1.

考虑分式线性变换 $f(z)=(1+z)/z$.
(1) 写出 f 在实坐标下的坐标表达式.
(2) 写出 f 的迭代的表达式.
解：(1)

$$f(x+iy)=1+\frac{1}{x+iy}=1+\frac{x-iy}{x^2+y^2}\implies f(x,y)=\left(1+\frac{x}{x^2+y^2},-\frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

(2) f 对应的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$, A 的特征值为 $\lambda_1=(1+\sqrt{5})/2,\lambda_2=(1-\sqrt{5})/2$, 对应的特征向量为 $(\lambda_1,1),(\lambda_2,1)$. 故 $\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1&\lambda_2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1&\\&\lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1&\lambda_2\\1&1\end{pmatrix}^{-1}$. 即

$$\begin{aligned}A^n&=\begin{pmatrix}\lambda_1&\lambda_2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1^n&\\&\lambda_2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1&\lambda_2\\1&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\lambda_1^{n+1}&\lambda_2^{n+1}\\\lambda_1^n&\lambda_2^n\end{pmatrix}\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\begin{pmatrix}1&-\lambda_2\\-1&\lambda_1\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\begin{pmatrix}\lambda_1^{n+1}-\lambda_2^{n+1}&\lambda_1^n-\lambda_2^n\\\lambda_1^n-\lambda_2^n&\lambda_1^{n-1}-\lambda_2^{n-1}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

故

$$f^{(n)}(z)=\frac{(\lambda_1^{n+1}-\lambda_2^{n+1})z+(\lambda_1^n-\lambda_2^n)}{(\lambda_1^n-\lambda_2^n)z+(\lambda_1^{n-1}-\lambda_2^{n-1})}.$$

(事实上, 可以写成 $f^{(n)}(z)=\frac{F_{n+1}z+F_n}{F_nz+F_{n-1}}$ 其中 F_n 是斐波那契数列.)

2.

求证：除恒同外，分式线性变换在扩充复平面上总是只有一个或两个不动点.
证明：若 $f:\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}}$ 有三个不动点 z_1,z_2,z_3, 考虑分式线性变换 $\varphi:\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}}$ 使得 $(z_1,z_2,z_3)\mapsto(0,1,\infty)$, 则 $g=\varphi f\varphi^{-1}$ 有三个不动点 $0,1,\infty$. 设 $g(z)=\frac{az+b}{cz+d}$, 则 $g(0)=0\implies\frac{b}{d}=0$, $g(1)=1\implies a+c=b+d$, $g(\infty)=\infty\implies\frac{a}{c}=\infty$. 故 $g(z)=z$. 即 g 是恒同, 故 $f=\varphi^{-1}g\varphi$ 也是恒同.
而方程 $az+b=z(cz+d)$ 总是有解的，所以至少一个不动点.

3.

平面上给定不相似的两个三角形（作为顶点与边的并集）， 是否存在一个 Möbius 变换把一个变为另一个?
证明：不存在：Möbius变换将圆变为圆, 故其将三条边分别映到对应三条边. 由于 Möbius 变换保角, 两个三角形对应的三对角应当相等, 但它们不相似, 得到矛盾.

4.

考虑所有这样的 $\hat{\mathbb{C}}$ 上的 Möbius 变换: 它保持圆心在 0, 半径为 1 的圆不变, 且 0 是不动点. 决定所有这样的变换.
解：若 f 满足条件, 设 $f(1)=e^{i\theta}$, 考虑 $g:\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}}, z\mapsto ze^{-i\theta}$, 则$F=g\circ f$ 同样满足条件, 且 $F(1)=1$. 注意到 F 将正交的两圆 $B(0,1)$ 与 $\mathrm{Im}z=0$ 变为正交的两圆 $B(0,1)$ 与过 $0,1,F(-1)$ 的圆. 故 $F(-1)=-1$, 即 $F(z)=z$ (若 F 是FLT) 或 $F(z)=\bar{z}$ (若 F 是CFLT) (或者可用Schwartz Reflection Principle直接得到 $F(\infty)=\infty$)
故所有这样的变换是旋转 $z\mapsto ze^{i\theta}$ 与 $z\mapsto\bar{z}e^{i\theta}$.

5.

考虑所有这样的 $\hat{\mathbb{C}}$ 上的 Möbius 变换: 它保持圆心在2，半径为2的圆不变, 但把2映射到1. 求证：1的所有可能的像都落在同一个圆上.

证明：考虑任意这样的 f. 取反演 φ_1 以 0 为中心, 并将 1 映到 2, 反演 φ_2 以 2 为中心, 将 $\frac{1}{2}$ 映到 -2, 反演 φ_3 以 0 为中心保持 2 不变. 则 $g = \varphi_3\varphi_2\varphi_1 f$ 将 $B(2,2)$ 变为 $B(0,2)$ 且 2 变为 0. 由题4可知 g 是平移复合旋转，或再复合共轭. 故 $g(1)$ 在 $B(0,1)$ 上, 即 $f(1)$ 在以 2, $\frac{2}{5}$ 为直径的圆上.

6.

把题1中的 $f(z)$ 写成尽可能少的反演的复合.

解：$f(z) = \frac{1+z}{z}$ 是保向Möbius变换, 所以至少要两个反演.

若 $f = \varphi\psi$ 是两个反演的复合, 则设 $\varphi(z) = w_1 + \frac{r_1^2}{\overline{z-w_1}}, \psi(z) = w_2 + \frac{r_2^2}{\overline{z-w_2}}$,

$$\varphi\psi(z) = w_1 + \frac{r_1^2}{\overline{w_2 - w_1} + r_2^2/(z-w_2)} = w_1 + \frac{r_1^2(z-w_2)}{\overline{w_2-w_1}(z-w_2) + r_2^2}.$$

故 $r_2^2 = |w_2|^2 - w_2\overline{w_1} \in \mathbb{R}$, 即 $w_1 = \lambda w_2, r_2^2 = (1-\lambda)|w_2|^2$ 且 $\lambda < 1$.

$$\frac{1+z}{z} = \lambda w_2 + \frac{r_1^2(z-w_2)}{(1-\lambda)\overline{w_2}z} = \frac{r_1^2 z - r_2^2 w_2 + (1-\lambda)\lambda|w_2|^2 z}{(1-\lambda)\overline{w_2}z},$$

即 $r_1^2 - (1-\lambda)\lambda|w_2|^2 = -r_2^2 w_2 = (1-\lambda)\overline{w_2}$. 故 $w_2 \in \mathbb{R}$, 但 $w_2 \neq 0$ 且 $-r_2^2 < 0 < 1-\lambda$ 矛盾.

而 $z \mapsto \frac{1}{z}$, $z \mapsto z+1$ 都是两个反演的复合, 故 f 是四个反演的复合.