

1.

1.1 证明Vieta定理

证: 比较 $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_n \prod_{k=1}^n (x - x_k)$ 两侧 x^{n-k} 的系数得

$$a_n \sum_{m_1 < \dots < m_k} (-1)^k \prod_{j=1}^k x_{m_j} = a_{n-k}.$$

1.2 证明 $T: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$,

$$T(q) = \begin{cases} (m+n)^2 + n, & q = \frac{n}{m}, \quad \gcd(m, n) = 1, \\ 0, & q = 0, \\ -(m+n)^2 - n, & q = -\frac{n}{m}, \quad \gcd(m, n) = 1. \end{cases}$$

是单射.

证: 若 $T(q) = T(r)$, 由于 $T(q) = -T(q)$ 且 $T(\mathbb{Q}_+) \subset \mathbb{N}$, 不妨设 $q, r > 0$, 且 $q = n/m, r = u/v, \gcd(m, n) = \gcd(u, v) = 1$.

注意到

$$(m+n)^2 < (m+n)^2 + n < (m+n+1)^2,$$

$$\text{故 } T(q) = T(r) \implies m+n = (u, v) \implies n = v \implies (m, n) = (u, v).$$

1.3: 代数数集可数

证: 注意到 n 次整系数多项式集与 \mathbb{Z}^{n+1} 有双射, 故 $\mathbb{Z}[x]$ 为可数个可数集之并, 也可数. 将每个代数数 z 对应 $(f, n) \in \mathbb{Z}[x] \times \mathbb{N}$, 其中 f 为 z 的最小多项式, z 是第 n 个根(先按膜长再按幅角排序), 则这是单射故代数数集可数.

2.

有限个抛物线即它们开口方向围成的区域能否覆盖整个平面?

解: 不能. 考虑圆 $\bar{B}(0, R)$ 与抛物线的交, 易知圆与每个抛物线交出的弧圆周角趋于0, 故有限个抛物线不能覆盖整个平面.

3.

若闭曲线 C 包含凸闭曲线 D , 则 D 的周长不小于 C .

证: 熟知 Cauchy-Crofton:

$$\text{length}(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} n_\gamma(p, \varphi) dp d\varphi,$$

且易见 $n_D(p, \varphi) \leq n_C(p, \varphi)$, (由于 $n_D(p, \varphi) \leq 2$.)

另证: 先证 D 是凸多边形的情形, 此时可不妨设 D 的定点都在 C 上, 否则将一个顶点改为其所在的一条边与 C 的交点, 周长不减. 由于 D 每一边长度都不小于 C 的对应部分, 命题此时成立.

一般情形, 对于 D 内部的任一凸多边形 P , P 的周长不小于 C . D 的周长应当定义为 $\sup\{\text{length}(P) : \text{polygon } P \subset D\}$, 故 D 的周长不小于 C .

4.

给定椭圆/双曲线/抛物线 Γ 上一点 A , 尺规作图做出其切线.

解: 首先, 对于 Γ 外任一点 P , 过 P 做三条线与 Γ 交于 UV, XY, ZW , 则 P 的极线为 $UX \cap VY, UZ \cap YW$ 的连线. 故可取 Γ 之外两点 B, C 使 ABC 共线, 找到 B, C 的极线 l_B, l_C 并取出 $D = l_B \cap l_C$, 则得到 A 的切线 AD .

5.

平面上两个不相交的椭圆, 也不是一个在另一个的内部. 证明: 一定存在一条直线, 将两个椭圆分开为一侧一个.

证: 考虑 \mathbb{R}^n 上的任意两个不相交闭凸集 U_1, U_2 , 则由于 $d(x, y) = |x - y|$ 连续, 存在

$(x, y) \in U_1 \times U_2$ 使 $d(x, y) = \inf_{(u, v) \in U_1 \times U_2} d(u, v)$. 考虑 $(n - 1)$ -维平面

$M = \{z \in \mathbb{R}^n : \langle z - (x + y)/2, x - y \rangle = 0\}$, 则任意 $(u, v) \in U_1 \times U_2$, 我们证明

$[u, v] = \{\lambda u + (1 - \lambda)v : \lambda \in [0, 1]\}$ 与 M 相交.

先证任意 $u \in U_1, [x, u] \cap M = \emptyset$. 否则取 $t \in [x, u] \cap M$, 则 x, t, y 构成等腰三角形, y 在 $[x, t]$ 上的投影属于 U_1 , 与 $d(x, y)$ 最小矛盾.

故任意 $u \in U_1, [x, u] \cap M = \emptyset, [x, y] \cap M \neq \emptyset$, 则 $[u, y] \cap M \neq \emptyset$ (只需考虑 x, y, u 所在的平面).

同理对任意 $u \in U_1, v \in U_2, [u, y] \cap M \neq \emptyset, [v, y] \cap M = \emptyset$, 故 $[u, v] \cap M = \emptyset$, 即 U_1 与 U_2 的点均在 M 的不同侧.

(证得有些麻烦, 本质依旧是平面几何)