

09-04-Algebra

Created on 20220605.

Last modified on 2023 年 6 月 11 日.

目录

Chapter 1 Introduction

- a: 线性代数, linear algebra
- b: 群论, group theory
- c: 域论, field theory
- d: 李群, lie group
- e: 李代数,
- f: Kac–Moody代数,
- g: 环论 (包括交换环与交换代数, 结合环与结合代数, 非结合环与非结合代数等),
- h: 模论,
- i: 格论,
- j: 泛代数理论,
- k: 范畴论,
- l: 同调代数,
- m: 代数K理论,
- n: 微分代数,
- o: 代数编码理论,
- p: 代数学其他学科。

Chapter 2 Group Theory

2.1 Group Representation

2.1.1 Introduction

丘维声。

运算: 笛卡尔积 $S \times S \mapsto S$ 是集合 S 的二元代数运算。现代数学的鲜明特征是研究有各种运算的集合, 称为代数系统。

现代数学的两大特征, 1) 研究代数系统的结构; 2) 利用同态映射研究代数系统结构。

核心: 群表示论是研究 G 到各个线性空间的可逆线性变换群的各种同态映射, 以获得 G 结构的完整信息。

群表示论是研究群结构的最强有力的工具。应用如晶体学, 量子力学, 抽象调和分析, 组合数学, 密码学, 纠错编码

必备参考书, 《抽象代数基础》丘维声, 高教出版社, 《高等代数学习指导书下》丘维声, 清华大学。

环, 域, 群

表 2.1: algebra system

名称	运算	性质	举例
ring	加法	交换, 结合, 0 元, 负元	整数集 \mathbb{Z} , 偶数集 $2\mathbb{Z}$, 一元实系数多项式 $\mathbb{R}(x)$, 实 n 阶矩阵 $M_n(\mathbb{R})$
	乘法	结合, 左右分配律	

交换环, 乘法可交换。单位元。

例子, 星期 i , 记为 $\bar{i} = \{7k + i\} | k \in \mathbb{Z}$, 收集起 \bar{i} 可以实现整数的划分。类似的, 定义模 m 剩余类:

$$\mathbb{Z}_m = \{\bar{i} | i = 1, \dots, m-1\} \quad (2.1)$$

定义加法和乘法, 有模 m 剩余类环

$$\begin{aligned}\bar{i} + \bar{j} &= \overline{i+j} \\ \bar{i} \cdot \bar{j} &= \overline{i \cdot j}\end{aligned}\tag{2.2}$$

可逆元, 单位 a : $a \in \text{ring} R, \exists b \in R, ab = ba = e$

左零因子 a : $a \neq 0, \exists c \neq 0, ac = 0$

例子: \mathbb{Z}_8 , 零因子 2,4,6; 可逆元 3,5,7;

例子: \mathbb{Z}_7 , 每个非零元都可逆;

域 F : 有单位元 e 的环, 且每个非零元都可逆。例子: 有理数集, 实数集, 复数集 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}$
域 F 中可以定义除法。

群 G : 只有乘法, 结合律, 单位元, 每个元素有逆元。

例子: \mathbb{Z}_m^* : \mathbb{Z}_m 所有可逆元的集合, 发现只对乘法封闭, 称为 \mathbb{Z}_m 的单位群; 如域 F 上的所有可逆矩阵的集合 $GL_n(F)$, 只有乘法, 称为域 F 上的一般线性群。

阿贝尔群: 乘法可交换。

例子: $GL(V)$, 域 F 上的线性空间 V 的所有可逆线性变换, 对于映射的乘法行程的 V 上可逆线性变换群。子群: $H < G$

等价关系与左陪集

研究 G 的第一个途径: 利用子群 H 研究 G 。

集合的划分与等价关系。对于 $a, b \in G$, 定义 $a \sim b \Leftrightarrow b^{-1}a \in H$, 易有关系 具有反射性 (e 在 H 中), 对称性, 传递性, 所以这是等价关系。

定义 a 的等价类:

$$\begin{aligned}\bar{a} &:= \{x \in G \mid x \sim a\} \\ &:= \{x \in G \mid a^{-1}x \in H\} \\ &= \{x \in G \mid x = ah, h \in H\} \\ &= \{ah \mid h \in H\} \\ &=: aH\end{aligned}\tag{2.3}$$

aH 称为以 a 为代表的 H 的一个左陪集, 是一个等价类。

根据等价类的性质, 有 1) $aH = bH \Leftrightarrow b^{-1}a \in H$; 2) aH 与 bH 或者相等, 或者不相交 (交集为空集)。所以 H 的所有左陪集给出 G 的一个划分, 记为 G/H , 称为 G 关于 H 的左商集。 G/H 的基数称为 G 关于 H 的指数, 记为 $[G:H]$ 。基数相同可建立双射。

G 关于 H 的左陪集分解: $[G : H] = r, G = eH \cup a_1H \cup \cdots \cup a_{r-1}H$ 。

拉格朗日定理: 对于有限群 G , 易有其元素个数 $|G| = |H|[G : H]$, 即任何子群的阶是群的阶的因数。推论: 1) n 阶群 G 的任意元素 a , 有 $a^n \in G$; 2) 素数阶群是循环群。

同态

研究 G 的第二个途径: 通过研究 G 到 G' 的保持运算的映射, 同态映射, 简称同态。同态要变, 是函数。

通常利用 G 到 Ω 的同态, 等价于 G 在 Ω 的作用。既可以研究 G 的结构, 又可以对 Ω 的性质有所了解

$S(\Omega)$: Ω 的全变换群, Full Transformation Group on Set Ω , Ω 自身的所有双射组成的集合, 对于映射的乘法构成的一个群。

作业

1. 环 R 中, $0a = a0 = 0$
2. 有 e 的环中, 零因子不是可逆元
3. \mathbb{Z}_m 中每个元素要么是可逆元要么是零因子;
4. $M_n(\mathbb{F})$ 中, 每个矩阵是可逆矩阵或者是零因子。

2.1.2 Abel 群的表示

集合 (Set)

$$\begin{array}{ll}
 \text{Idempotent} & A \cup A = A \cap A = A \\
 \text{Absorption} & A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A \\
 \text{Commutative} & A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A \\
 \text{Associative} & (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\
 & (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \\
 \text{Distributive} & A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\
 & A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)
 \end{array} \tag{2.4}$$

映射 (Map)

映射: $f : a \mapsto b \Leftrightarrow f(a) = b$. $f(x)$ f of x 原象, 象。映射 f 的定义域 (domain) A , 陪域 (codomain) B 。映射得到的所有象的集合叫值域, 记作 $f(A)$, 或 $\text{Im}f$ 。

$$\begin{aligned} f : a \mapsto b &\Leftrightarrow f(a) = b \\ f : A &\rightarrow B \end{aligned} \tag{2.5}$$

映射通常关心 is it one one? Is it onto?

Surjection, 满射, onto, 到上: $f(A) = B, \forall b \in B, \exists a \in A, f(a) = b$. If left inverse, such as $\xi(\eta(x_A)) = x_B$, therefore surjection.

Injection, 单射, 1-1, 一一的, 每个 a 对应的 b 是不同的。 $\forall x, y \in A, x \neq y, \therefore f(x) \neq f(y)$. If right inverse, such as $\eta(\xi(x_B)) = x_A$, therefore injection

Bijection, 双射, 两个集合一一对应, isomorphic。

逆映射。对于 $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow A$, 有 $g \circ f = 1_A, f \circ g = 1_B$ 。可逆的 f 是双射。

线性映射、线性变换是线性空间的同态映射, 有点乘和加法。

补空间: 域 \mathbb{F} 上的线性空间 $U \subset V$, 则 $\exists W, V = U \oplus W$ 。对于实内积空间 V , U 是有限维的, $W = U^\perp$, 正交补空间, 唯一的。

投影变换: 域 \mathbb{F} 上的线性空间 $V = U \oplus W$, 有 $\alpha = \alpha_U + \alpha_W$, 有投影变换 $P_U : \alpha \mapsto \alpha_U$ 。投影变换保持加法和数乘, 是 V 上的线性变换。投影是同态映射。

几何空间: 以原点 O 为起点的定位向量组成的实线性空间。知道一空间点在两个坐标面的投影坐标可完全确定点。

Relation

$$\begin{aligned} \text{Reflective} \quad & \forall x \in M, xRx \\ \text{Antisymmetry} \quad & \forall x, y \in M, xRy, yRx \Rightarrow x = y \\ \text{Transitive} \quad & \forall x, y, z \in M, xRy, yRz \Rightarrow xRz \end{aligned} \tag{2.6}$$

partial order set, poset, (M, \preceq) . Anti-circularity law $x_1 \preceq \cdots \preceq x_n \preceq x_1 \Rightarrow x_1 = \cdots = x_n$

quasi-order set, quoset, the relation only satisfies reflective law and transitive law, noted as $(M, \bullet \prec)$.

Proposition 2.1. Any subset of a quoset is a quoset. Any subset of a poset is a poset. Any subset of a chain is a chain.

等价关系

$$\begin{aligned}
& \text{Symmetry} \quad \forall x, y \in M, xRy \Rightarrow yRx \\
& \text{Alternative} \quad \forall x, y \in M, x \not\preceq y \Rightarrow y \preceq x
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Proposition 2.2. *Linear order, or total order: \preceq and Alternative law.*

Chain: a set with a total order.

Tower, 域扩张的塔: $E > F > k$, 有大小包含关系.

nest, or sleeve: $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n$, 包含关系

反身性, 对称性, 传递性, $a \sim b. a \sim b \Leftrightarrow b \sim a. a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$

\bar{x} 是 x 确定的等价类, $x(M) = \{y | y \in M, y \sim x\}$. 易有 $\bar{x} = \bar{y} \Leftrightarrow x \sim y$.

定理 1: 集合 S 上等价关系 \sim 给出的等价类的集合是 S 的一个划分。

证明思路: 需要证明并全, 交空。交空比较难, 需要研究等价类的性质。等价类的代表不唯一。

Step1) It is obvious that $\cup_{a \in S} \bar{a} \subseteq S$, and for any $b \in S$, we have $b \in \bar{b} \in \cup_{a \in S} \bar{a}$, this means $S \subseteq \cup_{a \in S} \bar{a}$, so $\cup_{a \in S} \bar{a} = S$.

Step2) To prove $\bar{x} \neq \bar{y} \Rightarrow \bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$, we prove the contrapositive $\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset \Rightarrow \bar{x} = \bar{y}$, and this is easy to prove.

Proposition 2.3. *equivalence, define $x \sim_{\bullet, \prec} y := (x \bullet \prec y) \wedge (y \bullet \prec x)$.*

Proposition 2.4. *A quoset (M, \bullet, \prec) is a poset, if and only if, the quotient set $M / \sim_{\bullet, \prec} = M$, or say, it satisfies the anti-circularity law.*

群的同态 Isomorphic

同态映射: G 到 G' 的映射 $\sigma : \sigma(a, b) = \sigma(a)\sigma(b)$ 。单射的话是单同态。满射是满同态。双射是同构, 此时两个群同构, $G \cong G'$ 。

同态的性质: 1) 单位元、逆元、子群映射过去是 G' 的单位元、逆元、子群。例如 $G < G' \Rightarrow \sigma(G) = \text{Im} \sigma < G'$, 同态的像是 G' 的子群

刻画单同态: 找到映射成单位元的原象, 定义同态的核, $\text{Ker} \sigma := \{a \in G | \sigma(a) = e'\}$. 易有同态的核是 G 的子群。对于单同态, $\text{Ker} \sigma = \{e\}$ 。

子集乘法: 类似与点乘, a 的所有和 b 的所有的乘积方式的组合。乘法满足结合律。

正规子群

$\forall k \in \ker \sigma, \forall g \in G$, we have:

$$\begin{aligned}
 \sigma(gkg^{-1}) &= \sigma(g)\sigma(k)\sigma(g^{-1}) = e' \\
 \therefore gkg^{-1} &\in \ker \sigma \\
 \therefore g \ker \sigma g^{-1} &\subset \ker \sigma \\
 \& \ g^{-1} \ker \sigma g &\subset \ker \sigma \\
 \therefore g \ker \sigma g^{-1} &= \ker \sigma
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

normal subgroup 正规子群: $H \triangleleft G : \forall g \in G, gHg^{-1} = H$, gHg^{-1} 是 g 的共轭子群。

性质: $H \triangleleft G \Leftrightarrow gHg^{-1} = H, \forall g \in G \Leftrightarrow gH = Hg$, H 的左右陪集相等;

G 关于正规子群 H 的商群: 规定正规子群 H 的商群 G/H 乘法: $(aH)(bH) = abH$

2.1.3 群同态基本定理

$$\begin{aligned}
 \psi : G/\ker \sigma &\rightarrow \text{Im} \sigma \\
 a(\ker \sigma) &\mapsto \sigma(a)
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

看映射 ψ 的性质:

$$\left. \begin{aligned}
 a(\ker \sigma) &= b(\ker \sigma) \\
 \Leftrightarrow b^{-1}a &\in \ker \sigma \\
 \sigma(b^{-1}a) &= e' \\
 \therefore \sigma(a) &= \sigma(b)
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \psi \text{ is surjection} \tag{2.10}$$

从是映射、是单射、是满的, 得到是双射:

Let $K = \ker \sigma$, $\psi[(aK)(bK)] = \psi(abK) = \sigma(ab) = \psi(aK)\psi(bK)$, 所以保持运算, 所以是同构, 所以 $G/\ker \sigma \cong \text{Im} \sigma$

群同态基本定理: $\ker \sigma \triangleleft G$ & $G/\ker \sigma \cong \text{Im} \sigma$

2.1.4 线性表示

$GL(V)$: 对于群 G , 域 \mathbb{K} 上的线性空间 V , G 到 V 的所有可逆线性变换的集合, 对于映射的乘法成为一个可逆线性变换群。

G 到 $GL(V)$ 的同态 ψ 是 G 在 \mathbb{K} 上的线性表示, 简称为 \mathbb{K} 表示, 或者简称为表示。

V 叫做表示空间, 表示次数 $\deg \psi := \dim V$

(ψ, V)

如用两个视图可完全确定空间曲线, 即做了两个同态。

$\ker \psi = \{e_G\}, \psi$ 是忠实的;

$\ker \psi = G, \psi$ 是平凡的; χ 称一次的平凡表示 ψ 是 G 的主表示, 单位表示, 记作 1_G ;

$\dim V = n$ 时, 有 $\psi(g)$ 在基 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 下的矩阵 $\Phi(g)$ 是 \mathbb{K} 上的可逆矩阵, 由同构 $GL(V) \cong GL_n(\mathbb{K})$, 有 G 到 $GL_n(\mathbb{K})$ 的同态 Φ , 称为 G 在 \mathbb{K} 上的 n 次矩阵表示。

Φ 称为是 ψ 提供的

表示的等价类

等价关系: 对于 G 的 2 个 k 表示, $(\phi, V), (\psi, W), \exists v$ 到 w 的线性空间的同构 σ , 定义 $\psi(g)\sigma = \sigma\phi(g), \forall g \in G$, 这种 G 的所有 K 表示的集合 Ω 上的二元关系, 易有具有反射性, 对称性, 传递性, 从而是等价关系。通常关注 G 的 k 表示的等价类。

$(\phi, V), (\psi, W)$ 等价, 取基后的矩阵记为 $\Phi(g)|\{\alpha_i, \dots\}, \Psi(g)|\{\beta_i, \dots\}$, 同构 σ 把 V 的基映射到 W 上的 S , 有 $\sigma(\{\alpha, \dots\}) = \{\beta, \dots\}S, \therefore \Psi(g)S = S\Phi(g)$. 所以 G 在 K 的 2 个矩阵表示 Ψ, Φ 等价: 次数一样且 $\forall g \in G, \Psi = S\Phi(g)S^{-1}$. 所以群 G 的 2 个 K 表示 $(\phi, V), (\psi, W)$ 等价, $\Leftrightarrow K$ 表示提供的矩阵表示 Ψ, Φ 等价。

例: 1 次表示

G 在 K 上的 1 次矩阵表示 $\Phi: G \rightarrow K^*$; 非零元集合。映射是通用的不对定义域做要求, 陪域是域的子集的映射叫函数。称为 G 上的 K^* 函数, 且由于同态保持运算, 有 $\Phi(gh) = \Phi(g)\Phi(h), \forall g, h \in G$, and $\Phi(e) = 1$, where 1 is the unit of K^* . 所以一次表示是 G 到 K^* 的保持运算的函数。

例: 实数和加法的 1 次实表示

$f_a(x) = e^{ax}$ 是 $(\mathbb{R}, +)$ 的 1 次实表示。

例: 实数和加法的 1 次复表示

$f_a(x) = e^{iax}$ 是 $(\mathbb{R}, +)$ 的 1 次复表示。

$$\begin{aligned} f: (\mathbb{R}, +) &\rightarrow \mathbb{C}^* \\ x &\mapsto e^{iax} \end{aligned} \tag{2.11}$$

Chapter 3 域论

所有数域都包含有理数域。有理数域指含有 $0, 1$ 的, 且对加减乘除 (除数不是 0) 封闭的域。

最小的数域是 $A = 0, 1$, 包含 $\sqrt{5}$ 的最小数域是 $x | x = a + b\sqrt{5}, a, b \in A$

$x | x = a + b\sqrt{5}, a, b \in A$.

Chapter 4 李群

Chapter 5 李代数

Chapter 6 Kac-Moody 代数

Chapter 7 环论

环论（包括交换环与交换代数, 结合环与结合代数, 非结合环与非结合代数等）

Chapter 8 模论

Chapter 9 格论

Chapter 10 泛代数理论

Chapter 11 范畴论

Chapter 12 同调代数

Chapter 13 代数 K 理论

Chapter 14 微分代数

Chapter 15 代数编码理论

Chapter 16 代数学其他学科