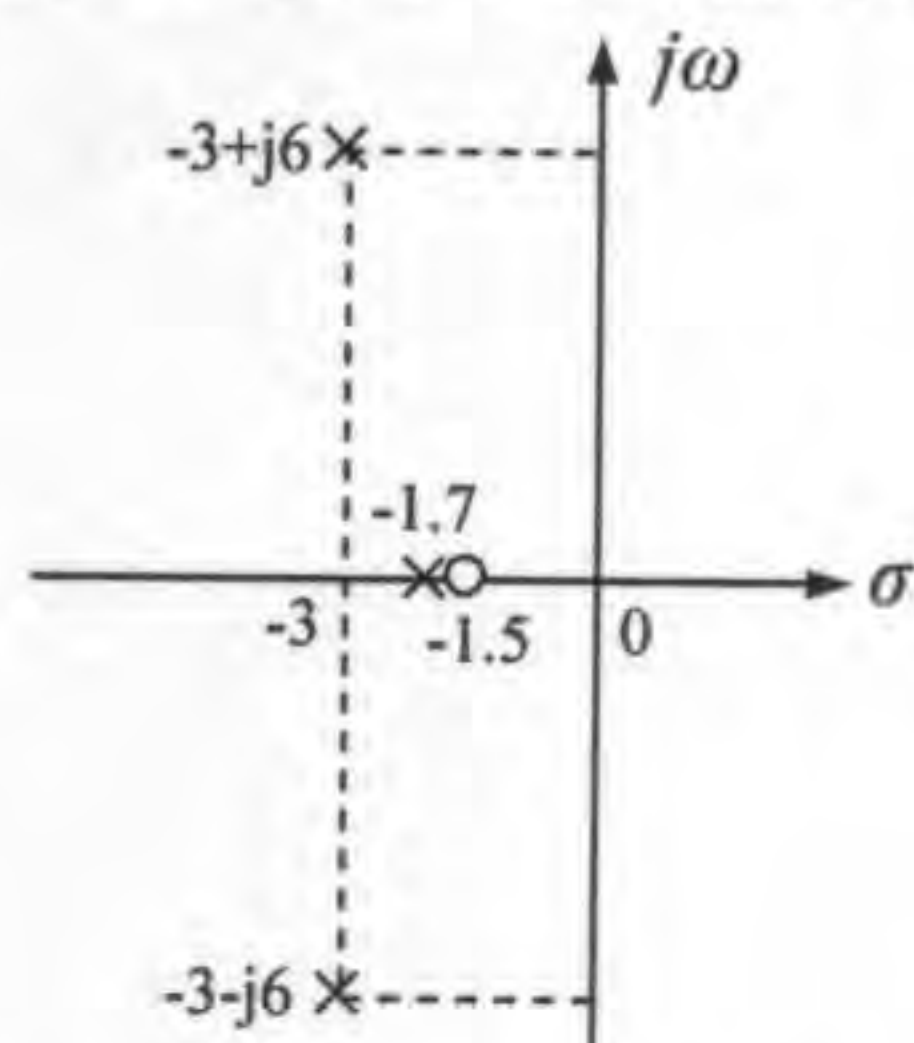


所有试题答案写在答题纸上, 答案写在试卷上无效  
可使用计算器

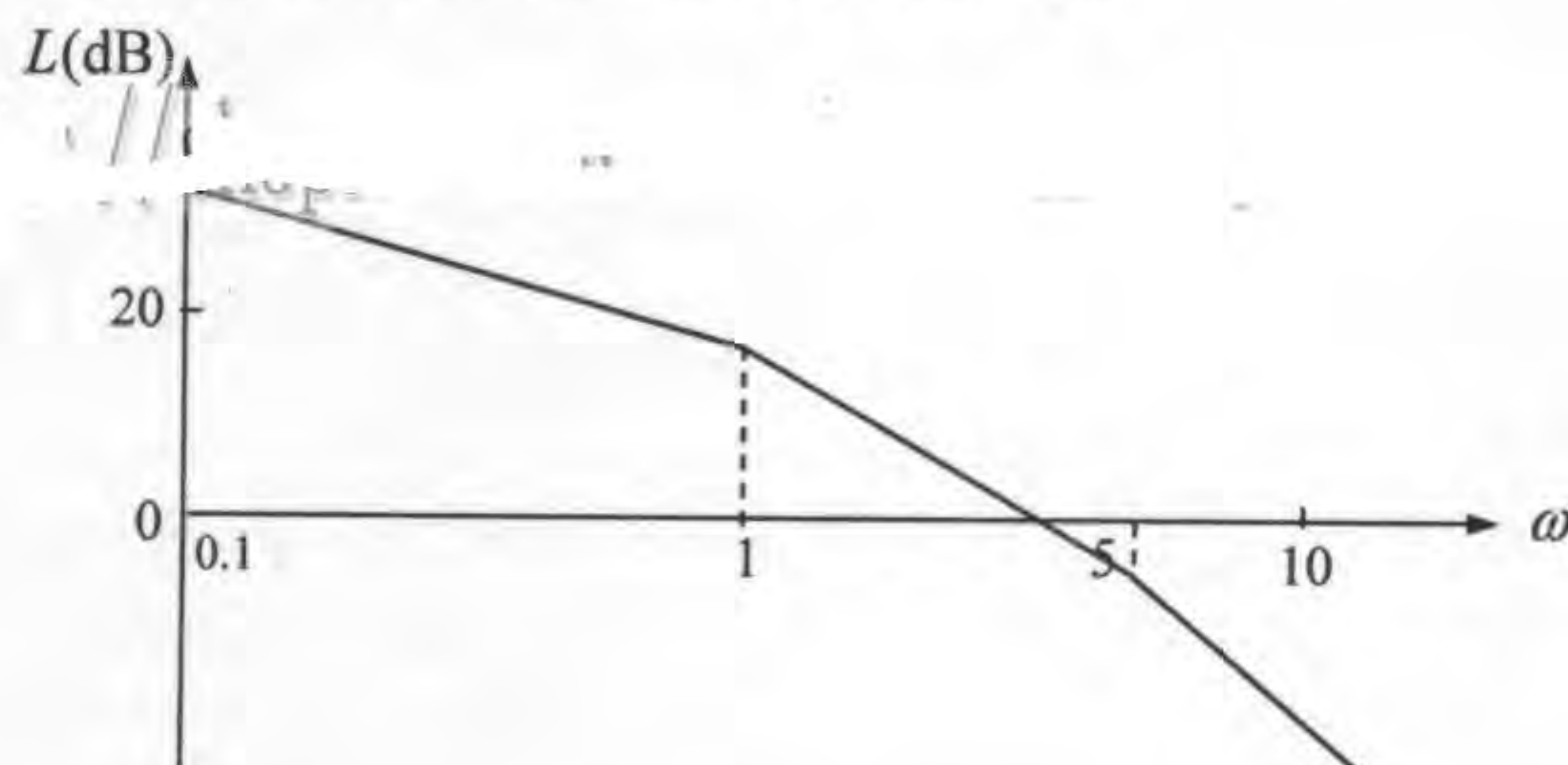
一、(20 分) 单项选择题 (将所选题号写在答题纸上, 写出计算过程或说明。)

1. 某系统的闭环稳态增益为 1, 其闭环零、极点分布如图所示。



- A、系统单位阶跃响应衰减振荡,  $M_p = 21\%$ ,  $t_r = 0.34 s$ 。
- B、系统单位阶跃响应衰减振荡,  $M_p < 21\%$ ,  $t_r < 0.34 s$ 。
- C、系统单位阶跃响应衰减振荡,  $M_p < 21\%$ ,  $t_r > 0.34 s$ 。
- D、系统单位阶跃响应衰减振荡,  $M_p > 21\%$ ,  $t_r < 0.34 s$ 。

2. 最小相位系统的开环对数幅频特性曲线如图所示。

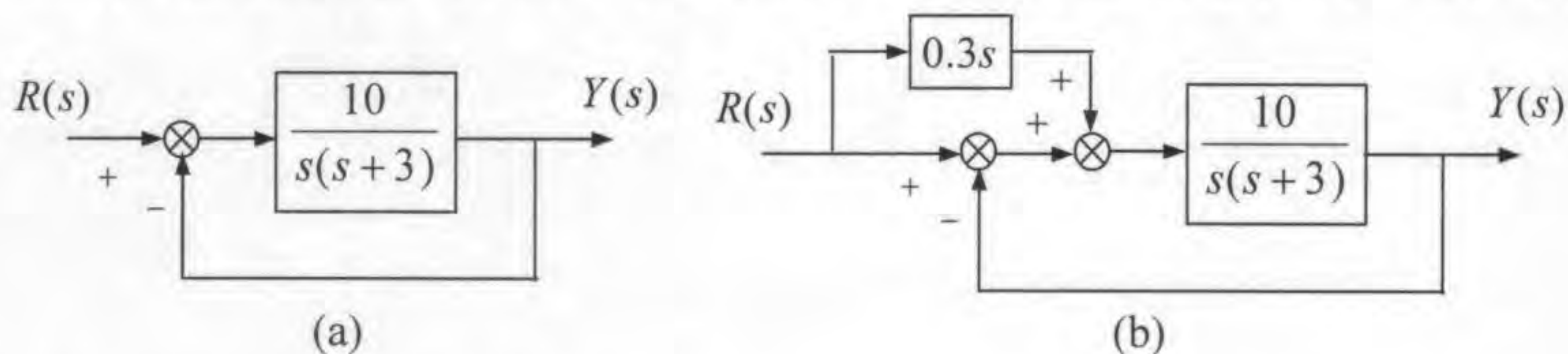


将该曲线向左平移 10 倍频程, 系统性能的变化可定性归结为

- A、系统的相对稳定性不变, 瞬态响应速度变慢, 稳态精度降低。
- B、系统的相对稳定性不变, 瞬态响应速度加快, 稳态精度提高。
- C、系统的相对稳定性降低, 瞬态响应速度变慢, 稳态精度提高。
- D、系统的相对稳定性提高, 瞬态响应速度加快, 稳态精度降低。

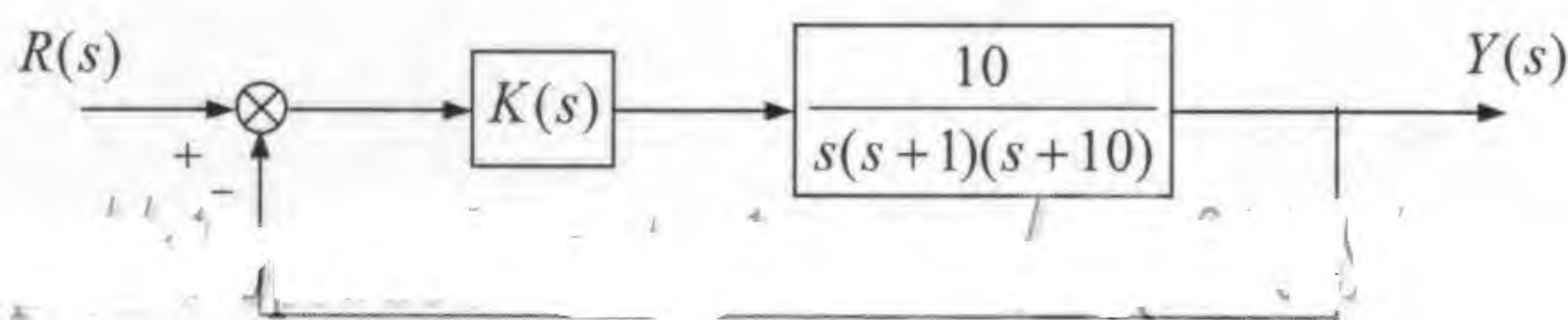


二、(22 分) 控制系统如图(a)和图(b)所示。系统误差定义为  $e(t) = r(t) - y(t)$



1. 求图(a)系统的瞬态和稳态性能指标。
2. 将图(a)系统改变为复合控制,如图(b)所示。问系统的瞬态和稳态性能将如何变化?
3. 试分析图(b)系统性能变化的原因。

三、(24 分) 反馈控制系统如图所示, 取控制器  $K(s) = \frac{s+z}{s+p}$ 。



1. 用根轨迹方法设计  $K(s)$  的参数, 使系统满足下列性能指标:
  - ① 闭环系统稳定;
  - ② 系统最大超调量  $M_p = 16\%$ , 上升时间  $t_r = 0.4s$ 。
2. 简化校正后的高阶系统, 并求出闭环传递函数。

四、(24 分) 已知单位反馈系统的开环传递函数为

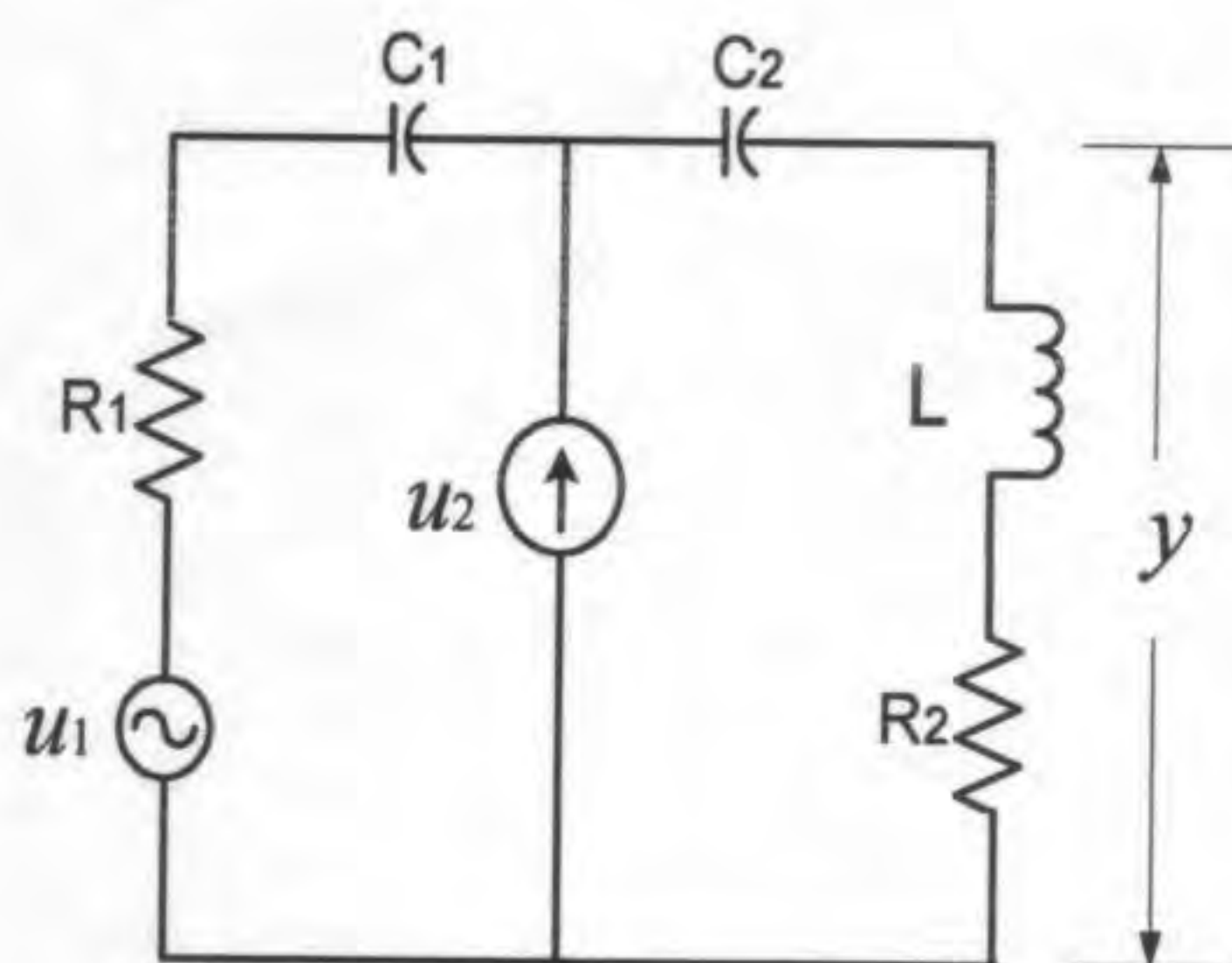
$$G(s) = \frac{K(T_2s+1)(T_3s+1)(T_4s+1)}{s^3(T_1s-1)}$$

当  $K = 30$ ,  $\angle G(j\omega_1) = -180^\circ$  时,  $|G(j\omega_1)| = 2.24$ 。

1. 绘制  $G(s)$  的完整奈氏图, 并用奈氏稳定判据判断闭环系统的稳定性。
2. 当  $K$  取 10 时, 闭环系统是否稳定? 为什么?
3. 求取使系统临界稳定时的  $K$  值。



五、(15 分): 如图所示 RLC 网络, 输入  $u_1(t)$ 、 $u_2(t)$  分别是电压源和电流源, 输出  $y(t)$  是电压; 选择流经电感  $L$  的电流  $i(t)$  和电容  $C$  两端的电压  $v_1(t)$ 、 $v_2(t)$  为状态变量, 列写该电网络系统的状态空间方程。



六、(25 分): 已知系统的状态空间方程为:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 3x_2 + 3u \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 4x_2 + 2u \\ y = x_1 - 2x_2 + u \end{cases}$$

1. 设初态为  $x_1(0) = 1$ ,  $x_2(0) = 1$ , 求单位阶跃信号作用下, 状态  $\mathbf{x}(t)$  的表达式及输出  $y(1)$  的值;
2. 若有可能, 设计状态反馈, 使系统的闭环极点位于  $-2 \pm j2$ ;
3. 若有可能, 设计一个全维状态观测器, 使观测器的两个极点位于  $-3, -4$  处。

七、(20 分): 对线性定常系统, 试证明:

1. 状态变换不改变系统的稳定性 (提示: 稳定性包括 BIBO 稳定性、渐近稳定性、李雅普诺夫意义下的稳定性) ;
2. 对  $n$  维 ( $n \geq 2$ ) 单输入-单输出系统, 若  $\mathbf{A}\mathbf{b}\mathbf{c} = \mathbf{b}\mathbf{c}\mathbf{A}$ , 则状态空间方程  $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$  一定不是其传递函数的最小实现。



# 2009年硕士研究生入学考试试题参考答案

## (自动控制理论)

一. 1. D

系统闭环传递函数  $W(s) = \frac{51(s+1.5)}{(s+1.1)(s^2+6s+45)}$

$\therefore z = -1.5$  为一对闭环偶极子.  
 $p = -1.1$

$\therefore s_{1,2} = -3 \pm j6$  为主导复极点

$$W(s) \approx \frac{45}{s^2 + 6s + 45}$$

$$\therefore \theta = \arctan \frac{6}{3} = 63.4^\circ, \quad \zeta = \cos \theta = 0.45$$

$$\therefore M_p = e^{-3\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} = e^{-1.41/0.89} = 21\%$$

$\therefore z, p$  在  $s_{1,2}$  的右侧, 且靠近虚轴

$\therefore M_p \uparrow, t_r \downarrow$

2. A

开环对数幅频曲线向左平移, 其相频曲线将随之左移.  
故  $\gamma, K_g$  不变  $\rightarrow$  相对稳定性不变;

$\omega_m, K$  变小  $\rightarrow$  瞬态响应速度变慢, 稳态精度降低.

$$\therefore 1. \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{10}{s^2 + 3s + 10}$$

$$\therefore \omega_n = \sqrt{10} = 3.16 \text{ rad/s}, \quad \zeta = 0.47$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} = 3.16 \times 0.88 = 2.78 \text{ rad/s}$$

$$\theta = 61.97^\circ$$



计算如下：

$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d} = \frac{3.14 - 1.05}{2.78} = 0.75 \text{ s}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{3.14}{2.78} = 1.13 \text{ s}$$

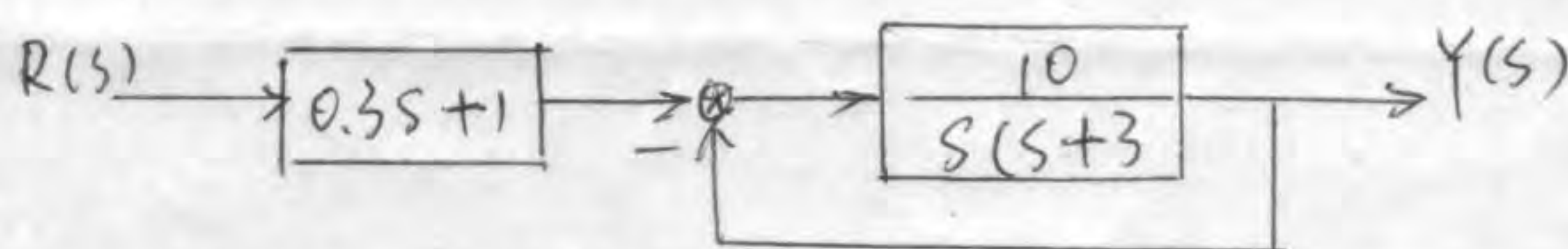
$$M_p = e^{-2\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} = e^{-1.68} = 19\%$$

$$t_s = \frac{3 \sim 4}{2\omega_n} = \frac{3 \sim 4}{1.5} = \begin{cases} 2 \text{ s} & (\Delta = 5\%) \\ 2.67 \text{ s} & (\Delta = 2\%) \end{cases}$$

稳态性能指标：

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) = \frac{10}{3} \rightarrow e_{ss} = 0.3$$

2. 图b可等效变换为



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{10(0.3s+1)}{s^2+3s+10}$$

故瞬态响应速度加快： $t_r, t_p \downarrow$

超调变大： $M_p \uparrow$

稳态性能提高： $e_{ss} = 0$

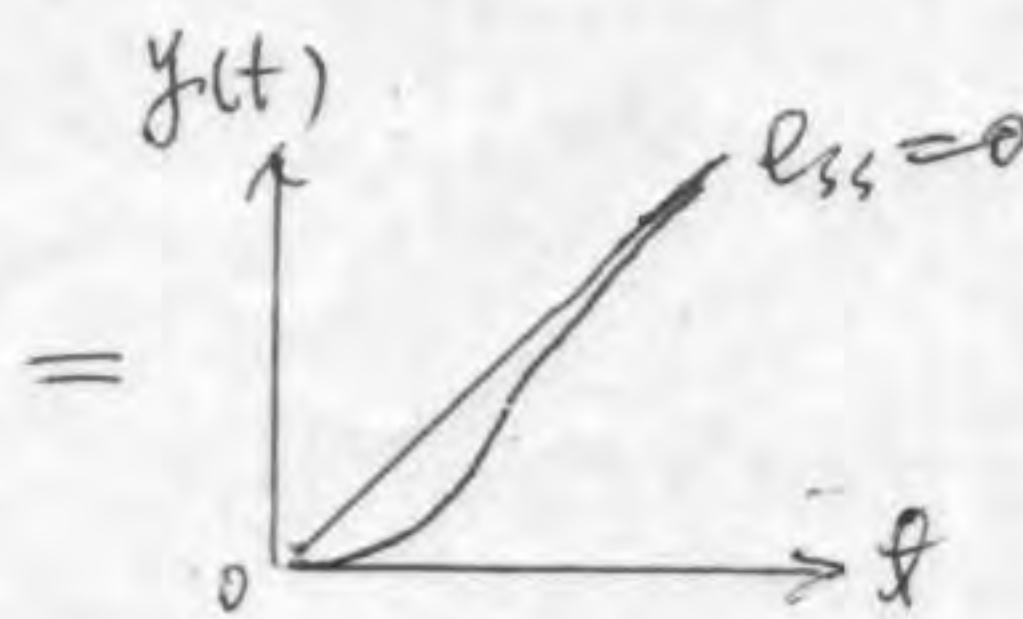
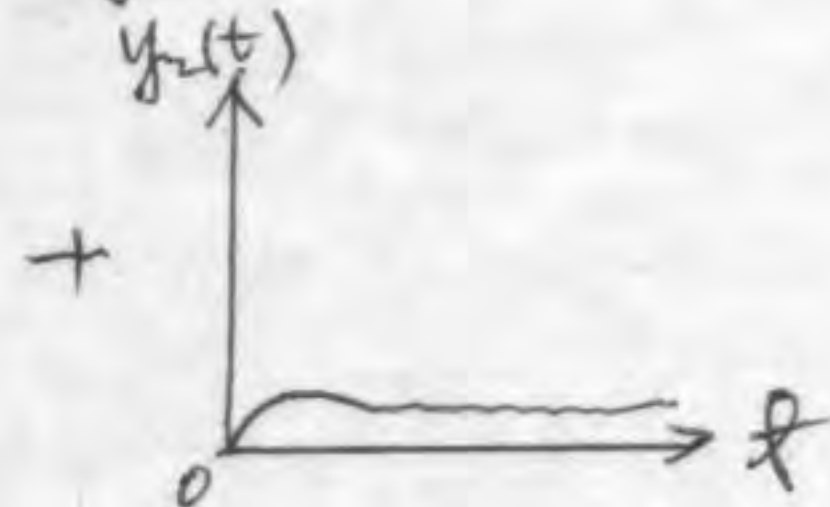
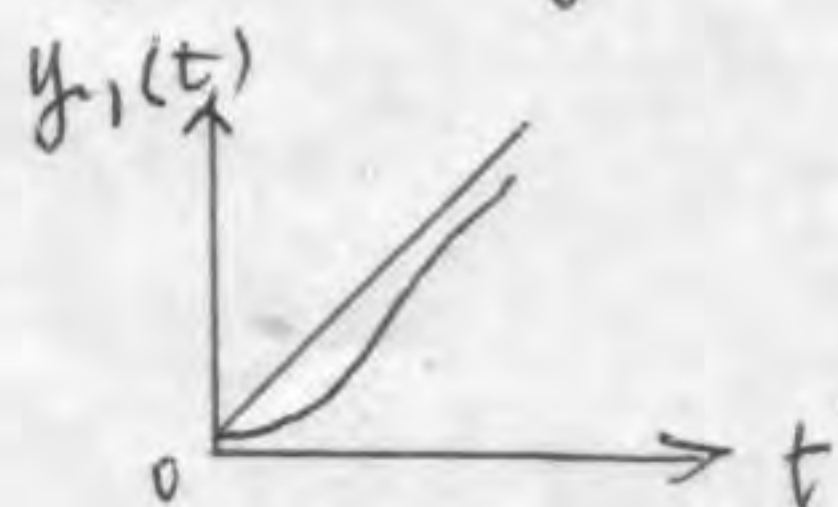
$$E(s) = R(s) - Y(s) = \frac{1}{s^2+3s+10}$$

$$\therefore e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = 0$$

3. 图(b)系统对输入信号作了补偿。有

$$r(t) = r_1(t) + r_2(t) = t + 0.3$$

$$\rightarrow y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$





又  $\eta = 1 - \zeta^2 = 0.16$

则单位阶跃响应为:  $y(t) = y_u(t) + 0.3 y_s(t)$

对该系统的单位阶跃响应, 由系统叠加了脉冲响应, 故瞬态响应速度加快, 超调增大。

$$\text{三. 1. } M_p = e^{-3\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.16 \rightarrow \zeta = 0.5, \theta = 60^\circ$$

$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d} = 0.4 \rightarrow \omega_d = 5.3 \text{ rad/s}$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \rightarrow \omega_n = 6.09 \text{ rad/s}$$

∴ 满足指标的主导复根是:

$$s_d = -\zeta\omega_n \pm j\omega_d = -3 \pm j5.3$$

$K(s)$  应取超前校正方案, 取  $\alpha = 0.9$

$$\therefore \angle K(s_d) G(s_d) = -180^\circ$$

$$\therefore \angle s_d + 0.9 - \angle s_d + p - \angle s_d - \angle s_d + 1 - \angle s_d + 10$$

$$= -180^\circ$$

$$\therefore \lg^{-1} \frac{5.3}{p-3} = 24.3^\circ \rightarrow p = 14.78$$

$$\therefore K(s) = \frac{s+0.9}{s+14.78}$$

$$\begin{aligned} 2. K(s_d) &= \left| \frac{s(s+1)(s+10)(s+14.78)}{s+0.9} \right|_{s_d = -3+j5.3} \\ &= \frac{6.09 \times 5.66 \times 8.78 \times 12.92}{5.7} = 686 \end{aligned}$$

设另 2 个闭环根是  $\lambda_1, \lambda_2$ .

$$\text{则 } \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 3 + j5.3 + 3 - j5.3 = 1 + 10 + 14.78 = 25.78 \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 (3 + j5.3) \cdot (3 - j5.3) = 686 \times 0.9 = 617.4 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \lambda_1 \lambda_2 = 16.65 \\ \lambda_2 = 18.9 \end{cases}$$

$\therefore S_d$  为主导复根。

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{686(s+0.9)}{(s+0.88)(s+18.9)(s+3+j5.3)(s+3-j5.3)} \\ &= \frac{37}{s^2+6s+37} \end{aligned}$$

四. 1.  $G(s) = -\frac{K(1+T_2s)(1+T_3s)(1+T_4s)}{s^3(1-T_1s)}$

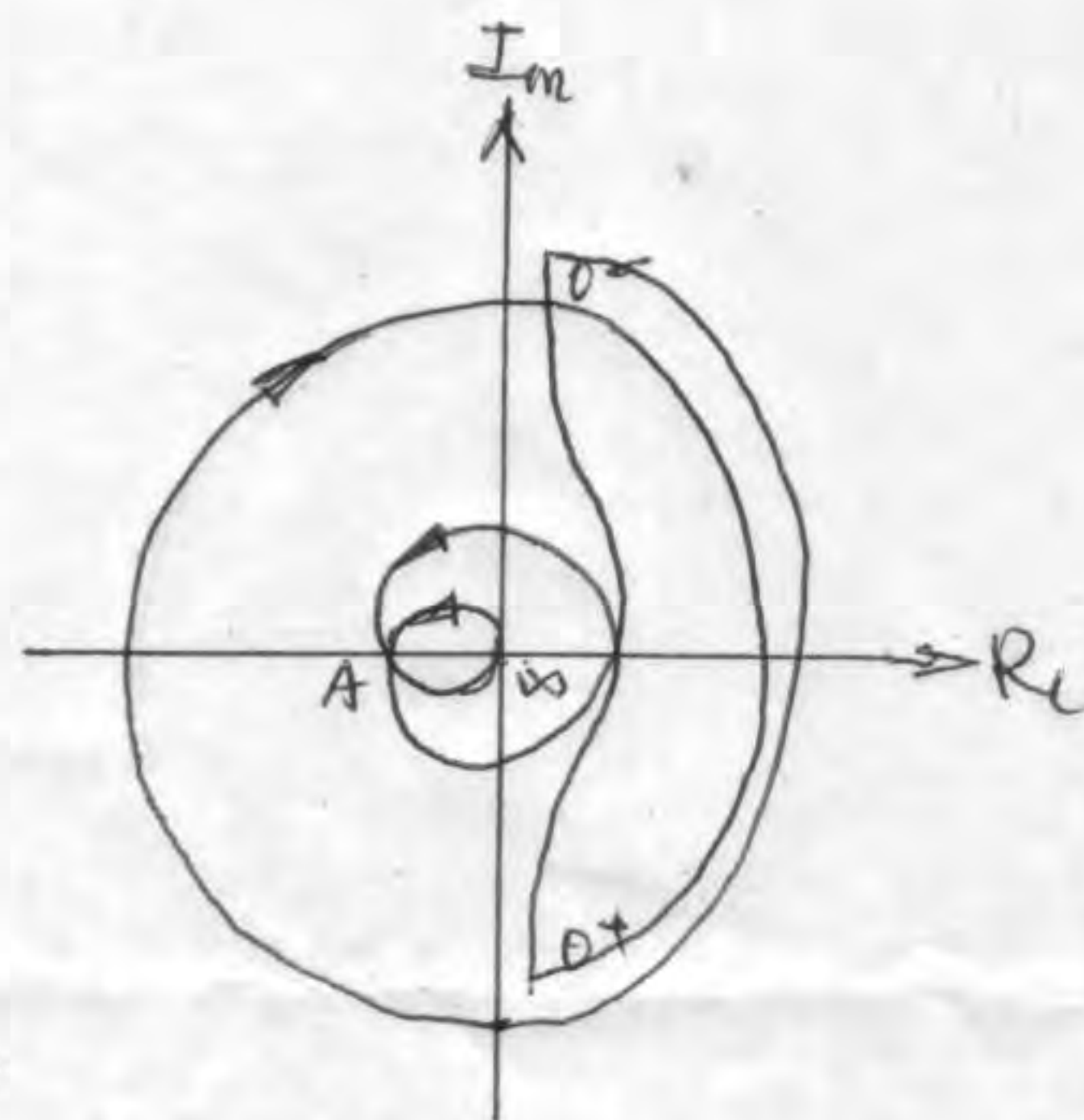
$$G(j0^+) = \infty \angle -450^\circ + 0$$

$$G(j\infty) = 0 \angle -90^\circ - 0$$

设奈氏图交于负实轴是 A, 频率  $\omega_1$ ,

$$\therefore |G(j\omega_1)| = 2.24, \angle G(j\omega_1) = -180^\circ$$

$\therefore (-1, j0)$  点位于 A 点右侧, 有



当  $K=10$  时,  $M_2 = \frac{10}{\omega_1^2} |G'(j\omega_1)|$

$$K=10 \text{ 时}, M_2 = \frac{10}{\omega_1^2} |G'(j\omega_1)|$$

$$K=30 \text{ 时}, M_1 = \frac{30}{\omega_1^2} |G'(j\omega_1)| = 2.24$$

$$\therefore M_2 = \frac{10}{30} \times M_1 = 0.75$$

$\therefore (-1, j0)$  点位于 A 点右侧, 有

$$n_c = N + n_0 = 1 + 1 = 2, \text{ 故 } K=10 \text{ 时系统不稳定。}$$

3. 设  $K=K_c$  时, 曲线与  $(-1, j0)$  点相切

$$\text{则 } M_c = \frac{K_c}{\omega_1^2} |G'(j\omega_1)| = 1$$

$$\therefore K_c = \frac{1}{2.24} \times 30 = 13.39$$



## 五、(共 15 分)

由 KVL 和 KCL 可分别得到:

$$u_1 = R_1 C_1 \frac{dv_1}{dt} + v_1 + v_2 + L \frac{di}{dt} + R_2 i,$$

$$u_2 + C_1 \frac{dv_1}{dt} = i,$$

$$i = C_2 \frac{dv_2}{dt}$$

$$y = L \frac{di}{dt} + R_2 i$$

代入、整理后得到

$$L \frac{di}{dt} = -(R_1 + R_2)i - v_1 - v_2 + u_1 + R_1 u_2$$

$$C_1 \frac{dv_1}{dt} = i - u_2$$

$$C_2 \frac{dv_2}{dt} = i$$

进一步整理并写成矩阵形式即:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1 + R_2}{L} & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C_1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & \frac{R_1}{L} \\ 0 & -\frac{1}{C_1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} -R_1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$



## 六、(共 25 分)

1.  $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, c = [1 \quad -2], d = 1, x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

系统的特征多项式及特征值:  $f(\lambda) = \det(\lambda I - A) = s^2 + 3s + 2$ ,  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$

设  $e^{At} = \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A$ , 则:  $e^{-t} = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)(-1), e^{-2t} = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)(-2)$

解得:  $\alpha_0(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}, \alpha_1(t) = e^{-t} - e^{-2t}$ , 于是

$$e^{At} = (2e^{-t} - e^{-2t})I + (e^{-t} - e^{-2t})A = \begin{bmatrix} 3e^{-t} - 2e^{-2t} & -3e^{-t} + 3e^{-2t} \\ 2e^{-t} - 2e^{-2t} & -2e^{-t} + 3e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A\tau}bu(t-\tau)d\tau$$

$$= \begin{bmatrix} 3e^{-t} - 2e^{-2t} & -3e^{-t} + 3e^{-2t} \\ 2e^{-t} - 2e^{-2t} & -2e^{-t} + 3e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 3e^{-\tau} - 2e^{-2\tau} & -3e^{-\tau} + 3e^{-2\tau} \\ 2e^{-\tau} - 2e^{-2\tau} & -2e^{-\tau} + 3e^{-2\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot 1 \cdot d\tau$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 3e^{-\tau} \\ 2e^{-\tau} \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 - 3e^{-t} \\ 2 - 2e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 3e^{-t} + e^{-2t} \\ 2 - 2e^{-t} + e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$y(1) = cx(1) + du(1) = [1 \quad -2] \begin{bmatrix} 3 - 3e^{-1} + e^{-2} \\ 2 - 2e^{-1} + e^{-2} \end{bmatrix} + 1 = e^{-1} - e^{-2}$$

2.  $M_c = [b \quad Ab] = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \det(M_c) = 0$ , 系统不能控, 不能通过状态反馈任意配置系统的闭环极点; 事实上

$$f_k(\lambda) = \det(\lambda I - A + bk) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 + 3k_1 & 3 + 3k_2 \\ -2 + 2k_1 & \lambda + 4 + 2k_2 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2 + (3 + 3k_1 + 2k_2)\lambda + (2 + 6k_1 + 4k_2)$$

不论状态反馈增益如何选取, 都不能完成期望的极点配置。

3.  $M_o = \begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}, \det(M_o) = -1 \neq 0$ , 系统能观, 可以完成状态观测器的设计。

注意到这里  $d = 1 \neq 0$ , 故全维状态观测器的形式应写成:

$$\dot{\hat{x}} = (A - lc)\hat{x} + l(y - du) + bu = (A - lc)\hat{x} + ly + (b - l)u$$

其中  $l = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$  是观测器的设计中待定的参数向量, 令:

$$f_l(\lambda) = \det(\lambda I - A + lc) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 + l_1 & 3 - 2l_1 \\ -2 + l_2 & \lambda + 4 - 2l_2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + (3 + l_1 - 2l_2)\lambda + (2 - l_2)$$

$$= (\lambda + 3)(\lambda + 4) = \lambda^2 + 7\lambda + 12$$

解得:  $l_1 = -16, l_2 = -10$ , 代入观测器方程, 得到所要的状态观测器

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 17 & -35 \\ 12 & -24 \end{bmatrix} \hat{x} - \begin{bmatrix} 16 \\ 10 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 19 \\ 12 \end{bmatrix} u$$



## 七、(共 20 分)

1. 设系统状态变换前后的状态空间方程及状态变换矩阵分别是

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, & \dot{\bar{x}} &= \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u \\ y &= Cx + Du, & y &= \bar{C}\bar{x} + \bar{D}u \end{aligned} \quad \dot{x} = P\dot{\bar{x}},$$

则因

$$\begin{aligned} \bar{A} &= P^{-1}AP & \bar{B} &= P^{-1}B \\ \bar{C} &= CP & \bar{D} &= D \end{aligned}$$

不难得到:

① 状态变换不改变系统矩阵的特征值:

$$\begin{aligned} \bar{f}(\lambda) &= \det(\lambda I - \bar{A}) = \det(\lambda I - P^{-1}AP) = \det[P^{-1}(\lambda I - A)P] \\ &= \det(P^{-1})\det(\lambda I - A)\det(P) = \det(\lambda I - A) = f(\lambda) \end{aligned}$$

而系统的渐近稳定性和李亚普诺夫意义下的稳定性完全取决于特征值的分布, 故它们均不会因状态变换而改变;

② 状态变换不改变系统的传递函数:

$$\begin{aligned} \bar{G}(s) &= \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B} + \bar{D} = (CP)[sI - (P^{-1}AP)]^{-1}(P^{-1}B) + D \\ &= CP[(P^{-1})(sI - A)(P)]^{-1}P^{-1}B + D = CP(P)^{-1}(sI - A)^{-1}(P^{-1})^{-1}P^{-1}B + D \\ &= C(sI - A)^{-1}B + D = G(s) \end{aligned}$$

而系统的 BIBO 稳定性完全取决于系统既约传递函数的极点分布, 故系统的 BIBO 稳定性也不会因状态变换而改变。

4. 系统的能控性矩阵和能观性矩阵分别是

$$M_C = [b \quad Ab \quad A^2b \quad \cdots \quad A^{n-1}b], \quad M_O = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix}$$

显然它们的乘积是

$$\begin{aligned} M_C M_O &= bc + AbcA + A^2bcA^2 + \cdots + A^{n-1}bcA^{n-1} \\ &= bc + bcAA + bcA^2A^2 + \cdots + bcA^{n-1}A^{n-1} \\ &= bc(I + A^2 + A^4 + \cdots + A^{2(n-1)}) \end{aligned}$$

$$\therefore \text{rank}(M_C M_O) \leq \text{rank}(bc) \leq 1$$

即当  $n \geq 2$  时:

乘积矩阵不满秩  $\Rightarrow$  其中至少一个不满秩

$\Rightarrow$  能控性与能观性至少有一个被破坏

$\Rightarrow$  系统不可能是既能控又能观系统

$\Rightarrow \{A, b, c\}$  不是其传递函数的最小实现。