教师姓名	沈炜炜	学生姓名		首课时间		本课时间	
学习科目	数学	上课年级	高一	教材版本		人教 A 版	
课题名称	三角恒等变换练习						
重点难点	三角恒等变换的应用						

一、 知识点总结

两角的和与差

- $C_{\alpha\pm\beta}$：$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$
- $S_{\alpha\pm\beta}$：$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$
- $T_{\alpha\pm\beta}$：$\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$

二倍角公式

- $S_{2\alpha}$：$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$
- $C_{2\alpha}$：$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$
- $T_{2\alpha}$：$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

半角公式

- $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$
- $\cos\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$
- $\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

万能公式

- $\sin\alpha=\dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$
- $\cos\alpha=\dfrac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$
- $\tan\alpha=\dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$

辅助角公式

- $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$
  其中 $\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$
  $a>0$ 时，
- $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$
  其中 $\tan\varphi=\dfrac{b}{a}$，$\varphi\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$

二、 习题

2.1 (2008 • 山东) 已知 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\alpha=\frac{4}{5}\sqrt{3}$，则 $\sin\left(\alpha+\frac{7\pi}{6}\right)$ 的值是 …………………( )

A. $-\frac{2\sqrt{3}}{5}$　B. $\frac{2\sqrt{3}}{5}$　C. $-\frac{4}{5}$　D. $\frac{4}{5}$

2.2 (2014 • 全国新课标) 设 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，且 $\tan\alpha=\frac{1+\sin\beta}{\cos\beta}$，则 …………………( )

A. $3\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$　B. $3\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$　C. $2\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$　D. $2\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$

2.3 (2013 • 浙江) 已知 $\alpha\in\mathbb{R}$，$\sin\alpha+2\cos\alpha=\frac{\sqrt{10}}{2}$，则 $\tan 2\alpha=$ …………………( )

A. $\frac{4}{3}$　B. $\frac{3}{4}$　C. $-\frac{3}{4}$　D. $-\frac{4}{3}$

2.4 (2011 • 福建) 若 $\tan\alpha=3$，则 $\frac{\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha}$ 的值等于 …………………( )

A. 2　B. 3　C. 4　D. 6

2.5 化简：$\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=$ __________.

2.6 (2013 • 全国新课标) 设当 $x=\theta$ 时，函数 $f(x)=\sin x-2\cos x$ 取得最大值，则 $\cos\theta=$ __________.

2.7 函数 $y=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$ 的最大值为 __________.

2.8 已知 $\cos(x+2\theta)+2\sin\theta\sin(x+\theta)=\frac{1}{3}$，则 $\cos 2x$ 的值为 __________.

2.9 (2017 • 江苏) 若 $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{6}$，则 $\tan\alpha=$ __________.

2.10 已知 $\sin 2\alpha-2=2\cos 2\alpha$，则 $\sin^2\alpha+\sin 2\alpha=$ __________.

2.11 (2016 • 上海) 方程 $3\sin x=1+\cos 2x$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上的解为 __________.

2.12 (2014 • 广东) 已知函数 $f(x)=A\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，$x\in\mathbb{R}$，且 $f\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{3}{2}$.

(I) 求 A 的值；

(II) 若 $f(\theta)+f(-\theta)=\frac{3}{2}$，$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，求 $f\left(\frac{3\pi}{4}-\theta\right)$.

2.13 (2010 • 上海) 已知 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$，化简：

$\lg\left(\cos x\tan x + 1 - 2\sin^2\dfrac{x}{2}\right) + \lg\left[\sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)\right] - \lg(1 + \sin 2x)$.

2.14 (2016 • 天津) 已知函数 $f(x) = 4\tan x\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3}$.

(I) 求 $f(x)$ 的定义域与最小正周期；

(II) 讨论 $f(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$ 上的单调性.

2.15 (2012 • 广东) 已知函数 $f(x) = 2\cos\left(\omega x + \dfrac{\pi}{6}\right)$(其中 $\omega > 0$，$x \in \mathbb{R}$) 的最小正周期为 10π.

(I) 求 ω 的值

(II) 设 $\alpha, \beta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$，$f\left(5\alpha + \dfrac{5\pi}{3}\right) = -\dfrac{6}{5}$，$f\left(5\beta - \dfrac{5\pi}{6}\right) = \dfrac{16}{17}$，求 $\cos(\alpha + \beta)$ 的值.

三、参考答案

2.1 C

2.2 C

2.3 C

2.4 D

2.5 $\cos 2x$

2.6 $-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

2.7 $\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$

2.8 $-\dfrac{7}{9}$

2.9 $\dfrac{7}{5}$

2.10 1 或 $\dfrac{8}{5}$

2.11 $\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5\pi}{6}$

2.12 (I)$A=\sqrt{3}$；(II)$f\left(\dfrac{3\pi}{4}-\theta\right)=\dfrac{\sqrt{30}}{4}$

2.13 0

2.14 (I)$f(x)=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$，定义域：$\left\{x \,\middle|\, x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$；最小正周期：$T=\pi$. (II)$f(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增，在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{4},-\dfrac{\pi}{12}\right]$ 上单调递减.

2.15 (I)$\omega=\dfrac{1}{5}$. (II)$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\cos\beta=\dfrac{8}{17}$，$\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\sin\beta=\dfrac{15}{17}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{13}{85}$.