教师姓名	沈炜炜	学生姓名		首课时间		本课时间	
学习科目	数学	上课年级	高一	教材版本		人教 A 版	
课题名称	函数及其性质						
重点难点	函数的单调性						

课前检测

填写下表，写出各函数的定义域、值域、单调性以及奇偶性.

$f(x)$	定义域	值域	单调性	奇偶性
x				
x^2				
$\log_2 x$				
3^x				
$\frac{1}{x}$				
$\sqrt{x}$				
$\log_x 2$				

一、 函数的概念与表示

定义 一般地，有：

设 A，B 是非空的数集，如果按照某种确定的对应关系 f，使对于集合 A 中的任意一个数 x，在集合 B 中都有唯一确定的数 $f(x)$ 和它对应，那么就称 $f\colon A\mapsto B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数，记作

$$y=f(x),\qquad x\in A.$$

其中，x 叫做自变量，x 的取值范围 A 叫做函数的定义域；与 x 的值相对应的 y 值叫做函数值，函数值的集合 $\{f(x)|x\in A\}$ 叫做函数的值域，值域是集合 B 的子集.

- 函数是两个数集间的一种对应关系；
- 未指明定义域的情况下，默认定义域取使得对应关系有意义的所有实数. 具体如下：

  ① 分式的分母不为 0;
  ② 偶次根式的被开方数不小于 0；
  ③ 零次或负次指数次幂的底数不为零；
  ④ 对数的真数大于 0；
  ⑤ 指数、对数函数的底数大于 0 且不等于 1；
  ⑥ 实际问题对自变量的限制.
- 若函数 $f(x)$ 定义域为 D，且 $f(A)$ 存在，则 $A\in D$.

1.1 函数 $f(x)=\sqrt{2^x-1}$ 的定义域是……（　　）

A. $[0,+\infty)$　　B. $[1,+\infty)$　　C. $(-\infty,0]$　　D. $(-\infty,1]$

1.2 函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{(\log_2 x)^2-1}}$ 的定义域为……（　　）

A. $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$　　B. $(2,+\infty)$　　C. $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)\cup(2,+\infty)$　　D. $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]\cup[2,+\infty)$

1.3 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,0)$，则函数 $f(2x+1)$ 的定义域为……（　　）

A. $(-1,1)$　　B. $\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right)$　　C. $(-1,0)$　　D. $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$

1.4 已知函数 $f(2x+1)$ 的定义域为 $\left(-2,\dfrac{1}{2}\right)$，则函数 $f(x)$ 的定义域为……（　　）

A. $\left(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{4}\right)$　　B. $\left(-1,\dfrac{3}{2}\right)$　　C. $(-3,2)$　　D. $(-3,3)$

1.5 下列函数中，其定义域和值域分别与函数 $y=10^{\lg x}$ 的定义域和值域相同的是……（　　）

A. $y=x$　　B. $y=\lg x$　　C. $y=2^x$　　D. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

二、 函数的奇偶性

几何定义 一般地，图像关于 y 轴对称的函数称为偶函数，图像关于原点对称的函数称为奇函数.

代数定义 若对于函数 $f(x)$ 定义域内任意一个 x，都有 $f(-x)=f(x)$，则函数 $f(x)$ 称为偶函数；

若对于函数 $f(x)$ 定义域内任意一个 x，都有 $f(-x)=-f(x)$，则函数 $f(x)$ 称为奇函数；

奇函数与偶函数的定义域关于原点对称

性质

- 奇函数左右对应中会有负号，偶函数没有负号，此处的规律可以参考“负负得正”.(以下假设奇偶函数都不恒为 0)

  ① 奇 ± 奇 = 奇；偶 ± 偶 = 偶；奇 ± 偶 = 非奇非偶

  ② 奇 ×(÷) 奇 = 偶；偶 ×(÷) 偶 = 偶；奇 ×(÷) 偶 = 奇.

  ③ 当复合函数的内外两层函数都具有奇偶性时，有偶即偶，两奇为奇.

- 奇 (偶) 函数在关于原点对称的两个区间上具有相同 (相反) 的单调性；
- 若奇函数 $f(x)$ 在原点有定义，则 $f(x)=0$.

2.1 设奇函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上增函数且 $f(1)=0$，则不等式 $\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}<0$ 的解集为........( )

A. $(-1,0)\bigcup(1,+\infty)$ B. $(-\infty,-1)\bigcup(0,1)$ C. $(-\infty,-1)\bigcup(1,+\infty)$ D. $(-1,0)\bigcup(0,1)$

2.2 奇函数 $f(x)$ 的定义域为 R，若 $f(x+2)$ 为偶函数，且 $f(1)=1$，则 $f(8)+f(9)=$............( )

A. -2 B. -1 C. 0 D. 1

2.3 设函数 $f(x),g(x)$ 的定义域都为 R，且 $f(x)$ 是奇函数，$g(x)$ 是偶函数，则下列结论正确的是...( )

A. $f(x)g(x)$ 是偶函数 B. $|f(x)|g(x)$ 是奇函数 C. $f(x)|g(x)|$ 是奇函数 D. $|f(x)g(x)|$ 是奇函数

2.4 已知函数 $f(x)=\ln\left(\sqrt{1+9x^2}-3x\right)+1$，则 $f(\lg 2)+f\left(\lg\dfrac{1}{2}\right)$ 等于..........................( )

A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

2.5 已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，且在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增，若实数 a 满足 $f(\log_2 a)+f(\log_{\frac{1}{2}} a)\le 2f(1)$，则 a 的取值范围是..( )

A. $[1,2]$ B. $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$ C. $\left[\dfrac{1}{2},2\right]$ D. $(0,2]$

2.6 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数，$g(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 的偶函数，且 $f(x)-g(x)=1-x^2-x^3$，则 $g(x)$ 的解析式为..( )

A. $1-x^2$ B. $2-2x^2$ C. x^2-1 D. $2x^2-2$

2.7 若 $f(x)=x\ln(x+\sqrt{a+x^2})$ 为偶函数，则 $a=$__________.

三、 函数的单调性

定义 一般地，设函数 $f(x)$ 的定义域为 I：

1) 如果对于定义域 I 内某个区间 D 上的任意两个自变量的值 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么就说函数 $f(x)$ 在区间 D 上是增函数;
2) 如果对于定义域 I 内某个区间 D 上的任意两个自变量的值 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，那么就说函数 $f(x)$ 在区间 D 上是减函数.

如果函数 $f(x)$ 在区间 D 上是增函数或减函数，那么就说函数 $f(x)$ 在区间 D 具有（严格的）单调性，区间 D 叫做函数 $f(x)$ 的单调区间.

- 函数的单调性是定义在区间上的，即单调性是函数在某个区间上的性质；
- 单调区间是定义域的子集；
- 单调区间的写法: 尽可能地使用闭区间 (不能写成闭区间的三种情形: ∞ 符号旁; 端点不在函数定义域内; 端点处函数增减性发生变化);
- 自变量量和函数值：变化趋势相同时，函数单调增；变化趋势相反时，函数单调减；简记为：同增异减.

$$\text{单调递增} \Leftrightarrow (x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0 \Leftrightarrow \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$$

$$\text{单调递减} \Leftrightarrow (x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]<0 \Leftrightarrow \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$$

判定 函数单调性的判断目前有以下几种常见方法：

- 根据图像判断；
- 根据定义；由定义证明函数 $f(x)$ 在给定区间 D 上单调性的步骤：

  ① 取值：任取 $x_1, x_2 \in D$，且 $x_1 < x_2$；
  ② 作差或作商：$f(x_1) - f(x_2)$ 或 $f(x_1)/f(x_2)$；（当 $f(x)$ 在区间 D 内恒大于 0 或恒小于 0 时才可使用作商法）
  ③ 变形：因式分解、配方、通分、根式有理化等等，化简至能够简单判断正负号的式子；
  ④ 定号：判断 $f(x_1) - f(x_2)$ 的正负（或 $f(x_1)/f(x_2)$ 与 1 比大小），进一步判断 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小值关系；
  ⑤ 得出结论：$f(x_1) < f(x_2)$ 时函数 $f(x)$ 单调递增；$f(x_1) > f(x_2)$ 时函数 $f(x)$ 单调递减.
- 根据单调性已知的函数，并利用函数单调性的几个结论判断：
  ① $f(x)$ 与 $f(x) + C$（C 是常数）具有相同的单调性；
  ② $k > 0$ 时，$kf(x)$ 与 $f(x)$ 单调性相同；$k < 0$ 时，$kf(x)$ 与 $f(x)$ 单调性相反；
  ③ 在公共定义域内，两增函数相加仍为增函数；减函数相减仍为减函数；
  ④ 对于复合函数，“同增异减”，即：
  若 $\mu = g(x)$ 在 $[a, b]$ 上是增（减）函数，函数 $y = f(\mu)$ 在区间 $[g(a), g(b)]$（或区间 $[g(b), g(a)]$）上是增（减）函数，那么复合函数 $y = f[g(x)]$ 在区间 $[a, b]$ 上一定是单调的，且若 $f(\mu)$ 与 $g(x)$ 单调性相同，则复合函数 $y = f[g(x)]$ 单调递增；若 $f(\mu)$ 与 $g(x)$ 单调性相反，则复合函数 $y = f[g(x)]$ 单调递减.

3.1 设 $f(x)$，$g(x)$ 都是单调函数，有如下四个命题：
①若 $f(x)$ 单调递增，$g(x)$ 单调递增，则 $f(x) - g(x)$ 单调递增；
②若 $f(x)$ 单调递增，$g(x)$ 单调递减，则 $f(x) - g(x)$ 单调递增；
③若 $f(x)$ 单调递减，$g(x)$ 单调递增，则 $f(x) - g(x)$ 单调递减；
④若 $f(x)$ 单调递减，$g(x)$ 单调递减，则 $f(x) - g(x)$ 单调递减；
其中，正确的命题是……（ ）

A. ①③　　B. ①④　　C. ②③　　D. ②④

3.2 函数 $y = -\sqrt{1-4x^2}$ 的单调递减区间是……（ ）

A. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$　　B. $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$　　C. $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$　　D. $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

3.3（福州八中 15-16 高一期中考,2）设偶函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$，当 $x \in [0, +\infty)$ 时，$f(x)$ 是增函数，则 $f(-2)$，$f(\pi)$，$f(-3)$ 的大小关系是……（ ）

A. $f(\pi) > f(-3) > f(-2)$　　B. $f(\pi) > f(-2) > f(-3)$

C. $f(\pi) < f(-3) < f(-2)$　　D. $f(\pi) < f(-2) < f(-3)$

3.4（福州高级中学 16-17 高一期中考,11）定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数 $f(x)$，当 $x \in [1,2]$ 时，$f(x)<0$ 且 $f(x)$ 增函数，给出下列四个结论：

（1）$f(x)$ 在 $[-2,-1]$ 上单调递增；（2）当 $x \in [-2,-1]$ 时，有 $f(x)<0$；

（3）$f(-x)$ 在 $[-2,-1]$ 上单调递减；（4）$|f(x)|$ 在 $[-2,-1]$ 上单调递减.

其中正确的结论是……（　　）

A. (1)(3)　　B. (2)(4)　　C. (2)(3)　　D. (3)(4)

3.5【2016 师大附中 18】(本小题满分 12 分) 已知函数 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的偶函数. $x \le 0$ 时 $f(x)=4^{-x}-a\cdot 2^{-x},(a>0)$

(I) 求函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的解析式；(II) 求函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的最小值.

3.6（福州市格致中学 2016-2017 高一上期中考试数学学科试卷 22) 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+3$ 是偶函数，且过点 $(-1,4)$，$g(x)=x+4$.

(I) 求 $f(x)$ 的解析式；

(II) 求函数 $F(x)=f(2^x)+g(2^{x+1})$ 的值域；

(III) 若 $f(x)\ge g(mx+m)$ 对 $x\in[2,6]$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

四、课后作业

4.1 如果 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，那么下列函数中一定是偶函数的是……（　　）

A. $x+f(x)$　B. $xf(x)$　C. $x^2+f(x)$　D. $x^2f(x)$

4.2 已知函数 $g(x)=f(x)-x$ 是偶函数，且 $f(3)=4$，则 $f(-3)=$……（　　）

A. -4　B. -2　C. 0　D. 4

4.3 设函数 $f(x),g(x)$ 的定义域都为 R，且 $f(x)$ 是奇函数，$g(x)$ 是偶函数，则下列结论正确的是…（　　）

A. $f(x)+|g(x)|$ 是偶函数　B. $f(x)-|g(x)|$ 是奇函数

C. $|f(x)|+g(x)$ 是偶函数　D. $|f(x)|-g(x)$ 是奇函数

4.4（福州格致中学 16-17 高一期中考,10）若 $f(x)=-x^2+2ax$ 与 $g(x)=\dfrac{a}{x+1}$ 在区间 $[1,2]$ 上都是减函数，则实数 a 的取值范围……（　　）

A. $(-1,0)\cup(0,1)$　B. $(-1,0)\cup(0,1]$　C. $(0,1)$　D. $(0,1]$

4.5 设函数 $f(x)=\lg\dfrac{2+x}{2-x}$，则 $f\left(\dfrac{x}{2}\right)+f\left(\dfrac{2}{x}\right)$ 的定义域为……（　　）

A. $(-4,0)\bigcup(0,4)$　B. $(-4,-1)\bigcup(1,4)$　C. $(-2,-1)\bigcup(1,2)$　D. $(-4,-2)\bigcup(2,4)$

4.6 (2009 四川卷文理 12) 已知函数 $f(x)$ 是定义在实数集 $\mathbb{R}$ 上的不恒为零的偶函数，且对任意实数 x 都有 $xf(x+1)=(1+x)f(x)$，则 $f\left(\dfrac{5}{2}\right)$ 的值是……（　　）

A. 0　B. $\frac{1}{2}$　C. 1　D. $\frac{5}{2}$

4.7 若函数 $f(x)=\ln(\mathrm{e}^{3\mathrm{x}}+1)+\mathrm{ax}$ 为偶函数，则 $a=$________.

4.8 若 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，当 $x\le 0$ 时，$f(x)=2x^2-x$，则 $f(1)=$________.

4.9 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，下列函数：

① $y=-|f(x)|$　② $y=xf(x^2)$;

③ $y=-f(-x)$　④ $y=f(x)-f(-x)$.

中必为奇函数的有________.(要求填写正确答案的序号)

4.10【2016 福州三中 17】(本小题满分 12 分) 已知函数 $f(x)=\log_3 9x\cdot\log_3 x+2,x\in[\frac{1}{9},3]$.

(1) 求 $f(x)$ 最小值和最大值;

(2) 若不等式 $f(x)-2m+1>0$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

4.11 (福州八中 2015—2016 高一上学期期中考试 23) 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数，且对任意 $a,b\in\mathbb{R}$ ，当 $a+b\neq 0$ 时，都有 $\frac{f(a)+f(b)}{a+b}>0$

（1）若 $a>b$ ，试比较 $f(a)$ 与 $f(b)$ 的大小关系；

（2）若 $f(9^x-2\cdot 3^x)+f(2\cdot 9^x-k)>0$ 对任意 $x\in[0,\infty)$ 恒成立，求实数 k 的取值范围.

4.12 (福州市屏东中学 2016-2017 高一上期中 22) 已知函数 $f(x)=2^x-2^{-2}$，定义域为 $\mathbb{R}$；函数 $g(x)=2^{x+1}-2^{2x}$，定义域为 $[-1,1]$.

（1）判断函数 $f(x)$ 的奇偶性，不用证明；

（2）求函数 $g(x)$ 的最值；

(3) 若不等式 $f\big(g(x)\big)\leq f(-3am+m^2+1)$ 对 $x\in[-1,1]$,$a\in[-2,2]$ 上恒成立，求 m 的取值范围.

五、参考答案

1.1 A

1.2 C

1.3 B

1.4 C

1.5 D

2.1 D

2.2 D

2.3 C

2.4 D

2.5 C

2.6 C

2.7 1

3.1 C

3.2 C

3.3 A

3.4 C

3.5 (I)$x \in (0, +\infty)$ 时，$f(x) = f(-x) = 4^x - a \cdot 2^x$；

(II)$a \geq 2$ 时，$f(x)_{\min} = f(\frac{a}{2}) = -\frac{a^2}{4}$；

$0 < a < 2$ 时，$f(x)_{\min} = f(0) = 1 - a$.

3.6 (I) $f(x) = ax^2 + 3$; (II) $(7, +\infty)$; (III) $m \leq 1$.

4.1 B

4.2 B

4.3 C

4.4 D

4.5 B

4.6 A

4.7 $-\frac{3}{2}$

4.8 -3

4.9 ②④

4.10 (1) $f_{\min}(x) = f(\frac{1}{3}) = 1$，$f_{\max}(x) = f(3) = 5$

(2) $m \in (-\infty, 1)$.

4.11 (1)$f(a) > f(b)$; (2)$k < 1$.

4.12 (1) 增函数;

(2) $g(t)_{\max} = g(1) = 1$; $g(t)_{\min} = g(2) = 0$;

(3) $m \in (-\infty, -6) \cup [6, +\infty) \cup \{0\}$.