教师姓名	沈炜炜	学生姓名		首课时间		本课时间	
学习科目	数学	上课年级	高一	教材版本		人教 A 版	
课题名称	向量基本概念与线性运算						
重点难点	向量共线定理及其运用						

一、 向量的基本相关概念

有向线段 带有方向的线段. 用 $\overrightarrow{AB}$ 表示；线段 AB 的长度也叫做有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的长度，记作 $|\overrightarrow{AB}|$.

有向线段包含三要素：起点、方向、长度

向量 既有大小，又有方向的量，用 $\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{a}$ 表示；向量的大小即向量的长度或向量的模，用 $|\boldsymbol{a}|$ 表示.

- 不同于有向线段，平面向量是自由向量 (无源向量)；
- 只有大小，没有方向的量称为数量；（物理学中通常称数量为标量，并把向量称为矢量）

零向量 长度为零的向量，其方向是任意的，记作 $\vec{0}$ 或 $\boldsymbol{0}$；

相等向量 长度相等且方向相同的向量；

两个向量只能相等或者不相等，不能比较大小.

相反向量 长度相等且方向相反的向量

规定：$\boldsymbol{0}$ 的相反向量为 $\boldsymbol{0}$

单位向量 长度等于一个单位长度的向量；

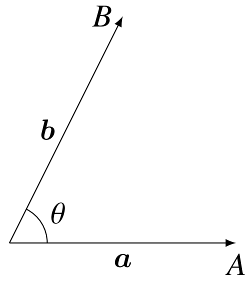
与向量 $\boldsymbol{a}$ 方向相同的向量通常记为 $\hat{\boldsymbol{a}}(=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|})$(一般手写为 $\hat{a}$ 即可).

平行向量 (共线向量) 方向相同或相反的非零向量叫做平行向量或共线向量；规定零向量与任一向量平行共线. 向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 平行记作 $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$.

向量平行不具有传递性

向量的夹角 已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，如图，做 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则 $\angle AOB=\theta$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角. 记作 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 或 $\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle$.

- 向量夹角的取值范围：$[0,\pi]$；
- 当 $\theta=0^\circ$ 时，向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线且同向；
- 当 $\theta=90^\circ$ 时，向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 相互垂直，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$；
- 当 $\theta=180^\circ$ 时，向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线且反向.



基础测试

1.1 判断下列结论是否正确 (请在括号中打“✓”或“✗”)

(1) 向量与有向线段是一样的，因此可以用有向线段来表示向量.（　　）

(2)$|\boldsymbol{a}|$ 与 $|\boldsymbol{b}|$ 是否相等与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的方向无关.（　　）

(3) 若 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{c}$.(　　)

(4) 若向量 $\overrightarrow{AB}$ 与向量 $\overrightarrow{CD}$ 是共线向量，则 A,B,C,D 四点在一条直线上.（　　）

(5) 若向量 $\overrightarrow{AB}$ 与向量 $\overrightarrow{CD}$ 平行，则直线 AB 与 CD 平行.(　　)

(6) 若向量 $\boldsymbol{a}$ 与任一向量 $\boldsymbol{b}$ 平行，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.（　　）

(7) 若两个向量共线，则其方向必定相同或相反.（　　）

1.2 有下列命题：①两个相等向量，它们的起点相同，终点也相同；②若 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$；③若 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$，则四边形 $ABCD$ 是平行四边形；④若 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{k}$，则 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{k}$；⑤位移、速率、重力加速度都是向量；⑥共线的向量，若起点不同，则终点一定不同. 其中，错误的个数是....(　　)

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

1.3 正方形 $ABCD$ 中，向量 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角为__________，向量 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 的夹角为__________.

1.4 在平面内，若将所有单位向量的起点平移到同一点，则它们的终点构成的图形为__________.

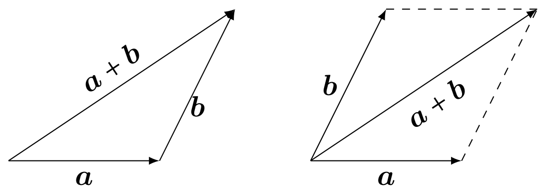
二、 向量的线性运算

向量的线性运算包括向量的加、减、数乘运算.

§1. 加法

定义 两个向量和的运算;

法则 平行四边形法则或三角形法则



对于零向量与任一向量 $\boldsymbol{a}$, 规定

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$$

由三角形法则, 可得向量不等式 (有时称作“三角形不等式”):

$$\big||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|\big|\leqslant|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$$

若 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为非零向量, 则: 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时, 左边等式成立; 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时, 右边等式成立;

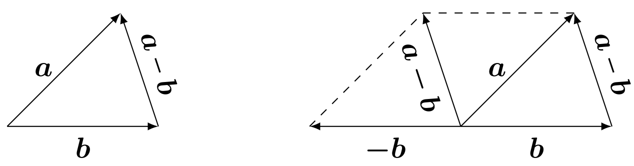
运算律
- 交换律: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$
- 结合律: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

§2. 减法

定义 减去一个向量相当于加上这个向量的相反向量, 即

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$$

运算法则 三角形法则、平行四边形法则.



对于任意一点 P, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}$,

§3. 数乘

定义 求实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的积是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$, 长度与方向由以下法则规定：

法则 1) $|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda|\,|\boldsymbol{a}|$;

2)
- 当 $\lambda > 0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；
- 当 $\lambda < 0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反；
- 当 $\lambda = 0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

运算律 设 $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$，则：

- $\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;
- $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}$;
- $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$.

对于任意向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 以及任意实数 λ，μ_1，μ_2，恒有：

$$\lambda(\mu_1\boldsymbol{a} \pm \mu_2\boldsymbol{b}) = \lambda\mu_1\boldsymbol{a} \pm \lambda\mu_2\boldsymbol{b}$$

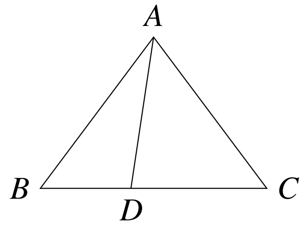
定理 (向量共线定理)**.** 向量 $\boldsymbol{a}$ ($\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$) 与向量 $\boldsymbol{b}$ 共线，当且仅当存在唯一的实数 λ，使得 $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$.

证明三点共线的方法：①$\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC}$，则 A，B，C 三点共线；②$\overrightarrow{OA} = \lambda\overrightarrow{OB} + \mu\overrightarrow{OC}$，若 $\lambda+\mu = 1$，则 A，B，C 三点共线.

基础测试

2.1 如图，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD}$ 等于 . . . . ( )

A. $\overrightarrow{AD}$ B. $\overrightarrow{DC}$ C. $\overrightarrow{DB}$ D. $\overrightarrow{AB}$



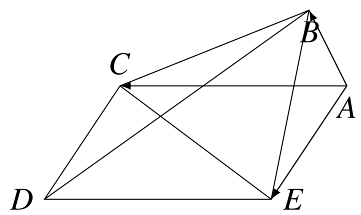
2.2 判断下列结论是否正确 (请在括号中打“✓”或“✗”)

(1) 若向量 $\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 共线, 则存在唯一的实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.( )

(2) 若 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线.( )

(3) 若 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}=0$.( )

2.3 如图所示，在五边形 $ABCDE$ 中，若四边形 $ACDE$ 是平行四边形，且 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{c}$，试用向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示向量 $\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BE}$，$\overrightarrow{CD}$ 及 $\overrightarrow{CE}$.



2.4 1) $3(6\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-9(\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b})=$____________;

2) 若 $2(\boldsymbol{y}-\frac{1}{3}\boldsymbol{a})-\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{y})+\boldsymbol{b}=0$ 其中 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 为已知向量，则未知向量 $\boldsymbol{y}=$____________.

3) 若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，化简 $3(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})-2(3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})-2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=$____________.

2.5 已知向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，且 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=-5\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，则一定共线的三点是. . . ( )

A. A、B、D B. A、B、C C. B、C、D D. A、C、D

2.6 已知向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$，则 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 与 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ . . . . ( )

A. 一定共线 B. 一定不共线

C. 当且仅当 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 共线时共线 D. 当且仅当 $\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2$ 时共线

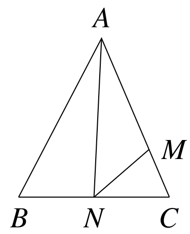
三、 **习题**

3.1 一辆汽车从 A 点出发向西行驶了 100 km 到达 B 点，然后又改变方向向西偏北 50° 走了 200 km 到达 C 点，最后又改变方向，向东行驶了 100 km 到达 D 点.

(1) 作出向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$；

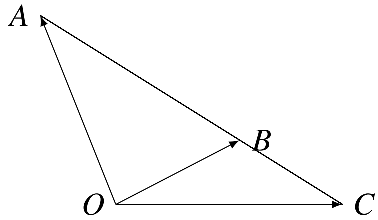
(2) 求 $|\overrightarrow{AD}|$.

3.2 在 $\triangle ABC$ 中，点 M，N 满足 $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{NC}$. 若 $\overrightarrow{MN}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，则 $x=$__________；$y=$ __________.



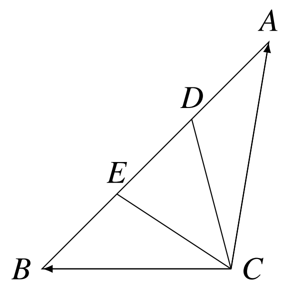
3.3 (2018 届贵州遵义航天高级中学一模) 如图所示，向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，$A$，$B$，$C$ 在一条直线上，且 $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{BC}$，则 ……………………………………………………(　　)

A. $\boldsymbol{c}=\frac{3}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$　B. $\boldsymbol{c}=\frac{3}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$　C. $\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$　D. $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$



3.4 设向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线，向量 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 共线，则实数 $\lambda=$__________.

3.5 如图，在 $\triangle ABC$ 中，D，E 为边 AB 的两个三等分点，$\overrightarrow{CA}=3\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CB}=2\boldsymbol{b}$，求 $\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{CE}$(用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示).



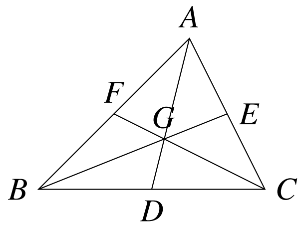
3.6 设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是不共线的两个非零向量.

(1) 若 $\overrightarrow{OA}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OB}=3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$，求证：$A$，$B$，$C$ 三点共线；

(2) 若 $8\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 与 $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 共线，求实数 k 的值；

(3) 若 $\overrightarrow{OM}=m\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{ON}=n\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OP}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}$，其中 m，n，α，β 均为实数，且 $m,n\neq 0$，若 M，P，N 三点共线，求证：$\dfrac{\alpha}{m}+\dfrac{\beta}{n}=1$

3.7 设点 G 为 $\triangle ABC$ 重心，D，E，F 分别为各边中点. 试用向量证明：$AG=\dfrac{2}{3}AD$.



四、 课后作业

4.1 判断下列结论是否正确 (请在括号中打“✓”或“✗”)

(1) 向量就是有向线段. (　　)

(2) 如果 $|\overrightarrow{AB}| > |\overrightarrow{CD}|$，那么 $\overrightarrow{AB} > \overrightarrow{CD}$. (　　)

(3) 力、速度和质量都是向量.(　　)

(4) 若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都是单位向量，则 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$. (　　)

(5) 若 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点相同，则终点也相同. (　　)

(6) 零向量的大小为 0，没有方向. (　　)

4.2 给出下列命题：①两个具有公共终点的向量，一定是共线向量；②两个向量不能比较大小，但它们的模能比较大小；③$\lambda\boldsymbol{a} = 0$($\lambda$ 为实数)，则 λ 必为零；④λ，μ 为实数，若 $\lambda\boldsymbol{a} = \mu\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线. 其中正确的命题的个数为…………(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

4.3 (2018 · 安徽淮北第一中学最后一卷) 设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都是非零向量，下列四个条件，使 $\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$ 成立当且仅当…………(　　)

A. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$　　B. $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{b}$　　C. $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$ 且 $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$　　D. $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$ 且方向相同

4.4 已知四边形 $ABCD$ 是菱形，则下列等式中成立的是…………(　　)

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$　　B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$　　C. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AD}$　　D. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC}$

4.5 已知 AM 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的中线，若 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{AM}$ 等于…………(　　)

A. $\frac{1}{2}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$　　B. $-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$　　C. $\frac{1}{2}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$　　D. $-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$

4.6 已知向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 不共线，$\boldsymbol{c} = k\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}(k \in \mathbb{R})$，$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$。如果 $\boldsymbol{c} \parallel \boldsymbol{d}$，那么…………(　　)

A. $k = 1$ 且 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 同向　　B. $k = 1$ 且 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 反向

C. $k = -1$ 且 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 同向　　D. $k = -1$ 且 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 反向

4.7 化简：

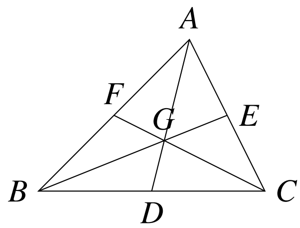
① $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$;　　② $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}$;

③ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{FA}$;　　④ $(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA}) - (\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DO} - \overrightarrow{OB})$;

4.8 一架飞机从 A 地按北偏东 35° 的方向飞行 800 km 到达 B 地接到受伤人员，然后又从 B 地按南偏东 55° 的方向飞行 600 km 送往 C 地医院，求这架飞机飞行的路程及两次位移的和.

4.9 设点 G 为 $\triangle ABC$ 重心，D，E，F 分别为各边中点.

(1) 试用向量证明：三角形三条中线共点；(2) 求 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}$.

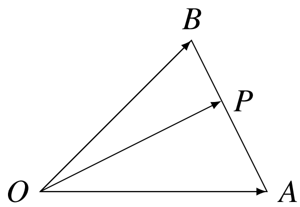


4.10 已知 $\overrightarrow{OA}=\lambda\overrightarrow{OB}+\mu\overrightarrow{OC}(\lambda,\mu\in\mathbb{R})$，若 $\lambda+\mu=1$, 求证：点 A，B，C 三点共线.

4.11【定比分点坐标公式】 如图，设 P 为 $\triangle ABO$ 边 AB 上一点. 设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$

(1) 求证：$\overrightarrow{OP}=\dfrac{|\overrightarrow{PB}|}{|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}+\dfrac{|\overrightarrow{PA}|}{|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{b}$;

(2) 设 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$, 求证：$\overrightarrow{OP}=\dfrac{\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}}{1+\lambda}$



五、部分参考答案

1.1 (2)(5) 正确

2.1 B

2.3 $\overrightarrow{BD}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}$；$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$；$\overrightarrow{BE}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}$；$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{c}$；$\overrightarrow{CE}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$.

2.4 (1)$9\boldsymbol{a}$；(2)$\dfrac{4}{21}\boldsymbol{a}-\dfrac{1}{7}\boldsymbol{b}+\dfrac{1}{7}\boldsymbol{c}$；$-\boldsymbol{a}$.

2.5 A

2.6 C

3.2 $x=\dfrac{1}{2}$；$y=-\dfrac{1}{6}$

3.3 A

3.4 $\dfrac{1}{2}$

3.5 $\overrightarrow{CD}=2\boldsymbol{a}+\dfrac{2}{3}\boldsymbol{b}$；$\overrightarrow{CE}=\boldsymbol{a}+\dfrac{4}{3}\boldsymbol{b}$

3.6 (1)$\because \overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CB}=2\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}$；$\therefore \overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{AB}$；(2)$k=2\sqrt{2}$；

4.1 (5) 正确，其余皆误.

4.2 A

4.3 D

4.4 C

4.5 C

4.6 D

4.7 ①$\overrightarrow{AC}$；②$\mathbf{0}$；③$\mathbf{0}$；④$\mathbf{0}$

4.8 路程 1400km，位移 1000km.