一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求.

(1) 设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$, 则在 $x=a$ 处（　　）

(A) $f(x)$ 的导数存在,且 $f'(a)\neq 0$　　(B) $f(x)$ 取得极大值

(C) $f(x)$ 取得极小值　　(D) $f(x)$ 的导数不存在

(2) 设 $y=f(x)$ 由 $y-x=e^{x(1-y)}$ 确定，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right)-1\right]$ 的值为（　　）

(A) 1　　(B) 2　　(C) 0　　(D) -1

(3) 设 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充要条件为（　　）

(A) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cos h)}{h^2}$ 存在　　(B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\mathrm{e}^h)}{h}$ 存在

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sin h)}{h^2}$ 存在　　(D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h)-f(h)}{h}$ 存在

(4) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0,\\ x^2 g(x), & x\le 0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 是有界函数，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处(　　).

（A）极限不存在　　（B）极限存在但不连续

（C）连续但不可导　　（D）可导

(5) 设 $y=f(x)$ 是方程 $y''-2y'+4y=0$ 的一个解，且 $f(x_0)>0, f'(x_0)=0$，则函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处（　　）

(A) 取得极大值　　(B) 取得极小值

(C) 某邻域内单调增加　　(D) 某邻域内单调减少

(6) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导函数的图形如图所示，

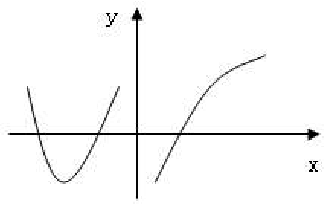
则 $f(x)$ 有(　　).

（A）一个极小值点和两个极大值点

（B）两个极小值点和一个极大值点

（C）两个极小值点和两个极大值点

（D）三个极小值点和一个极大值点



(7) 曲线 $y=e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}$ 的渐近线有(　　).

(A) 1 条　　（B）2 条　　（C）3 条　　（D）4 条

(8) 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，当自变量 x 由 x_0 增加到 $x_0+\Delta x$ 时，记为 $f(x)$ 的增量 Δy，dy 为 $f(x)$ 的微分，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y-dy}{\Delta x}$ 等于（　　）

(A) -1　　(B) 0　　(C) 1　　(D) ∞

二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

(9) 已知曲线 $y=f(x)$ 在 $\left(3,f(3)\right)$ 处的切线斜率为 2，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{2h}=$ ____________.

(10) 已知 $y=f\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)$，$f'(x)=\arctan x^2$,则 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=$ _________

(11) 设可导函数 $y=f(x)$ 有反函数 $g(x)$，且 $f(a)=3$，$f'(a)=1$，$f''(a)=2$，则 $g''(3)=$ ___________.

(12) 设函数 $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$，则 $y^{(99)}(0)=$ _________.

(13) 若曲线 $y=x^3+ax^2+bx+1$ 有拐点 $(-1,0)$，则 $b=$ ________.

(14) 曲线 $y=\dfrac{x^2+1}{x}e^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线为________.

三、解答题：15~23 小题，共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) （本题满分 10 分）设 $y=(1+x^2)^{\arctan x}$，求 y'.

(16)（本题满分 10 分）设 $f(x)=\begin{cases} ax+b, & x<0 \\ \ln(1+2x), & x\geq 0 \end{cases}$，且 $f'(0)$ 存在，求 a,b 的值.

(17)（本题满分 10 分）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y\ln y-x+y=0$ 确定，试判断曲线 $y=y(x)$ 在点 $(1,1)$ 附近的凹凸性.

(18)（本题满分 10 分）证明：当 $0<x<1$ 时，$\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}<\dfrac{\ln(1+x)}{\arcsin x}$.

(19)（本题满分 10 分）设 $\mathrm{e}<a<b<\mathrm{e}^2$，证明 $\ln^2 b-\ln^2 a>\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}(b-a)$.

(20)（本题满分 11 分）设 $0<a<1$，证明：方程 $\arctan x=ax$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且仅有一个实根.

(21)（本题满分 11 分）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-\xi}=f'(\xi)$

(22)（本题满分 11 分）已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0, f(1)=1$，证明：

（I）存在一点 $c\in(0,1)$，使 $f(c)=1-c$.

（II）存在两个不同的点 $\xi,\eta\in(0,1)$ 使得 $f'(\xi)f'(\eta)=1$

(23)（本题满分 11 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的二阶导函数，且满足 $f(0)=f(1)$，又 $|f''(x)|\leq M$，证明：$|f'(x)|\leq\dfrac{M}{2}$.