2025/11/12

尤5.1: 4、5；尤5.2: 1、2；补充题1：类比射影平面的处理方式，尝试给出三维实射影空间的线向模型和线把模型，并指出如何将它们等同。补充题2：三维实射影空间中，两张不同的面是否总交于一线？试给出一个合理的回答。

5.1.4

用中心投影法证明:

(1) 设直线 l, l' 相交在 Q 点, 点 O 不在 l, l' 上, 过 O 点的3条直线依次与 l, l' 相交与 $A, D; B, E; C, F$. 设 AE, BD 相交于 M, BF, CE 相交于 N. 证明 M, N, Q 共线.

(2) 如果直线 l, l' 相交与 Q, 点 O_1O_2Q 共线. 过 O_1 的两条直线分别和 l 相交于 A_1, B_1, 和 l' 相交于 A'_1, B'_1, 过 O_2 的两条直线分别和 l 相交于 A_2, B_2, 和 l' 相交于 A'_2, B'_2. 设 $A_1B'_1, A'_1B_1$ 相交于点 G, $A_2B'_2, A'_2B_2$ 相交于点 H, 证明 QGH 共线.

证明：(1) 考虑将 OQ 变为无穷远直线的中心投影，则命题变为：若直线 ABC 与 DEF 平行, 且 AD, BE, CF 平行, 则 MN 与 AB 平行. 此时 $ABED, BCFE$ 都是平行四边形, 所以 M, N 都在两条直线 AB, DE 的中位线上, 故 $MN \parallel AB$.

(2) (实际上可以直接用(1)证明)

用中心投影将 Q 变为无穷远点, 且其它点依旧为普通点, 则可以用位似变换证明, G 到 l, l' 的距离之比仅与 O_1 到 l, l' 的距离之比决定, 所以 $GH \parallel l$.

5.1.5

利用上面的结论完成下面的作图:

(1) 在平面上有两条直线 l, l' 和它们外面的一点 M, l, l' 相交于一个不可达到了点 N (N 很远, 或被障碍物阻隔), 请只用直尺作出直线 MN.

(2) 在平面上有两条平行直线 l, l' 和它们外面的一点 M, 请只用直尺作出过 M 且于 l, l' 平行的直线.

解：(1) 过 M 作两条直线分别与 l, l' 相交于 $A, C; D, B$, 连接 AB, CD 相交于 P. 过 P 作一条直线与 l, l' 相交于 E, F. 设 CE, DF 相交于 Q, 则由5.1.4(1)知 MNQ 共线.

(2) 过 M 作两条直线分别与 l, l' 相交于 $A, B; D, C$, 连接 AC, BD 相交于 N. 过 N 再做直线交 l, l' 于 E, F, 连接 BE, FD 得到点 P, 则 $MP \parallel l$.

5.2.1

设 $\mathbb{S}^2$ 是一个球面, P_1 是由 $\mathbb{S}^2$ 的每一对对径点为元素的集合，把在 $\mathbb{S}^2$ 的每个大圆上的那些对径点构成的 P_1 的子集称为 P_1 的线. 说明具有这样的线结构的集合 P_1 是一个射影平面.

证明：可以将这个模型与 $\mathbb{R}P^2$ 对应：每一对球面的对径点, 对应到过这一对对径点的 $\mathbb{R}^3$ 一维子空间; 每一个大圆, 对应到这个圆所在的 $\mathbb{R}^3$ 二维子空间; 而且这个对应保持点线关联.

5.2.2

设 $\mathbb{D}^2$ 是一个圆盘, 规定集合 P_2 为: 其元素包括 $\mathbb{D}^2$ 的全体内点和圆周上的每一对对径点, P_2 上对线结构为: 全体对径点是一条线; 把 $\mathbb{D}^2$ 上每个以 $\mathbb{D}^2$ 直径为长轴的半椭圆上的元素也构成线. 说明具有这样的线结构的集合 P_2 是一个射影平面.

证明：考虑 $\mathbb{S}^2$ 上的射影平面模型, 将球面北半球和赤道上的点投影到平面上, 得到题目中的模型.

补充题1

类比射影平面的处理方式，尝试给出三维实射影空间的线向模型和线把模型，并指出如何将它们等同。

线向模型：三维射影平面的所有点是 $\mathbb{E}^3 \cup \pi_\infty$, 其中 π_∞ 是 $\mathbb{E}^3$ 的所有线向. “线”是 $l \cup \{[l]\}$, 或者无穷直线：一个平面上所有无穷远点构成的集合.

线把模型：$\mathbb{R}P^3 = \{\text{1-dim subspace of } \mathbb{R}^4\}$ 是所有点, 线是 $\mathbb{R}^4$ 的二维子空间.

同样地，在线把模型中，任取一个三维超平面，与所有一维子空间的交点构成了线向模型.

补充题2

三维实射影空间中，两张不同的面是否总交于一线？试给出一个合理的回答。
解：是的，$\mathbb{R}^4$ 的两个不同的3维子空间 U, V 的交一定是二维的:
$\dim(U \cap V) = \dim U + \dim V - \dim(U + W) = 3 + 3 - 4 = 2.$