2025/10/24

1.

考虑空间中直线

$$l_0 : \begin{cases} 3x = 2y \\ z = 0 \end{cases}$$

使其绕直线

$$k : x = y = z$$

旋转一周，获得圆锥面 S.
(1) 写出曲面 S 的方程。
(2) 描述所有保持 S 不变（作为点集）的空间保距变换，并说明理由。
解：（1）对于 k 上的点 $P(t,t,t)$, l_0 上的点 $Q\left(\frac{6}{5}t, \frac{9}{5}t, 0\right)$ 满足 P 是 Q 在 k 上点投影。对 S 上的点 $T(x_0, y_0, z_0)$, T 在 k 上的投影为 $P(t,t,t)$ 满足 $t = (x_0 + y_0 + z_0)/3$, 故 $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = \left(\frac{6}{5}t\right)^2 + \left(\frac{9}{5}t\right)^2 = \frac{13}{25}(x_0 + y_0 + z_0)^2$. $S : 6x^2 + 6y^2 + 6z^2 - 13xy - 13xz - 13yz = 0$.
(2) 显然 $\phi(O) = O$, 故 S 是线性映射。令 $S_r = \{P \in S : d(P, O) = r\}$, 则 $\phi(S) = S$. S_r 中每对直径被映到另一对直径。先假设 $\phi(A)$, A 均在 O 的同一侧，若 $\phi \neq id$，取一条直径 $AB \in S_r$ 使得 $C = \phi(A) \neq A$. 由 $d(C, A) = d(\phi(C), C)$ 可知 ϕ 是关于对称轴的旋转变换。故所求变换为关于对称轴的旋转，或者旋转复合上关于 O 的对称。

2.

曲面 $S : x^2 + y^2 + xy - 2xz - 2yz = 0$ 是否是正圆锥?
解：若它是圆锥，则中心为 $(0,0,0)$, 设轴线为 $x = at, y = bt, z = ct$, 则存在常数 C 使得 $C\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = |(a,b,c) \cdot (x,y,z)|$ 即 $(ax + by + cz)^2 = C^2(x^2 + y^2 + z^2)$, 故 $b = a, C = c$, 方程为 $(a^2 - c^2)x^2 + (a^2 - c^2)b^2 + 2a^2xy + 2acxz + 2acyz = 0$, 但显然 $a^2 - c^2 \neq 2a^2$, 故它不是圆锥。

3.

空间中单位立方体 $ABCD - A'B'C'D'$，（其中 $ABCD$ 是一个侧面正方形，而 $A'B'C'D'$ 是其对侧正方形，对应定点相邻）。
(1) 考虑所有与边 $AA', B'C', CD$ 所在的三条直线同时相交的直线。它们的并集构成哪种（仿射）二次曲面?
(2) 决定并描述包含直线 AA' 的那一族直母线。
解：设 $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $D(0,1,0)$, $A'(0,0,1)$, 且曲线上有点 $P(x_0, y_0, z_0)$, 则过 $AA'P$ 的平面为 $\pi_1 : y_0x - x_0y = 0$, 过 $B'C'P$ 的平面为 $\pi_2 : z_0x - x_0z = z_0 - x_0$, 过 CDP 的平面为 $\pi_3 : z_0y - y_0z = z_0$. 故 $x_0z_0 = y_0(z_0 - x_0)$ 是马鞍面。
两族直母线分别为 $x_0 = \lambda y_0, z_0 - x_0 = \lambda z_0$ 与 $z_0 = \lambda y_0, z_0 - x_0 = \lambda x_0$. 第二族包含 AA'.

4.

给定空间中的单位（闭且凸）立方体 P，所有保持 P 不变的空间保距变换总共有多少个?
解：对每个这样的变换 ϕ, 和 P 的每一对距离为 $\sqrt{3}$ 的定点 A, B, ϕ 将 A, B 映到另一对距离为 $\sqrt{3}$ 的顶点 $\phi(A), \phi(B)$，故 ϕ 将顶点映到顶点. 设 $P = ABCD - EFGH$，则 ϕ 将 $ACFH$ 四个两两距离为 $\sqrt{2}$ 的定点映到另外四个两两距离为 $\sqrt{2}$ 的顶点，只能为 $ACFH$ 或 $BDEG$. 若 $ACFH$ 映到 $ACFH$, 注意到 $\phi(A), \phi(C), \phi(F), \phi(H)$ 确定至多一个 ϕ, 且由于关于形如 $ACGE$ 的面对称可交换两点的顺序，所以全部 $4! = 24$ 种排列均可取到。
做关于 P 中心的对称可将 $ACFH$ 变为 $BDEG$ 故总共 48 种变换，包含 $4 \times 2 = 6$ 个关于对角线旋转 $\pm\frac{2\pi}{3}$,

$3 \times 3 = 9$ 个关于 过中心且垂直于某个面的直线 旋转 $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$, 6 个关于 对边中点连线 旋转 π, 1 个恒同映射，以及这24个旋转复合上关于中心的反射。

5.

平面旋转变换 ϕ_1, ϕ_2 分别以 O_1, O_2 为中心，问 $\phi_1 \circ \phi_2 = \phi_2 \circ \phi_1$ 何时成立?
解:设 $O_1 = 0, O_2 = w, \phi_1 : z \mapsto ze^{i\theta}, \phi_2 : z \mapsto w + (z-w)e^{i\varphi}$, 则
$\phi_1 \circ \phi_2(z) = \phi_1(w + (z-w)e^{i\varphi}) = we^{i\theta} + (z-w)e^{i(\theta+\varphi)}$, 而
$\phi_2 \circ \phi_1(z) = \phi_2(ze^{i\theta}) = w + (ze^{i\theta} - w)e^{i\varphi} = ze^{i(\theta+\varphi)} + w(1-e^{i\varphi})$ 故 $w(e^{i\theta} - e^{i(\theta+\varphi)}) = w(1-e^{i\varphi})$,
即 $w(1-e^{i\theta})(1-e^{i\varphi}) = 0$ 故 $O_1 = O_2$ 或 $\phi_1 = id$ 或 $\phi_2 = id$.

6.

假设 $A, B, C, D \in \mathbb{E}^3$ 是处于一般位置的是四个点，用 $L_A : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{R}$ 表示一个线性函数，满足 $L_A(A) = 1$, $L_A(B) = L_A(C) = L_A(D) = 0$, $L_B, L_C, L_D : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{R}$ 也作类似理解。
试找出所有保持四点 A, B, C, D 不变的空间仿射变换，使得由方程 $L_A + 2L_B + L_C + 2L_D = 0$ 定义的平面也保持不变。
解：考虑这样的变换 ϕ, 设 $\sigma = \phi|_{\{A,B,C,D\}}$. 将 L_P 看作 P 关于 A, B, C, D 的重心坐标，则

$$\phi(P) = \phi\left(\sum_A L_A(P)A\right) = \sum_A L_A(P)\phi(A).$$

故 ϕ 被 σ 唯一确定。若 $(L_A + 2L_B + L_C + 2L_D)(P) = 0$, 则

$$(L_A + 2L_B + L_C + 2L_D)(\phi(P)) = (L_{\sigma^{-1}(A)} + 2L_{\sigma^{-1}(B)} + L_{\sigma^{-1}(C)} + 2L_{\sigma^{-1}(D)})(P).$$

故 $\sigma = id, (AC), (BD), (AC)(BD)$.