

1.

求证：平面上偶数个反射的复合只能是恒同、旋转或者平移；奇数个反射的复合只能是反射或滑反射。

证明：平移是两个旋转的复合： $z \mapsto ze^{i\theta}$ 与 $z \mapsto (z - w)e^{-i\theta}$ 的复合是 $z \mapsto z + w(1 - e^{-i\theta})$ 可以组成任何平移。而两个旋转的复合要么是旋转，要么是平移。两个平移的复合是平移，一个平移与一个旋转的复合是旋转，所以恒同、旋转、平移构成 $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ 的子群 G 。两个反射的复合只能是恒同(反射轴重合)、旋转(反射轴相交)或平移(反射轴平行)，故偶数个反射的复合生成 G 。

恒同、平移复合上反射得到反射，旋转复合上反射得到滑反射，故奇数个反射复合是反射或滑反射。

2.

分别举出在空间保距变换中，最少能写成1/2/3/4个反射复合的例子。

解：1个： $(x, y, z) \mapsto (x, y, -z)$ 。

2个： $(x, y, z) \mapsto (x, y, z + 1)$ 显然不是反射(没有不动点)且是两个反射的复合。

3个： $(x, y, z) \mapsto (x, -y, z + 1)$ 是反定向的所以是奇数个反射的复合，且不是反射是三个反射的复合，所以最少能写成3个反射的复合。

4个： $(x, y, z) \mapsto (-y, x, z + 1)$ 是保定向的所以是偶数个反射的复合，且显然是四个反射的复合。若它是两个反射的复合，两个反射平面不相交(否则交线上是不动点)，只能是平移变换，矛盾。

3.

对于任何仿射圆锥曲线 Γ ，求证：任意给定 Γ 上两点 P, Q ，都存在保持 Γ 不变的平面仿射变换将点 P 变为点 Q 。这样的平面仿射变换有多少个？如果考虑平面保距变换，情形将如何？

解：

(1) 先证明存在：对单位圆，可以取旋转变换；对双曲线，若 P, Q 不同支，先做一个空间反射，然后再做双曲线旋转；对抛物线，做一个 $(x, y) \mapsto (x + t, y + 2tx + t^2)$ 的滑动。

然后，由存在性知只需计算任一点的稳定子的阶数。对单位圆，稳定子只能是恒同和一个反射，共2个；对双曲线，顶点的稳定子是恒同和时间反射，共2个；对抛物线，稳定子有无穷多个。

(2) 在考虑保距变换：对一般的椭圆，保距变换只有4个：恒同，关于原点的对称，关于两条对称轴的反射，即 $\text{Isom}(\Gamma) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 不一定能将 P 变为 Q ；对于圆， $\text{Isom}(\Gamma) = O(2)$ 有两个将 P 变为 Q ；对于双曲线， $\text{Isom}(\Gamma) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 不一定能将 P 变为 Q ；对于抛物线， $\text{Isom}(\Gamma) \cong \mathbb{Z}_2$ 不一定能将 P 变为 Q 。

4.

对于空间中的单叶双曲面 S ，求证：任意给定 S 上的两点 P, Q ，都存在保持 S 不变的保向的空间仿射变换，将点 P 变做点 Q 。如果考虑二次锥面，情形将如何？

证明：不妨设 $S : x^2 + y^2 - z^2 = 1$ 且 $Q(1, 0, 0)$ 。对于 $P(x_0, y_0, z_0)$ 先通过绕 z 轴的旋转将 P 变为 $P_1(x_1, 0, z_0)$ ，再通过双曲旋转 $\begin{pmatrix} \cosh \alpha & \sinh \alpha \\ \sinh \alpha & \cosh \alpha \end{pmatrix}$ 将 $P_1(x_1, 0, z_0)$ 变为 $(1, 0, 0)$ 或 $(-1, 0, 0)$ 。然后将 $(-1, 0, 0)$ 通过空间方向的反射变为 $P(1, 0, 0)$ 。

5.

对于空间中的椭球面 S ，用 $\text{Aff}(S)$ 表示所有保 S 不变的空间仿射变换。

(1) 说明 $\text{Aff}(S)$ 关于变换的复合构成群。

(2) 如果 S 是球心在原点的单位球面，决定 $\text{Aff}(S)$ 的全部元素(用坐标语言刻画)。

(3) 对任意两个椭球面 S, S' 求证 $\text{Aff}(S) \cong \text{Aff}(S')$ 。

解：(1) $\text{Aff}(S) \subset \text{Aff}(\mathbb{R}^3)$ ，而 $\forall f, g \in \text{Aff}(S)$, $f \circ g^{-1}(S) = f(S) = S$ 故 $f \circ g^{-1} \in \text{Aff}(S)$ ，

$\text{Aff}(S) < \text{Aff}(\mathbb{R}^3)$.

(2) $\text{Aff}(S) = O(3)$ 即所有 (α, β, γ) 使得 $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ 是标准正交基.

(3) 存在将 S 映到 $\partial\mathbb{S}^2$ 的仿射变换 g , 则 $\text{Aff}(S) = g^{-1}\text{Aff}(\partial\mathbb{S}^2)g \cong \text{Aff}(\partial\mathbb{S}^2)$, 同理 $\text{Aff}(S') \cong \text{Aff}(\partial\mathbb{S}^2) \cong \text{Aff}(S)$.

6.

反向的平面仿射变换是否一定有不动点? 是否一定有不变直线? 保向的空间仿射变换是否一定有不变平面?

解: 反向的仿射变换只能是伸缩、抛物线错切和斜压缩, 其中抛物线错切没有不动点和不变直线

$(x, y) \mapsto (x + t, y + 2xt + t^2)$: 显然没有不动点, 若有不动直线 $ax + by + c = 0$ 则

$ax' + by' + c = a(x + t) + b(y + 2xt + t^2) + c = at + 2xbt + bt^2 = 0$, 只能 $a = b = c = 0$.

平移变换没有不变平面, 且是保向的空间仿射变换.

7.

用合适的语言定义并阐明下述直观: 椭球面上两点在空间中连结的线段总是落在椭球面内部.

解: 记 $A = \{x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \leq 1\}$ 是椭球面及其内部, 则 A 是一个凸集, 即

$x, y \in A, \lambda \in [0, 1] \implies \lambda x + (1 - \lambda)y \in A$.

若 $x_1^2/a^2 + y_1^2/b^2 + z_1^2/c^2 \leq 1$ 且 $x_2^2/a^2 + y_2^2/b^2 + z_2^2/c^2 \leq 1$, 则由 Cauchy 不等式,

$(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)^2 \leq \lambda x_1^2 + (1 - \lambda)x_2^2$, 求和得到

$$(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)^2/a^2 + (\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2)^2/b^2 + (\lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2)^2/c^2 \leq 1.$$

即 $\lambda(x_1, y_1, z_1) + (1 - \lambda)(x_2, y_2, z_2) \in A$.

8.

假设 ϕ, ψ 是同一平面上的两个错切变换.

(1) 如果 ϕ, ψ 可交换, 它们是否一定有相同的错切轴?

(2) 如果 ϕ, ψ 不交换, 是否能找到一个保向的平面仿射变换 τ , 使得 $\tau\phi = \psi\tau$?

(1) 错切变换的不动点只有错切轴上的点. 若 $\phi\psi = \psi\phi$ 且 ϕ, ψ 的轴为 l_1, l_2 , 则 $\forall P \in l_1$,

$\phi(\psi(P)) = \psi\phi(P) = \psi(P)$ 故 $\psi(P)$ 是 ϕ 的不动点即 $\psi(P) \in l_1$. $\psi(l_1) = l_1$ 知 $l_1 \parallel l_2$. 不妨设

$\phi: (x, y) \mapsto (x + ty, y)$, $\psi: (x, y) \mapsto (x + s(y - y_0), y)$, 则 $\phi \circ \psi: (x, y) \mapsto (x + s(y - y_0) + ty, y)$, 故 $\phi\psi = \psi\phi$, 即可交换的充要条件是错切轴平行.

(2) 若 ϕ, ψ 不可交换, 设错切轴的交点为 $(0, 0)$, 且 ϕ, ψ 的错切轴为 l_1, l_2 , 则可取 τ 为以 l_1 为轴的正压缩(压缩比为错切系数之比)和过点 $(0, 0)$ 的将 l_1 变为 l_2 的旋转的复合.