概率测试答案与解析

一、选择题

1．【答案】C.

【解析】因为

$$P(ABC)=P(\overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}})=P(\overline{\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}})=1-P(\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}),$$
$$=1-\left[P(\overline{A})+P(\overline{B})+P(\overline{C})-P(\overline{A}\,\overline{B})-P(\overline{B}\,\overline{C})-P(\overline{C}\,\overline{A})+P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})\right],$$

整理，得

$$P(AB)+P(BC)+P(CA)-2P(ABC)=P(A)+P(B)+P(C)-1=0.5.$$

2．【答案】B.

【解析】$X\sim Ge(p)$，则$P\{X=1\}=p$，所以$p=0.6$.

【思路一】利用几何分布的无记忆性：对任意正整数s,t， 有

$$P\{X>s+t\mid X>t\}=P\{X>s\}.$$

所以

$$\begin{aligned}P\{X=4\mid X>2\}&=P\{X>3\mid X>2\}-P\{X>4\mid X>2\}\\&=P\{X>1\}-P\{X>2\}=P\{X=2\}\\&=0.4\times0.6=0.24.\end{aligned}$$

【思路二】

$$\begin{aligned}P\{X=4\mid X>2\}&=\frac{P\{X=4,X>2\}}{P\{X>2\}}=\frac{P\{X=4\}}{1-P\{X\le 2\}}\\&=\frac{0.6\times0.4^3}{1-0.6-0.6\times0.4}=0.24.\end{aligned}$$

3．【答案】A.

【解析】由X,Y的取值情况，得

$$P\left\{X^2+Y^2\le 4\right\}=1-P\left\{X^2+Y^2>4\right\}=1-\left[P\left\{X^2=4,Y^2=1\right\}+P\left\{X^2=16\right\}\right]$$
$$=1-\left[P\left\{X^2=4\right\}P\left\{Y^2=1\right\}+\frac{1}{6}\right]$$
$$=1-\left[\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{6}\right]=\frac{1}{2}.$$

4. **【答案】**C.

【解析】因为$T\sim t(1)$，由t分布和F分布的关系知，$T^2\sim F(1,1)$，又由F分布的性质知，$\frac{1}{T^2}\sim F(1,1)$.

因为$P\left\{T^2\le 1\right\}=P\left\{\frac{1}{T^2}>1\right\}$,又$\frac{1}{T^2}$与$T^2$同分布，故

$$P\left\{T^2\le 1\right\}=P\left\{\frac{1}{T^2}>1\right\}=P\left\{T^2>1\right\},$$

得$P\left\{T^2>1\right\}=0.5$，由$t$分布的对称性，得$P\{T>1\}=0.25$.

故$P\{T\le 1\}=1-P\{T>1\}=0.75$.

5. **【答案】**B.

【解析】因为$E\left(S^2\right)=D(X)=\lambda$，又

$$D(S)=E\left(S^2\right)-(ES)^2=\lambda-(ES)^2,$$

得$E(S)=\sqrt{\lambda-D(S)}$. 因为$D(S)>0$，所以$E(S)<\sqrt{\lambda}$.

二、填空题

6. **【答案】**$\frac{a}{a+b}$.

【解析】由抽签原理知，每次取到红球的概率相等，均为$\frac{a}{a+b}$.

7. **【答案】**$2\mathrm{e}^{-1}$.

【解析】记X为“抽取的 100 个零件中次品个数”，由题意知$X\sim B(100,0.01)$. 题目要求用泊松分布近似，由泊松定理知，X近似服从$P(\lambda)$，其中$\lambda=np=1$.

则随机抽取 100 个零件中最多只有一个次品的概率为

$$p=P(X\le 1)=P(X=0)+P(X=1)\approx \mathrm{e}^{-1}+\frac{1^1}{1!}\mathrm{e}^{-1}=2\mathrm{e}^{-1}.$$

8. **【答案】**$10\sqrt{\mathrm{e}}$.

【解析】X 的概率密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\ (-\infty<x<+\infty),$$

则

$$\begin{aligned}E\left(X^4\mathrm{e}^X\right)&=\int_{-\infty}^{+\infty}x^4\mathrm{e}^x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}x^4\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(x^2-2x+1-1\right)}\mathrm{d}x\\&=\sqrt{\mathrm{e}}\int_{-\infty}^{+\infty}x^4\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}\mathrm{d}x\overset{令t=x-1}{=}\sqrt{\mathrm{e}}\int_{-\infty}^{+\infty}(t+1)^4\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t\\&=\sqrt{\mathrm{e}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(t^4+4t^3+6t^2+4t+1\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t\\&=\sqrt{\mathrm{e}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(t^4+6t^2+1\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t\\&=\sqrt{\mathrm{e}}\left[E\left(X^4\right)+6E\left(X^2\right)+1\right],\end{aligned}$$

下面求$E\left(X^2\right),E\left(X^4\right)$：

$$E\left(X^2\right)=D(X)+E(X)^2=1,$$

因为$X^2\sim\chi^2(1)$，所以$D\left(X^2\right)=2$，即

$$D\left(X^2\right)=E\left(X^4\right)-E\left(X^2\right)^2=E\left(X^4\right)-1=2,$$

从而$E\left(X^4\right)=3$.所以

$$E\left(X^4\mathrm{e}^X\right)=\sqrt{\mathrm{e}}\left[E\left(X^4\right)+6E\left(X^2\right)+1\right]=10\sqrt{\mathrm{e}}.$$

9. **【答案】**-1.

【解析】因为$(X,Y)\sim N(0,1;1,4;\rho)$，故$X\sim N(0,1),Y\sim N(1,4)$.

又U,V相互独立，故

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(U,V)&=\operatorname{cov}(X-2Y,2X+Y)\\&=2\operatorname{cov}(X,X)+\operatorname{cov}(X,Y)-4\operatorname{cov}(Y,X)-2\operatorname{cov}(Y,Y)\\&=2DX-2DY-3\operatorname{cov}(X,Y)=0,\end{aligned}$$

得 $\operatorname{cov}(X,Y)=\frac{2}{3}DX-\frac{2}{3}DY=-2,$ 则 $\rho=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}=-1.$

10．【答案】 $1-\mathrm{e}^{-5}$.

【解析】

$$\begin{aligned}P\left\{\min_{1\le i\le 5}(X_i)-1<\theta<\min_{1\le i\le 5}(X_i)\right\}&=P\left\{\theta<\min_{1\le i\le 5}(X_i)<\theta+1\right\}\\&=P\left\{\min_{1\le i\le 5}(X_i)>\theta\right\}-P\left\{\min_{1\le i\le 5}(X_i)>\theta+1\right\}\\&=\left[P\{X>\theta\}\right]^5-\left[P\{X>\theta+1\}\right]^5\\&=1-\left[\int_{\theta+1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-\theta)}\mathrm{d}x\right]^5\\&=1-\mathrm{e}^{-5}.\end{aligned}$$

三、解答题

11．【解析】（Ⅰ）X,Y 的取值有：$(1,1),(1,0),(0,1),(0,0)$.

由已知，得

$$P\{X=1,Y=1\}=P(AB)=P(A)\cdot P(B\mid A)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{9},$$

$$P\{X=1,Y=0\}=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=\frac{2}{3}-\frac{1}{9}=\frac{5}{9},$$

$$P\{X=0,Y=1\}=P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB),$$

$$P\{X=0,Y=0\}=P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-\left[P(A)+P(B)-P(AB)\right],$$

由 $P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1}{3},$ 得 $P(B)=3P(AB)=\frac{1}{3}$，则

$$P\{X=0,Y=1\}=P(B)-P(AB)=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}=\frac{2}{9},$$

$$P\{X=0,Y=0\}=1-\left[P(A)+P(B)-P(AB)\right]=1-\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}\right)=\frac{1}{9}.$$

故 X,Y 的联合分布率为

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
1	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{9}$

（Ⅱ）X 和 $X+aY$ 不相关，当且仅当 $\operatorname{cov}(X,X+aY)=D(X)+a\operatorname{cov}(X,Y)=0$.

由（Ⅰ）知，$X\sim B\left(1,\frac{2}{3}\right),Y\sim B\left(1,\frac{1}{3}\right),XY\sim B\left(1,\frac{1}{9}\right)$，则

$$D(X)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9},$$
$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY=\frac{1}{9}-\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=-\frac{1}{9},$$

由 $D(X)+a\operatorname{cov}(X,Y)=0$，解得 $a=2$，故当 $a=2$ 时，X 与 Z 不相关.

12．【解析】（Ⅰ）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$，

当 $x<0$ 和 $x>1$ 时，$f_X(x)=0$；

当 $0<x<1$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_x^1 10xy^2\mathrm{d}y=\frac{10}{3}\left(x-x^4\right)$；

故 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{10}{3}\left(x-x^4\right), & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

同理，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x,$

当 $y<0$ 和 $y>1$ 时，$f_Y(y)=0$；

当 $0<y<1$ 时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^y 10xy^2\mathrm{d}x=5y^4$；

故 $f_Y(y)=\begin{cases}5y^4, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

因为 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，所以 X 与 Y 不独立.

（Ⅱ）由条件概率定义，当 $f_X\left(x\right)\neq 0$ 时，即在 $X=x\left(0<x<1\right)$ 条件下，有

$$f_{Y|X}\left(y|x\right)=\frac{f\left(x,y\right)}{f_X\left(x\right)}=\frac{3y^2}{1-x^3}，\quad 0<x<y<1.$$

13．【解析】（Ⅰ）【思路一】由分布函数的定义，得

$$\begin{aligned}F_{X+Y}(t)&=P(X+Y\leq t)\\&=\begin{cases}\int_0^1\int_0^{t-x}f_X(x)f_Y(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x, & t\geq 1,\\ \int_0^t\int_0^{t-x}f_X(x)f_Y(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x, & 0\leq t<1,\\ 0, & t<0,\end{cases}\\&=\begin{cases}\int_0^1\left(1-\mathrm{e}^{x-t}\right)\mathrm{d}x=1-\mathrm{e}^{-t}(\mathrm{e}-1), & t\geq 1,\\ \int_0^t\left(1-\mathrm{e}^{x-t}\right)\mathrm{d}x=t+\mathrm{e}^{-t}-1, & 0\leq t<1,\\ 0, & t<0.\end{cases}\end{aligned}$$

故 $X+Y$ 的概率密度函数为

$$f_{X+Y}(t)=F'_{X+Y}(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-t}(\mathrm{e}-1), & t>1,\\ 1-\mathrm{e}^{-t}, & 0<t<1,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

【思路二】利用卷积公式.

由题意知，

$$X\sim f_X\left(x\right)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}\quad Y\sim f_Y\left(y\right)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & y>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

又 X,Y 相互独立，令 $Z=X+Y$，由卷积公式，得 $f_z\left(z\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(z-y,y\right)\mathrm{d}y$, 其中

$$f\left(z-y,y\right)=f_X\left(z-y\right)\cdot f_Y\left(y\right)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & 0<z-y<1, y>0\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

当 $z<0$ 时，$f_z\left(z\right)=0$;

当 $0<z<1$ 时，$f_z\left(z\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(z-y,y\right)\mathrm{d}y=\int_0^z\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=1-\mathrm{e}^{-z}$;

当 $z>1$ 时，$f_z\left(z\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(z-y,y\right)\mathrm{d}y=\int_{z-1}^z\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-(z-1)}-\mathrm{e}^{-z}=\mathrm{e}^{-z}\left(\mathrm{e}-1\right).$

综上，得 $f_Z(z)=\begin{cases}e^{-z}(e-1), & z>1,\\ 1-e^{-z}, & 0<z<1,\\ 0, & z<0.\end{cases}$

（Ⅱ）

$$PP\left\{Y\le 1\middle| X\le e^{\frac{-(Y-1)^2}{2}}\right\}=\frac{P\left\{Y\le 1, X\le e^{\frac{-(Y-1)^2}{2}}\right\}}{P\left\{X\le e^{\frac{-(Y-1)^2}{2}}\right\}}=\frac{\iint\limits_{0<y\le 1,0<x\le e^{\frac{-(y-1)^2}{2}}} e^{-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_{y>0,0<x\le e^{\frac{-(y-1)^2}{2}}} e^{-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

$$=\frac{\int_0^1 e^{-y}\left(\int_0^{e^{\frac{-(y-1)^2}{2}}}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y}{\int_0^{+\infty} e^{-y}\left(\int_0^{e^{\frac{-(y-1)^2}{2}}}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y}=\frac{\int_0^1 e^{-y}e^{\frac{-(y-1)^2}{2}}\mathrm{d}y}{\int_0^{+\infty} e^{-y}e^{\frac{-(y-1)^2}{2}}\mathrm{d}y}$$

$$=\frac{e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-y^2}{2}}\mathrm{d}y}{e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-y^2}{2}}\mathrm{d}y}=\frac{\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-y^2}{2}}\mathrm{d}y}{\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-y^2}{2}}\mathrm{d}y}$$

$$=\frac{\Phi(1)-\Phi(0)}{1-\Phi(0)}=2\Phi(1)-1.$$

14．【解析】（Ⅰ）总体 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2a}, & -a<x<a,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因为 $E(X)=0$，不含参数 a，进一步求

$$E(X^2)=\left[E(X)\right]^2+D(X)=D(X)=\frac{\left[a-(-a)\right]^2}{12}=\frac{a^2}{3},$$

令 $E(X^2)=\frac{a^2}{3}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$，解得 a 的矩估计量为 $\hat{a}=\sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2}$.

（Ⅱ）设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本值，似然函数为

$$L(a)=\prod_{k=1}^{n}f(x_k;a)=\begin{cases}\prod_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2a}, & -a\le x_1,x_2,\cdots,x_n\le a\\ 0, & 其他\end{cases}$$
$$=\begin{cases}\dfrac{1}{(2a)^n}, & -a\le x_1,x_2,\cdots,x_n\le a,\\ 0, & 其他\end{cases}$$

当$-a\le x_1,x_2,\cdots,x_n\le a$时，显然似然函数$L(a)$关于$a$是单调递减函数，要使$L(a)$达到最大，必须使$a$尽可能小，而$a$不能小于任何一个$x_k$，所以$a=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$时，似然函数$L(a)$达到最大，故$a$的极大似然估计量为$\hat{a}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$.

15．【解析】（Ⅰ）计算X的期望

$$E(X)=\int_1^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{(x-1)}{\lambda}}dx\overset{t=x-1}{=}\int_0^{+\infty}(t+1)\cdot\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{t}{\lambda}}dt$$
$$=\int_0^{+\infty}t\cdot\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{t}{\lambda}}dt+\int_0^{+\infty}\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{t}{\lambda}}dt=\lambda+1,$$

令$\overline{X}=E(X)$，解得λ的矩估计量为$\hat{\lambda}=\overline{X}-1$.

（Ⅱ）由X的密度函数易知，$X-1$服从参数为$\dfrac{1}{\lambda}$的指数分布，所以总体方差

$$D(X)=D(X-1)=\lambda^2,$$

（第1问中$E(X)$也可利用$E(X)=E(X-1)+1=\lambda+1$求得）

从而

$$E(S^2)=D(X)=\lambda^2.$$

因为

$$E(\overline{X})=E(X)=\lambda+1,$$
$$D(\overline{X})=D\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)=\frac{1}{n^2}\left(D(X_1)+D(X_2)+\cdots+D(X_n)\right)=\frac{\lambda^2}{n}.$$

由中心极限定理知，当n充分大时，$\overline{X}$近似服从正态分布$N\left(\lambda+1,\dfrac{\lambda^2}{n}\right)$.