

福州八中 2018-2019 学年第一学期期中考试

高一数学 必修一

考试时间: 120 分钟

试卷满分: 150 分

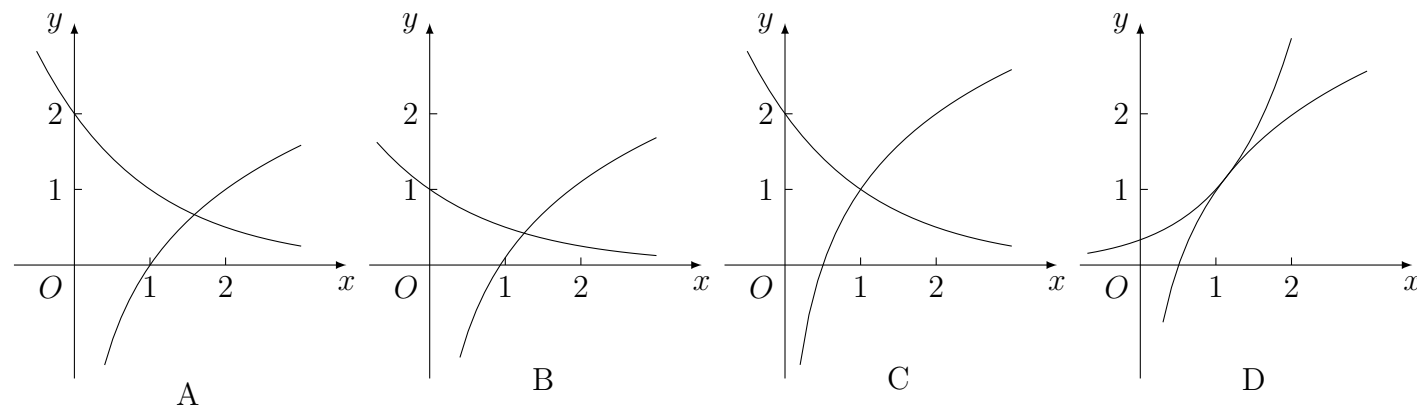
第 I 卷

一、选择题 (本大题共 10 小题, 每小题 5 分, 共 50 分. 每题有且只有一个选项是正确的, 请把答案填在答卷相应位置上)

- 1 设集合 $A = \{x \in \mathbb{Q} | x > 1\}$, 则..... ()
A. $\emptyset \in A$ B. $\sqrt{2} \notin A$ C. $\sqrt{2} \in A$ D. $\{\sqrt{2}\} \subseteq A$
- 2 下列函数中与函数 $y = x(x \geq 0)$ 有相同图像的一个是..... ()
A. $y = \frac{x^2}{x}$ B. $y = \sqrt{x^2}$ C. $y = \sqrt[3]{x^3}$ D. $y = (\sqrt{x})^2$
- 3 下列函数在区间 $(0, +\infty)$ 上是增函数的是..... ()
A. $y = \ln(x+1)$ B. $y = (x-1)^2$ C. $y = x^{-2}$ D. $y = 3^{-x}$
- 4 设 $f(x) = \begin{cases} x-2, & x \geq 10 \\ f[f(x+6)], & x < 10 \end{cases}$, 则 $f(9)$ 的值为..... ()
A. 10 B. 11 C. 12 D. 13
- 5 若函数 $f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2$ 的一个正数零点附近的函数用二分法计算, 其参考数据如下:

$f(1) = -2$	$f(1.5) = 0.625$	$f(1.25) = -0.984$
$f(1.375) = -0.260$	$f(1.4375) = 0.162$	$f(1.40625) = -0.054$

- 那么方程 $x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$ 的一个近似根 (精确度 0.1) 是..... ()
A. 1.2 B. 1.3 C. 1.4 D. 1.5
- 6 已知函数 $f(x)$ 的值域为 $[-2, 3]$, 则函数 $f(x-2)$ 的值域为..... ()
A. $[-4, 1]$ B. $[0, 5]$ C. $[-4, 1] \cup [0, 5]$ D. $[-2, 3]$
 - 7 三个数 $0.8^9, 9^{0.8}, \log_{0.8} 9$ 的大小关系为..... ()
A. $\log_{0.8} 9 < 0.8^9 < 9^{0.8}$ B. $0.8^9 < 9^{0.8} < \log_{0.8} 9$ C. $\log_{0.8} 9 < 9^{0.8} < 0.8^9$ D. $0.8^9 < \log_{0.8} 9 < 9^{0.8}$
 - 8 函数 $f(x) = 1 + \log_2 x$ 与 $g(x) = 2^{-(x-1)}$ 在同一直角坐标系下的图像大致是..... ()



- 9 已知函数 $f(x) = x^2 - 2x + 3$ 在区间 $[0, t]$ 上的最大值为 3, 最小值为 2, 则实数 t 的取值范围是... ()
A. $[1, 2]$ B. $(0, 1]$ C. $[1, +\infty)$ D. $(0, 2]$
- 10 某公司为激励创新, 计划逐年加大研发资金投入. 若该公司 2015 年全年投入研发资金 130 万元, 在此基础上, 每年投入的研发资金比上一年增长 12%. 则该公司全年投入的研发资金开始超过 200 万元的年份是 (参考数据: $\lg 1.12 \approx 0.05, \lg 1.3 \approx 0.11, \lg 2 \approx 0.30$)..... ()
A. 2018 年 B. 2019 年 C. 2020 年 D. 2021 年

二、填空题 (本大题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分)

- 11 函数 $y = \sqrt{3x-1} + \lg(1-x)$ 的定义域是_____
- 12 若函数 $f(x) = (m-1)x^m$ 是幂函数, 则函数 $g(x) = \log_a(x-m) + m$ (其中 $a > 0, a \neq 1$) 的图像恒过定点 A 的坐标为_____
- 13 定义在 \mathbb{R} 的偶函数 $f(x)$ 满足: 对任意的 $x_1, x_2 \in (\infty, 0] (x_1 \neq x_2)$, 有 $(x_2 - x_1)[f(x_2) - f(x_1)] < 0$, 且 $f(2) = 0$, 则不等式 $\frac{3f(x)+f(-x)}{5x} < 0$ 的解集是_____

三、解答题 (本大题共有 3 个小题, 共 35 分. 解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程)

- 14 (本小题满分 10 分) 计算:
(I) 若 $x \log_5 2 = 1$ 求 $2^x + 2^{-x}$ 的值;
(II) 求值 $0.125^{\frac{1}{3}} - (-\frac{7}{8})^0 + [(-2)^3]^{-\frac{4}{3}} + \frac{3}{4} \lg 25 + \lg(2\sqrt{2})$.

- 15 (本小题满分 10 分)
设集合 $A = \{x | 2 \leq x \leq 4\}, B = \{x | 0 < \ln x < 1\}, C = \{x | t+1 < x < 2t, t \in \mathbb{R}\}$.
(I) 求 $A \cap B$
(II) 求 $A \cap C = C$, 求 t 的取值范围.

- 16 (本小题满分 15 分)
已知函数 $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}$ (a, b 是常数) 是定义在 $(-1, 1)$ 上的奇函数, 且 $f(\frac{1}{2}) = \frac{2}{5}$.
(I) 确定 $f(x)$ 的解析式;
(II) 当 $x \in (-1, 1)$ 时, 判断函数 $f(x)$ 的单调性, 并用定义法证明;
(III) 解关于 x 的不等式 $f(2x-1) + f(x) < 0$.

第 II 卷

四、选择题 (本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分. 每题有且只有一个选项是正确的, 请把答案填在答卷相应位置上)

- 17 函数 $y = f(x)$ 是函数 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 的反函数, 且 $f(2) = 1$, 则 $f(8) = \dots\dots\dots$ ()
A. 3 B. $\frac{1}{3}$ C. -3 D. $-\frac{1}{3}$
- 18 若 $f(x) = -x^2 + 2ax$ 与 $g(x) = \frac{a}{x+1}$ 在区间 $[1, 2]$ 上都是减函数, 则 a 的取值范围是 $\dots\dots\dots$ ()
A. $(-1, 0) \cup (0, 1)$ B. $(-1, 0) \cup (0, 1]$ C. $(0, 1)$ D. $(0, 1]$
- 19 对于集合 M, N , 定义 $M - N = \{x | x \in M, \text{且} x \notin N\}, M \oplus N = (M - N) \cup (N - M)$, 设 $A = \{x | x \geq -\frac{9}{4}\}, B = \{x | x < 0\}$, 则 $A \oplus B = \dots\dots\dots$ ()
A. $(-\frac{9}{4}, 0]$ B. $[-\frac{9}{4}, 0)$ C. $(-\infty, -\frac{9}{4}) \cup [0, +\infty)$ D. $(-\infty, -\frac{9}{4}] \cup (0, +\infty)$
- 20 用 $\max\{a, b, c\}$ 表示 a, b, c 三个数中的最大值, 设 $f(X) = \max\{2^x, x + 2, 10 - x\}, (x \leq 0)$, 则 $f(x)$ 取得最小值时 x 所在的区间为 $\dots\dots\dots$ ()
A. $(1, 2)$ B. $(2, 3)$ C. $(3, 4)$ D. $(4, 5)$

五、填空题 (本大题共 2 小题, 每小题 4 分, 共 8 分)

- 21 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 的奇函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = x^2 - 4x$, 则不等式 $f(x) > x$ 的解集用区间表示为 _____
- 22 已知函数 $f(x) = \begin{cases} a^x, & x \geq 2, \\ (3-a)x + 2, & x < 2 \end{cases}$ 为 \mathbb{R} 上的增函数, 则实数 a 取值的范围是 _____

六、解答题 (本大题共有 2 个小题, 共 26 分. 解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程)

23 (本小题满分 12 分)

设二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的图像过点 $(0, 1)$ 和 $(1, 4)$, 且对于任意的实数 x , 不等式 $f(x) \geq 4x$ 恒成立.

(I) 求函数 $f(x)$ 的表达式;

(II) 设 $g(x) = kx + 1$, 若 $F(x) = \log_{\frac{1}{2}}[g(x) - f(x)]$ 在区间 $[2, 3]$ 上是增函数, 求实数 k 的取值范围.

已知函数 $y = x + \frac{a}{x}$ 有如下性质: 如果常数 $a > 0$, 那么该函数在 $(0, \sqrt{a}]$ 上是减函数, 在 $[\sqrt{a}, +\infty)$ 上是增函数.

(I) 若函数 $y = x + \frac{2^b}{x} (x > 0)$ 的值域为 $[6, +\infty)$, 求实数 b 的值;

(II) 已知函数 $f(x) = \frac{4x^2 - 12x - 3}{2x + 1}, x \in [0, 1]$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间和值域;

(III) 对于 (II) 中的函数 $f(x)$ 和函数 $g(x) = -x - 2c$, 若对任意 $x_1 \in [0, 1]$, 总存在 $x_2 \in [0, 1]$, 使得 $g(x_2) = f(x_1)$ 成立, 求实数 c 的值.

24 (本小题满分 14 分)

参考答案

- 1 B
- 2 D
- 3 A
- 4 B
- 5 C
- 6 A
- 7 A
- 8 C
- 9 A
- 10 B
- 11 $[\frac{1}{3}, +\infty)$
- 12 (3, 2)
- 13 $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$
- 14 解: (I) 由 $x \log_5 2 = 1$, $x = \frac{1}{\log_5 2} = \log_2 5$. 故
 $2^x + 2^{-x} = 5 + \frac{1}{5} = \frac{26}{5}$
 (II)

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} - 1 + 2^4 + \frac{3}{2} \lg 5 + \frac{3}{2} \lg 2 \\ &= \frac{1}{2} + 15 + \frac{3}{2}(\lg 5 + \lg 2) \\ &= 17 \end{aligned}$$

- 15 解: (I) $\because B = \{x | 1 < x < e\}$, $\therefore A \cup B = \{x | 2 \leq x < e\}$

(II) $\because A \cup C = C$, $\therefore C \subseteq A$

$C = \emptyset$ 时, $t + 1 \geq 2t, t \leq 1$

$$C \neq \emptyset \text{ 时, } \begin{cases} t + 1 < 2t \\ t + 1 \geq 2 \\ 2t \leq 4 \end{cases} \quad \therefore 1 < t \leq 2$$

综上, $t \in (-\infty, 2]$

- 16 解: (I) $\because f(x)$ 是奇函数, $\therefore b = 0$; $\because f(\frac{1}{2}) = \frac{2}{5}$, $\therefore a = 1$

$$\therefore f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

(II) $x \in (-1, 1)$ 时, $f(x)$ 单调递增. 证明如下:

$$\forall x_1, x_2 \in (-1, 1), x_1 < x_2,$$

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= \frac{x_2}{x_2^2 + 1} - \frac{x_1}{x_1^2 + 1} \\ &= \frac{(x_2 - x_1)(1 - x_1 x_2)}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} \end{aligned}$$

$\because x_1, x_2 \in (-1, 1)$, $\therefore x_1 x_2 < 1$, 即 $1 - x_1 x_2 > 0$, 又 $x_2 - x_1 > 0, x_1^2 + 1 > 0, x_2^2 + 1 > 0$

$\therefore f(x_2) - f(x_1) < 0$, 故 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上单调递增.

(III) $\because f(x)$ 是奇函数, $\therefore f(2x - 1) < -f(x) = f(-x)$, 又 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 单调递减, 故

$2x - 1 < -x$, 即 $x < \frac{1}{3}$;

综上, $x \in (0, \frac{1}{3})$

17 A

18 D

19 C

20 B

21 $(-5, 0) \cup (5, +\infty)$

22 $[0, 2]$

23 解: (I) $\because f(x)$ 过点 $(0, 1)$, $\therefore c = 1$; 又 $\because f(x)$ 过点 $(1, 4)$, $\therefore a + b = 3$, $\therefore b = 3 - a$, $\therefore f(x) = ax^2 + (3 - a)x + 1$;

又 $f(x) \geq 4x$ 恒成立, 即

$ax^2 + (3 - a)x + 1 \geq 4x \Leftrightarrow ax^2 - (a + 1)x + 1 \geq 0$ 恒成立, $\therefore a > 0, \Delta = (a + 1)^2 - 4a = (a - 1)^2 \leq 0$; \therefore

$(a - 1)^2 \geq 0$, $\therefore (a - 1)^2 = 0$, $\therefore a = 1$.

$\therefore f(x) = x^2 + 2x + 1$;

(II) 令 $h(x) = g(x) - f(x) = (kx + 1) - (x^2 + 2x + 1) = -x^2 - (2 - k)x$,

则依题意可知 $h(x)$ 在区间 $[2, 3]$ 上是减函数, 又函数 $h(x)$ 开口向下, 对称轴 $x = \frac{k-2}{2}$, $\therefore \begin{cases} \frac{k-2}{2} \leq 2 \\ h(3) > 0 \end{cases}$,

$\therefore 5 < k \leq 6$

24 解: (I) 依题意, 当 $x = \sqrt{2^b}$ 时, 函数 $y = x + \frac{2^b}{x}$ 取最小值 $2\sqrt{2^b} = 6$, $\therefore b = \log_2 9$

(II) $\because f(x) = \frac{4x^2 - 12x - 3}{2x + 1} = 2x + 1 + \frac{4}{2x + 1} - 8$ $x \in [0, 1]$,

$\therefore 2x + 1 \in [1, 3]$, 且 $2x + 1 \in (0, 2] \cap [1, 3] = [1, 2]$ 时 $f(x)$ 是减函数, $2x + 1 \in [2, +\infty) \cap [1, 3] = [2, 3]$ 时

$f(x)$ 是增函数;

$\therefore f(x)$ 的单调增区间为 $[\frac{1}{2}, 1]$, 单调减区间为 $[0, \frac{1}{2}]$, 最小值为 $2\sqrt{4} - 8 = -4$, 又 $f(0) = -3, f(1) = -\frac{11}{3}$

$\therefore f(x)$ 值域为 $[-4, -3]$

(III) $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减, $\therefore g(x)$ 值域为 $[-1 - 2c, -2c]$;

依题意可得 $[-4, -3] \subseteq [-1 - 2c, -2c]$, $\therefore \begin{cases} -4 \geq -1 - 2c \\ -3 \leq -2c \end{cases}$

$\therefore c = \frac{3}{2}$