2025/9/8

1.

1.1 证明Vieta定理

证: 比较 $P(x)=\sum_{k=0}^n a_k x^k = a_n \prod_{k=1}^n (x-x_k)$ 两侧 x^{n-k} 的系数得

$$a_n \sum_{m_1<\cdots<m_k} (-1)^k \prod_{j=1}^k x_{m_j} = a_{n-k}.$$

1.2 证明 $T:\mathbb{Q}\to\mathbb{Z}$,

$$T(q)=\begin{cases}(m+n)^2+n, & q=\frac{n}{m}, \quad \gcd(m,n)=1,\\ 0, & q=0,\\ -(m+n)^2-n, & q=-\frac{n}{m}, \quad \gcd(m,n)=1.\end{cases}$$

是单射.
证：若 $T(q)=T(r)$, 由于 $T(q)=-T(q)$ 且 $T(\mathbb{Q}_+)\subset\mathbb{N}$, 不妨设 $q,r>0$, 且 $q=n/m, r=u/v$, $\gcd(m,n)=\gcd(u,v)=1$.
注意到

$$(m+n)^2<(m+n)^2+n<(m+n+1)^2,$$

故 $T(q)=T(r) \implies m+n=(u,v) \implies n=v \implies (m,n)=(u,v)$.

1.3: 代数数集可数

证: 注意到 n 次整系数多项式集与 $\mathbb{Z}^{n+1}$ 有双射, 故 $\mathbb{Z}[x]$ 为可数个可数集之并,也可数. 将每个代数数 z 对应 $(f,n)\in\mathbb{Z}[x]\times\mathbb{N}$, 其中 f 为 z 的最小多项式, z 是第 n 个根(先按膜长再按幅角排序), 则这是单射故代数数集可数.

2.

有限个抛物线即它们开口方向围成的区域能否覆盖整个平面?
解：不能. 考虑圆 $\bar{B}(0,R)$ 与抛物线的交, 易知圆与每个抛物线交出的弧圆周角趋于0, 故有限个抛物线不能覆盖整个平面.

3.

若闭曲线 C 包含凸闭曲线 D, 则 D 的周长不小于 C.
证：熟知 Cauchy-Crofton:

$$\text{length}(\gamma)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} n_\gamma(p,\varphi)\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}\varphi,$$

且易见 $n_D(p,\varphi)\leqslant n_C(p,\varphi)$, (由于 $n_D(p,\varphi)\leqslant 2$.)

另证:先证 D 是凸多边形的情形,此时可不妨设 D 的定点都在 C 上,否则将一个顶点改为其所在的一条边与 C 的交点,周长不减.由于 D 每一边长度都不小于 C 的对应部分,命题此时成立.
一般情形,对于 D 内部的任一凸多边形 P, P 的周长不小于 C. D 的周长应当定义为 $\sup\{\text{length}(P):\text{polygon } P\subset D\}$, 故 D 的周长不小于 C.

4.

给定椭圆/双曲线/抛物线 Γ 上一点 A,尺规作图做出其切线.
解：首先,对于 Γ 外任一点 P, 过 P 做三条线与 Γ 交于 UV, XY, ZW, 则 P 的极线为 $UX \cap VY, UZ \cap YW$ 的连线. 故可取 Γ 之外两点 B, C 使 ABC 共线, 找到 B, C 的极线 l_B, l_C 并取出 $D = l_B \cap l_C$, 则得到 A 的切线 AD.

5.

平面上两个不相交的椭圆，也不是一个在另一个的内部。证明：一定存在一条直线，将两个椭圆分开为一侧一个。
证：考虑 $\mathbb{R}^n$ 上的任意两个不相交紧凸集 U_1, U_2, 则由于 $d(x,y) = |x-y|$ 连续,存在 $(x,y) \in U_1 \times U_2$ 使 $d(x,y) = \inf_{(u,v)\in U_1\times U_2} d(u,v)$. 考虑 $(n-1)-$维平面 $M = \{z \in \mathbb{R}^n : \langle z-(x+y)/2, x-y\rangle = 0\}$, 则任意 $(u,v) \in U_1 \times U_2$, 我们证明 $[u,v] = \{\lambda u + (1-\lambda)v : \lambda \in [0,1]\}$ 与 M 相交.
先证任意 $u \in U_1$, $[x,u] \cap M = \emptyset$. 否则取 $t \in [x,u] \cap M$, 则 x, t, y 构成等腰三角形, y 在 $[x,t]$ 上的投影属于 U_1, 与 $d(x,y)$ 最小矛盾.
故任意 $u \in U_1$, $[x,u] \cap M = \emptyset$, $[x,y] \cap M \neq \emptyset$, 则 $[u,y] \cap M \neq \emptyset$ (只需考虑 x, y, u 所在的平面). 同理对任意 $u \in U_1, v \in U_2$, $[u,y] \cap M \neq \emptyset$, $[v,y] \cap M = \emptyset$, 故 $[u,v] \cap M = \emptyset$, 即 U_1 与 U_2 的点均在 M 的不同侧.