

## 1.

求证: 在UHP中, 保向的保距变换形如  $\phi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ,  $ad - bc = 1$ . 而反向的保距变换形如  $\phi(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ,  $ad - bc = -1$ .

证明: 首先  $\phi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  故  $\phi(0) = b/d \in \mathbb{R}$ ,  $\phi(\infty) = a/c \in \mathbb{R}$ ,  $\phi^{-1}(0) = -b/a \in \mathbb{R}$ ,  $\phi^{-1}(\infty) = -d/c \in \mathbb{R}$ , 即可令  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ .

对于FLT: 若  $ad - bc = -1$  则  $\text{Im}\phi(ix) = \text{Im}\frac{axi+b}{cxi+d} = \frac{(ad-bc)x}{d^2-c^2x^2}$  故令  $x \rightarrow 0^+$  知矛盾.

CFLT同理.

## 2.

双曲三角形是否总是有内切圆? 是否总有外接圆?

解: 总是有内切圆: 考虑 Poincaré 圆盘模型, 注意到两条测地线  $AB, AC$  的角平分线上的每一点  $D$  满足  $d_{\mathbb{D}}(D, l_{AB}) = d_{\mathbb{D}}(D, l_{AC})$  由于可以通过 Möbius 变换将  $A$  变为原点, 此时  $AB, AC$  变为直径,  $AD$  变为欧式空间中的角平分线. 由于关于  $AD$  的反射也为保距变换,  $D$  到两边的距离相同. 对于每个双曲三角形  $ABC$ , 设角  $A, B$  的角平分线交于  $P$ , 则由上面的论述知  $P$  到三边距离相等, 故有一个以  $P$  为圆心的内切圆.

由于双曲圆总是欧式圆, 若有外接圆, 一定与欧式外接圆重合, 但是欧式外接圆不一定落在  $\mathbb{D}$  内部, 故不一定有双曲外接圆.

## 3.

当  $h \rightarrow \infty$  时,  $d_{\mathbb{H}^2}(1+hi, -1+hi)$  如何变化? 当  $h \rightarrow 0^+$  时又如何?

解: 由定义取  $\zeta_1 = (\sqrt{1+h^2}, 0)$ ,  $\zeta_2 = (-\sqrt{1+h^2}, 0)$ , 则

$$d_{\mathbb{H}^2}(1+hi, -1+hi) = \log \frac{|\zeta_1+1-hi| \cdot |\zeta_2-1-hi|}{|\zeta_1-1-hi| \cdot |\zeta_2+1-hi|} = \log \left( 1 + \frac{2+2\sqrt{1+h^2}}{h^2} \right).$$

$h \rightarrow \infty$  时,  $d \sim \frac{2}{h} \rightarrow 0$ ;  $h \rightarrow 0^+$  时,  $d \rightarrow \infty$ .

## 4.

写出双曲余弦函数和双曲正弦函数的倍角、半角公式. 约定双曲反三角函数的定义域和值域为  $\text{arccosh}: [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ,  $\text{arcsinh}: (-\infty, \infty) \rightarrow (-\infty, \infty)$  用基本初等函数写出它们的表达式.

解:  $\cosh 2x = \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2} = \frac{1}{2}((e^x+e^{-x})^2-2) = 2\cosh^2 x - 1$ , 而  $\cosh x = \sqrt{\frac{1+\cosh 2x}{2}}$ .

$\sinh 2x = \frac{1}{2}(e^{2x}-e^{-2x}) = \frac{1}{2}(e^x-e^{-x})(e^x+e^{-x}) = 2\sinh x \cosh x$ . 而  $\sinh x = \pm \sqrt{\frac{\cosh 2x-1}{2}}$ .

$t = \text{arccosh} x \iff 2x = e^t + e^{-t} \iff e^t = x + \sqrt{x^2-1} \iff t = \log(x + \sqrt{x^2-1})$ .

$t = \text{arcsinh} x \iff 2x = e^t - e^{-t} \iff t = \log(x + \sqrt{x^2+1})$ .

## 5.

双曲正多边形是以测地线为边的凸多边形, 且边长都相等, 内角也都相等. 当双曲正八边形的内角都为  $\pi/4$  时, 计算其边长的双曲余弦值.

解: 取双曲正八边形  $A_1 \cdots A_8$  的中心  $O$  (取两个角平分线的交点, 可用全等证明它是所有角平分线的交点). 则  $A_1OA_2$  两个角为  $\frac{\pi}{8}$  第三个为  $\frac{\pi}{4}$ . 由对偶双曲余弦定理,  $\cos \frac{\pi}{4} = -\cos^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{\pi}{8} \cosh A_1A_2$  解得  $\cosh A_1A_2 = 5 + 4\sqrt{2}$ .

## 6.

双曲平面  $\mathbb{H}^2$  上, 有序的相异两点  $A, B$  决定双曲平移  $\tau_{AB} : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$  时如下的保距变换: 它保持两点所在的测地线不变, 没有不动点, 并且把  $A$  变为  $B$ . 如果  $A, B, C$  是双曲三角形的顶点, 求证: 复合变换  $\tau_{CA} \circ \tau_{BC} \circ \tau_{AB}$  以  $A$  为唯一的不动点.

证: 显然  $A$  是不动点. 而双曲保向保距变换若有两个不动点, 则一定是恒同.

若  $\tau_{CA} \circ \tau_{BC} \circ \tau_{AB} = id$ , 则  $\tau_{CA}(l_{BC}) = \tau_{CA} \circ \tau_{BC}(l_{BC}) = \tau_{BA}(l_{BC})$ , 将这条直线记做  $l$ . 则

$C = \angle(l_{BC}, l_{CA}) = \angle(\tau_{CA}(l_{BC}), \tau_{CA}(l_{CA})) = \angle(l, l_{CA})$  且  $B = \angle(l_{BC}, l_{BA}) = \angle(l, l_{BA})$ . 故

$A + B + C = \pi$  得到矛盾. 故  $A$  是唯一的不动点.