福州清大教育 2018-2019 学年高一数学期末考模拟卷

高一数学　必修四

(考试时间：120 分钟，满分：150 分，另附加分 30 分)

一、选择题 (本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 每题有且只有一个选项是正确的，请把答案填在答卷相应位置上)

1 关于角度制与弧度制的等式，正确的是……………………………………………………（　　）

A. $\pi = 1\text{rad}$　B. $\pi = 180$　C. $1^\circ = \dfrac{180}{\pi}\text{rad}$　D. $1\text{rad} = \left(\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ$

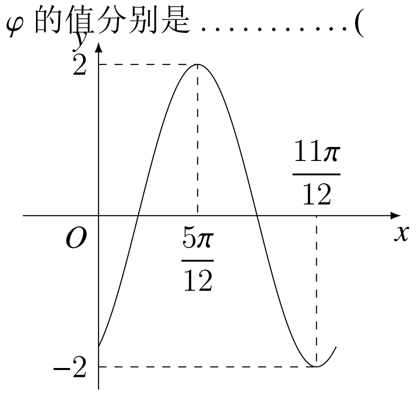
2 已知 $\tan\alpha = -\sqrt{3}, 0 < \alpha < \pi$，那么 $\cos\alpha - \sin\alpha$ 的值是……………………（　　）

A. $-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$　B. $\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$　C. $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$　D. $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

3 设 D 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点，$\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{CD}$，则……………………（　　）

A. $\overrightarrow{AD} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{4}{3}\overrightarrow{AC}$　B. $\overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \dfrac{4}{3}\overrightarrow{AC}$　C. $\overrightarrow{AD} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$　D. $\overrightarrow{AD} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

4 函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)\left(\omega > 0, |\varphi| < \dfrac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示，则 ω, φ 的值分别是…………（　　）



A. $2, -\dfrac{\pi}{3}$　B. $2, -\dfrac{\pi}{6}$　C. $4, -\dfrac{\pi}{6}$　D. $4, \dfrac{\pi}{3}$

5 向量 $\boldsymbol{a} = (1, -2), \boldsymbol{b} = (2, 1)$，则……………………………………………………（　　）

A. $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$　B. $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$　C. $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°　D. $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 30°

6 点 O 是 $\triangle ABC$ 所在平面上的一点，且满足 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$，则点 O 是 $\triangle ABC$ 的…（　　）

A. 重心　B. 垂心　C. 内心　D. 外心

7 已知 $\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + \alpha\right) = -\dfrac{5}{13}$, 则 $\cos\left(\dfrac{\pi}{6} - \alpha\right) =$ ……………………………………（　　）

A. $-\dfrac{5}{12}$　B. $\dfrac{5}{13}$　C. $-\dfrac{5}{13}$　D. $\dfrac{1}{5}$

8 若 $\alpha \in (0, \pi)$，且 $\cos\alpha + \sin\alpha = -\dfrac{1}{3}$，则 $\cos 2\alpha$ 等于……………………………（　　）

A. $\dfrac{17}{9}$　B. $\pm\dfrac{17}{9}$　C. $-\dfrac{17}{9}$　D. $\dfrac{17}{3}$

9 已知向量 $\boldsymbol{a} = \left(\cos\dfrac{3x}{2}, \sin\dfrac{3x}{2}\right)$，$\boldsymbol{b} = \left(\cos\dfrac{x}{2}, -\sin\dfrac{x}{2}\right)$，且 $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$，若 $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| = 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，则 $\sin 2x + \tan x =$ ……………………………………………………（　　）

A. -1　B. 0　C. 2　D. -2

10 设函数 $f(x) = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$，则下列结论正确的是……………………………（　　）

A. $f(x)$ 的图像关于直线 $x = \dfrac{\pi}{3}$ 对称

B. $f(x)$ 的图像关于点 $\left(-\dfrac{\pi}{4}, 0\right)$ 对称

C. 把 $f(x)$ 的图像向左平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位长度，得到一个偶函数的图像

D. $f(x)$ 的最小正周期为 π，且在 $\left[0, \dfrac{\pi}{6}\right]$ 上为增函数

11 在平面直角坐标系中，$AB = CD$，$A(0, 3)$，$B(-4, 0)$，$C(a, -1)(a > 0)$，则向量 $\overrightarrow{BC}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的投影为……………………………………………………（　　）

A. -5　B. -3　C. 3　D. 5

12 已知 $\tan\alpha$，$\tan\beta$ 是方程 $x^2 - 3x - 5 = 0$ 的两根，则 $\tan 2(\alpha + \beta)$ 的值为……………（　　）

A. $-\dfrac{24}{25}$　B. $\dfrac{24}{7}$　C. $-\dfrac{4}{5}$　D. $-\dfrac{4}{3}$

13 (附加题，5 分) 已知正方形 $PQRS$ 对角线交点为 M，坐标原点 O 不在正方形内部，$\overrightarrow{OP} = (0, 3)$，$\overrightarrow{OS} = (4, 0)$，则向量 $\overrightarrow{RM}$ 为……………………………………………………（　　）

A. $\left(-\dfrac{7}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$　B. $\left(\dfrac{7}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$　C. $(7, 4)$　D. $\left(\dfrac{7}{2}, \dfrac{7}{2}\right)$

14 (附加题，5 分) 已知 $\theta \in [0, \pi]$，$f(x) = \sin(\cos\theta)$ 的最大值为 a，最小值为 b，$g(\theta) = \cos(\sin\theta)$ 的最大值为 c，最小值为 d，则 a, b, c, d 从小到大的顺序是……………………（　　）

A. $b < d < a < c$　B. $d < b < c < a$　C. $b < d < c < a$　D. $d < b < a < c$

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

15 已知 $|\boldsymbol{a}| = 1, |\boldsymbol{b}| = 2$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 120°，则使 $\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b}$ 与 $k\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ 的夹角为锐角的实数 k 的取值范围是____________.

16 已知 $\sin\alpha\cos\alpha = -\dfrac{12}{25}$，$\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{4}, 0\right)$，则 $\sin\alpha + \cos\alpha =$ ________.

17 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1，点 E 是 AB 边上的动点，则 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC}$ 的最大值为________.

18 已知函数 $f(x) = \dfrac{(\sin x - \cos x)\sin 2x}{\sin x}$，则 $f(x)$ 的单调递减区间为____________.

19 (附加题，5 分) $\sqrt{3}\tan 18^\circ + \tan 18^\circ \tan 12^\circ + \sqrt{3}\tan 12^\circ =$ ________.

三、解答题（本大题共有 6 个小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程）

20（本小题满分 10 分）求值：

已知 $|\vec{a}| = \sqrt{2}, \left|\vec{b}\right| = 1$ (1) 若 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角 θ 为 45°，求 $\left|\vec{a} - \vec{b}\right|$；

(2) 若 $(\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{b}$，求 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角 θ.

21（本小题满分 12 分）

(1) 化简：$\dfrac{\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{5\pi}{2}+\alpha\right)}\cdot\sin(\alpha-2\pi)\cdot\cos(\pi-\alpha)$；

(2) 已知 $\tan a=-2$，求 $\dfrac{\sin 2a-\cos^2 a}{2+\cos 2a}$ 的值.

22（本小题满分 12 分）

设函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，其中向量 $\boldsymbol{a}=(\cos x,1)$，$\boldsymbol{b}=\left(\cos x,\ \sqrt{3}\sin x\cos x\right)$，$x\in\mathbb{R}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式；

(2) 求满足 $f(x)\leqslant 0$ 的 x 的集合；

(3) 函数 $y=\sin x$ 的图像可由函数 $y=f(x)$ 的图像经过怎样的变换得到？

23（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)+\sqrt{3}\cos 2x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期和对称轴方程；

(2) 若关于 x 的方程 $f(x)-m=2$ 在 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上有两个不同的解，求实数 m 的取值范围.

24（本小题满分 12 分）

已知向量 $\boldsymbol{a}=\left(\dfrac{1}{2},\sin x\right)$，$\boldsymbol{b}=\left(-1,\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$，$f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\dfrac{1}{4}$，$(x\in\mathbb{R})$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调递减区间；

(2) 若函数 $g(x)=f(x)-m,\left(\dfrac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{13\pi}{12}\right)$ 有两个不同的零点 x_1,x_2，求实数 m 的取值范围及 x_1,x_2 的和.

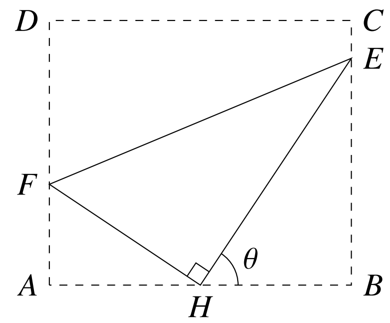
25（本小题满分 12 分）

如图，某污水处理厂要在一个矩形污水处理池（$ABCD$）的池底水平铺设污水净化管道（$Rt\triangle FHE$，H 是直角顶点）米处理污水，管道越长，污水净化效果越好。设计要求管道的接口 H 是 AB 的中点，E、F 分别落在线段 BC、AD 上. 已知 $AB=20$ 米，$AD=10\sqrt{3}$ 米，记 $\angle BHE=\theta$.

(1) 试将污水净化管道的长度 l 表示为 θ 的函数，并写出定义域；

(2) 若 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$，求此时管道的长度 l；

(3) 当 θ 取何值时，污水净化效果好？并求出此时管道的长度.



26（附加题：本小题满分 15 分）

(福州格致中学 2015-2016 学年高一数学第二学期期末检测 22) 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+B(A>0,\omega>0)$ 的一系列对应值如下表:

x	$-\dfrac{\pi}{6}$	$-\dfrac{\pi}{3}$	$-\dfrac{5\pi}{6}$	$-\dfrac{4\pi}{3}$	$-\dfrac{11\pi}{6}$	$-\dfrac{7\pi}{3}$	$-\dfrac{17\pi}{6}$
y	-1	1	3	1	-1	1	3

(1) 根据表格提供的数据求函数 $f(x)$ 的一个解析式；

(2) 根据 (1) 的结果：

(i) 当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$ 时，方程 $f(3x)=m$ 恰有两个不同的解，求实数 m 的取值范围；

(ii) 若是 α,β 是锐角三角形的两个内角，试比较 $f(\sin\alpha)$ 与 $f(\cos\beta)$ 的大小.

福州清大教育 2018-2019 学年高一数学期末考模拟卷

参考答案

1 D

2 A

3 A

4 A

5 B

6 B

7 C

8 A

9 B

10 C

11 A

12 D

13 A

14 A

15 $\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2},1\right)\cup\left(1,\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)$

16 $\frac{1}{5}$

17 1

18 $\left[k\pi+\frac{3\pi}{8},k\pi+\frac{7\pi}{8}\right](k\in\mathbb{Z})$

19 1

20 解：(1) $\left|\vec{a}-\vec{b}\right| = \sqrt{\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2} = \sqrt{2-2\times\sqrt{2}\times1\times\frac{\sqrt{2}}{2}+1}=1$............(5 分)

(2)$\because$ $(\vec{a}-\vec{b})\perp\vec{b}$,

$\therefore$ $(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}^2=\sqrt{2}\times1\times\cos\theta-1=0$,

$\therefore$ $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}(0\le\theta\le\pi)$，$\therefore$ $\theta=\frac{\pi}{4}$.......(10 分)

21 解：(1)原式 $=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\sin\alpha\cdot(-\cos\alpha)=-\sin^2\alpha$;

(2)$\because$ $\tan\alpha=-2$,$\therefore$ 原式 $=\frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha-\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha+1}=\frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha-\cos^2\alpha}{3\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\frac{\frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{3\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{2\tan\alpha-1}{3+\tan^2\alpha}=\frac{2\times(-2)-1}{3+(-2)^2}=-\frac{5}{7}$.

22 解：(1)$f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\cos^2x+\sqrt{3}\sin x\cos x=\frac{\cos2x+1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$.

(2)$\because$ $f(x)\leqslant0$，$\therefore$ $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant-\frac{1}{2}$.

又 $\because$ 不等式 $\sin x\leqslant-\frac{1}{2}$ 的解集为 $\left[2k\pi-\frac{5\pi}{6},2k\pi-\frac{\pi}{6}\right],k\in\mathbb{Z}$.

$\therefore$ $2k\pi-\frac{5\pi}{6}\leqslant2x+\frac{\pi}{6}\leqslant2k\pi-\frac{\pi}{6}$.

解得：$k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant k\pi-\frac{\pi}{6}$ 即：函数 $f(x)\leqslant0$ 的 x 的解集为 $\left\{x\,\middle|\,k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant k\pi-\frac{\pi}{6},k\in\mathbb{Z}\right\}$.

(3) 函数 $y=\sin x$ 的图像可由函数 $y=f(x)$ 的图像经过以下步骤变换得到：

① 向下平移 $\frac{1}{2}$ 个单位，得到函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图像；

② 向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位，得到函数 $y=\sin2x$ 的图像；

③ 横坐标伸长 2 倍，得到函数 $y=\sin x$ 的图像.

23【分析】(1) 利用三角函数的倍角公式以及辅助角公式将函数进行化简即可求最小正周期和对称轴方程；

(2) 求出函数 $f(x)$ 在 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 的取值情况，利用数形结合即可得到结论.

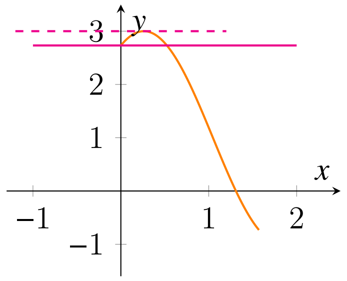
【解答】解：(1) 由 $f(x)=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\sqrt{3}\cos2x=1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)+\sqrt{3}\cos2x=1+\sin2x+\sqrt{3}\cos2x=1+2\sin\left(\frac{\pi}{3}+2x\right)$,

$\because$ $\omega=2$，$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π.

由 $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$ 得：$x=\frac{\pi}{12}+\frac{1}{2}k\pi,k\in\mathbb{Z}$,

故函数 $f(x)$ 的对称轴方程为：$x=\frac{\pi}{12}+\frac{1}{2}k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

(2) 由 $f(x)-m=2$ 得 $f(x)=m+2$，



当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$2x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$，

由图象得 $f(0)=1+2\sin\frac{\pi}{3}=1+\sqrt{3}$，

函数 $f(x)$ 的最大值为 $1+2=3$，

$\therefore$ 要使方程 $f(x)-m=2$ 在 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上有两个不同的解，则 $f(x)=m+2$ 在 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上有两个不同的解，

即函数 $f(x)$ 和 $y=m+2$ 在 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上有两个不同的交点，

即 $1+\sqrt{3}\leqslant m+2<3$，

即 $\sqrt{3}-1\leqslant m<1$.

24 解：(1)$f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}+\sin x\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{4}=\sin x\cdot\left(\cos x\cos\frac{\pi}{6}+\sin x\sin\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x+\frac{1}{2}\sin^2 x-\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x-\frac{1}{4}\cos 2x=\frac{1}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.

由 $2x-\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$，$k\in\mathbb{Z}$，解得 $x\in\left[\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{5\pi}{6}+k\pi\right]$，$k\in\mathbb{Z}$.

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{5\pi}{6}+k\pi\right]$，$k\in\mathbb{Z}$.

(2) $\because$ 函数 $g(x)=f(x)-m,\left(\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{13\pi}{12}\right)$ 有两个不同的零点 x_1,x_2，$\therefore$ 函数 $y=f(x)$ 的图像与函数 $y=m$ 的图像在 $\left[\frac{\pi}{3},\frac{13\pi}{12}\right]$ 上有两个交点.

又 $\because\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{13\pi}{12}$，$\therefore 2x-\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{2},2\pi\right]$.

25 解：

26 (1)$f(x)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+1$；(2)(i)$[\sqrt{3}+1,3)$;(ii)

易得 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$ 上单调递增，故 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增；又 $0<\frac{\pi}{2}-\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}$，从而 $\sin\alpha>\sin(\frac{\pi}{2}-\beta)=\cos\beta$，于是 $f(\sin\alpha)>f(\cos\beta)$