

1.

求证：在UHP中，保向的保距变换形如 $\phi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc = 1$. 而反向的保距变换形如 $\phi(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc = -1$.

证明：首先 $\phi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ 故 $\phi(0) = b/d \in \mathbb{R}$, $\phi(\infty) = a/c \in \mathbb{R}$, $\phi^{-1}(0) = -b/a \in \mathbb{R}$, $\phi^{-1}(\infty) = -d/c \in \mathbb{R}$, 即可令 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

对于FLT: 若 $ad - bc = -1$ 则 $\operatorname{Im}\phi(ix) = \operatorname{Im}\frac{axi+b}{cxi+d} = \frac{(ad-bc)x}{d^2-c^2x^2}$ 故令 $x \rightarrow 0^+$ 知矛盾.

CFLT同理.

2.

双曲三角形是否总是有内切圆？是否总有外接圆？

解：总是有内切圆：考虑 Poincaré 圆盘模型，注意到两条测地线 AB, AC 的角平分线上的每一点 D 满足 $d_{\mathbb{D}}(D, l_{AB}) = d_{\mathbb{D}}(D, l_{AC})$ 由于可以通过 Möbius 变换将 A 变为原点，此时 AB, AC 变为直径， AD 变为欧式空间中的角平分线。由于关于 AD 的反射也为保距变换， D 到两边的距离相同。对于每个双曲三角形 ABC ，设角 A, B 的角平分线交于 P ，则由上面的论述知 P 到三边距离相等，故有一个以 P 为圆心的内切圆。

由于双曲圆总是欧式圆，若有外接圆，一定与欧式外接圆重合，但是欧式外接圆不一定落在 \mathbb{D} 内部，故不一定有双曲外接圆。

3.

当 $h \rightarrow \infty$ 时， $d_{\mathbb{H}^2}(1+hi, -1+hi)$ 如何变化？当 $h \rightarrow 0^+$ 时又如何？

解：由定义取 $\zeta_1 = (\sqrt{1+h^2}, 0)$, $\zeta_2 = (-\sqrt{1+h^2}, 0)$, 则

$$d_{\mathbb{H}^2}(1+hi, -1+hi) = \log \frac{|\zeta_1+1-hi| \cdot |\zeta_2-1-hi|}{|\zeta_1-1-hi| \cdot |\zeta_2+1-hi|} = \log \left(1 + \frac{2+2\sqrt{1+h^2}}{h^2} \right).$$

$h \rightarrow \infty$ 时， $d \sim \frac{2}{h} \rightarrow 0$; $h \rightarrow 0^+$ 时， $d \rightarrow \infty$.

4.

写出双曲余弦函数和双曲正弦函数的倍角、半角公式。约定双曲反三角函数的定义域和值域为

$\operatorname{arccosh} : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $\operatorname{arcsinh} : (-\infty, \infty) \rightarrow (-\infty, \infty)$ 用基本初等函数写出它们的表达式。

解： $\cosh 2x = \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2} = \frac{1}{2}((e^x + e^{-x})^2 - 2) = 2 \cosh^2 x - 1$, 而 $\cosh x = \sqrt{\frac{1+\cosh 2x}{2}}$.

$\sinh 2x = \frac{1}{2}(e^{2x} - e^{-2x}) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x}) = 2 \sinh x \cosh x$, 而 $\sinh x = \pm \sqrt{\frac{\cosh 2x-1}{2}}$.

$t = \operatorname{arccosh} x \iff 2x = e^t + e^{-t} \iff e^t = x + \sqrt{x^2 - 1} \iff t = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

$t = \operatorname{arcsinh} x \iff 2x = e^t - e^{-t} \iff t = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

5.

双曲正多边形是以测地线为边的凸多边形，且边长都相等，内角也都相等。当双曲正八边形的内角都为 $\pi/4$ 时，计算其边长的双曲余弦值。

解：取双曲正八边形 $A_1 \cdots A_8$ 的中心 O (取两个角平分线的交点，可用全等证明它是所有角平分线的交点)。则

A_1OA_2 两个角为 $\frac{\pi}{8}$ 第三个为 $\frac{\pi}{4}$. 由对偶双曲余弦定理， $\cos \frac{\pi}{4} = -\cos^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{\pi}{8} \cosh A_1A_2$ 解得 $\cosh A_1A_2 = 5 + 4\sqrt{2}$.

6.

双曲平面 \mathbb{H}^2 上, 有序的相异两点 A, B 决定双曲平移 $\tau_{AB} : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ 时如下的保距变换: 它保持两点所在的测地线不变, 没有不动点, 并且把 A 变为 B . 如果 A, B, C 是双曲三角形的顶点, 求证: 复合变换 $\tau_{CA} \circ \tau_{BC} \circ \tau_{AB}$ 以 A 为唯一的不动点.

证: 显然 A 是不动点. 而双曲保向保距变换若有两个不动点, 则一定是恒同.

若 $\tau_{CA} \circ \tau_{BC} \circ \tau_{AB} = id$, 则 $\tau_{CA}(\ell_{BC}) = \tau_{CA} \circ \tau_{BC}(\ell_{BC}) = \tau_{BA}(\ell_{BC})$, 将这条直线记做 l . 则 $C = \angle(\ell_{BC}, \ell_{CA}) = \angle(\tau_{CA}(\ell_{BC}), \tau_{CA}(\ell_{CA})) = \angle(l, \ell_{CA})$ 且 $B = \angle(\ell_{BC}, \ell_{BA}) = \angle(l, \ell_{BA})$. 故 $A + B + C = \pi$ 得到矛盾. 故 A 是唯一的不动点.