角度 $\angle AOB$，

向量 $\vec{AB} \times \vec{CD} = |AB|\,|CD|\,\cos\theta$

使用 “\vv” 命令写 Latex，转为 word 前替换成 “\vec”

向量 $|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}| = |AB|\,|CD|\,\sin\theta$

向量 $a \times \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|b|\,\cos\theta$

向量 $\boldsymbol{a} \times b = |\boldsymbol{a}|\,|b|\,\cos\theta$

$\mathbb{N}\mathbf{R}\mathbb{Q}$

$\mathbb{R}$

1. 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{N} | x > 1\}$，则 $>$ $<$ $<$ 0.5 0.25 $<$
   A. $\{\sqrt{2}\} \in A$
   B. $\sqrt{2} \notin A$
   C. $\sqrt{2} \in A$
   D. $\{\sqrt{2}\} \subseteq A$ B

2. 在平行四边形 $ABCD$ 中，若 $\overrightarrow{AB} = (2,4)$，$\overrightarrow{AD} = (-1,-1)$，则 $\overrightarrow{BD} =$________ $(-3,-5)$

首先，要证明的结论是：

任取 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} \right| < \varepsilon \tag{1}$$

锐思教育 ruisichina.cn

式(1)可化为：

$$\frac{|g(x) - B|}{|B|\,|g(x)|} < \varepsilon \tag{2}$$

注意到上式左侧由以下三项组成：$\frac{1}{|B|}$、$|g(x) - B|$ 与 $\frac{1}{|g(x)|}$. 现

在要做的，就是在已经给定的正数 ε 下，找到合适的 δ，然后分别判断这三项的取值范围，最后论证这三项在给定的 δ 下乘积能够小于 ε.

第一项 $\frac{1}{|B|}$ 是常数；

对第二项 $|g(x)-B|$，与第三项 $\frac{1}{|g(x)|}$，由

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = B \tag{3}$$

可得：对于任意 $\varepsilon_0 > 0$, 能够找到 δ_0，使得当 $0 < |x-x_0| < \delta_0$ 时，有 $|g(x)-B| < \varepsilon_0$.
于是：

[label=0]取 $\varepsilon_0 = \varepsilon$，则必定存在正数 δ_{10}，使得当 $0 < |x-x_0| < \delta_{10}$ 时，有

$$|g(x)-B| < \varepsilon \tag{4}$$

取 $\varepsilon_0 = \frac{|B|}{2}$，则必定存在正数 δ_2，使得当 $0 < |x-x_0| < \delta_2$ 时，就有

$$|g(x)-B| < \frac{|B|}{2} \tag{5}$$

由 2，可由绝对值不等式得到

$$\frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|B|} \tag{6}$$

取 $\delta = \min\{\delta_{10}, \delta_2\}$, 那么, 当 $0 < |x-x_0| < \delta$ 时, 就同时有 $0 < |x-x_0| < \delta_{10}$ 与 $0 < |x-x_0| < \delta_2$ 成立.
当 $0 < |x-x_0| < \delta_{10}$ 成立时，式(4)成立，
当 $0 < |x-x_0| < \delta_2$ 成立时，式(5)成立，那么式(6)也就能够成立.
于是，当 $0 < |x-x_0| < \delta$ 时，(4)、(6)两式就能同时成立．这时，就有:

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| = \frac{1}{|B|} \times |g(x)-B| \times \frac{1}{|g(x)|} < \frac{1}{|B|} \times \varepsilon \times \frac{2}{|B|} = \frac{2\varepsilon}{|B|^2} \tag{7}$$

这与我们最终想要证明的式(1)还差了那么一点，所以需要稍作调整.
1 中，改取 $\varepsilon_0 = \frac{|B|^2}{2}\varepsilon$，那么，则必定存在正数 δ_1，使得当 $0 < |x-x_0| < \delta_1$ 时，有

$$|g(x)-B| < \frac{|B|^2}{2}\varepsilon. \tag{8}$$

这时，改取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，那么当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，可知(8)、(6)两式同时成立. 于是

$$\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{B}\right|=\frac{1}{|B|}\times|g(x)-B|\times\frac{1}{|g(x)|}<\frac{1}{|B|}\times\frac{|B|^2}{2}\varepsilon\times\frac{2}{|B|}=\varepsilon \tag{9}$$

这就是我们要证明的式(1).