作业十三：活页7习题1、3、5、7、9、11。**回收日期：12/24/三**

7.1

枚举二元集 $\{1,2\}$ 所有可能的拓扑, 并指出哪些互相同胚. 进而思考三元集 $\{1,2,3\}$ 的情形.
解：平凡拓扑 $\{\emptyset,\{1,2\}\}$, 离散拓扑 $\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$, 还有 $\mathcal{T}_1=\{\emptyset,\{1\},\{1,2\}\}$, $\mathcal{T}_2=\{\emptyset,\{2\},\{1,2\}\}$ 一共四个.
显然平凡拓扑严格最弱, 离散拓扑严格最强, 而 $f:(\{1,2\},\mathcal{T}_1)\to(\{1,2\},\mathcal{T}_2)$, $f(1)=2,f(2)=1$ 是同胚.
三元集有 $\{\emptyset,\{1,2,3\}\}$, $\{\emptyset,\{a\},\{1,2,3\}\}$ 三个互相同胚, $\{\emptyset,\{a\},\{a,b\},\{1,2,3\}\}$ 六个互相同胚, $\{\emptyset,\{a\},\{b,c\},\{1,2,3\}\}$ 三个互相同胚, $\{\emptyset,\{a\},\{a,b\},\{a,c\},\{1,2,3\}\}$ 三个互相同胚, $\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{1,2,3\}\}$ 三个互相同胚, $\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{b,c\},\{1,2,3\}\}$ 六个互相同胚, $\{\emptyset,\{a,b\},\{1,2,3\}\}$ 三个互相同胚, 离散拓扑一个, 共 29 个.

7.3

关于三维仿射空间的点集拓扑及其子空间拓扑, 证明: 椭球面和单位球面相互同胚; 马鞍面、双叶双曲面的一支和平面相互同胚; 单叶双曲面和圆柱面相互同胚.
证明: 椭球面 $\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 与单位球面之间有 $f:\Gamma\to\mathbb{S}^2,(x,y,z)\mapsto(x/a,y/b,z/c)$ 是连续双射, 且逆映射 $f^{-1}:(x,y,z)\mapsto(ax,by,cz)$ 也连续.
马鞍面 $S:z=x^2-y^2$ 考虑 $f:\mathbb{R}^2\to S,(x,y)\mapsto(x,y,x^2-y^2)$ 则 f 是连续双射, 且逆映射是投影 $\pi:(x,y,z)\mapsto(x,y)$ 显然连续, 故 f 是同胚. 同理双叶双曲面的一支 $z=c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1}$ 与平面同胚.
单叶双曲面 $H:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 与圆柱面 $C:x^2+y^2=r^2$ 之间有连续双射 $f:C\to H,(x,y,z)\mapsto\left(\frac{a}{r}\sqrt{\frac{z^2}{c^2}+1}x,\frac{b}{r}\sqrt{\frac{z^2}{c^2}+1}y,z\right)$ 且逆映射也连续, 故它们同胚.

7.5

通过球极投影, 把 $\hat{\mathbb{C}}$ 等同为欧式空间的单位球面, 并用后者的点集拓扑定义前者的拓扑. 证明：$\hat{\mathbb{C}}$ 上的 Möbius 变换都是同胚.
证：只需证明是开映射, 则由于 Möbius 变换的逆仍是 Möbius 变换知它们是同胚.
$\mathbb{S}^2$ 的拓扑基是开球与单位球面的交, 在球极投影下得到 $\hat{\mathbb{C}}$ 的拓扑基是开圆盘. 而 Möbius 变换保圆, 所以是开映射.

7.7

通过等同欧式空间单位球面的对径点, 在射影平面定义拓扑如下: 它的子集是开集当且仅当这个子集在球面的原像是点集拓扑的开集. 证明: 射影平面的射影变换都是同胚.
证明：射影变换是 $\mathbb{R}^3$ 的线性变换与商映射的复合(且它们可交换), 而线性变换是同胚, 故射影变换是同胚.

7.9

证明圆锥面 $x^2+y^2-z^2=0$ 和任何非退化仿射二次曲面(见题3)都不同胚.
证明：注意到圆锥面删去 $(0,0,0)$ 后不连通, 但是非退化仿射二次曲面删去任一点后仍然连通. (双叶双曲面原本就不连通, 单个分枝删去任一点后仍连通).

7.11

证明 Hausdorff 空间的单点都是闭集.
证：任意点 $x \in X$, 考虑 $y \in \{x\}^C$ 则存在 $U, V \subset X$ 为开集, 使得 $x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$. 故 $y \in U \subset \{x\}^C$ 即 $\{x\}^C$ 为开集, $\{x\}$ 为闭集.