教师姓名	沈炜炜	学生姓名	郑旭晶	首课时间	20190423	本课时间	20190514
学习科目	数学	上课年级	高三	教材版本		人教 A 版	
课题名称	填空题与选择题小结						
重点难点							

目录

一、 集合

§1. 集合的表示与常用符号

- 几个特殊的集合：
  - 全体自然数 $0,1,2,3,\ldots,$ 组成的集合，记作 $\mathbb{N}$(natural)；
  - 全体自然数$0,1,2,3,\ldots,$ 组成的集合，记作 $\mathbb{N}$(natural)；
  - 全体正自然数 $1,2,3,\ldots,$ 组成的集合，记作 $\mathbb{N}_+$ 或 $\mathbb{N}^*$；
  - 全体整数$0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots,$ 组成的集合，记作 $\mathbb{Z}$(Zheng shu)；
  - 全体有理数组成的集合，记作 $\mathbb{Q}$(quotient)；
  - 全体实数组成的集合，记作 $\mathbb{R}$(real)；
  - ~~全体复数组成的集合，记作 $\mathbb{C}$(complex)~~.
- 元素 a 属于 (belong to) 集合 A，记为 $a\in A$；反之，若元素 a 不属于集合 A，记作 $a\notin A$；
  【例】：$-1\in\mathbb{Z}$，$0\notin\mathbb{N}^*$.
- 两个集合具有完全一样的元素，则称两集合相等，记作 $A=B$；
  【例】：$\mathbb{N}^*=\mathbb{N}_+$.
- 不包含任何元素的集合称为空集，记为 $\varnothing$；
  【例】：$\{\}=\varnothing$；$a<b$ 时，$\{x\mid b<x<a\}=\varnothing$(如 $\{x\mid 5<x<3\}=\varnothing$).
- 如果集合 A 中的元素都属于集合 B，那么称
  - 集合 A 包含于 (contained) 集合 B，记作 $A\subseteq B$，并称集合 A 是集合 B 的子集 (subset)；
  - 集合 B 包含 (contain) 集合 A，记作 $B\supseteq A$ ~~，并称集合 B 是集合 A 的超集 (superset)~~；

  进一步，如果 $A\subseteq B$，且 $A\neq B$（即：B 中含有集合 A 中没有的元素），则称
  - 集合 A 是集合 B 的真子集 (proper subset)，记作 $A\subsetneqq B$；
  - ~~集合 B 是集合 A 的真超集 (proper superset)，~~记作 $B\supsetneqq A$；

  规定空集 $\varnothing$ 是任何集合的子集.
  【例】：$\varnothing\subsetneqq\{1,2\}$，$\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}$.
- 集合的表示方法 $\{x\in A\mid p(x)\}$. 其中：
  - x 指明集合元素用字母 x 表示，且元素 x 的取值范围是 A;
  - $\mid$ 为分隔符号~~(有时用 : 表示)~~;
  - $p(x)$ 指明集合中的元素所具有的特征.

  【例】：
  - 所有偶数组成的集合：$\{x\mid x=2n,\ n\in\mathbb{Z}\}$；
  - 所有直线 $y=x$ 上的点组成的集合：$\{(x,y)\mid y=2x\}$；
  - 区间$[a,b)$：$\{x\mid a\leqslant x<b, a<b\}$；
  - 区间$[a,+\infty)$：$\{x\mid x\geqslant a\}$.

§2. 集合的运算

- 交集：既属于集合 A，又属于 B 的所有元素组成的集合，记为 $A\cap B$；
  【例】：$\{1,2,3\}\cap\{2,3,5\}=\{2,3\}$；$[2,+\infty)\cap[-1,3)=[2,3)$.

- 并集：集合 A 中所有元素与集合 B 中的所有元素共同组成的集合，记为 $A\cup B$；
  【例】：$\{1,2,3\}\cup\{2,3,5\}=\{1,2,3,5\}$；$[2,+\infty)\cup[-1,3)=[-1,+\infty)$.

- 全集：包含所研究问题中涉及的所有元素的集合；

- 补集：对于全集 U 的一个子集 A(即 $A\subseteq U$)，全集 U 中所有不属于集合 A 的元素组成的集合称为子集 A 在全集 U 中的补集，记为 $\complement_U A$；
  【例】：$U=\{1,2,3,5\}$，$A=\{2,3\}$，$B=[-1,3)$ 时，$\complement_U A=\{1,5\}$，$\complement_{\mathbb{R}}B=(-\infty,-1)\cup[3,+\infty)$.

二、 复数

§1. 定义

- 形如 $a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbb{R})$ 的数叫做复数，通常用字母 z 来表示，即
  $$z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbb{R}).$$
  其中 a 叫做复数 z 的实部，b 叫做复数 z 的虚部. 一个复数的实部或虚部一定是实数.
  【例】：$3-2\mathrm{i}$ 的实部是 3，虚部是 -2；$2\mathrm{i}$ 的实部是 0，虚部是 2；3 的实部是 3，虚部是 0.

- 当且仅当两个复数的实部和虚部分别相等时，两个复数相等. 即：如果 $a,b,c,d\in\mathbb{R}$，那么
  $$a+b\mathrm{i}=c+d\mathrm{i}\Leftrightarrow a=c\text{且}b=d$$
  注 结论"若 $x+y\mathrm{i}=a+b\mathrm{i}$，那么 $a=c\text{且}b=d$"是错误的，因为 x，y，a，b 可能不是实数. 【例】：若 $3-2\mathrm{i}=3+b\mathrm{i}$，则 $b=-2$.

- $$\text{复数}\,a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbb{R})\begin{cases}\text{实数}\ (b=0)\\[2mm]\text{虚数}\ (b\neq 0)\begin{cases}\text{纯虚数}(a=0)\\\text{非纯虚数}(a\neq 0)\end{cases}\end{cases}$$
  【例】：3 是实数；$-1+3\mathrm{i}$ 与 $2\mathrm{i}$ 是虚数，并且 $2\mathrm{i}$ 是纯虚数，$-1+3\mathrm{i}$ 是非纯虚数；以上三个数都是复数.

- 只有两个数都为实数时，这两个数才可以比较大小.
  【例】：$2+3\mathrm{i}$ 与 3 之间不存在大小关系；若 $a+b\mathrm{i}>3(a,b\in\mathbb{R})$，那么 $a+b\mathrm{i}$ 必为实数，即：$b=0$，上式化为 $a>3$.

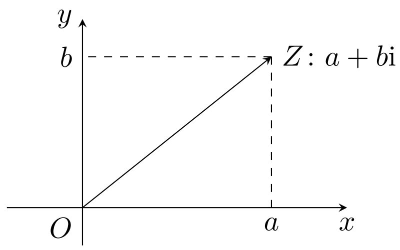
§2. 复数的表示

- 任何一个复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbb{R})$ 都可以由平面上坐标为 (a,b) 的点来表示. 即：复数与平面上的点是一一对应的.
  此时，这个建立了直角坐标系来表示复数的平面就被称作复平面，相应的，x 轴被称作实轴，y 轴被称作虚轴. 显然，实轴上的点都表示实数；虚轴上的点除原点外都表示纯虚数.

  乔丹扣篮时跳得很高好像在飞，所以被称作"飞人乔丹"；"复平面"与此类似：平面上的点可以用来表示复数，所以这个平面被称作复平面；类似的还有"坐标平面"：在平面上建立坐标系，平面上

的点可以用坐标表示，故称为坐标平面；“实轴”与“虚轴”也是一样的道理：横坐标表示复数的实部，纵坐标表示复数的虚部.

由于平面直角坐标系下，平面上的点与平面向量一一对应，故复数与平面向量也是一一对应的.



设复平面内的点 Z 表示复数 $z=a+b\mathrm{i}$，则向量 $\overrightarrow{OZ}$ 与复数 z 对应. 由此，为方便起见，常把复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 说成点 Z 或向量 $\overrightarrow{OZ}$，并且规定：相等的向量表示同一个复数.

【例】：设点 $O(0,0)$，$A(3,0)$，$B(0,-2)$，$C(3,-2)$，则点 O 可表示实数 0，可表示零向量；点 C 可表示复数 $3-2\mathrm{i}$，可表示向量 $\overrightarrow{OC}$；点 B 可表示复数 $-2\mathrm{i}$，可表示向量 $\overrightarrow{OB}$；向量 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}=(0,-2)$，所以 $\overrightarrow{OB}$ 与 都可以表示复数 $-2\mathrm{i}$

- 复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbb{R})$ 对应的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的模，也即点 $Z(a,b)$ 与原点 O 的距离叫做复数的模，记为 $|z|$. 即：

$$|z|=|a+b\mathrm{i}|=\sqrt{a^2+b^2}$$

显然，$|z|\geqslant 0$. 复数的模是一个不小于 0 的实数.

【例】：$|3-4\mathrm{i}|=5$；$|2\mathrm{i}|=2$.

§3. 复数的运算

设 $a,b,c,d\in\mathbb{R}$，那么，

- $(a+b\mathrm{i})+(c+d\mathrm{i})=(a+c)+(b+d)\mathrm{i}$；
- $(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})=ac+ad\mathrm{i}+bc\mathrm{i}+bd\mathrm{i}^2=(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i}$；
- 对于复数 $z=a+b\mathrm{i}$，称 $\bar{z}=a-b\mathrm{i}$ 为 z 的共轭复数；易得 $z\bar{z}=a^2+b^2=|z|^2$.

【例】：$(2+3\mathrm{i})-(-1+\mathrm{i})=3+2\mathrm{i}$；$(2+3\mathrm{i})(-1+\mathrm{i})=-5-5\mathrm{i}$；$\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{(1+\mathrm{i})^2}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\dfrac{2\mathrm{i}}{2}=\mathrm{i}$；$(3+4\mathrm{i})\overline{(3+4\mathrm{i})}=3^2+4^2=25$.

复数是一个数，与实数运算满足同样的运算律. 方程 $4z+5=3\mathrm{i}(z-5)\Longrightarrow(4-3\mathrm{i})z=-5-15\mathrm{i}\Longrightarrow z=\dfrac{-5-15\mathrm{i}}{4-3\mathrm{i}}=1-3\mathrm{i}$

§4. 补充

共轭复数与复数的模具有以下性质，适当使用可大大简化计算.

- $z\bar{z}=|z|^2$；
- $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$，$\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$；
- $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$，$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ $(z_2\neq 0)$；

- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$，$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.

【例】：$\overline{(2+\mathrm{i})-(3-\mathrm{i})} = \overline{2+\mathrm{i}} - \overline{3-\mathrm{i}} = (2-\mathrm{i})-(3+2\mathrm{i}) = -1-3\mathrm{i}$；
$|2\mathrm{i}(2-3\mathrm{i})| = |2\mathrm{i}| \cdot |2-3\mathrm{i}| = 2 \times \sqrt{13} = 2\sqrt{13}$；$\left|\dfrac{2+\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}}\right| = \dfrac{|2+\mathrm{i}|}{|3+4\mathrm{i}|} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$；

三、指数与对数运算

课前检测

求下列各式的值：

1) $\sqrt[3]{-8}$；

2) $\sqrt{(-10)^2}$；

3) $\sqrt[4]{(3-\pi)^4}$；

4) $\sqrt{(a-b)^2}\quad(a>b)$；

§1. 乘方与开方

乘方 n 个相同数字的乘积的运算叫做乘方，乘方的结果叫做幂.

实数 a 的 n 次幂 $a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n\text{个}a}$. 其中，$a$ 叫做底数，n 叫做指数. 由于 n 是正整数，因此又称乘方 a^n 为正整数指数幂.

【例】：$2^3=8$，$(-3)^3=-27$，$0^2=0$.

n 次方根与根式 一般地，设关于 x 的方程：$x^n=a(n>1$ 且 $n\in\mathbb{N})$，则方程的解 x 叫做 a 的 n 次方根 (nth root). 一个数的 n 次方根可能有不止一个值 (当 n 为偶数时)，其中与被开方数a 符号相同的解记为：$\sqrt[n]{a}$，此式称为根式 (radical)，$n=2$ 时常省略不写，即：写成 $\sqrt{a}$.

【例】：方程 $x^2=4$ 的解为 $x=2$ 或 $x=-2$ (简记为 $x=\pm2$)，因此 4 的二次方根为 ±2，或记为 $\pm\sqrt{4}$，其中根式 $\sqrt{4}=2$；

方程 $x^3=-9$ 只有一个解，解为 $\sqrt[3]{-9}=-\sqrt[3]{9}$，因此 -9 的三次方根为 $\sqrt[3]{-9}=-\sqrt[3]{9}$.

运算性质 对于正整数指数幂，有以下运算律：(其中 $a\in\mathbb{R}$，$r,s\in\mathbb{N}_+$)

- $a^ra^s=a^{r+s}$
- $(a^r)^s=a^{rs}$
- $(ab)^r=a^rb^r$

§2. 指数幂运算

在乘方（正整数指数幂）的运算性质中，引入除法与开方，则为使运算性质保持一致性，可分别引入非负数的整数指数幂与分数指数幂. 有：

- $a^0=1$，$a\neq0$；
- $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}(n\in\mathbb{N}_+)$，$a\neq0$；
- $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{m}(m,n\in\mathbb{N}_+$,n>1)，$a\geqslant0$；
- $a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{m}}(m,n\in\mathbb{N}_+$，$n>1)$，$a>0$；

§3. 指数运算与对数运算

对于 $a^k=N$，满足一定条件时：

- 指数幂运算：已知 a、k 可以求出 N. 如 $2^3=8$，$2^{-3}=\dfrac{1}{8}$，$2^{1/2}=\sqrt{2}$；
- 开方运算：已知 N、k 可以求出 a. 如 $\sqrt[3]{-8}=-2$，$\sqrt{4}=2$，$\sqrt[4]{64}=2\sqrt{2}$；需满足的条件：$n>1$ 且 $n\in\mathbb{N}$，且 n 为偶数时 $N>0$；
- 对数运算：已知 a、N 可以求出 k. 如 $\log_2 8=3$，$\log_2\frac{1}{16}=-4$. 需满足的条件：$a>0$ 且 $a\neq 1$，$N>0$，

3.1 [2016 • 全国新课标 (文)] 若 $a>b>0$，$0<c<1$，则……………………………………(　　)

A. $\log_a c<\log_b c$　　B. $\log_c a<\log_c b$　　C. $a^c<b^c$　　D. $c^a>c^b$

3.2 [2010 文 • 浙江] 已知函数 $f(x)=\log_2(x+1)$，若 $f(a)=1$，则 $a=$……………………(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

3.3 [2014 • 陕西 (文)] 已知 $4^a=2$，若 $\lg x=a$，则 $x=$____________.

四、 函数、方程与不等式

定义 一般地，有：

设 A，B 是非空的数集，如果按照某种确定的对应关系 f，使对于集合 A 中的任意一个数 x，在集合 B 中都有唯一确定的数 $f(x)$ 和它对应，那么就称 $f\colon A\mapsto B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数，记作

$$y=f(x),\qquad x\in A.$$

其中，x 叫做自变量，x 的取值范围 A 叫做函数的定义域；与 x 的值相对应的 y 值叫做函数值，函数值的集合 $\{f(x)|x\in A\}$ 叫做函数的值域，值域是集合 B 的子集.

- 函数是两个数集间的一种对应关系；
- 未指明定义域的情况下，默认定义域取使得对应关系有意义的所有实数. 具体如下：
  ① 分式的分母不为 0;
  ② 偶次根式的被开方数不小于 0;
  ③ 零次或负次指数次幂的底数不为零;
  ④ 对数的真数大于 0;
  ⑤ 指数、对数函数的底数大于 0 且不等于 1;
  ⑥ 实际问题对自变量的限制.
- 若函数 $f(x)$ 定义域为 D，且 $f(a)$ 存在，则 $a\in D$.

五、 指数函数、对数函数、幂函数

六、 平面向量

§1. 五种常见向量

1) 单位向量：模为 1 的向量.

2) 零向量：模为 0 的向量.

3) 平行 (共线向量)：方向相同或相反或其一为零向量的两个向量.

4) 相等向量：模相等，方向相同的向量.

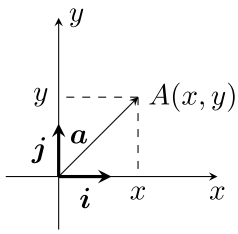
5) 相反向量：模相等，方向相反的向量.

§2. 坐标表示

平面内的任一向量 $\boldsymbol{a}$ 都可以由 x，y 唯一确定，我们把有序数对 (x,y) 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，记作

$$\boldsymbol{a}=(x,y) \tag{1}$$

其中 x 叫做 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴上的坐标，y 叫做 $\boldsymbol{a}$ 在 y 轴上的坐标，(1) 式叫做**向量的坐标表示**



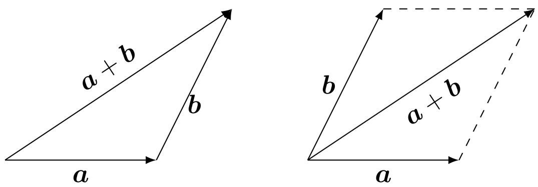
§3. 向量的线性运算与数量积

向量的线性运算包括向量的加、减、数乘运算.

3.1 加法

定义 两个向量和的运算；

法则 平行四边形法则或三角形法则



对于零向量与任一向量 $\boldsymbol{a}$，规定

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$$

由三角形法则，可得向量不等式 (有时称作“三角形不等式”)：

$$\big|\,|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|\,\big|\leqslant|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$$

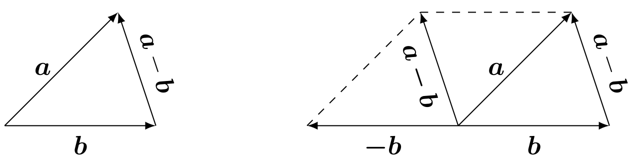
若 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为非零向量，则：当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时，左边等式成立；当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时，右边等式成立；

3.2 减法

定义 减去一个向量相当于加上这个向量的相反向量，即

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$$

运算法则 三角形法则、平行四边形法则.



对于任意一点 P，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}$.

3.3 数乘

定义 求实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的积是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$, 长度与方向由以下法则规定:

法则 1) $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$;

2)
- 当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同;
- 当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反;
- 当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$.

对于任意向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 以及任意实数 λ，μ_1，μ_2，恒有:

$$\lambda(\mu_1\boldsymbol{a}\pm\mu_2\boldsymbol{b})=\lambda\mu_1\boldsymbol{a}\pm\lambda\mu_2\boldsymbol{b}$$

§4. 数量积

定义 已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$, 我们把数量 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 叫做 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积** (又称点积、内积), 记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, 即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

其中 θ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

$|\boldsymbol{a}|\cos\theta(|\boldsymbol{b}|\cos\theta)$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上 ($\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上) 的**投影**,

几何意义 两个向量的数量积等于其中一个向量的模长与另一个向量在此向量方向上的投影的乘积

注: 当 $\theta=0$ 时，$\cos\theta=1$，所以有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$;

当 $\theta=90^\circ$ 时，有 $\cos\theta=0$，所以有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$

当 $\theta=180^\circ$ 时，有 $\cos\theta=-1$，所以有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$

数量积坐标计算 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2$.

夹角公式

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}\quad(\theta\in[0,\pi]\text{，}\theta\text{也写作}\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle)\,.$$

4.1 坐标运算

1. 设点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$, 则 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$.

   一个向量的坐标等于表示此向量的有向线段的终点的坐标减去起始点的坐标.

2. 若 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)\,,\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$.

   加法: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j})+(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j})\\&=(x_1+x_2)\,\boldsymbol{i}+(y_1+y_2)\,\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

$$\text{即: }\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$$

   减法: $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(x_1-x_2,y_1-y_2)$. 同加法可得

   数乘: $\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x_1,\lambda y_1)$

$$\begin{aligned}\lambda\boldsymbol{a}&=\lambda\,(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j})=\lambda x_1\boldsymbol{i}+\lambda y_1\boldsymbol{j}\\&=(\lambda x_1,\lambda y_1)\end{aligned}$$

模长 $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$　　$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| = \sqrt{(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2} = \sqrt{\boldsymbol{a}^2 + 2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}^2}$

共线 $\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} \Leftrightarrow x_1y_2 = y_2x_1$

由向量共线的性质知 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0})$ 共线，当且仅当存在实数 λ 使得 $\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{b}$.

用坐标表示为：

$$(x_1, y_1) = \lambda(x_2, y_2)$$

即

$$\begin{cases} x_1 = \lambda x_2 \\ y_1 = \lambda y_2 \end{cases}$$

消去 λ 得到

$$x_1y_2 - x_2y_1 = 0$$

垂直 $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$

证明．由向量的数量积性质，当 $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ 时，由 $\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$得到

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$$

□

§5. 平面向量运算律

1) 交换律：$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$，　$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$
2) 结合律：$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$，　$(\lambda\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot (\lambda\boldsymbol{b})$
3) 分配律：$(\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}$，　$\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$，　$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$
4) 重要公式：(记号 $\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}$) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{b}^2$，　$(\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 \pm 2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}^2$.

§6. 两个重要定理

1) 向量共线定理：向量 $\boldsymbol{a}$ $(\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0})$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 共线，当且仅当存在唯一的实数 λ，使得 $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$.
   证明三点共线的方法：①$\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC}$，则 A，B，C 三点共线；②$\overrightarrow{OA} = \lambda\overrightarrow{OB} + \mu\overrightarrow{OC}$，若 $\lambda + \mu = 1$，则 A，B，C 三点共线.
2) 平面向量基本定理：如果 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 是同一平面内的两个不共线的向量，则那么对于这一平面内的任意向量 $\boldsymbol{a}$，有且只有一对实数 λ_1，λ_2，使 $\boldsymbol{a} = \lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \lambda_2\boldsymbol{e}_2$. 其中，不共线的向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 叫做表示这一平面内所有向量的一组基底.

§7. 平面向量数量积相关量求解

1) 向量模长：若 $\boldsymbol{a} = (x, y)$，则 $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}} = \sqrt{x^2 + y^2}$
2) 向量投影：向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影为 $|\boldsymbol{a}|\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$
3) 向量夹角：设 $\boldsymbol{a} = (x_1, y_1)$，$\boldsymbol{b} = (x_2, y_2)$，则 $\cos\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle = \dfrac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$　$(\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle \in [0, \pi])$

七、 三角函数概念、同角关系与恒等变换

§1. 基础知识

§2.

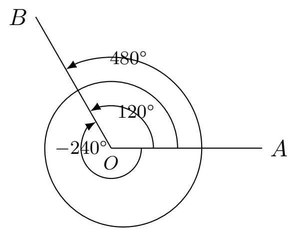
§3. 进阶知识

§4. 补充说明

§5. 任意角的概念

1. 角可以看成平面内一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所形成的图形．规定按逆时针方向旋转形成的角叫做正角，按顺时针方向旋转形成的角叫做负角．如果一条射线没有作任何旋转，则称其为零角．

   【例】:如图，一条射线的端点是 O，若从起始位置 OA（始边）按逆时针方向旋转到终止位置 OB（终边），形成 $120°$ 的角；若从始边 OA 按顺时针方向旋转到终边 OB，则形成 $-240°$ 的角；若从始边 OA 按逆时针方向旋转一圈后继续旋转到终边 OB，则形成 $480°$ 的角；



2. 在直角坐标系内讨论角时，令角的顶点与原点重合，角的始边与 x 轴的非负半轴重合（始边是射线，应包括端点即原点，故不能说成正半轴）．那么，角的终边在第几象限，就说这个角是第几象限角．

   【例】: $30°$ 角是第一象限角；$-200°$ 角是第二象限角；$200°$ 是第三象限角；$350°$ 角是第四象限角；$90°$ 角不属于任何一个象限．

3. 终边相同的角：所有与 α 终边相同的角（始边均为 x 轴非负半轴）连同 α 在内可以构建一个集合 $S=\{\beta\mid\beta=\alpha+k\cdot360°,\,k\in\mathbb{Z}\}$．

§6. 弧度制

把长度等于半径长的弧所对的圆心角叫做 1 弧度的角，用符号 rad 表示，读作弧度．

一般的，正角的弧度是正数，负角的弧度是负数，零角的弧度是 0．如果半径为 r 的圆的圆心角 α 所对的弧的长为 l，那么角 α 的弧度数的绝对值是:

$$|\alpha|=\frac{l}{r}.$$

角度与弧度对应关系：$360°=2\pi\,\mathrm{rad}$；

若一个叫角的度数为 n，弧度数为 α，则 n 与 α 之间的关系为：$\dfrac{n}{360}=\dfrac{\alpha}{2\pi}$；

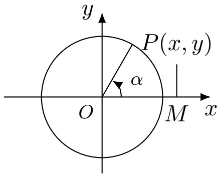
【例】: $\dfrac{90}{360}=\dfrac{\pi/2}{2\pi}\Longrightarrow 90°=\dfrac{\pi}{2}\,\mathrm{rad}$ $\dfrac{45}{360}=\dfrac{\pi/4}{2\pi}\Longrightarrow 45°=\dfrac{\pi}{4}\,\mathrm{rad}$．常见角度与弧度的换算:

度	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$270°$	$360°$
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

§7. 任意角的三角函数

$P(x,y)$ 是角 α 终边上异于原点的一点，$|OP|=r=\sqrt{x^2+y^2}$，则

$$\sin\alpha=\frac{y}{r},\cos\alpha=\frac{x}{r},\tan\alpha=\frac{y}{x}.$$



§8. 三角恒等式

两角的和与差

- $\mathrm{C}_{\alpha\pm\beta}$：$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$
- $\mathrm{S}_{\alpha\pm\beta}$：$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$
- $\mathrm{T}_{\alpha\pm\beta}$：$\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$

二倍角公式

- $\mathrm{S}_{2\alpha}$：$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$
- $\mathrm{C}_{2\alpha}$：$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$
- $\mathrm{T}_{2\alpha}$：$\tan2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

半角公式

- $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$
- $\cos\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$
- $\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

辅助角公式

- $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$
  其中 $\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$
  $a>0$ 时，
- $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$
  其中 $\tan\varphi=\dfrac{b}{a}$，$\varphi\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$

7.1 (2016 • 师大附中 2) 若点 $P(\sin\theta\cos\theta,2\cos\theta)$ 位于第三象限，那么角 θ 终边落在 . . . . (　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

7.2 (2015 文 • 福建) 若 $\sin\alpha=-\dfrac{5}{13}$，且 α 为第四象限角，则 $\tan\alpha$ 的值等于 . . . . (　　)

A. $\dfrac{12}{5}$　　B. $-\dfrac{12}{5}$　　C. $\dfrac{5}{12}$　　D. $-\dfrac{5}{12}$

7.3 (2016 文 • 全国新课标) 已知 θ 是第四象限角，且 $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{3}{5}$，则 $\tan\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=$____________.

7.4 (2018 • 福州期末 (文)) $\sqrt{3}\cos15^\circ-4\sin^2 15^\circ\cos15^\circ=$ . . . . (　　)

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C. 1　　D. $\sqrt{2}$

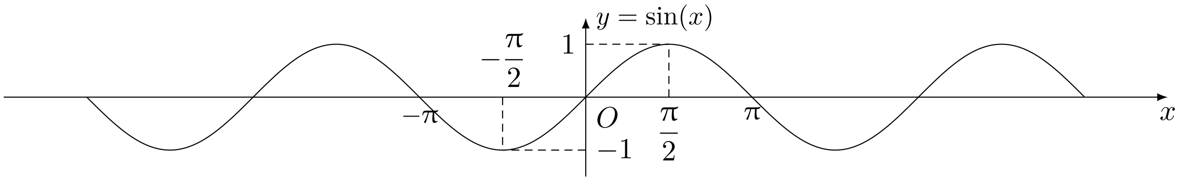
7.5 (2018 • 唐山五校联考 (文)) 已知 α 是第三象限角，且 $\tan\alpha=2$，则 $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=$ . . . . (　　)

A. $-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$　　B. $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$　　C. $-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$　　D. $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

八、 三角函数的图像和性质

§1. 三角函数的图像和性质

1.1 正弦函数

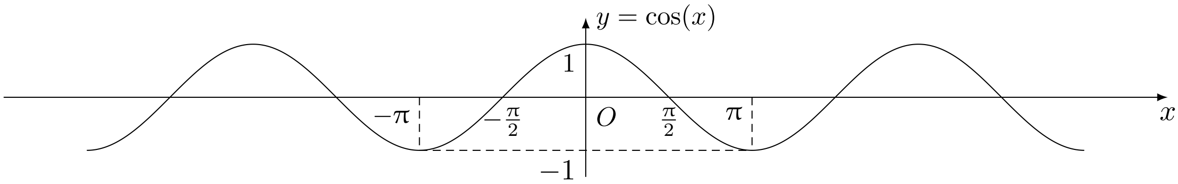


① 定义域：$x\in\mathbb{R}$； 值域：$[-1,1]$ ； 奇偶性：奇函数；

② 对称轴：$x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}\,(k\in\mathbb{Z})$； 对称中心：$(k\pi,0)\,(k\in\mathbb{Z})$； 最小正周期：$T=2\pi$;

③ 单调递增区间：$\left[2k\pi-\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right](k\in\mathbb{Z})$； 单调递减区间：$\left[2k\pi+\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}\right](k\in\mathbb{Z})$.

1.2 余弦函数

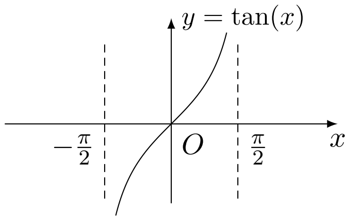


① 定义域：$x\in\mathbb{R}$； 值域：$[-1,1]$； 奇偶性：偶函数；

② 对称轴：$x=k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$； 对称中心：$\left(k\pi+\dfrac{\pi}{2},0\right)(k\in\mathbb{Z})$； 最小正周期：$T=2\pi$；

③ 单调递增区间：$[2k\pi-\pi,2k\pi]\,(k\in\mathbb{Z})$； 单调递减区间：$[2k\pi,2k\pi+\pi]\,(k\in\mathbb{Z})$.

1.3 正切函数



① 定义域：$\left\{x\,\middle|\,x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$； 值域：R； 奇偶性：奇函数；

② 对称中心：$\left(\dfrac{k\pi}{2},0\right)(k\in\mathbb{Z})$； 无对称轴； 最小正周期：$T=\pi$;

③ 单调递增区间：$\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)(k\in\mathbb{Z})$;

8.1 [2018 文 • 全国 III 卷] 函数 $f(x)=\dfrac{\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$ 的最小正周期为 ……………………………( )

A. $\dfrac{\pi}{4}$　　B. $\dfrac{\pi}{2}$　　C. π　　D. 2π

8.2 [2018 文 • 全国 I 卷] 已知函数 $f(x)=2\cos^2 x-\sin^2 x+2$，则 ……………………………（ ）

A. $f(x)$ 的最小正周期为 π，最大值为 3
B. $f(x)$ 的最小正周期为 π，最大值为 4
C. $f(x)$ 的最小正周期为 2π，最大值为 3
D. $f(x)$ 的最小正周期为 2π，最大值为 4

8.3 函数 $y=\sqrt{\cos x-\dfrac{1}{2}}$ 的定义域为____________.

8.4 关于函数 $f(x)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)(x\in\mathbb{R})$，有下列说法：

①由 $f(x_1)=f(x_2)=0$ 可得 x_1-x_2 必是 π 的整数倍；②$y=f(x)$ 的表达式可改写为 $f(x)=2\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$；③$y=f(x)$ 的图像关于点 $\left(-\dfrac{\pi}{6},0\right)$ 对称；④$y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=\dfrac{7\pi}{12}$ 对称.

其中说法正确的序号是____________.

8.5 若方程 $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)=m$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上有两个实根，则实数 m 取值范围是 ………………（ ）

A. $\left[-1,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$ B. $\left(-1,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$ C. $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right]$ D. $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$

8.6 已知函数 $f(x)=3\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)+3$，$x\in\mathbb{R}$.

(I) 求函数 $f(x)$ 的单调增区间；

(II) 若 $x\in\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3}\right]$，求 $f(x)$ 的最大值和最小值，并指出 $f(x)$ 取得最值时相应 x 的值.

§2. 三角函数图像的 (线性) 变换

函数 $y=f(x)$ 图像经平移或伸缩变换后的图像解析式：坐标变量的变化与图像相反

$$y=f(x)\xrightarrow[\text{平移}|a|\text{个单位}]{\text{向左}(a>0)\text{或向右}(a<0)}y=f(x+a)\qquad y=f(x)\xrightarrow[\text{纵坐标不变}]{\text{横坐标变为原来的}k\text{倍}}y=f\left(\frac{x}{k}\right)$$

$$y=f(x)\xrightarrow[\text{平移}|a|\text{个单位}]{\text{向下}(a>0)\text{或向上}(a<0)}y+a=f(x)\qquad y=f(x)\xrightarrow[\text{横坐标不变}]{\text{纵坐标变为原来的}A\text{倍}}\frac{y}{A}=f(x)$$

由函数 $y=\sin(x)$ 的图象经过变换得到 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象方法

① 先平移后伸缩

$$y=\sin x \xrightarrow[\text{平移}|\varphi|\text{个单位}]{\text{向左}(\varphi>0)\text{或向右}(\varphi<0)} y=\sin(x+\varphi)$$

$$\xrightarrow[\text{纵坐标不变}]{\text{横坐标变为原来的}\frac{1}{\omega}} y=\sin(\omega x+\varphi)$$

$$\xrightarrow[\text{横坐标不变}]{\text{纵坐标变为原来的}A\text{倍}} y=A\sin(\omega x+\varphi)$$

② 先伸缩后平移

$$y=\sin x \xrightarrow[\text{纵坐标不变}]{\text{横坐标变为原来的}\frac{1}{\omega}} y=\sin\omega x$$

$$\xrightarrow[\text{平移}|\frac{\varphi}{\omega}|\text{个单位}]{\text{向左}(\varphi>0)\text{或向右}(\varphi<0)} y=\sin\left[\omega\left(x+\frac{\varphi}{\omega}\right)\right]$$

$$\xrightarrow[\text{横坐标不变}]{\text{纵坐标变为原来的}A\text{倍}} y=A\sin(\omega x+\varphi)$$

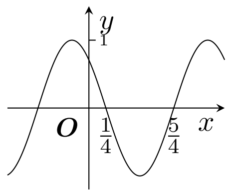
由图象求函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的解析式一般步骤：

1° 由函数的最值确定 A 的取值；

2° 由函数的周期确定 ω 的值，周期：$T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}$；

3° 由函数图象最高点（最低点）的坐标得到关于 φ 的方程，再由 φ 的范围确定 φ 的值.

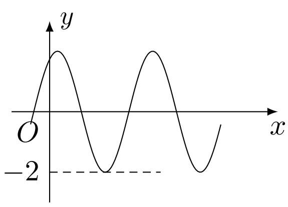
8.7 (2015 • 全国新课标) 函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)$ 的部分图象如图所示，则 $f(x)$ 的单调递减区间为…(　　)



A. $\left(k\pi-\frac{1}{4},k\pi+\frac{3}{4}\right),k\in\mathbb{Z}$　　B. $\left(2k\pi-\frac{1}{4},2k\pi+\frac{3}{4}\right),k\in\mathbb{Z}$

C. $\left(k-\frac{1}{4},k+\frac{3}{4}\right),k\in\mathbb{Z}$　　D. $\left(2k-\frac{1}{4},2k+\frac{3}{4}\right),k\in\mathbb{Z}$

8.8 (2018 • 南宁摸底联考（文）) 如图，函数 $f(x)=A\sin(2x+\varphi)$ $(A>0,\ |\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的图像经过点 $(0,\sqrt{3})$，则函数 $f(x)$ 的解析式为……(　　)



A. $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$　　B. $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

C. $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$　　D. $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$

8.9 将函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图像上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），再将所得的图像向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位，得到的函数图像对应的解析式是……(　　)

A. $y=\sin\frac{x}{2}$　　B. $y=\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)$　　C. $y=\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$　　D. $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$

8.10 函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，所得的图像对应的函数……(　　)

A. 为非奇非偶函数　　B. 图像的对称中心为 $(2k\pi,0)(k\in\mathbb{Z})$

C. 为奇函数　　D. 在 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增

8.11 设函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$，$x\in\mathbb{R}$，其中 $\omega>0$，$|\varphi|<\pi$，若 $f\left(\dfrac{5\pi}{8}\right)=2$，$f\left(\dfrac{11\pi}{8}\right)=0$，且 $f(x)$ 的最小正周期大于 π，则……（　　）

A. $\omega=\dfrac{2}{3}$，$\varphi=\dfrac{\pi}{12}$　　B. $\omega=\dfrac{2}{3}$，$\varphi=-\dfrac{11\pi}{12}$　　C. $\omega=\dfrac{1}{3}$，$\varphi=-\dfrac{11\pi}{24}$　　D. $\omega=\dfrac{1}{3}$，$\varphi=\dfrac{7\pi}{24}$

8.12 设函数 $f(x)=\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{2}\right)$，其中 $0<\omega<3$. 已知 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=0$.

(I) 求 ω；

(II) 将函数 $y=f(x)$ 的图像上各点的横坐标伸长为原来的 2 倍 (纵坐标不变)，再将得到的图像向左平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位，得到函数 $y=g(x)$ 的图像，求 $g(x)$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$ 上的最小值.

九、 直线与圆方程

十、 导数

§1. 导数的定义

若函数 $f(x)$ 的在 x_0 附近有定义，当自变量 x 在 x_0 处取得一个增量 $\triangle x$ 时 ($\triangle x$充分小)，因变量 y 也随之取得增量 $\triangle y$ ($\triangle y=f(x_0+\triangle x)-f(x_0)$). 若 $\lim\limits_{\triangle x\to0}\dfrac{\triangle y}{\triangle x}$ 存在，则称 $f(x)$ 在 x_0 处可导，此极限值称为 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数 (或变化率)，记作 $f'(x_0)$ 或 $y'\big|_{x=x_0}$ 或 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x_0}$，即 $f'(x_0)=\lim\limits_{\triangle x\to0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

§2. 常用函数的导数和基本运算

2.1 常用函数的导数

原函数	导数
$y=C$ (C为常数)	$y'=0$
$y=x^n$ ($n\in\mathbb{Q}^*$)	$y'=nx^{n-1}$
$y=\sin x$	$y'=\cos x$
$y=\cos x$	$y'=-\sin x$
$y=e^x$	$y'=e^x$
$y=\ln x$	$y'=\dfrac{1}{x}$

2.2 四则运算

1. $(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)$;

2. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;

3. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

§3. 切线方程

§4. 导数的几何意义

函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 的几何意义是：曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率 (瞬时速度就是位移 $s(t)$ 对时间 t 的导数).

§5. 求曲线切线方程的步骤：

5.1 点 $P(x_0, y_0)$ 在曲线上

1. 求出函数 $y = f(x)$ 在点 $x = x_0$ 的导数，即曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率;
2. 在已知切点坐标 $P(x_0, f(x_0))$ 和切线斜率的条件下，求得切线方程为 $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

注：① 当曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处的切线平行于 y 轴时 (此时导数不存在)，由切线的定义可知，切线方程为 $x = x_0$;

② 当切点坐标未知时，应首先设出切点坐标，再求解.

5.2 点 $P(x_0, y_0)$ 不在曲线上

1. 设出切点 $P'(x_1, f(x_1))$;
2. 写出过点 $P'(x_1, f(x_1))$ 的切线方程 $y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$;
3. 将点 P 的坐标 (x_0, y_0) 代入切线方程，求出 x_1;
4. 将 x_1 的值代入方程 $y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$，可得过点 $P(x_0, y_0)$ 的切线方程.

5.3 切线方程已知

当曲线的切线方程是已知时，常合理选择以下三个条件的表达式解题：

1. 切点在切线上;
2. 切点在曲线上;
3. 切点横坐标处的导数等于切线的斜率.

十一、 线性规划

十二、 等差数列与等比数列

十三、 框图

十四、 基本不等式

十五、 概率与统计

十六、

十七、参考答案

3.1 B

3.2 B

3.3 $\sqrt{10}$

7.1 B

7.2 D

7.3 $-\dfrac{4}{3}$

7.4 D

7.5 A

8.1 C

8.2 B

8.3 $\left[-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi, \dfrac{\pi}{3}+2k\pi\right]$，$k\in\mathbb{Z}$

8.4 ②③④

8.5 B

8.6 (I) $\left[-\dfrac{4\pi}{3}+4k\pi, \dfrac{2\pi}{3}+4k\pi\right]$, $k\in\mathbb{Z}$; (II) 当 $x=\dfrac{4\pi}{3}$ 时，取最小值 $f(x)_{\min}=\dfrac{9}{2}$；当 $x=\dfrac{2\pi}{3}$ 时，取最大值 $f(x)_{\max}=6$.

8.7 D

8.8 B

8.9 C

8.10 C

8.11 A

8.12 (I) $f(x)=\sqrt{3}\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{3}\right)$，$\omega=2$. (II) $g(x)=\sqrt{3}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{12}\right)$，当 $x=-\dfrac{\pi}{4}$ 时, $g(x)$ 取得最小值 $-\dfrac{3}{2}$