2021 高数下册测试解析

姓名：______________ 分数：______________

答案：**1-8 AB(数 13 D)CA DCDB(数 1 D)**

9-14 $\frac{1}{2e}dx-\frac{1}{2}dy$ y^2+xy+1

$f'+xf''+x^{y-1}g_1'+yx^{y-1}\ln xg_1'+yx^{2y-1}\ln xg_{11}''+2y^2x^{y-1}g_{12}''+2x^{y+1}\ln xg_{21}''+4xyg_{22}''$

(数 13 $(2x+1)e^x$ **)** 3 $2\pi e$ $\frac{1}{4}$

一、选择题：**1~8** 小题，每小题 **4** 分，共 **32** 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的.

(1) 二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)}{x}, x\neq 0\\ 0, \qquad x=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点处 【 】

(A) 连续，且 $f_x'(0,0)$，$f_y'(0,0)$ 存在 (B) 连续，但 $f_x'(0,0)$，$f_y'(0,0)$ 不存在

(C) 不连续，但 $f_x'(0,0)$，$f_y'(0,0)$ 存在 (D) 不连续，且 $f_x'(0,0)$，$f_y'(0,0)$ 不存在

解析：选 A.

连续性：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(xy)}{x}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot y=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot\lim\limits_{y\to 0}y=1\cdot 0=0=f(0,0)$，

故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

偏导数：$f_x'(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\sin(\Delta x\cdot 0)}{\Delta x}-0}{\Delta x}=0$，

同理 $f_y'(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{0-0}{\Delta y}=0$.

故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处偏导数存在.

(2) (数二) 设 $z=f(x,y)$ 连续且 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-2x+y}{(x-1)^2+y^2}=0$，则 $dz|_{(1,0)}$ 的值为 【 】

(A) $dx-2dy$ (B) $2dx-dy$ (C) $dx+dy$ (D) $dx-dy$

解析：选 B.

令 $\rho=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$ ，由 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-2x+y}{(x-1)^2+y^2}=0$ 得 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}[f(x,y)-2x+y]=0$ ，

于是 $f(1,0)=2$ ，再由 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-2x+y}{(x-1)^2+y^2}=0$

得 $f(x,y)-2x+y=o(\rho)$ 或 $f(x,y)=2x-y+o(\rho)$，

即 $\Delta z=f(x,y)-f(1,0)=2x-y-2+o(\rho)=2(x-1)-(y-0)+o(\rho)$，

由可微的定义得 $z=f(x,y)$ 在点 $(1,0)$ 处可微，且 $dz\big|_{(1,0)}=2dx-dy$.

(数一、数三) 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\dfrac{1}{n^{\alpha}}$ 绝对收敛，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$ 条件收敛，则 【 】

(A) $0<\alpha\le\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{1}{2}<\alpha\le 1$ (C) $1<\alpha\le\dfrac{3}{2}$ (D) $\dfrac{3}{2}<\alpha\le 2$

解析：应选 D.

由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\dfrac{1}{n^{\alpha}}$ 绝对收敛，且当 $n\to\infty$ 时，$\left|(-1)^n\sqrt{n}\sin\dfrac{1}{n^{\alpha}}\right|\sim\dfrac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}$，故 $\alpha-\dfrac{1}{2}>1$，即 $\alpha>\dfrac{3}{2}$.

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$ 条件收敛知，$\alpha<2$.应选 D.

(3) 设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处 【 】

(A) 连续但不可偏导 (B) 可偏导但不连续 (C) 可微 (D) 一阶连续可偏导

解析：选 C.

因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0=f(0,0)$，所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x^2}=0$，所以 $f_x'(0,0)=0$ ，

根据对称性，$f_y'(0,0)=0$ ，即 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可偏导.

由 $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)-f_x'(0,0)x-f_y'(0,0)y}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to 0}\rho\sin\dfrac{1}{\rho^2}=0$

得 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

当$(x,y)\neq(0,0)$时，$f_x'(x,y)=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$，则

$$f_x'(x,y)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

因为$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f_x'(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\left(2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}\right)$不存在，

所以$f_x'(x,y)$在$(0,0)$处不连续，同理$f_y'(x,y)$在$(0,0)$处也不连续.选 C.

(4) 设$f(x,y)$在$(0,0)$的某邻域内连续，且满足$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{|x|+y^2}=-3$，则$f(x,y)$在$(0,0)$处【　】

(A) 取极大值　(B) 取极小值　(C) 不取极值　(D) 无法确定是否取极值

解析：选 A.

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{|x|+y^2}=-3$，由极限的保号性，存在$\delta>0$，当$0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$时，

$\frac{f(x,y)-f(0,0)}{|x|+y^2}<0$.因为$0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$时，$|x|+y^2>0$，

所以当$0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$时，有$f(x,y)<f(0,0)$，即$f(x,y)$在$(0,0)$处取极大值.

(5) 设$D=\{(x,y)\mid(x-2)^2+(y-2)^2\le2\}$，$I_i=\iint\limits_D(x+y)^i d\sigma(i=1,2,3)$，则$I_i(i=1,2,3)$的大小关系中，正确的是【　】

(A) $I_3<I_2<I_1$　(B) $I_2<I_3<I_1$　(C) $I_1<I_3<I_2$　(D) $I_1<I_2<I_3$

解析：选 D.

$\because(x-2)^2+(y-2)^2\le2, x^2+y^2-4x-4y\le-6,$

$\therefore 4(x+y)\ge6+x^2+y^2>6, x+y>\frac{3}{2}>1$.

知$x+y<(x+y)^2<(x+y)^3$.由二重积分的性质，有$\iint\limits_D(x+y)d\sigma<\iint\limits_D(x+y)^2d\sigma<\iint\limits_D(x+y)^3d\sigma$.

即$I_1<I_2<I_3$.故应选(D).

(6) 设$f\in C(D)$，$D=\{(x,y)\mid|x|\le y\le\sqrt{1-x^2}\}$，则$\iint\limits_D f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$的值【　】

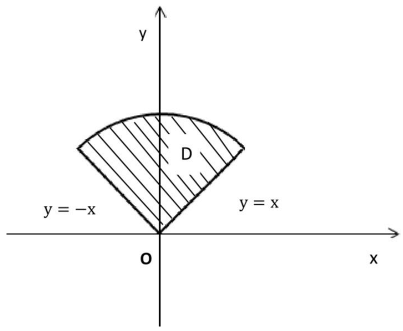
(A) $\pi\int_0^1 \rho f(\rho)d\rho$　(B) $\frac{3\pi}{4}\int_0^1 \rho f(\rho)d\rho$

(C) $\frac{\pi}{2}\int_0^1 \rho f(\rho)d\rho$　(D) $\frac{\pi}{4}\int_0^1 \rho f(\rho)d\rho$

解析：选 C.

区域D的图形如图所示，在极坐标系下，有$D=\{(\rho,\theta)\big|0\le\rho\le1,\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{3}{4}\pi\}$.

则$\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy=\iint\limits_D f(\rho)\rho d\rho d\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}d\theta\int_0^1\rho f(\rho)d\rho=\frac{\pi}{2}\int_0^1\rho f(\rho)d\rho$.



第 6 题图

(7) 设$f\in C(D)$，$D=\{(x,y)\big|0\le x\le1,0\le y\le x^2\}$，且$f(x,y)$满足等式

$f(x,y)=xy+\iint\limits_D f(x,y)dxdy$,则$f(x,y)$的值为　　【　】

(A) xy　(B) $2xy+\frac{1}{4}$　(C) $xy+1$　(D) $xy+\frac{1}{8}$

解析：选 D.

设$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=A$，则$f(x,y)=xy+A$.对此式二重积分，有

$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_D xydxdy+A\iint\limits_D dxdy=A$，于是

$A=\int_0^1 xdx\int_0^{x^2}ydy+A\int_0^1 dx\int_0^{x^2}dy=\frac{1}{2}\int_0^1 x^5dx+A\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{12}+\frac{1}{3}A$.

可知$A=\frac{1}{8}$，有$f(x,y)=xy+\frac{1}{8}$.

(8) (数二、数三) 二次积分$\int_0^2 dx\int_x^2 e^{-y^2}dy$的值等于　　【　】

(A) $\frac{e^{-4}-1}{2}$　(B) $\frac{1-e^{-4}}{2}$　(C) $\frac{e^{-2}-1}{2}$　(D) $\frac{1-e^{-2}}{2}$

解析：选 B.

$\int_0^2 dx\int_x^2 e^{-y^2}dy=\int_0^2 e^{-y^2}dy\int_0^y dx=\int_0^2 ye^{-y^2}dy=-\frac{1}{2}e^{-y^2}\Big|_0^2=\frac{1}{2}(1-e^{-4})$.

(数一) 设 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2, y=x, y=0, z=1$ 在第一卦限所围成的区域，$f(x,y,z)$ 在 Ω 上连续，则 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$ 等于 【　】

(A) $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}} dx\int_{x^2+y^2}^1 f(x,y,z)dz$　(B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx\int_x^{\sqrt{1-x^2}} dy\int_{x^2+y^2}^1 f(x,y,z)dz$

(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}} dx\int_0^1 f(x,y,z)dz$　(D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}} dx\int_{x^2+y^2}^1 f(x,y,z)dz$

解析：选 D.

Ω 在 xOy 面上的投影是由 $x^2+y^2=1, y=0, y=x$ 在第一象限围成的 $\frac{1}{8}$ 圆域，则

$$\iiint\limits_{D} f(x,y,z)dv=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}} dx\int_{x^2+y^2}^1 f(x,y,z)dz,$$

故选 D.

二、填空题：**9~14** 小题，每小题 **4** 分，共 **24** 分.

(9) 已知由 $x=ze^{y+z}$ 确定 $z=z(x,y)$，则 $dz\big|_{(e,0)}=$____________.

解析：$x=e$，$y=0$ 时，$z=1$. $x=ze^{y+z}$ 两边对 x 求偏导得 $1=\frac{\partial z}{\partial x}e^{y+z}+ze^{y+z}\frac{\partial z}{\partial x}$，解得 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(e,0)}=\frac{1}{2e}$；

$x=ze^{y+z}$ 两边对 y 求偏导得 $\frac{\partial z}{\partial y}e^{y+z}+ze^{y+z}\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0$，解得 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(e,0)}=-\frac{1}{2}$，故 $dz\big|_{(e,0)}=\frac{1}{2e}dx-\frac{1}{2}dy$.

(10) 设 $z=f(x,y)$ 二阶可偏导，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2$ 且 $f(x,0)=1$，$f'_y(x,0)=x$，则 $f(x,y)=$________.

解析：$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2$ 得 $\frac{\partial z}{\partial y}=2y+\varphi(x)$，因为 $f'_y(x,0)=x$，所以 $\varphi(x)=x$，即 $\frac{\partial z}{\partial y}=2y+x$，

$z=y^2+xy+C$，因为 $f(x,0)=1$ 得 $C=1$，于是 $z=y^2+xy+1$.

(11) (数二) 设 $z=xf(x+y)+g(x^y, x^2+y^2)$，其中 f，g 分别二阶连续可导和二阶连续可偏导，

则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$____________.

解析：由 $z=xf(x+y)+g(x^y, x^2+y^2)$ 得

$\frac{\partial z}{\partial x}=f(x+y)+xf'(x+y)+yx^{y-1}g'_1(x^y, x^2+y^2)+2xg'_2(x^y, x^2+y^2)$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f'+xf''+x^{y-1}g_1'+yx^{y-1}\ln xg_1'+yx^{2y-1}\ln xg_{11}''+2y^2x^{y-1}g_{12}''+2x^{y+1}\ln xg_{21}''+4xyg_{22}''\text{(数一、数三)}$$

幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^n$的和函数为________.

解析：显然幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^n$的收敛半径为$R=+\infty$，收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n}{n!}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$=2x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+e^x=2x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}+e^x=(2x+1)e^x.$$

(12) 设$f(u,v)$一阶连续可偏导，$f(tx,ty)=t^3f(x,y)$，且$f_1'(1,2)=1$，$f_2'(1,2)=4$，则

$f(1,2)$=__________.

解析：$f(tx,ty)=t^3f(x,y)$两边对t求导得$xf_1'(tx,ty)+yf_2'(tx,ty)=3t^2f(x,y)$，取$t=1$，$x=1$，$y=2$

得$f_1'(1,2)+2f_2'(1,2)=3f(1,2)$，故$f(1,2)=3$.

(13) 设$F(t)=\iint_D e^{\sin\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$，其中$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le t^2\}$，求$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\frac{F'(t)}{t}$=______.

解析：$\because F(t)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t e^{\sin\rho}\rho d\rho,\therefore F'(t)=2\pi te^{\sin t}$

故$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\frac{F'(t)}{t}=\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\pi te^{\sin t}}{t}=2\pi e.$

(14) 设$f(x)=\begin{cases}x,0\le x\le 1\\0,\text{其他}\end{cases}$ D为$-\infty<x<+\infty$，$-\infty<y<+\infty$，则

$\iint_D f(y)f(x+y)dxdy=$__________.

解析：$f(y)f(x+y)=\begin{cases}y(x+y),0\le y\le 1,0\le x+y\le 1\\0,\qquad\text{其他}\end{cases}$，则

$$\iint_D f(y)f(x+y)dxdy=\int_0^1 ydy\int_{-y}^{1-y}(x+y)dx=\int_0^1 y\left(\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-y}^{1-y}+y\right)dy=\frac{1}{2}\int_0^1 ydy=\frac{1}{4}.$$

三、解答题：**15~23**小题，共**94**分**.**解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤**.**

(15) (本题满分10分)

设 $z=z(x,y)$ 由方程 $z+\ln z-\int_y^x e^{-t^2}dt=1$ 确定，求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}$.

解析：当 $x=0$ ，$y=0$ 时 $z=1$. $z+\ln z-\int_y^x e^{-t^2}dt=1$ 两边分别对 x 和 y 求偏导得

$\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{z}\dfrac{\partial z}{\partial x}-e^{-x^2}=0$ ，$\dfrac{\partial z}{\partial y}+\dfrac{1}{z}\dfrac{\partial z}{\partial y}+e^{-y^2}=0$ ，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\dfrac{1}{2}$ ，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}=-\dfrac{1}{2}$.

$\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{z}\dfrac{\partial z}{\partial x}-e^{-x^2}=0$ 两边对 y 求偏导得 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{1}{z^2}\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{z}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$ ，故 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}=-\dfrac{1}{8}$.

(16) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有二阶连续导数，且 $u=f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$. 当 $x^2+y^2+z^2>0$ 时，满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ 与 $f(1)=f'(1)=1$ ，求函数 $f(r)$ 的表达式.

解析：设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ，则 $u=f(r)$ ，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.从而 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{x}{r}f'(r)$ ，

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{r-x\dfrac{x}{r}}{r^2}f'(r)+\dfrac{x}{r}f''(r)\cdot\dfrac{x}{r}=\dfrac{1}{r}f'(r)-\dfrac{x^2}{r^3}f'(r)+\dfrac{x^2}{r^2}f''(r)$.同理可得

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{1}{r}f'(r)-\dfrac{y^2}{r^3}f'(r)+\dfrac{y^2}{r^2}f''(r)$ ，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\dfrac{1}{r}f'(r)-\dfrac{z^2}{r^3}f'(r)+\dfrac{z^2}{r^2}f''(r)$.代入 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ ，

得当 $r>0$ 时，$\dfrac{3}{r}f'(r)-\dfrac{x^2+y^2+z^2}{r^3}f'(r)+\dfrac{x^2+y^2+z^2}{r^2}f''(r)=0$ 即 $\dfrac{3}{r}f'(r)-\dfrac{1}{r}f'(r)+f''(r)=0$ ，即 $f''(r)+\dfrac{2}{r}f'(r)=0$ ，两边同乘 r^2 ，得 $r^2f''(r)+2rf'(r)=0$ ，即 $\left[r^2f'(r)\right]'=0$ ，于是 $r^2f'(r)=C$.

由 $f'(1)=1$ 可知 $C=1$ ，于是 $f'(r)=\dfrac{1}{r^2}$ ，$f(r)=\int\dfrac{1}{r^2}dr=-\dfrac{1}{r}+C_1$ ，再由 $f(1)=1$ 可知 $C_1=2$ ，故 $f(r)=2-\dfrac{1}{r}$.

(17) (本题满分 10 分)

设二元函数 $z=f(x,y)=x^2y(4-x-y)$ 在由 x 轴、y 轴及 $x+y=6$ 所围成的闭区域 D 上的最小值和最大值.

解析：(i) 求 $f(x,y)$ 在区域 D 的边界上的最值.

在 $L_1: y=0(0\le x\le 6)$ 上，$z=0$ ；

在$L_2: x=0(0\le y\le 6)$上，$z=0$；

在$L_3: y=6-x(0\le x\le 6)$上，$z=-2x^2(6-x)=2x^3-12x^2$，

由$\dfrac{dz}{dx}=6x^2-24x=0$得$x=4$，因为$f(0,6)=0$，$f(6,0)=0$，$f(4,2)=-64$，所以$f(x,y)$在$L_3$上最小值为$-64$，最大值为$0$.

(ii) 在区域D内，由$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xy(4-x-y)-x^2y=0\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2(4-x-y)-x^2y=0\end{cases}$得驻点$(2,1)$，

$A=\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(2,1)}=-6$，$B=\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(2,1)}=-4$，$C=\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(2,1)}=-8$，因为$AC-B^2>0$且$A<0$，所以$(2,1)$为$f(x,y)$的极大值点，极大值为$f(2,1)=4$，故$z=f(x,y)$在$D$上的最小值为$f(4,2)=-64$，最大值为$f(2,1)=4$.

(18) (本题满分 10 分)

设$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le\sqrt{2},x\ge 0,y\ge 0\}$,$[1+x^2+y^2]$表示不超过$1+x^2+y^2$的最大整数.计算二重积分$\iint\limits_D xy[1+x^2+y^2]dxdy$.

解析:

记$D_1=\{(x,y)|x^2+y^2<1,x\ge 0,y\ge 0\}$,

$D_2=\{(x,y)|1\le x^2+y^2\le\sqrt{2},x\ge 0,y\ge 0\}$,

则有$[1+x^2+y^2]=1,(x,y)\in D_1$, $[1+x^2+y^2]=2,(x,y)\in D_2$，

$$
\begin{aligned}
\text{于是}\iint\limits_D xy[1+x^2+y^2]dxdy&=\iint\limits_{D_1}xydxdy+\iint\limits_{D_2}2xydxdy\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\rho^3\sin\theta\cos\theta d\rho+\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^{\sqrt[4]{2}}2\rho^3\sin\theta\cos\theta d\rho\\
&=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}.
\end{aligned}
$$

(19) (本题满分 10 分)

计算$\iint\limits_D\dfrac{x+y}{x^2+y^2}dxdy$, 其中$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1,x+y\ge 1\}$.

解析:

用极坐标计算，边界 $x+y=1$ 可化为 $\rho=\dfrac{1}{\cos\theta+\sin\theta}$. 于是

$$原式=\iint_D \frac{\rho(\cos\theta+\sin\theta)}{\rho^2}\rho d\theta d\rho=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta+\sin\theta)d\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{1}d\rho$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta+\sin\theta-1)d\theta=2-\frac{\pi}{2}.$$

(20) (本题满分 11 分)

(数二) 设变换 $\begin{cases}u=x-2y\\ v=x+ay\end{cases}$ 可把方程 $6\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 简化为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$，其中 z 二阶连续可偏导，求常数 a.

解析：将 u,v 作为中间变量，则函数关系为 $z=f(u,v)$，$\begin{cases}u=x-2y\\ v=x+ay\end{cases}$ 则有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}，\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=-2\frac{\partial z}{\partial u}+a\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}=-2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(a-2)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}-2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+a\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+a\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}=4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-4a\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

将上述式子代入方程 $6\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 得 $(10+5a)\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+(6+a-a^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0$，

根据题意得 $\begin{cases}10+5a\neq 0\\ 6+a-a^2=0\end{cases}$ 解得 $a=3$.

(数一、数三) 设 $a_n=\int_0^{n\pi}x|\sin x|dx$，$(n=1,2,\cdots)$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{2^2}+\cdots+\dfrac{a_n}{2^n}\right)$.

解析：$a_n=\int_0^{n\pi}x|\sin x|dx\overset{(x=n\pi-t)}{=}\int_0^{n\pi}(n\pi-t)|\sin t|dt=n\pi\int_0^{n\pi}|\sin t|dt-a_n$，

$$a_n=\frac{n\pi}{2}\int_0^{n\pi}|\sin t|dt=\frac{n^2\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin tdt=n^2\pi\ .$$

考虑$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n=\frac{x+x^2}{(1-x)^3}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{2^n}\right)=\pi S\left(\frac{1}{2}\right)=6\pi$.

(21) (本题满分 11 分)

计算$\iint\limits_D ydxdy$，其中D是由曲线$\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1,(a>0,b>0)$与$Ox$轴，$Oy$轴围成的区域.

解析：$\because D=\{(x,y)|0\le y\le b,0\le x\le a(1-\sqrt{\frac{y}{b}})^2\}$.

$$\therefore \iint\limits_D ydxdy=\int_0^b dy\int_0^{a(1-\sqrt{\frac{y}{b}})^2}ydx=\int_0^b a(1-\sqrt{\frac{y}{b}})^2ydy=\int_0^b a(y+\frac{y^2}{b}-\frac{2}{\sqrt{b}}y^{\frac{3}{2}})dy=\frac{ab^2}{30}.$$

(22) (本题满分 11 分)

(数二、数三) $\iint\limits_D\frac{x}{y+1}dxdy$，其中$D=\{(x,y)|2x\le y\le x^2+1,0\le x\le 1\}$.

解析：原式$=\int_0^1 dx\int_{2x}^{x^2+1}\frac{x}{y+1}dy=\int_0^1 xdx\int_{2x}^{x^2+1}\frac{1}{y+1}dy$

$$=\int_0^1 x\ln(y+1)\Big|_{2x}^{x^2+1}dx=\int_0^1 x[\ln(x^2+2)-\ln(2x+1)]dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln(x^2+2)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+2}dx-\frac{x^2}{2}\ln(2x+1)\Big|_0^1+\int_0^1\frac{x^2}{2}\frac{2}{2x+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln 3-\frac{1}{2}\ln 3+\int_0^1\frac{x^2}{2x+1}dx-\int_0^1\frac{x^3}{x^2+2}dx$$

$$=\int_0^1(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2x+1})dx-\int_0^1(x-\frac{2x}{x^2+2})dx$$

$$=(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\ln 3)-(\frac{1}{2}-\ln 3+\ln 2)=\frac{9}{8}\ln 3-\ln 2-\frac{1}{2}.$$

(数一) 设函数$f(x,y)$满足$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(2x+1)e^{2x-y}$，且$f(0,y)=y+1$，$L_t$是从点$(0,0)$到点$(1,t)$的光滑曲线.计算曲线积分$I(t)=\int_{L_t}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$，并求$I(t)$的最小值.

解析：由$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(2x+1)e^{2x-y}$知，

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \int (2x+1)e^{2x-y}dx = e^{-y}\int (2x+1)e^{2x}dx \\
&= e^{-y}\left[\frac{1}{2}e^{2x}(2x+1) - \int e^{2x}dx\right] \\
&= e^{-y}\left[\frac{1}{2}e^{2x}(2x+1) - \frac{1}{2}e^{2x} + \varphi_1(y)\right] \\
&= xe^{2x-y} + \varphi_2(y),
\end{aligned}
$$

这里$\varphi_1(y),\varphi_2(y)$都是以$y$为自变量的待定函数，且$\varphi_2(y)=e^{-y}\varphi_1(y)$.

由$f(0,y)=y+1$得$\varphi_2(y)=y+1$, 从而$f(x,y)=xe^{2x-y}+y+1$.

因为$\dfrac{\partial f}{\partial x}=(2x+1)e^{2x-y},\dfrac{\partial f}{\partial y}=-xe^{2x-y}+1$在整个平面上都连续，

故$I(t)=\int_{L_t}\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy=f(1,t)-f(0,0)=e^{2-t}+t$.

$\dfrac{dI}{dt}=-e^{2-t}+1=0\Rightarrow t=2\Rightarrow I_{\min}=I(2)=3$.

(23) (本题满分 11 分)

(数二、数三) 设函数$f(x,y)$具有二阶连续偏导数，且满足$f(0,0)=1$，$f_x'(0,0)=2$，$f_y'(0,y)=-3$以及$f_{xx}''(x,y)=y$，$f_{xy}''(x,y)=x+y$，求$f(x,y)$的表达式.

解析：将$f_{xx}''(x,y)=y$对变量x求不定积分，得$f_x'(x,y)=\int ydx+C_1(y)=xy+C_1(y)$.

同样将$f_{xy}''(x,y)=x+y$对变量y求不定积分，得$f_x'(x,y)=\int(x+y)dx=xy+\dfrac{1}{2}y^2+C_2(x)$.整理得$C_1(y)=\dfrac{1}{2}y^2+C$，即$f_x'(x,y)=xy+\dfrac{1}{2}y^2+C$.由于$f_x'(0,0)=2$，故$C=2$.即$f_x'(x,y)=xy+\dfrac{1}{2}y^2+2$.

将$f_x'(x,y)=xy+\dfrac{1}{2}y^2+2$两边对$x$求不定积分，得

$f(x,y)=\int\left(xy+\dfrac{1}{2}y^2+2\right)dx=\dfrac{x^2y}{2}+\dfrac{1}{2}xy^2+2x+C_2(y)$，从而$f_y'(x,y)=\dfrac{x^2}{2}+xy+C_2'(y)$.由于

$f_y'(0,y)=-3$，得$C_2'(y)=-3$.故$C_2(y)=-3y+C_3$，于是$f(x,y)=\dfrac{x^2y}{2}+\dfrac{1}{2}xy^2+2x-3y+C_3$.再由

$f(0,0)=1$得$C_3=1$，所以$f(x,y)=\dfrac{x^2y}{2}+\dfrac{1}{2}xy^2+2x-3y+1$.

(数一) 设Σ为曲面$z=\sqrt{x^2+y^2},(1\le x^2+y^2\le 4)$下侧，$f(x)$是连续函数，计算

$$I=\iint_{\Sigma}[xf(xy)+2x-y]dydz+[yf(xy)+2y+x]dzdx+[zf(xy)+z]dxdy .$$

解析:该题 $f(x)$ 仅为连续函数，不可用高斯公式.

$$\because dS\cos\alpha=dydz, dS\cos\beta=dzdx, dS\cos\gamma=dxdy,$$

$$\therefore dydz=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}dxdy, dxdz=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}dxdy$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为 Σ 上法向量 $\vec{n}$ 的方向向量

$$\Sigma: z=\sqrt{x^2+y^2}, \vec{n}=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},-1\right)$$

$$I=\iint_{\Sigma}\left\{[xf(xy)+2x-y]\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)+[yf(xy)+2y+x]\left(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)+[zf(xy)+z]dxdy\right\}$$

$$=\iint_{\Sigma}\left[\frac{-x^2f(xy)-2x^2+xy-y^2f(xy)-2y^2-xy}{\sqrt{x^2+y^2}}+zf(xy)+z\right]dxdy$$

$$=\iint_{\Sigma}\left[-\sqrt{x^2+y^2}f(xy)-2\sqrt{x^2+y^2}+zf(xy)+z\right]dxdy$$

$$=\iint_{\Sigma}\left[-\sqrt{x^2+y^2}f(xy)-2\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+y^2}f(xy)+\sqrt{x^2+y^2}\right]dxdy$$

$$=\iint_{\Sigma}[-\sqrt{x^2+y^2}]dxdy$$

$$=\iint_{1\le x^2+y^2\le 4}\sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2\rho\cdot\rho d\rho=\frac{14}{3}\pi$$