【尤】5.4:7,9,10; 5.6: 4,10; 以及活页4习题9.

5.4.7

A, B, C, D 是射影平面上的4点, 它们在射影坐标系 J 中的射影坐标一次为 $\langle(3,-4,1)^T\rangle$, $\langle(4,-3,-1)^T\rangle$, $\langle(2,3,1)^T\rangle$, $\langle(3,2,1)^T\rangle$.
(1) 求 $P = AB \cap CD$ 的坐标;
(2) 求 CD 上的点 R, 使得交比 $(C, D; P, R) = 5$.
解: (1) $l_{AB} = \langle 1,1,1\rangle$ 且 $l_{CD} = \langle 1,1,-5\rangle$, 故 $P = \langle(x,y,z)^T\rangle$ 满足 $x+y+z=0, x+y-5z=0$ 即 $P = \langle(1,-1,0)^T\rangle$.
(2) $(1,-1,0) = (3,2,1)-(2,3,1)$, 故若 $R = aC + bD$, 则 $(C, D; P, R) = -\frac{a}{b} = 5$. 故可取 $b=-1, a=5$ 即 $5(2,3,1)-(3,2,1) = (7,13,4)$, $R = \langle(7,13,4)^T\rangle$.

5.4.9

用射影坐标法证明帕普斯定理.
证明: 设两条直线分别为 ABC, XYZ. 以 A, B, X, Y 为仿射坐标系建立坐标 $A = \langle(1,0,0)^T\rangle$, $B = \langle(0,1,0)^T\rangle$, $X = \langle(0,0,1)^T\rangle$, $Y = \langle(1,1,1)^T\rangle$, 并设 $C = \langle(a,b,0)^T\rangle$ 且 $Z = \langle(c,c,d)^T\rangle$. 则
$P = AY \cap BX = \langle(0,1,1)^T\rangle$, $Q = AZ \cap CX = \langle(ac,bc,bd)^T\rangle$,
$R = BZ \cap CY = \langle(ac, bc-bd+ad, ad)^T\rangle$. 故 $R = Q + (ad-bd)P$ 即 PQR 共线.

5.4.10

设 $A, B, C, Q_1, Q_2, Q_3, P_1, P_2, P_3$ 是射影平面上的9个不同点, A, B, Q_1, P_1 共线, B, C, Q_2, P_2 共线, C, A, Q_3, P_3 共线, 记交比 $a = (A, B; Q_1, P_1)$, $b = (B, C; Q_2, P_2)$, $c = (C, A; Q_3, P_3)$.
(1) 若 AQ_2, BQ_3, CQ_1 共点, 证明: P_1, P_2, P_3 共线 $\iff abc = -1$;
(2) 若 AQ_2, BQ_3, CQ_1 共点, 证明: AP_2, BP_3, CP_1 共点 $\iff abc = 1$;
(3) 若 Q_1, Q_2, Q_3 共线, 证明: P_1, P_2, P_3 共线 $\iff abc = 1$;
(4) 若 Q_1, Q_2, Q_3 共线, 证明: AP_2, BP_3, CP_1 共点 $\iff abc = -1$.
证明: 以 A, B, C, X 建立射影坐标系, $A = \langle(1,0,0)^T\rangle$, $B = \langle(0,1,0)^T\rangle$, $C = \langle(0,0,1)^T\rangle$. 设
$Q_1 = \langle(a_1,b_1,0)^T\rangle$, $P_1 = \langle(u_1,v_1,0)^T\rangle$, $Q_2 = \langle(0,a_2,b_2)^T\rangle$, $P_2 = \langle(0,u_2,v_2)^T\rangle$, $Q_3 = \langle(b_3,0,a_3)^T\rangle$, $P_3 = \langle(v_3,0,u_3)^T\rangle$. 则 $a = (A, B; Q_1, P_1) = \frac{u_1b_1}{a_1v_1}$, $b = (B, C; Q_2, P_2) = \frac{u_2b_2}{a_2v_2}$, $c = (C, A; Q_3, P_3) = \frac{u_3b_3}{a_3v_3}$.
(1) 若 AQ_2, BQ_3, CQ_1 共点, 则 $AQ_2 : (0, a_2, -b_2)$, $BQ_3 : (-b_3, 0, a_3)$, $CQ_1 : (a_1, -b_1, 0)$, 故

$$0 = \det\begin{pmatrix} 0 & a_2 & -b_2 \\ -b_3 & 0 & a_3 \\ a_1 & -b_1 & 0 \end{pmatrix} = a_1a_2a_2 - b_1b_2b_3.$$

而 $P_1P_2P_3$ 共线当且仅当 $\det\big((u_1,v_1,0)^T,(0,u_2,v_2)^T,(v_3,0,u_3)^T\big) = 0$ 即 $u_1u_2u_3$—$v_1v_2v_3$, 故 $P_1P_2P_3$ 共线 $\iff u_1u_2u_3b_1b_2b_3 = -a_1a_2a_3v_1v_2v_3 \iff abc = -1$;
(2) AP_2, BP_3, CP_1 共点等价于 $\det\big((u_1,-v_1,0)^T,(0,u_2,-v_2)^T,(-v_3,u_3,0)^T\big) = 0$ 即 $u_1u_2u_3 = v_1v_2v_3$ 等价于 $abc = 1$;
(3)(4) 同样地, $Q_1Q_2Q_3$ 共线 $\iff a_1a_2a_3 = -b_1b_2b_3$ 而 AP_2, BP_3, CP_1 共点 $\iff u_1u_2u_3 = v_1v_2v_3$.

5.6.4

求过3个点 $A=\langle(2,1,0)^T\rangle, B=\langle(0,2,1)^T\rangle, C=\langle(0,0,1)^T\rangle$, 并且在 A, B 处都切线分别为 $\langle 1,-2,2\rangle, \langle 0,1,-2\rangle$ 的二次曲线的方程.

解：考虑线性变换 $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3, (x,y,z)\mapsto\left(\frac{1}{2}x, -\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}y, \frac{1}{4}x-\frac{1}{2}y+z\right)$. 则 $TA=\langle(1,0,0)^T\rangle$, $TB=\langle(0,1,0)^T\rangle, TC=\langle(0,0,1)^T\rangle$. $T^{-1}=(A\quad B\quad C)$ 即 TA, TB 处的切线为 $\langle 0,-2,2\rangle, \langle 1,0,-2\rangle$. 设二次曲线 Γ 在 T 下的像 Γ' 为 $axy+byz+czx=0$, 即 $C=\begin{pmatrix}0 & a & c\\ a & 0 & b\\ c & b & 0\end{pmatrix}$. 故 $(0,-2,2)\sim C(1,0,0)^T$ 且 $(1,0,-2)\sim C(0,1,0)^T$, 解得 $(0,-2,2)\sim(0,a,c), (1,0,-2)\sim(a,0,b)$ 即 $c=-a, b=-2a$, $\Gamma': x'y'-2y'z'-z'x'=0$. 带入 $(x',y',z')=T(x,y,z)$ 得到
$\frac{1}{2}x\left(-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}y\right)-2\left(-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}y\right)\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}y+z\right)-\frac{1}{2}x\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}y+z\right)=0$. 化简得
$x^2-4y^2+8yz=0$.
另一种解法：考虑过 $AABB$ 的二次曲线, $\Gamma_1: l_{AA}l_{BB}=0$ 即 $(x-2y+2z)(y-2z)=0, \Gamma_2: l_{AB}^2=0$ 即 $(x-2y+4z)^2=0$. 则 $\Gamma=\lambda\Gamma_1+\Gamma_2$ 且过点 C. $\Gamma:\lambda(x-2y+2z)(y-2z)+(x-2y+4z)^2=0$ 带入 $(0,0,1)$ 得到 $\lambda=4$, 即 $\Gamma: x^2-4y^2+8yz=0$.

5.6.10

设 $ABCD$ 是圆锥曲线内的一个内接四边形, 记 M 是 A, C 处切线的交点, N 是 B, D 处切线的交点, P 是边 AB, CD 的交点, Q 是边 AD, BC 的交点, 证明：M, N, P, Q 共线.

证：以 $ABCD$ 建立射影坐标系, $A=\langle(1,0,0)^T\rangle, B=\langle(0,1,0)^T\rangle, C=\langle(0,0,1)^T\rangle, D=\langle(1,1,1)^T\rangle$, 则 $\Gamma: axy+byz+czx=0$ 满足 $a+b+c=0$. 对应矩阵为 $\begin{pmatrix}0 & a & c\\ a & 0 & b\\ c & b & 0\end{pmatrix}$.
$l_A=\langle 0,a,c\rangle, l_B=\langle a,0,b\rangle, l_C=\langle c,b,0\rangle, l_D=\langle a+c,a+b,c+b\rangle=\langle b,c,a\rangle$. 且 $l_{AB}=\langle 0,0,1\rangle$, $l_{CD}=\langle 1,-1,0\rangle, l_{AD}=\langle 0,1,-1\rangle, l_{BC}=\langle 1,0,0\rangle$.
故 $M=\langle(b,-c,a)^T\rangle, N=\langle(bc,a^2-b^2,-ac)^T\rangle, P=\langle(1,1,0)^T\rangle, Q=\langle(0,1,1)^T\rangle$. 则 $\mathrm{Span}\langle P,Q\rangle=\{(x,y,z): x+z=y\}$. 由于 $a+b+c=0, b+a=-c$ 且 $bc-ac=a^2-b^2$ 故 $MNPQ$ 共线.
另证：$M=l_A\cap l_C, N=l_B\cap l_D$ 故取 $R=AC\cap BD=l_M\cap l_N$ 则 $l_R=MN$. 同理知道 P, Q 都在 R 的极线上, 故 $MNPQ$ 共线, 都在 l_R 上.

活页 4.9

每一个三阶可逆实矩阵 $A\in\mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$ 给出一个射影变换 $\mathbb{R}\mathbf{P}^2\to\mathbb{R}\mathbf{P}^2$, 在齐次坐标上形如 $[X]\mapsto[AX]$.
(1) 求证：可逆数量矩阵构成 $\mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$ 的正规子群. 把商群记作 $\mathrm{PGL}(3,\mathbb{R})$.
(2) 求证：上述变换诱导了一个 $\mathrm{PGL}(3,\mathbb{R})$ 在 $\mathbb{R}\mathbf{P}^2$ 上的群作用.
(3) 求证：$\mathbb{R}\mathbf{P}^2$ 的每一个射影变换都能够并且唯一地由 $\mathrm{PGL}(3,\mathbb{R})$ 中地元素实现.
证：(1) 显然 $(\lambda I)(\mu I)^{-1}=(\lambda\mu^{-1}I)$ 故 $H=\{\lambda I:\lambda\in\mathbb{R}\}<\mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$. 由于 $A^{-1}(\lambda I)A=\lambda i$, $H\triangleleft\mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$.
(2) 考虑如下群作用：$\circ:\mathrm{PGL}(3,\mathbb{R})\times\mathbb{R}\mathbf{P}^2\to\mathbb{R}\mathbf{P}^2, A\circ[X]\mapsto[AX]$. 显然 $A\circ(B\circ[X])=[ABX]=(AB)\circ[X]$, 且 $[\lambda I]\circ[X]=[\lambda IX]=[X]$, 故 $\circ$ 是群作用.
(3) 存在性由射影变换基本定理显然, 唯一性由 $([Ae_1],[Ae_2],[Ae_3])$ 两两不同得到.