作业七：【尤】**4.1**：7、11; **4.2**：10、13; **4.3**：15、16.**回收日期：11/05/三**

4.1.7

求一个反射和一个平移的乘积, 分别讨论：
（1）平移量平行于反射轴; （2）平移量垂直于反射轴; （3）一般情形.
解：（1）滑反射（2）若平移量为t,反射轴为l,则乘积为关于 l' 的反射，其中 l' 为 l 平移 $-t/2$.（3）可以将平移分解为平行于反射轴方向的平移和垂直于反射轴方向的平移，则它们的乘积是另一个滑反射。

4.1.11

证明以直线 l 为轴的一个斜压缩可以分解为以 l 为轴的正压缩和以 l 为轴的一个错切的乘积.
证明：设斜压缩方向为 u, 系数为 k, 则它是 系数为 $\frac{k|u\times l|}{|u|\cdot|l|}$ 的正压缩 和 系数为 $\frac{k|u\cdot l|}{|u|\cdot|l|}$ 的错切。

4.2.10

设 Γ 是一个椭圆, l 和 l' 是一对共轭直径, 试证明存在仿射变换 f, 使得 $f(\Gamma)=\Gamma$, 但 $f(l), f(l')$ 是两条对称轴.
证明：取仿射变换 g 将 Γ 变为单位圆，再取关于原点的旋转 h 将 $g(l), g(l')$ 旋转为两条对称轴的像，则 $f=g^{-1}hg$ 满足 $f(\Gamma)=\Gamma$ 且 $f(l), f(l')$ 是两条对称轴。

4.2.13

说明保持某一条直线 l 上的每个点都不动的仿射变换或是以此直线压缩轴的斜压缩, 或是一个这样的斜压缩和关于此直线的反射的乘积.
证明：易知这样的仿射变换构成一个群 G. 任取一个不在 l 上的点 P, 则 G 中的元素由 P 的像唯一确定。若 P 和它的像在 l 的两侧，用关于 l 的反射 ψ 将它们变为同侧。然后可以取一个斜压缩 φ 将 P 变为 P 的像，则仿射变换就是这个斜压缩 φ 或者 $\varphi\circ\psi$.

4.3.15

已知仿射变换 f 的变换公式为

$$\begin{cases} x'=x\cos\theta-y\frac{a\sin\theta}{b}. \\ y'=x\frac{b\sin\theta}{a}+y\cos\theta. \end{cases}$$

(1) 证明椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在 f 下的像是它自己;
(2) 证明此椭圆上的每一点都是不动点.
证明：(1)

$$(x'b)^2+(y'a)^2=(bx\cos\theta-ay\sin\theta)^2+(bx\sin\theta+ay\cos\theta)^2=b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$$

(2) $(bx')=(bx)\cos\theta-(ay)\sin\theta, (ay')=(bx)\sin\theta+(ay)\cos\theta$ 可看作旋转关于伸缩的共轭，唯一的不动点是原点。

4.3.16

设 u_1, u_2 是仿射变换 f 的两个特征向量, 它们的特征值不相等.证明：
(1) u_1, u_2 不平行;
(2) u_1+u_2 不是特征向量.
证明：(1) 设 $f(u_i)=\lambda_i u_i$, 若 $c_1u_1+c_2u_2=0$ 则
$0=f(0)=f(c_1u_1+c_2u_2)=\lambda_1(c_1u_1+c_2u_2)+(\lambda_2-\lambda_1)c_2u_2$ 即 $c_2=0$, 同理 $c_1=0$ 矛盾。

(2) 若干不同特征值对应的特征向量线性无关，而 $u_1+u_2\in\mathrm{Span}\langle u_1,u_2\rangle$, 故若$u_1+u_2$ 是特征向量，不妨设 u_1+u_2 与 u_1 对应的特征值 λ 相同，则 u_2 的特征值也是 λ，矛盾。