一、 复合函数的极限

首先，回顾一下极限的定义（关于定义域的一些细节就省略不写了）：

> 设 A 为给定常数，如果对任给的 $\varepsilon>0$, 存在正数 δ，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称函数 f 当 x 趋于 x_0 时以 A 为极限．记为：
> $$\lim_{x\to x_0} f(x)=A.$$

ε 这东西就相当于给定一个误差范围一样，无论把这个误差范围限制得多么小，都可以找到在 x_0 附近的 x 值，使得在这范围内的 $f(x)$ 与 A 之间的误差总是在 ε 之内．简单来说，极限的核心要点就是：$f(x)$ 与 A 可以要多接近有多接近．

注意到所谓"x_0 附近的 x 值"$0<|x-x_0|<\delta$ 可以用邻域符号表示为 $x\in\mathring{U}(x_0;\delta)$, 不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 也能用邻域符号表示为 $f(x)\in U(A;\varepsilon)$，于是"函数 f 当 x 趋于 x_0 时以 A 为极限"表明：

> 任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$，使得对一切 $x\in\mathring{U}(x_0;\delta)$，有 $f(x)\in U(A;\varepsilon)$.

也就是说，如果当 x 趋于 x_0 时，函数 f 以 A 为极限，那么：以 A 为中心，无论设定多么"小"的一个邻域 $U(A;\varepsilon)$，都能找出一个 x_0 的 δ 空心邻域 $\mathring{U}(x_0;\delta)$，使得在此范围内的 $f(x)$，都属于邻域 $U(A;\varepsilon)$. 例如：

要使 $f(x)$ 在邻域 $U(A;1)$ 内，可找出一个 δ_1，这时只需 $x\in\mathring{U}(x_0;\delta_1)$ 即可；
要使 $f(x)$ 在邻域 $U(A;0.1)$ 内，可找出一个 δ_2，这时只需 $x\in\mathring{U}(x_0;\delta_2)$ 即可；
要使 $f(x)$ 在邻域 $U(A;0.01)$ 内，可找出一个 δ_3，这时只需 $x\in\mathring{U}(x_0;\delta_3)$ 即可.

另外，还需要特别注意的一点是：$f(x_0)$ 无论是否存在，取值多少，都和极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 没有任何关系；并且函数 f 在 x 趋于 x_0 时极限为 A，并不能说明 $f(x_0)$ 在邻域 $U(A;\varepsilon)$ 内.

现在，简单说明下要判断的问题：

设函数 $y=f\big(\varphi(x)\big)$ 由 $u=\varphi(x)$ 与 $y=f(u)$ 复合而成，若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，且 $\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$，那么是否有下式成立？

$$\lim_{x\to x_0}f\big(\varphi(x)\big)=\lim_{u\to a}f(u)=A \tag{1}$$

(1)式 $\iff$ 任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$，使得对一切 $x\in\mathring{U}(x_0;\delta)$，有 $f\big(\varphi(x)\big)=f(u)\in U(A;\varepsilon)$.

而由 $\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$ 知:

要使 $f(u)$ 在邻域 $U(A;\varepsilon)$ 内，可以找出一个 $h>0$，只需 $u\in\mathring{U}(a;h)$ 即可.

那么，何时 $u=\varphi(x)\in\mathring{U}(a;h)$ ？由 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$ 知:

要使 $\varphi(x)$ 在邻域 $U(a;h)$ 内，可以找出一个 $\delta_1>0$，只需 $x\in\mathring{U}(x_0;\delta_1)$ 即可.

可以注意到，$U(a;h)$ 与 $\mathring{U}(a;h)$ 只差了一点. 可以分以下三种情况讨论：

① 如果 $x\in\mathring{U}(x_0;\delta_1)$ 时，恰好 $u=\varphi(x)\neq a$. 那么这时 $u=\varphi(x)$ 就在空心邻域 $\mathring{U}(a;h)$ 内，于是 $f(u)=f\big(\varphi(x)\big)$ 在邻域 $U(A;\varepsilon)$ 内. 从而(1)式成立.

② 如果 $x\in\mathring{U}(x_0;\delta_1)$ 时，存在某个 $u=\varphi(x)=a$. 这时可以试着将 δ_1 再取小一些，例如取成 δ，且当 $x\in\mathring{U}(x_0;\delta)$ 时，不存在 $u=\varphi(x)=a$，即可化为①中的情况. 于是(1)式仍成立.

【这时，由于 $x\in\mathring{U}(x_0;\delta)\subseteq\mathring{U}(x_0;\delta_1)$，因此 $\varphi(x)\in U(a;h)$；又因为 $u=\varphi(x)\neq a$，从而 $\varphi(x)\in\mathring{U}(a;h)$.】

那么，能不能做到这点呢？可以先考虑一下反面情形，如果取不到上述的 δ，也就是说：对于任意的 $\delta>0$，只要 $x\in\mathring{U}(x_0;\delta)$，就一定存在某个 $u=\varphi(x)=a$. 这种情况在下面的③中讨论. 由这反面情形，可以取到上述的 δ，就一定表明：存在某个 $\delta_2>0$，使得 $x\in\mathring{U}(x_0;\delta_2)$ 时，$u=\varphi(x)\neq a$. 这时，我们取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ 即可.

③ 对于任意的 $\delta_0>0$，只要 $x\in\mathring{U}(x_0;\delta_0)$，就一定存在某个 $u=\varphi(x)=a$. 这时，对于前述的 δ_1，假设 $u^*=\varphi(x^*)=a$，其中 $x^*\in\mathring{U}(x_0;\delta_1)$，这时 $f(u^*)\big(=f(a)\big)$ 是否在邻域 $U(A;\varepsilon)$ 内?

如果不在，那么就无法从 $x\in\mathring{U}(x_0;\delta_1)$ 顺推到 $f(u)\in U(A;\varepsilon)$【有 $f\big(\varphi(x^*)\big)\notin U(A;\varepsilon)$ 这个反例】.

如果在，也就是说，$f(a)\in U(A;\varepsilon)$，那么这时，对于 $x\in\mathring{U}(x_0;\delta_1)$，$f\big(\varphi(x^*)\big)\in U(A;\varepsilon)$ 就一定都能够成立. 于是(1)式得以成立.

注意到上述讨论中，ε 是任取的，也就是说，(1)式要在当前情况③下成立，就要求对任意 $\varepsilon>0$，都必须有 $f(a)\in U(A;\varepsilon)$，而 A 与 $f(a)$ 都是定值，这就表明：$f(a)=A$. 也就是说：函数 f 在点 a 处连续.【后面学到函数的连续性之时，会再讲这种情况.】

最后总结归纳一下复合函数求极限的情形，前面的①、②两种情形其实都可以归结为一种情形，也就是：

> 设函数 $y=f\big(\varphi(x)\big)$ 由 $u=\varphi(x)$ 与 $y=f(u)$ 复合而成，若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，$\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$，并且存在某个 $\delta_2>0$，使得 $x\in\mathring{U}(x_0;\delta_2)$ 时，$\varphi(x)\neq a$. 那么：
> $$\lim_{x\to x_0}f(\varphi(x))=\lim_{u\to a}f(u)=A$$

这就是你当前学习的复合函数极限运算法则. 其中的一种特殊情形就是：

> 设函数 $y=f\big(\varphi(x)\big)$ 由 $u=\varphi(x)$ 与 $y=f(u)$ 复合而成，若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$，$\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$，则有：
> $$\lim_{x\to x_0}f(\varphi(x))=\lim_{u\to\infty}f(u)=A$$

而前面讨论的情形③将在后续学习函数的连续性之时，再次讲到：

> 设函数 $y=f\big(\varphi(x)\big)$ 由 $u=\varphi(x)$ 与 $y=f(u)$ 复合而成，若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，$\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$，并且函数 $y=f(u)$ 在 $u=a$ 处连续，则：
> $$\lim_{x\to x_0}f(\varphi(x))=\lim_{u\to a}f(u)=A$$