1. (1) 是, (2) 否, (3) 是, (4) 是, (5) 否.

   (1), (3), (4) 举例: $T=R_A$, $A=\begin{pmatrix}1&0\\ \frac{1}{5}&1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}\frac{7}{6}&0\\0&1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}2&5\\1&2\end{pmatrix}$. □

2. (1) 只需证 $\alpha, T\alpha, \ldots, T^{n-1}\alpha$ 线性无关. 设 $c_1\alpha+c_2T\alpha+\cdots+c_nT^{n-1}\alpha=0$. 两边取 T^{n-1}, 得 $c_1=0$. 再取 T^{n-2}, 得 $c_2=0$. 继续下去, 可得 $c_3=0,\ldots,c_n=0$.

   (2) 由 (1) 可知 $\{\alpha, T\alpha,\ldots,T^{n-1}\alpha\}$ 为 V 的基. 对 $\beta=c_1\alpha+c_2T\alpha+\cdots+c_nT^{n-1}\alpha$, 有 $T^{n-1}\beta=c_1T^{n-1}\alpha$, 所以 $\beta\in\operatorname{Ker}(T^{n-1})\iff c_1=0$. 这推出 $\operatorname{Ker}(T^{n-1})=\operatorname{span}\{T\alpha,\ldots,T^{n-1}\alpha\}$. 另一方面,

   $$\operatorname{Im}(T)=\{T(c_1\alpha+c_2T\alpha+\cdots+c_nT^{n-1}\alpha)\mid c_i\in F\}=\{c_1T\alpha+\cdots+c_{n-1}T^{n-1}\alpha\mid c_i\in F\}=\operatorname{span}\{T\alpha,\ldots,T^{n-1}\alpha\}.$$

   因此 $\operatorname{Ker}(T^{n-1})=\operatorname{Im}(T)$. □

3. $r=0,2,3,4$. 下面证明.

   - $r=0$ 时断言成立: 若 $\operatorname{rank}(AB)+\operatorname{rank}(BA)=0$, 则显然有 $\operatorname{rank}(AB)=\operatorname{rank}(BA)=0$.
   - $r=1$ 时断言不成立: 满足 $\operatorname{rank}(AB)=2$, $\operatorname{rank}(BA)=0$ 的反例: $A=E_{13}+E_{24}$, $B=E_{33}+E_{44}$.
   - $r\geqslant 2$ 时断言成立: 设 $\operatorname{rank}(AB)+\operatorname{rank}(BA)=2r$, 需证 $\operatorname{rank}(AB)=\operatorname{rank}(BA)=r$. 若不然, 不妨设 $\operatorname{rank}(AB)\geqslant r+1$, $\operatorname{rank}(BA)\leqslant r-1$, 则

     $$2r+2\leqslant 2\operatorname{rank}(AB)\leqslant\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)\leqslant\operatorname{rank}(BA)+4\leqslant r+3,$$

     与 $r\geqslant 2$ 矛盾. □

4. $\dim\operatorname{span}(S)=n^2-2n+2$. 下面证明.

   首先注意到, $S\subset\mathbb{F}_p^{n\times n}$ 由所有每行每列均有且只有一个矩阵元为 1 而其他矩阵元为 0 的矩阵构成.

   - $\dim\operatorname{span}(S)\geqslant n^2-2n+2$: 对于 $2\leqslant i\neq j\leqslant n$, 考虑 S 中的矩阵

     $$P_i=I_n-E_{11}-E_{ii}+E_{1i}+E_{i1},$$
     $$P_{ij}=I_n-E_{11}-E_{ii}-E_{jj}+E_{1i}+E_{ij}+E_{j1}.$$

     我们验证 S 的 n^2-2n+2 元子集

     $$\{I_n\}\cup\{P_i\mid 2\leqslant i\leqslant n\}\cup\{P_{ij}\mid 2\leqslant i\neq j\leqslant n\}$$

     线性无关. 设

     $$cI_n+\sum_{2\leqslant i\leqslant n}c_iP_i+\sum_{2\leqslant i\neq j\leqslant n}c_{ij}P_{ij}=0.$$

     对 $2\leqslant i\neq j\leqslant n$, 考虑上式的 (i,j)-元, 即得 $c_{ij}=0$. 再对 $2\leqslant i\leqslant n$, 考虑上式的 $(1,i)$-元, 即得 $c_i=0$. 最后得 $c=0$.

   - $\dim\operatorname{span}(S)\leqslant n^2-2n+2$: 考虑 n^2-2n+2 个（不在 S 中的）矩阵的集合

     $$Q=\{E_{11}+E_{ij}-E_{i1}-E_{1j}\mid 2\leqslant i,j\leqslant n\}\cup\{-(n-2)I_n+\textstyle\sum_{2\leqslant i\leqslant n}(E_{1i}+E_{i1})\}.$$

     只需验证 $S\subset\operatorname{span}(Q)$. 设 $A\in S$. 将 A 减去若干个形如 $E_{11}+E_{ij}-E_{i1}-E_{1j}$ $(2\leqslant i,j\leqslant n)$ 的矩阵, 可使所得矩阵 A' 只在第一行和第一列有非零元. 由于减去上述矩阵不改变每行之和与每列之和, 所以 A' 的每行之和与每列之和均为 1, 因此只能有 $A'=-(n-2)I_n+\sum_{2\leqslant i\leqslant n}(E_{1i}+E_{i1})$. 这说明 $A'\in\operatorname{span}(Q)$. □