



教师姓名		沈炜炜		学生姓名				首课时间				本课时间			
学习科目		数学		上课年级		高一		教材版本				人教 A 版			
课题名称		三角恒等变换练习													
重点难点		三角恒等变换的应用													

一、知识点总结

两角的和与差

- $C_{\alpha \pm \beta}$: $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$
- $S_{\alpha \pm \beta}$: $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$
- $T_{\alpha \pm \beta}$: $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$

二倍角公式

- $S_{2\alpha}$: $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
- $C_{2\alpha}$: $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$
- $T_{2\alpha}$: $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

半角公式

- $\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$
- $\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$
- $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$

万能公式

- $\sin \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$
- $\cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$
- $\tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$

辅助角公式

- $a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi)$
其中 $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
 $a > 0$ 时,
- $a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi)$
其中 $\tan \varphi = \frac{b}{a}$, $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



二、习题



2.1 (2008 • 山东) 已知 $\cos(\alpha - \frac{\pi}{6}) + \sin \alpha = \frac{4}{5}\sqrt{3}$, 则 $\sin(\alpha + \frac{7\pi}{6})$ 的值是.....()

- A. $-\frac{2\sqrt{3}}{5}$ B. $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ C. $-\frac{4}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

2.2 (2014 • 全国新课标) 设 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 且 $\tan \alpha = \frac{1 + \sin \beta}{\cos \beta}$, 则.....()

- A. $3\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$ B. $3\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ C. $2\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$ D. $2\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

2.3 (2013 • 浙江) 已知 $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sin \alpha + 2 \cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{2}$, 则 $\tan 2\alpha =$()

- A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $-\frac{3}{4}$ D. $-\frac{4}{3}$

2.4 (2011 • 福建) 若 $\tan \alpha = 3$, 则 $\frac{\sin 2\alpha}{\cos^2 \alpha}$ 的值等于.....()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 6

2.5 化简: $\sin(3x + \frac{\pi}{3}) \cos(x - \frac{\pi}{6}) + \cos(3x + \frac{\pi}{3}) \cos(x + \frac{\pi}{3}) =$ _____.

2.6 (2013 • 全国新课标) 设当 $x = \theta$ 时, 函数 $f(x) = \sin x - 2 \cos x$ 取得最大值, 则 $\cos \theta =$ _____.

2.7 函数 $y = \sin(\frac{\pi}{2} + x) \cos(\frac{\pi}{6} - x)$ 的最大值为_____.

2.8 已知 $\cos(x + 2\theta) + 2 \sin \theta \sin(x + \theta) = \frac{1}{3}$, 则 $\cos 2x$ 的值为_____.

2.9 (2017 • 江苏) 若 $\tan(\alpha - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{6}$, 则 $\tan \alpha =$ _____.

2.10 已知 $\sin 2\alpha - 2 = 2 \cos 2\alpha$, 则 $\sin^2 \alpha + \sin 2\alpha =$ _____.

2.11 (2016 • 上海) 方程 $3 \sin x = 1 + \cos 2x$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的解为_____.

2.12 (2014 • 广东) 已知函数 $f(x) = A \sin(x + \frac{\pi}{4})$, $x \in \mathbb{R}$, 且 $f(\frac{5\pi}{12}) = \frac{3}{2}$.

(I) 求 A 的值;

(II) 若 $f(\theta) + f(-\theta) = \frac{3}{2}$, $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 求 $f(\frac{3\pi}{4} - \theta)$.



2.13 (2010 • 上海) 已知 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 化简:

$$\lg(\cos x \tan x + 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}) + \lg \left[\sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right] - \lg(1 + \sin 2x).$$

2.14 (2016 • 天津) 已知函数 $f(x) = 4 \tan x \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) - \sqrt{3}$.

(I) 求 $f(x)$ 的定义域与最小正周期;

(II) 讨论 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right]$ 上的单调性.

2.15 (2012 • 广东) 已知函数 $f(x) = 2 \cos \left(\omega x + \frac{\pi}{6} \right)$ (其中 $\omega > 0, x \in \mathbb{R}$) 的最小正周期为 10π .

(I) 求 ω 的值

(II) 设 $\alpha, \beta \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$, $f\left(5\alpha + \frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{6}{5}$, $f\left(5\beta - \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{16}{17}$, 求 $\cos(\alpha + \beta)$ 的值.



三、参考答案

2.1 C

2.2 C

2.3 C

2.4 D

2.5 $\cos 2x$

2.6 $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

2.7 $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$

2.8 $-\frac{7}{9}$

2.9 $\frac{7}{5}$

2.10 1 或 $\frac{8}{5}$

2.11 $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

2.12 (I) $A = \sqrt{3}$; (II) $f\left(\frac{3\pi}{4} - \theta\right) = \frac{\sqrt{30}}{4}$

2.13 0

2.14 (I) $f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$, 定义域: $\left\{x \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$; 最小正周期: $T = \pi$. (II) $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增, 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{12}\right]$ 上单调递减.

2.15 (I) $\omega = \frac{1}{5}$. (II) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \beta = \frac{8}{17}$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$,
 $\sin \beta = \frac{15}{17}$, $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{13}{85}$.