Chapter 1 Introduction

Today is 20211204, and I deciede to note down all of my knowledge about the math in this notebook.

数学史不单独作为一章，分布在各个章节中。

1.1 Methodology

方法论，数学重要思想。

1.2 数学的思维方式与创新-84-北大 (丘维声)

6,1039.

1.2.1 数学史上的重大创新

分析：微积分的创立和完备化

观察现象主要特征，抽象出概念。探索。猜测。证明。
如求瞬时速度，$s = at^2$,$\frac{\Delta s}{\Delta t} = 2at + \Delta t$，牛顿忽略 Δt，叫做留数，留下来的数。
如何解决不等于零又等于零的矛盾？
delta t 趋近于 0，无限，柯西引入极限的概念：函数在 x0 附近有定义，在 x0 可以没有定义，如果存在 c 使得 x 趋近于 x0 但不等于 x0 时，$|f(x) - c|$ 可以无限小，称 c 是 x 趋近于 x0 时 f(x) 的极限。
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$, that when $0 < |x - x_0| < \delta$, we have $|f(x) - c| < \varepsilon$

几何：欧几里得几何到非欧几里得几何

从平直空间到弯曲空间。
从定义和公理，推导和推演。平行公设。高斯和波约，罗巴切夫斯基（1829 年）, 平行公设只是假设。现实世界如何实现非欧几何的用处。高斯想法把球面本身看做一个空间。后来黎曼发展了。

弯曲空间的几何是黎曼几何，如球面上的直线定义为大圆的一部分，这样发现过已知直线外一点不存在其平行线。在双曲几何模型下可以实现罗巴切夫斯基几何。

代数学中

伽瓦罗，代数学从研究方程的根，到研究代数系统的结构和保持运算的映射。

1.2.2 集合的划分

交空并全的划分方法：模 n 同余是 $\mathbb{Z}$ 的一个二元关系。两个集合的笛卡尔积
a 与 b 模 n 同余：$(a,b) \in \bigcup_{i=0}^{n-1} H_i \times H_i \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. 抽象：非空集合 s，$S \times S$ 的子集 W 是 S 是上的二元关系，有关系的记为 aWb

等价关系

反身性，对称性，传递性，$a \sim b$. $a \sim b \Leftrightarrow b \sim a$. $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$
$\bar{a}$ 是 a 确定的等价类，$\{x \in S | x \sim a\}$。易有 $\bar{x} = \bar{y} \Leftrightarrow x \sim y$ 。

定理 1：集合 S 上等价关系 $\sim$ 给出的等价类的集合是 S 的一个划分。
证明思路：需要证明并全，交空。交空比较难，需要研究等价类的性质。等价类的代表不唯一。
Step1) It is obvious that $\cup_{a \in S} \bar{a} \subseteq S$，and for any $b \in S$, we have $b \in \bar{b} \in \cup_{a \in S} \bar{a}$, this means $S \subseteq \cup_{a \in S} \bar{a}$, so $\cup_{a \in S} \bar{a} = S$.
Step2) To prove $\bar{x} \neq \bar{y} \Rightarrow \bar{x} \bigcap \bar{y} = \varnothing$, we prove the contrapositive $\bar{x} \bigcap \bar{y} \neq \varnothing \Rightarrow \bar{x} = \bar{y}$, and this is easy to prove.

1.3 Space

1.3.1 Operation Defination

Element

we define the basic element $\vec{x} = \boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \dots]^T = \Sigma x_i \boldsymbol{e_i}$, $\boldsymbol{e}_i$ means $x_i = 1, x_j = 0$ for all $j \neq i$. We define Kronecker sign to simply the description of $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j$.

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{1.1}$$

The set of bases $\{\boldsymbol{e}_i\} \stackrel{apply}{\longrightarrow} \boldsymbol{x} \longrightarrow \{x_i\}$.

Dot Product

We define in algebra, $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} := \sum x_i y_i \delta_{ij} = \boldsymbol{x}^T \cdot \boldsymbol{y}$.

Then the defination is restricted to the choose of the coordinate system. We take a look a the product with reflect $T : \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{x}$,

$$(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^T = (a_{ik} b_{kj})^T = c_{ij}^T = c_{ji} = b_{jk} a_{ki} = \boldsymbol{B}^T \cdot \boldsymbol{A}^T \tag{1.2}$$

we have

$$(\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{x})^T (\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T (\boldsymbol{T}^T \boldsymbol{T}) \boldsymbol{y} = [(\boldsymbol{T}^T \boldsymbol{T}) \boldsymbol{x}]^T \boldsymbol{y} \tag{1.3}$$

We name T a Contractive mapping when $\boldsymbol{T}^T \boldsymbol{T} \leqslant \theta, 0 \leqslant \theta \leqslant 1$.

geometry Properties

$$\begin{aligned} &\parallel \boldsymbol{x} \parallel := \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}} \\ &\cos \theta_{x,y} := \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}{\parallel \boldsymbol{x} \parallel \cdot \parallel \boldsymbol{y} \parallel} \end{aligned} \tag{1.4}$$

Add

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} := \sum (x_i + y_i) \boldsymbol{e}_i \\ &k \cdot \boldsymbol{x} := \sum k x_i \boldsymbol{e}_i \end{aligned} \tag{1.5}$$

Law $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$, law $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$ is not obvious in the view of Set Theory.

1.4 Euclid 空间

有序的 n 元组的全体称为 n 维 Euclid 空间，记为 $\mathbb{R}^n$，称 $\boldsymbol{p} = (p_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个点。为便于研究，本论文以 $\mathbb{R}^3$ 为背景空间，所涉及的函数默认为可微实值函数。如果实函数 f 的任

意阶偏导数存在且连续，则称函数是可微的（或无限可微的，或光滑的，或 C^∞ 的）。

由于微分运算是函数的局部运算，限制所讨论函数的定义域在 $\mathbb{R}^3$ 中的任意开集，所讨论的结论仍然成立。

自然坐标函数：定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的实值函数 $x_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，使得 $\boldsymbol{p}=(p_i)_{i=1}^n=(x_i(\boldsymbol{p}))_{i=1}^n$

切向量：由 $\mathbb{R}^n$ 中的二元组构成，$\boldsymbol{v_p}=(\boldsymbol{p},\boldsymbol{v})$，其中 $\boldsymbol{p}$ 是作用点，$\boldsymbol{v}$ 是向量部分

切空间 $T_p\mathbb{R}^n$: 作用点 $\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^n$ 的所有切向量的集合。利用向量加法与数量乘法使某点的切空间称为向量空间，与背景空间存在非平凡同构。

向量场 $\boldsymbol{V}$: 作用于空间点的向量函数，$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{p})\in T_p\mathbb{R}^n$

逐点化原理：$(\boldsymbol{V}+\boldsymbol{W})(\boldsymbol{p})=\boldsymbol{V}(\boldsymbol{p})+\boldsymbol{W}(\boldsymbol{p})$, $(f\boldsymbol{V})(\boldsymbol{p})=f(\boldsymbol{p})\boldsymbol{V}(\boldsymbol{p})$

自然标架场：定义 $\boldsymbol{U}_i=(\delta_j^i)_{j=1}^n$，按 Einstein 求和约定，有 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{p})=v^i(\boldsymbol{p})\boldsymbol{U}_i(\boldsymbol{p})$, 称 v^i 为场的 Euclid 坐标函数，其中 Kronecker δ 函数定义为：

$$\delta_i^j=\begin{cases}1,\ i=j\\0,\ i\neq j\end{cases}\tag{1.6}$$

1.5 Reference