

# 理论攻坚-数学运算 1

(讲义+笔记)

主讲教师：秦娜娜

授课时间：2023.12.09



粉笔公考·官方微信

## 理论攻坚-数学运算 1（讲义）

### 数学运算 理论攻坚 1

学习任务：

1. 课程内容：代入排除法、倍数特性法、方程法
2. 授课时长：2.5 小时
3. 对应讲义：第 120~124 页
4. 重点内容：
  - （1）掌握代入排除法的适用范围及使用方法
  - （2）掌握倍数特性法的题型特征及解题思路
  - （3）掌握方程法设未知数的技巧以及不定方程的求解方法

### 第一节 代入排除法

#### 1. 适用范围

- （1）看题型：年龄问题、余数问题、多位数问题、不定方程问题等
- （2）看选项：选项信息充分

#### 2. 使用方法

- （1）先排除、再代入
- （2）代入原则：
  - ①最值原则
  - ②从简原则

【例 1】（2019 江苏公务员）一只密码箱的密码是一个三位数，满足：3 个数字之和为 19，十位上的数比个位上的数大 2。若将百位上的数与个位上的数对调，得到一个新密码，且新密码数比原密码数大 99，则原密码数是（ ）。

- |        |        |
|--------|--------|
| A. 397 | B. 586 |
| C. 675 | D. 964 |

【例 2】（2019 天津）爸爸对小华说：“当我的岁数和你现在的一样时，你

才 7 岁”；小华对爸爸说：“当我到您现在的这个岁数时，您将有 82 岁”。则小华和爸爸现在的年龄分别是（ ）岁和（ ）岁。

- A. 31, 56  
B. 32, 57  
C. 32, 58  
D. 34, 59

【例 3】(2022 上海) 一些篮球爱好者包下了一个篮球场地, 包场费用按第一个小时 420 元, 不足一小时按一小时计, 之后每 10 分钟增加 70 元, 不足 10 分钟的按 10 分钟计。比赛结束后, 恰好人均付费 63 元, 那么最少有 ( ) 人参加比赛。

- A. 20  
B. 15  
C. 10  
D. 5

## 第二节 倍数特性法

### 一、余数型

若  $ax+b=\text{答案}$ , 则  $(\text{答案}-b)$  是  $a$  的整数倍 ( $a$ 、 $x$  是整数)

若  $ax-b=\text{答案}$ , 则  $(\text{答案}+b)$  是  $a$  的整数倍 ( $a, x$  是整数)

【例 1】(2019 河北) 阿姨给幼儿园小朋友分苹果, 如果每人分 3 个, 多 16 个苹果, 如果每人分 5 个, 那么就差四个苹果。共有多少个苹果? ( )

- A. 46  
B. 44  
C. 48  
D. 42

【例 2】(2019 安徽) 某公司举行年会, 若 5 名男员工和 3 名女员工坐一桌, 则男员工多出 4 名, 女员工刚好分配完; 若 7 名男员工和 3 名女员工坐一桌, 则男员工刚好分配完, 女员工多出 12 名。那么该公司男员工和女员工共有 ( ) 名。

- A. 108  
B. 120  
C. 132  
D. 144

## 二、比例型

若  $A/B=m/n$  ( $m/n$  为最简整数比)

则:

A 是  $m$  的整数倍

B 是  $n$  的整数倍

$(A+B)$  是  $(m+n)$  的整数倍

$(A-B)$  是  $(m-n)$  的整数倍

【例 3】(2019 广东) 小红有甲、乙两个玩偶收纳箱，甲、乙两个箱子内的玩偶数之比为 4:3，如果从甲箱中拿出 11 个玩偶放到乙箱中，则甲、乙两个箱子中装有的玩偶数之比变为 3:5。那么，两个箱子中共有 ( ) 个玩偶。

- A. 47
- B. 72
- C. 63
- D. 56

【例 4】(2021 上海) 某小区进行绿化改造，为居民提供了 A、B 两套方案。最初支持方案 A 的人数比支持方案 B 的人数多四分之一，后来有 6 位选择方案 A 的居民改选了方案 B，最后方案 B 以多出方案 A 两票胜出，则参与投票的共有 ( ) 位居民。

- A. 85
- B. 90
- C. 95
- D. 100

【例 5】(2019 天津) 甲、乙两家卫生院采购医疗耗材，共计进货 260 箱，其中甲卫生院采购的物品中有 13% 是输液器，乙卫生院采购的物品有 12.5% 是输液器，则乙卫生院进了多少箱其他耗材? ( )

- A. 100
- B. 120
- C. 140
- D. 160

【例 6】(2020 联考) 一堆棋子中，黑棋子的数量是白棋子的 4 倍。从这堆棋子中每次取出黑棋子 6 颗，白棋子 4 颗，当黑棋子剩 42 颗时，白棋子还剩 3

颗。问这堆棋子中黑棋子比白棋子多多少颗？（ ）

- A. 30
- B. 35
- C. 40
- D. 45

### 第三节 方程法

#### 1. 普通方程

(1) 设未知数、列方程、解方程

(2) 技巧：问谁设谁、设小不设大、设中间量、根据比例设份数

#### 2. 不定方程

方法：奇偶特性、尾数特性、倍数特性、直接代入

【例 1】(2021 广东公务员) 某县政府组织干部职工开展党建知识竞赛，其中甲、乙两镇参赛人数之比为 4: 3，甲镇有 8 人、乙镇有 24 人没有参加竞赛。已知甲、乙两镇干部职工人数之比为 5: 6，则乙镇的干部职工比甲镇多（ ）人。

- A. 8
- B. 7
- C. 6
- D. 5

【例 2】(2019 安徽) 一个书架共有图书 271 本，分别存放在 4 层，第一层本数的 2 倍是第二层本数的三分之一，第一层比第三层少 3 本，比第四层多 2 本，书架的第三层存入图书的数量为（ ）本。

- A. 53
- B. 47
- C. 37
- D. 33

【例 3】(2021 银行) 某学校组织学生春游，共有 213 名学生，现租用大、小两种客车，已知除司机外大客车有 41 个座位，小客车有 15 个座位。为保证每个学生均有座位，且车上没有空座，则需大客车的辆数是（ ）。

- A. 2
- B. 3
- C. 4
- D. 1

【例 4】(2019 联考) 某单位购买 A 和 B 两种耗材，单价分别为 50 元/件和 70 元/件，共花费 710 元，且所购耗材中 A 的件数占比不到一半。该单位共购买 A、B 耗材多少件？（ ）

- |       |       |
|-------|-------|
| A. 11 | B. 12 |
| C. 13 | D. 14 |

【例 5】(2021 辽宁) 小王去超市进行采购，结账后发现用了 13 个购物袋共花费 5.7 元，大、中、小购物袋的价格分别为 0.5 元、0.3 元和 0.2 元，则小王最多使用了（ ）个小购物袋。

- |      |      |
|------|------|
| A. 1 | B. 2 |
| C. 3 | D. 4 |

## 理论攻坚-数学运算 1（笔记）

### 数学运算 理论攻坚 1

学习任务：

1. 课程内容：代入排除法、倍数特性法、方程法
2. 授课时长：2.5 小时
3. 对应讲义：第 120~124 页
4. 重点内容：
  - （1）掌握代入排除法的适用范围及使用方法
  - （2）掌握倍数特性法的题型特征及解题思路
  - （3）掌握方程法设未知数的技巧以及不定方程的求解方法

### 目录

数运1	10.18 19:00-21:30	代入排除法、倍数特性法、方程法
数运2	10.19 19:00-21:30	工程问题、行程问题
数运3	10.20 19:00-21:30	排列组合与概率问题、植树问题
数运4	10.21 19:00-21:30	经济利润问题、溶液问题

### ♥课前小贴士♥

1. 理论课打基础，懂套路，学方法，听懂回复1，不懂敲疑问
2. 课程时长2.5小时左右，课中休息一次
3. 答疑设置：①课前10分钟；②课后微博@粉笔-秦娜娜
4. 课程无限次回放，来不及听直播的可看回放

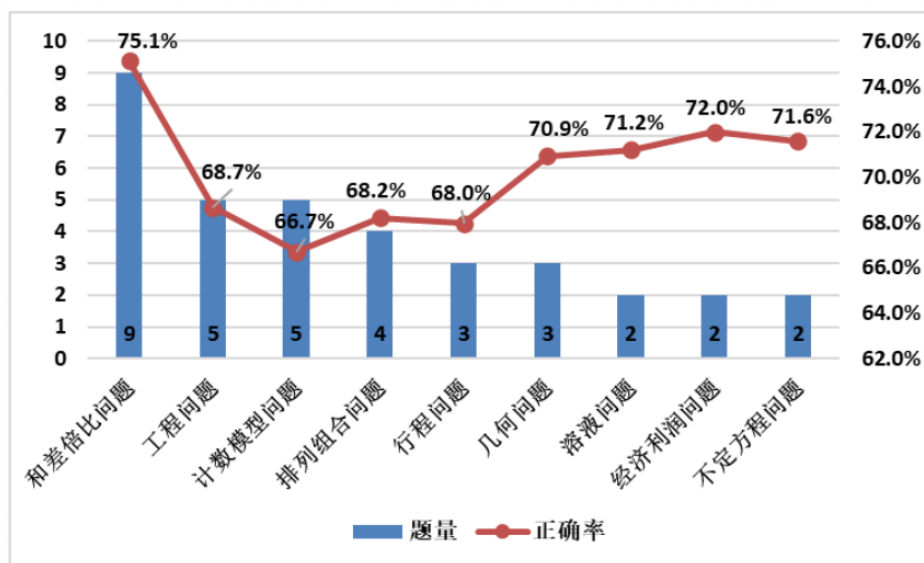
【注意】说在课前：

1. 目录：
  - （1）数运 1：代入排除法、倍数特性法、方程法。
  - （2）数运 2：工程问题、行程问题。
  - （3）数运 3：排列组合与概率问题、植树问题。
  - （4）数运 4：经济利润问题、溶液问题。

## 2. 课前小贴士：

- (1) 理论课打基础，懂套路，学方法，听懂回复 1，不懂敲疑问。
- (2) 课程时长 2.5 小时左右，课中休息一次。
- (3) 答疑设置：课前 10 分钟；课后微博@粉笔-秦娜娜。
- (4) 课程无限次回放（可以倍速听回放），来不及听直播的可看回放。

**2020-2023年广东统考数学运算考点分布及正确率**



【注意】2020~2023 年广东统考数学运算考点分布及正确率：考查较多的是和差倍比问题、工程问题、计数模型问题、排列组合问题、行程问题等，且正确率均在 60%及以上，在数学运算模块是很高的，对于广东而言，这个模块的难点比其他地区低很多，所以在学的过程中，不用过度担心学不会，课上讲解的题型都是考查较多，大家能够在考场拿分的。

### 第一节 代入排除法

什么时候用？

怎么用？

【注意】代入排除法：将选项代入到题干中进行验证。

1. 什么时候用。

2. 怎么用。



什么时候用：①看题型（年龄问题、余数问题、多位数问题、不定方程）

年龄问题：题干描述与“年龄”相关：年龄差不变

例：10年前小广的年龄是小东的  $\frac{1}{3}$ ，小东今年 46 岁，则今年小广的年龄为？

A. 12

B. 22

余数问题：出现“剩”、“多”、“余”、“缺”等关键字

例：一包糖果平均分给 5 个小朋友，还剩 2 颗，问这包糖果有（ ）颗？

A. 32

B. 33

多位数问题：三位数/四位数居多；出现数位的变化

例：一个三位数，十位和个位对调，比原来大 9，这个三位数为（ ）

A. 112

B. 121

不定方程问题：未知数个数多于方程个数

例： $3x+2y=10$ ，求：x、y 的值（ ）

A. 3, 1

B. 2, 2

什么时候用：②看选项

选项信息充分/选项是一组数（ $\geq 2$  个数）

【例】小广比小东多刷了 70 道题……则两人分别刷了多少道题？（ ）

A. 90, 10

B. 85, 15

C. 80, 20

D. 75, 25

什么时候用：③其他

条件多、题意乱、难求解

例： $10/x+6/(x-2)=4$ ，问：x=? （ ）

A. 10

B. 7

C. 6

D. 5

【注意】什么时候用：

1. 看题型——特定题型：年龄问题、余数问题、多位数问题、不定方程问题。

（1）年龄问题：年龄差不变。

①题干描述与“年龄”相关。

②例：10 年前小广的年龄是小东的  $\frac{1}{3}$ ，小东今年 46 岁，则今年小广的年龄为？

A. 12

B. 22

答：代入 A 项，今年小广 12 岁，10 年前，小广 2 岁，小东 36 岁，不满足“小广的年龄是小东的  $\frac{1}{3}$ ”，排除 A 项。代入 B 项，今年小广 22 岁，10 年前，小广 12 岁，小东 36 岁，满足“小广的年龄是小东的  $\frac{1}{3}$ ”，B 项当选。

(2) 余数问题：

①出现“剩”、“多”、“余”、“缺”等关键字。

②例：一包糖果平均分给 5 个小朋友，还剩 2 颗，问这包糖果有（ ）颗？

A. 32

B. 33

答：代入 A 项， $32/5=6\cdots\cdots 2$ ，满足题干要求，A 项当选。代入 B 项， $33/5=6\cdots\cdots 3$ ，不满足剩 2 个，排除 B 项。

(3) 多位数问题：

①三位数/四位数居多，出现数位的变化。

②例：一个三位数，十位和个位对调，比原来大 9，这个三位数为（ ）。

A. 112

B. 121

答：代入 A 项，112 对调后为 121， $121-112=9$ ，满足题干所有条件，A 项当选。代入 B 项，121 对调后为 112， $112<121$ ，不符合题意，排除 B 项。

(4) 不定方程问题：

①未知数个数多于方程个数。

②例： $3x+2y=10$ ，求：x、y 的值。

A. 3, 1

B. 2, 2

答：代入 A 项， $3*3+2*1=11\neq 10$ ，排除 A 项。代入 B 项， $3*2+2*2=10$ ，满足题意，B 项当选。

2. 看选项：

(1) 特征：选项信息充分/选项是一组数（ $\geq 2$  个数）。

(2) 例：小广比小东多刷了 70 道题……，则两人分别刷了多少道题？

A. 90, 10

B. 85, 15

C. 80, 20

D. 75, 25

答：选项为一组数，直接代入，题干的条件为“小广比小东多刷了 70 道题”；观察选项，只有 B 项符合，选择 B 项。

3. 其他：

(1) 条件多、题干长、题意乱、难求解。

(2) 例： $10/x+6/(x-2)=4$ ，问： $x=?$

A. 10

B. 7

C. 6

D. 5

答：未知数在分母的位置，不好求解，则考虑代入验证。观察选项，D 项比较好算，代入 D 项： $10/5+6/(5-2)=2+2=4$ ，符合题干的条件，选择 D 项，A、B、C 项无需计算。



【注意】代入排除法——什么时候用：

1. 看题型：年龄问题、余数问题、多位数问题、不定方程问题。

2. 看选项：选项是一组数（ $\geq 2$  个数）。

3. 其他：条件多、题意乱、难求解。

怎么用：

先排除：利用奇偶、倍数、尾数等特性

再代入：最值、好算

注意看，这个男人叫小帅！身高超过 180 厘米，且为偶数，能被 3 整除！

【例 1】小帅的身高为（ ）厘米？

A. 179

B. 182

C. 186

D. 189

**【例 2】**小帅的身高最高为（ ）厘米？

- A. 179  
B. 183  
C. 186  
D. 192

**【注意】** 怎么用:

1. 先排除：利用奇偶、倍数、尾数等特性。
2. 再代入：最值、好算。
3. 例：注意看，这个男人叫小帅！身高超过 180 厘米，且为偶数，能被 3 整除！

(1) 小帅的身高为 ( ) 厘米?

- A. 179  
B. 182  
C. 186  
D. 189

答：A、D 项都不是偶数，均排除；B 项不能被 3 整除，排除 B 项，选择 C 项。

(2) 小帅的身高最高为 ( ) 厘米?

- A. 179  
B. 183  
C. 186  
D. 192

答：A 项没有超过 180，排除，B 项不是偶数，排除；C、D 项均能被 3 整除，考虑代入，选择是最值或者好算；问“最高”，选择 D 项。如果要代入验证条件，则优先代入 D 项。

【例 1】(2019 江苏公务员)一只密码箱的密码是一个三位数,满足:3 个数字之和为 19,十位上的数比个位上的数大 2。若将百位上的数与个位上的数对调,得到一个新密码,且新密码数比原密码数大 99,则原密码数是 ( )。

- A. 397  
B. 586  
C. 675  
D. 964

【解析】1. “密码是一个三位数”→多位数问题，利用代入排除法，先排除、再代入。题干中给出三个条件：（1）3个数字之和为19；（2）十位上的数比个位上的数大2；（3）新密码数比原密码数大99。建议优先验证“数位调换”，即优先验证条件（3）。

A 项：对调百位和个位得到 793， $793-397=尾数 6 \neq 尾数 9$ ，排除。B 项：对调百位和个位得到 685， $685-586=99$ ，“3 个数字之和为 19” $\rightarrow 6+8+5=19$ 、“十位上的数比个位上的数大 2” $\rightarrow 8-6=2$ ，符合题干的全部条件，选择 B 项（无需验证其他选项）。【选 B】

**【注意】**

1. 多位数问题：优先考虑代入排除法。

2. 技巧：优先验证“数位调换”。

3. 平时练习，可以继续验证其他选项，C 项：对调百位和个位得到 576， $576-675 < 0$ ，排除；D 项：对调百位和个位得到 469， $469-964 < 0$ ，排除。

**【例 2】**（2019 天津）爸爸对小华说：“当我的岁数和你现在的一样时，你才 7 岁”；小华对爸爸说：“当我到您现在的这个岁数时，您将有 82 岁”。则小华和爸爸现在的年龄分别是（ ）岁和（ ）岁。

A. 31，56

B. 32，57

C. 32，58

D. 34，59

**【解析】**2. 出现“岁数”，年龄问题；问“分别是”，选项为一组数；综上，利用代入排除法。代入 A 项：小华 31 岁、爸爸 56 岁，爸爸和小华的年龄差为  $56-31=25$ ；当爸爸为 31 岁时，年龄差为  $31-7=24 \neq 25$ ，排除。代入 B 项：小华 32 岁、爸爸 57 岁，爸爸和小华的年龄差为  $57-32=25$ ；当爸爸为 32 岁时，爸爸和小华的年龄差为  $32-7=25$ ；当小华的年龄为 57 岁时，爸爸和小华的年龄差为  $82-57=25$ ，年龄差不变，满足题干全部条件，选择 B 项（无需验证其他选项）。

**【选 B】**

**【注意】**

1. 年龄问题/选项信息充分：优先考虑代入排除法。

2. 年龄问题：年龄差不变。

**【例 3】**（2022 上海）一些篮球爱好者包下了一个篮球场地，包场费用按第

一个小时 420 元，不足一小时按一小时计，之后每 10 分钟增加 70 元，不足 10 分钟的按 10 分钟计。比赛结束后，恰好人均付费 63 元，那么最少有（ ）人参加比赛。

- A. 20                                      B. 15  
C. 10                                      D. 5

【解析】3. 根据题意，按照时间进行收费，如果  $t \leq 60$  分钟，则是 420 元，如果  $t=70$  分钟，则是  $420+70$  元，如果  $t=72$  分钟，超过 60 了 2 个 10 分钟（不足 10 分钟，按照 10 分钟计），则是  $420+70 \times 2$  元。假设增加了  $n$  个 10 分钟，则收费  $420+70n$ ；收费为定值，已知“恰好人均付费 63 元”，则  $420+70n=63 \times \text{人数}$ ；问“最少有（ ）人参加比赛”，求人数。一个式子、两个未知数，为不定方程，可以直接代入验证。

问“最少”，优先代入最小的 D 项： $420+70n=63 \times 5 \rightarrow 420+70n=315 \rightarrow n < 0$ ，排除；代入 C 项： $420+70n=630 \rightarrow n=210/70=3$ ， $n$  为正整数，满足题干的全部条件，选择 C 项（无需再代入其他选项）。【选 C】

【注意】结合常识猜题，篮球一般是“5V5”，则最少有 10 个人，对应 C 项。



【注意】代入排除法：

1. 什么时候用：

- （1）看题型：多位数问题、余数问题、年龄问题、不定方程问题。
- （2）看选项：选项为一组数（ $\geq 2$  个数），可转化为一组数。
- （3）其他：条件多、题意乱、难求解；剩二代一。

2. 怎么用？

(1) 先排除：尾数、奇偶、倍数。

(2) 再代入：

①最值、好算。

②满足题干所有条件即可当选。

## 第二节 倍数特性法

余数型

比例型

**【注意】**倍数特性法：利用倍数特性排除。

1. 余数型。

2. 比例型。

### 一、余数型

特征：平均分，有剩余/缺少，求总数

答案 $=ax+b \rightarrow$ （答案 $\mp b$ ）是  $a$  的倍数（ $a$ 、 $x$  均为整数）

**【例】**平均每组分 4 人，还剩余 3 人，求总人数

**【例】**平均每组分 4 人，还缺少 3 人，求总人数

**【例】**平均每箱装 10 千克西红柿，还剩 2 千克，西红柿共有（ ）千克？

A. 19

B. 20

C. 21

D. 22

**【注意】**余数型：

1. 特征：平均分，有剩余/缺少，求总数。

2. 答案 $=ax+b \rightarrow$ （答案 $\mp b$ ）是  $a$  的倍数（ $a$ 、 $x$  均为整数）。

3. 例：

（1）平均每组分 4 人，还剩余 3 人，求总人数。

答：假设分为  $x$  组，则总数 $=4x+3 \rightarrow$ 总数 $-3=4x$ ，即“总数 $-3$ ”是 4 的倍数。

（2）平均每组分 4 人，还缺少 3 人，求总人数。

答：假设分为  $x$  组，则总数 $=4x-3 \rightarrow$ 总数 $+3=4x$ ，即“总数 $+3$ ”是 4 的倍数。

4. 技巧：多退少补，“剩余”即多，要退去 3 人，“总数 $-3$ ”是 4 的倍数。

“缺少”即少，“总数+3”是4的倍数。

5. 例：平均每箱装10千克西红柿，还剩2千克，西红柿共有（ ）千克？

A. 19

B. 20

C. 21

D. 22

答：多退少补，“剩”即多，则“总量-2”是10的倍数，只有D项满足。

【例1】（2019 河北）阿姨给幼儿园小朋友分苹果，如果每人分3个，多16个苹果，如果每人分5个，那么就差四个苹果。共有多少个苹果？（ ）

A. 46

B. 44

C. 48

D. 42

【解析】1. 平均分有剩余/缺少，利用余数型倍数特性，多退少补。已知“如果每人分3个，多16个苹果”，则“总数-16”是3的倍数；“如果每人分5个，那么就差四个苹果”，则“总数+4”是5的倍数，5的倍数好算，优先验证第二个条件。A项：46+4=50，5的倍数，保留；B项：44+4=48，不是5的倍数，排除；C项：48+4=52，不是5的倍数，排除；D项：42+4=46，不是5的倍数，排除。综上，排除B、C、D项，选择A项。【选A】

【注意】

1. 平均分有剩余/缺少：考虑余数型倍数特性。

2. 方法：（答案 $\mp$ b）是a的倍数（a、x均为整数）——多退少补。

3. 如果验证第一个条件，代入A项：46-16=30，3的倍数，保留；代入B项：44-16=28，不是3的倍数，排除；代入C项：48-16=32，不是3的倍数，排除；代入D项：42-16=26，不是3的倍数，排除。排除B、C、D项，选择A项。

【例2】（2019 安徽）某公司举行年会，若5名男员工和3名女员工坐一桌，则男员工多出4名，女员工刚好分配完；若7名男员工和3名女员工坐一桌，则男员工刚好分配完，女员工多出12名。那么该公司男员工和女员工共有（ ）名。

A. 108

B. 120



C. 132

D. 144

【解析】2. 平均分有剩余/缺少，考虑余数型倍数特性，多退少补。问“该公司男员工和女员工共有多少名”，不用分男女，已知“若 5 名男员工和 3 名女员工坐一桌，则男员工多出 4 名，女员工刚好分配完”，则“总人数-4”是 8 的倍数；已知“若 7 名男员工和 3 名女员工坐一桌，则男员工刚好分配完，女员工多出 12 名”，则“总人数-12”是 10 的倍数，10 的倍数好算，优先验证第二个条件。A 项：108-12=96，不是 10 的倍数，排除；B 项：120-12=108，不是 10 的倍数，排除；C 项：132-12=120，10 的倍数，保留；D 项：144-12=132，不是 10 的倍数，排除。【选 C】

【注意】

1. 平均分有剩余/缺少：考虑余数型倍数特性。
2. 方法：（答案 $\mp$ b）是 a 的倍数（a、x 均为整数）——多退少补。
3. 如果验证第一个条件，选项-4 依次为：108-4=104、120-4=116、132-4=128、144-4=140。只能排除 B、D 项，A、C 项均满足，还需要验证第二个条件。

## 二、比例型

已知：番茄/土豆=3/5

则：

番茄的个数是\_\_\_\_\_的倍数

土豆的个数是\_\_\_\_\_的倍数

番茄和土豆的个数和是\_\_\_\_\_的倍数

番茄和土豆的个数差是\_\_\_\_\_的倍数

已知：A/B=m/n（最简整数比）

则：

A 是 m 的倍数

B 是 n 的倍数

(A+B) 是 (m+n) 的倍数

(A-B) 是 (m-n) 的倍数

**【注意】比例型：**

1. 已知：番茄/土豆=3/5，假设番茄为 $3x$ 、土豆为 $5x$ 、番茄+土豆= $3x+5x=8x$ 、二者的差值为 $5x-3x=2x$ ，番茄、土豆的个数为正整数，则：

- (1) 番茄的个数是3的倍数。
- (2) 土豆的个数是5的倍数。
- (3) 番茄和土豆的个数和是8的倍数。
- (4) 番茄和土豆的个数差是2的倍数。

2. 已知： $A/B=m/n$ （最简整数比），则：

- (1)  $A$  是  $m$  的倍数。
- (2)  $B$  是  $n$  的倍数。
- (3)  $(A+B)$  是  $(m+n)$  的倍数。
- (4)  $(A-B)$  是  $(m-n)$  的倍数。

3. 最简整数比：即  $m/n$  不能再约分了。如果男生/女生=6/10，男生3人、女生5人也满足6/10，但不能说3是6的整数倍，5是10的整数倍。故要将6/10化简为最简整数比3/5，此时3是3的整数倍，5是5的整数倍。

比例型：

出现比例、分数、百分数、倍数

转化为  $A/B=m/n$ （最简整数比）

则：

$A$  是  $m$  的倍数

$B$  是  $n$  的倍数

$(A+B)$  是  $(m+n)$  的倍数

$(A-B)$  是  $(m-n)$  的倍数

**【例】**番茄和土豆个数之比为3：5

**【例】**番茄个数是土豆的 $3/5$

**【例】**番茄个数是土豆的60%

**【例】**番茄个数是土豆的0.6倍

**【注意】比例型：**

1. 特征：出现比例、分数、百分数、倍数。
2. 已知： $A/B=m/n$ （最简整数比），则：
  - (1)  $A$  是  $m$  的倍数。
  - (2)  $B$  是  $n$  的倍数。
  - (3)  $(A+B)$  是  $(m+n)$  的倍数。
  - (4)  $(A-B)$  是  $(m-n)$  的倍数。
3. 例：以下表述均可以转化为“番茄/土豆=3/5”。
  - (1) 番茄和土豆个数之比为 3: 5。
  - (2) 番茄个数是土豆的  $3/5$ 。
  - (3) 番茄个数是土豆的 60%。
  - (4) 番茄个数是土豆的 0.6 倍。

【例 3】（2019 广东）小红有甲、乙两个玩偶收纳箱，甲、乙两个箱子内的玩偶数之比为 4: 3，如果从甲箱中拿出 11 个玩偶放到乙箱中，则甲、乙两个箱子中装有的玩偶数之比变为 3: 5。那么，两个箱子中共有（ ）个玩偶。

- |       |       |
|-------|-------|
| A. 47 | B. 72 |
| C. 63 | D. 56 |

【解析】3. 出现比例关系，且玩偶的数量为正整数，考虑比例型倍数特性。“甲、乙两个箱子内的玩偶数之比为 4: 3” $\rightarrow$ 甲/乙=4/3，问“两个箱子中共有（ ）个玩偶”，“甲+乙”为 7 的倍数，排除 A、B 项。“从甲箱中拿出 11 个玩偶放到乙箱中，则甲、乙两个箱子中装有的玩偶数之比变为 3: 5” $\rightarrow$ （甲-11）/（乙+11）=3/5，总量不变，则“甲+乙”是 3+5=8 的倍数，排除 C 项，选择 D 项。【选 D】

【注意】出现比例、分数、百分数、倍数，转化为  $A/B=m/n$ （最简整数比）。

【例 4】（2021 上海）某小区进行绿化改造，为居民提供了 A、B 两套方案。最初支持方案 A 的人数比支持方案 B 的人数多四分之一，后来有 6 位选择方案 A 的居民改选了方案 B，最后方案 B 以多出方案 A 两票胜出，则参与投票的共有

( ) 位居民。

A. 85

B. 90

C. 95

D. 100

【解析】4. 题干出现分数（四分之一），求居民人数（整数），考虑比例型倍数特性。已知“最初支持方案 A 的人数比支持方案 B 的人数多四分之一”，多的是 B 的  $\frac{1}{4}$ ，则  $A-B=\frac{1}{4}B \rightarrow A=B*(1+\frac{1}{4}) \rightarrow A/B=5/4$ 。问“参与投票的共有( ) 位居民”，“ $A+B$ ”是 9 的倍数，只有 B 项符合，选择 B 项。【选 B】

【注意】

1. 出现比例、分数、百分数、倍数，转化为  $A/B=m/n$ （最简整数比）。

2. A 比 B 多 45%： $A=B*(1+45\%)$ ；A 比 B 少 45%： $A=B*(1-45\%)$ 。

【例 5】（2019 天津）甲、乙两家卫生院采购医疗耗材，共计进货 260 箱，其中甲卫生院采购的物品中有 13% 是输液器，乙卫生院采购的物品有 12.5% 是输液器，则乙卫生院进了多少箱其他耗材？( )

A. 100

B. 120

C. 140

D. 160

【解析】5. 出现百分数（13%、12.5%），问“多少箱”，所求为整数，考虑比例型倍数特性。问“乙卫生院”，优先看与其相关的条件，“乙卫生院采购的物品有 12.5% 是输液器” $\rightarrow$  输液器/乙卫生院总量  $=12.5\%=12.5/100=1/8$ ；问“乙卫生院进了多少箱其他耗材”，其他耗材/乙卫生院总量  $=1-1/8=7/8$ ，说明其他耗材是 7 的倍数，只有 C 项符合，选择 C 项。【选 C】

【注意】出现比例、分数、百分数、倍数，转化为  $A/B=m/n$ （最简整数比）。

【例 6】（2020 联考）一堆棋子中，黑棋子的数量是白棋子的 4 倍。从这堆棋子中每次取出黑棋子 6 颗，白棋子 4 颗，当黑棋子剩 42 颗时，白棋子还剩 3 颗。问这堆棋子中黑棋子比白棋子多多少颗？( )

A. 30

B. 35

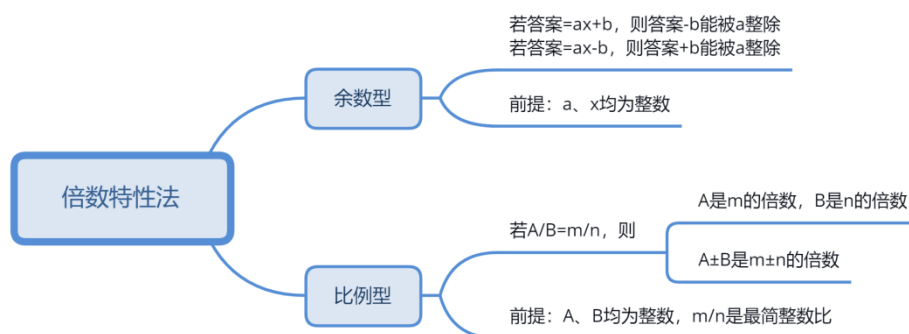
C. 40

D. 45

【解析】6. 出现倍数（4 倍），问棋子的数量，所求为整数，考虑比例型倍数特性。已知“黑棋子的数量是白棋子的 4 倍”，黑色棋子/白色棋子=4/1。问“黑棋子比白棋子多多少颗”，所求=黑色棋子-白色棋子，对应  $4-1=3$  的倍数，排除 B、C 项。

剩余 A、D 项，剩二代一。代入 A 项：设原来黑棋子有  $4x$  颗、白棋子有  $x$  颗， $4x-x=3x=30$ ，解得  $x=10$ ，说明原来黑棋子有 40 颗、白棋子有 10 颗；已知“每次取出黑棋子 6 颗”、“当黑棋子剩 42 颗时”，说明黑色棋子  $\geq 42$  颗，但是黑色棋子只有 40 颗，不可能越拿越多，出现矛盾，排除 A 项，选择 D 项。【选 D】

【注意】出现比例、分数、百分数、倍数，转化为  $A/B=m/n$ （最简整数比）。



【注意】倍数特性法：

1. 余数型：平均分有剩余/缺少，多退少补。

（1）若答案= $ax+b$ ，则答案- $b$  能被  $a$  整除。

（2）若答案= $ax-b$ ，则答案+ $b$  能被  $a$  整除。

（3）前提： $a$ 、 $x$  均为整数。

2. 比例型：比例、分数、倍数、百分数。

（1）若  $A/B=m/n$ （最简整数比），则  $A$  是  $m$  的倍数、 $B$  是  $n$  的倍数、 $(A\pm B)$  是  $(m\pm n)$  的倍数。

（2）前提： $A$ 、 $B$  均为整数， $m/n$  是最简整数比。

### 第三节 方程法

普通方程

不定方程

普通方程（组）：（找、设、列、解）

找等量关系：和差倍比、相等量

设未知数：

①求谁设谁（避免陷阱）：甲和乙总共 100 个，求甲

②设小不设大（“是”、“比”后）：甲是乙的 3 倍，求甲

③设中间量（方便列式）：甲是乙的 2 倍，丙是乙的 3 倍

④有比例设份数：甲：乙=3：4

解方程（组）：消元、移项、计算

$x+y=7$ ①、 $2x+3y=19$ ②

**【注意】普通方程（组）：找（找等量关系）、设（设未知数）、列（列方程）、解（解方程）。**

1. 找等量关系：和差倍比（……比……多……、……和……相差……、……是……的多少倍）、相等量。

2. 设未知数的方法：

（1）求谁设谁（避免陷阱）：甲和乙总共 100 个，求甲，如果设乙，求出乙后，可能直接选择，就掉坑了，故最直接的就是考虑求谁设谁。

（2）设小不设大（建议设“是”、“比”后的量）：如甲是乙的 3 倍，求甲；设乙为  $x$ ，则甲为  $3x$ 。

（3）设中间量（方便列式）：题干比较长、涉及多个量、量和量之间有关联，则可以设中间量（出现的次数最多）。如甲是乙的 2 倍、丙是乙的 3 倍，出现次数最多的为乙→乙为中间量，设乙为  $x$ ，则甲为  $2x$ 、丙为  $3x$ 。

（4）有比例设份数：如甲：乙=3：4，设甲为  $3x$ 、乙为  $4x$ 。

3. 解方程（组）：消元、移项、计算。例： $x+y=7$ ①、 $2x+3y=19$ ②，消掉  $x$ ， $①*2 \rightarrow 2x+2y=14$ ③， $②-③$ ，解得  $y=5$ 、 $x=2$ 。

**【例 1】**（2021 广东公务员）某县政府组织干部职工开展党建知识竞赛，其

中甲、乙两镇参赛人数之比为 4: 3, 甲镇有 8 人、乙镇有 24 人没有参加竞赛。已知甲、乙两镇干部职工人数之比为 5: 6, 则乙镇的干部职工比甲镇多 ( ) 人。

- A. 8  
B. 7  
C. 6  
D. 5

【解析】1. 题干出现比例关系, 问人数, 考虑利用比例型倍数特性解题; 问“乙镇的干部职工比甲镇多 ( ) 人”, 则利用“甲、乙两镇干部职工人数之比为 5: 6”这一条件, 甲镇干部职工人数/乙镇干部职工人数=5/6, 则二者的差值为 1 的倍数, 无法解题。由于无法利用倍数特性解题, 考虑利用方程法。主体多、关系乱, 可以列表分析。结合比例关系, 设甲干部职工人数为  $5x$ 、乙干部职工人数为  $6x$ ; 已知“甲镇有 8 人、乙镇有 24 人没有参加竞赛”, 则甲参加竞赛人数为  $(5x-8)$ 、乙参加竞赛人数为  $(6x-24)$ ; 已知“其中甲、乙两镇参赛人数之比为 4: 3”, 出现等量关系, 则  $(5x-8)/(6x-24)=4/3 \rightarrow 24x-96=15x-24 \rightarrow 9x=72$ , 解得  $x=8$ 。所求= $6x-5x=x=8$ , 对应 A 项。【选 A】

	甲	乙
总人数	$5x$	$6x$
没有参赛人数	8	24
参赛人数	$5x-8$	$6x-24$

【例 2】(2019 安徽) 一个书架共有图书 271 本, 分别存放在 4 层, 第一层本数的 2 倍是第二层本数的三分之一, 第一层比第三层少 3 本, 比第四层多 2 本, 书架的第三层存入图书的数量为 ( ) 本。

- A. 53  
B. 47  
C. 37  
D. 33

【解析】2. “一个书架共有图书 271 本”  $\rightarrow$  第一层+第二层+第三层+第四层=271, 出现多个量, 设中间量; 结合题干, 核心为第一层  $\rightarrow$  设第一层为  $x$ , “第一层本数的 2 倍是第二层本数的三分之一”  $\rightarrow$  第一层\*2=第二层\*(1/3)  $\rightarrow$  第二层=6\*第一层  $\rightarrow$  第二层=6x, “第一层比第三层少 3 本”  $\rightarrow$  第三层= $x+3$ , “比第四层多 2 本”  $\rightarrow$  第四层= $x-2$ 。综上,  $x+6x+x+3+x-2=271 \rightarrow 9x+1=271 \rightarrow 9x=270$ , 解得  $x=30$ 。问“第三层”, 所求= $x+3=30+3=33$ , 对应 D 项。【选 D】

【注意】出现多个量，可以设任意一层为  $x$ ，但是设第一层比较简单。

不定方程：( $Ax+By=M$ )

找、设、列

解：未知数为整数

①直接代入

②倍数特性

③奇偶特性

④尾数特性

【注意】不定方程( $Ax+By=M$ )：未知数的个数 $>$ 等式的个数，“找”、“设”、“列”和普通方程一模一样，重点在于“解”。一般来讲，考试的不定方程的未知数为整数。

1. 直接代入：最直接的方法，但每个选项都代入一次，答案是 D 项的话，需要代入 3 次，比较浪费时间，故考虑先排除、再代入。

2. 利用倍数特性、奇偶特性、尾数特性先排除，再代入。

尾数特性：

未知数的系数尾数为 0 或 5 时，考虑尾数特性

【例】 $10x+3y=49$ ，求  $y$  ( $x$ 、 $y$  均为正整数)

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

未知数的系数尾数为 0 或 5 时，考虑尾数特性，可给方程每项同时乘 2，转换为尾数为 0 再分析

【例】 $5x+3y=29$ ，求  $y$  ( $x$ 、 $y$  均为正整数)

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【注意】尾数特性：

1. 未知数的系数尾数为 0 或 5 时，考虑尾数特性。





【注意】奇偶特性：

1. 未知数系数一奇一偶时，考虑奇偶特性。

2. 例： $3x+4y=65$ ，求  $x$ （ $x$ 、 $y$  均为正整数）。

A. 2

B. 3

C. 4

D. 6

答：65 为奇数， $4y$  的系数为 4  $\rightarrow 4 \times \text{任意整数} = \text{偶数}$ （ $4 \times 5 = 20$ 、 $4 \times 6 = 24$ ） $\rightarrow 4y$  为偶数；两个数相加，同奇同偶则为偶，一奇一偶则为奇，也可以利用数字验证， $(\quad) + 4 = 11 \rightarrow (\quad) = 7$ ， $(\quad)$  是奇数，奇数+偶数=奇数，说明  $3x$  为奇数，结合选项，只有 B 项  $3 \times 3 = 9$  满足。也可以进一步确认， $3x$  是奇数， $x$  一定是奇数；观察选项，对应 B 项。

3. 总结：

（1）未知数系数一奇一偶时，考虑奇偶特性。如上例， $3x$  的系数为 3（奇数）、 $4y$  的系数为 4（偶数），未知数系数一奇一偶时，才能考虑奇偶特性；同奇同偶不能考虑，如  $4x+6y=66$ ， $4x$ 、 $6y$ 、66 均为偶数，则无法判断  $x$ 、 $y$  的奇偶性。

（2） $7+3=10 \rightarrow \text{奇数}+\text{奇数}=\text{偶数}$ 、 $6+4=10 \rightarrow \text{偶数}+\text{偶数}=\text{偶数}$ 、 $1+4=5 \rightarrow \text{奇数}+\text{偶数}=\text{奇数}$ ，无需记忆，如果遇到时忘记了，代入数字进行验证即可。

4. 两个数相加，同奇同偶则为偶，一奇一偶则为奇。

【练一练】

$7x+6y=86$ ，求  $x$ （ $x$ 、 $y$  均为正整数）

A. 5

B. 7

C. 8

D. 9

【注意】练习：86 是偶数， $6y$  是偶数，同奇同偶则为偶，偶数+偶数=偶数，则  $7x$  是偶数， $x$  是偶数，对应 C 项。

倍数特性：

未知数系数与常数项有公因子时，考虑倍数特性

【例】 $7x+3y=60$ ，求  $x$ ？（ $x$ 、 $y$  均为正整数）

- A. 5  
C. 7  
B. 6  
D. 8

【注意】倍数特性：

1. 未知数系数与常数项有公因子时，考虑倍数特性。  
2. 例： $7x+3y=60$ ，求  $x$ ？（ $x$ 、 $y$  均为正整数）。

- A. 5  
C. 7  
B. 6  
D. 8

（1）答： $3y$ 、 $60$  都是  $3$  的倍数，则  $7x$  一定也是  $3$  的倍数； $7$  不是  $3$  的倍数，则  $x$  是  $3$  的倍数；观察选项，对应 B 项。

（2）关于“ $7x$  一定也是  $3$  的倍数”： $7x+3y=60 \rightarrow 7x=60-3y \rightarrow 7x=3*(20-y) \rightarrow 7x$  为  $3$  的倍数， $7$  不是  $3$  的倍数，则  $x$  为  $3$  的倍数。

3. 总结：未知数的系数与常数项有公因子，考虑倍数特性。

【练一练】

$21x+y=210$ ，求  $x$ （ $x$ 、 $y$  均为正整数）

- A. 40  
C. 42  
B. 41  
D. 43

【注意】练习： $210$ 、 $21x$  都是  $21$  的倍数，则  $y$  也是  $21$  的倍数，对应 C 项。

总结： $Ax+By=M$

尾数：当  $A$  或  $B$  的尾数为  $0$  或  $5$  时，考虑尾数，当尾数为  $5$  时，可给方程每项均乘  $2$ ，将尾数变为  $0$  再分析

奇偶：当  $A$ 、 $B$  恰好一奇一偶时，考虑奇偶

倍数：当  $A$  或  $B$  与  $M$  有不为  $1$  的公因子时，考虑倍数

【注意】若能用多个方法，哪个简单用哪个。

【例 3】（2021 银行）某学校组织学生春游，共有  $213$  名学生，现租用大、小两种客车，已知除司机外大客车有  $41$  个座位，小客车有  $15$  个座位。为保证每个学生均有座位，且车上没有空座，则需大客车的辆数是（ ）。

- A. 2  
B. 3  
C. 4  
D. 1

【解析】3. “共有 213 名学生” → 大客车人数+小客车人数=213，设大、小客车的辆数分别为  $x$ 、 $y$ ；根据题意列式： $41x+15y=213$ ，一个等量关系、两个未知数，不定方程问题。

方法一：15y 尾数为 5，可以尾数特性，先转化为尾数为 0，即  $82x+30y=XX6$ ，XX6 的尾数为 6，30y 的尾数为 0，则 82x 的尾数为 6，结合选项，只有 B 项满足。

方法二：15、41 均为奇数，则不能利用奇偶特性。213、15y 为 3 的倍数，利用倍数特性，41x 为 3 的倍数 →  $x$  为 3 的倍数，结合选项，对应 B 项。【选 B】

【例 4】（2019 联考）某单位购买 A 和 B 两种耗材，单价分别为 50 元/件和 70 元/件，共花费 710 元，且所购耗材中 A 的件数占比不到一半。该单位共购买 A、B 耗材多少件？（ ）

- A. 11  
B. 12  
C. 13  
D. 14

【解析】4. “共花费 710 元” → 出现等量关系，设 A、B 耗材分别购买 A、B 件，根据题意列式： $50A+70B=710 \rightarrow 5A+7B=71$ 。5A 尾数为 5，给方程每一项都乘以 2，将尾数变为 0，即  $10A+14B=XX2$ ，XX2 的尾数为 2，10A 的尾数为 0，可得 14B 的尾数为 2，需要尝试，4\*1、2、3、4、5、6、7、8、9、0 中，只有乘以 3、8 尾数才为 2，则 B 的尾数为 3 或 8，代入验证：B=3，解得  $A=(71-21)/5=10$ ，A、B 均为正整数， $A+B=3+10=13$ ，不能基于此选择 C 项；“A 的件数占比不到一半” →  $A < B$ ，但是计算的结果为  $A=10$ 、 $B=3$ ，不满足题干条件，排除。继续验证：B=8，解得  $A=(71-56)/5=3$ ，满足“A 的件数占比不到一半” →  $A < B$ ，则  $A+B=3+8=11$ ，对应 A 项。【选 A】

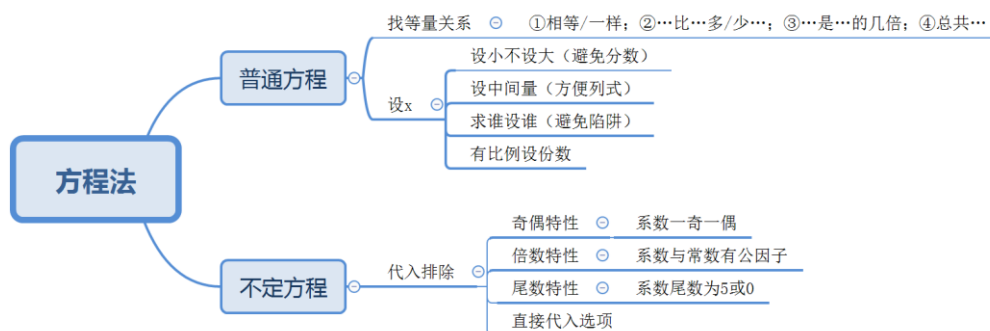
【例 5】（2021 辽宁）小王去超市进行采购，结账后发现用了 13 个购物袋共花费 5.7 元，大、中、小购物袋的价格分别为 0.5 元、0.3 元和 0.2 元，则小王最多使用了（ ）个小购物袋。

- A. 1  
B. 2

C. 3

D. 4

【解析】5. “结账后发现用了 13 个购物袋共花费 5.7 元” → 给出两个等量关系，设购买大、中、小购物袋分别为  $x$ 、 $y$ 、 $z$  个；根据题意列式： $x+y+z=13$ ①， $0.5x+0.3y+0.2z=5.7 \rightarrow 5x+3y+2z=57$ ②；三个未知数、两个等量关系，为不定方程组，第一步是消元，求  $z \rightarrow$  消掉  $x$  或  $y$ ；假设消掉  $x$ ，① $\times 5$ -② $\rightarrow 2y+3z=8$ 。利用奇偶特性，8 和  $2y$  都是偶数，则  $3z$  是偶数 $\rightarrow z$  是偶数，排除 A、C 项。剩余 B、D 项，考虑代入，问“最多”，代入最大的 D 项： $z=4$ ， $2y+3\times 4=8 \rightarrow 2y+12=8 \rightarrow y<0$ ， $y$  为中号购物袋的个数 $\rightarrow y$  最小为 0、不能为负数，排除 D 项，选择 B 项。【选 B】



【注意】方程法：

1. 普通方程：

(1) 找等量关系：相等/一样；……比……多/少……；……是……的几倍；总共……。

(2) 设  $x$ （重点）：

① 设小不设大（避免分数）。

② 设中间量（方便列式）。

③ 求谁设谁（避免陷阱）。

④ 有比例、设份数。

2. 不定方程：

(1) 奇偶特性：系数一奇一偶。

(2) 倍数特性：系数与常数有公因子。

(3) 尾数特性：系数尾数为 5 或 0，当系数尾数为 5，考虑整体乘以 2 转化为尾数为 0 来分析。

(4) 直接代入选项。

趁热打铁

【1】(多选) 以下题型可优先考虑代入排除法的有 ( )

- A. 年龄问题
- B. 选项是一组数
- C. 余数问题
- D. 正面做，不好做
- E. 多位数问题

【2】(判断) 随着年龄的增长，两人的年龄差会越来越大。( )

【3】(判断) 若每人分 5 个苹果，还剩 2 个，则 (苹果总数+2) 是 5 的倍数。  
( )

【4】(填空) 某班男生人数：女生人数=3：12，全班人数是 ( ) 的倍数。

【5】(选择) A. 倍数特性、B. 尾数特性、C. 奇偶特性

$6x+7y=53$ ，用 ( ) 解不定方程；

$3x+5y=67$ ，用 ( ) 解不定方程；

$9x+7y=180$ ，用 ( ) 解不定方程。

【注意】趁热打铁：

1. 选择 A、B、C、D、E 项。
2. 本题为错误的，因为年龄差永远不变。
3. 多退少补，“还剩 2 个” → (苹果总数-2) 为 5 的倍数，则本题为错误的。
4. “3：12” 不是最简整数比， $3/12=1/4$ ，则全班人数是  $1+4=5$  的倍数。
5. 选择：

(1)  $6 \rightarrow$  偶数、 $7 \rightarrow$  奇数，未知数的系数一奇一偶，利用奇偶特性，选择 C 项。

(2) 出现  $5y$ ，考虑整体乘以 2，转化为  $6x+10y=XX4$ ，考虑尾数特性，选择 B 项。

(2)  $9x$ 、180 均为 9 的倍数，利用倍数特性，选择 A 项。

课后及时复盘

下节课预习内容：对应讲义→第 125～129 页

第四节：工程问题

第五节：行程问题

预习要求：

原则上要求做完每个章节至少 50%的题目；

若不会做，熟悉题型和题目即可；

【答疑】课前 10 分钟+微博@粉笔-秦娜娜

### 【答案汇总】

代入排除法 1-3: BBC

倍数特性法 1-5: ACDBC; 6: D

方程法 1-5: ADBAB

遇见不一样的自己

Be your better self