



教师姓名	沈炜炜	学生姓名		首课时间		本课时间	
学习科目	数学	上课年级	高一	教材版本		人教 A 版	
课题名称	函数及其性质						
重点难点	函数的单调性						



## 课前检测

填写下表，写出各函数的定义域、值域、单调性以及奇偶性.

$f(x)$	定义域	值域	单调性	奇偶性
$x$				
$x^2$				
$\log_2 x$				
$3^x$				
$\frac{1}{x}$				
$\sqrt{x}$				
$\log_x 2$				

## 一、函数的概念与表示

**定义** 一般地，有：

设  $A, B$  是非空的数集，如果按照某种确定的对应关系  $f$ ，使对于集合  $A$  中的任意一个数  $x$ ，在集合  $B$  中都有唯一确定的数  $f(x)$  和它对应，那么就称  $f: A \rightarrow B$  为从集合  $A$  到集合  $B$  的一个函数，记作

$$y = f(x), \quad x \in A.$$

其中， $x$  叫做自变量， $x$  的取值范围  $A$  叫做函数的定义域；与  $x$  的值相对应的  $y$  值叫做函数值，函数值的集合  $\{f(x)|x \in A\}$  叫做函数的值域，值域是集合  $B$  的子集.

- 函数是两个数集间的一种对应关系；
- 未指明定义域的情况下，默认定义域取使得对应关系有意义的所有实数. 具体如下：
  - ① 分式的分母不为 0；
  - ② 偶次根式的被开方数不小于 0；
  - ③ 零次或负次指数次幂的底数不为零；



- ④ 对数的真数大于 0;
- ⑤ 指数、对数函数的底数大于 0 且不等于 1;
- ⑥ 实际问题对自变量的限制.

- 若函数  $f(x)$  定义域为  $D$ , 且  $f(A)$  存在, 则  $A \in D$ .



- 1.1 函数  $f(x) = \sqrt{2^x - 1}$  的定义域是 ..... ( )
- A.  $[0, +\infty)$       B.  $[1, +\infty)$       C.  $(-\infty, 0]$       D.  $(-\infty, 1]$
- 1.2 函数  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(\log_2 x)^2 - 1}}$  的定义域为 ..... ( )
- A.  $(0, \frac{1}{2})$       B.  $(2, +\infty)$       C.  $(0, \frac{1}{2}) \cup (2, +\infty)$       D.  $(0, \frac{1}{2}] \cup [2, +\infty)$
- 1.3 已知函数  $f(x)$  的定义域为  $(-1, 0)$ , 则函数  $f(2x + 1)$  的定义域为 ..... ( )
- A.  $(-1, 1)$       B.  $(-1, -\frac{1}{2})$       C.  $(-1, 0)$       D.  $(\frac{1}{2}, 1)$
- 1.4 已知函数  $f(2x + 1)$  的定义域为  $(-2, \frac{1}{2})$ , 则函数  $f(x)$  的定义域为 ..... ( )
- A.  $(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4})$       B.  $(-1, \frac{3}{2})$       C.  $(-3, 2)$       D.  $(-3, 3)$
- 1.5 下列函数中, 其定义域和值域分别与函数  $y = 10^{\lg x}$  的定义域和值域相同的是 ..... ( )
- A.  $y = x$       B.  $y = \lg x$       C.  $y = 2^x$       D.  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

## 二、函数的奇偶性

**几何定义** 一般地, 图像关于  $y$  轴对称的函数称为偶函数, 图像关于原点对称的函数称为奇函数.

**代数定义** 若对于函数  $f(x)$  定义域内任意一个  $x$ , 都有  $f(-x) = f(x)$ , 则函数  $f(x)$  称为偶函数;  
若对于函数  $f(x)$  定义域内任意一个  $x$ , 都有  $f(-x) = -f(x)$ , 则函数  $f(x)$  称为奇函数;

奇函数与偶函数的定义域关于原点对称

**性质** • 奇函数左右对应中会有负号, 偶函数没有负号, 此处的规律可以参考“负负得正”. (以下假设奇偶函数都不恒为 0)

- ① 奇  $\pm$  奇 = 奇; 偶  $\pm$  偶 = 偶; 奇  $\pm$  偶 = 非奇非偶
- ② 奇  $\times (\div)$  奇 = 偶; 偶  $\times (\div)$  偶 = 偶; 奇  $\times (\div)$  偶 = 奇.
- ③ 当复合函数的内外两层函数都具有奇偶性时, 有偶即偶, 两奇为奇.

- 奇 (偶) 函数在关于原点对称的两个区间上具有相同 (相反) 的单调性;
- 若奇函数  $f(x)$  在原点有定义, 则  $f(x) = 0$ .



- 2.1 设奇函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上增函数且  $f(1) = 0$ , 则不等式  $\frac{f(x) - f(-x)}{x} < 0$  的解集为... ( )
- A.  $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$       B.  $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$   
C.  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$       D.  $(-1, 0) \cup (0, 1)$
- 2.2 奇函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbb{R}$ , 若  $f(x+2)$  为偶函数, 且  $f(1) = 1$ , 则  $f(8) + f(9) = \dots$  ( )
- A. -2      B. -1      C. 0      D. 1
- 2.3 设函数  $f(x), g(x)$  的定义域都为  $\mathbb{R}$ , 且  $f(x)$  是奇函数,  $g(x)$  是偶函数, 则下列结论正确的是..... ( )
- A.  $f(x)g(x)$  是偶函数      B.  $|f(x)|g(x)$  是奇函数  
C.  $f(x)|g(x)|$  是奇函数      D.  $|f(x)g(x)|$  是奇函数
- 2.4 已知函数  $f(x) = \ln(\sqrt{1+9x^2} - 3x) + 1$ , 则  $f(\lg 2) + f\left(\lg \frac{1}{2}\right)$  等于..... ( )
- A. -1      B. 0      C. 1      D. 2
- 2.5 已知函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbb{R}$  上的偶函数, 且在区间  $[0, +\infty)$  上单调递增, 若实数  $a$  满足  $f(\log_2 a) + f(\log_{\frac{1}{2}} a) \leq 2f(1)$ , 则  $a$  的取值范围是..... ( )
- A.  $[1, 2]$       B.  $\left(0, \frac{1}{2}\right]$       C.  $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$       D.  $(0, 2]$
- 2.6 已知函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbb{R}$  上的奇函数,  $g(x)$  是定义在  $\mathbb{R}$  的偶函数, 且  $f(x) - g(x) = 1 - x^2 - x^3$ , 则  $g(x)$  的解析式为..... ( )
- A.  $1 - x^2$       B.  $2 - 2x^2$       C.  $x^2 - 1$       D.  $2x^2 - 2$
- 2.7 若  $f(x) = x \ln(x + \sqrt{a + x^2})$  为偶函数, 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

### 三、函数的单调性

**定义** 一般地, 设函数  $f(x)$  的定义域为  $I$ :

- 1) 如果对于定义域  $I$  内某个区间  $D$  上的任意两个自变量的值  $x_1, x_2$ , 当  $x_1 < x_2$  时, 都有  $f(x_1) < f(x_2)$ , 那么就说函数  $f(x)$  在区间  $D$  上是增函数;
- 2) 如果对于定义域  $I$  内某个区间  $D$  上的任意两个自变量的值  $x_1, x_2$ , 当  $x_1 < x_2$  时, 都有  $f(x_1) > f(x_2)$ , 那么就说函数  $f(x)$  在区间  $D$  上是减函数.

如果函数  $f(x)$  在区间  $D$  上是增函数或减函数, 那么就说函数  $f(x)$  在区间  $D$  具有 (严格的) 单调性, 区间  $D$  叫做函数  $f(x)$  的单调区间.

- 函数的单调性是定义在区间上的, 即单调性是函数在某个区间上的性质;
- 单调区间是定义域的子集;



- 单调区间的写法: 尽可能地使用闭区间 (不能写成闭区间的三种情形:  $\infty$  符号旁; 端点不在函数定义域内; 端点处函数增减性发生变化);
- 自变量量和函数值: 变化趋势相同时, 函数单调增; 变化趋势相反时, 函数单调减; 简记为: 同增异减.

$$\text{单调递增} \Leftrightarrow (x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0 \Leftrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$$

$$\text{单调递减} \Leftrightarrow (x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] < 0 \Leftrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$$

**判定** 函数单调性的判断目前有以下几种常见方法:

- 根据图像判断;
- 根据定义; 由定义证明函数  $f(x)$  在给定区间  $D$  上单调性的步骤:
  - ① 取值: 任取  $x_1, x_2 \in D$ , 且  $x_1 < x_2$ ;
  - ② 作差或作商:  $f(x_1) - f(x_2)$  或  $f(x_1)/f(x_2)$ ; (当  $f(x)$  在区间  $D$  内恒大于 0 或恒小于 0 时才可使用作商法)
  - ③ 变形: 因式分解、配方、通分、根式有理化等等, 化简至能够简单判断正负号的式子;
  - ④ 定号: 判断  $f(x_1) - f(x_2)$  的正负 (或  $f(x_1)/f(x_2)$  与 1 比大小), 进一步判断  $f(x_1)$  与  $f(x_2)$  的大小值关系;
  - ⑤ 得出结论:  $f(x_1) < f(x_2)$  时函数  $f(x)$  单调递增;  $f(x_1) > f(x_2)$  时函数  $f(x)$  单调递减.
- 根据单调性已知的函数, 并利用函数单调性的几个结论判断:
  - ①  $f(x)$  与  $f(x) + C$  ( $C$  是常数) 具有相同的单调性;
  - ②  $k > 0$  时,  $kf(x)$  与  $f(x)$  单调性相同;  $k < 0$  时,  $kf(x)$  与  $f(x)$  单调性相反;
  - ③ 在公共定义域内, 两增函数相加仍为增函数; 减函数相减仍为减函数;
  - ④ 对于复合函数, “同增异减”, 即:
 

若  $\mu = g(x)$  在  $[a, b]$  上是增 (减) 函数, 函数  $y = f(\mu)$  在区间  $[g(a), g(b)]$  (或区间  $[g(b), g(a)]$ ) 上是增 (减) 函数, 那么复合函数  $y = f[g(x)]$  在区间  $[a, b]$  上一定是单调的, 且若  $f(\mu)$  与  $g(x)$  单调性相同, 则复合函数  $y = f[g(x)]$  单调递增; 若  $f(\mu)$  与  $g(x)$  单调性相反, 则复合函数  $y = f[g(x)]$  单调递减.



3.1 设  $f(x), g(x)$  都是单调函数, 有如下四个命题:

- ①若  $f(x)$  单调递增,  $g(x)$  单调递增, 则  $f(x) - g(x)$  单调递增;
- ②若  $f(x)$  单调递增,  $g(x)$  单调递减, 则  $f(x) - g(x)$  单调递增;



③若  $f(x)$  单调递减,  $g(x)$  单调递增, 则  $f(x) - g(x)$  单调递减;

④若  $f(x)$  单调递减,  $g(x)$  单调递减, 则  $f(x) - g(x)$  单调递减;

其中, 正确的命题是 ..... ( )

- A. ①③                      B. ①④                      C. ②③                      D. ②④

3.2 函数  $y = -\sqrt{1 - 4x^2}$  的单调递减区间是 ..... ( )

- A.  $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$                       B.  $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$                       C.  $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$                       D.  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

3.3 (福州八中 15-16 高一期中,2) 设偶函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbb{R}$ , 当  $x \in [0, +\infty)$  时,  $f(x)$  是增函数, 则  $f(-2)$ ,  $f(\pi)$ ,  $f(-3)$  的大小关系是 ..... ( )

- A.  $f(\pi) > f(-3) > f(-2)$                       B.  $f(\pi) > f(-2) > f(-3)$   
C.  $f(\pi) < f(-3) < f(-2)$                       D.  $f(\pi) < f(-2) < f(-3)$

3.4 (福州高级中学 16-17 高一期中,11) 定义在  $\mathbb{R}$  上的偶函数  $f(x)$ , 当  $x \in [1, 2]$  时,  $f(x) < 0$  且  $f(x)$  增函数, 给出下列四个结论:

- (1)  $f(x)$  在  $[-2, -1]$  上单调递增;                      (2) 当  $x \in [-2, -1]$  时, 有  $f(x) < 0$ ;  
(3)  $f(-x)$  在  $[-2, -1]$  上单调递减;                      (4)  $|f(x)|$  在  $[-2, -1]$  上单调递减.

其中正确的结论是 ..... ( )

- A. (1)(3)                      B. (2)(4)                      C. (2)(3)                      D. (3)(4)

3.5 【2016 师大附中 18】(本小题满分 12 分) 已知函数  $f(x)$  为  $\mathbb{R}$  上的偶函数.  $x \leq 0$  时  $f(x) = 4^{-x} - a \cdot 2^{-x}$ , ( $a > 0$ )

(I) 求函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上的解析式; (II) 求函数  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上的最小值.

3.6 (福州市格致中学 2016-2017 高一上期中考试数学学科试卷 22) 已知二次函数  $f(x) = ax^2 + bx + 3$  是偶函数, 且过点  $(-1, 4)$ ,  $g(x) = x + 4$ .

(I) 求  $f(x)$  的解析式;

(II) 求函数  $F(x) = f(2^x) + g(2^{x+1})$  的值域;

(III) 若  $f(x) \geq g(mx + m)$  对  $x \in [2, 6]$  恒成立, 求实数  $m$  的取值范围.



#### 四、课后作业



- 4.1 如果  $f(x)$  是定义在  $\mathbb{R}$  上的奇函数, 那么下列函数中一定是偶函数的是 ..... ( )  
 A.  $x + f(x)$                       B.  $xf(x)$                       C.  $x^2 + f(x)$                       D.  $x^2 f(x)$
- 4.2 已知函数  $g(x) = f(x) - x$  是偶函数, 且  $f(3) = 4$ , 则  $f(-3) = \dots\dots\dots$  ( )  
 A. -4                      B. -2                      C. 0                      D. 4
- 4.3 设函数  $f(x), g(x)$  的定义域都为  $\mathbb{R}$ , 且  $f(x)$  是奇函数,  $g(x)$  是偶函数, 则下列结论正确的是 ..... ( )  
 A.  $f(x) + |g(x)|$  是偶函数                      B.  $f(x) - |g(x)|$  是奇函数  
 C.  $|f(x)| + g(x)$  是偶函数                      D.  $|f(x)| - g(x)$  是奇函数
- 4.4 (福州格致中学 16-17 高一期中, 10) 若  $f(x) = -x^2 + 2ax$  与  $g(x) = \frac{a}{x+1}$  在区间  $[1, 2]$  上都是减函数, 则实数  $a$  的取值范围 ..... ( )  
 A.  $(-1, 0) \cup (0, 1)$                       B.  $(-1, 0) \cup (0, 1]$                       C.  $(0, 1)$                       D.  $(0, 1]$
- 4.5 设函数  $f(x) = \lg \frac{2+x}{2-x}$ , 则  $f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{2}{x}\right)$  的定义域为 ..... ( )  
 A.  $(-4, 0) \cup (0, 4)$                       B.  $(-4, -1) \cup (1, 4)$                       C.  $(-2, -1) \cup (1, 2)$                       D.  $(-4, -2) \cup (2, 4)$
- 4.6 (2009 四川卷文理 12) 已知函数  $f(x)$  是定义在实数集  $\mathbb{R}$  上的不恒为零的偶函数, 且对任意实数  $x$  都有  $xf(x+1) = (1+x)f(x)$ , 则  $f\left(\frac{5}{2}\right)$  的值是 ..... ( )  
 A. 0                      B.  $\frac{1}{2}$                       C. 1                      D.  $\frac{5}{2}$
- 4.7 若函数  $f(x) = \ln(e^{3x} + 1) + ax$  为偶函数, 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ .
- 4.8 若  $f(x)$  是定义在  $\mathbb{R}$  上的奇函数, 当  $x \leq 0$  时,  $f(x) = 2x^2 - x$ , 则  $f(1) = \underline{\hspace{2cm}}$ .
- 4.9 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内有定义, 下列函数:  
 ①  $y = -|f(x)|$                       ②  $y = xf(x^2)$ ;  
 ③  $y = -f(-x)$                       ④  $y = f(x) - f(-x)$ .  
 中必为奇函数的有 ..... (要求填写正确答案的序号)
- 4.10 【2016 福州三中 17】(本小题满分 12 分) 已知函数  $f(x) = \log_3 9x \cdot \log_3 x + 2, x \in \left[\frac{1}{9}, 3\right]$ .  
 (1) 求  $f(x)$  最小值和最大值;  
 (2) 若不等式  $f(x) - 2m + 1 > 0$  恒成立, 求实数  $m$  的取值范围.



- 4.11 (福州八中 2015—2016 高一上学期期中考试 23) 设  $f(x)$  是定义在  $\mathbb{R}$  上的奇函数, 且对任意  $a, b \in \mathbb{R}$ , 当  $a + b \neq 0$  时, 都有  $\frac{f(a)+f(b)}{a+b} > 0$
- (1) 若  $a > b$ , 试比较  $f(a)$  与  $f(b)$  的大小关系;
- (2) 若  $f(9^x - 2 \cdot 3^x) + f(2 \cdot 9^x - k) > 0$  对任意  $x \in [0, \infty)$  恒成立, 求实数  $k$  的取值范围.

- 4.12 (福州市屏东中学 2016-2017 高一上期中 22) 已知函数  $f(x) = 2^x - 2^{-2}$ , 定义域为  $\mathbb{R}$ ; 函数  $g(x) = 2^{x+1} - 2^{2x}$ , 定义域为  $[-1, 1]$ .
- (1) 判断函数  $f(x)$  的奇偶性, 不用证明;
- (2) 求函数  $g(x)$  的最值;
- (3) 若不等式  $f(g(x)) \leq f(-3am + m^2 + 1)$  对  $x \in [-1, 1], a \in [-2, 2]$  上恒成立, 求  $m$  的取值范围.





## 五、参考答案

1.1 A

1.2 C

1.3 B

1.4 C

1.5 D

2.1 D

2.2 D

2.3 C

2.4 D

2.5 C

2.6 C

2.7 1

3.1 C

3.2 C

3.3 A

3.4 C

3.5 (I)  $x \in (0, +\infty)$  时,  $f(x) = f(-x) = 4^x - a \cdot 2^x$ ; (II)  $a \geq 2$  时,  $f(x)_{\min} = f(\frac{a}{2}) = -\frac{a^2}{4}$ ;

$0 < a < 2$  时,  $f(x)_{\min} = f(0) = 1 - a$

3.6 (I)  $f(x) = ax^2 + 3$ ; (II)  $(7, +\infty)$ ; (III)  $m \leq 1$

4.1 B

4.2 B

4.3 C

4.4 D

4.5 B

4.6 A

4.7  $-\frac{3}{2}$

4.8 -3

4.9 ②④

4.10 (1)  $f_{\min}(x) = f(\frac{1}{3}) = 1$   $f_{\max}(x) = f(3) = 5$  (2)  $m \in (-\infty, 1)$

4.11 (1)  $f(a) > f(b)$ ; (2)  $k < 1$ .

4.12 (1) 增函数; (2)  $g_{\max}(t) = g(1) = 1$ ;  $g_{\min}(t) = g(2) = 0$ ; (3)  $m \in (-\infty, -6) \cup [6, +\infty) \cup \{0\}$