

## 09-04-01-LinearAlgebra

Created on 20230405.

Last modified on 2023 年 4 月 9 日.



# 目录



# Chapter 1 Vector

## 1.1 Basic Defination

we define the basic element as following, where  $\mathbf{e}_i$  means  $x_i = 1, x_j = 0$  for all  $j \neq i$ . When we say a vector, it means a column vector.

$$\vec{x} = \mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots]^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum x_i \mathbf{e}_i \quad (1.1)$$

We define Kronecker sign to simply the description of  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ .

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (1.2)$$

The set of bases  $\{\mathbf{e}_i\}$   $\xrightarrow{\text{apply}} \mathbf{x} \longrightarrow \{x_i\}$ .

## 1.2 Operation

### 1.2.1 Dot Product

We define in algebra,  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := \sum x_i y_i \delta_{ij} = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y}$ .

Then the defination is restricted to the choose of the coordinate system.

### 1.2.2 Add

$$\begin{aligned}\mathbf{x} + \mathbf{y} &:= \sum (x_i + y_i) \mathbf{e}_i \\ k \cdot \mathbf{x} &:= \sum kx_i \mathbf{e}_i\end{aligned}\tag{1.3}$$

Law  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ , law  $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$  is not obvious in the view of Set Theory.

### 1.2.3 geometry Properties

#### Length and Angle

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}\| &:= \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} \\ \cos \theta_{x,y} &:= \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|}\end{aligned}\tag{1.4}$$

#### Distance

Distance function satisfies the following:

$$\begin{aligned}d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\geq 0 \\ d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \\ d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})\end{aligned}\tag{1.5}$$

$$\begin{aligned}d_p &= \left[ \sum |x_i - y_i|^p \right]^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty \\ d_\infty &= \max_i |x_i - y_i|\end{aligned}\tag{1.6}$$

# Chapter 2 Space

## 2.0.1 Linear Space

向量加法、标量乘法构成的单位环。

## 2.0.2 Metric Space

**Definition 2.1.** The set  $X$  with a distance function  $d$ ,  $d$  satisfies 1.5. Metric Space is noted as  $(X, d)$ .

**Definition 2.2.** 紧集:  $(X, d)$  中的子集  $A$ ,  $A$  中任意序列都存在一子列  $x_n$  收敛到  $A$  中某点。

**Definition 2.3.** 稠密集:  $(X, d)$  中的子集  $A$ , 对于  $X$  中的任意点  $x$ ,  $A$  中存在点  $a$ , 使得  $d(x, a) < \varepsilon$

**Definition 2.4.**  $X$  可分:  $(X, d)$  中存在一个可数稠密集。

## Complete Metric Space

**Definition 2.5.** 收敛: sequence  $\{x_n\}$  收敛到  $c$ , means that  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, c) = 0$ , noted as  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$

**Definition 2.6.** Cauchy 基本列:  $\lim_{m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty} d(x_m, x_n) = 0$

**Definition 2.7.** 完备距离空间: 所有 Cauchy 基本列收敛于一点

**Definition 2.8.** 不完备: 对于苹果空间, 从宇宙开始到宇宙结束的所有苹果序列, 收敛到我, 则不完备。

## 2.0.3 Banach Space

完备、赋范、线性。

### 2.0.4 Euclid Space

有序的  $n$  元组的全体称为  $n$  维 Euclid 空间, 记为  $\mathbb{R}^n$ , 称  $\mathbf{p} = (p_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$  是  $\mathbb{R}^n$  的一个点。为便于研究, 本论文以  $\mathbb{R}^3$  为背景空间, 所涉及的函数默认为可微实值函数。如果实函数  $f$  的任意阶偏导数存在且连续, 则称函数是可微的 (或无限可微的, 或光滑的, 或  $C^\infty$  的)。

由于微分运算是函数的局部运算, 限制所讨论函数的定义域在  $\mathbb{R}^3$  中的任意开集, 所讨论的结论仍然成立。

自然坐标函数: 定义在  $\mathbb{R}^n$  上的实值函数  $x_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , 使得  $\mathbf{p} = (p_i)_{i=1}^n = (x_i(\mathbf{p}))_{i=1}^n$

切向量: 由  $\mathbb{R}^n$  中的二元组构成,  $\mathbf{v}_{\mathbf{p}} = (\mathbf{p}, \mathbf{v})$ , 其中  $\mathbf{p}$  是作用点,  $\mathbf{v}$  是向量部分

切空间  $T_{\mathbf{p}}\mathbb{R}^n$ : 作用点  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$  的所有切向量的集合。利用向量加法与数量乘法使某点的切空间称为向量空间, 与背景空间存在非平凡同构。

向量场  $\mathbf{V}$ : 作用于空间点的向量函数,  $\mathbf{V}(\mathbf{p}) \in T_{\mathbf{p}}\mathbb{R}^n$

逐点化原理:  $(\mathbf{V} + \mathbf{W})(\mathbf{p}) = \mathbf{V}(\mathbf{p}) + \mathbf{W}(\mathbf{p})$ ,  $(f\mathbf{V})(\mathbf{p}) = f(\mathbf{p})\mathbf{V}(\mathbf{p})$

自然标架场: 定义  $\mathbf{U}_i = (\delta_j^i)_{j=1}^n$ , 按 Einstein 求和约定, 有  $\mathbf{V}(\mathbf{p}) = v^i(\mathbf{p})\mathbf{U}_i(\mathbf{p})$ , 称  $v^i$  为场的 Euclid 坐标函数, 其中 Kronecker  $\delta$  函数定义为:

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (2.1)$$



# Chapter 3 linear algebra

## 3.1 linear equation

Normally, we consider vector space over the fields of real or complex numbers.

### 3.1.1 $\mathbf{Ax} = \mathbf{B}$

#### Defination

linear equation in  $n$  variables.  $\sum_{i=1}^{i=n} a_i x^i = b$ , which can be written as  $\mathbf{a}^T \mathbf{x} = b$ . We collect  $m$  equations and write like this:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Noticed that  $x_1$  is only applied to the first column of the left matrix, we can say that  $\mathbf{x}$  is one point, or a specific composition, of the space spanned by the column vector of the matrix. Then it is easy to see that this equation has the solution, only if the vector  $\mathbf{b}$  is in the space spanned by the column vector of the matrix.

Or we can write like this:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

The equation  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  has solution, means  $\mathbf{y}$  可由  $\mathbf{A}$  的列向量线性表出。

If  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ , called homogeneous linear equations, homogeneous because 所有非 0 项是 1 次的。if  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ , it is inhomogeneous. 显然 0 向量 (zero solution, or trivial solution) 是一个解。A 的列向量正交, 只有零解; 若 A 的列向量线性相关, 有多解, 即可按多种方式回到原点。

### Number of solution

构造增广矩阵  $[\mathbf{A}, \mathbf{b}]$  后, 初等行变换化为阶梯型, 如 3.1所示, 解的个数讨论。

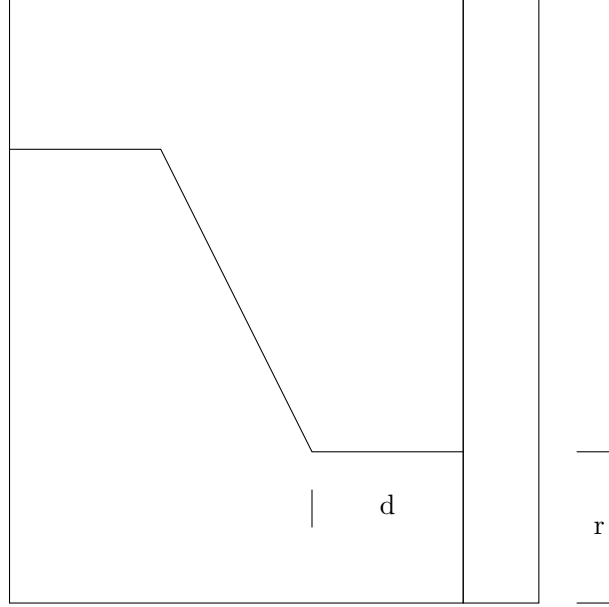


Figure 3.1: 【number of solution】

$r \neq 0$ , no solution;

$d = 1$ , one solution,  $\text{tr} \mathbf{A}_{mn} = m$ ;

$d \neq 1$ ,  $\text{tr} \mathbf{A}_{mn} < m$ , infinity solution, 最后一行是解的超平面方程, 图中  $d$  是解的维度,  $d = n - \text{tr} \mathbf{A}_{mn}$ , 如  $d$  为 3, 有 3 列独立的, 即解空间是三维的。齐次方程组的未知数个数大于方程个数, 有无数解。

### 3.1.2 Matrix

#### Defination

If we have a serious of  $\mathbf{x}$ , we have a serious of  $\mathbf{b}$ , like this:

$$\mathbf{A}_{mn} \cdot \mathbf{X}_{nt} = \mathbf{B}_{mt} \implies \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1t} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mt} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

The normal definition of the product of two matrix is as above.

#### Transposition

Defination:  $a_{ij}^T = a_{ji}$

**Proposition 3.1.**  $(AB)^T = B^T A^T$

*Proof:*  $L = (a_{ik}b_{kj})^T = c_{ij}^T = c_{ji} = b_{jk}a_{ki} = R \square$

**Proposition 3.2.** We take a look at the product with reflect  $T : \mathbf{x} \rightarrow T \cdot \mathbf{x}$ .  $(T\mathbf{x})^T T\mathbf{y} = \mathbf{x}^T (T^T T)\mathbf{y} = [(TT^T)\mathbf{x}]^T \mathbf{y}$ .  $0 \leq \|TT^T\| < 1$ ,  $T$  is a contractive mapping.

### 3.1.3 solve equation

求解方法，如消元法、迭代法等。

#### 消元法

利用初等变换化为“阶梯形（或称上三角形）”，从下往上回代。

Augmented matrix

## 3.2 determinant

行列式，定义、性质、展开、Gramer 法则等

## 3.3 polynomial

因式分解定理，多项式的根，多元多项式。

## 3.4 operation

初等变换、代数运算、分块运算、乘法、秩

## 3.5 Transformation

线性变换、坐标变换、像与核、特征向量、特征子空间、商空间

正交变换规范变换

酉相似

### 3.5.1 Elementary Transformation

初等变换。

1) 交换两行:  $A \xrightarrow{(i,j)} B$

2) 某行乘以不为 0 的数:  $\mathbf{A} \xrightarrow{\lambda(i)} \mathbf{B}$

3) 某行乘以不为 0 的数加到另一行上:  $\mathbf{A} \xrightarrow{\lambda(i)+(j)} \mathbf{B}$

初等矩阵: 单位矩阵执行一系列初等变换得到的矩阵.

初等变换作用于矩阵  $\mathbf{A}$ , 等于初等变换作用于单位阵之后得到的初等矩阵  $\mathbf{E}$  再作用于  $\mathbf{A}$ .

## 3.6 Form

### 3.6.1 Jordan

Jordan 型、根子空间分解、循环子空间、多项式矩阵相抵不变量、特征方阵与相似标准型

### 3.6.2 二次

配方法构造、对称方阵的相合、相合不变量