数学的思维方式与创新-84-北大 (丘维声)

6,1039.

1 数学史上的重大创新

1.1 分析：微积分的创立和完备化

观察现象主要特征，抽象出概念。探索。猜测。证明。
如求瞬时速度，$s = at^2$,$\frac{\Delta s}{\Delta t} = 2at + \Delta t$，牛顿忽略 Δt，叫做留数，留下来的数。
如何解决不等于零又等于零的矛盾？
delta t 趋近于 0，无限，柯西引入极限的概念：函数在 x0 附近有定义，在 x0 可以没有定义，如果存在 c 使得 x 趋近于 x0 但不等于 x0 时，$|f(x) - c|$ 可以无限小，称 c 是 x 趋近于 x0 时 f(x) 的极限。
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$, that when $0 < |x - x_0| < \delta$, we have $|f(x) - c| < \varepsilon$

1.2 几何：欧几里得几何到非欧几里得几何

从平直空间到弯曲空间。
从定义和公理，推导和推演。平行公设。高斯和波约，罗巴切夫斯基（1829 年）, 平行公设只是假设。现实世界如何实现非欧几何的用处。高斯想法把球面本身看做一个空间。后来黎曼发展了。弯曲空间的几何是黎曼几何，如球面上的直线定义为大圆的一部分，这样发现过已知直线外一点不存在其平行线。在双曲几何模型下可以实现罗巴切夫斯基几何。

1.3 代数学中

伽瓦罗，代数学从研究方程的根，到研究代数系统的结构和保持运算的映射。

2 集合的划分

交空并全的划分方法：模 n 同余是 $\mathbb{Z}$ 的一个二元关系。两个集合的笛卡尔积
a 与 b 模 n 同余：$(a, b) \in \bigcup_{i=0}^{n-1} H_i \times H_i \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. 抽象：非空集合 s，$S \times S$ 的子集 W 是 S 是上的二元关系，有关系的记为 aWb

2.1 等价关系

反身性，对称性，传递性，$a \sim b$. $a \sim b \Leftrightarrow b \sim a$. $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$
$\bar{a}$ 是 a 确定的等价类，$\{x \in S | x \sim a\}$。易有 $\bar{x} = \bar{y} \Leftrightarrow x \sim y$ 。

定理 1：集合 S 上等价关系 $\sim$ 给出的等价类的集合是 S 的一个划分。
证明思路：需要证明并全，交空。交空比较难，需要研究等价类的性质。等价类的代表不唯一。
Step1) It is obvious that $\cup_{a \in S} \bar{a} \subseteq S$，and for any $b \in S$, we have $b \in \bar{b} \in \cup_{a \in S} \bar{a}$, this means $S \subseteq \cup_{a \in S} \bar{a}$, so $\cup_{a \in S} \bar{a} = S$.
Step2) To prove $\bar{x} \neq \bar{y} \Rightarrow \bar{x} \bigcap \bar{y} = \varnothing$, we prove the contrapositive $\bar{x} \bigcap \bar{y} \neq \varnothing \Rightarrow \bar{x} = \bar{y}$, and this is easy to prove.