



函数的倒数的极限 首先，要证明的结论是：

任取  $\varepsilon > 0$ ，存在  $\delta > 0$ ，使得当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时，有

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} \right| < \varepsilon \quad (1)$$

式(1)可化为：

$$\frac{|g(x) - B|}{|B| |g(x)|} < \varepsilon \quad (2)$$

注意到上式左侧由以下三项组成： $\frac{1}{|B|}$ 、 $|g(x) - B|$  与  $\frac{1}{|g(x)|}$ 。现在要做的，就是在已经给定的正数  $\varepsilon$  下，找到合适的  $\delta$ ，然后分别判断这三项的取值范围，最后论证这三项在给定的  $\delta$  下乘积能够小于  $\varepsilon$ 。

第一项  $\frac{1}{|B|}$  是常数；

对第二项  $|g(x) - B|$ ，与第三项  $\frac{1}{|g(x)|}$ ，由

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B \quad (3)$$

可得：对于任意  $\varepsilon_0 > 0$ ，能够找到  $\delta_0$ ，使得当  $0 < |x - x_0| < \delta_0$  时，有  $|g(x) - B| < \varepsilon_0$ 。

于是：

① 取  $\varepsilon_0 = \varepsilon$ ，则必定存在正数  $\delta_{10}$ ，使得当  $0 < |x - x_0| < \delta_{10}$  时，有

$$|g(x) - B| < \varepsilon \quad (4)$$

② 取  $\varepsilon_0 = \frac{|B|}{2}$ ，则必定存在正数  $\delta_2$ ，使得当  $0 < |x - x_0| < \delta_2$  时，就有

$$|g(x) - B| < \frac{|B|}{2} \quad (5)$$

由②，可由绝对值不等式得到

$$\frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|B|} \quad (6)$$

取  $\delta = \min\{\delta_{10}, \delta_2\}$ ，那么，当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时，就同时有  $0 < |x - x_0| < \delta_{10}$  与  $0 < |x - x_0| < \delta_2$  成立。

当  $0 < |x - x_0| < \delta_{10}$  成立时，式(4)成立，

当  $0 < |x - x_0| < \delta_2$  成立时，式(5)成立，那么式(6)也就能够成立。

于是，当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时，(4)、(6)两式就能同时成立。这时，就有：

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} \right| = \frac{1}{|B|} \times |g(x) - B| \times \frac{1}{|g(x)|} < \frac{1}{|B|} \times \varepsilon \times \frac{2}{|B|} = \frac{2\varepsilon}{|B|^2} \quad (7)$$

这与我们最终想要证明的式(1)还差了那么一点，所以需要稍作调整。

①中，改取  $\varepsilon_0 = \frac{|B|^2}{2}\varepsilon$ ，那么，则必定存在正数  $\delta_1$ ，使得当  $0 < |x - x_0| < \delta_1$  时，有

$$|g(x) - B| < \frac{|B|^2}{2}\varepsilon \quad (8)$$

这时，改取  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ ，那么当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时，可知(8)、(6)两式同时成立。于是

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} \right| = \frac{1}{|B|} \times |g(x) - B| \times \frac{1}{|g(x)|} < \frac{1}{|B|} \times \frac{|B|^2}{2}\varepsilon \times \frac{2}{|B|} = \varepsilon \quad (9)$$

这就是我们要证明的式(1)。