2025/9/24

作业三：【尤】**3.2**：3（圆锥面参见活页2）、11；**3.3**：1（1）（3）（7）（圆锥曲线要求写出的标准型和选取的转轴角）、3（1）、7。回收日期：**10/09/四**

3.2.3

试说明用不经过锥顶的平面来截圆锥面，截线为椭圆、抛物线或双曲线.

证：不妨设圆锥为 $z^2=x^2+y^2$, 平面为 $z=mx+k, m\geqslant 0, k\neq 0$. 则截线在 xy 平面上的投影为 $(m^2-1)x^2-y^2+2mkx+k^2=0$, 是一个椭圆、抛物线或双曲线，故原截线也是椭圆、抛物线或双曲线.

3.2.11

试写出一条二次曲线的方程，使得它经过两条二次曲线 $x^2-2y^2+xy+6x-1=0$ 和 $2x^2-y^2-x-y=0$ 的所有交点，还经过点 $(2,-2)$.

解：$(x,y)=(2,-2)$ 时, $\lambda(x^2-2y^2+xy+6x-1)+(1-\lambda)(2x^2-y^2-x-y)=0$ 解得 $\lambda=4$ 即二次曲线为 $2x^2+5y^2-4xy-27x-3y+4=0$.

3.3.1

用不变量判别下列二次曲线的类型：

(1) $8x^2+6xy-26x-12y+13=0$.

$I_1=8, I_2=-9, I_3=171$ 是双曲线. 标准型 $9x^2-y^2=7$, 旋转角 $\theta=\frac{1}{2}\arctan\frac{3}{4}$.

(3) $3x^2+6xy+4y^2+6x-4y+12=0$.

$I_1=7, I_2=4, I_3=-48$ 是椭圆. 标准型 $(7+\sqrt{37})x^2+(7-\sqrt{37})y^2=8$, 旋转角 $\theta=-\frac{1}{2}\arctan 6$.

(7) $x^2-4xy+4y^2-4x+8y+1=0$.

$I_1=5, I_2=0, I_3=0, K=-15$ 是两条平行直线 $x-2y=2\pm\sqrt{3}$.

3.3.3(1)

按 t 的值决定下列二次曲线的类型：

$(1+t^2)(x^2+y^2)-4txy+2t(x+y)+2=0$.

解：$I_1=2(1+t^2)>0, I_2=(1-t^2)^2\geqslant 0, I_3=2(1+t)^2(1-2t)$.

(1) $t=-1$ 则化为 $(x+y)^2-(x+y)+1=0$ 是两条平行的虚直线.

(2) $t=\frac{1}{2}$ 则 $I_3=0, I_2>0$, 是一个点.

(3) $t=1$ 则 $I_3\neq 0, I_2=0, I_1>0$ 是抛物线.

(4) $t\neq\pm 1, \frac{1}{2}$ 则 $I_3\neq 0, I_1, I_2>0$ 是椭圆.

3.3.7

证明在直角坐标系中，$F(x,y)=0$ 的图像是一条等轴双曲线的充分必要条件是 $F(x,y)$ 的不变量满足：

$I_1=0, I_3\neq 0$.

证明：必要性显然，只需将 $F(x,y)$ 化为标准形式.

充分性：$I_1=0 \implies I_2=-A^2-B^2<0$. 由 $I_3\neq 0, I_2<0$ 知 $F(x,y)$ 是双曲线. 将 $F(x,y)$ 化为标准形式后仍有 $A+C=I_1=0$ 故 $F(x,y)$ 是等轴双曲线.