

# 理论攻坚-数学运算3

(讲义+笔记)

主讲教师:秦娜娜

授课时间:2023.12.10



粉笔公考·官方微信

### **耐** 粉筆直播课

### 理论攻坚-数学运算3(讲义)

### 数学运算 理论攻坚 3

#### 学习任务:

- 1. 课程内容: 排列组合与概率问题、植树问题
- 2. 授课时长: 2.5 小时
- 3. 对应讲义: 第130~134页
- 4. 重点内容:
- (1) 掌握排列组合公式,理解分类讨论与分步计算的区别
- (2) 掌握捆绑法和插空法的适用范围和操作步骤
- (3) 掌握概率问题的两种题型——给情况求概率和给概率求概率
- (4) 掌握不同类型植树问题中棵数与段数的关系
- (5) 掌握不移动植树问题的解题方法

#### 第六节 排列组合与概率问题

#### 一、排列组合问题

1. 分类与分步

分类用加法: 要么 …… 要么 ……

分步用乘法: 既……又……

2. 排列与组合

排列: 与顺序有关(改变顺序,结果变化)

组合: 与顺序无关(改变顺序,结果不变)

- 3. 常用方法
- ①捆绑法: 必须相邻
- ②插空法: 不能相邻

【例 1】(2023 福建)大学生小王从杭州校园回乌鲁木齐家乡,将在武汉、西安、银川停留。若从武汉市的6个景点中挑选3个景点,西安8个景点中挑选3个景点,银川7个景点中挑选3个景点,那么可选的景点搭配有多少种?()

A. 22400

C. 32400	D. 39200
【例 2】(2021 河南	南) 现有红、黄、绿三种颜色的旗帜各一面,若从中选取
一面、两面或三面从左弯	到右按一定顺序排列表示不同的信号,则可以表示不同的
信号共有( )。	
A. 7 种	B. 9 种
C. 15 种	D. 27 种
【例 3】(2019 广东	<ul><li>(天) 某部门有甲、乙、丙、丁、戊、己6人,该部门要派</li></ul>
2人前往外地参加会议,	且甲、乙、丙3人中至少有1人参会。则可能的方案共
有多少种?( )	
A. 10	B. 12
C. 14	D. 16
【例 4】(2020 河‡	比)现有七年级的学生1名,八年级的学生4名,九年级
的学生 5 名,需让他们	排一排拍一张合照,要求同一年级的学生要挨在一起站,
且七年级的学生不站两	边,则有( )种不同的排法。
A. 3760	B. 4760
C. 5760	D. 6760
【例 5】(2020 银行	f) 某学校文艺晚会共有 3 个小品、5 个歌舞类节目, 所
有的节目互不相同。现象	在要进行节目顺序安排,要求所有小品节目不能相邻,共
73.	
有( )种安排方案。	
	B. 14400

B. 29200

概率=满足条件的情况数/总情况数

2. 给概率求概率

分类: 概率=各类概率的和

分步: 概率=各步概率的乘积

【例 6】(2019 广东)某项目由甲、乙二人竞标,以所报单价高者胜,甲从10元、11元、12元、13元、16元、17元六个单价中随机选择一个作为报价,乙从13元、14元、15元中随机选取一个作为报价,则乙中标的概率为()

A. 7/18

B. 11/18

C. 2/3

D. 5/6

【例7】(2022 广东公务员)某街道对辖内6个社区的垃圾分类情况进行考核评估,结果显示,有2个社区的垃圾分类考核不通过。如果从6个社区中随机抽取3个进行现场检查,则抽取的社区中,既有考核通过的又有考核不通过的社区的概率为()。

A. 1/5

B. 1/2

C. 2/3

D. 4/5

【例 8】(2019 广东)某项问答比赛中,小彭全对的概率为 90%,小罗全对的概率为 94%,则这次比赛两人中只有一个人全对的概率为 ()。

A. 1%

B. 12. 1%

C. 14.8%

D. 21%

第七节 植树问题

- 1. 基础植树(单侧)
- ①两端植树: 棵数=总长/间距+1
- ②单端植树 (环形植树): 棵数=总长/间距
- ③楼间植树 (两端都不植): 棵数=总长/间距-1
- 2. 不移动植树(单侧)

(1) 求前后间距的最小公倍数

(2)①两端植树:不移动棵数=总长/最小公倍数+1

②单端植树(环形植树):不移动棵数=总长/最小公倍数

③楼间植树(两端都不植):不移动棵数=总长/最小公倍数-1

【例 1】(2023 湖北)育才中学有一条 150 米长的小道,学校准备在小道的 两边分别按照一棵梧桐树、一棵桦树、一棵梧桐树……的顺序依次种树,已知同 一边两棵树的间隔为3米,小道的起点、终点均要求种树,且起点均为梧桐树, 那么总共需要种()棵梧桐树。 A. 26 B. 50 C. 52 D. 54 【例 2】(2021 四川)某单位有一块长、宽分别为 40 米和 30 米的长方形土 地,现计划在该土地的四周及其对角线上等距离栽种果树。如果每隔一米栽一棵, 则一共可栽()棵果树。 A. 237 B. 239 C. 240 D. 242 【例 3】(2020 银行)一个五边形的花园, 5 条边的边长分别为 112、98、126、 84、70(单位:米)。现在要沿着这5条边种上玫瑰花。要求每个角都有玫瑰花, 并且每2棵玫瑰花之间的距离相等。则至少要种()棵玫瑰。 A. 35 B. 31 C. 30 D. 29 【例 4】(2020银行)在道路一侧,从一端到另一端每隔6米有1个路灯, 现有27个路灯。现在要把道路两侧的路灯的间距改成4米,那么,不需要移动 的路灯有多少个? ( ) A. 13 B. 14 C. 26 D. 28 4

【例 5】(2019 广东)在一段公路上摆有一排间距为 45 米的标志物,共 25 个,现需要调整间距,第一个标志物不动,此外还有 6 个标志物不用挪动,则新的间距可为( )米。

A. 50 B. 60 C. 70 D. 80

【例 6】(2020 深圳公务员)某公园举办春节花展,在周长 400 米的中心区布置了环形花槽,并在花槽上每隔 16 米挂一只灯笼,不久后元宵灯会临近,公园决定增加并挪动一些灯笼,但仍保持灯笼间距相等。已知加入新灯笼后,共有5只旧灯笼没有移动,则调整后的灯笼间距最大为()米。

A. 12 B. 10

C. 8 D. 5

### 理论攻坚-数学运算3(笔记)

#### 数学运算 理论攻坚 3

#### 学习任务:

- 1. 课程内容: 排列组合与概率问题、植树问题
- 2. 授课时长: 2.5 小时
- 3. 对应讲义: 第130~134页
- 4. 重点内容:
- (1) 掌握排列组合公式,理解分类讨论与分步计算的区别
- (2) 掌握捆绑法和插空法的适用范围和操作步骤
- (3) 掌握概率问题的两种题型——给情况求概率和给概率求概率
- (4) 掌握不同类型植树问题中棵数与段数的关系
- (5) 掌握不移动植树问题的解题方法

数运1	代入排除法、倍数特性法、方程法
数运2	工程问题、行程问题
数运3	排列组合与概率问题、植树问题

#### 课前小贴士:

- 1. 理论课打基础,懂套路,学方法,听懂回复1,不懂敲疑问
- 2. 课程时长 2.5 小时左右,课中休息一次
- 3. 答疑设置: ①课前 10 分钟; ②课后微博@粉笔-秦娜娜
- 4. 课程无限次回放,来不及听直播的可看回放

【注意】本节课讲解排列组合与概率问题、植树问题。植树问题不算特别难, 套公式即可,排列组合与概率更多需要理解。

第六节 排列组合与概率问题

- ◆排列组合问题
- ◆概率问题
- 一、排列组合问题
- 1. 分类与分步

分类用加法: 要么……要么……

分步用乘法: 既……又……

2. 排列与组合

排列: 与顺序有关(改变顺序,结果变化)

组合: 与顺序无关(改变顺序,结果不变)

3. 常用方法

①捆绑法: 必须相邻

②插空法: 不能相邻

#### 基础概念

- 1. 分类分步
- 2. 排列组合

常用方法

- 1. 捆绑法
- 2. 插空法
- 3. 正难则反

【注意】排列组合:是一种计数方法,一般会问"有多少种情况",分类比较多,一个个枚举不现实。

- 1. 基础概念: 重中之重。
- (1) 分类分步。
- (2) 排列组合。
- 2. 常用方法:
- (1) 捆绑法。
- (2) 插空法。

### **Fb** 粉筆直播课

#### (3) 正难则反。

基础概念——分类分步

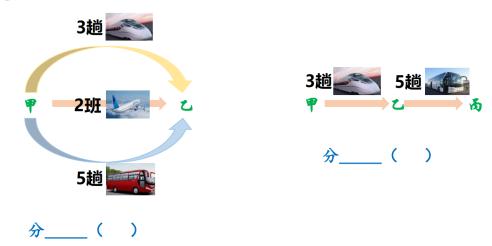
分类(+):分成几个类别, 互不干扰要么……要么……

分步(\*):分成几个步骤,缺一不可既……又……

【例 1】选修课: 艺术类 3 门, 科技类 4 门, 文学类 5 门, 从中只选 1 门, 有( )种选法?

【例 2】选修课: 艺术类 3 门,科技类 4 门,文学类 5 门,三类各选 1 门,有()种选法?

### 超热打铁



【注意】基础概念——分类分步:

- 1. 分类 (+):
- (1) 分成几个类别, 互不干扰。比如人类分为男性和女性。
- (2) 造句: 要么……要么……。
- 2. 分步(\*):
- (1)分成几个步骤,缺一不可。比如早起出门,先吃早饭,再穿鞋,然后下楼,这就是三个步骤。
  - (2) 造句: 既……又……。
  - 3. 例题:
- (1) 例 1: 选修课: 艺术类 3 门, 科技类 4 门, 文学类 5 门, 从中只选 1 门, 有( ) 种选法?

答: 共3类选修课,只需要选1门,要么选艺术类、要么选科技类、要么选

文学类,属于分类。艺术类 3 门,科技类 4 门,文学类 5 门,总情况=3+4+5=12 种。分类就是把每一类情况数相加,总结为分类相加。造句:要么选艺术类、要么选科技类、要么选文学类,分类相加。

(2) 例 2: 选修课: 艺术类 3 门, 科技类 4 门, 文学类 5 门, 三类各选 1 门, 有( ) 种选法?

答:要求3类各选1门,要选艺术类、也要选科技类、也要选文学类,分步完成,总情况=3\*4\*5=60种。分步为每一步相乘,总结为分步相乘。造句:既要选艺术类、又要选科技类、又要选文学类,分步相乘。

#### 4. 趁热打铁:

(1) 例:要从甲地到乙地,有3趟高铁,2班飞机,5趟大巴,问从甲到乙有多少种出行方式?

答:要么坐高铁、要么坐飞机、要么坐大巴,分类相加,总情况数=3+2+5=10种。

(2) 例: 从甲地到乙地有 3 趟高铁,从乙地到丙地有 5 趟大巴,问从甲到丙有多少种出行方式?

答: 既要从甲到乙,又要从乙到丙,分步相乘,总情况数=3\*5=15种。

### 超热打铁



基础概念——排列组合

组合, C(n, m): 从 n 个物品中选择 m 个组成一组, 有多少种选法?

排列, A (n.m): 从n个物品中选择m个排成一列, 有多少种排法?

- 【例1】从8个同学中任选2人一起去参加比赛,有()种情况?
- 【例 2】从 8 个同学中任选 2 人分别去数学比赛和英语比赛,有()种情况?
  - 【例 3】让 3 个同学分别去参加语文、数学、英语比赛,有( )种情况?组合, C(n,m):改变顺序,结果不变。

排列, A (n, m): 改变顺序, 结果变化。

- 【例1】从7个葫芦娃中选2个去对战蛇精,有()种情况?
- 【例 2】从 7 个葫芦娃中选 2 个分别去对战蛇精和蝎子精,有( )种情况? 趁热打铁
- 【1】从 25 位同学中选择 4 人参加 100 米跑步比赛,有( )种选法?
- 【2】从 25 位同学中选择 4 人参加 4\*100 米接力比赛,有( )种排法?
- 【3】从10个不同颜色的小灯中,抽出3个送去质检,有()种情况?
- 【4】从10个不同颜色的小灯中,抽出3个送给3位同学,有()种情况?
- 【5】4个同学坐成一排,有()种情况?

#### 【注意】

- 1. 基础概念——排列组合:
- (1)组合: C(n,m):从n个物品中选择m个组成一组,有多少种选法?组合的重点在于"选择"m个。
- (2) 排列: A(n, m): 从 n 个物品中选择 m 个排成一列,有多少种排法? 不但要"选择",还要"排列"。
  - 2. 例题:
  - (1) 例 1: 从 8 个同学中任选 2 人一起去参加比赛,有( )种情况? 答: 8 选 2,只要选,用组合 C,C(8,2)。
- (2) 例 2: 从 8 个同学中任选 2 人分别去数学比赛和英语比赛,有 ( ) 种情况?

答: 8 选 2,不仅要把人选出来,还需要确定谁去数学、谁去英语,可以让 a 去数学、b 去英语,也可以让 a 去英语、b 去数学,需要排列,A(8,2)。

(3) 例 3: 让 3 个同学分别去参加语文、数学、英语比赛,有( )种情

况?

- 答: 3个同学分配到3个科目,重点是怎么安排,A(3,3)。
- 3. 口诀: 改变顺序,看对结果有没有发生变化。
- (1) 改变顺序,结果不变→只需要选,组合,C(n,m)。
- (2) 改变顺序, 结果变化→不但要选, 还要排列, 排列, A (n, m)。
- 4. 例题:
- (1) 例 1: 从 7 个葫芦娃中选 2 个去对战蛇精,有()种情况?
- 答:从7个葫芦娃选2个,假设选的是水娃、火娃,交换位置之后是火娃、 水娃,还是这两个人去打蛇精,交换位置对结果没有影响,C(7,2)。
- (2) 例 2: 从 7 个葫芦娃中选 2 个分别去对战蛇精和蝎子精,有 ( ) 种情况?
- 答:从7个葫芦娃选2个,假设选的是水娃对战蛇精、火娃对战蝎子精,交换位置后是火娃对战蛇精、水娃对战蝎子精,交换位置对结果有影响,A(7,2)。
  - 5. 趁热打铁:
  - (1) 从 25 位同学中选择 4 人参加 100 米跑步比赛,有( )种选法?答:选出来的这 4 个人都是参加同一项比赛, C (25,4)。
- (2) 从 25 位同学中选择 4 人参加 4\*100 米接力比赛,有( )种排法? 答: 4\*100 米有第一棒、第二棒、第三棒、第四步, abcd 与 cbad 是不同的, 交换顺序对结果有影响, 为 A (25, 4)。
  - (3) 从 10 个不同颜色的小灯中,抽出 3 个送去质检,有 ( ) 种情况? 答:抽出 3 个,交换顺序结果不变,为 C (10,3)。
  - (4)从10个不同颜色的小灯中,抽出3个送给3位同学,有()种情况? 答:灯颜色不同,抽出3个送给3位同学,交换顺序对结果有影响,为A(10,3)。
  - (5)4个同学坐成一排,有()情况?

答: 4个同学坐成一排就是 4个人对应 4个位置,为 A (4,4)。注意:涉及人排队,n个人排队,为 A (n,n)。人和人是不一样的,交换位置队伍就会发生变化。

排列数: A (n, m): 从 n 开始往下乘 m 个数。A (n, 1) = n

组合数: C(n, m): 从 n 开始往下乘 m 个数/从 m 开始往下乘 m 个数。C(n, m) =C(n, n-m), C(n, 1) =n

#### 【练习】

- (1) A (7,3)
- (2) A (5,5)
- (3) A (6,1)
- $(4) \ C \ (5,3)$
- (5) C (5,2)
- (6) C (5,1)

#### 【注意】

- 1. 排列数: A (n, m): 从 n 开始连续往下乘 m 个数。
- (1) A (7,3) = 7\*6\*5=210.
- (2) A (5,5) = 5\*4\*3\*2\*1=120.
- (3) A (6,1) =6, 或者从概念入手,从6个中选1个,有6种情况。
- 2. 组合数: C(n, m): 从 n 开始往下乘 m 个数/从 m 开始往下乘 m 个数(从 m 乘到 1)。
  - (1) C (5,3) = 5\*4\*3/(3\*2\*1) = 10.
  - (2) C (5,2) = 5\*4/(2\*1) = 10.
  - (3) C (5,1) = 5.
- 3. 注意: A (n, 1) =n, C (n, 1) =n。只选 1 个, 不用纠结用 A 还是 C, 结果是一样的,总量是多少,情况是多少。
- 4. C(n, m) = C(n, n-m)。C(5, 2) = C(5, 3),右下角标相同,右上角标相加等于右下角标,C(7, 2) = C(7, 5)。正向计算复杂,可以反向计算。C(200, 199) =C(200, 1)。从 200 个同学中选 199 个出去操场捡垃圾,剩余的 1 个看班级,和选 1 个同学看班级,剩余的 199 个同学出去捡垃圾是一样的。
- 【例 1】(2023 福建)大学生小王从杭州校园回乌鲁木齐家乡,将在武汉、西安、银川停留。若从武汉市的6个景点中挑选3个景点,西安8个景点中挑选3个景点,银川7个景点中挑选3个景点,那么可选的景点搭配有多少种?()

A. 22400

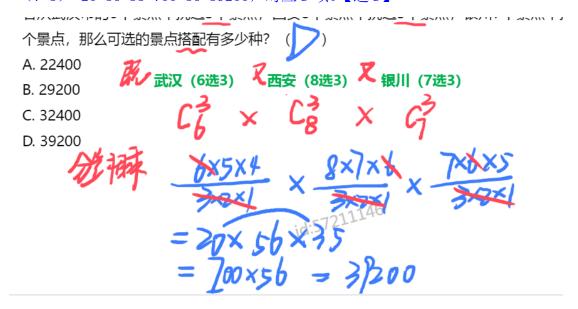
B. 29200

C. 32400

D. 39200

【解析】1. 既要选武汉,又要选西安,又要选银川,这是分步,分步相乘。 武汉6选3: 景点搭配,选a、b、c和选c、b、a是一样的,为C(6,3); 西安8选3: 为C(8,3); 银川7选3: 为C(7,3)。所求=C(6,3)\*C(8,3)\*C(7,3) =[6\*5\*4/(3\*2\*1)]\*[8\*7\*6/(3\*2\*1)]\*[7\*6\*5/(3\*2\*1)]=(5\*4)\*(8\*7)

\* (7\*5) =20\*56\*35=700\*56=39200,对应D项。【选D】



【例 2】(2021 河南)现有红、黄、绿三种颜色的旗帜各一面,若从中选取一面、两面或三面从左到右按一定顺序排列表示不同的信号,则可以表示不同的信号共有()。

A. 7 种

B. 9 种

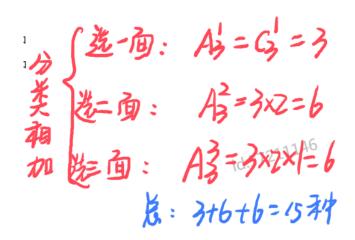
C. 15 种

D. 27 种

【解析】2. 有三种颜色,从中选取一面、两面或三面,分为三类:

- (1) 选一面: 3 选 1, 选 1 个用 C 或 A 都可以, 为 A (3, 1) = C (3, 1) = 3。
- (2) 选两面: 3 选 2, 假如选的是红色、绿色,红绿、绿红是不同的信号,为 A(3,2)=3\*2=6。
  - (3) 选三面: 3 选 3, 涉及排列, 为 A (3, 3) =3\*2\*1=6。

分类相加, 总情况=3+6+6=15 种, 对应 C 项。【选 C】



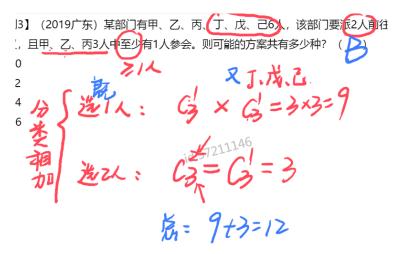
【例 3】(2019 广东)某部门有甲、乙、丙、丁、戊、己 6 人,该部门要派 2 人前往外地参加会议,且甲、乙、丙 3 人中至少有 1 人参会。则可能的方案共有多少种?())

A. 10 B. 12 C. 14 D. 16

【解析】3. 总共要选 2 个人,甲、乙、丙 3 人中至少有 1 人参会,甲、乙、丙 ≥1 人,要么甲、乙、丙中选 1 人,要么甲、乙、丙中选 2 人,分类相加。

- (1) 甲、乙、丙中有 1 人: 3 选 1, 用 A 或 C 都可以, 为 C (3, 1); 丁、戊、己中再选 1 个, 为 C (3, 1); 既要在甲、乙、丙中选 1 个, 又要在丁、戊、己中选 1 个, 分步相乘, 为 C (3, 1) \*C (3, 1) =9。
- (2) 甲、乙、丙中有 2 人: 3 选 2,去参加会议,交换位置对结果没有影响,为 C(3,2)=C(3,1)=3,右上角标超过右下角标的一半,可以换一下。

分类相加,总情况=9+3=12种,对应B项。



方法二:出现"至少",正向做大概率需要分类。正难则反,所求情况数=总情况数-反面情况数。总情况数为从 6 人中选 2 个,为 C (6,2)。正面是"甲、乙、丙 3 人中至少有 1 人参会",则反面为"没有甲、乙、丙参会",即从丁、戊、己 3 人中选 2 个,为 C (3,2) =C (3,1) =3。所求=C (6,2) -3=6\*5/(2\*1) -3=15-3=12 种,对应 B 项。【选 B】

#### 捆绑法

题型特征: 在一起/相邻/相连

【例】:3男3女站成一排,3个女生必须站在一起,有( )种情况?解题方法:

①先捆: 把相邻的捆绑起来看成一个整体

②再排:把捆后的"整体"与其他进行排列组合

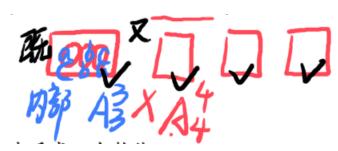
注意: 捆绑过程需考虑内部有无顺序

### 【注意】捆绑法:

1. 题型特征: 在一起/相邻/相连。

2. 例: 3 男 3 女站成一排, 3 个女生必须站在一起, 有( ) 种情况?

答: "在一起"最直接的方法就是把这 3 个女生捆在一起, 3 个女生看成 a、b、c, 人是不一样的, abc 和 cba 是不一样的, 内部有顺序, 为 A (3,3); 女生排好之后再和另外的 3 个男生排序, 4 个主体排列, 为 A (4,4); 既要考虑女生的内部顺序、又要整体排序, 分步相乘, 所求=A (3,3) \*A (4,4)。



#### 3. 解题方法:

(1) 先捆: 把相邻的捆绑起来看成一个整体。

(2) 再排:把捆后的"整体"与其他进行排列组合。

(3) 注意:捆绑过程需考虑内部有无顺序。

【例 4】(2020 河北)现有七年级的学生 1 名,八年级的学生 4 名,九年级的学生 5 名,需让他们排一排拍一张合照,要求同一年级的学生要挨在一起站,且七年级的学生不站两边,则有()种不同的排法。

A. 3760 B. 4760 C. 5760 D. 6760

【解析】4. 要求"同一年级的学生挨在一起站",用捆绑法,先捆再排。先捆: 每个年级的学生捆在一起,七年级的学生 1 名: 1 种; 八年级的学生 4 名: a、b、c、d 和 b、c、a、d 不一样,内部有顺序,为 A(4,4); 九年级的学生 5 名: 内部有顺序,为 A(5,5)。再排: 3 个整体排序,要求"七年级的学生不站两边",七年级在中间,要么八年级在左、九年级在右,要么九年级在左、八年级在右,2 种情况。分步相乘,1\*A(4,4)\*A(5,5)\*2=4\*3\*2\*1\*5\*4\*3\*2\*1\*2=5760,

### 对应C项。【选C】

#### 插空法

题型特征: 不在一起/不相邻/不相连

【例】4男2女生站成一排,2个女生不能站在一起,有()种情况?

【例】4 男 2 女站成一排, 2 个女生不能站在一起且不能在两边, 有()种情况?

#### 解题方法:

①先排: 先安排可以相邻的元素, 形成若干个空位

②再插:将不相邻的元素插入到符合条件的空位中

### 【注意】插空法:

- 1. 题型特征: 不在一起/不相邻/不相连。
- 2. 例: 4 男 2 女站成一排, 2 个女生不能站在一起, 有( ) 种情况?

答:要求"不能站在一起",用插空法。首先要有空,女生不能相邻,先安排可以相邻的4个男生,为A(4,4);4个人形成5个空位,从5个空位中选2个位置将2个女生安排进去,为A(5,2),既要排男生,又要排女生,分步相乘,所求=A(4,4)\*A(5,2)。



#### 3. 解题方法:

- (1) 先排: 先安排可以相邻的元素, 形成若干个空位, n 个人会形成 (n+1) 个空位。
  - (2) 再插:将不相邻的元素插入到符合条件的空位中。
- 4. 例: 4 男 2 女站成一排, 2 个女生不能站在一起且不能在两边, 有 ( ) 种情况?

答: 先安排 4 个男生,为 A (4,4); 4 个男生形成 5 个空位,将不相邻的元素插入到符合条件的空位中,要求"女生不站在两边",两边的空位不符合条件,从中间的 3 个空位选 2 个安排女生,为 A (3,2)。所求=A (4,4)\*A (3,2)。



【例 5】(2020 银行)某学校文艺晚会共有3个小品、5个歌舞类节目,所有的节目互不相同。现在要进行节目顺序安排,要求所有小品节目不能相邻,共

有()种安排方案。

A. 40320

B. 14400

C. 7200

D. 1440

【解析】5. 要求"不能相邻",用插空法。先排可以相邻的:小品不能相邻,那么歌舞类节目可以相邻,为 A (5,5); 5 个节目排好之后会形成 6 个空位,从 6 个空位中选 3 个安排小品,小品顺序变化整个节目会发现变化,为 A (6,3)。分步相乘,A (5,5)\*A (6,3)=5\*4\*3\*2\*1\*6\*5\*4=120\*120=14400,对应 B 项。【选 B】

【注意】如果要求节目必须以歌舞开场,且小品不能相邻,问有多少种排法。

答: 先排可以相邻的歌舞类节目,为 A(5,5); 5 个节目形成 6 个空位; 必须以歌舞开场,第1个空位不能用,从剩余 5 个空位中选 3 个插入小品,为 A(5,3)。 A(5,5)\*A(5,3)。



### 二、概率问题

1. 给情况求概率

概率=满足条件的情况数/总情况数

2. 给概率求概率

分类: 概率=各类概率的和

分步: 概率=各步概率的乘积

给情况求概率:没有已知概率,求概率

给概率求概率:有已知概率,求概率

#### 【注意】概率问题:

- 1. 给情况求概率:没有已知概率,求概率。
- 2. 给概率求概率:有已知概率,求概率。

### 给情况求概率:

基本公式: 概率 P=满足条件的情况数/总情况数。

例:5男3女,任选2人参加培训,恰好为女性的概率()?

#### 【注意】给情况求概率:

- 1. 基本公式: 概率 P=满足要求 (条件)的情况数/总情况数。
- 2. 例: 5 男 3 女, 任选 2 人参加培训, 恰好为女性的概率()?

答: 总情况数: 从 5+3=8 个人中选 2 个人,去参加培训,交换顺序没有影响,为 C(8,2)。满足要求的情况数: 恰好都是女性,C(3,2)。P=满足条件的情况数/总情况数=C(3,2)/C(8,2)=3÷[8\*7/(2\*1)]=3/28。

【例 6】(2019 广东)某项目由甲、乙二人竞标,以所报单价高者胜,甲从10 元、11 元、12 元、13 元、16 元、17 元六个单价中随机选择一个作为报价,乙从13 元、14 元、15 元中随机选取一个作为报价,则乙中标的概率为()

A. 7/18

B. 11/18

C. 2/3

D. 5/6

【解析】6. P=满足条件的情况数/总情况数。总情况数: 甲、乙都出 1 个单价,甲从 6 个单价中选 1 个作为报价,C (6,1),用 C 或 A 都可以; 乙从 3 个单价中选 1 个, C (3,1); 既要甲出价, 又要乙出价, 分步相乘, 为 C (6,1)\*C (3,1)。

满足条件的情况数:乙要中标,中标是所报单价高者胜,说明乙报价>甲报价,情况不多,额可以枚举:

- (1) 乙报价 13: 甲可以报 10、11、12, 有 3 种情况。
- (2) 乙报价 14: 甲可以报 10、11、12、13, 有 4 种情况。
- (3) 乙报价 15: 甲可以报 10、11、12、13, 有 4 种情况,注意没有 14、15。

分类相加,满足条件的情况数=3+4+4。P=(3+4+4)/[C(6,1)\*C(3,1)]=11/18,

对应 B 项。【选 B】

2首 > 甲旬 (榉)

13 10.11.12 3种

14 10.11.12.13 4种

15 12.13 4种

【注意】猜题: 乙中标概率+乙不中标概率=1, A 项+B 项=1,则乙中标概率在 A、B 项中,乙只有三个报价,但是乙的报价基本比甲的报价高一点,说明乙中标的概率比不中标的概率大一些,猜 B 项。

【例 7】(2022 广东公务员)某街道对辖内 6 个社区的垃圾分类情况进行考核评估,结果显示,有 2 个社区的垃圾分类考核不通过。如果从 6 个社区中随机抽取 3 个进行现场检查,则抽取的社区中,既有考核通过的又有考核不通过的社区的概率为()。

A. 1/5 B. 1/2 C. 2/3 D. 4/5

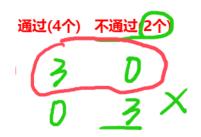
【解析】7. 方法一: P=满足要求的情况数/总情况数。总情况数: 从6个社区中选3个,调换顺序没有区别,为C(6,3)。满足要求的情况:有4个通过、2个不通过,既要有考核通过的、又有考核不通过的:

- (1) 1 个通过、2 个不通过: 4 选 1, C (4, 1); 2 选 2, C (2, 2); 分步相乘, C (4, 1) \*C (2, 2)。
- (2) 2 个通过、1 个不通过: 4 选 2, C (4, 2); 2 选 1, C (2, 1); 分步相乘, 为 C (4, 2) \*C (2, 1)。

分类相加,P=[C (4,1) \*C (2,2) +C (4,2) \*C (2,1)]/C (6,3) ={4+[4\*3/(2\*1)]\*2}÷[6\*5\*4/(3\*2\*1)]=16/20=4/5,选择 D 项。

方法二:正难则反,P=1-反面概率。"既有考核通过的又有考核不通过的社区",反面为都通过或都不通过,都通过就是3个都通过,不通过的只有2个,

无法选 3 个都不通过,故反面情况为 3 个都通过。总情况数为 C (6, 3);反面情况数:从 4 个里边选 3 个,C (4, 3)。P=1-C (4, 3) /C (6, 3) =1-4/20=4/5,选择 D 项。



方法三: 结合选项, A 项+D 项=1, 正面概率+反面概率=1, 有 4 个通过、2 个不通过, 3 个都通过只有一种分类,都不通过不存在,则既要有考核通过的、又有考核不通过的概率相对较大,则猜 D 项。【选 D】

【注意】正难则反: 正向求解较复杂,分类较多, P=1-反面概率。

#### 给概率求概率

分类加和: P=P<sub>1</sub>+P<sub>2</sub>+P<sub>3</sub>+······+P<sub>n</sub> (要么······要么······)

分步相乘: P=P<sub>1</sub>\*P<sub>2</sub>\*P<sub>3</sub>\*·····\*P<sub>n</sub>(既······又·····)

【例】每天下雨的概率均为10%

- ①今明两天只有一天下雨的概率?
- ②今明两天都下雨的概率?

#### 【注意】给概率求概率:

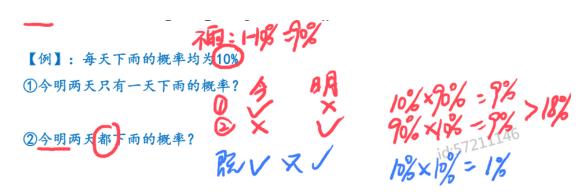
- 1. 分类加和: P=P<sub>1</sub>+P<sub>2</sub>+P<sub>3</sub>+······+P<sub>n</sub> (要么······要么······)。
- 2. 分步相乘: P=P<sub>1</sub>\*P<sub>2</sub>\*P<sub>3</sub>\*·····\*P<sub>n</sub> (既······又·····)。
- 3. 例:每天下雨的概率均为10%
- (1) 今明两天只有一天下雨的概率?

答:要么今天下雨明天不下雨,要么今天不下雨明天下雨,分类相加。下雨的概率为 10%,不下雨的概率为 1-10%=90%,今天下雨明天不下雨:分步相乘,10%\*90%=9%;今天不下雨明天下雨:90%\*10%=9%;分类相加,P=9%+9%=18%。

(2) 今明两天都下雨的概率?

答: 既要今天下雨, 又要明天下雨, 分步相乘, P=10%\*10%=1%。

### **Fb** 粉笔直播课



【例 8】(2019 广东)某项问答比赛中,小彭全对的概率为 90%,小罗全对的概率为 94%,则这次比赛两人中只有一个人全对的概率为 ()。

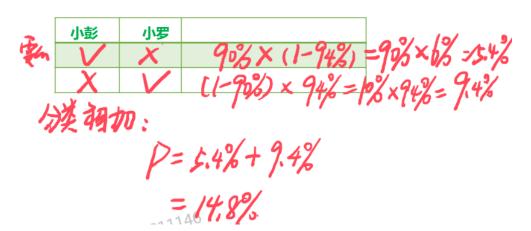
A. 1%

B. 12.1%

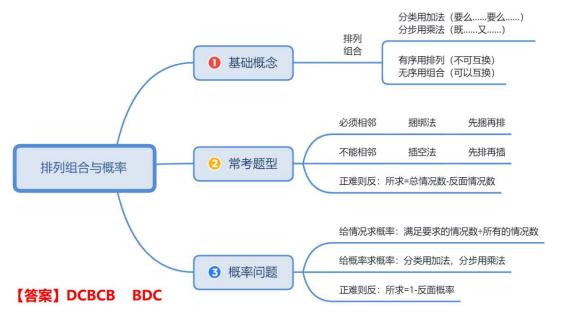
C. 14.8%

D. 21%

【解析】8. 给概率求概率,要求只有一个人全对: (1) 小彭全对、小罗不全对: 分步相乘, 90%\* (1-94%) =90%\*6%=5. 4%。(2) 小彭不全对、小罗全对: 分步相乘, (1-90%) \*94%=10%\*94%=9. 4%。"要么……,要么……"; 分类相加, P=5. 4%+9. 4%=14. 8%,对应 C 项。【选 C】



### **Fb** 粉筆直播课



### 【注意】排列组合与概率:

- 1. 基础概念——排列组合: 区分不了就造句。
- (1) 分类用加法 (要么……要么……)。
- (2) 分步用乘法 (既……又……)。
- (3) 有序用排列(不可互换)。
- (4) 无序用组合(可以互换)。

#### 2. 常考题型:

- (1) 必须相邻→捆绑法: 先捆再排。考虑内部是否有顺序。
- (2) 不能相邻→插空法: 先排再插。考虑空位是否有效。
- (3) 正难则反: 所求=总情况数-反面情况数。

### 3. 概率问题:

- (1) 给情况求概率:满足要求的情况数+所有的情况数。
- (2) 给概率求概率: 分类用加法, 分步用乘法。
- (3) 正难则反:正向复杂,则反向做,所求=1-反面概率。
- 4. 答案: BCBCBBDC。

#### 第七节 植树问题

- ◆基础植树
- ◆不移动植树

【注意】植树问题:属于广东的特色考法。基本分析植树类型,往公式里套就行。

- 1. 基础植树。
- 2. 不移动植树。
- 1. 基础植树(单侧)
- ①两端植树: 棵数=总长/间距+1
- ②单端植树 (环形植树): 棵数=总长/间距
- ③楼间植树 (两端都不植): 棵数=总长/间距-1
- 2. 不移动植树(单侧)
- (1) 求前后间距的最小公倍数
- (2)①两端植树:不移动棵数=总长/最小公倍数+1
- ②单端植树 (环形植树): 不移动棵数=总长/最小公倍数
- ③楼间植树 (两端都不植): 不移动棵数=总长/最小公倍数-1
- ◆基础植树
- ①两端植树: 棵数=总长/间距+1



②单端植树、环形植树: 棵数=段数=总长/间距



③楼间植树 (两端都不植): 棵数=段数-1=总长/间距-1



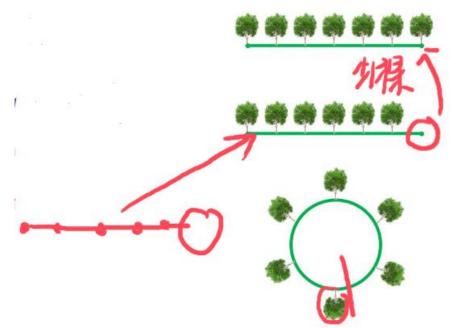
#### 【注意】基础植树:

1. 两端植树: 顾名思义,这条路的两端都需要种树。2 棵树把一条路分为1

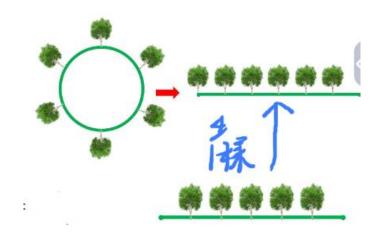
段,3 棵树把一条路分为2段,都是等间距植树,棵数=段数+1=总长/间距+1。例:有一条路,长为100米,每隔10米种一棵树,问两端植树可以种多少棵树:100/10+1=11棵。



- 2. 单端植树: 只有一个端点种树, 另一个端点不种树。比两端植树少一棵树, 棵数=段数=总长/间距。
- 3. 环形植树(封闭几何形状,比如圆形、环形、长方形、五边形): 把环形植树从某一点切开,展开成一条直线,和单端植树是一样的,棵数=段数=总长/间距。例:有一条50米的环形,每隔5米种一棵树,则棵数=段数=50/5=10。



4. 楼间植树:两个端点不植树,只在中间植树,比单端植树再少一棵树,棵数=段数-1=总长/间距-1。例:两个居民楼之间间距为 100 米,每隔 10 米种一棵树,棵数=100/10-1=9。



- ◆基础植树(单侧、等间距)
- ①两端植树: 棵数=总长/间距+1, 总长=间距\*(棵数-1)。
- ②单端植树、环形植树:棵数=段数=总长/间距,总长=间距\*棵数。
- ③楼间植树(两端都不植): 棵数=段数-1=总长/间距-1,总长=间距\*(棵数+1)。
  - 注意: ①若题干没明确说明, 默认为两端植树
    - ②若题干没有明确要求,默认为单侧植树

#### 【注意】

- 1. 基础植树 (单侧、等间距):
- (1) 两端植树: 棵数=总长/间距+1, 总长=间距\*(棵数-1)。
- (2) 单端植树、环形植树: 棵数=段数=总长/间距, 总长=间距\*棵数。
- (3) 楼间植树 (两端都不植): 棵数=段数-1=总长/间距-1, 总长=间距\*(棵数+1)。

#### 2. 注意:

- (1) 若题干没明确说明,默认为两端植树。比如直接说在一条路上植树,没有明确说明,默认是两端植树;如果给出两端不植树,为楼间植树;如果说明是正方形、圆形、环形,为环形植树。
- (2) 若题干没有明确要求,默认为单侧植树。如果题干说明路的两侧都要植树,则棵数=(总长/间距+1)\*2。
  - 【例1】(2023 湖北)育才中学有一条150米长的小道,学校准备在小道的

两边分别按照一棵梧桐树、一棵桦树、一棵梧桐树······的顺序依次种树,已知同一边两棵树的间隔为3米,小道的起点、终点均要求种树,且起点均为梧桐树,那么总共需要种()棵梧桐树。

A. 26 B. 50

C. 52 D. 54

【解析】1. 方法一: 植树问题,起点、终点都要种树,属于两端植树,问"总共需要种多少棵梧桐树"。看这些树里边有多少棵梧桐树。两端植树: 总棵数=150/3+1=51 棵。梧桐树、桦树、梧桐树、桦树……,每两棵树为一组,每一组中有1棵梧桐树、1 棵桦树,51/2=25 组……1 棵树,先种的梧桐数,剩余的1棵树是梧桐树,单侧有26棵梧桐树,两边植树,所求=26\*2=52 棵,对应 C 项。

方法二: 要算梧桐树,分析两棵梧桐树之间的间距,梧桐树、桦树、梧桐树、桦树……,已知两棵树的间隔为 3 米,则每两棵梧桐树的间距为 6 米,两端植树,且有两边,所求=(150/6+1)\*2=26\*2=52 棵,对应 C 项。

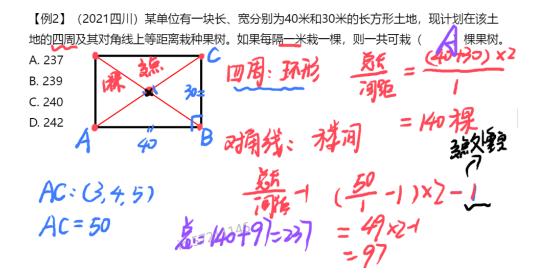
方法三: 26 和 52 有 2 倍关系,故 A 项是坑,猜 C 项。【选 C】

【例 2】(2021 四川)某单位有一块长、宽分别为 40 米和 30 米的长方形土地,现计划在该土地的四周及其对角线上等距离栽种果树。如果每隔一米栽一棵,则一共可栽(),棵果树。

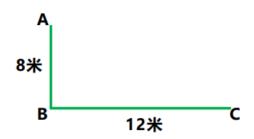
A. 237 B. 239

C. 240 D. 242

【解析】2. "在该土地的四周及其对角线上等距离栽种果树", 先分析四周,再分析对角线。四周:属于环形植树问题,棵数=总长/间距=长方形周长/间距=[(40+30)\*2]/1=140 棵。对角线:端点在算四周的时候已经算过了,对角线的两个端点不种树,楼间植树,棵数=总长/间距-1。△ABC 是一个直角三角形,满足勾股定理,有直角边 30、40,勾股数 (3、4、5),AC=50,有两条对角线,棵数=(50/1-1)\*2=49\*2=98 棵。有同学认为是 140+98=238,没有对应选项。对角线有交点,交点重复计算,需要-1,对角线上有 98-1=97 棵。总棵数=140+97=237 棵,对应 A 项。【选 A】

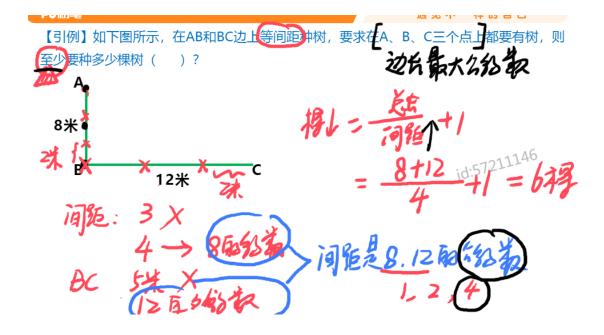


【引例】如下图所示,在 AB 和 BC 边上等间距种树,要求在 A、B、C 三个点上都要有树,则至少要种多少棵树( )?



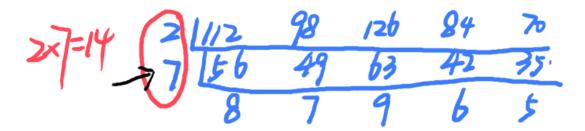
【注意】引例. 如下图所示,在 AB 和 BC 边上等间距种树,要求在 A、B、C 三个点上都要有树,则至少要种多少棵树()?

答:如果间距为3,A点种一棵树,8/3,余2米,此时B点不能种树。如果间距为4,A、B点都能植树,4是8的约数,说明间距是8的约数。如果间距为5米,从B点开始种3棵树,12/5,余2米,C点不能种树,间距应该是12的约数。现在要求在AB和BC边上等间距种树,则间距既需要是8的约数,又需要是12的约数,间距是8和12的公约数(1、2、4)。问"至少种多少棵树",则间距要最大,故间距是边长的最大公约数。8和12的最大公约数是4,棵数=总长/间距+1=(8+12)/4+1=6棵。



【例 3】(2020 银行)一个五边形的花园,5条边的边长分别为 112、98、126、84、70(单位:米)。现在要沿着这5条边种上玫瑰花。要求每个角都有玫瑰花,并且每2棵玫瑰花之间的距离相等。则至少要种()棵玫瑰。

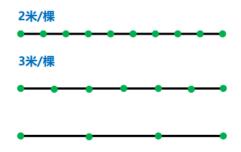
【解析】3. 五边形花园是封闭的几何,为环形植树问题,棵数=总长/间距= (112+98+26+84+70)/间距。要求"要求每个角都有玫瑰花",且问"至少要种多少棵玫瑰",则要间距为边长的最大公约数。求 112、98、123、84、70 的最大公约数,用短除法,提出 2,落下 56、49、63、42、35,提出 7,落下 8、7、9、6、5,这几个数没有公约数,则最大公约数=2\*7=14,棵数=(112+98+126+84+70)/14=8+7+9+6+5=35,对应 A 项。【选 A】



#### ◆不移动植树

▶特征:已知前后间隔发生变化,求不需要移动的树的棵数

两端植树(单侧),已知总长18米,不移动棵数=



- 1、找总长
- 2、求前后间距的最小公倍数
- 3、套公式

两端植树:不移动棵数=总长/前后间距的最小公倍数+1

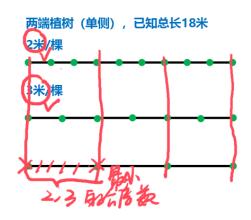
单端植树、环形植树:不移动棵数=总长/前后间距的最小公倍数

楼间植树:不移动棵数=不移动棵数=总长/前后间距的最小公倍数-1

#### 【注意】不移动植树:

- 1. 特征:已知前后间隔发生变化,求不需要移动的树的棵数。
- 2. 两端植树(单侧),已知总长18米,原来间距是2米/棵,要想间距扩大为3米/棵,问有多少棵树不需要移动?

答:从图形看,第一棵不移动,第四棵不移动,第七棵不移动,最后一棵不一定。不移动的树的间距既要满足 2 的倍数、又要满足 3 的倍数,即不移动树之间的间距为 2 和 3 的公倍数。两端植树,不移动棵数=总长/前后间距的最小公倍数+1,2 和 3 的最小公倍数是 6,故不移动棵树=18/6+1=3+1=4 棵。



### 3. 方法:

- (1) 找总长: 一般不移动植树问题的总长需要稍微计算一下。
- (2) 求前后间距的最小公倍数。

- (3) 套公式:
- ①两端植树:不移动棵数=总长/前后间距的最小公倍数+1。
- ②单端植树、环形植树:不移动棵数=总长/前后间距的最小公倍数。
- ③楼间植树:不移动棵数=不移动棵数=总长/前后间距的最小公倍数-1。

【例 4】(2020 银行)在道路一侧,从一端到另一端每隔 6 米有 1 个路灯,现有 27 个路灯。现在要把道路两侧的路灯的间距改成 4 米,那么,不需要移动的路灯有多少个? ( )

A. 13 B. 14 C. 26 D. 28

【解析】4. 前后间距发生变化,问不需要移动的路灯有多少个,不移动植树问题。"从一端到另一端每隔6米有1个路灯,现有27个路灯",没有强调,默认为两端植树。(1)算总长:总长=(棵树-1)\*间距=(27-1)\*6=26\*6,先放着。(2)计算前后间距的最小公倍数:6和4的最小公倍数是12。(3)套公式:两端植树,不移动棵树=总长/前后间距的最小公倍数+1,有两侧,所求=[(26\*6)/12+1]\*2=14\*2=28,对应 D 项。【选 D】

【例 5】(2019 广东)在一段公路上摆有一排间距为 45 米的标志物,共 25 个,现需要调整间距,第一个标志物不动,此外还有 6 个标志物不用挪动,则新的间距可为()米。

A. 50 B. 60 C. 70 D. 80

【解析】5. 前后间距发现变化,问新的间距,不移动植树问题。总长:没有特殊说明,默认两端植树,总长=(棵树-1)\*间距=(25-1)\*45=24\*45,先放着。两端植树,不移动棵数=总长/前后间距的最小公倍数+1,24\*45/前后间距的最小公倍数+1=1+6,前后间距的最小公倍数=24\*45/6=180,45 和 x 的最小公倍数是180,换句话说 x 是 180 的约数,选项中只有 60 是 180 的约数,对应 B 项。【选 B】

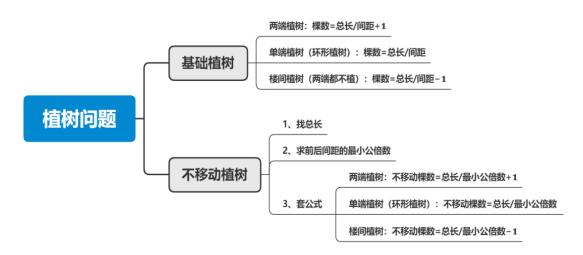
【注意】不放心可以验证 45、60 的最小公倍数,提出 5,落下 9、12,提出 3,落下 3、4,最小公倍数为 180。

【例 6】(2020 深圳公务员)某公园举办春节花展,在周长 400 米的中心区布置了环形花槽,并在花槽上每隔 16 米挂一只灯笼,不久后元宵灯会临近,公园决定增加并挪动一些灯笼,但仍保持灯笼间距相等。已知加入新灯笼后,共有5 只旧灯笼没有移动,则调整后的灯笼间距最大为()米。

A. 12 B. 10 C. 8 D. 5

【解析】6. 前后间距发现变化,问不移动的数量,不移动植树问题。总长为400 米,出现"环形花槽",为环形植树问题。前后间距发生变化,有 5 只灯笼没有动,不移动棵数=总长/前后间距的最小公倍数,400/前后间距的最小公倍数=5,前后间距的最小公倍数=80,原来间距为 16,设现在间距为 x,16 和 x 的最小公倍数是 80,观察选项,16 和 8 的最小公倍是 16,排除 C 项;12 不是 80 的约数,排除 A 项;10、16 与 5、16 的最小公倍数都是 80,问最大,选择 B 项。

#### 【选 B】



#### 【答案】CAA DBB

#### 【注意】植树问题:

- 1. 基础植树:没有特殊说明,默认为两端植树。公式是单侧的,如果道路两侧都要植树,需要单侧\*2。
  - (1) 两端植树: 棵数=总长/间距+1。

### **Fb** 粉筆直播课

- (2) 单端植树 (环形植树): 棵数=总长/间距。
- (3) 楼间植树 (两端都不植): 棵数=总长/间距-1。
- 2. 不移动植树:
- (1) 找总长。
- (2) 求前后间距的最小公倍数。
- (3) 套公式:
- ①两端植树:不移动棵数=总长/最小公倍数+1。
- ②单端植树(环形植树):不移动棵数=总长/最小公倍数。
- ③楼间植树:不移动棵数=总长/最小公倍数-1。
- 3. 答案: CAADBB。

	" <b>学</b> 回顾
[1]	(填空)从10个同学中选2个分别担任正副组长,情况数可表示为。
[2]	(填空) "要么…要么…"为 <mark>分</mark> ,用法; "既…又…"为分,用法。
[3]	(填空) 要求必须相邻/在一起: 用法, 先,再。
	要求不相邻/不在一起:用法,先,再。
[4]	(判断) 植树问题中,两端植树棵数= <u>总长</u> 间距 ( )
[5]	(判断) 只要题干没明确说明,一律当成两端植树做 ( )
[6]	(判断) 环形植树和单端植树本质上是一样的 ( )
[7]	(填空) 植树问题中,要求在各端点都要有树,至少种多少棵树,则间距为各边长的(
[8]	(填空) 计算不移动棵数, 3步走:
	①找; ②找前后间距的; ③。

#### 【注意】课堂回顾:

- 1. (填空)从10个同学中选2个分别担任正副组长,情况数可表示为<u>A(10,2)</u>。 10个人选2个,a正组长、b副组长与b正组长、a副组长不同,调换顺序对结果有影响。
- 2. (填空)"要么······要么······"为分<u>类</u>,用<u>加</u>法;"既······又·····"为分<u>步</u>, 用乘法。
- 3. (填空)要求必须相邻/在一起:用捆绑法,先捆,再排。注意捆绑的内部顺序。

要求不相邻/不在一起:用插空法,先排可以相邻的,再插空。注意空位有没有要求,空位要符合要求。

- 4. (判断) 植树问题中,两端植树棵数=总长/间距。(×)两端植树,棵数=总长/间距+1。
  - 5. (判断)只要题干没明确说明,一律当成两端植树做。(√)
  - 6. (判断)环形植树和单端植树本质上是一样的。(√)
- 7. (填空)植树问题中,要求在各端点都要有树,至少种多少棵树,则间距为各边长的最大公约数。
  - 8. (填空) 计算不移动棵数, 3 步走:
  - (1) 找总长。
  - (2) 找前后间距的最小公倍数。
  - (3) 套公式。
  - ◆课后及时复盘
- ◆下节课预习内容:对应讲义:第 135~139 页,第八节经济利润问题、第 九节溶液问题
- ◆预习要求:原则上要求做完每个章节至少 50%的题目,若不会做,熟悉题型和题目即可;

【答疑】课前10分钟+微博@粉笔-秦娜娜

### 【答案汇总】

排列组合与概率 1-5: DCBCB; 6-8: BDC

植树问题 1-5: CAADB; 6: B

# 遇见不一样的自己

Be your better self

