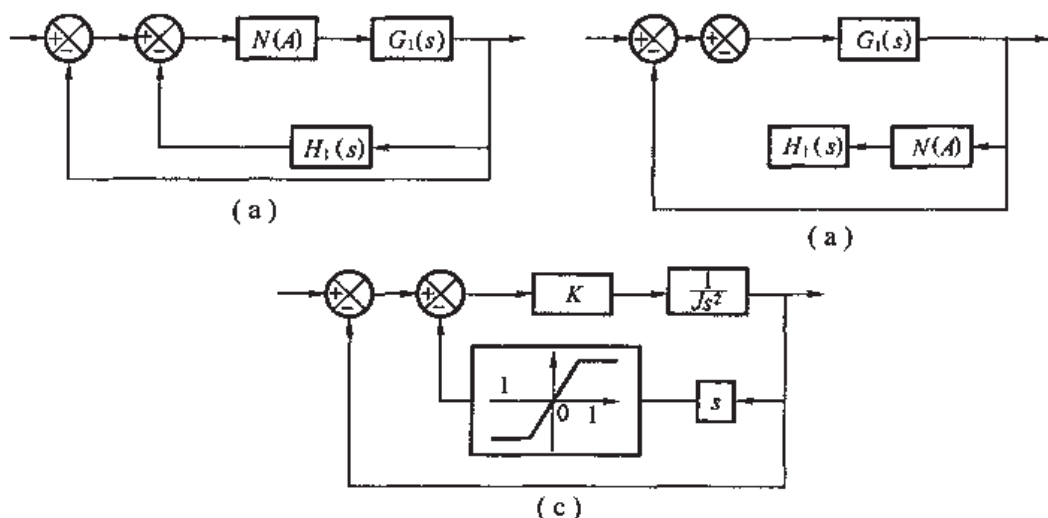


第 10 章 非线性控制系统分析

书后习题解析

10-1 试将题 10-1 图所示非线性控制系统简化成非线性特性 N 和等效线性部分 $G(s)$ 相串联的典型结构,并写出等效线性部分的传递函数 $G(s)$ 。



题 10-1 图

解 (1)图(a)可等效简化成题 10-1 解图(a),且求得等效线性部分的传递函数为

$$G(s) = G_1(s)[1 + H_1(s)]$$

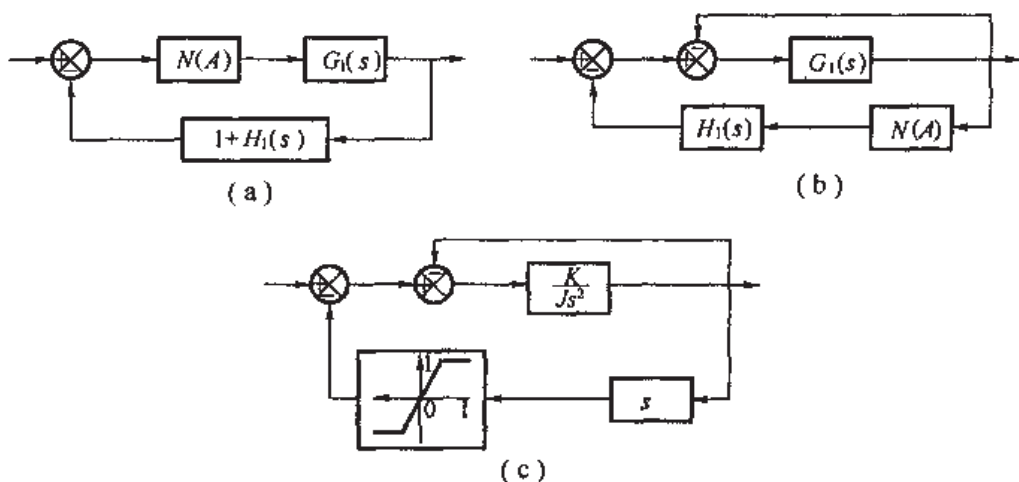
(2)图(b)可等效简化成题 10-1 解图(b),且求得 $G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)} \cdot H_1(s)$;

(3)图(c)可等效简化成题 10-1 解图(c),且求得 $G(s) = \frac{\frac{K}{Js^2}}{1 + \frac{K}{Js^2}} \cdot s = \frac{s}{\frac{J}{K}s^2 + 1}$ 。

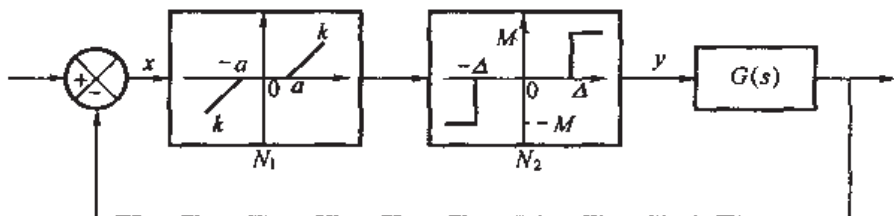
10-2 设非线性控制系统的方框图如题 10-2 图所示,其中 $G(s)$ 为线性部分的传递函数, N_1 、 N_2 分别为描述死区特性与继电器特性的典型非线性特性。试将串联的非线性特性 N_1 与 N_2 等效变换为一个等效非线性特性 N 。

解 沿由 x 到 y 的信号流通方向, N_1 与 N_2 的串联特性可用一个带死区无滞环的继电器特性 N 来等效,其中死区 $\Delta_1 = a + \frac{\Delta}{k}$ 。通过等效非线性特性 N 与线性部分传递函数 $G(s)$ 串联来表示的与题 10-2 图所示系统等效的系统方框图如题 10-2 解图所示。

10-3 设三个非线性控制系统具有相同的非线性特性,而线性部分各不相同,它们的传递函数分别为(1) $G_1(s) = \frac{2}{s(0.1s+1)}$; (2) $G_2(s) = \frac{2}{s(s+1)}$; (3) $G_3(s) = \frac{2(1.5s+1)}{s(s+1)(0.1s+1)}$ 。



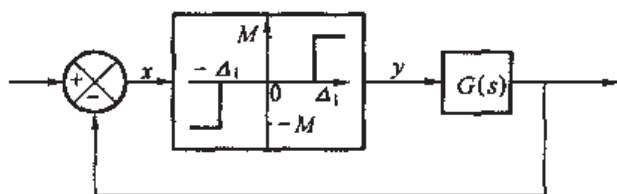
题 10-1 解图



题 10-2 图

试判断应用描述函数法分析非线性控制系统稳定性时,哪个系统的分析准确度高。

解 因为三个系统的非线性环节相同,所以应用描述函数法分析非线性系统稳定性的准确度便取决于各自线性部分所具有的低通滤波特性,即取决于线性部分的惯性特性。惯性大的低通滤波特性好,则分析准确度高。



题 10-2 解图

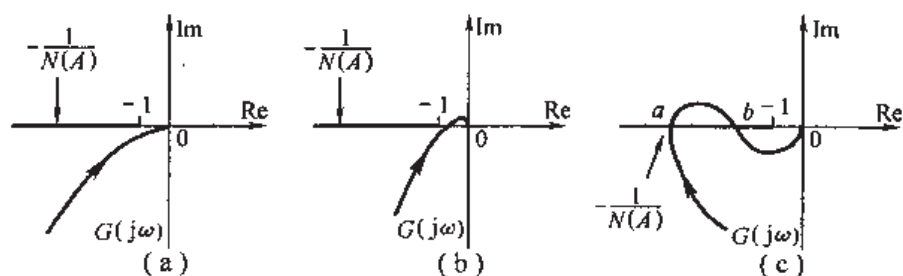
(1) 系统 2 的惯性大于系统 1 的惯性,所以系统 2 较系统 1 具有较好的低通滤波特性。

(2) 系统 3 与系统 2 相比较,系统 3 增加了一个时间常数为 0.1 s 的惯性环节,但由于还含一个时间常数为 1.5 s 的一阶微分环节,因此其实际低通滤波特性较系统 2 差。

(3) 应用描述函数法分析给定的三个非线性系统的稳定性时,系统 2 的分析准确度最高。

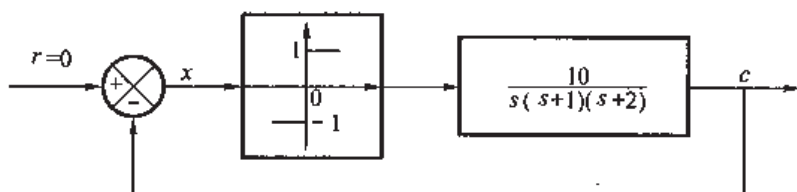
10-4 设有非线性控制系统,其中非线性特性为斜率 $k=1$ 的饱和特性。当不考虑饱和特性时,闭环系统稳定。试分析该非线性控制系统是否有产生自持振荡的可能性。

解 一个稳定线性系统可能的开环频率响应 $G(j\omega)$ 如题 10-4 解图(a)、(b)、(c)所示。对于图(a)、(b),特性 $G(j\omega)$ 与 $-1/N(A)$ 无交点,所以考虑饱和因素时非线性系统中不可能产生自持振荡,因此该非线性系统是稳定的。而对于图(c)所示情况,特性 $G(j\omega)$ 与 $-1/N(A)$ 有交点 a 和 b ,其中点 a 是稳定交点,因此该非线性系统中特产生稳定的自持振荡。



题 10-4 解图

10-5 设某非线性控制系统如题 10-5 图所示。试确定其自持振荡的振幅和角频率。



题 10-5 图

解 非线性控制系统的 $G(j\omega)$ 与 $-1/N(A)$ 特性如题 10-5 解图所示。根据稳定性分析知交点 B 代表稳定自持振荡。

(1) 由题 10-5 图得线性部分的传递函数为 $G(s) = \frac{5}{s(s+1)(0.5s+1)}$, 其幅频及相频特性分别为

$$\angle G(j\omega) = \frac{5}{\omega \sqrt{1+\omega^2} \sqrt{1+(0.5\omega)^2}}$$

$$\angle G(j\omega) = -90^\circ - \arctan \omega - \arctan(0.5\omega)$$

(2) 由 $\angle G(j\omega) = -90^\circ - \arctan \omega - \arctan(0.5\omega) = -180^\circ$, 解得自持振荡角频率 $\omega_0 = \sqrt{2} \text{ rad/s}$,

$|G(j\omega_0)| = \frac{5}{3}$, 即 $G(j\omega)$ 与负实轴的交点坐标为 $(-\frac{5}{3}, 0j)$ 。则 $-\frac{1}{N(A_0)} = -\frac{\pi A_0}{4M} = -\frac{5}{3}$, 解出自持振荡振幅为 $A_0 = \frac{20}{3\pi} = 2.122$ 。

10-6 设有如题 10-6 图所示非线性控制系统。试应用描述函数法分析当 $K=10$ 时系统的稳定性, 并求取 K 的临界值。

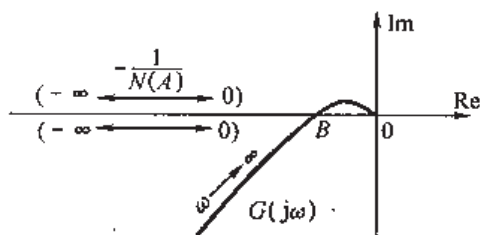
解 由题 10-6 图看出, 当 $K=10$ 时, 线性部分的幅频特性及相频特性分别为

$$|G(j\omega)| = \frac{10}{\omega \sqrt{1+\omega^2} \sqrt{4+\omega^2}}$$

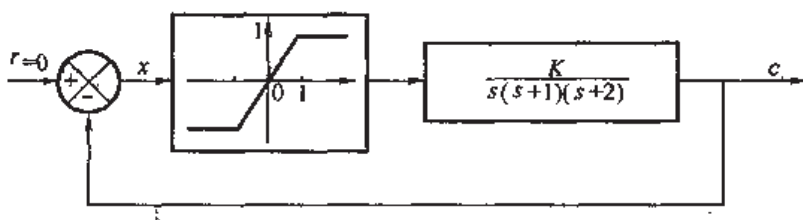
$$\angle G(j\omega) = -90^\circ - \arctan \omega - \arctan(0.5\omega)$$

(1) 由 $\angle G(j\omega) = -90^\circ - \arctan \omega - \arctan(0.5\omega) = -180^\circ$

得 $\omega = \sqrt{2} \text{ rad/s}$, $|G(j\omega)| = \frac{5}{3}$, 即 $G(j\omega)$ 与负实轴的交点坐标为 $(-\frac{5}{3}, 0j)$ 。饱和非线性特性



题 10-5 解图



题 10-6 图

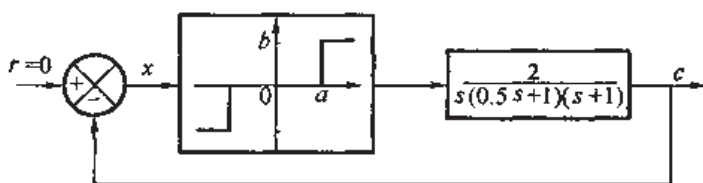
的斜率 $k=1$, 饱和特性的 $-1/N(A)$ 特性为复平面负实轴上 -1 至 $-\infty$ 区段。则 $G(j\omega)$ 与 $-1/N(A)$ 特性存在稳定交点, 此时非线性系统中将有稳定自持振荡存在。

(2) 当 $G(j\omega)$ 通过 $(-1, 0j)$, 此时系统处于稳定的临界状态, 这时可求得 K 的临界值, 即

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\omega \sqrt{1+\omega^2} \sqrt{4+\omega^2}} = 1$$

解得 $K_c = 6$ 。

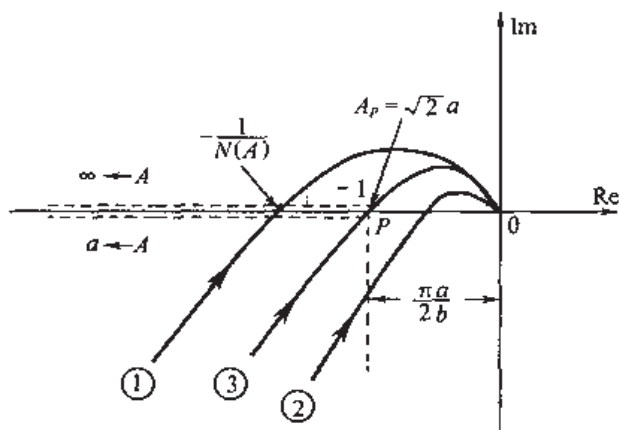
10-7 设某非线性控制系统的方框图如题 10-7 图所示。试应用描述函数法分析该系统的稳定性。为使系统稳定, 继电器参数 a, b 应如何调整。



题 10-7 图

解 $G(j\omega)$ 和带死区、无滞环继电器特性的 $-1/N(A)$ 曲线相交大致有三种情况, 如题 10-7 解图所示。

(1) 基于应用描述函数法分析非线性系统稳定性的判据, 第一种情况, $G(j\omega)$ 若与 $-1/N(A)$ 相交 (见题 10-7 解图中的①), 则原系统将产生稳定自持振荡, 且自持振荡振幅 $A_0 > A_p$; 若 $G(j\omega)$ 不与 $-1/N(A)$ 相交 (见题 10-7 解图中的②), 则原系统稳定, 不产生自持振荡; 若 $G(j\omega)$ 通过点 P (见题 10-7 解图中的③), 则原系统处于临界稳定状态。



题 10-7 解图

(2) 继电器参数 a, b 的临界稳定值可根据 $G(j\omega)$ 通过负实轴上的点 $P(-\pi a/2b, j0)$ 来确定。

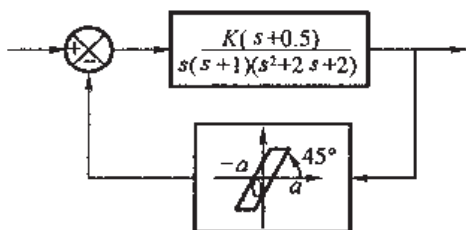
$$\angle G(j\omega) = -90^\circ - \arctan(0.5\omega) - \arctan\omega = -180^\circ$$

解得 $G(j\omega)$ 与负实轴相交处的角频率 $\omega_0 = \sqrt{2}$, $|G(j\sqrt{2})| = \frac{2}{3}$, 令 $-\frac{\pi a}{2b} = -\frac{2}{3}$, 则求得为使系

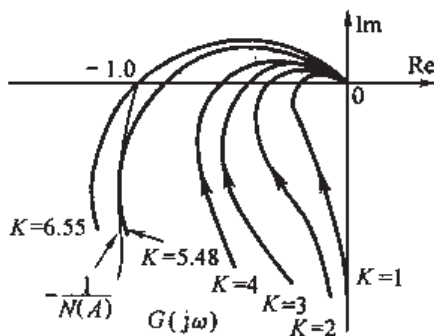
统稳定,继电器参数 a, b 的调整范围为 $\frac{b}{a} < 2.356$ 。

10-8 设某非线性控制系统的方框图如题 10-8 图所示。试确定该系统稳定时 K 的取值范围。

解 对应于不同 K 值的 $G(j\omega)$ 和曲线 $-1/N(A)$ 如题 10-8 解图所示。从图可见,由于特性 $-1/N(A)$ 与 $K=5.48$ 时的频率特性 $G(j\omega)$ 相切,所以能使系统稳定的 K 的取值范围是 $0 < K < 5.48$ 。

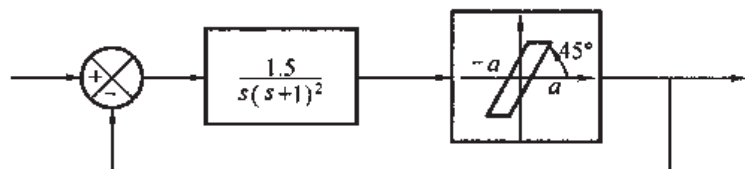


题 10-8 图



题 10-8 解图

10-9 设某非线性控制系统的方框图如题 10-9 图所示。(1)试确定自持振荡振幅与频率;(2)若线性部分采用串联超前校正 $(1+0.8s)/(1+0.4s)$,能否消除自持振荡;(3)若系统采用传递函数为 $H(s) = 1+0.4s$ 的反馈校正,能否消除自持振荡。



题 10-9 图

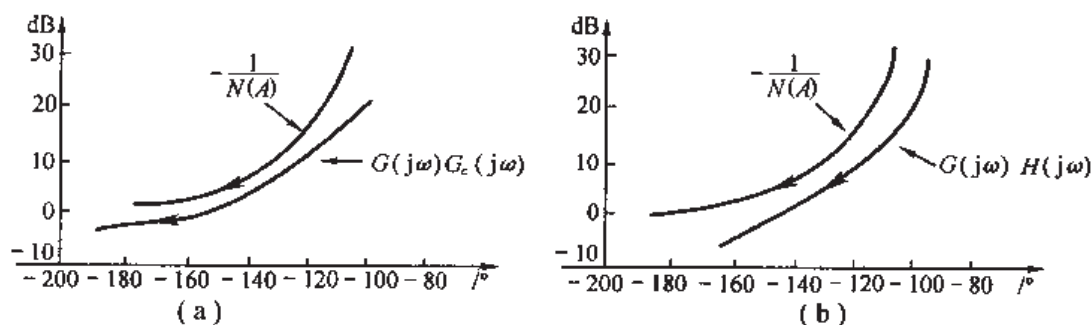
解 (1)在 Nichols 图上绘制 $G(j\omega)$ 及 $-1/N(A)$ 曲线,二特性有两个交点 P 与 Q ,其中点 Q 是稳定交点。求得自持振荡频率 $\omega_0 = 0.84 \text{ rad/s}$,自持振荡振幅由与 Q 点对应的 $a/A = 0.16$ 来确定。

(2)通过串联超前校正 $G_c(s) = (1+0.8s)/(1+0.4s)$ 及反馈校正 $H(s) = (1+0.4s)$ 后的线性部分频率响应 $G(j\omega)G_c(j\omega)$ 及 $G(j\omega)H(j\omega)$ 如题 10-9 解图(a)、(b)所示,可见在产生自持振荡的非线性系统中,引进串联超前校正 $G_c(s) = (1+0.8s)/(1+0.4s)$ 及反馈校正 $H(s) = (1+0.4s)$ 都可以消除原非线性系统的自持振荡。

10-10 试确定下列二阶非线性运动方程的奇点及其类型。

$$\ddot{e} + 0.5\dot{e} + 2e + e^2 = 0$$

解 由 $\frac{d\dot{e}}{de} = \frac{-0.5\dot{e} - 2e - e^2}{\dot{e}} = 0$, 解出 $\dot{e} = 0, e = 0$ 及 $\dot{e} = 0, e = -2$ 为运动方程的两个奇点。



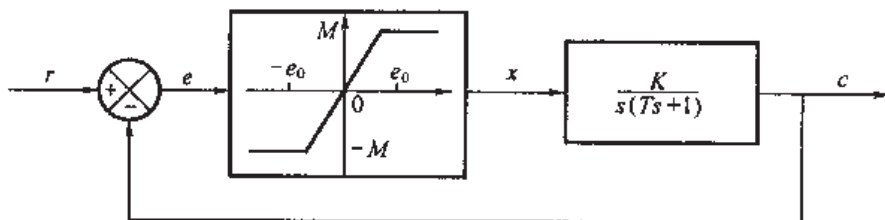
题 10-9 解图

(1) 在奇点 $\dot{e} = 0, e = 0$ 邻域, 运动方程可近似为 $\ddot{e} + 0.5\dot{e} + 2e = 0$, 其特征根为 $\lambda_{1,2} = -0.25 \pm j1.3$, 故奇点 $\dot{e} = 0, e = 0$ 为稳定焦点。

(2) 在奇点 $\dot{e} = 0, e = -2$ 处, 令 $x = e + 2, \ddot{x} + 0.5\dot{x} + 2x + x^2 = 0$, 在奇点 $\dot{e} = 0, e = -2$ 邻域, 即在 $\dot{x} = 0, x = 0$ 邻域, 运动方程可近似为 $\ddot{x} + 0.5\dot{x} + 2x = 0$, 其特征根为 $\lambda_1 = 1.19, \lambda_2 = -1.69$, 根据上述特征根可知奇点 $\dot{e} = 0, e = -2$ 为鞍点。

10-11 设某二阶非线性系统方框图如题 10-11 图所示, 其中 $e_0 = 0.2, M_0 = 0.2, K = 4$ 及 $T = 1$ s。试分别画出输入信号取下列函数时系统的相轨迹图。设系统原处于静止状态。

- (1) $r(t) = 2 \cdot 1(t)$;
- (2) $r(t) = -2 \cdot 1(t) + 0.4t$;
- (3) $r(t) = -2 \cdot 1(t) + 0.8t$;
- (4) $r(t) = -2 \cdot 1(t) + 1.2t$ 。



题 10-11 图

解 由题 10-11 图写出非线性系统的运动方程式为

$$\ddot{e} + \dot{e} + 4x = \ddot{r} + \dot{r}$$

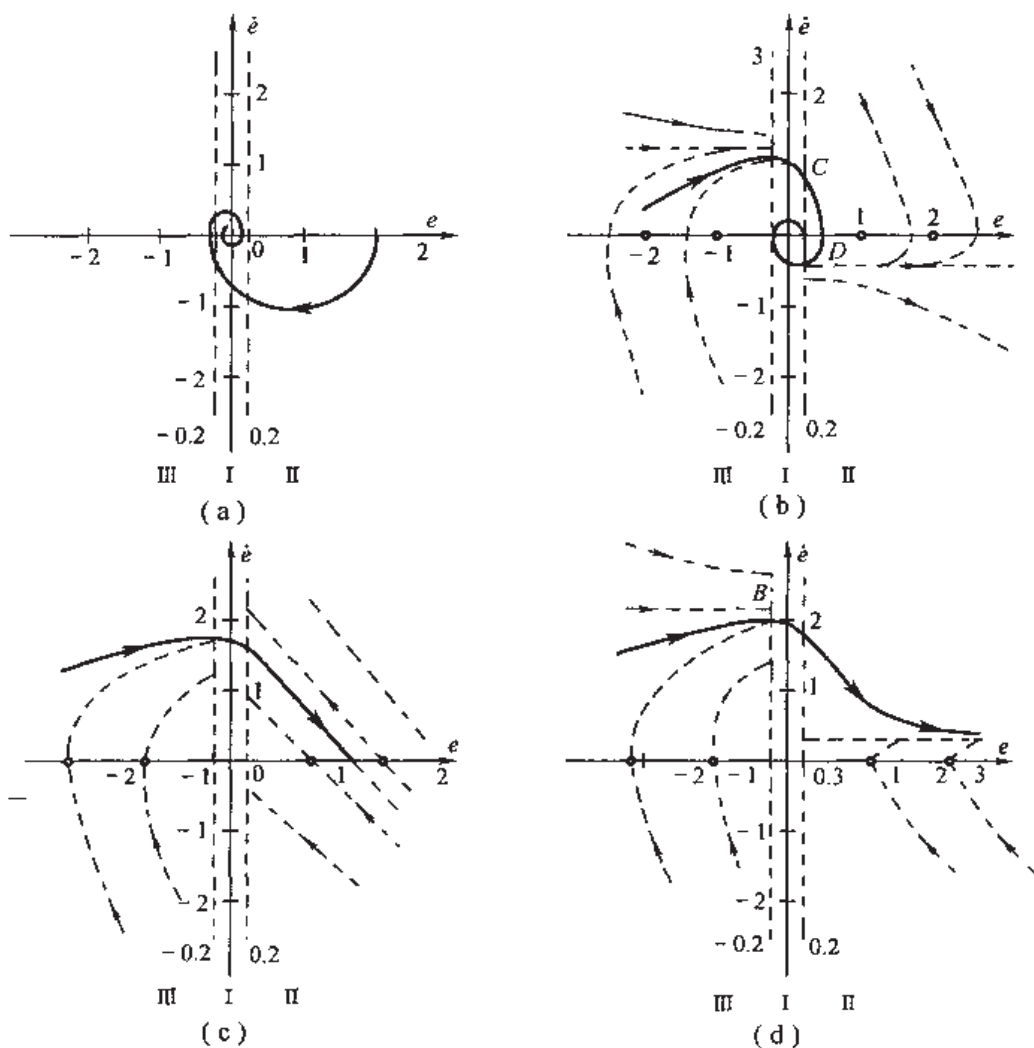
其中

$$x = \begin{cases} e, & |e| < 0.2 \\ 0.2, & e > 0.2 \\ -0.2, & e < -0.2 \end{cases}$$

(1) $r(t) = 2 \cdot 1(t)$ 时, 非线性系统的运动方程式为 $\ddot{e} + \dot{e} + 4x = 0$, 其中

$$x = \begin{cases} e, & |e| < 0.2, \quad (\text{I 区}) \\ 0.2, & e > 0.2 \quad (\text{II 区}) \\ -0.2, & e < -0.2 \quad (\text{III 区}) \end{cases}$$

分别将 x 按饱和非线性特性三个分段的取值代入运动方程式, 求得相平面内 I、II、III 三个区域的运动方程式为



题 10-11 解图

$$\ddot{e} + \dot{e} + 4e = 0, |e| < 0.2 \quad (\text{I 区})$$

$$\ddot{e} + \dot{e} + 0.8 = 0, e > 0.2 \quad (\text{II 区})$$

$$\ddot{e} + \dot{e} - 0.8 = 0, e < -0.2 \quad (\text{III 区})$$

①对于系统的线性工作状态(I 区),其奇点 $e = 0, \dot{e} = 0$,类别是稳定焦点,且为实奇点;

②II 区的等倾线方程为 $\dot{e} = \frac{-0.8}{1+a}$, II 区的渐近线方程为 $\dot{e} = -0.8$;

③同理, III 区的等倾线及渐近线方程式分别为 $\dot{e} = \frac{0.8}{1+a}, \dot{e} = 0.8$ 。

原系统处于静止状态,所以 $c(0^+) = 0, \dot{c}(0^+) = 0$ 。又因为 $r(0^+) = 2, \dot{r}(0^+) = 0$,所以 $e(0^+) = 2, \dot{e}(0^+) = 0$ 。起始于 $e = 2, \dot{e} = 0$ 的相轨迹如题 10-17 解图(a)所示,相轨迹收敛于实奇点(0,0),稳态误差等于零。

(2) $r(t) = -2 \cdot 1(t) + 0.4t$,此时系统的运动方程为

$$\begin{cases} \ddot{e} + \dot{e} + 4e = 0, |e| < 0.2 & (\text{I 区}) \\ \ddot{e} + \dot{e} + 0.8 = 0, e > 0.2 & (\text{II 区}) \\ \ddot{e} + \dot{e} - 0.8 = 0, e < -0.2 & (\text{III 区}) \end{cases}$$

①对于系统的线性工作状态(I区),其奇点 $e=0.1, \dot{e}=0$,类别是稳定焦点,且为实奇点;

②II区的等倾线方程为 $\dot{e} = \frac{-0.4}{1+a}$, II区的渐近线方程为 $\dot{e} = -0.4$;

③同理,III区的等倾线及渐近线方程式分别为 $\dot{e} = \frac{1.2}{1+a}, \dot{e} = 1.2$ 。

起始于 $e = -2, \dot{e} = 0.4$ 的相轨迹如题 10-11 解图(b)所示,相轨迹收敛于实奇点 $(0.1, 0)$, 稳态误差等于 0.1。

(3) $r(t) = -2 \cdot 1(t) + 0.8t$, 此时系统的运动方程为

$$\begin{cases} \ddot{e} + \dot{e} + 4e = 0.8, |e| < 0.2 & (\text{I区}) \\ \ddot{e} + \dot{e} + 0.8 = 0.8, e > 0.2 & (\text{II区}) \\ \ddot{e} + \dot{e} - 0.8 = 0.8, e < -0.2 & (\text{III区}) \end{cases}$$

①I区内奇点 $\dot{e}=0, e=0.2$ 仍为稳定焦点,奇点位于I区和II区的分界线上;

②II区内,令 $d\dot{e}/de = a$, 有 $\dot{e}(1+a)=0$, 解出 $\dot{e}=0$ 或 $a=-1$, 该区的相轨迹为 $\dot{e}=0$ 的水平线或斜率为 -1 的斜线;

③同理,III区的等倾线及渐近线方程式分别为 $\dot{e} = \frac{1.6}{1+a}, \dot{e} = 1.6$ 。

起始于 $e = -2, \dot{e} = 0.8$ 的相轨迹如题 10-11 解图(c)所示,相轨迹收敛于 e 轴从 0.2 到 ∞ 区段上的某点,其稳态误差为大于 0.2 的一个有限值。

(4) $r(t) = -2 \cdot 1(t) + 1.2t$, 此时系统的运动方程式为

$$\begin{cases} \ddot{e} + \dot{e} + 4e = 1.2 & |e| < 0.2 & (\text{I区}) \\ \ddot{e} + \dot{e} + 0.8 = 1.2 & e > 0.2 & (\text{II区}) \\ \ddot{e} + \dot{e} - 0.8 = 1.2 & e < -0.2 & (\text{III区}) \end{cases}$$

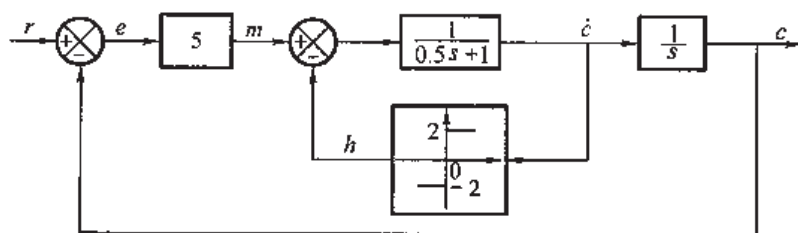
①I区内奇点 $\dot{e}=0, e=0.3$ 仍为稳定焦点,且为虚奇点;

②II区内,等倾线及渐近线方程式分别为 $\dot{e} = \frac{0.4}{1+a}, \dot{e} = 0.4$;

③同理,III区的等倾线及渐近线方程式分别为 $\dot{e} = \frac{2.0}{1+a}, \dot{e} = 2.0$ 。

起始于 $e = -2, \dot{e} = 1.2$ 的相轨迹如题 10-11 解图(d)所示,相轨迹沿渐近线 $\dot{e} = 0.4$ 趋于无穷远,故系统的稳态误差为无穷大。

10-12 设某控制系统采用非线性反馈时的方框图如题 10-12 图所示。试绘制系统响应 $r(t) = R \cdot 1(t)$ 的相轨迹图,其中 R 为常值。



题 10-12 图

解 由题 10-12 图写出给定非线性系统的方程组

$$0.5\ddot{e} + \dot{e} = x$$

$$\begin{aligned}
 x &= m - h \\
 m &= 5e \\
 h &= \begin{cases} +2 & \dot{e} > 0 \\ -2 & \dot{e} < 0 \end{cases} \\
 e &= r - c
 \end{aligned}$$

由上述方程组得到系统响应 $r(t) = R \cdot 1(t)$ 时的运动方程为

$$0.5\ddot{e} + \dot{e} + 5(e - 0.4) = 0, \dot{e} < 0 \quad (\text{I 区})$$

$$0.5\ddot{e} + \dot{e} + 5(e + 0.4) = 0, \dot{e} > 0 \quad (\text{II 区})$$

可见,两种情况下的奇点 $\dot{e} = 0, e = 0.4$ 和 $\dot{e} = 0, e = -0.4$ 均为稳定焦点。相轨迹的起始点坐标由

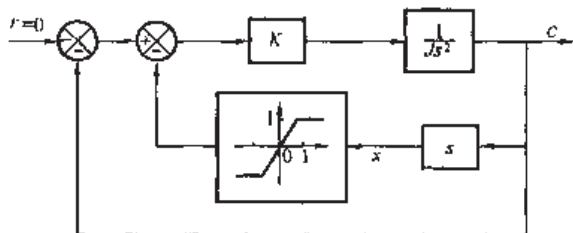
$$e(0^+) = r(0^+) - c(0^+) = R - c(0^+)$$

$$\dot{e}(0^+) = \dot{r}(0^+) - \dot{c}(0^+) = -\dot{c}(0^+)$$

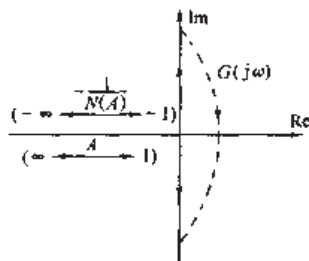
确定。其中 $c(0^+)$ 与 $\dot{c}(0^+)$ 为系统输出变量 $c(t)$ 在 $t = 0^+$ 时刻的初始值。系统从静止状态响应阶跃输入的相轨迹图如题 10-12 解图所示。系统的稳态误差 $-0.4 < e_{ss} < 0.4$ 。

10-13 设某非线性控制系统方框图如题 10-13 图所示。试应用描述函数法分析该系统的稳定性。

解 如题 10-13 图,将非线性系统简化为非线性特性 N 和等效线性部分 $G(s)$ 相串联的典型结构,其中 $G(s) = \frac{Ks}{Js^2 + K}$ 。绘制 $G(j\omega)$ 特性和 $-\frac{1}{N(A)}$ 曲线如题 10-13 解图所示, $G(j\omega)$ 和 $-\frac{1}{N(A)}$ 不相交,所以该系统稳定,无自持振荡。



题 10-13 图

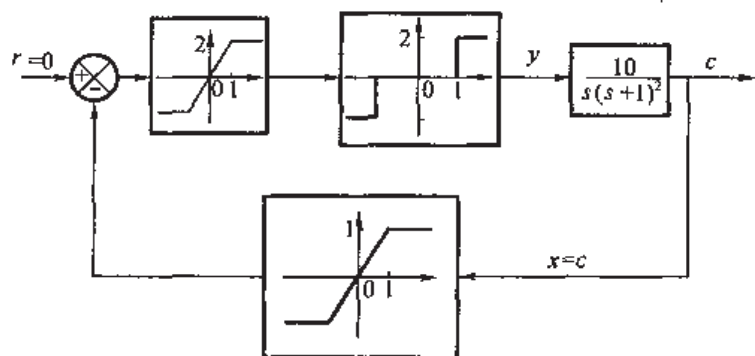


题 10-13 解图

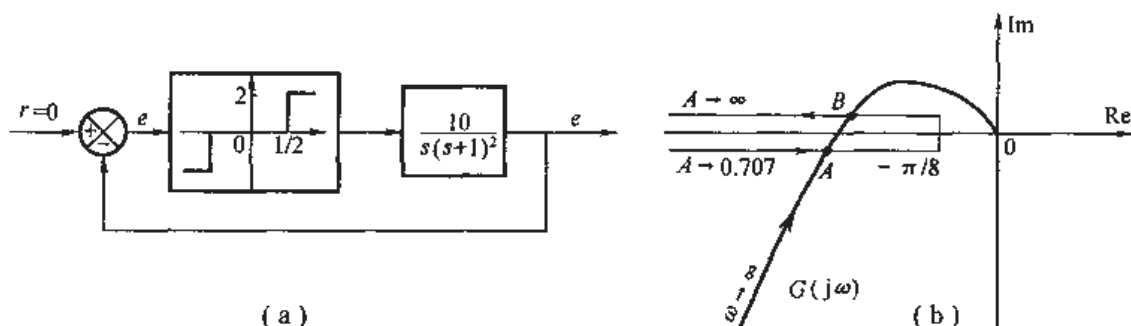
10-14 设某非线性控制系统方框图如题 10-14 图所示。试确定该系统的自持振荡的振幅与角频率。

解 该系统的三个非线性环节可等效变换为一个具有死区无滞环的继电器特性,结构图如题 10-14 解图(a)所示。

(1) 其中继电器特性参数为 $e_0 = \frac{1}{2}$, $M = 2$ 。 $-\frac{1}{N(A)}$ 曲线的拐点坐标为 $-\frac{\pi e_0}{2M} = -\frac{\pi}{8}$, 对应的振幅 $A = \sqrt{2}e_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。特性 $G(j\omega)$ 和 $-\frac{1}{N(A)}$ 曲线如题 10-14 解图(b)所示。



题 10-14 图



题 10-14 解图

(2) 线性部分频率响应的相频特性 $\angle G(j\omega) = -90^\circ - 2\arctan\omega \approx -180^\circ$, 解得 $G(j\omega)$ 与负实轴的交点对应的角频率为 $\omega = 1 \text{ rad/s}$ 。则 $|G(j1)| = 5 > \frac{\pi}{8}$, 所以 $G(j\omega)$ 和 $-\frac{1}{N(A)}$ 相交, 有两个交点 A 和 B, 其中 B 点是稳定交点, 代表系统产生自持振荡。

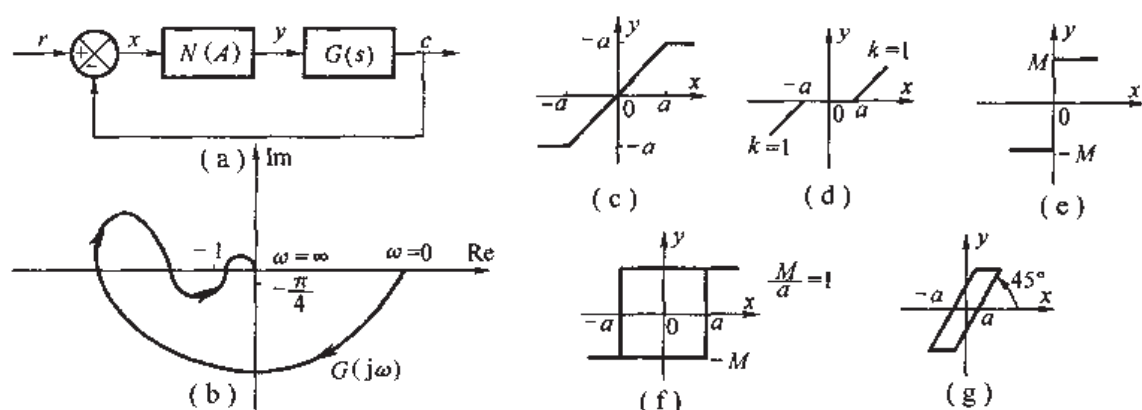
(3) 由 $-\frac{1}{N(A)} = -\frac{1}{\frac{4 \times 2}{\pi A_0} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2A_0}\right)^2}} = -5$, 求得 $A_{01} = 0.51$ 和 $A_{02} = 12.65$, 所以系统的自

持振荡的振幅为 $A_{02} = 12.65$, 角频率为 $\omega = 1 \text{ rad/s}$ 。

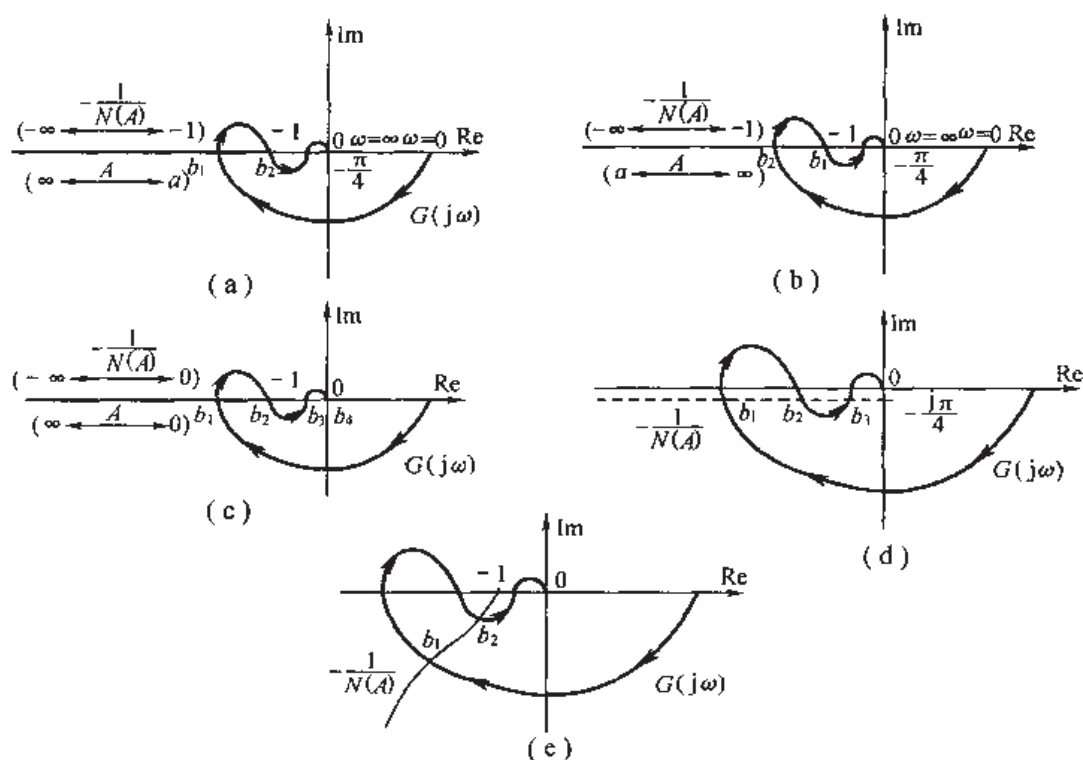
10-15 设非线性控制系统方框图如题 10-15 图(a)所示, 其中线性部分的频率响应 $G(j\omega)$ 如图(b)所示, 非线性环特性 N 示于图(c)~(g)。试应用描述函数法分析含图(c)~(g)所示典型非线性特性的系统稳定性。

解 对非线性特性(c), 绘制曲线如题 10-15 解图(a)所示, 共有交点 b_1 和 b_2 , 其中 b_1 代表稳定的自持振荡。对非线性特性(d), 绘制曲线如题 10-15 解图(b)所示, 共有交点 b_1 和 b_2 , 其中 b_1 代表稳定的自持振荡。对非线性特性(e), 绘制曲线如题 10-15 解图(e)所示, 共有交点 b_1, b_2, b_3 和 b_4 , 其中 b_1 和 b_3 代表稳定的自持振荡。对非线性特性(f), 绘制曲线如题 10-15 解图(d)所示, 共有交点 b_1, b_2 和 b_3 , 其中 b_1 和 b_3 代表稳定的自持振荡。对非线性特性(g), 绘制曲线如题 10-15 解图(e)所示, 共有交点 b_1 和 b_2 , 其中 b_2 代表稳定的自持振荡。

10-16 设某非线性控制系统的方框图如题 10-16 图所示, 其中线性部分传递函数为



题 10-15 图



题 10-15 解图

$G(s) = \frac{Ke^{-0.1s}}{s(0.1s+1)}$, 试应用描述函数法判定 $K=0.1$ 时系统的稳定性, 并确定不使系统产生自持振荡的参数 K 的取值范围。

解 (1) $G(j\omega)$ 特性与负实轴交点对应的角频率由 $-5.73\omega - 90^\circ - \arctan 0.1\omega = -180^\circ$ 计算解得 $\omega = 8.6 \text{ rad/s}$ 。 $|G(j8.6)| = \frac{0.1}{\omega \sqrt{1+0.01\omega^2}} \Big|_{\omega=8.6} = 0.01$, $-\frac{1}{N(A)}$ 曲线为负实轴上 $(-\infty, -1)$ 区段, 所以 $G(j\omega)$ 特性与 $-\frac{1}{N(A)}$ 曲线不相交, 此时系统稳定, 不产生自持振荡。

(2) 当 $G(j\omega)$ 特性通过 $(-1, 0j)$ 点, 则 $|G(j8.6)| = \frac{K}{\omega \sqrt{1+0.01\omega^2}} \Big|_{\omega=8.6} = 1$, 解得 $K =$

9.46, 所以不使系统产生自持振荡的参数 K 的取值范围为 $0 < K < 9.46$ 。

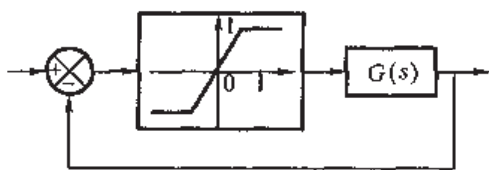
10-17 试确定图题 10-17 所示非线性控制系统自持振荡的振幅与角频率。

解 (1) 含有滞环的继电器的描述函数为

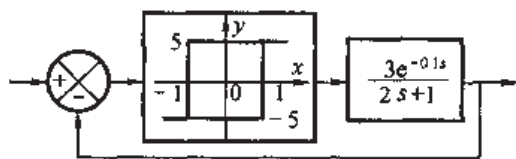
$$-\frac{1}{N(A)} = -\frac{\pi}{4M}(\sqrt{A^2 - 1} + j) = -\frac{\pi}{20}(\sqrt{A^2 - 1} + j)$$

(2) 当 $G(j\omega)$ 特性与 $-\frac{1}{N(A)}$ 曲线相交时, 有一个交点, 且对应稳定的自持振荡。

(3) 由 $\text{Im}[G(j\omega)] = \text{Im}\left(-\frac{1}{N(A)}\right)$, 得自持振荡的振幅 $A_0 = 1.282$, 角频率 $\omega_0 = 7.5 \text{ rad/s}$ 。

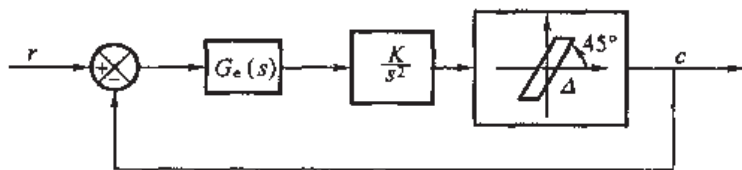


题 10-16 解图



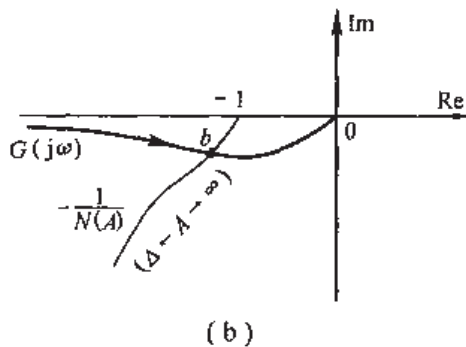
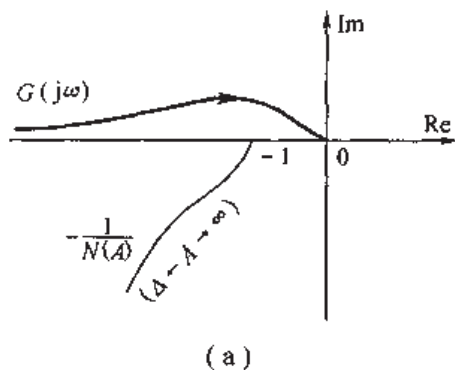
题 10-17 图

10-18 设某非线性控制系统方框图如题 10-18 图所示, 其中 $G_c(s)$ 为线性校正环节的传递函数, 若取 $G_c(s) = (ars + 1)/rs + 1$ 试分析: (1) $0 < a < 1$; (2) $a > 1$ 时系统的稳定性。



题 10-18 图

解 (1) 当 $0 < a < 1$ 时, 绘制 $G(j\omega)$ 特性与 $-\frac{1}{N(A)}$ 曲线如题 10-18 解图(a)所示, $-\frac{1}{N(A)}$ 曲线在 $G(j\omega)$ 特性的下方, 系统不稳定。



题 10-18 解图

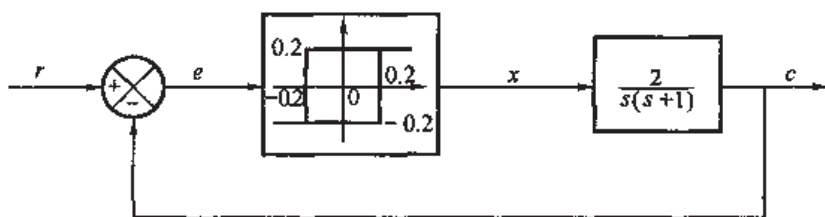
(2) $r(t) = R \cdot 1(t) + Vt$ 时, I 区和 II 区的相轨迹方程为

$$\ddot{e} + \dot{e} + 2 = V, e > 0$$

$$\ddot{e} + \dot{e} - 2 = V, e < 0$$

I 区和 II 区的渐近线方程分别为 $\dot{e} = V - 2, \dot{e} = V + 2$ 。分三种情况画相轨迹① $V > 2$ ② $V = 2$ ③ $V < 2$, 相轨迹分别如题 10-19 解图(b), (c), (d) 所示。

10-20 设某非线性控制系统的方框图如题 10-20 图所示, 试绘制 $r(t) = 1(t)$ 时 $e - \dot{e}$ 平面相轨迹图。已知初始条件 $c(0) = \dot{c}(0) = 0$ 。



题 10-20 图

解 该系统响应 $r(t) = 1(t)$ 时 I 区和 II 区的运动方程为

$$\ddot{e} + \dot{e} + 0.4 = 0, e > 0.2, e < -0.2, \dot{e} < 0$$

$$\ddot{e} + \dot{e} - 0.4 = 0, e < 0.2, e > -0.2, \dot{e} > 0$$

I 区和 II 区的渐近线方程为 $\dot{e} = -0.4, \dot{e} = 0.4$ 。相轨迹分别如题 10-20 解图所示。由图可见, 在含仅具有滞环的继电器特性的非线性系统内存在自持振荡。

10-21 设某非线性控制系统的方框图如题 10-13 图所示。其中 $K=5$ 及 $J=1$ 。试在 $e - \dot{e}$ 平面绘制不同初始条件下的相轨迹图。设系统开始处于静止状态。

解 由题 10-13 图可得如下方程

$$\ddot{e} = 5m, m = e - u$$

$$u = \begin{cases} 1, & \dot{e} > 1 \\ \dot{e}, & |\dot{e}| < 1 \\ -1, & \dot{e} < -1 \end{cases}$$

$$e = r - c, \dot{r} = 0, \dot{r} = 0$$

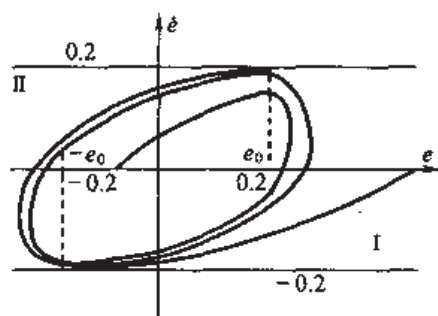
整理得

$$\begin{cases} \ddot{e} + 5e + 5 = 0, & \dot{e} > 1 \\ \ddot{e} + 5\dot{e} + 5e = 0, & |\dot{e}| < 1 \\ \ddot{e} + 5e - 5 = 0, & \dot{e} < -1 \end{cases}$$

将相平面分成 I 区 ($\dot{e} > 1$), II 区 ($-1 < \dot{e} < 1$), III 区 ($\dot{e} < -1$)。

(1) I 区 ($\dot{e} > 1$) 的相轨迹方程为 $\ddot{e} + 5e + 5 = 0$, 由 $\ddot{e} = \dot{e} \frac{d\dot{e}}{de}$, 经计算得 $\left(\frac{\dot{e}}{\sqrt{5}}\right)^2 + (e+1)^2 = R_1^2$ 。

说明 $\dot{e} > 1$ 时, 当以 $\frac{\dot{e}}{\sqrt{5}}$ 为纵坐标、 e 为横坐标时, 该区的相轨迹为圆心在 $(-1, 0)$, 半径为



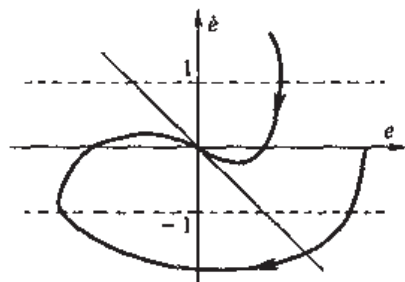
题 10-20 解图

R_1 的圆,其中 R_1 由初始条件确定。

(2) II 区 ($-1 < \dot{e} < 1$) 的奇点为 $(0,0)$, 并且该区内特征根为 $s_1 = -3.62, s_2 = 1.38$, 故奇点 $(0,0)$ 为稳定节点。相轨迹方程为 $\ddot{e} + 5\dot{e} + 5e = 0$, 等倾线方程为 $\dot{e} = -\frac{5}{5+a}e$, 渐近线方程为 $\dot{e} = -e$, 该区内的相轨迹将沿着渐近线趋向于相平面的坐标原点 $(0,0)$ 。

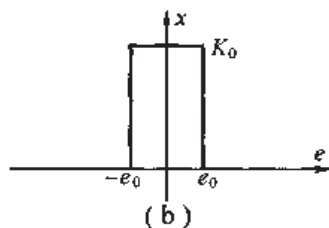
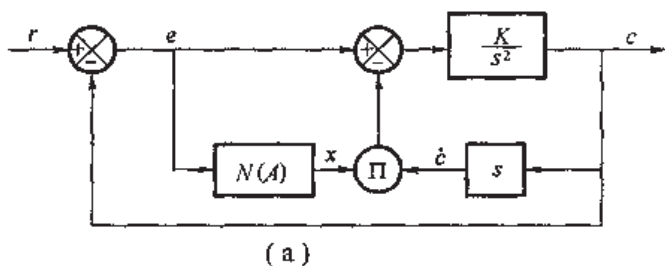
(3) III 区 ($\dot{e} < -1$) 的相轨迹方程为 $\ddot{e} + 5e - 5 = 0$, 经计算得 $\left(\frac{\dot{e}}{\sqrt{5}}\right)^2 + (e-1)^2 = R_2^2$, 说明该区内的相轨迹为圆心在 $(1,0)$, 半径为 R_2 的圆, 其中 R_2 由初始条件确定。

则由不同初始条件出发的相轨迹大致图形如题 10-21 解图所示。



题 10-21 解图

10-22 具有非线性阻尼的控制系统方框图如题 10-22(a) 图所示, 其中非线性特性 N 示于图(b)中。当误差信号 $|e|$ 较大, 即 $|e| > 0.2$ 时, 阻尼作用消失; 误差信号 $|e|$ 较小时, 系统具有 $K_0\dot{e}$ 的阻尼, 于是速度反馈受非线性特性控制, 图中符号 Π 代表相乘。设系统开始处于静止状态, 系统参数为 $K=4, K_0=1, e_0=0.2$, 试在 $e-\dot{e}$ 平面上绘制输入信号分别为



题 10-22 图

$$(1) r(t) = 1(t)$$

$$(2) r(t) = 0.75 + 0.1t$$

$$(3) r(t) = 0.7t$$

时系统的相轨迹图。

解 由题 10-22 图列方程

$$\begin{cases} e = r - c \\ K(e - x\dot{e}) = \ddot{e} \end{cases}$$

其中 $x = \begin{cases} K_0, & |e| \leq e_0 \\ 0, & |e| > e_0 \end{cases}$, 将相平面分成 I、II 区, 分别对应 $|e| \leq e_0$ 和 $|e| > e_0$, 整理得相轨迹方程为

$$\begin{aligned} \ddot{e} + 4\dot{e} + 4e &= r + 4\dot{e} & |e| \leq 0.2 \\ \ddot{e} + 4e &= r & |e| > 0.2 \end{aligned}$$

(1) 当 $r(t) = 1(t)$ 时, I 区内奇点 $(0,0)$ 点为稳定节点, 等倾线方程 $\alpha = \frac{-4\dot{e} - 4e}{\dot{e}}$, 渐近线方程为 $\dot{e} = -e$ 。II 区内奇点 $(0,0)$ 点为中心点, 从 $(1,0)$ 点出发的相轨迹如题 10-22 解图(a) 所示。

(2) 当 $r(t) = 0.75 + 0.1t$ 时, 相轨迹方程为

$$\ddot{e} + 4\dot{e} + 4e = 0.4 \quad |e| \leq 0.2$$

$$\ddot{e} + 4e = 0 \quad |e| > 0.2$$

I 区内奇点为点 $(0.1, 0)$, 等倾线方程为 $\dot{e} = \frac{-4e + 0.4}{\alpha + 4} (\alpha = 0) = -e + 0.1$, II 区内情况同

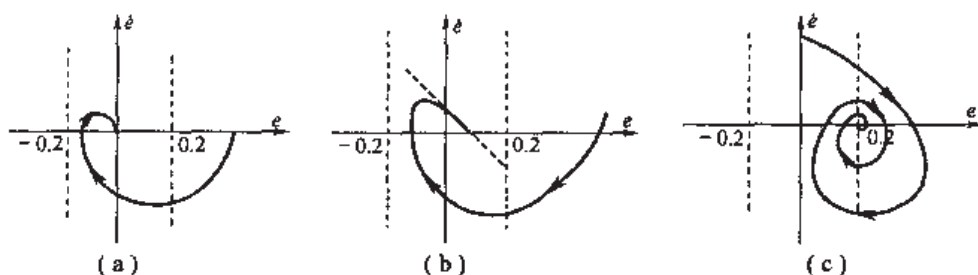
(1), 则从 $(0.75, 0.1)$ 出发的相轨迹如题 10-22 解图(b)所示。

(3) 当 $r(t) = 0.7t$ 时, 相轨迹方程为

$$\ddot{e} + 4\dot{e} + 4e = 2.8 \quad |e| \leq 0.2$$

$$\ddot{e} + 4e = 0 \quad |e| > 0.2$$

I 区内奇点 $(0.7, 0)$ 为虚奇点, 等倾线方程 $\dot{e} = -e + 0.7$ 。则从 $(0, 0.7)$ 出发的相轨迹如题 10-22 解图(c)所示。



题 10-22 解图

10-23 试分析下列系统在平衡状态处的稳定性。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ -x_1 - x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{bmatrix}$$

解 由题知平衡点为原点, 应用非线性系统线性化的方法, 在平衡点处线性化得

$$A = \frac{\partial f}{\partial X} \bigg|_{X=0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \bigg|_{X=0} = \begin{bmatrix} -1 + 3x_1^2 + x_2^2 & 1 + 2x_1x_2 \\ -1 + 2x_1x_2 & -1 + x_1^2 + 3x_2^2 \end{bmatrix} \bigg|_{X=0} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

所以 $|sI - A| = \begin{vmatrix} s+1 & -1 \\ 1 & s+1 \end{vmatrix} = s^2 + 2s + 2 = 0$, 系统的两个特征值都在左半平面, 则系统在平衡点附近渐近稳定。

10-24 试分析下列系统在原点处的稳定性。

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 - x_1^3$$

$$\text{解 } \dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = f(X) = \begin{bmatrix} f_1(X) \\ f_2(X) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_2 - x_1^3 \end{bmatrix}, J(X) = \frac{\partial f(X)}{\partial X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3x_1^2 & -1 \end{bmatrix}$$

设 $V(X) = \dot{X}^T P \dot{X}$, $P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix}$, 令 $Q = -I$, 则 $\dot{V}(X)$ 为负定。

$$\text{则 } \begin{bmatrix} 0 & -3x_1^2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3x_1^2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$