# 高等代数(实验班)期中考试

120分钟, 40分

## 1.(10分)

对于下面五种方式给出的子集 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, 依次回答：是否存在 $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, 使得

$$T\left(\Omega + \left(\frac{1}{5}, 0\right)\right) = \Omega + \left(\frac{2}{5}, 0\right)?$$

(1) $\Omega = \mathbb{Z} \times \{1\}$;
(2) $\Omega = (\mathbb{Z} \times \{1\}) \cup (\{1\} \times \mathbb{Z})$;
(3) $\Omega = (\mathbb{R} \times \{1\}) \cup (\{1\} \times \mathbb{R})$;
(4) $\Omega = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;
(5) $\Omega = (\mathbb{Z} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$.

## 2.(12分)

设 $F$ 为任意域, $n \geqslant 2$, $V$ 为 $n$ 维 $F-$线性空间, $T \in \mathcal{L}(V)$. 假设存在 $\alpha \in V$ 使得 $T^{n-1}\alpha \neq 0$ 且 $T^n\alpha = 0$.
(1) 证明 $V = \mathrm{Span}\{\alpha, T\alpha, \cdots, T^{n-1}\alpha\}$;
(2) 证明 $\mathrm{Ker}(T^{n-1}) = \mathrm{Im}T$.

## 3.(12分)

求使得如下断言成立的所有 $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$: 对矩阵 $A, B \in \mathbb{C}^{4\times 4}$, 若 $\mathrm{rank}(AB) + \mathrm{rank}(BA) = 2r$, 则必有 $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B) = r$.

## 4.(6分)

设 $p$ 为素数, $n \geqslant 2$. 考虑有限域 $\mathbb{F}_p$ 上的线性空间 $\mathbb{F}_p^{n\times 1}$ 的标准基 $\mathcal{E} = \{e_1, \cdots, e_n\}$. 记 $S = \{A \in \mathbb{F}_p^{n\times 1} : L_A(\mathcal{E}) = \mathcal{E}\}$. 求 $\mathrm{dimSpan}(S)$.