2010年硕士学位研究生入学考试试题

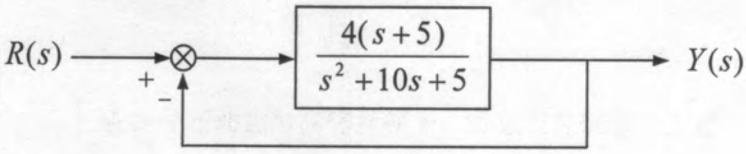
自动控制理论（897）

所有试题答案写在答题纸上，答案写在试卷上无效

√□需使用计算器　　　　□不使用计算器

一、（20 分）单项选择题（将所选题号写在答题纸上，并写出计算过程或说明。）

1．单位负反馈系统如图所示。

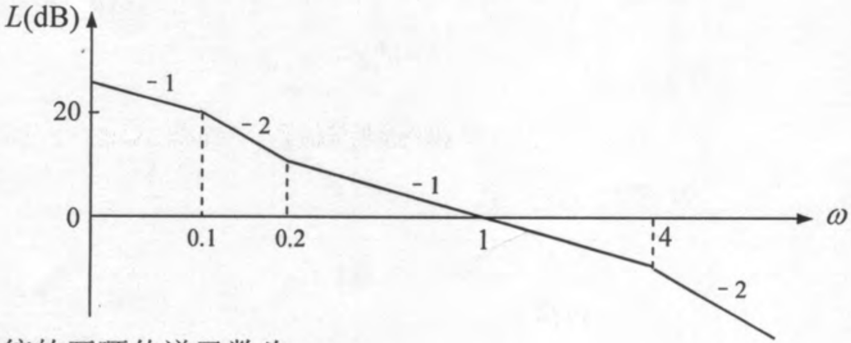


$R(s)$为单位阶跃时，输出的稳态值是：

A、$\dfrac{Y(0)}{R(0)}=0.8$　　B、$y_{ss}=\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=0.8$

C、$y_{ss}=\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=1$　　D、$\dfrac{Y(0)}{R(0)}=4$

2．单位负反馈系统的开环渐近对数幅频特性如图所示。



系统的开环传递函数为

A、$G(s)=\dfrac{2(5s+1)}{s(10s+1)(0.25s+1)}$　　B、$G(s)=\dfrac{2(0.2s+1)}{s(0.1s+1)(4s+1)}$

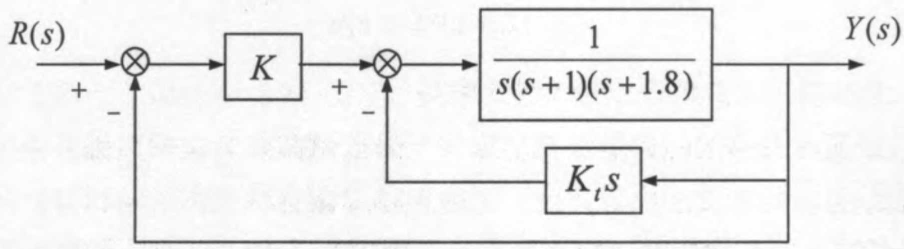
C、$G(s)=\dfrac{5s+1}{s(10s+1)(0.25s+1)}$　　D、$G(s)=\dfrac{s+0.2}{s(s+0.1)(s+4)}$

二、(22 分)单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{k(s+1)}{s(s+2)(s+3)}$$

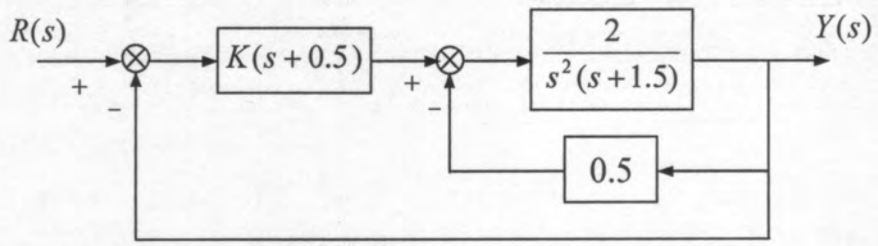
1. 若系统的一个闭环极点为 -0.9，试求参数 k 的取值和其余的闭环极点。
2. 采用主导极点法简化该高阶系统，并求出近似系统的闭环传递函数。
3. 概略绘制近似系统的单位阶跃响应曲线（要求算出主要的瞬态性能指标）。原系统的单位阶跃响应与之比较，会有何不同？试说明产生不同的原因。

三、(24 分)单位负反馈系统的开环传递函数为



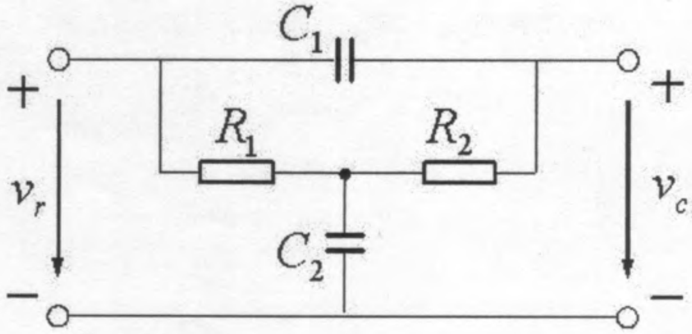
1. 用根轨迹方法设计参数 K、K_t 的取值，使系统满足下列性能指标：
   ①闭环系统稳定；
   ②系统的最大超调量 $M_p \le 20\%$，调整时间 $t_s \le 4\,s \quad (\Delta = 2\%)$。
2. 求出设计后系统的闭环传递函数。

四、(24 分)反馈控制系统如图所示



1. 绘制系统的完整奈氏图，并求取使闭环系统临界稳定时的 K 值。
2. 试用奈氏稳定判据分析闭环系统的稳定性。

五、建模题（15 分）：如图所示无源电网络，图中 R 为电阻，C 为电容：



1. 以 $v_r(t)$ 为输入 $\boldsymbol{u}$，$v_c(t)$ 为输出 $\boldsymbol{y}$，选取合适的状态变量 $\boldsymbol{x}$，建立系统的状态空间方程；
2. 求系统的传递函数。

六、计算与设计（25 分）：已知系统的状态空间方程及初始状态为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 + 6u \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 4x_2 - 3u \\ y = 2x_1 - x_2 - 2u \end{cases} \qquad \boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

1. 求单位阶跃信号作用下，输出 $y(t_f) = 0$ 的时刻 t_f；
2. 判断系统的渐近稳定性和 BIBO 稳定性；
3. 若可能，设计状态反馈使闭环系统的极点位于 $-3 \pm j3$。

七、证明题（20 分）：对于连续时间线性定常系统，试证明：

1. 若{ $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ }是传递函数 $\hat{g}(s)$ 的一个实现，则{ $\boldsymbol{A}^T, \boldsymbol{c}^T, \boldsymbol{b}^T$ }也一定是 $\hat{g}(s)$ 的一个实现；
2. 系统能控的充要条件是系统能达。

2010年硕士研究生入学考试试题参考答案

（自动控制理论）

一、1. B

系统闭环传递函数为

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{4(s+5)}{s^2+14s+25}$$

$$\therefore y_{ss}=\lim_{t\to\infty}y(t)=\lim_{s\to 0}sY(s)=\lim_{s\to 0}\frac{4(s+5)}{s^2+14s+25}=0.8$$

2. A

由Bode图，则系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K(T_2s+1)}{s(T_1s+1)(T_3s+1)}=\frac{K(\frac{1}{0.2}s+1)}{s(\frac{1}{0.1}s+1)(\frac{1}{4}s+1)}$$

$$=\frac{K(5s+1)}{s(10s+1)(0.25s+1)}$$

由图，知 $20\lg|G(j\omega)|_{\omega=1}=0$

$$\therefore \frac{K\cdot 5}{1\cdot 10}=1 \quad\longrightarrow K=2$$

$$\therefore G(s)=\frac{2(5s+1)}{s(10s+1)(0.25s+1)}$$

二、1. $k=\left|\frac{s(s+2)(s+3)}{s+1}\right|_{s=0.9}=\frac{0.9\times 1.1\times 2.1}{0.1}=20.79$

设另二个闭环根为 λ_1、λ_2.

则 $\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+0.9=5\\ \lambda_1\cdot\lambda_2\cdot 0.9=20.79\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=4.1\\ \lambda_1\cdot\lambda_2=23.1\end{cases}$

$\therefore \lambda_1^2-4.1\lambda_1+23.1=0$ ， $\Rightarrow \lambda_{1,2}=2.05\pm j4.35$

2、系统的闭环传递函数为

$$W(S)=\frac{20.79(S+1)}{(S+0.9)(S^2+4.1S+23.1)}$$

$\because$ $z=-1$，$s_3=-0.9$ > 构成一对闭环偶极子

$\therefore$ $S_{1,2}=-2.05\pm j4.35$ 为主导极点

$\therefore$ 近似系统的闭环传递函数为

$$W(S)=\frac{23.1}{S^2+4.1S+23.1}$$

3、对近似系统，有：

$$\omega_n=\sqrt{23.1}=4.81\ rad/s$$

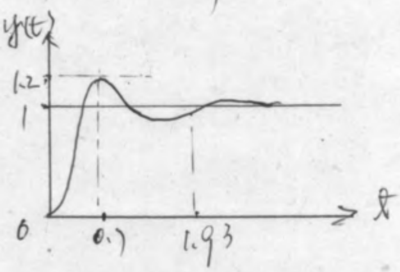
$$\zeta=\frac{4.1}{2\omega_n}=\frac{4.1}{2\times4.81}=0.43$$

$$\therefore M_p=e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}=e^{-1.48}=23\%$$

$$t_p=\frac{\pi}{\omega_d}=\frac{3.14}{4.35}=0.72S$$

$$t_s=\frac{4}{\zeta\omega_n}=\frac{4}{0.43\times4.81}=1.93\ S\quad(\Delta=2\%)$$

据上述指标，可画出近似系统的单位阶跃响应曲线



原系统的单位阶跃响应与之比较：Mp变小，ts变大。

原因在于：非主导极点（s=-0.9）在主导极点右侧，更近虚轴，它使系统的阻尼增大。

三、1. 确定期望闭环根点 s_d

$$M_p = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} \le 0.2 \rightarrow \zeta \ge 0.46$$

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \le 4 \rightarrow \zeta\omega_n \ge 1 \rightarrow \omega_n = 2.17 \text{ rad/s}$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 2.17 \times 0.89 = 1.93 \text{ rad/s}$$

$\therefore s_d = -1 \pm j1.93$

系统的开环传递函数为

$$G(s) = K\cdot W_1(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+1.8)+K_t s}$$

闭环特征方程 $D(s) = s(s+1)(s+1.8)+K_t s+K = 0$

$\therefore$ 系统的等效开环传递函数为

$$G_1(s) = \frac{K_t s+K}{s(s+1)(s+1.8)} = \frac{K_t(s+z)}{s(s+1)(s+1.8)} \quad \left(z = \frac{K}{K_t}\right)$$

用根轨迹方法：$\angle G_1(s_d) = -180° \rightarrow$ 求 z

$\therefore \angle s_d+z - \angle s_d - \angle s_d+1 - \angle s_d+1.8 = -180°$

$$tg^{-1}\frac{1.93}{z-1} - (90°+tg^{-1}\frac{1}{1.93}) - 90° - tg^{-1}\frac{1.93}{0.8} = -180°$$

$$tg^{-1}\frac{1.93}{z-1} = 94.88° \rightarrow \frac{1.93}{z-1} = -11.71 \Rightarrow z = 0.84$$

由 $|G_1(s_d)| = 1 \rightarrow K_t$

$$\therefore K_t(s_d) = \left|\frac{s(s+1)(s+1.8)}{s+0.84}\right|_{s_d=-1+j1.93} = \frac{2.17\times1.93\times2.09}{1.94} = 4.51$$

$\therefore K = 0.84K_t = 3.79$

2. 设计后系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{3.79}{s^3+2.8s^2+6.31s}$$

闭环传递函数为

$$W(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{3.79}{s^3+2.8s^2+6.31s+3.79}$$

四、1. 系统的开环传递函数为

$$G(s)=K(s+0.5)\cdot W_1(s)=\frac{2K(s+0.5)}{s^3+1.5s^2+1}=\frac{K(2s+1)}{s^3+1.5s^2+1}$$

内环的闭环特征式 $D_1(s)=s^3+1.5s^2+1=0$

对 $D_1(s)$ 列Routh阵列：

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 0 \\ s^2 & 1 & 1 \\ s^1 & -1 & \\ s^0 & 1 & \end{array}$$

$\Rightarrow W_1(s)$ 有二个位于右半S平面的闭环极点

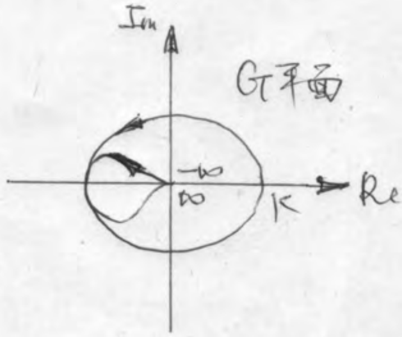
∴ $G(s)$ 为非最小相位系统，有二个开环右极点.

∴ $\omega=0$：$G(j0)=K\angle 0^\circ$

$\omega=\infty$：$G(j\infty)=0\angle 180^\circ+0$

设奈氏图交负实轴于点A，频率 ω_A.

设A点为临界点 $(-1, j0)$



则 $\begin{cases}\angle G(j\omega_A)=-180^\circ \\ |G(j\omega_A)|=1\end{cases}$

∴ $tg^{-1}2\omega - tg^{-1}\frac{-\omega^3}{1-1.5\omega^2}=-180^\circ$

∴ $2\omega+\frac{\omega^3}{1-1.5\omega^2}=0 \rightarrow 2(1-1.5\omega^2)=-\omega^2 \Rightarrow \omega^2=1$

∴ $\frac{K\sqrt{4\omega^2+1}}{\sqrt{(1-1.5\omega^2)^2+\omega^6}}=\frac{K\sqrt{5}}{\sqrt{1.25}}=2K=1 \Rightarrow K=0.5$，系统临界稳定

2. 改变K值，奈氏图将随之改变，其与 $(-1, j0)$ 点的相对位置发生变化

故闭环系统的稳定性分析如下：

当 $K>0.5$ 时，$(-1, j0)$ 点位于A点右侧，

则 $n_c=N+n_0=-2+2=0 \Rightarrow$ 闭环系统稳定

当 $0<K<0.5$ 时，$(-1, j0)$ 点位于A点左侧，

则 $n_c=N+n_0=0+2=2 \Rightarrow$ 闭环系统不稳定

当 $K=0.5$ 时，闭环系统临界稳定。

五、建模题（共15分）

1. 依次选择电容C1、C2两端的电压为状态变量x1,x2，易列写出微分方程组为：

$$v_r(t)=v_1(t)+v_c(t);$$

$$[v_r(t)-v_2(t)]/R_1+C_1\frac{dv_1(t)}{dt}=C_2\frac{dv_2(t)}{dt};$$

$$v_c(t)=R_2C_1\frac{dv_1(t)}{dt}+v_2(t)$$

此即

$$u=x_1+y;$$

$$u-x_2+R_1C_1\dot{x}_1=R_1C_2\dot{x}_2;$$

整理：

$$y=R_2C_1\dot{x}_1+x_2$$

$$\dot{x}_1=-\frac{1}{R_2C_1}x_1-\frac{1}{R_2C_1}x_2+\frac{1}{R_2C_1}u$$

$$\dot{x}_2=\frac{1}{R_1C_2}(u-x_2)+\frac{1}{R_2C_2}(u-x_1-x_2)$$

$$y=-x_1+u$$

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{R_2C_1} & -\frac{1}{R_2C_1}\\ -\frac{1}{R_2C_2} & -\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C_2}\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}\frac{1}{R_2C_1}\\ \frac{R_1+R_2}{R_1R_2C_2}\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}-1 & 0\end{bmatrix}x+1\cdot y$$

2. 于是系统的传递函数：

$$\hat{g}(s)=\boldsymbol{c}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}+d=\begin{bmatrix}-1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s+\frac{1}{R_2C_1} & \frac{1}{R_2C_1}\\ \frac{1}{R_2C_2} & s+\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C_2}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\frac{1}{R_2C_1}\\ \frac{R_1+R_2}{R_1R_2C_2}\end{bmatrix}+1$$

$$=\frac{[-1\quad 0]}{\left(s+\frac{1}{R_2C_1}\right)\left(s+\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C_2}\right)-\frac{1}{R_2R_2C_1C_2}}\begin{bmatrix}s+\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C_2} & -\frac{1}{R_2C_1}\\ -\frac{1}{R_2C_2} & s+\frac{1}{R_2C_1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{R_2C_1}\\ \frac{R_1+R_2}{R_1R_2C_2}\end{bmatrix}+1$$

$$=\frac{R_1R_2R_2C_1C_2}{(R_2C_1s+1)(R_1R_2C_2s+R_1+R_2)-R_1}\begin{bmatrix}-\left(s+\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C_2}\right) & \frac{1}{R_2C_1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{R_2C_1}\\ \frac{R_1+R_2}{R_1R_2C_2}\end{bmatrix}+1$$

$$=\frac{R_1R_2C_1C_2}{R_1R_2C_1C_2s^2+(R_1C_2+R_1C_1+R_2C_1)s+1}\left(-\frac{s}{R_2C_1}\right)+1$$

$$=\frac{R_1R_2C_1C_2s^2+(R_1+R_2)C_1s+1}{R_1R_2C_1C_2s^2+(R_1C_2+R_1C_1+R_2C_1)s+1}$$

六、计算并设计（共 25 分）

1. $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 4\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}6\\ -3\end{bmatrix}, c=\begin{bmatrix}2 & -1\end{bmatrix}, d=-2;\ x_0=\begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix}$

系统的特征多项式及特征值：

$f(\lambda)=\det(\lambda I-A)=(s-2)(s-4)+1=s^2-6s+9$，$\lambda_1=\lambda_2=3$,

设 $e^{At}=\alpha_0(t)I+\alpha_1(t)A$，则：$e^{3t}=\alpha_0(t)+3\alpha_1(t),\ te^{3t}=\alpha_1(t)$

解得：$\alpha_0(t)=e^{3t}-3te^{3t}$，$\alpha_1(t)=te^{3t}$，于是

$$e^{At}=(e^{3t}-3te^{3t})I+te^{3t}A=\begin{bmatrix}e^{3t}-te^{3t} & te^{3t}\\ -te^{3t} & e^{3t}+te^{3t}\end{bmatrix}==\begin{bmatrix}1-t & t\\ -t & 1+t\end{bmatrix}e^{3t}$$

$$x(t)=e^{At}x_0+\int_0^t e^{A\tau}bu(t-\tau)d\tau$$

$$=\begin{bmatrix}e^{3t}-te^{3t} & te^{3t}\\ -te^{3t} & e^{3t}+te^{3t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}1-\tau & \tau\\ -\tau & 1+\tau\end{bmatrix}e^{3\tau}\cdot\begin{bmatrix}6\\ -3\end{bmatrix}\cdot 1\cdot d\tau$$

$$=\begin{bmatrix}1-t & t\\ -t & 1+t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix}e^{3t}+\int_0^t\begin{bmatrix}2-3\tau\\ -1-3\tau\end{bmatrix}e^{3\tau}d3\tau$$

$$=\begin{bmatrix}-1+3t\\ 2+3t\end{bmatrix}e^{3t}+\left(\begin{bmatrix}2-3t\\ -1-3t\end{bmatrix}e^{3t}-\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}\right)+\left(\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}e^{3t}-\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\ 2\end{bmatrix}e^{3t}-\begin{bmatrix}3\\ 0\end{bmatrix}$$

$$y(t)=cx(t)+du(t)=\begin{bmatrix}2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2e^{3t}-3\\ 2e^{3t}\end{bmatrix}-2\times 1=2e^{3t}-8$$

$$y(t_f)=2e^{3t_f}-8=0\Rightarrow t_f=\frac{1}{3}\ln 4\approx 0.462$$

2. 如上所求，系统的两个特征值均为正数，所以系统不是渐近稳定的；同时

$M_C=\begin{bmatrix}b & Ab\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 9\\ -3 & -18\end{bmatrix}, \det M_C=-81\neq 0$，故系统能控；

$M_O=\begin{bmatrix}c\\ cA\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 5 & -2\end{bmatrix}, \det M_O=1\neq 0$，故系统能观；

即系统是既能控又能观的，没有零极点对消，故它也不是 BIBO 稳定的。

当然，通过求取系统的传递函数：

$$\hat{g}(s)=c(sI-A)^{-1}b+d$$

$$=\begin{bmatrix}2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s-2 & -1\\ 1 & s-4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}6\\ -3\end{bmatrix}-2=\frac{1}{s^2-6s+9}\begin{bmatrix}2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s-4 & -1\\ 1 & s-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\ -3\end{bmatrix}-2$$

$$=\frac{1}{s^2-6s+9}\begin{bmatrix}2s-9 & -s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\ -3\end{bmatrix}-2=\frac{15s-54}{s^2-6s+9}-2$$

因其既约传递函数中仍有两个右半平面极点，同样可以断定系统非 BIBO 稳定。

3．如上，因系统能控，可以通过状态反馈任意配置系统的闭环极点；事实上，取状态反馈：$u = r - \boldsymbol{kx} = r - [k_1\ k_2]\boldsymbol{x}$，则

$$f_k(\lambda) = \det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{bk}) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 + 6k_1 & -1 + 6k_2 \\ 1 - 3k_1 & \lambda - 4 - 3k_2 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2 + (-6 + 6k_1 - 3k_2)\lambda + (9 - 27k_1)$$

而期望特征方程为：

$$f_g(\lambda) = (\lambda + 3)^2 + 3^2 = \lambda^2 + 6\lambda + 18$$

令二者相同可解得：$k_1 = -\dfrac{1}{3}, k_2 = -\dfrac{14}{3}$，即 $\boldsymbol{k} = [k_1\ k_2] = [-\dfrac{1}{3}\quad -\dfrac{14}{3}]$，所求的状态反馈为

$$u = r - \boldsymbol{kx} = r - [k_1\ k_2]\boldsymbol{x} = r + \frac{1}{3}x_1 + \frac{14}{3}x_2$$

七、证明题（共 20 分）

1．因{ $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ }是传递函数 $\hat{g}(s)$ 的一个实现，故有：$\hat{g}(s) = \boldsymbol{c}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}$，而系统{ $\boldsymbol{A}^T, \boldsymbol{c}^T, \boldsymbol{b}^T$ }的传递函数是

$$\hat{g}_T(s) = \boldsymbol{b}^T(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^T)^{-1}\boldsymbol{c}^T = [\boldsymbol{c}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}]^T = [\hat{g}(s)]^T = \hat{g}(s)$$

这就说明了系统{ $\boldsymbol{A}^T, \boldsymbol{c}^T, \boldsymbol{b}^T$ }则也是 $\hat{g}(s)$ 的一个实现。上式中最后一个等式的成立是因为传递函数 $\hat{g}(s)$ 是标量。

2．首先，系统{ $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ }能达是指对状态空间中的任意状态 $\boldsymbol{x}_r$，存在一定义在有限时间域 $[0, t_f]$ 上的控制函数 $\boldsymbol{u}_r(t)$，使得

$$\boldsymbol{x}_r = \int_0^{t_f - \tau} e^{A\tau}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_r(\tau)d\tau$$

而系统{ $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ }能控是指对状态空间中的任意状态 $\boldsymbol{x}_c$，存在一定义在有限时间域 $[0, t_f]$ 上的控制函数 $\boldsymbol{u}_c(t)$，使得

$$\boldsymbol{x}(t_f) = e^{At_f}\boldsymbol{x}_c + \int_0^{t_f - \tau} e^{A\tau}\boldsymbol{b}\boldsymbol{u}_c(t)d\tau = \boldsymbol{0}\text{，即} -e^{At_f}\boldsymbol{x}_c = \int_0^{t_f - \tau} e^{A\tau}\boldsymbol{b}\boldsymbol{u}_c(t)d\tau$$

显然，为了针对指定的初状态 $\boldsymbol{x}_c$ 求实现能控的 $\boldsymbol{u}_c(t)$，可化归为针对目标状态 $-e^{At_f}x_c$ 求实现能达的 $\boldsymbol{u}_r(t)$；同样为了针对指定的目标状态 $\boldsymbol{x}_r$ 求实现能达的 $\boldsymbol{u}_r(t)$，化归为针对目标状态 $-e^{-At_f}x_r$ 求实现能控的 $\boldsymbol{u}_c(t)$；由于 $-e^{At_f}$ 及 $-e^{-At_f}$ 满秩，故上述两种化归均可顺利实现，即 $-e^{At_f}x_c$ 和 $-e^{-At_f}x_r$ 都仍然能够保证在状态空间中的任意选取。