

# 理论攻坚-数学运算 2

(讲义+笔记)

主讲教师：秦娜娜

授课时间：2023.12.10



粉笔公考·官方微信

## 理论攻坚-数学运算 2（讲义）

### 数学运算 理论攻坚 2

学习任务：

1. 课程内容：工程问题、行程问题

2. 授课时长：2.5 小时

3. 对应讲义：第 125~129 页

4. 重点内容：

（1）掌握工程问题的三种考法与对应解题步骤

（2）掌握行程问题的基础题型以及火车过桥问题

（3）掌握直线和环形上的相遇、追及和流水行船问题的计算公式，用图示来理解复杂的运动过程

### 第四节 工程问题

1. 给完工时间型

①赋总量；②算效率；③根据工作过程列式求解

2. 给效率比例型

①赋效率；②算总量；③根据工作过程列式求解

3. 给具体单位型

设未知数，列方程求解

【例 1】（2021 广东公务员）为支持“一带一路”建设，某公司派出甲、乙两队工程人员出国参与一个高铁建设项目。如果由甲队单独施工，200 天可完成该项目；如果由乙队单独施工，则需要 300 天。甲、乙两队共同施工 60 天后，甲队被临时调离，由乙队单独完成剩余任务，则完成该项目共需（ ）天。

A. 120

B. 150

C. 180

D. 210

【例 2】（2021 重庆选调）一项工程，甲单独完成需要 15 天，乙单独完成需

要 30 天，丙单独完成需要 60 天，如果按照甲、乙、丙的顺序交替进行每人做一天，那么需要（ ）天能完成。

- A. 25
- B. 26
- C. 27
- D. 28

【例 3】（2019 安徽）A 工程队的效率是 B 工程队的 2 倍，某工程交给两队共同完成需要 6 天。如果两队的工作效率均提高一倍，且 B 队中途休息了一天，问要保证工程按原来的时间完成，A 队中途最多可以休息几天？（ ）

- A. 4
- B. 3
- C. 2
- D. 1

【例 4】（2023 四川）某市需要修一座桥梁，现有甲、乙两个施工单位，已知甲、乙合作 12 天可完成桥梁的  $\frac{7}{8}$ ；如果甲、乙单独做，那么甲完成  $\frac{1}{2}$  与乙完成  $\frac{2}{3}$  所需要的时间相等。则甲单独做比乙单独做需要多用（ ）天。

- A. 6
- B. 7
- C. 8
- D. 9

【例 5】（2021 广东公务员）某茶园需要在一定时间内完成采摘。前 4 天安排了 20 名采茶工，完成了五分之一的工作量。如果再用 10 天完成全部采摘，至少还需要增加（ ）名采茶工。

- A. 12
- B. 11
- C. 10
- D. 9

【例 6】（2022 四川）甲、乙两人加工一批配件，已知甲单独加工需要 15 小时才能完成，甲和乙的工作效率之比为 4:3。现在甲、乙两人一起加工了 5 小时，还剩下 200 个配件未加工，则这批配件的总数是（ ）个。

- A. 480
- B. 450
- C. 420
- D. 390



$$\textcircled{2} V_{\text{逆}} = V_{\text{船}} - V_{\text{水}}$$

【例 3】（2023 广东）甲、乙、丙三人同时从东村出发，沿同一条路线匀速骑行前往西村，甲的速度为 60 千米/小时，乙的速度为 40 千米/小时，同时，丁从西村出发匀速相向而行，并在出发后的第 3、4、5 小时分别与甲、乙、丙相遇，则丙的速度为（ ）千米/小时。

- A. 26  
B. 28  
C. 30  
D. 32

【例 4】（2020 深圳公务员）小王和小李从甲地去往相距 15km 的乙地调研。两人同时出发且速度相同。15 分钟后，小王发现遗漏了重要文件遂立即原路原速返回，小李则继续前行；小王取到文件后提速 20% 追赶小李，在小李到达乙地时刚好追上，假设小王取文件的时间忽略不计，则小李的速度为（ ）km/h。

- A. 4  
B. 4.5  
C. 5  
D. 6

【例 5】（2019 青海法检）某环形跑道，两人由同一起点同时出发，异向而行，每隔 10 分钟相遇一次；如果两人由同一起点同时出发，同向而行，每隔 25 分钟相遇一次。已知环形跑道的长度是 1800 米，那么两人的速度分别是多少？（ ）

- A. 126 米/分，54 米/分  
B. 138 米/分，42 米/分  
C. 110 米/分，70 米/分  
D. 100 米/分，80 米/分

【例 6】（2020 天津选调）小王在甲医院，小赵在乙医院。两人从所在医院同时骑车出发，来回往返于两个医院之间。已知小王骑车速度为 205 米/分钟，小赵骑车速度为 225 米/分钟，且经过 12 分钟后两人第二次相遇。问两家医院相距多少米？（ ）

- A. 1290  
B. 1720  
C. 2150  
D. 2580

【例 7】（2023 四川）甲驾驶一艘小船在河中匀速行驶，已知顺水行驶 120 千米，用时 6 小时；在同样的水流速度下，逆水行驶 80 千米用时 8 小时。则甲驾驶这艘小船在静止水面上行驶 150 千米需要（ ）小时。

A. 10

B. 9

C. 8

D. 12

## 理论攻坚-数学运算 2（笔记）

### 数学运算 理论攻坚 2

学习任务：

1. 课程内容：工程问题、行程问题

2. 授课时长：2.5 小时

3. 对应讲义：第 125~129 页

4. 重点内容：

（1）掌握工程问题的三种考法与对应解题步骤

（2）掌握行程问题的基础题型以及火车过桥问题

（3）掌握直线和环形上的相遇、追及和流水行船问题的计算公式，用图示来理解复杂的运动过程

### 目录

数运1	10.18 19:00-21:30	代入排除法、倍数特性法、方程法
数运2	10.19 19:00-21:30	工程问题、行程问题
数运3	10.20 19:00-21:30	排列组合与概率问题、植树问题
数运4	10.21 19:00-21:30	经济利润问题、溶液问题

### ♥课前小贴士♥

1. 理论课打基础，懂套路，学方法，听懂回复1，不懂敲疑问

2. 课程时长2.5小时左右，课中休息一次

3. 答疑设置：①课前10分钟；②课后微博@粉笔-秦娜娜

4. 课程无限次回放，来不及听直播的可看回放

【注意】数学运算 2：工程问题（属于套路题，掌握题型特征、题型分类、解题方法）、行程问题（公式相对较多，分析题目后确定用哪一个）。

### 第四节 工程问题

给完工时间型

给效率比例型

给具体单位型

【注意】工程问题——题型分类：

1. 给完工时间型。
2. 给效率比例型。
3. 给具体单位型。

分析核心：工作总量如何完成（总量=效率\*时间→ $W=P*t$ ）



工作总量  $W$ ：

- ①按人分析： $W=W_{甲}+W_{乙}+W_{丙}$
- ②按工作阶段分析： $W=W_1+W_2$

【注意】工程问题：

1. 分析核心：工作总量如何完成（总量=效率\*时间→ $W=P*t$ ）。
2. 工作总量  $W$ ：两个式子是一模一样的，只是切入点不同，哪个简单就用哪个。



（1）按人分析：甲、乙、丙三个人均参与工作， $W=W_{甲}+W_{乙}+W_{丙}=3*甲+10*乙+7*丙$ 。

（2）按工作阶段分析：相当于分成两个阶段， $W=W_1+W_2=3*（甲+乙）+7*（乙+丙）$ 。

给完工时间型：

题目特征：题目中给出多个完工时间（ $\geq 2$  个、从头到尾以不变的效率干



完的时间)

解题步骤:

①赋总量: 完工时间的公倍数

②算效率:  $P=W/t$

③根据工作过程列式求解

【例】: 搬一堆砖, 甲单干要 4 小时, 乙单干要 6 小时, 甲乙合作需要多久完成?

【注意】给完工时间型:

1. 题目特征: 题目中给出多个完工时间 ( $\geq 2$  个完工时间, 从头到尾以不变的效率干完工作所花的时间)。

2. 例: 搬一堆砖, 甲单干要 4 小时, 乙单干要 6 小时, 甲乙合作需要多久完成?

答: 结合题干, 给出两个完工时间 (4 小时、6 小时); 问 “甲乙合作需要多久完成”, 所求  $(t) = W / (\text{甲} + \text{乙})$ 。设工作总量为  $W$ , 甲  $= W/4$ 、乙  $= W/6$ , 则  $t = W \div (W/4 + W/6)$ , 发现 “ $W$ ” 可以被约掉, 说明  $W$  只是参与计算过程, 但是不决定结果  $\rightarrow W$  等于任意值对最终结果没有影响, 故可以将  $W$  赋一个好算的值。结合列出的式子, 分母出现分数 ( $W/4$  和  $W/6$ ), 为了方便计算, 可以赋值  $W$  为 4 和 6 的公倍数  $\rightarrow$  赋值  $W$  为 24 (也可以赋值为最小公倍数 12), 则甲  $= 24/4 = 6$ 、乙  $= 24/6 = 4$ , 所求  $(t) = 24 / (6 + 4) = 2.4$  天。

3. 解题步骤:

(1) 赋总量: 完工时间的公倍数 (不拘泥于最小公倍数)。

(2) 算效率:  $P=W/t$ 。

(3) 根据工作过程列式求解。

【例 1】(2021 广东公务员) 为支持 “一带一路” 建设, 某公司派出甲、乙两队工程人员出国参与一个高铁建设项目。如果由甲队单独施工, 200 天可完成该项目; 如果由乙队单独施工, 则需要 300 天。甲、乙两队共同施工 60 天后, 甲队被临时调离, 由乙队单独完成剩余任务, 则完成该项目共需 ( ) 天。

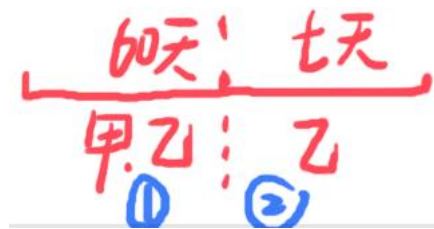
A. 120

B. 150

C. 180

D. 210

【解析】1. 工程问题，出现两个完工时间（200 天、300 天），则为给完工时间型工程问题。（1）赋总量：赋值工作总量（ $W$ ）为完工时间 200 和 300 的公倍数 600。（2）算效率：甲的效率= $600/200=3$ ，乙的效率= $600/300=2$ 。（3）根据工作过程列式求解：画图分析，甲、乙两队合作施工 60 天后，甲队离开，留下乙队单独干（设为  $t$  天）；分为前后两个阶段， $W=W_1+W_2=600 \rightarrow 60 \times (3+2) + 2t = 600$ ，解得  $t=150$  天。注意不要错选 B 项，问“完成该项目共需（ ）天”，所求= $60+150=210$  天，对应 D 项。【选 D】



【例 2】（2021 重庆选调）一项工程，甲单独完成需要 15 天，乙单独完成需要 30 天，丙单独完成需要 60 天，如果按照甲、乙、丙的顺序交替进行每人做一天，那么需要（ ）天能完成。

A. 25

B. 26

C. 27

D. 28

【解析】2. 给出三个完工时间（15 天、30 天、60 天），则为给完工时间型工程问题。（1）赋总量：赋总量为完工时间 15、30 和 60 的公倍数 60。（2）算效率：甲的效率= $60/15=4$ ，乙的效率= $60/30=2$ ，丙的效率= $60/60=1$ 。（3）根据工作过程列式求解：“如果按照甲、乙、丙的顺序交替进行每人做一天”→按照“甲、乙、丙、甲、乙、丙、……”的顺序交替/周期工作，1 个周期为 3 天→1 个周期的工作量（甲、乙、丙各自工作 1 天）= $4 \times 1 + 2 \times 1 + 1 \times 1 = 7$ ，周期数= $60/7=8$  个周期……剩余 4 份工作（由甲  $4/4=1$  天完成）。综上， $t_{\text{总}} = \text{周期数} \times 3 + \text{剩余的时间} = 8 \times 3 + 1 = 25$  天，对应 A 项。【选 A】



交替/周期合作：

- ①分析工作周期并确定一个周期内的工作量
- ②计算周期数：周期数=工作总量/一个周期的工作量……剩余工作量
- ③分析剩余工作量的完成时间
- ④总时间=周期内时间+剩余工作量的完成时间

**【注意】**交替/周期合作：

1. 分析工作周期并确定一个周期内的工作量。
2. 计算周期数：周期数=工作总量/一个周期的工作量……剩余工作量(余数)。
3. 分析剩余工作量的完成时间。
4. 总时间=周期内时间+剩余工作量的完成时间。

给效率比例型：

题目特征：题目中给出效率比例

解题步骤：

- ①赋效率：满足比例即可
- ②算总量： $W=P*t$
- ③根据工作过程列式计算

**【例】** 甲乙两人工作效率之比为 5：2，一项工作两人合作 6 天可以完成，问乙单独工作需多少天完工？

- ①设甲效率=5x、乙效率=2x
- ②工作总量=6\*（5x+2x）=42x
- ③乙单独完成需要  $42x/2x=21$  天

**【注意】**给效率比例型：

1. 题目特征：题目中给出效率比例关系。
2. 例：甲乙两人工作效率之比为 5：2，一项工作两人合作 6 天可以完成，问乙单独工作需多少天完工？

答：已知“甲乙两人工作效率之比为 5：2”，如果利用方程法，则按照效率比例设未知数→设甲的效率=5x、乙的效率=2x；已知“一项工作两人合作 6 天可

以完成”，工作总量= $6 \times (5x+2x) = 42x$ ；问“乙单独工作需多少天完工”，所求= $42x/2x=21$  天。观察发现， $x$  可以被约掉，说明  $x$  对结果没有影响→ $x$  可以是任意值，为了方便计算，令  $x=1$ 。(1) 赋效率：赋值甲的效率=5、乙的效率=2；(2) 算总量： $W=6 \times (5+2) = 42$ ；(3) 根据工作过程列式计算：所求= $42/2=21$  天。

3. 解题步骤：

(1) 赋效率：满足比例即可。

(2) 算总量： $W=P \times t$ 。

(3) 根据工作过程列式计算。

【例 3】(2019 安徽) A 工程队的效率是 B 工程队的 2 倍，某工程交给两队共同完成需要 6 天。如果两队的工作效率均提高一倍，且 B 队中途休息了一天，问要保证工程按原来的时间完成，A 队中途最多可以休息几天？( )

A. 4

B. 3

C. 2

D. 1

【解析】3. 工程问题，已知“A 工程队的效率是 B 工程队的 2 倍”，A 的效率/B 的效率=2/1，则为给效率比例型工程问题。(1) 赋效率：赋值 A 的效率=2、B 的效率=1。(2) 算总量：已知“两队共同完成需要 6 天”， $W=6 \times (2+1) = 18$ 。(3) 根据工作过程列式计算：已知“如果两队的工作效率均提高一倍”，提高 1 倍→多 1 倍→是 2 倍，A' 的效率=2\*2=4、B' 的效率=1\*2=2；已知“B 队中途休息了一天”，则 B 工作 6-1=5 天；设 A 休息  $t$  天，则 A 工作 6- $t$  天； $W=W_A+W_B \rightarrow 4 \times (6-t) + 2 \times 5 = 18 \rightarrow 4 \times (6-t) = 8$ ，解得  $t=4$  天，对应 A 项。【选 A】

“效率比例”出题形式：

直接给：甲乙效率比是 3:2

甲的效率是乙的 1.5 倍 ( $3/2$ )，甲的效率比乙多 50%

间接给：给等量关系，可整合出效率比例

①工作总量相等/不变——列方程

【例】：甲干 2 天的工作相当于乙干 3 天的一半

②时间相等，工作总量与效率成正比；工作总量相等，时间与效率成反比

【例】：同样一项工程，甲完成所需时间是乙的 2 倍

【注意】“效率比例”出题形式：

1. 直接给：

(1) 甲乙效率比是 3: 2。

(2) 甲的效率是乙的 1.5 倍 ( $3/2$ )，甲的效率比乙多 50%。

2. 间接给（考查最多）：给等量关系，可整合出效率比例。

(1) 工作总量相等/不变/给出多个不同的完成方式——列方程。例：甲干 2 天的工作相当于乙干 3 天的一半， $2\text{甲}=1/2*3\text{乙}\rightarrow 4\text{甲}=3\text{乙}$ ，假设赋值  $4\text{甲}=3\text{乙}=12\rightarrow \text{甲}=3、\text{乙}=4$ ；或者整理原式，则  $\text{甲}/\text{乙}=3/4$ ，但是这一步没必要。

(2) 时间相等，工作总量与效率成正比；工作总量相等，时间与效率成反比。例：同样一项工程，甲完成所需时间是乙的 2 倍，工作总量相等，时间与效率成反比， $t_{\text{甲}}/t_{\text{乙}}=2/1\rightarrow P_{\text{甲}}/P_{\text{乙}}=1/2$ ，则赋值  $P_{\text{甲}}=1、P_{\text{乙}}=2$ 。

【例 4】（2023 四川）某市需要修一座桥梁，现有甲、乙两个施工单位，已知甲、乙合作 12 天可完成桥梁的  $7/8$ ；如果甲、乙单独做，那么甲完成  $1/2$  与乙完成  $2/3$  所需要的时间相等。则甲单独做比乙单独做需要多用（ ）天。

A. 6

B. 7

C. 8

D. 9

【解析】4. 工程问题，已知“甲完成  $1/2$  与乙完成  $2/3$  所需要的时间相等”，时间相等，工作总量与效率成正比； $t_{\text{甲}}=t_{\text{乙}}$ ， $P_{\text{甲}}/P_{\text{乙}}=W_{\text{甲}}/W_{\text{乙}}=1/2\div(2/3)=1/2*(3/2)=3/4$ ，则为间接给效率比例型工程问题。（1）赋效率：赋值甲的效率=3、乙的效率=4；（2）算总量：“甲、乙合作 12 天可完成桥梁的  $7/8$ ” $\rightarrow 7/8*W=12*(3+4)=12*7\rightarrow W=12*7*(8/7)\rightarrow W=12*8$ 。（3）根据工作过程列式计算： $t_{\text{甲}}=12*8/3=32$  天、 $t_{\text{乙}}=12*8/4=24$  天，问“甲单独做比乙单独做需要多用（ ）天”，所求=32-24=8 天，对应 C 项。【选 C】

“效率比例”出题形式：

直接给：甲乙效率比是 3: 2

间接给：给等量关系，可整合出效率比例

特殊型：给人数或机器数（默认每人/每台机器效率相同）

【例】31 名工人、52 台挖掘机……→赋值每名工人、每台机器效率为 1

**【注意】“效率比例”出题形式——特殊型：**

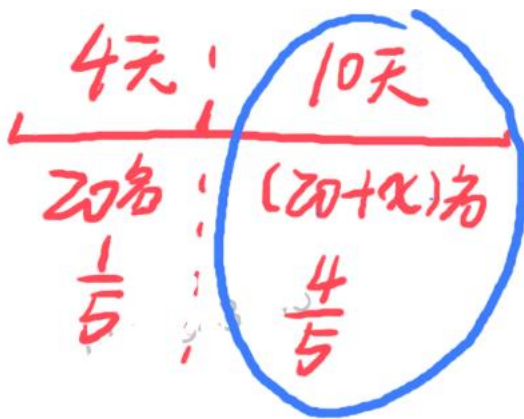
1. 给出人数或机器数，如果没有特殊说明，则默认每人/每台机器效率相同  
→效率之比为 1: 1: 1: ……，则可以赋值每人/每台机器的效率为 1。

2. 例：31 名工人、52 台挖掘机……，赋值每名工人、每台机器效率为 1，则 31 名工人的效率之和为 31，52 台挖掘机的效率之和为 52。

【例 5】(2021 广东公务员) 某茶园需要在一定时间内完成采摘。前 4 天安排了 20 名采茶工，完成了五分之一的工作量。如果再用 10 天完成全部采摘，至少还需要增加 ( ) 名采茶工。

- A. 12  
B. 11  
C. 10  
D. 9

【解析】5. 出现“20 名采茶工”→出现多个人。(1) 赋效率：赋每名采茶工每天的效率为 1。(2) 算总量：已知“前 4 天安排了 20 名采茶工，完成了五分之一的工作量”， $1/5 * W = 1 * 20 * 4 \rightarrow W = 400$ 。(3) 根据工作过程列式计算：“完成了五分之一的工作量”→剩余  $4/5$  的工作量，假设至少还需要增加  $x$  名采茶工，已知“再用 10 天完成全部采摘”，则  $4/5 * 400 = (20 + x) * 1 * 10 \rightarrow 32 = 20 + x$ ，解得  $x = 12$ ，对应 A 项。【选 A】



给具体单位型:

**题目特征：**题目中给出具体工作效率或具体工作总量

**【例】：**甲比乙每小时多做 60 个零件；甲乙总共做了 3600 个零件

解题步骤：

①设未知数

②找等量关系列方程

【注意】给具体单位型：

1. 题目特征：给完工时间型→赋工作总量、给效率比例型→赋工作效率，均利用赋值法，因为这两种题型要么没有给出工作总量、要么没有给出工作效率，且计算的过程中可以被约掉，故可以赋值。如果题目中给出具体工作效率或具体工作总量，则不能赋值，一般利用方程法。例：甲比乙每小时多做 60 个零件，甲乙总共做了 3600 个零件，给出具体量，不能利用赋值法，要么利用方程法、要么利用基本公式进行计算。

2. 解题步骤：

（1）设未知数。

（2）找等量关系列方程：等量关系→工作总量，要么是工作量有不同的构成（比如甲、乙先做 2 天，丙再做 3 天，即可完成）、要么是利用不同的方案完成工作量。

【例 6】（2022 四川）甲、乙两人加工一批配件，已知甲单独加工需要 15 小时才能完成，甲和乙的工作效率之比为 4：3。现在甲、乙两人一起加工了 5 小时，还剩下 200 个配件未加工，则这批配件的总数是（ ）个。

A. 480

B. 450

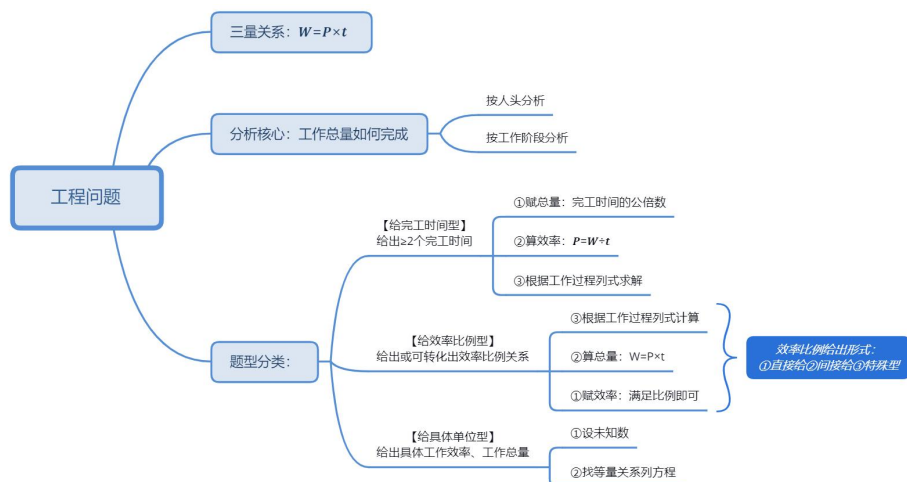
C. 420

D. 390

【解析】6. 题干中同时出现比例（4：3）、具体量，则方程法优先于赋值法。问“这批配件的总数是（ ）个”，求工作总量；结合“4：3”这一比例关系，设甲的效率为  $4x$ 、乙的效率为  $3x$ ；已知“甲单独加工需要 15 小时才能完成”、“甲、乙两人一起加工了 5 小时，还剩下 200 个配件未加工”，则工作总量  $=15 \times 4x = 5 \times (4x + 3x) + 200 \rightarrow 12x = 7x + 40 \rightarrow 5x = 40$ ，解析  $x=8$ 。所求  $=60x=480$ ，对应 A 项。【选 A】

【注意】猜题：工作总量  $=15 \times 4x = 60x$ ，选项均为整数，则工作总量为 60 的

倍数，排除 B、D 项，没时间的情况下在 A、C 项中蒙一个。



**【注意】**工程问题（得分率非常高的一类题型）：判断题型、按照步骤解题即可，重点是分析工作过程。

## 第五节 行程问题

普通行程

相对行程

**【注意】**行程问题：稍复杂一点，公式比较多。

1. 普通行程。

2. 相对行程。

一、普通行程

①基本公式：路程=速度\*时间（ $S=V*t$ ）

**【注意】**普通行程——基本公式：路程=速度\*时间（ $S=V*t$ ）。

②火车过桥

题型特征：火车/列车/车队过桥/隧道/电线杆/路灯

考查形式：

火车过桥： $S_{总}=S_{桥}+S_{火车}=V*t$





火车完全在桥上:  $S_{\text{总}} = S_{\text{桥}} - S_{\text{火车}} = V \cdot t$

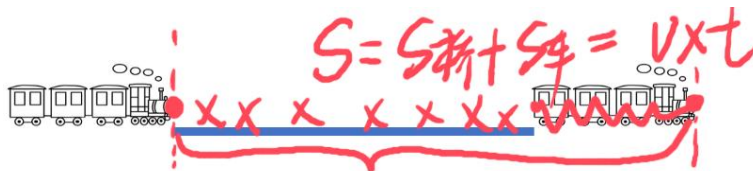


【注意】火车过桥:

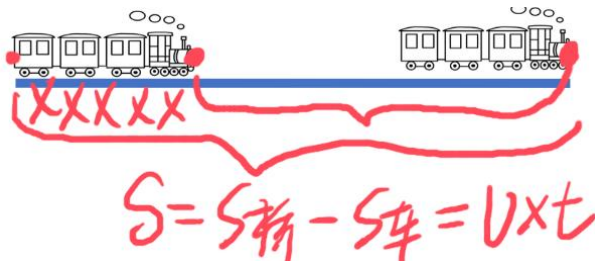
1. 题型特征: 火车/列车/车队过桥/隧道/电线杆/路灯, 火车/列车/车队本身有长度→该长度不能被忽略。

2. 考查形式: 找一个定点进行分析, 一般找“车头”。

(1) 火车过桥: 从车头上桥开始、到车尾完全下桥结束。找一个定点进行分析, “车头→车头”的距离为总路程, 对应桥长+车长, 故  $S = S_{\text{桥}} + S_{\text{车}} = V \cdot t$ 。



(2) 火车完全在桥上: 整个火车车身都要在桥上, 从车尾上桥开始、到车头刚刚要下桥结束; 找一个定点进行分析, “车头→车头”的距离为总路程, 对应桥长-车长, 故  $S = S_{\text{桥}} - S_{\text{车}} = V \cdot t$ 。



【例 1】(2019 广东) 一辆火车穿过一条隧道, 已知火车长 220 米, 隧道长 680 米, 火车行驶的平均速度为 20 米/秒, 则火车通过隧道需要 ( ) 秒。

A. 34

B. 11

C. 52

D. 45

【解析】1. 出现火车、隧道, 火车过桥问题。“通过隧道”→火车完全过桥:

$S_{\text{总}} = S_{\text{桥}} + S_{\text{车}} = V \cdot t$ ; 代入数据,  $680 + 220 = 20 \cdot t$ , 解得  $t = 45$  秒, 对应 D 项。【选 D】



3. 公式:  $\bar{V} = 2V_1V_2 / (V_1 + V_2)$ 。

4. 练一练: 某人以 4m/s 的速度从 A 地走到中点, 再以 6m/s 的速度从中点走到 B 地, 其从 A 到 B 的平均速度为 ( ) ?

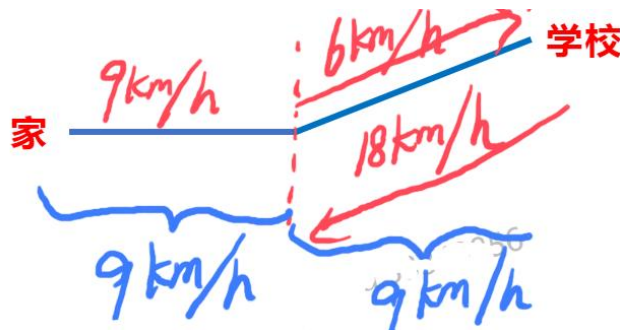
答: “中点” → 前后两段距离相等, 利用等距离平均速度公式求解,  $\bar{V} = 2V_1V_2 / (V_1 + V_2)$  → 所求 =  $2 \times 4 \times 6 / (4 + 6) = 48 / 10 = 4.8 \text{ m/s}$ 。



【例 2】(2020 云南公务员) 小明每天从家中出发骑自行车经过一段平路, 再经过一道斜坡后到达学校上课。某天早上, 小明从家中骑车出发, 一到校门口就发现忘带课本, 马上返回, 从离家到赶回家中共用了 1 个小时, 假设小明当天平路骑行速度为 9 千米/小时, 上坡速度为 6 千米/小时, 下坡速度为 18 千米/小时, 那么小明的家距离学校多远? ( )

- A. 3.5 千米
- B. 4.5 千米
- C. 5.5 千米
- D. 6.5 千米

【解析】2. 已知“从离家到赶回家中共用了 1 个小时”, 问“小明的家距离学校多远”, 所求 (S) =  $\bar{V} \times t$ 。上下坡的过程中可以利用等距离平均速度公式, 则  $\bar{V}_{\text{坡}} = 2V_1V_2 / (V_1 + V_2) = 2 \times 6 \times 18 / (6 + 18) = 12 \times 18 / 24 = 9 \text{ km/h}$ ; 已知“平路骑行速度为 9 千米/小时”,  $\bar{V}_{\text{坡}} = V_{\text{平路}} = 9 \text{ km/h} \rightarrow \bar{V} = 9 \text{ km/h}$ , 则  $S_{\text{往返}} = 9 \times 1 = 9 \text{ km}$ ; 求单程, 所求 =  $9 / 2 = 4.5 \text{ km}$ , 对应 B 项。【选 B】



【注意】一般不会出现“ $\bar{V}_{\text{坡}} \neq V_{\text{平路}}$ ”, 因为只有二者相等才能计算总路程,

或者题干中给出其他条件；如果二者不相等，则无法求解。

【拓展】（2018 河北）从甲地到乙地 111 千米，其中有  $\frac{1}{4}$  是平路， $\frac{1}{2}$  是上坡路， $\frac{1}{4}$  是下坡路。假定一辆车在平路的速度是 20 千米/小时，上坡的速度是 15 千米/小时，下坡的速度是 30 千米/小时。则该车由甲地到乙地往返一趟的平均速度是多少？（ ）

- A. 19 千米/小时                      B. 20 千米/小时  
C. 21 千米/小时                      D. 22 千米/小时

【解析】拓展. 涉及平路、上坡、下坡，问“该车由甲地到乙地往返一趟的平均速度是多少”；一般而言， $\bar{V}_{\text{坡}} = V_{\text{平路}}$ ， $\bar{V}_{\text{坡}} = \frac{2 \times 15 \times 30}{(15+30)} = 900/45 = 20 \text{ km/h}$ ； $\bar{V}_{\text{坡}} = V_{\text{平路}} = 20 \text{ km/h} \rightarrow \bar{V} = 20 \text{ km/h}$ ，对应 B 项。【选 B】

## 二、相对行程

相遇追及：直线相遇追及、环形相遇追及

直线多次相遇

流水行船

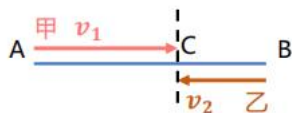
【注意】相对行程：相对复杂，涉及复杂的运动轨迹，不仅要会利用公式，还要利用行程图（边画图、边分析）。

1. 相遇追及：直线相遇追及、环形相遇追及。
2. 直线多次相遇。
3. 流水行船。

直线相遇（同时出发）：

特征：面对面、相对、相向而行

公式： $S_{\text{和}} = V_{\text{和}} \times t$ ，路程和=速度和\*相遇时间



【练一练】A、B 两地相距 900m，上午 9：00 甲乙分别从 A、B 两地以 5 米/分钟、7 米/分钟的速度同时出发，求两人相遇的时间（ ）。

A. 9: 55

B. 10: 05

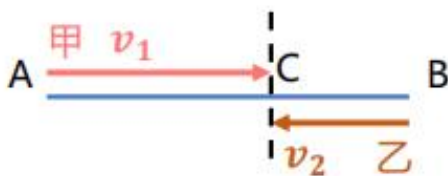
C. 10: 15

D. 10: 30

【注意】直线相遇（同时出发）：

1. 特征：面对面、相对、相向而行。

2. 公式： $S_{\text{和}}=V_{\text{和}}*t$ ，路程和=速度和\*相遇时间。推导：如图所示，甲、乙同时从 A、B 两点出发、相向而行，假设在 C 点相遇；甲的速度为  $V_1$ 、乙的速度为  $V_2$ ，两人同时出发→ $t$  相等，则  $S_{\text{和}}=V_1*t+V_2*t=(V_1+V_2)*t=V_{\text{和}}*t$ 。 $S_{\text{和}}$ ：可以理解为两人的路程加和，也可以理解为刚出发时两人之间的距离，即 AB。



3. 练一练：A、B 两地相距 900m，上午 9: 00 甲乙分别从 A、B 两地以 5 米/分钟、7 米/分钟的速度同时出发，求两人相遇的时间（ ）。

A. 9: 55

B. 10: 05

C. 10: 15

D. 10: 30

答： $S_{\text{和}}=V_{\text{和}}*t \rightarrow 900=(5+7)*t \rightarrow t=900/12=75$  分钟=1 小时 15 分钟，所求=9: 00+1 小时 15 分钟=10: 15，对应 C 项。

【例 3】（2023 广东）甲、乙、丙三人同时从东村出发，沿同一条路线匀速骑行前往西村，甲的速度为 60 千米/小时，乙的速度为 40 千米/小时，同时，丁从西村出发匀速相向而行，并在出发后的第 3、4、5 小时分别与甲、乙、丙相遇，则丙的速度为（ ）千米/小时。

A. 26

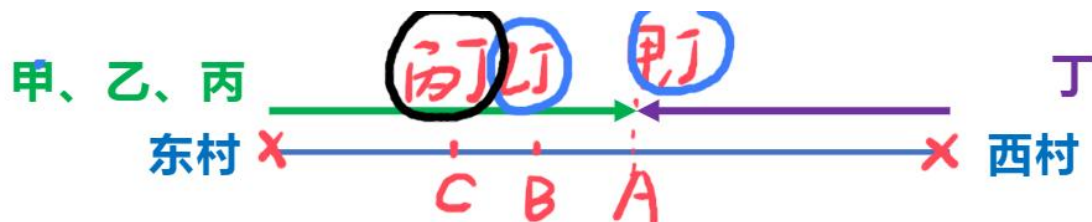
B. 28

C. 30

D. 32

【解析】3. “相向而行”→最终会相遇，属于直线相遇问题。画图分析，“并在出发后的第 3、4、5 小时分别与甲、乙、丙相遇”→形成 3 次相遇，需要考虑  $S_{\text{和}}$ （两个人的路程加和，或刚开始出发时两人之间的间距、距离）→ $S_{\text{和}}=\text{东村与西村的距离} \rightarrow S_{\text{和}}=V_{\text{和}}*t$ 。甲丁、乙丁： $S_{\text{和}}=(60+V_{\text{丁}})*3=(40+V_{\text{丁}})*4$

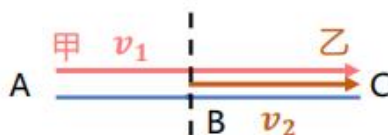
→ $S_{和}=180+3*V_{丁}=160+4*V_{丁}$ ，解得  $V_{丁}=20\text{km/h}$ 、 $S_{和}=240\text{km}$ ，即东村与西村的距离为 240km。问“丙的速度”，丙丁： $240=(V_{丙}+20)*5 \rightarrow V_{丙}=48-20=28\text{km/h}$ ，对应 B 项。【选 B】



直线追及（同时出发）：

特征：同向行驶，从背后追上

公式： $S_{差}=(V_1-V_2)*t$ ，路程差=速度差\*追及时间



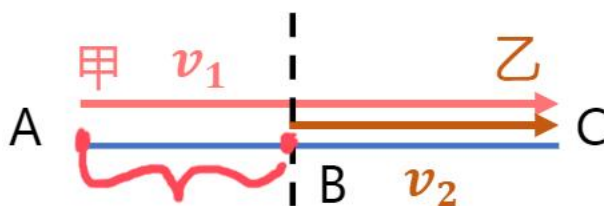
【练一练】甲乙相距 90m，上午 9：00 甲乙分别以 16 米/分钟、7 米/分钟的速度同时出发，求甲追上乙的时间（ ）。

- A. 9：05
- B. 9：10
- C. 9：15
- D. 9：20

【注意】直线相遇（同时出发）：

1. 特征：同向行驶，从背后追上。

2. 公式： $S_{差}=V_{差}*t$ ，路程差=速度差\*追及时间。推导：如图所示，甲在 A 点、乙在 B 点，两人同向而行，假设在 C 点甲追上乙；甲的速度为  $V_1$ 、乙的速度为  $V_2$ ，同时出发→ $t$  相等， $S_{差}=V_1*t-V_2*t=(V_1-V_2)*t=V_{差}*t$ 。 $S_{差}$ ：可以理解为两人路程的差值，也可以理解为刚开始追时两人之间的间距，即 AB。



3. 练一练：甲乙相距 90m，上午 9：00 甲乙分别以 16 米/分钟、7 米/分钟

速度同时出发，求甲追上乙的时间（ ）。

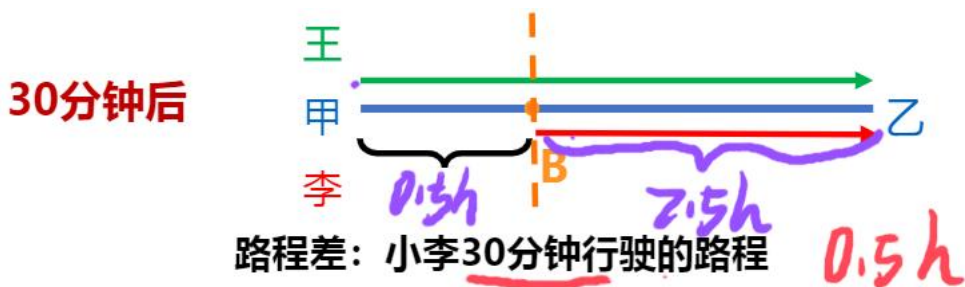
- A. 9: 05                      B. 9: 10  
C. 9: 15                      D. 9: 20

答：追及模型， $S_{\text{差}} = V_{\text{差}} * t \rightarrow 90 = (16-7) * t \rightarrow t = 90/9 = 10$  分钟，所求 = 9:00 + 10 分钟 = 9:10，对应 B 项。

【例 4】(2020 深圳公务员) 小王和小李从甲地去往相距 15km 的乙地调研。两人同时出发且速度相同。15 分钟后, 小王发现遗漏了重要文件遂立即原路原速返回, 小李则继续前行; 小王取到文件后提速 20% 追赶小李, 在小李到达乙地时刚好追上, 假设小王取文件的时间忽略不计, 则小李的速度为 ( ) km/h。

- A. 4  
B. 4.5  
C. 5  
D. 6

【解析】4. “两人同时出发且速度相同”→设为  $V\text{km/h}$ ，假设小王和小李两人 15 分钟都从甲地走到 A 点，“小王发现遗漏了重要文件遂立即原路原速返回”→小王返回甲地的时间为 15min，这 15min 小李继续前行→假设走到 B 点，即小王回到甲地时小李已经走到了 B 点，则小王与小李之间产生了  $S_{\text{差}}$ 。“小王取到文件后提速 20%追赶小李”→速度变为  $V \times (1+20\%) = 1.2V\text{km/h}$ ，即小王以  $1.2V\text{km/h}$  的速度追小李， $S_{\text{差}}$  为小李这 30min 走的路程（甲地到 B 点的路程）。追及问题， $S_{\text{差}} = V_{\text{差}} \times t$ ；30 分钟 = 0.5h，列式： $0.5V = (1.2V - V) \times t \rightarrow t = 0.5 / 0.2 = 2.5\text{h}$ ，则小李从 B 点到乙地走了 2.5h。问“小李的速度”，小李从头到尾的时间为  $0.5 + 2.5 = 3\text{h}$ 、总路程为 15km，所求 =  $15 / 3 = 5\text{km/h}$ ，对应 C 项。【选 C】

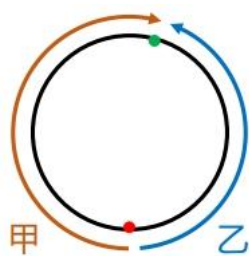


### 环形相遇与追及（同时出发）

### 环形相遇：同时同点反向出发

相遇  $n$  次，路程和为  $n$  圈

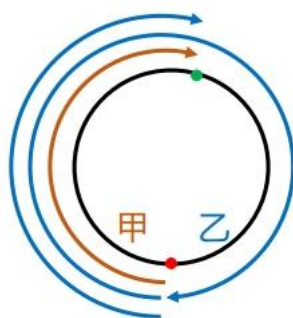
$$S_{\text{和}} = n \text{ 圈} = V_{\text{和}} * t$$



环形追及：同时同点同向出发

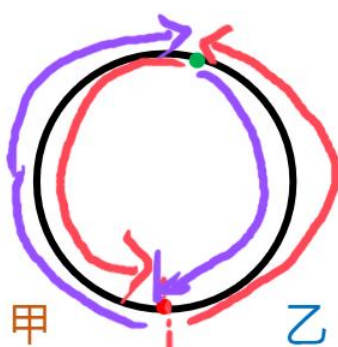
追上  $n$  次，路程差为  $n$  圈

$$S_{\text{差}} = n \text{ 圈} = V_{\text{差}} * t$$



【注意】环形相遇与追及（同时出发）：

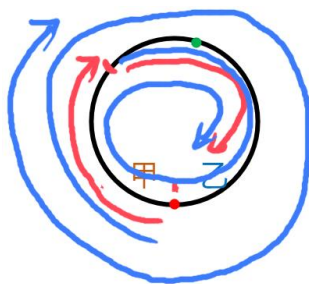
1. 环形相遇：同时同点反向出发。如图所示，甲、乙两人同时同点反向出发，最终两人在某点相遇；相遇 1 次，甲走了左半圈、乙走了右半圈， $S_{\text{和}} = 1$  圈；两人相遇后继续前进，在某点第二次相遇， $S_{\text{和}} = 2$  圈；以此类推，相遇  $n$  次， $S_{\text{和}} = n$  圈。总结： $S_{\text{和}} = V_{\text{和}} * t = n \text{ 圈}$ 。



2. 环形追及：同时同点同向出发。如图所示，甲、乙两人同时同点同向出发；发令枪一响，速度快的人跑在前面，这一次不算追及，追及→从后面追上；假设  $V_{\text{乙}} > V_{\text{甲}}$ ，乙多跑一圈之后，在这一点追上甲，追上 1 次， $S_{\text{差}} = 1$  圈；追上之后继续前进，追上 2 次， $S_{\text{差}} = 2$  圈；以此类推，追上  $n$  次， $S_{\text{差}} = n$  圈。总结： $S_{\text{差}} = V_{\text{差}} * t = n \text{ 圈}$ 。



圈。



【例 5】（2019 青海法检）某环形跑道，两人由同一起点同时出发，异向而行，每隔 10 分钟相遇一次；如果两人由同一起点同时出发，同向而行，每隔 25 分钟相遇一次。已知环形跑道的长度是 1800 米，那么两人的速度分别是多少？

（ ）

- A. 126 米/分，54 米/分                      B. 138 米/分，42 米/分  
C. 110 米/分，70 米/分                      D. 100 米/分，80 米/分

【解析】5. 环形跑道、“异向而行”→环形相遇、“同向而行”→环形追及。  
相遇过程：相遇 1 次， $S_{和}=1$  圈；列式： $1800=(V_1+V_2)*10 \rightarrow V_1+V_2=180\text{m/min} \textcircled{1}$ 。  
追及过程：追上 1 次， $S_{差}=1$  圈；列式： $1800=(V_1-V_2)*25 \rightarrow V_1-V_2=72\text{m/min} \textcircled{2}$ 。

方法一：选项为一组数，考虑代入排除。四个选项均符合“ $V_1+V_2=180$ ”，只有 A 项符合“ $V_1-V_2=72$ ”，对应 A 项。

方法二：正常计算。 $\textcircled{1} + \textcircled{2} \rightarrow 2*V_1=252\text{m/min}$ ，解得  $V_1=126\text{m/min}$ 、 $V_2=180-126=54\text{m/min}$ ，对应 A 项。【选 A】

直线多次相遇

直线两端同时出发，相向而行，多次相遇

关键词：立即折返、往返于

相遇  $n$  次，路程和为  $(2n-1)S$

$$S_{和} = (2n-1)S = V_{和} * t$$



迎面相遇 1 次，路程和为  $1S$

迎面相遇 2 次，路程和为  $3S$

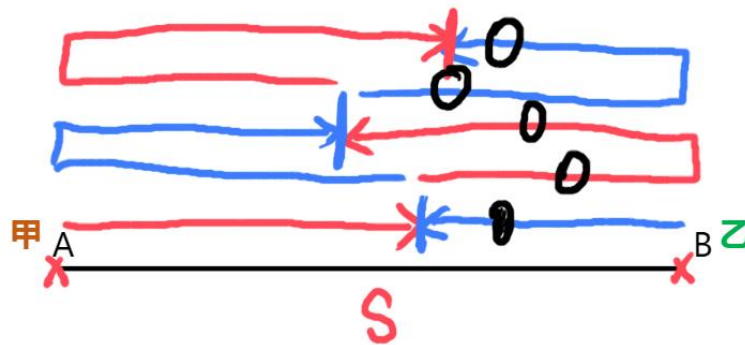
迎面相遇 3 次，路程和为  $5S$

.....

迎面相遇  $n$  次，路程和为  $(2n-1)S$

**【注意】直线多次相遇：**直线两端同时出发，相向而行，多次相遇。

1. 推导：如图所示，甲、乙分别从 A、B 两地同时出发、相向而行，则一定会出现多次相遇。假设 AB 之间的间距为  $S$ ，相遇 1 次， $S_{\text{和}}=1S$ ；继续前进，甲走到 B 点立即掉头、乙走到 A 点立即掉头，相遇 2 次， $S_{\text{和}}=3S$ ；同理，相遇 3 次， $S_{\text{和}}=5S$ 。每相遇 1 次  $\rightarrow S_{\text{和}}$  多  $2S$ ， $S_{\text{和}}$  对应奇数个  $S$ ；相遇  $n$  次， $S_{\text{和}}=(2n-1)*S$ 。



2. 关键词：立即折返、往返于。

3. 结论：相遇  $n$  次，路程和为  $(2n-1)*S$ ， $S_{\text{和}}=(2n-1)*S=V_{\text{和}}*t$ 。

**【例 6】**（2020 天津选调）小王在甲医院，小赵在乙医院。两人从所在医院同时骑车出发，来回往返于两个医院之间。已知小王骑车速度为 205 米/分钟，小赵骑车速度为 225 米/分钟，且经过 12 分钟后两人第二次相遇。问两家医院相距多少米？（ ）

A. 1290

B. 1720

C. 2150

D. 2580

**【解析】**6. “往返于”  $\rightarrow$  直线多次相遇，公式： $S_{\text{和}}=(2n-1)*S=(V_1+V_2)*t$ ；将数据代入公式： $S_{\text{和}}=(2*2-1)*S=(205+225)*12 \rightarrow 3S=430*12$ ；选项的末两位互不相同，计算末两位  $\rightarrow$  原式=XX20，对应 B 项。**【选 B】**

【注意】拓展：在游泳池中来回往返，可能求相遇次数、路程、时间，套公式即可，相当于解一个简单的方程。

### 流水行船

顺流而下或逆流而上，有水速影响



一艘船在河流 AB 之间航行，船速为  $V_{\text{船}}$

$$A \rightarrow B: V_{\text{顺}} = V_{\text{船}} + V_{\text{水}}$$

$$B \rightarrow A: V_{\text{逆}} = V_{\text{船}} - V_{\text{水}}$$

船在静水中行驶：  $V_{\text{水}} = 0$

一片树叶顺水漂流：  $V_{\text{树}} = V_{\text{水}}$

【注意】流水行船：船在水中顺流而上或逆流而下，水本身有速度，则船速会受到水速的影响。

#### 1. 假设水速是从 $A \rightarrow B$ ：

(1) 船从  $A \rightarrow B$ （船顺流而下，水速和船速方向一致，则水会将船往前推）：

$$V_{\text{顺}} = V_{\text{船}} + V_{\text{水}}$$

(2) 船从  $B \rightarrow A$ （船速和水速方向相反，则水会将船往后推）：  $V_{\text{逆}} = V_{\text{船}} - V_{\text{水}}$ 。



2. 假设船在静水中行驶，则  $V_{\text{水}} = 0$ ，船速还是其本身的速度；一片树叶（救生圈、塑料瓶）顺水漂流，树叶（救生圈、塑料瓶）本身没有速度，则  $V_{\text{树}} = V_{\text{水}}$ 。

【例 7】（2023 四川）甲驾驶一艘小船在河中匀速行驶，已知顺水行驶 120 千米，用时 6 小时；在同样的水流速度下，逆水行驶 80 千米用时 8 小时。则甲驾驶这艘小船在静止水面上行驶 150 千米需要（ ）小时。

A. 10

B. 9

C. 8

D. 12

【解析】7. 流水行船问题，问“甲驾驶这艘小船在静止水面上行驶 150 千米需要（ ）小时”，所求  $(t) = 150/V_{\text{船}}$ 。 $V_{\text{顺}} = 120/6 = 20\text{km/h}$ 、 $V_{\text{逆}} = 80/8 = 10\text{km/h}$ ，求  $V_{\text{船}}$ ； $V_{\text{船}} = (V_{\text{顺}} + V_{\text{逆}}) / 2 = (20 + 10) / 2 = 15\text{km/h}$ ，所求  $= 150/15 = 10\text{h}$ ，对应 A 项。

【选 A】

【注意】公式推导： $V_{\text{顺}} = V_{\text{船}} + V_{\text{水}}$  ①、 $V_{\text{逆}} = V_{\text{船}} - V_{\text{水}}$  ②，①+②  $\rightarrow 2*V_{\text{船}} = V_{\text{顺}} + V_{\text{逆}} \rightarrow V_{\text{船}} = (V_{\text{顺}} + V_{\text{逆}}) / 2$ ，①-②  $\rightarrow 2*V_{\text{水}} = V_{\text{顺}} - V_{\text{逆}} \rightarrow V_{\text{水}} = (V_{\text{顺}} - V_{\text{逆}}) / 2$ 。

### ◆普通行程

截图提醒

①基本公式： $S = v \times t$

②火车过桥：火车完全过桥： $S_{\text{总}} = S_{\text{桥}} + S_{\text{火车}} = v \times t$

火车完全在桥上： $S_{\text{总}} = S_{\text{桥}} - S_{\text{火车}} = v \times t$

火车过电线杆/路灯： $S_{\text{总}} = S_{\text{火车}} = v \times t$

③等距离平均速度： $\bar{v} = \frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$ （等距离、直线往返、上下坡问题）

### ◆相对行程

①相遇追及：直线相遇/追及： $S_{\text{和}} = (v_1 + v_2) \times t$   $S_{\text{差}} = (v_1 - v_2) \times t$

环形相遇/追及： $S_{\text{和}} = n_{\text{圈}} = (v_1 + v_2) \times t$   $S_{\text{差}} = n_{\text{圈}} = (v_1 - v_2) \times t$

②直线多次相遇： $S_{\text{和}} = (2n - 1)S = (v_1 + v_2)t$

③流水行船： $v_{\text{顺}} = v_{\text{船}} + v_{\text{水}}$   $v_{\text{逆}} = v_{\text{船}} - v_{\text{水}}$

【注意】行程问题：公式比较多，课后建议将涉及推导的公式整理一下（如火车过桥的公式、等距离平均速度公式、直线多次相遇公式）。

### 课堂回顾

【1】（判断）工程问题只要给出时间，都是给完工时间型（ ）

【2】（判断）给完工时间型的工程问题，工作总量只能赋成时间的最小公倍数（ ）

【3】（选择）应该用什么套路解题？

A. 赋 P、算 W、列式

B. 赋 W、算 P、列式

C. 方程法

①某医药公司每天生产 34000 盒布洛芬？（ ）

②甲 6 天完成的工作量和乙 4 天完成的相等？（ ）

【4】（判断）使用等距离平均速度公式，不一定要要求等距离（ ）

【5】（判断）不论是直线还是环形相遇问题，都满足路程和=速度和\*相遇时间（ ）

【6】（判断）直线两端同时出发，多次相遇 9 次，两人的路程和为 19S。（ ）

【7】（填空）环形反向而行是（ ）；环形同向而行是（ ）

【8】（判断）一个泡沫漂浮物顺流而下，其速度=船速+水速（ ）

【注意】课堂回顾：

1.（判断）工程问题只要给出时间，都是给完工时间型（ ）。

答：给完工时间型的题目特征是给出多个（两个及以上）完工时间（从头到尾以不变的效率干完的时间），故本题是错误的。

2.（判断）给完工时间型的工程问题，工作总量只能赋成时间的最小公倍数（ ）。

答：错误，只要赋值为完工时间的公倍数即可。

3.（选择）应该用什么套路解题？

A. 赋 P、算 W、列式

B. 赋 W、算 P、列式

C. 方程法

（1）某医药公司每天生产 34000 盒布洛芬……？（ ）

答：“34000 盒”→具体量，利用方程法，选择 C 项。

（2）甲 6 天完成的工作量和乙 4 天完成的相等……？（ ）

答：“工作量……相等”→出现等量关系，可以推出效率比例→6 甲=4 乙，则可以赋值 6 甲=4 乙=24→甲=4、乙=6，选择 A 项。

4.（判断）使用等距离平均速度公式，不一定要要求等距离（ ）。

答：错误，一定是等距离才可以利用等距离平均速度公式“ $2V_1V_2/(V_1+V_2)$ ”，如直线往返、上下坡、中点（等间距）。

5.（判断）不论是直线还是环形相遇问题，都满足路程和=速度和\*相遇时间（ ）。

答：正确。

6.（判断）直线两端同时出发，多次相遇 9 次，两人的路程和为 19S。（ ）

答：错误， $S_{\text{和}} = (2n-1) * S \rightarrow \text{所求} = (2*9-1) * S = 17S$ 。

7.（填空）环形反向而行是（ ）；环形同向而行是（ ）。

答：环形反向而行是相遇，环形同向而行是追及。

8.（判断）一个泡沫漂浮物顺流而下，其速度=船速+水速（ ）。

答：错误，“泡沫漂浮物”没有速度，其速度为  $V_{\text{水}}$ 。

课后及时复盘

下节课预习内容：对应讲义→第 130～134 页

第六节：排列组合与概率问题

第七节：植树问题

预习要求：

原则上要求做完每个章节至少 50%的题目；若不会做，熟悉题型和题目即可；

【答疑】课前 10 分钟+微博@粉笔-秦娜娜

### 【答案汇总】

工程问题 1-5：DAACA；6：A

行程问题 1-5：DBBCA；6-7：BA

遇见不一样的自己

Be your better self