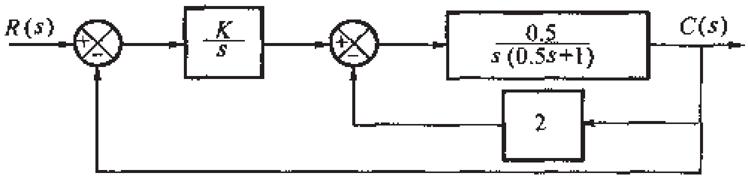
第4章 根轨迹法

书后习题解析

4-1 某反馈系统的方框图如题4-1图所示。试绘制 K 从0变到∞时该系统的根轨迹图。



题4-1图

解 给定控制系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K}{s}\cdot\frac{\dfrac{\dfrac{1}{2}}{s\left(\dfrac{1}{2}s+1\right)}}{1+\dfrac{\dfrac{1}{2}}{s\left(\dfrac{1}{2}s+1\right)}\times 2}=\frac{K}{s(s^2+2s+2)}$$

给定系统的根轨迹方程为

$$\frac{K}{s[s-(-1+\mathrm{j})][s-(-1-\mathrm{j})]}=-1$$

代表180°根轨迹。

(1)开环极点 $p_1=-1+\mathrm{j}$, $p_2=-1-\mathrm{j}$, $p_3=0$, $n=3$,无开环零点,即 $m=0$,故当 $k\to\infty$ 时三条根轨迹均趋向无穷远处。

(2)三条渐近线在实轴上相交于一点,其坐标为

$$\sigma_a=\frac{\sum_{j=1}^{n}p_j-\sum_{i=1}^{m}z_i}{n-m}=-\frac{2}{3}$$

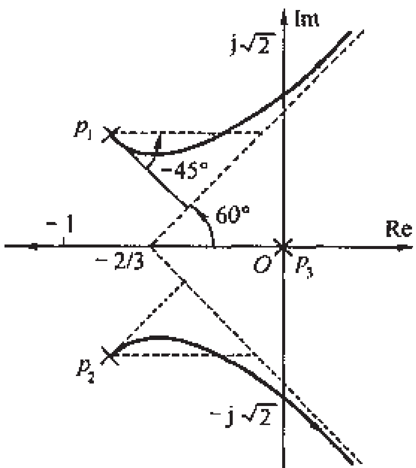
渐近线与实轴正方向的夹角为

$$\varphi_i=\frac{(2l+1)\pi}{n-m}=\frac{(2l+1)\pi}{3}$$

$$(l=0,1,2,\cdots,n-m-1)$$

解得 $\varphi_1=60°$, $\varphi_2=180°$, $\varphi_3=-60°$。

(3)$(-\infty,0]$属于实轴上的根轨迹。

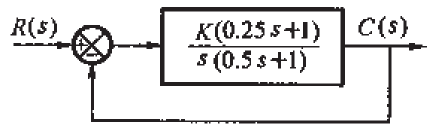


题4-1解图

(4)出射角 $\theta_{p_1}=180°-\angle(p_1-p_2)-\angle(p_1-p_3)=180°-90°-135°=-45°,\theta_{p_2}=+45°$。

(5)计算根轨迹与虚轴相交点的坐标。给定系统的特征方程为 $s^3+2s^2+2s+K=0$，令 $s=\mathrm{j}w$，则求得 $w=0$ 及 $w=\pm\sqrt{2}$，$K=2w^2$，根轨迹与虚轴有三个交点，其坐标分别是$(0,\mathrm{j}0)$，$(0,\mathrm{j}\sqrt{2})$，$(0,-\mathrm{j}\sqrt{2})$。根轨迹与虚轴相交点对应的 K 值为 $K=0$ 和 $K=2\times(\sqrt{2})^2=4$。则当 $0\leqslant K<4$ 时系统稳定。根轨迹大致图形如题 4－1 解图所示。

4－2 试应用根轨迹法确定题 4－2 图所示系统无超调响应时的开环增益 K。



题 4－2 图

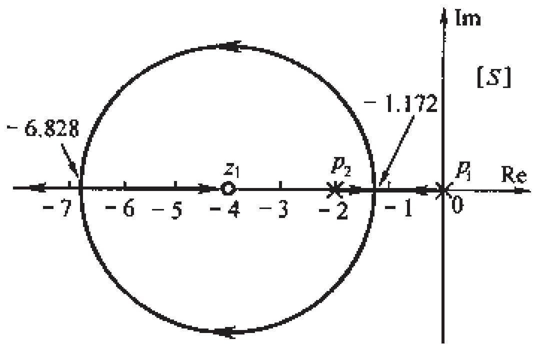
解 题 4－2 图所示系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{K(0.25s+1)}{s(0.5s+1)}$，化成标准形式，得 $G(s)=\dfrac{k(s+4)}{s(s+2)}$，式中 $k=0.5K$。则根轨迹方程为 $\dfrac{k(s+4)}{s(s+2)}=-1$，属于 180°根轨迹。

(1)开环极点 $p_1=0,p_2=-2,n=2$；开环零点 $z_1=-4,m=1$。所以系统具有两条根轨迹及一条渐近线。

(2)渐近线与实轴正方向的夹角为 $\varphi=\dfrac{(2l+1)\pi}{n-m}$，取 $l=n-m-1=0$，得 $\varphi=180°$。

(3)$(-\infty,-4]$和$[-2,0]$属于实轴上的根轨迹。

(4)计算根轨迹在实轴上的分离点与会合点坐标。由 $\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{1}{d-p_j}=\sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{1}{d-z_i}$，有 $\dfrac{1}{d}=\dfrac{1}{d+2}=\dfrac{1}{d+4}$，解得分离点坐标 $d_1=-1.172$ 及会合点坐标 $d_2=-6.828$。



题 4－2 解图

给定系统的根轨迹图如题 4－2 解图所示，在复平面上根轨迹是以零点 $z_1=-4$ 为圆心、以零点到分离点(或会合点)的距离为半径的圆。系统无超调响应时，系统的特征根全部为实数。即在根轨迹图上对应$(-\infty,-4)$和$(-2,0)$两区段。系统特征方程为 $0.5s^2+(1+0.25K)s+K=0$，即 $K=\dfrac{-(0.5s^2+s)}{0.25s+1}$，将 $s=-1.172$及 $s=-6.828$ 代入上式，求得 $K_1=0.686,K_2=23.31$。所以系统无超调响应时开环增益 K 的取值范围为 $0\leqslant K\leqslant0.686$ 或 $23.31\leqslant K<\infty$。

4－3 已知某负反馈系统的前向通道及反馈通道的传递函数分别为

$$G(s)=\frac{k'(s+0.1)}{s^2(s+0.01)},\quad H(s)=0.6s+1$$

试绘制该系统的根轨迹图。

解 给定系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{k'(s+0.1)(0.6s+1)}{s^2(s+0.01)}$$

化成标准形式，得

$$G(s)H(s)=\frac{k(s+0.1)(s+1.67)}{s^2(s+0.01)}$$

式中 $k=0.6k'$。

(1)开环极点 $p_1=p_2=0, p_3=-0.01, n=3$;开环零点 $z_1=-0.1, z_2=-1.67, m=2$。

(2)根轨迹有一条渐近线,与实轴正方向的夹角为 180°。

(3)$(-\infty,-1.67)$和$[-0.1,-0.01]$属于实轴上的根轨迹。

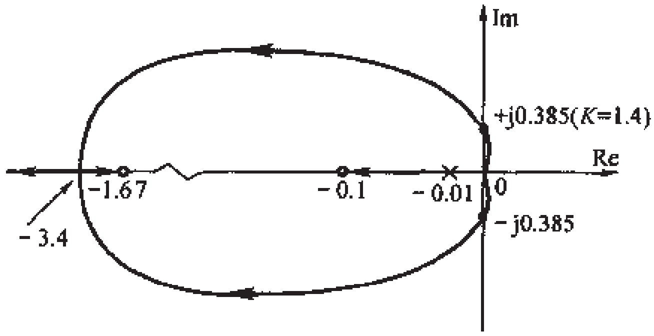
(4)确定根轨迹与实轴会合点,由$\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{G(s)H(s)}\right]\Big|_{s=\alpha}=0$,解得 $\alpha_1=0, \alpha_2=-3.4$。

(5)将 $s=jw$ 代入系统的特征方程,即 $1+G(jw)H(jw)$,有

$$-w^3+1.77kw=0$$

$$-(0.01+k)w^2+0.167k=0$$

最后解得 $w_1=0, w_{2,3}=\pm 0.385$,对应的参变量 $k=0.084$,增益值为 $K=\frac{k\times 0.1\times 1.67}{0.01}=1.4\ s^{-2}$。

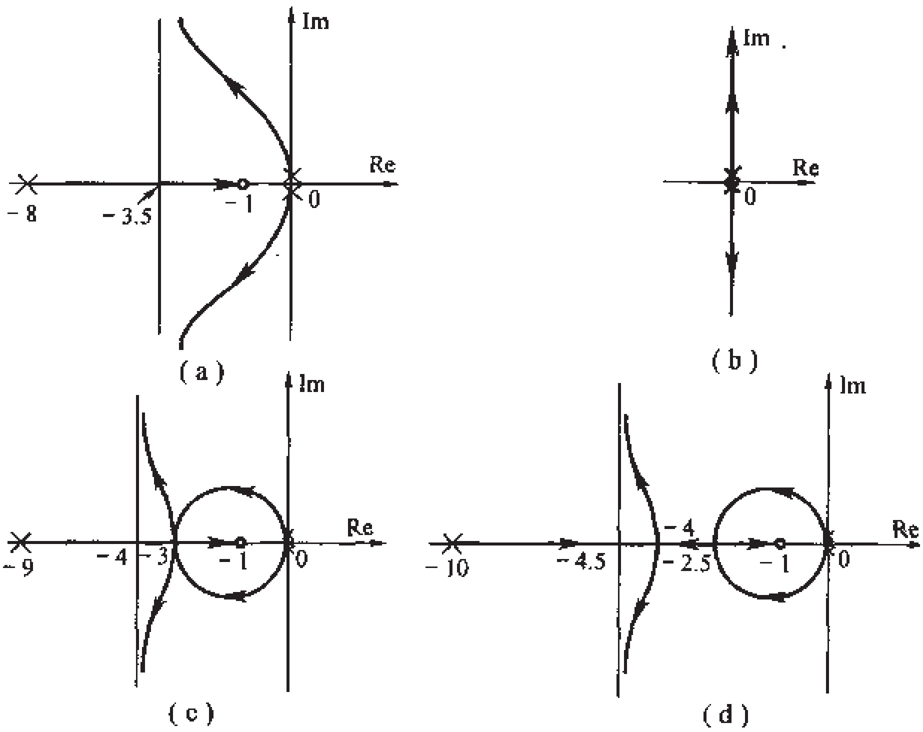


题 4-3 解图

给定系统根轨迹的大致图形如题 4-3解图所示。注意绘制此类系统的根轨迹图时,切不可忽略根轨迹与虚轴相交点坐标的计算。

4-4　设某反馈系统的特征方程为 $s^2(s+a)+k(s+1)=0$。试确定以 k 为参变量的根轨迹与负实轴无交点、有一个交点与有两个交点时的参量 a,并绘制相应的根轨迹图。

解　由题意可得给定系统的根轨迹方程为$\frac{k(s+1)}{s^2(s+a)}=-1$,由$\frac{2}{d}+\frac{1}{d+a}=\frac{1}{d+1}$,求得根轨迹与负实轴交点的表达式



题 4-4 解图

$$d=\frac{-(3+a)\pm\sqrt{(a-1)(a-9)}}{4}$$

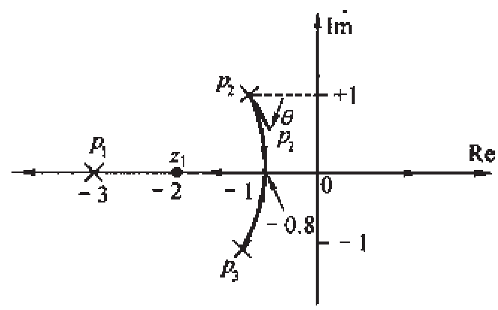
(1)当根轨迹与负实轴无交点,即 d 无实数解,则$(a-1)(a-9)<0$,解得此时参数 a 的取值范围为 $1<a<9$。当 $a=8$ 时根轨迹的大致图形如题 4-4 解图(a)所示。

(2)当根轨迹与负实轴有一个交点,即 d 为两相等实根,此时 $a=1$ 或 $a=9$。$a=1$ 及 $a=9$ 时根轨迹的大致图形分别如解图(b),(c)所示。

(3)当根轨迹与负实轴有两个交点,即 d 为两不等实根,此时$(a-1)(a-9)>0$,解得 $a>9$。$a=10$ 时根轨迹的大致图形如解图(d)所示。

4-5 设某正反馈系统的开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{k(s+2)}{(s+3)(s^2+2s+2)}$,试为该系统绘制以 k 为参变量的根轨迹图。

解 该正反馈系统的根轨迹方程为 $\dfrac{k(s+2)}{(s+3)(s^2+2s+2)}=+1$,需按 0°根轨迹绘制。



题 4-5 解图

(1)开环极点,$p_1=-3$,$p_{2,3}=-1\pm j$,$n=3$;开环零点 $z_1=-2$,$m=1$。

(2)根轨迹具有两条渐近线,其与实轴正方向的夹角为

$$\varphi_i=\frac{2l\pi}{n-m}\quad(l=0,1,\cdots,n-m-1)$$

分别求得 $\varphi_1=0°$,$\varphi_2=180°$。

(3)$[-3,-\infty)$和$[-2,+\infty)$为实轴上的根轨迹。

(4)出射角

$$\theta_{p_2}=0°+\angle(p_2-z_1)-\angle(p_2-p_1)-\angle(p_2-p_3)=0°+45°-26.6°-90°=-71.6°$$

$$\theta_{p_3}=-\theta_{p_2}=+71.6°$$

(5)根轨迹与实轴交点

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{(s+3)(s^2+2s+2)}{k(s+2)}\right]\bigg|_{s=a}=0$$

求得实数解 $a_1=-0.8$,因此,极轨迹与实抽会合点坐标为$(-0.8,j0)$。

(6)给定系统的特征方程为 $1-\dfrac{k(s+2)}{(s+3)(s^2+2s+2)}=0$,即 $s^3+5s^2+(8-k)s+(6-2k)=0$,将 $s=jw$ 代入方程,解出 $w=0$,$k=3$,对应的开环增益为 $K=\dfrac{k\times2}{3\times2}=1$。当 $1>K\geqslant0$ 时,该系统稳定。当 $K>1$ 时,该系统不稳定。该系统的根轨迹大致图形如题 4-5 解图所示。

4-6 已知某正反馈系统的开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{k}{(s+1)^2(s+4)^2}$,试绘制该系统的根轨迹图($0\leqslant k<\infty$)。

解 该正反馈系统的根轨迹方程为 $\dfrac{k}{(s+1)^2(s+4)^2}=+1$,需按 0°根轨迹绘制。

(1)开环极点 $p_1=p_2=-1$ 和 $p_3=p_4=-4$,$n=4$;而无有限零点,$m=0$。有四条根轨迹。

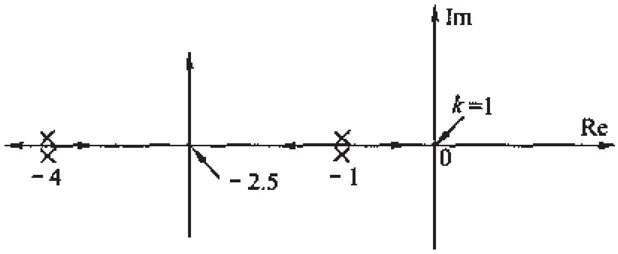
(2)共有四条渐近线,与实轴的交点为 $\sigma_a=\dfrac{-1-1-4-4}{4}=-2.5$,与实轴正方向的夹角为 $\varphi_1=0°,\varphi_2=90°,\varphi_3=180°,\varphi_4=270°$。

(3)整个实轴均属于该系统的根轨迹。

(4)由 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\dfrac{(s+1)^2(s+4)^2}{k}\right]\Bigg|_{s=a}=0$,求得根轨迹在实轴上分离点坐标为 $d=-2.5$。

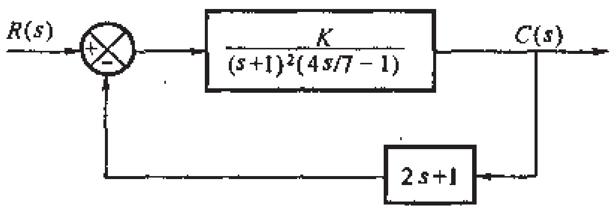
(5)因此可画出大致的根轨迹。根轨迹与虚轴在原点处相交,则 $\omega=0$。

将 $s=0$ 代入特征方程 $1-\dfrac{k}{(s+1)^2(s+4)^2}$,得 $k=16$,开环增益 $K=\dfrac{k}{16}=1$。则开环增益 K 的临界值为 1。给定正反馈系统的根轨迹图如题 4-6 解图所示。



题 4-6 解图

4-7 试绘制题 4-7 图所示非最小相位系统以开环增益 K 为参变量的根轨迹图。



题 4-7 图

解 题 4-7 图所示系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K(2s+1)}{(s+1)^2\left(\dfrac{4}{7}s-1\right)}$$

进行标准化,得

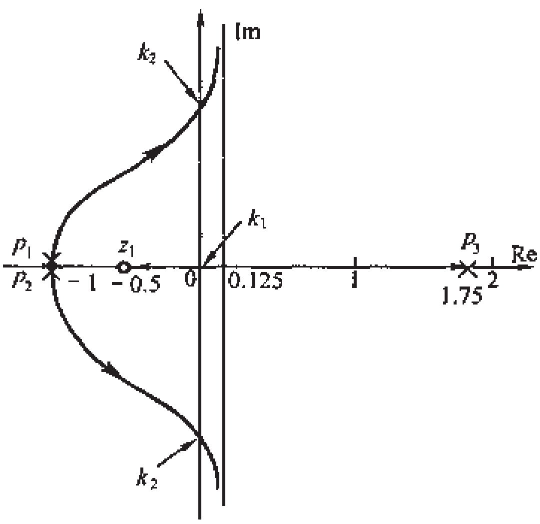
$$G(s)H(s)=\frac{k(s+0.5)}{(s+1)^2(s-1.75)}$$

式中 $k=2K/(4/7)=3.5K$。需按 180°根轨迹绘制规则来绘制该非最小相位系统的根轨迹。

(1)开环极点 $p_1=p_2=-1,p_3=+1.75,n=3$;开环零点 $z_1=-0.5,m=1$。共有三条根轨迹。

(2)两条渐近线与实轴上的交点坐标为 $\sigma_a=\dfrac{(-1-1+1.75)-(-0.5)}{3-1}=0.125$,与实轴正方向的夹角分别为 $\varphi_1=90°,\varphi_2=270°$。

(3)$[-0.5,1.75]$为实轴上的根轨迹。可画出大致的根轨迹如题 4-7 解图所示。



题 4-7 解图

(4)系统的特征方程为

$$(s+1)^2(s-1.75)+k(s+0.5)=0$$

即

$$s^3+0.25s^2+(k-0.25)s+(0.5k-1.75)=0$$

令 $s=\mathrm{j}\omega$,求得根轨迹与虚轴交点坐标 ω 值分别为 $\omega_1=0,\omega_{2,3}=\pm\sqrt{k-2.5}$,对应的参变量值

为 $k_1=3.5, k_2=4.5$,即 $K_1=1, K_2=1.285$。使系统稳定工作的 K 值范围为 $1<K<1.285$,并且根轨迹与虚轴交点坐标为 $s_{2,3}=\pm\sqrt{2}\mathrm{j}$。

4-8　已知非最小相位负反馈系统的开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{k(1-s)}{s(s+2)}$,试绘制该系统的根轨迹图。

解　由题意,该非最小相位负反馈系统的特征方程为

$$1+G(s)H(s)=1+\frac{k(1-s)}{s(s+2)}=0$$

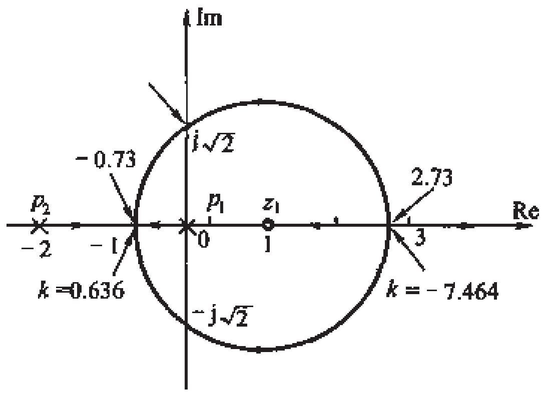
将开环传递函数化成标准形式,得

$$G(s)H(s)=-\frac{k(s-1)}{s(s+2)}$$

则根轨迹方程为$\dfrac{k(s-1)}{s(s+2)}=+1$,则按 0°根轨迹的绘制规则进行绘制。

(1)开环极点 $p_1=0, p_2=-2, n=2$;开环零点 $z_1=+1, m=1$。则有两条根轨迹和一条渐近线。

(2)渐近线与实轴正方向的夹角为 $\varphi=0°$,即渐近线与实轴正方向重合。



题 4-8 解图

(3)$[+1,\infty)$及$[0,-2]$为实轴上的根轨迹。

(4)由$\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{d+2}=\dfrac{1}{d-1}$,解得分离点坐标 $d_1=-0.73$ 及会合点坐标 $d_2=2.73$。

(5)在特征方程中,令 $s=\mathrm{j}\omega$,得 $\omega(2-k)=0, -\omega^2+k=0$,求得系统根轨迹与虚轴相交处 $\omega=\pm\sqrt{2}, k=2$。则当 $0<k<2$ 时,系统稳定;当 $k>2$ 时,系统不稳定。

系统根轨迹图如题 4-8 解图所示。

注意:给定的非最小相位系统虽是负反馈系统,但从标准化处理而得到的根轨迹方程来看,该系统的根轨迹必须按 0°根轨迹的绘制规则来绘制。

4-9　已知单位负反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{\frac{1}{4}(s+a)}{s^2(s+1)}$,试绘制以 a 为参变量的参量根轨迹图。

解　给定系统的特征方程为 $s^2(s+1)+\dfrac{1}{4}(s+a)=0$,进一步整理得$\dfrac{\frac{1}{4}a}{s\left(s^2+s+\frac{1}{4}\right)}=-1$,令 $A=\dfrac{1}{4}a$,则根轨迹方程为$\dfrac{A}{s\left(s+\frac{1}{2}\right)^2}=-1$。按 180°根轨迹的绘制规则来绘制。

(1)开环极点 $p_1=0, p_2=p_3=-\dfrac{1}{2}, n=3$;无开环零点 $m=0$。则有三条根轨迹和两条渐近线。

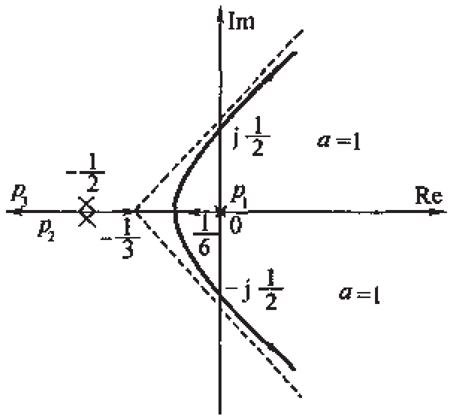
(2)渐近线与实轴的交点坐标为 $\sigma_a=\dfrac{0-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{3-0}=-\dfrac{1}{3}$,与实轴正方向的夹角分别是

$+60°,+180°$和$-60°$。

(3)由$\frac{1}{d}+\frac{1}{d+\frac{1}{2}}+\frac{1}{d+\frac{1}{2}}=0$,得根轨迹与实轴交点的坐标为 $d=-\frac{1}{6}$(分离点)。

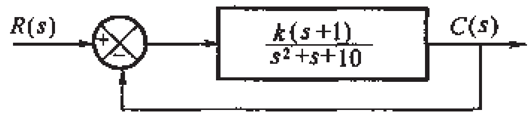
(4)将 $s=j\omega$ 代入特征方程,得根轨迹与虚轴交点为 $s_1=0,s_{2,3}=\pm\frac{1}{2}j$,相应的参变量 a 值为$a=0,a=1$。

给定系统参量根轨迹的大致图形如解图所示。从图可见,参变量 $a>1$ 时系统不稳定。



题4-9解图

4-10 某反馈系统的方框图如题4-10图所示,试绘制该系统的根轨迹图。



题4-10图

解 由题4-10图求得系统的开环传递函数为 $G(s)=\frac{k(s+1)}{s^2+s+10}$,根轨迹方程为

$$\frac{k(s+1)}{s^2+s+10}=-1$$

(1)开环极点 $p_1=-0.5+j3.12,p_2=-0.5-j3.12,n=2$;开环零点 $z_1=-1,m=1$。所以系统有两条根轨迹及一条渐近线。

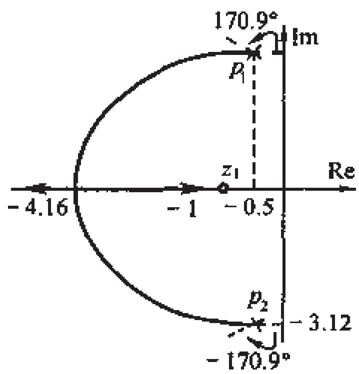
(2)渐近线与实轴正方向的夹角为 $\varphi=\frac{(2l+1)\pi}{n-m}=\pi$ $(l=0)$。

(3)$(-\infty,-1]$为实轴上的根轨迹。

(4)由$\frac{d}{ds}\left(\frac{s^2+s+10}{s+1}\right)\bigg|_{s=a}=0$ 求得根轨迹与实轴的交点为 $a_1=-4.16,a_2=2.16$(舍)。

(5)出射角 $\theta_{p_1}=-180°+\angle(p_1-z_1)-\angle(p_1-p_2)=-180°+80.9°-90°=170.9°,\theta_{p_2}=-170.9°$。

根轨迹如题4-10解图所示。



题4-10解图

4-11 设某负反馈系统的开环传递函数为 $G(s)H(s)=\frac{K(s+1)}{s^2(0.1s+1)}$,试绘制该系统的根轨迹图。

解 将开环传递函数化成标准形式 $G(s)H(s)=\frac{k(s+1)}{s^2(s+10)}$,式中 $k=0.1K$,则根轨迹方程为$\frac{k(s+1)}{s^2(s+10)}=-1$,按180°根轨迹的绘制规则来绘制。

(1)开环极点 $p_1=p_2=0,p_3=-10,n=3$,开环零点 $z_1=-1,m=1$,所以系统具有三条根轨迹及两条渐近线。

(2)渐近线与实轴的交点为 $\sigma_a=\frac{-10+1}{2}=-4.5$,渐近线与实轴正方向的夹角为 $\varphi_1=\frac{\pi}{2}$,

$\varphi_2 = \frac{3}{2}\pi$。

(3)[-10, -1]是实轴上的根轨迹。

(4)由$\frac{d}{ds}\left(\frac{s^2(s+10)}{s+1}\right)\bigg|_{s=\alpha}=0$,解得 $\alpha_1=-2.5, \alpha_2=-4$。

根轨迹大致图形如题 4-4 解图(d)一致。

4-12　设某负反馈系统的开环传递函数为 $G(s)H(s)=\frac{k(s+4)(s+40)}{s^3(s+200)(s+900)}$,试绘制该系统的根轨迹图。

解　根轨迹方程为　$$\frac{k(s+4)(s+40)}{s^3(s+200)(s+900)}=-1$$

(1)极点 $p_1=p_2=p_3=0, p_4=-200, p_5=-900, n=5$;开环零点 $z_1=-4, z_2=-40, m=2$,所以系统具有五条根轨迹及三条渐近线。

(2)渐近线与实轴的交点为

$$\sigma_a=\frac{\sum_{i=1}^{5}p_i-\sum_{i=1}^{2}z_i}{n-m}=\frac{-200-900+4+40}{3}=-352$$

渐近线与实轴正方向的夹角为

$$\varphi_1=\frac{\pi}{3}, \varphi_2=\pi, \varphi_3=\frac{5\pi}{3}$$

(3)(-4,0]和[-200, -40)以及(-∞, -900]为实轴上的根轨迹。

(3)根轨迹与实轴无分离、会合点。

(4)由 $1+G(s)H(s)=0$,求得系统的特征方程为

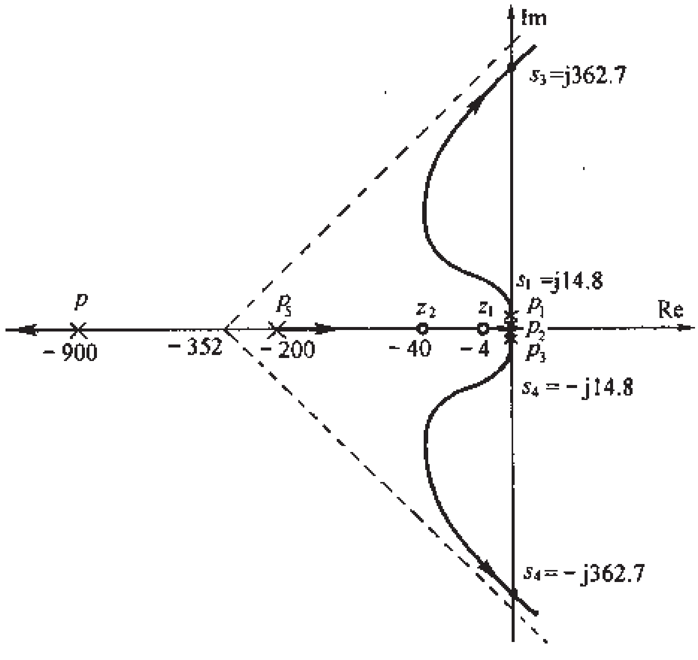
$$s^3(s+200)(s+900)+k(s+4)(s+40)=0$$

令 $s=j\omega$,求得根轨迹与虚轴的四个交点及对应增益为

$$\omega_{1,2}=\pm14.8,\quad k_1=799;$$

$$\omega_{3,4}=\pm362.7,\quad k_2=128\ 776。$$

根轨迹大致图形如题 4-12 解图所示。



题 4-12 解图

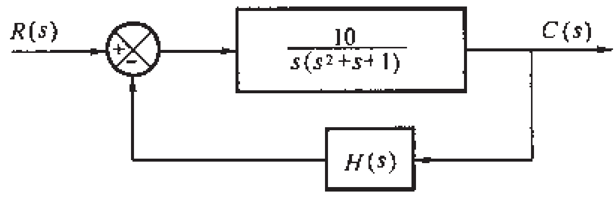
4-13　设某反馈系统的方框图如题 4-13图所示。试绘制以下各种情况下的根轨迹图:

(1)$H(s)=1$;

(2)$H(s)=s+1$;

(3)$H(s)=s+2$

分析比较这些根轨迹图,说明开环零点对系统相对稳定性的影响。



题 4-13 图

解　(1)当 $H(s)=1$ 时,系统的开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{K}{s(s^2+s+1)}$,根轨迹方程为

$$\frac{K}{s(s^2+s+1)}=-1$$

①极点 $p_1=0,p_2=\dfrac{-1+\sqrt{3}j}{2},p_3=\dfrac{-1-\sqrt{3}j}{2},n=3$;无开环零点,$m=0$。所以系统具有三条根轨迹及三条渐近线。

②渐近线与实轴的交点为

$$\sigma_a=\frac{\sum_{i=1}^{3}p_i}{n-m}=\frac{\dfrac{-1+\sqrt{3}j}{2}+\dfrac{-1-\sqrt{3}j}{2}}{3}=-\frac{1}{3}$$

与实轴正方向的夹角为 $\varphi_1=\dfrac{\pi}{3},\varphi_2=\pi,\varphi_3=\dfrac{5\pi}{3}$。

③$(-\infty,0]$为实轴上的根轨迹。

④将 $s=j\omega$ 代入系统的特征方程 $s^3+s^2+s+K=0$,求得根轨迹与虚轴的交点为 $s_1=0$,$s_{2,3}=\pm j$。

⑤出射角 $\theta_{p_2}=-180°+\angle(p_2-p_1)-\angle(p_2-p_3)=-30°,\theta_{p_3}=30°$。

根轨迹大致图形如题4-13解图(a)所示。

(2)当 $H(s)=s+1$ 时,系统的开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{K(s+1)}{s(s^2+s+1)}$,根轨迹方程为

$$\frac{K(s+1)}{s(s^2+s+1)}=-1$$

绘制根轨迹的步骤同上,大体为

①开环根点 $p_1=0,p_2=\dfrac{-1+\sqrt{3}j}{2},p_3=\dfrac{-1-\sqrt{3}j}{2},n=3$;开环零点 $z_1=-1,m=1$,所以系统具有三条根轨迹及两条渐近线。

②渐近线与实轴的交点为 $\sigma_a=0$,渐近线与实轴正方向的夹角为 $\varphi_1=\dfrac{\pi}{2},\varphi_2=\dfrac{3\pi}{2}$。

③$[-1,0]$为实轴上的根轨迹。

④出射角 $\theta_{p_2}=30°,\theta_{p_3}=-30°$。

根轨迹大致图形如题4-13解图(b)所示。

(3)当 $H(s)=s+2$ 时,系统的开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{K(s+2)}{s(s^2+s+1)}$,根轨迹方程为

$$\frac{K(s+2)}{s(s^2+s+1)}=-1$$

①极点 $p_1=0,p_2=\dfrac{-1+\sqrt{3}j}{2},p_3=\dfrac{-1-\sqrt{3}j}{2},n=3$;开环零点 $z_1=-2,m=1$。所以系统具有三条根轨迹及两条渐近线。

②渐近线与实轴的交点为 $\sigma_a=\dfrac{1}{2}$,与实轴正方向的夹角为 $\varphi_1=\dfrac{\pi}{2},\varphi_2=\dfrac{3\pi}{2}$。

③$[-2,0]$为实轴上的根轨迹。

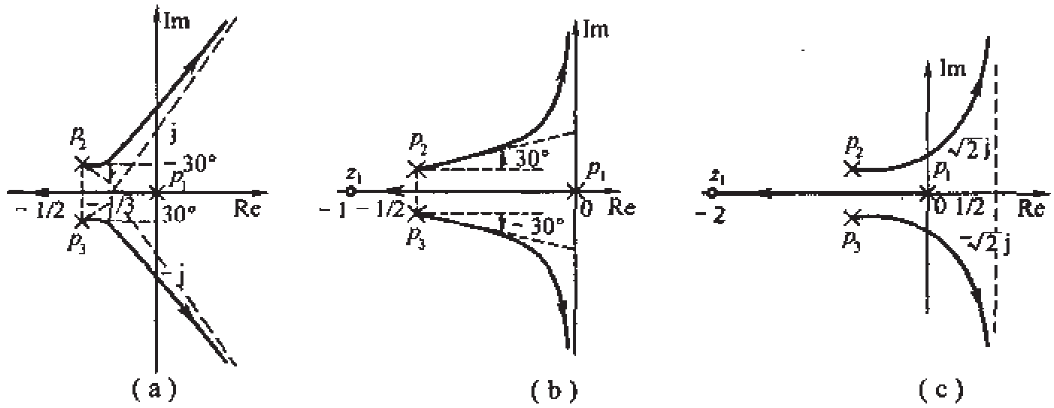
④将 $s=j\omega$ 代入系统的特征方程 $s^3+s^2+(1+K)s+2K=0$,求得根轨迹与虚轴的交点及

参变量临界值为 $s_{1,2}=\pm\sqrt{2}\mathrm{j}, k=1$。

⑤出射角 $\theta_{p_2}=0°, \theta_{p_3}=0°$。

根轨迹大致图形如题 4 - 13 解图(c)所示。

从结果看出,在保持开环极点不变的情况下,增加开环零点可值闭环系统的稳定性得到改善,并且零点越靠近虚轴,效果越好。



题 4 - 13 解图

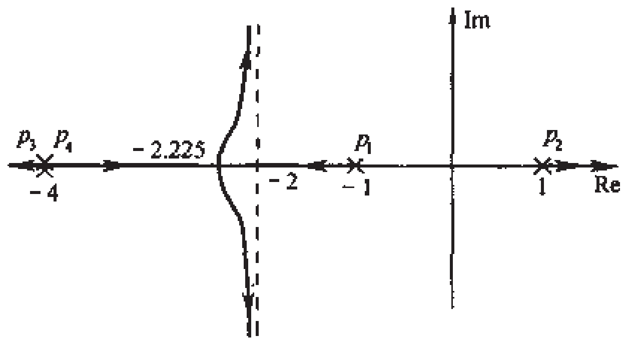
4 - 14　已知某正反馈系统的开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{k}{(s+1)(s-1)(s+4)^2}$,试绘制该系统的根轨迹图。

解　该正反馈系统的根轨迹方程为

$$\frac{k}{(s+1)(s-1)(s+4)^2}=1$$

(1)开环极点 $p_1=-1, p_2=1, p_{3,4}=-4, n=4$;无开环零点, $m=0$。所以系统具有四条根轨迹及四条渐近线。

(2)渐近线与实轴的交点为 $\sigma_a=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{4}p_i}{n-m}=-2$,与实轴正方向的夹角为 $\varphi_1=0, \varphi_2=\dfrac{\pi}{2}, \varphi_3=\pi, \varphi_4=\dfrac{3\pi}{2}$。



题 4 - 14 解图

(3) $(-\infty,-1][1,+\infty)$ 为实轴上的根轨迹。

(4)根轨迹与实轴的交点为 $\alpha_1=-2.225, \alpha_2=0.225$(舍去)。

根轨迹大致图形如题 4 - 14 解图所示。

4 - 15　已知非最小相位负反馈系统的开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{k(s+1)}{s(s-3)}$,试绘制该系统的根轨迹图。

解　根轨迹方程为

$$\frac{k(s+1)}{s(s-3)}=-1$$

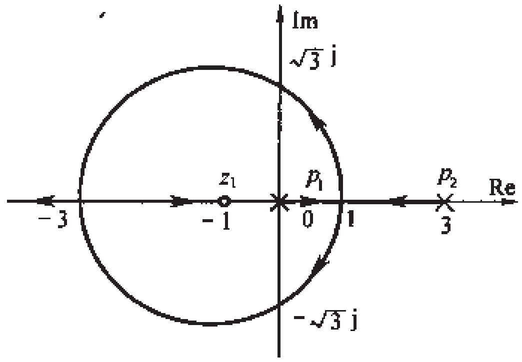
(1)开环极点 $p_1=0,p_2=3,n=2$；开环零点 $z_1=-1,m=1$。所以系统具有两条根轨迹及一条渐近线。

(2)$(-\infty,-1]$和$[0,3]$为实轴上的根轨迹。

(3)由$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{s(s-3)}{s+1}\right)\bigg|_{s=\alpha}=0$得根轨迹与实轴的交点为 $\alpha_1=1$(分离点)，$\alpha_2=-3$(会合点)。

(4)将 $s=\mathrm{j}\omega$ 代入系统的特征方程$s(s-3)+k(s+1)=0$，解得 $\omega=\pm\sqrt{3},k=3$。

根轨迹大致图形如题4－15解图所示。



题4－15解图

4－16　已知非最小相位负反馈系统的特征方程为

$$(s+1)(s+3)(s-1)(s-3)+k(s^2+4)=0$$

试绘制该系统的根轨迹图。

解　系统的将征方程为

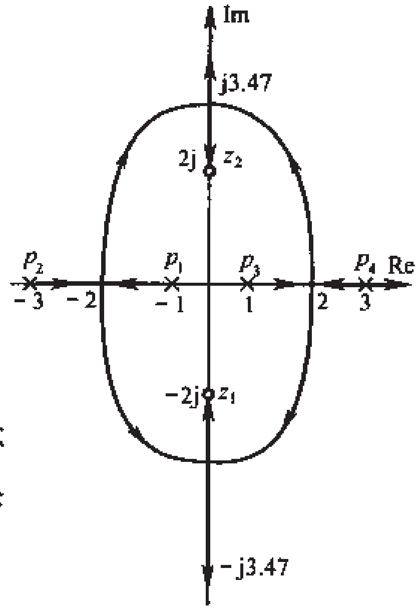
$$(s+1)(s+3)(s-1)(s-3)+k(s^2+4)=0$$

整理得根轨迹方程为

$$\frac{k(s+2\mathrm{j})(s-2\mathrm{j})}{(s+1)(s+3)(s-1)(s-3)}=-1$$

(1)开环极点 $p_1=-1,p_2=-3,p_3=1,p_4=3,n=4$；开环零点 $z_1=-2\mathrm{j},z_1=2\mathrm{j},m=2$，所以系统具有四条根轨迹及两条渐近线。

(2)渐近线与实轴的交点为 $\sigma_a=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{4}p_i-\sum\limits_{i=1}^{2}z_i}{n-m}=0$，与实轴正方向的夹角为 $\varphi_1=\frac{\pi}{2},\varphi_2=\frac{3\pi}{2}$。



题4－16解图

(3)$[1,3][-3,-1]$为实轴上的根轨迹。

(4)由$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{(s+1)(s+3)(s-1)(s-3)}{s^2+4}\right)\bigg|_{s=\alpha}=0$，解得 $\alpha_1=2,\alpha_2=-2,\alpha_3=\mathrm{j}3.473,\alpha_4=-\mathrm{j}3.473$。

(5)入射角 $\theta_{z1}=-90°,\theta_{z2}=+90°$。

根轨迹大致图形如题4－16解图所示。

讨论：本题开环零、极点数均为偶数，且关于虚轴对称分布，所以根轨迹关于虚轴对称。

4－17　已知非最小相位负反馈系统的开环传递函数为 $G(s)H(s)=\frac{K(1-0.5s)}{s(0.25s+1)}$，试绘制该系统的根轨迹图。

解　根轨迹方程为$\frac{K(1-0.5s)}{s(0.25s+1)}=-1$，整理得$\frac{k(s-2)}{s(s+4)}=1$，其中 $k=2K$，按0°根轨迹绘制。步骤同题4－8，大体如下。

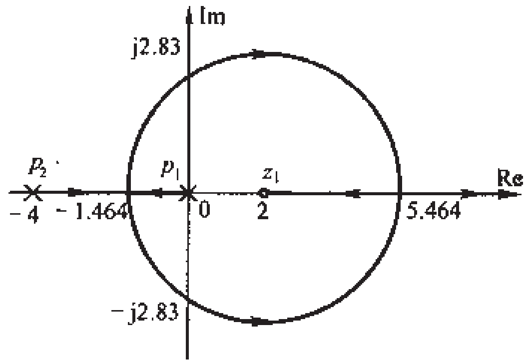
(1)极点 $p_1=0, p_2=-4, n=2$,开环零点 $z_1=2, m=1$。所以系统具有两条根轨迹及一条渐近线。

(2)渐近线与实轴正方向的夹角为 $\varphi=0°$。

(3)$[-4,0]$和$[2,+\infty)$为实轴上的根轨迹。

(4)根轨迹与实轴的交点为 $\alpha_1=-1.464$(分离点),$\alpha_2=-5.464$(会合点)。

(5)根轨迹与虚轴的交点为 $s=\pm 2.83\mathrm{j}$,对应的开环增益临界值为 $K_c=2$。



题 4-17 解图

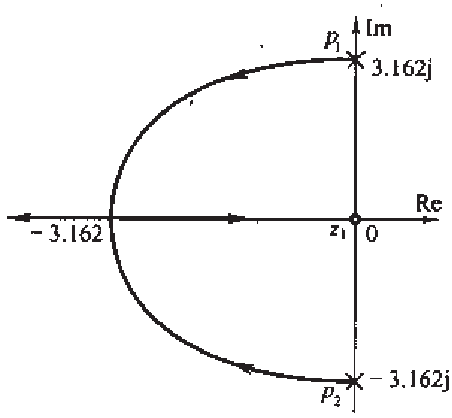
根轨迹大致图形如题 4-17 解图所示。

4-18　设某负反馈系统的开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{10}{s(s+a)}$,试绘制以 a 为参变量的根轨迹图。

解　该系统的特征方程为 $1+G(s)H(s)=0$,即 $s^2+10+as=0$,整理得参量根轨迹方程为

$$\frac{as}{s^2+10}=-1$$

(1)开环极点 $p_1=3.162\mathrm{j}, p_2=-3.162\mathrm{j}, n=2$;开环零点 $z_1=0, m=1$,所以系统具有两条根轨迹及一条渐近线。



题 4-18 解图

(2)渐近线与实轴正方向的夹角为 $\varphi=\dfrac{(2l+1)\pi}{n-m}=\pi$。

(3)实轴上的根轨迹为$(-\infty,0]$。

(4)根轨迹与实轴的交点 $\alpha_1=3.162$(舍去),$\alpha_2=-3.162$。

(5)根轨迹的出射角 $\theta_{p_1}=\pi, \theta_{p_2}=-\pi$。

根轨迹大致图形如题 4-18 解图所示。

4-19　已知某负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{1\,000(Ts+1)}{s(0.1s+1)(0.001s+1)}$$

试绘制以时间常数 T 为参变量的参量根轨迹图。

解　系统特征方程为

$$s(0.1s+1)(0.001s+1)+10^3(Ts+1)=0$$

即

$$s^3+1\,010s^2+10^4s+10^7+10^7Ts=0$$

整理得

$$\frac{10^7Ts}{s^3+1\,010s^2+10^4s+10^7}\approx\frac{10^7Ts}{(s^2+10^4)(s+10^3)}=-1$$

(1)开环极点 $p_{1,2}=\pm 100\mathrm{j}, p_3=-10^3, n=3$,开环零点 $z_1=0, m=1$,所以系统具有三条根轨迹及两条渐近线。

(2)渐近线与实轴的交点为

$$\sigma_a=\frac{\sum\limits_{i=1}^{3}p_i-z_1}{n-m}=\frac{-10^3}{2}=-500$$

与实轴正方向的夹角为 $\varphi_1=\frac{\pi}{2},\varphi_2=\frac{3\pi}{2}$。

(3)实轴上的根轨迹为$[-10^3,0]$。

(4)由

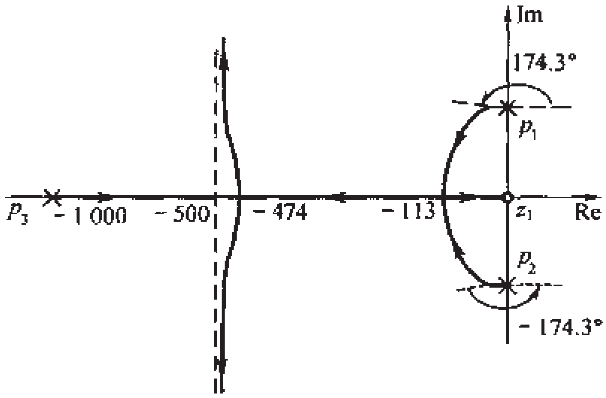
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{s^3+1\,010s^2+10^4s+10^7}{s}\right)\bigg|_{s=\alpha}=0$$

解得根轨迹与实轴的交点为

$\alpha_1=-474,\alpha_2=-113,\alpha_3=92$(舍去)

(5)$\theta_{p_1}=-180^\circ+\angle(p_1-z_1)-\angle(p_1-p_2)-\angle(p_1-p_3)=174.3^\circ$，$\theta_{p_2}=-174.3^\circ$

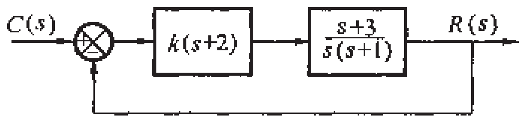
根轨迹大致图形如题 4 - 19 解图所示。



题 4 - 19 解图

同步训练题

1.设系统结构如题 1 图所示,试画出该系统根轨迹图。



题 1 图

2.已知开环传递函数如下,试绘制闭环系统根轨迹图。

$$G(s)=\frac{K}{s\left(\frac{1}{3}s+1\right)\left(\frac{1}{3}s^2+s+1\right)}$$

3.已知单位负反馈系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{as}{s^2+as+16}\ (a>0)$$

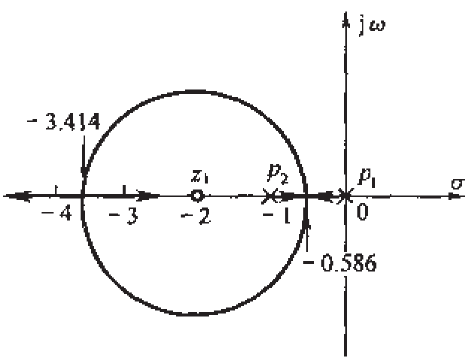
要求:(1)绘出闭环系统的根轨迹$(0\leqslant a<\infty)$;

(2)判断点$(-\sqrt{3},\mathrm{j})$是否在根轨迹上;

(3)由根轨迹求出使闭环系统阻尼比 $\zeta=0.5$ 时的 a 值。

4.已知系统开环传递函数为 $G(s)=\frac{K^*}{s(s+1)(s+2)}$,试绘制正反馈系统的根轨迹图。

5.设单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\frac{K^*(s+2)}{s(s+1)}$,其根轨迹图见图。试从数学上证明:复数根轨迹部分是以$(-2,\mathrm{j}0)$为圆心,以$\sqrt{2}$为半径的一个圆。



题 5 图

6.设单位反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K^*}{s+1}$$

试用解析法绘出 K^* 从零变到无穷时的闭环根轨迹图,并判断下列点是否在根轨迹上:

$$(-2+j0),\quad (0+j1),\quad (-3+j2)$$

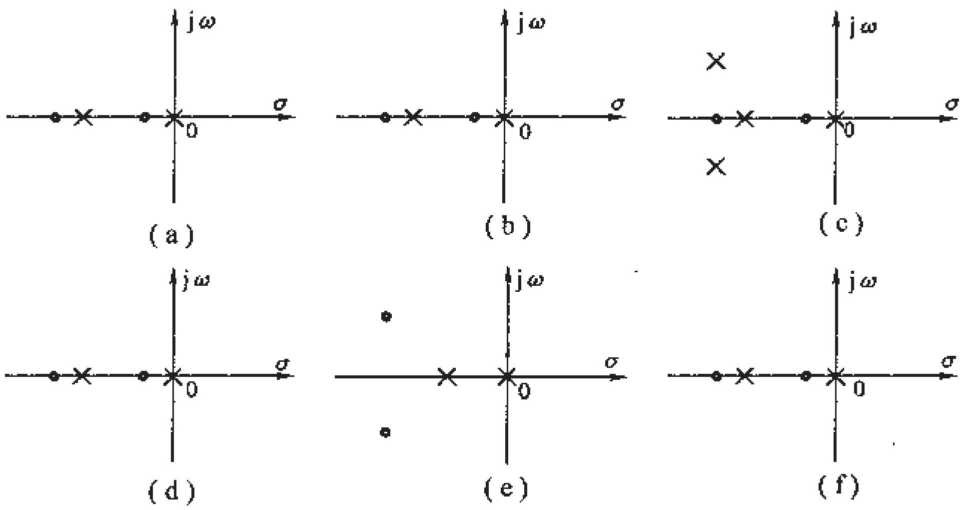
7.设系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s^2(s+1)}$$

(1)画出根轨迹草图,判断系统的稳定性。

(2)用根轨迹法分析,增加一个零点 a,能否使系统稳定,并给出使系统稳定的 a 的范围。

8.已知开环零、极点分布如题8图所示,试概略绘出相应的闭环根轨迹图。



题8图

9.已知最小相位负反馈系统的特征方程为

$$s(s-2)(s+2)(s+4)+K(s^2+2s+5)=0$$

试绘制该系统根轨迹的大致形状,并确定系统稳定的 K 值。

10.单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{k}{s(s+3)(s+7)}$$

试确定使系统具有欠阻尼阶跃响应特性的的取值范围。

同步训练题答案

1.解　根轨迹图如题1解图所示。

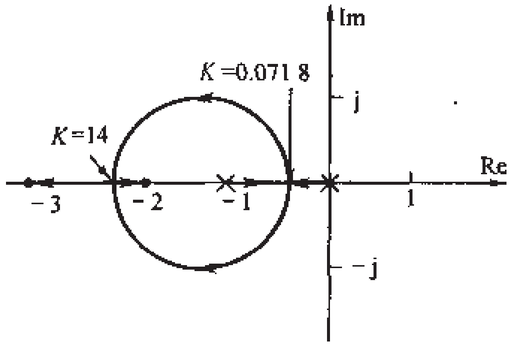
2.解　根轨迹图如题2解图所示。

3.解　(1)根轨迹图如题3解图所示;

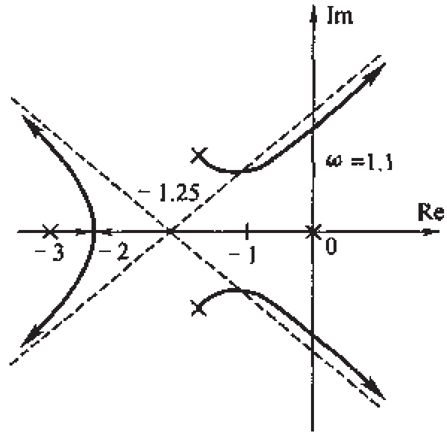
(2)不在根轨迹上;

(3)$a=4$。

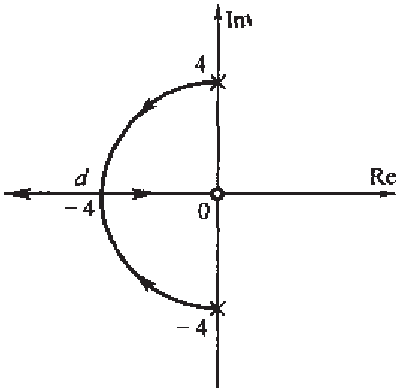
4.解　正反馈系统的根轨迹图如题4解图所示。



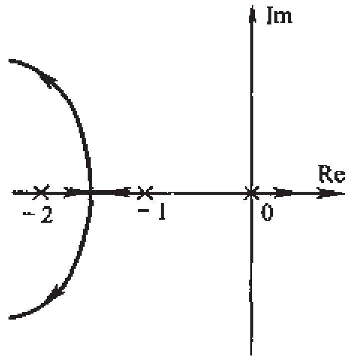
题1解图



题2解图



题3解图



题4解图

5.证明 闭环特征方程为

$$D(s)=s(s+1)+K^*(s+2)=s^2+(1+K^*)s+2K^*=0$$

$$\lambda=\frac{-(1+K^*)\pm\sqrt{(1+K^*)^2-8K^*}}{2}=\frac{-(1+K^*)\pm j\sqrt{8K^*-(1+K^*)^2}}{2}=\sigma\pm jw$$

$$\sigma=\frac{-(1+K^*)}{2} \tag{1}$$

$$\omega=\pm\frac{1}{2}\sqrt{8K^*-(1+K^*)^2} \tag{2}$$

由式(1)得 $$K^*=-2\sigma-1 \tag{3}$$

由式(3)代入式(2),整理得$(\sigma+2)^2+\omega^2=2$。

6.解 当 $K^*=0$时,$s=-1$;$K^*=1$,$s=-2$;$K^*=2$,$s=-3$;$\cdots K^*\to\infty$,$s\to\infty$,。可逐个描点得闭环根轨迹如题6解图所示,从图中明显可见,只有$(-2,j0)$在根轨迹上。

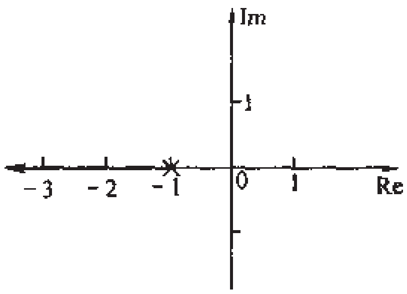
7.解 (1)根轨迹图如题7解图(a)所示,系统不稳定。

(2)当 $a>1$ 时,根轨迹如解图(b)所示,系统不稳定;当 $a<1$ 时,根轨迹如解图(c)所示,系统稳定。

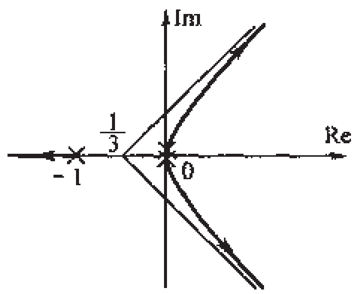
8.解 闭环根轨迹图如题8解图所示。

9.解 根轨迹大致图形如题9解图所示,当 $K>28$ 时,系统是稳定的。

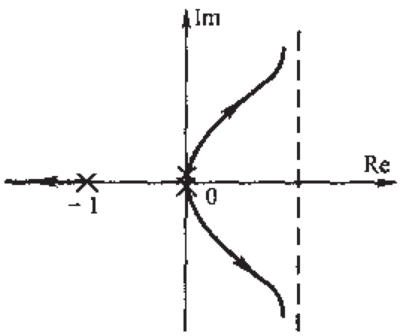
10.解 根轨迹图如题10解图所示。



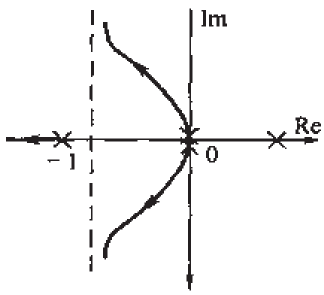
题 6 解图



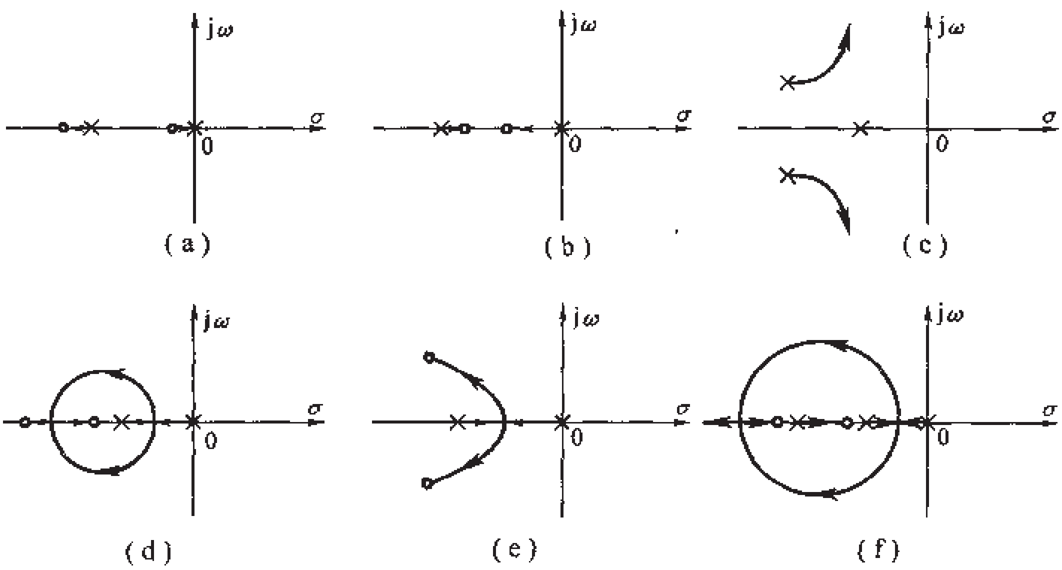
题 7 解图(a)



题 7 解图(b)

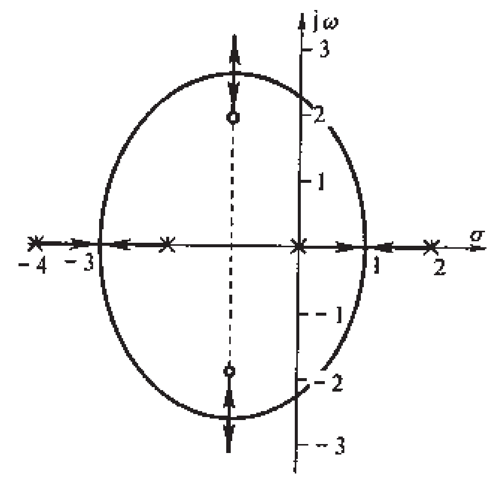


题 7 解图(c)

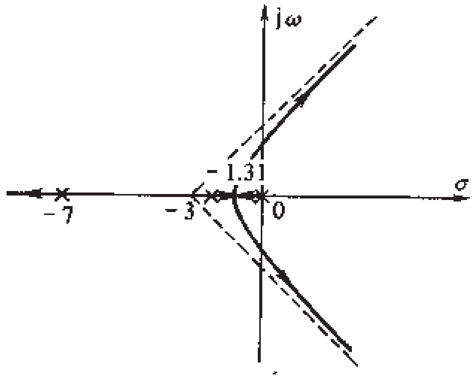


题 8 解图

分离点 -1.31,对应 $k=12.6$,根轨迹与虚轴交于 $\pm 4.58j$,对应的 $k=210$。当 $12.6<k<210$ 时,系统具有一对负实部共轭复数极点,具有欠阻尼阶跃响应。



题9解图



题10解图