哈尔滨工业大学

2019年硕士研究生考试参考答案

考试科目：控制原理　　　　**考试科目代码：**[801]

一、（15分）

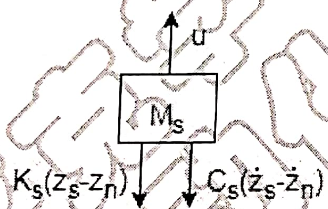
【解】:

对M_s：$u-K_s(z_s-z_n)-C_s(\dot{z}_s-\dot{z}_n)=M_s\ddot{z}_s$

对M_u：$K_s(z_s-z_n)+C_s(\dot{z}_s-\dot{z}_n)-u-K_t(z_n-z_r)=M_u\ddot{z}_n$

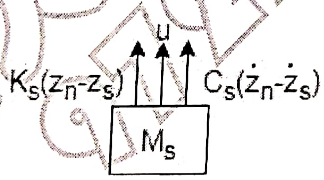
【点拨】: 此题注意受力方向的判断。方向判断方法如下：

（1）假设$z_s>z_n>0$，则弹簧K_s和阻尼器处于拉伸状态，则M_s受力情况如下



列写牛顿第二定律：$u-K_s(z_s-z_n)-C_s(\dot{z}_s-\dot{z}_n)=M_s\ddot{z}_s$

（2）假设$z_n>z_s>0$，则弹簧K_s和阻尼器处于压缩状态，则M_s受力情况如下



列写牛顿第二定律：$u+K_s(z_n-z_s)+C_s(\dot{z}_n-\dot{z}_s)=M_s\ddot{z}_s$

可清楚得知两种假设下式子相同。同理可分析M_u。

二、（15分）

【解】:

由$t_s=\dfrac{4}{\zeta\omega_n}=0.5s$，得：$a_1=2\xi\omega_n=16$

误差$E(s)=R(s)-Y(s)=R(s)[1-\dfrac{Y(s)}{R(s)}]=R(s)\dfrac{s^2+(16-b_0)s+a_2-b_1}{s^2+16s+a_2}$

阶跃输入$R(s)=\frac{A}{s}$下稳态误差：$e_{ss}=\lim\limits_{s\to 0}sE(s)=A(\frac{a_2-b_1}{a_2})=0$，得：$b_1=a_2$

斜坡输入$R(s)=\frac{0.1}{s^2}$下稳态误差：$e_{ss}=\lim\limits_{s\to 0}sE(s)=0.1(\frac{16-b_0}{a_2})\le 0.001$，

得：$b_0\ge 16-0.01a_2$，不妨设$b_0=16-0.01a_2+\alpha$，$\alpha\ge 0$

代入以上条件可得：

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{(16-0.01a_2+\alpha)s+a_2}{s^2+16s+a_2}$$

在单位阶跃输入下：

$$Y(s)=\frac{(16-0.01a_2+\alpha)s+a_2}{s(s^2+16s+a_2)}=\frac{1}{s}-\frac{s+8}{(s+8)^2+(\sqrt{a_2-64})^2}-\frac{\frac{0.01a_2-8-\alpha}{\sqrt{a_2-64}}\sqrt{a_2-64}}{(s+8)^2+(\sqrt{a_2-64})^2}$$

拉氏反变换得：

$$y(t)=1-e^{-8t}\cos\sqrt{a_2-64}t-\frac{0.01a_2-8-\alpha}{\sqrt{a_2-64}}\cdot e^{-8t}\sin\sqrt{a_2-64}t$$

求导得：

$$y'(t)=e^{-8t}[(16+\alpha-0.01a_2)\cos\sqrt{a_2-64}t+\frac{1.08a_2-128-8\alpha}{\sqrt{a_2-64}}\sin\sqrt{a_2-64}t]$$

由$y'(0)=0$，得：$16+\alpha-0.01a_2=0$

故$y'(t)=e^{-8t}\cdot\frac{1.08a_2-128-8\alpha}{\sqrt{a_2-64}}\sin\sqrt{a_2-64}t$，

第二个极值点（即峰值）在$\sqrt{a_2-64}t=\pi$时取得，得：$t_p=\frac{\pi}{\sqrt{a_2-64}}$

由$\sigma=\frac{y(t_p)-1}{1}=e^{-\frac{8\pi}{\sqrt{a_2-64}}}=5\%$，得：$a_2=134.38$

故$b_0=16-0.01a_2+\alpha=14.656+\alpha,\alpha\ge 0$

综上，$a_1=16$，$a_2=134.38$，$b_0\ge 14.656$，$b_1=134.38$

【注意】：本题为带零点的二阶系统，标准二阶系统的超调量公式不可用，但调节时间的公式仍可使用。另：也可设一反馈通道增益为K的非单位反馈系统求取。

三、（15 分）

【解】:

列 Routh 表：

$$
\begin{array}{llll}
s^4 & 1 & 7 & 6 \\
s^3 & 5 & 5 & \\
s^2 & \cancel{6} & \cancel{6} & \\
 & 1 & 1 & \text{辅助方程：} F(s)=s^2+1=0 \\
s^1 & \cancel{0} & \cancel{0} & \text{求导：} F'(s)=2s=0 \\
 & 2 & & \\
s^0 & 1 & &
\end{array}
$$

由辅助方程 $F(s)=s^2+1=0$，解得系统有两个纯虚根 $s_{1,2}=\pm j$；

Routh 表第一列不变号，故没有正实部根；

综上，d(s) 有 2 个纯虚根在虚轴上，有 2 个负实部根在左半平面。

四、（15 分）

【解】:

$$G(s)=\frac{\frac{3k}{100}(s+1)(s+\frac{10}{3})}{s^2(s+0.1)}=\frac{3k}{100}\cdot\frac{s^2+\frac{13}{3}s+\frac{10}{3}}{s^3+0.1s^2}=\frac{3k}{100}\cdot\frac{M(s)}{N(s)}$$

$1+G(s)=0 \Rightarrow \dfrac{\frac{3k}{100}(s+1)(s+\frac{10}{3})}{s^2(s+0.1)}=-1$，故绘制 180° 根轨迹

①$p_1=p_2=0$，$p_3=-0.1$，$n=3$；$z_1=-1$，$z_2=-\dfrac{10}{3}=-3.33$，$m=2$；

②渐进线为负实轴；

③实轴根轨迹：$(-\infty,-\dfrac{10}{3}]$ 和 $[-1,-0.1]$

④会和、分离点：$M'(s)N(s)-M(s)N'(s)=0$，即 $s(s^3+\dfrac{26}{3}s^2+11.3s+\dfrac{2}{3})=0$

解得：$s_1=0$，$s_2=-7.085$，$s_3=-0.0619$（舍去），$s_4=-1.52$（舍去）

⑤与虚轴交点：$D(s)=s^3+0.1s^2+\dfrac{3k}{100}(s^2+\dfrac{13}{3}s+\dfrac{10}{3})=0$，令 $s=j\omega$，得：

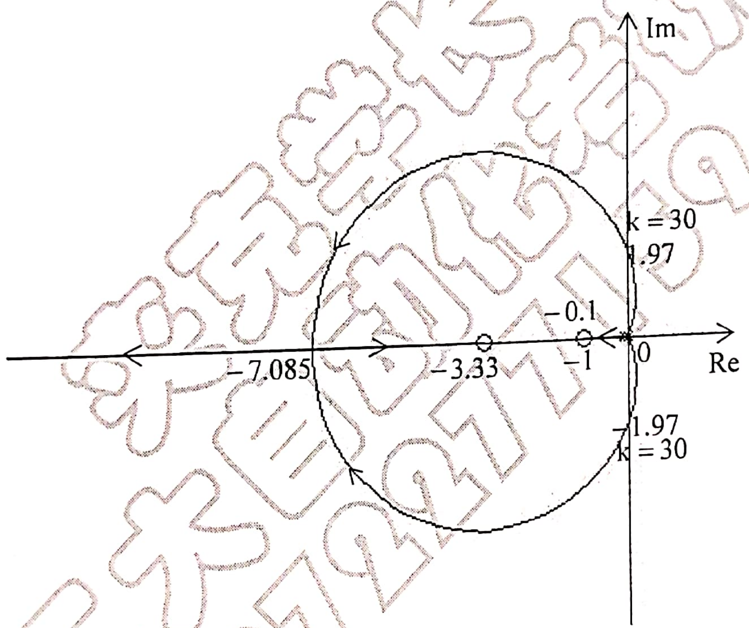
$$D(j\omega)=-\omega^3 j-0.1\omega^2+\frac{3k}{100}(-\omega^2+\frac{13}{3}j\omega+\frac{10}{3})=0$$

$$\begin{cases}-\omega^3+\dfrac{3k}{100}\cdot\dfrac{13}{3}\omega=0\\ -0.1\omega^2-\dfrac{3k}{100}\omega^2+\dfrac{3k}{100}\cdot\dfrac{10}{3}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\omega=0\\ k=0\end{cases}\text{或}\begin{cases}\omega=\pm1.97\\ k=30\end{cases}$$

⑥出射角：$\angle(p_1-z_1)+\angle(p_1-z_2)-2\theta_{p_1}-\angle(p_1-p_3)=-(2l+1)\times180°$

$\Rightarrow\ \theta_{p_1}=90°$，同理 $\theta_{p_2}=-90°$；

绘制根轨迹如图：



五、（15 分）

【解】

（1）$20\lg K=20\ \Rightarrow\ K=10$，转折频率 $\omega_1=10$，低频段斜率为 $\dfrac{40}{\lg0.1-\lg10}=-20$，

$$\therefore\ G(s)=\frac{10(0.1s+1)}{s}$$

（2）系统为一型系统，故阶跃响应没有静误差。

$$\Phi(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{s+10}{2s+10}$$

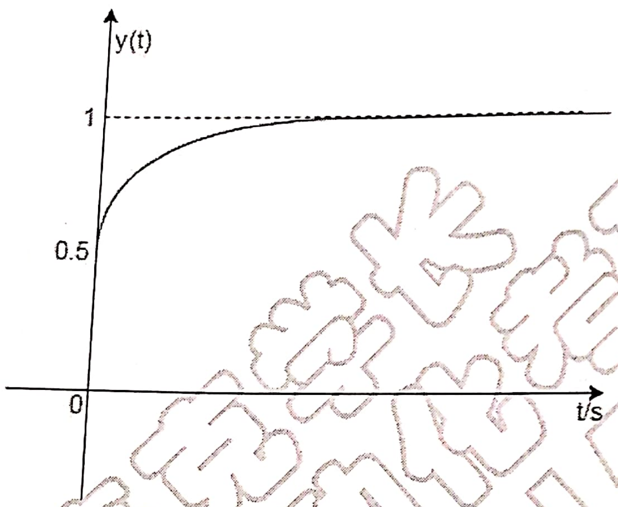
单位阶跃输入下

$$Y(s)=\frac{s+10}{2s+10}\cdot\frac{1}{s}=\frac{1}{s}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+5}$$

拉式反变换得：

$$y(t)=1-\frac{1}{2}e^{-5t}$$

做 y(t) 图像如下：



六、（15 分）

【解】

（1）$G(s)=\frac{1-e^{-Ts}}{s}\cdot\frac{1}{s^2}=(1-e^{-Ts})\frac{1}{s^3}$，$G(z)=(1-z^{-1})\frac{T^2z(z+1)}{2z(z-1)^3}=\frac{z+1}{2(z-1)^2}$

（2）$1+kG(z)=0\ \Rightarrow\ \frac{k(z+1)}{2(z-1)^2}=-1$，故绘制 180° 根轨迹。

①$p_1=p_2=1$，$n=2$；$z_1=-1$，$m=1$；

②渐进线为负实轴；

③实轴根轨迹：$(-\infty,-1]$；

④会和、分离点：$kG(z)=\frac{k(z+1)}{2(z^2-2z+1)}=\frac{k}{2}\cdot\frac{N(z)}{M(z)}$，

$N'(z)M(z)-N(z)M'(z)=0$，即 $z^2+2z-3=0$，解得 $z_1=1$，$z_2=-3$；

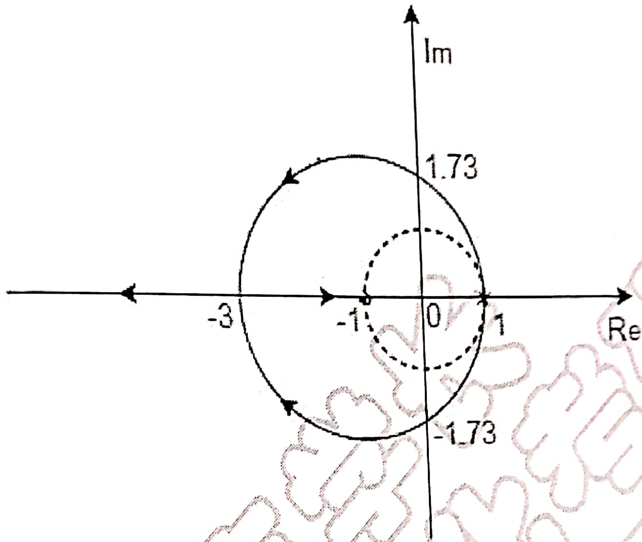
⑤与虚轴的交点：$D(z)=2(z-1)^2+k(z+1)=2(z^2-2z+1)+k(z+1)=0$

$$D(j\omega)=2(-\omega^2-2j\omega+1)+k(j\omega+1)=0$$

$\begin{cases}-2\omega^2+2+k=0\\-4\omega+k\omega=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\omega=0\\k=-2\end{cases}$（舍去）或 $\begin{cases}\omega=\pm\sqrt{3}\\k=4\end{cases}$

⑥出射角：$\angle(p_1-z_1)-2\theta_{p_1}=-(2l+1)\times180° \Rightarrow \theta_{p_1}=90°$，同理可得 $\theta_{p_2}=-90°$

作图如下：



由根轨迹图可知，当 $k>0$ 时系统没有在单位圆内的根，故系统不稳定。

七、（15 分）

【解】：

$G(s)=\dfrac{2(s+1)^2}{s^3}$，$G(j\omega)=\dfrac{-4}{\omega^2}+\dfrac{2(1-\omega^2)}{\omega^3}j$，

$|G(j\omega)|=\dfrac{\omega^2+1}{\omega^3}$，$\angle G(j\omega)=2\arctan\omega-270°$

当 $\omega\to0^+$ 时，$|G(j\omega)|\to+\infty$，$\angle G(j\omega)\to-270°$；

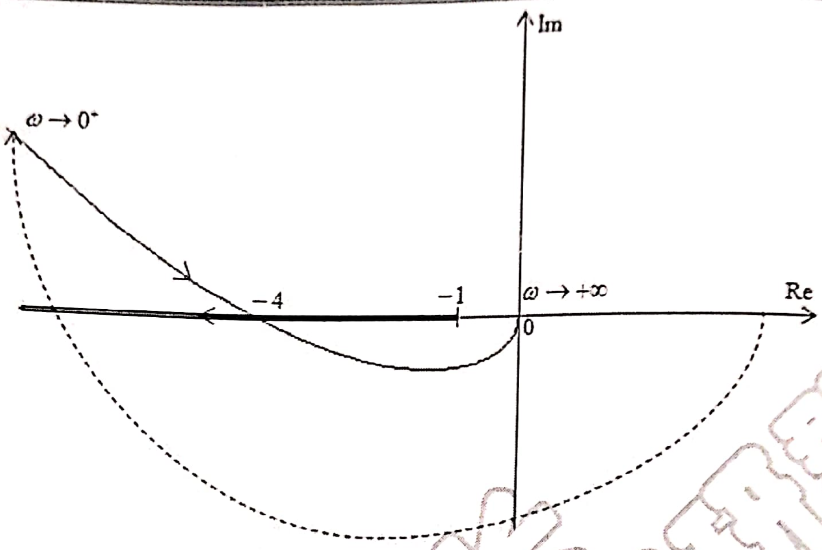
当 $\omega\to+\infty$ 时，$|G(j\omega)|\to0$，$\angle G(j\omega)\to-90°$；

当 $\omega=1$ 时，$G(j\omega)$ 与负实轴交于点（-4，$j0$）；

饱和特性的负倒描述函数为：$-\dfrac{1}{N(A)}=-\dfrac{\pi}{2[\arcsin\frac{1}{A}+\frac{1}{A}\sqrt{1-(\frac{1}{A})^2}]}, A\ge1$

当 $A=1$ 时，$-\dfrac{1}{N(A)}=-1$；当 $A\to+\infty$ 时，$-\dfrac{1}{N(A)}\to-\infty$；

绘制 $G(j\omega)$ 的 Nyquist 图和饱和特性的负倒描述函数图如下：



由图知当 A 由 $1\to+\infty$ 时，$-\dfrac{1}{N(A)}$ 与 $G(j\omega)$ 存在唯一交点，交点处 $-\dfrac{1}{N(A)}=-4$，即

$A=5.0596$，此时 $-\dfrac{1}{N(A)}$ 由稳定区穿过不稳定区，故系统不存在稳定的自持振荡点。当 A 由 $1\to 5.0596$ 时，系统稳定，当 A 由 $5.0596\to+\infty$ 时，系统不稳定，故非大范围稳定。

八、（15 分）

【解】：

（1）$\ddot{x}-M(1-x^2)\dot{x}+x=0$，令 $\ddot{x}=\dot{x}=0$，得：$x=0$，奇点坐标为 $(0,0)$。

在奇点 $(0,0)$ 附近将方程线性化：

原方程变形得：$\ddot{x}=M(1-x^2)\dot{x}-x$，

线性化后方程：$\ddot{x}=\left.\dfrac{\partial\ddot{x}}{\partial\dot{x}}\right|_{\substack{x=0\\ \dot{x}=0}}\cdot\dot{x}+\left.\dfrac{\partial\ddot{x}}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\ \dot{x}=0}}\cdot x=M\dot{x}-x$，即 $\ddot{x}-M\dot{x}+x=0$；

特征方程：$\lambda^2-M\lambda+1=0$，由 $2>M>0$ 知 $\Delta=M^2-4<0$，

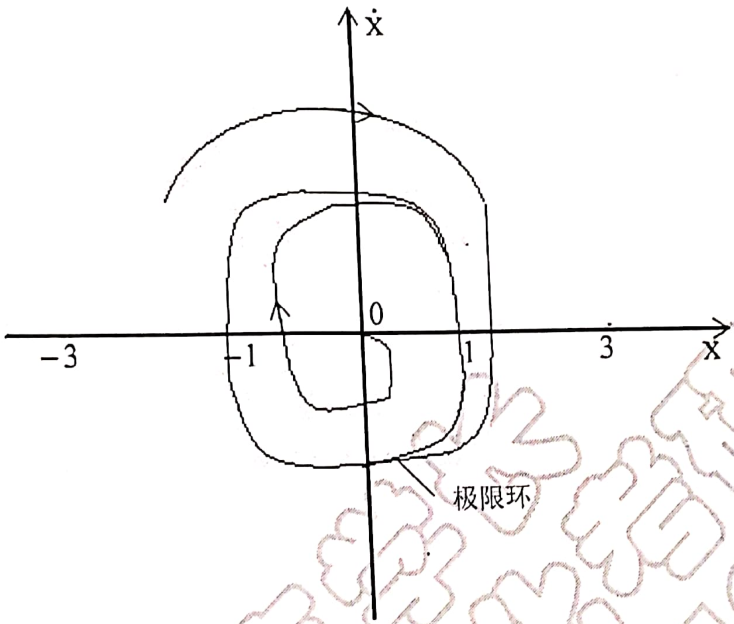
故方程的根为 $\lambda_{1,2}=\dfrac{M\pm\sqrt{4-M^2}j}{2}$，此为一对共轭正实部根，故奇点 $(0,0)$ 为不稳定焦点。

（2）原系统的特征方程为：$\lambda^2-M(1-x^2)\lambda+1=0$，

$$\begin{cases}2\zeta\omega_n=-M(1-x^2)\\ \omega_n^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\zeta=\dfrac{M}{2}(x^2-1)\\ \omega_n=1\end{cases},$$

当$\zeta>0$，即$|x|>1$时，系统收敛；当$\zeta<0$，即$|x|<1$时，系统发散；

绘制系统相平面图如下：



由相平面图可知，系统存在稳定的极限环。

【注】：可尝试李雅普诺夫函数操作。

九、（15 分）

【解】：

（1）由题有：$\dot{x}_2=y-r=x_1-r=x_1$，联立原状态空间表达式可得：

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\end{cases},\quad A=\begin{bmatrix}-3&0\\1&0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}$$

$$M=\begin{bmatrix}B&AB\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-3\\0&1\end{bmatrix},\ \text{rank}M=2,$$

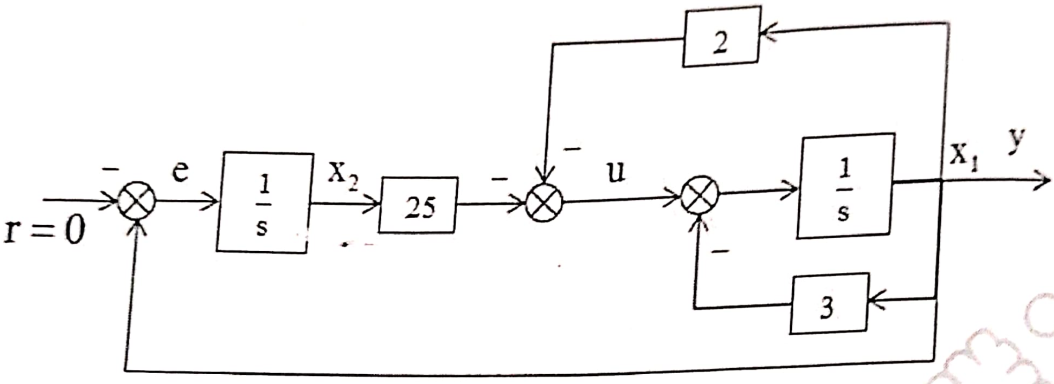
故系统能控，可采用状态反馈对系统任意配置极点。

引入状态反馈：$u=KX=\begin{bmatrix}k_1&k_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$

由题知极点配置后，系统的特征方程为：$s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2=s^2+5s+25=0$

$\det[sI-(A-BK)]=s^2+(3+k_1)s+k_2=s^2+5s+25$，解得：$K=\begin{bmatrix}2&25\end{bmatrix}$

（2）绘制系统的完整结构框图如下：



十、（15 分）

【解】：

（1）坐标原点 (0,0) 是其唯一的平衡状态。

设正定的标量函数为：$V(x)=x_1^2+x_2^2$，$\dot{V}(x)=2x_1\dot{x}_1+2x_2\dot{x}_2$

将状态方程代入 $\dot{V}(x)$ 得：$\dot{V}(x)=-2(x_1^2+x_2^2)^2$，可知 $\dot{V}(x)$ 为负定，故系统在原点的平衡状态是渐进稳定的。

（2）当 $\|x\|\to\infty$ 时，有 $V(x)\to\infty$，故系统在原点处为大范围渐进稳定。