

Chapter 1 09-01-Introduction

Today is 20211204, and I decided to note down all of my knowledge about the math in this notebook.

数学史不单独作为一章，分布在各个章节中。

1.1 Methodology

方法论，数学重要思想。

1.2 History

1.2.1 古代【公元前 2000 年-公元 1689 年】

古巴比伦和古埃及

公元前 3000 年左右，巴比伦和埃及，数学出现。

有：整数和分数的算术、进制计数法、初步代数、几何经验公式。无：成套记号、有意识的抽象思维、一般方法论、证明、直观推理。

古巴比伦 巴比伦，美索不达米亚平原，公元前 600 年到公元 300 年间，泥板和楔形文字，公元前 2000 年左右的泥板也有部分保留下来。60 进制，几个特殊的分数 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ 有单独的记号。

算术，平方、平方根、立方、立方根表。代数， $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ 的公式。 $x^2 + y^2 = 2z^2$ 的整数解。用特殊名称和记号表示未知量。几何，特定等腰三角形的外接圆半径。计算简单平面图形和简单立体体积的方法。

【应用】

计算长度、重量，兑换钱币和交换商品，计算单利、复利、税收，分配粮食，划分土地、遗产。

月日观察的数据计算，计算相继数据之间的一次差分、二次差分。观察到这些差分等于常数时的情况，对数据做内插和外插。新月和亏蚀出现的时间计算误差在几分钟。恒星年（太阳相对恒星的位置复原所需要的时间）相差 4.5 分。

用阴历。每月在月球全黑（所谓的新月）后首次出现峨眉月开始，日子从出现峨眉月那天晚上开始计算，从日落到第二天日落之间算作一天。逐年算出夏至时间，定出冬至、春分、秋分。

算术、代数、几何的步骤是根据物理事实、不断试验和修改，从直观认识中得到的。

埃及 埃及文化在公元前 2500 年左右达到顶峰，修建金字塔。到公元 600 年左右，埃及的历史和数学附属于希腊文明。

有多套文字：象形文字，用在碑文和器皿上；僧侣文，用于日常书写。

算术，单位分数。代数， $ax^2 = b$ 。几何，椎底是正方形的截棱锥体积 $V = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)$ 。

【应用】

计算报酬、谷仓容积、土地面积、天文历法。

观察天狼星计算太阳年，这颗星在夏季某一天可以在太阳快出来的时候在地平线上看到，称为天狼星的先阳升日，2 个先阳升日之间相差 365.25 天，定一年为 365 天。尼罗河水开始上涨的那天定为一年第一天。起初定一年 12 个月，每月 30 天。在公元前 45 年，定一年为 365.25 天。

古希腊

公元前 775 年，将象形文字改为拼音字母。

古典时期【公元前 600 年-公元 300 年】 Euclid 的《几何原本》和 Apollonius 的《圆锥曲线》

Pythagoras 学派开始，研究抽象概念。三角形数，沙滩上的小石子堆，求和公式。 $1+2+\cdots+n$ 的公式。



Figure 1.1: [三角形数]

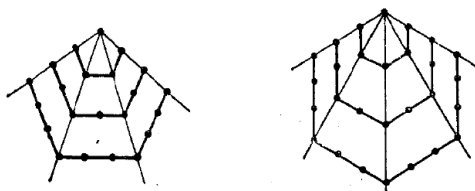


Figure 1.2: [n 边形数]

Zeno 生于公元前 495 到公元前 480 年间，当时人们对空间和时间有 2 种相对的看法，一是无限可分，运动是连续和平顺的；另一是由不可分的小段组成，运动是一系列小跳动。

Aristotle 批判 Zeno 悖论：悖论 1，两分法悖论：从 A 到 B，要先到之间的中点，空间无限可分，包含无限中点，不可能在有限时间内通过有限长度，若能通过，意味着必须到达没有终点的某种东西的终点。【Aristotle 批，长度由无限点组成，时间段由无限时刻组成，有限时间段内可通过长度。】悖论 2，运动慢的不会被运动快的追上，因为要不断到达被追者前一刻所在的点。悖论 3，飞矢不动，任意瞬时必定在确定位置，因而是静止的。【Aristotle 批，不承认时间具有不可分的单元。】悖论 4，A 静止，一定时间内 B 左走 1，C 右走 1，则 B 和 C 相差 2。【速度是相对的，没有绝对的空间可以作为规定速度的依据】

Eudoxus 证明了圆锥和棱锥的体积等于同底同高的圆柱和棱柱的三分之一。

Hippias, 生于公元前 460 年左右, 诡辩学派。

AB 顺时针匀速转到 AD, BC 匀速运动到 AD, 交点从 B 逐渐运动到 G. $\frac{\phi}{\pi \times 0.5} = \frac{E' H}{B A}$

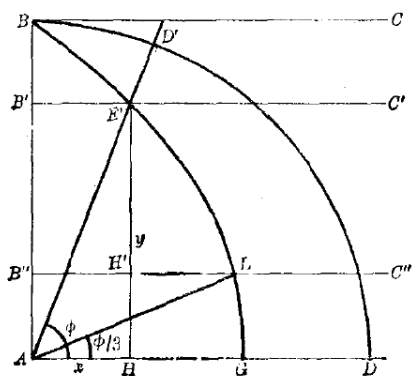


Figure 1.3: [割]圆曲线

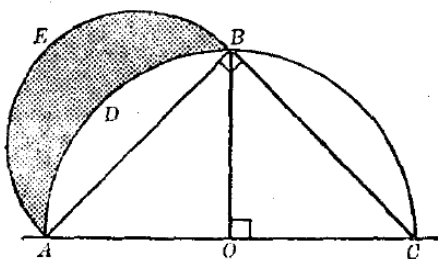


Figure 1.4: [阴影面积 = 三角形 AOB 的面积]

Plato 学派。Archytas 把曲线作为动点的轨迹，把曲面作为是曲线移动而产生的。Plato 认为具体事物的完美理想才是实在，相信有一个独立、永恒的观念世界。从 Plato 开始要求根据公认的原理进行形式上的演绎证明。Plato 学派重要的发现是圆锥曲线。

Endoxus 引入变量的概念。建立了数学上以明确公理为依据的推演。

形而上学家研究数学家和自然哲学家（科学家）认为是不言而喻的东西，如研究对象的存在性、真实性问题、公理的本性问题。

Aristotle 指出 (据 Plutarch 说 Plato 较早指出过) 一个定义只能告诉我们一事物是什么,



Figure 1.5: [Menaechmus 通过垂直于锥面的母线割锥面获得圆锥曲线]

并不说明它一定存在. 定义了的东西是否存在有待于证明, 除非是少数几个第一性的东西诸如点和直线, 它们的存在是同公理 (第一性原理) 一起事先为人们所接受的.

Aristotle 和 Euclid 所采取的用以证明存在性的方法是构造 (construction). Euclid 《原本》中头三个公理承认直线和圆的构造; 所有其他数学概念则必须构造出来以证明其存在, 例如角的三等分线虽可定义, 但不能用直线和圆构造出来, 所以在希腊几何学里不能加以考虑. Aristotle 也讨论数学的基本原理. 他把公理和公设加以区别, 认为公理是一切科学所公有的真理, 而公设则只是为某一门科学所接受的第一性原理. 他把逻辑原理 (诸如矛盾律、排中律、等量加减等量后结果相等的公理以及其他这类原理) 都列为公理. 公设无需是不言自明的, 但其是否属真应受所推出结果的检验. 所列出的一批公理或公设, 数目应该愈少愈好, 只要它们能用以证明所有结果.

Aristotle 讨论了怎样能把点同线联系起来这个基本问题. 他说点不可分, 然而占有位置. 但那样的话, 尽管聚集起多少点来, 还总是聚不成能分的东西, 而线段则肯定是能分的量. 因此点不能形成象线这类连续的东西, 因为点与点不能自己连续在一起. 他说一点好比是时间中的“此刻”(现在). 此刻不可分, 因而并非时间的一部分. 一点可能是一线的末端、开端或其上的分界处, 但它不能是线的一部分, 也不成其为量. 一点只有通过运动才能产生一线从而成其为量的本原. 他又论证说点没有长度, 因此若一线由点组成, 它将没有长度. 同样, 如果时间由瞬刻组成, 那就没有整个的时段了: 关于线所具有的连续性, 他是这样定义的: 如果一件东西的任何两个相继部分在其接触处的两个界限合而为一, 这东西就是连续的. 实际上 Aristotle 讲过许多次关于连续量的话, 讲法都不一致. 但他那个主张的实质是: 点和数是离散量, 必须同几何上的连续量区别开来. 在算术上没有连续集合 (连续统). 至于就两门学科的关系来说, 他认为算术 (即数论) 是更准确的, 因为数比几何概念更易于抽象化. 他又认为算术要先行于几何, 因为在考察三角形之前先需要有三这个数.

时间在两个方向上是潜在无穷的。

【Euclid 的《几何原本》】

一线的两端是点. 从任一点到任一点做直线是可能的. 【他假设线是唯一的】把有限直线不断沿着直线延长是可能的。

延长 AB 到 AF, 延长 AC 到 AG, 使得 $BF=CG$, 由三角形全等, 得到角 3=角 4, 角 5=角 6, 从而证明等腰三角形两底角相等。

希腊人不承认无理数。

《几何原本》第 5 章, 根据 Eudoxus 的工作写的“比例论”, 是 Euclid 几何的最大成就。

求两数最大公度 (公因子) 的步骤. Euclid 描述这个步骤的说法是: 若 A 与 B 是两数且 $B < A$,

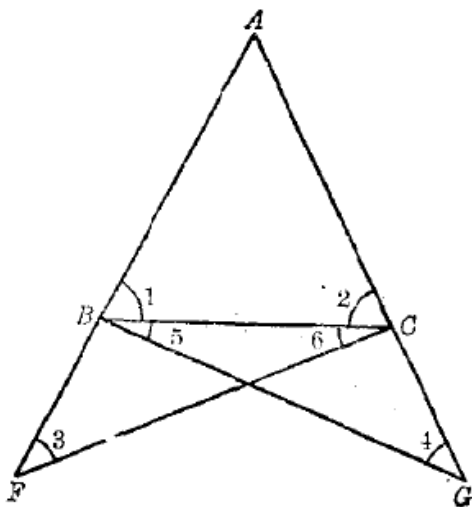


Figure 1.6: [证明等腰三角形两底角相等]

从 4 减去足够多次的 B 一直到余数 小于 B. 然后再从 B 减去足够多次的 C 直到余数小于 C. 这样一直做下去. 若 A 与 B 互质, 最后余数是 1. 那样 1 就是它们最大公因数. 若 A 与 B 不互质, 就会在某一阶段有最后一数量尽前一个数的情况. 这最后的数便是 A 与 B 的最大公因数. 这种步骤现今称作 Euclid 算法.

可以每个顶点用 3 个正方形构成立方体, 用 3 个正五边形构成正二十面体。

先给出一系列公理, 然后推理。

对于无限远空间所必须成立的任何说法, 其具体意义总是含糊不清的。【但是说两直线在有限远相交, 但无法指出有限远在何处, 是不是含糊不清呢?】

要假定移动图形而不改变图形的性质, 需要对物理空间做很多限定。

两条直线可以相交但是没有公共点。

【Apollonius 的《圆锥曲线》】

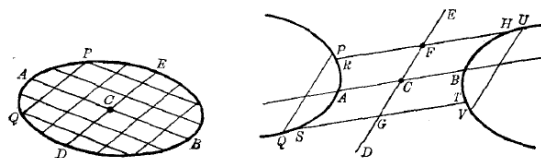


Figure 1.7: 弦中点

椭圆中弦 PQ, 平行于弦 PQ 的所有弦的中点在一条直线上, 记为 AB. 过 AB 的中点做弦 DE 平行于 PQ, 则 DE 上所有的点是平行于 AB 的弦的中点。

【切线与面积】1.2.1 过 O 做圆锥曲线的两切线 OP 和 OQ, 做弦 RS 和 R'S' 分别平行于两切线, 交点 J, 则有 $\frac{RJ \cdot JS}{R'J \cdot JS'} = \frac{OP^2}{OQ^2}$

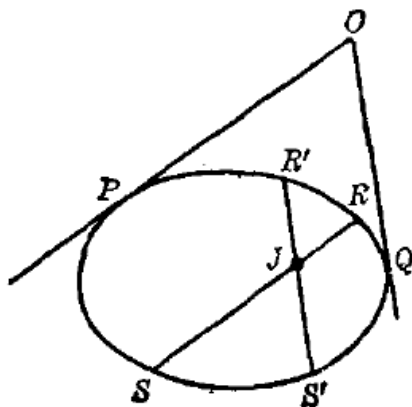


Figure 1.8: 【切线与面积】

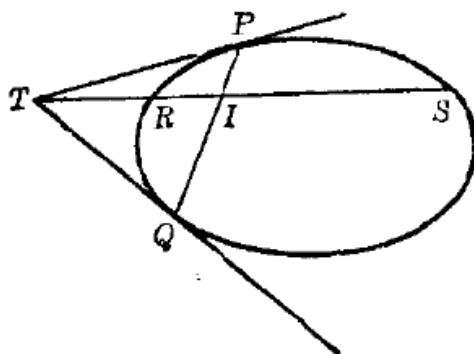


Figure 1.9: 【调和 1】

【调和 1】 $\frac{TR}{TS} = \frac{IR}{IS}$

【调和 2】 $\frac{OR}{OS} = \frac{VR}{VS}$

【焦距】圆锥曲线上点 P 与两焦点连线与切线交于等角。P 与两焦点连线之和或差等于 $A'A$

Euclid 部分解决一个问题：与四根固定直线距离 p, q, r, s ，满足 $pq = \alpha rs$ ，其中 α 已知，求动点轨迹。Pappus 也早知道这动点是圆锥曲线。

希腊时期【公元 300 年-公元 600 年】

1.2.2 近代【公元 1689 年-公元 1917 年】

1.2.3 现代【公元 1917 年-现在】

1.3 数学的思维方式与创新-84-北大 (丘维声)

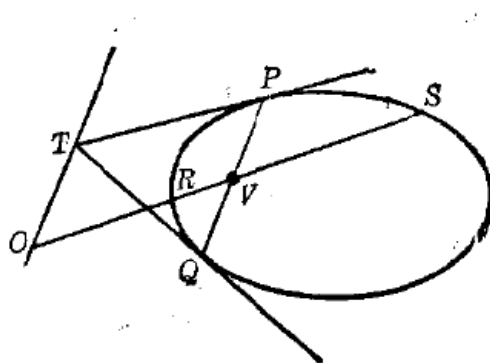


Figure 1.10: 【调和 2】

1.3.1 数学史上的重大创新

分析：微积分的创立和完备化

观察现象主要特征，抽象出概念。探索。猜测。证明。

如求瞬时速度， $s = at^2$, $\frac{\Delta s}{\Delta t} = 2at + \Delta t$ ，牛顿忽略 Δt ，叫做留数，留下来的数。

如何解决不等于零又等于零的矛盾？

Δt 趋近于 0，无限，柯西引入极限的概念：函数在 x_0 附近有定义，在 x_0 可以没有定义，如果存在 c 使得 x 趋近于 x_0 但不等于 x_0 时， $|f(x) - c|$ 可以无限小，称 c 是 x 趋近于 x_0 时 $f(x)$ 的极限。

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, that when $0 < |x - x_0| < \delta$, we have $|f(x) - c| < \varepsilon$

几何：欧几里得几何到非欧几里得几何

从平直空间到弯曲空间。

从定义和公理，推导和推演。平行公设。高斯和波约，罗巴切夫斯基（1829 年），平行公设只是假设。现实世界如何实现非欧几何的用处。高斯想法把球面本身看做一个空间。后来黎曼发展了。弯曲空间的几何是黎曼几何，如球面上的直线定义为大圆的一部分，这样发现过已知直线外一点不存在其平行线。在双曲几何模型下可以实现罗巴切夫斯基几何。

代数学中

伽瓦罗，代数学从研究方程的根，到研究代数系统的结构和保持运算的映射。

1.3.2 集合的划分

交空并全的划分方法：模 n 同余是 \mathbb{Z} 的一个二元关系。两个集合的笛卡尔积

a 与 b 模 n 同余： $(a, b) \in \bigcup_{i=0}^{n-1} H_i \times H_i \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. 抽象：非空集合 S , $S \times S$ 的子集 W 是 S 是上

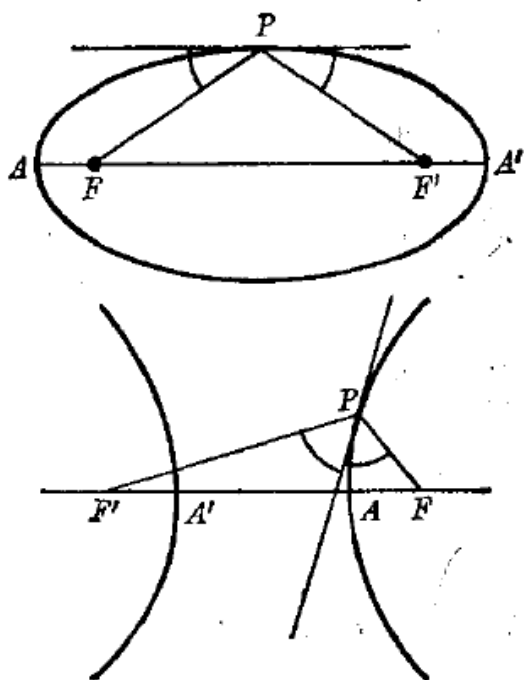


Figure 1.11: 【焦距】

的二元关系，有关系的记为 aWb

等价关系

反身性，对称性，传递性， $a \sim b$. $a \sim b \Leftrightarrow b \sim a$. $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$
 \bar{a} 是 a 确定的等价类， $\{x \in S | x \sim a\}$ 。易有 $\bar{x} = \bar{y} \Leftrightarrow x \sim y$ 。

定理 1: 集合 S 上等价关系 \sim 给出的等价类的集合是 S 的一个划分。

证明思路: 需要证明并全，交空。交空比较难，需要研究等价类的性质。等价类的代表不唯一。

Step1) It is obvious that $\cup_{a \in S} \bar{a} \subseteq S$, and for any $b \in S$, we have $b \in \bar{b} \in \cup_{a \in S} \bar{a}$, this means $S \subseteq \cup_{a \in S} \bar{a}$, so $\cup_{a \in S} \bar{a} = S$.

Step2) To prove $\bar{x} \neq \bar{y} \Rightarrow \bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$, we prove the contrapositive $\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset \Rightarrow \bar{x} = \bar{y}$, and this is easy to prove.

1.4 Space

1.4.1 Operation Defination

Element

we define the basic element as following, where \mathbf{e}_i means $x_i = 1, x_j = 0$ for all $j \neq i$. When we say a vector, we normally mean a column vector.

$$\vec{x} = \mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots]^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum x_i \mathbf{e}_i \quad (1.1)$$

We define Kronecker sign to simply the description of $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$.

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (1.2)$$

The set of bases $\{\mathbf{e}_i\} \xrightarrow{\text{apply}} \mathbf{x} \longrightarrow \{x_i\}$.

Dot Product

We define in algebra, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := \sum x_i y_i \delta_{ij} = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y}$.

Then the defination is restricted to the choose of the coordinate system. We take a look a the product with reflect $T : \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{T} \cdot \mathbf{x}$,

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = (a_{ik} b_{kj})^T = c_{ij}^T = c_{ji} = b_{jk} a_{ki} = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T \quad (1.3)$$

we have

$$(\mathbf{T} \cdot \mathbf{x})^T (\mathbf{T} \cdot \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T (\mathbf{T}^T \mathbf{T}) \mathbf{y} = [(\mathbf{T}^T \mathbf{T}) \mathbf{x}]^T \mathbf{y} \quad (1.4)$$

We name T a Contractive mapping when $\mathbf{T}^T \mathbf{T} \leq \theta, 0 \leq \theta \leq 1$.

geometry Properties

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\| &:= \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} \\ \cos \theta_{x,y} &:= \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Add

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &:= \sum (x_i + y_i) \mathbf{e}_i \\ k \cdot \mathbf{x} &:= \sum k x_i \mathbf{e}_i \end{aligned} \quad (1.6)$$

Law $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$, law $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$ is not obvious in the view of Set Theory.

1.5 Euclid 空间

有序的 n 元组的全体称为 n 维 Euclid 空间, 记为 \mathbb{R}^n , 称 $\mathbf{p} = (p_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ 是 \mathbb{R}^n 的一个点。为便于研究, 本论文以 \mathbb{R}^3 为背景空间, 所涉及的函数默认为可微实值函数。如果实函数 f 的任意阶偏导数存在且连续, 则称函数是可微的 (或无限可微的, 或光滑的, 或 C^∞ 的)。

由于微分运算是函数的局部运算, 限制所讨论函数的定义域在 \mathbb{R}^3 中的任意开集, 所讨论的结论仍然成立。

自然坐标函数: 定义在 \mathbb{R}^n 上的实值函数 $x_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, 使得 $\mathbf{p} = (p_i)_{i=1}^n = (x_i(\mathbf{p}))_{i=1}^n$

切向量: 由 \mathbb{R}^n 中的二元组构成, $\mathbf{v}_{\mathbf{p}} = (\mathbf{p}, \mathbf{v})$, 其中 \mathbf{p} 是作用点, \mathbf{v} 是向量部分

切空间 $T_{\mathbf{p}}\mathbb{R}^n$: 作用点 $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ 的所有切向量的集合。利用向量加法与数量乘法使某点的切空间称为向量空间, 与背景空间存在非平凡同构。

向量场 \mathbf{V} : 作用于空间点的向量函数, $\mathbf{V}(\mathbf{p}) \in T_{\mathbf{p}}\mathbb{R}^n$

逐点化原理: $(\mathbf{V} + \mathbf{W})(\mathbf{p}) = \mathbf{V}(\mathbf{p}) + \mathbf{W}(\mathbf{p})$, $(f\mathbf{V})(\mathbf{p}) = f(\mathbf{p})\mathbf{V}(\mathbf{p})$

自然标架场: 定义 $\mathbf{U}_i = (\delta_j^i)_{j=1}^n$, 按 Einstein 求和约定, 有 $\mathbf{V}(\mathbf{p}) = v^i(\mathbf{p})\mathbf{U}_i(\mathbf{p})$, 称 v^i 为场的 Euclid 坐标函数, 其中 Kronecker δ 函数定义为:

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (1.7)$$

1.6 Reference