2025/11/21

作业九：【尤】**5.3**：5、10、11、12；**5.5**：8；以及活页4习题4。**回收日期：11/26/三**

5.3.5

设 A_1, A_2, A_3, A_4 是扩大平面 π_+ 上点共线4点, 并且其中一个是无穷远点, 用简单比表示交比.

解：$A_1 \in l_\infty \implies (A_2, A_3; A_4)$; $A_2 \in l_\infty \implies (A_1, A_4; A_3)$; $A_3 \in l_\infty \implies (A_2, A_1; A_4)$; $A_4 \in l_\infty \implies (A_1, A_2; A_3)$.

5.3.10

证明椭圆被它上面的5个点完全决定.

证明: 任取椭圆上 A, B, C, D, E, 并设 $(EA, EB; EC, ED) = t$. 通过仿射变换将椭圆变为圆, 可知当 E 在圆上运动时, $(EA, EB; EC, ED)$ 是常数. 由于仿射变换保交比, 椭圆就是所有满足 $(XA, XB; XC, XD) = t$ 的点 X.

5.3.11

设 l_1, l_2, l_3 是扩大平面上相交于 P 的三条线. 试用作图法画出 l_1, l_2, l_3 的第四调和线 l_4:

(1) 若 P 是一个普通点; (2) 设 P 是无穷远点, l_1, l_2, l_3 都是普通线; (3) 若 l_3 是无穷远线.

(1) 做任意普通直线 l 与 l_1, l_2, l_3 相交于普通点 A_1, A_2, A_3. 取 A_2P 上任一点 Q, 连接 A_1Q 交 l_3 于 B_1, A_3Q 交 l_1 于 B_2, B_1B_2 交 l 于 R, 则 l_4 为直线 PR.

(2) 做任意普通直线 l 交 l_1, l_2, l_3 于普通点 A_1, A_2, A_3. 同 (1), 取 P' 与直线 $l_1' = PA_1, l_2' = PA_2, l_3' = PA_3$, 并找出第四调和线 l_4' 交 l 与 Q. 再取不过 Q 的直线 l' 重复以上操作得到 Q', 则 l_4 为直线 QQ'.

(3) l_4 是 l_1, l_2 的中位线, 可以用作图法做出(任过一点做一个梯形，对角线的交点在中位线上).

5.3.12

设 l_1, l_2, l_3 是普通平面上相交于点 P 的3条线, l_4 是它们的第四调和线. 证明：$l_3 \perp l_4 \iff l_3$ 是 l_1, l_2 的分角线.

证：考虑与 l_3 垂直的直线 l 与 l_1, l_2, l_3, l_4 的交点 A, B, C, D, 则 $l_3 \perp l_4 \iff D \in l_\infty$. 而 $(A, B; C, D) = -1$

故 $D \in l_\infty \iff \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} \iff l_3$ 是 l_1, l_2 的分角线.

5.5.8

设 A, B, C, D 是平面 π 上一个平行四边形的4个顶点, A', B', C', D' 也在 π 上, 并且 A', B', D' 不共线, $\overrightarrow{A'C'} = c\overrightarrow{A'B'} + d\overrightarrow{A'D'}$.

(1) c, d 满足什么条件时扩大平面 π_+ 有一个射影变换 σ, 将 A, B, C, D 依次变为 A', B', C', D'?

(2) 要使 σ 是仿射-射影变换, 还需要加什么条件?

解：(1) 只需 $A'B'C'D'$ 非退化, 即 $c, d, c + d - 1 \neq 0$.

(2) 仿射变换保平行关系, 故 $c = d = 1$.

Exercise4.4

给定仿射平面 π，那么 π 的任何仿射变换都能唯一地延拓成射影平面 $P(\pi)$ 的射影变换。讨论延拓的变换在无穷远线上可能的不动点个数。

解：设仿射变换为 $\varphi(x) = Ax + b$, 则对应的射影变换为 $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 无穷原点是不动点当且仅当它的前两个坐标是 A 的特征向量, 故要么不存在，要么有唯一一个，要么有两个不同的不动点，要么所有无穷远点都是.