

角度  $\angle AOB$ ,

向量  $\vec{AB} \times \vec{CD} = |AB| |CD| \cos \theta$

使用 “\vv” 命令写 Latex, 转为 word 前替换成 “\vec”

向量  $|\vec{AB} \cdot \vec{CD}| = |AB| |CD| \sin \theta$

向量  $a \times b = |a| |b| \cos \theta$

向量  $a \times b = |a| |b| \cos \theta$

NRQ

$\mathbb{R}$

1. 已知集合  $A = \{x \in \mathbb{N} | x > 1\}$ , 则  $\sqrt{2} > 0.5 > 0.25 > \sqrt{2} > 1$

A.  $\sqrt{2} \in A$

B.  $\sqrt{2} \notin A$

C.  $\sqrt{2} \in A$

D.  $\{\sqrt{2}\} \subseteq A$  B

2. 在平行四边形  $ABCD$  中, 若  $\vec{AB} = (2, 4)$ ,  $\vec{AD} = (-1, -1)$ , 则  $\vec{BD} = \underline{\hspace{2cm}} (-3, -5)$

首先, 要证明的结论是:

任取  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} \right| < \varepsilon \quad (1)$$

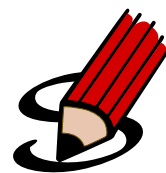


**锐思教育**  
ruisichina.cn

式(1)可化为:

$$\frac{|g(x) - B|}{|B| |g(x)|} < \varepsilon \quad (2)$$

注意到上式左侧由以下三项组成:  $\frac{1}{|B|}$ ,  $|g(x) - B|$  与  $\frac{1}{|g(x)|}$ .



现

在要做的，就是在已经给定的正数  $\varepsilon$  下，找到合适的  $\delta$ ，然后分别判断这三项的取值范围，最后论证这三项在给定的  $\delta$  下乘积能够小于  $\varepsilon$ .

第一项  $\frac{1}{|B|}$  是常数；

对第二项  $|g(x) - B|$ ，与第三项  $\frac{1}{|g(x)|}$ ，由

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B \quad (3)$$

可得：对于任意  $\varepsilon_0 > 0$ ，能够找到  $\delta_0$ ，使得当  $0 < |x - x_0| < \delta_0$  时，有  $|g(x) - B| < \varepsilon_0$ .

于是：

[label=0]取  $\varepsilon_0 = \varepsilon$ ，则必定存在正数  $\delta_{10}$ ，使得当  $0 < |x - x_0| < \delta_{10}$  时，有

$$|g(x) - B| < \varepsilon \quad (4)$$

取  $\varepsilon_0 = \frac{|B|}{2}$ ，则必定存在正数  $\delta_2$ ，使得当  $0 < |x - x_0| < \delta_2$  时，就有

$$|g(x) - B| < \frac{|B|}{2} \quad (5)$$

由 2，可由绝对值不等式得到

$$\frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|B|} \quad (6)$$

取  $\delta = \min\{\delta_{10}, \delta_2\}$ ，那么，当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时，就同时有  $0 < |x - x_0| < \delta_{10}$  与  $0 < |x - x_0| < \delta_2$  成立.

当  $0 < |x - x_0| < \delta_{10}$  成立时，式(4)成立，

当  $0 < |x - x_0| < \delta_2$  成立时，式(5)成立，那么式(6)也就能够成立.

于是，当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时，(4)、(6)两式就能同时成立. 这时，就有：

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} \right| = \frac{1}{|B|} \times |g(x) - B| \times \frac{1}{|g(x)|} < \frac{1}{|B|} \times \varepsilon \times \frac{2}{|B|} = \frac{2\varepsilon}{|B|^2} \quad (7)$$

这与我们最终想要证明的式(1)还差了那么一点，所以需要稍作调整.

1 中，改取  $\varepsilon_0 = \frac{|B|^2}{2}\varepsilon$ ，那么，则必定存在正数  $\delta_1$ ，使得当  $0 < |x - x_0| < \delta_1$  时，有

$$|g(x) - B| < \frac{|B|^2}{2}\varepsilon. \quad (8)$$

这时, 改取  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , 那么当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 可知(8)、(6)两式同时成立. 于是

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} \right| = \frac{1}{|B|} \times |g(x) - B| \times \frac{1}{|g(x)|} < \frac{1}{|B|} \times \frac{|B|^2}{2} \varepsilon \times \frac{2}{|B|} = \varepsilon \quad (9)$$

这就是我们要证明的式(1).