

目 录

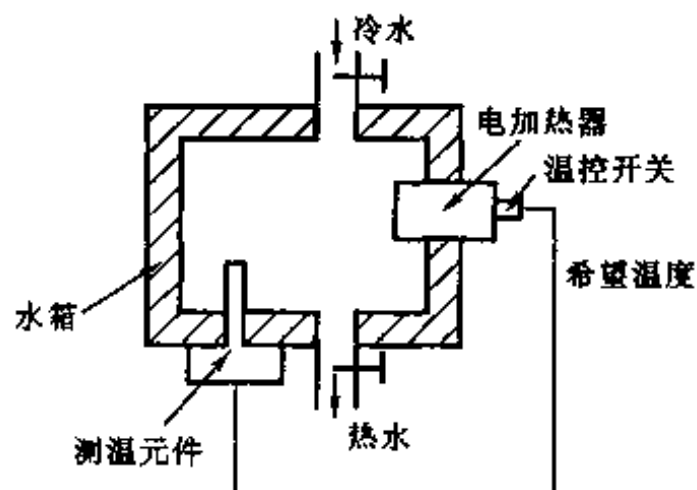
第 1 章 控制系统的一般概念	1
同步训练题	1
同步训练题答案	2
第 2 章 控制系统的数学模型	5
书后习题解析	5
同步训练题	18
同步训练题答案	20
第 3 章 线性系统的时域分析	22
书后习题解析	22
同步训练题	40
同步训练题答案	41
第 4 章 根轨迹法	43
书后习题解析	43
同步训练题	55
同步训练题答案	56
第 5 章 线性系统的频域分析	60
书后习题解析	60
同步训练题	74
同步训练题答案	76
第 6 章 控制系统的综合与校正	77
书后习题解析	77
同步训练题	89
同步训练题答案	90
第 7 章 线性离散系统的分析与综合	93
书后习题解析	93
同步训练题	100
同步训练题答案	102
第 8 章 线性系统的状态空间分析法	104
书后习题解析	104
同步训练题	114
同步训练题答案	115
第 9 章 线性系统的状态空间综合法	118
书后习题解析	118
同步训练题	127
同步训练题答案	129

第 10 章 非线性控制系统分析	132
书后习题解析	132
同步训练题	150
同步训练题答案	151

第1章 控制系统的一般概念

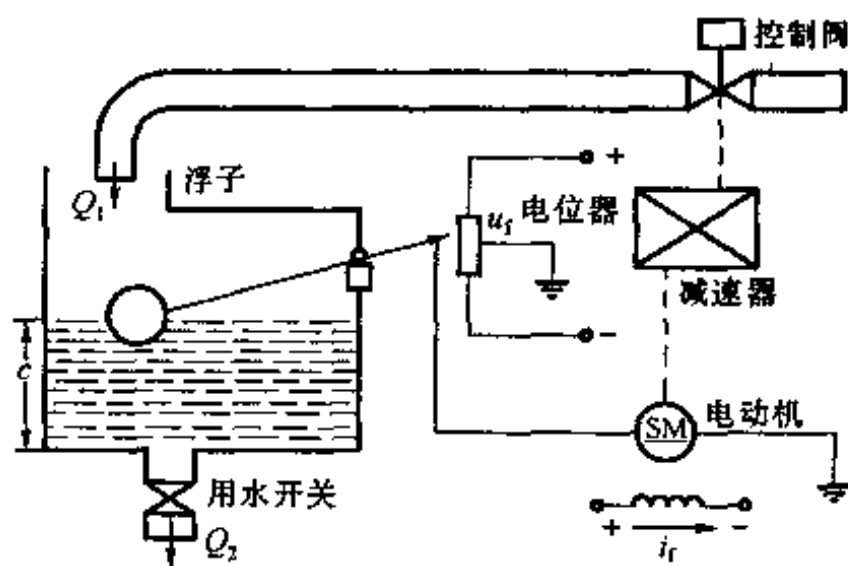
同步训练题

1. 设热水电加热器如图所示。为了保持希望的温度,由温控开关接通或断开电加热器的电源。在使用热水时,水箱中流出热水补充冷水。试说明系统工作原理并画出系统原理方框图。

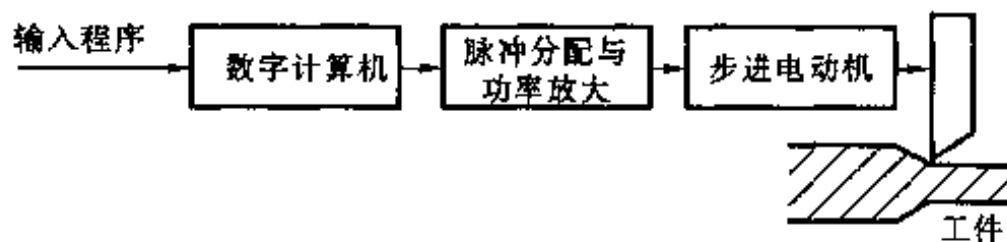


题1图

2. 题2图是液位自动控制系统原理示意图。在任何情况下,希望液面高度 c 不变,试说明系统的工作原理并画出系统方框图。



题2图



题3图

4. 下列各式是描述系统的微分方程,其中 $c(t)$ 为输出量, $r(t)$ 为输入量,试判断哪些是线性定常或时变系统,哪些是非线性系统?

$$(1) c(t) = 5 + r^2(t) + t \frac{d^2 r(t)}{dt^2};$$

$$(2) \frac{d^3 c(t)}{dt^3} + 3 \frac{d^2 c(t)}{dt^2} + 6 \frac{dc(t)}{dt} + 8c(t) = r(t);$$

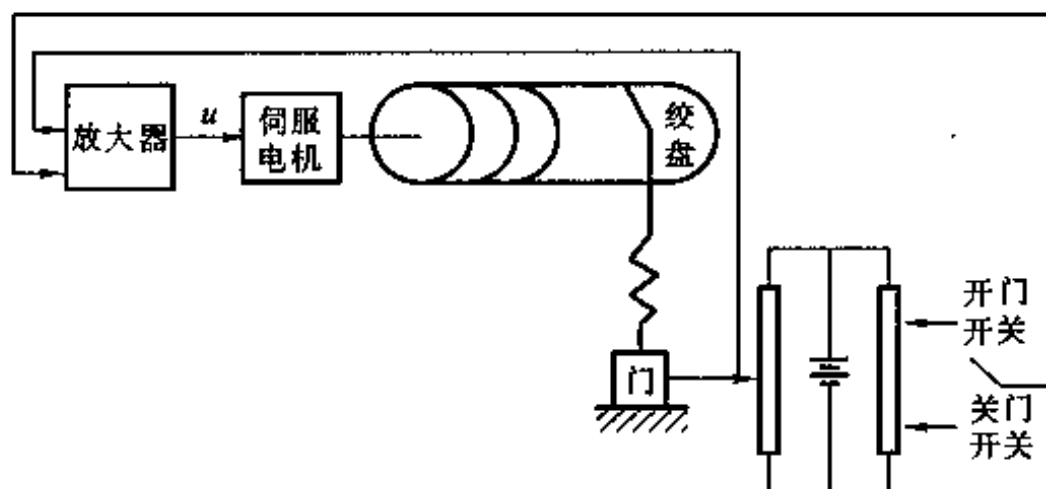
$$(3) t \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = r(t) + 3 \frac{dr(t)}{dt}; \quad (4) c(t) = r(t) \cos \omega t + 5;$$

$$(5) c(t) = r^2(t);$$

$$(6) c(t) = 3r(t) + 6 \frac{dr(t)}{dt} + 5 \int_{-\infty}^t r(\tau) d\tau;$$

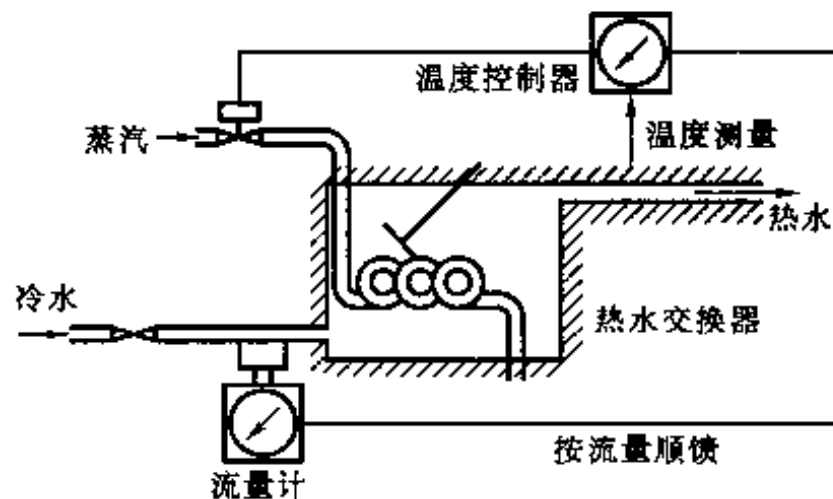
$$(7) c(t) = \begin{cases} 0 & t < 6 \\ r(t) & t \geq 6 \end{cases}$$

5. 题 5 图是仓库大门自动控制系统原理示意图。试说明系统自动控制大门开关的工作原理, 并画出系统方框图。



题 5 图

6. 题 6 图水温控制系统示意图。冷水在热交换器中由通入的蒸汽加热, 从而得到一定温度的热水。冷水流量变化用流量计测量。试绘制系统方框图, 并说明为了保证热水温度为期望值, 系统是如何工作的? 系统的被控对象和控制装置各是什么?

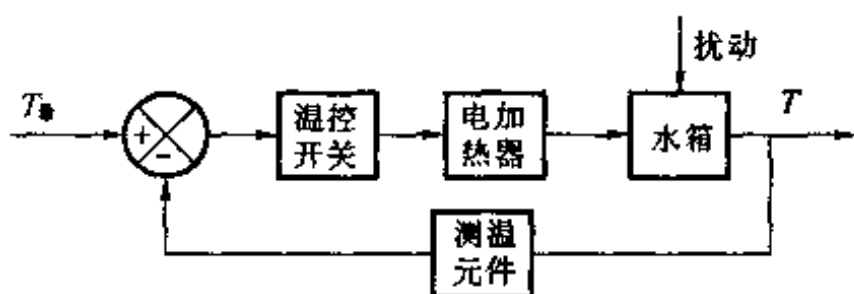


题 6 图

同步训练题答案

1. 解 在热水电加热器系统中, 输入量为预置的希望温度(给定值), 设为 $T_{\#} (^{\circ}\text{C})$; 输出量为水箱的实际水温, 设为 $T (^{\circ}\text{C})$; 控制对象为水箱; 扰动信号主要是因为放出热水并注入冷水而产生的降温作用。

当 $T (^{\circ}\text{C}) = T_{\#} (^{\circ}\text{C})$ 时, 电加热器不工作, 此时水箱中水温保持在希望温度上。当使用热水时, 由于扰动作用使实际水温下降, 测温元件感受 $T (^{\circ}\text{C}) < T_{\#} (^{\circ}\text{C})$ 的变化, 并把这一温度变

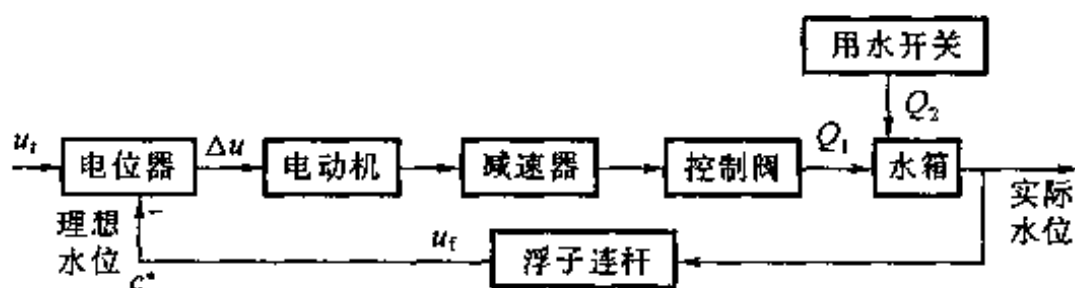


题1解图

化转化为电信号使温控开关工作。温控开关接通电源,使水箱中水升温,直至 $T(^{\circ}\text{C}) = T_*(^{\circ}\text{C})$ 为止。系统原理方框图如解图所示。

2. 解 系统的控制任务是保持液面高度不变。水箱是被控对象,水箱液位是被控量,电位器设定电压 u_r (表征液位的希望值 c^*) 是给定值。

当电位器电刷位于中点位置(对应 u_r)时,电动机不动,控制阀门有一定的开度,使水箱中流入水量与流出水量相等,从而使液面保持在希望高度 c^* 上。一旦流出量发生变化(相当于扰动),例如当流出水量减小时,液面升高,浮子位置也相应升高,通过杠杆作用使电位器电刷从中点位置下移,从而给电动机提供一定的控制电压,驱动电动机通过减速器减小阀门开度,使进入水箱的液体流量减小。这时,水箱液面下降,浮子位置相应下降,直到电位器电刷回到中点位置为止,系统重新处于平衡状态,液面恢复给定高度。反之,当流出水量在平衡状态基础上增大时,水箱液位下降,系统会自动增大阀门开度,加大流入水量,使液位升到给定高度 c^* 。系统方框图如题2解图所示。

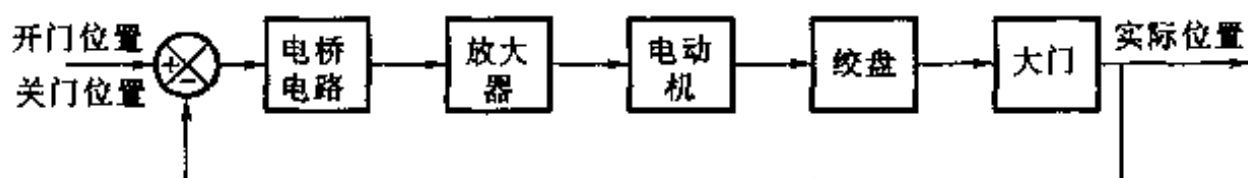


题2解图

3. 解 该系统是开环程序控制系统,被控对象为刀具,被控量为刀具位置,给定量是程序设定的刀具位置。计算机按编制的程序调节输出脉冲频率,通过脉冲分配与功率放大装置控制步进电机的转动,从而带动刀具按预定的轨迹进刀,完成加工任务。

- | | |
|--------------------|---------------|
| 4. 解 (1)非统性时变动态系统; | (2)线性定常动态系统; |
| (3)线性时变动态系统; | (4)非线性时变静态系统; |
| (5)非线性定常静态系统; | (6)线性定常动态系统; |
| (7)线性时变静态系统。 | |

5. 解 当合上开门开关时,电桥会测量出开门位置与大门实际位置间对应的偏差电压,偏差电压经放大器放大后,驱动伺服电动机带动绞盘转动,将大门向上提起。与此同时,和大门连在一起的电刷也向上移动,直到桥式测量电路达到平衡,电动机停止转动,大门达到开启位置。反之,当合上关门开关时,电动机带动绞盘使大门关闭,从而可以实现大门远距离开闭自动控制。系统方框图如解图所示。

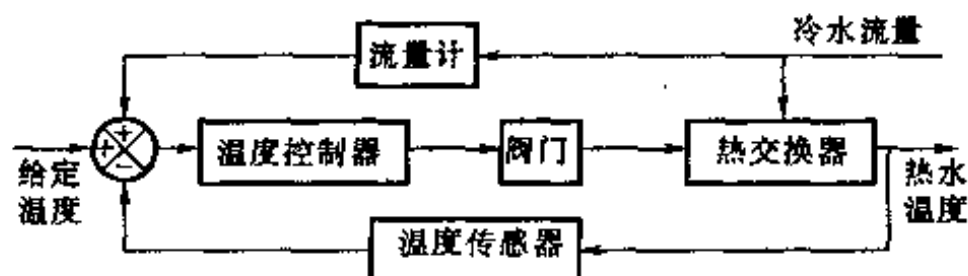


题5解图

6. 解 温度传感器不断测量交换器出口处的实际水温,并在温度控制器中与给定温度相比较,若低于给定温度,其偏差使蒸汽阀门开大,进入热交换器的蒸汽量加大,热水温度升高,直至偏差为零。如果由于某种原因,冷水流量加大,则流量值由流量计测得,通过温度控制器,开大阀门,值蒸汽量增加,提前进行控制,实现按冷水流量进行顺馈补偿,保证热交换器出口的水温波动不大。

系统中,热交换器是被控对象,控制装量由控制器(完成比较、运算功能),阀门(执行机构),温度传感器和流量计(测量元件)组成。实际水温为被控量,给定量(希望温度)在控制器中设定;冷水流量是干扰量。

系统方框图如解图所示。这是一个按干扰补偿的复合控制系统。

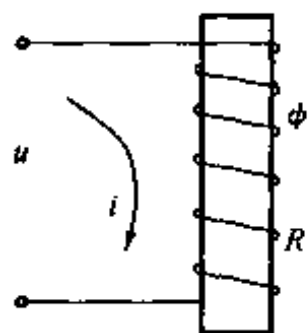


题6解图

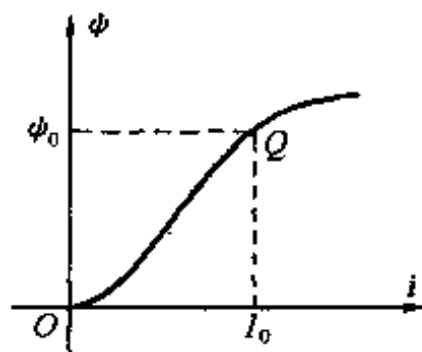
第2章 控制系统的数学模型

书后习题解析

2-1 求取题2-1图所示电路的传递函数 $I(s)/U(s)$ 。图中 ϕ 为铁心线圈磁链, R 为线圈电阻。



题2-1图



题2-1解图

解 描述铁心线圈特性的微分方程式为

$$\frac{d\phi(i)}{dt} + Ri = u$$

其中磁链 $\phi(i)$ 是线圈电流 i 的函数, 如题2-1解图所示, 磁链 ϕ 是电流 i 的非线性函数。假设在某一工作点 $Q(\phi_0, I_0)$ 上, 电流 $i = I_0 \pm \Delta i$ 的变化甚微, 即增量 Δi 很小, 从而对应的微链增量 $\Delta\phi$ 也很小, 则在工作点 $Q(\phi_0, I_0)$ 两侧的微小区域内便可视 $d\phi(i)/di$ 为常值。近似为小偏差线性, 方程两边取拉氏变换, 得

$$\left. \frac{d\phi(i)}{di} \right|_{i=I_0} \cdot [sI(s) - i(0)] + RI(s) = U(s)$$

$$\left(\left. \frac{d\phi(i)}{di} \right|_{i=I_0} \cdot s + R \right) I(s) - \left. \frac{d\phi(i)}{di} \right|_{i=I_0} \cdot I_0 = U(s)$$

其中 $I_0 = i(0)$ —— 工作点电流;

$\left. \frac{d\phi(i)}{di} \right|_{i=I_0}$ —— 在工作点 Q 附近微小区域内的常值。

令 $I_0 = 0$, 由此求得传递函数为 $\frac{I(s)}{U(s)} = \frac{1/R}{Ts + 1}$, 式中 $T = \left. \frac{d\phi(i)}{di} \right|_{i=I_0} / R$, 称为时间常数。

2-2 求取题2-2图所示无源电路的传递函数 $U_o(s)/U_i(s)$ 。

解 应用电路中的阻抗概念求该电路的传递函数, 有

$$\frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{\frac{1}{Cs} // R_2}{R_1 + \frac{1}{Cs} // R_2} = \frac{R_2}{R_1 R_2 Cs + R_1 + R_2}$$

2-3 求取题2-3图所示有源网络的传递函数 $U_o(s)/U_i(s)$ 。

解 根据放大器的虚短、虚断的性质,有

$$I_i(s) = \frac{U_i(s)}{R_1 + R_1 // \frac{1}{C_1 s}} \cdot \frac{1}{R_1 + \frac{1}{C_1 s}}$$

$$I_o(s) = - \frac{U_o(s)}{R_2 + R_2 // \frac{1}{C_2 s}} \cdot \frac{1}{R_2 + \frac{1}{C_2 s}}$$

又因为 $I_o(s) = I_i(s)$, 故传递函数为

$$\frac{U_o(s)}{U_i(s)} = - \frac{R_2 \left(\frac{1}{2} R_2 C_2 s + 1 \right)}{R_1 \left(\frac{1}{2} R_1 C_1 s + 1 \right)}$$

2-4 题 2-4 图所示为机械平移系统, 其中 m, k, f 分别代表物体质量、线性弹簧的弹性系数、阻尼器的黏性摩擦系数。设输入信号为作用力 $f_i(t)$, 输出信号为物体位移 $y(t)$, 试求取该系统的传递函数 $Y(s)/F_i(s)$ 。

解 根据牛顿定律 $ma = \sum F$, 题 2-4 图所示平移运动方程式为

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = f_i - f \frac{dy}{dt} - ky$$

设初始条件为零, 方程两边取拉普拉斯变换, 得

$$ms^2 Y(s) = F_i(s) - fsY(s) - kY(s)$$

则该机械平移系统的传递函数 $Y(s)/F_i(s)$ 为

$$\frac{Y(s)}{F_i(s)} = \frac{\frac{1}{k}}{\frac{m}{k}s^2 + \frac{f}{k}s + 1}$$

2-5 题 2-5 图所示为机械转动系统, 其中 J 表示转动惯量, f 表示黏性摩擦系数。设输入信号为外作用力矩 $m_i(t)$, 输出信号为轴角位移 $\theta(t)$, 试求取该系统的传递函数 $\theta(s)/M_i(s)$ 。

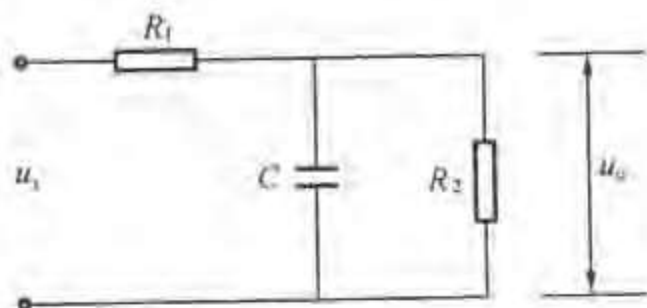
解 根据牛顿定律, 机械转动系统的力矩方程式为

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} = m_i - f \frac{d\theta}{dt}$$

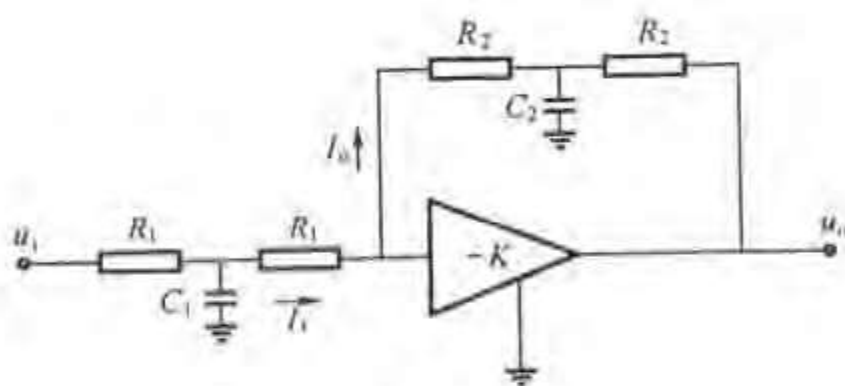
设初始条件为零, 方程两边取拉普拉斯变换, 得

$$Js^2 \theta(s) = M_i(s) - f s \theta(s)$$

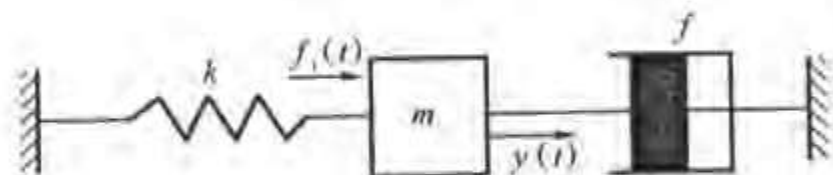
则机械转动系统的传递函数 $\theta(s)/M_i(s)$ 为



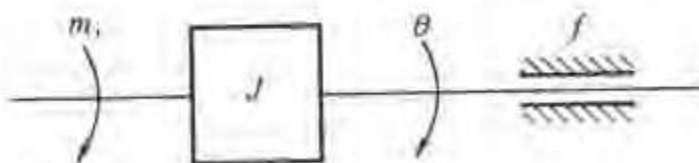
题 2-2 图



题 2-3 图



题 2-4 图



题 2-5 图

$$\frac{\theta(s)}{M_i(s)} = \frac{\frac{1}{f}}{s\left(\frac{J}{f}s + 1\right)}$$

2-6 题2-6图所示为齿轮传动系统,其中 M_i 为主动轴上的外作用力矩, M_1 为齿轮1承受的阻力矩, M_2 为齿轮2的传动力矩。试求传递函数 $\theta_2(s)/M_i(s)$ 。

解 由题2-6图得下列方程为

$$J_1 \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} + f_1 \frac{d\theta_1}{dt} + M_1 = M_i$$

$$J_2 \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} + f_2 \frac{d\theta_2}{dt} = M_2$$

$$M_1 \theta_1 = M_2 \theta_2$$

设初始条件为零,取拉普拉斯变换,得

$$J_1 s^2 \theta_1(s) + f_1 s \theta_1(s) + M_1(s) = M_i(s)$$

$$J_2 s^2 \theta_2(s) + f_2 s \theta_2(s) = M_2(s)$$

$$M_2 = M_1 \frac{\theta_1}{\theta_2} = M_1 \frac{Z_2}{Z_1}$$

式中的 Z_1, Z_2 分别表示齿轮1,2的齿数。

经计算求得传递函数 $\theta_2(s)/M_i(s)$ 为

$$\frac{\theta_2(s)}{M_i(s)} = \frac{\frac{Z_1}{Z_2}}{\left[J_1 + \left(\frac{Z_1}{Z_2} \right)^2 J_2 \right] s^2 + \left[f_1 + \left(\frac{Z_1}{Z_2} \right)^2 f_2 \right] s}$$

2-7 已知系统方框图如题2-7图所示。试计算传递函数 $C_1(s)/R_1(s)$, $C_2(s)/R_1(s)$, $C_1(s)/R_2(s)$ 及 $C_2(s)/R_2(s)$ 。

解 根据叠加原理,求得

$$\frac{C_1(s)}{R_1(s)} = \frac{G_1(s)}{1 - G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)}$$

$$\frac{C_2(s)}{R_1(s)} = -\frac{G_1(s)G_3(s)G_4(s)}{1 - G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)}$$

$$\frac{C_1(s)}{R_2(s)} = -\frac{G_1(s)G_3(s)G_4(s)}{1 - G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)}$$

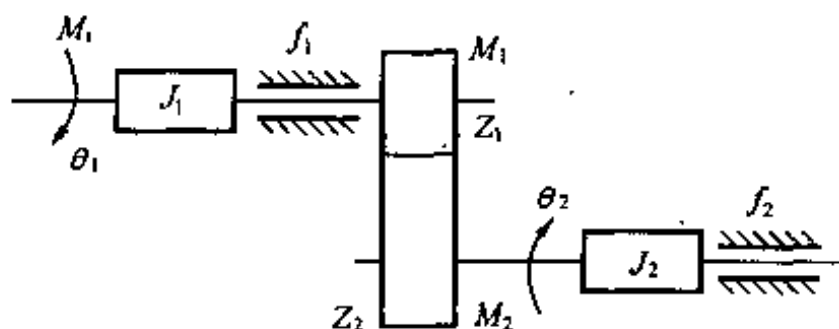
$$\frac{C_2(s)}{R_2(s)} = \frac{G_3(s)}{1 - G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)}$$

2-8 设已知描述某控制系统的运动方程如下:

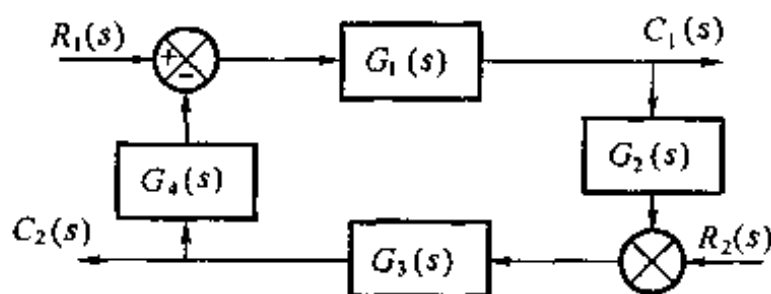
$$x_1(t) = r(t) - c(t) - f_1(t); \quad x_2(t) = K_1 x_1(t); \quad x_3(t) = x_2(t) - x_5(t);$$

$$T \frac{dx_4(t)}{dt} = x_3(t); \quad x_5(t) = x_4(t) - K_2 f_2(t); \quad K_0 x_5(t) = \frac{d^2 c(t)}{dt^2} + \frac{dc(t)}{dt}。$$

式中 $r(t)$ ——系统的控制信号;



题2-6图



题2-7图

$f_1(t), f_2(t)$ ——系统的扰动信号;

$c(t)$ ——系统的被控制信号;

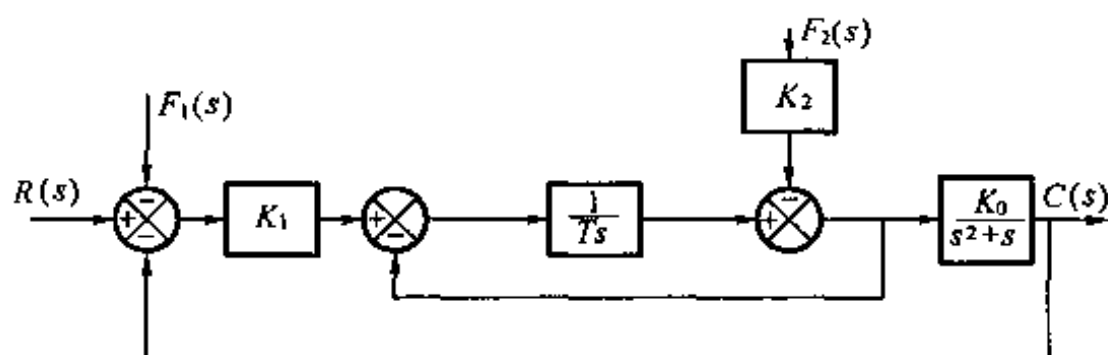
$x_1(t) \sim x_5(t)$ ——中间变量;

K_0, K_1, K_2 ——常值增益;

T ——时间常数。

试绘制控制系统方框图,并由方框图求取闭环传递函数 $C(s)/R(s)$, $C(s)/F_1(s)$ 及 $C(s)/F_2(s)$ 。

解 (1)绘制系统方框图时,由系统的控制信号与主反馈信号进行叠加的比较环节开始,沿信号流通方向,通过函数方框将所有中间变量间的关系一一画出,直至画出系统的被控制信号与主反馈信号。方框图如题 2-8 解图(1)所示。



题 2-8 解图(1)

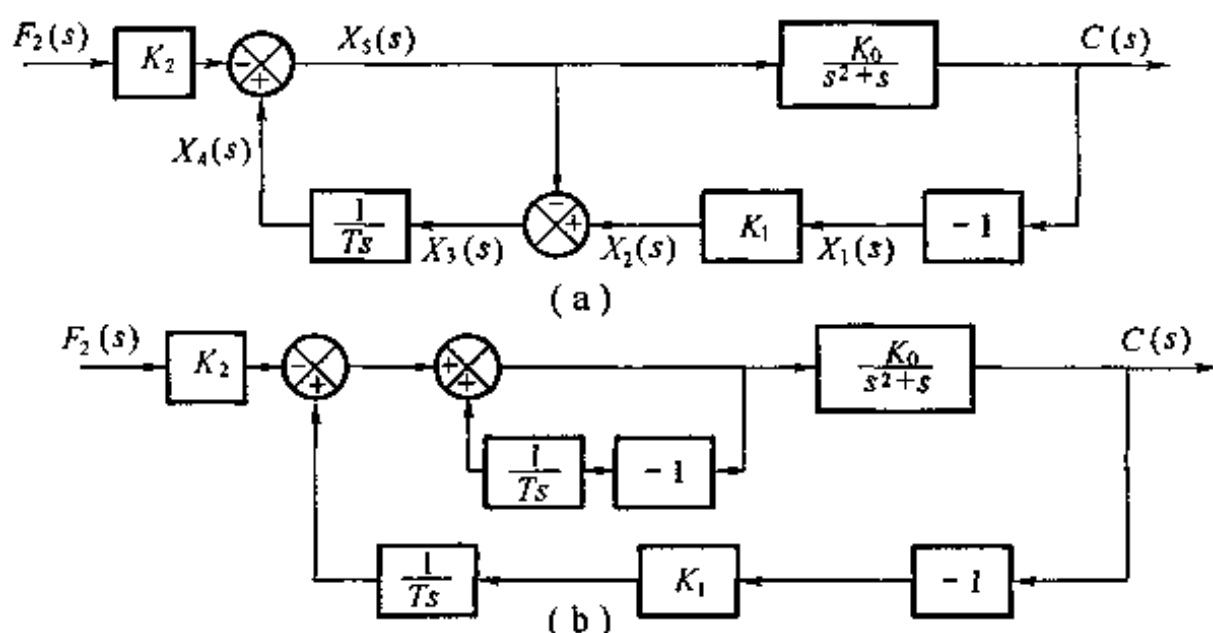
(2)求取闭环传递函数 $C(s)/R(s)$ 时,令 $F_1(s) = 0$ 和 $F_2(s) = 0$, 则

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_0 K_1}{Ts^3 + (1+T)s^2 + s + K_0 K_1}$$

由于扰动信号 $f_1(t)$ 与控制信号 $r(t)$ 在系统中的作用点相同, 所以有

$$\frac{C(s)}{F_1(s)} = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_0 K_1}{Ts^3 + (1+T)s^2 + s + K_0 K_1}$$

求取闭环传递函数 $C(s)/F_2(s)$ 时,需令 $R(s) = 0$ 和 $F_1(s) = 0$, 此时等效的方框图如题 2-8 解图(2)中(a), (b)所示, 求得



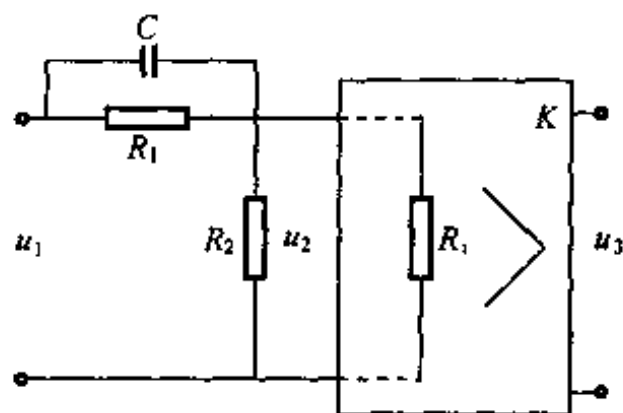
题 2-8 解图(2)

$$\frac{C(s)}{F_2(s)} = -\frac{K_0 K_2 T s}{T s^3 + (1+T)s^2 + s + K_0 K_1}$$

2-9 求取题2-9图所示RC电路的传递函数 $U_3(s)/U_1(s)$ 。图中 K 为放大器的增益。

解 由于放大器是与RC电路串接的下一个元件, 其输入电阻 R_i 是RC电路的负载, 因此求取RC电路的传递函数 $U_2(s)/U_1(s)$ 时, 需要考虑放大器对RC电路的负载效应。当输入 $R_i = \infty$ 时, 即RC电路与放大器间无负载效应存在时, RC电路与放大器串接时的传递函数 $U_2(s)/U_1(s)$ 与RC电路单独存在时相同, 即

$$\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{R_1 C s + 1}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C s + 1}$$



题2-9图

若输入电阻 R_i 为有限值, 求取RC电路的传递函数 $U_2(s)/U_1(s)$ 时必须考虑串接放大器的负载效应, 也就是RC电路的输出端电阻应取 R_2 与 R_i 的并联值 R'_2 。这时, RC电路的传递函数 $U_2(s)/U_1(s)$ 的形式与上式相同, 只是其中的电阻 R_2 应换写为 R'_2 , 即

$$\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{R'_2}{R_1 + R'_2} \cdot \frac{R_1 C s + 1}{\frac{R_1 R'_2}{R_1 + R'_2} C s + 1}$$

RC电路与放大器串接后的传递函数 $U_3(s)/U_1(s)$ 为

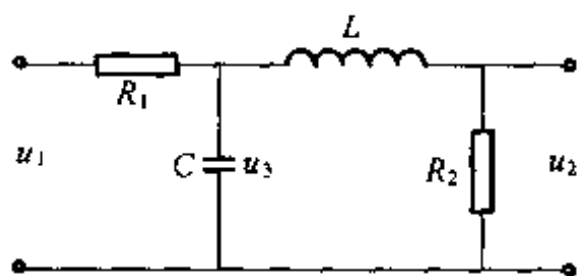
$$\frac{U_3(s)}{U_1(s)} = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} \cdot \frac{U_3(s)}{U_2(s)} = \frac{R'_2}{R_1 + R'_2} \cdot \frac{R_1 C s + 1}{\frac{R_1 R'_2}{R_1 + R'_2} C s + 1} \cdot K$$

其中 $R'_2 = R_2 // R_i$ 。

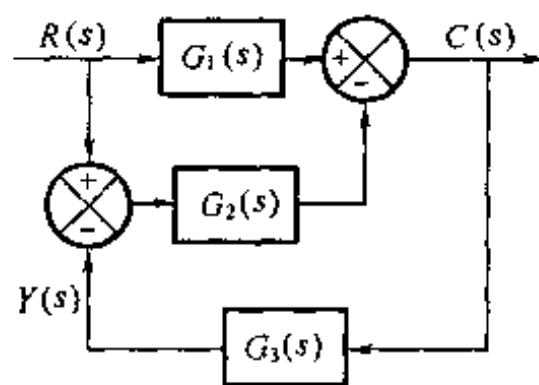
2-10 求取题2-10图所示电路的传递函数 $U_2(s)/U_1(s)$ 。

解 应用阻抗的概念, 有

$$\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = R_2 \cdot \frac{1}{R_1 + \frac{1}{\frac{1}{C s} // (L s + R_2)}} \cdot \frac{\frac{1}{C s}}{\frac{1}{C s} + (L s + R_2)} = \frac{R_2}{R_1 L C s^2 + (R_1 R_2 C + L) s + R_1 + R_2}$$



题2-10图

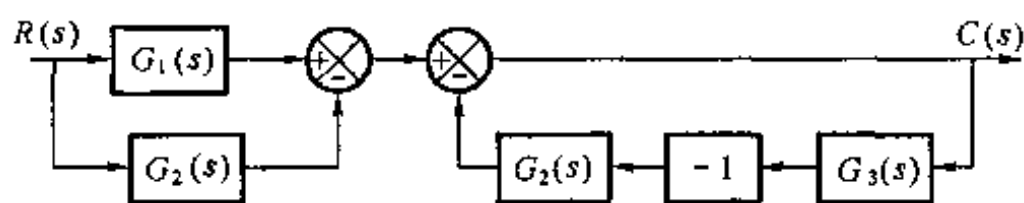


题2-11图

2-11 通过方框图的等效简化求取题2-11图所示系统的传递函数 $C(s)/R(s)$ 。

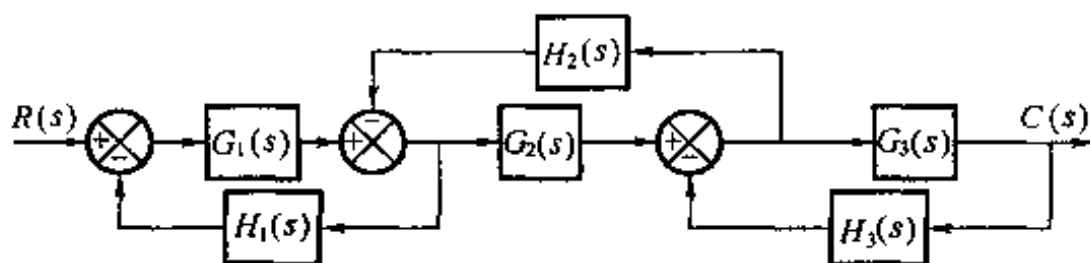
解 题2-11图可等效变换为题2-11解图所示形式, 求得传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s) - G_2(s)}{1 - G_2(s)G_3(s)}$$



题 2-11 解图

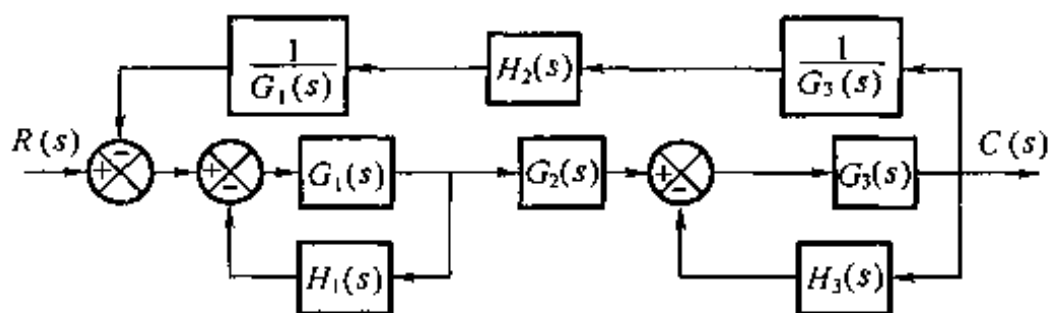
2-12 通过方框图的等效简化求取题 2-12 图所示系统的传递函数 $C(s)/R(s)$ 。



题 2-12 图

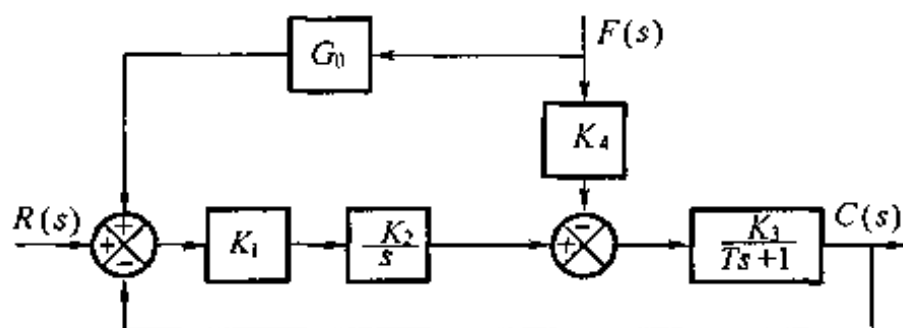
解 将方框图等效变换为题 2-12 解图所示形式,求得传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)}{1 + G_1(s)H_1(s) + G_2(s)H_2(s) + G_3(s)H_3(s) + G_1(s)H_1(s)G_3(s)H_3(s)}$$



题 2-12 解图

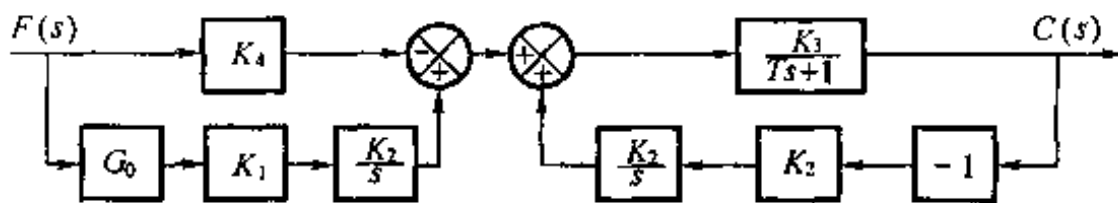
2-13 通过方框图的等效简化求取题 2-13 图所示系统的传递函数 $C(s)/F(s)$ 。



题 2-13 图

解 令 $R(s) = 0$, 将题 2-13 图等效变换为题 2-13 解图所示的方框图,求得

$$\frac{C(s)}{F(s)} = \left(\frac{K_1 K_2}{s} G_0(s) - K_4 \right) \cdot \frac{\frac{K_3}{Ts+1}}{1 - \frac{K_3}{Ts+1} \cdot \frac{K_1 K_2}{s} (-1)} = \frac{K_3 (K_1 K_2 G_0(s) - K_4 s)}{Ts^2 + s + K_1 K_2 K_3}$$



题 2-13 解图

2-14 通过方框图的等效简化求取题 2-14 图所示系统的传递函数 $C(s)/R(s)$ 。

解 由题 2-14 图可写出下列方程组

$$Y_1(s) = [Y_2(s) - E(s)] G_1(s)$$

$$Y_2(s) = [E(s) - Y_1(s)] G_2(s)$$

解得
$$\frac{Y_1(s)}{E(s)} = \frac{[G_2(s) - 1] G_1(s)}{1 + G_1(s) G_2(s)}$$

$$\frac{Y_2(s)}{E(s)} = \frac{[G_1(s) + 1] G_2(s)}{1 + G_1(s) G_2(s)}$$

其中 $Y_1(s) + Y_2(s) = C(s)$ 。则求得

$$G'(s) = \frac{C(s)}{E(s)} = \frac{Y_1(s)}{E(s)} + \frac{Y_2(s)}{E(s)} = \frac{2G_1(s)G_2(s) - G_1(s) + G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

最终求得系统传递函数 $C(s)/R(s)$ 为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G'(s)}{1 + G'(s)} = \frac{2G_1(s)G_2(s) - G_1(s) + G_2(s)}{1 - G_1(s) + G_2(s) + 3G_1(s)G_2(s)}$$

本题还可根据将前向通道和反馈通道分开来进行等效简化,或通过移动相加点和分支点来进行等效简化,但后者较繁琐。

2-15 绘制题 2-15 图所示电路的方框图,并应用梅森增益公式求取传递函数 $U_2(s)/U_1(s)$ 。

解 由题 2-15 图可得下列方程

$$I_1(s) = \frac{U_1(s) - U_3(s)}{R_1}$$

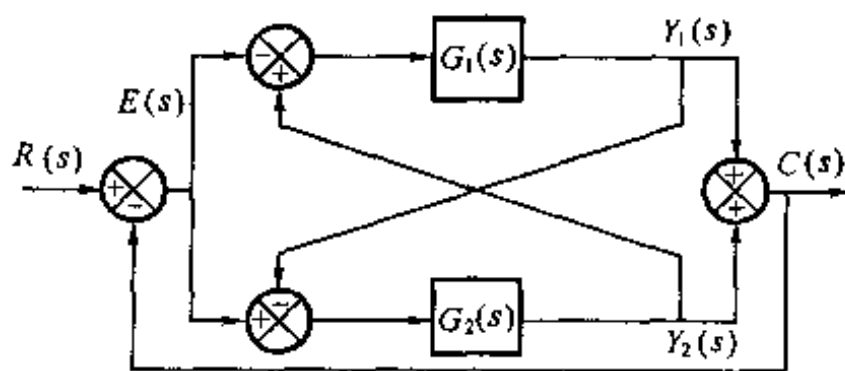
$$I_1(s) = I_2(s) + I_3(s) + I_4(s)$$

$$U_3(s) = \frac{1}{C_1 s} I_2(s), \quad U_3(s) = U_2(s) + U_4(s)$$

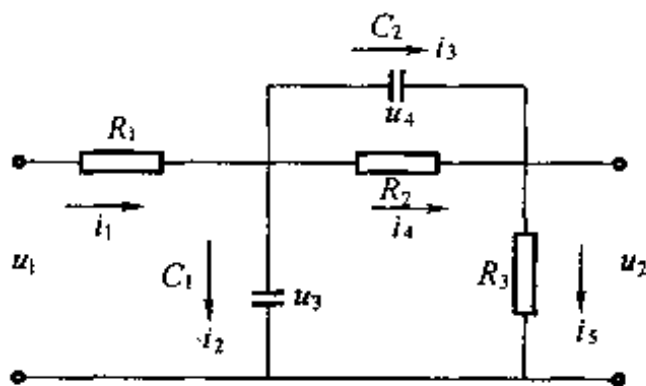
$$U_4(s) = \frac{1}{C_2 s} I_3(s), \quad I_4(s) = \frac{U_4(s)}{R_2}$$

$$I_5(s) = I_3(s) + I_4(s), \quad U_2(s) = R_3 I_5(s)$$

根据方程绘制方框图如题 2-15 解图所示。可见,方框图中有两条前向通路,它们的传递函数 P_1, P_2 为



题 2-14 图



题 2-15 图

$$P_1 = \frac{1}{R_1} \frac{1}{C_1 s} \cdot C_2 s \cdot R_3 = \frac{R_3 C_2}{R_1 C_1}, \quad P_2 = \frac{1}{R_1} \frac{1}{C_1 s} \cdot \frac{1}{R_2} \cdot R_3 = \frac{R_3}{R_1 R_2 C_1 s}$$

方框图共有单反馈回路 5 个, 它们的传递函数分别是

$$L_1 = -\frac{1}{R_1 C_1 s}, \quad L_2 = -R_3 C_2 s, \quad L_3 = -\frac{1}{C_1 s} \cdot C_2 s = -\frac{C_2}{C_1}$$

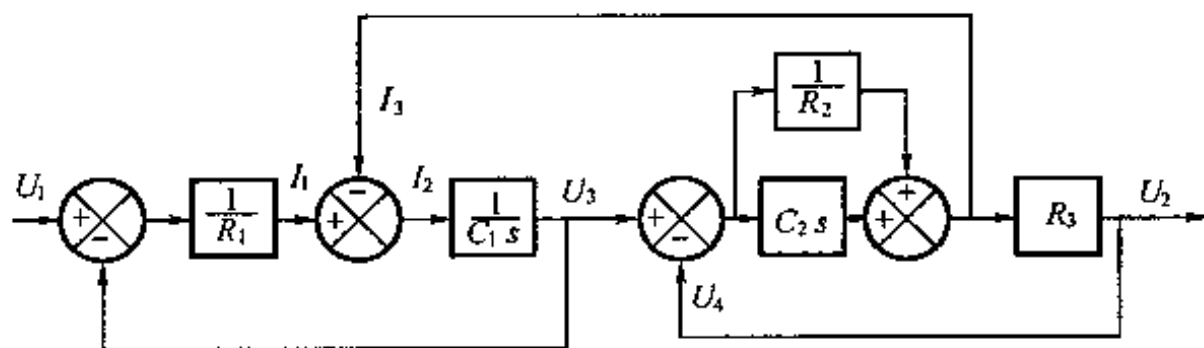
$$L_4 = -\frac{1}{R_2} \cdot R_3 = -\frac{R_3}{R_2}, \quad L_5 = -\frac{1}{C_1 s} \cdot \frac{1}{R_2} = -\frac{1}{R_2 C_1 s}$$

两两互不接触的回路有 $L_1 L_2$ 及 $L_1 L_4$, 不存在三个以上互不接触的回路。求得

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5) + L_1 L_2 + L_1 L_4, \quad \Delta_1 = \Delta_2 = 1$$

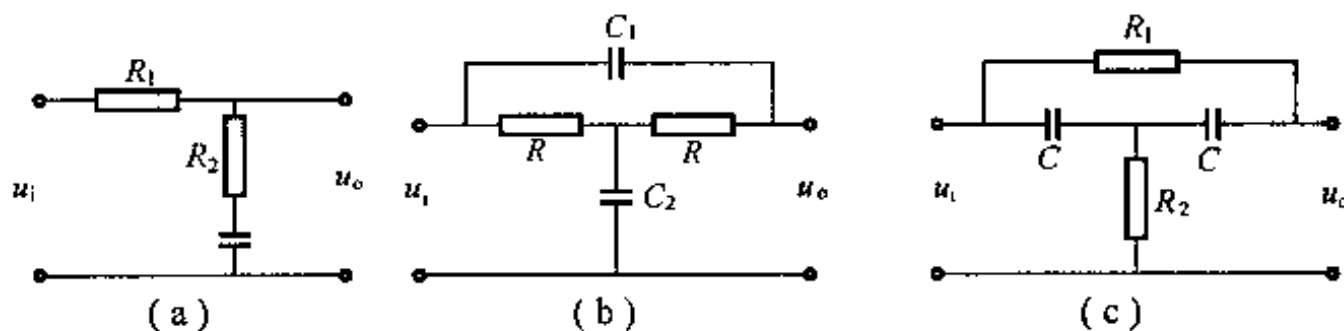
应用 Mason 公式求得传递函数为

$$\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{\Delta} (P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2) = \left[\left(\frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \right) (R_2 C_2 s + 1) \right] \cdot \left[\frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} (R_1 C_1 R_2 C_2) s^2 + \frac{R_1 R_2 C_1 + R_1 R_2 C_2 + R_1 R_3 C_1 + R_2 R_3 C_2}{R_1 + R_2 + R_3} s + 1 \right]$$



题 2-15 解图

2-16 求取题 2-16 图(a), (b), (c)所示电路的传递函数 $U_o(s)/U_i(s)$ 。



题 2-16 图

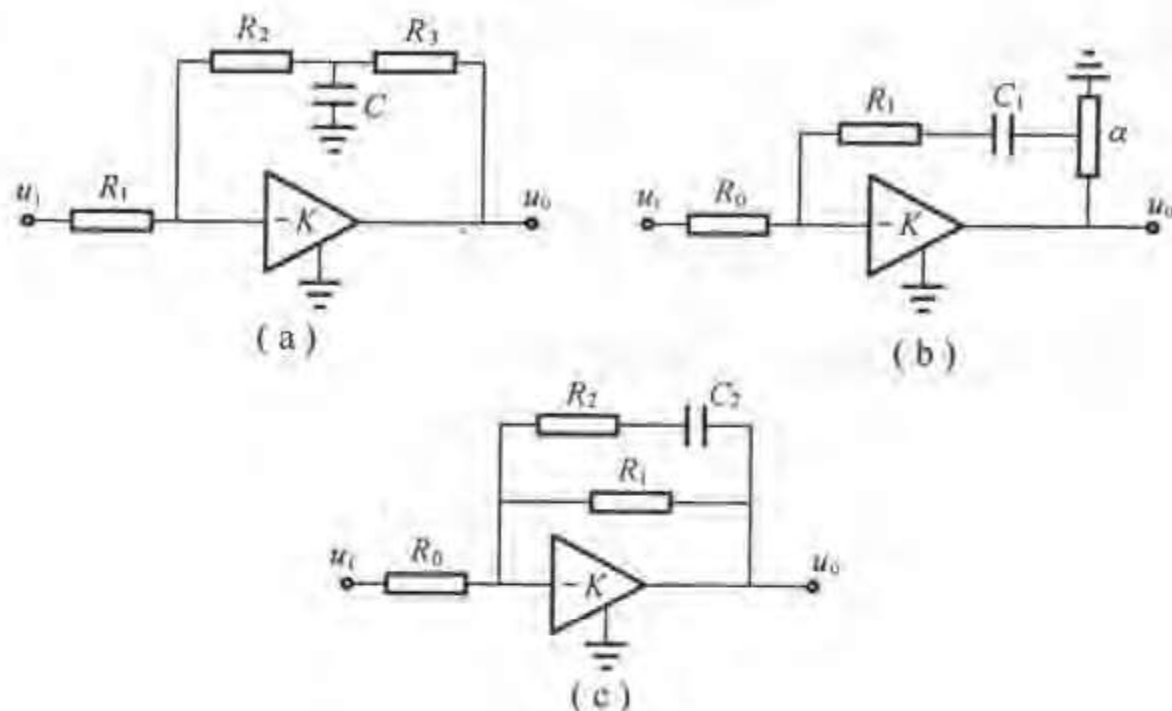
解 应用阻抗的概念, 有

$$(a) \quad \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{R_2 + \frac{1}{Cs}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{Cs}} = \frac{R_2 Cs + 1}{(R_1 + R_2) Cs + 1}$$

$$(b) \quad \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{C_1 C_2 R^2 s^2 + 2RC_1 s + 1}{C_1 C_2 R^2 s^2 + R(2C_1 + C_2) s + 1}$$

$$(c) \quad \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{R_1 R_2 C^2 s^2 + 2R_2 Cs + 1}{R_1 R_2 C^2 s^2 + (2R_2 + R_1) Cs + 1}$$

2-17 求题2-17图(a)~(c)所示有源网络的传递函数 $U_o(s)/U_i(s)$ 。



题2-17图

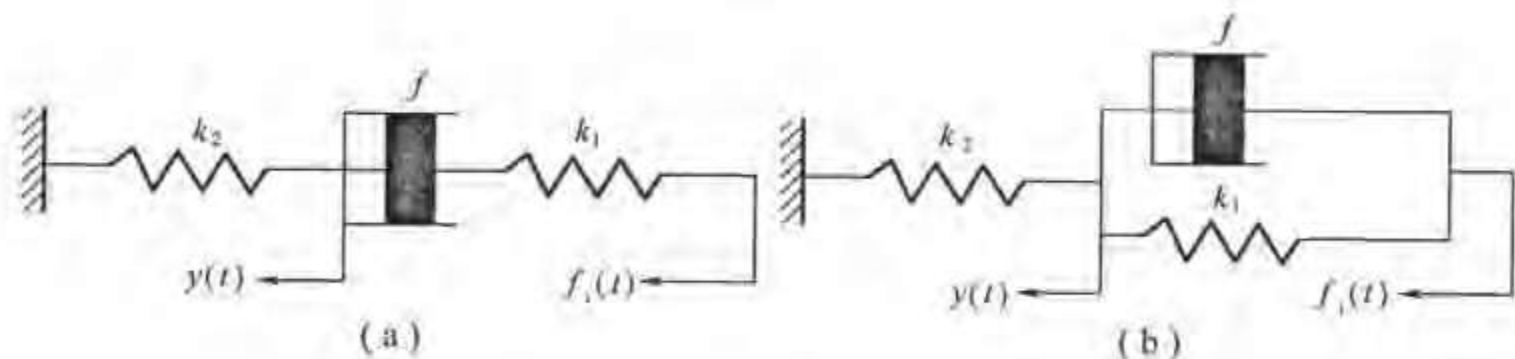
解 思路同题2-3,有

$$(a) \quad \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = -\frac{R_2 R_3 C s + R_2 + R_3}{R_1}$$

$$(b) \quad \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = -\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{R_1}{R_0} \cdot \frac{R_1 C_1 s + 1}{R_1 C_1 s}$$

$$(c) \quad \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = -\frac{R_1}{R_0} \cdot \frac{R_2 C_2 s + 1}{(R_1 + R_2) C_2 s + 1}$$

2-18 求题2-18图(a)、(b)所示机械平移系统的传递函数 $Y(s)/F_i(s)$, 其中 $y(t)$ 为输出位移, $f_i(t)$ 为系统的外作用力, k 为线性弹簧的弹性系数, f 为阻尼器的黏性摩擦系数。



题2-18图

解 (a) 设阻尼器和右侧弹簧之间某点的输出位移为 $x(t)$, 可得方程

$$k_1 x(t) + f(\dot{x} - \dot{y}) = f_i(t), \quad f(\dot{x} - \dot{y}) = k_2 y$$

消中间变量 $x(t)$, 得

$$\frac{k_1 k_2}{f} \int y dt + k_1 y + k_2 y = f_i(t)$$

整理得传递函数为

$$\frac{Y(s)}{F_i(s)} = \frac{fs}{(k_1 + k_2)fs + k_1 k_2}$$

(b) 第一种情况: 当 $f_i(t)$ 为位移时, 则可列方程为

$$k_1(x - y) + f(\dot{x} - \dot{y}) = k_2 y$$

则传递函数为

$$\frac{Y(s)}{F_i(s)} = \frac{fs + k_1}{fs + k_1 + k_2}$$

第二种情况: 当 $f_i(t)$ 为作用力时, 则可列方程为

$$f_i(t) = k_1(x - y) + f(\dot{x} - \dot{y})$$

$$k_1(x - y) + f(\dot{x} - \dot{y}) = k_2 y$$

则传递函数为

$$\frac{Y(s)}{F_i(s)} = \frac{1}{k_2}$$

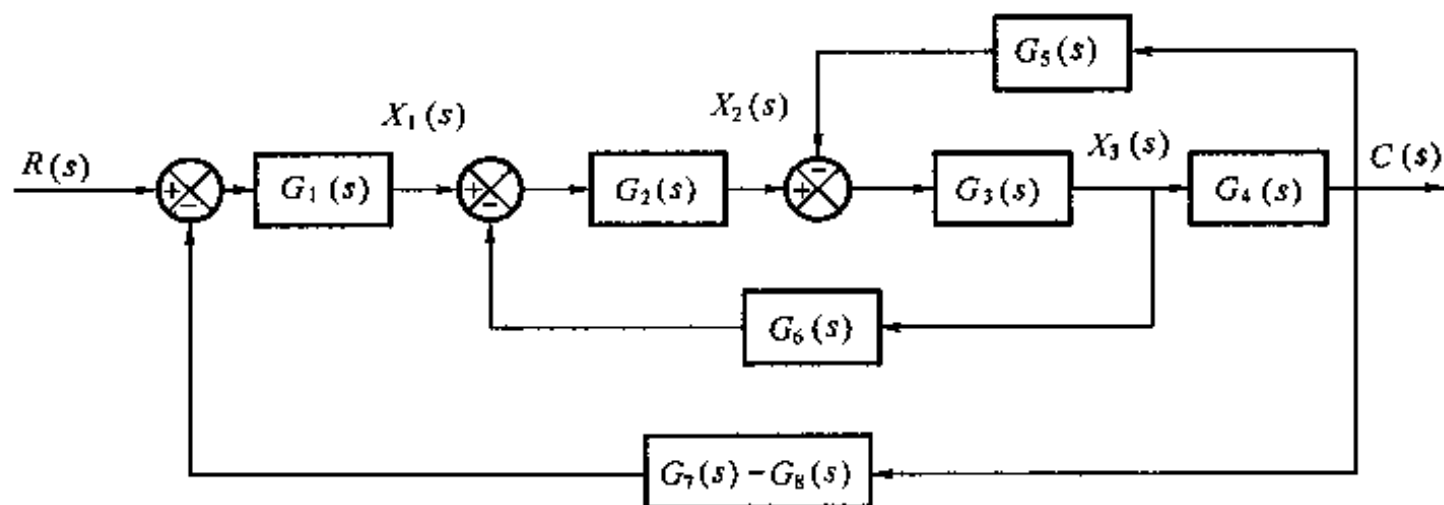
2-19 已知某控制系统由下列方程描述。试绘制该系统方框图, 并由方框图求取传递函数 $C(s)/R(s)$ 。

$$X_1(s) = G_1(s)R(s) - G_1(s)[G_7(s) - G_8(s)]C(s)$$

$$X_2(s) = G_2(s)[X_1(s) - G_6(s)X_3(s)]$$

$$X_3(s) = [X_2(s) - G_5(s)C(s)]G_3(s); \quad C(s) = G_4(s)X_3(s)$$

解 由方程式可画出系统方框图如题 2-19 解图所示。



题 2-19 解图

对方框图进行等效简化求得

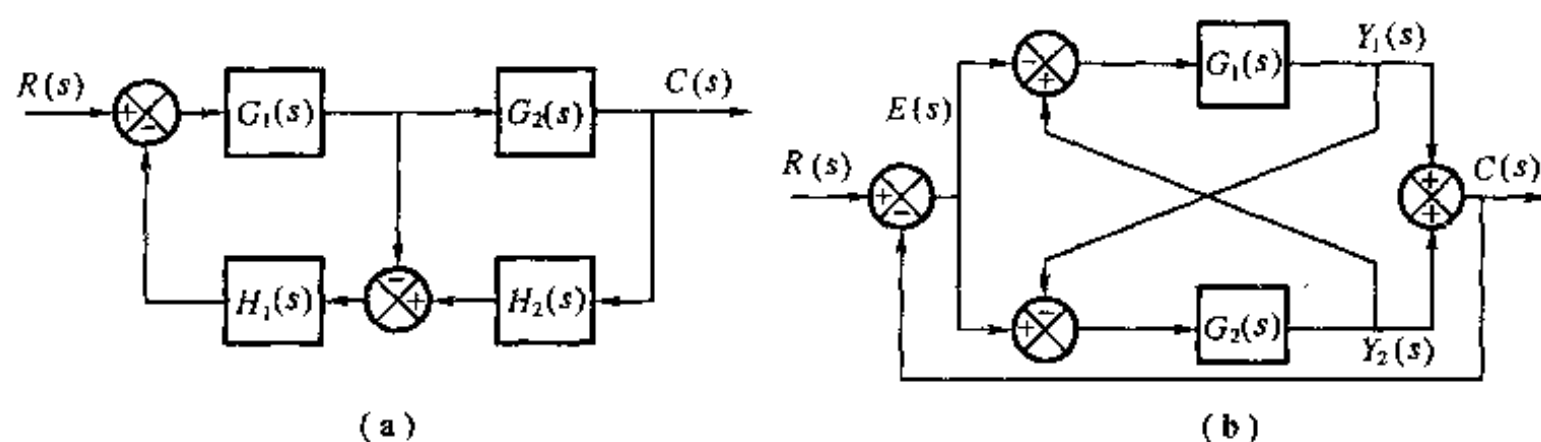
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)[G_7(s) - G_8(s)] + G_2(s)G_3(s)G_6(s) + G_2(s)G_4(s)G_5(s)}$$

2-20 试分别等效简化题 2-20 图(a)、(b)所示方框图, 并求取传递函数 $C(s)/R(s)$ 。

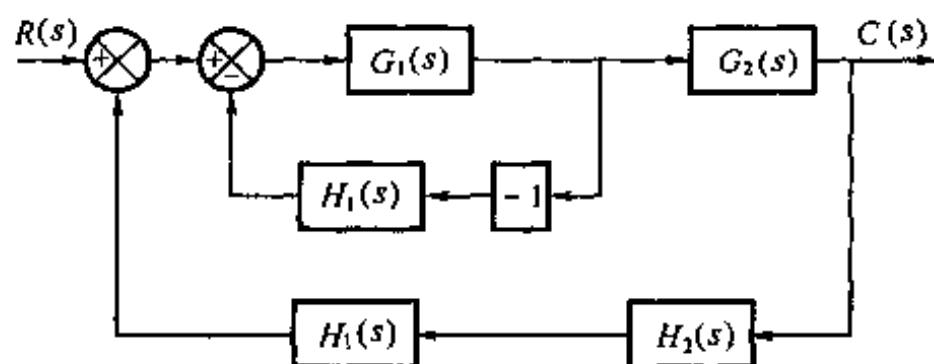
解 将题 2-20 图(a)所示的方框图等效简化, 如题 2-20 解图所示。则求得传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H_1(s)H_2(s) - G_1(s)H_1(s)}$$

题 2-20 解图(b)同题 2-14 图, 解题过程见题 2-14。

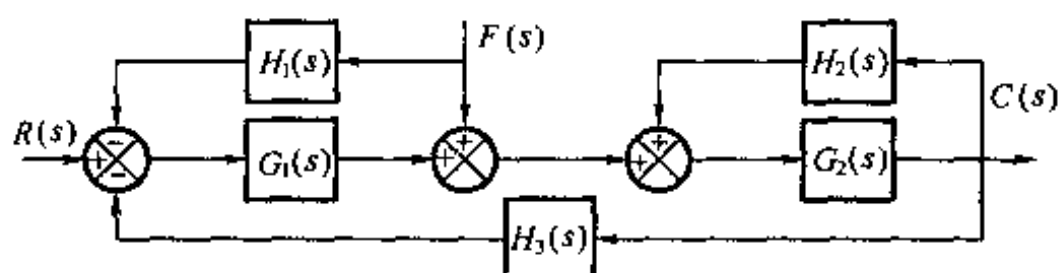


题 2-20 图



题 2-20 解图

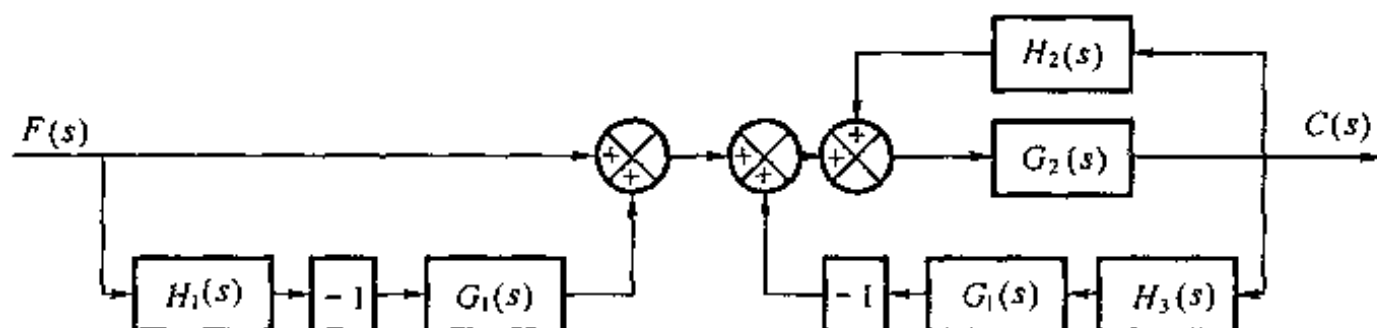
2-21 试通过方框图的等效简化,求取题 2-21 图所示系统的传递函数 $C(s)/F(s)$ 。



题 2-21 图

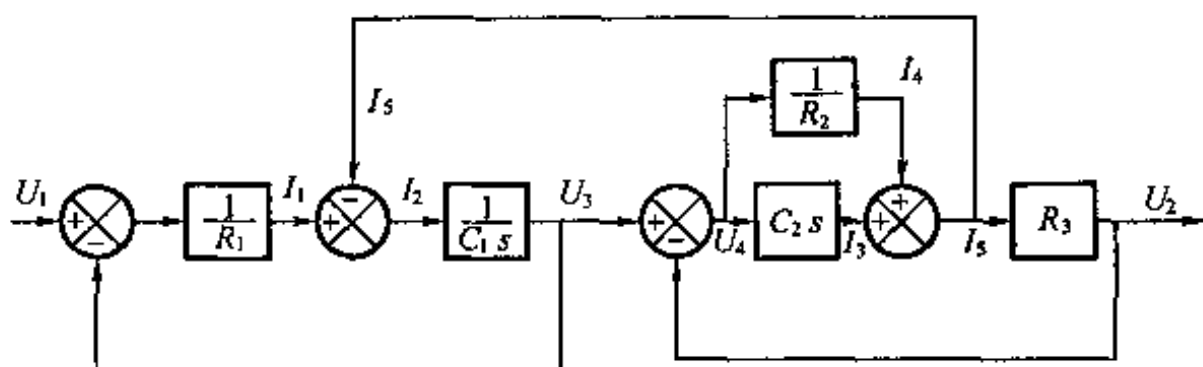
解 令 $R(s) = 0$, 将前向通道和反馈通道分开, 等效简化如题 2-21 解图所示。求得传递函数为

$$\frac{C(s)}{F(s)} = \frac{G_2(s) - G_1(s)G_2(s)H_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H_3(s) - G_2(s)H_2(s)}$$



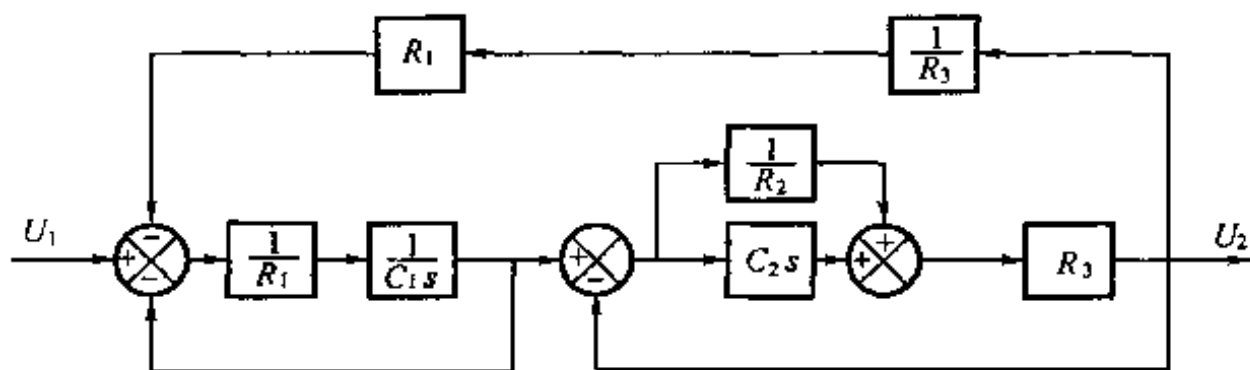
题 2-21 解图

2-22 试等效简化方框题 2-22 图所示方框图, 并求取传递函数 $U_2(s)/U_1(s)$ 。



题 2-22 图

解 通过移动分支点与相加点,此方框图等效成如题 2-22 解图所示结构。

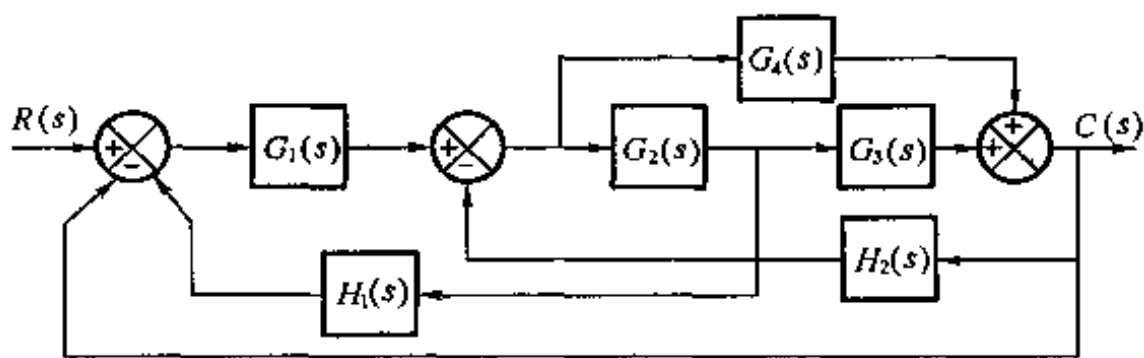


题 2-22 解图

由此求得传递函数

$$\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{R_3(1 + R_2 C_2 s)}{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2 s^2 + (R_1 R_2 C_1 + R_1 R_2 C_2 + R_1 R_3 C_1 + R_2 R_3 C_2)s + (R_1 + R_2 + R_3)}$$

2-23 试应用梅森增益公式求取题 2-23 图所示系统的传递函数 $C(s)/R(s)$ 。



题 2-23 图

解 画出该系统的信号流图如题 2-23 解图所示。

共有两条前向通路,通路增益分别为

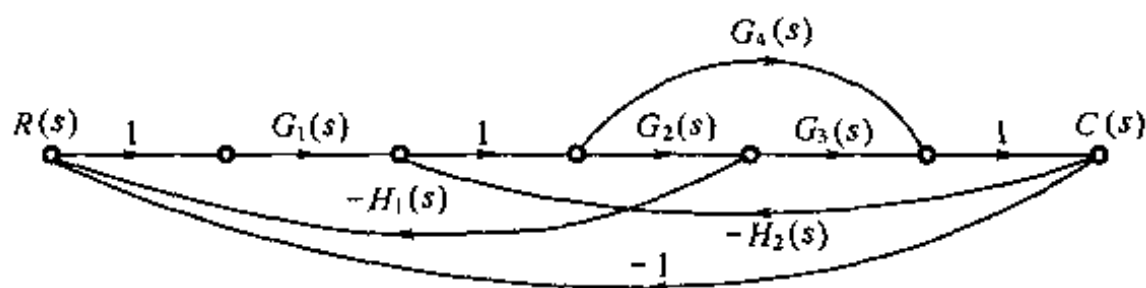
$$P_1 = G_1(s)G_2(s)G_3(s), \quad P_2 = G_1(s)G_4(s)$$

共有 5 个单独回路,其增益分别为

$$L_1 = -G_1(s)G_2(s)H_1(s), \quad L_2 = -G_2(s)G_3(s)H_2(s)$$

$$L_3 = -G_4(s)H_2(s), \quad L_4 = -G_1(s)G_2(s)G_3(s), \quad L_5 = -G_1(s)G_4(s)$$

不存在两两互不接触回路,所以



题 2-23 解图

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5)$$

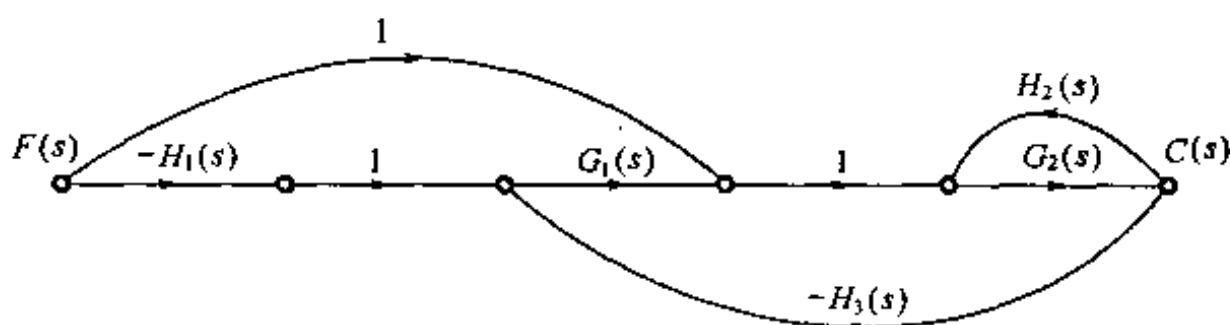
两条前向通路均与所有回路有接触, 所以, $\Delta_1 = 1, \Delta_2 = 1$ 。

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2}{\Delta}$$

$$= \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s) + G_1(s)G_4(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)G_3(s) + G_1(s)G_4(s) + G_1(s)G_2(s)H_1(s) + G_3(s)G_3(s)H_2(s) + G_4(s)H_2(s)}$$

2-24 试应用梅森增益公式求取题 2-21 图所示系统的传递函数 $C(s)/F(s)$ 。

解 令 $R(s) = 0$, 信号流图如题 2-24 解图所示, 有



题 2-24 解图

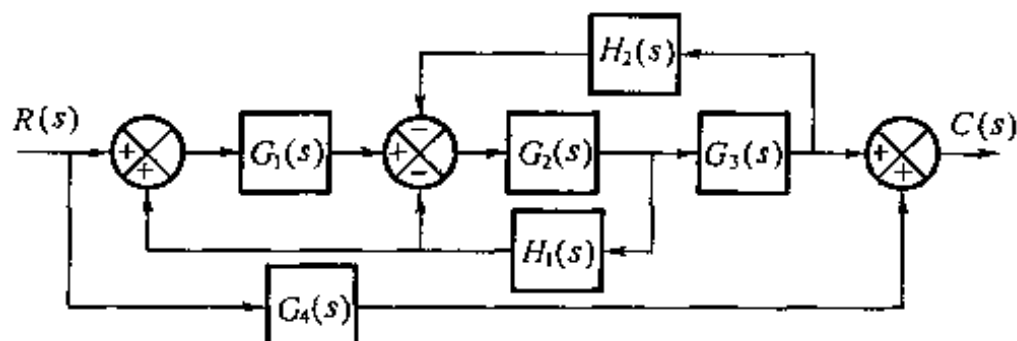
$$P_1 = -G_1(s)G_2(s)H_1(s), \quad P_2 = G_2(s)$$

$$L_1 = -G_1(s)G_2(s)H_3(s), \quad L_2 = G_2(s)H_2(s)$$

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2), \quad \Delta_1 = \Delta_2 = 1$$

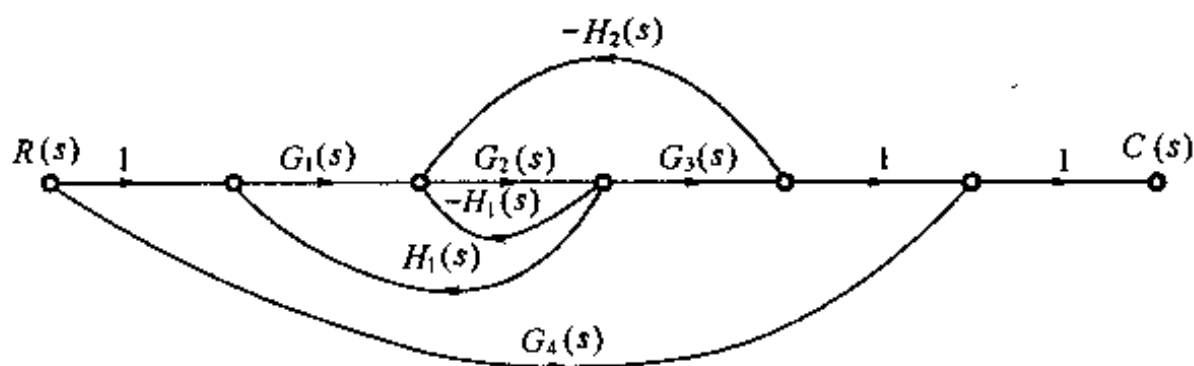
$$\frac{C(s)}{F(s)} = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2}{\Delta} = \frac{G_2(s) - G_1(s)G_2(s)H_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H_3(s) - G_2(s)H_2(s)}$$

2-25 试应用梅森增益公式求取题 2-25 图所示系统的传递函数 $C(s)/R(s)$ 。



题 2-25 图

解 信号流图如题 2-25 解图所示,则有



题 2-25 解图

$$P_1 = G_1(s)G_2(s)G_3(s), \quad P_2 = G_4(s)$$

$$L_1 = -G_2(s)H_1(s), \quad L_2 = G_1(s)G_2(s)H_1(s), \quad L_3 = -G_2(s)G_3(s)H_2(s)$$

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3), \quad \Delta_1 = 1, \quad \Delta_2 = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) = \Delta$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2}{\Delta} = G_4(s) + \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)}{1 + G_2(s)H_1(s) - G_1(s)G_2(s)H_1(s) + G_2(s)G_3(s)H_2(s)}$$

同步训练题

1. 若某系统在阶跃输入作用 $r(t) = 1(t)$ 时, 系统在零初始条件下的输出响应为

$$c(t) = 1 - 2e^{-2t} + e^{-t}$$

试求系统的传递函数和脉冲响应。

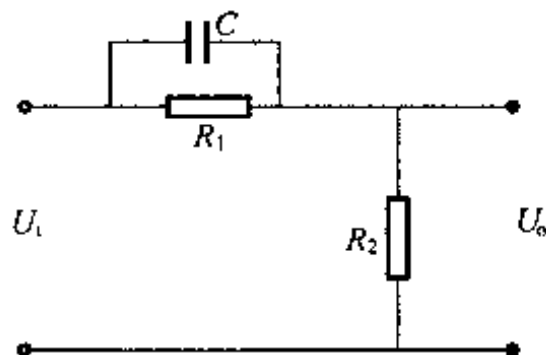
2. 试列写题 2 图中无源网络的微分方程式。

3. 设系统传递函数为

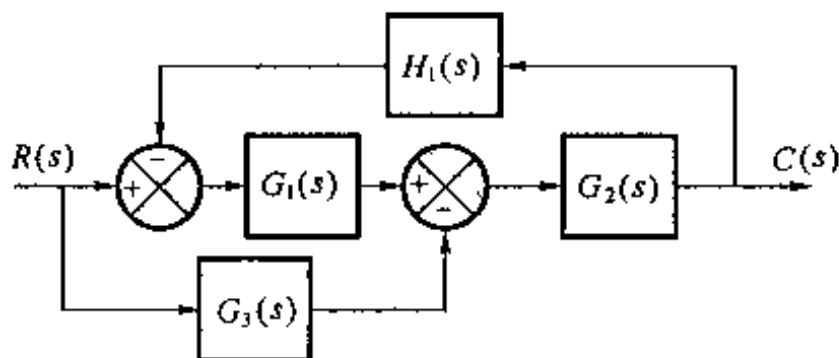
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2}{s^2 + 3s + 2}$$

且初始条件 $c(0) = -1, \dot{c}(0) = 0$ 。试求阶跃输入 $r(t) = 1(t)$ 时, 系统的输出响应 $c(t)$ 。

4. 已知控制系统结构图如题 4 图所示。试通过结构图等效变换求系统传递函数 $C(s)/R(s)$ 。

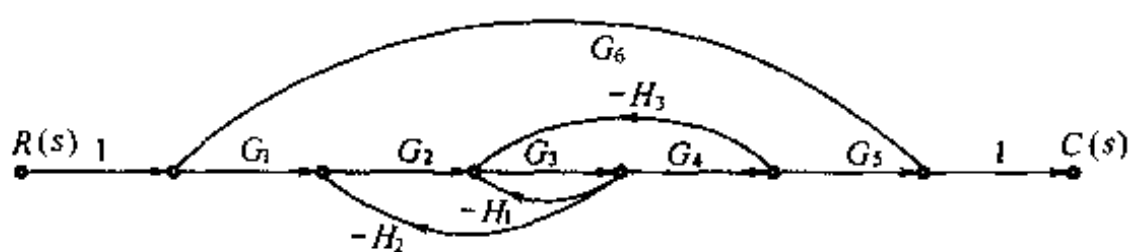


题 2 图



题 4 图

5. 试用梅森增益公式求图中系统信号流图的传递函数 $C(s)/R(s)$ 。



题5图

6. 求下列函数的拉氏反变换 $f(t)$ 。

$$(1) F(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)};$$

$$(2) F(s) = \frac{s}{(s+1)^2(s+2)};$$

$$(3) F(s) = \frac{2s^2 - 5s + 1}{s(s^2 + 1)};$$

$$(4) F(s) = \frac{s+2}{s(s+1)^2(s+3)}.$$

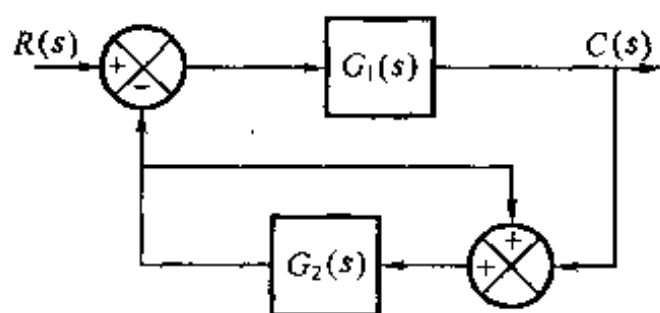
7. 试求下列函数的拉氏变换。假设 $t < 0$ 时, 函数

$f(t) = 0$ 。

$$(1) f(t) = 2(1 - \cos t);$$

$$(2) f(t) = \sin\left(5t + \frac{\pi}{3}\right);$$

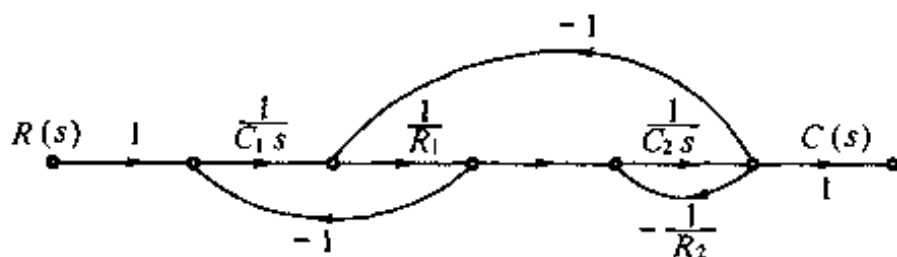
$$(3) f(t) = t^n e^{at}.$$



题8图

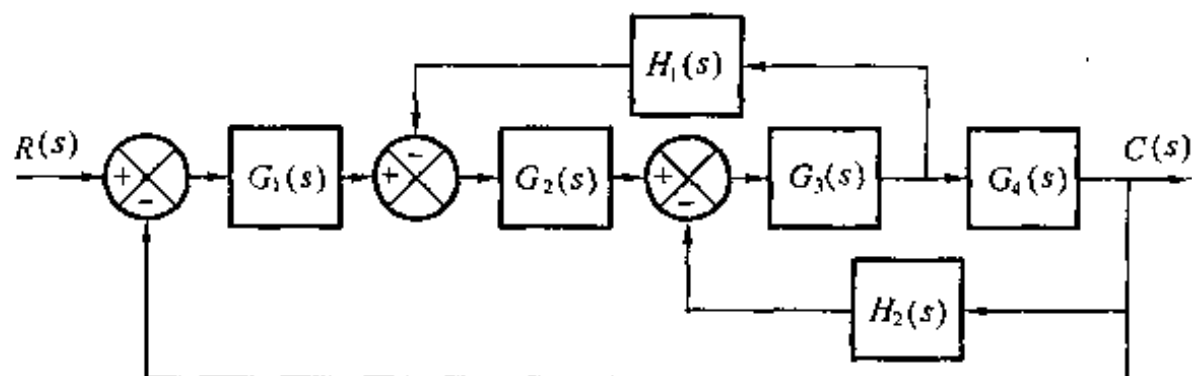
8. 已知控制系统结构图如题8图所示, 试求系统的传递函数 $C(s)/R(s)$ 。

9. 已知系统的信号流图如题9图所示, 试求系统的传递函数 $C(s)/R(s)$ 。



题9图

10. 已知系统的结构图如题10图所示。



题10图

(1) 试通过结构图的等效变换, 求出 $\frac{C(s)}{R(s)}$;

(2) 试画出相应的信号流图, 并运用梅森公式, 求取 $\frac{C(s)}{R(s)}$ 。

同步训练题答案

1. 解 $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{3s+2}{(s+1)(s+2)}, k(t) = 4e^{-2t} - e^{-t}$

2. 解 $\frac{u_o}{u_i} = \frac{R_2}{R_2 + \frac{R_1 \cdot 1/(Cs)}{R_1 + 1/(Cs)}} = \frac{R_1 R_2 Cs + R_2}{R_1 R_2 Cs + R_1 + R_2}$

故 $R_1 R_2 C \frac{du_o}{dt} + (R_1 + R_2) u_o = R_1 R_2 C \frac{du_i}{dt} + R_2 u_i$

3. 解 传递函数所对应的微分方程为

$$\frac{d^2 c(t)}{dt^2} + 3 \frac{dc(t)}{dt} + 2c(t) = 2r(t)$$

在已知初始条件和输入条件下对上式进行拉氏变换, 得

$$s^2 C(s) - sc(0) - \dot{c}(0) + 3sC(s) - 3c(0) + 2C(s) = \frac{2}{s}$$

$$C(s) = \frac{-s^2 - 3s + 2}{s(s^2 + 3s + 2)}$$

则 $c(t) = L^{-1}[C(s)] = L^{-1}\left[\frac{-s^2 - 3s + 2}{s(s^2 + 3s + 2)}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{4}{s+1} + \frac{2}{s+2}\right]$

所以 $c(t) = 1 - 4e^{-t} + 2e^{-2t}$

4. 解 $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_2(G_1 + G_3)}{1 + G_1 G_2 H_1}$

5. 解 存在两条前向通路, 三个回路

$$\Delta = 1 + G_3 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_3 G_4 H_3$$

$$P_1 = G_1 G_2 G_3 G_4 G_5, \quad \Delta_1 = 1$$

$$P_2 = G_6, \quad \Delta_2 = \Delta$$

故有 $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2}{\Delta} = G_6 + \frac{G_1 G_2 G_3 G_4 G_5}{1 + G_3 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_3 G_4 H_3}$

6. 解 (1) $f(t) = 2e^{-3t} - e^{-2t}$

(2) $f(t) = (2-t)e^{-t} - 2e^{-2t}$

(3) $f(t) = 1 + \cos t - 5\sin t$

(4) $f(t) = \frac{2}{3} - \frac{1}{4}(2t+3)e^{-t} + \frac{1}{12}e^{-3t}$

7. 解 (1) $F(s) = 2\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right)$

(2) $F(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{5+\sqrt{3}s}{s^2+25}\right)$

(3) $F(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$

8. 解
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s) - G_1(s)G_2(s)}{1 - G_2(s) + G_1(s)G_2(s)}$$

9. 解
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{R_2}{R_1 R_2 C_1 C_2 s + R_1 C_1 s + R_2 C_2 s + R_2 C_1 s + 1}$$

10. 解 (1)

$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)}{1 + G_2(s)G_3(s)H_1(s) + G_3(s)G_4(s)H_2(s)} \\ &= \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)}{1 + \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)}{1 + G_2(s)G_3(s)H_1(s) + G_3(s)G_4(s)H_2(s)}} \\ &= \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)}{1 + G_2(s)G_3(s)H_1(s) + G_3(s)G_4(s)H_2(s) + G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)} \end{aligned}$$

(2) 信号流图如题 10 解图所示。

一条前向通路:

$$P_1 = G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)$$

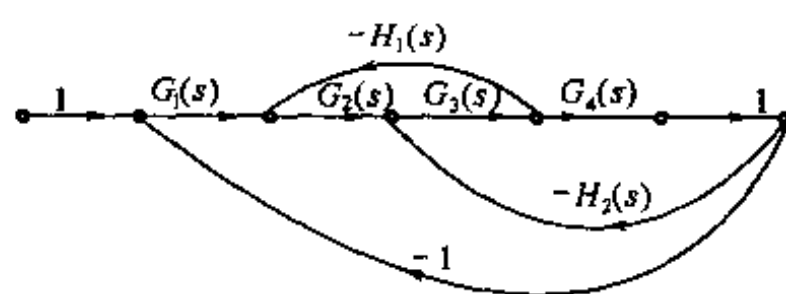
三个单独回路:

$$L_1 = -G_2(s)G_3(s)H_1(s)$$

$$L_2(s) = -G_2(s)G_4(s)H_2(s)$$

$$L_3(s) = -G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)$$

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_3), \quad \Delta_1 = 1$$



题 10 解图

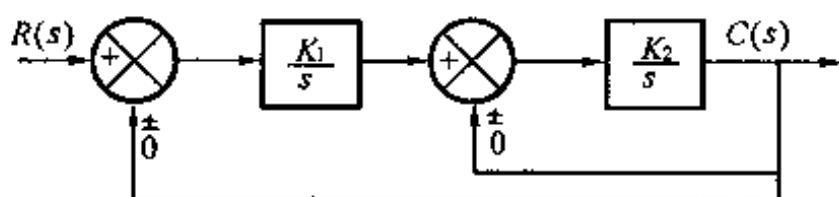
则

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)}{1 + G_2(s)G_3(s)H_1(s) + G_3(s)G_4(s)H_2(s) + G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)}$$

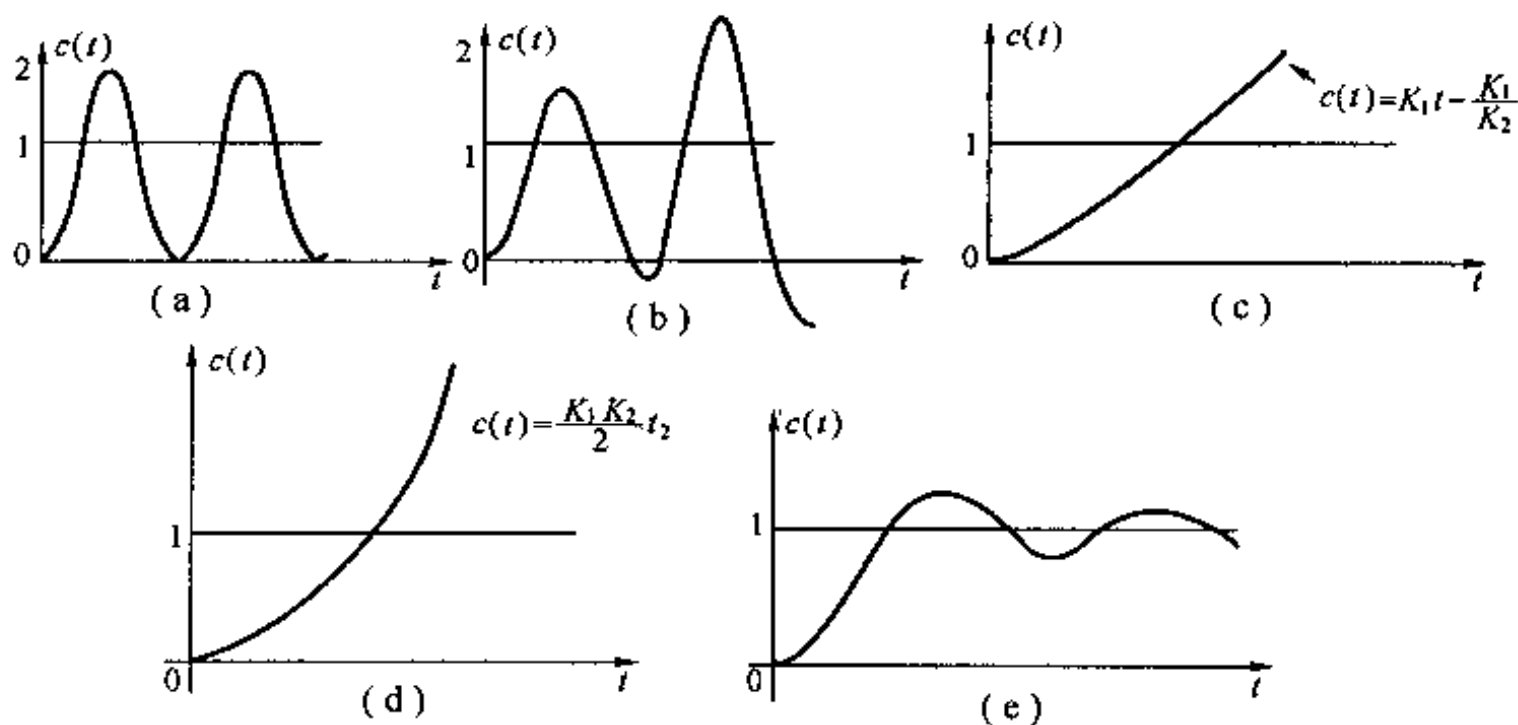
第3章 线性系统的时域分析

书后习题解析

3-1 设有二阶系统,其方框图如题3-1图(1)所示。图中符号“+”、“-”分别表示取正反馈与负反馈,“0”表示无反馈; K_1 与 K_2 为常值增益,且 $K_1 > 0, K_2 > 0$ 。题3-1图(2)所示为在该系统中可能出现的单位阶跃响应曲线。试确定与每种单位阶跃响应相对应的主反馈及内反馈的极性,并说明理由。



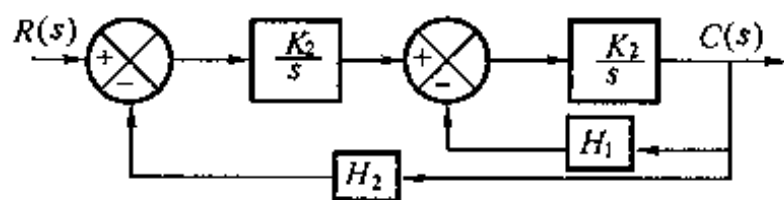
题3-1图(1)



题3-1图(2)

解 将题3-1图(1)变换为题3-1解图,其中 $H_1 = +1$ 和 $H_2 = +1, H_1 = -1$ 和 $H_2 = -1, H_1 = 0$ 和 $H_2 = 0$ 分别代表内反馈及主反馈为负反馈、正反馈和无反馈。求得系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{K_1 K_2}{s^2 + K_2 H_1 s + K_1 K_2 H_2}$$



题3-1解图

(1)题3-1图(2)(a)所示单位阶跃响应具有等幅振荡特性,则 $\zeta = 0$,此时 $H_1 = 0, H_2 = +1$,则主反馈为负反馈,无内反馈;

(2)题3-1图(2)(b)所示单位阶跃响应具有发散振荡特性,则 $-1 < \zeta < 0$,此时 $H_1 = -1, H_2 = +1$,则主反馈为负反馈,内反馈为正反馈;

(3)题3-1图(2)(c)所示单位阶跃响应的稳态分量为 $c(t) = K_1 t - \frac{K_1}{K_2}$, 则 $C(s)$ 的分母必有 s^2 , 并且响应含有衰减的指数项, 此时 $H_1 = +1, H_2 = 0$, 则无主反馈, 内反馈为负反馈;

(4)题3-1图(2)(d)所示单位阶跃响应 $c(t) = \frac{K_1 K_2}{2} t^2$, 则 $C(s) = \frac{K_1 K_2}{s^3}$, 此时 $H_1 = 0, H_2 = 0$, 则无主反馈, 无内反馈;

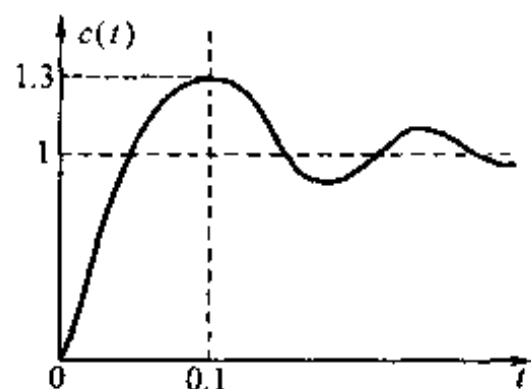
(5)题3-1图(2)(e)所示单位阶跃响应具有衰减振荡特性, 则 $0 < \zeta < 1$, 此时 $H_1 = +1, H_2 = +1$, 则主反馈为负反馈, 内反馈为负反馈。

3-2 由实验测得二阶系统的单位阶跃响应 $c(t)$ 如题3-2图所示。试根据已知的单位阶跃响应 $c(t)$ 计算系统参数 ζ 及 ω_n 。

解 由图所示单位阶跃响应 $c(t)$, 求得 $\sigma\% = 30\%$, $t_p = 0.1$ s, 又由

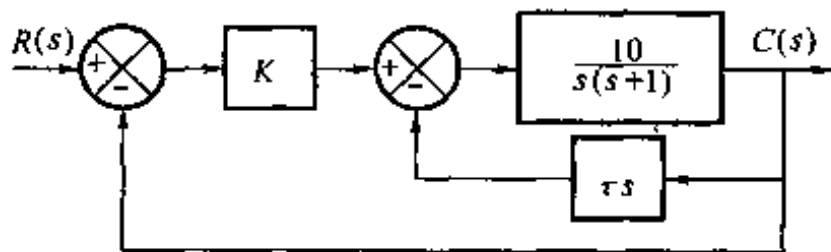
$$\sigma\% = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\%, \quad t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

计算出系统参数 ζ 及 ω_n 的值分别为 $\zeta = 0.36$, $\omega_n = 33.7$ rad/s。



题3-2图

3-3 已知控制系统方框图如题3-3图所示。要求该系统的单位阶跃响应 $c(t)$ 具有超调量 $\sigma\% = 16.3\%$ 和峰值时间 $t_p = 1$ s, 试确定前置放大器的增益 K 及内反馈系数 τ 。



题3-3图

解 由题意

$$\sigma\% = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% = 16.3\%$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = 1$$

计算得 $\zeta = 0.5$, $\omega_n = 3.63$ rad/s。

由题3-3图求得给定系统的闭环传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10K}{s^2 + (1 + 10\tau)s + 10K}$$

与二阶系统的闭环传递函数标准形式相对应, 则有

$$10K = \omega_n^2 = (3.63)^2, \quad 1 + 10\tau = 2\zeta\omega_n = 2 \times 0.5 \times 3.63$$

由此解出参数值 $K = 1.32$, $\tau = 0.263$ 。

3-4 设某单位负反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{0.4s+1}{s(s+0.6)}$, 试计算该系统单位阶跃响应的超调量、上升时间、峰值时间及调整时间。

解 该单位负反馈系统的闭环传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s+2.5}{2.5(s^2+s+1)}$$

标准形式为
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2(s+z)}{s(s^2+2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

即其中 $z=2.5, \omega_n=1, \zeta=0.5$, 代入下列计算公式

$$\sigma\% = \frac{1}{\zeta} \sqrt{\zeta^2 - 2\gamma\zeta^2 + \gamma^2} \cdot e^{-\frac{\zeta\gamma}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\%$$

$$t_r = \frac{\pi - \varphi - \theta}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}, \quad t_p = \frac{\pi - \varphi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$$t_s(5\%) = \left(3 + \ln \frac{l}{z}\right) \frac{1}{\zeta\omega_n}, \quad t_s(2\%) = \left(4 + \ln \frac{l}{z}\right) \frac{1}{\zeta\omega_n}$$

$$\gamma = \frac{\zeta\omega_n}{z}, \quad \varphi = \arctan \frac{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}{z - \zeta\omega_n} \text{ (取弧度)}$$

$$\theta = \arctan \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \text{ (取弧度)}, \quad l = \sqrt{(z - \zeta\omega_n)^2 + (\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2})^2}$$

则 $\gamma=0.2, \varphi=0.408 \text{ rad}, \theta=1.05 \text{ rad}, l=2.18$, 最后求得该系统单位阶跃响应的性能指标为 $\sigma\% = 18\%, t_r = 1.94 \text{ s}, t_p = 3.16 \text{ s}, t_s(2\%) = 7.73 \text{ s}$ 。

3-5 设二阶系统的单位阶跃响应 $c(t)$ 如题 3-2 图所示。已知该系统属单位反馈控制型, 试确定其开环传递函数。

解 设闭环传递函数具有如下标准形式, 即

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

对于单位负反馈系统, 开环传递函数 $G(s)$ 与闭环传递函数 $\Phi(s)$ 间的关系为 $\Phi(s) =$

$$\frac{G(s)}{1+G(s)}, \text{ 则 } G(s) = \frac{\Phi(s)}{1-\Phi(s)} = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$$

由题 3-2 中求得的 $\zeta=0.36, \omega_n=33.7 \text{ rad/s}$, 可得

$$G(s) = \frac{46.8}{s(0.041s+1)}$$

3-6 已知系统的单位阶跃响应为 $c(t) = 1 + e^{-t} - e^{-2t} (t \geq 0)$, 试求取该系统的传递函数 $C(s)/R(s)$ 。

解 由响应表达式可得给定系统的初始条件为 $c(0)=1, \dot{c}(0)=1$ 。对于初始条件不为零的二阶系统, 求取该系统的传递函数时, 需要考虑初始条件对响应的影响。若对典型二阶系统, 系统的单位阶跃响应的拉氏变换为

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} R(s) + \frac{(s+2\zeta\omega_n)c(0) + \dot{c}(0)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

其中 $\omega_n^2/(s^2+2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)$ 便是系统的传递函数。由该系统的单位阶跃响应表达式有

$$C(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} = \frac{s^2+4s+2}{s(s^2+3s+2)} = \frac{2}{s^2+3s+2} \cdot \frac{1}{s} + \frac{s+4}{s^2+3s+2}$$

其中 $s+4 = (s+2\zeta\omega_n)c(0) + \dot{c}(0)$, 则 $\omega_n^2=2, 2\zeta\omega_n=3$ 。

所以给定系统的传递函数为 $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2}{s^2+3s+2}$ 。

3-7 某系统的特征方程为 $s^4+2s^3+s^2+2s+1=0$, 试应用 Routh 稳定判据判别该系统的稳定性。

解 列 Routh 表

s^4	1	1	1
s^3	2	2	0
s^2	$0(\approx \epsilon)$	1	
s^1	$\frac{2\epsilon - 2}{\epsilon}$	0	
s^0	1		

在 Routh 表的第三行的第一列元素为零,将零元素用趋近于零的正数 ϵ 代替,则 s^1 行第一列的元素符号为负。从 Routh 表可见,第一列元素的符号变化了两次,则系统不稳定,并且系统有两个具有正实部的根。

3-8 设系统的特征方程为

$$s^6 + 2s^5 + 8s^4 + 12s^3 + 20s^2 + 16s + 16 = 0$$

试应用 Routh 稳定判据判别该系统的稳定性。

解 列 Routh 表

s^6	1	8	20	16
s^5	2	12	16	0
s^4	1	6	8	
s^3	0	0	0	

其中 s^4 行(第三行)各元素都除以 2。 s^3 行的元素全部为零,则辅助方程为

$$F(s) = s^4 + 6s^2 + 8 = 0, \quad \frac{dF(s)}{ds} = 4s^3 + 12s = 0$$

用新方程的各项系数代替全零行,继续列 Routh 表。则整个 Routh 表为

s^6	1	8	20	16
s^5	2	12	16	0
s^4	1	6	8	
s^3	4	12	0	
s^2	3	8		
s^1	$4/3$	0		
s^0	8			

可见, Routh 表中第一列各元素的符号均相同,则该系统在 s 平面右半部无根。但由辅助方程 $F(s) = s^4 + 6s^2 + 8 = 0$, 得系统有共轭虚根 $\pm j\sqrt{2}$ 和 $\pm j2$, 则理论上认为该系统临界稳定。

3-9 试分析题 3-9 图所示系统的稳定性。

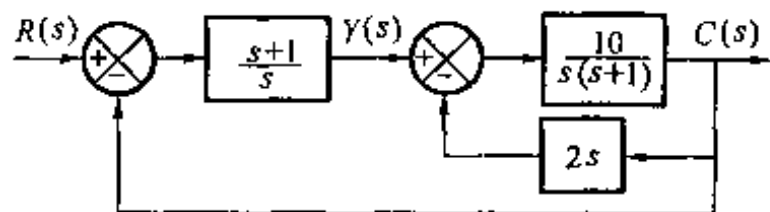
解 图中所示单位负反馈系统的闭环传递函数 $C(s)/R(s)$ 为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10(s+1)}{s^3 + 21s^2 + 10s + 10}$$

系统的特性方程为

$$s^3 + 21s^2 + 10s + 10 = 0$$

列 Routh 表



题 3-9 图

s^3	1	10
s^2	21	10
s^1	9.52	0
s^0	10	

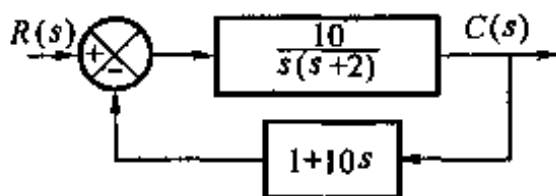
因为 Routh 表第一列元素符号无改变, 所以系统稳定。

3-10 试分析题 3-10 图所示系统的稳定性。

解 题 3-10 图所示系统的特征方程为

$$D(s) = 1 + \frac{10}{s(s+2)} \cdot (1+10s) = s^2 + 102s + 10 = 0$$

特征根 $s_1 = -0.098$, $s_2 = -101.9$, 均具有负实部, 所以系统稳定。



题 3-10 图

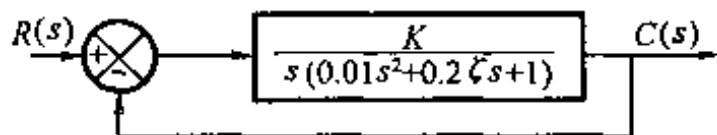
3-11 试确定题 3-11 图所示系统的参数 K 及 ζ 的稳定域。

解 题 3-11 图所示系统的特征方程为

$$D(s) = 0.01s^3 + 0.2\zeta s^2 + s + K = 0$$

列 Routh 表, 即

s^3	0.01	1
s^2	0.2ζ	K
s^1	$\frac{0.2\zeta - 0.01K}{0.2\zeta}$	0
s^0	K	



题 3-11 图

若系统稳定, 必有 $0.2\zeta > 0$, $\frac{0.2\zeta - 0.01K}{0.2\zeta} > 0$, $K > 0$

则确定出参数 K, ζ 的稳定域为 $\zeta > \frac{1}{20}K$, $0 < K < 20\zeta$ 。

3-12 设控制系统方框图如题 3-12 图所示。要求闭环系统的特征根全部位于 $s = -1$ 垂线之左。试确定参数 K 的取值范围。

解 由题 3-12 图得, 系统的特征方程为

$$D(s) = s(0.1s+1)(0.25s+1) + K = 0$$

$$D(s) = s^3 + 14s^2 + 40s + 40K = 0$$

若要求闭环系统的特征根全部位于 $s = -1$ 垂线之左, 令 $s = z - 1$ 并代入特征方程, 得

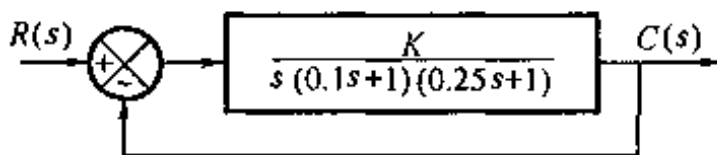
$$(z-1)^3 + 14(z-1)^2 + 40(z-1) + 40K = 0$$

$$z^3 + 11z^2 + 15z + (40K - 27) = 0$$

列 Routh 表, 即

z^3	1	15
z^2	11	$40K - 27$
z^1	$\frac{11 \times 15 - (40K - 27)}{11}$	0
z^0	$40K - 27$	

Routh 表第一列元素均为正, 求得



题 3-12 图

$$11 \times 15 - (40K - 27) > 0, \quad 40K - 27 > 0$$

最后确定 K 的取值范围为 $0.675 < K < 4.8$ 。

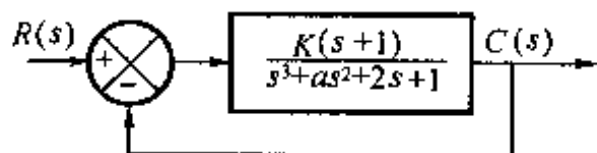
3-13 设系统方框图如题 3-13 图所示。若系统以 $\omega_n = 2 \text{ rad/s}$ 的频率作等幅振荡,试确定振荡时的参数 K 与 a 之值。

解 由题 3-13 图可得该系统特征方程为

$$D(s) = s^3 + as^2 + (2+K)s + (1+K) = 0$$

列 Routh 表

s^3	1	$2+K$
s^2	a	$1+K$
s^1	$(2+K) - \frac{1+K}{a}$	0
s^0	$1+K$	



题 3-13 图

由题意知系统作等幅振荡,说明系统处于临界稳定状态。此时 Routh 表中 s^1 行为全零行,并且闭环系统有共轭虚根 $\pm j2$,是由 s^2 行元素构成的辅助方程 $as^2 + (1+K) = 0$ 的根。则有

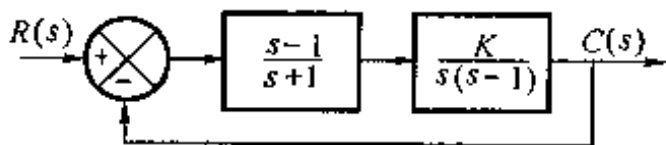
$$(2+K) - \frac{1+K}{a} = 0, \quad s_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{1+K}{a}} = \pm 2j$$

解得该系统出现频率为 2 rad/s 等幅振荡时参数 K 与 a 的取值为 $K=2, a=0.75$ 。

3-14 试分析题 3-14 图所示系统的稳定性,其中增益 $K > 0$ 。

解 由图求得该系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K(s-1)}{s(s+1)(s-1)}$,系统的特征方程为 $s^3 + (K-1)s - K = 0$,列 Routh 表

s^3	1	$K-1$
s^2	$0(\epsilon)$	$-K$
s^1	$(K+1) + \frac{K}{\epsilon}$	0
s^0	$-K$	



题 3-14 图

可见在 $K > 0$ 情况下,Routh 表第一列元素符号发生变化,所以系统不稳定。注意在分析系统稳定性时,若开环传递函数具有相同的零点与极点,此时相同的零点与极点不能相消,否则有可能得到错误结论。

3-15 设某温度计的动态特性可用一惯性环节 $1/(Ts+1)$ 来描述。用该温度计测量容器内的水温,发现一分钟后温度计的示值为实际水温的 98%。若给容器加热,使水温以 10°C/min 的速度线性上升,试计算该温度计的稳态指示误差。

解 由题意和惯性环节特性知 $t_s(2\%) = 4T = 1 \text{ min}$,求得 $T = 0.25 \text{ min}(15 \text{ s})$ 。用温度计测量以 10°C/min 的速度线性上升的水温时,即输入信号 $r(t) = 10t$ 时,其示值的拉氏变换为

$$C(s) = \frac{1}{0.25s+1} \cdot \frac{10}{s^2}$$

对上式取拉氏反变换,得温度计示值函数

$$c(t) = 10t - 10T + 10Te^{-\frac{t}{T}} = 10t - 2.5 + 2.5e^{-4t}$$

温度计的稳态指示误差 $e_{ss}(t)$ 为

$$e_{ss}(t) = r(t) - c_{ss}(t) = 2.5^\circ\text{C}$$

3-16 一单位反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K_0 K_f K_c K_i}{s(T_c s + 1)(T_f s + 1)}$$

在输入信号 $r(t) = (a + bt) \cdot 1(t)$ (a, b 为常数) 作用下, 欲使闭环系统的稳态误差 e_{ss} 小于 ϵ_s , 试求系统各参数应满足的条件。

解 (1) 首先确定系统稳定时各参数应满足的条件。

给定系统的特征方程为

$$D(s) = 1 + G(s) = T_c T_f s^3 + (T_c + T_f) s^2 + s + K_0 K_f K_c K_i = 0$$

列 Routh 表

s^3	$T_c T_f$	1
s^2	$T_c + T_f$	$K_0 K_f K_c K_i$
s^1	$\frac{(T_c + T_f) - T_c T_f K_0 K_f K_c K_i}{T_c + T_f}$	0
s^0	$K_0 K_f K_c K_i$	

由 Routh 表第一列元素均为正, 求得系统稳定时系统各参数应满足的条件

$$T_c > 0, \quad T_f > 0, \quad 0 < K_0 K_f K_c K_i < \frac{T_c + T_f}{T_c T_f}$$

(2) 应用终值定理计算稳态误差 e_{ss} 。

该单位负反馈系统的误差传递函数为

$$\Phi_e(s) = \frac{1}{1 + G(s)} = \frac{s(T_c s + 1)(T_f s + 1)}{s(T_c s + 1)(T_f s + 1) + K_0 K_f K_c K_i}$$

则 $e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_e(s) R(s)$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(T_c s + 1)(T_f s + 1)}{s(T_c s + 1)(T_f s + 1) + K_0 K_f K_c K_i} \cdot \left(\frac{a}{s} + \frac{b}{s^2} \right) = \frac{b}{K_0 K_f K_c K_i}$$

根据 $e_{ss} = \frac{b}{K_0 K_f K_c K_i} < \epsilon_s$ 的要求, 求得 $K_0 K_f K_c K_i > \frac{b}{\epsilon_s}$ 。

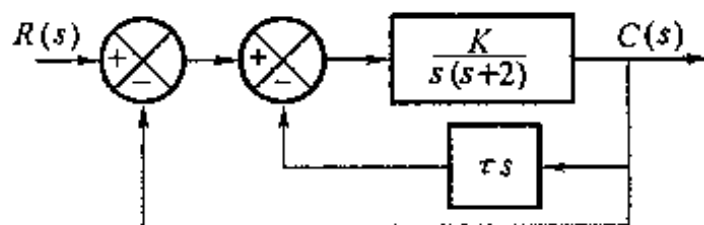
最后确定给定系统稳定且稳态误差 $e_{ss} < \epsilon_s$ 时系统各参数应满足的条件为

$$T_c > 0, \quad T_f > 0, \quad \frac{b}{\epsilon_s} < K_0 K_f K_c K_i < \frac{T_c + T_f}{T_c T_f}$$

3-17 设某控制系统的方框图如题 3-17 图所示, 欲保证阻尼比 $\zeta = 0.7$ 和单位斜坡函数输入时的稳态误差 $e_{ss} = 0.25$, 试确定系统参数 K, τ 之值。

解 (1) 由题 3-17 图求得系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s \left[\frac{1}{2 + K\tau} s + 1 \right]}$$



题 3-17 图

闭环传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2 + (2 + K\tau)s + K}$$

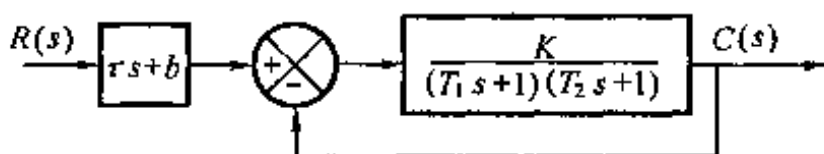
则有 $\omega_n = \sqrt{K}$, $2\zeta\omega_n = 2 + K\tau$, 按题意 $\zeta = 0.7$, 求得 $1.4\sqrt{K} = 2 + K\tau$;

(2) 在 $r(t) = t$ 作用下系统的稳态误差为

$$e_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s\Phi_e(s)R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{s\left(\frac{1}{2+K\tau}s+1\right)}{s\left(\frac{1}{2+K\tau}s+1\right) + \frac{K}{2+K\tau}} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{2+K\tau}{K}$$

按题意 $e_{\infty} = 0.25$, 则 $\frac{2+K\tau}{K} = 0.25$, 最后解得 $K = 31.36$, $\tau = 0.186$ 。

3-18 欲使题 3-18 图所示系统对输入信号 $r(t)$ 为 II 型, 试选择前馈参数 τ 和 b 。已知误差 $e(t) \triangleq r(t) - c(t)$ 。



题 3-18 图

解 系统对输入信号 $r(t)$ 为 II 型, 则当 $r(t) = 1(t)$ 及 $r(t) = t$ 时, 系统的稳态误差为零。

(1) 当 $r(t) = 1(t)$ 时, 根据 $E(s) = R(s) - C(s)$ 求取 $E(s)$, 再应用终值定理计算稳态误差 e_{∞} , 由图求得

$$C(s) = \left[\frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1) + K} (\tau s + b) \right] R(s)$$

则
$$E(s) = R(s) - C(s) = \left[1 - \frac{K(\tau s + b)}{(T_1s+1)(T_2s+1) + K} \right] R(s)$$

$$e_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[1 - \frac{K(\tau s + b)}{(T_1s+1)(T_2s+1) + K} \right] \frac{1}{s} = \frac{1+K-Kb}{1+K}$$

欲使 $e_{\infty} = 0$, 则需 $1+K-Kb=0$, 由此求得 $b = \frac{1+K}{K}$;

(2) 设 $r(t) = t$ 时

$$\begin{aligned} e_{\infty} &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left[1 - \frac{K(\tau s + b)}{(T_1s+1)(T_2s+1) + K} \right] \frac{1}{s^2} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{T_1T_2s^2 + (T_1+T_2-K\tau)s + (1+K-Kb)}{(T_1s+1)(T_2s+1) + K} \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

欲使稳态误差为零, 需有 $1+K-Kb=0$, $T_1+T_2-K\tau=0$, 求得 $\tau = \frac{T_1+T_2}{K}$ 。

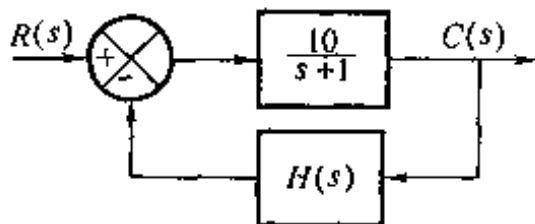
3-19 设控制系统的方框图如题 3-19 图所示。已知控制信号 $r(t) = 1(t)$, 试计算 $H(s) = 1$ 及 0.1 时系统的稳态误差。

解 (1) 当 $H(s) = 1$ (单位反馈) 时

$$E(s) = \frac{1}{1 + \frac{10}{s+1}} R(s) = \frac{s+1}{s+11} \cdot \frac{1}{s}$$

则此时系统的稳态误差为 $e_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \frac{1}{11}$;

(2) 当 $H(s) = 0.1$ (非单位反馈) 时



题 3-19 图

$$E(s) = \frac{1}{H(s)} R(s) - C(s) = \frac{1}{H(s)} R(s) - \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} R(s) = \frac{10(s+1)}{s(s+2)}$$

同样应用终值定理计算得 $e_{\infty} = 5$ 。

注意计算非单位反馈系统的稳态误差时,采用 $E(s) = \frac{1}{H(s)} R(s) - C(s)$ 计算。

3-20 设单位负反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{100}{s(0.1s+1)}$, 试计算该系统响应控制信号 $r(t) = \sin 5t$ 时的稳态误差。

解 由已知的开环传递函数求得单位负反馈系统的误差传递函数为

$$\Phi_e(s) = \frac{1}{1+G(s)} = \frac{s(0.1s+1)}{0.1s^2 + s + 100}$$

基于频率响应的定义,正弦信号 $A\sin(\omega t + \varphi)$ 作用下的稳态误差为

$$e_{\infty} = |\Phi_e(j\omega)| A \sin(\omega t + \varphi + \angle \Phi_e(j\omega))$$

误差频率响应 $\Phi_e(j\omega)$ 的幅频特性 $|\Phi_e(j\omega)|$ 和相频特性 $\angle \Phi_e(j\omega)$ 分别为

$$|\Phi_e(j\omega)| = \frac{\omega \sqrt{1 + (0.1\omega)^2}}{\sqrt{(100 - 0.1\omega^2)^2 + \omega^2}}$$

$$\angle \Phi_e(j\omega) = 90^\circ + \arctan 0.1\omega - \arctan \frac{\omega}{100 - 0.1\omega^2}$$

已知控制信号 $r(t) = \sin 5t$, 则 $A = 1, \varphi = 0^\circ, \omega = 5$ 。求得系统响应 $r(t) = \sin 5t$ 的稳态误差为

$$e_{\infty}(t) = |\Phi_e(j5)| \sin(5t + \angle \Phi_e(j5))$$

$$|\Phi_e(j5)| = 0.057, \quad \angle \Phi_e(j5) = 113.63^\circ$$

最终得

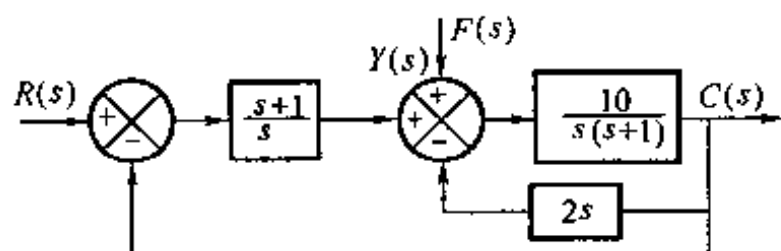
$$e_{\infty}(t) = 0.057 \sin(5t + 113.63^\circ)$$

注意,计算正弦类信号作用下的系统稳态误差时,由于这时的 $sE(s)$ 在虚轴上不解析,从而不符合 $sE(s)$ 的极点必须全部分布在 s 平面左半部的条件,所以不能应用终值定理计算。

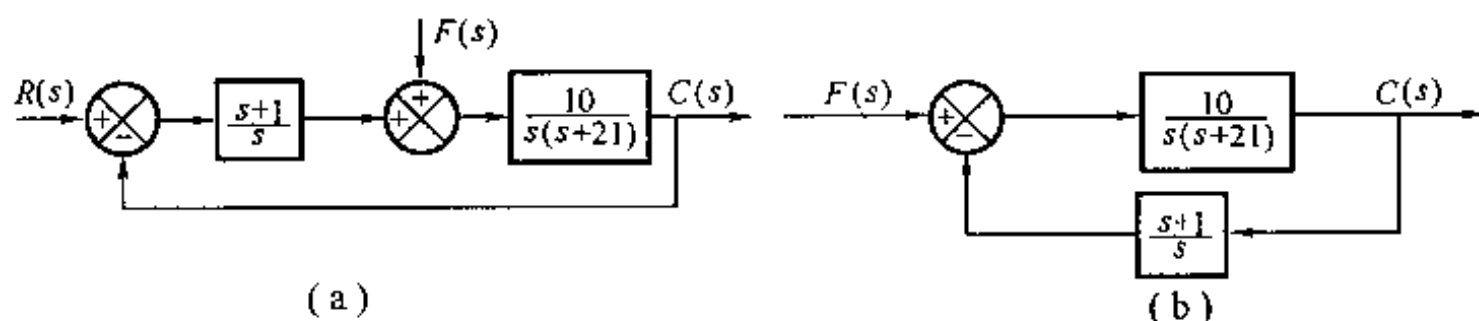
3-21 试鉴别题 3-21 图所示系统对控制信号 $r(t)$ 和对扰动信号 $f(t)$ 分别是几型系统。

解 将题 3-21 图等效简化为题 3-21 解图(a)所示框图。

(1) 对控制信号 $r(t)$ 来说,前向通道的传递函数为 $G(s) = \frac{10(s+1)}{s^2(s+21)}$, 含有两个串联积



题 3-21 图

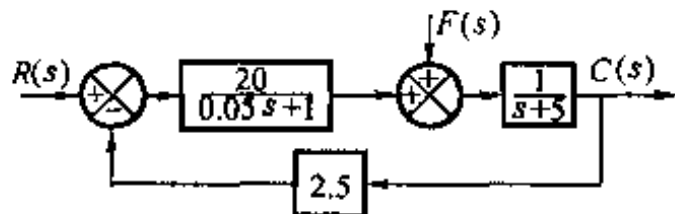


题 3-21 解图

分环节,则题3-21图所示系统对控制信号 $r(t)$ 为Ⅱ型系统;

(2)对扰动信号 $f(t)$ 来说,题3-21解图(a)可简化成图(b)。由于反馈通道的传递函数 $H(s) = \frac{s+1}{s}$,含有一个串联积分环节,则题3-21图所示系统对扰动信号 $f(t)$ 为Ⅰ型系统。

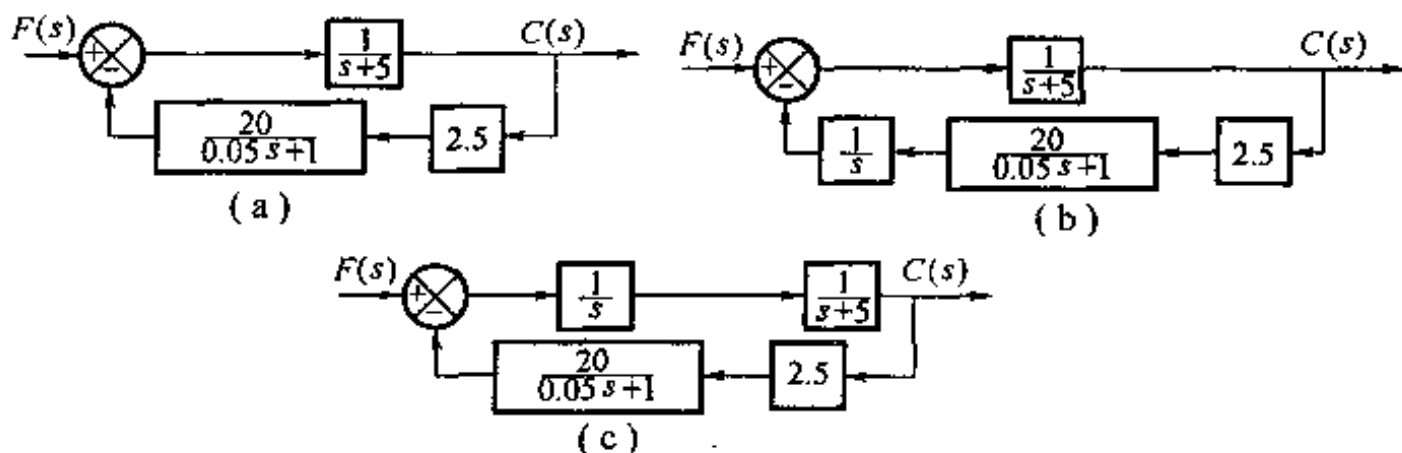
3-22 在题3-22图所示控制系统中,若设 $f(t) = 2 \times 1(t)$,试问在扰动作用点之前的前向通道中引入积分环节 $1/s$,对稳态误差 $e_{\text{ss}}(t)$ 有何影响?在扰动信号作用点之后引入积分环节 $1/s$,结果又将如何?



题3-22图

解 将题3-22图等效简化成解图(a),由图看出在反馈通道中不存在积分环节,所以题3-22图所示系统对于扰动作用 $f(t)$ 是零型系统,其稳态误差为

$$e_{\text{ss}} = -\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{\frac{1}{s+5}}{1 + \frac{1}{s+5} \cdot \frac{2.5 \times 20}{0.05s+1}} \times \frac{2}{s} = -\frac{2}{55}$$

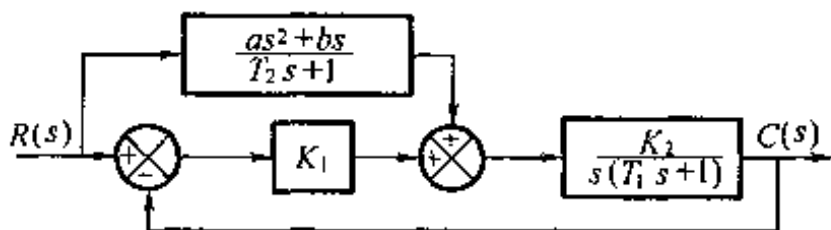


题3-22解图

(1)若在扰动作用点之前的前向通道中加入积分环节 $1/s$,则方框图如解图(b)所示,所以该系统对扰动作用为Ⅰ型系统,其稳态误差为 $e_{\text{ss}} = 0$;

(2)若在扰动作用点之后的前向通道中加入积分环节 $1/s$,则方框图如解图(c)所示,该系统对扰动作用仍为零型系统,稳态误差仍为常数。

3-23 设某复合控制系统方框图如题3-23图所示。在控制信号 $r(t) = t^2/2$ 作用下,要求系统的稳态误差为零,试确定顺馈参数 a, b 。已知误差 $e(t) \triangleq r(t) - c(t)$ 。



题3-23图

解 由误差定义,得 $E(s) = R(s) - C(s)$ 。并由题3-23图有

$$C(s) = \frac{K_2 \left(K_1 + \frac{as^2 + bs}{T_2 s + 1} \right)}{T_1 s^2 + s + K_1 K_2} R(s)$$

控制信号 $r(t) = t^2/2$, $R(s) = 1/s^3$, 有

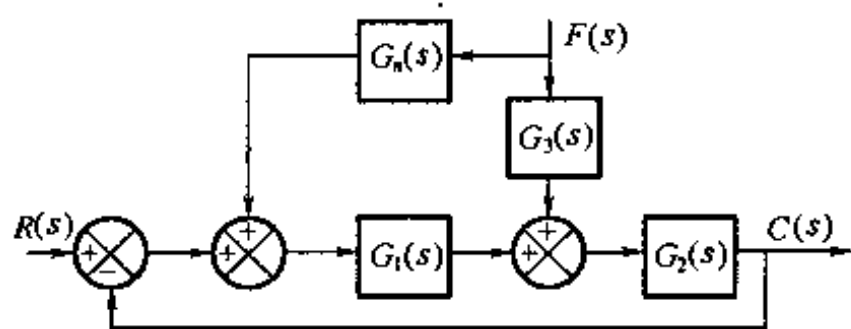
$$E(s) = \frac{T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2 - K_2 a)s^2 + (1 - K_2 b)s}{s^3 (T_1 s^2 + s + K_1 K_2)(1 + T_2 s)}$$

应用终值定理计算该系统对控制信号 $r(t) = t^2/2$ 的稳态误差为零, 即

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2 - K_2 a)s^2 + (1 - K_2 b)s}{s^3 (T_1 s^2 + s + K_1 K_2)(1 + T_2 s)} = 0$$

只有当 $T_1 + T_2 - K_2 a = 0$, $1 - K_2 b = 0$ 时成立, 求得此时顺馈参数 $a = \frac{T_1 + T_2}{K_2}$, $b = \frac{1}{K_2}$ 。

3-24 设某复合控制系统的方框图如题 3-24 图所示。其中 $G_1(s) = K_1/(T_1 s + 1)$, $G_2(s) = K_2/s(T_2 s + 1)$, $G_3(s) = K_3/K_2$ 。要求系统在扰动信号 $f(t) = 1(t)$ 作用下的稳态误差为零, 试确定顺馈通道的传递函数 $G_n(s)$ 。



题 3-24 图

解 令 $R(s) = 0$, 题 3-24 图等效简化为题 3-24 解图所示结构。求得

$$C_f(s) = \frac{G_2(s) [G_n(s) G_1(s) + G_3(s)]}{1 + G_1(s) G_2(s)} \cdot F(s)$$

应用终值定理求得稳态时的扰动误差 e_{ss} 为

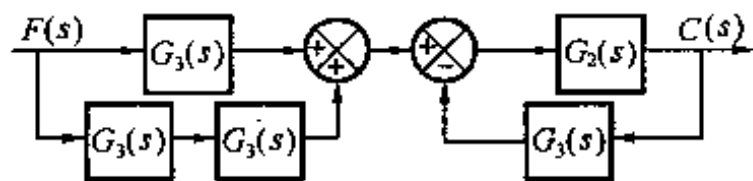
$$e_{ss} = -\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{G_2(s) [G_n(s) G_1(s) + G_3(s)]}{1 + G_1(s) G_2(s)} \cdot \frac{1}{s}$$

欲使顺馈能完全补偿由扰动作用而在系统输出端产生的稳态误差, 即要求 $e_{ss} = 0$, 则需有

$$G_n(s) G_1(s) + G_3(s) = 0$$

即

$$G_n(s) = -\frac{G_3(s)}{G_1(s)}$$



题 3-24 解图

求得

$$G_n(s) = -\frac{K_3}{K_1 K_2} (T_1 s + 1)$$

3-25 设闭环传递函数为 $\omega_n^2/(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)$ 的二阶系统在单位阶跃函数作用下的输出响应为 $c(t) = 1 - 1.25e^{-1.2t} \sin(1.6t + 53.1^\circ)$, 试计算系统参数 ζ 及 ω_n , 并通过 ζ 及 ω_n 计算超调量、峰值时间及调整时间。

解 由二阶系统单位阶跃响应表达式可得

$$\zeta\omega_n = 1.2, \quad \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 1.25, \quad \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} = 1.6$$

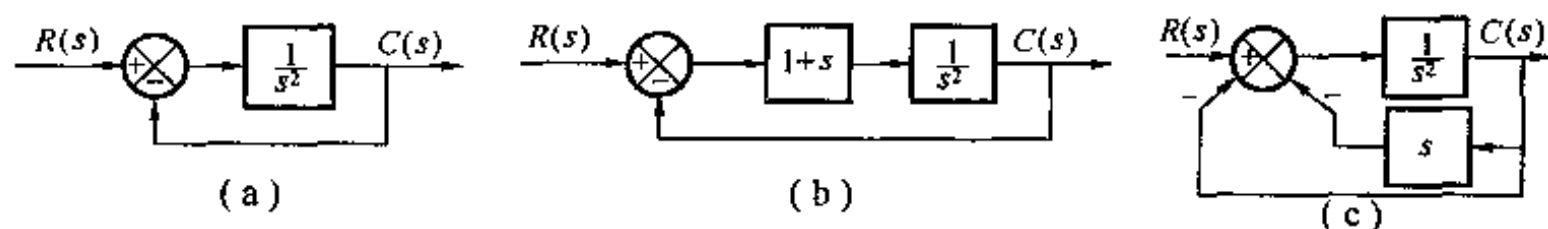
则 $\zeta = 0.6$, $\omega_n = 2$ 。根据超调量、峰值时间及调整时间的定义式得

$$\sigma_p = e^{-\frac{\zeta\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% = e^{-(\pi \times 0.6 \times 1.25)} \times 100\% \approx 9.5\%$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{1.6} \approx 1.96 \text{ s}$$

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \approx 3.33 \text{ s } (\Delta = 2\%), \quad t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n} \approx 2.5 \text{ s } (\Delta = 5\%)$$

3-26 试分别计算题 3-26 图所示系统的参数 ζ, ω_n , 并分析其动态性能。



题 3-26 图

解 (a) 系统的闭环传递函数为 $\Phi(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$, 则 $\zeta = 0, \omega_n = 1$, 系统处于无阻尼状态, 单位阶跃响应为等幅振荡;

(b) 系统的闭环传递函数为 $\Phi(s) = \frac{s+1}{s^2 + s + 1}$, 具有闭环负实零点, 则 $\zeta = 0.5, \omega_n = 1$, $z = 1, \sigma_p = 29.9\%, t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} = 8 \text{ s } (\Delta = 2\%)$;

(c) 系统的闭环传递函数为 $\Phi(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$, 则 $\zeta = 0.5, \omega_n = 1$, 系统处于欠阻尼状态, 单位阶跃响应为衰减的正弦振荡。此时, $\sigma_p = 16.4\%, t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} = 8 \text{ s } (\Delta = 2\%)$ 。比较(b)和(c)可知系统有闭环负实零点时, 系统的超调量加大。

3-27 某单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K}{s(\tau s + 1)}$, 试计算当超调量在 30% ~ 5% 范围内变化时参数 K 与 τ 乘积的取值范围; 分析当系统阻尼比 $\zeta = 0.707$ 时参数 K 与 τ 的关系。

解 系统的闭环传递函数为 $\Phi(s) = \frac{\frac{K}{\tau}}{s^2 + \frac{s}{\tau} + \frac{K}{\tau}}$, 则 $2\zeta\omega_n = \frac{1}{\tau}, \omega_n^2 = \frac{K}{\tau}$, 解得 $\zeta^2 = \frac{1}{4K\tau}$, 由

$\sigma_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\%$, 当 $\sigma_p = 30\%$ 时, 有 $\zeta_1^2 = 0.13$; 当 $\sigma_p = 5\%$ 时, 有 $\zeta_2^2 = 0.48$ 。计算得 $\sigma_p = 30\%$ 时, $K\tau = 1.96$; $\sigma_p = 5\%$ 时, $K\tau = 0.53$; 当 $\zeta = 0.707$ 时, $K\tau = 0.5$ 。

3-28 某控制系统的方框图如题 3-28 图所示。试确定系统单位阶跃响应的超调量 $\sigma\% \leq 30\%$, 调整时间 $t_s(2\%) = 18 \text{ s}$ 时参数 K 及 τ 之值。

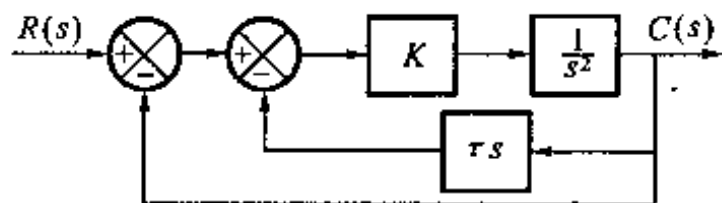
解 由题 3-28 图求得系统的闭环传递函数 $\Phi(s) = \frac{K}{s^2 + K\tau s + K}$, 可得 $2\zeta\omega_n = K\tau, \omega_n^2 = K$ 。又由 $\sigma_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% = 30\%$, $t_s(2\%) = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 18 \text{ s}$, 分别求得 $\zeta = 0.36, \omega_n = 0.62$ 。则 $K = 0.38, \tau = 1.16$ 。

3-29 某系统方框图如题 3-29 图所示。试求当 $a = 0$ 时系统参数 ζ 及 ω_n 。如果要求 ζ

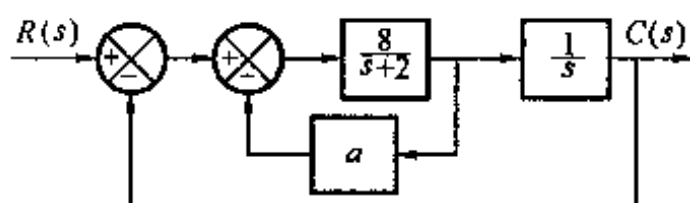
$= 0.7$, 试计算相应的 a 值。

解 (1) 当 $a = 0$ 时, 由题 3-29 图可得系统的闭环传递函数 $\Phi(s) = \frac{8}{s^2 + 2s + 8}$, 与标准形式比较可得 $2\zeta\omega_n = 2$, $\omega_n^2 = 8$ 。解得 $\omega_n = 2\sqrt{2} = 2.828$, $\zeta = \frac{1}{\omega_n} = 0.354$ 。

(2) 当 $\zeta = 0.7$ 时, 系统的闭环传递函数 $\Phi(s) = \frac{8}{s^2 + (2 + 8a)s + 8}$, 可得 $2\zeta\omega_n = 2 + 8a$, $\omega_n^2 = 8$ 。将 $\zeta = 0.7$ 代入, 解得 $a = 0.245$ 。



题 3-28 图

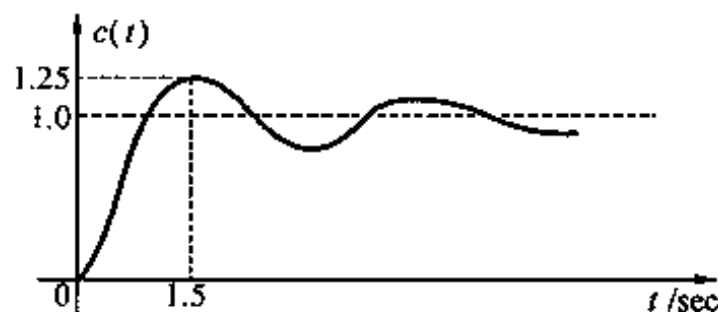


题 3-29 图

3-30 一个开环传递函数为 $G(s) = \frac{K}{s(\tau s + 1)}$ 的单位负反馈系统, 其单位阶跃响应曲线如题 3-30 图所示。试确定参数 K 及 τ 。

解 系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{\frac{K}{s(\tau s + 1)}}{1 + \frac{K}{s(\tau s + 1)}} = \frac{\frac{K}{\tau}}{s^2 + \frac{1}{\tau}s + \frac{K}{\tau}}$$



题 3-30 图

则

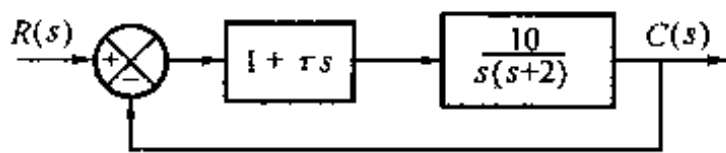
$$2\zeta\omega_n = \frac{1}{\tau}, \quad \omega_n^2 = \frac{K}{\tau}$$

由题 3-30 图知

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = 1.5, \quad \sigma_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1 - \zeta^2}}} \times 100\% = \frac{1.25 - 1}{1} \times 100\% = 25\%$$

经计算得 $\zeta = 0.404$, $\omega_n = 2.292$, $K = 2.84$, $\tau = 0.54$ 。

3-31 某控制系统方框图如题 3-31 图所示。试确定阻尼比 $\zeta = 0.5$ 时的参数 τ 值, 并计算这时该系统单位阶跃响应的超调量及调整时间。在此基础上, 试比较该系统加与不加 $(1 + \tau s)$ 环节时的性能。



题 3-31 图

解 系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{10\left(s + \frac{1}{\tau}\right)}{\frac{1}{\tau}[s^2 + (2 + 10\tau)s + 10]}$$

与具有闭环零点时闭环传递函数的标准形式 $\Phi(s) = \frac{\omega_n^2(s + z)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ 相比较, 有 $z = \frac{1}{\tau}$,

$$2\zeta\omega_n = 2 + 10\tau, \omega_n^2 = 10.$$

(1) 当 $\zeta = 0.5$ 时, 求得 $\tau = 0.116, z = 8.621, \omega_n = 3.162$ 。并且

$$\gamma = \frac{\zeta\omega_n}{z} = 0.183, \quad \varphi = \arctan \frac{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}{z - \zeta\omega_n} = 0.37$$

$$l = \sqrt{(z - \zeta\omega_n)^2 + (\omega_n \sqrt{1-\zeta^2})^2} = 7.55$$

则该系统单位阶跃响应的超调量及调整时间为

$$\sigma_p = \frac{1}{\zeta} \sqrt{\zeta^2 - 2\gamma\zeta^2 + \gamma^2} \cdot e^{-\frac{\zeta(\pi-\varphi)}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100 = 17.5\%$$

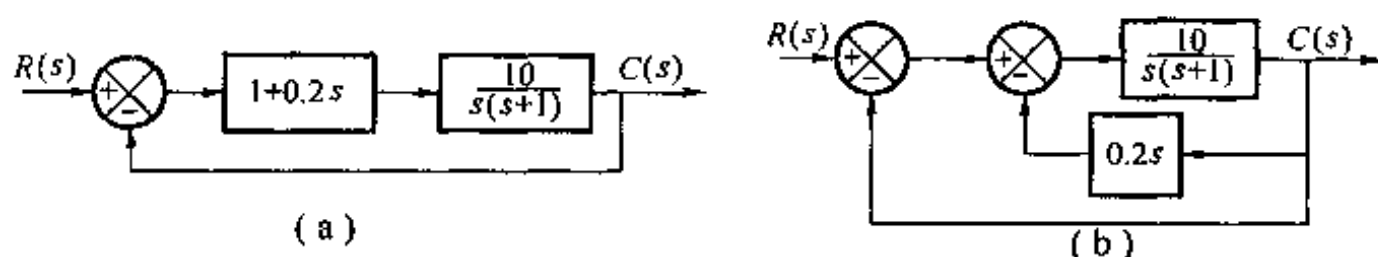
$$t_s = \frac{4 + l_n \frac{l}{z}}{\zeta\omega_n} = 2.45 \text{ s} \quad (\Delta = 2\%)$$

(2) 当 $\tau = 0$ 时, 系统的闭环传递函数为 $\Phi(s) = \frac{10}{s^2 + 2s + 10}$, 有 $2\zeta\omega_n = 2, \omega_n^2 = 10$, 解得

$$\omega_n = 3.162, \quad \zeta = 0.316, \quad \sigma_p = 35.2\%, \quad t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} = 4 \text{ s} \quad (\Delta = 2\%)$$

可见, 系统加 $(1 + \tau s)$ 环节比不加 $(1 + \tau s)$ 环节时的响应速度快, 但削弱了系统的阻尼程度。

3-32 设有两个控制系统, 其方框图如题 3-32 图(a), (b)所示。试计算两个系统各自的超调量、峰值时间及调整时间, 并进行比较。



题 3-32 图

解 (1) 由题 3-32 图(a)得系统的闭环传递函数为 $\Phi(s) = \frac{10(s+5)}{5(s^2 + 3s + 10)}$, 与具有闭环零点的闭环传递函数 $\Phi(s) = \frac{\omega_n^2(s+z)}{z(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$ 相比较, 有 $z = 5, \sigma_p = 23.7\%, t_p = 0.887 \text{ s}, t_s = 2.594 \text{ s}$ 。

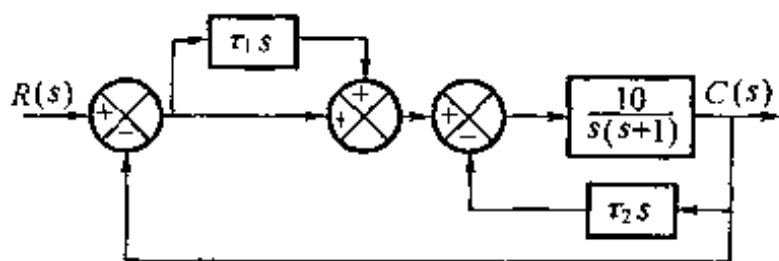
(2) 步骤同(1), 由题 3-32 图(b)得系统的闭环传递函数为 $\Phi(s) = \frac{10}{s^2 + 3s + 10}$, $2\zeta\omega_n = 3, \omega_n^2 = 10$, 则 $\omega_n = 3.162, \zeta = 0.474$ 。计算得 $\sigma_p = 18.4\%, t_p = 1.13 \text{ s}, t_s \approx 2.67 \text{ s}$ 。

可见, 闭环负实零点的主要作用在于加速二阶系统的响应过程, 但同时削弱了系统的阻尼程度, 使超调量增加。

3-33 某系统方框图如题 3-33 图所示。试求:

(1) $\tau_1 = 0, \tau_2 = 0.1$ 时系统的超调量与调整时间;

(2) $\tau_1 = 0.1, \tau_2 = 0$ 时系统的超调量与调



题 3-33 图

整时间;

(3)比较上述两种校正情况下的动态性能与稳态性能。

解 (1)当 $\tau_1 = 0, \tau_2 = 0.1$ 时,系统的闭环传递函数为 $\Phi(s) = \frac{10}{s^2 + 2s + 10}$, 得 $\omega_n = 3.162$, $\zeta = 0.316$ 。则 $\sigma_p = 35.2\%$, $t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} = 4 \text{ s}$ ($\Delta = 2\%$)。

(2)当 $\tau_1 = 0.1, \tau_2 = 0$ 时,系统的闭环传递函数为 $\Phi(s) = \frac{10(s+10)}{10(s^2 + 2s + 10)}$, 则 $z = 10, 2\zeta\omega_n = 2, \omega_n^2 = 10$, 得 $\omega_n = 3.162, \zeta = 0.316$ 。计算得 $\sigma_p = 37.1\%$, $t_s = 3.95 \text{ s}$ 。

(3)通过以上结果可知,有闭环负实零点时系统的响应过程加快,但阻尼程度减弱。

① $\tau_1 = 0, \tau_2 = 0.1$ 时,系统的开环传递函数 $G(s) = \frac{10}{s(s+2)}$, 为 I 型的单位负反馈系统, 当 $r(t) = t$ 时

$$e_{\infty} = \frac{1}{k_v} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{10}{s+2}} = 0.2$$

② $\tau_1 = 0.1, \tau_2 = 0$ 时,系统的开环传递函数 $G(s) = \frac{s+10}{s(s+1)}$, 为 I 型的单位负反馈系统, 当 $r(t) = t$ 时

$$e_{\infty} = \frac{1}{k_v} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+10}{s+1}} = 0.1$$

3-34 已知系统的特征方程为

$$s^5 + s^4 + 2s^3 + 2s^2 + 3s + 5 = 0$$

试应用 Routh 稳定判据判别系统的稳定性。

解 列 Routh 表

s^5	1	2	3
s^4	1	2	5
s^3	$0(\approx \epsilon)$	-2	0
s^2	$\frac{2\epsilon + 2}{\epsilon}$	5	
s^1	-2	0	
s^0	5		

可见, Routh 表第一列元素的符号改变了两次, 故系统不稳定。

3-35 已知系统的特征方程为

$$s^6 + 4s^5 - 4s^4 + 4s^3 - 7s^2 - 8s + 10 = 0$$

试确定在 s 平面右半部的特征根数目, 并计算其共轭虚根之值。

解 列 Routh 表

s^6	1	-4	-7	10
s^5	4	4	-8	0
s^4	(-5)	(-5)	(10)	(该行各项除以 5)
	-1	-1	2	

$$\begin{array}{ccc}
 s^3 & 0 & 0 \\
 & -4 & -2 \\
 s^2 & -\frac{1}{2} & 2 \\
 s^1 & -18 & 0 \\
 s^0 & 2 &
 \end{array}$$

第四行为全零行, 辅助方程

$$F(s) = -s^4 - s^2 + 2 = 0, \quad \frac{dF(s)}{ds} = -4s^3 - 2s = 0$$

其中各项系数代替第四行的元素。Routh 表第一列元素符号改变 2 次。所以此系统在 s 右半平面有 2 个特征根。由辅助方程得, $s_{1,2} = \pm j\sqrt{2}$, $s_{3,4} = \pm 1$ 。所以系统的共轭虚根为 $\pm j\sqrt{2}$ 。

3-36 某控制系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s(Ts+1)(2s+1)}$$

试确定能使闭环系统稳定的反馈参数 K, T 的取值范围。

解 系统特征方程为 $1 + G(s) = 0$, 即

$$2Ts^3 + (2+T)s^2 + (1+K)s + K = 0$$

列 Routh 表

$$\begin{array}{ccc}
 s^3 & 2T & 1+K \\
 s^2 & 2+T & K \\
 s^1 & 1-K\frac{T-2}{T+2} & 0 \\
 s^0 & K &
 \end{array}$$

若闭环系统稳定, 则有

$$T > 0, \quad 2+T > 0, \quad 1-K\frac{T-2}{T+2} > 0, \quad K > 0$$

则 K 和 T 的取值范围为

$$T > 0, \quad 0 < K < \frac{T+2}{T-2}$$

3-37 已知系统方框图如题 3-37 图所示。试应用 Routh 稳定判据确定能使系统稳定的反馈参数 τ 的取值范围。

解 系统的闭环传递函数为

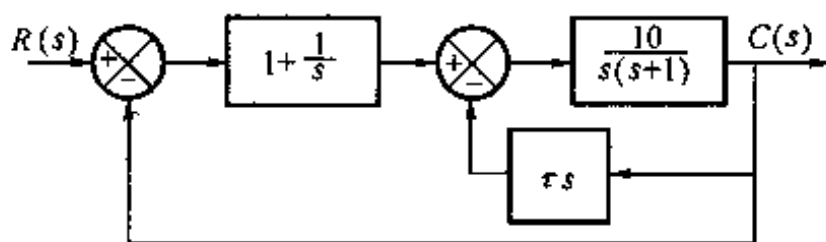
$$\Phi(s) = \frac{10s+10}{s^3 + (1+10\tau)s^2 + 10s + 10}$$

则特征方程为

$$s^3 + (1+10\tau)s^2 + 10s + 10 = 0$$

列 Routh 表

$$\begin{array}{ccc}
 s^3 & 1 & 10 \\
 s^2 & 1+10\tau & 10 \\
 s^1 & \frac{100\tau}{1+10\tau} & 0
 \end{array}$$



题 3-37 图

$$s^0 \quad 10$$

若使系统稳定,则应有 $1 + 10\tau > 0$, $\frac{100\tau}{1 + 10\tau} > 0$ 。最后解得当 $\tau > 0$ 时,系统稳定。

3-38 在如题 3-38 图所示系统中, τ 取何值方能系统稳定?

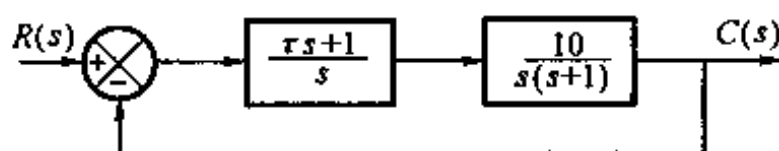
解 系统的闭环传递函数为 $\Phi(s) = \frac{10\tau s + 10}{s^3 + s^2 + 10\tau s + 10}$

特征方程为

$$s^3 + s^2 + 10\tau s + 10 = 0$$

列 Routh 表

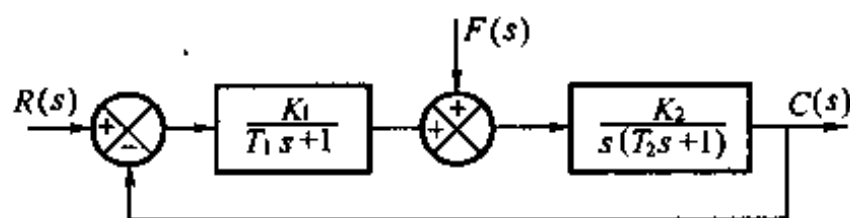
s^3	1	10τ
s^2	1	10
s^1	$10\tau - 10$	0
s^0	10	



题 3-38 图

若使系统稳定,应有 $10\tau - 10 > 0$, 即有 $\tau > 1$ 。所以当 $\tau > 1$ 时,系统稳定。

3-39 某控制系统方框图如题 3-39 图所示。已知 $r(t) = t$, $f(t) = -1(t)$, 试计算该系统的稳态误差。



题 3-39 图

解 (1) 令 $F(s) = 0$, 求系统在 $r(t) = t$ 作用下的稳态误差。

系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K_1 K_2}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$, 系统为 I 型单位负反馈系统。

在 $r(t) = t$ 下的稳态误差

$$e_{\infty} = \frac{1}{k_v} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sG(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_1 K_2}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}} = \frac{1}{K_1 K_2}$$

(2) 令 $R(s) = 0$, 求系统在 $f(t) = -1(t)$ 作用下的稳态误差。

$$\begin{aligned} \Phi_d(s) &= \frac{E_f(s)}{F(s)} = \frac{-\frac{K_2}{s(T_2 s + 1)}}{1 + \frac{K_1 K_2}{T_1 s + 1} \frac{K_2}{s(T_2 s + 1)}} = \frac{-K_2 - K_2 T_1 s}{K_1 K_2 + s + (T_1 + T_2)s^2 + T_1 T_2 s^3} \\ &= -\frac{1}{K_1} + \frac{-K_1 K_2 T_1 + 1}{K_1^2 K_2} s + \dots \end{aligned}$$

误差系数 $c_0 = -\frac{1}{K_1}$, 则 $e_{\infty}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i f^{(i)}(t) = c_0 f(t) = \frac{1}{K_1}$

(3) 所以系统在 $r(t) = t$, $f(t) = -1(t)$ 作用下的稳态误差

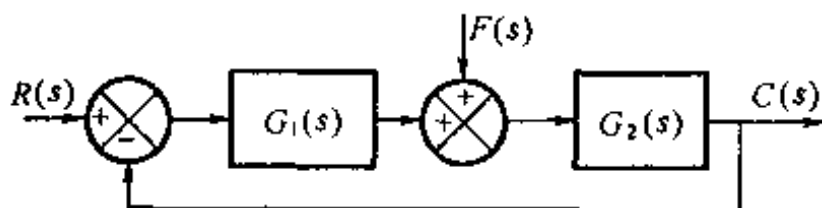
$$e_{\infty}(t) = e_{\infty}(t) + e_{\infty}(t) = \frac{1}{K_1 K_2} + \frac{1}{K_1}$$

3-40 某控制系统的方框图如题 3-40 图所示。当扰动信号分别为 $f(t) = 1(t)$, $f(t) =$

t 时, 试计算下列两种情况下系统响应扰动信号 $f(t)$ 的稳态误差:

$$(1) G_1(s) = K_1, G_2(s) = \frac{K_2}{s(T_2 s + 1)};$$

$$(2) G_1(s) = \frac{K_1(T_1 s + 1)}{s}, G_2(s) = \frac{K_2}{s(T_2 s + 1)} \quad T_1 > T_2.$$



题 3-40 图

解 (1) 系统的扰动误差传递函数

$$\Phi_d(s) = -\frac{C(s)}{F(s)} = -\frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} = -\frac{K_2}{K_1 K_2 + s + T_2 s^2} = -\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_1^2 K_2} s + \dots$$

则误差系数 $c_0 = -\frac{1}{K_1}$, $c_1 = \frac{1}{K_1^2 K_2}$ 。利用误差系数法得

$$e_{\text{稳}}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \phi_d^{(i)}(0) f^{(i)}(t) \approx \sum_{i=0}^{\infty} c_i f^{(i)}(t)$$

当 $f(t) = 1(t)$ 时
$$e_{\text{稳}}(\infty) = e_{\text{稳}}(t) = c_0 f(t) = -\frac{1}{K_1}$$

当 $f(t) = t$ 时

$$e_{\text{稳}}(t) = c_0 f(t) + c_1 \dot{f}(t) = -\frac{1}{K_1} \cdot t + \frac{1}{K_1^2 K_2}, \quad e_{\text{稳}}(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e_{\text{稳}}(t) = \infty$$

(2) 系统的扰动误差传递函数

$$\Phi_d(s) = -\frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} = \frac{-K_2 s}{K_1 K_2 + K_1 K_2 T_1 s + s^2 + T_2 s^3} = -\frac{1}{K_1} s + \dots$$

则误差系数 $c_0 = 0$, $c_1 = -\frac{1}{K_1}$, 则应用误差系数法求得

$f(t) = 1(t)$ 时
$$e_{\text{稳}}(\infty) = e_{\text{稳}}(t) = c_0 f(t) = 0$$

$f(t) = t$ 时
$$e_{\text{稳}}(\infty) = e_{\text{稳}}(t) = c_0 f(t) + c_1 \dot{f}(t) = -\frac{1}{K_1}$$

3-41 设有控制系统, 其方框图如题 3-41 图所示。为提高系统跟踪控制信号的准确度; 要求系统由原来的 I 型提高至 III 型, 为此在系统中增置了顺馈通道, 设其传递函数为

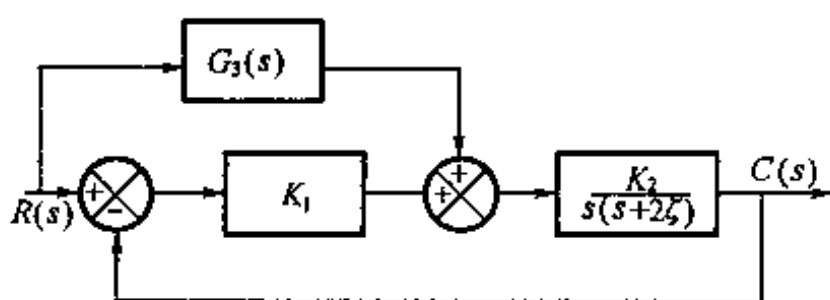
$$G_3(s) = \frac{\lambda_2 s^2 + \lambda_1 s}{T s + 1}$$

若已知系统参数为 $K_1 = 2$, $K_2 = 50$, $\zeta = 0.5$, $T = 0.2$, 试确定顺馈参数 λ_1 和 λ_2 。

解 由题 3-41 图有

$$C(s) = K_1 \cdot \frac{K_2}{s(s + 2\zeta)} [R(s) - C(s)] + G_3(s) \cdot \frac{K_2}{s(s + 2\zeta)} \cdot R(s)$$

则系统的闭环传递函数为



题 3-41 图

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_2 \lambda_2 s^2 + (K_2 \lambda_1 + K_1 K_2 T) s + K_1 K_2}{(Ts + 1)(s^2 + 2\zeta s + K_1 K_2)} = \frac{50\lambda_2 s^2 + (50\lambda_1 + 20)s + 100}{0.2s^3 + 1.2s^2 + 21s + 100}$$

(1) 系统特征方程为 $0.2s^3 + 1.2s^2 + 21s + 100 = 0$

列 Routh 表

s^3	0.2	21
s^2	1.2	100
s^1	4.3	0
s^0	100	

可见系统稳定。

(2) 等效单位反馈系统开环传递函数为

$$G(s) = \frac{\Phi(s)}{1 - \Phi(s)} = \frac{50\lambda_2 s^2 + (50\lambda_1 + 20)s + 100}{0.2s^3 + (1.2 - 50\lambda_2)s^2 + (1 - 50\lambda_1)s}$$

若 $1.2 - 50\lambda_2 = 0, 1 - 50\lambda_1 = 0$, 即当 $\lambda_1 = 0.02, \lambda_2 = 0.024$ 时, 系统成为 III 型系统。

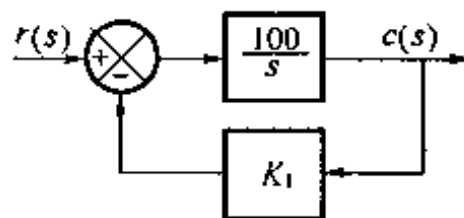
同步训练题

1. 一阶系统结构图如题 1 图所示。要求调节时间 $t_s \leq 0.1$ s, 试确定系统反馈系数 K_1 的值。

2. 已知系统的单位脉冲响应为 $h(t) = 3e^{-0.2t} + 2e^{-0.5t}$ 。

(1) 求系统的传递函数;

(2) 确定系统的单位阶跃响应达到稳态值的 95% 所需的时间。



题 1 图

3. 设某单位反馈系统的开环传递函数为

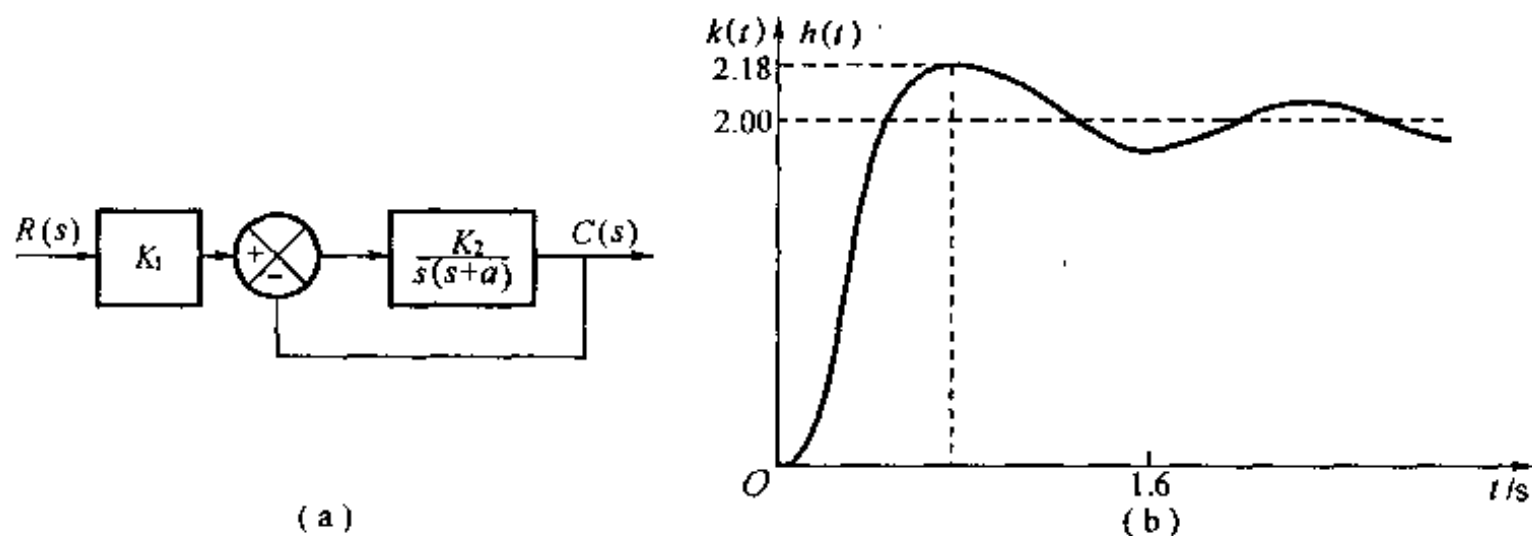
$$G(s) = \frac{K}{s(1 + s/3)(1 + s/6)}$$

若要求闭环特征方程的根的实部均小于 -1, 问 K 值应取在什么范围? 如果要求实部均小于 -2, 情况又如何?

4. 设题 4 图(a)所示系统的单位阶跃响应曲线如题 4 图(b)所示, 试确定参数 K_1, K_2 和 a 的数值。

5. 设单位反馈控制系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{as + 1}{s(s + b)}$, 式中 $a = 0.4, b = 0.5$. 要求:

(1) 指出系统的开环零点及开环极点;



题4图

- (2) 求出系统的闭环零点及闭环极点;
- (3) 确定系统阻尼比 ξ 及自振荡频率 ω_n ;
- (4) 求出系统单位阶跃响应的 $\sigma\%$, t_r , t_p 和 t_s ;
- (5) 求 $a=0$ 时系统的动态性能指标。

6. 某单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}$, 其动态性能指标满足 $t_s = 6\text{ s}$, $\sigma\% = 16\%$ 。试确定系统参数 K, T 的值。

7. 已知单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{10(2s+1)}{s^2(s^2+6s+100)}$$

试求输入分别为 $r(t) = 2t$ 和 $r(t) = 2 + 2t + t^2$ 时, 系统的稳态误差。

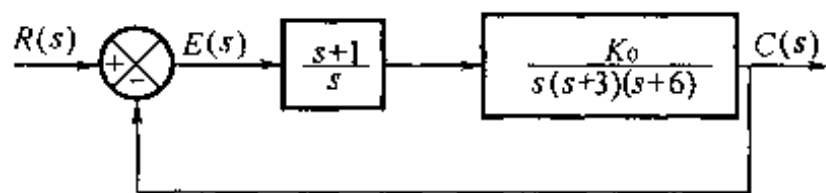
8. 已知系统特征方程如下, 试求系统在 s 右半平面的根数和虚根值。

(1) $s^5 + 3s^4 + 12s^3 + 24s^2 + 32s + 48 = 0$

(2) $s^6 + 4s^5 - 4s^4 + 4s^3 - 7s^2 - 8s + 10 = 0$

(3) $s^5 + 3s^4 + 12s^3 + 20s^2 + 35s + 25 = 0$

9. 已知系统结构图如题9图所示, 要求系统在 $r(t) = t^2$ 作用时, 稳态误差 $e_{ss} < 0.5$, 试确定满足要求的开环增益 K 的范围。



题9图

同步训练题答案

1. 解 $K_1 \geq 0.3$ 。

2. 解 (1) $\Phi(s) = \frac{5s+1.9}{(s+0.2)(s+0.5)}$;

(2) $t_s = 14.1\text{ s}$ 。

3.解 实部均小于 -1 时 K 值应取范围为 $\frac{5}{9} < K < \frac{14}{9}$, 不论 K 取何值, 原闭环特征方程的根的实部不可能均小于 -2 。

4.解 $K_1 = 2; K_2 = 24.46; a = 6.01$ 。

5.解 (1) 开环零点 $z = -1/a = -2.5$, 开环极点 $p_1 = 0, p_2 = -b = -0.5$;

(2) 闭环传递函数 $\Phi(s) = \frac{0.4s+1}{s^2+0.9s+1}$; 闭环零点 $z = -2.5$, 闭环极点 $s_{1,2} = -0.45 \pm j0.89$;

(3) $\zeta = 0.45, \omega_n = 1$;

(4) $\sigma\% = \frac{1}{\zeta} \sqrt{\zeta^2 - 2\gamma\zeta^2 + \gamma^2} e^{-\zeta(\pi-\varphi)/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\%$, $t_r = 1.82 \text{ s}$, $t_p = 3.05 \text{ s}$, $t_s = 6.4 \text{ s}$ ($\Delta = 0.05$), $t_s = 8.64 \text{ s}$ ($\Delta = 0.02$);

(5) $\sigma\% = 44.4\%$, $t_r = 1.88 \text{ s}$, $t_p = 3.24 \text{ s}$, $t_s = 14 \text{ s}$ 。

6.解 $T = 1, K = 1$ 。

7.解 (1) 系统稳定。

(2) $r(t) = 2t$ 时, $e_{ss} = 0$; $r(t) = 2 + 2t + t^2$ 时, $e_{ss} = 20$ 。

8.解 (1) 一对虚根 $s_{1,2} = \pm j2$; 系统在右半 s 平面无极点;

(2) $s_{1,2} = \pm 1, s_{3,4} = \pm j\sqrt{2}, s_5 = 1, s_6 = -5$, 2 个正根, 一对虚根;

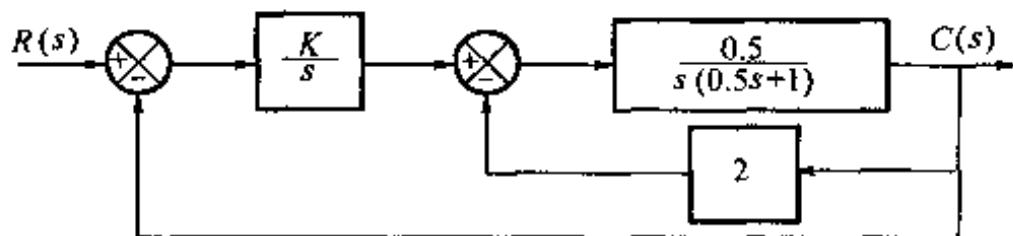
(3) 一对虚根 $s_{1,2} = \pm j\sqrt{5}$, 系统在右半 s 平面无极点。

9.解 $4 < K < 4.5$ 。

第4章 根轨迹法

书后习题解析

4-1 某反馈系统的方框图如题4-1图所示。试绘制 K 从0变到 ∞ 时该系统的根轨迹图。



题4-1图

解 给定控制系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{\frac{1}{2}}{s(\frac{1}{2}s+1)} \times 2} = \frac{K}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

给定系统的根轨迹方程为

$$\frac{K}{s[s - (-1+j)][s - (-1-j)]} = -1$$

代表 180° 根轨迹。

(1) 开环极点 $p_1 = -1+j$, $p_2 = -1-j$, $p_3 = 0$, $n = 3$, 无开环零点, 即 $m = 0$, 故当 $k \rightarrow \infty$ 时三条根轨迹均趋向无穷远处。

(2) 三条渐近线在实轴上相交于一点, 其坐标为

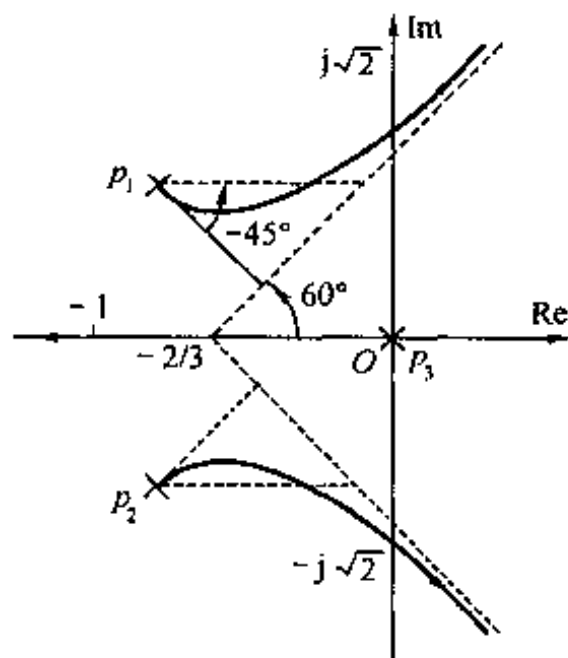
$$\sigma_a = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m} = -\frac{2}{3}$$

渐近线与实轴正方向的夹角为

$$\varphi_l = \frac{(2l+1)\pi}{n-m} = \frac{(2l+1)\pi}{3} \quad (l=0, 1, 2, \dots, n-m-1)$$

解得 $\varphi_1 = 60^\circ$, $\varphi_2 = 180^\circ$, $\varphi_3 = -60^\circ$ 。

(3) $(-\infty, 0]$ 属于实轴上的根轨迹。

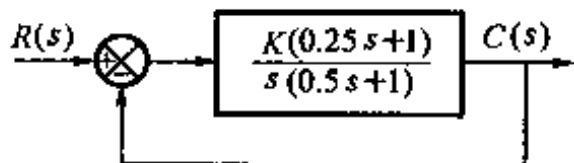


题4-1解图

(4) 出射角 $\theta_{p_1} = 180^\circ - \angle(p_1 - p_2) - \angle(p_1 - p_3) = 180^\circ - 90^\circ - 135^\circ = -45^\circ$, $\theta_{p_2} = +45^\circ$ 。

(5) 计算根轨迹与虚轴相交点的坐标。给定系统的特征方程为 $s^3 + 2s^2 + 2s + K = 0$, 令 $s = j\omega$, 则求得 $\omega = 0$ 及 $\omega = \pm\sqrt{2}$, $K = 2\omega^2$, 根轨迹与虚轴有三个交点, 其坐标分别是 $(0, j0)$, $(0, j\sqrt{2})$, $(0, -j\sqrt{2})$ 。根轨迹与虚轴相交点对应的 K 值为 $K = 0$ 和 $K = 2 \times (\sqrt{2})^2 = 4$ 。则当 $0 \leq K < 4$ 时系统稳定。根轨迹大致图形如题 4-1 解图所示。

4-2 试应用根轨迹法确定题 4-2 图所示系统无超调响应时的开环增益 K 。



题 4-2 图

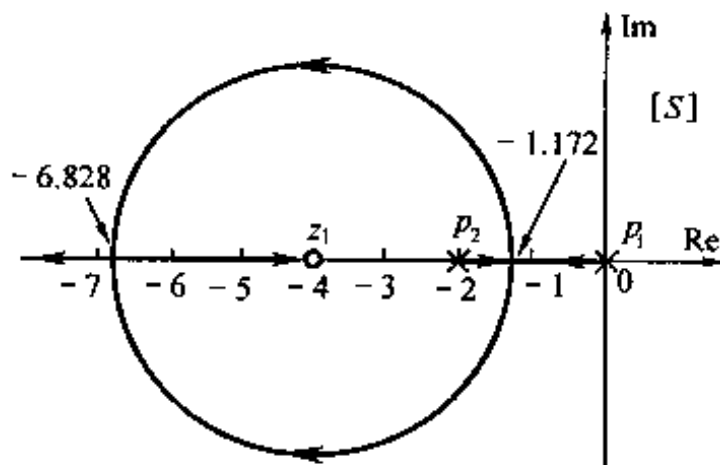
解 题 4-2 图所示系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K(0.25s+1)}{s(0.5s+1)}$, 化成标准形式, 得 $G(s) = \frac{k(s+4)}{s(s+2)}$, 式中 $k = 0.5K$ 。则根轨迹方程为 $\frac{k(s+4)}{s(s+2)} = -1$, 属于 180° 根轨迹。

(1) 开环极点 $p_1 = 0, p_2 = -2, n = 2$; 开环零点 $z_1 = -4, m = 1$ 。所以系统具有两条根轨迹及一条渐近线。

(2) 渐近线与实轴正方向的夹角为 $\varphi = \frac{(2l+1)\pi}{n-m}$, 取 $l = n - m - 1 = 0$, 得 $\varphi = 180^\circ$ 。

(3) $(-\infty, -4]$ 和 $[-2, 0]$ 属于实轴上的根轨迹。

(4) 计算根轨迹在实轴上的分离点与会合点坐标。由 $\sum_{j=1}^n \frac{1}{d-p_j} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{d-z_i}$, 有 $\frac{1}{d} = \frac{1}{d+2} = \frac{1}{d+4}$, 解得分离点坐标 $d_1 = -1.172$ 及会合点坐标 $d_2 = -6.828$ 。



题 4-2 解图

给定系统的根轨迹图如题 4-2 解图所示, 在复平面上根轨迹是以零点 $z_1 = -4$ 为圆心、以零点到分离点(或会合点)的距离为半径的圆。系统无超调响应时, 系统的特征根全部为实数。即在根轨迹图上对应 $(-\infty, -4)$ 和 $(-2, 0)$ 两区段。系统特征方程为 $0.5s^2 + (1 + 0.25K)s + K = 0$, 即 $K = \frac{-(0.5s^2 + s)}{0.25s + 1}$, 将 $s = -1.172$ 及 $s = -6.828$ 代入上式, 求得 $K_1 = 0.686, K_2 = 23.31$ 。所以系统无超调响应时开环增益 K 的取值范围为 $0 \leq K \leq 0.686$ 或 $23.31 \leq K < \infty$ 。

4-3 已知某负反馈系统的前向通道及反馈通道的传递函数分别为

$$G(s) = \frac{k'(s+0.1)}{s^2(s+0.01)}, \quad H(s) = 0.6s + 1$$

试绘制该系统的根轨迹图。

解 给定系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{k'(s+0.1)(0.6s+1)}{s^2(s+0.01)}$$

化成标准形式, 得

$$G(s)H(s) = \frac{k(s+0.1)(s+1.67)}{s^2(s+0.01)}$$

式中 $k = 0.6k'$ 。

(1) 开环极点 $p_1 = p_2 = 0, p_3 = -0.01, n = 3$; 开环零点 $z_1 = -0.1, z_2 = -1.67, m = 2$ 。

(2) 根轨迹有一条渐近线, 与实轴正方向的夹角为 180° 。

(3) $(-\infty, -1.67)$ 和 $[-0.1, -0.01]$ 属于实轴上的根轨迹。

(4) 确定根轨迹与实轴会合点, 由 $\frac{d}{ds} \left[\frac{1}{G(s)H(s)} \right] \Big|_{s=\alpha} = 0$, 解得 $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = -3.4$ 。

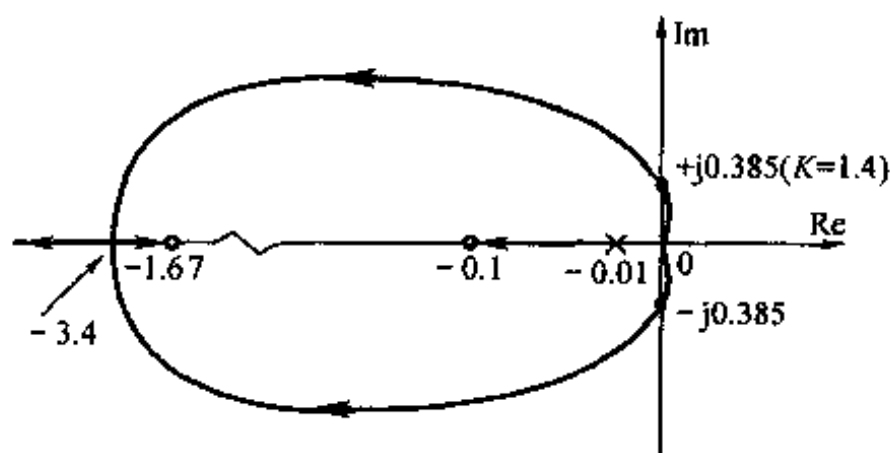
(5) 将 $s = j\omega$ 代入系统的特征方程,

即 $1 + G(j\omega)H(j\omega) = 0$, 有

$$- \omega^3 + 1.77k\omega = 0$$

$$- (0.01 + k)\omega^2 + 0.167k = 0$$

最后解得 $\omega_1 = 0, \omega_{2,3} = \pm 0.385$, 对应的参变量 $k = 0.084$, 增益值为 $K = \frac{k \times 0.1 \times 1.67}{0.01} = 1.4 \text{ s}^{-2}$ 。

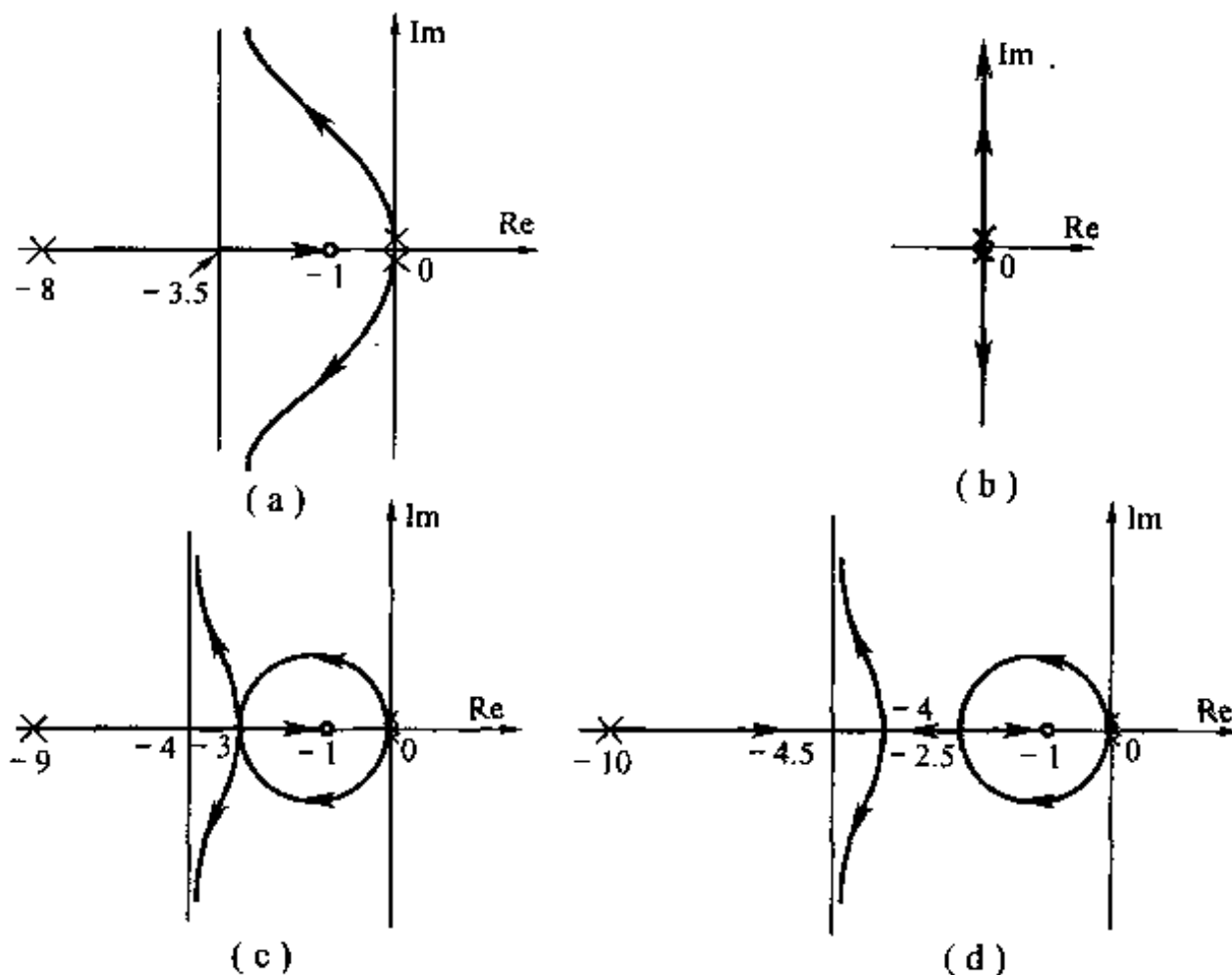


题 4-3 解图

给定系统根轨迹的大致图形如题 4-3 解图所示。注意绘制此类系统的根轨迹图时, 切不可忽略根轨迹与虚轴相交点坐标的计算。

4-4 设某反馈系统的特征方程为 $s^2(s+a) + k(s+1) = 0$ 。试确定以 k 为参变量的根轨迹与负实轴无交点、有一个交点与有两个交点时的参量 a , 并绘制相应的根轨迹图。

解 由题意可得给定系统的根轨迹方程为 $\frac{k(s+1)}{s^2(s+a)} = -1$, 由 $\frac{2}{d} + \frac{1}{d+a} = \frac{1}{d+1}$, 求得根轨迹与负实轴交点的表达式



题 4-4 解图

$$d = \frac{-(3+a) \pm \sqrt{(a-1)(a-9)}}{4}$$

(1) 当根轨迹与负实轴无交点, 即 d 无实数解, 则 $(a-1)(a-9) < 0$, 解得此时参数 a 的取值范围为 $1 < a < 9$ 。当 $a=8$ 时根轨迹的大致图形如题 4-4 解图(a)所示。

(2) 当根轨迹与负实轴有一个交点, 即 d 为两相等实根, 此时 $a=1$ 或 $a=9$ 。 $a=1$ 及 $a=9$ 时根轨迹的大致图形分别如解图(b), (c)所示。

(3) 当根轨迹与负实轴有两个交点, 即 d 为两不等实根, 此时 $(a-1)(a-9) > 0$, 解得 $a > 9$ 。 $a=10$ 时根轨迹的大致图形如解图(d)所示。

4-5 设某正反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{k(s+2)}{(s+3)(s^2+2s+2)}, \text{ 试为该系统绘制以}$$

k 为参变量的根轨迹图。

解 该正反馈系统的根轨迹方程为

$$\frac{k(s+2)}{(s+3)(s^2+2s+2)} = +1, \text{ 需按 } 0^\circ \text{ 根轨迹绘制。}$$

(1) 开环极点, $p_1 = -3, p_{2,3} = -1 \pm j, n=3$; 开环零点 $z_1 = -2, m=1$ 。

(2) 根轨迹具有两条渐近线, 其与实轴正方向的夹角为

$$\varphi_l = \frac{2l\pi}{n-m} \quad (l=0, 1, \dots, n-m-1)$$

分别求得 $\varphi_1 = 0^\circ, \varphi_2 = 180^\circ$ 。

(3) $[-3, -\infty)$ 和 $[-2, +\infty)$ 为实轴上的根轨迹。

(4) 出射角

$$\theta_{p_2} = 0^\circ + \angle(p_2 - z_1) - \angle(p_2 - p_1) - \angle(p_2 - p_3) = 0^\circ + 45^\circ - 26.6^\circ - 90^\circ = -71.6^\circ$$

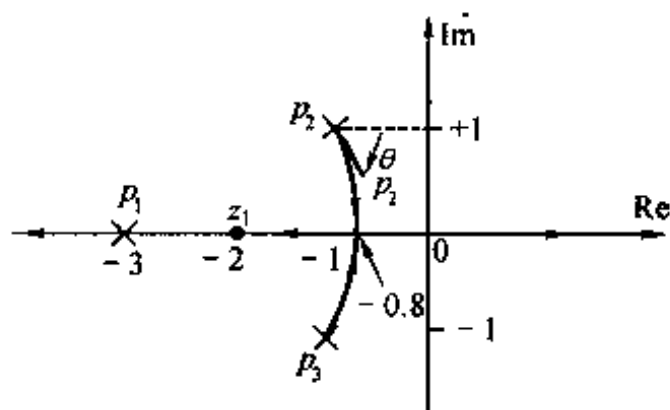
$$\theta_{p_3} = -\theta_{p_2} = +71.6^\circ$$

(5) 根轨迹与实轴交点

$$\left. \frac{d}{ds} \left[\frac{(s+3)(s^2+2s+2)}{k(s+2)} \right] \right|_{s=\alpha} = 0$$

求得实数解 $\alpha_1 = -0.8$, 因此, 根轨迹与实轴会合点坐标为 $(-0.8, j0)$ 。

(6) 给定系统的特征方程为 $1 - \frac{k(s+2)}{(s+3)(s^2+2s+2)} = 0$, 即 $s^3 + 5s^2 + (8-k)s + (6-2k) = 0$, 将 $s = jw$ 代入方程, 解出 $w=0, k=3$, 对应的开环增益为 $K = \frac{k \times 2}{3 \times 2} = 1$ 。当 $1 > K \geq 0$ 时, 该系统稳定。当 $K > 1$ 时, 该系统不稳定。该系统的根轨迹大致图形如题 4-5 解图所示。



题 4-5 解图

4-6 已知某正反馈系统的开环传递函数为 $G(s)H(s) = \frac{k}{(s+1)^2(s+4)^2}$, 试绘制该系统的根轨迹图 ($0 \leq k < \infty$)。

解 该正反馈系统的根轨迹方程为 $\frac{k}{(s+1)^2(s+4)^2} = +1$, 需按 0° 根轨迹绘制。

(1) 开环极点 $p_1 = p_2 = -1$ 和 $p_3 = p_4 = -4, n=4$; 而无有限零点, $m=0$ 。有四条根轨迹。

(2) 共有四条渐近线, 与实轴的交点为 $\sigma_a = \frac{-1-1-4-4}{4} = -2.5$, 与实轴正方向的夹角为

$\varphi_1 = 0^\circ, \varphi_2 = 90^\circ, \varphi_3 = 180^\circ, \varphi_4 = 270^\circ$ 。

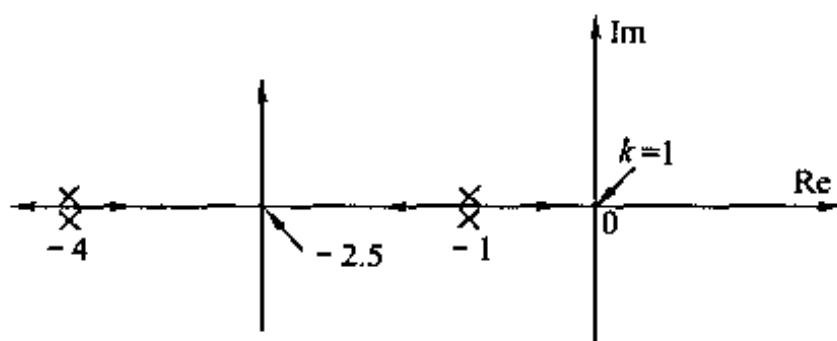
(3) 整个实轴均属于该系统的根轨迹。

(4) 由 $\frac{d}{ds} \left[\frac{(s+1)^2(s+4)^2}{k} \right] \Big|_{s=a} = 0$, 求得根轨迹在实轴上分离点坐标为 $d = -2.5$ 。

(5) 因此可画出大致的根轨迹。根轨迹与虚轴在原点处相交, 则 $\omega = 0$ 。

将 $s = 0$ 代入特征方程 $1 - \frac{k}{(s+1)^2(s+4)^2}$, 得 $k = 16$, 开环增益 $K =$

$\frac{k}{16} = 1$ 。则开环增益 K 的临界值为 1。给定正反馈系统的根轨迹图如题 4-6 解图所示。



题 4-6 解图

4-7 试绘制题 4-7 图所示非最小相位系统以开环增益 K 为参变量的根轨迹图。

解 题 4-7 图所示系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K(2s+1)}{(s+1)^2 \left(\frac{4}{7}s - 1 \right)}$$

进行标准化, 得

$$G(s)H(s) = \frac{k(s+0.5)}{(s+1)^2(s-1.75)}$$

式中 $k = 2K/(4/7) = 3.5K$ 。需按 180° 根轨迹绘制规则来绘制该非最小相位系统的根轨迹。

(1) 开环极点 $p_1 = p_2 = -1, p_3 = +1.75, n = 3$; 开环零点 $z_1 = -0.5, m = 1$ 。共有三条根轨迹。

(2) 两条渐近线与实轴上的交点坐标为 $\sigma_a = \frac{(-1-1+1.75)-(-0.5)}{3-1} = 0.125$, 与实轴正方向的夹角分别为 $\varphi_1 = 90^\circ, \varphi_2 = 270^\circ$ 。

(3) $[-0.5, 1.75]$ 为实轴上的根轨迹。可画出大致的根轨迹如题 4-7 解图所示。

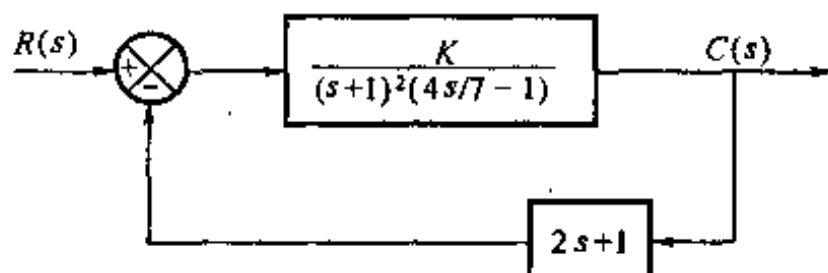
(4) 系统的特征方程为

$$(s+1)^2(s-1.75) + k(s+0.5) = 0$$

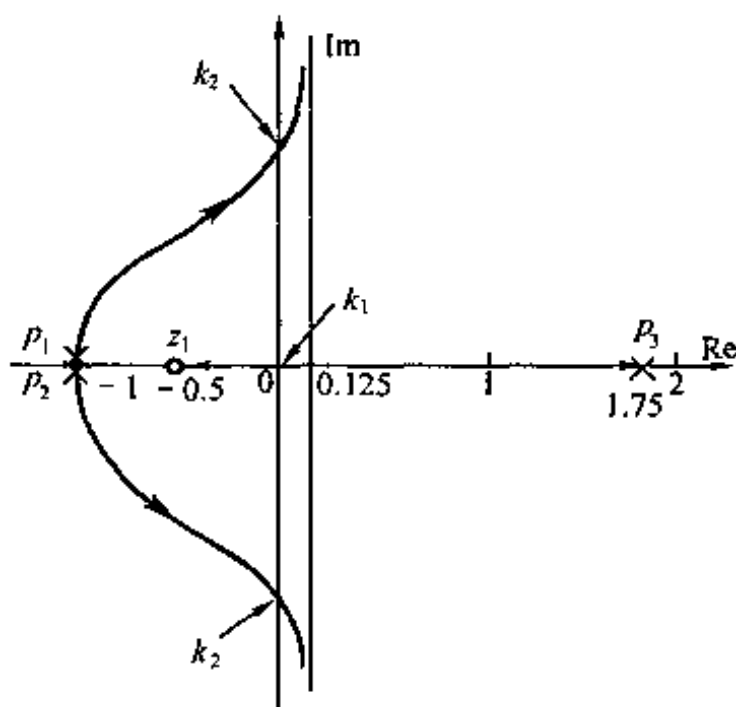
即

$$s^3 + 0.25s^2 + (k-0.25)s + (0.5k-1.75) = 0$$

令 $s = j\omega$, 求得根轨迹与虚轴交点坐标 ω 值分别为 $\omega_1 = 0, \omega_{2,3} = \pm \sqrt{k-2.5}$, 对应的参变量值



题 4-7 图



题 4-7 解图

为 $k_1 = 3.5, k_2 = 4.5$, 即 $K_1 = 1, K_2 = 1.285$ 。使系统稳定工作的 K 值范围为 $1 < K < 1.285$, 并且根轨迹与虚轴交点坐标为 $s_{2,3} = \pm\sqrt{2}j$ 。

4-8 已知非最小相位负反馈系统的开环传递函数为 $G(s)H(s) = \frac{k(1-s)}{s(s+2)}$, 试绘制该系统的根轨迹图。

解 由题意, 该非最小相位负反馈系统的特征方程为

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{k(1-s)}{s(s+2)} = 0$$

将开环传递函数化成标准形式, 得

$$G(s)H(s) = -\frac{k(s-1)}{s(s+2)}$$

则根轨迹方程为 $\frac{k(s-1)}{s(s+2)} = +1$, 则按 0° 根轨迹的绘制规则进行绘制。

(1) 开环极点 $p_1 = 0, p_2 = -2, n = 2$; 开环零点 $z_1 = +1, m = 1$ 。则有两根根轨迹和一条渐近线。

(2) 渐近线与实轴正方向的夹角为 $\varphi = 0^\circ$, 即渐近线与实轴正方向重合。

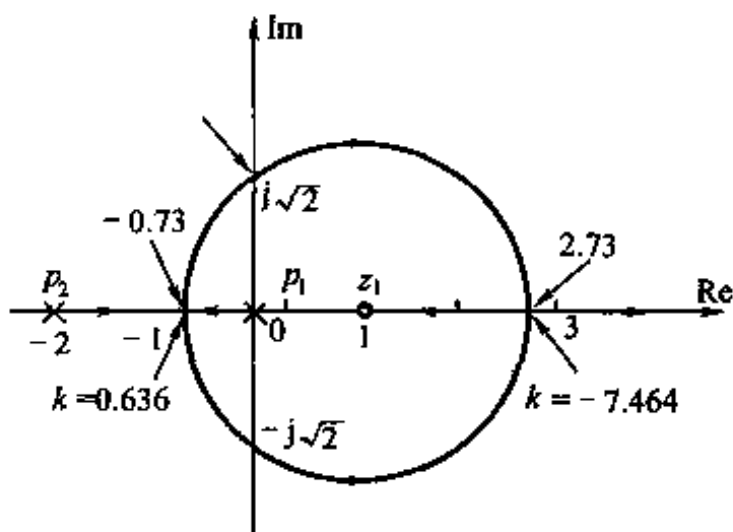
(3) $[+1, \infty)$ 及 $[0, -2]$ 为实轴上的根轨迹。

(4) 由 $\frac{1}{d} + \frac{1}{d+2} = \frac{1}{d-1}$, 解得分离点坐标 $d_1 = -0.73$ 及会合点坐标 $d_2 = 2.73$ 。

(5) 在特征方程中, 令 $s = j\omega$, 得 $\omega(2-k) = 0, -\omega^2 + k = 0$, 求得系统根轨迹与虚轴相交处 $\omega = \pm\sqrt{2}, k = 2$ 。则当 $0 < k < 2$ 时, 系统稳定; 当 $k > 2$ 时, 系统不稳定。

系统根轨迹图如题 4-8 解图所示。

注意: 给定的非最小相位系统虽是负反馈系统, 但从标准化处理而得到的根轨迹方程来看, 该系统的根轨迹必须按 0° 根轨迹的绘制规则来绘制。



题 4-8 解图

4-9 已知单位负反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{\frac{1}{4}(s+a)}{s^2(s+1)}$, 试绘制以 a 为参变量的参量根轨迹图。

解 给定系统的特征方程为 $s^2(s+1) + \frac{1}{4}(s+a) = 0$, 进一步整理得 $\frac{\frac{1}{4}a}{s(s^2 + s + \frac{1}{4})} = -1$, 令 $A = \frac{1}{4}a$, 则根轨迹方程为 $\frac{A}{s(s^2 + \frac{1}{2})} = -1$ 。按 180° 根轨迹的绘制规则来绘制。

(1) 开环极点 $p_1 = 0, p_2 = p_3 = -\frac{1}{2}, n = 3$; 无开环零点 $m = 0$ 。则有三条根轨迹和两条渐近线。

(2) 渐近线与实轴的交点坐标为 $\sigma_a = \frac{0 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{3 - 0} = -\frac{1}{3}$, 与实轴正方向的夹角分别是

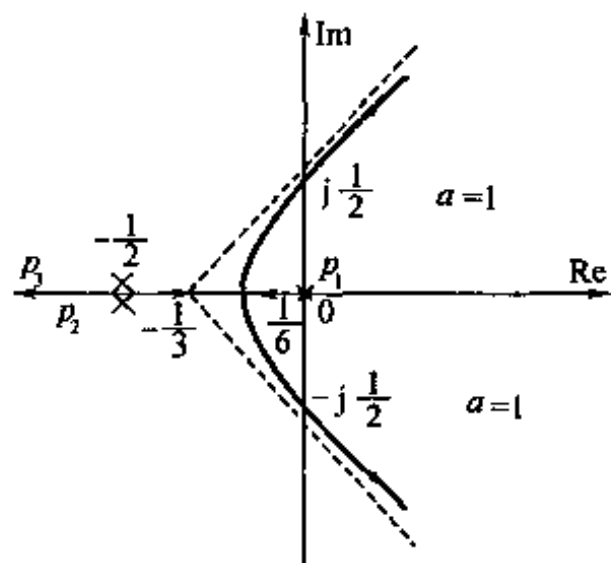
$+60^\circ$, $+180^\circ$ 和 -60° 。

(3) 由 $\frac{1}{d} + \frac{1}{d + \frac{1}{2}} + \frac{1}{d + \frac{1}{2}} = 0$, 得根轨迹与实轴交

点的坐标为 $d = -\frac{1}{6}$ (分离点)。

(4) 将 $s = j\omega$ 代入特征方程, 得根轨迹与虚轴交点为 $s_1 = 0, s_{2,3} = \pm \frac{1}{2}j$, 相应的参变量 a 值为 $a = 0, a = 1$ 。

给定系统参量根轨迹的大致图形如解图所示。从图可见, 参变量 $a > 1$ 时系统不稳定。



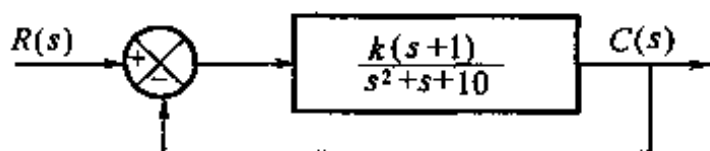
题4-9解图

4-10 某反馈系统的方框图如题4-10图所示, 试绘制该系统的根轨迹图。

解 由题4-10图求得系统的开环传递函数

为 $G(s) = \frac{k(s+1)}{s^2 + s + 10}$, 根轨迹方程为

$$\frac{k(s+1)}{s^2 + s + 10} = -1$$



题4-10图

(1) 开环极点 $p_1 = -0.5 + j3.12, p_2 = -0.5 - j3.12, n = 2$; 开环零点 $z_1 = -1, m = 1$ 。所以系统有两条根轨迹及一条渐近线。

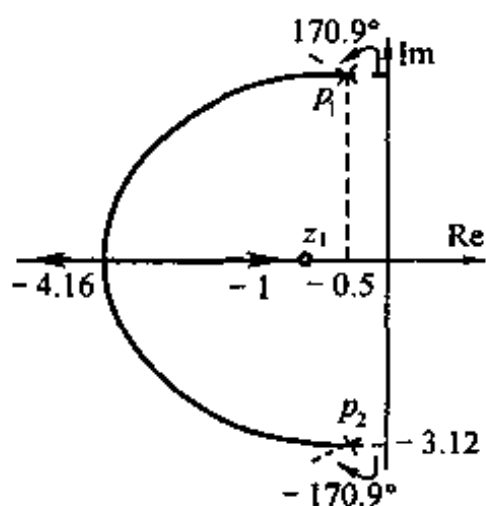
(2) 渐近线与实轴正方向的夹角为 $\varphi = \frac{(2l+1)\pi}{n-m} = \pi$ ($l = 0$)。

(3) $(-\infty, -1]$ 为实轴上的根轨迹。

(4) 由 $\frac{d}{ds} \left(\frac{s^2 + s + 10}{s + 1} \right) \Big|_{s=\sigma} = 0$ 求得根轨迹与实轴的交点为 $\sigma_1 = -4.16, \sigma_2 = 2.16$ (舍)。

(5) 出射角 $\theta_{p_1} = -180^\circ + \angle(p_1 - z_1) - \angle(p_1 - p_2) = -180^\circ + 80.9^\circ - 90^\circ = 170.9^\circ, \theta_{p_2} = -170.9^\circ$ 。

根轨迹如题4-10解图所示。



题4-10解图

4-11 设某负反馈系统的开环传递函数为 $G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(0.1s+1)}$, 试绘制该系统的根轨迹图。

解 将开环传递函数化成标准形式 $G(s)H(s) = \frac{k(s+1)}{s^2(s+10)}$, 式中 $k = 0.1K$, 则根轨迹方程为 $\frac{k(s+1)}{s^2(s+10)} = -1$, 按 180° 根轨迹的绘制规则来绘制。

(1) 开环极点 $p_1 = p_2 = 0, p_3 = -10, n = 3$, 开环零点 $z_1 = -1, m = 1$, 所以系统具有三条根轨迹及两条渐近线。

(2) 渐近线与实轴的交点为 $\sigma_a = \frac{-10+1}{2} = -4.5$, 渐近线与实轴正方向的夹角为 $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$,

$$\varphi_2 = \frac{3}{2}\pi$$

(3) $[-10, -1]$ 是实轴上的根轨迹。

(4) 由 $\frac{d}{ds} \left(\frac{s^2(s+10)}{s+1} \right) \Big|_{s=\alpha} = 0$, 解得 $\alpha_1 = -2.5, \alpha_2 = -4$ 。

根轨迹大致图形如题 4-4 解图(d)一致。

4-12 设某负反馈系统的开环传递函数为 $G(s)H(s) = \frac{k(s+4)(s+40)}{s^3(s+200)(s+900)}$, 试绘制该系统的根轨迹图。

解 根轨迹方程为 $\frac{k(s+4)(s+40)}{s^3(s+200)(s+900)} = -1$

(1) 极点 $p_1 = p_2 = p_3 = 0, p_4 = -200, p_5 = -900, n = 5$; 开环零点 $z_1 = -4, z_2 = -40, m = 2$, 所以系统具有五条根轨迹及三条渐近线。

(2) 渐近线与实轴的交点为

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^5 p_i - \sum_{i=1}^2 z_i}{n - m} = \frac{-200 - 900 + 4 + 40}{3} = -352$$

渐近线与实轴正方向的夹角为

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{3}, \varphi_2 = \pi, \varphi_3 = \frac{5\pi}{3}$$

(3) $(-4, 0]$ 和 $[-200, -40)$ 以及 $(-\infty, -900]$ 为实轴上的根轨迹。

(3) 根轨迹与实轴无分离、会合点。

(4) 由 $1 + G(s)H(s) = 0$, 求得系统的特征方程为

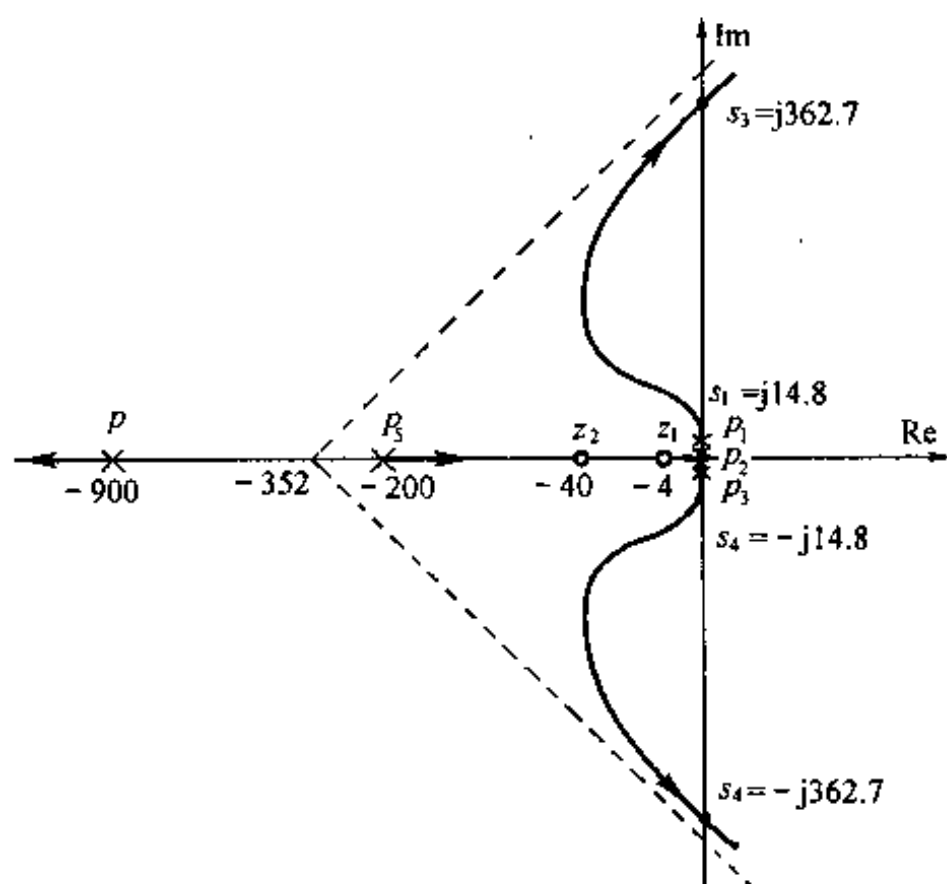
$$s^3(s+200)(s+900) + k(s+4)(s+40) = 0$$

令 $s = j\omega$, 求得根轨迹与虚轴的四个交点及对应增益为

$$\omega_{1,2} = \pm 14.8, \quad k_1 = 799;$$

$$\omega_{3,4} = \pm 362.7, \quad k_2 = 128\,776。$$

根轨迹大致图形如题 4-12 解图所示。



题 4-12 解图

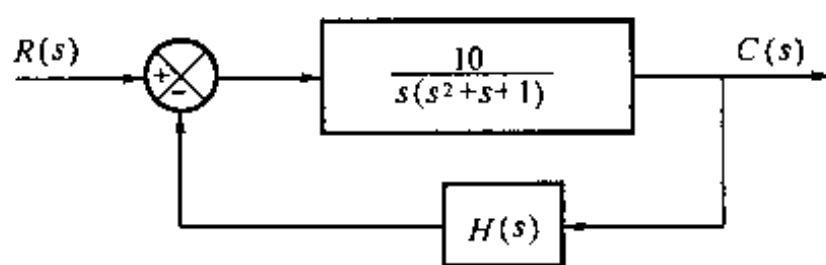
4-13 设某反馈系统的方框图如题 4-13图所示。试绘制以下各种情况下的根轨迹图：

(1) $H(s) = 1$;

(2) $H(s) = s + 1$;

(3) $H(s) = s + 2$

分析比较这些根轨迹图, 说明开环零点对系统相对稳定性的影响。



题 4-13 图

解 (1) 当 $H(s) = 1$ 时, 系统的开环传递函数为 $G(s)H(s) = \frac{K}{s(s^2 + s + 1)}$, 根轨迹方程为

$$\frac{K}{s(s^2 + s + 1)} = -1$$

① 极点 $p_1 = 0, p_2 = \frac{-1 + \sqrt{3}j}{2}, p_3 = \frac{-1 - \sqrt{3}j}{2}, n = 3$; 无开环零点, $m = 0$ 。所以系统具有三条根轨迹及三条渐近线。

② 渐近线与实轴的交点为

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^3 p_i}{n - m} = \frac{\frac{-1 + \sqrt{3}j}{2} + \frac{-1 - \sqrt{3}j}{2}}{3} = -\frac{1}{3}$$

与实轴正方向的夹角为 $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}, \varphi_2 = \pi, \varphi_3 = \frac{5\pi}{3}$ 。

③ $(-\infty, 0]$ 为实轴上的根轨迹。

④ 将 $s = j\omega$ 代入系统的特征方程 $s^3 + s^2 + s + K = 0$, 求得根轨迹与虚轴的交点为 $s_1 = 0, s_{2,3} = \pm j$ 。

⑤ 出射角 $\theta_{p_2} = -180^\circ + \angle(p_2 - p_1) - \angle(p_2 - p_3) = -30^\circ, \theta_{p_3} = 30^\circ$ 。

根轨迹大致图形如题 4-13 解图(a)所示。

(2) 当 $H(s) = s + 1$ 时, 系统的开环传递函数为 $G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s(s^2 + s + 1)}$, 根轨迹方程为

$$\frac{K(s+1)}{s(s^2 + s + 1)} = -1$$

绘制根轨迹的步骤同上, 大体为

① 开环根点 $p_1 = 0, p_2 = \frac{-1 + \sqrt{3}j}{2}, p_3 = \frac{-1 - \sqrt{3}j}{2}, n = 3$; 开环零点 $z_1 = -1, m = 1$, 所以系统具有三条根轨迹及两条渐近线。

② 渐近线与实轴的交点为 $\sigma_a = 0$, 渐近线与实轴正方向的夹角为 $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$ 。

③ $[-1, 0]$ 为实轴上的根轨迹。

④ 出射角 $\theta_{p_2} = 30^\circ, \theta_{p_3} = -30^\circ$ 。

根轨迹大致图形如题 4-13 解图(b)所示。

(3) 当 $H(s) = s + 2$ 时, 系统的开环传递函数为 $G(s)H(s) = \frac{K(s+2)}{s(s^2 + s + 1)}$, 根轨迹方程为

$$\frac{K(s+2)}{s(s^2 + s + 1)} = -1$$

① 极点 $p_1 = 0, p_2 = \frac{-1 + \sqrt{3}j}{2}, p_3 = \frac{-1 - \sqrt{3}j}{2}, n = 3$; 开环零点 $z_1 = -2, m = 1$ 。所以系统具有三条根轨迹及两条渐近线。

② 渐近线与实轴的交点为 $\sigma_a = \frac{1}{2}$, 与实轴正方向的夹角为 $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$ 。

③ $[-2, 0]$ 为实轴上的根轨迹。

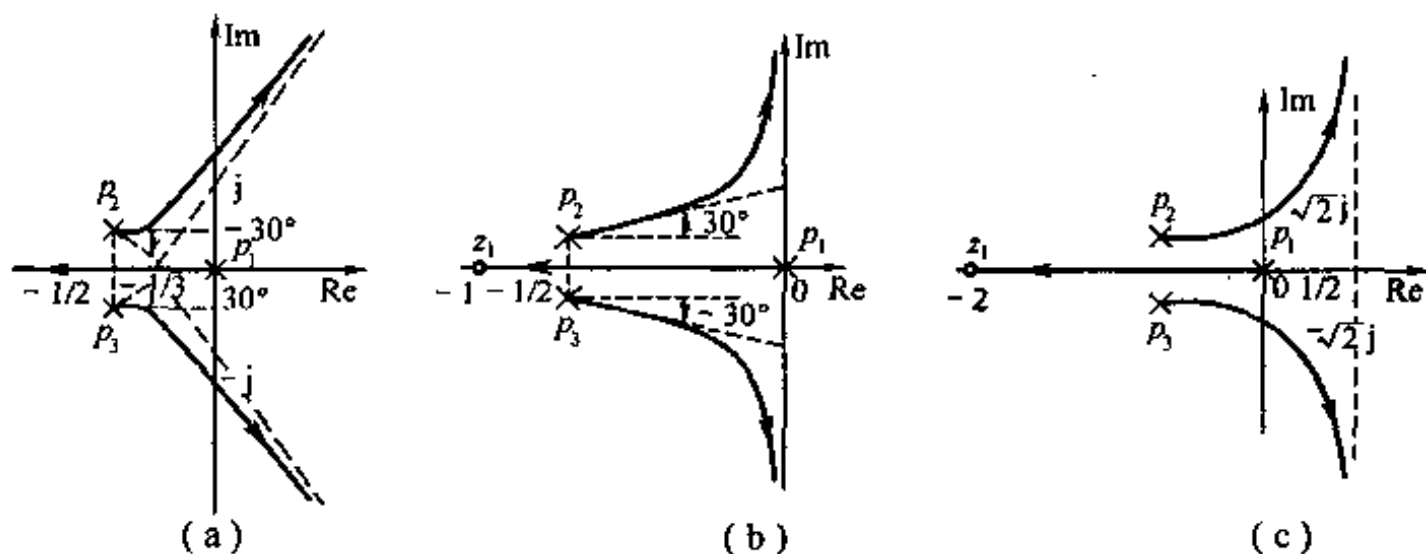
④ 将 $s = j\omega$ 代入系统的特征方程 $s^3 + s^2 + (1 + K)s + 2K = 0$, 求得根轨迹与虚轴的交点及

参变量临界值为 $s_{1,2} = \pm\sqrt{2}j, k=1$ 。

⑤出射角 $\theta_{p_2} = 0^\circ, \theta_{p_3} = 0^\circ$ 。

根轨迹大致图形如题 4-13 解图(c)所示。

从结果看出,在保持开环极点不变的情况下,增加开环零点可使闭环系统的稳定性得到改善,并且零点越靠近虚轴,效果越好。



题 4-13 解图

4-14 已知某正反馈系统的开环传递函数为 $G(s)H(s) = \frac{k}{(s+1)(s-1)(s+4)^2}$, 试绘制该系统的根轨迹图。

解 该正反馈系统的根轨迹方程为

$$\frac{k}{(s+1)(s-1)(s+4)^2} = 1$$

(1) 开环极点 $p_1 = -1, p_2 = 1, p_{3,4} = -4, n=4$; 无开环零点, $m=0$ 。所以系统具有四条根轨迹及四条渐近线。

(2) 渐近线与实轴的交点为 $\sigma_a =$

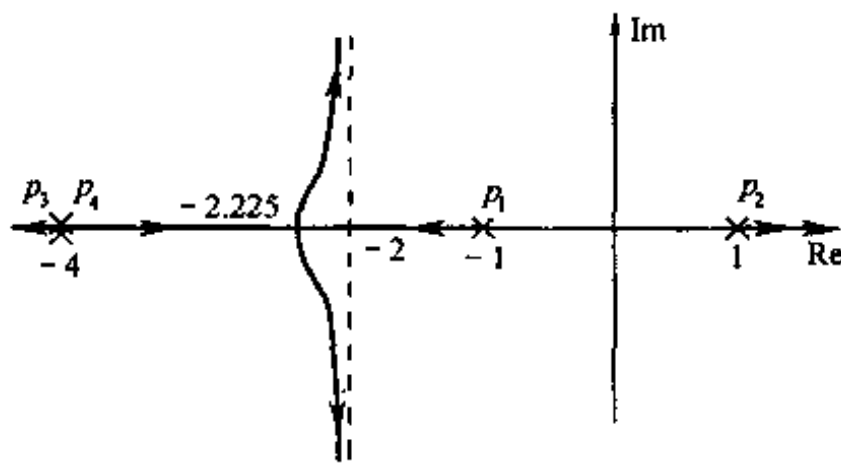
$$\frac{\sum_{i=1}^4 p_i}{n-m} = -2, \text{ 与实轴正方向的夹角为 } \varphi_1 =$$

$$0, \varphi_2 = \frac{\pi}{2}, \varphi_3 = \pi, \varphi_4 = \frac{3\pi}{2}.$$

(3) $(-\infty, -1][1, +\infty)$ 为实轴上的根轨迹。

(4) 根轨迹与实轴的交点为 $\alpha_1 = -2.225, \alpha_2 = 0.225$ (舍去)。

根轨迹大致图形如题 4-14 解图所示。



题 4-14 解图

4-15 已知非最小相位负反馈系统的开环传递函数为 $G(s)H(s) = \frac{k(s+1)}{s(s-3)}$, 试绘制该系统的根轨迹图。

解 根轨迹方程为

$$\frac{k(s+1)}{s(s-3)} = -1$$

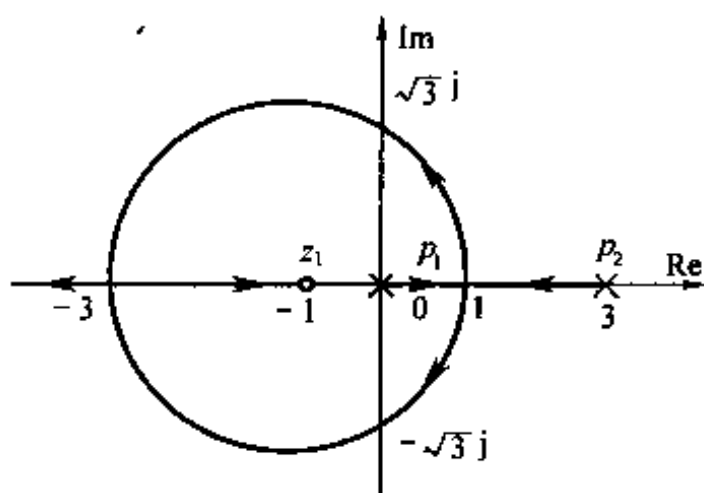
(1) 开环极点 $p_1 = 0, p_2 = 3, n = 2$; 开环零点 $z_1 = -1, m = 1$ 。所以系统具有两条根轨迹及一条渐近线。

(2) $(-\infty, -1]$ 和 $[0, 3]$ 为实轴上的根轨迹。

(3) 由 $\frac{d}{ds} \left(\frac{s(s-3)}{s+1} \right) \Big|_{s=\alpha} = 0$ 得根轨迹与实轴的交点为 $\alpha_1 = 1$ (分离点), $\alpha_2 = -3$ (会合点)。

(4) 将 $s = j\omega$ 代入系统的特征方程 $s(s-3) + k(s+1) = 0$, 解得 $\omega = \pm\sqrt{3}, k = 3$ 。

根轨迹大致图形如题 4-15 解图所示。



题 4-15 解图

4-16 已知非最小相位负反馈系统的特征方程为

$$(s+1)(s+3)(s-1)(s-3) + k(s^2+4) = 0$$

试绘制该系统的根轨迹图。

解 系统的特征方程为

$$(s+1)(s+3)(s-1)(s-3) + k(s^2+4) = 0$$

整理得根轨迹方程为

$$\frac{k(s+2j)(s-2j)}{(s+1)(s+3)(s-1)(s-3)} = -1$$

(1) 开环极点 $p_1 = -1, p_2 = -3, p_3 = 1, p_4 = 3, n = 4$; 开环零点 $z_1 = -2j, z_2 = 2j, m = 2$, 所以系统具有四条根轨迹及两条渐近线。

(2) 渐近线与实轴的交点为 $\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^4 p_i - \sum_{i=1}^2 z_i}{n - m} = 0$, 与实

轴正方向的夹角为 $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$ 。

(3) $[1, 3]$ 和 $[-3, -1]$ 为实轴上的根轨迹。

(4) 由 $\frac{d}{ds} \left(\frac{(s+1)(s+3)(s-1)(s-3)}{s^2+4} \right) \Big|_{s=\alpha} = 0$, 解得 $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = -2, \alpha_3 = j3.473, \alpha_4 = -j3.473$ 。

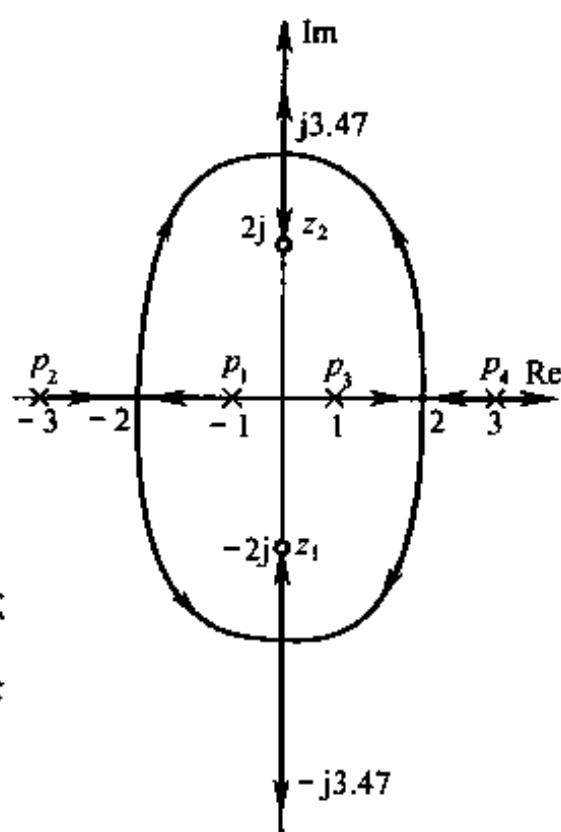
(5) 入射角 $\theta_{a1} = -90^\circ, \theta_{a2} = +90^\circ$ 。

根轨迹大致图形如题 4-16 解图所示。

讨论: 本题开环零、极点数均为偶数, 且关于虚轴对称分布, 所以根轨迹关于虚轴对称。

4-17 已知非最小相位负反馈系统的开环传递函数为 $G(s)H(s) = \frac{K(1-0.5s)}{s(0.25s+1)}$, 试绘制该系统的根轨迹图。

解 根轨迹方程为 $\frac{K(1-0.5s)}{s(0.25s+1)} = -1$, 整理得 $\frac{k(s-2)}{s(s+4)} = 1$, 其中 $k = 2K$, 按 0° 根轨迹绘制。步骤同题 4-8, 大体如下。



题 4-16 解图

(1)极点 $p_1 = 0, p_2 = -4, n = 2$, 开环零点 $z_1 = 2, m = 1$ 。所以系统具有两条根轨迹及一条渐近线。

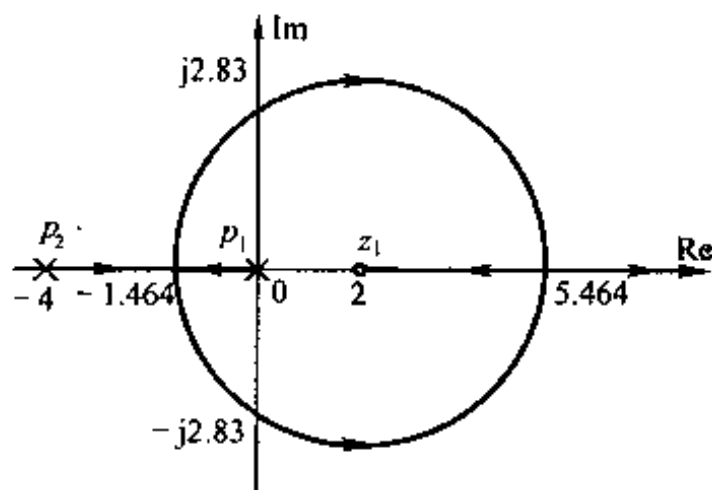
(2)渐近线与实轴正方向的夹角为 $\varphi = 0^\circ$ 。

(3) $[-4, 0]$ 和 $[2, +\infty)$ 为实轴上的根轨迹。

(4)根轨迹与实轴的交点为 $\alpha_1 = -1.464$ (分离点), $\alpha_2 = -5.464$ (会合点)。

(5)根轨迹与虚轴的交点为 $s = \pm 2.83j$, 对应的开环增益临界值为 $K_c = 2$ 。

根轨迹大致图形如题 4-17 解图所示。



题 4-17 解图

4-18 设某负反馈系统的开环传递函数为 $G(s)H(s) = \frac{10}{s(s+a)}$, 试绘制以 a 为参变量的根轨迹图。

解 该系统的特征方程为 $1 + G(s)H(s) = 0$, 即 $s^2 + 10 + as = 0$, 整理得参量根轨迹方程为

$$\frac{as}{s^2 + 10} = -1$$

(1)开环极点 $p_1 = 3.162j, p_2 = -3.162j, n = 2$; 开环零点 $z_1 = 0, m = 1$, 所以系统具有两条根轨迹及一条渐近线。

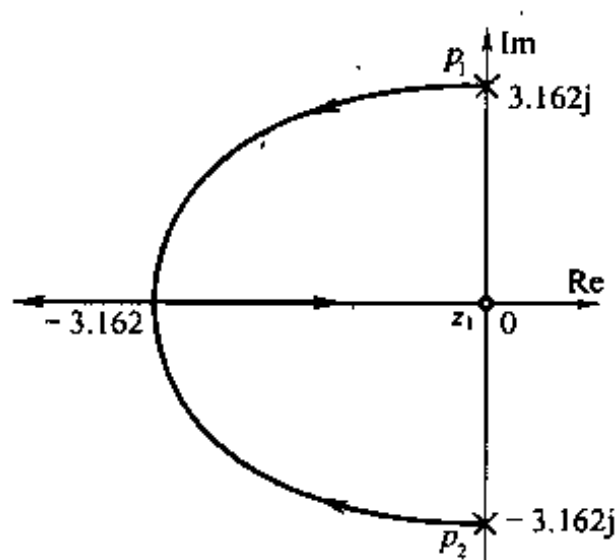
(2)渐近线与实轴正方向的夹角为 $\varphi = \frac{(2l+1)\pi}{n-m} = \pi$ 。

(3)实轴上的根轨迹为 $(-\infty, 0]$ 。

(4)根轨迹与实轴的交点 $\alpha_1 = 3.162$ (舍去), $\alpha_2 = -3.162$ 。

(5)根轨迹的出射角 $\theta_{p_1} = \pi, \theta_{p_2} = -\pi$ 。

根轨迹大致图形如题 4-18 解图所示。



题 4-18 解图

4-19 已知某负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{1000(Ts + 1)}{s(0.1s + 1)(0.001s + 1)}$$

试绘制以时间常数 T 为参变量的参量根轨迹图。

解 系统特征方程为

$$s(0.1s + 1)(0.001s + 1) + 10^3(Ts + 1) = 0$$

即

$$s^3 + 1010s^2 + 10^4s + 10^7 + 10^7Ts = 0$$

整理得

$$\frac{10^7Ts}{s^3 + 1010s^2 + 10^4s + 10^7} \approx \frac{10^7Ts}{(s^2 + 10^4)(s + 10^3)} = -1$$

(1)开环极点 $p_{1,2} = \pm 100j, p_3 = -10^3, n = 3$, 开环零点 $z_1 = 0, m = 1$, 所以系统具有三条根轨迹及两条渐近线。

(2)渐近线与实轴的交点为

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^3 p_i - z_1}{n - m} = \frac{-10^3}{2} = -500$$

与实轴正方向的夹角为 $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$ 。

(3) 实轴上的根轨迹为 $[-10^3, 0]$ 。

(4) 由

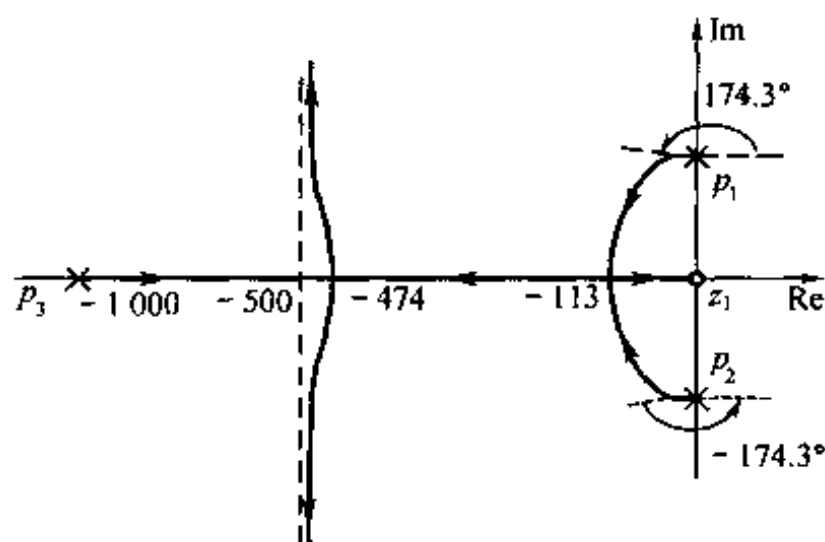
$$\left. \frac{d}{ds} \left(\frac{s^3 + 1010s^2 + 10^4 s + 10^7}{s} \right) \right|_{s=\alpha} = 0$$

解得根轨迹与实轴的交点为

$$\alpha_1 = -474, \alpha_2 = -113, \alpha_3 = 92 (\text{舍去})$$

$$(5) \theta_{p_1} = -180^\circ + \angle(p_1 - z_1) - \angle(p_1 - p_2) - \angle(p_1 - p_3) = 174.3^\circ, \theta_{p_2} = -174.3^\circ$$

根轨迹大致图形如题 4-19 解图所示。



题 4-19 解图

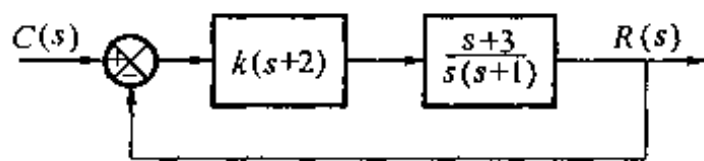
同步训练题

1. 设系统结构如题 1 图所示, 试画出该系统根轨迹图。

2. 已知开环传递函数如下, 试绘制闭环系统

根轨迹图。

$$G(s) = \frac{K}{s \left(\frac{1}{3}s + 1 \right) \left(\frac{1}{3}s^2 + s + 1 \right)}$$



题 1 图

3. 已知单位负反馈系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{as}{s^2 + as + 16} \quad (a > 0)$$

要求: (1) 绘出闭环系统的根轨迹 ($0 \leq a < \infty$);

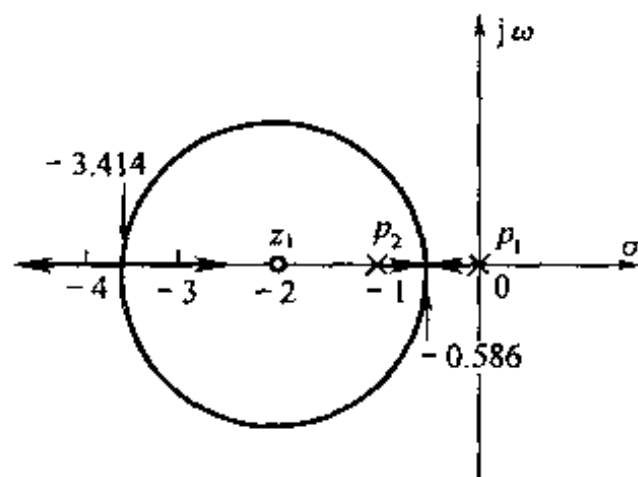
(2) 判断点 $(-\sqrt{3}, j)$ 是否在根轨迹上;

(3) 由根轨迹求出使闭环系统阻尼比 $\zeta = 0.5$ 时的 a 值。

4. 已知系统开环传递函数为 $G(s) =$

$$\frac{K^*}{s(s+1)(s+2)}, \text{ 试绘制正反馈系统的根轨迹图。}$$

5. 设单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K^*(s+2)}{s(s+1)}$, 其根轨迹图见图。试从数学上证明: 复数根轨迹部分是以 $(-2, j0)$ 为圆心, 以 $\sqrt{2}$ 为半径的一个圆。



题 5 图

6. 设单位反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K^*}{s+1}$$

试用解析法绘出 K^* 从零变到无穷时的闭环根轨迹图,并判断下列点是否在根轨迹上:

$$(-2+j0), (0+j1), (-3+j2)$$

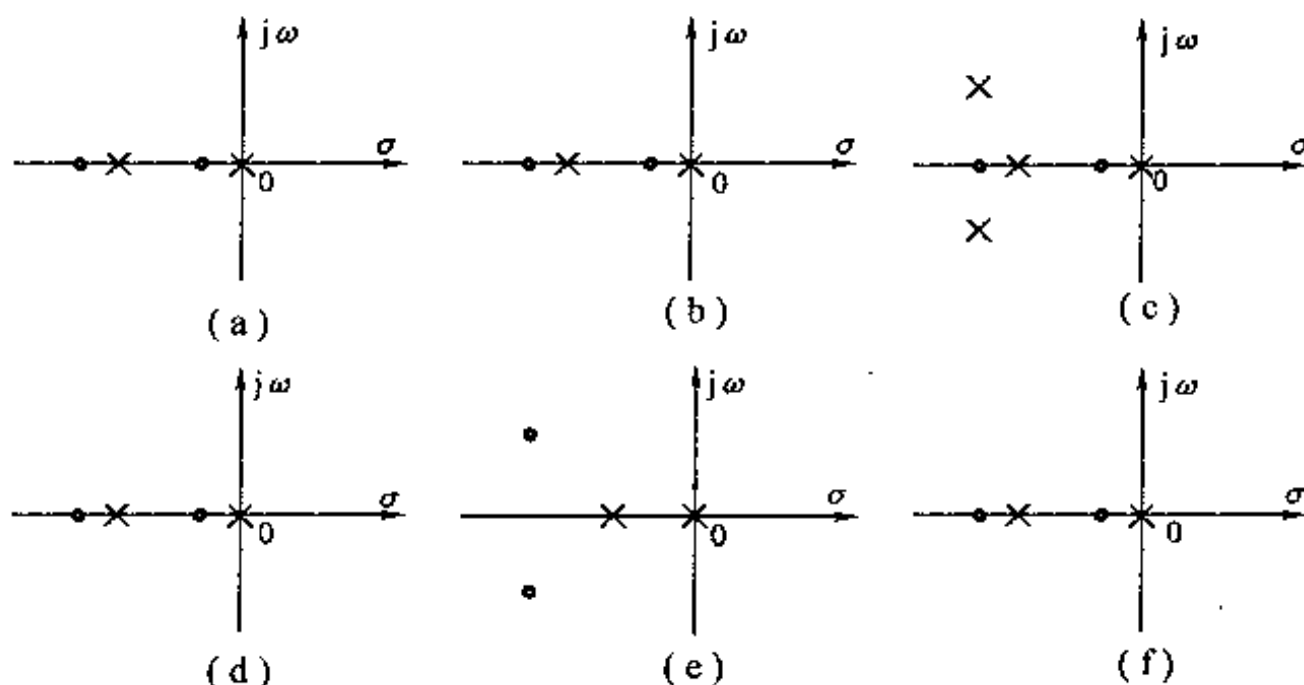
7. 设系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s^2(s+1)}$$

(1) 画出根轨迹草图,判断系统的稳定性。

(2) 用根轨迹法分析,增加一个零点 a ,能否使系统稳定,并给出使系统稳定的 a 的范围。

8. 已知开环零、极点分布如题 8 图所示,试概略绘出相应的闭环根轨迹图。



题 8 图

9. 已知最小相位负反馈系统的特征方程为

$$s(s-2)(s+2)(s+4) + K(s^2 + 2s + 5) = 0$$

试绘制该系统根轨迹的大致形状,并确定系统稳定的 K 值。

10. 单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{k}{s(s+3)(s+7)}$$

试确定使系统具有欠阻尼阶跃响应特性的取值范围。

同步训练题答案

1. 解 根轨迹图如题 1 解图所示。

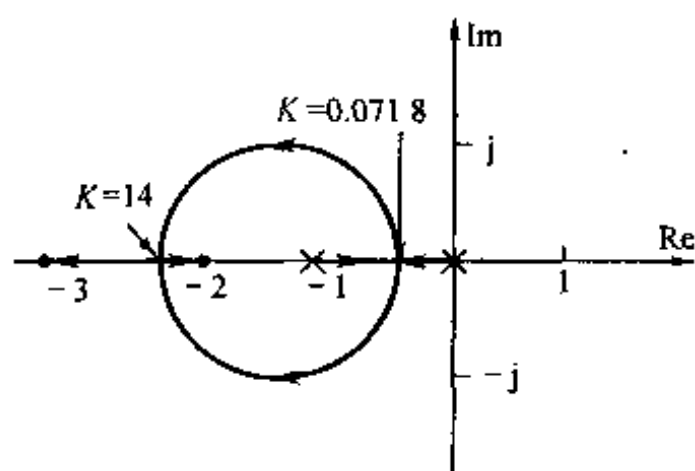
2. 解 根轨迹图如题 2 解图所示。

3. 解 (1) 根轨迹图如题 3 解图所示;

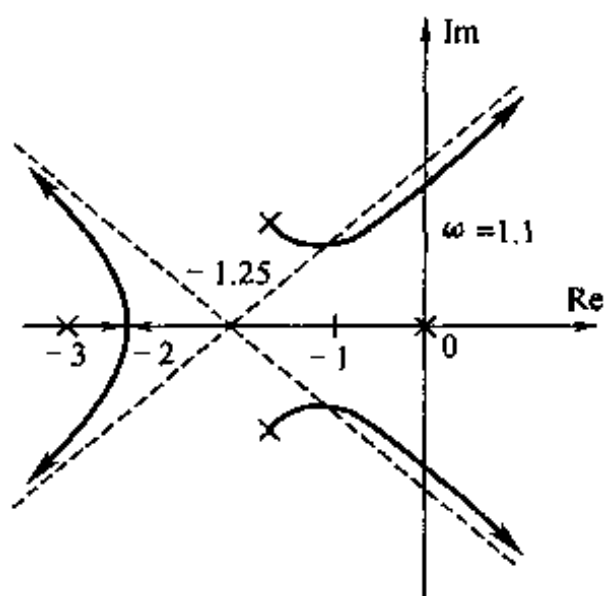
(2) 不在根轨迹上;

(3) $a = 4$ 。

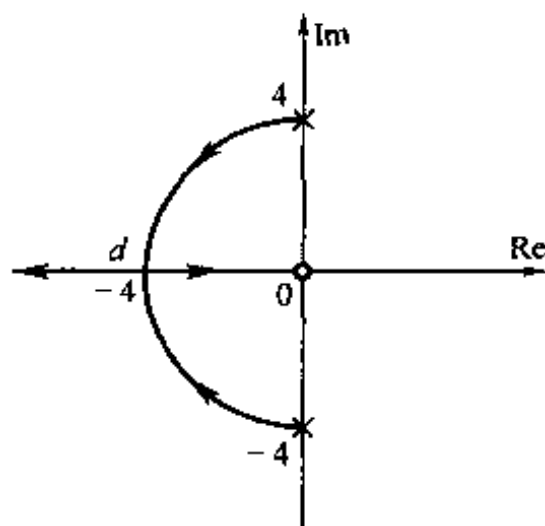
4. 解 正反馈系统的根轨迹图如题 4 解图所示。



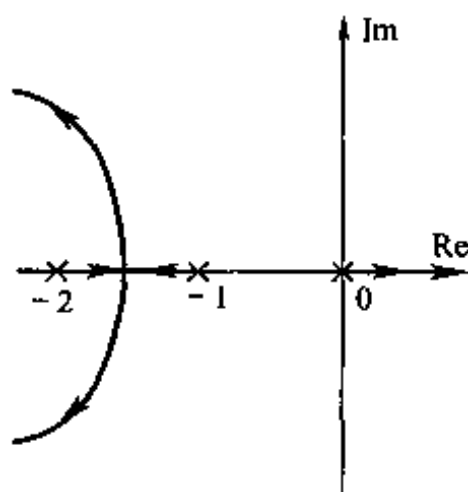
题1解图



题2解图



题3解图



题4解图

5. 证明 闭环特征方程为

$$D(s) = s(s+1) + K^*(s+2) = s^2 + (1+K^*)s + 2K^* = 0$$

$$\lambda = \frac{-(1+K^*) \pm \sqrt{(1+K^*)^2 - 8K^*}}{2} = \frac{-(1+K^*) \pm j\sqrt{8K^* - (1+K^*)^2}}{2} = \sigma \pm j\omega$$

$$\sigma = \frac{-(1+K^*)}{2} \quad (1)$$

$$\omega = \pm \frac{1}{2} \sqrt{8K^* - (1+K^*)^2} \quad (2)$$

由式(1)得

$$K^* = -2\sigma - 1 \quad (3)$$

由式(3)代入式(2),整理得 $(\sigma+2)^2 + \omega^2 = 2$ 。

6. 解 当 $K^* = 0$ 时, $s = -1$; $K^* = 1$, $s = -2$; $K^* = 2$, $s = -3$; $\cdots K^* \rightarrow \infty$, $s \rightarrow \infty$ 。可逐个描点得闭环根轨迹如题6解图所示,从图中明显可见,只有 $(-2, j0)$ 在根轨迹上。

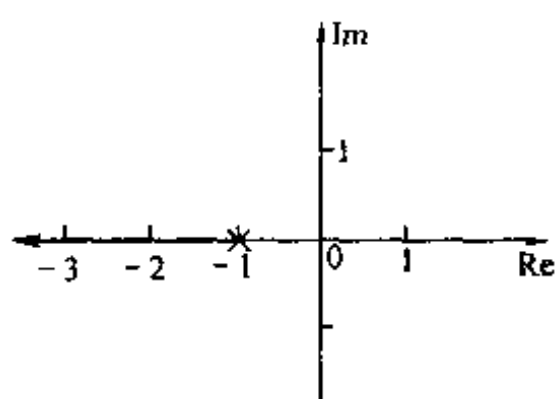
7. 解 (1)根轨迹图如题7解图(a)所示,系统不稳定。

(2)当 $a > 1$ 时,根轨迹如解图(b)所示,系统不稳定;当 $a < 1$ 时,根轨迹如解图(c)所示,系统稳定。

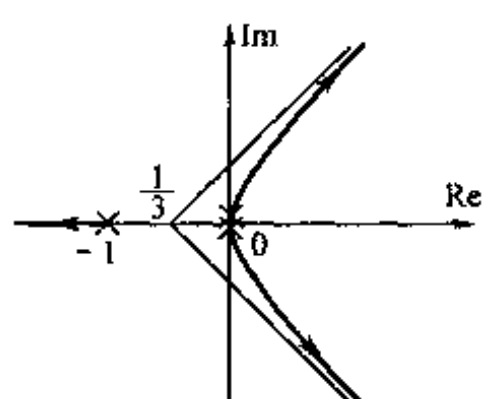
8. 解 闭环根轨迹图如题8解图所示。

9. 解 根轨迹大致图形如题9解图所示,当 $K > 28$ 时,系统是稳定的。

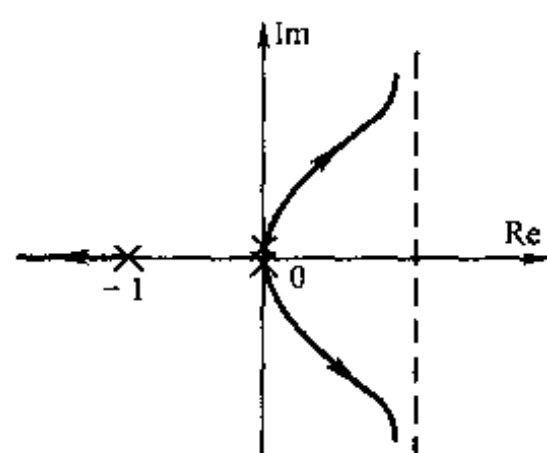
10. 解 根轨迹图如题10解图所示。



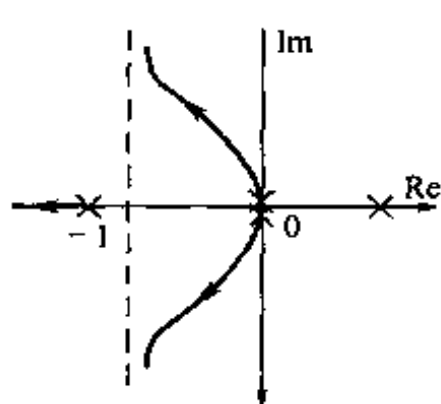
题6解图



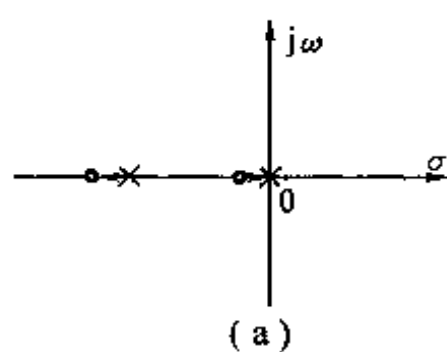
题7解图(a)



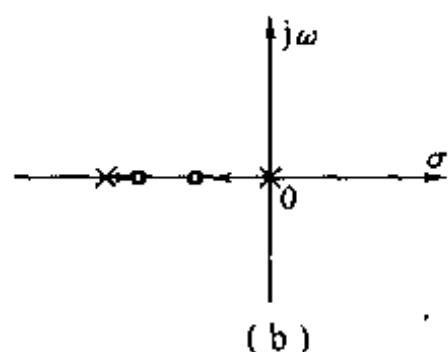
题7解图(b)



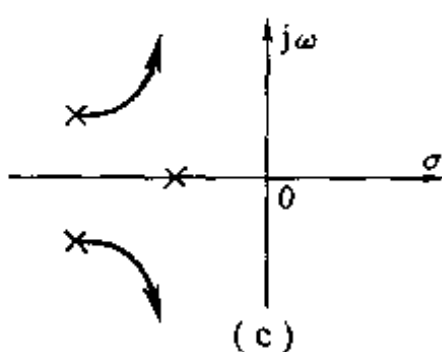
题7解图(c)



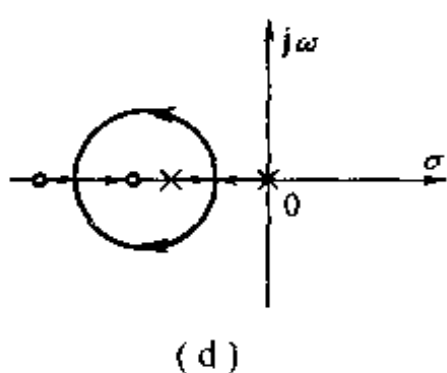
(a)



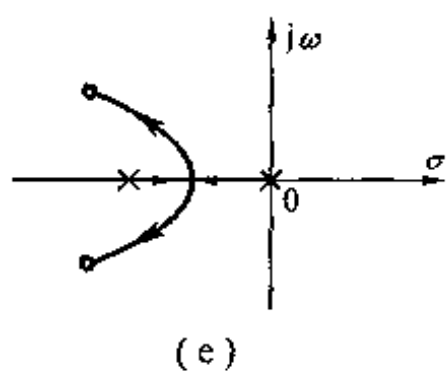
(b)



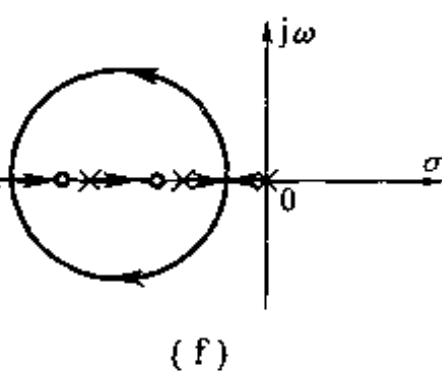
(c)



(d)



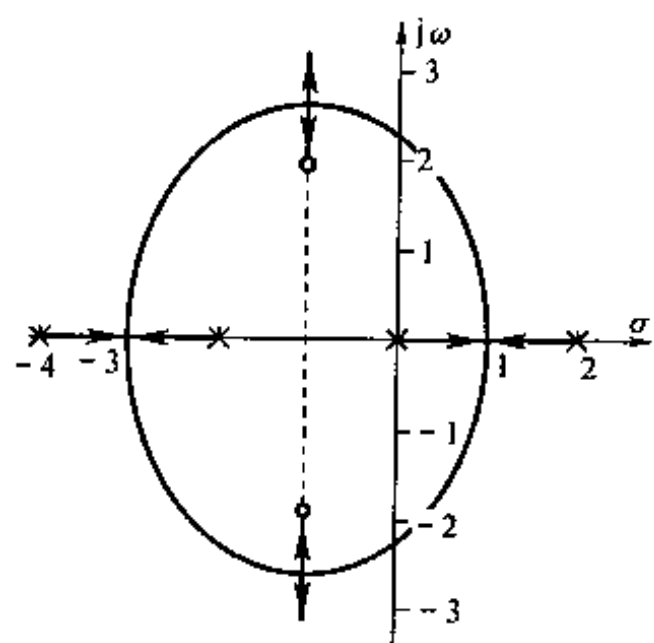
(e)



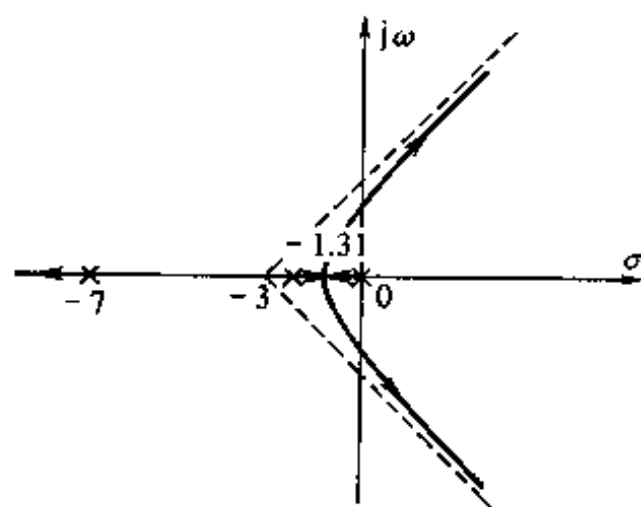
(f)

题8解图

分离点 -1.31 , 对应 $k = 12.6$, 根轨迹与虚轴交于 $\pm 4.58j$, 对应的 $k = 210$ 。当 $12.6 < k < 210$ 时, 系统具有一对负实部共轭复数极点, 具有欠阻尼阶跃响应。



题9解图



题10解图

第 5 章 线性系统的频域分析

书后习题解析

5-1 一环节的传递函数为

$$G(s) = \frac{T_1 s + 1}{T_2 s - 1} \quad (1 > T_1 > T_2 > 0)$$

试绘制该环节的 Nyquist 图(幅相频率特性)和 Bode 图(对数频率特性)。

解 该环节的频率响应为

$$G(j\omega) = \frac{1 + jT_1\omega}{-1 + jT_2\omega}$$

(1) 幅频特性和相频特性分别为

$$|G(j\omega)| = \frac{\sqrt{1 + (T_1\omega)^2}}{\sqrt{1 + (T_2\omega)^2}}, \angle G(j\omega) = \arctan(T_1\omega) + (-180^\circ + \arctan(T_2\omega))$$

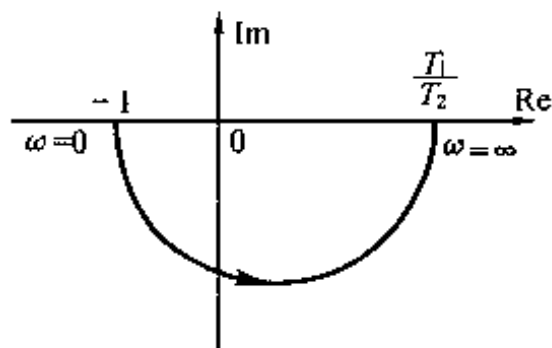
当 $\omega = 0$ 时, $|G(j0)| = 1$, $\angle G(j0) = -180^\circ$; 当 $\omega = \infty$ 时, $|G(j\infty)| = \frac{T_1}{T_2}$, $\angle G(j\infty) = 0^\circ$ 。

给定环节的 Nyquist 图如题 5-1 解图(1)所示。

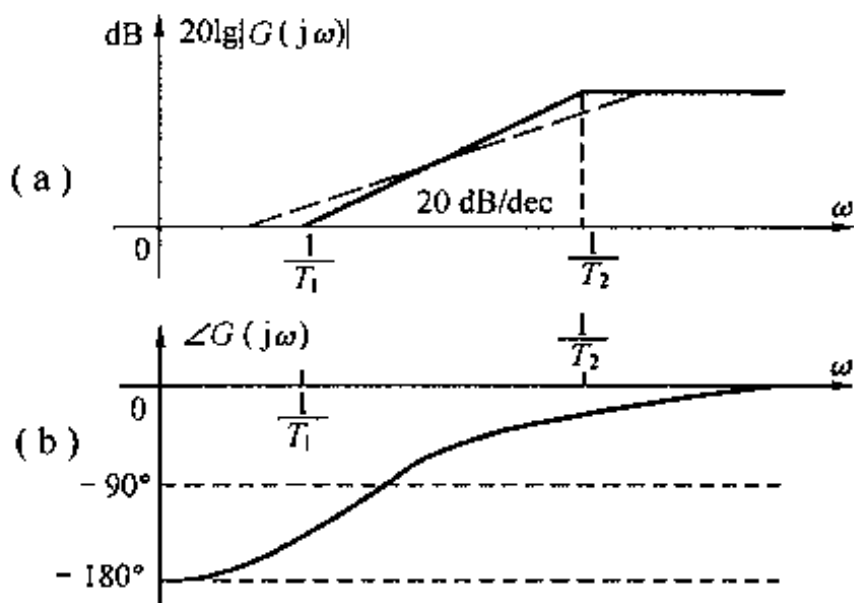
(2) 对数幅频特性为

$$20\lg|G(j\omega)| = 20\lg\sqrt{1 + (T_1\omega)^2} + 20\lg\frac{1}{\sqrt{1 + (T_2\omega)^2}}$$

其中 $\frac{1}{T_1}$ 与 $\frac{1}{T_2}$ 分别为一阶微分环节及不稳定惯性环节的转折频率。则在频段内画出该环节的对数幅频特性和相频特性如题 5-1 解图(2)(a), (b) 所示。



题 5-1 解图(1)



题 5-1 解图(2)

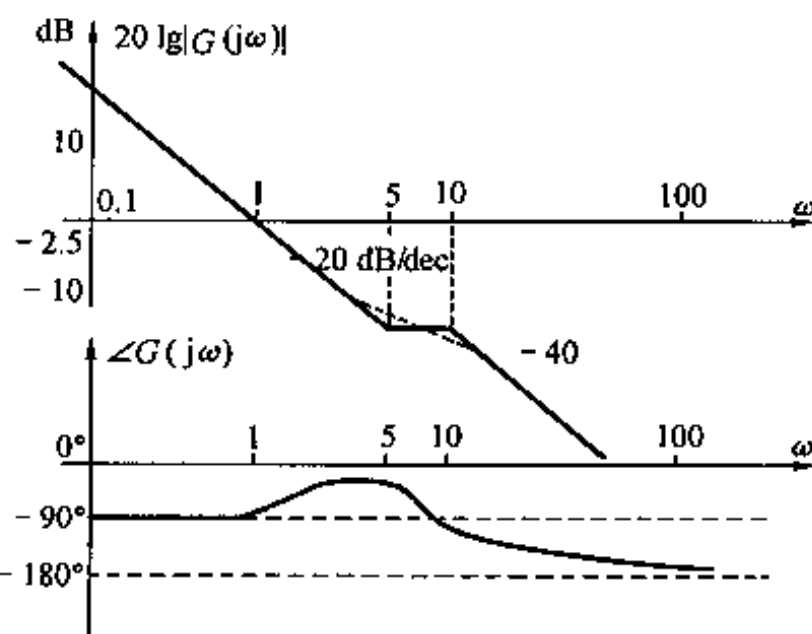
5-2 设某控制系统的开环传递函数为 $G(s)H(s) = \frac{75(0.2s+1)}{s(s^2+16s+100)}$, 试绘制该系统的 Bode 图, 并确定其剪切频率 ω_c 之值。

解 (1) 绘制系统的 Bode 图之前, 先将构成传递函数的各串联环节化成典型环节所具有的标准形式

$$\frac{0.75(0.2s+1)}{s[(0.1)^2s^2+2\times 0.8\times 0.1s+1]}$$

则有, 开环增益 $K=0.75\text{ s}^{-1}$, 一阶微分环节的时间常数 $\tau=0.2\text{ s}$, 振荡环节的时间常数 $T=0.1\text{ s}$ 及阻尼比 $\zeta=0.8$, 转折频率分别为 $\frac{1}{\tau}=5\text{ rad/s}$ 及 $\frac{1}{T}=10\text{ rad/s}$ 。绘制系统渐近幅频特性及相频特性如题 5-2 解图中的实线所示。

图中的虚线为修正后的精确幅频特性, 转折频率处的修正值为 $20\lg\frac{1}{2\zeta} = -4.08$ 。并且 $20\lg|G(j\omega)H(j\omega)|_{\omega=1} = 20\lg K = -2.5\text{ dB}$ 。



题 5-2 解图

(2) 对数幅频特性 $20\lg\left|\frac{K}{j\omega_c}\right| = 20\lg 0.75 - 20\lg\omega_c = 0$, 求得 $\omega_c = 0.75\text{ rad/s}$ 。

5-3 设某系统的开环传递函数为 $G(s)H(s) = \frac{Ke^{-0.1s}}{s(s+1)(0.1s+1)}$, 试通过该系统的频率响应确定剪切频率 $\omega_c = 5\text{ rad/s}$ 时的开环增益 K 。

解 该系统的开环幅频特性为

$$|G(j\omega)H(j\omega)| = \left| \frac{K}{j\omega(1+j\omega)(1+j0.1\omega)} \right| = \frac{K}{\omega\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{1+(0.1\omega)^2}}$$

对于时滞环节 $e^{-0.1s}$, 有 $|e^{-j\omega}| = 1$ 。所以求取其幅频特性 $|G(j\omega)H(j\omega)|$ 时, 可不考虑时滞环节。

根据剪切频率的定义得

$$|G(j\omega_c)H(j\omega_c)| = 1$$

因此, 将 $\omega_c = 5\text{ rad/s}$ 代入上式, 解出开环增益 $K = 28.5\text{ s}^{-1}$ 。

5-4 若系统的单位阶跃响应为

$$c(t) = 1 - 1.8e^{-4t} + 0.8e^{-9t} \quad (t \geq 0)$$

试求取该系统的频率响应。

解 由响应表达式得 $c(0) = 0$ 和 $\dot{c}(0) = 0$ 。则求得该系统的传递函数 $G(s)$ 为

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{36}{(s+4)(s+9)}$$

根据解析法求得该系统的频率响应为

$$G(j\omega) = \frac{1}{\left(1+j\frac{1}{4}\omega\right)\left(1+j\frac{1}{9}\omega\right)}$$

5-5 已知最小相位系统 Bode 图的幅频特性如题 5-5 图所示。试求取该系统的开环传

递函数。

解 从题 5-5 图所示 Bode 图的幅频特性的斜率变化可知,开环传递函数 $G(s)$ 由放大环节及两个惯性环节构成,其时间常数分别为 $\frac{1}{\omega_1}$ 和 $\frac{1}{\omega_2}$, 则

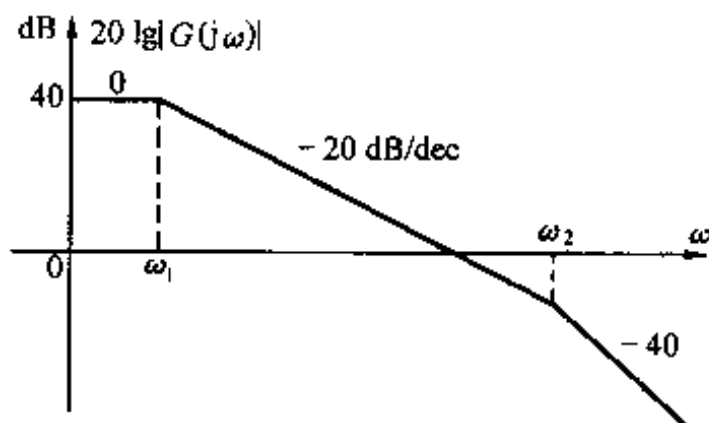
$$G(s) = \frac{K}{\left(\frac{1}{\omega_1}s + 1\right)\left(\frac{1}{\omega_2}s + 1\right)}$$

其中开环增益 K 可由 $20\lg K = 40$ dB 求得。

因此得

$$K = 100$$

所以该系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{100}{\left(\frac{1}{\omega_1}s + 1\right)\left(\frac{1}{\omega_2}s + 1\right)}$ 。

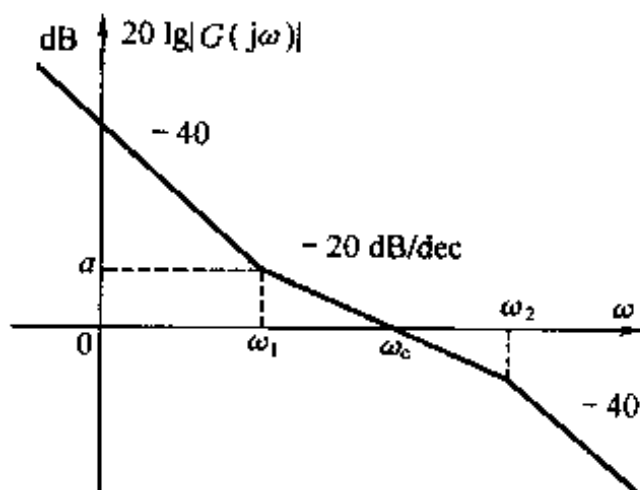


题 5-5 图

5-6 已知最小相位系统 Bode 图的幅频特性如题 5-6 图所示。试求取该系统的开环传递函数。

解 从题 5-6 图所示 Bode 图的幅频特性的斜率及其斜率变化可知,开环传递函数 $G(s)$ 由放大环节、两个积分环节、一阶微分环节及惯性环节构成。一阶微分环节及惯性环节的时间常数分别为 $\frac{1}{\omega_1}$ 和 $\frac{1}{\omega_2}$ 。开环传递函数 $G(s)$ 具有如下形式

$$G(s) = \frac{K\left(\frac{1}{\omega_1}s + 1\right)}{s^2\left(\frac{1}{\omega_2}s + 1\right)}$$



题 5-6 图

设图所示对数幅频特性的低频段可用传递函数 K/s^2 来描述,则其对数幅频特性为

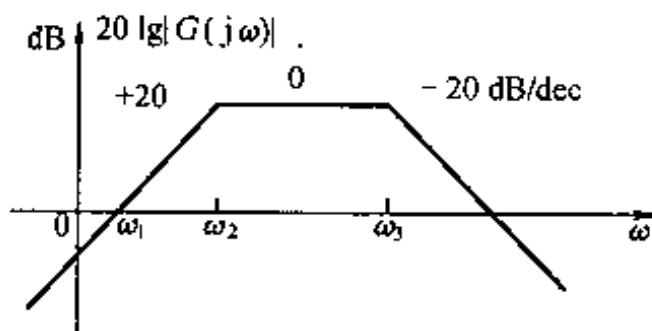
$$L_1(\omega) = 20\lg \frac{K}{\omega^2} = 20\lg K - 20\lg \omega^2$$

并且 $\frac{a - 0}{\lg \omega_1 - \lg \omega_c} = -20$, 求得 $a = 20\lg \frac{\omega_c}{\omega_1}$ 。因为 $a = L_1(\omega_1)$, 求得 $K = \omega_1 \cdot \omega_c$ 。

所以该系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{\omega_1 \cdot \omega_c \left(\frac{1}{\omega_1}s + 1\right)}{s^2 \left(\frac{1}{\omega_2}s + 1\right)}$ 。

5-7 已知最小相位系统 Bode 图的幅频特性如题 5-7 图所示。试求取该系统的开环传递函数。

解 由图可知,系统的开环传递函数 $G(s)$ 由放大环节、微分环节及两个惯性环节构成。两个惯性环节的时间常数分别为 $1/\omega_2$ 和 $1/\omega_3$ 。开环传递函数 $G(s)$ 具有如下形式



题 5-7 图

$$G(s) = \frac{Ks}{\left(\frac{1}{\omega_2}s + 1\right)\left(\frac{1}{\omega_3}s + 1\right)}$$

题 5-7 图所示幅频特性低频段可用式 $L(\omega) = 20\lg K\omega$ 表示, 由图得 $L(\omega_1) = 0$ dB。则求得 K

$$= \frac{1}{\omega_1}。所以该系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{\frac{1}{\omega_1}s}{\left(\frac{1}{\omega_2}s + 1\right)\left(\frac{1}{\omega_3}s + 1\right)}$ 。$$

5-8 已知最小相位系统 Bode 图的幅频特性如题 5-8 图所示。试求取该系统的开环传递函数。

解 由图可知, 系统的开环传递函数由放大环节、积分环节、一阶微分环节及振荡环节构成。一阶微分环节及振荡环节的时间常数分别为 1 和 0.4。开环传递函数可写成如下形式

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s[(0.4)^2s^2 + 2\zeta \times 0.4s + 1]}$$

幅频特性低频段可用下式表示 $L_1(\omega) = 20\lg \frac{K}{\omega}$, 并且

$L_1(1) = 20$, 则求得 $K = 10 \text{ s}^{-1}$ 。

振荡环节在其转折频率 $\omega_n = 2.5 \text{ rad/s}$ 处的修正值为 $20\lg \frac{1}{2\zeta} = 28 - 20 = 8 \text{ dB}$, 解出阻尼比 $\zeta = 0.2$ 。所以该系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{10(s+1)}{s(0.16s^2 + 0.16s + 1)}$$

5-9 已知最小相位系统 Bode 图的幅频特性如题 5-9 图所示。试求取该系统的开环传递函数。

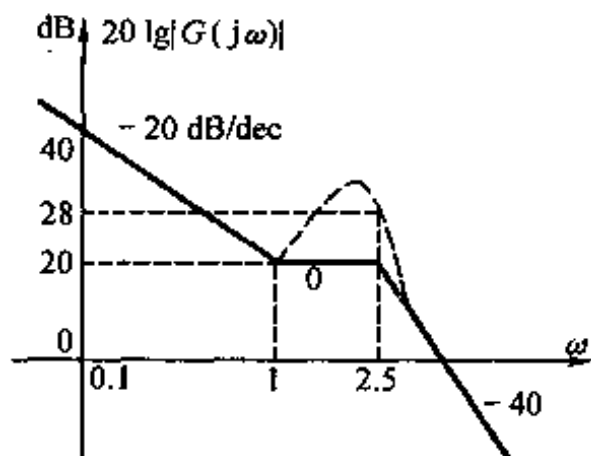
解 由图可知, 系统的开环传递函数 $G(s)$ 由放大环节、二阶微分环节、振荡环节和惯性环节构成。开环传递函数 $G(s)$ 可写成如下形式

$$G(s) = \frac{K(\tau^2s^2 + 2\zeta_1\tau s + 1)}{(T^2s^2 + 2\zeta_2Ts + 1)(T_1s + 1)}$$

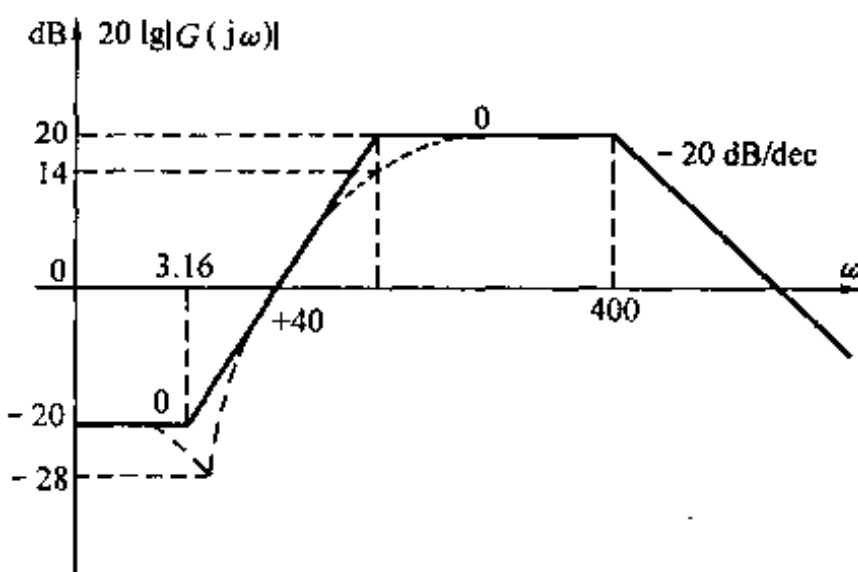
其中 $1/\tau = 3.16 \text{ rad/s}$, $1/T = 31.6 \text{ rad/s}$, $1/T_1 = 400 \text{ rad/s}$ 。二阶微分环节和振荡环节相对应的转折频率间幅频特性的斜率为 $+40 \text{ dB/dec}$, 而上述两转折频率处的对数幅值之差为 $+40 \text{ dB}$, 可见振荡环节的转折频率为 31.6 rad/s 。

振荡环节在其转折频率处的修正值为 $20\lg \frac{1}{2\zeta_2} = 14 - 20 = -6 \text{ dB}$, 解出阻尼比 $\zeta_2 = 1$ 。

二阶微分环节在其转折频率处的修正值为 $20\lg 2\zeta_1 = -28 + 20 = -8 \text{ dB}$, 解出阻尼比 $\zeta_1 = 0.2$ 。



题 5-8 图



题 5-9 图

根据幅频特性低频段求得 $20\lg K = -20 \text{ dB}$, $K = 0.1$ 。

$$\text{所以该系统的开环传递函数为 } G(s) = \frac{0.1 \left[\left(\frac{1}{3.16} \right)^2 s^2 + 2 \times 0.2 \times \frac{1}{3.16} s + 1 \right]}{\left[\left(\frac{1}{31.6} \right)^2 s^2 + 2 \times 1 \times \frac{1}{31.6} s + 1 \right] \left(\frac{1}{400} s + 1 \right)}。$$

5-10 已知最小相位系统 Bode 的幅频特性如题 5-10 图所示。试求取该系统的开环传递函数。

解 根据图中所示幅频特性各段斜率的变化, 可写出具有如下形式的开环传递函数

$$G(s) = \frac{K}{s(T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1)}$$

幅频特性低频段可用式 $L(\omega) = 20\lg K - 20\lg \omega$ 表示, 由图得 $L(100) = 0$, 则求得 $K = 100$ 。

对于振荡环节, 其谐振峰值处的修正值为

$$20\lg \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} = 4.85, \text{ 解出振荡环节的阻尼比 } \zeta =$$

0.3。并且谐振频率 $\omega_m = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2} = 45.3 \text{ rad/s}$, 解出的无阻尼自振频率 $\omega_n = 50 \text{ rad/s}$, 则振荡环节的时间常数 $T = \frac{1}{50} = 0.02 \text{ s}$ 。最后求得开环传递函数为

$$G(s) = \frac{100}{s(0.0004s^2 + 0.012s + 1)}$$

5-11 已知某闭环系统的幅频、相频特性如题 5-11 图所示。试写出该闭环系统的传递函数。

解 (1) 从题 5-11 图所示相频特性的形状及相角变化规律看出该系统是一个二阶系统, 其传递函数的一般形式为

$$\Phi(s) = \frac{K}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

求得相应的幅频与相频特性分别为

$$|\Phi(j\omega)| = A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_n^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}}$$

$$\angle \Phi(j\omega) = \theta(\omega) = -\arctan \frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega^2 - \omega_n^2}$$

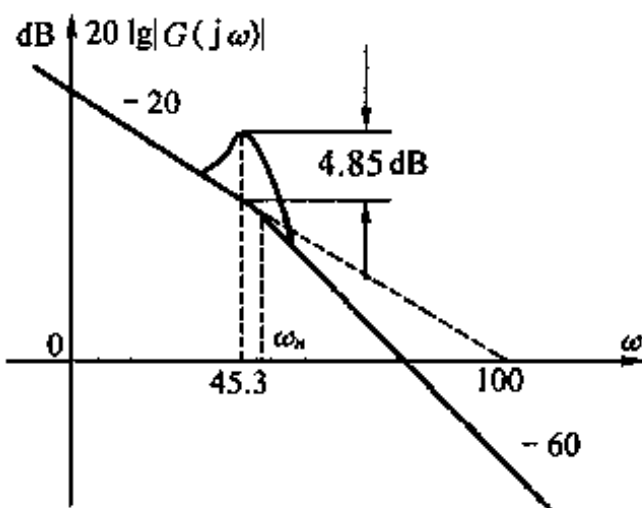
(2) 由相频特性有 $\theta(\omega_n) = -\frac{\pi}{2}$, 因此求得无阻尼自振频率 $\omega_n = 100 \text{ rad/s}$;

(3) 由幅频特性有 $A(0) = 3$, 因此求得 $K = 3 \times 10^4$;

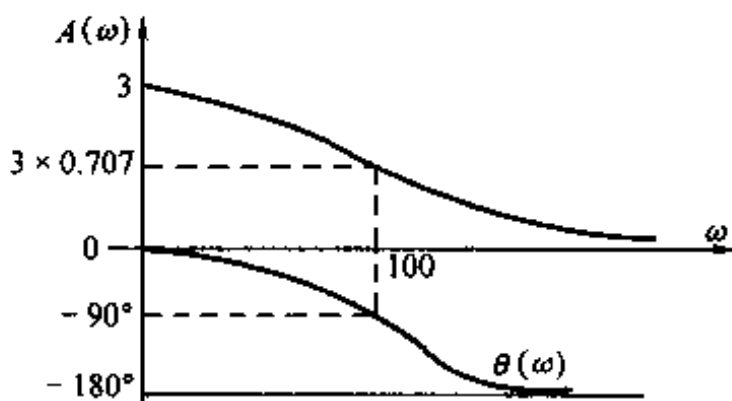
(4) 由幅频特性有 $A(\omega_n) = 3 \times 0.707$, 解出阻尼比 $\zeta = \sqrt{2}/2$ 。

根据上述计算结果, 求得该闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{3 \times 10^4}{s^2 + \sqrt{2} \times 100s + 10^4}$$



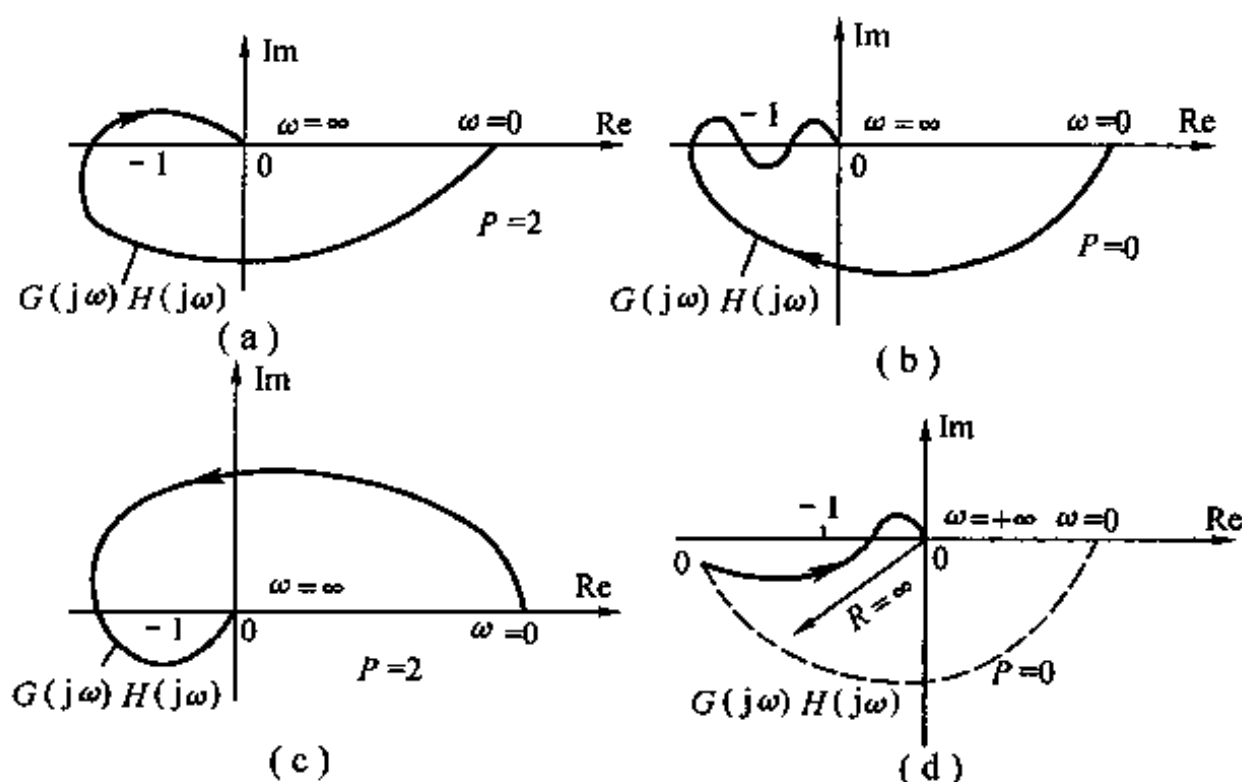
题 5-10 图



题 5-11 图

5-12 题 5-12 图所示为四个负反馈系统的开环频率响应 Nyquist 图, 图中 P 为系统含

有的位于 s 平面右半部的开环极点数目。试应用 Nyquist 稳定判据分析各闭环系统的稳定性。



题 5-12 图

解 (1)(a)图所代表的闭环系统不稳定;

(2)(b)图所代表的闭环系统稳定;

(3)(c)图所代表的闭环系统稳定;

(4)(d)图所代表的闭环系统稳定。

5-13 设某负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{10(1 + K_n s)}{s(s - 10)}$$

试确定闭环系统稳定时反馈参数 K_n 的临界值。

解 (1)该负反馈系统的特征方程为

$$s^2 + 10s(K_n - 1) + 10 = 0$$

列出 Routh 表

$$\begin{array}{ccc} s^2 & 1 & 10 \\ s^1 & 10(K_n - 1) & 0 \\ s^0 & 10 & \end{array}$$

应用 Routh 稳定判据,由 $10(K_n - 1) = 0$ 求得该负反馈系统稳定时反馈参数 K_n 的临界值为 1。

(2)还可应用 Nyquist 稳定判据进行求解。闭环系统处于临界稳定状态时,开环频率响应将通过 $|GH|$ 平面上的点 $(-1, j0)$, 则 $|G(j\omega_c)H(j\omega_c)| = 1$, $\angle G(j\omega_c)H(j\omega_c) = -180^\circ$ 。最后求得 K_n 的临界值为 1。

5-14 试通过 Bode 图根据相角裕度概念确定 5-13 题所示系统反馈参数 K_n 的临界值。

解 首先将开环传递函数化成典型环节表示的标准形式,即

$$G(s)H(s) = \frac{K_n s + 1}{s(0.1s - 1)}$$

(1)根据积分环节 $1/s$ 及不稳定惯性环节 $1/(0.1s - 1)$ 绘制出的 Bode 图如题 5-14 解图(a)

中的特性 3 所示。可见,当给定系统不考虑一阶微分环节 $K_n s + 1$ 时,此时相角裕度 $\gamma < 0$,所以闭环系统是不稳定的。

(2)考虑一阶微分环节 $K_n s + 1$ 时,若取 $K_n > 1$,即转折频率 $(1/K_n) < 1 \text{ rad/s}$,如题 5-14 解图(b)中渐近对数幅频特性 1 所示,则从与之对应的相频特性 1 可见,由于在剪切频率 ω_c 处的相角裕度 $\gamma > 0$,所以闭环系统是稳定的。若反馈参数 K_n 稍大于 1,即转折频率 $1/K_n$ 稍小于 1,系统便总是稳定的。若取 $K_n < 1$,即 $(1/K_n) > 1$,而且只要 K_n 稍小于 1,即 $1/K_n$ 稍大于 1,则系统的剪切频率 ω_c 便总等于 1。由解图(b)的特性 2 可以看到,由于在 ω_c 处的相角裕度 $\gamma < 0$,因此在 $K_n < 1$ 时系统将是不稳定的。

(3)综上分析,给定系统的反馈参数 K_n 的临界值为 1。这个结论与题 5-13 中所得到的结论是一致的。

5-15 设某单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{\tau s + 1}{s^2}$$

试确定使该系统具有相角裕度 $\gamma = +45^\circ$ 时的 τ 值。

解 给定系统的幅频特性及相频特性分别为

$$|G(j\omega)| = \frac{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}}{\omega^2}, \quad \angle G(j\omega) = -180^\circ + \arctan(\tau\omega)$$

根据相角裕度定义,有 $\gamma = 180^\circ + \angle G(j\omega_c) = 180^\circ - 180^\circ + \arctan(\tau\omega_c) = \arctan(\tau\omega_c)$, 式中 ω_c 为系统的剪切频率。

由 $\gamma = +45^\circ$ 求得 $\tau\omega_c = 1$, 并且 $|G(j\omega_c)| = 1$, 计算得 $\omega_c = \sqrt{2} = 1.19 \text{ rad/s}$ 。最后求得值系统的相角裕度 $\gamma = +45^\circ$ 时的 τ 值为

$$\tau = \frac{1}{1.19} = 0.84 \text{ s}$$

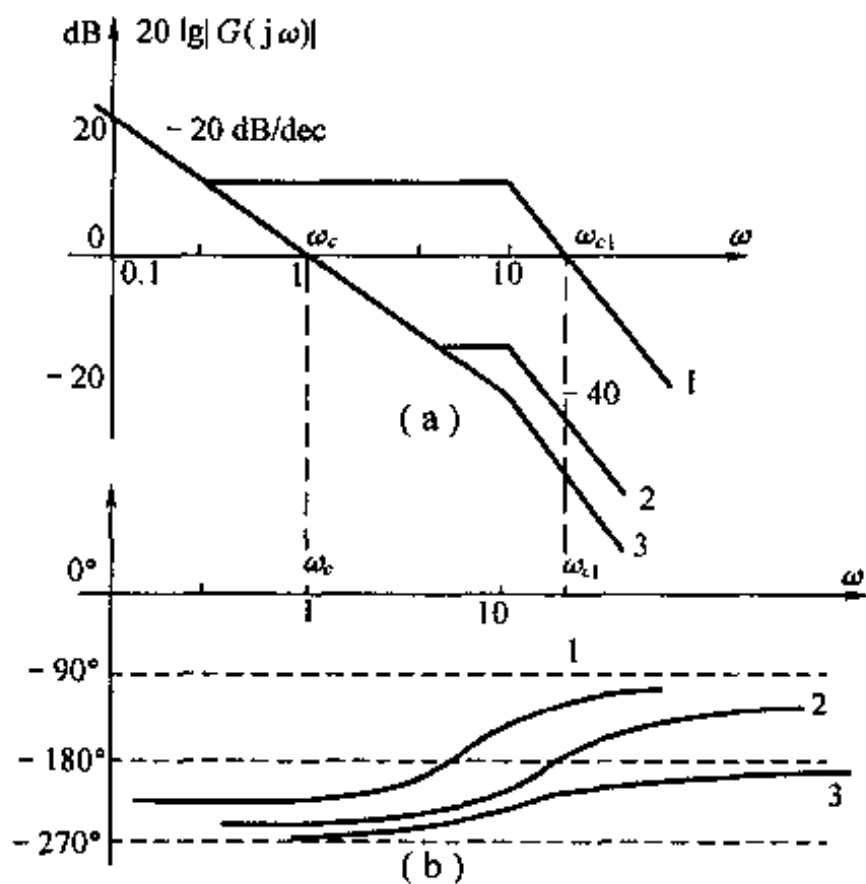
5-16 设单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{(0.01s + 1)^3}$$

试确定使相角裕度 $\gamma = 45^\circ$ 的开环增益 K 。

解 根据相角裕度定义,有 $\gamma = 180^\circ + \angle G(j\omega_c) = 180^\circ - 3\arctan(0.01\omega_c) = 45^\circ$, 求得系统的剪切频率 $\omega_c = 100$ 。并且系统的幅频特性 $|G(j\omega_c)| = \frac{K}{(\sqrt{1 + (0.01\omega_c)^2})^3} = 1$, 则可确定满足相角裕度 $\gamma = 45^\circ$ 的开环增益 $K = 2\sqrt{2}$ 。

5-17 设某单位负反馈系统的开环传递函数为



题 5-14 解图

$$G(s) = \frac{k}{s(s^2 + s + 100)}$$

若要求系统的幅值裕度为 20 dB, 则开环增益 K 应取何值?

解 给定系统的开环幅频特性与开环相频特性分别为

$$|G(j\omega)| = \frac{k}{\omega \sqrt{(100 - \omega^2)^2 + \omega^2}}, \quad \angle G(j\omega) = -90^\circ - \arctan \frac{\omega}{100 - \omega^2}$$

$$(1) \text{ 由 } \angle G(j\omega_g) = -90^\circ - \arctan \frac{\omega_g}{100 - \omega_g^2} = -180^\circ, \text{ 解得 } \omega_g = 10 \text{ rad/s};$$

$$(2) |G(j\omega_g)| = \frac{k}{10 \sqrt{(100 - 10^2)^2 + 10^2}} = \frac{k}{100}, \text{ 则幅值裕度为 } 20 \lg \left| \frac{1}{G(j\omega_g)} \right| = 20 \lg \frac{100}{k} =$$

20 dB, 解得 $k = 10$ 。则满足给定系统具有 20 dB 幅值裕度的开环增益为 $K = \frac{k}{100} = 0.1$ 。

5-18 设某单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{16}{s(s+2)}$$

试计算该系统的剪切频率 ω_c 及相角裕度 γ ; 计算闭环幅频特性的相对谐振峰值 M_r 及谐振频率 ω_r 。

解 (1) 开环幅频特性及开环相频特性分别为

$$|G(j\omega)H(j\omega)| = \frac{8}{\omega \sqrt{1 + (0.5\omega)^2}}, \quad \angle G(j\omega) = -90^\circ - \arctan(0.5\omega)$$

$$\text{对于 } \omega = \omega_c, \text{ 有 } |G(j\omega_c)H(j\omega_c)| = \frac{8}{\omega_c \sqrt{1 + (0.5\omega_c)^2}} = 1, \text{ 解得 } \omega_c = 3.76 \text{ rad/s}。$$

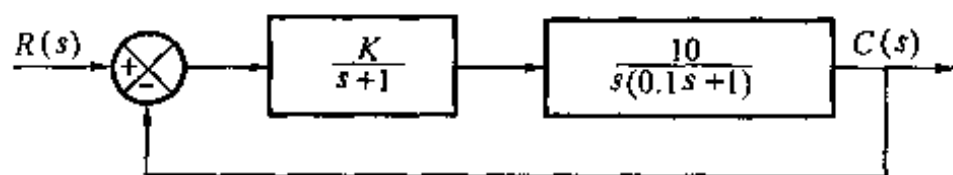
根据相角裕度定义, 得 $\gamma = 180^\circ + \angle G(j\omega_c) = 180^\circ - 90^\circ - \arctan(0.5 \times 3.76) = 28^\circ$ 。

$$(2) \text{ 给定系统的闭环传递函数 } \Phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{16}{s^2 + 2s + 16}, \text{ 与二阶系统闭环传递函数}$$

标准形式相比, 求得 $\omega_n = 4 \text{ rad/s}$, $\zeta = \frac{2}{2\omega_n} = 0.25$ 。根据二阶系统的 M_r 及 ω_r 与其参数 ζ, ω_n 的关系求得

$$M_r = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} = 2.06, \quad \omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} = 3.74 \text{ rad/s}$$

5-19 设某控制系统的方框图如题 5-19 图所示。试根据该系统响应 10 rad/s 的匀速信号时的稳态误差等于 30° 的要求确定控制器的增益 K , 并计算该系统的相角裕度及幅值裕度。



题 5-19 图

解 (1) 确定控制器的增益 K 。给定系统为 I 型系统, 则响应匀速信号 $r(t) = 10t$ 时的稳态误差为

$$e_{\infty} = \frac{10}{10K} = 30 \times \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

求得

$$K = 1.19$$

则给定系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{19.1}{s(0.1s+1)(s+1)}$

(2) 求给定系统的相角裕度

$$|G(j\omega_c)| = \frac{19.1}{\omega_c \sqrt{1+(0.1\omega_c)^2} \cdot \sqrt{1+\omega_c^2}} = 1$$

$$\omega_c = 4.15 \text{ rad/s}$$

解得

$$\gamma = 180^\circ + \angle G(j\omega_c) = 180^\circ - 90^\circ - \arctan(0.1\omega_c) - \arctan\omega_c = -9^\circ$$

(3) 求给定系统的幅值裕度

$$\angle G(j\omega_g) = -90^\circ - \arctan(0.1\omega_g) - \arctan\omega_g = -180^\circ$$

$$\omega_g = 3.2 \text{ rad/s}$$

$$|G(j\omega_g)| = \frac{19.1}{\omega_g \sqrt{1+(0.1\omega_g)^2} \cdot \sqrt{1+\omega_g^2}} \Big|_{\omega_g=3.2} = 1.7$$

则给定系统的幅值裕度为

$$20\lg K_g = 20\lg \frac{1}{|G(j\omega_g)|} = -4.6 \text{ dB}$$

5-20 设某单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(0.01s+1)(0.1s+1)}$$

(1) 计算满足闭环幅频特性的相对谐振峰值 $M_r \leq 1.5$ 时的开环增益 K ;

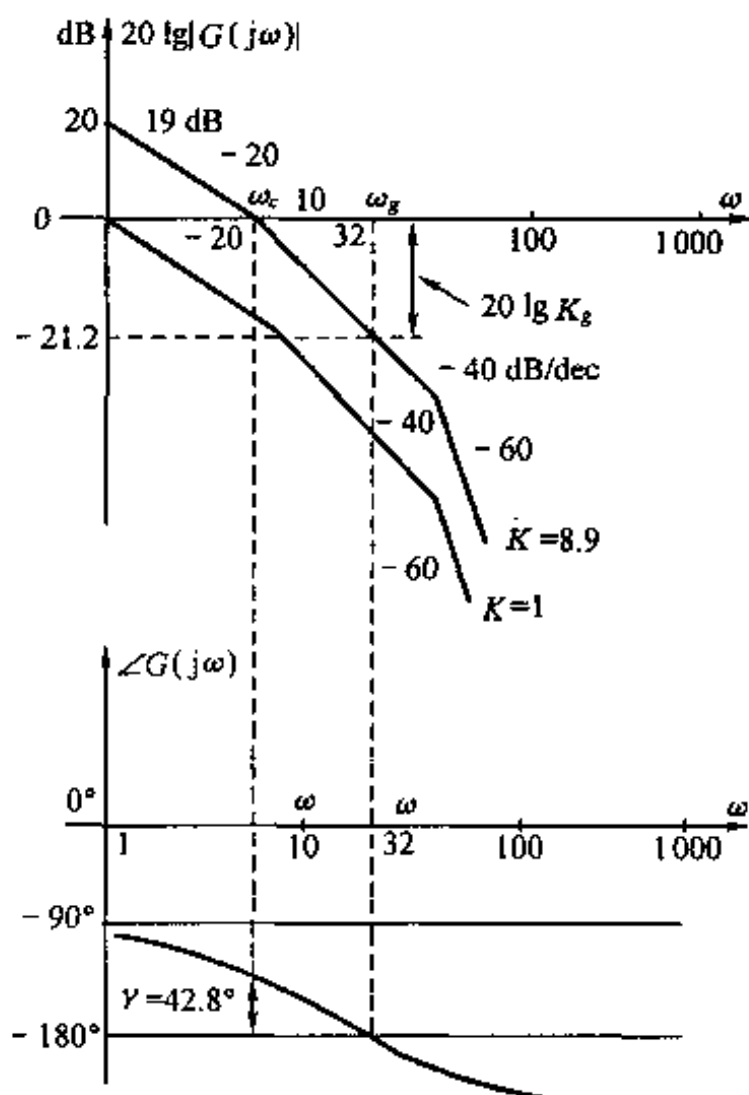
(2) 根据相角裕度及幅值裕度分析闭环系统的稳定性;

(3) 应用经验公式计算该系统的时域指标:超调量 $\sigma\%$ 及调整时间 t_s 。

解 (1) 根据相角裕度 γ 与闭环幅频特性的相对谐振峰值 M 之间的近似关系式

$$\gamma = \arcsin \frac{1}{M_r}$$

当 $M_r \leq 1.5$, $\gamma \geq 42^\circ$ 。绘制 $K=1$ 时给定系统的 Bode 图,如题 5-20 解图所示。由 Bode 图得 $\angle G(j9) = -137.2^\circ$ 。则若将给定系统的渐近对数幅频特性平行向上移,使其在 $\omega = 9 \text{ rad/s}$ 处经过横轴,即令 $\omega_c = 9 \text{ rad/s}$,则得给定系统的相角裕度 $\gamma = 42.8^\circ$,满足要求。由于在 $K=1$ 的渐近对数幅频特性上对应 $\omega = 9 \text{ rad/s}$ 的对数幅值为 -19 dB ,所以将渐近对数幅频



题 5-20 解图

特性向上平移19 dB,因此在 $\omega = 1 \text{ rad/s}$ 处有 $20\lg K = 19 \text{ dB}$,解得

$$K = 8.9 \text{ s}^{-1}$$

(2) 由上步知 $\gamma = 42.8^\circ$, 从图求得 $\omega_g = 32 \text{ rad/s}$, 求得给定系统的幅值裕度 $20\lg K_g = +21.2 \text{ dB}$ 。因为系统的 $\gamma > 0^\circ$ 以及 $20\lg K_g > 0 \text{ dB}$, 所以闭环系统是稳定的。

(3) 应用经验公式

$$\sigma\% = 0.16 + 0.4(M_r - 1)$$

$$t_s = \frac{\pi}{\omega_c} [2 + 1.5(M_r - 1) + 2.5(M_r - 1)^2]$$

将 $M_r = 1.5$ 和 $\omega_c = 9 \text{ rad/s}$ 代入上式,求得

$$\sigma\% = 36\%, \quad t_s = 1.18 \text{ s}$$

5-21 设某负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{2083(s+3)}{s(s^2+20s+625)}$$

试绘制该系统的 Bode 图,并计算剪切频率 ω_c 。

解 (1) 先将传递函数化成标准形式

$$G(s)H(s) = \frac{3 \times 2083 \left(\frac{1}{3}s + 1 \right)}{625 s (0.04^2 s^2 + 2 \times 0.04 \times 0.4s + 1)}$$

则开环增益 $K \approx 10 \text{ s}^{-1}$, 一阶微分环节的时间常数 $\tau = \frac{1}{3} \text{ s}$, 振荡环节的时间常数和阻

尼比分别为 $T = 0.04 \text{ s}$, $\zeta = 0.4$ 。一阶微分环节和振荡环节的转折频率为 $\frac{1}{\tau} = 3 \text{ rad/s}$

和 $\frac{1}{T} = 25 \text{ rad/s}$ 。绘制系统的 Bode 图如题

5-21解图所示。图中转折频率处的修正值为

$$20\lg \frac{1}{2\zeta} = 1.94$$

$$20\lg |G(j\omega)H(j\omega)|_{\omega=1} = 20\lg K = 20 \text{ dB}$$

(2) 根据渐近幅频特性有

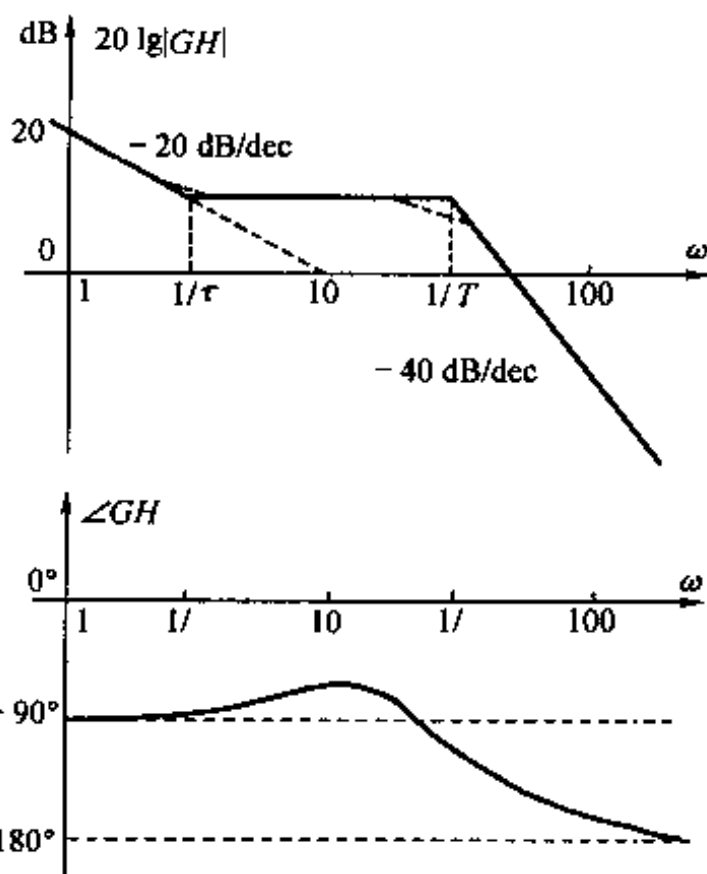
$$\frac{a}{\lg 3 - \lg 10} = -20, \quad \frac{a}{\lg 25 - \lg \omega_1} = -40$$

则 $\omega_1 = 45.6 \text{ rad/s}$, 剪切频率应稍大于 ω_1 , 试探得剪切频率 $\omega_c = 50 \text{ rad/s}$ 。

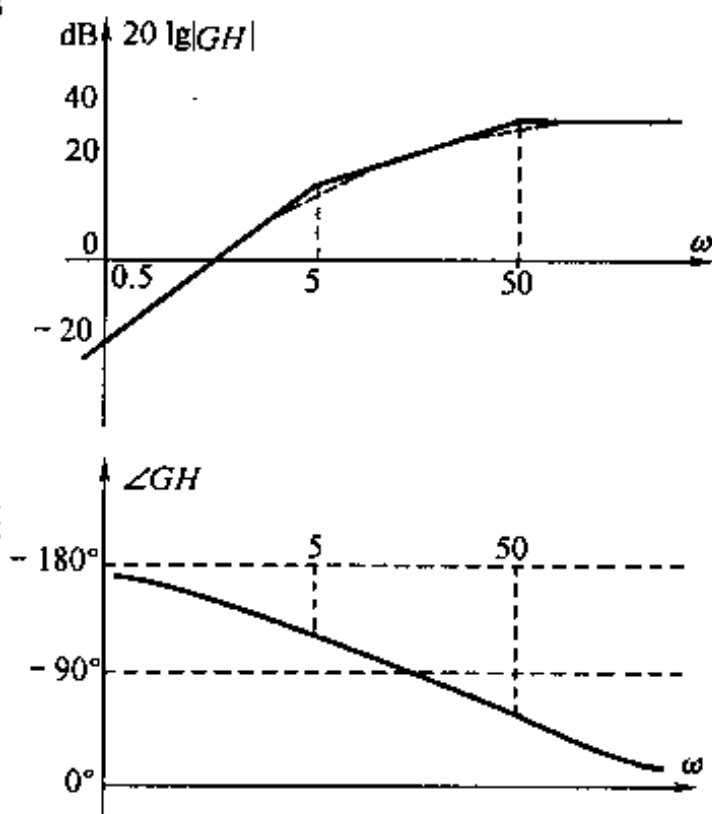
5-22 设某控制系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{Ks^2}{(0.02s+1)(0.2s+1)}$$

试绘制该系统的 Bode 图,并确定剪切频率 ω_c 。



题 5-21 解图



题 5-22 解图

= 5 rad/s 时的 K 值。

解 (1) 该系统的开环传递函数由比例环节、两个微分环节和两个惯性环节组成。两个惯性环节的转折频率分别为 $\omega_{a1} = 5 \text{ rad/s}$ 和 $\omega_{a2} = 50 \text{ rad/s}$ 。绘制系统渐近幅频特性及相频特性如题 5-22 解图中的实线所示。图中的虚线为修正后的精确幅频特性。

(2) 由剪切频率定义有 $|G(j\omega_c)H(j\omega_c)| = 1$, 则求得当 $\omega_c = 5 \text{ rad/s}$ 时, $K = 0.0568$ 。

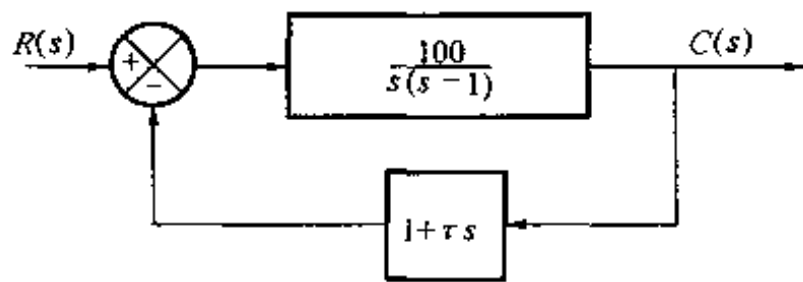
5-23 设某单位负反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{Ke^{-0.1s}}{s(s+1)}$, 试确定使闭环系统稳定的开环增益 K 的最大值。

解 系统开环幅频特性 $G(j\omega) = \frac{K}{\omega\sqrt{1+\omega^2}}$, 相频特性 $\angle G(j\omega) = -0.1\omega - 90^\circ - \arctan\omega$ 。

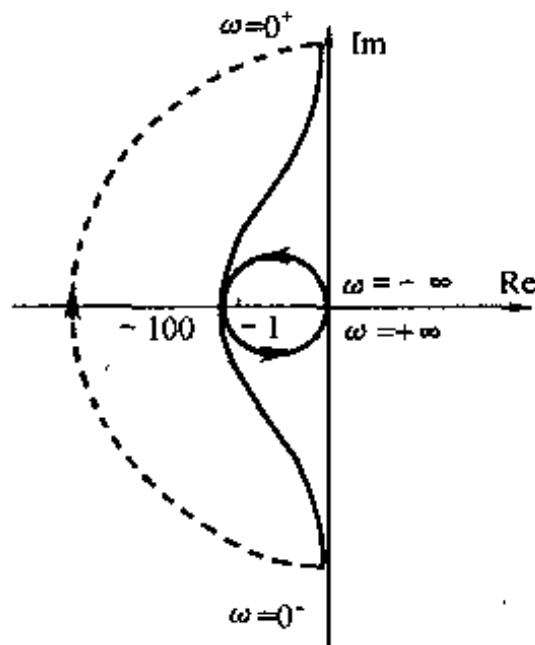
设 ω_g 为穿越频率, 则有 $-0.1\omega_g - 90^\circ - \arctan\omega_g = -180^\circ$, 解得最小穿越频率 $\omega_{gm} = 3.12$ 。绘 $G(s)$ 的线性部分 $G_1(s) = \frac{K}{s(s+1)}$ 的 Nyquist 曲线如题 5-23 解图所示。其中 $|G_1(j0^+)| = \infty$, $|G_1(j\infty)| = 0$ 。设 $K = K_0$ 时, $G(j\omega_{gm}) = -1$, 即 $K_0 = 10$ 。当

$\omega > \omega_{gm}$ 时, $|G(j\omega)| < 1$, 当 $\omega < \omega_{gm}$ 时, $|G(j\omega)| > 1$ 。已知 $P = 0$, 根据 Nyquist 稳定判据, 为了使闭环系统稳定, 系统的 Nyquist 曲线不包围 $(-1, 0j)$ 点, 所以闭环系统稳定的开环增益 K 的最大值为 $K_{\max} = K_0 = 10$ 。

5-24 已知某控制系统的方框图如题 5-24 图所示。试确定闭环系统稳定时反馈系数 τ 的取值范围, 并绘制该系统开环频率响应的 Nyquist 图。



题 5-24 图



题 5-24 解图

解 系统的闭环传递函数为 $\Phi(s) = \frac{100}{s^2 + (100\tau - 1)s + 100}$, 则特征方程为 $s^2 + (100\tau - 1)s + 100 = 0$

列劳斯表

$$\begin{array}{ccc} s^1 & 1 & 100 \\ s^1 & 100\tau - 1 & 0 \\ s^0 & 100 & 0 \end{array}$$

应用 Routh 稳定判据, 闭环系统稳定时反馈系数 τ 的取值范围为 $\tau > 0.01$ 。根据 τ 的取值范围, 绘制该系统开环频率响应的 Nyquist 图如题 5-24 解图所示。

5-25 已知最小相位系统 Bode 图的渐近幅频特性如题 5-25 图所示。试求取该系统的开环传递函数。

解 由题 5-25 图可知, 系统的开环传递函数 $G(s)$ 由放大环节、两个积分环节、一个微分环节及一个惯性环节构成。开环传递函数 $G(s)$ 具有如下形式

$$G(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s^2(Ts + 1)}$$

且 $\frac{1}{\tau} = 0.1, \frac{1}{T} = 1$, 则 $\tau = 10, T = 1$ 。渐近幅频特性低频段可用下式表示

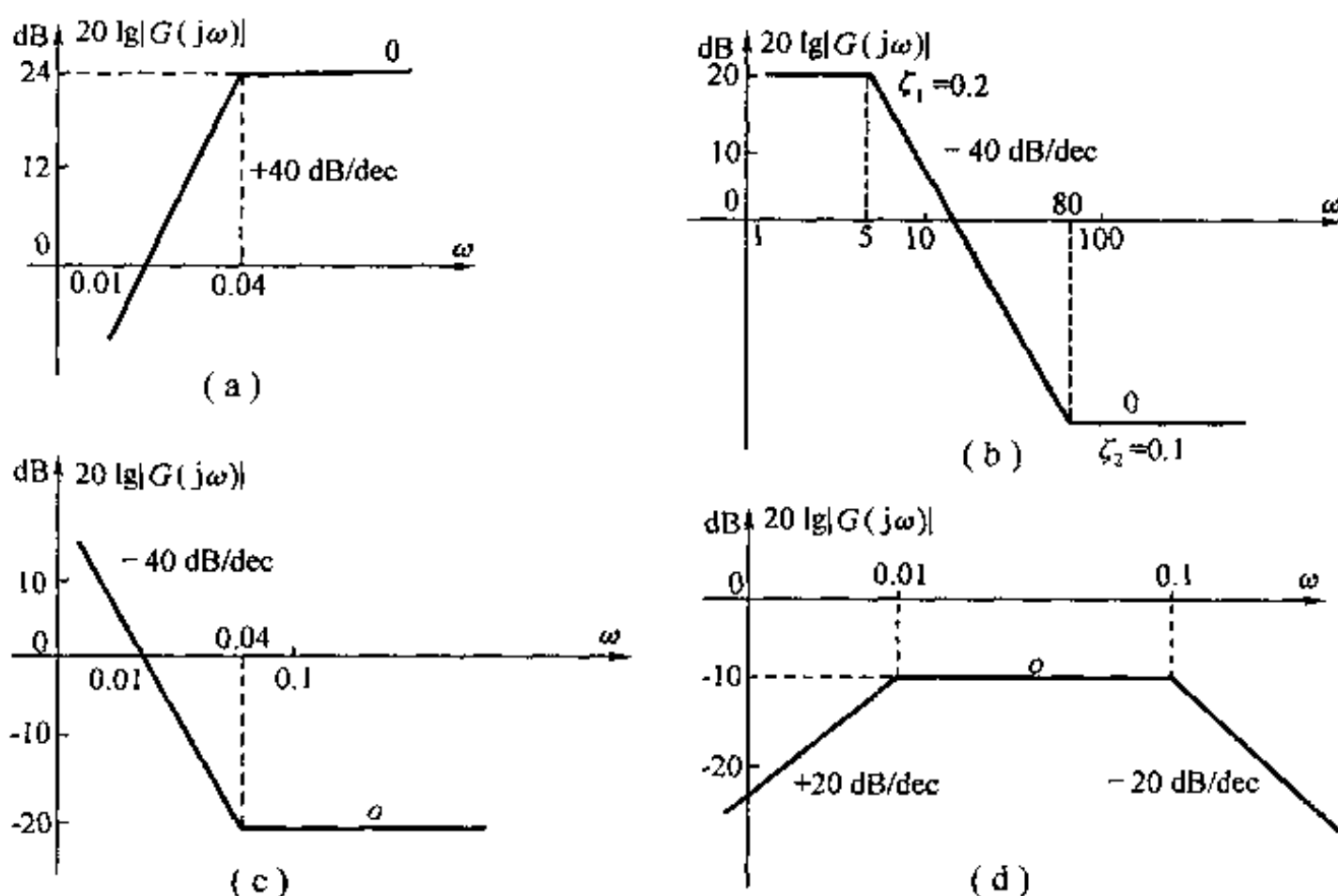
$$L(\omega) = 20 \lg \frac{K}{\omega^2}$$

由图得, $L(0.1) = 20 \text{ dB}$, 则求得 $K = 0.1$ 。所以该系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{0.1(10s + 1)}{s^2(s + 1)}$$

5-26 已知最小相位系统 Bode 图的渐近幅频特性如题 5-26 图所示。试求取各系统的开环传递函数。

解 方法同上题, 求得各系统的开环传递函数为:



题 5-26 图

$$(a) G(s) = \frac{10^4 s^2}{(25s + 1)^2};$$

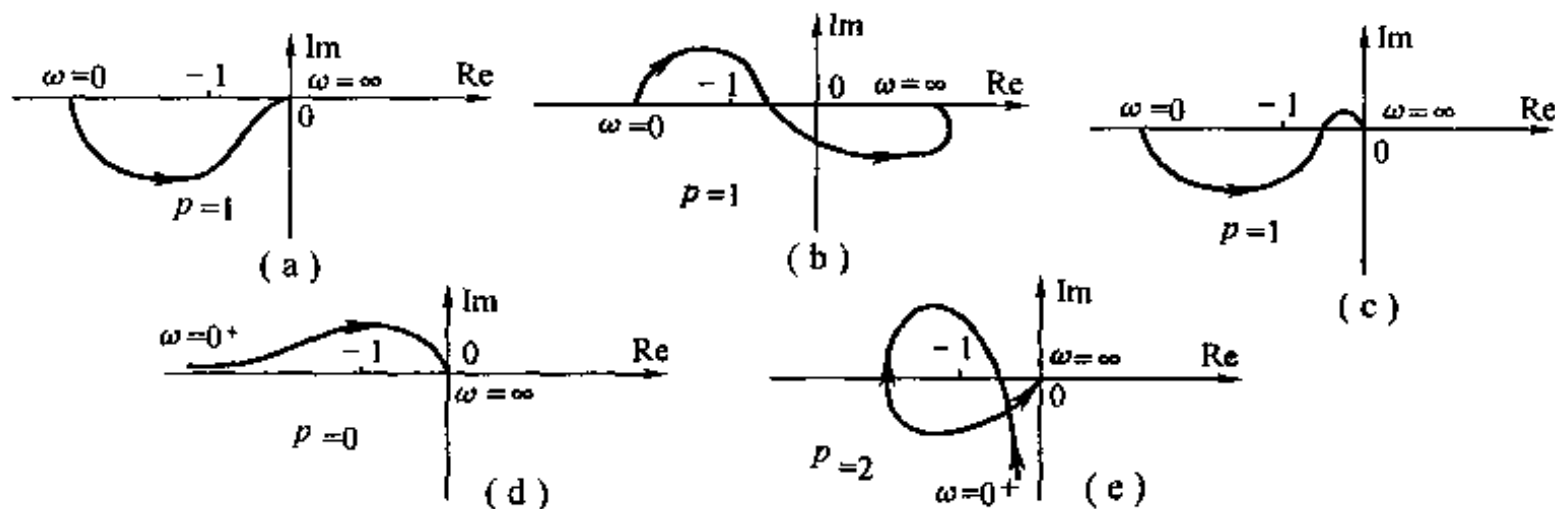
$$(b) G(s) = \frac{10 \left[\left(\frac{1}{80} \right)^2 s^2 + 2 \times 0.1 \times \frac{1}{80} s + 1 \right]}{\left(\frac{1}{5} \right)^2 s^2 + 2 \times 0.2 \times \frac{1}{5} s + 1};$$

$$(c) G(s) = \frac{10^{-4} (25s + 1)^2}{s^2};$$

$$(d) G(s) = \frac{31.62s}{(10s + 1)(100 + 1)^0}.$$

5-27 设控制系统开环频率响应的 Nyquist 图如题 5-27 图所示, 试应用 Nyquist 稳定判据判别闭环系统的稳定性。

解 对于(a), (b), (c)图, 根据系统的开环频率响应当 ω 从 $-\infty$ 变至 0 及从 0 变至 $+\infty$ 时的两部分特性对称于实轴, 可将 Nyquist 曲线补全。对于(d)、(e)图, 在此基础上, 还要将增补的幅频特性补全。



题 5-27 图

(a) $N = -1, P = 1, Z = 0$, 闭环系统稳定;

(b) $N = 1, P = 1, Z = 2$, 闭环系统不稳定;

(c) $N = -1, P = 1, Z = 0$, 闭环系统稳定;

(d) $N = 2, P = 0, Z = 2$, 闭环系统不稳定;

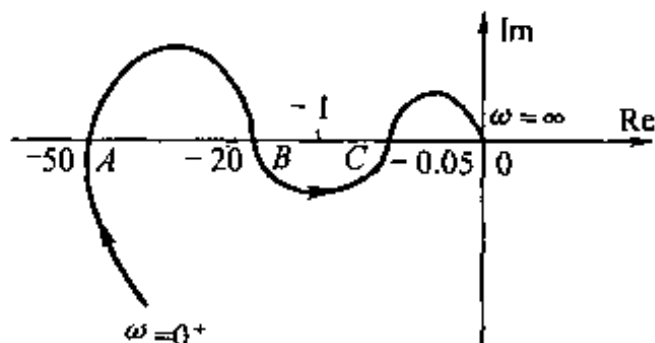
(e) $N = -2, P = 2, Z = 0$, 闭环系统稳定。

5-28 已知某负反馈系统开环频率响应的 Nyquist 图如题 5-28 图所示。该系统的开环增益 $K = 500$ 以及在 s 平面右半部的开环极点数 $p = 0$ 。试分析 K 的取值对该闭环系统稳定性的影响。

解 改变 K 值只会压缩或扩大该图形, 不改变大体的形状。

(1) 当 $K/50 = 10$, A 点到达 $(-1, 0j)$, 则 $K < 10$ 时, 系统开环频率响应无包围 $(-1, 0j)$ 的正、负穿越, 所以闭环系统稳定;

(2) 当 $K/20 = 25$, B 点到达 $(-1, 0j)$, 则 $10 < K < 25$ 时, 系统开环频率响应有包围 $(-1, 0j)$



题 5-28 图

负穿越一次,所以闭环系统不稳定;

(3)当 $K/0.05 = 10^4$, C 点到达 $(-1, 0j)$, 则 $25 < K < 10^4$ 时, 系统开环频率响应有包围 $(-1, 0j)$ 正、负穿越各一次, 所以闭环系统稳定;

(4)当 $K > 10^4$ 时, 系统开环频率响应有包围 $(-1, 0j)$ 正穿越一次、负穿越两次, 所以闭环系统不稳定。所以, 当 $K < 10$ 和 $25 < K < 10^4$, 闭环系统稳定; 当 $10 < K < 25$ 和 $K > 10^4$, 闭环系统不稳定。

5-29 已知最小相位系统 Bode 图的渐近幅频特性如题 5-29 图所示。试计算该系统的相角裕度及幅值裕度。

解 根据该系统 Bode 图的渐近幅频特性低频段知 $K = 10 \text{ s}^{-1}$, 且开环传函为

$$G(s) = \frac{10}{s(0.01^2 s^2 + 2 \times 0.01 \times 0.1 s + 1)}$$

转折频率处的修正值为 $20 \lg \frac{1}{2\zeta} = 14 \text{ dB}$, 根据幅频和相频特性得 $\omega_c = 10 \text{ rad/s}$, $\omega_g = 100 \text{ rad/s}$ 。则

$$(1) \gamma = 180^\circ + \angle G(j\omega_c) = 180^\circ + \left(-90^\circ + \arctan \frac{0.02}{0.99} \right) = 88.8^\circ;$$

$$(2) 20 \lg K_g = -20 \lg |G(j\omega_g)| = 6 \text{ dB}。$$

5-30 已知单位负反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{100}{s(Ts + 1)}$, 试计算当系统的相角裕度 $\gamma = 36^\circ$ 时的 T 值和系统闭环幅频特性的相对谐振峰值 M_r 。

解 (1) 相角裕度 $\gamma = 180^\circ + \angle G(j\omega_c) = 90^\circ - \arctan T\omega_c = 36^\circ$, 则 $T\omega_c = \tan 54^\circ$ 。

并且由 $|G(j\omega_c)| = \frac{100}{\omega_c \sqrt{1 + (T\omega_c)^2}} = 1$, 得 $\omega_c = 58.8 \text{ rad/s}$, 则 $T = 0.02$ 。

(2) 该单位负反馈系统的闭环传递函数为 $\Phi(s) = \frac{100}{s(0.02s + 1) + 100} = \frac{5000}{s^2 + 50s + 5000}$, 则

$$\omega_n = 70.7 \text{ rad/s}, \zeta = 0.35$$

相对谐振峰值为

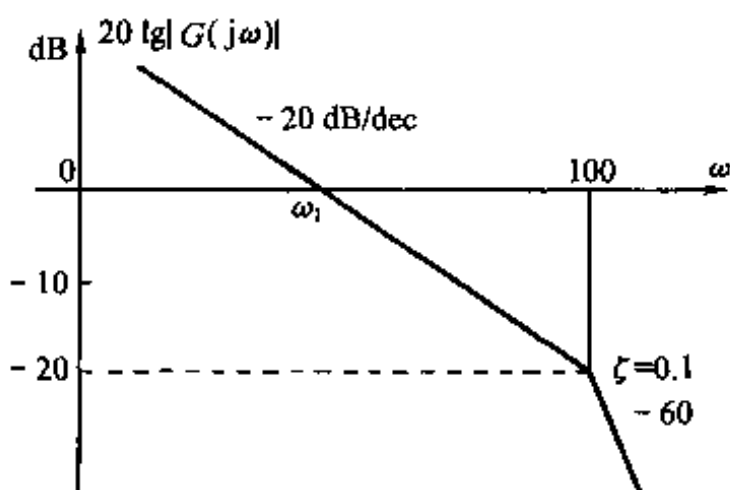
$$M_r = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} = 1.53$$

5-31 已知最小相位系统 Bode 图的渐近幅频特性如题 5-31 图所示。试计算该系统在 $r(t) = t^2/2$ 作用下的稳态误差和相角裕度。

解 由题 5-31 图知该最小相位系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{100(0.25s + 1)}{s^2(0.005s + 1)}$ 。

(1) 该系统在 $r(t) = t^2/2$ 作用下的稳态误差 $e_\infty = \frac{1}{K_a} = \frac{1}{100} = 0.01$;

(2) 由渐近幅频特性的各频段斜率得 $\frac{40 - a}{\lg 1 - \lg 4} = -40$, $\frac{a}{\lg \omega_c - \lg 4} = -20$, 则初步推知 $\omega_c = 25 \text{ rad/s}$, 且验证满足 $|G(j\omega_c)| = 1$, $\gamma = 180^\circ + \angle G(j\omega_c) = 180^\circ + \arctan 0.25\omega_c - 180^\circ -$



题 5-29 图

$\arctan 0.005\omega_c = 73.7^\circ$ 。

5-32 设单位负反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{7}{s(0.087s+1)}$, 试应用频率响应法计算该系统的时域指标: 单位阶跃响应的超调量 $\sigma_p\%$ 及调整时间 t_s 。

解 该系统的闭环传递函数为 $\Phi(s) = \frac{90.5}{s^2 + 11.5s + 90.5}$, 则 $\omega_n = 9.97 \text{ rad/s}$, $\zeta = 0.58$ 。

(1) 相对谐振峰值为

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} = 1.3$$

单位阶跃响应的超调量 $\sigma_p\% = e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% = 10.7\%$

(2) 谐振峰值为

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2} = 5.7$$

调整时间

$$t_s = \frac{1}{\omega_n} \sqrt{\frac{2\sqrt{M_r^2-1}}{M_r - \sqrt{M_r^2-1}}} \cdot \ln \frac{\sqrt{2M_r}}{\Delta \sqrt{M_r + \sqrt{M_r^2-1}}}$$

则当 $\Delta = 0.05$, $t_s = 0.553 \text{ s}$, 当 $\Delta = 0.02$, $t_s = 0.712 \text{ s}$ 。

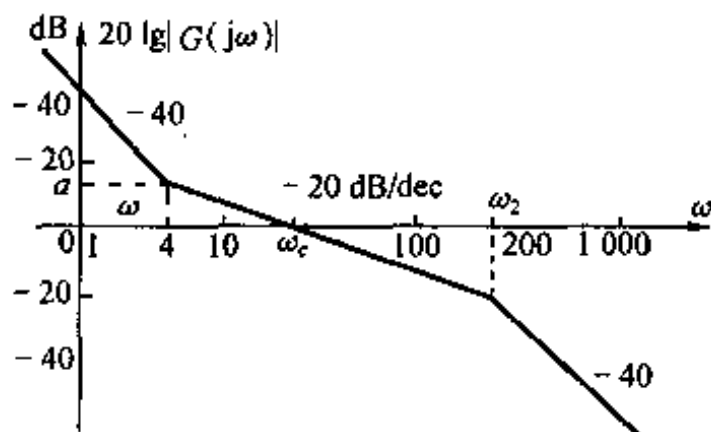
5-33 设单位负反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{48(s+1)}{s(8s+1)(\frac{1}{20}s+1)}$, 试计算该系统的剪切频率 ω_c 及相角裕度 γ , 并应用经验公式计算该系统的频域指标 M_r 及时域指标 $\sigma_p\%$, t_s 。

解 应用 MATLAB 中的 MARGIN 函数画出该系统的 BODE 图, 求出剪切频率 $\omega_c \approx 6 \text{ rad/s}$, 相角裕度 $\gamma = 55^\circ$ 。应用经验公式计算该系统的频域指标 M_r 及时域指标 $\sigma_p\%$, t_s 有

$$M_r = \frac{1}{\sin \gamma} = 1.22$$

$$\sigma_p\% = 0.16 + 0.4 \left(\frac{1}{\sin \gamma} - 1 \right) = 24.8\%$$

$$t_s = \frac{\pi}{\omega_c} [2 + 1.5(M_r - 1) + 2.5(M_r - 1)^2] = 1.28 \text{ s}$$



题 5-31 图

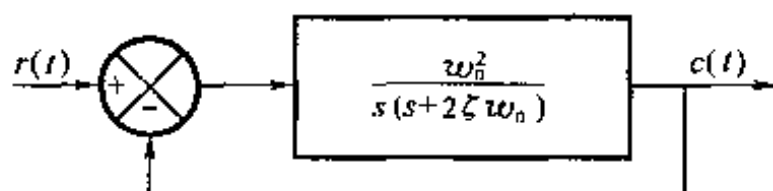
同步训练题

1. 系统的结构图如题 1 图所示, 当输入 $r(t) = 2\sin t$ 时, 测得输出 $c(t) = 4\sin(t - 45^\circ)$, 试确定系统的参数 ζ, ω_n 。

2. 若单位反馈系统的开环传递函数

$$G(s) = \frac{Ke^{-0.8s}}{s+1}$$

试确定使系统稳定的 K 值范围。



题1图

3. 设单位反馈系统的开环传递函数

$$G(s) = \frac{5s^2 e^{-\tau}}{(s+1)^4}$$

试确定闭环系统稳定时, 延迟时间 τ 的范围。

4. 对于典型二阶系统, 已知 $\sigma\% = 15\%$, 试计算相角裕度 γ 。

5. 设系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s^2(T_1s+1)(T_2s+1)} \quad (T_1, T_2, K > 0)$$

试绘制系统概略幅相特性曲线。

6. 已知系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{10}{(5s+1)(10s+1)}$$

试用奈氏判据判断系统的闭环稳定性。

7. 设最小相位系统对数幅频渐近特性如题7图所示, 试确定系统的传递函数。

8. 已知单位反馈系统的开环传递函数

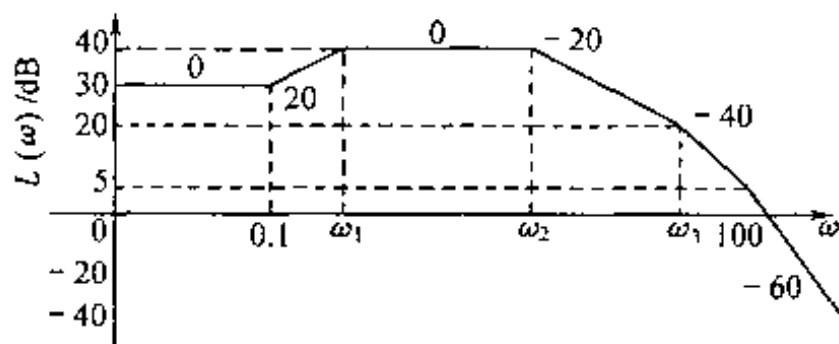
$$G(s) = \frac{100\left(\frac{s}{2} + 1\right)}{s\left(\frac{s}{10} + 1\right)\left(\frac{s}{20} + 1\right)(s+1)}$$

试求系统的相角裕度和幅值裕度。

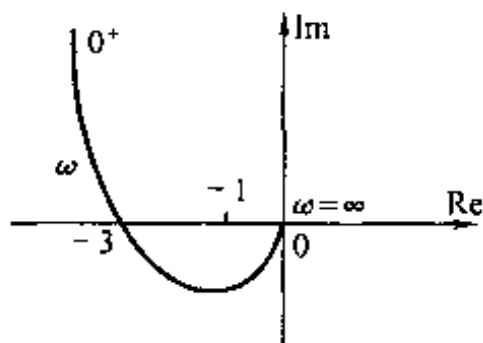
9. 对于高阶系统, 若要求时域指标为 $\sigma\% = 18\%$, $t_s = 0.05$, 试将其转化成频域指标。

10. 某线性系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K(s+z)}{s(s-p)}$, 其中 z, p 为实数, 且 $z > 0, p > 0, K =$

10 时系统的极坐标图如题10图所示, 则系统稳定的 K 值范围。



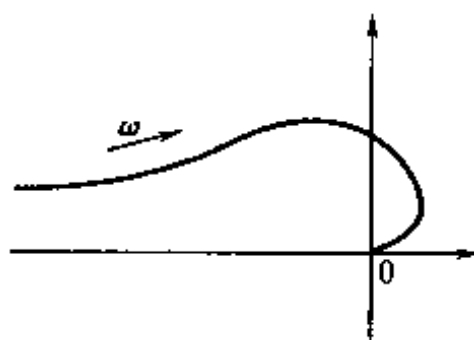
题7图



题10图

同步训练题答案

1. 解 $\omega_n = 1.244, \zeta = 0.22$ 。
2. 解 $0 < K < 2.65$ 系统稳定。
3. 解 $0 < \tau < 1.368$ 5 时系统稳定。
4. 解 $\gamma = 53.16^\circ$ 。
5. 解 概略幅相特性曲线如题 5 解图所示。
6. 解 系统闭环稳定。
7. 解



题 5 解图

$$G(s) = \frac{31.62 \left(\frac{s}{0.1} + 1 \right)}{\left(\frac{s}{0.316} + 1 \right) \left(\frac{s}{3.481} + 1 \right) \left(\frac{s}{34.81} + 1 \right) \left(\frac{s}{82.54} + 1 \right)}$$

8. 解 幅值裕度 $h = \frac{1}{G(j\omega_g)} = 0.512$
 相角裕度 $\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = -16.1^\circ$
9. 解 频域指标为 $\omega_c = 130.75, \gamma = 72.25^\circ$ 。
10. 解 $K > \frac{10}{3}$ 。

第6章 控制系统的综合与校正

书后习题解析

6-1 已知单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{200}{s(0.1s+1)}$, 试设计串联校正环节, 使系统的相角裕度不小于 45° , 剪切频率不低于 50 rad/s 。

解 校正前系统的剪切频率为 44.2 rad/s , 相角裕度为 12.7° 。为了满足要求, 相角裕度及剪切频率均应提高, 则采用串联超前校正, 校正环节的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{\tau s + 1}{Ts + 1} \quad (\tau > T)$$

(1) 选取剪切频率 $\omega_c = 60 \text{ rad/s}$, $\tau = 10T$, 则校正后系统的开环传递函数、幅频特性及相频特性分别为

$$G(s) = \frac{200(\tau s + 1)}{s(0.1s + 1)(Ts + 1)}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{200 \sqrt{1 + (\tau\omega)^2}}{\omega \sqrt{1 + (0.1\omega)^2} \sqrt{1 + (T\omega)^2}}$$

$$\angle G(j\omega) = -90^\circ - \arctan(0.1\omega) - \arctan(T\omega) + \arctan(\tau\omega)$$

其中取 $T = 0.1\tau$ 。

(2) 由 $|G(j\omega_c)|_{\omega_c=60} = 1$, 求校正参数 T 和 τ 。即

$$200 \sqrt{1 + (60\tau)^2} = 60 \sqrt{1 + 6^2} \sqrt{1 + (6\tau)^2}$$

解得 $\tau = 0.026 \text{ s}$, $T = 0.0026 \text{ s}$ 。

(3) 验算

$$\angle G(j\omega_c)_{\omega_c=60} = -90^\circ - \arctan 6 - \arctan 0.0026 \times 60 + \arctan 0.026 \times 60 = -122^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ + \angle G(j\omega_c)_{\omega_c=60} = -58^\circ$$

校正后系统在相角裕度及剪切频率两方面均满足设计指标要求。所以串联超前校正环节的传

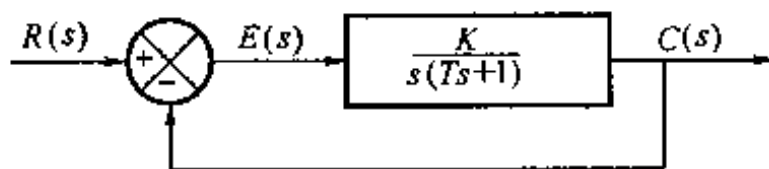
递函数为

$$G_c(s) = \frac{1 + 0.026s}{1 + 0.0026s}$$

6-2 在题 6-2 图所示控制系统中, 要求采用串联校正以消除该系统跟踪匀速输入时的稳态误差。试设计串联校正环节。

解 为了消除该系统跟踪匀速输入时的稳态误差, 校正后的系统必须是 II 型系统, 并且还要保证系统的稳定性要求, 所以选择 PI 控制, 校正环节的传递函数 $G_c(s)$ 为

$$G_c(s) = \frac{K_1(\tau s + 1)}{s}$$



题 6-2 图

从而校正后系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K_1 K(\tau s + 1)}{s^2(Ts + 1)}$

校正后系统的特征方程式为 $Ts^3 + s^2 + K_1 K\tau s + K_1 K = 0$

保证系统稳定,由 $K_1 K\tau - K_1 KT > 0$,求得 $\tau > T$,则可根据校正后系统对相角裕度的要求确定参数 τ 的取值;根据系统响应匀加速信号的稳态误差允许值来确定参数 K_1 的取值,从而确定串联校正环节。

6-3 设某控制系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{10}{s(0.05s + 1)(0.25s + 1)}$,要求校正后系统的相对谐振峰值 $M_r = 1.4$,谐振频率 $\omega_r > 10 \text{ rad/s}$ 。试设计串联校正环节。

解 由近似公式有 $\gamma = \arcsin \frac{1}{M_r} = \arcsin \frac{1}{1.4} = 45.6^\circ$

将该系统近似视为二阶系统。则由

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}, \quad \omega_c = \omega_r \frac{\sqrt{\sqrt{1+\zeta^4} - 2\zeta^2}}{\sqrt{1-2\zeta^2}}$$

求得 $\zeta = 0.39$, $\omega_c = 1.0084\omega_r = 1.0084 \times 10 \approx 10.084 \text{ rad/s}$

为满足 $\omega_r > 10 \text{ rad/s}$ 的要求,并留有余地,取 $\omega_c = 15 \text{ rad/s}$ 。则有 $\angle G(j\omega_c)|_{\omega_c=15} = -202^\circ$, $\gamma = -22^\circ$,此时闭环系统不稳定。为了满足相角裕度要求,系统需采用串联超前校正,其传递函数为

$$G_c(s) = \frac{aTs + 1}{Ts + 1} \quad (a > 1)$$

(1) 串联超前校正环节应提供的最大超前相角 ϕ_m 为 $\phi_m = 45.6^\circ + 22^\circ \approx 68^\circ$ 。由 $\phi_m = \arcsin \frac{a-1}{a+1}$,解得 $a = 26.4$,取 $a = 27$ 。

(2) 为使校正效果最好,令 $\omega_c = \omega_m = \frac{1}{\sqrt{aT}}$,解得 $T = 0.013$,则满足设计指标的串联超前校正环节的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{0.342s + 1}{0.013s + 1}$$

校正后系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{73(0.342s + 1)}{s(0.05s + 1)(0.25s + 1)(0.013s + 1)}$$

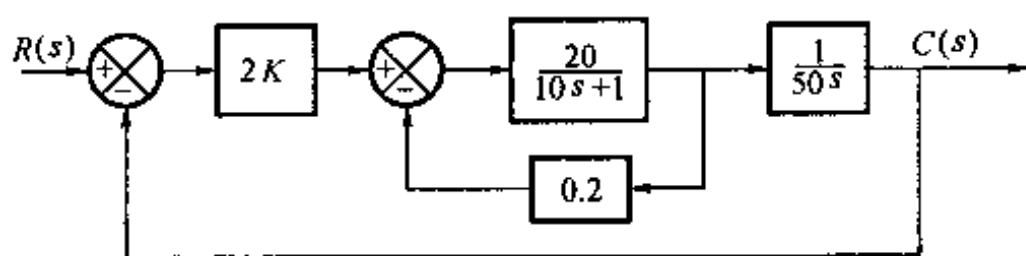
(3) 验算。当 $\omega_c = 15 \text{ rad/s}$ 时,校正后系统的相角裕度为 $\gamma = 46^\circ$,则校正后系统的相角裕度满足与 $M_r = 1.4$ 对应的相角裕度要求值。这说明,选取的校正环节是合适的。

6-4 设有题 6-4 图所示控制系统。要求系统的相对谐振峰值 $M_r = 1.3$,试确定前置放大器的增益 K ,以及要求 $M_r = 1.3$ 与开环增益 $K_v \geq 4 \text{ s}^{-1}$,试确定串联迟后校正参数。

解 (1) 图中所示系统的开环传递函数为

$$G(s) = 2K \times \frac{\frac{20}{10s+1}}{1 + \frac{20}{10s+1} \times 0.2} \times \frac{1}{50s} = \frac{K_v}{s(2s+1)}$$

其中 $K_v = 4K/25$ 。给定系统的闭环传递函数为



题 6-4 图

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{\frac{K_v}{2}}{s^2 + 0.5s + K_v/2}$$

与二阶系统传递函数的标准形式相对应,有

$$2\zeta\omega_n = 0.5, \quad \omega_n^2 = \frac{2K}{25}$$

由 $M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$, 求得当 $M_r = 1.3$ 时, 阻尼比 $\zeta = 0.45$ 。前置放大器的增益 $K = 4.33$,

$$K_v = \frac{4K}{25} = 0.693 \text{ s}^{-1}。$$

(2) 串联迟后校正环节的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{1 + aTs}{1 + Ts} \quad (a < 1)$$

未校正系统的幅频特性为

$$|G(j\omega)| = \frac{0.693}{\omega_c \sqrt{1 + (2\omega_c)^2}}$$

求得

$$\omega_c = 0.493$$

为了保证 $\angle G_c(j\omega_c) \geq -3^\circ$, 令 $1/aT = \frac{1}{25}\omega_c = 0.2 \text{ rad/s}$ 。根据开环增益 $K_v \geq 4 \text{ s}^{-1}$ 的要求, 即将

K_v 从原值 0.693 提高到要求值 4, 需提高 5.77 倍以上, 则令 $\frac{1}{a} = 7$, 因此求得 $T = 350 \text{ s}$ 。求得串

联迟后校正环节的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{1 + 50s}{1 + 350s}$$

该迟后校正环节在 $\omega_c = 0.493 \text{ rad/s}$ 处的迟后相角为

$$\angle G_c(j\omega_c) = -\arctan 350\omega_c + \arctan 50\omega_c \big|_{\omega_c=0.493} = -2^\circ$$

这说明, 选取的校正环节是合适的。

6-5 设单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K}{s(0.04s+1)}$, 要求系统响应匀速信号的稳态误差 $e_{ss} \leq 1\%$ 及相角裕度 $\gamma \geq 45^\circ$, 试确定串联迟后校正环节的传递函数。

解 (1) 未校正系统的幅频特性和相频特性分别为

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\omega \sqrt{1 + (0.04\omega)^2}}$$

$$\angle G(j\omega) = -90^\circ - \arctan(0.04\omega)$$

当 $\gamma = 50^\circ (> 45^\circ)$ 时, 即

$$\angle G(j\omega) = 180^\circ - 90^\circ - \arctan(0.04\omega) = 50^\circ$$

解得

$$\omega_c = 21 \text{ rad/s}$$

则给定系统的开环增益为

$$K = \omega_c \sqrt{1 + (0.04\omega_c)^2} = 27.4 \text{ s}^{-1}$$

(2) 根据系统响应匀速信号的稳态误差 $e_{ss} \leq 1\%$, 有 $e_{ss} = \frac{1}{K} \leq 1\%$, 即 $K \geq 100$ 。因此通过串联迟后校正需将开环增益 K 提高的倍数 $\frac{1}{a}$ 为

$$\frac{1}{a} = \frac{100}{27.4} = 3.65$$

串联迟后校正环节的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{1 + aTs}{1 + Ts} \quad (a < 1)$$

并选取

$$\frac{1}{T} = 2 \text{ rad/s} \approx \frac{1}{10} \omega_c$$

则 $T = 0.5 \text{ s}$ 。串联迟后校正环节的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{0.5s + 1}{1.83s + 1}$$

(3) 验算。校正后系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{100}{s(0.04s + 1)} \cdot \frac{0.5s + 1}{1.83s + 1}$$

则当剪切频率 $\omega_c = 21 \text{ rad/s}$ 时, 校正后系统的相角裕度为

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \arctan(0.04 \times 21) - \arctan(1.83 \times 21) + \arctan(0.5 \times 21) = 60^\circ$$

满足系统应具有相角裕度 $\gamma(\omega_c \geq 45^\circ)$ 的要求。

6-6 已知某单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{Ke^{-0.005s}}{s(0.01s + 1)(0.1s + 1)}$, 要求系统的相角裕度 $\gamma = 45^\circ$ 及响应匀速信号 $r(t) = t$ 时的稳态误差 $e_{ss} = 0.01$ 。试确定串联校正环节的传递函数。

解 (1) 根据未校正系统的幅频特性和相频特性分别为

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\omega \sqrt{1 + (0.01\omega)^2} \sqrt{1 + (0.1\omega)^2}}$$

$$\angle G(j\omega) = -90^\circ - \arctan(0.01\omega) - \arctan(0.1\omega) - 57.3 \times 0.005\omega$$

确定满足相角裕度 $\gamma(\omega_c) = 45^\circ$ 时的剪切频率 ω_c 之值。

$$\gamma = 180^\circ + \angle G_c(j\omega_c) = 180^\circ - 90^\circ - \arctan(0.01\omega_c) - \arctan(0.1\omega_c) - 57.3 \times 0.005\omega_c = 45^\circ$$

求得

$$\omega_c = 8 \text{ rad/s}$$

则

$$|G(j\omega_c)| = \frac{K}{\omega_c \sqrt{1 + (0.01\omega_c)^2} \sqrt{1 + (0.1\omega_c)^2}} \Big|_{\omega_c=8} = 1$$

解得使给定系统在 $\omega_c = 8 \text{ rad/s}$ 处具有相角裕度 $\gamma(\omega_c) = 45^\circ$ 的开环增益为 $K = 10.2 \text{ s}^{-1}$ 。

(2) 根据系统响应匀速信号的稳态误差 $e_{ss} = 1\%$, 校正后系统应具有的开环增益为 $K_1 = 100$ 。因此通过串联迟后校正需将开环增益 K 提高的倍数 $\frac{1}{a}$ 为

$$\frac{1}{a} = \frac{100}{10.2} \approx 10$$

(3) 串联迟后校正环节的传递函数为

$$G_d(s) = \frac{aT_1s + 1}{T_1s + 1} \quad (a < 1)$$

选取 $aT_1 = 1/6$ s, 即 $1/aT_1 = 6$ rad/s, 则串联迟后校正环节的传递函数为

$$G_d(s) = \frac{\frac{1}{6}s + 1}{\frac{1}{0.6}s + 1}$$

并且 $\angle G_d(j8) = \arctan\left(\frac{1}{6} \times 8\right) - \arctan\left(\frac{1}{0.6} \times 8\right) = -33^\circ$

(4) 可见迟后校正环节在剪切频率 $\omega_c = 8$ rad/s 处引入 -33° 迟后相角, 为确保校正后系统在剪切频率 $\omega_c = 8$ rad/s 处具有相角裕度 $\gamma(\omega_c) = 45^\circ$, 必须进一步采用串联超前校正, 使其在 ω_c 处提供一个超前相角, 以补偿由串联迟后校正在该处所造成 -33° 的相角迟后。

选取串联超前校正环节, 其传递函数为

$$G_a(s) = \frac{1 + a_1 T_2 s}{1 + T_2 s} \quad (a_1 > 1)$$

选取 $a_1 T_2 = 1/10$ s, $a_1 = 10$, 则串联超前校正环节的传递函数为

$$G_a(s) = \frac{\frac{1}{10}s + 1}{\frac{1}{100}s + 1}$$

则串联超前校正环节在 $\omega_c = 8$ rad/s 处所能提供的超前相角为

$$\angle G_a(j8) = \arctan\left(\frac{1}{10} \times 8\right) - \arctan\left(\frac{1}{100} \times 8\right) = 34^\circ$$

从计算结果看出, 选用的串联超前校正环节是合适的。

(5) 验算。

校正后系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{100e^{-0.005s} \left(\frac{1}{6}s + 1\right)}{s(0.01s + 1)^2 \left(\frac{1}{0.6}s + 1\right)}$$

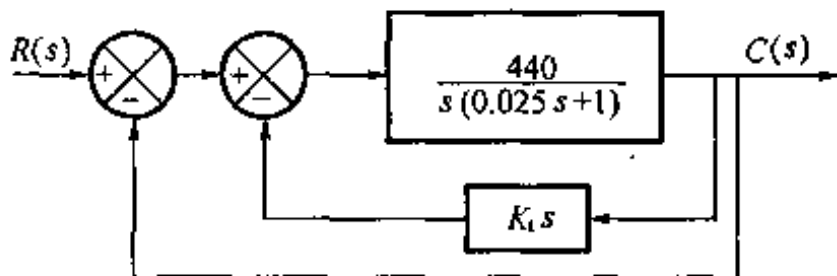
相角裕度

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ - 2\arctan(0.01 \times 8) - \arctan\left(\frac{1}{0.6} \times 8\right) - 57.3 \times 0.005 \times 8 = 46^\circ \quad (> 45^\circ)$$

可见选取的串联迟后—超前校正环节的传递函数是正确的, 满足 $\gamma(\omega_c) = 45^\circ$ 及 $e_{ss} = 0.01$ 的要求。

6-7 设某控制系统的方框图如题 6-7 图所示。欲通过反馈校正使系统相角裕度 $\gamma = 50^\circ$, 试确定反馈校正参数 K_1 。

解 由图得该系统的开环传递函数 $G(s)$ 为



题 6-7 图

$$G(s) = \frac{\frac{440}{s(0.025s+1)}}{1 + \frac{440}{s(0.025s+1)} \times K_t s} = \frac{440}{0.025s^2 + (1 + 440K_t)s}$$

则闭环传递函数 $\Phi(s)$ 为

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{\frac{440}{0.025}}{s^2 + \left(\frac{1 + 440K_t}{0.025}\right)s + \frac{440}{0.025}}$$

同二阶系统传递函数的标准形式比较,则有

$$2\zeta\omega_n = \frac{1 + 440K_t}{0.025}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{440}{0.025}} = 132.7 \text{ rad/s}$$

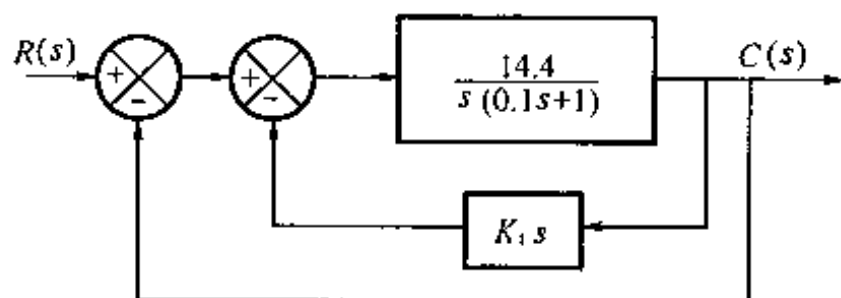
对于二阶系统,系统的相角裕度 γ 与阻尼比 ζ 间的关系为

$$\gamma = \arctan \frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{1 + 4\zeta^4} - 2\zeta^2}}$$

当 $\gamma = 50^\circ$ 时,求得 $\zeta = 0.48$,最后计算得

$$K_t = \frac{2 \times 0.48 \times 132.7 \times 0.025 - 1}{440} = 0.005$$

6-8 设某控制系统的方框图如题 6-8 图所示。要求采用速度反馈校正,使系统具有临界阻尼,即阻尼比 $\zeta = 1$ 。试确定反馈校正参数 K_t 。



题 6-8 图

解 由题 6-8 图得该系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{\frac{14.4}{s(0.1s+1)}}{1 + \frac{14.4}{s(0.1s+1)} K_t s} = \frac{14.4}{0.1s^2 + (1 + 14.4K_t)s}$$

则系统的闭环传递函数 $\Phi(s)$ 为

$$\Phi(s) = \frac{144}{s^2 + 10(1 + 14.4K_t)s + 144}$$

同二阶系统传递函数的标准形式比较,则有

$$\omega_n = 12 \text{ rad/s}, \quad 2\zeta\omega_n = 10(1 + 14.4K_t)$$

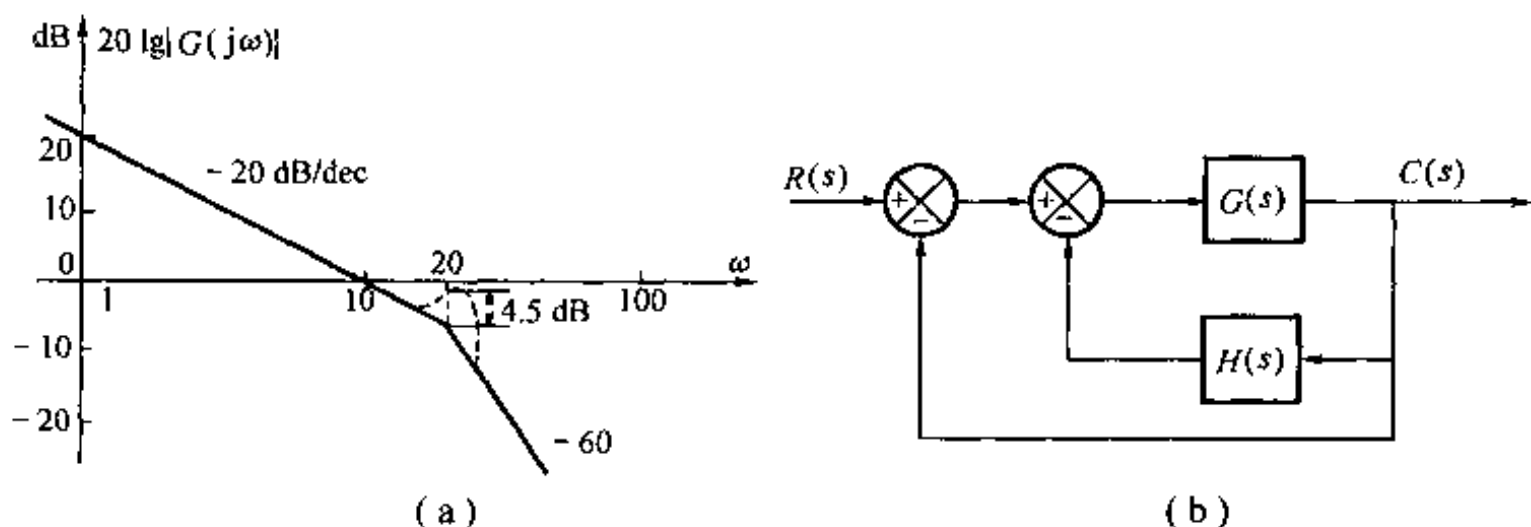
根据系统应具有临界阻尼的要求,即 $\zeta = 1$,求得速度反馈校正参数 K_t 为

$$K_t = \frac{\frac{2 \times 1 \times 12}{10} - 1}{14.4} = 0.097$$

6-9 已知最小相位系统的开环渐近幅频特性如题 6-9 图(a)所示,题 6-9 图(b)为该系统的方框图。欲通过反馈校正消除开环幅频特性在转折频率 20 rad/s 处的谐振峰,试确定反馈校正的传递函数形式及参数值。

解 (1) 由题 6-8 图(a)得该最小相位系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{10}{s \left[\left(\frac{1}{20} \right)^2 s^2 + 2\zeta \left(\frac{1}{20} \right) s + 1 \right]}$$



题 6-9 图

并由 $20\lg \frac{1}{2\zeta} = 4.5 \text{ dB}$, 解得 $\zeta = 0.3$ 。则系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{10}{s \left[\left(\frac{1}{20} \right)^2 s^2 + 2 \times 0.3 \times \frac{1}{20} s + 1 \right]}$$

(2) 通过反馈校正消除图(a)所示开环幅频特性在转折频率 20 rad/s 处的谐振峰, 意味着通过反馈校正应使振荡环节的阻尼比 $\zeta = 0.5$, 即将开环传递函数分母中的 s^2 项系数由 $2 \times 0.3 \times \frac{1}{20}$ 提高到 $2 \times 0.5 \times \frac{1}{20}$ 。因此取反馈通道的传递函数

$$H(s) = as^2$$

式中 a 为反馈系数。

(3) 从图(b)求得反馈校正系统的开环传递函数为

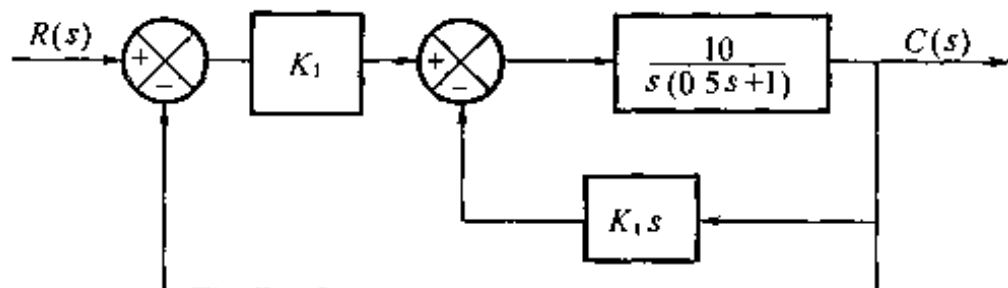
$$G(s) = \frac{10}{s \left[\left(\frac{1}{20} \right)^2 s^2 + \left(2 \times 0.3 \times \frac{1}{20} + 10a \right) s + 1 \right]}$$

则

$$2 \times 0.3 \times \frac{1}{20} + 10a = 2 \times 0.5 \times \frac{1}{20}$$

解得反馈系数为 $a = 0.002$ 。

6-10 已知某控制系统的方框图如题 6-10 图所示。欲使系统在测速反馈校正后满足如下要求: (1) 开环增益 $K_v \geq 5 \text{ s}^{-1}$; (2) 闭环系统阻尼比 $\zeta = 0.5$; (3) 调整时间 $t_s \leq 2 \text{ s}$ ($\Delta = 0.05$)。试确定前置放大器增益 K_1 及测速反馈系数 K_2 (K_2 在 $0 \sim 1$ 间选取)。



题 6-10 图

解 (1) 由题 6-10 图得该系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{10K_1}{s(0.5s+1) + 10K_1s} = \frac{20K_1}{s(s+2+20K_1)}$$

且

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \frac{10K_1}{1+10K_1}$$

根据题意,要求开环增益 $K_v \geq 5 \text{ s}^{-1}$, 即 $\frac{10K_1}{1+10K_1} \geq 5 \text{ s}^{-1}$, 若取 $\frac{10K_1}{1+10K_1} = 5 \text{ s}^{-1}$, 则

$$2K_1 = 1 + 10K_1$$

(2) 该系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{20K_1}{s^2 + 2(1+10K_1)s + 20K_1}$$

同二阶系统传递函数的标准形式比较, 则有

$$2\zeta\omega_n = 2(1+10K_1), \quad \omega_n^2 = 20K_1$$

当 $\zeta = 0.5$, 得

$$\sqrt{5K_1} = 1 + 10K_1$$

最后解得

$$K_1 = 1.25, \quad K_2 = 0.15$$

可见测速反馈系数 K_2 满足在 $0 \sim 1$ 间取值的要求。

(3) 验算

$$K_v = \frac{10 \times 1.25}{1 + 10 \times 0.15} = 5 \text{ s}^{-1}, \quad t_s(\Delta = 0.05) = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{0.5 \sqrt{20 \times 1.25}} = 1.6 \text{ s}$$

从以上验算结果看出, 参数 $K_1 = 1.25$ 及 $K_2 = 0.15$ 满足题意要求, 因此选值是正确的。

6-11 设某单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K_v}{s(s+1)}$, 要求开环增益 $K_v = 12 \text{ s}^{-1}$ 及相角裕度 $\gamma = 40^\circ$ 。试确定串联校正环节的传递函数。

解 满足开环增益 $K_v = 12 \text{ s}^{-1}$, 则该系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{12}{s(s+1)}$$

计算得原系统的剪切频率和相角裕度分别为 $\omega_c = 3.4$, $\gamma = 16^\circ$, 则应采取串联超前校正, 校正环节的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{aTs+1}{Ts+1} \quad (a > 1)$$

(1) 串联超前校正环节应提供的最大超前相角 $\phi_m = 40^\circ - 16^\circ + 6^\circ = 30^\circ$, 由 $\phi_m = \arcsin \frac{a-1}{a+1}$, 解得 $a = 3$ 。

(2) 由 $20\lg|G(j\omega_m)| = -10\lg a$, 解得 $\omega_m \approx 4.5 \text{ rad/s}$, 令 $\omega_c = \omega_m = \frac{1}{\sqrt{aT}}$, 解得 $T = 0.128$ 。

则超前校正环节的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{0.384s+1}{0.128s+1}$$

校正后系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{12(0.384s+1)}{s(s+1)(0.128s+1)}$

(3) 验算

应用 MATLAB 中的 MARGIN 函数画出校正后系统的 Bode 图, 得 $\omega_c = 4.5$, $\gamma = 43^\circ$ 。表明选取的校正环节合适。

6-12 设某单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K_v}{s(0.5s+1)}$, 要求系统响应匀速信

号 $r(t) = t$ 时的稳态误差 $e_{ss} = 0.1$ 及闭环幅频特性的相对谐振峰值 $M_r \leq 1.5$, 试确定串联校正环节的传递函数。

解 根据系统响应匀速信号 $r(t) = t$ 时的稳态误差的要求 $e_{ss} = 0.1$, $K_v = 10$, 计算得原系统的剪切频率和相角裕度分别为 $\omega_c = 4.26$, $\gamma = 25^\circ$ 。当 $M_r \leq 1.5$, $\gamma \approx \arcsin \frac{1}{M_r}$, 则 $\gamma \geq 41.8^\circ$ 。

则应采取串联超前校正, 校正环节的传递函数为 $G_c(s) = \frac{aTs + 1}{Ts + 1}$ ($a > 1$)。思路同上题, 大致步骤如下。

(1) $\phi_m = 41.8^\circ - 25^\circ + 5^\circ = 21.8^\circ$, 解得 $a = 2.17$, 取 $a = 3$, 解得 $\omega_m = 5.7 \text{ rad/s}$, 令 $\omega_c = \omega_m = \frac{1}{\sqrt{aT}}$, 解得 $T = 0.1$, 则超前校正环节的传递函数为 $G_c(s) = \frac{0.3s + 1}{0.1s + 1}$, 校正后系统的开环传递

$$\text{函数为} \quad G(s) = \frac{10(0.3s + 1)}{s(0.5s + 1)(0.1s + 1)}$$

(2) 验算

应用 MATLAB 中的 MARGIN 函数画出校正后系统的 Bode 图, $\omega_c = 5.7$, $\gamma = 49^\circ$ 。满足性能指标要求。

6-13 设某单位反馈系统的开环传递函数

致为 $G(s) = \frac{10}{s(0.1s + 1)(0.5s + 1)}$, 试绘出系统开环频率响应的 Bode 图, 并求出其相角裕度及幅值裕度。当采用传递函数为 $G_c(s) = \frac{0.23s + 1}{0.023s + 1}$ 的串联校正环节时, 试计算校正系统的相角裕度及幅值裕度, 并讨论校正系统的性能有何改进。

解 原系统 Bode 图如题 6-13 解图所示, 原系统相角裕度 $\gamma = 3.9^\circ$ 及幅值裕度 $20\lg K_g = 1.58 \text{ dB}$; 校正系统的相角裕度 $\gamma = 37.6^\circ$ 及幅值裕度 $20\lg K_g = 18 \text{ dB}$ 。应用串联超前校正, 系统的相角裕度变大, 系统的动态性能得到改善。

6-14 设某单位反馈系统的开环传递函数

致为 $G(s) = \frac{4}{s(2s + 1)}$, 设计一串联迟后校正环节, 使校正系统的相角裕度 $\gamma \geq 40^\circ$, 并保持原有的开环增益值。

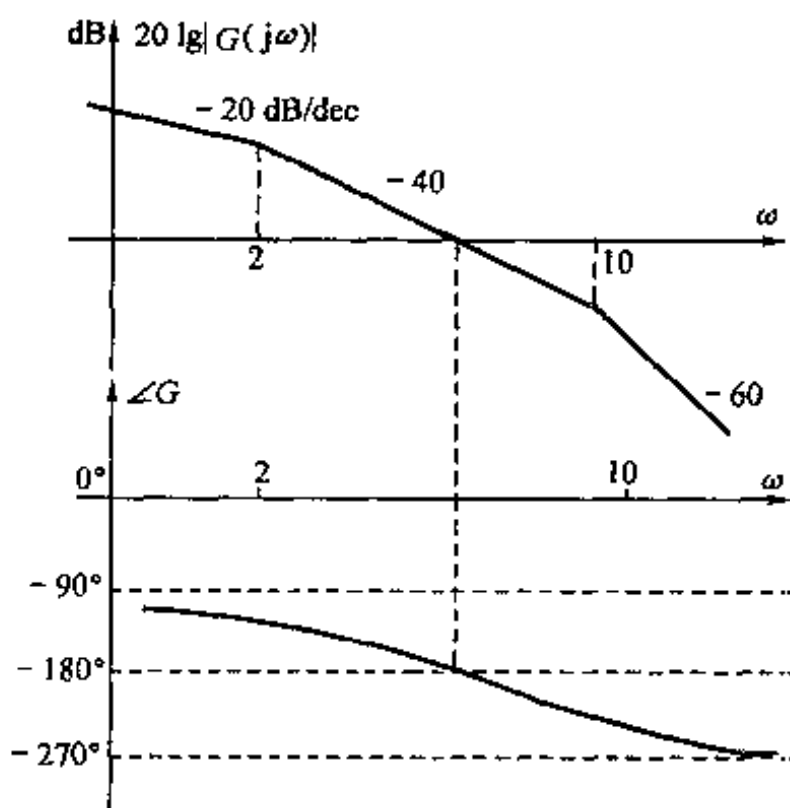
解 (1) 未校正系统的幅频特性和相频特性分别为

$$|G(j\omega)| = \frac{4}{\omega \sqrt{1 + 4\omega^2}}, \quad \angle G(j\omega) = -90^\circ - \arctan(2\omega)$$

当 $\gamma = 45^\circ (> 40^\circ)$ 时, 即 $\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \arctan(2\omega_c) = 45^\circ$

解得 $\omega_c = 0.5 \text{ rad/s}$

则保证系统的相角裕度 $\gamma = 45^\circ (> 40^\circ)$ 的开环增益为 $K = 0.707 \text{ s}^{-1}$ 。



题 6-13 解图

(2)保持开环增益 $K = 4 \text{ s}^{-1}$ 不变,因此通过串联迟后校正,需将开环增益 K 提高的倍数 $\frac{1}{a}$ 为

$$\frac{1}{a} = \frac{4}{0.707} = 5.656$$

串联迟后校正环节的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{1 + aTs}{1 + Ts} \quad (a < 1)$$

并选取

$$\frac{1}{aT} = 0.05 \text{ rad/s} = \frac{1}{10} \omega_c$$

则 $T = 113 \text{ s}$ 。串联迟后校正环节的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{20s + 1}{113s + 1}$$

(3)验算。校正后系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{4}{s(2s + 1)} \cdot \frac{20s + 1}{113s + 1}$$

应用 MATLAB 中的 MARGIN 函数画出校正后系统的 Bode 图, $\omega_c = 0.5$, $\gamma = 40.2^\circ > 40^\circ$, 满足性能指标要求。

6-15 设某单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K_v}{s\left(\frac{1}{4}s + 1\right)(s + 1)}$ 。

要求:(1)系统开环增益 $K_v \geq 5 \text{ s}^{-1}$; (2)系统阻尼比 $\zeta = 0.5$; (3)单位阶跃响应调整时间 $t_s = 2.5 \text{ s}$ 。试确定串联校正环节的传递函数。

解 (1)根据给定时域倍标确定闭环主导极点位置。

由 $t_s \approx \frac{4}{\zeta \omega_n}$ ($\Delta = 0.02$), 求得 $\omega_n = 3.2$ 。则闭环主导极点

$$s_{1,2} = -\zeta \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = -1.6 \pm j2.77$$

$$|s_1| = |s_2| = \omega_n = 3.2$$

(2)确定串联超前校正参数 T 和 a 。

将开环传递函数变换为 $G(s) = \frac{4K}{s(s+4)(s+1)} = \frac{k}{s(s+4)(s+1)}$ (令 $k = 4K$)

根据系统开环增益 $K = 5 \text{ s}^{-1}$ 的要求,得

$$k = 4 \times 5 = 20$$

且

$$M = \frac{|s_1| \cdot |s_1 - p_2| \cdot |s_1 - p_3|}{1} = 33.24$$

$$\phi = 180^\circ + \angle s_1 + \angle s_1 + \angle(s_1 - p_2) + \angle(s_1 - p_3) = 180^\circ + 120^\circ + 102.22^\circ + 41.63^\circ = 83.85^\circ$$

由于要求的超前补偿相角 $\phi < 90^\circ$, 所以采用带惯性的 PD 控制器实现串联超前校正是可行的, 由 k, M 及 ϕ 求得

$$\cot \alpha = \frac{33.24}{20} \csc 83.85^\circ - \cot 83.85^\circ$$

得

$$\alpha = 32.62^\circ$$

由 $\zeta = 0.5$, 求得

$$\delta = 60^\circ, \quad \theta = 180^\circ - \alpha - \delta = 87.38^\circ$$

$$\text{则} \quad |z_c| = \omega_n \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} = 1.73, \quad |p_c| = \omega_n \frac{\sin(\phi + \alpha)}{\sin(\theta - \phi)} = 46.52$$

进而求得串联超前校正参数为

$$T = \frac{1}{|p_c|} = 0.0215, \quad a = \frac{|p_c|}{|z_c|} = 26.89$$

带惯性的 PD 控制器的传递函数为

$$G_c(s) = 26.89 \frac{s + 1.73}{s + 46.52}$$

(3) 验算。经初步设计得到校正系统开环传函为

$$G_s = \frac{20 \times 26.89}{s(s+4)(s+1)} \times \frac{s+1.73}{s+46.52}$$

初步选定的闭环主导极点 $s_{1,2} = -1.6 \pm j2.77$, 根据单位反馈系统的闭环传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{20 \times 26.89(s+1.73)}{(s+1.6+j2.77)(s+1.6-j2.77)(s-s_3)(s-s_4)}$$

由 $C(0)/R(0) = 1$, 得

$$s_3 s_4 = 90.86$$

又由

$$\begin{aligned} & (s+1.6+j2.77)(s+1.6-j2.77)(s-s_3)(s-s_4) \\ &= s(s+4)(s+1)(s+46.52)20 \times 26.89 \times (s+1.73) \end{aligned}$$

解得

$$s_3 + s_4 = -48.32$$

则闭环极点

$$s_3 = -1.96, \quad s_4 = -46.36$$

其中闭环极点 $s_3 = -1.96$, 可近似认为被闭环零点 $z_c = -1.73$ 完全补偿, 闭环极点 $s_4 = -46.36 \approx 29\text{Re}(s_1)$, 距离轴甚远, 所以选定 $s_{1,2} = -1.6 \pm j2.77$ 作为闭环主导极点是合适的, 因此, 以 $a = 26.89$ 和 $T = 0.0215$ s 作为串联超前校正参数能满足对给定系统提出的各项性能指标。

6-16 设某单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K_v}{s(0.5s+1)(s+1)}$, 要求系统的开环增益 $K_v \geq 5 \text{ s}^{-1}$ 及相角裕度 $\gamma \geq 38^\circ$, 试确定串联迟后校正环节的传递函数。

解 思路同上题, 大致步骤如下。

$$(1) G(j\omega) = \frac{K_v}{\omega \sqrt{1+(0.5\omega)^2} \sqrt{1+\omega^2}}, \quad \angle G(j\omega) = -90^\circ - \arctan 0.5\omega - \arctan \omega, \text{ 当 } \gamma = 40^\circ$$

($> 38^\circ$) 时, 解得 $\omega_c = 0.63 \text{ rad/s}$, 保证系统的相角裕度 $\gamma = 40^\circ$ ($> 38^\circ$) 的开环增益为 $K = 0.78 \text{ s}^{-1}$ 。

(2) 要求系统的开环增益 $K_v \geq 5 \text{ s}^{-1}$, 因此通过串联迟后校正需将开环增益 K 提高的倍数 $\frac{1}{a}$ 为 $\frac{1}{a} = \frac{5}{0.78} = 6.4$, 取 $\frac{1}{a} = 7$ 。串联迟后校正环节的传递函数为 $G_c(s) = \frac{1+aTs}{1+Ts}$ ($a < 1$) 并选取 $\frac{1}{aT} = 0.063 \text{ rad/s} = \frac{1}{10}\omega_c$, 则 $T = 111.09 \text{ s}$ 。串联迟后校正环节的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{15.87s + 1}{111.09s + 1}$$

(3) 验算。校正后系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{5}{s(0.5s+1)(s+1)} \cdot \frac{15.87s+1}{111.09s+1}$$

应用 MATLAB 中的 MARGIN 函数画出校正后系统的 Bode 图, $\omega_c = 0.878$, $\gamma = 46.25^\circ > 38^\circ$, 满足性能指标要求。

6-17 设某单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K_v}{s(0.1s+1)(0.2s+1)}$$

要求: (1) 系统开环增益 $K_v \approx 30 \text{ s}^{-1}$; (2) 系统相角裕度 $\gamma \geq 45^\circ$; (3) 系统截止频率 $\omega_b = 12 \text{ rad/s}$ 。试确定串联迟后—超前校正环节的传递函数。

解 (1) 未校正系统的幅频特性和相频特性分别为

$$|G(j\omega)| = \frac{K_v}{\omega \sqrt{1+0.01\omega^2} \sqrt{1+0.04\omega^2}}$$

$$\angle G(j\omega) = -90^\circ - \arctan(0.1\omega) - \arctan 0.2\omega_c$$

保证系统的相角裕度 $\gamma = 45^\circ$, 则由 $\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 0.1\omega_c - \arctan 0.2\omega_c = 45^\circ$, 得 $\omega_c = 2.807 \text{ rad/s}$ 。则保证系统的相角裕度 $\gamma = 45^\circ$ 的开环增益为 $K = 3.342 \text{ s}^{-1}$ 。

(2) 要求系统的开环增益 $K_v \approx 30 \text{ s}^{-1}$, 因此通过串联迟后校正需将开环增益 K 提高的倍数 $\beta = \frac{30}{3.342} = 8.97$, 取 $\beta = 9$ 。串联迟后校正环节的传递函数为 $G_c(s) = \frac{1+T_3s}{1+\beta T_3s}$ ($\beta > 1$)。并选取 $\frac{1}{T} = 1 \text{ rad/s}$, 则串联迟后校正环节的传递函数为 $G_{c1}(s) = \frac{s+1}{9s+1}$ 。

(3) $G_{c1}(j\omega_c) \approx -18^\circ$, 则需串联超前校正环节提供的最大相角为 $\phi_m = 18^\circ + 5^\circ = 23^\circ$, 解得 $a = 3$ 。串联超前校正环节的传递函数为 $G_{c2}(s) = \frac{1+aT_1s}{1+T_1s}$ ($a > 1$), 并选取 $\frac{1}{aT_1} = 4 \text{ rad/s}$, 则串联

超前校正环节的传递函数为 $G_{c2}(s) = \frac{\frac{1}{4}s+1}{\frac{1}{12}s+1}$ 。

(4) 验算。校正后系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{30(s+1)\left(\frac{1}{4}s+1\right)}{s(0.1s+1)(0.2s+1)(9s+1)\left(\frac{1}{12}s+1\right)}$$

应用 MATLAB 中的 MARGIN 函数画出校正后系统的 Bode 图, $\omega_c = 3.4$, $\gamma = 46.89^\circ$, $\omega_b = 13 \text{ rad/s}$ 。满足性能指标要求。

6-18 设某单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K_v}{s(0.1s+1)(0.2s+1)}$ 。要求:

(1) 系统响应匀速信号 $r(t) = t$ 时的稳态误差 $e_{ss} = 0.01$; (2) 系统的相角裕度 $\gamma \geq 40^\circ$ 。试设计一个串联迟后—超前校正环节。

解 思路同上题, 大致步骤如下。

(1) $\gamma = 45^\circ \geq 40^\circ$, 得 $\omega_c = 2.807 \text{ rad/s}$, $K_v = 3.342 \text{ s}^{-1}$ 。

(2) $e_{ss} = 0.01$, $K_v = 100 \text{ s}^{-1}$, $\beta = \frac{100}{3.342} \approx 30$ 。 $G_c(s) = \frac{1+T_3s}{1+\beta T_3s}$ ($\beta > 1$), 并选取 $\frac{1}{T} = 1 \text{ rad/s}$, 则

$$G_{cl}(s) = \frac{s+1}{30s+1}。$$

(3) $G_{cl}(j\omega_c) \approx -19^\circ$, 则 $\phi_m = 19^\circ + 5^\circ = 24^\circ$, 得 $a = 2.34$, 取 $a = 3$ 。 $G_{cl}(s) = \frac{1+aT_1s}{1+T_1s}$, 并选

取 $\frac{1}{aT_1} = 4 \text{ rad/s}$, 则串联迟后—超前环节的传递函数为 $G_{cl}(s) = \frac{\frac{1}{4}s+1}{\frac{1}{12}s+1}。$

(4) 验算。校正后系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{100(s+1)\left(\frac{1}{4}s+1\right)}{s(0.1s+1)(0.2s+1)(30s+1)\left(\frac{1}{12}s+1\right)}$$

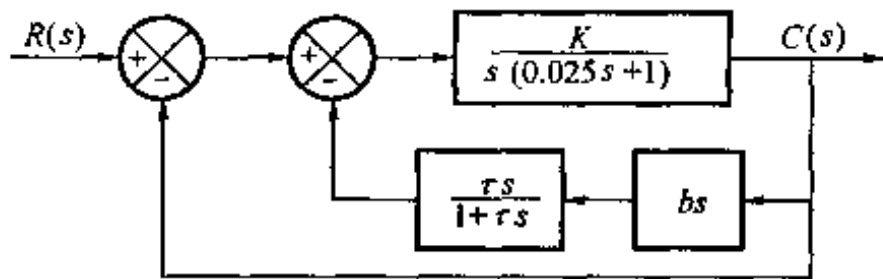
应用 MATLAB 中的 MARGIN 函数画出校正后系统的 Bode 图, $\omega_c = 3.43$, $\gamma = 45.64^\circ$ 。满足性能指标要求。

6-19 已知某控制系统的方框图如题

6-19 图所示。要求:

(1) 系统响应匀速输入 $\Omega_i = 110 \text{ rad/s}$ 时的稳态误差 $e_{ss} = 0.25 \text{ rad}$;

(2) 系统相角裕度 $\gamma \approx 55^\circ$ 。试确定反馈校正参数 τ 和 b 。



题 6-19 图

解 校正系统的开环传递函数为 $G(s)$

$$= \frac{K(\tau s+1)}{s(T'+1)(T''+1)}, \text{ 其中 } T' = 0.025 \frac{\tau}{T''}, T'' = 0.025 + (1+Kb)\tau - T'。$$

(1) 校正前后系统的开环增益不变, 由 $e_{ss} = \frac{110}{K} = 0.25$, 得 $K = 440$ 。应用 MATLAB 中的 MARGIN 函数绘制待校正系统的 Bode 图, 得 $\omega_c = 135 \text{ rad/s}$, $\gamma = 16.5^\circ$ 。

(2) 选择纯测速校正参数, 提高系统的相角裕度。令 $\frac{\tau}{T''} = 0.1$, 则 $T' = 0.0025$ 。此时, 不计等效串联迟后校正的情况下, 开环传递函数 $G_1(s) = \frac{K}{s(T'+1)} = \frac{440}{s(0.0025s+1)}$ 。仿真结果得 $\omega'_c = 420 \text{ rad/s}$, $\gamma' = 43.6^\circ < 55^\circ$ 。

(3) 加入等效串联迟后校正, 减小系统带宽, 进一步提高系统的相角裕度。令 $\tau = 0.1 \text{ s}$, 则 $T' = 1 \text{ s}$, 校正系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{440(0.1s+1)}{s(0.0025s+1)(s+1)}$ 。仿真结果得 $\omega''_c = 42 \text{ rad/s}$, $\gamma' = 72^\circ > 55^\circ$, 不符合要求。则通过试探, 令 $\tau = 0.033 \text{ s}$, 则 $T' = 0.33 \text{ s}$, $b = 0.019 \text{ s}$ 。校正系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{440(0.033s+1)}{s(0.0025s+1)(0.33s+1)}$ 。应用 MATLAB 中的 MARGIN 函数画出校正后系统的 Bode 图, 得 $\omega''_c = 50.7 \text{ rad/s}$, $\gamma' = 55.3^\circ$, 满足性能指标要求。

同步训练题

1. 设单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{100K}{s(0.04s+1)}$, 若要求系统对单位斜坡输入

信号的稳态误差 $e_{ss} \leq 1\%$, 相角裕度 $\gamma \geq 40^\circ$, 试确定系统的串联校正网络。

2. 设某系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K}{s(0.1s+1)(0.05s+1)}$, 试设计串联校正使系统满足: (1) 速度误差系数 $K_v \geq 30$; (2) 相角稳定裕度 $\gamma \geq 30^\circ$ 。

3. 已知单位反馈系统开环传递函数 $G(s) = \frac{K}{s(0.05s+1)(0.2s+1)}$, 设计串联超前校正网络使系统 $K_v \geq 10 \text{ rad/s}$, 超调量不大于 25%, 调节时间不大于 1 s。

4. 二阶系统传递函数为 $G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$, 现欲加负反馈 $H(s)$ 来提高阻尼比, 使阻尼比为 ζ' , 并保证总放大系数 K 和固有频率不变, 试确定 $H(s)$ 。

5. 一单位负反馈最小相位系统开环相频特性表达式为 $\varphi(\omega) = -90^\circ - \arctan \frac{\omega}{2} - \arctan \omega$ 。
(1) 求相角裕度为 45° 时系统的开环传递函数; (2) 在不改变截止频率 ω_c 的前提下, 试选取参数 K_c 与 T , 使系统在加入串联校正环节后, 系统的相角裕度提高到 60° 。

6. 设单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{8}{s(2s+1)}$, 若采用迟后—超前校正装置 $G_c(s) = \frac{(10s+1)(2s+1)}{(100s+1)(0.02s+1)}$ 对系统进行串联校正, 试绘制系统校正前后的对数幅频渐近特性, 并计算系统校正前后的相角裕度。

7. 设单位反馈系统的开环传递函数 $G(s) = \frac{K}{s(0.1s+1)(0.01s+1)}$, 试设计串联校正装置, 使系统期望特性满足下列指标: (1) 静态速度误差系数 $K_v \geq 250 \text{ s}^{-1}$; (2) 截止频率 $\omega_c \geq 30 \text{ rad/s}$; (3) 相角裕度 $\gamma(\omega_c) \geq 45^\circ$ 。

8. 设单位反馈系统开环传递函数为 $G(s)G_0(s) = \frac{K}{s(1+0.12s)(1+0.02s)}$, 试设计串联校正装置, 使系统满足 $K_v \geq 70$, $t_s \leq 1$, $\sigma\% \leq 40\%$ 。

9. 设单位反馈系统开环传递函数为 $G(s) = \frac{K}{s(0.05s+1)(0.2s+1)}$, 试设计串联超前校正装置, 使系统得静态速度误差系数小于 5, 超调量不大于 25%, 调节时间不大于 1。

10. 设单位反馈系统开环传递函数为 $G(s) = \frac{K}{s(0.05s+1)(0.25s+1)(0.1s+1)}$, 若要求校正后系统的开环增益不小于 12, 超调量小于 30%, 调节时间小于 3, 试确定串联迟后校正装置的传递函数。

11. 设单位反馈系统开环传递函数为 $G(s) = \frac{K}{s(s+4)(s+5)}$, 若要求校正后系统的 $K_v = 30$, $\zeta = 0.707$, 并保证原主导极点位置基本不变, 试确定串联校正装置。

同步训练题答案

1. 解 根据稳态误差要求, $K \geq 1$, 原系统 $\omega_c = 50 \text{ rad/s}$, $\gamma = 26.6^\circ$, 引入超前校正 $G_c(s) = \frac{aTs+1}{Ts+1}$ ($a > 1$), $a = 2.43$, $T = 0.01 \text{ s}$, 校正后系统 $\gamma = 48.22^\circ$, 校正后系统的开环传递函数

$$G(s)G_c(s) = \frac{100(0.024s+1)}{s(0.04s+1)(0.01s+1)}$$

2. 解 $K_v \geq 30, K = 30$, 原系统 $\omega_c = 17.3 \text{ rad/s}, \gamma = -10.8^\circ < 30^\circ$, 选用迟后校正, 校正环节函数 $G_c(s) = \frac{aTs+1}{Ts+1} \quad (a < 1)$, 则令 $\gamma = 30^\circ + 6^\circ = 36^\circ$, 解得 $\omega'_c = 7 \text{ rad/s}, a = 0.043$, 由 $\frac{1}{aT} = 0.1\omega'_c$, 求得 $T = 33$ 。校正环节传递函数 $G_c(s) = \frac{1.43s+1}{33s+1}$, 验算 $\gamma' > 30^\circ$, 满足要求。

3. 解 要求 $\sigma\% \leq 25\%, M_r = 1.225, t_s \leq 1 \text{ s}, \omega'_c = 7.74, \gamma' = 54.7^\circ$ 。原系统 $\omega_c = 7.07, \gamma = 15.8^\circ$, 采用超前校正, $G_c(s) = \frac{aTs+1}{Ts+1} \quad (a > 1), a = 9, T = 0.027$, 所以 $G_c(s) = \frac{0.245s+1}{0.027s+1}$, 验算满足要求。

4. 解 $H(s) = \frac{2(\zeta'' - \zeta)s}{K\omega_n}$

5. 解 (1) 开环传递函数为 $G_o(s) = \frac{0.56}{s\left(\frac{s}{2}+1\right)(s+1)}$

(2) $T = 1.74, K_c = 0.821$ 。

6. 解 校正前 $G(s) = \frac{8}{s(2s+1)} = \frac{8}{s\left(\frac{s}{0.5}+1\right)}, \omega_c = 2$

$$\gamma = 180^\circ + \angle G(j\omega_c) = 180^\circ - 90^\circ - \arctan \frac{2}{0.5} = 14^\circ$$

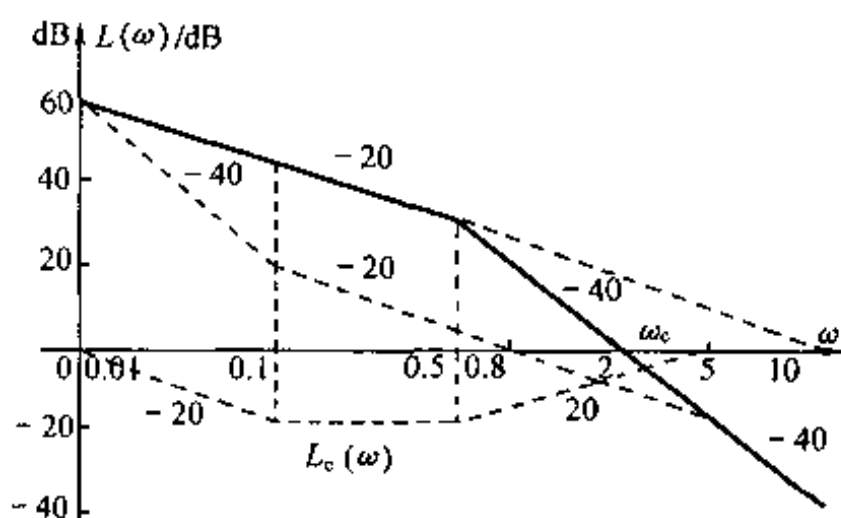
做出校正前对数幅频特性, 如题 6 解图中的实线所示。

校正后

$$\begin{aligned} G_c(s) &= \frac{(10s+1)(2s+1)}{(100s+1)(0.2s+1)} \\ &= \frac{\left(\frac{s}{0.1}+1\right)\left(\frac{s}{0.5}+1\right)}{\left(\frac{s}{0.01}+1\right)\left(\frac{s}{5}+1\right)} \end{aligned}$$

$$G'(s) = G_c(s)G(s)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{8\left(\frac{s}{0.1}+1\right)}{s\left(\frac{s}{0.01}+1\right)\left(\frac{s}{5}+1\right)} \end{aligned}$$



题 6 解图

做出校正后对数幅频特性, 如解图中的虚线 $L'(\omega)$ 所示。由图 $\omega'_c = 0.8$ 有

$$\gamma' = 180^\circ + \arctan \frac{0.8}{0.1} - 90^\circ - \arctan \frac{0.8}{0.01} - \arctan \frac{0.8}{5} = 74.5^\circ$$

7. 解 选择迟后—超前校正

$$G_c(s) = \frac{\left(\frac{s}{3}+1\right)\left(\frac{s}{10}+1\right)}{\left(\frac{s}{0.36}+1\right)\left(\frac{s}{90}+1\right)}$$

校正后系统的开环传递函数

$$G'(s) = \frac{250\left(\frac{s}{3} + 1\right)}{s\left(\frac{s}{0.36} + 1\right)\left(\frac{s}{90} + 1\right)\left(\frac{s}{100} + 1\right)}$$

验算, $\gamma' > 45^\circ$ 满足要求。

8. 解 校正装置 $G_c(s) = \frac{(1 + 0.25s)(1 + 0.12s)}{(1 + 1.34s)(1 + 0.022s)}^\circ$

9. 解 $G_c(s) = \frac{0.2s + 1}{0.044s + 1}$, $a = 4.5$ 。

10. 解 $G_c(s) = \frac{3.3s + 1}{20.4s + 1}^\circ$

11. 解 $G_c(s) = \frac{1}{27.8} \times \frac{431s + 1}{15.5s + 1}^\circ$

第7章 线性离散系统的分析与综合

书后习题解析

7-1 试求取 $X(s) = (1 - e^{-s})/s^2(s+1)$ 的 Z 变换。

解 将给定的 $X(s)$ 展开成部分分式, 则 $X(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s^2(s+1)} = (1 - e^{-s}) \left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} \right]$, 求取 $X(s)$ 每一部分分式及 $(1 - e^{-s})$ 的 Z 变换, 得

$$X(z) = (1 - z^{-1}) \left[\frac{z}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z - e^{-T_0}} \right]$$

式中 T_0 为采样周期。整理得 $X(s)$ 的 Z 变换为

$$X(z) = \frac{e^{-T_0} + 1 - 2e^{-T_0}}{z^2 - (1 + e^{-T_0})z + e^{-T_0}} \Big|_{T_0=1} = \frac{0.368z + 0.264}{z^2 - 1.368z + 0.368}$$

7-2 试求取 $X(z) = 10z/(z-1)(z-2)$ 的 Z 反变换 $x(nT_0)$ ($n=0, 1, 2, \dots$)。

解 将 $X(z)/z$ 展开成部分分式, 即

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{-10}{z-1} + \frac{10}{z-2}$$

$$X(z) = -10 \frac{z}{z-1} + 10 \frac{z}{z-2}$$

求 Z 反变换得 $x(kT_0) = -10 + 10 \times 2^k = 10(-1 + 2^k)$ ($k=0, 1, 2, \dots$)

因此 $x(0)=0, x(T_0)=10, x(2T_0)=30, x(3T_0)=70, x(4T_0)=150, \dots$

本题还可应用长除法和留数法求解。

7-3 试求取题 7-3 图所示线性离散系统的闭环脉冲传递函数 $\frac{C(z)}{R(z)}$ 。

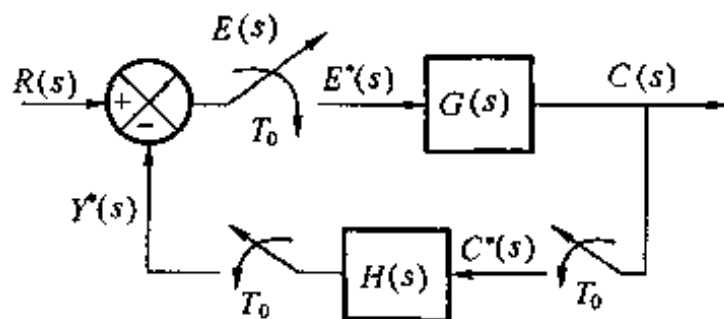
解 由题 7-3 图有 $C(s) = G(s)E^*(s)$, $E(s) = R(s) - Y^*(s)$, $Y^*(s) = H(s)C^*(s)$ 。对以上各式分别采样有

$$C^*(s) = G^*(s)E^*(s)$$

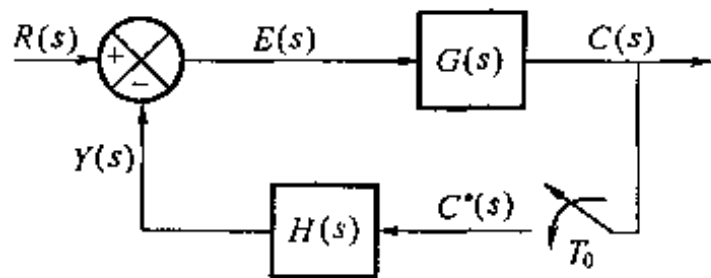
$$E^*(s) = R^*(s) - Y^*(s)$$

$$Y^*(s) = H^*(s)C^*(s)$$

整理得 $\frac{C^*(s)}{R^*(s)} = \frac{G^*(s)}{1 + G^*(s)H^*(s)}$, 所以 $\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z)H(z)}$ 。



题 7-3 图



题 7-4 图

7-4 试求取题 7-4 图所示线性离散系统的输出变量的 Z 变换 $C(z)$ 。

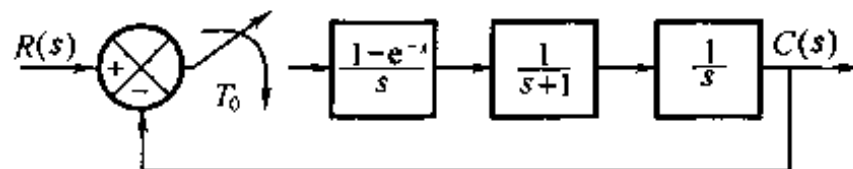
解 由题 7-4 图有 $C(s) = G(s)E(s)$, $E(s) = R(s) - Y(s)$, $Y(s) = H(s)C^*(s)$, 则

$$C(s) = R(s)G(s) - G(s)H(s)C^*(s)$$

对上式采样得

$$C^*(s) = RG^*(s) - GH^*(s)C^*(s)$$

最后得 $C(z) = \frac{RG(z)}{1 + GH(z)}$



题 7-5 图

7-5 设某线性离散系统的方框图如题 7-5 图所示。试求取该系统的单位阶跃响应。已知采样周期 $T_0 = 1$ s。

解 系统的开环脉冲传递函数为

$$G(z) = \mathcal{Z} \left[\frac{1-e^{-1}}{s} \cdot \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s} \right] = (1-z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{1}{s^2(s+1)} \right] = \frac{e^{-1}z + 1 - 2e^{-1}}{z^2 - (1+e^{-1})z + e^{-1}}$$

则系统的脉冲传递函数为

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{0.368z^{-1} + 0.264z^{-2}}{1 - z^{-1} + 0.632z^{-2}}, R(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

则 $C(z) = \frac{0.368z^{-1} + 0.264z^{-2}}{(1 - z^{-1} + 0.632z^{-2})(1 - z^{-1})} = \frac{0.368z^{-1} + 0.264z^{-2}}{1 - 2z^{-1} + 1.632z^{-2} - 0.632z^{-3}}$

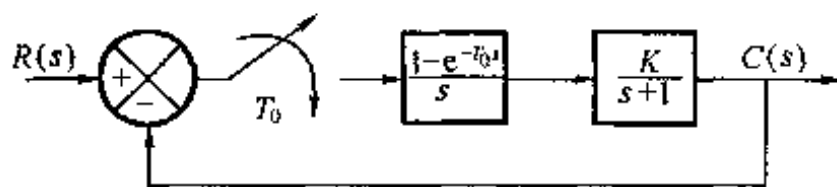
利用长除法有

$$\begin{array}{r} 0.368z^{-1} + z^{-2} + 1.399z^{-3} + 1.4z^{-4} \\ 1 - 2z^{-1} + 1.632z^{-2} - 0.632z^{-3} \overline{) 0.368z^{-1} + 0.264z^{-2}} \\ 0.368z^{-1} - 0.736z^{-2} + 0.601z^{-3} - 0.234z^{-4} \\ \hline z^{-2} - 0.601z^{-3} + 0.234z^{-4} \\ z^{-2} - 2z^{-3} + 1.632z^{-4} - 0.632z^{-5} \\ \hline 1.399z^{-3} - 1.398z^{-4} + 0.632z^{-5} \\ 1.399z^{-3} - 2.798z^{-4} + 2.835z^{-5} - 0.884z^{-6} \\ \hline 1.4z^{-4} - 1.606z^{-5} + 0.884z^{-6} \end{array}$$

$$C(z) = 0.386z^{-1} + z^{-2} + 1.399z^{-3} + 1.4z^{-4} + 1.147z^{-5} + 0.895z^{-6} + 0.807z^{-7}$$

$C(0) = 0, C(1) = 0.386, C(2) = 1, C(3) = 1.399, C(4) = 1.4, C(5) = 1.147, C(6) = 0.895, C(7) = 0.807$ 。

7-6 设某线性离散系统的方框图如题 7-6 图所示。试分析该系统的稳定性,并确定使系统稳定的参数 K 的取值范围。



题 7-6 图

解 由题 7-6 图求得系统的开环脉冲传递函数为

$$G(z) = \mathcal{Z} [G(s)] = \mathcal{Z} \left[\frac{K(1 - e^{-T_0 s})}{s(s+1)} \right] = \frac{K(1 - e^{-T_0})}{z - e^{-T_0}}$$

该单位反馈系统的特征方程为

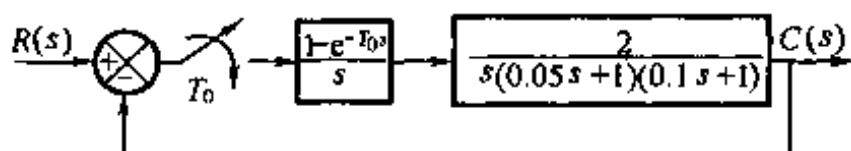
$$1 + G(z) = 0$$

即

$$z + K(1 - e^{-T_0}) - e^{-T_0} = 0$$

特征根为 $z = Ke^{-T_0} + e^{-T_0} - K$, 只有当 $|z| < 1$ 时, 系统稳定。由 $1 > Ke^{-T_0} + e^{-T_0} - K > -1$, 最后求得使给定系统稳定的参数 K 的取值范围为 $0 < K < \frac{1+e^{-T_0}}{1-e^{-T_0}}$ 。

7-7 试分析题 7-7 图所示线性离散系统的稳定性。设采样周期 $T_0 = 0.2$ s。



题 7-7 图

解 由题 7-7 图求得系统的开环脉冲传递函数 $G(z)$ 为

$$G(z) = \mathcal{Z}[G(s)] = \mathcal{Z}\left[\frac{2(1-e^{-T_0 s})}{s^2(0.05s+1)(0.1s+1)}\right] = \frac{0.1522z^2 + 0.1796z + 0.008}{(z-0.0183)(z-0.135)(z-1)}$$

由 $1+G(z)=0$ 求得给定系统的特征方程为

$$z^3 - 1.001z^2 + 0.3354z + 0.0055 = 0$$

应用代数判据法分析给定系统稳定性。令 $z = (1+\omega)/(1-\omega)$, 则特征方程为

$$2.3309\omega^3 + 3.6821\omega^2 + 1.6471\omega + 0.3399 = 0$$

列 Routh 表

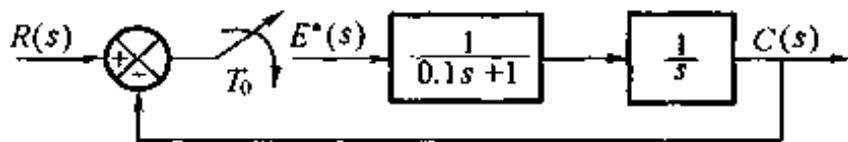
ω	2.3309	1.6471
ω^2	3.6821	0.3399
ω^1	1.4319	0
ω^0	0.3399	

由 Routh 表第一列元素符号无改变可知该离散系统稳定。

7-8 试计算题 7-8 图所示线性离散系统在下列输入信号

$$(1) r(t) = 1(t); (2) r(t) = t; (3) r(t) = t^2$$

作用下的稳态误差。已知采样周期 $T_0 = 0.1$ s。



题 7-8 图

解 由题 7-8 图求得系统的开环脉冲传递函数 $G(z)$ 为

$$G(z) = \mathcal{Z}[G(s)] = \mathcal{Z}\left[\frac{1}{s(0.1s+1)}\right] = \frac{0.632z}{z^2 - 1.368z + 0.368}$$

则

$$E(z) = \frac{1}{1+G(z)} R(z) = \frac{(z-1)(z-0.368)}{z^2 - 0.736z + 0.368} R(z)$$

应用终值定理求系统的稳态误差。

(1) 当 $r(t) = 1(t)$ 时, $R(z) = z/z(-1)$ 。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[(z-1) \cdot \frac{(z-1)(z-0.368)}{z^2 - 0.736z + 0.368} \cdot \frac{z}{z-1} \right] = 0$$

(2) 当 $r(t) = t$ 时, $R(z) = T_0 z/(z-1)^2$ 。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[(z-1) \cdot \frac{(z-1)(z-0.368)}{z^2 - 0.736z + 0.368} \cdot \frac{T_0 z}{(z-1)^2} \right] = 0.1$$

(3) 当 $r(t) = t^2$ 时, $R(z) = T_0^2 z(z+1)/(z-1)^3$ 。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[(z-1) \cdot \frac{(z-1)(z-0.368)}{z^2 - 0.736z + 0.368} \times \frac{T_0^2 z(z+1)}{(z-1)^3} \right] = \infty$$

7-9 设某单位反馈线性离散系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{1 - e^{-T_0 s}}{s} \cdot \frac{10}{s(s+1)}$, 式中 T_0 为采样周期, $T_0 = 1$ s。试确定在匀速输入 $r(t) = t$ 作用下, 使校正系统响应输入信号既无稳态误差, 又能在有限拍内结束的数字控制器的脉冲传递函数 $D(z)$ 。

解 给定系统开环脉冲传递函数 $G(z)$ 为

$$G(z) = \frac{3.68(z+0.718)}{(z-1)(z-0.368)}$$

可见给定系统的 $G(z)$ 在单位圆外无零点也无极点, 并且未校正系统的开环脉冲传递函数 $G(z)$ 分母、分子多项式的阶数差 $n-m=1$ 。要求校正后系统响应 $r(t) = t$ 时无稳态误差, 则校正后系统应为 II 型, 即 $\nu=2$ 。因 $n=2, m=1$, 由 $r-l \geq n-m=1$, 取 $r=2, l=1$, 则有

$$\Phi_e(z) = \frac{(z-1)^2}{z^2}, \quad \Phi(z) = \frac{az+b}{z^2}$$

由 $\Phi(z) = 1 - \Phi_e(z)$, 得 $a=2, b=-1$, 则由 $D(z) = \frac{\Phi(z)}{G(z)[1-\Phi_e(z)]}$, 求得串联校正环节的脉冲传递函数为

$$D(z) = \frac{(z-1)(z-0.368)}{3.68(z+0.718)} \times \frac{2z^{-1} - z^{-2}}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}} = \frac{0.543(z-0.368)(z-0.5)}{(z-1)(z+0.718)}$$

7-10 已知某线性离散系统的开环脉冲传递函数 $G(z)$ 为 $G(z) = \frac{1}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}$, 设

$G(z)$ 的极点位于单位圆内。试确定在输入信号 $r(t) = r_0 \cdot 1(t) + r_1 t$ 作用下, 使系统响应输入信号 $r(t)$ 无稳态误差, 且在有限拍内结束响应过程的数字控制器的脉冲传递函数 $D(z)$ 。设 r_0, r_1 均为常数。

解 因 $n=2, m=0$, 由 $r-l \geq n-m=2$, 取 $r=3, l=1$, 则有

$$\Phi_e(z) = \frac{(z-1)^2(az+b)}{z^3}, \quad \Phi(z) = \frac{cz+d}{z^3}$$

由 $\Phi(z) = 1 - \Phi_e(z)$ 得 $a=1, b=2, c=3, d=-2$, 则由 $D(z) = \frac{\Phi(z)}{G(z)[1-\Phi_e(z)]}$, 求得数字控制器的脉冲传递函数为

$$D(z) = \frac{3\left(z - \frac{2}{3}\right)(a_2 z^2 + a_1 z + a_0)}{z^3 - 3z + 2}$$

7-11 试求取 $X(s) = (s+3)/(s+1)(s+2)$ 的 Z 变换。

解

$$X(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{2z}{z - e^{-T_0}} - \frac{z}{z - e^{-2T_0}} = \frac{2z(z - e^{-2T_0}) - z(z - e^{-T_0})}{z^2 - (e^{-T_0} + e^{-2T_0})z + e^{-3T_0}} \\ &= \frac{z(z - 2e^{-2T_0} + e^{-T_0})}{z^2 - (e^{-T_0} + e^{-2T_0})z + e^{-3T_0}} \end{aligned}$$

7-12 试应用幂级数法、部分分式法、留数法等三种方法求取 $X(z) = \frac{-3+z^{-1}}{1-2z^{-1}+z^{-2}}$ 的 Z 反变换, 即求取 $X(z)$ 的原函数。

解 幂级数法

$$\begin{array}{r} \frac{-3}{1-2z^{-1}+z^{-2}} \\ \underline{-5z^{-1}} \\ \frac{-3+6z^{-1}-3z^{-2}}{-5z^{-1}+3z^{-2}} \\ \underline{-5z^{-1}+10z^{-2}-5z^{-3}} \\ \frac{-7z^{-2}+14z^{-3}-7z^{-4}}{-9z^{-3}+7z^{-4}} \\ \underline{-9z^{-3}+18z^{-4}-9z^{-5}} \\ \frac{-11z^{-4}-9z^{-5}}{} \end{array}$$

$$X(z) = -3 - 5z^{-1} - 7z^{-2} - 9z^{-3} - 11z^{-4} - \dots$$

$$X(0) = -3, X(T_0) = -5, X(2T_0) = -7, X(3T_0) = -9, X(4T_0) = -11, \dots$$

$$X(nT_0) = -2n - 3$$

$$X^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-2n - 3) \delta(t - nT_0)$$

(2) 部分分式法

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{-3+z^{-1}}{1-2z^{-1}+z^{-2}} = \frac{-3z^2+z}{(z-1)^2} = \frac{-3(z^2-z)-2z}{(z-1)^2} \\ &= \frac{-3z}{z-1} - \frac{2z}{(z-1)^2} \end{aligned}$$

$$\mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{z}{(z-1)^2} \right] = \frac{1}{T_0} t \Big|_{t=nT_0} = n, \quad \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{z}{z-1} \right] = 1$$

$$X(nT_0) = -2n - 3$$

$$X^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-2n - 3) \delta(t - nT_0)$$

(3) 留数法

$$X(nT_0) = \frac{d}{dz} (z-1)^2 \frac{-3z^2+z}{(z-1)^2} z^{n-1} \Big|_{z=1} = -2n - 3$$

$$X^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-2n - 3) \delta(t - nT_0)$$

7-13 试求取题 7-13 图所示线性离散系统输出变量的 Z 变换 $C(z)$ 。

解

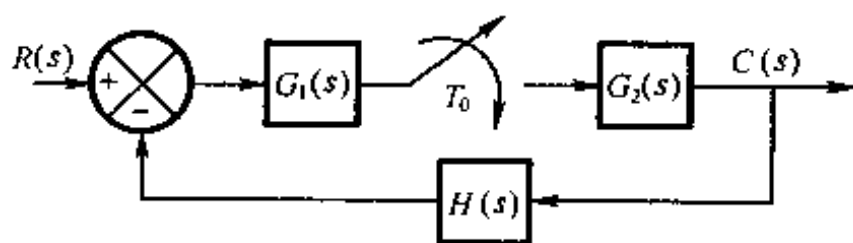
$$C(z) = \frac{RG_1(z) \cdot G_2(z)}{1 + G_1 G_2 H(z)}$$

7-14 试求取题 7-14 图所示多环线性离散系统输出变量的 Z 变换 $C(z)$ 。

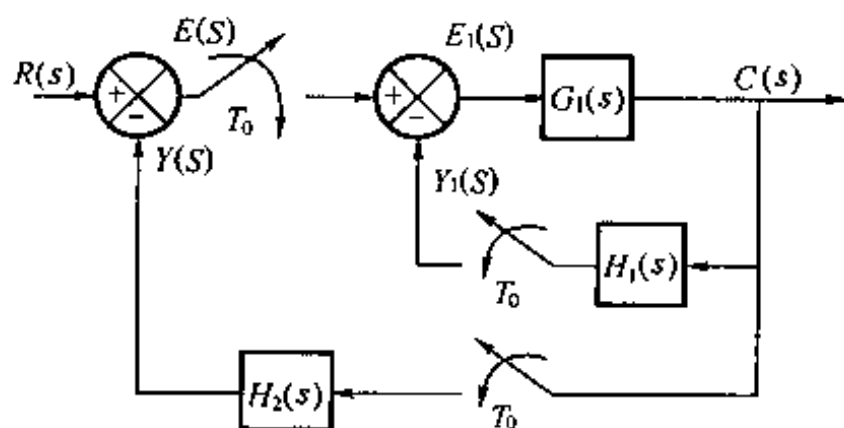
解 由题意有 $C(s) = G_1(s)E_1(s)$, $E_1(s) = E^*(s) - Y_1^*(s)$

$$Y_1(s) = H_1(s)C(s), \quad E(s) = R(s) - Y(s)$$

$$Y(s) = H_2(s)C^*(s)$$



题 7-13 图



题 7-14 图

(1) 对 $E_1(s)$ 采样有 $E_1^*(s) = E^*(s) - Y_1^*(s)$

则 $Y_1(s) = H_1(s) G_1(s) E_1(s) = H_1(s) G_1(s) [E^*(s) - Y_1^*(s)]$

对 $Y_1(s)$ 采样有 $Y_1^*(s) = H_1 G_1^*(s) E^*(s) - H_1 G_1^*(s) Y_1^*(s)$

即 $Y_1^*(s) = \frac{H_1 G_1^*(s) E^*(s)}{1 + H_1 G_1^*(s)}$

(2) $E(s) = R(s) - H_2(s) C^*(s)$

对 $E(s)$ 采样有 $E^*(s) = R^*(s) - H_2^*(s) C^*(s)$

则 $C(s) = G_1(s) [E^*(s) - Y_1^*(s)]$

采样有

$$C^*(s) = G_1^*(s) E^*(s) - G_1^*(s) Y_1^*(s) = G_1^*(s) [R^*(s) - H_2^*(s) C^*(s)] - \frac{G_1^*(s) H_1 G_1^*(s) [R^*(s) - H_2^*(s) C^*(s)]}{1 + H_1 G_1^*(s)}$$

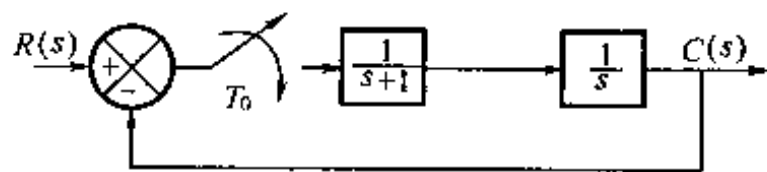
进一步整理得

$$C^*(s) = \frac{G_1^*(s)}{1 + H_1 G_1^*(s)} [R^*(s) - H_2^*(s) C^*(s)] = \frac{G_1^*(s) R^*(s)}{1 + G_1^*(s) H_2^*(s) + H_1 G_1^*(s)}$$

所以

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_1(z)}{1 + G_1(z) H_2(z) + H_1 G_1(z)}$$

7-15 设某线性离散系统的方框图如题 7-15 图所示。试求取该系统的单位阶跃响应, 并计算其超调量、上升时间与峰值时间。已知采样周期 $T_0 = 1$ s。



题 7-15 图

解

$$G(z) = \mathcal{Z} \left[\frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s} \right] = \mathcal{Z} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \right] = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T_0}} = \frac{z(1-e^{-T_0})}{z^2 - (1+e^{-T_0})z + e^{-T_0}}$$

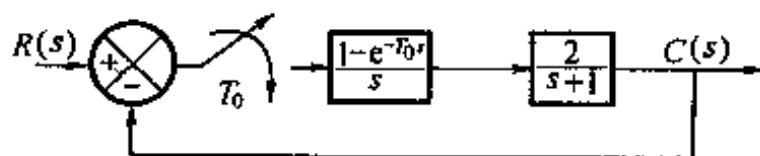
$$\begin{aligned} C(z) &= \frac{G(z)}{1+G(z)} \cdot R(z) = \frac{z(1-e^{-T_0})}{z^2 - 2e^{-T_0}z + e^{-T_0}} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{0.632z^2}{z^3 - 1.734z^2 + 1.1z - 0.368} \\ &= \frac{0.632z^{-1}}{1 - 1.734z^{-1} + 1.1z^{-2} - 0.368z^{-3}} \\ &= 0.632z^{-1} + 1.1z^{-2} + 1.21z^{-3} + 1.12z^{-4} + 1.02z^{-5} + \dots \end{aligned}$$

其中 $T_0 = 1$ s, 则 $C(0) = 0$, $C(T_0) = 0.632$, $C(2T_0) = 1.1$
 $C(3T_0) = 1.21$, $C(4T_0) = 1.12$, $C(5T_0) = 1.02, \dots$

从而得

$$t_p = 3 \text{ s}, \sigma_p = \frac{1.21 - 1}{1} = 21\%, t_r < 2 \text{ s}$$

7-16 某线性离散系统方框图如题 7-16

图所示。试求其单位阶跃响应。已知 $T_0 = 1$ s。

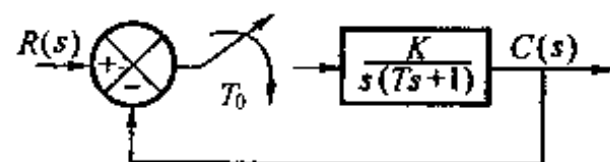
题 7-16 图

解 由题 7-16 图有

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathcal{Z} \left[\frac{(1-e^{-T_0})2}{s(s+1)} \right] = 2(1-z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \right] \\ &= 2 \cdot \frac{z-1}{z} \cdot \frac{z(1-e^{-T_0})}{z^2 - (1+e^{-T_0})z + e^{-T_0}} \\ \frac{C(z)}{R(z)} &= \frac{2(z-1)(1-e^{-T_0})}{z^2 + (1-3e^{-T_0})z + (-2+3e^{-T_0})} \\ C(z) &= \frac{1.264z}{z^2 - 0.1z - 0.9} = \frac{1.264z^{-1}}{1 - 0.1z^{-1} - 0.9z^{-2}} \end{aligned}$$

则 $C(0) = 0$, $C(T_0) = 1.264$, $C(2T_0) = 0.13$, $C(3T_0) = 1.237 \dots$

7-17 设某线性离散系统方框图如题 7-17 图所示, 其中参数 $T > 0, K > 0$ 。试确定给定系统稳定时参数 K 的取值范围。



题 7-17 图

解 由题 7-17 图有

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathcal{Z} \left[\frac{K}{s(Ts+1)} \right] = \frac{K}{T} \mathcal{Z} \left[\frac{T}{s} - \frac{T}{s + \frac{1}{T}} \right] \\ &= K \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-\frac{T_0}{T}}} \right) \end{aligned}$$

系统的特征方程为 $1 + G(z) = 0$, 即

$$z^2 - (1 + e^{-\frac{T_0}{T}})z + e^{-\frac{T_0}{T}} + Kz(1 - e^{-\frac{T_0}{T}}) = 0$$

$$z^2 + (-1 + K - e^{-\frac{T_0}{T}} - Ke^{-\frac{T_0}{T}})z + e^{-\frac{T_0}{T}} = 0$$

令 $z = \frac{\omega + 1}{\omega - 1}$, 有 $K(1 - e^{-\frac{T_0}{T}})\omega^2 + 2(1 - e^{-\frac{T_0}{T}})\omega + (2 - K + 2e^{-\frac{T_0}{T}} + Ke^{-\frac{T_0}{T}}) = 0$

列 Routh 表

$$\begin{array}{ccc} \omega^2 & K(1 - e^{-\frac{T_0}{T}}) & 2 - K + 2e^{-\frac{T_0}{T}} + Ke^{-\frac{T_0}{T}} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \omega^1 & 2(1 - e^{-\frac{T_0}{T}}) & 0 \\ \omega^0 & 2 - K + 2e^{-\frac{T_0}{T}} + Ke^{-\frac{T_0}{T}} & 0 \end{array}$$

给定系统稳定时 $K(1 - e^{-\frac{T_0}{T}}) > 0$, $2 - K + 2e^{-\frac{T_0}{T}} + Ke^{-\frac{T_0}{T}} > 0$

又由 $T > 0, K > 0$, 求得 K 的取值范围为 $0 < K < \frac{2(1 + e^{-\frac{T_0}{T}})}{1 - e^{-\frac{T_0}{T}}}$ 。

7-18 试计算题 7-18 图所示线性离散系统响应 $r(t) = 1(t), t, t^2$ 时的稳态误差。设采样周期 $T_0 = 1$ s。

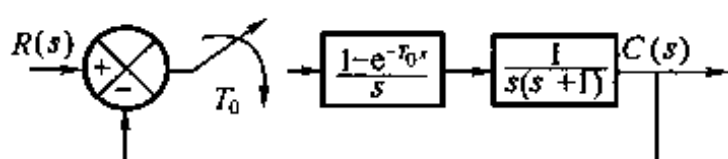
解 系统开环脉冲传递函数为

$$G(z) = \mathcal{Z} \left[\frac{1 - e^{-T_0 s}}{s} \cdot \frac{1}{s(s+1)} \right] = \frac{e^{-1}z + 1 - 2e^{-1}}{(z-1)(z-e^{-1})} \quad \text{I 型系统}$$

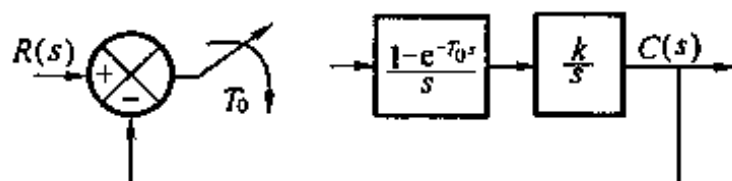
$$r(t) = 1(t) \text{ 时} \quad K_p = \lim_{z \rightarrow 1} G(z) = \infty, \quad e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p} = 0$$

$$r(t) = t \text{ 时} \quad K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G(z) = \frac{1 - e^{-1}}{1 - e^{-1}} = 1, \quad e_{ss} = \frac{T_0}{K_v} = 1$$

$$r(t) = t^2 \text{ 时} \quad K_a = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G(z) = 0, \quad e_{ss} = \frac{2T_0}{K_a} = \infty$$



题 7-18 图



题 7-19 图

7-19 设某线性离散系统方框图如题 7-19 图所示,其中采样周期 $T_0 = 1$ s。试设计使系统响应输入信号 $r(t) = r_0 \cdot 1(t) + r_1 t$ 时无稳态误差,且在有限拍内结束响应过程的数字控制器的脉冲传递函数 $D(z)$,其中 r_0, r_1 均为常数。

解

$$G(z) = \mathcal{Z} \left[\frac{1 - e^{-T_0 s}}{s} \cdot \frac{K}{s} \right] = K(1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{1}{s^2} \right] = K(1 - z^{-1}) \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = \frac{Kz^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

$$\Phi_e(z) = (1 - z^{-1})^2, \quad \Phi(z) = z^{-1}(a + bz^{-1}), \quad \Phi(z) = 1 - \Phi_e(z)$$

则 $a = 2, b = -1$, 即 $\Phi(z) = z^{-1}(2 - z^{-1})$ 。

所以数字控制器的脉冲传递函数为

$$D(z) = \frac{\Phi(z)}{G(z)\Phi_e(z)} = \frac{z^{-1}(2 - z^{-1})}{\frac{Kz^{-1}}{1 - z^{-1}}(1 - z^{-1})^2} = \frac{1}{K} \cdot \frac{2 - z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

同步训练题

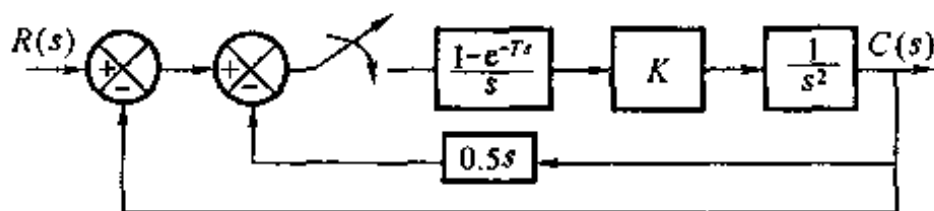
1. 试用静态误差系数法计算题 1 图所示系统的误差。已知系统结构图如题 1 图所示,其

中 $K=0, T=0.2, r(t)=1(t)+t+\frac{1}{2}t^2$ 。

2. 已知脉冲传递函数

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{0.53 + 0.1z^{-1}}{1 - 0.37z^{-1}}$$

其中 $R(z) = \frac{z}{z-1}$, 试求 $c(nT)$ 。



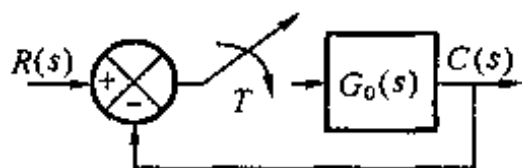
题1图

3. 已知采样系统的结构图如

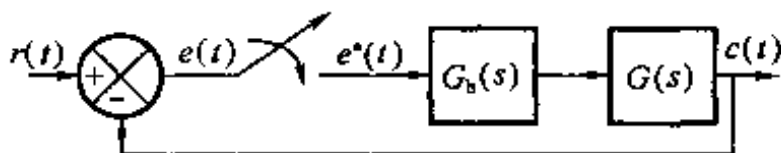
题3图所示。欲使系统型次具有 $\nu =$

2, 并在有限拍内结束过渡过程, 求校正装置形式。图中, $G_0(s) = K/s(\tau s + 1)$ 。

4. 设离散系统如题4图所示, 采样周期 $T=1\text{ s}$, $G_b(s)$ 为零阶保持器, 而 $G(s) = \frac{K}{s(0.2s+1)}$, 当 $K=5$ 时, 分别在 z 域和 ω 域中分析系统的稳定性。

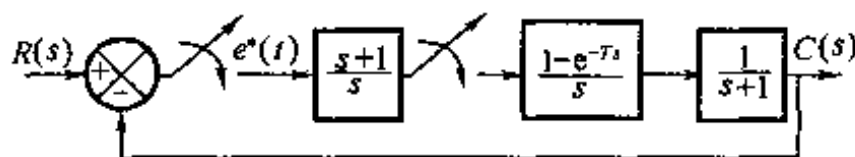


题3图



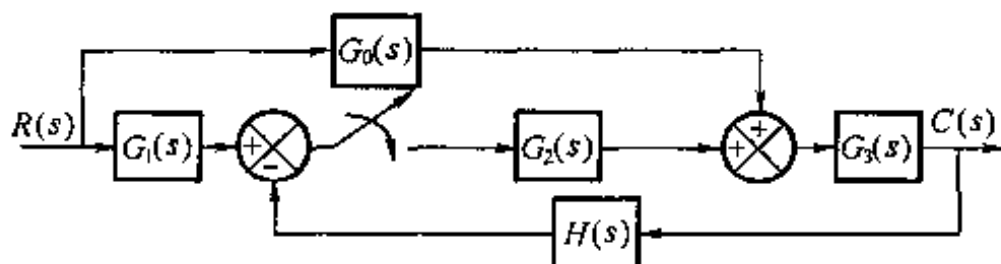
题4图

5. 采样系统的结构图如题5图所示, 图中采样周期 $T=1\text{ s}$ 。试求闭环系统的脉冲传递函数 $C(z)/R(z)$, 并计算系统在 $r(t)=2\cdot 1(t)$ 时的稳态误差 $e(\infty)$ 。



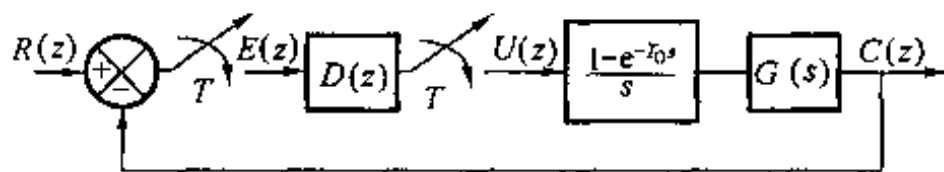
题5图

6. 离散系统如题6图所示, 求 $C(z)$ 。



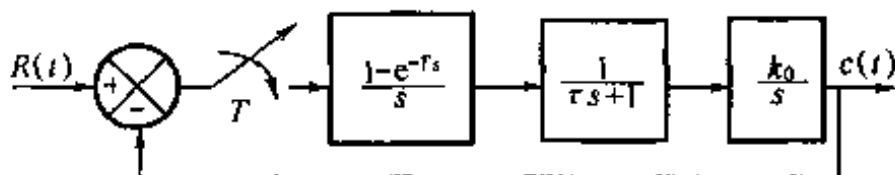
题6图

7. 设单位反馈线性离散系统的结构如题7图所示, 其中 $G_0(s) = \frac{4}{s(s+1)}$, 采样周期为 $T=1\text{ s}$, 试设计单位阶跃输入时最小拍无误差系统的数学控制器 $D(z)$ 。



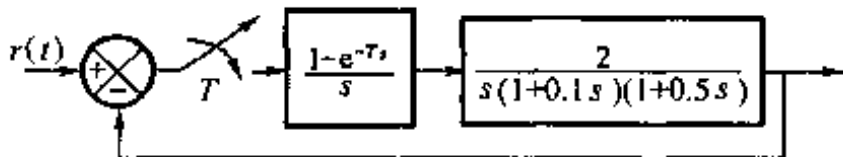
题7图

8. 求题 8 图所示系统的单位阶跃响应, 设 $k_0 = 1, T = \tau = 1$ 。并求系统的时域指标。



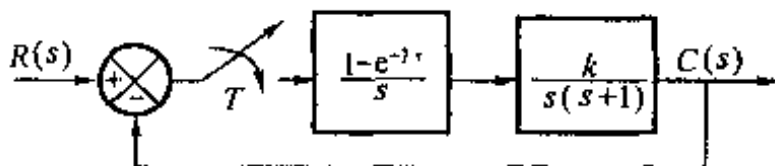
题 8 图

9. 设具有零阶保持器的采样系统如题 9 图所示, 采样周期 $T = 0.2$ s, 试用频率特性法判断系统的稳定性。



题 9 图

10. 采样系统的结构图如题 10 图所示, 图中采样周期 $T = 1$ s。试作出系统的根轨迹图, 并确定系统临界稳定时的 k 值。



题 10 图

同步训练题答案

1. 解 系统的开环脉冲传递函数为

$$G(z) = \frac{1.2z - 0.8}{(z-1)^2}$$

可以看出开环系统为 II 型。因此 $K_p = \infty, K_v = \infty, K_a = 0.4$, 系统的稳态误差为

$$e(\infty) = \frac{1}{K_p} + \frac{T}{K_v} + \frac{T^2}{K_a} = 0.1$$

2. 解

$$c(nT) = 1 - 0.47(0.37)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

3. 解

$$G_c(z) = \frac{2 - (1 + 2e^{-T/\tau})z^{-1} + e^{-T/\tau}z^{-2}}{K(1 - e^{-T/\tau})(1 - z^{-1})}$$

4. 解

当 $K = 5$ 时, $D(z) = z^2 + 3z + 0.9663 = 0$, 解得 $\lambda_1 = -2.633, \lambda_2 = -0.367$ (系统不稳定), 把 $z = \frac{\omega + 1}{\omega - 1}$ 代入, 并整理得 $D(\omega) = \omega^2 + 0.01357\omega - 0.208$, $D(\omega)$ 中系数小于零, 不满足系统稳定的必要条件。

5. 解 开环脉冲传递函数为 $G(z) = \frac{1.264z - 0.632}{(z-1)(z-0.368)}$

闭环传递函数为 $\frac{C(z)}{R(z)} = \Phi(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{1.264z - 0.632}{z^2 - 0.104z - 0.264}$

由于闭环系统特征根 $z_1 = 0.569, z_2 = -0.465$, 均位于 z 平面上单位圆内, 闭环系统是稳定的, 开环传递函数的分母多项式含有 $(z-1)$ 因式, 是一阶无静差系统, 因此在 $r(t) = 2 \cdot 1(t)$ 作用下, 稳态误差为零。

6. 解 $C(z) = RG_0 G_3(z) + \frac{RG_1(z) G_2 G_3(z) - RG_0 G_3 H(z) G_2 G_3(z)}{1 + G_2 G_3 H(z)}$

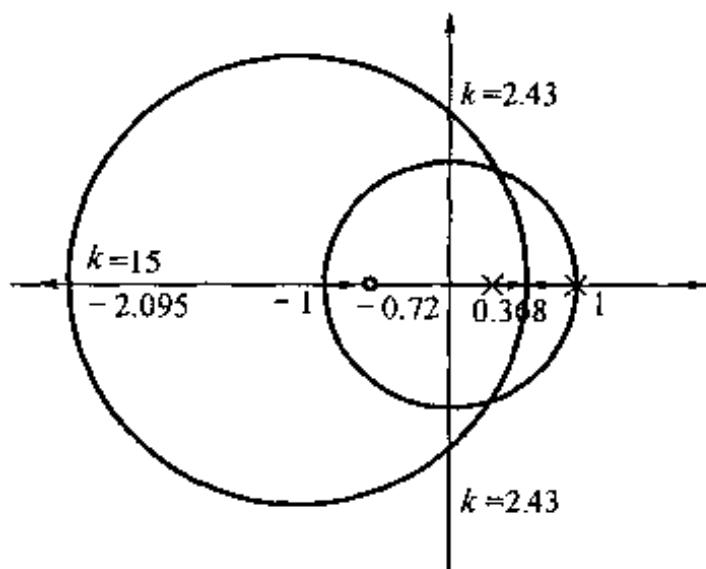
7. 解 $D(z) = 0.68 \times \frac{1 - 0.368z^{-1}}{1 + 0.717z^{-1}}$

8. 解 $C(nT) = 0.368\delta(t-T) + \delta(t-2T) + 1.4\delta(t-3T) + \dots$

因此得 $\sigma = 40\%$, $t_r = 2$ s, $t_p = 3.5$ s, t_s 较长。

9. 解 剪切频率 $\omega_c = 0.188$ rad/s, 相角裕度为 70° , 系统稳定。

10. 解 根轨迹如题 10 解图, 系统临界稳定时 $k = 2.43$ 。



题 10 解图

第 8 章 线性系统的状态空间分析法

书后习题解析

8-1 试列写由下列微分方程所描述的线性定常系统的状态空间表达式。

$$(1) y^{(2)}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = 0$$

解 选取状态变量 $x_1 = y, x_2 = \dot{x}_1 = \dot{y}$; 则有

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 \\ y = x_1 \end{cases}$$

则状态空间表达式为 $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ 。

$$(2) y^{(2)}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

解 选取状态变量 $x_1 = y, x_2 = \dot{x}_1 = \dot{y}$; 则有

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 + u \\ y = x_1 \end{cases}$$

则状态空间表达式为 $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ 。

$$(3) y^{(3)}(t) + 3y^{(2)}(t) + 2\dot{y}(t) + 2y(t) = 0$$

解 选取状态变量 $x_1 = y, x_2 = \dot{x}_1 = \dot{y}, x_3 = \dot{x}_2 = \ddot{y}$; 则有

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -2x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ y = x_1 \end{cases}$$

则状态空间表达式为 $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ 。

$$(4) y^{(3)}(t) + 3y^{(2)}(t) + 2\dot{y}(t) + 2y(t) = u(t)$$

解 选取状态变量 $x_1 = y, x_2 = \dot{x}_1 = \dot{y}, x_3 = \dot{x}_2 = \ddot{y}$; 则有

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + u \\ y = x_1 \end{cases}$$

则状态空间表达式为
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, y = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

$$(5) y^{(3)}(t) + 5y^{(2)}(t) + \dot{y}(t) + 2y(t) = \dot{u}(t) + 2u(t)$$

由方程知 $a_1 = 5, a_2 = 1, a_3 = 2, b_0 = 0, b_1 = 0, b_2 = 1, b_3 = 2$, 则

$$h_1 = b_1 - a_1 b_0 = 0$$

$$h_2 = (b_2 - a_2 b_0) - a_1 h_1 = 1$$

$$h_3 = (b_3 - a_3 b_0) - a_2 h_1 - a_1 h_2 = 2 - 5 \times 1 = -3$$

选

$$\begin{cases} x_1 = y - b_0 u \\ x_2 = \dot{x}_1 - h_1 u, \text{ 则 } \\ x_3 = \dot{x}_2 - h_2 u \end{cases} \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + h_1 u \\ \dot{x}_2 = x_3 + h_2 u \\ \dot{x}_3 = -2x_1 - x_2 - 5x_3 + h_3 u \\ y = x_1 \end{cases}$$

则状态方程为
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} u, y = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

$$(6) y^{(3)}(t) + 3y^{(2)}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = u(t) + 2\dot{u}(t) + u(t)$$

由方程知 $a_1 = 3, a_2 = 2, a_3 = 1, b_0 = 0, b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 1$, 则

$$h_1 = b_1 - a_1 b_0 = 1$$

$$h_2 = (b_2 - a_2 b_0) - a_1 h_1 = 2 - 3 \times 1 = -1$$

$$h_3 = (b_3 - a_3 b_0) - a_2 h_1 - a_1 h_2 = 1 - 2 \times 1 - 3 \times (-1) = 2$$

选

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{x}_1 - h_1 u, \text{ 则 } \\ x_3 = \dot{x}_2 - h_2 u \end{cases} \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + h_1 u \\ \dot{x}_2 = x_3 + h_2 u \\ \dot{x}_3 = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + h_3 u \\ y = x_1 \end{cases}$$

则状态空间表达式为
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} u, y = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

8-2 试根据单位反馈系统的闭环传递函数 $\frac{Y(s)}{R(s)}$ 列写线性定常系统的状态空间表达式。

$$(1) \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2(s+10)}; (2) \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s(s+1)(s+8)};$$

$$(3) \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{5}{s(s^2+4s+2)}; (4) \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{s^2+4s+5}{s^3+6s^2+11s+6}.$$

解 (1) $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2(s+10)} = \frac{1}{s^3+10s^2}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0 \ 0]$$

$$(2) \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s(s+1)(s+8)} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{1}{56} \cdot \frac{1}{s+8}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \left[\frac{1}{8} \quad -\frac{1}{7} \quad \frac{1}{56} \right]$$

另一种解法

$$\text{又 } \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^3 + 9s^2 + 8s}, \text{ 所以 } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & -9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0 \quad 0].$$

$$(3) \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{5}{s(s^2 + 4s + 2)} = \frac{5}{s^3 + 4s^2 + 2s}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0 \quad 0]$$

$$(4) \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{s^2 + 4s + 5}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [5 \quad 4 \quad 1]$$

8-3 试应用矩阵指数法计算线性定常系统的状态转移矩阵 $\Phi(t)$ 。已知系统的系统矩阵 A 为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

解 状态转移矩阵 $\Phi(t)$ 可通过矩阵指数 e^{At} 来表示, 即 $\Phi(t) = e^{At}$, 其中

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}(At)^2 + \frac{1}{3!}(At)^3 + \cdots + \frac{1}{k!}(At)^k + \cdots$$

将系数矩阵 A 代入上式, 求得状态转移矩阵为

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} t + \frac{1}{2!} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}^2 t^2 + \cdots = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

8-4 试应用拉普拉斯法计算线性定常系统的状态转移矩阵 $\Phi(t)$ 。已知系统的系统矩阵 A 为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{解 } (1) sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A) = \frac{\text{adj}(sI - A)}{|sI - A|}$$

$$\text{式中 } |sI - A| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{vmatrix} = s(s+3) + 2 = (s+1)(s+2)$$

$$\text{adj}(sI - A) = \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$$

整理得

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad \Phi(t) = L^{-1}[(sI - A)^{-1}] = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

8-5 试应用变换系统矩阵 A 为对角线矩阵的计算法计算线性定常系统的状态转移矩阵 $\Phi(t)$ 。已知系统矩阵 A 为 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

解 (1) 由 $|sI - A| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{vmatrix} = (s+1)(s+2) = 0$, 解出特征值 $s_1 = -1, s_2 = -2$ 。

(2) 由于系统矩阵 A 具有“友”矩阵形式, 则变换矩阵 $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

则 $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ 。

(3) 计算状态转移矩阵 $\Phi(t)$

$$\Phi(t) = e^{At} = Pe^{P^{-1}APt}P^{-1} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

8-6 试应用 Cayley-Hamilton 定理的计算法计算线性定常系统的状态转移矩阵 $\Phi(t)$ 。已知系统矩阵 A 为 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ 。

解 给定系统矩阵 A 的特征值为 $s_1 = -1, s_2 = -2$ 。可得方程组

$$\begin{cases} \alpha_0(t) + \alpha_1(t)s_1 = e^{s_1 t} \\ \alpha_0(t) + \alpha_1(t)s_2 = e^{s_2 t} \end{cases}$$

解出 $\alpha_0(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}, \alpha_1(t) = e^{-t} - e^{-2t}$, 则状态转移矩阵 $\Phi(t)$ 为

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A = (e^{-t} - e^{-2t}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (e^{-t} - e^{-2t}) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

8-7 已知线性定常系统的系统矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$, 试计算该系统的状态转移矩阵 $\Phi(t)$ 。

解 $|sI - A| = s^3 + 6s^2 + 11s + 6 = (s+1)(s+2)(s+3) = 0$, 则系统三个特征根为 $s_1 = -1, s_2 = -2, s_3 = -3$ 。利用 Cayley-Hamilton 定理有

$$\begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 9 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-2t} \\ e^{-3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{-t} - 3e^{-2t} + e^{-3t} \\ \frac{5}{2}e^{-t} - 4e^{-2t} + \frac{3}{2}e^{-3t} \\ \frac{1}{2}e^{-t} - e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A + \alpha_2(t)A^2$$

$$= \begin{bmatrix} 3e^{-t} - 3e^{-2t} + e^{-3t} & \frac{5}{2}e^{-t} - 4e^{-2t} + \frac{3}{2}e^{-3t} & \frac{1}{2}e^{-t} - e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t} \\ -3e^{-t} + 6e^{-2t} - 3e^{-3t} & -\frac{5}{2}e^{-t} + 8e^{-2t} - \frac{9}{2}e^{-3t} & -\frac{1}{2}e^{-t} + 2e^{-2t} - \frac{3}{2}e^{-3t} \\ 3e^{-t} - 12e^{-2t} + 9e^{-3t} & \frac{5}{2}e^{-t} - 16e^{-2t} + \frac{27}{2}e^{-3t} & \frac{1}{2}e^{-t} - 4e^{-2t} + \frac{9}{2}e^{-3t} \end{bmatrix}$$

8-8 试根据下列系统矩阵求取线性定常系统的状态转移矩阵 $\Phi(t)$ 。

$$(1) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; (2) A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

$$\text{解 } (1) \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0, \Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{6} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$(2) \Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2}e^{\lambda t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}.$$

8-9 设线性定常系统的齐次状态方程为 $\dot{X} = AX$, 已知 $X(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix}$, $X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$; $X(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$, $X(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ 。试求取该系统的系统矩阵 A 及状态转移矩阵 $\Phi(t)$ 。

解 齐次方程的解为 $X(t) = \Phi(t)X(0)$, 则

$$\begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{-t} \\ -e^{-2t} & -e^{-t} \end{bmatrix} = \Phi(t) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{-t} \\ -e^{-2t} & -e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$$

由于 $\text{rank} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2$, 所以 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 。

最终求得给定系统的状态转移矩阵

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & 2e^{-t} - 2e^{-2t} \\ -e^{-t} + e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$A = \dot{\Phi}(t)|_{t=0} = \begin{bmatrix} -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -2e^{-t} + 4e^{-2t} \\ -e^{-t} - 2e^{-2t} & e^{-t} - 4e^{-2t} \end{bmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

8-10 设线性定常系统的齐次状态方程为 $\dot{X} = AX$ 。已知 $X(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ -2e^{-2t} \end{bmatrix}$, $X(0) =$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}; X(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}, X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

解 齐次方程的解为 $X(t) = \Phi(t)X(0)$, 则

$$\begin{bmatrix} -e^{-2t} \\ -2e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t) & \Phi_{12}(t) \\ \Phi_{21}(t) & \Phi_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t) & \Phi_{12}(t) \\ \Phi_{21}(t) & \Phi_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

则

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} -2e^{-2t} + 2e^{-t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$A = \dot{\Phi}(t)|_{t=0} = \begin{bmatrix} -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \\ 2e^{-t} - 4e^{-2t} & e^{-t} - 4e^{-2t} \end{bmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

8-11 已知线性定常系统的齐次状态方程为 $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, 试求取通过初始条件 $x_1(0), x_2(0)$ 及 $x_3(0)$ 表示的齐次状态方程解。

$$\text{解 } X(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{t^2}{2}e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix}.$$

8-12 已知线性定常系统的齐次状态方程为 $\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} X$, 试确定与状态 $X(t) = [2 \ 5]^T$ 相对应的初始状态 $X(0)$ 。

解(1)应用对角化法计算 $\Phi(t)$ 。

系统矩阵 A 具有友矩阵形式, 其特征值 $|sI - A| = s^2 + s - 2 = (s-1)(s+2) = 0$, 求得 s_1

$$= 1, s_2 = -2. \text{ 则 } P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, e^{P^{-1}APt} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}, \text{ 最后求得}$$

$$\Phi(t) = e^{At} = Pe^{P^{-1}APt}P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2e^t + e^{-2t} & e^t - e^{-2t} \\ 2e^t - 2e^{-2t} & e^t + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad \Phi^{-1}(t) = \Phi(-t) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2e^{-t} + e^{2t} & e^{-t} - e^{2t} \\ 2e^{-t} - 2e^{2t} & e^{-t} + 2e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$X(0) = \Phi^{-1}(t)X(t) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2e^{-t} + e^{2t} & e^{-t} - e^{2t} \\ 2e^{-t} - 2e^{2t} & e^{-t} + 2e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{-t} - e^{2t} \\ 3e^{-t} + 2e^{2t} \end{bmatrix}$$

8-13 试求解线性定常系统的非齐次状态方程 $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u$, 已知

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, u(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

解 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$, 则 $\Phi(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$ 。

$$\begin{aligned} \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau &= \int_0^t \begin{bmatrix} 4e^{-(t-\tau)} - 2e^{-2(t-\tau)} \\ -4e^{-(t-\tau)} + 4e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} e^{-\tau} d\tau \\ &= \int_0^t \begin{bmatrix} 4e^{-t} - 2e^{-2t}e^{\tau} \\ -4e^{-t} + 4e^{-2t}e^{\tau} \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} (4t-2)e^{-t} + 2e^{-2t} \\ (4-4t)e^{-t} - 4e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t} - e^{-2t} \\ -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (4t-2)e^{-t} + 2e^{-2t} \\ (4-4t)e^{-t} - 4e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (4t-1)e^{-t} + e^{-2t} \\ (3-4t)e^{-t} - 2e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

8-14 已知线性定常系统的状态方程及输出方程分别为

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$y = [3 \quad 1]X$$

设当 $t=0$ 时输入 $u(t)=1(t)$ 。试计算初始条件 $X(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 下的系统输出 $y(t)$ 。

解 状态转移矩阵 $\Phi(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$

$$y = C\Phi(t)X(0) + C \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

$$C\Phi(t)X(0) = [3 \quad 1] \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2e^{-t} - e^{-2t}$$

$$\begin{aligned} C \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau &= [3 \quad 1] \int_0^t \begin{bmatrix} 2e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ -2e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} & -e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot 1 d\tau \\ &= 3 - 4e^{-t} + e^{-2t} \end{aligned}$$

则系统输出 $y = 2e^{-t} - e^{-2t} - 4e^{-t} + e^{-2t} + 3 = 3 - 2e^{-t}$ 。

8-15 试求取线性时变系统非齐次状态方程

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{(t+1)^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t-t_0)$$

的解, 其中 $u(t-t_0)$ 是从 t_0 时刻开始的单位阶跃函数。

解 计算 $\Phi(t, t_0)$

$$\int_{t_0}^t A(\tau_1) d\tau_1 = \int_{t_0}^t \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{(\tau_1+1)^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} d\tau_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{t+1} + \frac{1}{t_0+1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t A(\tau_1) \int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 &= \int_{t_0}^t \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{(\tau_1+1)^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\tau_1+1} + \frac{1}{t_0+1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} d\tau_1 \\ &= \int_{t_0}^t \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} d\tau_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^t A(\tau_1) \int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2) \int_{t_0}^{\tau_2} A(\tau_3) d\tau_3 d\tau_2 d\tau_1 \\
&= \int_{t_0}^t \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{(\tau_1+1)^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\tau_1} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{(\tau_2+1)^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\tau_2} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{(\tau_3+1)^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} d\tau_3 d\tau_2 d\tau_1 \\
&= \int_{t_0}^t \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{(\tau_1+1)^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\tau_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} d\tau_2 d\tau_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\Phi(t, t_0) = I + \int_{t_0}^t A(\tau_1) d\tau_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{t+1} + \frac{1}{t_0+1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B u(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{t+1} + \frac{1}{\tau+1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 1 d\tau = \begin{bmatrix} \frac{t(t-t_0)}{t+1} + \ln \frac{t+1}{t_0+1} \\ t-t_0 \end{bmatrix}$$

$$\text{所以 } \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{t+1} + \frac{1}{t_0+1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{t(t-t_0)}{t+1} + \ln \frac{t+1}{t_0+1} \\ t-t_0 \end{bmatrix}.$$

8-16 设描述线性定常离散系统的差分方程为 $y(k+2) + 3y(k+1) + 2y(k) = u(k)$, 试选取 $x_1(k) = y(k)$, $x_2(k) = y(k+1)$ 为一组状态变量, 写出该系统的状态方程, 并求其解。已知 $u(t) = 1(t)$ 。

解 依题意选取 $\begin{cases} x_1(k) = y(k) \\ x_2(k) = y(k+1) \end{cases}$, 则系统状态空间表达式为

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k), y(k) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{Z}^{-1}[(zI - A)^{-1}z] = \mathcal{Z}^{-1}\left[\begin{bmatrix} z & -1 \\ 2 & z+3 \end{bmatrix}^{-1} z\right] = \begin{bmatrix} 2(-1)^k - (-2)^k & (-1)^k - (-2)^k \\ -2(-1)^k + 2(-2)^k & -(-1)^k + 2(-2)^k \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}^{-1}[(zI - A)^{-1}Bu(z)] &= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{z+3}{(z+1)(z+2)} & \frac{1}{(z+1)(z+2)} \\ \frac{-2}{(z+1)(z+2)} & \frac{z}{(z+1)(z+2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{z}{z-1}\right\} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{6} - \frac{1}{2}(-1)^k + \frac{1}{3}(-2)^k \\ \frac{1}{6} + \frac{1}{2}(-1)^k - \frac{2}{3}(-2)^k \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{所以 } \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2(-1)^k - (-2)^k & (-1)^k - (-2)^k \\ -2(-1)^k + 2(-1)^k & -(-1)^k + 2(-2)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} \frac{1}{6} - \frac{1}{2}(-1)^k + \frac{1}{3}(-2)^k \\ \frac{1}{6} + \frac{1}{2}(-1)^k - \frac{2}{3}(-2)^k \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

8-17 设描述线性定常离散系统的差分方程为

$$y(k+3) + 3y(k+2) + 2y(k+1) + y(k) = u(k+2) + 2u(k+1)$$

试列写该系统的状态方程,并求其解。设已知 $u(t) = t$ 。

解 取状态变量为

$$\begin{cases} x_1(k) = y(k) - b_0 u(k) \\ x_2(k) = x_1(k+1) - h_1 u(k) \\ x_3(k) = x_2(k+1) - h_2 u(k) \end{cases}, \begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) + h_1 u(k) \\ x_2(k+1) = x_3(k) + h_2 u(k) \\ x_3(k+1) = -x_1(k) - 2x_2(k) - 3x_3(k) + h_3 u(k) \end{cases}$$

已知 $a_1 = 3, a_2 = 2, a_3 = 1, b_0 = 0, b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 0$, 则

$$h_1 = b_1 - a_1 b_0 = 1$$

$$h_2 = (b_2 - a_2 b_0) - a_1 h_1 = 2 - 3 \times 1 = -1$$

$$h_3 = (b_3 - a_3 b_0) - a_2 h_1 - a_1 h_2 = 0 - 2 \times 1 - 3 \times (-1) = 1$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

8-18 试求取下列状态方程的离散化方程。

$$(1) \dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u; (2) \dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

解 (1) $A^*(T_0) = \begin{bmatrix} 1 & T_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$B^*(T_0) = \int_0^{T_0} e^{At} B dt = \int_0^{T_0} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} dt = \int_0^{T_0} \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} T_0^2 \\ T_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1[(k+1)T_0] \\ x_2[(k+1)T_0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT_0) \\ x_2(kT_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} T_0^2 \\ T_0 \end{bmatrix} u(kT_0)$$

$$(2) \quad A^*(T_0) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2T_0}) \\ 0 & e^{-2T_0} \end{bmatrix}, B^*(T_0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(T_0 + \frac{e^{-2T_0} - 1}{2} \right) \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2T_0}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1[(K+1)T_0] \\ x_2[(k+1)T_0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2T_0}) \\ 0 & e^{-2T_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT_0) \\ x_2(kT_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(T_0 + \frac{e^{-2T_0} - 1}{2} \right) \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2T_0}) \end{bmatrix} u(kT_0)$$

8-19 已知线性定常系统的状态方程为 $\dot{X} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} X$, 试应用李雅普诺夫第二法判

别该系统的平衡状态的稳定性。

解 $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$, 取 $Q = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 设 $P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix}$, 则由 $A^T P + PA = -Q$ 有

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

解得 $P_{11} = \frac{23}{60}$, $P_{12} = -\frac{7}{60}$, $P_{22} = \frac{11}{60}$, 因此 $P = \begin{bmatrix} \frac{23}{60} & -\frac{7}{60} \\ -\frac{7}{60} & \frac{11}{60} \end{bmatrix}$ 。

$$\Delta_1 = |P_{11}| = \frac{23}{60} > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{23}{60} & -\frac{7}{60} \\ -\frac{7}{60} & \frac{11}{60} \end{vmatrix} = \frac{204}{60^2} > 0, \text{ 因此, 对称矩阵 } P \text{ 具有}$$

正定性, 所以系统的平衡状态是大范围渐近稳定的。

8-20 已知线性定常系统的状态方程为 $\dot{X} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} X$, 试分析系统在平衡状态 $X_e = 0$ 处的稳定性。

解 $X_e = 0$, 由 $A^T P + PA = -I$ 有

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

其中 $P_{12} = P_{21}$, 解得 $P_{11} = \frac{2}{5}$, $P_{21} = P_{12} = -\frac{1}{2}$, $P_{22} = -\frac{3}{20}$, 并且 $\Delta_1 = P_{11} = \frac{2}{5} > 0$, $\Delta = |P| = -0.0625$, 所以系统不稳定。

8-21 已知线性定常系统的齐次状态方程为 $\dot{X} = AX$, $X = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$, 其中 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -b_4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -b_3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -b_2 & -b_1 \end{bmatrix}$, $b_i \neq 0 (i = 1, 2, 3, 4)$, 试用 $b_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 表示该系统在平衡点 $X_e = 0$ 处渐近稳定的充分条件。

解 取 $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 由 $A^T P + PA = -Q$, 解得

$$P = \begin{bmatrix} \frac{b_2^2 b_3}{2b_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b_2 b_3}{2b_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b_2}{2b_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2b_1} \end{bmatrix}$$

并且, $\Delta_1 = P_{11} = \frac{b_2^2 b_3}{2b_1} > 0$, $\Delta_2 = \frac{b_2^3 b_3^2}{4b_1^2} > 0$, $\Delta_3 = \frac{b_2^4 b_3^3}{8b_1^3} > 0$, $|P| = \frac{b_2^4 b_3^2}{16b_1^4} > 0$ 。要使系统稳定需

有 $b_1 > 0, b_2 > 0, b_3 > 0$ 。

8-22 已知线性定常离散系统的状态方程为

$$x_1(k+1) = x_1(k) + 3x_2(k)$$

$$x_2(k+1) = -3x_1(k) - 2x_2(k) - 3x_3(k)$$

$$x_3(k+1) = x_1(k)$$

试分析该系统的平衡状态的稳定性。

解 由题知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -3 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 应用 MATLAB 中的 eig 函数求得 A 的特征根为

$0.1173 \pm 2.6974i, -1.2346$ 。特征根在 z 平面单位圆外, 系统不稳定; 或取 $Q = I$, P 是对称

阵, 由 $A^T P + PA = -Q$, 得 $P = \begin{bmatrix} -0.2463 & -0.2564 & -0.5 \\ -0.2564 & -0.6282 & -1.4615 \\ -0.5 & -1.4615 & -4.6538 \end{bmatrix} = -0.2463 < 0$, P 不是

正定的, 故系统不稳定。

8-23 已知线性定常离散系统的齐次状态方程为 $X(k+1) = AX(k)$, 其中系统矩阵 A 为

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{K}{2} & 0 \end{bmatrix}$, 以及 $k > 0$ 。试确定系统在平衡状态 $X_e = 0$ 处渐近稳定时参数 K 的取值范围。

解 $X(k+1) = AX(k), k > 0, |zI - A| = \begin{vmatrix} z & -1 & 0 \\ 0 & z & -1 \\ 0 & -\frac{K}{2} & z \end{vmatrix} = z^3 - \frac{K}{2}z = z(z^2 - \frac{K}{2}) = 0$, 解

得 $z_1 = 0, z_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{K}{2}}$, 若系统稳定, 则 $\sqrt{\frac{K}{2}} < 1, K < 2$, 又 $K > 0$, 即 $0 < K < 2$ 。

或取 $Q = I, P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix}$, 由 $A^T P + PA = -Q$, 得 $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 + \frac{K}{4} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{1}{4}K^2 & \frac{3}{1 - \frac{1}{4}K^2} \end{bmatrix}$, 欲使

P 为正定, 只要 $1 - \frac{1}{4}K^2 > 0$, 即 $K < 2$ 。

同步训练题

1. 试求系统 $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2(s+3)}{(s+1)(s+2)}$ 的状态空间表达式。

2. 已知一线性系统的状态转移矩阵为 $\Phi(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$, 试求该系统的状态矩阵 A 。

3. 试用李雅普诺夫第二法(直接法)判断下述系统的原点稳定性。

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 - x_2\end{aligned}$$

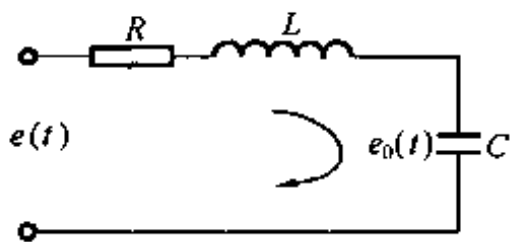
4. 已知系统的状态方程

$$\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} u(t), X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

试求系统在单位阶跃输入作用下的时间响应。

5. 已知连续时间系统的状态方程 $\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} u(t)$, 试求其响应的离散时间状态方程。

6. 设有一 RLC 网络如题 6 图所示, 试写出该网络的状态方程及输出方程。



题 6 图

7. 设系统的状态方程为 $\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{x}_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 + u \end{cases}$, 试求当输入

$u(t) = \sin t + \cos t$ 时非齐次方程的解, 且已知 $\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

输出方程为 $y = x_1$ 。

8. 设系统的状态方程为 $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, 试化矩阵 A 为模式矩阵。

9. 设某控制系统的方程为 $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} u$, $y = [1 \ 2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, 试求该系统的传递函数。

10. 系统差分方程为 $y(k) + 0.7y(k-1) + 0.1y(k-2) = 2u(k) + 3.6u(k-1) - 0.8u(k-2)$, 写出系统状态空间表达式, 并画出状态变量图。

同步训练题答案

1. 解 $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u, y = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

2. 解 由状态转移矩阵的性质知

$$\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t), \Phi(0) = I$$

所以

$$A = \dot{\Phi}(t) \big|_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

3. 解 系统原点 ($x_1 = 0, x_2 = 0$) 是该系统唯一的平衡状态。

系统状态方程的解 $x(t) = e^{At}x(0)$, $x(0) = x_0$, A 的特征方程为 $\det(\lambda I - A) = 0$, A 的特征值为 $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1$, 可见系统原点平衡状态是不稳定的。

4. 解
$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 + te^{-t} \\ 1 + e^{-t} \\ 2 - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

5. 解 $x(k+1) = \begin{bmatrix} 3e^{-2t} - 2e^{-3t} & e^{-2t} - e^{-3t} \\ -6e^{-2t} + 6e^{-3t} & -e^{-2t} + 3e^{-3t} \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} -\frac{1-e^{-2t}}{2} \\ 1-e^{-2t} \end{bmatrix} u(k)$

6. 解法 1 $LC \frac{d^2 e_0}{dt^2} + RC \frac{de_0}{dt} + e_0 = e$, 则 $\frac{d^2 e_0}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{de_0}{dt} + \frac{1}{LC} e_0 = \frac{1}{LC} e$

取 $\begin{cases} x_1 = e_0 \\ x_2 = \dot{x}_1 = \dot{e}_0 \end{cases}$, 则有 $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} e$, 即 $\dot{X} = AX + Bu$

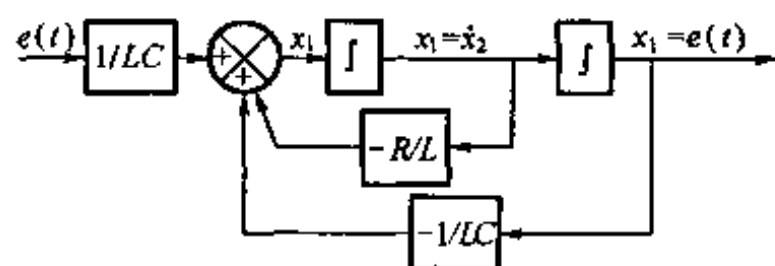
其中 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix}$

$y = e_0 = (1 \ 0) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, 而 $y = CX$, 其中 $C = (1 \ 0)$ 。状态变量图如题 6 解图(a)所示。

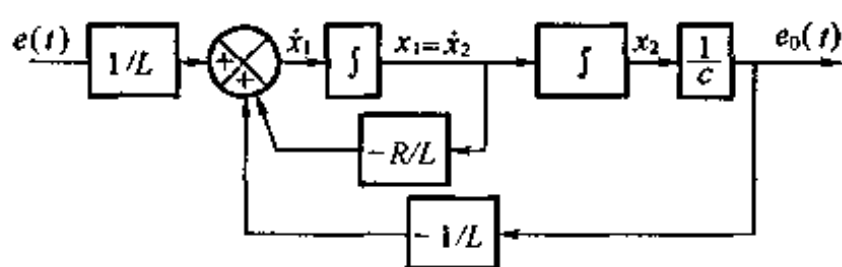
解法 2 选取 $\begin{cases} x_1 = i \\ x_2 = \int i dt \end{cases}$, 则有 $\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R}{L}x_1 - \frac{1}{LC}x_2 + \frac{1}{L}e(t) \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{LC} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} e(t)$$

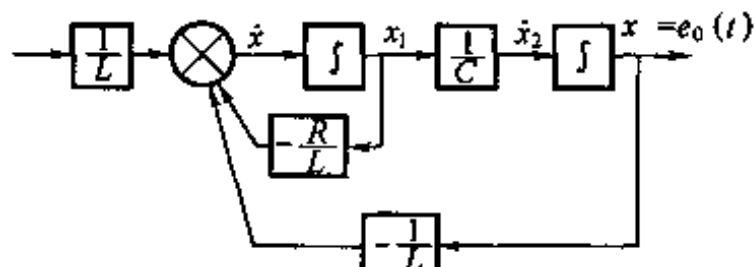
$$e_0(t) = \frac{1}{C} \int i dt = \frac{1}{C} x_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{C} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



题 6 解图(a)



题 6 解图(b)



题 6 解图(c)

状态变量图如题 6 解图(b)所示。

解法 3 选取 $\begin{cases} x_1 = i \\ x_2 = \frac{1}{C} \int i dt \end{cases}$, 则有 $\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R}{L}x_1 - \frac{1}{L}x_2 + \frac{1}{L}e(t) \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{C}x_1 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} e(t)$$

$$e_0(t) = \frac{1}{C} \int i dt = x_2 = (0 \ 1) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

状态变量图如题6解图(c)所示。

7. 解 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0]$ 。

$$(1) \quad \Phi(t) = \begin{bmatrix} (1+t)e^{-t} & te^{-t} \\ -te^{-t} & (1-t)e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad y = CX = C\Phi(t) \times (0) + C \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

$$= (1+t)e^{-t} + \int_0^t (t-\tau)e^{-(t-\tau)}(\sin\tau + \cos\tau)d\tau$$

$$y(t) = \frac{3}{2}e^{-t} + te^{-t} + \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cos t$$

8. 解 A 的特征值为 $\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+2)+2 = (\lambda+1-j)(\lambda+1+j) = 0$, 解得 $\lambda_1 = -1+j, \lambda_2 = -1-j$, 与友矩阵对应的特征向量为 $q_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1+j \end{bmatrix}, q_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1-j \end{bmatrix}, q_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ j \end{bmatrix}, P = [\alpha_1 \ \beta_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, 验算得

$$M = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, e^{Mt} = e^{-t} \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = Pe^{Mt}P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} e^{-t} \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = e^{-t} \begin{bmatrix} \cos t + \sin t & \sin t \\ -2\sin t & -\sin t + \cos t \end{bmatrix}$$

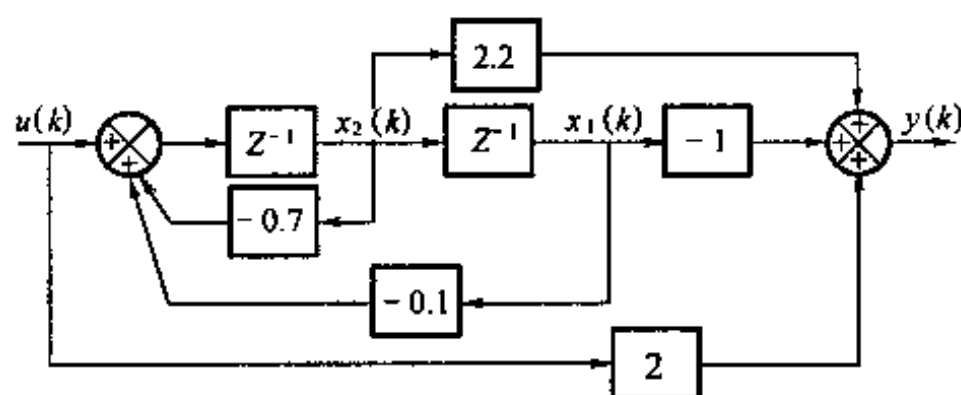
9. 解 $(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ -3 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2+6s+8} \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 3 & s+5 \end{bmatrix}$

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = [1 \ 2] \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 3 & s+5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2+6s+8} = \frac{12s+59}{s^2+6s+8}$$

10. 解 (1) $\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{2+3.6z^{-1}-0.8z^{-2}}{1+0.7z^{-1}+0.1z^{-2}} = 2 + \frac{2.2z^{-1}-z^{-2}}{1+0.7z^{-1}+0.1z^{-2}} = 2 + \frac{2.2z-1}{z^2+0.7z+0.1}$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.1 & -0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k), y(k) = [-1 \ 2.2] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + 2u(k)$$

状态变量图如题10解图所示。



题10解图

第9章 线性系统的状态空间综合法

书后习题解析

9-1 已知某控制系统的状态方程及输出方程为

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad -1] X$$

试判别该系统的状态能控性及输出能控性。

解 (1) 由题知 $A = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$, 则 $AB = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ -5 \end{bmatrix}$, 得

$$\text{rank} = \begin{bmatrix} -5 & 25 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} = 1 \neq 2$$

由于能控性矩阵不满秩, 所以给定系统是状态不完全能控的。

(2) 由题知 $C = [1 \quad -1]$, 计算 $CB = [1 \quad -1] \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} = -6$, 得

$$CAB = [1 \quad -1] \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} = 30, \text{ 得 } \text{rank} = \begin{bmatrix} -6 & 30 \end{bmatrix} = 1 = l$$

由于输出能控性矩阵 $[CB \quad CAB]$ 满秩, 所以给定系统是输出完全能控的。

9-2 设线性定常系统的方框图如题9-2图

所示, 试判别该系统的能控性和能观测性。

解 (1) 由题9-2图可写出

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + 3x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 + u \\ y = x_1 \end{cases}$$

则系统的状态方程与输出方程分别为

$$\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \quad 0] X(t)$$

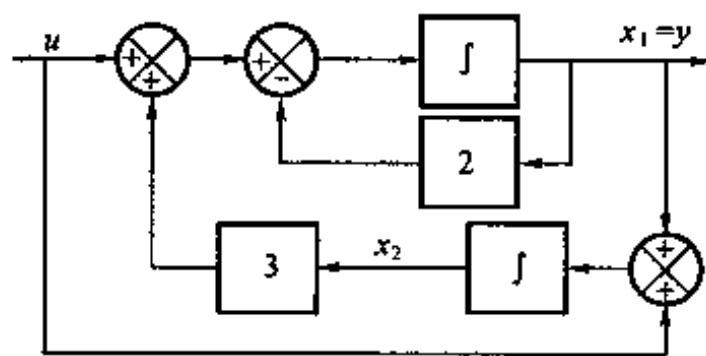
(2) $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [1 \quad 0]$, 计算得

$$\text{rank}[B \quad AB] = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 2$$

由于系统的能控性矩阵不满秩, 所以给定系统状态不完全能控。

$\text{rank}[C^T \quad A^T C^T] = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 2 = n$, 由于系统的能观测性矩阵满秩, 所以给定系统状态完全能观测。

9-3 设线性系统的运动方程为 $\ddot{y} + 2\dot{y} + y = \dot{u} + u$, 选状态变量为 $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y} - u$, 试



题9-2图

列写该系统的状态方程及输出方程,并分析其能控性与能观测性。

解 (1)由已知得

$$\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 + u$$

$$\dot{x}_2 = \dot{y} - \dot{u} = -2\dot{y} - y + \dot{u} + u - \dot{u} = -x_1 - 2x_2 - u$$

则状态方程为

$$\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(t)$$

输出方程为

$$y(t) = [1 \ 0] X(t)$$

(2)判别给定系统的能控性及能观测性

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0], \text{则}$$

$$\text{rank}[B \ AB] = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 2, \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ AC \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2 = n$$

所以给定系统是状态不完全能控,状态完全能观测的。

9-4 已知线性定常系统的状态方程及输出方程分别为

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0] X$$

试确定系统完全能控和完全能观测时的 a, b, c, d 值。

解 由题知

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 0]$$

$$\text{则} \quad \text{rank}[A \ AB] = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & a+b \\ 1 & c+d \end{bmatrix}, \text{rank}[C^T \ A^T C^T] = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

若满足状态完全能控则 $(c+d) - (a+b) \neq 0$; 满足状态完全能观测则 $b \neq 0$ 。

$$9-5 \quad \text{已知线性系统的状态方程为 } \dot{X} = \begin{bmatrix} s_1 & 1 & 0 \\ 0 & s_1 & 1 \\ 0 & 0 & s_1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} u, \text{试确定满足系统状态完}$$

全能控条件的控制矩阵元素 a, b, c 。

解 $c \neq 0$ 。

$$9-6 \quad \text{已知线性定常系统} \quad \dot{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0 \ 1] X$$

试对其进行结构分解。

解 状态变量 x_1 , 可控可观(co)

状态变量 x_2 , 可控不可观($c\bar{o}$)

状态变量 x_3 , 不可控可观($\bar{c}o$)

9-7 已知线性系统的状态方程为

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

试确定状态反馈矩阵 F , 要求将系统极点配置在 $s_{1,2} = -1 \pm j$ 及 $s_3 = -2$ 位置上。

解 系统矩阵及控制矩阵具有能控标准形, 这表明给定的系统状态完全能控。

设状态反馈矩阵 $F = [f_1, f_2, f_3]$, 则

$$A - BF = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -f_1 & -2-f_2 & -3-f_3 \end{bmatrix}$$

$$|sI - (A - BF)| = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ f_1 & 2+f_2 & s+(3+f_3) \end{vmatrix} = 0$$

则具有状态反馈的系统的特征方程式为

$$s^3 + (3+f_3)s^2 + (2+f_2)s + f_1 = 0$$

由指定的极点确定的系统特征方程式为

$$(s+2)(s+1-j)(s+1+j) = s^3 + 4s^2 + 6s + 4 = 0$$

两特征方程式对照, 有 $3+f_3=4, 2+f_2=6, f_1=4$, 则 $f_1=4, f_2=4, f_3=1$; 所以状态反馈矩阵

$$F = [4 \quad 4 \quad 1]$$

9-8 设线性系统的状态方程及输出方程分别为

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX = Bu \\ y &= CX \end{aligned}$$

其中 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \end{bmatrix}$, $C = [1 \quad 0]$, 要求通过状态反馈将系统极点配置再 $s_{1,2} = -7.07 \pm j7.07$ 上, 试确定状态反馈矩阵 F 。

解

$$\text{rank}[B \quad AB] = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 100 \\ 100 & -500 \end{bmatrix} = 2$$

所以系统状态完全能控, 可以通过状态反馈进行任意极点配置。

$$\Delta_1 = |sI - (A - BF)| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 100f_1 & s+5+100f_2 \end{vmatrix} = s^2 + (5+100f_2)s + 100f_1 = 0$$

$$\Delta_2 = (s-s_1)(s-s_2) = (s+7.07+j7.07)(s+7.07-j7.07) = s^2 + 14.14s + 100 = 0$$

则 $5+100f_2=14.14, 100f_1=100$, 解得 $F = [1 \quad 0.09]$ 。

9-9 设具有输出反馈的线性系统方框图如题 9-9 图所示, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \omega_i^2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0]$$

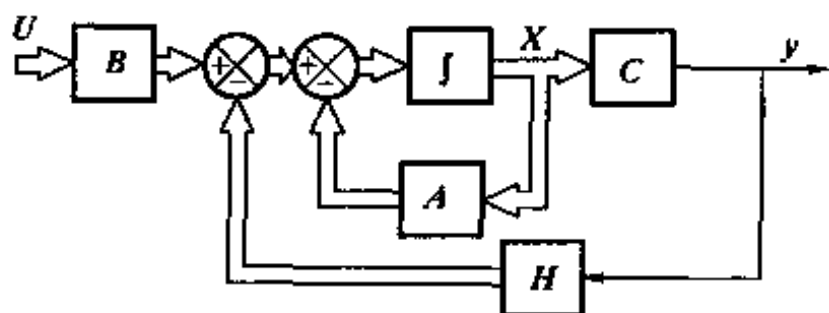
要求将系统极点配置到 $s_1 = -5$ 及 $s_2 = -8$ 上, 试确定输出反馈阵 H 。

$$\text{解 } \text{rank}[B \quad AB] = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \omega_i^2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = 2, \quad \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega_i^2 \end{bmatrix} = 2$$

所以系统又能控又能观测, 可以通过输出反馈进行极点配置。

$$\Delta_1 = |sI - (A - HC)| = \begin{vmatrix} s+h_1 & -\omega_i^2 \\ 1+h_2 & s \end{vmatrix} = s^2 + h_1s + (1+h_2)\omega_i^2 = 0$$

$$\Delta_2 = (s-s_1)(s-s_2) = (s+5)(s+8) = s^2 + 13s + 40 = 0$$



题9-9图

解得

$$h_1 = 13, h_2 = \frac{40}{w_s^2} - 1$$

9-10 已知单输入-单输出线性定常系统的传递函数为 $\Phi(s) = \frac{(s-1)(s+2)}{(s+1)(s-2)(s+3)}$, 试分析能否通过状态反馈将传递函数变成为 $\Phi_f(s) = \frac{s-1}{(s+2)(s+3)}$, 若可能, 试确定状态反馈矩阵 F 。

解 (1) 由于 $\Phi(s)$ 不存在零极点相消, 因此由 $\Phi(s)$ 建立状态空间表达式是既能控又能观测的, 因而可以通过状态反馈将传递函数变成 $\Phi_f(s)$ 。又由于状态反馈不改变系统的零点, 对比 $\Phi(s)$ 和 $\Phi_f(s)$ 可有 $\Phi_f(s) = \frac{(s-1)(s+2)}{(s+2)^2(s+3)}$, 所以系统配置后的极点为 $-2, -2, -3$ 。

(2) 由传递函数 $\Phi(s)$ 得系统状态空间表达式为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

设状态反馈阵为 $F = [f_1 \ f_2 \ f_3]$, 则

$$\Delta_1 = |sI - (A - BF)| = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ -6+f_1 & -5+f_2 & s+2+f_3 \end{vmatrix}$$

$$= s^3 + (2+f_3)s^2 + (-5+f_2)s + (-6+f_1) = 0$$

$$\Delta_2 = (s+2)^2(s+3) = s^3 + 7s^2 + 16s + 12 = 0$$

Δ_1 和 Δ_2 对应项相等, 有 $2+f_3=7, -5+f_2=16, -6+f_1=12$, 所以 $F = [18 \ 21 \ 5]$ 。

9-11 已知线性系统的状态方程及输出方程分别为

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [2 \ 0] X$$

要求将状态观测器的极点配置在 $s_1 = s_2 = -10$ 位置上, 试确定反馈矩阵 F_e 。

解 (1) 判别给定系统的能控性与能观测性

A, B 具有能控标准形, 故给定系统是状态完全能控的。

$$\text{rank}[C^T \quad A^T C^T] = \text{rank} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2 = n$$

所以它是状态完全能观测的。给定系统具备构成状态观测器的充分条件。

(2) 确定状态反馈矩阵 F_e 。

设状态反馈矩阵为 $F_e = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$, 则

$$A - F_e C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2f_1 & 1 \\ -2-2f_2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$|sI - (A - F_e C)| = \begin{vmatrix} s+2f_1 & -1 \\ 2+2f_2 & s+3 \end{vmatrix} = 0$$

$$s^2 + (2f_1 + 3)s + (6f_1 + 2f_2 + 2) = 0$$

根据对状态观测器极点配置的要求,求得状态观测器应具有的特征方程为

$$(s+10)(s+10) = s^2 + 20s + 100 = 0$$

两特征方程对应项相等,得 $F_e = \begin{bmatrix} 8.5 \\ 23.5 \end{bmatrix}$ 。

9-12 设线性系统的状态方程及输出方程分别为

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [0 \quad 0 \quad 1] X \end{aligned}$$

要求将状态观测器的极点配置到 $s_1 = -3$, $s_2 = -4$ 及 $s_3 = 5$ 位置上,试确定反馈矩阵 F_e 。

解 (1) 因为 $\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3$, 所以系统状态完全能观测,可以通过状态反

馈进行任意极点配置。

(2) 设反馈矩阵 $F_e = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$, 则

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= |sI - (A - F_e C)| = \begin{vmatrix} s & 0 & 2+f_1 \\ -1 & s & -9+f_2 \\ 0 & -1 & s+f_3 \end{vmatrix} \\ &= s^3 + f_3 s^2 + (-9+f_2)s + 2+f_1 = 0 \end{aligned}$$

期望特征多项式为 $\Delta_2 = (s+3)(s+4)(s+5) = s^3 + 12s^2 + 47s + 60 = 0$

令 $\Delta_1 \Delta_2$ 对应项系数相等有 $f_3 = 12$, $-9+f_2 = 47$, $2+f_1 = 60$, 解得 $f_1 = 58$, $f_2 = 56$, $f_3 = 12$ 。

所以

$$F_e = \begin{bmatrix} 58 \\ 56 \\ 12 \end{bmatrix}$$

9-13 设线性定常系统的状态方程及输出方程分别为

$$\begin{aligned}\dot{X} &= AX + Bu \\ y &= CX\end{aligned}$$

其中 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \end{bmatrix}$, $C = [1 \ 0]$, 假定系统的状态变量 x_1 及 x_2 不可测。试根据反馈方程 $u = r - FX_e$, 确定反馈矩阵 $F = [f_1 \ f_2]$, 要求将状态反馈的极点配置在 $s_{1,2} = -7.07 \pm j7.07$ 上, 并要求状态差 $X(t) - X_e(t)$ 尽快衰减到零。其中 X_e 为估计状态, r 及 y 分别为系统的输入与输出。

解 根据分离原理设计状态反馈矩阵 F 及状态观测器的反馈矩阵 F_e 。

$$(1) \quad \text{rank}[B \ AB] = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 100 \\ 100 & -500 \end{bmatrix} = 2, \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

可见给定系统既能控能观测, 因此以给定系统的输入 u 及输出 y 为输入的状态观测器是一定存在的。

(2) 设计状态反馈矩阵 F

$$\Delta_1 = |sI - (A - BF)| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 100f_1 & s + (5 + 100f_2) \end{vmatrix} = s^2 + (5 + 100f_2)s + 100f_1 = 0$$

$$\Delta_2 = (s + 7.07 - j7.07)(s + 7.07 + j7.07) = s^2 + 2 \times 7.07s + 2 \times (7.07)^2 = 0$$

两个方程对应项相等, 求得 $100f_1 = 2 \times (7.07)^2$, $5 + 100f_2 = 2 \times 7.07$ 。

解出状态反馈反馈阵为

$$F = [1 \ 0.0914]$$

(3) 设计状态观测器的反馈矩阵 F_e

设反馈矩阵 $F_e = \begin{bmatrix} f_{e1} \\ f_{e2} \end{bmatrix}$, 则

$$|sI - (A - F_e C)| = \begin{vmatrix} s + f_{e1} & -1 \\ f_{e2} & s + 5 \end{vmatrix} = s^2 + (5 + f_{e1})s + (5f_{e1} + f_{e2}) = 0$$

设选取的系统矩阵 $(A - F_e C)$ 的特征值 $s_1 = s_2 = -50$, 则

$$(s + 50)^2 = s^2 + 100s + 2500 = 0$$

两个方程对应项相等, 可得 $5 + f_{e1} = 100$, $5f_{e1} + f_{e2} = 2500$, 解得状态观测器的反馈矩阵

$$F_e = \begin{bmatrix} 95 \\ 2025 \end{bmatrix}$$

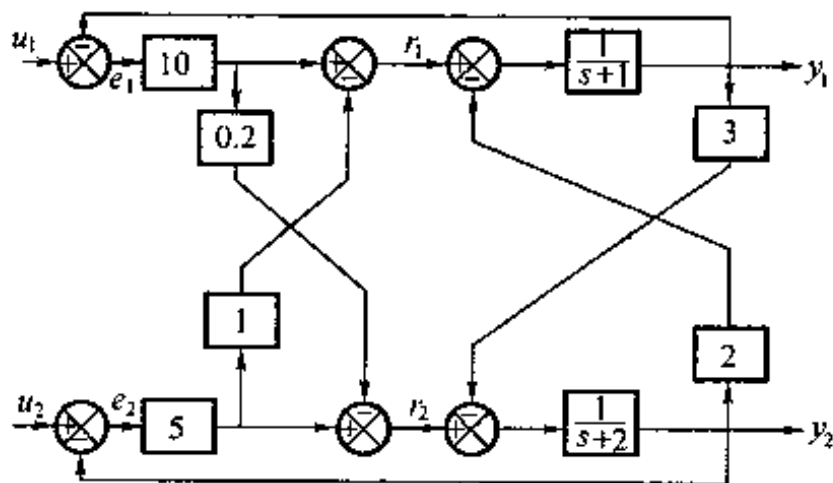
9-14 已知双输入-双输出线性定常系统方框图如题9-14图所示。试确定串联补偿器的传递函数矩阵, 要求解耦系统的传递函数矩阵为

$$\Phi(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{0.1s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{0.01s+1} \end{bmatrix}$$

解

$$r_1 = 10e_1 - 5e_2$$

$$r_2 = 5e_2 - 2e_1$$



题9-14图

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = \frac{1}{s+1}(r_1 - 2y_2), y_2 = \frac{1}{s+2}(r_2 - 3y_1)$$

$$(s+1)y_1 + 2y_2 = r_1, 3y_1 + (s+2)y_2 = r_2$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+1 & 2 \\ 3 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+1 & 2 \\ 3 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

$$G_p(s) = \begin{bmatrix} s+1 & 2 \\ 3 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$G_c(s) = G_p^{-1}(s) \Phi(s) (I - \Phi(s))^{-1}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} s+1 & 2 \\ 3 & s+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{0.01s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{0.01s+1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{0.1s+1}{0.1s} & 0 \\ 0 & \frac{0.01s+1}{0.01s} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{5s+20}{4s} & \frac{25s+100}{2s} \\ \frac{s+16}{2s} & \frac{10s+24}{0.4s} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

9-15 已知多输入-多输出线性定常系统

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} U$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X$$

试分析该系统能否实现状态反馈解耦。如可能,试确定用以实现积分型解耦的状态反馈矩阵及输入变换矩阵。

$$\begin{aligned} \text{解 } (sI - A)^{-1} &= \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ -2 & s-3 & 0 \\ -1 & -1 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{(s-1)(s^2-3s-2)} \begin{bmatrix} (s-1)(s-3) & s-1 & 0 \\ 2(s-1) & s(s-1) & 0 \\ s-1 & s+1 & s(s-3)-2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{(s-1)(s^2-3s-2)} \begin{bmatrix} (s-1)(s-3) & s-1 & 0 \\ 2(s-1) & s(s-1) & 0 \\ s-1 & s+1 & s(s-3)-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(s-1)(s^2-3s-2)} \begin{bmatrix} (s-1)^2 & (s-1)(s+1) & 0 \\ s-1 & s+1 & s-3s-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(s-1)(s^2-3s-2)} \begin{bmatrix} (s-1)(s+1) & 0 \\ s+1 & s^2-3s-2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s^2-3s-2} & 0 \\ \frac{s+1}{s^2-3s-2} & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix}$$

$$d_1 = \min[1] - 1 = 0$$

$$d_2 = \min[2 \quad 1] - 1 = 0$$

$$E_1 = \lim_{s \rightarrow \infty} s^{0+1} \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s^2-3s-2} & 0 \end{bmatrix} = [1 \quad 0]$$

$$E_2 = \lim_{s \rightarrow \infty} s^{0+1} \left[\frac{s+1}{s^3-4s^2+s+2}, \frac{1}{s-1} \right] = [0 \quad 1]$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, H = E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} C_1 A^{d_1+1} \\ C_2 A^{d_2+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 A \\ C_2 A \end{bmatrix}$$

$$C_1 A = [2 \quad 4 \quad 0], C_2 A = [1 \quad 1 \quad 1], N = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F = -E^{-1}N = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(s) = C[sI - (A + BF)]^{-1}BH$$

$$BF = -\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A + BF = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[sI - (A + BF)]^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s+1 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2(s+1)} \begin{bmatrix} s(s+1) & s & 0 \\ 0 & s^2 & 0 \\ 0 & 0 & s(s+1) \end{bmatrix}$$

$$\Phi(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

9-16 已知双输入-双输出线性定常系统的传递矩阵为

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s+1)} & \frac{2}{s+1} \\ \frac{2}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

试求取其最小实现。

解 由给定传递矩阵知 $G(s) = \frac{P(s)}{D(s)} G(s)$ 的特征多项式为所有各次子式的最小公分母。

一次子式为 $\frac{1}{s(s+1)}, \frac{1}{s+1}, \frac{2}{s+1}, \frac{1}{s+1}$, 二次子式为 $\frac{1}{s(s+1)}, \frac{1}{s+1}, \frac{4}{(s+1)^2} = \frac{1-4sd}{s(s+1)^2}$, 一次与二次子式的最小公分母为 $s(s+1)^2$ 。

因此 $D(s) = s(s+1)^2 = s^3 + 2s^2 + s, \alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$ 。

$$P(s) = P_2 s^2 + P_1 + P_0, D(s)G(s) = P(s)$$

$$\begin{bmatrix} s+1 & 2s(s+1) \\ 2s(s+1) & s(s+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} s^2 + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = P_2 s^2 + P_1 s + P_0$$

由此可得

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$G(s)$ 的能控标准型实现为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$G(s)$ 的能观标准型实现为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) 求最小实现

根据能观标准型的 $[A \ B \ C]$ 阵有

$$\text{rank}[B \ AB \ A^2B \ A^3B \ A^4B \ A^5B]$$

$$= \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & -1 & 2 & 1 & -2 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 2 & 1 & -2 & -1 & 2 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & -1 & 2 & 1 & -2 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 2 & 1 & -2 & -1 & 2 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

取

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.8 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0.2 & -0.4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -0.4 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, P^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$CP = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tilde{C} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}[\tilde{B} \quad \tilde{A}\tilde{B}] = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 2$$

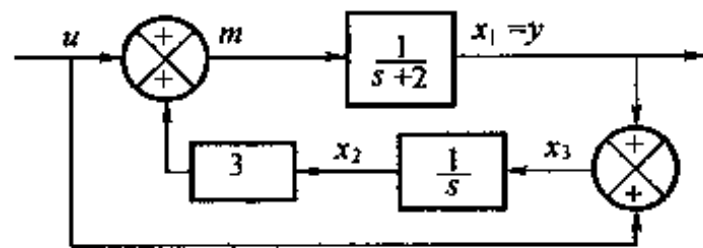
$$\text{rank} \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\tilde{A} \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = 2$$

因此模型 $\begin{cases} \dot{X} = \tilde{A}X + \tilde{B}U \\ Y = \tilde{C}X \end{cases}$ 是给定传递矩阵 $G(s)$ 的一个最小实现。

同步训练题

1. 反馈系统如题 1 图所示, 试判别系统的可控性与可观性。

2. 设系统的状态空间描述为 $\dot{x} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}u, y = [1 \quad 0]x$ 。(1) 求系统的传递函数;(2) 判断系统可控性;(3) 求系统的状态转移矩阵 $\Phi(t)$;(4) 当 $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, u(t) = 0$



题 1 图

时, 求系统输出 $y(t)$;(5) 设计全维状态观测器, 将观测器的极点配置在 $-10 + j10, -10 - j10$ 处;(6) 设在(5)基础上, 设计状态反馈矩阵 K , 使系统闭环极点配置在处 $-5 + j5, -5 - j5$ 。

3. 已知 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, 求 A 的对角阵 \tilde{A} 及其变换阵 P 。

4. 设某系统的状态方程和输出方程分别为

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 16 & 5 & -2 \end{bmatrix}X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

$$y = [-2 \quad 1 \quad 0]X$$

- (1) 试判别系统的能控性和能观测性;
 (2) 求初始条件为零时, 系统对单位阶跃输入 $u(t)$ 的响应。
 5. 设系统的动态方程为

$$\dot{X} = AX + Bu$$

$$Y = CX$$

式中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [1 \quad 1]$ 。

试设计一个状态观测器, 观测器的期望的极点为 $-2, -2$, 并画出该系统状态观测器的结构图。

6. 设系统的传递函数为 $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^2 + 8s + 15}{s^3 + 7s^2 + 14s + 8}$, 试求: (1) 可控标准型实现; (2) 可观测标准型实现; (3) 对角型实现。

7. 某单位负反馈位置随动系统, 其控制系统的开环传递函数为 $G_0(s) = \frac{9}{s(s+2)}$ 。(1) 试确定反馈增益向量 K , 使其状态反馈系统具有阻尼比 $\zeta = 0.707$, 无阻尼自然振荡频率 $\omega_n = 20$; (2) 若用输出反馈能否达到控制效果?

8. 已知系统的输入输出方程为 $y + 4\dot{y} + 3y = u + 6\dot{u} + 8u$, 试分别求出满足下述要求的状态空间表达式。

- (1) 系统为可控可观测的对角标准型;
 (2) 系统为可控不可观测的;
 (3) 系统为可观测不可控的;
 (4) 系统为既不可控也不可观测的。

9. 设 n 阶系统的状态空间表达式为

$$\dot{x} = Ax + bu$$

$$y = Cx$$

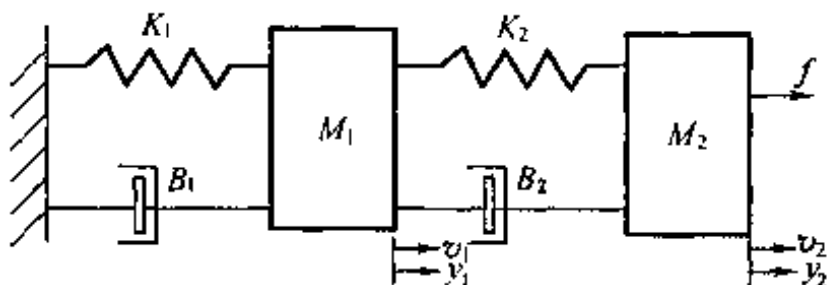
若 $Cb = 0, CA^2b = 0, CA^2b = 0, \dots, CA^{n-1}b = 0$, 试证: 系统不能同时满足可控性、可观测性的条件。

10. 线性定常连续系统状态方程为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

- (1) 设采样周期为 T , 建立系统离散状态方程;
 (2) 为维持离散化前系统原有的可控性, 试确定采样周期 T 的取使。

11. 如题 11 图所示机械位移系统由质量分别为 M_1 和 M_2 的质量块, 弹性系数分别为 K_1 和 K_2 的弹簧, 黏性摩擦系数分别为 B_1 和 B_2 的阻尼器组成。试列写在外力 f 的作用下, 以质量块 M_1 和 M_2 的位移 y_1 和 y_2 为输出的状态空间表达式。



题 11 图

同步训练题答案

1.解 系统可观测但不可控。

2.解 (1) $G(s) = \frac{2(s+5)}{s^2+5s+6}$;

(2) 系统可控、可观测;

(3) $\Phi(t) = \begin{bmatrix} 3e^{-3t} - 2e^{-2t} & e^{-3t} - e^{-2t} \\ -6e^{-3t} + 6e^{-2t} & -2e^{-3t} + 3e^{-2t} \end{bmatrix}$;

(4) $y(t) = Cx(t) = C\Phi(t)x(0) = 9e^{-2t} - 2t - 6e^{-3t}$;

(5) 观测器的误差反馈矩阵为 $H = \begin{bmatrix} -\frac{119}{6} \\ -15 \end{bmatrix}$;

(6) $K = \begin{bmatrix} \frac{19}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$ 。

3.解 $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 8 & 0 \end{bmatrix}$; $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 。

4.解 (1) 系统具有能控性, 不具有能观测性;

(2) 单位阶跃响应 $y(t) = \frac{1}{8}[1 - \sqrt{2}e^{-2t}\sin(2t + 45^\circ)]$ 。

5.解 $\text{rank}[B \ AB] = 2$, 所以系统是状态完全能控的。 $\text{rank}\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = 2$, 所以系统能观测,

可以通过适当选择 F_e 满足状态观测器的极点要求, $F_e = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ 。

6.解 (1) 可控标准型实现

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -14 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, y = [15 \ 8 \ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(2) 可观测标准型

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & -14 \\ 0 & 1 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} u, y = [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(3) 对角标准型实现为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, y = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

7.解 (1) $K = [-391 \ -26.28]$;

(2) 无论 K 值如何选取, 均无法实现上述效果。

$$8. \text{解} \quad (1) \begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} x(t) + u \end{cases};$$

$$(2) \begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t); \\ y(t) = [0 \ 5 \ 2] x(t) + u \end{cases};$$

$$(3) \begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} u(t); \\ y(t) = [0 \ 0 \ 1] x(t) + u \end{cases};$$

$$(4) \begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -3 & \\ & & a \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} x(t) + u \end{cases}.$$

9. 证明:系统的可控性矩阵

$$P_c = [b \quad Ab \quad A^2b \quad \cdots \quad A^{n-1}b], \text{可观测性矩阵 } P_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} P_o P_c &= \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} [b \quad Ab \quad A^2b \quad \cdots \quad A^{n-1}b] \\ &= \begin{bmatrix} Cb & CAB & CA^2b & \cdots & CA^{n-1}b \\ CAB & CA^2b & CA^3b & \cdots & CA^nb \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ CA^{n-1}b & CA^nb & CA^{n+1}b & \cdots & CA^{2(n-1)}b \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & CA^nb \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & CA^nb & CA^{n+1}b & \cdots & CA^{2(n-1)}b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

可见, $P_o P_c$ 不满秩。根据矩阵理论, P_o, P_c 中至少有一个矩阵不满秩, 即系统不能同时可控可观测。

10. 解 (1) 离散化状态方程为

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} \cos 2T & \frac{1}{2} \sin 2T \\ -2 \sin 2T & \cos 2T \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2T \\ \sin 2T \end{bmatrix} u(k)$$

(2) 只要有 $T \neq \frac{k\pi}{2} (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$, 离散系统便可控。

11. 解 选 M_1, M_2 的位移 y_1, y_2 和速度 v_1, v_2 作为状态变量, 即

$$x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_3 = v_1 = \frac{dy_1}{dt}, x_4 = v_2 = \frac{dy_2}{dt}$$

状态方程为

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{K_1 + K_2}{M_1} & \frac{k_2}{M_1} & -\frac{B_1 + B_2}{M_1} & \frac{B_2}{M_1} \\ \frac{K_2}{M_2} & -\frac{K_2}{M_2} & \frac{B_2}{M_2} & -\frac{B_2}{M_2} \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M_2} \end{bmatrix} u$$

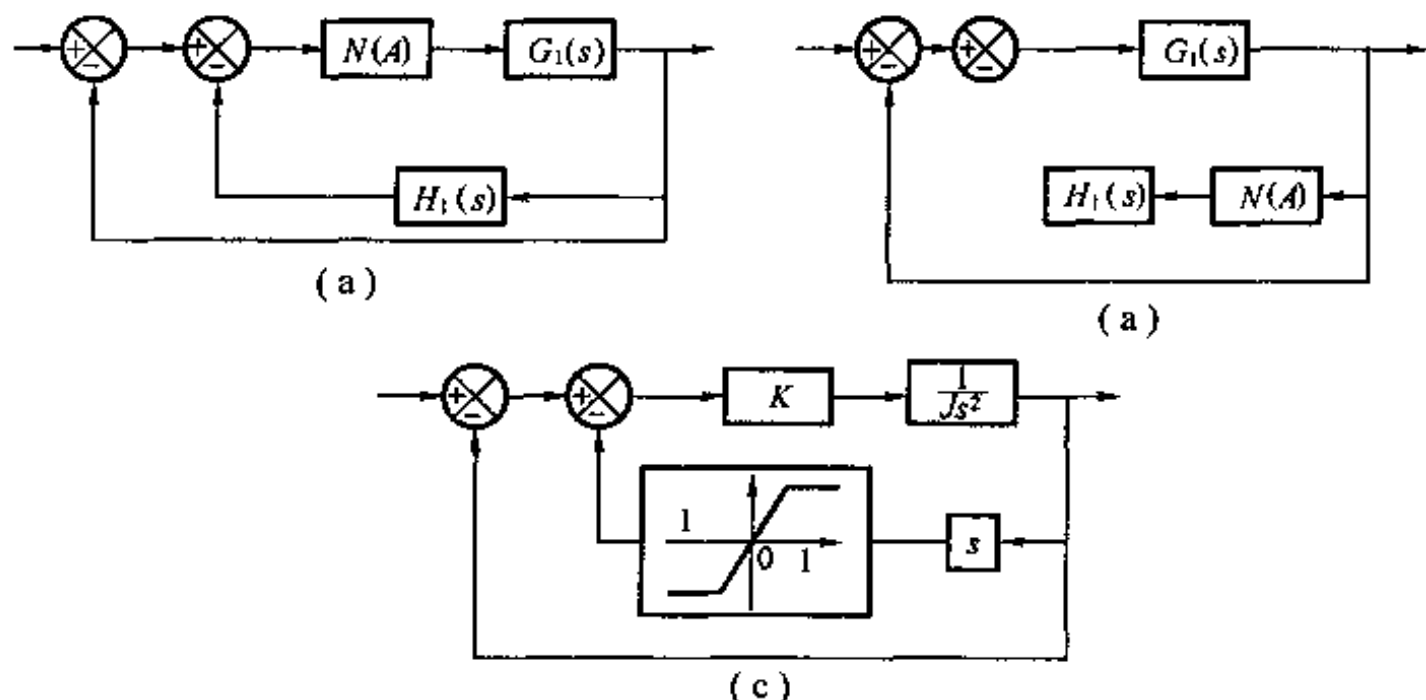
x_1, x_2 为输出, 所以输出方程为

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} X$$

第 10 章 非线性控制系统分析

书后习题解析

10-1 试将题 10-1 图所示非线性控制系统简化成非线性特性 N 和等效线性部分 $G(s)$ 相串联的典型结构,并写出等效线性部分的传递函数 $G(s)$ 。



题 10-1 图

解 (1)图(a)可等效简化成题 10-1 解图(a),且求得等效线性部分的传递函数为

$$G(s) = G_1(s)[1 + H_1(s)]$$

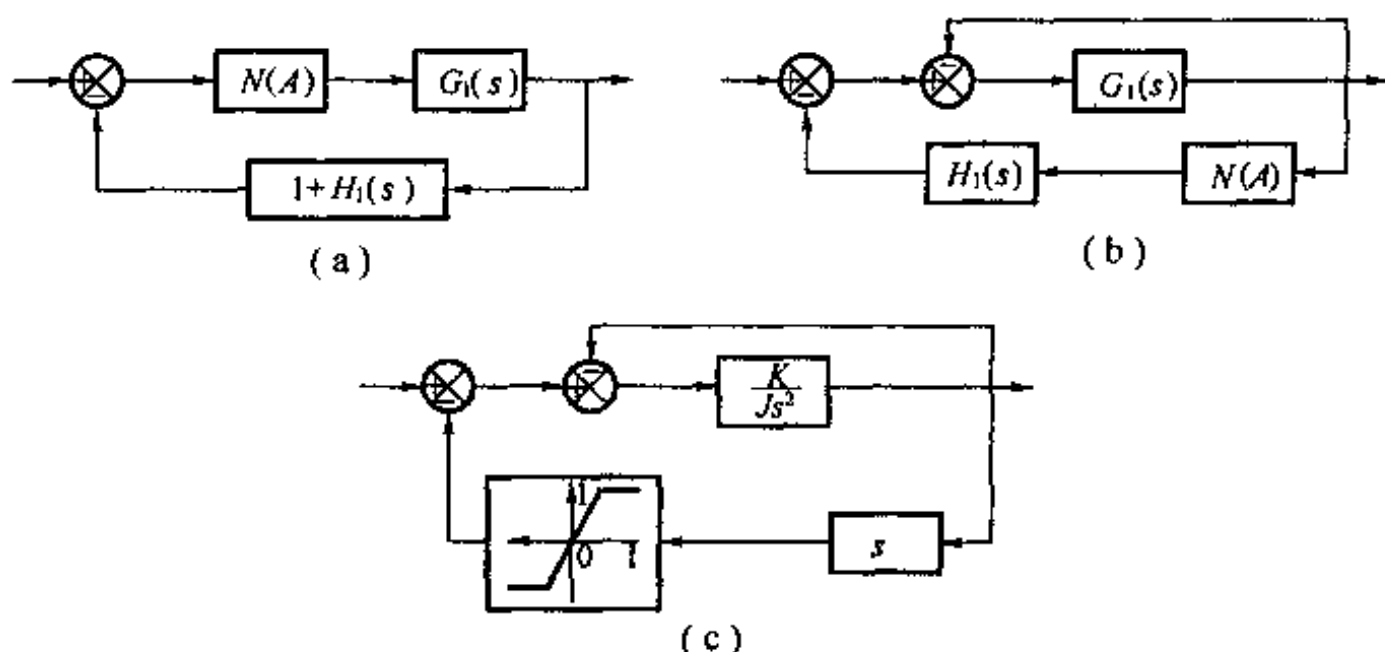
(2)图(b)可等效简化成题 10-1 解图(b),且求得 $G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)} \cdot H_1(s)$;

(3)图(c)可等效简化成题 10-1 解图(c),且求得 $G(s) = \frac{\frac{K}{Js^2}}{1 + \frac{K}{Js^2}} \cdot s = \frac{s}{\frac{J}{K}s^2 + 1}$ 。

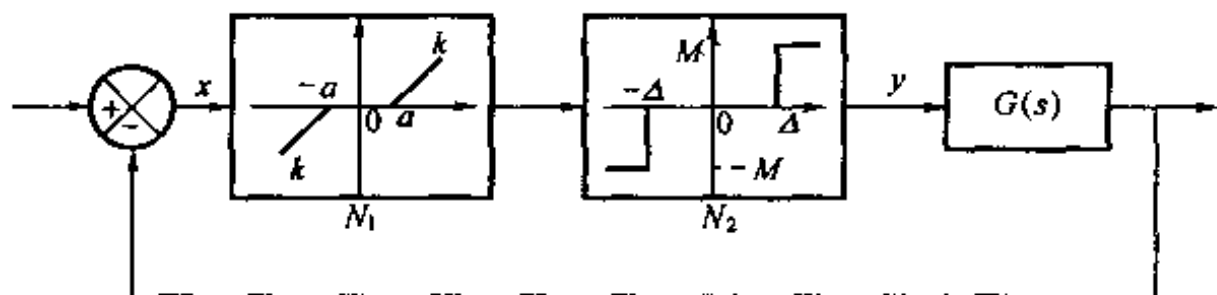
10-2 设非线性控制系统的方框图如题 10-2 图所示,其中 $G(s)$ 为线性部分的传递函数, N_1 、 N_2 分别为描述死区特性与继电器特性的典型非线性特性。试将串联的非线性特性 N_1 与 N_2 等效变换为一个等效非线性特性 N 。

解 沿由 x 到 y 的信号流通方向, N_1 与 N_2 的串联特性可用一个带死区无滞环的继电器特性 N 来等效,其中死区 $\Delta_1 = a + \frac{\Delta}{k}$ 。通过等效非线性特性 N 与线性部分传递函数 $G(s)$ 串联来表示的与题 10-2 图所示系统等效的系统方框图如题 10-2 解图所示。

10-3 设三个非线性控制系统具有相同的非线性特性,而线性部分各不相同,它们的传递函数分别为(1) $G_1(s) = \frac{2}{s(0.1s+1)}$; (2) $G_2(s) = \frac{2}{s(s+1)}$; (3) $G_3(s) = \frac{2(1.5s+1)}{s(s+1)(0.1s+1)}$ 。



题 10-1 解图



题 10-2 图

试判断应用描述函数法分析非线性控制系统稳定性时,哪个系统的分析准确度高。

解 因为三个系统的非线性环节相同,所以应用描述函数法分析非线性系统稳定性的准确度便取决于各自线性部分所具有的低通滤波特性,即取决于线性部分的惯性特性。惯性大的低通滤波特性好,则分析准确度高。

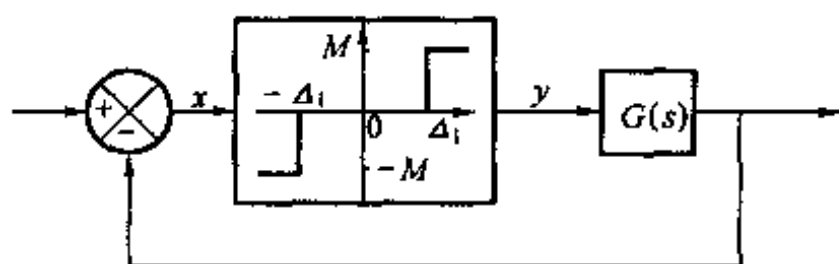
(1) 系统 2 的惯性大于系统 1 的惯性,所以系统 2 较系统 1 具有较好的低通滤波特性。

(2) 系统 3 与系统 2 相比较,系统 3 增加了一个时间常数为 0.1 s 的惯性环节,但由于还含一个时间常数为 1.5 s 的一阶微分环节,因此其实际低通滤波特性较系统 2 差。

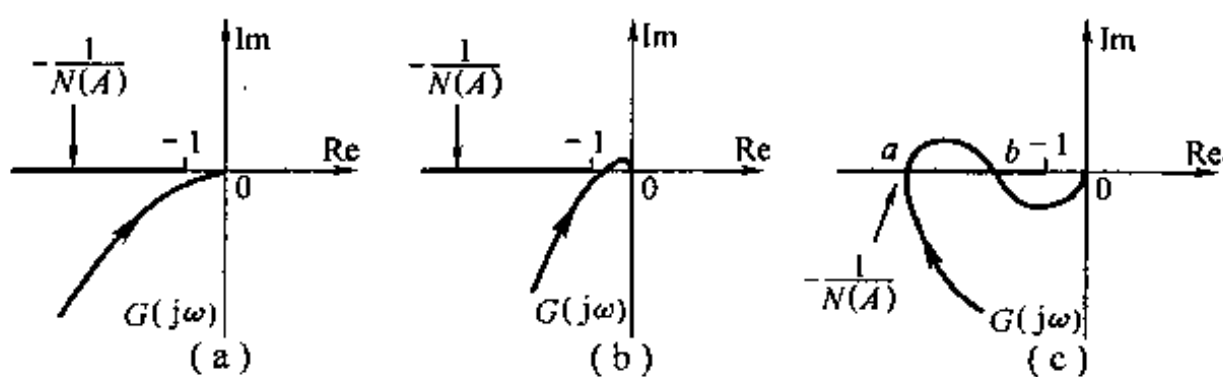
(3) 应用描述函数法分析给定的三个非线性系统的稳定性时,系统 2 的分析准确度最高。

10-4 设有非线性控制系统,其中非线性特性为斜率 $k=1$ 的饱和特性。当不考虑饱和特性时,闭环系统稳定。试分析该非线性控制系统是否有产生自持振荡的可能性。

解 一个稳定线性系统可能有的开环频率响应 $G(j\omega)$ 如题 10-4 解图(a)、(b)、(c)所示。对于图(a)、(b),特性 $G(j\omega)$ 与 $-1/N(A)$ 无交点,所以考虑饱和因素时非线性系统中不可能产生自持振荡,因此该非线性系统是稳定的。而对于图(c)所示情况,特性 $G(j\omega)$ 与 $-1/N(A)$ 有交点 a 和 b ,其中点 a 是稳定交点,因此该非线性系统中特产生稳定的自持振荡。

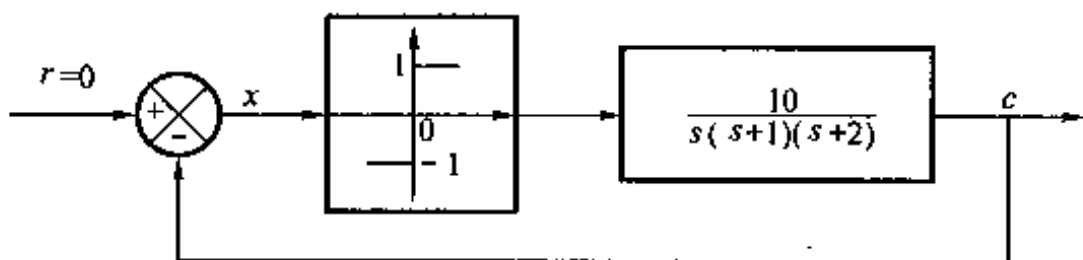


题 10-2 解图



题 10-4 解图

10-5 设某非线性控制系统如题 10-5 图所示。试确定其自持振荡的振幅和角频率。



题 10-5 图

解 非线性控制系统的 $G(j\omega)$ 与 $-1/N(A)$ 特性如题 10-5 解图所示。根据稳定性分析知交点 B 代表稳定自持振荡。

(1) 由题 10-5 图得线性部分的传递函数为 $G(s) = \frac{5}{s(s+1)(0.5s+1)}$, 其幅频及相频特性分别为

$$\angle G(j\omega) = \frac{5}{\omega \sqrt{1+\omega^2} \sqrt{1+(0.5\omega)^2}}$$

$$\angle G(j\omega) = -90^\circ - \arctan \omega - \arctan(0.5\omega)$$

(2) 由 $\angle G(j\omega) = -90^\circ - \arctan \omega - \arctan(0.5\omega) = -180^\circ$, 解得自持振荡角频率 $\omega_0 = \sqrt{2} \text{ rad/s}$, $|G(j\omega_0)| = \frac{5}{3}$, 即 $G(j\omega)$ 与负实轴的交点坐标为 $(-\frac{5}{3}, 0j)$ 。则 $-\frac{1}{N(A_0)} = -\frac{\pi A_0}{4M} = -\frac{5}{3}$, 解出自持振荡振幅为 $A_0 = \frac{20}{3\pi} = 2.122$ 。

10-6 设有如题 10-6 图所示非线性控制系统。试应用描述函数法分析当 $K=10$ 时系统的稳定性, 并求取 K 的临界值。

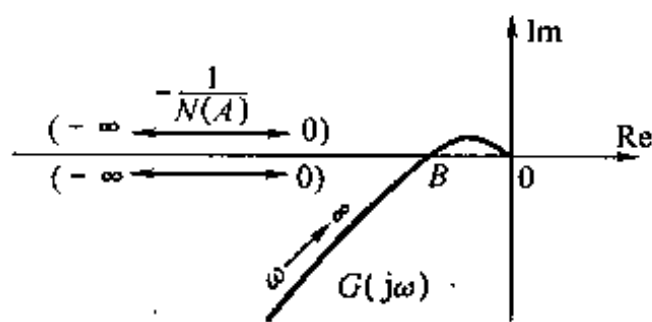
解 由题 10-6 图看出, 当 $K=10$ 时, 线性部分的幅频特性及相频特性分别为

$$|G(j\omega)| = \frac{10}{\omega \sqrt{1+\omega^2} \sqrt{4+\omega^2}}$$

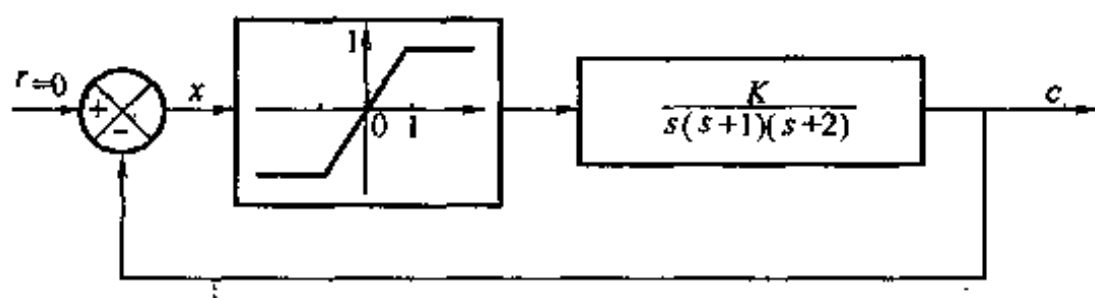
$$\angle G(j\omega) = -90^\circ - \arctan \omega - \arctan(0.5\omega)$$

(1) 由 $\angle G(j\omega) = -90^\circ - \arctan \omega - \arctan(0.5\omega) = -180^\circ$

得 $\omega = \sqrt{2} \text{ rad/s}$, $|G(j\omega)| = \frac{5}{3}$, 即 $G(j\omega)$ 与负实轴的交点坐标为 $(-\frac{5}{3}, 0j)$ 。饱和非线性特性



题 10-5 解图



题 10-6 图

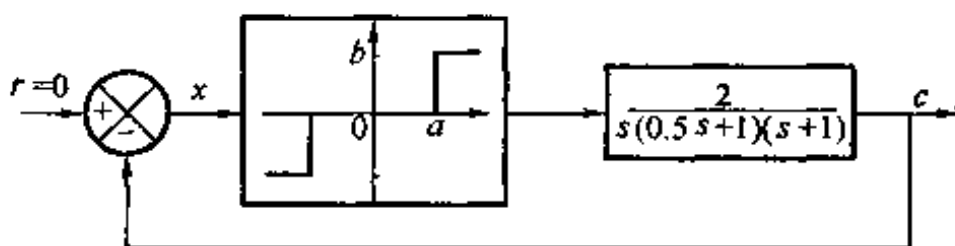
的斜率 $k=1$, 饱和特性的 $-1/N(A)$ 特性为复平面负实轴上 -1 至 $-\infty$ 区段。则 $G(j\omega)$ 与 $-1/N(A)$ 特性存在稳定交点, 此时非线性系统中将有稳定自持振荡存在。

(2) 当 $G(j\omega)$ 通过 $(-1, 0j)$, 此时系统处于稳定的临界状态, 这时可求得 K 的临界值, 即

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\omega \sqrt{1+\omega^2} \sqrt{4+\omega^2}} = 1$$

解得 $K_c = 6$ 。

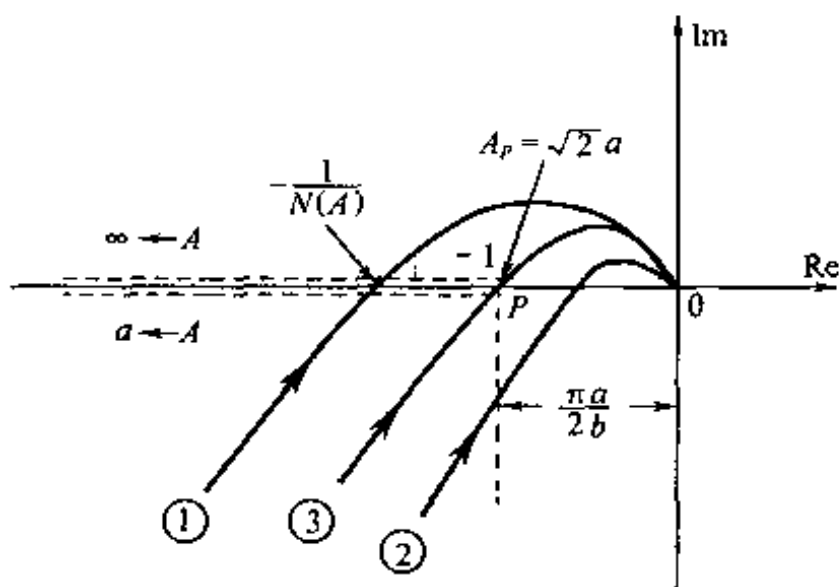
10-7 设某非线性控制系统的方框图如题 10-7 图所示。试应用描述函数法分析该系统的稳定性。为使系统稳定, 继电器参数 a, b 应如何调整。



题 10-7 图

解 $G(j\omega)$ 和带死区、无滞环继电器特性的 $-1/N(A)$ 曲线相交大致有三种情况, 如题 10-7 解图所示。

(1) 基于应用描述函数法分析非线性系统稳定性的判据, 第一种情况, $G(j\omega)$ 若与 $-1/N(A)$ 相交 (见题 10-7 解图中的①), 则原系统将产生稳定自持振荡, 且自持振荡振幅 $A_0 > A_p$; 若 $G(j\omega)$ 不与 $-1/N(A)$ 相交 (见题 10-7 解图中的②), 则原系统稳定, 不产生自持振荡; 若 $G(j\omega)$ 通过点 P (见题 10-7 解图中的③), 则原系统处于临界稳定状态。



题 10-7 解图

(2) 继电器参数 a, b 的临界稳定值可根据 $G(j\omega)$ 通过负实轴上的点 $P(-\pi a / 2b, j0)$ 来确定。

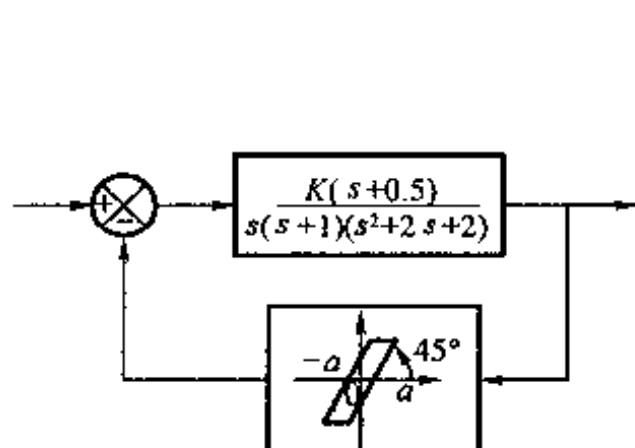
$$\angle G(j\omega) = -90^\circ - \arctan(0.5\omega) - \arctan\omega = -180^\circ$$

解得 $G(j\omega)$ 与负实轴相交处的角频率 $\omega_0 = \sqrt{2}$, $|G(j\sqrt{2})| = \frac{2}{3}$, 令 $-\frac{\pi a}{2b} = -\frac{2}{3}$, 则求得为使系

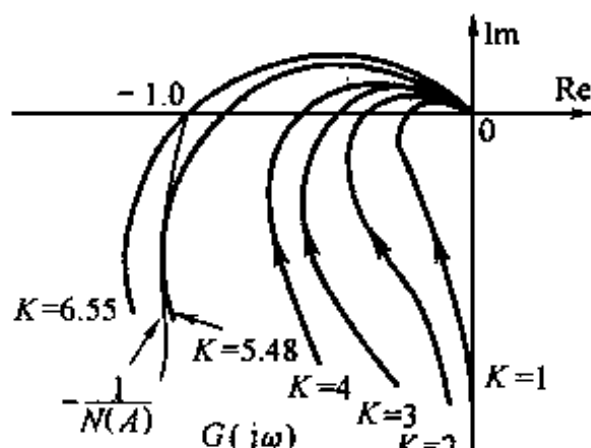
统稳定,继电器参数 a, b 的调整范围为 $\frac{b}{a} < 2.356$ 。

10-8 设某非线性控制系统的方框图如题 10-8 图所示。试确定该系统稳定时 K 的取值范围。

解 对应于不同 K 值的 $G(j\omega)$ 和曲线 $-1/N(A)$ 如题 10-8 解图所示。从图可见,由于特性 $-1/N(A)$ 与 $K=5.48$ 时的频率特性 $G(j\omega)$ 相切,所以能使系统稳定的 K 的取值范围是 $0 < K < 5.48$ 。

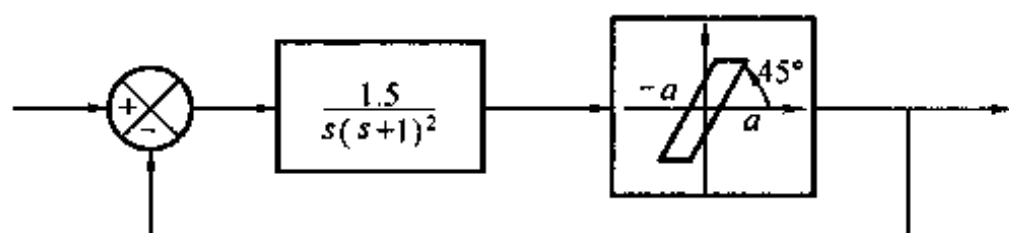


题 10-8 图



题 10-8 解图

10-9 设某非线性控制系统的方框图如题 10-9 图所示。(1)试确定自持振荡振幅与频率;(2)若线性部分采用串联超前校正 $(1+0.8s)/(1+0.4s)$,能否消除自持振荡;(3)若系统采用传递函数为 $H(s) = 1+0.4s$ 的反馈校正,能否消除自持振荡。



题 10-9 图

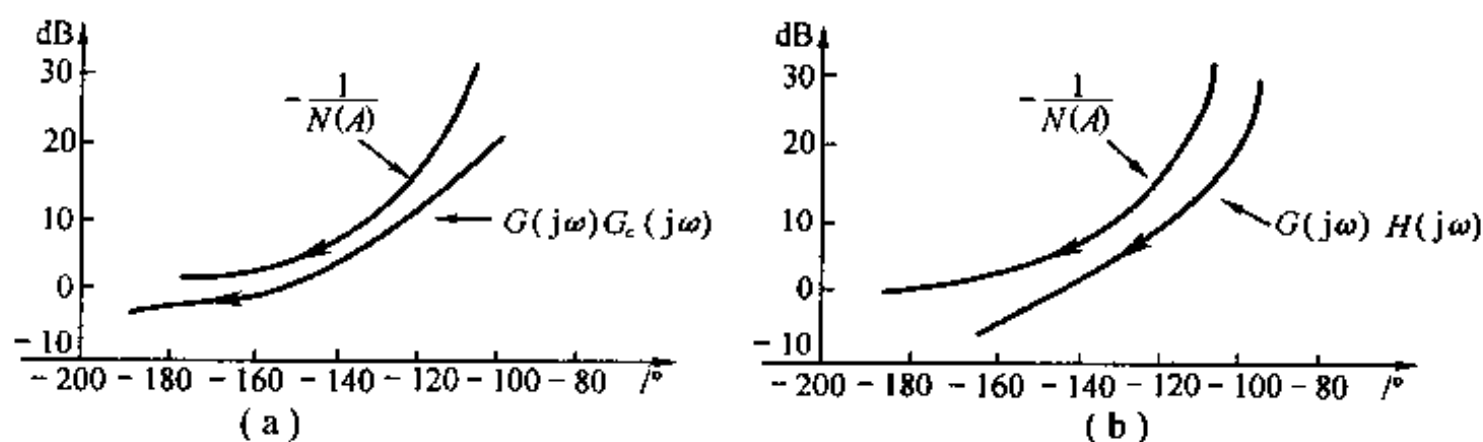
解 (1)在 Nichols 图上绘制 $G(j\omega)$ 及 $-1/N(A)$ 曲线,二特性有两个交点 P 与 Q ,其中点 Q 是稳定交点。求得自持振荡频率 $\omega_0 = 0.84 \text{ rad/s}$,自特振荡振幅由与 Q 点对应的 $a/A = 0.16$ 来确定。

(2)通过串联超前校正 $G_c(s) = (1+0.8s)/(1+0.4s)$ 及反馈校正 $H(s) = (1+0.4s)$ 后的线性部分频率响应 $G(j\omega)G_c(j\omega)$ 及 $G(j\omega)H(j\omega)$ 如题 10-9 解图(a)、(b)所示,可见在产生自特振荡的非线性系统中,引进串联超前校正 $G_c(s) = (1+0.8s)/(1+0.4s)$ 及反馈校正 $H(s) = (1+0.4s)$ 都可以消除原非线性系统的自持振荡。

10-10 试确定下列二阶非线性运动方程的奇点及其类型。

$$\ddot{e} + 0.5\dot{e} + 2e + e^2 = 0$$

解 由 $\frac{d\dot{e}}{de} = \frac{-0.5\dot{e} - 2e - e^2}{\dot{e}} = \frac{0}{0}$, 解出 $\dot{e} = 0, e = 0$ 及 $\dot{e} = 0, e = -2$ 为运动方程的两个奇点。



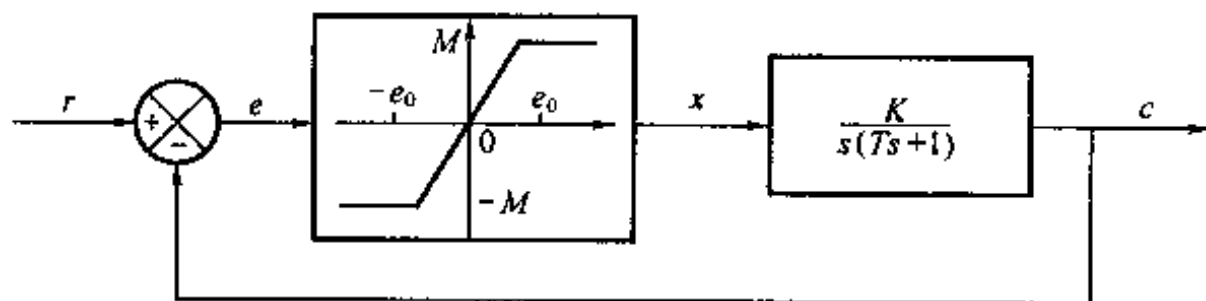
题 10-9 解图

(1) 在奇点 $\dot{e} = 0, e = 0$ 邻域, 运动方程可近似为 $\ddot{e} + 0.5\dot{e} + 2e = 0$, 其特征根为 $\lambda_{1,2} = -0.25 \pm j1.3$, 故奇点 $\dot{e} = 0, e = 0$ 为稳定焦点。

(2) 在奇点 $\dot{e} = 0, e = -2$ 处, 令 $x = e + 2, \ddot{x} + 0.5\dot{x} + 2x + x^2 = 0$, 在奇点 $\dot{e} = 0, e = -2$ 邻域, 即在 $\dot{x} = 0, x = 0$ 邻域, 运动方程可近似为 $\ddot{x} + 0.5\dot{x} + 2x = 0$, 其特征根为 $\lambda_1 = 1.19, \lambda_2 = -1.69$, 根据上述特征根可知奇点 $\dot{e} = 0, e = -2$ 为鞍点。

10-11 设某二阶非线性系统方框图如题 10-11 图所示, 其中 $e_0 = 0.2, M_0 = 0.2, K = 4$ 及 $T = 1$ s。试分别画出输入信号取下列函数时系统的相轨迹图。设系统原处于静止状态。

- (1) $r(t) = 2 \cdot 1(t)$;
- (2) $r(t) = -2 \cdot 1(t) + 0.4t$;
- (3) $r(t) = -2 \cdot 1(t) + 0.8t$;
- (4) $r(t) = -2 \cdot 1(t) + 1.2t$ 。



题 10-11 图

解 由题 10-11 图写出非线性系统的运动方程式为

$$\ddot{e} + \dot{e} + 4x = \dot{r} + \ddot{r}$$

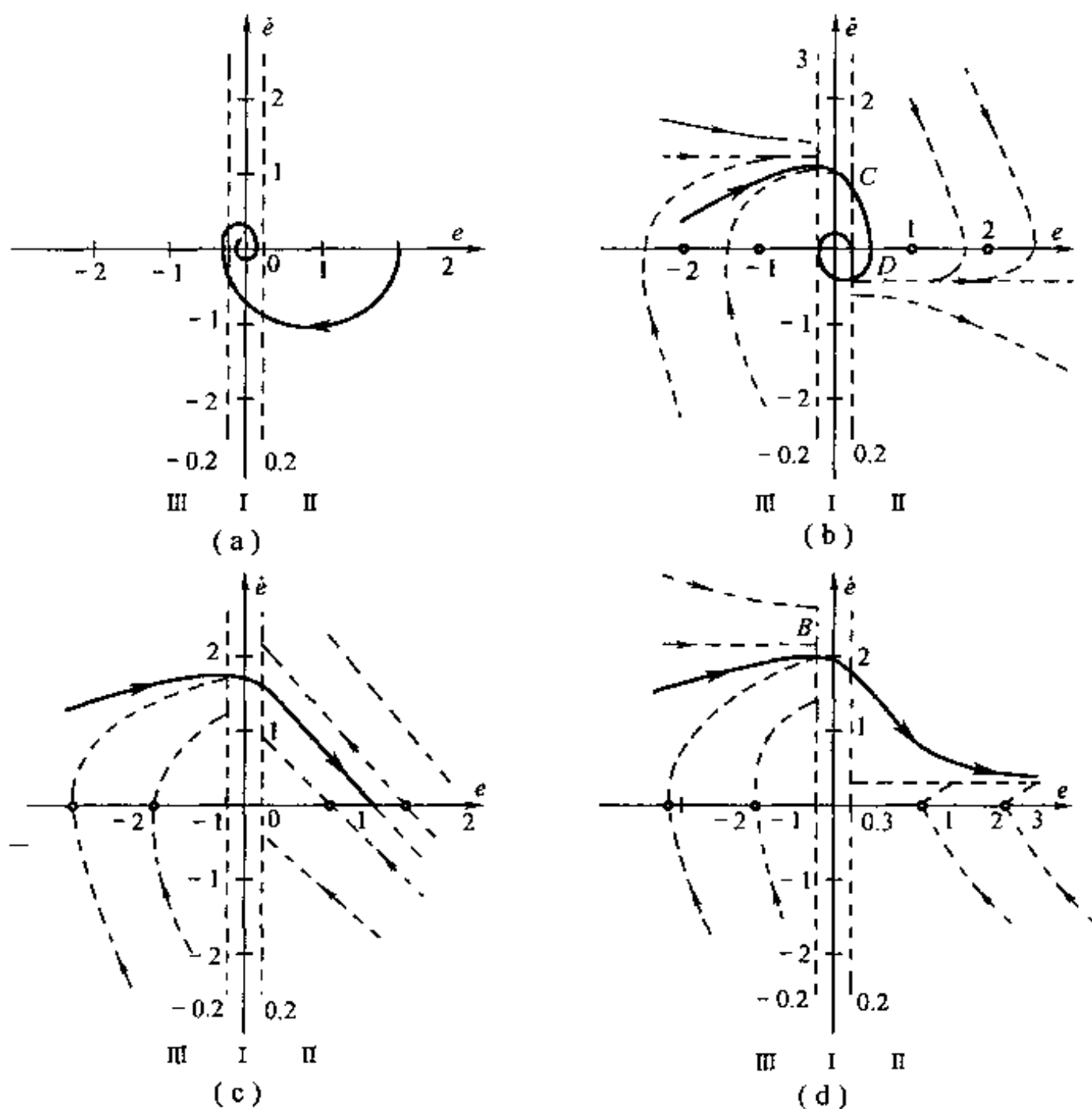
其中

$$x = \begin{cases} e, & |e| < 0.2 \\ 0.2, & e > 0.2 \\ -0.2, & e < -0.2 \end{cases}$$

(1) $r(t) = 2 \cdot 1(t)$ 时, 非线性系统的运动方程式为 $\ddot{e} + \dot{e} + 4x = 0$, 其中

$$x = \begin{cases} e, & |e| < 0.2, \quad (\text{I 区}) \\ 0.2, & e > 0.2 \quad (\text{II 区}) \\ -0.2, & e < -0.2 \quad (\text{III 区}) \end{cases}$$

分别将 x 按饱和非线性特性三个分段的取值代入运动方程式, 求得相平面内 I、II、III 三个区域的运动方程式为



题 10-11 解图

$$\ddot{e} + \dot{e} + 4e = 0, |e| < 0.2 \quad (\text{I 区})$$

$$\ddot{e} + \dot{e} + 0.8 = 0, e > 0.2 \quad (\text{II 区})$$

$$\ddot{e} + \dot{e} - 0.8 = 0, e < -0.2 \quad (\text{III 区})$$

①对于系统的线性工作状态(I区),其奇点 $e=0, \dot{e}=0$,类别是稳定焦点,且为实奇点;

②II区的等倾线方程为 $\dot{e} = \frac{-0.8}{1+a}$, II区的渐近线方程为 $\dot{e} = -0.8$;

③同理,III区的等倾线及渐近线方程式分别为 $\dot{e} = \frac{0.8}{1+a}, \dot{e} = 0.8$ 。

原系统处于静止状态,所以 $c(0^+) = 0, \dot{c}(0^+) = 0$ 。又因为 $r(0^+) = 2, \dot{r}(0^+) = 0$,所以 $e(0^+) = 2, \dot{e}(0^+) = 0$ 。起始于 $e=2, \dot{e}=0$ 的相轨迹如题 10-17 解图(a)所示,相轨迹收敛于实奇点(0,0),稳态误差等于零。

(2) $r(t) = -2 \cdot 1(t) + 0.4t$, 此时系统的运动方程为

$$\begin{cases} \ddot{e} + \dot{e} + 4e = 0, |e| < 0.2 & (\text{I 区}) \\ \ddot{e} + \dot{e} + 0.8 = 0, e > 0.2 & (\text{II 区}) \\ \ddot{e} + \dot{e} - 0.8 = 0, e < -0.2 & (\text{III 区}) \end{cases}$$

①对于系统的线性工作状态(I区),其奇点 $e = 0.1, \dot{e} = 0$, 类别是稳定焦点, 且为实奇点;

②II区的等倾线方程为 $\dot{e} = \frac{-0.4}{1+a}$, II区的渐近线方程为 $\dot{e} = -0.4$;

③同理, III区的等倾线及渐近线方程式分别为 $\dot{e} = \frac{1.2}{1+a}, \dot{e} = 1.2$ 。

起始于 $e = -2, \dot{e} = 0.4$ 的相轨迹如题 10-11 解图(b)所示, 相轨迹收敛于实奇点 $(0.1, 0)$, 稳态误差等于 0.1。

(3) $r(t) = -2 \cdot 1(t) + 0.8t$, 此时系统的运动方程为

$$\begin{cases} \ddot{e} + \dot{e} + 4e = 0.8, |e| < 0.2 & (\text{I区}) \\ \ddot{e} + \dot{e} + 0.8 = 0.8, e > 0.2 & (\text{II区}) \\ \ddot{e} + \dot{e} - 0.8 = 0.8, e < -0.2 & (\text{III区}) \end{cases}$$

①I区内奇点 $\dot{e} = 0, e = 0.2$ 仍为稳定焦点, 奇点位于I区和II区的分界线上;

②II区内, 令 $d\dot{e}/de = a$, 有 $\dot{e}(1+a) = 0$, 解出 $\dot{e} = 0$ 或 $a = -1$, 该区的相轨迹为 $\dot{e} = 0$ 的水平线或斜率为 -1 的斜线;

③同理, III区的等倾线及渐近线方程式分别为 $\dot{e} = \frac{1.6}{1+a}, \dot{e} = 1.6$ 。

起始于 $e = -2, \dot{e} = 0.8$ 的相轨迹如题 10-11 解图(c)所示, 相轨迹收敛于 e 轴从 0.2 到 ∞ 区段上的某点, 其稳态误差为大于 0.2 的一个有限值。

(4) $r(t) = -2 \cdot 1(t) + 1.2t$, 此时系统的运动方程式为

$$\begin{cases} \ddot{e} + \dot{e} + 4e = 1.2 & |e| < 0.2 & (\text{I区}) \\ \ddot{e} + \dot{e} + 0.8 = 1.2 & e > 0.2 & (\text{II区}) \\ \ddot{e} + \dot{e} - 0.8 = 1.2 & e < -0.2 & (\text{III区}) \end{cases}$$

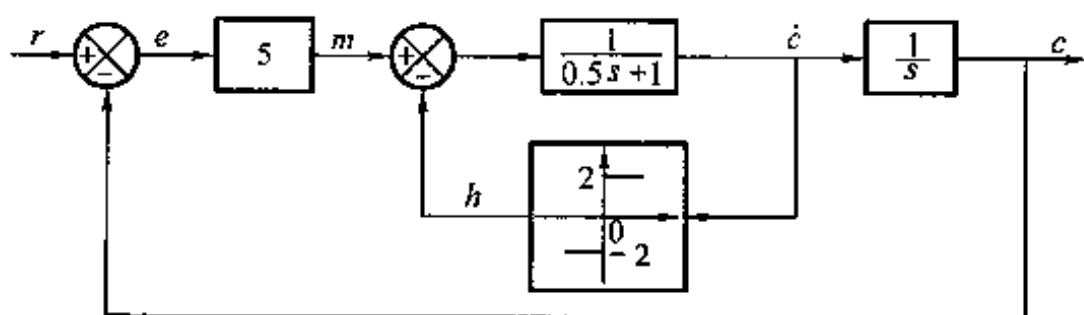
①I区内奇点 $\dot{e} = 0, e = 0.3$ 仍为稳定焦点, 且为虚奇点;

②II区内, 等倾线及渐近线方程式分别为 $\dot{e} = \frac{0.4}{1+a}, \dot{e} = 0.4$;

③同理, III区的等倾线及渐近线方程式分别为 $\dot{e} = \frac{2.0}{1+a}, \dot{e} = 2.0$ 。

起始于 $e = -2, \dot{e} = 1.2$ 的相轨迹如题 10-11 解图(d)所示, 相轨迹沿渐近线 $\dot{e} = 0.4$ 趋于无穷远, 故系统的稳态误差为无穷大。

10-12 设某控制系统采用非线性反馈时的方框图如题 10-12 图所示。试绘制系统响应 $r(t) = R \cdot 1(t)$ 的相轨迹图, 其中 R 为常值。



题 10-12 图

解 由题 10-12 图写出给定非线性系统的方程组

$$0.5\ddot{e} + \dot{e} = x$$

$$\begin{aligned}
 x &= m - h \\
 m &= 5e \\
 h &= \begin{cases} +2 & \dot{e} > 0 \\ -2 & \dot{e} < 0 \end{cases} \\
 e &= r - c
 \end{aligned}$$

由上述方程组得到系统响应 $r(t) = R \cdot 1(t)$ 时的运动方程为

$$0.5\ddot{e} + \dot{e} + 5(e - 0.4) = 0, \dot{e} < 0 \quad (\text{I 区})$$

$$0.5\ddot{e} + \dot{e} + 5(e + 0.4) = 0, \dot{e} > 0 \quad (\text{II 区})$$

可见,两种情况下的奇点 $\dot{e} = 0, e = 0.4$ 和 $\dot{e} = 0, e = -0.4$ 均为稳定焦点。相轨迹的起始点坐标由

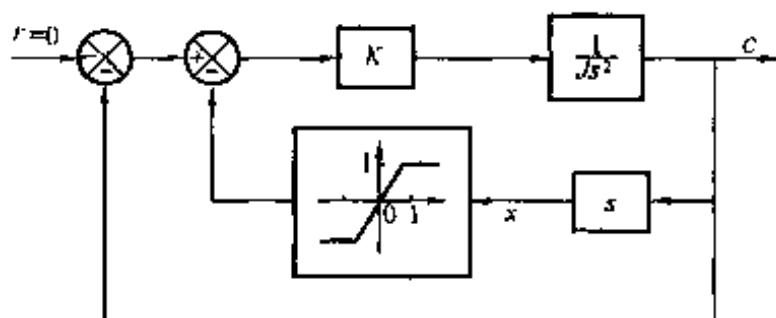
$$e(0^+) = r(0^+) - c(0^+) = R - c(0^+)$$

$$\dot{e}(0^+) = \dot{r}(0^+) - \dot{c}(0^+) = -\dot{c}(0^+)$$

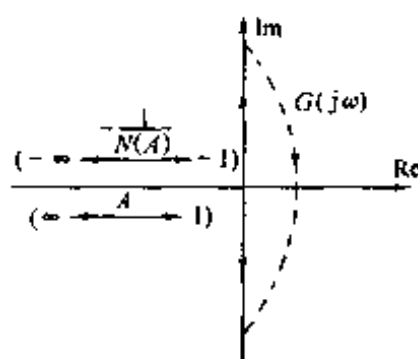
确定。其中 $c(0^+)$ 与 $\dot{c}(0^+)$ 为系统输出变量 $c(t)$ 在 $t = 0^+$ 时刻的初始值。系统从静止状态响应阶跃输入的相轨迹图如题 10-12 解图所示。系统的稳态误差 $-0.4 < e_{ss} < 0.4$ 。

10-13 设某非线性控制系统方框图如题 10-13 图所示。试应用描述函数法分析该系统的稳定性。

解 如题 10-13 图,将非线性系统简化为非线性特性 N 和等效线性部分 $G(s)$ 相串联的典型结构,其中 $G(s) = \frac{Ks}{Js^2 + K}$ 。绘制 $G(j\omega)$ 特性和 $-\frac{1}{N(A)}$ 曲线如题 10-13 解图所示, $G(j\omega)$ 和 $-\frac{1}{N(A)}$ 不相交,所以该系统稳定,无自持振荡。



题 10-13 图

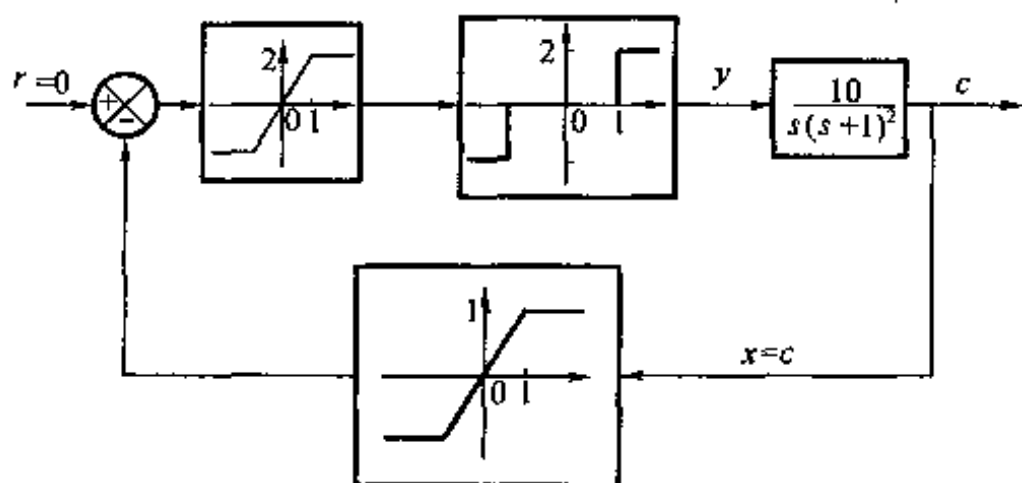


题 10-13 解图

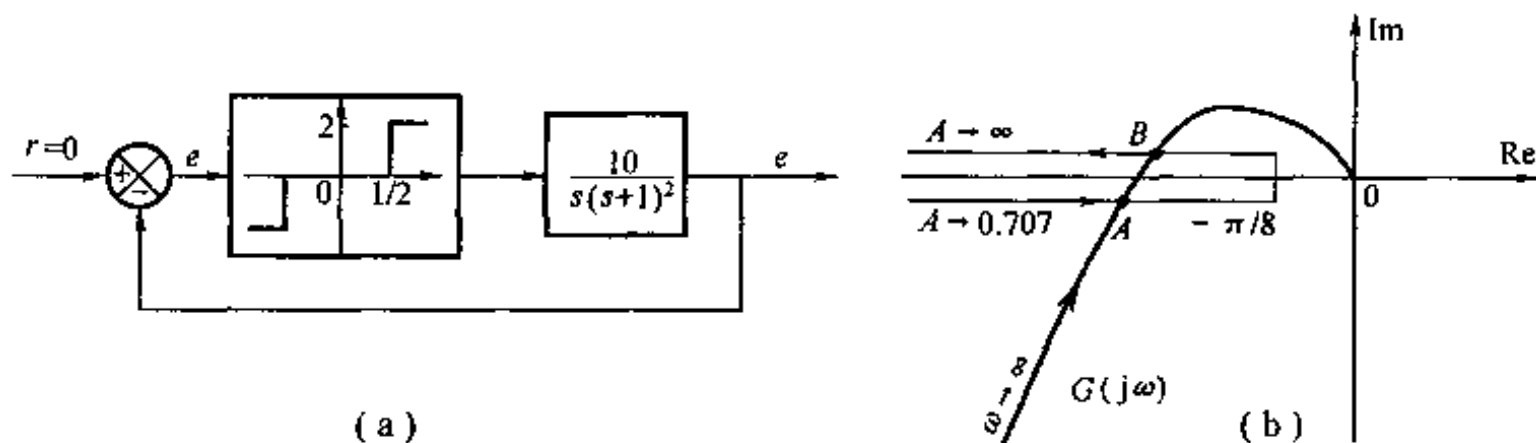
10-14 设某非线性控制系统方框图如题 10-14 图所示。试确定该系统的自持振荡的振幅与角频率。

解 该系统的三个非线性环节可等效变换为一个具有死区无滞环的继电器特性,结构图如题 10-14 解图(a)所示。

(1) 其中继电器特性参数为 $e_0 = \frac{1}{2}$, $M = 2$ 。 $-\frac{1}{N(A)}$ 曲线的拐点坐标为 $-\frac{\pi e_0}{2M} = -\frac{\pi}{8}$, 对应的振幅 $A = \sqrt{2}e_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。特性 $G(j\omega)$ 和 $-\frac{1}{N(A)}$ 曲线如题 10-14 解图(b)所示。



题 10-14 图



题 10-14 解图

(2) 线性部分频率响应的相频特性 $\angle G(j\omega) = -90^\circ - 2\arctan\omega = -180^\circ$, 解得 $G(j\omega)$ 与负实轴的交点对应的角频率为 $\omega = 1 \text{ rad/s}$ 。则 $|G(j1)| = 5 > \frac{\pi}{8}$, 所以 $G(j\omega)$ 和 $-\frac{1}{N(A)}$ 相交, 有两个交点 A 和 B, 其中 B 点是稳定交点, 代表系统产生自持振荡。

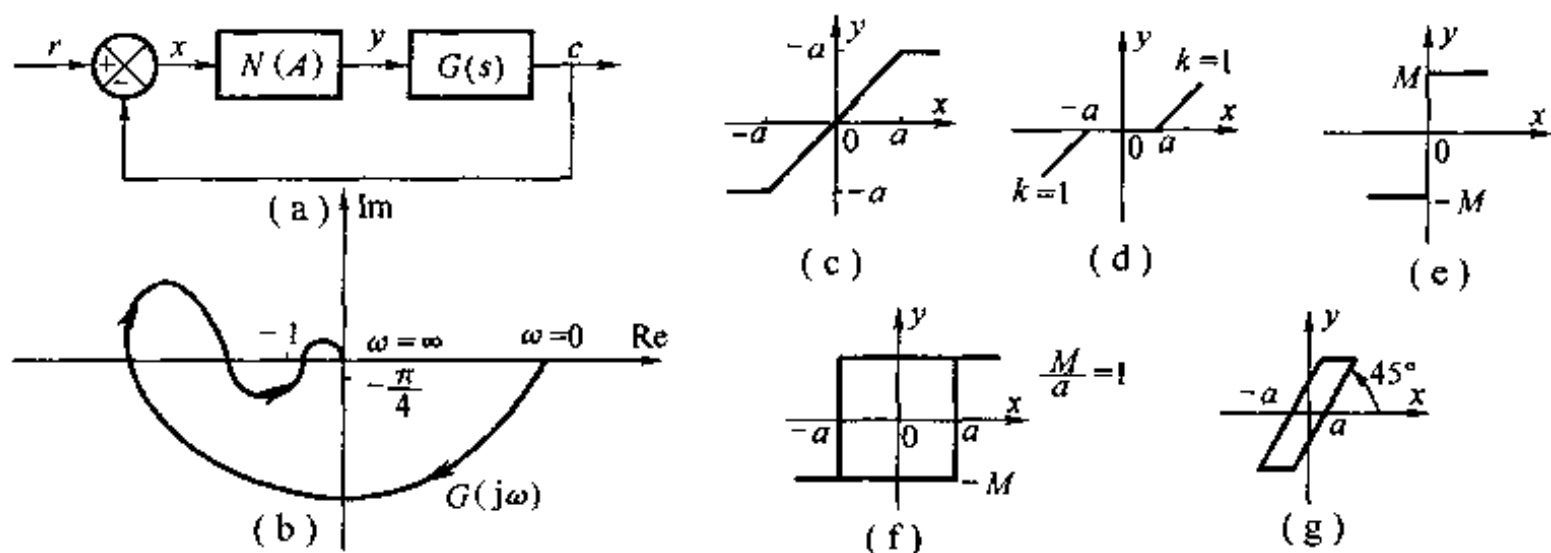
(3) 由 $-\frac{1}{N(A)} = -\frac{1}{\frac{4 \times 2}{\pi A_0 \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2A_0}\right)^2}}} = -5$, 求得 $A_{01} = 0.51$ 和 $A_{02} = 12.65$, 所以系统的自

持振荡的振幅为 $A_{02} = 12.65$, 角频率为 $\omega = 1 \text{ rad/s}$ 。

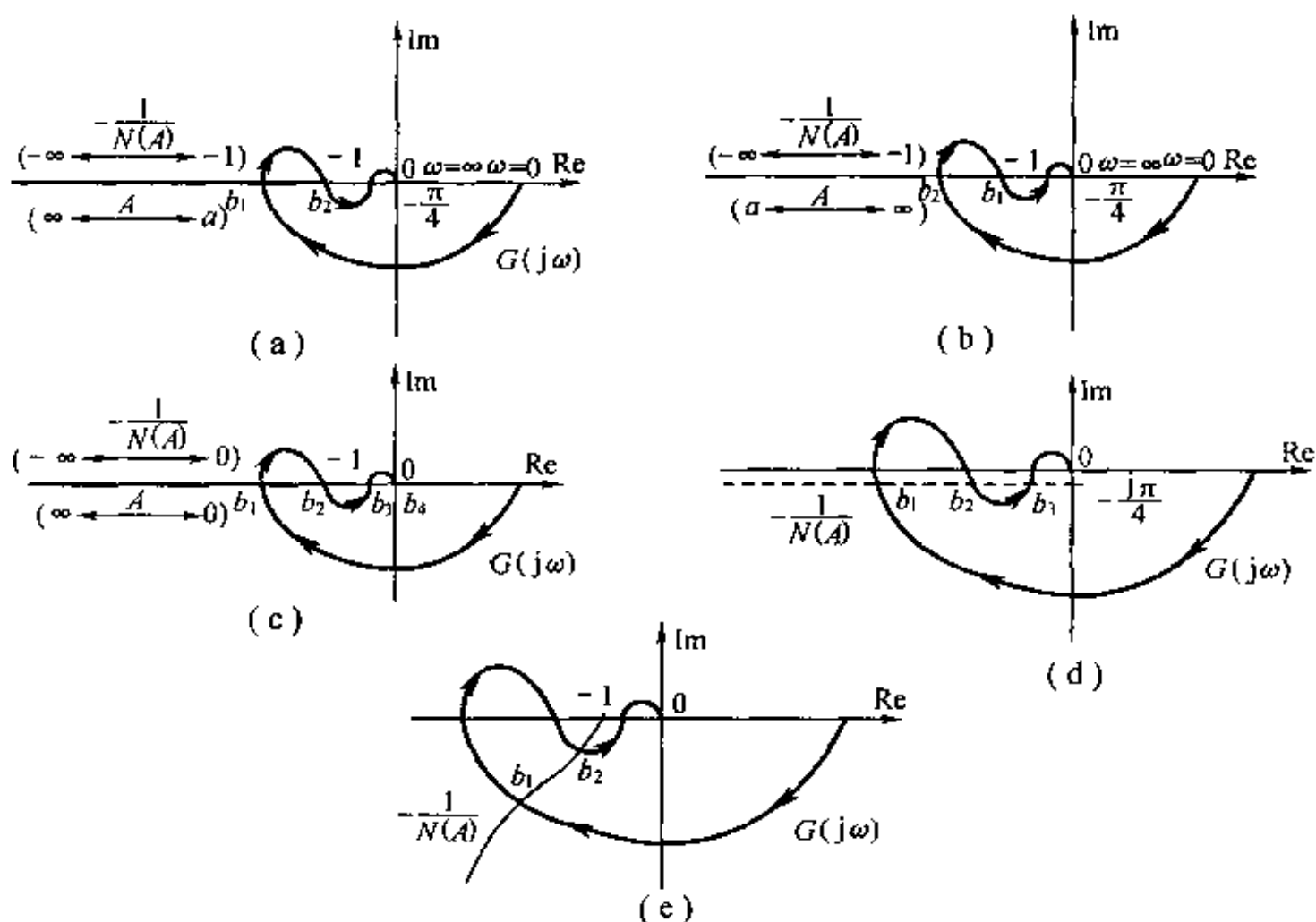
10-15 设非线性控制系统方框图如题 10-15 图(a)所示, 其中线性部分的频率响应 $G(j\omega)$ 如图(b)所示, 非线性环特性 N 示于图(c)~(g)。试应用描述函数法分析含图(c)~(g)所示典型非线性特性的系统稳定性。

解 对非线性特性(c), 绘制曲线如题 10-15 解图(a)所示, 共有交点 b_1 和 b_2 , 其中 b_1 代表稳定的自持振荡。对非线性特性(d), 绘制曲线如题 10-15 解图(b)所示, 共有交点 b_1 和 b_2 , 其中 b_1 代表稳定的自持振荡。对非线性特性(e), 绘制曲线如题 10-15 解图(c)所示, 共有交点 b_1, b_2, b_3 和 b_4 , 其中 b_1 和 b_3 代表稳定的自持振荡。对非线性特性(f), 绘制曲线如题 10-15 解图(d)所示, 共有交点 b_1, b_2 和 b_3 , 其中 b_1 和 b_3 代表稳定的自持振荡。对非线性特性(g), 绘制曲线如题 10-15 解图(e)所示, 共有交点 b_1 和 b_2 , 其中 b_2 代表稳定的自持振荡。

10-16 设某非线性控制系统的方框图如题 10-16 图所示, 其中线性部分传递函数为



题 10-15 图



题 10-15 解图

$G(s) = \frac{Ke^{-0.1s}}{s(0.1s+1)}$, 试应用描述函数法判定 $K=0.1$ 时系统的稳定性, 并确定不使系统产生自持振荡的参数 K 的取值范围。

解 (1) $G(j\omega)$ 特性与负实轴交点所对应的角频率由 $-5.73\omega - 90^\circ - \arctan 0.1\omega = -180^\circ$ 计算解得 $\omega = 8.6 \text{ rad/s}$ 。 $|G(j8.6)| = \frac{0.1}{\omega \sqrt{1+0.01\omega^2}} \Big|_{\omega=8.6} = 0.01$, $-\frac{1}{N(A)}$ 曲线为负实轴上 $(-\infty, -1)$ 区段, 所以 $G(j\omega)$ 特性与 $-\frac{1}{N(A)}$ 曲线不相交, 此时系统稳定, 不产生自持振荡。

(2) 当 $G(j\omega)$ 特性通过 $(-1, 0j)$ 点, 则 $|G(j8.6)| = \frac{K}{\omega \sqrt{1+0.01\omega^2}} \Big|_{\omega=8.6} = 1$, 解得 $K =$

9.46, 所以不使系统产生自持振荡的参数 K 的取值范围为 $0 < K < 9.46$ 。

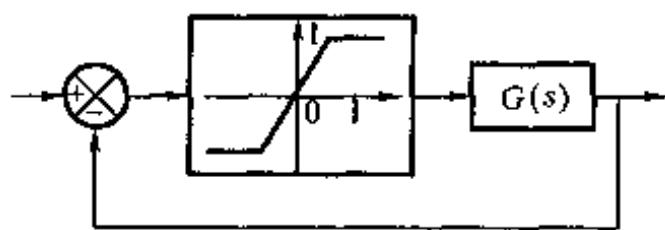
10-17 试确定图题 10-17 所示非线性控制系统自持振荡的振幅与角频率。

解 (1) 含有滞环的继电器的描述函数为

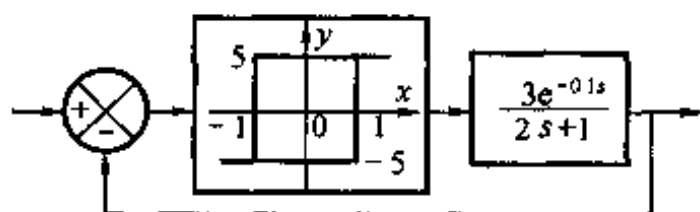
$$-\frac{1}{N(A)} = -\frac{\pi}{4M}(\sqrt{A^2 - 1} + j) = -\frac{\pi}{20}(\sqrt{A^2 - 1} + j)$$

(2) 当 $G(j\omega)$ 特性与 $-\frac{1}{N(A)}$ 曲线相交时, 有一个交点, 且对应稳定的自持振荡。

(3) 由 $\text{Im}[G(j\omega)] = \text{Im}\left(-\frac{1}{N(A)}\right)$, 得自持振荡的振幅 $A_0 = 1.282$, 角频率 $\omega_0 = 7.5 \text{ rad/s}$ 。

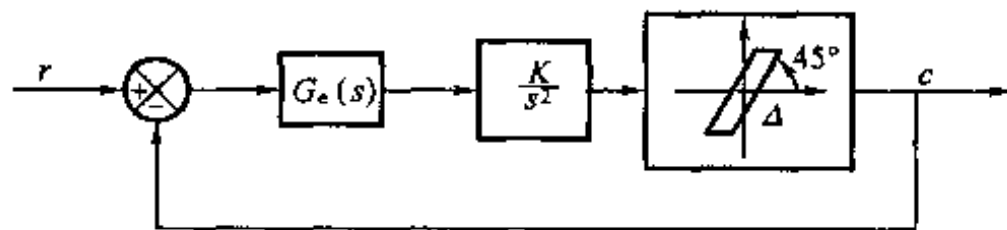


题 10-16 解图



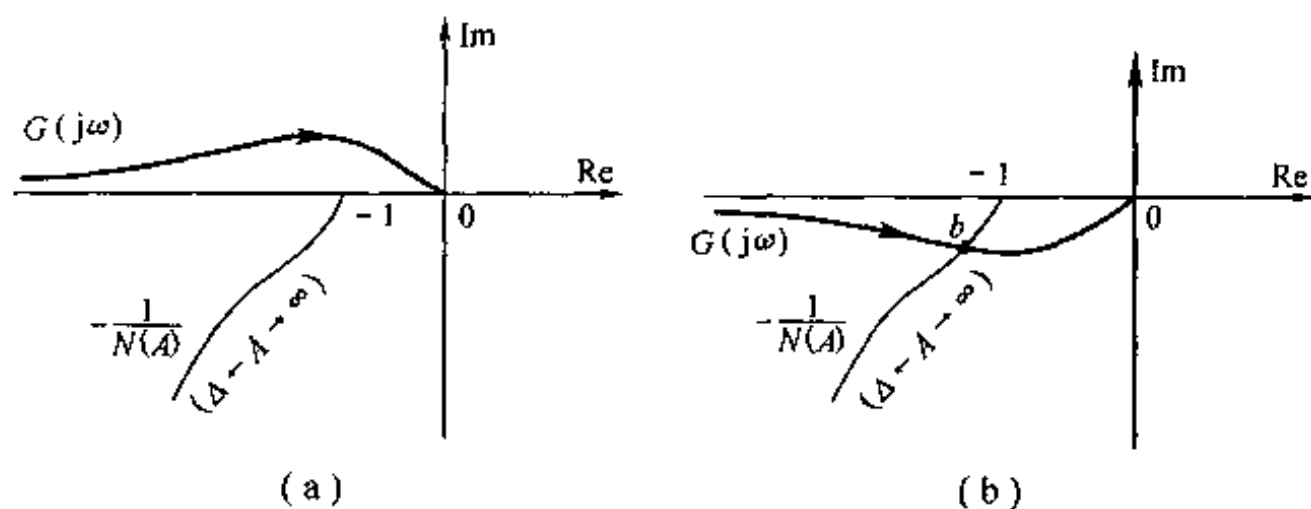
题 10-17 图

10-18 设某非线性控制系统方框图如题 10-18 图所示, 其中 $G_c(s)$ 为线性校正环节的传递函数, 若取 $G_c(s) = (a\tau s + 1) / \tau s + 1$ 试分析: (1) $0 < a < 1$; (2) $a > 1$ 时系统的稳定性。



题 10-18 图

解 (1) 当 $0 < a < 1$ 时, 绘制 $G(j\omega)$ 特性与 $-\frac{1}{N(A)}$ 曲线如题 10-18 解图 (a) 所示, $-\frac{1}{N(A)}$ 曲线在 $G(j\omega)$ 特性的下方, 系统不稳定。



题 10-18 解图

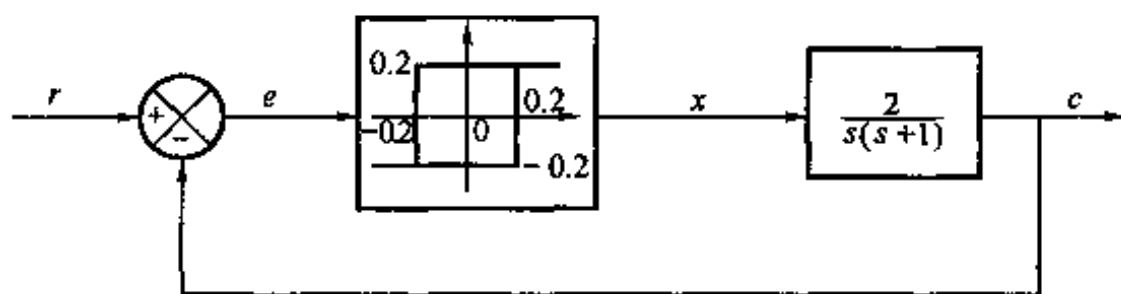
(2) $r(t) = R \cdot 1(t) + Vt$ 时, I 区和 II 区的相轨迹方程为

$$\ddot{e} + \dot{e} + 2 = V, e > 0$$

$$\ddot{e} + \dot{e} - 2 = V, e < 0$$

I 区和 II 区的渐近线方程分别为 $\dot{e} = V - 2, \dot{e} = V + 2$ 。分三种情况画相轨迹① $V > 2$ ② $V = 2$ ③ $V < 2$, 相轨迹分别如题 10-19 解图(b), (c), (d) 所示。

10-20 设某非线性控制系统的方框图如题 10-20 图所示, 试绘制 $r(t) = 1(t)$ 时 $e - \dot{e}$ 平面相轨迹图。已知初始条件 $c(0) = \dot{c}(0) = 0$ 。



题 10-20 图

解 该系统响应 $r(t) = 1(t)$ 时 I 区和 II 区的运动方程为

$$\ddot{e} + \dot{e} + 0.4 = 0, e > 0.2, e < -0.2, \dot{e} < 0$$

$$\ddot{e} + \dot{e} - 0.4 = 0, e < 0.2, e > -0.2, \dot{e} > 0$$

I 区和 II 区的渐近线方程为 $\dot{e} = -0.4, \dot{e} = 0.4$ 。相轨迹分别如题 10-20 解图所示。由图可见, 在含仅具有滞环的继电器特性的非线性系统内存在自持振荡。

10-21 设某非线性控制系统的方框图如题 10-13 图所示。其中 $K=5$ 及 $J=1$ 。试在 $e - \dot{e}$ 平面绘制不同初始条件下的相轨迹图。设系统开始处于静止状态。

解 由题 10-13 图可得如下方程

$$\ddot{e} = 5m, m = e - u$$

$$u = \begin{cases} 1, & \dot{e} > 1 \\ \dot{e}, & |\dot{e}| < 1 \\ -1, & \dot{e} < -1 \end{cases}$$

$$e = r - c, \dot{r} = 0, \dot{c} = 0$$

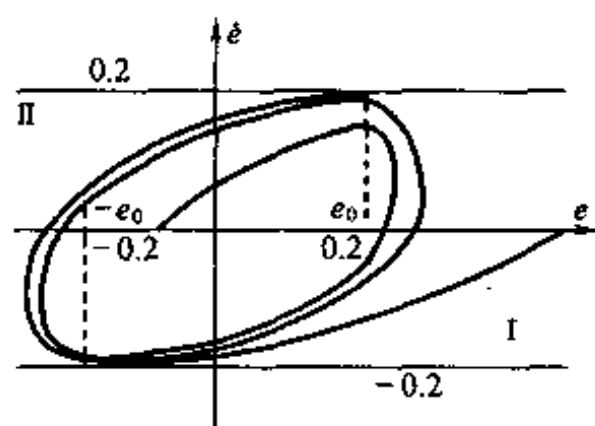
整理得

$$\begin{cases} \ddot{e} + 5e + 5 = 0, & \dot{e} > 1 \\ \ddot{e} + 5\dot{e} + 5e = 0, & |\dot{e}| < 1 \\ \ddot{e} + 5e - 5 = 0, & \dot{e} < -1 \end{cases}$$

将相平面分成 I 区 ($\dot{e} > 1$), II 区 ($-1 < \dot{e} < 1$), III 区 ($\dot{e} < -1$)。

(1) I 区 ($\dot{e} > 1$) 的相轨迹方程为 $\ddot{e} + 5e + 5 = 0$, 由 $\ddot{e} = \dot{e} \frac{d\dot{e}}{de}$, 经计算得 $\left(\frac{\dot{e}}{\sqrt{5}}\right)^2 + (e+1)^2 = R_1^2$ 。

说明 $\dot{e} > 1$ 时, 当以 $\frac{\dot{e}}{\sqrt{5}}$ 为纵坐标、 e 为横坐标时, 该区的相轨迹为圆心在 $(-1, 0)$, 半径为



题 10-20 解图

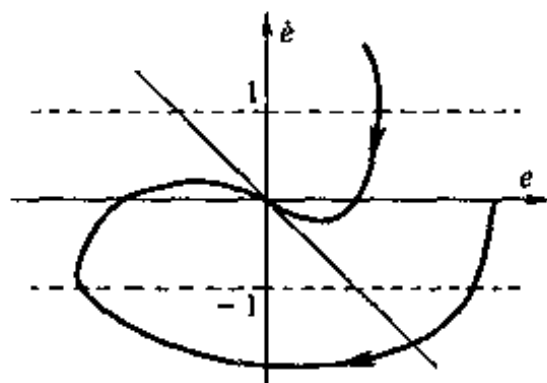
R_1 的圆,其中 R_1 由初始条件确定。

(2) II 区 ($-1 < \dot{e} < 1$) 的奇点为 $(0,0)$, 并且该区内特征根为 $s_1 = -3.62, s_2 = 1.38$, 故奇点 $(0,0)$ 为稳定节点。相轨迹方程为 $\ddot{e} + 5\dot{e} + 5e = 0$, 等倾线方程为 $\dot{e} = -\frac{5}{5+a}e$, 渐近线方程为 $\dot{e} = -e$, 该区内的相轨迹将沿着渐近线趋向于相平面的坐标原点 $(0,0)$ 。

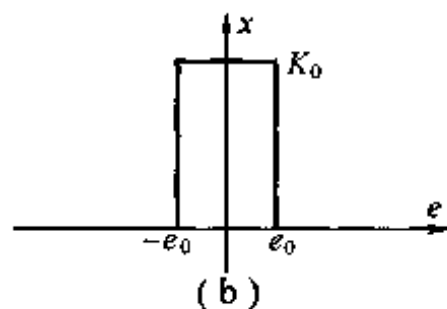
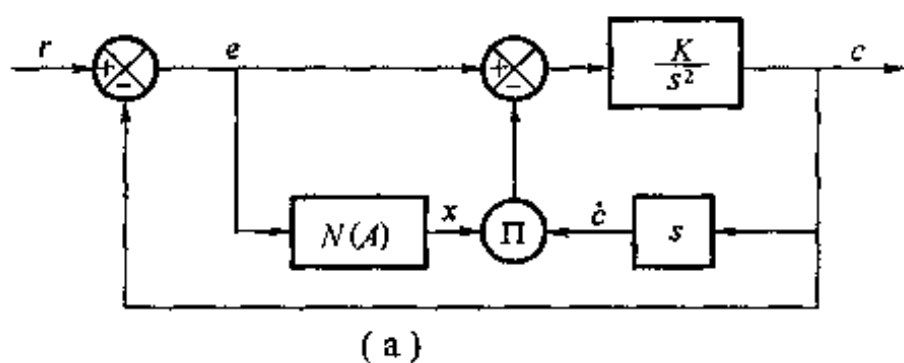
(3) III 区 ($\dot{e} < -1$) 的相轨迹方程为 $\ddot{e} + 5\dot{e} - 5 = 0$, 经计算得 $\left(\frac{\dot{e}}{\sqrt{5}}\right)^2 + (e-1)^2 = R_2^2$, 说明该区内的相轨迹为圆心在 $(1,0)$, 半径为 R_2 的圆, 其中 R_2 由初始条件确定。

则由不同初始条件出发的相轨迹大致图形如题 10-21 解图所示。

10-22 具有非线性阻尼的控制系统方框图如题 10-22(a) 图所示, 其中非线性特性 N 示于图(b)中。当误差信号 $|e|$ 较大, 即 $|e| > 0.2$ 时, 阻尼作用消失; 误差信号 $|e|$ 较小时, 系统具有 $K_0\dot{e}$ 的阻尼, 于是速度反馈受非线性特性控制, 图中符号 Π 代表相乘。设系统开始处于静止状态, 系统参数为 $K=4, K_0=1, e_0=0.2$, 试在 $e-\dot{e}$ 平面上绘制输入信号分别为



题 10-21 解图



题 10-22 图

$$(1) r(t) = 1(t)$$

$$(2) r(t) = 0.75 + 0.1t$$

$$(3) r(t) = 0.7t$$

时系统的相轨迹图。

解 由题 10-22 图列方程

$$\begin{cases} e = r - c \\ K(e - x\dot{e}) = \ddot{e} \end{cases}$$

其中 $x = \begin{cases} K_0, & |e| \leq e_0 \\ 0, & |e| > e_0 \end{cases}$, 将相平面分成 I、II 区, 分别对应 $|e| \leq e_0$ 和 $|e| > e_0$, 整理得相轨迹方程为

$$\begin{aligned} \ddot{e} + 4\dot{e} + 4e &= r + 4\dot{r} & |e| \leq 0.2 \\ \ddot{e} + 4e &= r & |e| > 0.2 \end{aligned}$$

(1) 当 $r(t) = 1(t)$ 时, I 区内奇点 $(0,0)$ 点为稳定节点, 等倾线方程 $\alpha = \frac{-4\dot{e} - 4e}{\dot{e}}$, 渐近线方程为 $\dot{e} = -e$ 。II 区内奇点 $(0,0)$ 点为中心点, 从 $(1,0)$ 点出发的相轨迹如题 10-22 解图(a) 所示。

(2) 当 $r(t) = 0.75 + 0.1t$ 时, 相轨迹方程为

$$\begin{aligned} \ddot{e} + 4\dot{e} + 4e &= 0.4 & |e| \leq 0.2 \\ \ddot{e} + 4e &= 0 & |e| > 0.2 \end{aligned}$$

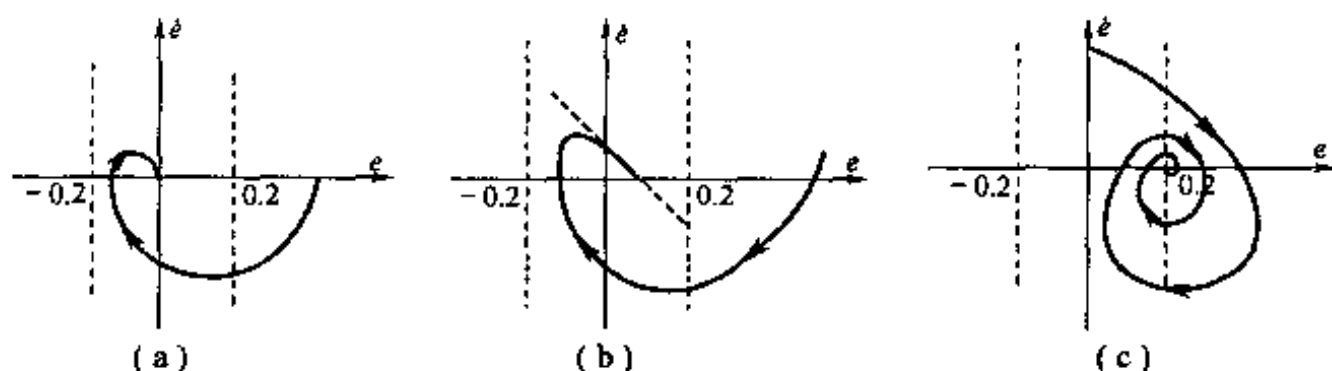
I 区内奇点为点 $(0.1, 0)$, 等倾线方程为 $\dot{e} = \frac{-4e + 0.4}{\alpha + 4} (\alpha = 0) = -e + 0.1$, II 区内情况同

(1), 则从 $(0.75, 0.1)$ 出发的相轨迹如题 10-22 解图(b)所示。

(3) 当 $r(t) = 0.7t$ 时, 相轨迹方程为

$$\begin{aligned} \ddot{e} + 4\dot{e} + 4e &= 2.8 & |e| \leq 0.2 \\ \ddot{e} + 4e &= 0 & |e| > 0.2 \end{aligned}$$

I 区内奇点 $(0.7, 0)$ 为虚奇点, 等倾线方程 $\dot{e} = -e + 0.7$ 。则从 $(0, 0.7)$ 出发的相轨迹如题 10-22 解图(c)所示。



题 10-22 解图

10-23 试分析下列系统在平衡状态处的稳定性。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ -x_1 - x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{bmatrix}$$

解 由题知平衡点为原点, 应用非线性系统线性化的方法, 在平衡点处线性化得

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial X^T} \right|_{X=0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \bigg|_{X=0} = \begin{bmatrix} -1 + 3x_1^2 + x_2^2 & 1 + 2x_1x_2 \\ -1 + 2x_1x_2 & -1 + x_1^2 + 3x_2^2 \end{bmatrix} \bigg|_{X=0} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

所以 $|sI - A| = \begin{vmatrix} s+1 & -1 \\ 1 & s+1 \end{vmatrix} = s^2 + 2s + 2 = 0$, 系统的两个特征值都在左半平面, 则系统在平衡点附近渐近稳定。

10-24 试分析下列系统在原点处的稳定性。

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 - x_1^3 \end{aligned}$$

$$\text{解 } \dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = f(X) = \begin{bmatrix} f_1(X) \\ f_2(X) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_2 - x_1^3 \end{bmatrix}, J(X) = \frac{\partial f(X)}{\partial X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3x_1^2 & -1 \end{bmatrix}$$

设 $V(X) = \dot{X}^T P \dot{X}$, $P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix}$, 令 $Q = -I$, 则 $\dot{V}(X)$ 为负定。

$$\text{则 } \begin{bmatrix} 0 & -3x_1^2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3x_1^2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

解得 $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{6x_1^2} + \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{2} & \frac{1}{6x_1^2} \\ \frac{1}{6x_1^2} & \frac{1}{6x_1^2} + \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, 因为 $\frac{1}{6x_1^2} + \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{2} > 0$, 并且 $|P| = \frac{1}{4} + \frac{1}{6x_1^2} + \frac{3}{4}x_1^2 +$

$\frac{1}{4} > 0$, 则 P 正定, 所以系统在原点处渐近稳定。并且当 $\|X\| \rightarrow \infty$ 时, $V(X) = \frac{3}{2}x_1^2x_2^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{6}x_1^4 + \frac{1}{2}(x_1^3 + x_2)^2 \rightarrow \infty$, 所以在原点大范围渐近稳定。

10-25 试确定下列系统在 $X=0$ 处稳定时系数 a 及 b 的取值范围。

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -ax_2 - bx_2^3 - x_1$$

解 $A = \frac{\partial f}{\partial X^T} \Big|_{X=0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \Big|_{X=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -a - 3bx_2^2 \end{bmatrix} \Big|_{X=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -a \end{bmatrix}$, 则

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 1 & s+a \end{vmatrix} = s^2 + as + 1$$

要保证系统的两个特征值都在左半平面, 即系统在原点渐近稳定的充要条件是 $a > 0$, b 任意。

10-26 已知系统的运动方程为

$$(1) \ddot{x} + K_1\dot{x} + K_2(\dot{x})^5 + x = 0, (2) \ddot{x} + [K_1 + K_2(x)^4]\dot{x} + x = 0。$$

试分析在下列情况下的系统稳定性:

$$(1) K_1 > 0 \text{ 及 } K_2 > 0; (2) K_1 < 0 \text{ 及 } K_2 < 0; (3) K_1 > 0 \text{ 及 } K_2 < 0。$$

解 (1) 由系统的运动方程 $\ddot{x} + K_1\dot{x} + K_2(\dot{x})^5 + x = 0$, 令 $x_1 = x, x_2 = \dot{x} = \dot{x}_1$, 则

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - K_1x_2 - K_2x_2^5$$

系统的平衡状态为 $x_1 = x_2 = 0$, 则

$$A = \frac{\partial f}{\partial X^T} \Big|_{X=0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \Big|_{X=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -K_1 - 5K_2x_2^4 \end{bmatrix} \Big|_{X=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -K_1 \end{bmatrix}$$

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 1 & s+K_1 \end{vmatrix} = s^2 + K_1s + 1$$

当 $K_1 > 0$ 及 $K_2 > 0$ 和 $K_1 > 0$ 及 $K_2 < 0$ 时, 系统的两个特征值都在左半平面, 即系统在原点渐近稳定; 当 $K_1 < 0$ 及 $K_2 < 0$ 时, 系统不稳定。

(2) 思路同(1), 由系统的运动方程 $\ddot{x} + [K_1 + K_2(x)^4]\dot{x} + x = 0$, 令 $x_1 = x, x_2 = \dot{x} = \dot{x}_1$, 则

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - (K_1 + K_2x_1^4)x_2$$

系统的平衡状态为 $x_1 = x_2 = 0$, 则

$$A = \frac{\partial f}{\partial X^T} \Big|_{x=0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \Big|_{x=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -(K_1 + K_2 x_1^4) \end{bmatrix} \Big|_{x=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -K_1 \end{bmatrix}$$

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 1 & s + K_1 \end{vmatrix} = s^2 + K_1 s + 1$$

当 $K_1 > 0$ 及 $K_2 > 0$ 和 $K_1 > 0$ 及 $K_2 < 0$ 时,系统的两个特征值都在左半平面,即系统在原点渐近稳定;当 $K_1 < 0$ 及 $K_2 < 0$ 时,系统不稳定。

10-27 试应用克拉索夫斯基方法确定系统 $\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + bx_2^5 \end{cases}$ 在坐标原点 $X=0$ 处大范围渐近稳定时的参数 a 和 b 的取值范围。

解 $J = \frac{\partial f}{\partial X^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & -1 + 5bx_2^4 \end{bmatrix}$, 令 $P = I, V(X) = f^T(X)f(X)$

$$\dot{V}(X) = f^T(X)[J^T + J]f(X) + 2f^T(X) \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & -1 + 5bx_2^4 \end{bmatrix} f(X)$$

当 $\dot{V}(X)$ 负定时,系统在 $x_e = 0$ 处渐近稳定。当 $a < 0$, $\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & -1 + 5bx_2^4 \end{vmatrix} = -a + 5abx_2^4 - 1 > 0$ 时, $\dot{V}(X)$ 负定;并且当 $\|X\| \Rightarrow \infty$ 时, $V(X) = (ax_1 + x_2)^2 + (x_1 - x_2 + bx_2^5)^2 \Rightarrow \infty$ 。所以系统大范围渐近稳定的条件是 $a < 0, -a + 5abx_2^4 - 1 > 0$ 。

10-28 试应用变量梯度法构造下列系统的李氏函数,并判别该系统在平衡状态的 $X_e = 0$ 稳定性。

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + 2x_1^2 x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 \end{aligned}$$

解 由 $\dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1^2 x_2 = 0, \dot{x}_2 = -x_2 = 0$, 求得系统的平衡状态 $X_e = 0$ 。

设 $\nabla V = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla V_1 \\ \nabla V_2 \end{bmatrix}$, 则

$$\dot{V}(X) = (\nabla V)^T \dot{X} = -a_{11}x_1^2 - (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + 2a_{11}x_1^3x_2 + 2a_{12}x_1^2x_2^2 - a_{22}x_2^2$$

若选 $a_{11} = a_{22} = 1, a_{12} = a_{21} = 0$, 则满足旋度方程条件 $\frac{\partial \nabla V_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \nabla V_2}{\partial x_1} = 0$, 并且 $\dot{V}(X) = -x_1^2(1 - 2x_1x_2) - x_2^2$ 。当 $x_1x_2 < 0.5$ 时, $\dot{V}(X)$ 负定, 而 $V(X) = \int_0^{x_1(x_2=0)} x_1 dx_1 + \int_0^{x_2(x_1=x_1)} x_2 dx_2 = 0.5(x_1^2 + x_2^2)$ 为正定。

所以给定系统的平衡状态 $X_e = 0$ 在 $x_1x_2 < 0.5$ 范围内是渐近稳定的。

10-29 试应用变量梯度法分析下列系统的稳定条件。

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \alpha(t)x_1 + \beta(t)x_2 \end{aligned}$$

解 设 $\nabla V = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla V_1 \\ \nabla V_2 \end{bmatrix}$, 则

$$\begin{aligned}\dot{V}(X) &= (\nabla V)^T \dot{X} = a_{11}x_1x_2 + a_{12}x_2^2 + \alpha(t)a_{21}x_1^2 + \beta(t)a_{21}x_1x_2 + \alpha(t)a_{22}x_1x_2 + \beta(t)a_{22}x_2^2 \\ &= \alpha(t)a_{21}x_1^2 + [a_{11} + \beta(t)a_{21} + \alpha(t)a_{22}]x_1x_2 + (a_{12} + \beta(t)a_{22})x_2^2\end{aligned}$$

(1) 若选 $a_{11} = -\alpha(t)$, $a_{22} = 1$, $a_{12} = a_{21} = 0$, 则满足旋度方程条件 $\frac{\partial \nabla V_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \nabla V_2}{\partial x_1} = 0$ 。并且 $\dot{V}(X) = \beta(t)x_2^2$, 当 $\beta(t) < 0$ 时, $\dot{V}(X)$ 为半负定。

(2) $V(X) = \int_0^{x_1(x_2=0)} -\alpha(t)x_1 dx_1 + \int_0^{x_2(x_1=x_1)} x_2 dx_2 = -0.5\alpha(t)x_1^2 + 0.5x_2^2$, 则当 $\alpha(t) < 0$ 时, $V(X)$ 为正定。且当 $\|x\| \rightarrow \infty$ 时, $V(X) = -0.5\alpha(t)x_1^2 + 0.5x_2^2 \rightarrow \infty$, 所以当 $\alpha(t) < 0$, $\beta(t) < 0$ 时, 系统在原点处是大范围渐近稳定的。

同步训练题

1. 非线性控制系统结构图如题 1 图所示, $M = 1$ 。要使系统产生振幅 $A = 4$, 频率 $\omega = 1$ 的自振运动, 试确定参数 K, τ 的值。

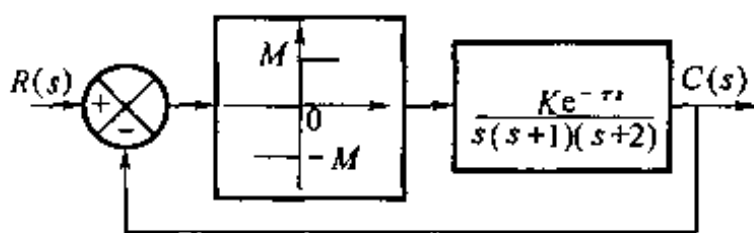
2. 试用相平面法分析如题 2 图所示系统分别在 $\beta = 0, \beta < 0, \beta > 0$ 情况下, 相轨迹的特点。

3. 若二阶非线性系统的微分方程为

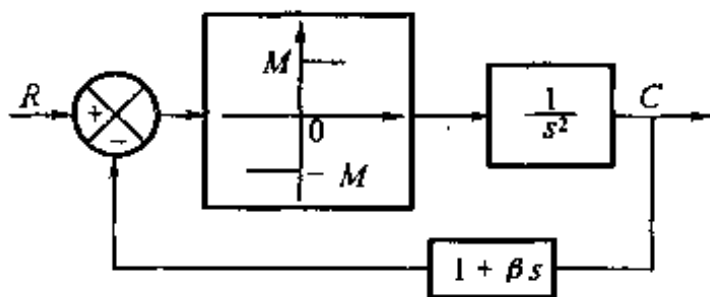
$$(1) 2\ddot{x} + \dot{x}^2 + x = 0$$

$$(2) \ddot{x} - (1 - x^2)\dot{x} + x = 0$$

试求系统的奇点及类型。

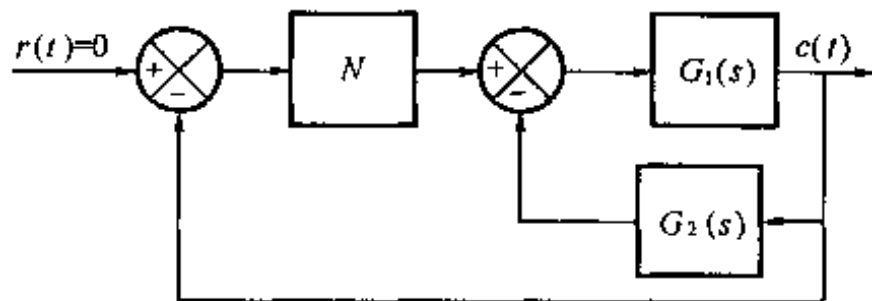


题 1 图



题 2 图

4. 某单位反馈系统, 其前向通路中有一描述函数 $N(A) = e^{-j\pi/4}/A$ 的非线性元件, 线性部分的传递函数为 $G(s) = \frac{15}{s(0.5s+1)}$, 试用描述函数法确定系统是否存在自持振荡? 若有, 参数是多少?



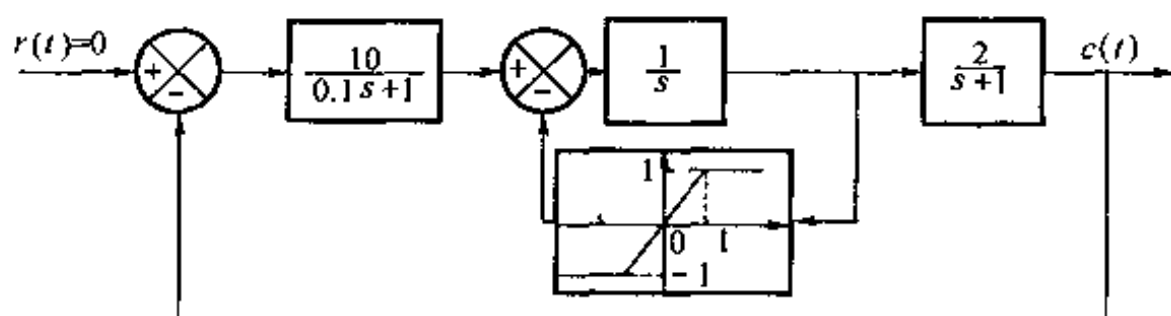
题 6 图

5. 求非线性特性 $y(t) = x^3(t)$ 的描述函数。

6. 试将题 6 图所示系统归化为一个非线性部分和一个线性部分串联的典型结构。

7. 线性二阶系统的微分方程为 $\ddot{e} + 2\zeta\omega_n\dot{e} + \omega_n^2 e = 0$, 式中 $\zeta = 0.15$, $\omega_n = 1$, 计算奇点的类型。

8. 系统结构如题 8 图所示, 试分析系统的稳定性, 判断是否存在自振。若存在, 试确定自振的振幅和频率。



题8图

9. 确定系统的平衡状态,并用李雅普诺夫方程判别其稳定性。

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - kx_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - kx_2(x_1^2 + x_2^2)\end{aligned}$$

同步训练题答案

1. 解 $K = 9.93, \tau = 0.322$ 。

2. 解 由题2图可得
$$\dot{e} = \begin{cases} M, & c + \beta\dot{e} < 0 \\ -M, & c + \beta\dot{e} > 0 \end{cases}$$

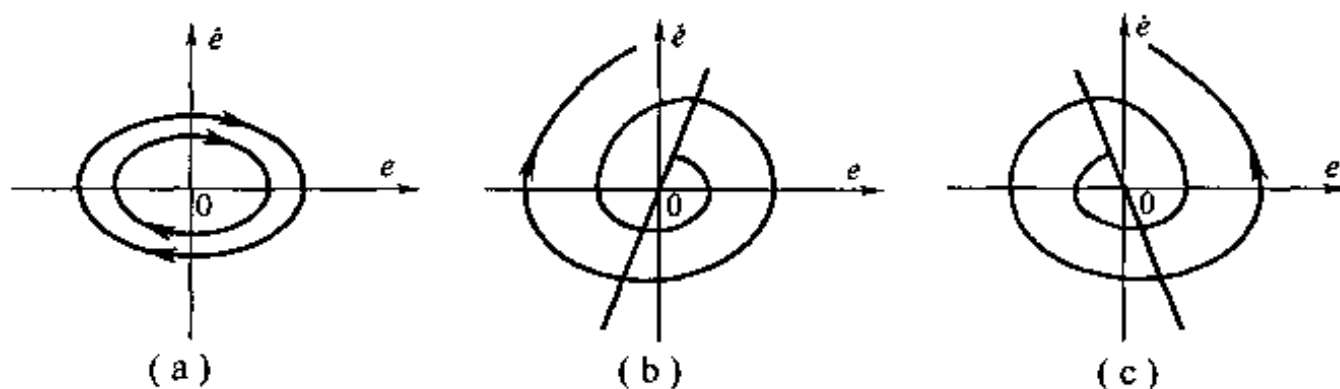
因此, $c + \beta\dot{e} = 0$ 为开关线。分别求解 $\dot{e} = \pm M$, 可得

$$\begin{cases} \dot{e}^2 = 2M + A_1, & c + \beta\dot{e} < 0 \\ \dot{e}^2 = -2M + A_2, & c + \beta\dot{e} > 0 \end{cases}$$

(1) 当 $\beta = 0$ 时, 开关线为 \dot{e} 轴, 相轨迹见图2解图(a), 为一簇封闭曲线, 奇点在坐标原点, 为中心点。

(2) 当 $\beta < 0$ 时, 开关线沿原点向右旋转, 相轨迹见图2解图(b), 奇点在坐标原点, 为不稳定焦点。

(3) 当 $\beta > 0$ 时, 开关线沿原点向左旋转, 相轨迹见图2解图(c), 奇点在坐标原点, 为稳定焦点。



题2解图

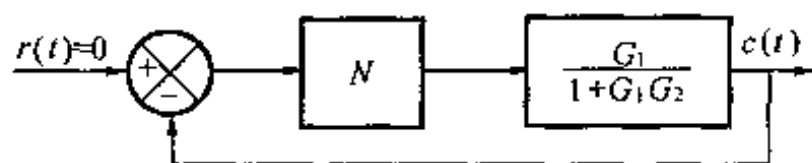
3. 解 (1) 奇点坐标为(0,0), 线性化方程 $\ddot{x} + \frac{1}{2}x = 0$, 故 $s_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{1}{2}}$, 奇点为中心点。

(2) 奇点坐标为(0,0), 线性化方程 $\ddot{x} - \dot{x} + x = 0$, 得 $s_{1,2} = 0.5 \pm j0.866$, 奇点为不稳定焦点。

4. 解 存在, $\omega = 2, A = 5.3, \circ$

5. 解 描述函数: $N(A) = \frac{3}{4}A^2$ 。

6. 解 典型结构如题 6 解图所示。



题 6 解图

7. 解 稳定焦点位于坐标原点。

8. 解 $\omega = 4.18, A = 1.7$, 不稳定的周期运动点。

9. 解 $x_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 是系统唯一的平衡状态, 选 $V(X) = x_1^2 + x_2^2, k > 0$, 系统大范围一致渐近稳定; $k = 0$ 系统大范围一致稳定, $k < 0$, 系统不稳定。

[G e n e r a l I n f o r m a t i o n]

书名 = 自动控制原理习题精解精练

作者 =

页数 = 1 5 2

S S 号 = 0

出版日期 =