5.

假设 l 是平面上的直线, Γ 为平面上的抛物线且与直线 l 相切. 所有使得 $\sigma(\Gamma)$ 仍然与 l 相切的平面保距变换 σ 是否构成群?
解: $\sigma(\Gamma)$ 与 l 相切等价于 Γ 与 $\sigma^{-1}(l)$ 相切. 注意到过 l 上每个不是切点的点, 均有唯一一个旋转变换将 l 转为另一条过这个点的切线, 显然它的逆变换不满足, 所以 σ 不构成群.

6.

假设 Γ 为平面上的双曲线. 所有满足 $\sigma(\Gamma)=\Gamma$ 的平面仿射变换 σ 构成 Γ 的仿射对称群, 记作 G. 问 G 是否有限或交换?
解: G 是无限非交换群. 不妨设 $\Gamma: x^2-y^2=1$, 则 $G=O(1,1)$ 是子群 $O^+(1,1)=\{\begin{pmatrix}\cosh\alpha & \sinh\alpha\\ \sinh\alpha & \cosh\alpha\end{pmatrix}\}$ 和两个反射 $\mathrm{diag}(1,-1)$ 与 $\mathrm{diag}(-1,1)$ 生成的群. 子群 $O^+(1,1)$ 是无限交换群, 但它的非平凡元素与 $\mathrm{diag}(1,-1)$ 不交换.

7.

求证如果一个空间仿射变换保持一对异面直线的并集不变, 那么它一定有不变直线.
解: 假设 φ 保持 $l_1\cup l_2$ 不变, 且 φ 没有不变直线, 则 $\varphi(l_1)=l_2, \varphi(l_2)=l_1$. 注意到 φ^2 保持 l_1, l_2 均不变.
(i) 若 φ^2 在 l_1 上有不动点 P, 设 $\varphi(P)=Q, \varphi(Q)=P$, 则 $\varphi(l_{PQ})=l_{PQ}$ 是一条不变直线, 矛盾.
(ii) 若 φ^2 在 l_1, l_2 上均没有不动点, 则 φ^2 限制在 l_1, l_2 上是平移变换, 即 φ 的线性部分 A 满足 $A^2v_1=v_1, A^2v_2=v_2$, 其中 v_1, v_2 是 l_1, l_2 的方向向量. 考虑 A^2 的第三个线性无关的特征向量 v_3, 则 v_3 一定是 A 的特征向量 (否则设 $A^2v_3=\lambda v_3$ 则 $A^2(Av_3)=A\lambda v_3=\lambda(Av_3)$ 即 $\mathrm{Span}(v_3, Av_3)\subset E_\lambda$ 且 v_3, Av_3, v_1, v_2 线性无关, 得到矛盾), 对应一条不变直线, 矛盾.