

教师姓名	沈炜炜	学生姓名	郑皓天	首课时间	20181207	本课时间	20181207
学习科目	数学	上课年级	高一	教材版本		人教 A 版	
课题名称	函数及其性质						
重点难点	函数的单调性						



课前检测

填写下表，写出各函数的定义域、值域、单调性以及奇偶性。

$f(x)$	定义域	值域	单调性	奇偶性
x				
x^2				
$\log_2 x$				
3^x				
$\frac{1}{x}$				
\sqrt{x}				
$\log_x 2$				

一、函数的概念与表示

定义 一般地，有：

设 A, B 是非空的数集，如果按照某种确定的对应关系 f ，使对于集合 A 中的任意一个数 x ，在集合 B 中都有唯一确定的数 $f(x)$ 和它对应，那么就称 $f: A \rightarrow B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数，记作

$$y = f(x), \quad x \in A.$$

其中， x 叫做自变量， x 的取值范围 A 叫做函数的定义域；与 x 的值相对应的 y 值叫做函数值，函数值的集合 $\{f(x)|x \in A\}$ 叫做函数的值域，值域是集合 B 的子集。

- 函数是两个数集间的一种对应关系；
- 未指明定义域的情况下，默认定义域取使得对应关系有意义的所有实数。具体如下：
 - ① 分式的分母不为 0；
 - ② 偶次根式的被开方数不小于 0；
 - ③ 零次或负次指数次幂的底数不为零；
 - ④ 对数的真数大于 0；
 - ⑤ 指数、对数函数的底数大于 0 且不等于 1；
 - ⑥ 实际问题对自变量的限制。
- 若函数 $f(x)$ 定义域为 D ，且 $f(A)$ 存在，则

$$A \in D.$$



- 1.1 函数 $f(x) = \sqrt{2^x - 1}$ 的定义域是 ()
 A. $[0, +\infty)$ B. $[1, +\infty)$ C. $(-\infty, 0]$ D. $(-\infty, 1]$
- 1.2 函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(\log_2 x)^2 - 1}}$ 的定义域为 ()
 A. $(0, \frac{1}{2})$ B. $(2, +\infty)$ C. $(0, \frac{1}{2}) \cup (2, +\infty)$ D. $(0, \frac{1}{2}] \cup [2, +\infty)$
- 1.3 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, 0)$, 则函数 $f(2x + 1)$ 的定义域为 ()
 A. $(-1, 1)$ B. $(-1, -\frac{1}{2})$ C. $(-1, 0)$ D. $(\frac{1}{2}, 1)$
- 1.4 已知函数 $f(2x + 1)$ 的定义域为 $(-2, \frac{1}{2})$, 则函数 $f(x)$ 的定义域为 ()
 A. $(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4})$ B. $(-1, \frac{3}{2})$ C. $(-3, 2)$ D. $(-3, 3)$
- 1.5 下列函数中, 其定义域和值域分别与函数 $y = 10^{\lg x}$ 的定义域和值域相同的是 ()
 A. $y = x$ B. $y = \lg x$ C. $y = 2^x$ D. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

二、函数的奇偶性

几何定义 一般地, 图像关于 y 轴对称的函数称为偶函数, 图像关于原点对称的函数称为奇函数.

代数定义 若对于函数 $f(x)$ 定义域内任意一个 x , 都有 $f(-x) = f(x)$, 则函数 $f(x)$ 称为偶函数;
 若对于函数 $f(x)$ 定义域内任意一个 x , 都有 $f(-x) = -f(x)$, 那么函数 $f(x)$ 称为奇函数;

奇函数与偶函数的定义域关于原点对称

性质 • 奇函数左右对应中会有负号, 偶函数没有负号, 此处的规律可以参考“负负得正”. (以下假设奇偶函数都不恒为 0)

- ① 奇 \pm 奇 = 奇; 偶 \pm 偶 = 偶; 奇 \pm 偶 = 非奇非偶
- ② 奇 $\times (\div)$ 奇 = 偶; 偶 $\times (\div)$ 偶 = 偶; 奇 $\times (\div)$ 偶 = 奇.
- ③ 当复合函数的内外两层函数都具有奇偶性时, 有偶即偶, 两奇为奇.

- 奇 (偶) 函数在关于原点对称的两个区间上具有相同 (相反) 的单调性;
- 若奇函数 $f(x)$ 在原点有定义, 则 $f(x) = 0$.



- 2.1 设奇函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上增函数且 $f(1) = 0$, 则不等式 $\frac{f(x) - f(-x)}{x} < 0$ 的解集为 ()
 A. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ B. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ C. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ D. $(-1, 0) \cup (0, 1)$
- 2.2 奇函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 若 $f(x + 2)$ 为偶函数, 且 $f(1) = 1$, 则 $f(8) + f(9) = \dots\dots\dots$ ()
 A. -2 B. -1 C. 0 D. 1

- 2.3 设函数 $f(x), g(x)$ 的定义域都为 \mathbf{R} , 且 $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数, 则下列结论正确的是... ()
 A. $f(x)g(x)$ 是偶函数 B. $|f(x)|g(x)$ 是奇函数 C. $f(x)|g(x)|$ 是奇函数 D. $|f(x)g(x)|$ 是奇函数
- 2.4 已知函数 $f(x) = \ln(\sqrt{1+9x^2} - 3x) + 1$, 则 $f(\lg 2) + f\left(\lg \frac{1}{2}\right)$ 等于 ()
 A. -1 B. 0 C. 1 D. 2
- 2.5 已知函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 且在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 若实数 a 满足 $f(\log_2 a) + f(\log_{\frac{1}{2}} a) \leq 2f(1)$, 则 a 的取值范围是 ()
 A. $[1, 2]$ B. $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ C. $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ D. $(0, 2]$
- 2.6 已知函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, $g(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 的偶函数, 且 $f(x) - g(x) = 1 - x^2 - x^3$, 则 $g(x)$ 的解析式为 ()
 A. $1 - x^2$ B. $2 - 2x^2$ C. $x^2 - 1$ D. $2x^2 - 2$
- 2.7 若 $f(x) = x \ln(x + \sqrt{a+x^2})$ 为偶函数, 则 $a =$ _____.

三、函数的单调性

定义 一般地, 设函数 $f(x)$ 的定义域为 I :

- 1) 如果对于定义域 I 内某个区间 D 上的任意两个自变量的值 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) < f(x_2)$, 那么就说函数 $f(x)$ 在区间 D 上是增函数;
- 2) 如果对于定义域 I 内某个区间 D 上的任意两个自变量的值 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) > f(x_2)$, 那么就说函数 $f(x)$ 在区间 D 上是减函数.

如果函数 $f(x)$ 在区间 D 上是增函数或减函数, 那么就说函数 $f(x)$ 在区间 D 具有 (严格的) 单调性, 区间 D 叫做函数 $f(x)$ 的单调区间.

- 函数的单调性是定义在区间上的, 即单调性是函数在某个区间上的性质;
- 单调区间是定义域的子集;
- 单调区间的写法: 尽可能地使用闭区间 (不能写成闭区间的三种情形: ∞ 符号旁; 端点不在函数定义域内; 端点处函数增减性发生变化);
- 自变量量和函数值: 变化趋势相同时, 函数单调增; 变化趋势相反时, 函数单调减; 简记为: 同增异减.

$$\text{单调递增} \Leftrightarrow (x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0 \Leftrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$$

$$\text{单调递减} \Leftrightarrow (x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] < 0 \Leftrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$$

判定 函数单调性的判断目前有以下几种常见方法:

- 根据图像判断;

• 根据定义：由定义证明函数 $f(x)$ 在给定区间 D 上单调性的步骤：

- ① 取值：任取 $x_1, x_2 \in D$ ，且 $x_1 < x_2$ ；
- ② 作差或作商： $f(x_1) - f(x_2)$ 或 $f(x_1)/f(x_2)$ ；（当 $f(x)$ 在区间 D 内恒大于 0 或恒小于 0 时才可使用作商法）
- ③ 变形：因式分解、配方、通分、根式有理化等等，化简至能够简单判断正负号的式子；
- ④ 定号：判断 $f(x_1) - f(x_2)$ 的正负（或 $f(x_1)/f(x_2)$ 与 1 比大小），进一步判断 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小值关系；
- ⑤ 得出结论： $f(x_1) < f(x_2)$ 时函数 $f(x)$ 单调递增； $f(x_1) > f(x_2)$ 时函数 $f(x)$ 单调递减。

• 根据单调性已知的函数，并利用函数单调性的几个结论判断：

- ① $f(x)$ 与 $f(x) + C$ (C 是常数) 具有相同的单调性；
- ② $k > 0$ 时， $kf(x)$ 与 $f(x)$ 单调性相同； $k < 0$ 时， $kf(x)$ 与 $f(x)$ 单调性相反；
- ③ 在公共定义域内，两增函数相加仍为增函数；减函数相减仍为减函数；
- ④ 对于复合函数，“同增异减”，即：

若 $\mu = g(x)$ 在 $[a, b]$ 上是增(减)函数，函数 $y = f(\mu)$ 在区间 $[g(a), g(b)]$ (或区间 $[g(b), g(a)]$) 上是增(减)函数，那么复合函数 $y = f[g(x)]$ 在区间 $[a, b]$ 上一定是单调的，且若 $f(\mu)$ 与 $g(x)$ 单调性相同，则复合函数 $y = f[g(x)]$ 单调递增；若 $f(\mu)$ 与 $g(x)$ 单调性相反，则复合函数 $y = f[g(x)]$ 单调递减。



3.1 设 $f(x), g(x)$ 都是单调函数，有如下四个命题：

- ①若 $f(x)$ 单调递增， $g(x)$ 单调递增，则 $f(x) - g(x)$ 单调递增；
- ②若 $f(x)$ 单调递增， $g(x)$ 单调递减，则 $f(x) - g(x)$ 单调递增；
- ③若 $f(x)$ 单调递减， $g(x)$ 单调递增，则 $f(x) - g(x)$ 单调递减；
- ④若 $f(x)$ 单调递减， $g(x)$ 单调递减，则 $f(x) - g(x)$ 单调递减；

其中，正确的命题是 ()

- A. ①③ B. ①④ C. ②③ D. ②④

3.2 函数 $y = -\sqrt{1-4x^2}$ 的单调递减区间是 ()

- A. $(-\infty, \frac{1}{2}]$ B. $[\frac{1}{2}, +\infty)$ C. $[-\frac{1}{2}, 0]$ D. $[0, \frac{1}{2}]$

3.3 (福州八中 15-16 高一期中,2) 设偶函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbb{R} ，当 $x \in [0, +\infty)$ 时， $f(x)$ 是增函数，则 $f(-2)$ ， $f(\pi)$ ， $f(-3)$ 的大小关系是 ()

- A. $f(\pi) > f(-3) > f(-2)$ B. $f(\pi) > f(-2) > f(-3)$
C. $f(\pi) < f(-3) < f(-2)$ D. $f(\pi) < f(-2) < f(-3)$

3.4 (福州高级中学 16-17 高一期中,11) 定义在 \mathbb{R} 上的偶函数 $f(x)$ ，当 $x \in [1, 2]$ 时， $f(x) < 0$ 且 $f(x)$ 增函数，给出下列四个结论：

- (1) $f(x)$ 在 $[-2, -1]$ 上单调递增； (2) 当 $x \in [-2, -1]$ 时，有 $f(x) < 0$ ；

- (3) $f(-x)$ 在 $[-2, -1]$ 上单调递减; (4) $|f(x)|$ 在 $[-2, -1]$ 上单调递减.
其中正确的结论是.....()
A. (1)(3) B. (2)(4) C. (2)(3) D. (3)(4))

3.5 【2016 师大附中 18】(本小题满分 12 分) 已知函数 $f(x)$ 为 \mathbb{R} 上的偶函数. $x \leq 0$ 时 $f(x) = 4^{-x} - a \cdot 2^{-x}$, ($a > 0$)

(I) 求函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的解析式; (II) 求函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的最小值.

3.6 (福州市格致中学 2016-2017 高一上期中考试数学学科试卷 22) 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + 3$ 是偶函数, 且过点 $(-1, 4)$, $g(x) = x + 4$.

(I) 求 $f(x)$ 的解析式;

(II) 求函数 $F(x) = f(2^x) + g(2^{x+1})$ 的值域;

(III) 若 $f(x) \geq g(mx + m)$ 对 $x \in [2, 6]$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

四、课后作业



- 4.1 如果 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 那么下列函数中一定是偶函数的是.....()
 A. $x + f(x)$ B. $xf(x)$ C. $x^2 + f(x)$ D. $x^2f(x)$
- 4.2 已知函数 $g(x) = f(x) - x$ 是偶函数, 且 $f(3) = 4$, 则 $f(-3) = \dots\dots\dots$ ()
 A. -4 B. -2 C. 0 D. 4
- 4.3 设函数 $f(x), g(x)$ 的定义域都为 \mathbf{R} , 且 $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数, 则下列结论正确的是...()
 A. $f(x) + |g(x)|$ 是偶函数 B. $f(x) - |g(x)|$ 是奇函数
 C. $|f(x)| + g(x)$ 是偶函数 D. $|f(x)| - g(x)$ 是奇函数
- 4.4 (福州格致中学 16-17 高一期中, 10) 若 $f(x) = -x^2 + 2ax$ 与 $g(x) = \frac{a}{x+1}$ 在区间 $[1, 2]$ 上都是减函数, 则实数 a 的取值范围.....()
 A. $(-1, 0) \cup (0, 1)$ B. $(-1, 0) \cup (0, 1]$ C. $(0, 1)$ D. $(0, 1]$
- 4.5 设函数 $f(x) = \lg \frac{2+x}{2-x}$, 则 $f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{2}{x}\right)$ 的定义域为.....()
 A. $(-4, 0) \cup (0, 4)$ B. $(-4, -1) \cup (1, 4)$ C. $(-2, -1) \cup (1, 2)$ D. $(-4, -2) \cup (2, 4)$
- 4.6 (2009 四川卷文理 12) 已知函数 $f(x)$ 是定义在实数集 \mathbf{R} 上的不恒为零的偶函数, 且对任意实数 x 都有 $xf(x+1) = (1+x)f(x)$, 则 $f\left(\frac{5}{2}\right)$ 的值是.....()
 A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. $\frac{5}{2}$
- 4.7 若函数 $f(x) = \ln(e^{3x} + 1) + ax$ 为偶函数, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 4.8 若 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 当 $x \leq 0$ 时, $f(x) = 2x^2 - x$, 则 $f(1) = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 4.9 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, 下列函数:
 ① $y = -|f(x)|$ ② $y = xf(x^2)$;
 ③ $y = -f(-x)$ ④ $y = f(x) - f(-x)$.
 中必为奇函数的有.....(要求填写正确答案的序号)
- 4.10 【2016 福州三中 17】(本小题满分 12 分) 已知函数 $f(x) = \log_3 9x \cdot \log_3 x + 2, x \in \left[\frac{1}{9}, 3\right]$.
 (1) 求 $f(x)$ 最小值和最大值;
 (2) 若不等式 $f(x) - 2m + 1 > 0$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

4.11 (福州八中 2015—2016 高一上学期期中考试 23) 设 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的奇函数, 且对任意 $a, b \in \mathbb{R}$, 当 $a + b \neq 0$ 时, 都有 $\frac{f(a)+f(b)}{a+b} > 0$

(1) 若 $a > b$, 试比较 $f(a)$ 与 $f(b)$ 的大小关系;

(2) 若 $f(9^x - 2 \cdot 3^x) + f(2 \cdot 9^x - k) > 0$ 对任意 $x \in [0, \infty)$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围.

4.12 (福州市屏东中学 2016-2017 高一上期中 22) 已知函数 $f(x) = 2^x - 2^{-2}$, 定义域为 \mathbb{R} ; 函数 $g(x) = 2^{x+1} - 2^{2x}$, 定义域为 $[-1, 1]$.

(1) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性, 不用证明;

(2) 求函数 $g(x)$ 的最值;

(3) 若不等式 $f(g(x)) \leq f(-3am + m^2 + 1)$ 对 $x \in [-1, 1], a \in [-2, 2]$ 上恒成立, 求 m 的取值范围.

五、部分参考答案

1.1 A

1.2 C

1.3 B

1.4 A

1.5 D

2.1 D

2.2 D

2.3 C

2.4 D

2.5 C

2.6 C

2.7 1

3.1 C

3.2 C

3.3 A

3.4 C

3.5 (I) $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) = f(-x) = 4^x - a \cdot 2^x$; (II) $a \geq 2$ 时, $f(x)_{\min} = f(\frac{a}{2}) = -\frac{a^2}{4}$; $0 < a < 2$ 时, $f(x)_{\min} = f(0) = 1 - a$

3.6 (I) $f(x) = ax^2 + 3$; (II) $(7, +\infty)$; (III) $m \leq 1$

4.1 B

4.2 B

4.3 C

4.4 D

4.5 B

4.6 A

4.7 $-\frac{3}{2}$

4.8 -3

4.9 ②④

4.10 (1) $f_{\min}(x) = f(\frac{1}{3}) = 1$ $f_{\max}(x) = f(3) = 5$ (2) $m \in (-\infty, 1)$ 4.11 (1) $f(a) > f(b)$; (2) $k < 1$.4.12 (1) 增函数; (2) $g_{\max}(t) = g(1) = 1$; $g_{\min}(t) = g(2) = 0$; (3) $m \in (-\infty, -6) \cup [6, +\infty) \cup \{0\}$