第 ~~6~~ 5 章　控制系统的综合与校正

书后习题解析

~~6-1~~ 5-34 已知单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{200}{s(0.1s+1)}$，试设计串联校正环节，使系统的相角裕度不小于 45°，剪切频率不低于 50 rad/s。

解　校正前系统的剪切频率为 44.2 rad/s，相角裕度为 12.7°。为了满足要求，相角裕度及剪切频率均应提高，则采用串联超前校正，校正环节的传递函数为

$$G_c(s)=\frac{\tau s+1}{Ts+1}\quad(\tau>T)$$

(1)选取剪切频率 $\omega_c=60$ rad/s，$\tau=10T$，则校正后系统的开环传递函数、幅频特性及相频特性分别为

$$G(s)=\frac{200(\tau s+1)}{s(0.1s+1)(Ts+1)}$$

$$|G(j\omega)|=\frac{200\sqrt{1+(\tau\omega)^2}}{\omega\sqrt{1+(0.1\omega)^2}\sqrt{1+(T\omega)^2}}$$

$$\angle G(j\omega)=-90^\circ-\arctan(0.1\omega)-\arctan(T\omega)+\arctan(\tau\omega)$$

其中取 $T=0.1\tau$。

(2)由 $|G(j\omega_c)|_{\omega_c=60}=1$，求校正参数 T 和 τ。即

$$200\sqrt{1+(60\tau)^2}=60\sqrt{1+6^2}\sqrt{1+(6\tau)^2}$$

解得 $\tau=0.026$s，$T=0.002\ 6$ s。

(3)验算

$$\angle G(j\omega_c)|_{\omega_c=60}=-90^\circ-\arctan6-\arctan0.002\ 6\times60+\arctan0.026\times60=-122^\circ$$

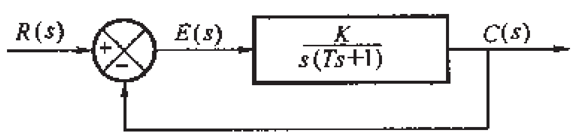
$$\gamma=180^\circ+\angle G(j\omega_c)|_{\omega_c=60}=-58^\circ$$

校正后系统在相角裕度及剪切频率两方面均满足设计指标要求。所以串联超前校正环节的传递函数为

$$G_c(s)=\frac{1+0.026s}{1+0.002\ 6s}$$

~~6-2~~ 5-35 在题 6－2 图所示控制系统中，要求采用串联校正以消除该系统跟踪匀速输入时的稳态误差。试设计串联校正环节。

类推



题 6－2 图

解　为了消除该系统跟踪匀速输入时的稳态误差，校正后的系统必须是Ⅱ型系统，并且还要保证系统的稳定性要求，所以选择 PI 控制，校正环节的传递函数 $G_c(s)$ 为

$$G_c(s)=\frac{K_1(\tau s+1)}{s}$$

从而校正后系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{K_1K(\tau s+1)}{s^2(Ts+1)}$

校正后系统的特征方程式为 $Ts^3+s^2+K_1K\tau s+K_1K=0$

保证系统稳定，由 $K_1K\tau-K_1KT>0$，求得 $\tau>T$，则可根据校正后系统对相角裕度的要求确定参数 τ 的取值；根据系统响应匀加速信号的稳态误差允许值来确定参数 K_1 的取值，从而确定串联校正环节。

6－3 设某控制系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{10}{s(0.05s+1)(0.25s+1)}$，要求校正后系统的相对谐振峰值 $M_r=1.4$，谐振频率 $\omega_r>10$ rad/s。试设计串联校正环节。

解 由近似公式有 $\gamma=\arcsin\dfrac{1}{M_r}=\arcsin\dfrac{1}{1.4}=45.6°$

将该系统近似视为二阶系统。则由

$$M_r=\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}},\quad \omega_c=\omega_r\frac{\sqrt{\sqrt{1+\zeta^4}-2\zeta^2}}{\sqrt{1-2\zeta^2}}$$

求得 $\zeta\approx0.39,\quad \omega_c=1.008\,4\omega_r=1.008\,4\times10\approx10.084$ rad/s

为满足 $\omega_r>10$ rad/s 的要求，并留有余地，取 $\omega_c=15$ rad/s。则有$\angle G(\mathrm{j}\omega_c)|_{\omega_c=15}=-202°$，$\gamma=-22°$，此时闭环系统不稳定。为了满足相角裕度要求，系统需采用串联超前校正，其传递函数为

$$G_c(s)=\frac{aTs+1}{Ts+1}\quad(a>1)$$

(1)串联超前校正环节应提供的最大超前相角 ϕ_m 为 $\phi_m=45.6°+22°\approx68°$。由 $\phi_m=\arcsin\dfrac{a-1}{a+1}$，解得 $a=26.4$，取 $a=27$。

(2)为使校正效果最好，令 $\omega_c=\omega_m=\dfrac{1}{\sqrt{a}T}$，解得 $T=0.013$，则满足设计指标的串联超前校正环节的传递函数为 $G_c(s)=\dfrac{0.342s+1}{0.013s+1}$

校正后系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{73(0.342s+1)}{s(0.05s+1)(0.25s+1)(0.013s+1)}$$

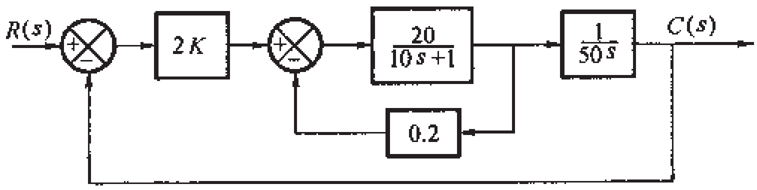
(3)验算。当 $\omega_c=15$ rad/s 时，校正后系统的相角裕度为 $\gamma=46°$，则校正后系统的相角裕度满足与 $M_r=1.4$ 对应的相角裕度要求值。这说明，选取的校正环节是合适的。

6－4 设有题 6－4 图所示控制系统。要求系统的相对谐据峰值 $M_r=1.3$，试确定前置放大器的增益 K，以及要求 $M_r=1.3$ 与开环增益 $K_v\geqslant4\ \mathrm{s}^{-1}$，试确定串联迟后校正参数。

解 (1)图中所示系统的开环传递函数为

$$G(s)=2K\times\frac{\dfrac{20}{10s+1}}{1+\dfrac{20}{10s+1}\times0.2}\times\frac{1}{50s}=\frac{K_v}{s(2s+1)}$$

其中 $K_v=4K/25$。给定系统的闭环传递函数为



题6-4图

$$\Phi(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{\frac{K_v}{2}}{s^2+0.5s+K_v/2}$$

与二阶系统传递函数的标准形式相对应,有

$$2\zeta\omega_n=0.5,\quad \omega_n^2=\frac{2K}{25}$$

由 $M_r=\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$,求得当 $M_r=1.3$ 时,阻尼比 $\zeta=0.45$。前置放大器的增益 $K=4.33$,$K_v=\frac{4K}{25}=0.693\ \mathrm{s^{-1}}$。

(2)串联迟后校正环节的传递函数为

$$G_c(s)=\frac{1+aTs}{1+Ts}\quad (a<1)$$

未校正系统的幅频特性为 $$|G(j\omega)|=\frac{0.693}{\omega_c\sqrt{1+(2\omega_c)^2}}$$

求得 $$\omega_c=0.493$$

为了保证$\angle G_c(j\omega_c)\geqslant -3°$,令 $1/aT=\frac{1}{25}\omega_c=0.2$ rad/s。根据开环增益 $K_v\geqslant 4\ \mathrm{s^{-1}}$的要求,即将 K_v 从原值0.693提高到要求值4,需提高5.77倍以上,则令$\frac{1}{a}=7$,因此求得 $T=350$ s。求得串联迟后校正环节的传递函数为 $$G_c(s)=\frac{1+50s}{1+350s}$$

该迟后校正环节在 $\omega_c=0.493$ rad/s 处的迟后相角为

$$\angle G_c(j\omega_c)=-\arctan 350\omega_c+\arctan 50\omega_c\big|_{\omega_c=0.493}=-2°$$

这说明,选取的校正环节是合适的。

6-5 设单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\frac{K}{s(0.04s+1)}$,要求系统响应匀速信号的稳态误差 $e_{ss}\leqslant 1\%$ 及相角裕度 $\gamma\geqslant 45°$,试确定串联迟后校正环节的传递函数。

解 (1)未校正系统的幅频特性和相频特性分别为

$$|G(j\omega)|=\frac{K}{\omega\sqrt{1+(0.04\omega)^2}}$$

$$\angle G(j\omega)=-90°-\arctan(0.04\omega)$$

当 $\gamma=50°(>45°)$时,即

$$\angle G(j\omega)=180°-90°-\arctan(0.04\omega)=50°$$

解得 $$\omega_c = 21\ \text{rad/s}$$

则给定系统的开环增益为

$$K = \omega_c \sqrt{1+(0.04\omega_c)^2} = 27.4\ \text{s}^{-1}$$

(2)根据系统响应匀速信号的稳态误差 $e_{ss} \leqslant 1\%$，有 $e_{ss} = \frac{1}{K} \leqslant 1\%$，即 $K \geqslant 100$。因此通过串联迟后校正需将开环增益 K 提高的倍数$\frac{1}{a}$为

$$\frac{1}{a} = \frac{100}{27.4} = 3.65$$

串联迟后校正环节的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{1+aTs}{1+Ts} \quad (a<1)$$

并选取 $$\frac{1}{T} = 2\ \text{rad/s} \approx \frac{1}{10}\omega_c$$

则 $T = 0.5$ s。串联迟后校正环节的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{0.5s+1}{1.83+1}$$

(3)验算。校正后系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{100}{s(0.04s+1)} \cdot \frac{0.5s+1}{1.83s+1}$$

则当剪切频率 $\omega_c = 21$ rad/s 时，校正后系统的相角裕度为

$$\gamma = 180° - 90° - \arctan(0.04\times21) - \arctan(1.83\times21) + \arctan(0.5\times21) = 60°$$

满足系统应具有相角裕度 $\gamma(\omega_c \geqslant 45°)$的要求。

6-6 已知某单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{Ke^{-0.005s}}{s(0.01s+1)(0.1s+1)}$，要求系统的相角裕度 $\gamma = 45°$及响应匀速信号 $r(t) = t$ 时的稳态误差$e_{ss} = 0.01$。试确定串联校正环节的传通函数。

解 (1)根据未校正系统的幅频特性和相频特性分别为

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\omega\sqrt{1+(0.01\omega)^2}\sqrt{1+(0.1\omega)^2}}$$

$$\angle G(j\omega) = -90° - \arctan(0.01\omega) - \arctan(0.1\omega) - 57.3\times0.005\omega$$

确定满足相角裕度 $\gamma(\omega_c) = 45°$时的剪切频率 ω_c 之值。

$$\gamma = 180° + \angle G_c(j\omega_c) = 180° - 90° - \arctan(0.01\omega_c) - \arctan(0.1\omega_c) - 57.3\times0.005\omega_c = 45°$$

求得 $$\omega_c = 8\ \text{rad/s}$$

则 $$|G(j\omega_c)| = \left.\frac{K}{\omega_c\sqrt{1+(0.01\omega_c)^2}\sqrt{1+(0.1\omega_c)^2}}\right|_{\omega_c=8} = 1$$

解得使给定系统在 $\omega_c = 8$ rad/s 处具有相角裕度 $\gamma(\omega_c) = 45°$的开环增益为 $K = 10.2\ \text{s}^{-1}$。

(2)根据系统响应匀速信号的稳态误差 $e_{ss} = 1\%$，校正后系统应具有的开环增益为 $K_1 = 100$。因此通过串联迟后校正需将开环增益 K 提高的倍数$\frac{1}{a}$为

$$\frac{1}{a} = \frac{100}{10.2} \approx 10$$

(3)串联迟后校正环节的传递函数为

$$G_{c1}(s)=\frac{aT_1s+1}{T_1s+1}\quad(a<1)$$

选取 $aT_1=1/6$ s,即 $1/aT_1=6$ rad/s,则串联迟后校正环节的传递函数为

$$G_{c1}(s)=\frac{\frac{1}{6}s+1}{\frac{1}{0.6}s+1}$$

并且

$$\angle G_c(\mathrm{j}8)=\arctan\left(\frac{1}{6}\times8\right)-\arctan\left(\frac{1}{0.6}\times8\right)=-33°$$

(4)可见迟后校正环节在剪切频率 $\omega_c=8$ rad/s 处引入 $-33°$迟后相角,为确保校正后系统在剪切频率 $\omega_c=8$ rad/s 处具有相角裕度 $\gamma(\omega_c)=45°$,必须进一步采用串联超前校正,使其在 ω_c 处提供一个超前相角,以补偿由串联迟后校正在该处所造成 $-33°$的相角迟后。

选取串联超前校正环节,其传递函数为

$$G_{c2}(s)=\frac{1+a_1T_2s}{1+T_2s}\quad(a_1>1)$$

选取 $a_1T_2=1/10$ s, $a_1=10$,则串联超前校正环节的传递函数为

$$G_{c2}(s)=\frac{\frac{1}{10}s+1}{\frac{1}{100}s+1}$$

则串联超前校正环节在 $\omega_c=8$ rad/s 处所能提供的超前相角为

$$\angle G_{c2}(\mathrm{j}8)=\arctan\left(\frac{1}{10}\times8\right)-\arctan\left(\frac{1}{100}\times8\right)=34°$$

从计算结果看出,选用的串联超前校正环节是合适的。

(5)验算。

校正后系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{100\mathrm{e}^{-0.005s}\left(\frac{1}{6}s+1\right)}{s(0.01s+1)^2\left(\frac{1}{0.6}s+1\right)}$$

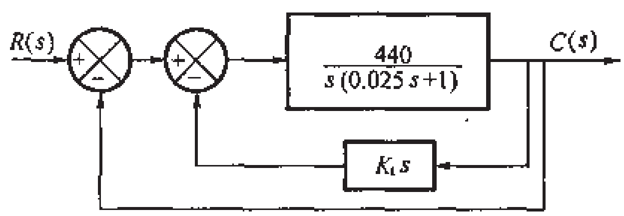
相角裕度

$$\gamma=180°-90°-2\arctan(0.01\times8)-\arctan\left(\frac{1}{0.6}\times8\right)-57.3\times0.005\times8=46°\quad(>45°)$$

可见选取的串联迟后—超前校正环节的传递函数是正确的,满足 $\gamma(\omega_c)=45°$及 $e_{ss}=0.01$ 的要求。

6-7　设某控制系统的方框图如题6-7图所示。欲通过反馈校正使系统相角裕度 $\gamma=50°$,试确定反馈校正参数 K_t。

解　由图得该系统的开环传递函数 $G(s)$为



题6-7图

$$G(s)=\frac{\dfrac{440}{s(0.025s+1)}}{1+\dfrac{440}{s(0.025s+1)}\times K_t s}=\frac{440}{0.025s^2+(1+440K_t)s}$$

则闭环传递函数 $\Phi(s)$ 为

$$\Phi(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{\dfrac{440}{0.025}}{s^2+\left(\dfrac{1+440K_t}{0.025}\right)s+\dfrac{440}{0.025}}$$

同二阶系统传递函数的标准形式比较，则有

$$2\zeta\omega_n=\frac{1+440K_t}{0.025},\quad \omega_n=\sqrt{\frac{440}{0.025}}=132.7\ \mathrm{rad/s}$$

对于二阶系统，系统的相角裕度 γ 与阻尼比 ζ 间的关系为

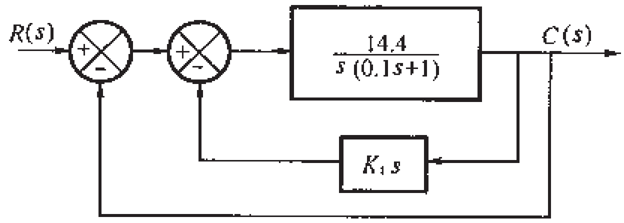
$$\gamma=\arctan\frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4}-2\zeta^2}}$$

当 $\gamma=50°$ 时，求得 $\zeta=0.48$，最后计算得

$$K_t=\frac{2\times0.48\times132.7\times0.025-1}{440}$$

$$=0.005$$

6－8 设某控制系统的方框图如题6－8图所示。要求采用速度反馈校正，使系统具有临界阻尼，即阻尼比 $\zeta=1$。试确定反馈校正参数 K_t。



题 6－8 图

解 由题 6－8 图得该系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{\dfrac{14.4}{s(0.1s+1)}}{1+\dfrac{14.4}{s(0.1s+1)}K_t s}=\frac{14.4}{0.1s^2+(1+14.4K_t)s}$$

则系统的闭环传递函数 $\Phi(s)$ 为

$$\Phi(s)=\frac{144}{s^2+10(1+14.4K_t)s+144}$$

同二阶系统传递函数的标准形式比较，则有

$$\omega_n=12\ \mathrm{rad/s},\quad 2\zeta\omega_n=10(1+14.4K_t)$$

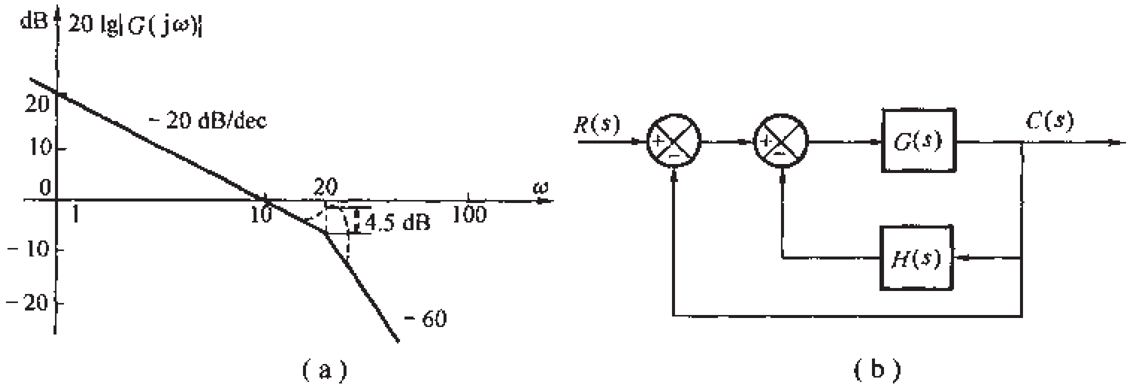
根据系统应具有临界阻尼的要求，即 $\zeta=1$，求得速度反馈校正参数 K_t 为

$$K_t=\frac{\dfrac{2\times1\times12}{10}-1}{14.4}=0.097$$

6－9 已知最小相位系统的开环渐近幅频特性如题 6－9 图(a)所示，题 6－9 图(b)为该系统的方框图。欲通过反馈校正消除开环幅频特性在转折频率 20 rad/s 处的谐振峰，试确定反馈校正的传递函数形式及参数值。

解 (1)由题 6－8 图(a)得该最小相位系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{10}{s\left[\left(\dfrac{1}{20}\right)^2s^2+2\zeta\left(\dfrac{1}{20}\right)s+1\right]}$$



题 6－9 图

并由 $20\lg\frac{1}{2\zeta}=4.5$ dB，解得 $\zeta=0.3$。则系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{10}{s\left[\left(\frac{1}{20}\right)^2 s^2+2\times0.3\times\frac{1}{20}s+1\right]}$$

(2)通过反馈校正消除图(a)所示开环幅频特性在转折频率 20 rad/s 处的谐振峰，意味着通过反馈校正应使振荡环节的阻尼比 $\zeta=0.5$，即将开环传递函数分母中的 s^2 项系数由 $2\times0.3\times\frac{1}{20}$提高到 $2\times0.5\times\frac{1}{20}$。因此取反馈通道的传递函数

$$H(s)=as^2$$

式中 a 为反馈系数。

(3)从图(b)求得反馈校正系统的开环传递函数为

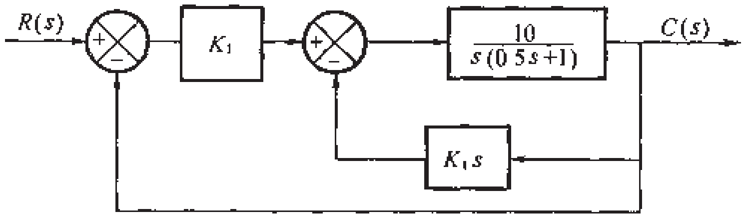
$$G(s)=\frac{10}{s\left[\left(\frac{1}{20}\right)^2 s^2+\left(2\times0.3\times\frac{1}{20}+10a\right)s+1\right]}$$

则

$$2\times0.3\times\frac{1}{20}+10a=2\times0.5\times\frac{1}{20}$$

解得反馈系数为 $a=0.002$。

6－10　已知某控制系统的方框图如题 6－10 图所示。欲使系统在测速反馈校正后满足如下要求：(1)开环增益 $K_v\geqslant5\ \mathrm{s}^{-1}$；(2)闭环系统阻尼比 $\zeta=0.5$；(3)调整时间 $t_s\leqslant2$ s ($\Delta=0.05$)。试确定前置放大器增益 K_1 及测速反馈系数 K_t(K_t 在 0～1 间选取)。



题 6－10 图

解　(1)由题 6－10 图得该系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{10K_1}{s(0.5s+1)+10K_1s}=\frac{20K_1}{s(s+2+20K_t)}$$

且
$$K_v=\lim_{s\to 0}sG(s)=\frac{10K_1}{1+10K_t}$$

根据题意,要求开环增益 $K_v\geqslant 5\ \mathrm{s}^{-1}$,即$\frac{10K_1}{1+10K_t}\geqslant 5\ \mathrm{s}^{-1}$,若取$\frac{10K_1}{1+10K_t}=5\ \mathrm{s}^{-1}$,则

$$2K_1=1+10K_t$$

(2)该系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{20K_1}{s^2+2(1+10K_t)s+20K_1}$$

同二阶系统传递函数的标准形式比较,则有

$$2\zeta\omega_n=2(1+10K_t),\quad \omega_n^2=20K_1$$

当 $\zeta=0.5$,得
$$\sqrt{5K_1}=1+10K_t$$

最后解得
$$K_1=1.25,\quad K_t=0.15$$

可见测速反馈系数 K_t 满足在 0~1 间取值的要求。

(3)验算

$$K_v=\frac{10\times 1.25}{1+10\times 0.15}=5\ \mathrm{s}^{-1},\quad t_s(\Delta=0.05)=\frac{4}{\zeta\omega_n}=\frac{4}{0.5\sqrt{20\times 1.25}}=1.6\ \mathrm{s}$$

从以上验算结果看出,参数 $K_1=1.25$ 及 $K_t=0.15$ 满足题意要求,因此选值是正确的。

6-11 设某单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\frac{K_v}{s(s+1)}$,要求开环增益 $K_v=12\ \mathrm{s}^{-1}$ 及相角裕度 $\gamma=40°$。试确定串联校正环节的传递函数。

解 满足开环增益 $K_v=12\ \mathrm{s}^{-1}$,则该系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{12}{s(s+1)}$$

计算得原系统的剪切频率和相角裕度分别为 $\omega_c=3.4$,$\gamma=16°$,则应采取串联超前校正,校正环节的传递函数为
$$G_c(s)=\frac{aTs+1}{Ts+1}\quad(a>1)$$

(1)串联超前校正环节应提供的最大超前相角$\phi_m=40°-16°+6°=30°$,由$\phi_m=\arcsin\frac{a-1}{a+1}$,解得 $a=3$。

(2)由 $20\lg|G(j\omega_m)|=-10\lg a$,解得 $\omega_m=4.5\ \mathrm{rad/s}$,令 $\omega_c=\omega_m=\frac{1}{\sqrt{a}T}$,解得 $T=0.128$。

则超前校正环节的传递函数为
$$G_c(s)=\frac{0.384s+1}{0.128s+1}$$

校正后系统的开环传递函数为
$$G(s)=\frac{12(0.384s+1)}{s(s+1)(0.128s+1)}$$

(3)验算

应用 MATLAB 中的 MARGIN 函数画出校正后系统的 Bode 图,得 $\omega_c=4.5$,$\gamma=43°$。表明选取的校正环节合适。

6-12 设某单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\frac{K_v}{s(0.5s+1)}$,要求系统响应匀速信

号 $r(t)=t$ 时的稳态误差 $e_{ss}=0.1$ 及闭环幅频特性的相对谐振峰值 $M_r \leqslant 1.5$，试确定串联校正环节的传递函数。

解 根据系统响应匀速信号 $r(t)=t$ 时的稳态误差的要求 $e_{ss}=0.1$，$K_v=10$，计算得原系统的剪切频率和相角裕度分别为 $\omega_c=4.26$，$\gamma=25°$。当 $M_r \leqslant 1.5$，$\gamma \approx \arcsin\dfrac{1}{M_r}$，则 $\gamma \geqslant 41.8°$。则应采取串联超前校正，校正环节的传递函数为 $G_c(s)=\dfrac{aTs+1}{Ts+1}(a>1)$。思路同上题，大致步骤如下。

(1) $\phi_m=41.8°-25°+5°=21.8°$，解得 $a=2.17$，取 $a=3$，解得 $\omega_m=5.7$ rad/s，令 $\omega_c=\omega_m=\dfrac{1}{\sqrt{a}T}$，解得 $T=0.1$，则超前校正环节的传递函数为 $G_c(s)=\dfrac{0.3s+1}{0.1s+1}$，校正后系统的开环传递函数为

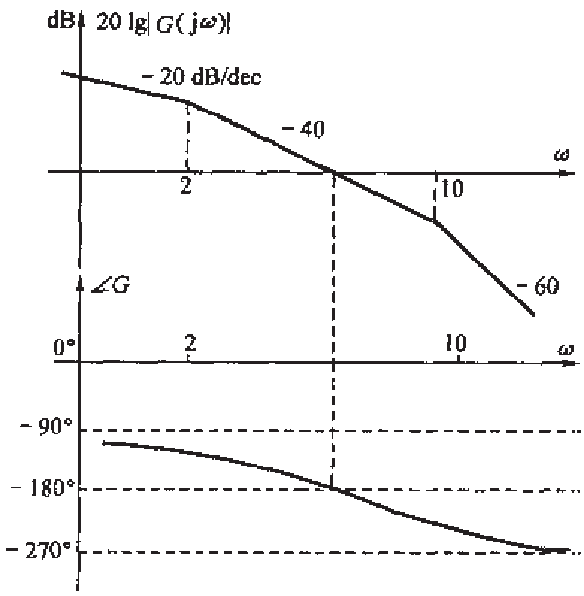
$$G(s)=\frac{10(0.3s+1)}{s(0.5s+1)(0.1s+1)}$$

(2) 验算

应用 MATLAB 中的 MARGIN 函数画出校正后系统的 Bode 图，$\omega_c=5.7$，$\gamma=49°$。满足性能指标要求。

6－13 设某单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{10}{s(0.1s+1)(0.5s+1)}$，试绘出系统开环频率响应的 Bode 图，并求出其相角裕度及幅值裕度。当采用传递函数为 $G_c(s)=\dfrac{0.23s+1}{0.023s+1}$ 的串联校正环节时，试计算校正系统的相角裕度及幅值裕度，并讨论校正系统的性能有何改进。

解 原系统 Bode 图如题6－13解图所示，原系统相角裕度 $\gamma=3.9°$ 及幅值裕度 $20\lg K_g=1.58$ dB；校正系统的相角裕度 $\gamma=37.6°$ 及幅值裕度 $20\lg K_g=18$ dB。应用串联超前校正，系统的相角裕度变大，系统的动态性能得到改善。



题6－13解图

6－14 设某单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{4}{s(2s+1)}$，设计一串联迟后校正环节，使校正系统的相角裕度 $\gamma \geqslant 40°$，并保持原有的开环增益值。

解 (1) 未校正系统的幅频特性和相频特性分别为

$$|G(j\omega)|=\frac{4}{\omega\sqrt{1+4\omega^2}},\quad \angle G(j\omega)=-90°-\arctan(2\omega)$$

当 $\gamma=45°(>40°)$ 时，即 $\gamma=180°-90°-\arctan(2\omega_c)=45°$

解得

$$\omega_c=0.5\ \text{rad/s}$$

则保证系统的相角裕度 $\gamma=45°(>40°)$ 的开环增益为 $K=0.707\ \text{s}^{-1}$。

(2)保持开环增益 $K=4\ \mathrm{s}^{-1}$不变,因此通过串联迟后校正,需将开环增益 K 提高的倍数$\frac{1}{a}$为

$$\frac{1}{a}=\frac{4}{0.707}=5.656$$

串联迟后校正环节的传递函数为

$$G_c(s)=\frac{1+aTs}{1+Ts}\quad (a<1)$$

并选取
$$\frac{1}{aT}=0.05\ \mathrm{rad/s}=\frac{1}{10}\omega_c$$

则 $T=113$ s。串联迟后校正环节的传递函数为

$$G_c(s)=\frac{20s+1}{113s+1}$$

(3)验算。校正后系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{4}{s(2s+1)}\cdot\frac{20s+1}{113s+1}$$

应用 MATLAB 中的 MARGIN 函数画出校正后系统的 Bode 图,$\omega_c=0.5$,$\gamma=40.2°>40°$,满足性能指标要求。

6-15　设某单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{K_v}{s\left(\frac{1}{4}s+1\right)(s+1)}$。

要求:(1)系统开环增益 $K_v\geqslant 5\ \mathrm{s}^{-1}$;(2)系统阻尼比 $\zeta=0.5$;(3)单位阶跃响应调整时间 $t_s=2.5$ s。试确定串联校正环节的传递函数。

解　(1)根据给定时域倍标确定闭环主导极点位置。

由 $t_s\approx\dfrac{4}{\zeta\omega_n}(\Delta=0.02)$,求得 $\omega_n=3.2$。则闭环主导极点

$$s_{1,2}=-\zeta\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}=-1.6\pm j2.77$$
$$|s_1|=|s_2|=\omega_n=3.2$$

(2)确定串联超前校正参数 T 和 a。

将开环传递函数变换为 $G(s)=\dfrac{4K}{s(s+4)(s+1)}=\dfrac{k}{s(s+4)(s+1)}$(令 $k=4K$)

根据系统开环增益 $K=5\ \mathrm{s}^{-1}$的要求,得

$$k=4\times5=20$$

且
$$M=\frac{|s_1|\cdot|s_1-p_2|\cdot|s_1-p_3|}{1}=33.24$$

$$\phi=180°+\angle s_1+\angle s_1+\angle(s_1-p_2)+\angle(s_1-p_3)=180°+120°+102.22°+41.63°=83.85°$$

由于要求的超前补偿相角 $\phi<90°$,所以采用带惯性的 *PD* 控制器实现串联超前校正是可行的,由 k,M 及 ϕ 求得

$$\cot\alpha=\frac{33.24}{20}\csc83.85°-\cot83.85°$$

得
$$\alpha=32.62°$$

由 $\zeta=0.5$,求得

$$\delta = 60°,\quad \theta = 180° - \alpha - \delta = 87.38°$$

则
$$|z_c| = \omega_n \frac{\sin\alpha}{\sin\theta} = 1.73,\quad |p_c| = \omega_n \frac{\sin(\phi + \alpha)}{\sin(\theta - \phi)} = 46.52$$

进而求得串联超前校正参数为

$$T = \frac{1}{|p_c|} = 0.021\,5,\quad a = \frac{|p_c|}{|z_c|} = 26.89$$

带惯性的 *PD* 控制器的传递函数为

$$G_c(s) = 26.89\,\frac{s + 1.73}{s + 46.52}$$

(3)验算。经初步设计得到校正系统开环传函为

$$G_s = \frac{20 \times 26.89}{s(s+4)(s+1)} \times \frac{s + 1.73}{s + 46.52}$$

初步选定的闭环主导极点 $s_{1,2} = -1.6 \pm \mathrm{j}2.77$,根据单位反馈系统的闭环传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{20 \times 26.89(s + 1.73)}{(s + 1.6 + \mathrm{j}2.77)(s + 1.6 - \mathrm{j}2.77)(s - s_3)(s - s_4)}$$

由 $C(0)/R(0) = 1$,得

$$s_3 s_4 = 90.86$$

又由

$$\begin{aligned}&(s + 1.6 + \mathrm{j}2.77)(s + 1.6 - \mathrm{j}2.77)(s - s_3)(s - s_4)\\ &= s(s+4)(s+1)(s+46.52)20 \times 26.89 \times (s + 1.73)\end{aligned}$$

解得
$$s_3 + s_4 = -48.32$$

则闭环极点
$$s_3 = -1.96,\quad s_4 = -46.36$$

其中闭环极点 $s_3 = -1.96$,可近似认为被闭环零点 $z_c = -1.73$ 完全补偿,闭环极点 $s_4 = -46.36 \approx 29\mathrm{Re}(s_1)$,距离轴甚远,所以选定 $s_{1,2} = -1.6 \pm \mathrm{j}2.77$ 作为闭环主导极点是合适的,因此,以$a = 26.89$和$T = 0.021\,5$ s作为串联超前校正参数能满足对给定系统提出的各项性能指标。

6-16　设某单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \dfrac{K_v}{s(0.5s+1)(s+1)}$,要求系统的开环增益 $K_v \geqslant 5\ \mathrm{s}^{-1}$及相角裕度 $\gamma \geqslant 38°$,试确定串联迟后校正环节的传递函数。

解　思路同上题,大致步骤如下。

(1)$G(\mathrm{j}\omega) = \dfrac{K_v}{\omega\sqrt{1 + (0.5\omega)^2}\sqrt{1 + \omega^2}}$,$\angle G(\mathrm{j}\omega) = -90° - \arctan 0.5\omega - \arctan\omega$,当 $\gamma = 40°$($>38°$)时,解得 $\omega_c = 0.63$ rad/s,保证系统的相角裕度 $\gamma = 40°(>38°)$的开环增益为 $K = 0.78\ \mathrm{s}^{-1}$。

(2)要求系统的开环增益 $K_v \geqslant 5\ \mathrm{s}^{-1}$,因此通过串联迟后校正需将开环增益 K 提高的倍数$\dfrac{1}{a}$为$\dfrac{1}{a} = \dfrac{5}{0.78} = 6.4$,取$\dfrac{1}{a} = 7$。串联迟后校正环节的传递函数为 $G_c(s) = \dfrac{1 + aTs}{1 + Ts}(a < 1)$并选取$\dfrac{1}{aT} = 0.063\ \mathrm{rad/s} = \dfrac{1}{10}\omega_c$,则 $T = 111.09$ s。串联迟后校正环节的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{15.87s + 1}{111.09\,s + 1}$$

(3)验算。校正后系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{5}{s(0.5s+1)(s+1)}\cdot\frac{15.87s+1}{111.09s+1}$$

应用 MATLAB 中的 MARGIN 函数画出校正后系统的 Bode 图，$\omega_c=0.878$，$\gamma=46.25^\circ>38^\circ$，满足性能指标要求。

6-17 设某单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K_v}{s(0.1s+1)(0.2s+1)}$$

要求：(1)系统开环增益 $K_v=30\ s^{-1}$；(2)系统相角裕度 $\gamma\geqslant45^\circ$；(3)系统截止频率 $\omega_b=12$ rad/s。试确定串联迟后—超前校正环节的传递函数。

解 (1)未校正系统的幅频特性和相频特性分别为

$$|G(j\omega)|=\frac{K_v}{\omega\sqrt{1+0.01\omega^2}\sqrt{1+0.04\omega^2}}$$

$$\angle G(j\omega)=-90^\circ-\arctan(0.1\omega)-\arctan0.2\omega_c$$

保证系统的相角裕度 $\gamma=45^\circ$，则由 $\gamma=180^\circ-90^\circ-\arctan0.1\omega_c-\arctan0.2\omega_c=45^\circ$，得 $\omega_c=2.807$ rad/s。则保证系统的相角裕度 $\gamma=45^\circ$的开环增益为 $K=3.342\ s^{-1}$。

(2)要求系统的开环增益 $K_v=30\ s^{-1}$，因此通过串联迟后校正需将开环增益 K 提高的倍数 $\beta=\frac{30}{3.342}=8.97$，取 $\beta=9$。串联迟后校正环节的传递函数为 $G_c(s)=\frac{1+Ts}{1+\beta Ts}(\beta>1)$。并选取 $\frac{1}{T}=1$ rad/s，则串联迟后校正环节的传递函数为 $G_{c1}(s)=\frac{s+1}{9s+1}$。

(3) $G_{c1}(j\omega_c)\approx-18^\circ$，则需串联超前校正环节提供的最大相角为 $\phi_m=18^\circ+5^\circ=23^\circ$，解得 $a=3$。串联超前校正环节的传递函数为 $G_{c2}(s)=\frac{1+aT_1s}{1+T_1s}(a>1)$，并选取$\frac{1}{aT_1}=4$ rad/s，则串联超前校正环节的传递函数为 $G_{c2}(s)=\frac{\frac{1}{4}s+1}{\frac{1}{12}s+1}$。

(4)验算。校正后系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{30(s+1)\left(\frac{1}{4}s+1\right)}{s(0.1s+1)(0.2s+1)(9s+1)\left(\frac{1}{12}s+1\right)}$$

应用 MATLAB 中的 MARGIN 函数画出校正后系统的 Bode 图，$\omega_c=3.4$，$\gamma=46.89^\circ$，$\omega_b=13$ rad/s。满足性能指标要求。

6-18 设某单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\frac{K_v}{s(0.1s+1)(0.2s+1)}$。要求：(1)系统响应匀速信号 $r(t)=t$ 时的稳态误差 $e_{ss}=0.01$；(2)系统的相角裕度 $\gamma\geqslant40^\circ$。试设计一个串联迟后—超前校正环节。

解 思路同上题，大致步骤如下。

(1) $\gamma=45^\circ\geqslant40^\circ$，得 $\omega_c=2.807$ rad/s，$K_v=3.342\ s^{-1}$。

(2) $e_{ss}=0.01$，$K_v=100\ s^{-1}$，$\beta=\frac{100}{3.342}\approx30$。$G_c(s)=\frac{1+Ts}{1+\beta Ts}(\beta>1)$，并选取$\frac{1}{T}=1$ rad/s，则

$G_{c1}(s)=\dfrac{s+1}{30s+1}$。

(3) $G_{c1}(j\omega_c)\approx-19°$，则 $\phi_m=19°+5°=24°$，得 $a=2.34$，取 $a=3$。$G_{c2}(s)=\dfrac{1+aT_1s}{1+T_1s}$，并选取 $\dfrac{1}{aT_1}=4$ rad/s，则串联迟后—超前环节的传递函数为 $G_{c2}(s)=\dfrac{\frac{1}{4}s+1}{\frac{1}{12}s+1}$。

(4)验算。校正后系统的开环传递函数为

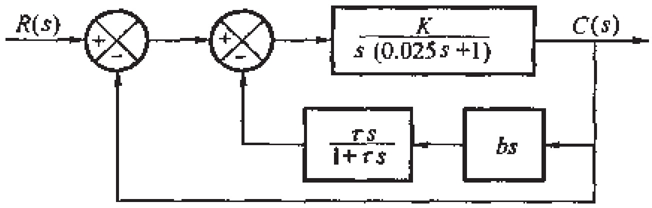
$$G(s)=\frac{100(s+1)\left(\frac{1}{4}s+1\right)}{s(0.1s+1)(0.2s+1)(30s+1)\left(\frac{1}{12}s+1\right)}$$

应用 MATLAB 中的 MARGIN 函数画出校正后系统的 Bode 图，$\omega_c=3.43$，$\gamma=45.64°$。满足性能指标要求。

5-52 6－19 已知某控制系统的方框图如题 6－19 图所示。要求：

(1)系统响应匀速输入 $\Omega_i=110$ rad/s 时的稳态误差 $e_{ss}=0.25$ rad；

(2)系统相角裕度 $\gamma\approx55°$。试确定反馈校正参数 τ 和 b。



题 6－19 图

解　校正系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{K(\tau s+1)}{s(T'+1)(T''+1)}$，其中 $T'=0.025\dfrac{\tau}{T''}$，$T''=0.025+(1+Kb)\tau-T'$。

(1)校正前后系统的开环增益不变，由 $e_{ss}=\dfrac{110}{K}=0.25$，得 $K=440$。应用 MATLAB 中的 MARGIN 函数绘制待校正系统的 Bode 图，得 $\omega_c=135$ rad/s，$\gamma=16.5°$。

(2)选择纯测速校正参数，提高系统的相角裕度。令 $\dfrac{\tau}{T''}=0.1$，则 $T'=0.002\,5$。此时，不计等效串联迟后校正的情况下，开环传递函数 $G_1(s)=\dfrac{K}{s(T'_s+1)}=\dfrac{440}{s(0.002\,5s+1)}$。仿真结果得 $\omega'_c=420$ rad/s，$\gamma'=43.6°<55°$。

(3)加入等效串联迟后校正，减小系统带宽，进一步提高系统的相角裕度。令 $\tau=0.1$ s，则 $T''=1$ s，校正系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{440(0.1s+1)}{s(0.002\,5s+1)(s+1)}$。仿真结果得 $\omega''_c=42$ rad/s，$\gamma'=72°>55°$，不符合要求。则通过试探，令 $\tau=0.033$ s，则 $T''=0.33$ s，$b=0.019$ s。校正系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{440(0.033\,s+1)}{s(0.002\,5\,s+1)(0.33\,s+1)}$。应用 MATLAB 中的 MARGIN 函数画出校正后系统的 Bode 图，得 $\omega''_c=50.7$ rad/s，$\gamma'=55.3°$，满足性能指标要求。

同步训练题

1.设单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{100K}{s(0.04s+1)}$，若要求系统对单位斜坡输入

信号的稳态误差 $e_{ss} \leqslant 1\%$，相角裕度 $\gamma \geqslant 40°$，试确定系统的串联校正网络。

2.设某系统的开环传递函数为 $G(s)=\frac{K}{s(0.1s+1)(0.05s+1)}$，试设计串联校正使系统满足：(1)速度误差系数 $K_v \geqslant 30$；(2)相角稳定裕度 $\gamma \geqslant 30°$。

3.已知单位反馈系统开环传递函数 $G(s)=\frac{K}{s(0.05\ s+1)(0.2\ s+1)}$，设计串联超前校正网络使系统 $K_v \geqslant 10$ rad/s，超调量不大于 25%，调节时间不大于1 s。

4.二阶系统传递函数为 $G(s)=\frac{K\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$，现欲加负反馈 $H(s)$来提高阻尼比，使阻尼比为 ζ''，并保证总放大系数 K 和固有频率不变，试确定 $H(s)$。

5.一单位负反馈最小相位系统开环相频特性表达式为 $\varphi(\omega)=-90°-\arctan\frac{\omega}{2}-\arctan\omega$。(1)求相角裕度为45°时系统的开环传递函数；(2)在不改变截止频率 ω_c 的前提下，试选取参数 K_c 与 T，使系统在加入串联校正环节后，系统的相角裕度提高到60°。

6.设单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\frac{8}{s(2s+1)}$，若采用迟后—超前校正装置 $G_c(s)=\frac{(10s+1)(2s+1)}{(100s+1)(0.02s+1)}$ 对系统进行串联校正，试绘制系统校正前后的对数幅频渐近特性，并计算系统校正前后的相角裕度。

7.设单位反馈系统的开环传递函数 $G(s)=\frac{K}{s(0.1s+1)(0.01s+1)}$，试设计串联校正装置，使系统期望特性满足下列指标：(1)静态速度误差系数 $K_v \geqslant 250\ s^{-1}$；(2)截止频率 $\omega_c \geqslant 30$ rad/s；(3)相角裕度 $\gamma(\omega_c) \geqslant 45°$。

8.设单位反馈系统开环传递函数为 $G(s)G_0(s)=\frac{K}{s(1+0.12s)(1+0.02s)}$，试设计串联校正装置，使系统满足 $K_v \geqslant 70$，$t_s \leqslant 1$，$\sigma\% \leqslant 40\%$。

9.设单位反馈系统开环传递函数为 $G(s)=\frac{K}{s(0.05s+1)(0.2s+1)}$，试设计串联超前校正装置，使系统得静态速度误差系数小于5，超调量不大于25%，调节时间不大于1。

10.设单位反馈系统开环传递函数为 $G(s)=\frac{K}{s(0.05s+1)(0.25s+1)(0.1s+1)}$，若要求校正后系统的开环增益不小于12，超调量小于30%，调节时间小于3，试确定串联迟后校正装置的传递函数。

11.设单位反馈系统开环传递函数为 $G(s)=\frac{K}{s(s+4)(s+5)}$，若要求校正后系统的 $K_v=30$，$\zeta=0.707$，并保证原主导极点位置基本不变，试确定串联校正装置。

同步训练题答案

1.解 根据稳态误差要求，$K \geqslant 1$，原系统 $\omega_c=50$ rad/s，$\gamma=26.6°$，引入超前校正 $G_c(s)=\frac{aTs+1}{Ts+1}\quad(a>1)$，$a=2.43$，$T=0.01$ s，校正后系统 $\gamma=48.22°$，校正后系统的开环传递函数

$$G(s)G_c(s)=\frac{100(0.024s+1)}{s(0.04s+1)(0.01s+1)}$$

2.解 $K_v \geqslant 30, K=30$,原系统 $\omega_c=17.3$ rad/s, $\gamma=-10.8^\circ<30^\circ$,选用迟后校正,校正环节函数 $G_c(s)=\dfrac{aTs+1}{Ts+1}\quad(a<1)$,则令 $\gamma=30^\circ+6^\circ=36^\circ$,解得 $\omega_c'=7$ rad/s, $a=0.043$,由 $\dfrac{1}{aT}=0.1\omega_c'$,求得 $T=33$。校正环节传递函数 $G_c(s)=\dfrac{1.43s+1}{33s+1}$,验算 $\gamma''>30^\circ$,满足要求。

3.解 要求 $\sigma\%\leqslant 25\%$, $M_r=1.225$, $t_s\leqslant 1$ s, $\omega_c'=7.74$, $\gamma'=54.7^\circ$。原系统 $\omega_c=7.07$, $\gamma=15.8^\circ$,采用超前校正, $G_c(s)=\dfrac{aTs+1}{Ts+1}\quad(a>1)$, $a=9$, $T=0.027$,所以 $G_c(s)=\dfrac{0.245s+1}{0.027s+1}$,验算满足要求。

4.解 $H(s)=\dfrac{2(\zeta''-\zeta)s}{K\omega_n}$

5.解 (1)开环传递函数为 $\quad G_o(s)=\dfrac{0.56}{s\left(\dfrac{s}{2}+1\right)(s+1)}$

(2) $T=1.74, K_c=0.821$。

6.解 校正前 $\quad G(s)=\dfrac{8}{s(2s+1)}=\dfrac{8}{s\left(\dfrac{s}{0.5}+1\right)}, \omega_c=2$

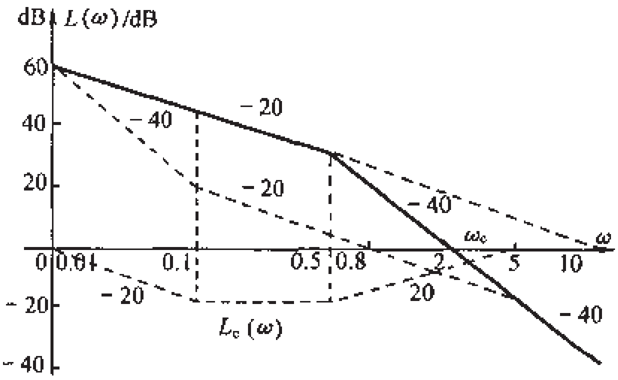
$$\gamma=180^\circ+\angle G(j\omega_c)=180^\circ-90^\circ-\arctan\frac{2}{0.5}=14^\circ$$

做出校正前对数幅频特性,如题6解图中的实线所示。

校正后

$$G_c(s)=\frac{(10s+1)(2s+1)}{(100s+1)(0.2s+1)}=\frac{\left(\dfrac{s}{0.1}+1\right)\left(\dfrac{s}{0.5}+1\right)}{\left(\dfrac{s}{0.01}+1\right)\left(\dfrac{s}{5}+1\right)}$$

$$G'(s)=G_c(s)G(s)=\frac{8\left(\dfrac{s}{0.1}+1\right)}{s\left(\dfrac{s}{0.01}+1\right)\left(\dfrac{s}{5}+1\right)}$$



题6解图

做出校正后对数幅频特性,如解图中的虚线 $L'(\omega)$ 所示。由图 $\omega_c'=0.8$ 有

$$\gamma'=180^\circ+\arctan\frac{0.8}{0.1}-90^\circ-\arctan\frac{0.8}{0.01}-\arctan\frac{0.8}{5}=74.5^\circ$$

7.解 选择迟后—超前校正

$$G_c(s)=\frac{\left(\dfrac{s}{3}+1\right)\left(\dfrac{s}{10}+1\right)}{\left(\dfrac{s}{0.36}+1\right)\left(\dfrac{s}{90}+1\right)}$$

校正后系统的开环传递函数

$$G'(s)=\frac{250\left(\frac{s}{3}+1\right)}{s\left(\frac{s}{0.36}+1\right)\left(\frac{s}{90}+1\right)\left(\frac{s}{100}+1\right)}$$

验算，$\gamma'>45°$满足要求。

8.解　校正装置 $G_c(s)=\frac{(1+0.25s)(1+0.12s)}{(1+1.34s)(1+0.022s)}$。

9. 解　$G_c(s)=\frac{0.2s+1}{0.044s+1}$，$a=4.5$。

10.解　$G_c(s)=\frac{3.3s+1}{20.4s+1}$。

11.解　$G_c(s)=\frac{1}{27.8}\times\frac{431s+1}{15.5s+1}$。