教师姓名	沈炜炜	学生姓名	张一男	科　目	数 学
课题名称	数学拓展数论专题 - 莫比乌斯函数				
重点难点					

§1. 乘性函数

算术函数：定义在所有正整数上的函数.

算术函数 f 如果满足对任意两个互素的正整数 n 和 m，均有 $f(mn)=f(m)f(n)$，称为乘性函数（或积性函数）. 如果对任意两个正整数 n 和 m，均有 $f(mn)=f(m)f(n)$，就称为完全乘性（或完全积性）函数.

【性质 1】如果 f 是一个乘性函数，对任意正整数 n 有素数幂分解 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_s^{\alpha_s}$, 那么

$$f(n)=f(p_1^{\alpha_1})f(p_2^{\alpha_2})\dots f(p_s^{\alpha_s})$$

.

§2. 和函数

设 f 是一个算术函数，那么

$$F(n)=\sum_{d|n}f(d)$$

代表 f 在 n 中所有正因子处的值之和. 函数 F 称为 f 的和函数.

如果 f 是乘性函数，那么 f 的和函数，即 $F(n)=\sum\limits_{d|n}f(d)$ 也是乘性函数.

为了证明 F 是一个乘性函数, 我们必须证明: 如果 m 和 n 是互素的正整数, 那么 $F(mn)=F(m)F(n)$. 所以首先假设 $(m,n)=1$. 有

$$F(mn)=\sum_{d|mn}f(d).$$

因为 $(m,n)=1$，每个 mn 的因子可以唯一地写成 m 的因子 d_1 和 n 的因子 d_2 之积，并且这两个因子互素. 即 $d=d_1d_2$，所以有

$$F(mn)=\sum_{\substack{d_1|m\\d_2|n}}f(d_1d_2)$$

因为 f 是乘性的，且 $(d_1,d_2)=1$, 则

$$\begin{aligned}F(mn)&=\sum_{\substack{d_1|m\\d_2|n}}f(d_1)f(d_2)\\&=\sum_{d_1|m}f(d_1)\sum_{d_2|n}f(d_2)\\&=F(m)F(n)\end{aligned}$$

【推论】因子和函数 σ 与因子个数函数 τ 是乘性函数.

设 $f(n)=n$ 和 $g(n)=1$，则 f 和 g 均是乘性的. 于是 $\sigma(n)=\sum\limits_{d|n}f(d)$ 和 $\tau(n)=\sum\limits_{d|n}g(d)$ 是乘性的.

【欧拉函数的和函数】设 n 为一个正整数，那么

$$F(n) = \sum_{d|n} \phi(d) = n$$

我们将从 1 到 n 的整数构成的集合分类. 整数 m 如果与 n 的最大公因子为 d，则 m 属于 C_d 类. 就是说，如果 m 属于 C_d，那么 $(m,n) = d$，当且仅当 $(m/d\ n/d) = 1$. 所以，C_d 类中所含整数的个数是所有不超过 n/d 且和 n/d 互素的正整数的个数. 从上面的分析，我们可以看到 C_d 类中存在中 (n/d) 个整数. 因为我们将 1 到 n 的所有整数分成互不相交的类，且每个整数只属于其中一个类. 那么这些不同的类所含的所有整数的个数之和就是 n，所以

$$n = \sum_{d|n} \phi(n/d)$$

. 因为 d 取遍所有整除 n 的正整数，n/d 也取遍它的所有因子，从而

$$n = \sum_{d|n} \phi(n/d) = \sum_{d|n} \phi(d)$$

.

§3. 莫比乌斯反演

莫比乌斯函数 $\mu(n)$ 定义为

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & n = 1; \\ (-1)^s, & n = p_1 p_2 \ldots p_s, \text{素数} p_1 < p_2 < \ldots < p_s; \\ 0, & \text{others.} \end{cases}$$

【性质 1】莫比乌斯函数 $\mu(n)$ 是乘性函数.

【性质 2】莫比乌斯函数的和函数在 n 处的值 $F(n) = \sum\limits_{d|n} \mu(d)$ 满足

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{if} \quad n = 1; \\ 0, & \text{if} \quad n > 1. \end{cases}$$

【莫比乌斯反演公式】若 f 是算术函数，F 为 f 的和函数，满足

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d).$$

则对任意正整数 n，

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) F(n/d).$$

证明如下：

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \mu(d) F(n/d) &= \sum_{d|n} \left(\mu(d) \sum_{e|(n/d)} f(e) \right) \\ &= \sum_{d|n} \left(\sum_{e|(n/d)} \mu(d) f(e) \right) \end{aligned}$$

注意到整数对 (d,e) 满足 $d \mid n$ 和 $e \mid (n/d)$ 时，同样必有 $e \mid n$ 和 $d \mid (n/e)$. 于是

$$\begin{aligned}\sum_{d|n}\left(\sum_{e|(n/d)}\mu(d)f(e)\right) &= \sum_{e|n}\left(\sum_{d|(n/e)}\mu(d)f(e)\right)\\ &= \sum_{e|n}\left(f(e)\sum_{d|(n/e)}\mu(d)\right)\end{aligned}$$

又和式 $\sum\limits_{d|(n/e)}\mu(d)=1$ 仅在 $n/e=1$ 是成立，其他情况下该和式都等于 0. 因此有：

$$\sum_{e|n}\left(f(e)\sum_{d|(n/e)}\mu(d)\right)=f(n)\cdot 1=f(n).$$

【定理】设 f 为算术函数，它的和函数为 $F(n)=\sum\limits_{d|n}f(d)$，那么如果 F 是乘性函数，则 f 也是乘性函数.