概率统计

一、选择题：1～5小题，每小题5分，共25分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

（1）设事件 A,B,C 的概率都是 0.5，且 $P(ABC)=P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})$，则

$P(AB)+P(BC)+P(CA)-2P(ABC)=$　　（　　）

（A）0．　　（B）0.25．　　（C）0.5．　　（D）1.

（2）设 X 服从几何分布，$P(X=1)=0.6$，则 $P(X=4\mid X>2)=$　　（　　）

（A）0.5.　　（B）0.24.　　（C）0.36.　　（D）0.16.

（3）设随机变量 X,Y 相互独立，X,Y 的概率分布分别为

X	0	2	4
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

则 $P\left\{X^2+Y^2\le 4\right\}=$　　（　　）

（A）$\frac{1}{2}$.　　（B）$\frac{1}{3}$.　　（C）$\frac{1}{6}$.　　（D）1.

（4）设随机变量 T 服从自由度为 1 的 t 分布，则 $P\left\{T\le 1\right\}=$　　（　　）

（A）0.25.　　（B）0.5.　　（C）　0.75.　　（D）1.

（5）$X_1,X_2,\cdots,X_n\ (n>1)$ 是来自泊松总体 $P(\lambda)$ 的简单随机样本，

$$\overline{X}=\frac{X_1+X_2+\cdots X_n}{n}，\quad S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k-\overline{X}\right)^2}\ .$$

则下列关系正确的是　　（　　）

（A）$E(S)>\sqrt{\lambda}$.　　（B）$E(S)<\sqrt{\lambda}$.　　（C）$E(S)=\sqrt{\lambda}$.　　（D）不确定.

二、填空题：6～10 小题，每小题 5 分，共 25 分.

（6）一盒中装有 a 颗红球，b 颗黑球，现随机地逐一不放回取球，则第 k $(k \le a+b)$ 次取出红球的概率为________.

（7）设一批零件次品率为 0.01，若用泊松分布近似，随机抽取 100 个零件中最多只有一个次品的概率约为________.

（8）设随机变量 X 服从标准正态分布 $N\left(0,1\right)$，则 $E\left(X^4 \mathrm{e}^X\right)=$________.

（9）二维随机变量 $\left(X,Y\right) \sim N\left(0,1;1,4;\rho\right)$，设 $U = X-2Y$ 和 $V = 2X+Y$，若 U,V 相互独立，则 $\rho =$________.

（10）设总体 X 密度函数为 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^{-(x-\theta)}$（$\theta \le x < +\infty$），其中 $\theta \in (-\infty,+\infty)$ 为未知参数，$X_1,\cdots,X_5$ 为来自该总体简单随机样本，则 θ 落在区间 $(\min\limits_{1\le i\le 5}\left(X_i\right)-1, \min\limits_{1\le i\le 5}\left(X_i\right))$ 内的概率为________.

三、解答题：10～15 小题，共 50 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（11）（本题满分 10 分）

设 A,B 为随机事件，$P\left(A\right)=\dfrac{2}{3}, P\left(B\mid A\right)=\dfrac{1}{6}, P\left(A\mid B\right)=\dfrac{1}{3}$，令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{发生},\\ 0, & A\text{不发生},\end{cases} \qquad Y=\begin{cases}1, & B\text{发生},\\ 0, & B\text{不发生}.\end{cases}$$

（Ⅰ）求 X,Y 的联合分布律；

（Ⅱ）若 $Z = X+aY$, 求 a 取何值时 X 与 Z 不相关.

（12）（本题满分 10 分）

设 X,Y 具有联合概率密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}10xy^2, & 0<x<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

（Ⅰ）求边缘密度函数 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$，并判断 X 与 Y 是否独立；

（Ⅱ）求条件密度 $f_{Y|X}(y|x)$.

（13）（本题满分 10 分）

设 X 服从均匀分布 $U(0,1)$，Y 服从指数分布 $E(1)$，X,Y 相互独立.

（Ⅰ）求 $X+Y$ 的概率密度函数；

（Ⅱ）求 $P\left\{Y\le 1 \middle| X\le \mathrm{e}^{\frac{-(Y-1)^2}{2}}\right\}$（结果用标准正态分布的分布函数 Φ 表示）.

（14）（本题满分 10 分）

设 $X \sim U(-a,a)$， $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的样本，

（Ⅰ）求参数 a 的矩估计量；

（Ⅱ）求参数 a 的极大似然估计量.

（15）（本题满分 10 分）

设总体 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\frac{(x-1)}{\lambda}}, & x \geq 1, \\ 0, & x<1.\end{cases}$$

其中 $\lambda(\lambda>0)$ 是未知参数.设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自该总体的简单随机样本，$\overline{X}$ 和 S^2 分别是其样本均值和样本方差.

（Ⅰ）求 λ 的矩估计量；

（Ⅱ）求 $E\left(S^2\right)$ 及 n 足够大时 $\overline{X}$ 的近似分布.