

测试卷1 极限及连续性

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求。

(1) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时，与 \sqrt{x} 等价的无穷小量是 () B

- (A) $1 - e^{\sqrt{x}}$ (B) $\ln(1 + \sqrt{x})$ (C) $\sqrt{1 + \sqrt{x}} - 1$ (D) $1 - \cos \sqrt{x}$

$$\sim -\sqrt{x}$$

$$\sim \sqrt{x}$$

$$\sim \frac{1}{2}\sqrt{x}$$

$$\sim \frac{1}{2}(\sqrt{x})^2$$

$$e^x - 1 \sim x$$

$$x \rightarrow 0$$

$$(1 + \sqrt{x})^{\frac{1}{2}} - 1$$

$$\sim \frac{1}{2}\sqrt{x}$$

(2) 设当 $x \rightarrow 0$ 时， $\arctan x - (ax + bx^3)$ 是比 $x(1 - \cos x)$ 高阶的无穷小量，则 ()

(A) $a = 1, b = -\frac{1}{6}$ (B) $a = 1, b = \frac{1}{6}$

(C) $a = 1, b = -\frac{1}{3}$ (D) $a = 1, b = \frac{1}{3}$

"上下同阶"

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - (ax + bx^3)}{x(1 - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) - (ax + bx^3)}{\frac{1}{2}x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-a)x - (\frac{1}{3} + b)x^3 + o(x^3)}{\frac{1}{2}x^2} = 0$$

$$\therefore 1-a=0, \frac{1}{3}+b=0 \quad \therefore a=1, b=-\frac{1}{3}$$

(3) 设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 不存在, $\lim_{x \rightarrow a} h(x)$ 不存在, 则

① $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)]$ 不存在; ② $\lim_{x \rightarrow a} [g(x) + h(x)]$ 不存在;

③ $\lim_{x \rightarrow a} [h(x) \cdot g(x)]$ 不存在; ④ $\lim_{x \rightarrow a} [g(x) + f(x)]$ 不存在;

反证: 设 $\lim_{x \rightarrow a} [g(x) + f(x)]$ 存在.

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} [g(x) + f(x)] - \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

以上命题中正确的个数是 ()

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

① $x \rightarrow 0: f(x) = x, g(x) = \frac{1}{x}, f(x)g(x) \equiv 1$ 存在. 矛盾

② $x \rightarrow 0$: $g(x) = \frac{1}{x}$, $h(x) = -\frac{1}{x}$, $g(x) + h(x) \equiv 0$

③ $x \rightarrow 0$: $g(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$, $h(x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$, $g(x)h(x) \equiv 0$.

直接回答: 若已知 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \neq 0$, 则①是否正确?

答: 正确. 反证, 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(x)}{f(x)}$ 存在

与 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 不存在矛盾.

极限运算性质

(4) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2} = (C)$

(A) 0

(B) 6

(C) 36

(D) ∞

解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - \frac{1}{6}(6x)^3 + o(x^3) + xf(x)}{x^3}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(6 - 36x^2 + f(x)) + o(x^3)}{x^3} = 0$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 - 36x^2 + f(x)}{x^2} = 0 \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2} = 36$

(5) 设函数 $f(x) = x \tan x e^{\sin x}$, 则 $f(x)$ 是

(A) 偶函数

(B) 无界函数

(C) 周期函数

(D) 单调函数

A) $e^{\sin x}$ 非奇非偶

B) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \infty$

(6) 函数 $f(x) = \frac{x - x^3}{\sin \pi x}$ 的可去间断点个数为 (C)

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 无穷多个

无定义点 $x=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$f(x) = \frac{x(1-x)(1+x)}{\sin \pi x}$$

当 $x = \pm 2, \pm 3, \dots$

$$\lim_{x \rightarrow \pm 2, \pm 3, \dots} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1-x)(1+x)}{\sin \pi x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\pi x} = \frac{1}{\pi}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(1-x)(1+x)}{\sin \pi x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(1-x)}{\sin \pi x} \left(\frac{0}{0} \right) \xrightarrow{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2}{\pi \cos \pi x}} = \frac{2}{\pi}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(1-x)(1+x)}{\sin \pi x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-2(1+x)}{\sin \pi x} \left(\frac{0}{0} \right) \xrightarrow{\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-2}{\pi \cos \pi x}} = \frac{2}{\pi}$$

(7) 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x) + a}{x} = 6$, 则 a 的值为 (A).

- (A) -1 (B) 1 (C) 2 (D) 3

解: $\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x) + a}{x} = 6x + o(x)$
 $= 1 + 6x$

(8) 设函数 $f(x) = \frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}} - 1}$, 则 ()

$e^x < \begin{cases} x \rightarrow +\infty & \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow -\infty & \rightarrow 0^- \end{cases}$
 $x \rightarrow 0 \rightarrow 1$

(A) $x=0, x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点;

(B) $x=0, x=1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点;

(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点, $x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点;

(D) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点, $x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点.

无定义点 $x=1, x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}} - 1} = \infty \quad \text{第二类}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}} - 1} = 0 \quad \text{第一类}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}} - 1} = \frac{1}{0-1} = -1 \quad \text{跳}$$

二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分。

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{(1 + \cos x) \ln(1 + x)} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

解：原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{2x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x}{2x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos \frac{1}{x}}{2x}$$

→ 0
= 0

$$= \frac{3}{2}$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[2x - x^2 \ln \left(1 + \frac{2}{x} \right) \right] = \underline{\hspace{2cm}}.$$

解：原式 $\xrightarrow{\text{令 } t = \frac{1}{x}}$ $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t - \ln(1+2t)}{t^2}$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(2t)^2}{t^2} = 2.$$

通分。
分子分母通分

有理化、
倒代换
(变量替换)

$$\frac{x - \ln(1+x)}{\sim \frac{1}{2}x}$$

(11) 已知当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1+ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1$ 与 $\cos x - 1$ 是等价无穷小, 则常数 $a = \underline{\hspace{2cm}}.$

解: $(1+ax^2)^{\frac{1}{2}} - 1 \sim \frac{1}{2}ax^2$

$\cos x - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$

$\therefore \frac{1}{2}a = -\frac{1}{2}$

$\therefore a = -\frac{1}{1}$

(12) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1-e^{\tan x}}{\arcsin \frac{x}{2}}, & x > 0, \\ ae^{2x}, & x \leq 0. \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $a = \underline{-2}$.

[分析] $f(x)$ 在 x_0 处连续

$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$

解: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-e^{\tan x}}{\arcsin \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\tan x}{\frac{x}{2}} = -2$

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow -2 = a$

(13) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}) = \underline{\infty}$.

解: 原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+3\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}})(\sqrt{n+3\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}})}{\sqrt{n+3\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}}}$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3\sqrt{n}) - (n-\sqrt{n})}{\sqrt{n+3\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}}}$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4\sqrt{n}}{4\sqrt{n}} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \text{ "抓大头" }$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}}} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \text{ "抓大头" }$$

$$= \frac{4}{2} = 2$$

$$(14) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 - 3n + 1} + \frac{2}{n^2 - 3n + 2} + \dots + \frac{n}{n^2 - 3n + n} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(几项和; 分子分母都加1 —— 分子求和, 分母加1倍)

解:

$$\text{由 } \frac{\frac{1}{2}n(1+n)}{n^2 - 3n + n} = \sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2 - 3n + i} = \frac{\frac{1}{2}n(1+n)}{n^2 - 3n + 1}$$

$$\text{又 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(1+n)}{n^2 - 3n + n} = \frac{1}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(1+n)}{n^2 - 3n + 1}$$

\therefore 原极限为 $\frac{1}{2}$

测试卷1 极限及连续性 解答题

2020年1月10日

三、解答题：15~23 小题，共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x$. (1[∞]) "e 抬起来"

解：原式 = $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1 \right)}{\frac{1}{x}}$

令 $t = \frac{1}{x}$ $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t + \cos t - 1}{t}$

$= \lim_{t \rightarrow 0} \left(2 \cdot \frac{\sin 2t}{2t} + \frac{\cos t - 1}{t} \right) \xrightarrow{0}$

$= e^2$

□

$u^v = e^{v \ln u}$
 $\ln u \sim u - 1$
 $(u \rightarrow 1)$
 $u^v = e^{v(u-1)}$
 $u \rightarrow 1$

(16) (本题满分 10 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan 2x^2 \right) x^2$. (0·∞)

解：原式 = $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan 2x^2}{x^{-2}}$

令 $t = x^2$ $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan 2t}{t^{-1}}$

$\left(\frac{0}{0} \right) \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{2}{1+(2t)^2}}{-t^{-2}}$

$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2t^2}{1+4t^2}$

$= \frac{1}{2}$

□.

"提公因式" $e^{\arctan x} - e^x = e^x (e^{\arctan x - x} - 1)$

(17) (本题满分 10 分) 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x^5 + 7x^4 + 2)^a - x] = b, b \neq 0$, 求 a, b 的值.

解: 由题设.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^5 + 7x^4 + 2)^a - x}{x} = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^5 + 7x^4 + 2)^a}{x} = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{5a-1} (1 + 7x^{-1} + 2x^{-5})^a = 1$$

$$\therefore 5a-1=0 \quad \therefore a=\frac{1}{5}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{(x^5 + 7x^4 + 2)^{\frac{1}{5}} - x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\underbrace{(1 + 7x^{-1} + 2x^{-5})^{\frac{1}{5}} - 1}_{\rightarrow 0} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \frac{1}{5} (7x^{-1} + 2x^{-5})$$

$$= \frac{7}{5}$$

(18) (本题满分 10 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right)$.

解: 原式 = $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2+1}{1+1} + 0 \right) = \frac{3}{2}$

(2000) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}} + e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}} + 1} + \frac{\sin x}{x} \right) = 0 + 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(2 - \frac{\sin x}{x} \right) = 2 - 1 = 1$$

\therefore 原极限为 1

$f(x)$ 有界 $\sup [a, b]$: 连续 \Rightarrow 有界

② (a, b) : (a, b) 连续, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 存在

(19) (本题满分 10 分) 设 $f(x) = \frac{(x^3 - 1)\sin x}{(x^2 + 1)|x|}$, 讨论 $f(x)$ 在其定义域上的有界性.

解: $f(x)$ 定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x^3 - 1)\sin x}{(x^2 + 1)x} = -1 \quad \text{存在} \\ \textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x^3 - 1)\sin x}{(x^2 + 1)(-x)} = 1 \quad \text{存在} \\ \textcircled{3} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 1}{x(x^2 + 1)} \sin x \quad \text{有界} \\ \textcircled{4} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 1}{-x(x^2 + 1)} \sin x \quad \text{有界} \end{aligned}$$

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 内连续
 $\therefore f(x)$ 在其定义域上有界

再讨论

(20) (本题满分 11 分) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0 < x_1 < \pi$, $x_{n+1} = \sin x_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

(I) 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求该极限;

(20) (本题满分 11 分) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0 < x_1 < \pi$, $x_{n+1} = \sin x_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

(I) 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求该极限;

(II) 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

解:

(I) $\because 0 < x_1 < \pi$

设 $n=k$ 时, $0 < x_k < \pi$, $k \in \mathbb{N}^+$.

$\therefore x_{k+1} = \sin x_k \in (0, 1] \subset (0, \pi)$

由归纳法, $0 < x_n < \pi$, $n \in \mathbb{N}^+$.

$\therefore x_{n+1} = \sin x_n < x_n$

$\therefore \{x_n\}$ 单调递减且有下界 0

由单调有界准则, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 有 $a = \sin a$

易证唯一解 $a=0$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

(II) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin x_n}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}}$

由 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ (1°)

$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(\frac{\sin x}{x} - 1 \right)}$

$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}} \sim -\frac{1}{6}x^3$

$= e^{-\frac{1}{6}}$

由归并原理

原极限为 $e^{-\frac{1}{6}}$

(21) (本题满分 11 分) 证明: 数列 $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \dots$ 的极限存在.

证: 即数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

(step 1 单调性)

证 $x_2 = \sqrt{2+x_1} > \sqrt{2} = x_1$

设对 $k \in \mathbb{N}^+$ 有 $x_{k+1} > x_k$ 成立.

(step 2 有界)

(由法二证明).

$\{x_n\}$ 有上界 2.

$$\text{有 } X_{k+2} = \sqrt{X_{k+1} + 2} > \sqrt{X_k + 2} = X_{k+1}$$

由归纳法. $X_{n+1} > X_n, n \in \mathbb{N}^*$.

$\{X_n\}$ 单调递增

证法二

$$X_{n+1} - X_n = \sqrt{2 + X_n} - X_n$$

$$= \frac{(2 - X_n)(X_{n+1})^{10}}{\sqrt{2 + X_n} + X_n}$$

由 $X_1 < 2$, 设 $X_k < 2, k \in \mathbb{N}^*$.

$$\therefore X_{k+1} = \sqrt{2 + X_k} < \sqrt{2 + 2} = 2$$

由归纳法. $X_n < 2, n \in \mathbb{N}^*$.

$$\therefore X_{n+1} - X_n > 0$$

$\therefore \{X_n\}$ 单调递增

1 由单调有界准则.

1 数列 $\{X_n\}$ 极限存在. \square

1 (设 $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = a$. 有 $a = \sqrt{a+2}$.)

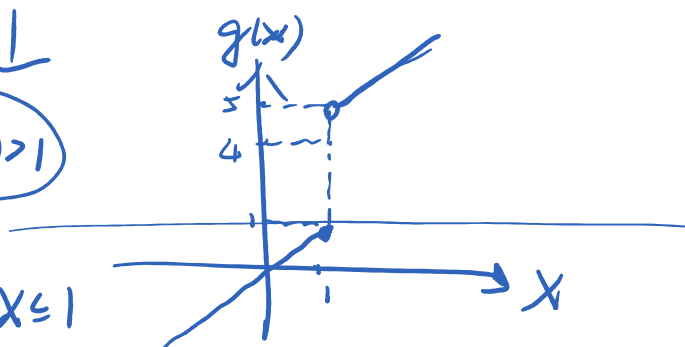
1 得 $a=2$ 或 -1 (舍去).

1 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = 2$

(22) (本题满分 11 分) 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ 2-x, & x > 1 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ x+4, & x > 1 \end{cases}$. 研究 $f[g(x)]$ 的连续性.

$$\text{解: } f[g(x)] = \begin{cases} g(x)^2, & g(x) \leq 1 \\ 2 - g(x), & g(x) > 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ 2 - (x+4), & x > 1 \end{cases} = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ -2-x, & x > 1 \end{cases}$$



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f[g(x)] = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(g(x)) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^+} f(g(x)) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(g(x))$$

$\therefore x=1$ 为 $f(g(x))$ 的跳跃间断点.

(23) (本题满分 11 分) 判断 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1+x^n}$ ($x \geq 0$) 的连续性. 若有间断点, 需判别其类型.

解.

“设完或的函数” \rightarrow 分段函数

$$x^n = \begin{cases} +\infty, & x > 1 \\ 1, & x = 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$$

解: 以 $x=1$ 为分界点

$$\textcircled{1} \text{ 当 } x=1 \text{ 时, } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1+x^n} = \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ 当 } x > 1 \text{ 时, } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1+x^n} = 1$$

$$\textcircled{3} \text{ 当 } 0 \leq x < 1 \text{ 时, } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1+x^n} = 0$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$$

$\therefore x=1$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点.

□