \quad k = 20.79$

设其它二个闭环极点为$-\lambda_2$、$-\lambda_3$

则$-\lambda_{2,3} = -2.05 \pm j4.35$

3. $-\lambda_1 = -0.9$和$-z = -1$构成一对闭环偶极子

故系统可降阶为二阶系统。其闭环闭环传递函数为

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{20.79(s+1)}{(s+0.9)(s+2.05+j4.35)(s+2.05-j4.35)} \approx \frac{23.1}{s^2+4.01s+23.5}$$

四、

1. 开环传递函数$G(s)$的完整奈氏图：略。

设$G(s)$的幅相特性与负实轴的交点为a，求出该点的坐标：

据 $\angle G(j\omega_a) = -180^\circ \quad \Rightarrow \quad \omega_a^2 = 1.4$

$\Rightarrow \quad |G(j\omega_a)| = 16.5$

故（-1, j0）点位于（-a, 0）之间，$G(s)$的奈氏图顺钟向包围(-1, j0)点两次，有

$$n_c = N + n_0 = 2$$

故闭环系统不稳定

2. 设计比例-微分控制器$K(s) = 1 + Ts \quad (T > 0.2)$。

取$T = 2$，校正后系统的完整奈氏图：略..

则$G(s)K(s)$的封闭轨迹以顺钟向和反钟向各包围(-1, j0)点两次，故$n_c = 0$，闭环系统稳定。

六、$A=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}$; $b=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$; $c=\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}$

1. 由 $\det(\lambda \boldsymbol{I}-A)=0$ 可解得：系统的两个特征值分别为 $\lambda_1=-5, \lambda_2=-1$ 均具有负实部，故系统渐近稳定，当然也是 BIBO 稳定的。

2. 因 $Mc=[\,b \;\; Ab\,]=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -5\end{bmatrix}$ 满秩，故系统能控，可用状态反馈任意配置系统的闭环极点。设实现题目要求的状态反馈为 $u=v-\boldsymbol{kx}$，则

$$\det(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{bk})=(\lambda+2-j2)(\lambda+2+j2)=\lambda^2+4\lambda+8$$

$$=\det\left(\begin{bmatrix}\lambda+2-k_1 & -1-k_1\\ -1-2k_2 & \lambda+3-2k_2\end{bmatrix}\right)=\lambda^2+(5-k_1-2k_2)\lambda+(5-4k_1-6k_2)$$

解得：$k_1=-6$，$k_2=3.5$ 即题目要求的状态反馈为

$$u=v-[-6 \quad 3.5\,]\boldsymbol{x}$$

3. 因 $Mo=\begin{bmatrix}c\\ cA\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -3 & 4\end{bmatrix}$ 满秩，故系统能观，可以用状态观测器实现状态观测。又因 c 的秩为 1，故最小维状态观测器应为 1 维，取

$$Q=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}, \qquad 则 \quad Q^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\overline{A}=QAQ^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & -4\end{bmatrix};\; \overline{b}=Qb=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix};\; \overline{c}=cQ^{-1}=[\,0 \quad 1\,]$$

即

$$\dot{\overline{x}}_1=-\overline{x}_1-\overline{x}_2+u,\; \dot{\overline{x}}_2=\overline{x}_1-4\overline{x}_2-u,\; y=\overline{x}_2$$

或

$$\dot{\bar{x}}_1 = -\bar{x}_1 - y + u, \quad \bar{y} = \bar{x}_1 = \dot{y} + 4y + u$$

在上式中以 $u-y$ 为输入，$\bar{x}_1$ 为状态 w，$\bar{y} = \bar{x}_1 = \dot{y} + 4y + u$ 为输出构造等维观测器：

$$\dot{w} = (-1-L)w + L(\dot{y} + 4y + u) + u - y, \quad \hat{\bar{x}}_1 = w$$

其中 $(-1-L)$ 是观测器的极点，故 $L=5$

为消去微分项令 $z = w - Ly$，则

$$\dot{z} = (-1-L)z + (3L - L^2 - 1)y + (L+2)u$$

即 $\dot{z} = -5z - 11y + 7u$ 而

$$\hat{x} = Q^{-1}\begin{bmatrix} \hat{\bar{x}}_1 \\ \hat{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = Q^{-1}\begin{bmatrix} w \\ y \end{bmatrix} = Q^{-1}\begin{bmatrix} z + Ly \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z + 5y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} y$$

上两式就是要求的观测器

$$\dot{z} = -5z - 11y + 7u, \quad \hat{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} y$$

4. 图略

七、1. 系统的的能控性矩阵 Mc 和能观性矩阵 Mo 分别是

$$Mc=[\,B \quad AB \quad A^2B \ \cdots \ A^{n-1}B\,] \qquad Mo=\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$MoMc=\begin{bmatrix} CB & CAB & CA^2B & \cdots & CA^{n-1}B \\ CAB & CA^2B & CA^3B & \cdots & CA^nB \\ CA^2B & CA^3B & CA^4B & \cdots & CA^{n+1}B \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ CA^{n-1}B & CA^nB & CA^{n+1}B & \cdots & CA^{2n-2}B \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & CA^{n-1}B \\ 0 & 0 & 0 & CA^{n-1}B & * \\ 0 & 0 & CA^{n-1}B & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ CA^{n-1}B & * & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

这是一个下三角矩阵，反对角线上元素全非零当然矩阵满秩。根据矩阵理论必有 Mo、Mc 均满秩。所以系统既能控又能观。

2. 系统$\{A, b\ c\}$的传递函数为： $G(s)=c(sI-A)^{-1}b=N(s)/D(s)$

其分母（首一多项式）是 $D(s)=\det(sI-A)$

今构造单位输出正反馈： $u=v+y$

于是，闭环系统的状态空间方程为： $\dot{x}=(A+bc)x+bv$； $y=cx$

它的传递函数当然是： $G_O(s)=c(sI-A-bc)^{-1}b=N_O(s)/D_O(s)$

其分母（首一多项式）是 $D_O(s)=\det(sI-A-bc)$

而 G(s)与 Go(s)间有关系：

$$G(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{G_O(s)}{1+G_O(s)}=\frac{N_O(s)}{D_O(s)+N_O(s)}=\frac{D(s)-D_O(s)}{D(s)}$$

将上述结果代入之就是所要的。