



教师姓名	沈炜炜	学生姓名	郑旭晶	首课时间	20190423	本课时间	20190503
学习科目	数学	上课年级	高三	教材版本		人教 A 版	
课题名称	向量相关计算						
重点难点							

一、平面向量运算与应用

§1. 五种常见向量

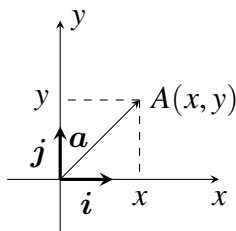
- 1) 单位向量：模为 1 的向量.
- 2) 零向量：模为 0 的向量.
- 3) 平行 (共线向量)：方向相同或相反或其一为零向量的两个向量.
- 4) 相等向量：模相等，方向相同的向量.
- 5) 相反向量：模相等，方向相反的向量.

§2. 坐标表示

平面内的任一向量 \mathbf{a} 都可以由 x, y 唯一确定，我们把有序数对 (x, y) 叫做向量 \mathbf{a} 的坐标，记作

$$\mathbf{a} = (x, y) \quad (-1)$$

其中 x 叫做 \mathbf{a} 在 x 轴上的坐标， y 叫做 \mathbf{a} 在 y 轴上的坐标， (-1) 式叫做向量的坐标表示



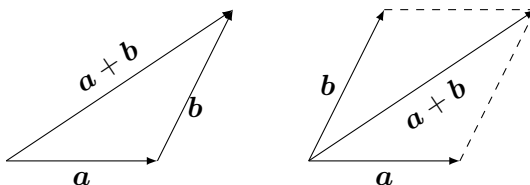
§3. 向量的线性运算与数量积

向量的线性运算包括向量的加、减、数乘运算.

3.1 加法

定义 两个向量和的运算；

法则 平行四边形法则或三角形法则





对于零向量与任一向量 a , 规定

$$a + 0 = 0 + a = a$$

由三角形法则, 可得向量不等式 (有时称作“三角形不等式”):

$$||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$$

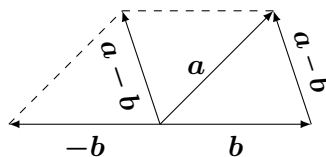
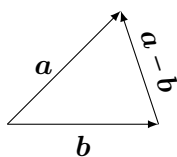
若 a 和 b 为非零向量, 则: 当 a 与 b 反向时, 左边等式成立; 当 a 与 b 同向时, 右边等式成立;

3.2 减法

定义 减去一个向量相当于加上这个向量的相反向量, 即

$$a - b = a + (-b)$$

运算法则 三角形法则、平行四边形法则.



对于任意一点 P , $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}$,

3.3 数乘

定义 求实数 λ 与向量 a 的积是一个向量, 记作 λa , 长度与方向由以下法则规定:

法则 1) $|\lambda a| = |\lambda| |a|$;

- 2) • 当 $\lambda > 0$ 时, λa 的方向与 a 的方向相同;
- 当 $\lambda < 0$ 时, λa 的方向与 a 的方向相反;
- 当 $\lambda = 0$ 时, $\lambda a = 0$.

对于任意向量 a, b 以及任意实数 λ, μ_1, μ_2 , 恒有:

$$\lambda(\mu_1 a \pm \mu_2 b) = \lambda \mu_1 a \pm \lambda \mu_2 b$$

§4. 数量积

定义 已知两个非零向量 a 与 b , 我们把数量 $|a||b|\cos\theta$ 叫做 a 与 b 的数量积 (又称点积、内积), 记作 $a \cdot b$, 即

$$a \cdot b = |a||b|\cos\theta$$



其中 θ 为 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的夹角.

$|\mathbf{a}| \cos \theta (|\mathbf{b}| \cos \theta)$ 叫做向量 \mathbf{a} 在 \mathbf{b} 方向上 (\mathbf{b} 在 \mathbf{a} 方向上) 的投影,

几何意义 两个向量的数量积等于其中一个向量的模长与另一个向量在此向量方向上的投影的乘积

注: 当 $\theta = 0$ 时, $\cos \theta = 1$, 所以有 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$;

当 $\theta = 90^\circ$ 时, 有 $\cos \theta = 0$, 所以有 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$

当 $\theta = 180^\circ$ 时, 有 $\cos \theta = -1$, 所以有 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$

数量积坐标计算 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$.

夹角公式

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \quad (\theta \in [0, \pi], \theta \text{ 也写作 } \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle).$$

4.1 坐标运算

1. 设点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则 $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

一个向量的坐标等于表示此向量的有向线段的终点的坐标减去起始点的坐标.

2. 若 $\mathbf{a} = (x_1, y_1)$, $\mathbf{b} = (x_2, y_2)$.

加法: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} + \mathbf{b} &= (x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j}) + (x_2 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j}) \\ &= (x_1 + x_2) \mathbf{i} + (y_1 + y_2) \mathbf{j} \end{aligned}$$

$$\text{即: } \mathbf{a} + \mathbf{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

减法: $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$. 同加法可得

数乘: $\lambda \mathbf{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1)$

$$\begin{aligned} \lambda \mathbf{a} &= \lambda (x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j}) = \lambda x_1 \mathbf{i} + \lambda y_1 \mathbf{j} \\ &= (\lambda x_1, \lambda y_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{模长 } |\mathbf{a}| &= \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ |\mathbf{a} + \mathbf{b}| &= \sqrt{(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2} = \sqrt{\mathbf{a}^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b}^2} \end{aligned}$$

共线 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Leftrightarrow x_1 y_2 = y_2 x_1$

由向量共线的性质知 \mathbf{a} 与 $\mathbf{b} (\mathbf{b} \neq \mathbf{0})$ 共线, 当且仅当存在实数 λ 使得 $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$.

用坐标表示为:

$$(x_1, y_1) = \lambda (x_2, y_2)$$



即

$$\begin{cases} x_1 = \lambda x_2 \\ y_1 = \lambda y_2 \end{cases}$$

消去 λ 得到

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$$

垂直 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$

证明. 由向量的数量积性质, 当 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ 时, 由 $\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}$ 得到

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$$

□

§5. 平面向量运算律

- 1) 交换律: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
- 2) 结合律: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}), \quad (\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b})$
- 3) 分配律: $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}, \quad \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}, \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$
- 4) 重要公式: (记号 $\mathbf{a}^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$) $(\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2, \quad (\mathbf{a} \pm \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 \pm 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b}^2.$

§6. 两个重要定理

- 1) 向量共线定理: 向量 \mathbf{a} ($\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$) 与向量 \mathbf{b} 共线, 当且仅当存在唯一的实数 λ , 使得 $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$.
 证明三点共线的方法: ① $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$, 则 A, B, C 三点共线; ② $\overrightarrow{OA} = \lambda \overrightarrow{OB} + \mu \overrightarrow{OC}$, 若 $\lambda + \mu = 1$, 则 A, B, C 三点共线.
- 2) 平面向量基本定理: 如果 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 是同一平面内的两个不共线的向量, 则那么对于这一平面内的任意向量 \mathbf{a} , 有且只有一对实数 λ_1, λ_2 , 使 $\mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2$. 其中, 不共线的向量 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 叫做表示这一平面内所有向量的一组基底.

§7. 平面向量数量积相关量求解

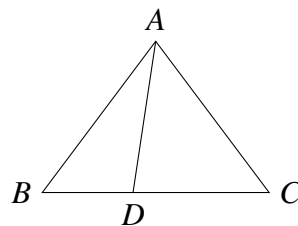
- 1) 向量模长: 若 $\mathbf{a} = (x, y)$, 则 $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{x^2 + y^2}$
- 2) 向量投影: 向量 \mathbf{a} 在 \mathbf{b} 方向上的投影为 $|\mathbf{a}| \cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$
- 3) 向量夹角: 设 $\mathbf{a} = (x_1, y_1), \mathbf{b} = (x_2, y_2)$, 则 $\cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \quad (\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \in [0, \pi])$



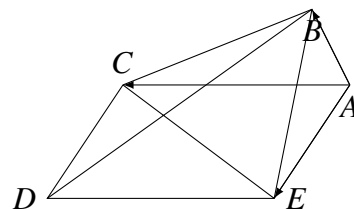
基础测试与习题

1.1 如图, $\vec{AB} + \vec{BC} - \vec{AD}$ 等于.....()

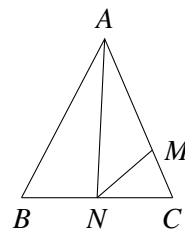
- A. \vec{AD} B. \vec{DC} C. \vec{DB} D. \vec{AB}



1.2 如图所示, 在五边形 $ABCDE$ 中, 若四边形 $ACDE$ 是平行四边形, 且 $\vec{AB} = \mathbf{a}$, $\vec{AC} = \mathbf{b}$, $\vec{AE} = \mathbf{c}$, 试用向量 \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} 表示向量 \vec{BD} , \vec{BC} , \vec{BE} , \vec{CD} 及 \vec{CE} .

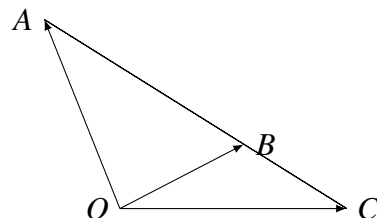


1.3 在 $\triangle ABC$ 中, 点 M , N 满足 $\vec{AM} = 2\vec{MC}$, $\vec{BN} = \vec{NC}$. 若 $\vec{MN} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$, 则 $x =$ _____; $y =$ _____.



1.4 (2018 届贵州遵义航天高级中学一模) 如图所示, 向量 $\vec{OA} = \mathbf{a}$, $\vec{OB} = \mathbf{b}$, $\vec{OC} = \mathbf{c}$, A , B , C 在一条直线上, 且 $\vec{AC} = 3\vec{BC}$, 则.....()

- A. $\mathbf{c} = \frac{3}{2}\mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{a}$ B. $\mathbf{c} = \frac{3}{2}\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b}$ C. $\mathbf{c} = -\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ D. $\mathbf{c} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b}$



1.5 设平面向量 $\mathbf{a} = (3, 5)$, $\mathbf{b} = (-2, 1)$, 则 $\mathbf{a} - 2\mathbf{b} =$()

- A. (7,3) B. (7,7) C. (1,7) D. (1,3)

1.6 已知 $\mathbf{a} = (3, 4)$, 则与 \mathbf{a} 同向的单位向量的坐标是.....()

- A. (3,4) B. $(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ C. $(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ D. $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$

1.7 已知平面直角坐标系 xOy 内的三点分别是 $A(2, -5)$, $B(3, 4)$, $C(-1, -3)$, D 为线段 BC 的中点, 则向量 \vec{DA} 的坐标为_____.

1.8 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = BC = 2$, $\angle B = \frac{\pi}{4}$, AD 是边 BC 上的高, 则 $\vec{AD} \cdot \vec{AC}$ 的值为.....()

- A. 0 B. 2 C. 4 D. 8

1.9 已知 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = BC = 6$, 平面内一点 M 满足 $\vec{BM} = \frac{2}{3}\vec{BC} - \frac{1}{3}\vec{BA}$, 则 $\vec{AC} \cdot \vec{MB}$ 等于.....()

- A. -9 B. -18 C. 12 D. 18



- 1.10 [2017 文·全国新课标] 已知向量 $\mathbf{a} = (-1, 2)$, $\mathbf{b} = (m, 1)$. 若向量 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 与 \mathbf{a} 垂直, 则 $m =$ _____.
- 1.11 [2016 文·北京] 已知向量 $\mathbf{a} = (1, \sqrt{3})$, $\mathbf{b} = (\sqrt{3}, 1)$. 则 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 夹角的大小为 _____.
- 1.12 [2016 文·山东] 已知向量 $\mathbf{a} = (1, -1)$, $\mathbf{b} = (6, -4)$. 若 $\mathbf{a} \perp (t\mathbf{a} + \mathbf{b})$, 则实数 t 的值为 _____.
- 1.13 [2018 文·全国 II 卷] 已知向量 \mathbf{a} , \mathbf{b} 满足 $|\mathbf{a}| = 1$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -1$, 则 $\mathbf{a} \cdot (2\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \dots\dots\dots$ ()
A. 4 B. 3 C. 2 D. 0
- 1.14 [2018 文·全国 I 卷] 在 $\triangle ABC$ 中, AD 为 BC 边上的中线, E 为 AD 的中点, 则 $\overrightarrow{EB} = \dots$ ()
A. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ B. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ C. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ D. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$
- 1.15 [2018 文·昆明摸底调研] 已知向量 $\mathbf{a} = (-1, 2)$, $\mathbf{b} = (1, 3)$, 则 $|2\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \dots\dots\dots$ ()
A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $\sqrt{10}$ D. 10
- 1.16 [2018 文·惠州一调] 已知正方形 $ABCD$ 的中心为 O 且其边长为 1, 则 $(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = \dots\dots\dots$ ()
A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. 1
- 1.17 [2018 文·武汉二月调研] 已知平面向量 \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{e} 满足 $|\mathbf{e}| = 1$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e} = 1$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{e} = -2$, $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 2$, 则 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 的最大值 $\dots\dots\dots$ ()
A. -1 B. -2 C. $-\frac{5}{2}$ D. $-\frac{5}{4}$
- 1.18 [2018 文·郑州测试] $\triangle ABC$ 的外接圆圆心为 O , 半径为 1, $2\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, 且 $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{AB}|$, 则向量 \overrightarrow{CA} 在向量 \overrightarrow{CB} 方向上的投影为 $\dots\dots\dots$ ()
A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{2}$
- 1.19 [2018 文·北京卷] 设向量 $\mathbf{a} = (1, 0)$, $\mathbf{b} = (-1, m)$. 若 $\mathbf{a} \perp (m\mathbf{a} - \mathbf{b})$, 则 $m =$ _____.



二、课后作业



- 2.1 [2017 文·全国新课标] 设非零向量 \mathbf{a} , \mathbf{b} 满足 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$, 则.....()
 A. $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ B. $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ C. $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ D. $|\mathbf{a}| > |\mathbf{b}|$
- 2.2 [2016 文·全国新课标] 已知向量 $\overrightarrow{BA} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\overrightarrow{BC} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, 则 $\triangle ABC =$()
 A. 30° B. 45° C. 60° D. 120°
- 2.3 [2015 文·全国新课标] 已知点 $A(0, 1)$, $B(3, 2)$, 向量 $\overrightarrow{AC} = (-4, -3)$, 则向量 $\overrightarrow{BC} =$()
 A. $(-7, -4)$ B. $(7, 4)$ C. $(-1, 4)$ D. $(1, 4)$
- 2.4 [2015 文·广东] 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\overrightarrow{AB} = (1, -2)$, $\overrightarrow{AD} = (2, 1)$, 则 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} =$()
 A. 5 B. 4 C. 3 D. 2
- 2.5 [2016 文·天津] 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 1 的等边三角形, 点 D 、 E 分别是边 AB 、 BC 的中点, 连接 DE 并延长到点 F , 使得 $DE = 2EF$, 则 $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BC}$ 的值为.....()
 A. $-\frac{5}{8}$ B. $-\frac{1}{8}$ C. $-\frac{1}{4}$ D. $-\frac{11}{8}$
- 2.6 [2018 文·西宁一检] 已知 $\triangle ABC$ 中, $AB = 6$, $AC = 3$, N 是边 BC 上的点, 且 $\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{NC}$, O 为 $\triangle ABC$ 的外心, 则 $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AO}$ 的值为.....()
 A. 8 B. 10 C. 18 D. 9
- 2.7 [2017 文·全国新课标] 已知向量 $\mathbf{a} = (-1, 2)$, $\mathbf{b} = (m, 1)$. 若向量 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 与 \mathbf{a} 垂直, 则 $m =$ _____.
- 2.8 [2018 文·长春监测 (一)] 已知向量 $\mathbf{a} = (1, 2)$, $\mathbf{b} = (-2, 1)$. \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的夹角为_____.
- 2.9 [2018 文·辽宁五校联考] 已知平面向量 $\mathbf{a} = (x_1, y_1)$, $\mathbf{b} = (x_2, y_2)$. 若 $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 4$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 12$, 则 $\frac{x_1 + y_1}{x_2 + y_2} =$ _____.
- 2.10 [2016 文·北京] 已知向量 $\mathbf{a} = (1, \sqrt{3})$, $\mathbf{b} = (\sqrt{3}, 1)$. 则 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 夹角的大小为_____.
- 2.11 [2017 文·全国新课标] 已知向量 $\mathbf{a} = (-2, 3)$, $\mathbf{b} = (3, m)$. 且 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ 垂直, 则 $m =$ _____.
- 2.12 [2017 文·北京] 已知点 P 在圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上, 点 A 的坐标为 $(-2, 0)$, O 为原点, 则 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AP}$ 的最大值为_____.



三、参考答案

- | | |
|---|----------------------|
| 1.1 B | 1.16 D |
| 1.2 $\overrightarrow{BD} = -a + c + b$; $\overrightarrow{BC} = b - a$; $\overrightarrow{BE} = a - a$;
$\overrightarrow{CD} = c$; $\overrightarrow{CE} = c - b$. | 1.17 D |
| 1.3 $x = \frac{1}{2}$; $y = -\frac{1}{6}$ | 1.18 D |
| 1.4 A | 1.19 -1 |
| 1.5 A | 2.1 A |
| 1.6 D | 2.2 A |
| 1.7 $(1, -\frac{11}{2})$ | 2.3 A |
| 1.8 B | 2.4 A |
| 1.9 B | 2.5 B |
| 1.10 7 | 2.6 D |
| 1.11 $\frac{\pi}{6}$ | 2.7 7 |
| 1.12 -5 | 2.8 $\frac{\pi}{2}$ |
| 1.13 B | 2.9 $-\frac{3}{4}$ |
| 1.14 A | 2.10 $\frac{\pi}{6}$ |
| 1.15 C | 2.11 2 |
| | 2.12 6 |