一、 函数的倒数的极限

首先，要证明的结论是：

任取 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{B}\right|<\varepsilon \tag{1}$$

式(1)可化为：

$$\frac{|g(x)-B|}{|B|\,|g(x)|}<\varepsilon \tag{2}$$

注意到上式左侧由以下三项组成：$\frac{1}{|B|}$、$|g(x)-B|$ 与 $\frac{1}{|g(x)|}$. 现在要做的，就是在已经给定的正数 ε 下，找到合适的 δ，然后分别判断这三项的取值范围，最后论证这三项在给定的 δ 下乘积能够小于 ε.

第一项 $\frac{1}{|B|}$ 是常数；

对第二项 $|g(x)-B|$，与第三项 $\frac{1}{|g(x)|}$，由

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=B \tag{3}$$

可得：对于任意 $\varepsilon_0>0$, 能够找到 δ_0，使得当 $0<|x-x_0|<\delta_0$ 时，有 $|g(x)-B|<\varepsilon_0$.
于是：

① 取 $\varepsilon_0=\varepsilon$，则必定存在正数 δ_{10}，使得当 $0<|x-x_0|<\delta_{10}$ 时，有

$$|g(x)-B|<\varepsilon \tag{4}$$

② 取 $\varepsilon_0=\frac{|B|}{2}$，则必定存在正数 δ_2，使得当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时，就有

$$|g(x)-B|<\frac{|B|}{2} \tag{5}$$

由②，可由绝对值不等式得到

$$\frac{1}{|g(x)|}<\frac{2}{|B|} \tag{6}$$

取 $\delta=\min\{\delta_{10},\delta_2\}$，那么，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，就同时有 $0<|x-x_0|<\delta_{10}$ 与 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 成立.
当 $0<|x-x_0|<\delta_{10}$ 成立时，式(4)成立，
当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 成立时，式(5)成立，那么式(6)也就能够成立.
于是，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，(4)、(6)两式就能同时成立．这时，就有：

$$\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{B}\right|=\frac{1}{|B|}\times|g(x)-B|\times\frac{1}{|g(x)|}<\frac{1}{|B|}\times\varepsilon\times\frac{2}{|B|}=\frac{2\varepsilon}{|B|^2} \tag{7}$$

这与我们最终想要证明的式(1)还差了那么一点，所以需要稍作调整.
①中，改取 $\varepsilon_0=\frac{|B|^2}{2}\varepsilon$，那么，则必定存在正数 δ_1，使得当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时，有

$$|g(x)-B|<\frac{|B|^2}{2}\varepsilon. \tag{8}$$

这时，改取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，那么当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，可知(8)、(6)两式同时成立．于是

$$\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{B}\right|=\frac{1}{|B|}\times|g(x)-B|\times\frac{1}{|g(x)|}<\frac{1}{|B|}\times\frac{|B|^2}{2}\varepsilon\times\frac{2}{|B|}=\varepsilon \tag{9}$$

这就是我们要证明的式(1).