2025/9/24

作业三：【尤】**3.2**：3（圆锥面参见活页2）、11；**3.3**：1（1）（3）（7）（圆锥曲线要求写出的标准型和选取的转轴角）、3（1）、7。回收日期：**10/09/四**

3.2.3

试说明用不经过锥顶的平面来截圆锥面，截线为椭圆、抛物线或双曲线.

证：不妨设圆锥为 $z^2 = x^2 + y^2$, 平面为 $z = mx + k, m \geqslant 0, k \neq 0$. 则截线在 xy 平面上的投影为 $(m^2 - 1)x^2 - y^2 + 2mkx + k^2 = 0$, 是一个椭圆、抛物线或双曲线，故原截线也是椭圆、抛物线或双曲线.

3.2.11

试写出一条二次曲线的方程，使得它经过两条二次曲线 $x^2 - 2y^2 + xy + 6x - 1 = 0$ 和 $2x^2 - y^2 - x - y = 0$ 的所有交点，还经过点 $(2, -2)$.

解：$(x, y) = (2, -2)$ 时, $\lambda(x^2 - 2y^2 + xy + 6x - 1) + (1 - \lambda)(2x^2 - y^2 - x - y) = 0$ 解得 $\lambda = 4$ 即二次曲线为 $2x^2 + 5y^2 - 4xy - 27x - 3y + 4 = 0$.

3.3.1

用不变量判别下列二次曲线的类型：

(1) $8x^2 + 6xy - 26x - 12y + 13 = 0$.

$I_1 = 8, I_2 = -9, I_3 = 63$ 是双曲线. 标准型 $9x^2 - y^2 = 7$, 旋转角 $\theta = \frac{1}{2}\arctan\frac{3}{4}$.

(3) $3x^2 + 6xy + 4y^2 + 6x - 4y + 12 = 0$.

$I_1 = 7, I_2 = 3, I_3 = -48$ 是椭圆. 标准型 $(7 + \sqrt{37})x^2 + (7 - \sqrt{37})y^2 = 8$, 旋转角 $\theta = -\frac{1}{2}\arctan 6$.

(7) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 4x + 8y + 1 = 0$.

$I_1 = 5, I_2 = 0, I_3 = 0, K = -15$ 是两条平行直线 $x - 2y = 2 \pm \sqrt{3}$.

3.3.3(1)

按 t 的值决定下列二次曲线的类型：

$(1 + t^2)(x^2 + y^2) - 4txy + 2t(x + y) + 2 = 0$.

解：$I_1 = 2(1 + t^2) > 0, I_2 = (1 - t^2)^2 \geqslant 0, I_3 = 2(1 + t)^2(1 - 2t)$.

(1) $t = -1$ 则化为 $(x + y)^2 - (x + y) + 1 = 0$ 是两条平行的虚直线.

(2) $t = \frac{1}{2}$ 则 $I_3 = 0, I_2 > 0$, 是一个点.

(3) $t = 1$ 则 $I_3 \neq 0, I_2 = 0, I_1 > 0$ 是抛物线.

(4) $t \neq \pm 1, \frac{1}{2}$ 则 $I_3 \neq 0, I_1, I_2 > 0$ 是椭圆.

3.3.7

证明在直角坐标系中，$F(x, y) = 0$ 的图像是一条等轴双曲线的充分必要条件是 $F(x, y)$ 的不变量满足：

$I_1 = 0, I_3 \neq 0$.

证明：必要性显然，只需将 $F(x, y)$ 化为标准形式.

充分性：$I_1 = 0 \implies I_2 = -A^2 - B^2 < 0$. 由 $I_3 \neq 0, I_2 < 0$ 知 $F(x, y)$ 是双曲线. 将 $F(x, y)$ 化为标准形式后仍有 $A + C = I_1 = 0$ 故 $F(x, y)$ 是等轴双曲线.