09-05-13-DifferentialGeometry

Created on 20241215.

Last modified on 2024 年 12 月 15 日.

目录

Chapter 1 Introduction

Differential Geometry

微分几何

Chapter 2 Books

1

Chapter 3　摘要

以梁灿彬课程为主。

3.0.1 Topological Space

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is C^0 (读作 c nought, C^k 意思是 k 阶导函数存在且连续), if Y 得到任意开区间的“逆像”（$f^{-1}[B] := \{x \in X | f(x) \in B\}$）是 x 的开区间之并, open set 之并。

$x \hookrightarrow y$, 一般用于表示 inclusion 或 embedding（嵌入）。在这里通常表示这个 map 具有 2 个性质, 1）injective, 1 个 y 只对应 1 个 x；2）structure-preserving, 不同 x 之间的关系和对应 y 之间的关系保持, 如 $X1 < X2$, 映射过去后 $y1 < y2$.

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, m 个 n 元函数。

X 的所有子集记为 $\mathscr{P}$

$\mathscr{T}$, X 的一些开集的集合, 称为 X 的一个拓扑。选拓扑是指定集合中的哪些子集的开的。先问 set 的拓扑是什么, 再问开不开。

$$
\begin{aligned}
&X, \varnothing \in \mathscr{T} \\
&O_i \in \mathscr{T}, i = 1, \cdots, n \Longrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \mathscr{T}, \\
&O_\alpha \in \mathscr{T}, \forall \alpha, \Longrightarrow \bigcup_\alpha O_\alpha \in \mathscr{T},
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

$\mathscr{T} = \{\cdots\}$, 离散拓扑, 开集最多；$\mathscr{T} = \{X, \varnothing\}$, 凝聚拓扑, 开集最少。

$\mathbb{R}^1$, open interval;$\mathbb{R}^2$, open disk;$\mathbb{R}^n$, open ball;

$B(X_0, r) := \{x_i \in \mathbb{R}^n || x_i - x_0| \le r\}$

usual topology: $\mathscr{T}_u := \{$可表为开球之并的集合$\}$, 一般认为 $\mathbb{R}^n \in \mathscr{T}_u$。$\in$ 属于。

$(X, \mathscr{T})$, 拓扑空间 X；$A \subset X, (A, \mathscr{S})$, 拓扑子空间。$\subset$ 含于。

其中 $\mathscr{S} := \{V \subset A | \exists O \in \mathscr{T}, s.t. O \cap A = V\}$, $\mathscr{S}$ 由 $\mathscr{T}$ 诱导出。诱导拓扑的定义是, 可由父集合中的拓扑定义的开集, 交子集得到的集合。

open subset, 能写成开区间之并的 subset

例如, $(\mathbb{R}^2, \mathscr{T}_u)$, 取子集为圆周, 则 A 用 $\mathscr{T}_u$ 衡量不是开集, 但是用 $\mathscr{T}_u$ 的诱导拓扑衡量, 即 $\mathscr{T}_u$ 决定的开集的交集, 衡量是开集。

3.0.2 Homeomorphism, 同胚

有拓扑结构的空间, 映射 map 的连续性有意义。

$f : X \to Y$ is C^0 if $O \in \mathscr{S} \to f^{-1}[O] \in \mathscr{T}$。即 X 中由 X 的拓扑定义的开集 O', 映射到 Y 上后, 变成了 Y 上的 X 的拓扑的诱导拓扑下的开集。即映射到 Y 上后, 得到的这个集合 O, 这个集合 O 的子集可以由 X 的拓扑定义的开集, 交上集合 O 得到。

C^0 , continus; C^1, 可微, 是流形; C^k, 直到 k 阶导数存在且连续, C^∞, 光滑。

无附加 structure, 只能说 one one, onto, 有了附加 structure 可以讨论 continus。

同胚: 存在一个 one one, onto, f 和 f^{-1} 均 C^0。

微分同胚: one one, onto, f 和 f^{-1} 均 C^∞。即 one one, onto, 正反光滑。

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is C^0 at $x \in \mathbb{R}$, if $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t. |x' - x| < \delta \to |f(x') - f(x)| < \delta$, 这样定义 C^0 需要用到距离, 附加的 structure

3.0.3 Manifold

局部像 $\mathbb{R}^n$

Given a topological space $(M, \mathscr{T})$, if $M = \cup_\alpha O_\alpha, O_\alpha \in \mathscr{T}$, the $\{O_\alpha\}$ is an open cover.

$$O_\alpha \xrightarrow[homeo.]{\psi_\alpha} V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$$
$$O_\alpha \cap 0_\beta \neq \varnothing \Longrightarrow \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} \ is \ C^\infty, \text{[注: compatibility, 相容]}$$

Then M is a manifold. 其中, 复合映射 $f \circ g$, 从右向左结合, 先作用 g, 再作用 f。注意到上式的 $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\psi_\alpha[O_\alpha \cap 0_\beta] \to \psi_\beta[O_\alpha \cap 0_\beta]$ 是 n 个 n 元函数。

Ψ 美国一般读作 sai, ξ, 这个一般读作 c, 和英文字母 c 一个音。

(O_α, ψ_α) 叫做坐标系, 或 chart（图）, 其中 O_α 是坐标域。$\{O_\alpha, \psi_\alpha\}$ 叫做图册, atlas。

拓扑空间 M 可由不同的图册定义不同的流形, 这两个图册中, 坐标域有交集时, 若矛盾, 称这 2 个流形的微分结构不同；否则就是同一个微分流形, 将图册并起来。

例子: Is $\mathbb{R}^2$ a manifold? We try to find an open cover, it is easy that if $\{O_\alpha, \psi_\alpha\}$ is trival, which means that $O_\alpha = \mathbb{R}^2$, and $\psi_\alpha(x) = x$. One set can cover means it is trival.

3.0.4 坐标变换率

$$
\begin{aligned}
v_{abs} &= u^{\mu} x_{\mu} = w^{\nu} y_{\nu} \\
x_{\mu}(f_{abs}) &= \frac{\partial F(x)}{\partial x^{\mu}} \\
y_{\nu}(f_{abs}) &= \frac{\partial G(y)}{\partial y^{\nu}} \\
F(x) &= G(y) = G(y(x)), so \\
x_{\mu} &= \frac{\partial G(y)}{\partial y^{t}} \frac{\partial y^{t}}{\partial x^{\mu}} \\
&= y_{t} \cdot \frac{\partial y^{t}}{\partial x^{\mu}} \in \mathbb{R} \\
\therefore u^{\mu} y_{t} \cdot \frac{\partial y^{t}}{\partial x^{\mu}} &= w^{\nu} y_{\nu}
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Chapter 4　古典微分几何

Chapter 5　黎曼几何

Chapter 6　射影微分几何

Chapter 7　广义空间 (一般空间)

Chapter 8　微分形式 (外微分形式)

Chapter 9　大范围微分几何

Chapter 10　直接微分几何

Chapter 11 Else