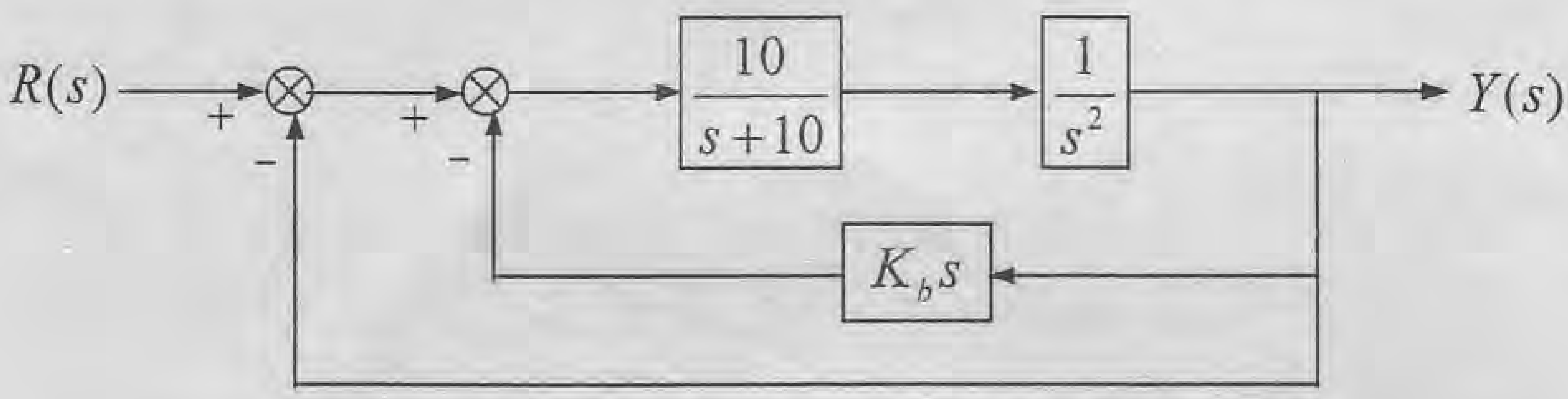
2005 年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

试题名称： 自动控制理论

一、(21 分) 单位负反馈控制系统如下图所示。



1. 试确定使系统闭环稳定的反馈系数 K_b 的取值范围。
2. 若已确定系统的一个闭环极点为 -5，试求 K_b 的取值和其余的闭环极点。
3. 根据第 2 题得到的系统配置，采用时域方法分析系统的瞬态性能和稳态性能。

二、(21 分) 对一单位负反馈系统，施加输入测试信号

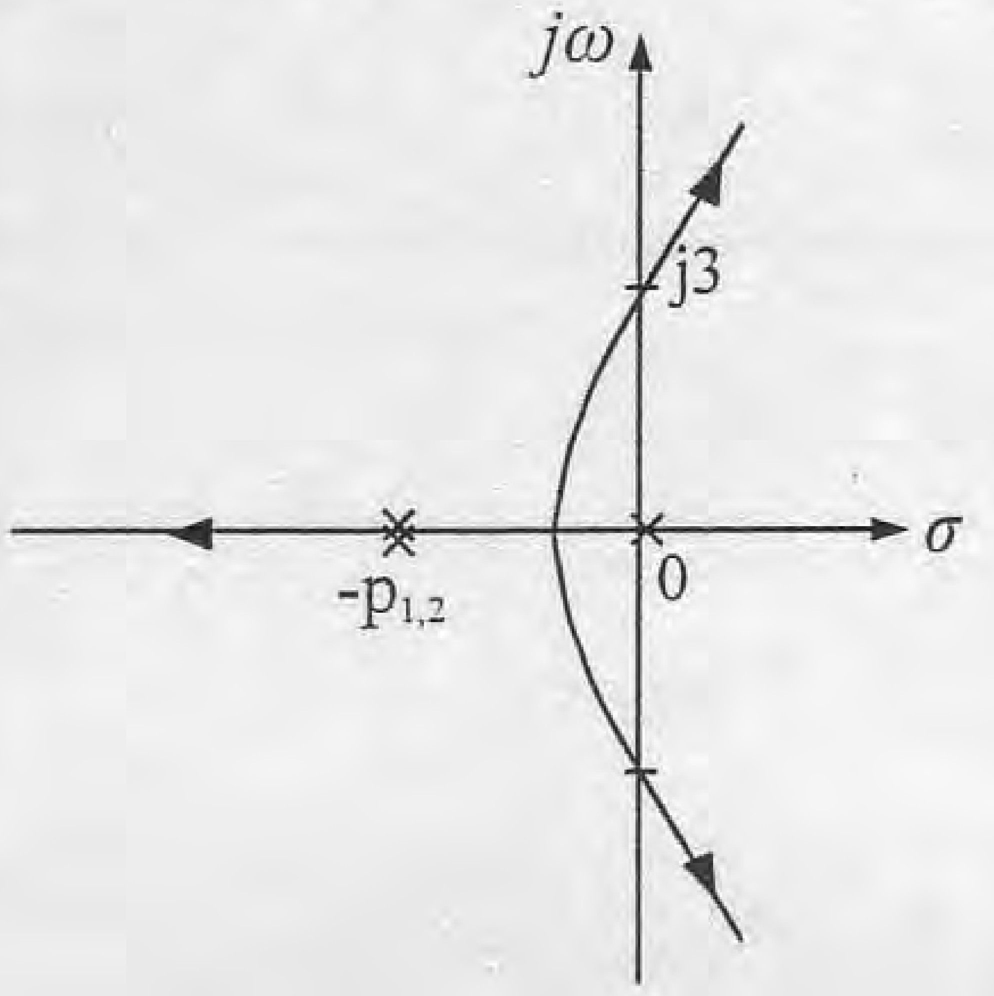
$$r(t)=1(t) \qquad (t \ge 0)$$

其输出的零状态响应为

$$y(t)=1+2e^{-2t}-3e^{-4t} \qquad (t \ge 0)$$

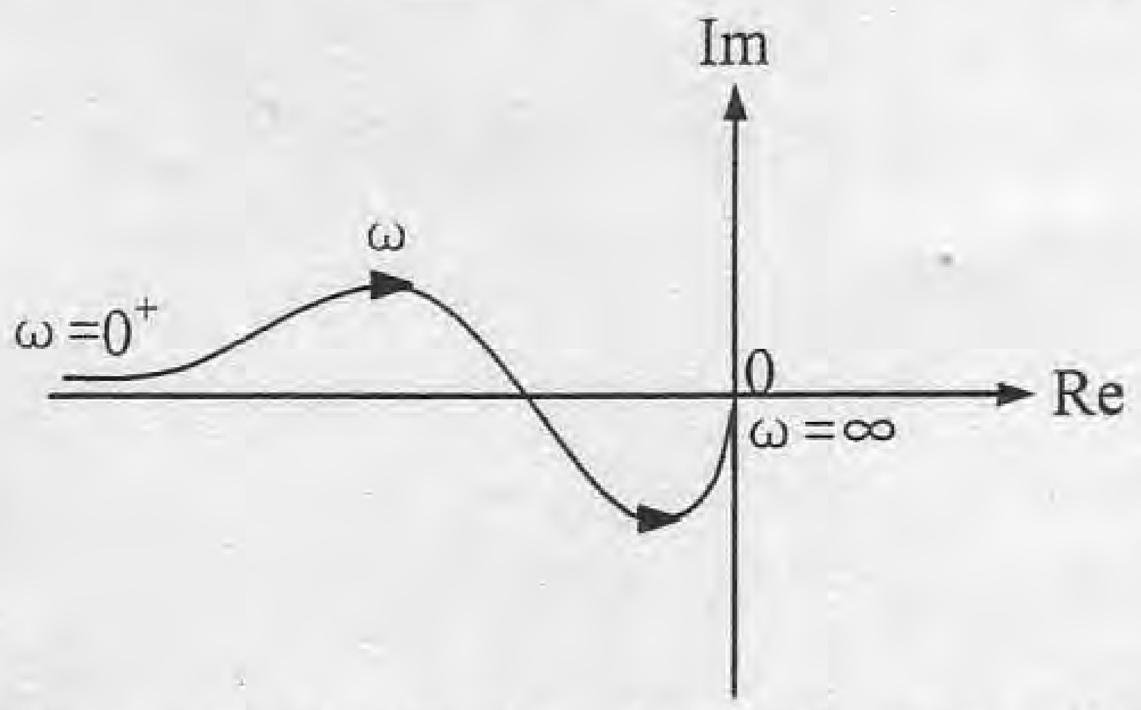
1. 试确定系统的传递函数 $Y(s)/R(s)$。
2. 概略绘制系统的单位阶跃响应曲线。
3. 指出该单位阶跃响应的主要特点。

三、(24 分) 设单位负反馈系统的根轨迹图如图所示。



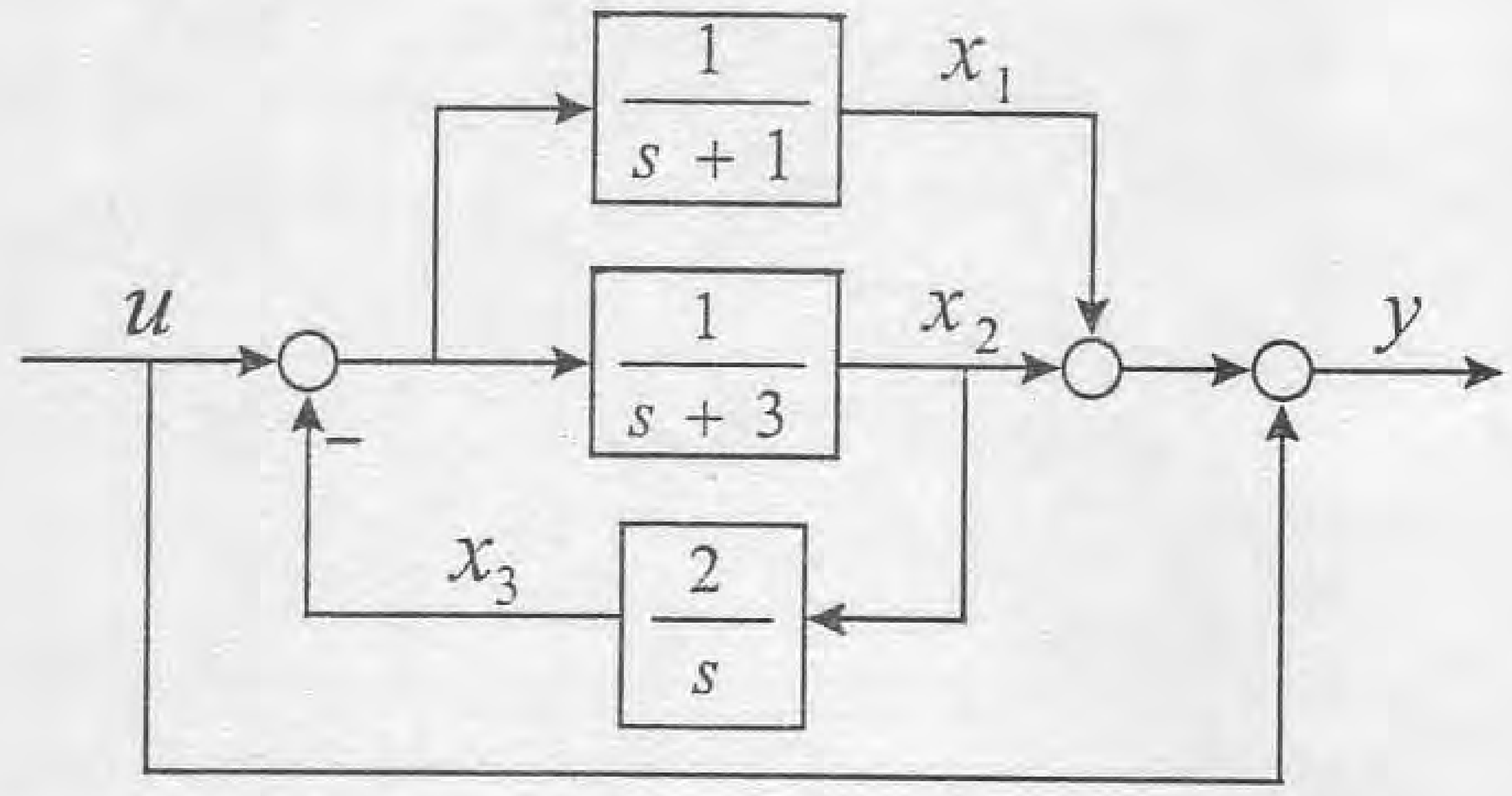
1. 确定系统的开环传递函数。
2. 试设计一串联控制器$K(s)$，并确定其参数值。要求满足以下条件：
   ① 闭环系统稳定；
   ② 闭环极点个数不变；
   ③ 根轨迹主要分支过闭环极点$-2\pm j4$。
3. 画出校正后系统的根轨迹图。闭环极点$-2\pm j4$是否为系统的主导极点？概述理由。

四、(24 分) 已知最小相位系统的幅相特性如图所示。



1. 据幅相特性，写出与之对应的开环传递函数，并指出参数间关系。
2. 用奈氏稳定判据，定性分析闭环系统稳定性与开环增益K的关系。
3. 设计一串联控制器$K(s)$，使$K>0$时闭环系统都稳定。给出$K(s)$的传递函数和参数取值范围，并画出校正后系统的完整奈氏图。

五、（20 分）已知系统的动态结构图如下：



1. 列写系统的状态空间表达式；
2. 当初态 $x_1(0)=1$, $x_2(0)=-1$, $x_3(0)=0$，输入 u 是单位阶跃信号时，求状态 $x(t)$ 的表达式及输出 $y(2)$ 的值。

六、（20 分）已知系统的动态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 2x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 + ax_2 \\ y = x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

1. 分析参数 a 对系统的能控性、能观性、渐近稳定性和 BIBO 稳定性的影响；
2. 当 $a=1$，且系统的状态不可直接量测时，若可能，设计极点均位于-5 处的最小维状态观测器。

七、（20 分）1. 对线性定常系统，证明：线性变换不改变系统的渐近稳定性。

2. 对单输入-单输出线性定常系统$\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$，证明：若$\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}\}$能控，则一定存在行向量 $\boldsymbol{c}$，使$\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{c}\}$能观。

物院

2005年硕士学位研究生入学试题参考答案

《自动控制理论》

一.1. 开环传函：$G(s)=\dfrac{10}{s(s^2+10s+10K_b)}$

闭环特征方程：$D(s)=s^3+10s^2+10K_bs+10=0$ (1)

Routh阵列：

$$
\begin{array}{c|cc}
s^3 & 1 & 10K_b \\
s^2 & 10 & 10 \\
 & 1 & 1 \\
s^1 & 10K_b-1 & \\
s^0 & 10 &
\end{array}
$$

系统闭环稳定，必须

$10K_b-1>0$

$K_b>0.1$

2. 据题意，可得

$$D(s)=(s+5)(s^2+as+b)$$
$$=s^3+(a+5)s^2+(5a+b)s+5b=0 \quad (2)$$

比较式(1)、(2)，有

$$\begin{cases} a+5=10 \\ 5b=10 \\ 5a+b=10K_b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=2 \\ K_b=2.7 \end{cases}$$

另二个闭环根是：$s^2+5s+2=0$

$\therefore s_{2,3}=-4.56,\ -0.44$

3. $G(s)=\dfrac{10}{s(s^2+10s+27)}$

$K_v=\dfrac{10}{27} \Rightarrow e_{ss}=2.7$（对斜坡信号输入的跟踪稳态误差）

$s_3=-0.44$ —主导极点 $\Rightarrow t_s=\begin{cases}3T=6.81s & (\Delta=5\%)\\ 4T=9.08s & (\Delta=2\%)\end{cases}$

闭环传函：$W(s)=\dfrac{10}{(s+5)(s+4.56)(s+0.44)} \doteq \dfrac{0.44}{s+0.44}$

单位阶跃响应：$y(t)=1-e^{-0.44t} \quad (t\geq 0)$

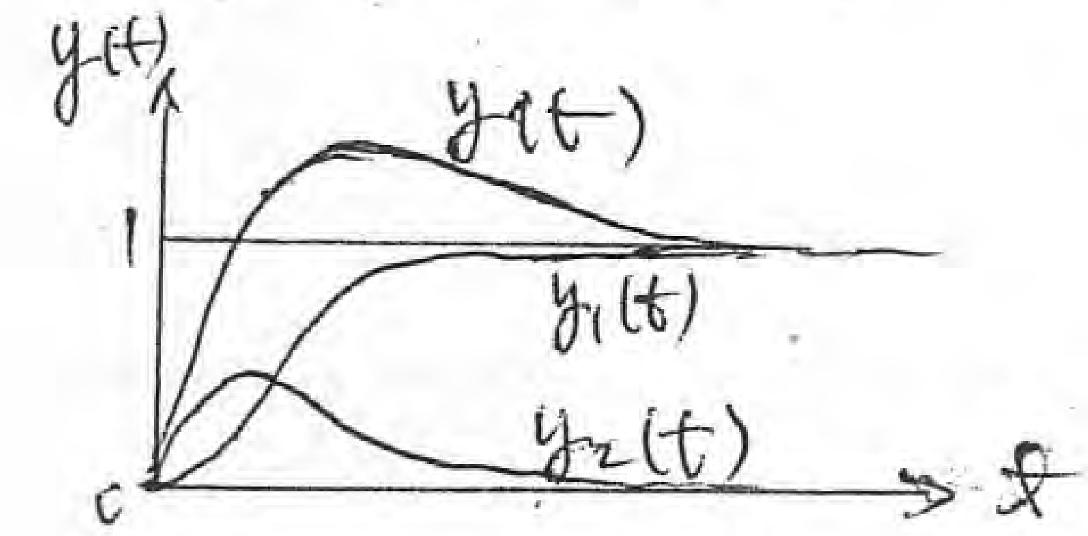
二. 1. $Y(s)=\dfrac{8(s+1)}{s(s+2)(s+4)}$

∴闭环传函：$\dfrac{Y(s)}{R(s)}=\dfrac{8(s+1)}{s^2+6s+8}$

2. $Y(s)=Y_1(s)+Y_2(s)=\dfrac{8}{s^2+6s+8}\cdot\dfrac{1}{s}+\dfrac{8}{s^2+6s+8}$

$\omega_n=\sqrt{8}=2.83\ rad/s$

$\zeta=1.06$ （二阶过阻尼，响应无超调）



3. 为具有闭环零点的二阶系统，阶跃响应的可分为：

二部分 $\begin{cases}\text{二阶系统的单位阶跃响应（无超调）} \\ \text{二阶系统的脉冲响应}\end{cases}$ > 有超调但不振荡.

又：闭环零点位于闭环极点左侧，零点影响比较显著 ⇒ 使系统的超调增大，但响应基本特性不变。

三、1. 开环传函设为 $G(s)=\dfrac{k}{s(s+p)^2}$

$D(s)=s(s+p)^2+k=0 \xrightarrow{s=j3} j3(-9+j6p+p^2)+k=0$

$\Rightarrow \begin{cases} p=3 & \text{(负根舍去)} \\ k=54 \end{cases}$

$\therefore G(s)=\dfrac{k}{s(s+3)^2}$

2. 设计 $K(s)=s+z$

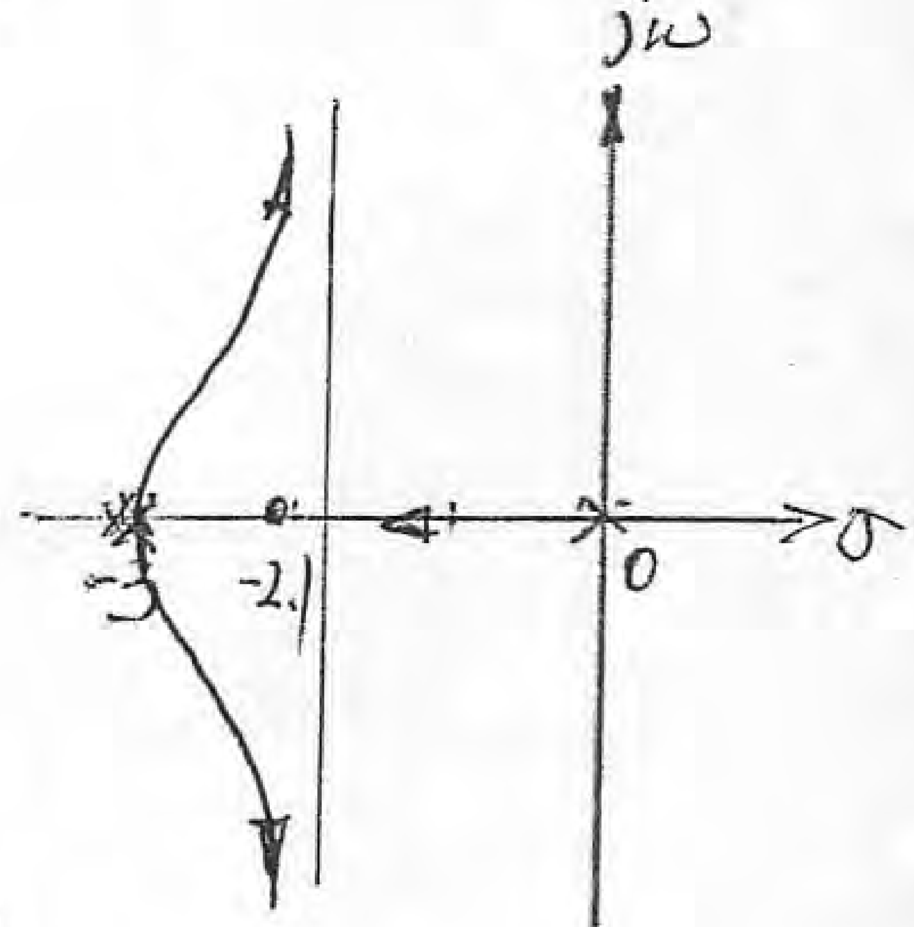
则 $Q(s)=G(s)K(s)=\dfrac{k(s+z)}{s(s+3)^2}$

在 $s_d=-2\pm j4$，应满足：$\angle Q(s)\big|_{s=-2+j4}=-180^\circ$

$\therefore tg^{-1}\dfrac{4}{z-2}-116.57^\circ-151.92^\circ=-180^\circ$

$\therefore tg^{-1}\dfrac{4}{z-2}=88.49^\circ \quad \Rightarrow z=2.1$

$\therefore K(s)=s+2.1$



3. 设另一闭环根为 $-\lambda_3$

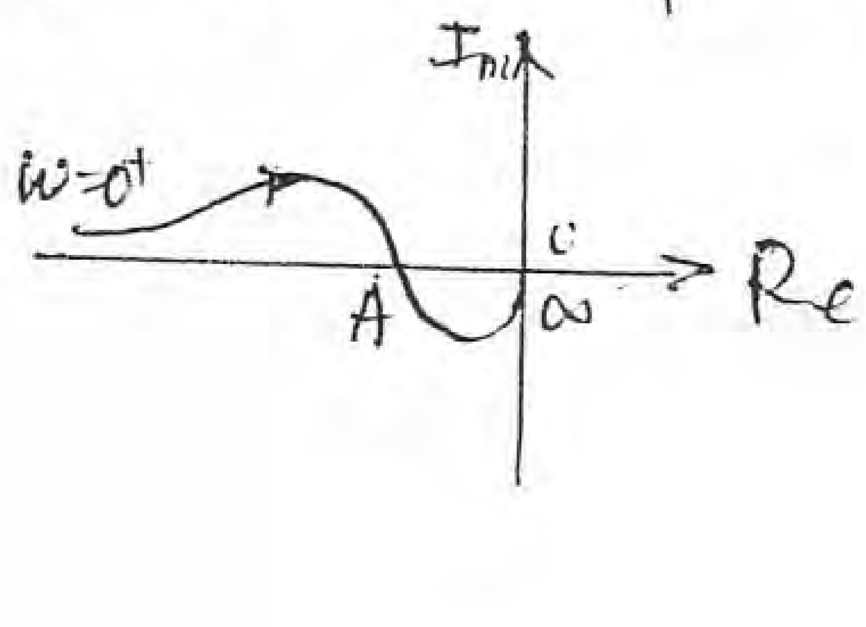
则 $(2+j4)+(2-j4)+\lambda_3=6 \quad \Rightarrow \lambda_3=2$

$\begin{cases} -\lambda_3=-2 \\ -z=-2.1 \end{cases}$ 构成一对闭环偶极子，故 λ_3 为非主导极点。

$\therefore s_d=-2\pm j4$ 为一对主导极点。

四、1. 开环传函：$G(s)=\dfrac{K(T_2s+1)(T_3s+1)}{s^2(T_1s+1)} \quad (T_1>T_2, T_3)$

2. 设 $K=K_1$ 时，幅相特性与负实轴交点为 $A(-1, j0)$



稳定性定性分析：

当 $K>K_1$ 时，$(-1,j0)$ 点位于A点右侧

$\therefore n_c = n_0 + N = 0$ $\Rightarrow$ 闭环系统稳定

当 $0<K_*<K_1$ 时，$(-1,j0)$ 点位于A点左侧

$\therefore n_c = n_0 + N = 2$ $\Rightarrow$ 闭环系统不稳定。

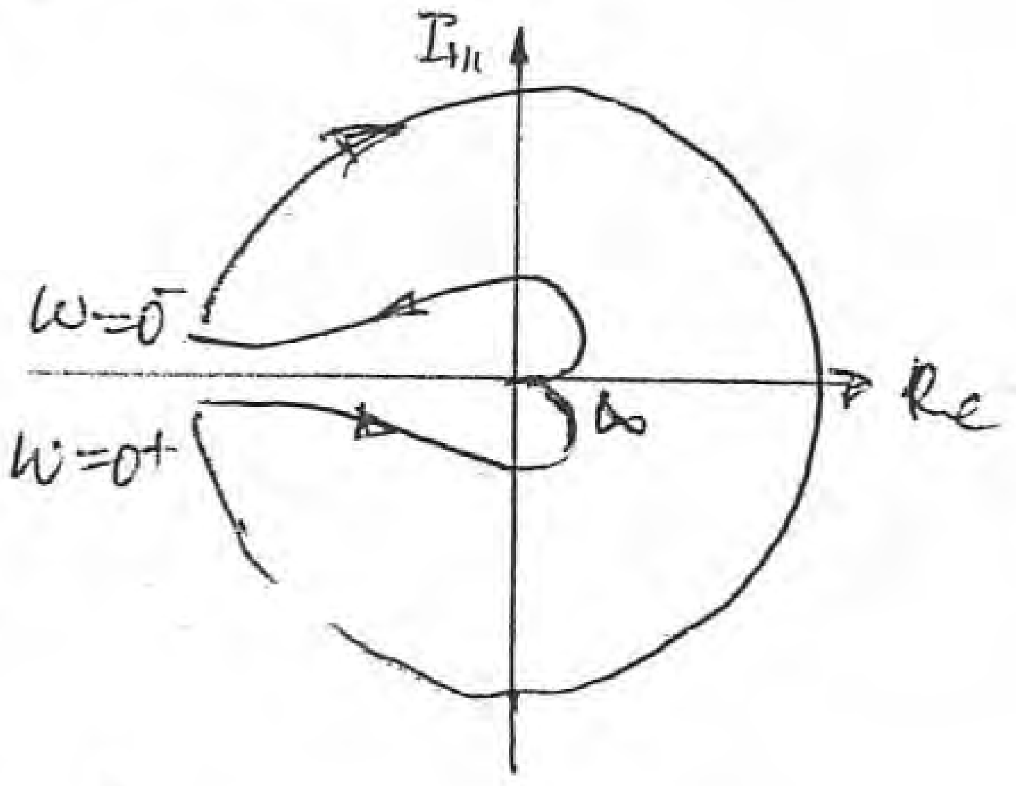
当 $K=K_1$ 时，$(-1,j0)$ 点位于A点 $\Rightarrow$ 系统临界稳定。

3、设计 $K(s)=T_z s+1$ （取 $T_z \geq T_1$）

则 $Q(s)=G(s)K(s)=\dfrac{K(T_2s+1)(T_3s+1)(T_zs+1)}{s^2(T_1s+1)}$

$Q(s)$ 的完整奈氏图：

$K>0$ 时闭环系统稳定。



或者：

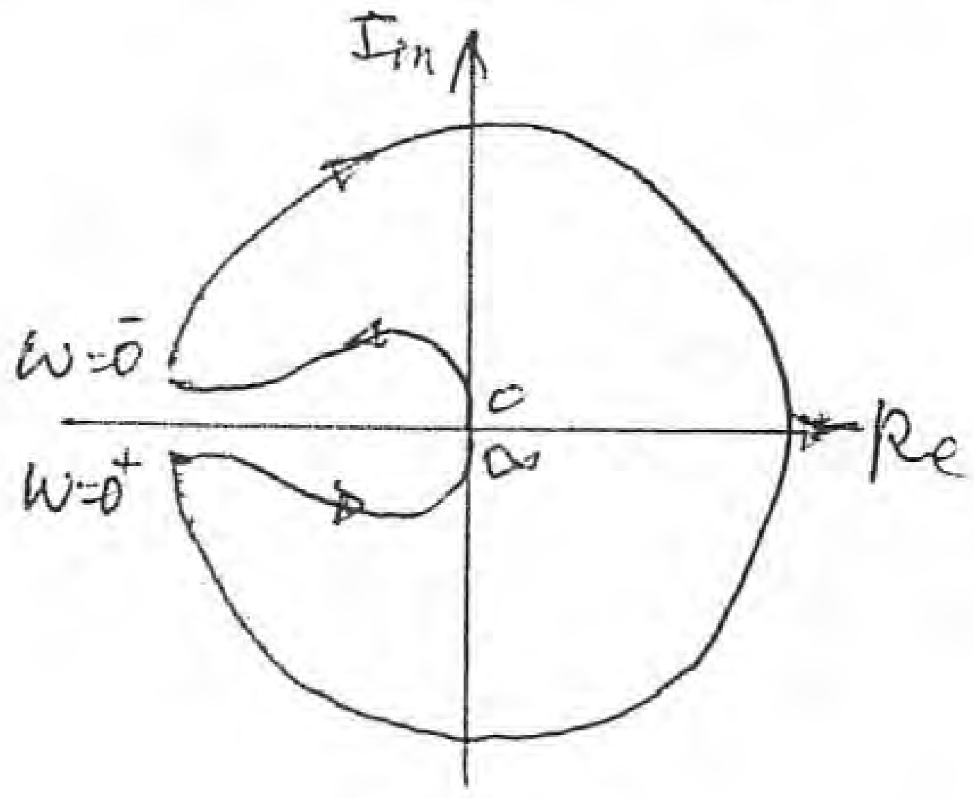
设计 $K(s)=\dfrac{T_zs+1}{T_ps+1}$ （$T_z>T_p$）

则 $Q(s)=G(s)K(s)=\dfrac{K(T_2s+1)(T_3s+1)(T_zs+1)}{s^2(T_1s+1)(T_ps+1)}$

取合适的 T_z、T_p，如：$T_z>T_1$，$T_p<T_2, T_3$

$Q(s)$ 的完整奈氏图：

$K>0$ 时闭环系统均稳定。



五. 1. 由结构图可见：

$$\hat{x}_1(s)=\frac{1}{s+1}[\hat{u}(s)-\hat{x}_3(s)] \Rightarrow \dot{x}_1(t)=-x_1-x_3+u$$

$$\hat{x}_2(s)=\frac{1}{s+3}[\hat{u}(s)-\hat{x}_3(s)] \Rightarrow \dot{x}_2(t)=-3x_2-x_3+u$$

$$\hat{x}_3(s)=\frac{2}{s}\hat{x}_2(s) \Rightarrow \dot{x}_3(t)=2x_2$$

$$\hat{y}(s)=[\hat{x}_1(s)+\hat{x}_2(s)]+\hat{u}(s) \Rightarrow y(t)=x_1+x_2+u$$

若记系统状态空间表达式为

$$\underline{\dot{x}}=A\underline{x}+\underline{b}u, \quad y=\underline{c}\,\underline{x}+du$$

则 $A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -1\\ 0 & -3 & -1\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$，$c=[1 \;\; 1 \;\; 0]$，$d=1$

2. 系统的特征多项式为

$$f(\lambda)=\det(\lambda I-A)=(\lambda+1)^2(\lambda+2) \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=-1,\ \lambda_3=-2$$

求解：$(\lambda_1 I-A)\underline{q}_1=0$，$(\lambda_2 I-A)\underline{q}_2=\underline{q}_1$，$(\lambda_3 I-A)\underline{q}_3=0$

得：$\underline{q}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$，$\underline{q}_2=\begin{bmatrix}0\\0.5\\-1\end{bmatrix}$，$\underline{q}_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$ $\Rightarrow Q=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0.5 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$

$$\therefore Q^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -2 & -2\\ 0 & -2 & -1\end{bmatrix}, \quad \Lambda=Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

$$\therefore e^{At}=e^{Q\Lambda Q^{-1}t}=Qe^{\Lambda t}Q^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0.5 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-t} & te^{-t} & 0\\ 0 & e^{-t} & 0\\ 0 & 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -2 & -2\\ 0 & -2 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}e^{-t} & 2e^{-t}-2te^{-t}-2e^{-2t} & e^{-t}-2te^{-t}-e^{-2t}\\ 0 & -e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+e^{-2t}\\ 0 & 2e^{-t}-2e^{-2t} & 2e^{-t}-e^{-2t}\end{bmatrix}$$

又∵ $\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$， $\underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

∴ $\underline{x}(t) = e^{At}\underline{x}_0 + \int_0^t e^{A\tau}\underline{b}\, u(t-\tau)\, d\tau$

$$= \begin{bmatrix} -e^{-t}-2te^{-t}+2e^{-2t} \\ e^{-t}-2e^{-2t} \\ -2e^{-t}+2e^{-2t} \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 3e^{-\tau}-2\tau e^{-\tau}-2e^{-2\tau} \\ -e^{\tau}+2e^{-2\tau} \\ 2e^{-\tau}-2e^{-2\tau} \end{bmatrix} \cdot 1\, d\tau$$

$$= \begin{bmatrix} -2e^{-t}+4te^{-t}+3e^{-2t} \\ 2e^{-t}-3e^{-2t} \\ 1-4e^{-t}+3e^{-2t} \end{bmatrix}$$

这其中用到：

$\int_0^t e^{-\tau}d\tau = (1-e^{-t})$， $\int_0^t \tau e^{-\tau}d\tau = -te^{-t}+(1-e^{-t})$， $\int_0^t 2e^{-2\tau}d\tau = (1-e^{-2t})$

∴ $y(t) = \underline{c}\,\underline{x}(t) + d\cdot u(t) = [1\ \ 1\ \ 0]\,\underline{x}(t) + 1\cdot u(t)$

$= 4te^{-t}+1$，

∴ $y(2) = 1+8e^{-2}$

六：1. $A=\begin{bmatrix}1&2\\1&a\end{bmatrix}$ $b=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $c=[1\ \ -2]$

$\because$ $M_c=[b\ \vdots\ Ab]=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$ 满秩，$\therefore$ 系统能控.

$M_o=\begin{bmatrix}c\\cA\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-2\\-1&2-2a\end{bmatrix}$, $\det M_o=-2a$

$\therefore$ $a\neq 0$ 时系统能观，$a=0$ 时系统不能观

又因：$f(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2\\-1&\lambda-a\end{vmatrix}=\lambda^2-(a+1)\lambda+(a-2)$

显然系统渐近稳定的充要条件是：$-(a+1)>0$ 且 $(a-2)>0$

即 $a<-1$ 且 $a>2$. 当然这是不可能的.

而当 $a=0$ 时系统不能观（有零极点对消），此时系统的传递函数为：

$$\hat{g}(s)=\underline{c}(sI-A)^{-1}\underline{b}=\frac{s-2}{s^2-s-2}=\frac{(s-2)}{(s+1)(s-2)}=\frac{1}{s+1}$$

当然，系统是 BIBO 稳定的

2. 由上知 $a=1$ 时，系统能观，故系统存在渐近观测器.

又因 $\operatorname{rank} c=1$，故最小维观测器为 $2-1=1$ 维.

设观测器为：

$$\dot{z}=fz+T\underline{b}u+ly\ ,\quad \hat{x}=\begin{bmatrix}c\\T\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}y\\z\end{bmatrix}$$

只须求解：$TA-fT=lc$ ，（保证 $\{f,l\}$ 能控）

由观测器极点要求知 $f=-5$，由 (f,l) 能控只须 $l\neq 0$

设 $T=[t_1\ t_2]$ 则由

$$[t_1\ t_2]\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}+5\cdot[t_1\ t_2]=l\cdot[1\ -2]$$

可解得：$T=[t_1\ t_2]=\frac{l}{17}[4\ \ -7]$ 取 $l=17$ 则

$$\begin{cases}\dot{z}=-5z+[4\ -7]\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u+17y\\ \hat{x}=\begin{bmatrix}1&-2\\4&-7\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}y\\z\end{bmatrix}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dot{z}=-5z+4u+17y\\ \hat{x}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}z-\begin{bmatrix}7\\4\end{bmatrix}y\end{cases}$$

七：1. 设变换为 $P=Q^{-1}$ 即变换后特征多项式为

$$f_1(\lambda)=\det(sI-A),\ f_2(\lambda)=\det(sI-\bar{A})=\det(sI-PAP^{-1}$$

而 $f_2(\lambda)=\det\left[P\cdot sI\cdot P^{-1}-P\cdot A\cdot P^{-1}\right]=\det P\det(sI-A)\cdot\det($

$$=\det(sI-A)\quad (这是因为 \det(P^{-1})=\frac{1}{\det P})$$

$$=f_1(\lambda)$$

而系统渐近稳定性完全取决于系统的特征多项式，故得证.

2. 因 $\{A, b\}$ 能控、一定存在线性变换使 $\{A, b\}$ 变

价于能控标准型 $\{A_c, b_c\}$ 即有非奇异 P 使

$$PAP^{-1}=A_c=\begin{bmatrix}0&1&0&0&\cdots&0\\0&0&1&0&\cdots&0\\0&0&0&1&\cdots&0\\-&-&-&-&-&1\\-a_n&-a_{n-1}&\cdots&\cdots&&-a_1\end{bmatrix},\quad Pb=b_c=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}$$

取 $c_c=cP^{-1}=[1\ 0\ 0\ \cdots\ 0]$ 则

$$M_o^c=\begin{bmatrix}c_c\\c_cA_c\\\vdots\\c_cA_c^{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&1\end{bmatrix}=I$$，满秩，此时

(A_c, c_c) 能观 $\Longleftrightarrow$ (A, c) 能观.

只须取 $c=c_cP$（即 P 阵第一行）

问题得证。