函数的倒数的极限 首先，要证明的结论是：

任取 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| < \varepsilon \tag{1}$$

式(1)可化为：

$$\frac{|g(x) - B|}{|B|\,|g(x)|} < \varepsilon \tag{2}$$

注意到上式左侧由以下三项组成：$1|B|$、$|g(x) - B|$ 与 $1|g(x)|$. 现在要做的，就是在已经给定的正数 ε 下，找到合适的 δ，然后分别判断这三项的取值范围，最后论证这三项在给定的 δ 下乘积能够小于 ε.

第一项 $1|B|$ 是常数；

对第二项 $|g(x) - B|$，与第三项 $1|g(x)|$，由

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = B \tag{3}$$

可得：对于任意 $\varepsilon_0 > 0$, 能够找到 δ_0，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta_0$ 时，有 $|g(x) - B| < \varepsilon_0$.

于是：

[label=0]取 $\varepsilon_0 = \varepsilon$，则必定存在正数 δ_{10}，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta_{10}$ 时，有

$$|g(x) - B| < \varepsilon \tag{4}$$

取 $\varepsilon_0 = |B|2$，则必定存在正数 δ_2，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时，就有

$$|g(x) - B| < |B|2 \tag{5}$$

由 2，可由绝对值不等式得到

$$1|g(x)| < 2|B| \tag{6}$$

取 $\delta = \min\{\delta_{10}, \delta_2\}$, 那么, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 就同时有 $0 < |x - x_0| < \delta_{10}$ 与 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 成立.

当 $0 < |x - x_0| < \delta_{10}$ 成立时，式(4)成立，

当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 成立时，式(5)成立，那么式(6)也就能够成立.

于是，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，(4)、(6)两式就能同时成立. 这时，就有：

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| = \frac{1}{|B|} \times |g(x) - B| \times \frac{1}{|g(x)|} < \frac{1}{|B|} \times \varepsilon \times \frac{2}{|B|} = \frac{2\varepsilon}{|B|^2} \tag{7}$$

这与我们最终想要证明的式(1)还差了那么一点，所以需要稍作调整.
1 中, 改取 $\varepsilon_0 = |B|^2 2\varepsilon$, 那么, 则必定存在正数 δ_1, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时，有

$$|g(x) - B| < \frac{|B|^2}{2}\varepsilon. \tag{8}$$

这时，改取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$，那么当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，可知(8)、(6)两式同时成立. 于是

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| = \frac{1}{|B|} \times |g(x) - B| \times \frac{1}{|g(x)|} < \frac{1}{|B|} \times \frac{|B|^2}{2}\varepsilon \times \frac{2}{|B|} = \varepsilon \tag{9}$$

这就是我们要证明的式(1).