2021 高数下册测试

姓名：______________ 分数：______________

一、选择题：**1~8** 小题，每小题 **4** 分，共 **32** 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的.

(1) 二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点处 【 】

(A) 连续，且 $f_x'(0,0)$，$f_y'(0,0)$ 存在 (B) 连续，但 $f_x'(0,0)$，$f_y'(0,0)$ 不存在

(C) 不连续，但 $f_x'(0,0)$，$f_y'(0,0)$ 存在 (D) 不连续，且 $f_x'(0,0)$，$f_y'(0,0)$ 不存在

(2) (数二) 设 $z=f(x,y)$ 连续且 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-2x+y}{(x-1)^2+y^2}=0$，则 $dz|_{(1,0)}$ 的值为 【 】

(A) $dx-2dy$ (B) $2dx-dy$ (C) $dx+dy$ (D) $dx-dy$

(数一、数三) 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\dfrac{1}{n^{\alpha}}$ 绝对收敛，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$ 条件收敛，则 【 】

(A) $0<\alpha\leq\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{1}{2}<\alpha\leq 1$ (C) $1<\alpha\leq\dfrac{3}{2}$ (D) $\dfrac{3}{2}<\alpha\leq 2$

(3) 设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处 【 】

(A) 连续但不可偏导 (B) 可偏导但不连续 (C) 可微 (D) 一阶连续可偏导

(4) 设 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的某邻域内连续，且满足 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{|x|+y^2}=-3$，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处 【 】

(A) 取极大值 (B) 取极小值 (C) 不取极值 (D) 无法确定是否取极值

(5) 设 $D=\{(x,y)\,|\,(x-2)^2+(y-2)^2\leq 2\}$，$I_i=\iint\limits_D (x+y)^i d\sigma(i=1,2,3)$，则 $I_i(i=1,2,3)$ 的大小关系中，正确的是 【 】

(A) $I_3<I_2<I_1$ (B) $I_2<I_3<I_1$ (C) $I_1<I_3<I_2$ (D) $I_1<I_2<I_3$

(6) 设 $f\in C(D)$，$D=\{(x,y)\big||x|\leq y\leq\sqrt{1-x^2}\}$，则 $\iint\limits_D f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$ 的值 【 】

(A) $\pi\int_0^1 \rho f(\rho)d\rho$ (B) $\dfrac{3\pi}{4}\int_0^1 \rho f(\rho)d\rho$

(C) $\dfrac{\pi}{2}\int_0^1 \rho f(\rho)d\rho$ (D) $\dfrac{\pi}{4}\int_0^1 \rho f(\rho)d\rho$

(7) 设 $f\in C(D)$，$D=\{(x,y)\big|0\le x\le 1, 0\le y\le x^2\}$，且 $f(x,y)$ 满足等式

$f(x,y)=xy+\iint\limits_D f(x,y)dxdy$，则 $f(x,y)$ 的值为 【 】

(A) xy (B) $2xy+\dfrac{1}{4}$ (C) $xy+1$ (D) $xy+\dfrac{1}{8}$

(8) (数二、数三) 二次积分 $\int_0^2 dx\int_x^2 e^{-y^2}dy$ 的值等于 【 】

(A) $\dfrac{e^{-4}-1}{2}$ (B) $\dfrac{1-e^{-4}}{2}$ (C) $\dfrac{e^{-2}-1}{2}$ (D) $\dfrac{1-e^{-2}}{2}$

(数一) 设 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2, y=x, y=0, z=1$ 在第一卦限所围成的区域，$f(x,y,z)$ 在 Ω 上连续，则 $\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dv$ 等于 【 】

(A) $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}}dx\int_{x^2+y^2}^1 f(x,y,z)dz$ (B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_x^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{x^2+y^2}^1 f(x,y,z)dz$

(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}}dx\int_0^1 f(x,y,z)dz$ (D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}}dx\int_{x^2+y^2}^1 f(x,y,z)dz$

二、填空题：**9~14** 小题，每小题 **4** 分，共 **24** 分.

(9) 已知由 $x=ze^{y+z}$ 确定 $z=z(x,y)$，则 $dz\big|_{(e,0)}=$____________.

(10) 设 $z=f(x,y)$ 二阶可偏导，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2$ 且 $f(x,0)=1$，$f'_y(x,0)=x$，则 $f(x,y)=$______.

(11) (数二) 设 $z=xf(x+y)+g(x^y, x^2+y^2)$，其中 f，g 分别二阶连续可导和二阶连续可偏导，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$____________.

(数一、数三) 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n!}x^n$ 的和函数为__________.

(12) 设 $f(u,v)$ 一阶连续可偏导，$f(tx,ty)=t^3 f(x,y)$，且 $f'_1(1,2)=1$，$f'_2(1,2)=4$，则

$f(1,2)=$____________.

(13) 设 $F(t)=\iint\limits_D e^{\sin\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$，其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le t^2\}$，求 $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{F'(t)}{t}=$______.

(14) 设 $f(x)=\begin{cases}x,0\le x\le 1\\ 0,其他\end{cases}$ D 为 $-\infty<x<+\infty$，$-\infty<y<+\infty$，则

$\iint\limits_D f(y)f(x+y)dxdy=$__________.

三、解答题：**15~23** 小题，共 **94** 分**.**解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤**.**

(15) (本题满分 10 分)

设 $z=z(x,y)$ 由方程 $z+\ln z-\int_y^x e^{-t^2}dt=1$ 确定，求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}$.

(16) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有二阶连续导数，且 $u=f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$.当 $x^2+y^2+z^2>0$ 时，满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ 与 $f(1)=f'(1)=1$，求函数 $f(r)$ 的表达式.

(17) (本题满分 10 分)

设二元函数 $z=f(x,y)=x^2y(4-x-y)$ 在由 x 轴、y 轴及 $x+y=6$ 所围成的闭区域 D 上的最小值和最大值.

(18) (本题满分 10 分)

设 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le\sqrt{2},x\ge 0,y\ge 0\}$,$[1+x^2+y^2]$ 表示不超过 $1+x^2+y^2$ 的最大整数.计算二重积分 $\iint\limits_D xy[1+x^2+y^2]dxdy$.

(19) (本题满分 10 分)

计算 $\iint\limits_D \dfrac{x+y}{x^2+y^2}dxdy$, 其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1,x+y\ge 1\}$.

(20) (本题满分 11 分)

(数二) 设变换 $\begin{cases}u=x-2y\\ v=x+ay\end{cases}$ 可把方程 $6\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 简化为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$，其中 z 二阶连续可偏导，求常数 a.

(数一、数三) 设 $a_n=\int_0^{n\pi}x|\sin x|dx$，$(n=1,2,\cdots)$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{2^2}+\cdots+\dfrac{a_n}{2^n}\right)$.

(21) (本题满分 11 分)

计算 $\iint\limits_D ydxdy$，其中 D 是由曲线 $\sqrt{\dfrac{x}{a}}+\sqrt{\dfrac{y}{b}}=1,(a>0,b>0)$ 与 Ox 轴，Oy 轴围成的区域.

(22) (本题满分 11 分)

(数二、数三) $\iint\limits_D \dfrac{x}{y+1}dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\big|2x\le y\le x^2+1,0\le x\le 1\}$.

(数一) 设函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(2x+1)e^{2x-y}$，且 $f(0,y)=y+1$，L_t 是从点 $(0,0)$ 到点 $(1,t)$ 的光滑曲线.计算曲线积分 $I(t)=\int_{L_t}\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$，并求 $I(t)$ 的最小值.

(23) (本题满分 11 分)

(数二、数三) 设函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且满足 $f(0,0)=1$，$f_x'(0,0)=2$，$f_y'(0,y)=-3$ 以及 $f_{xx}''(x,y)=y$，$f_{xy}''(x,y)=x+y$，求 $f(x,y)$ 的表达式.

(数一) 设 Σ 为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2},(1\le x^2+y^2\le 4)$ 下侧，$f(x)$ 是连续函数，计算

$I=\iint\limits_\Sigma [xf(xy)+2x-y]dydz+[yf(xy)+2y+x]dzdx+[zf(xy)+z]dxdy$.