

09-07-Analysis

Created on 20220605.

Last modified on 2022 年 6 月 12 日.

目录

Chapter 1 Introduction

Chapter 2 Mathematical Analysis

a: 微分学, b: 积分学, c: 级数论,

2.1 微分学

2.2 积分学

2.3 级数论

Chapter 3 Non-standard analysis

概念上又可称为实无限分析

Chapter 4 function theory

函数论 a: 实变函数论, b: 单复变函数论, c: 多复变函数论, d: 函数逼近论, e: 调和分析, f: 复流形, g: 特殊函数论, h: 函数论其他学科

4.1 实变函数论

4.2 单复变函数论

4.3 多复变函数论

4.4 函数逼近论

4.5 调和分析

4.6 复流形

4.7 特殊函数论

4.8 函数论其他学科

Chapter 5 Functional Analysis

泛函分析 a: 线性算子理论, b: 变分法, c: 拓扑线性空间, d: 希尔伯特空间, e: 函数空间, f: 巴拿赫空间, g: 算子代数 h: 测度与积分, i: 广义函数论, j: 非线性泛函分析, k: 泛函分析其他学科。

5.1 线性算子理论

5.2 变分法

学习材料张恭庆。

参考书目: 1 G.Buttazzo, M. Giaquinta, S.Hildebrandt. One-dimensional Variational Problems, An Introduction. Clarendon Press, Oxford, 1998. 2 I.M.Gelfand, S.V.Fomin. Calculus of Variations(English translated by R.A.Silverman). Prentice Hall, 1964. 3 J.Jost, X Li-Jost, Calculus of Variations. Cambridge University Press, 1998. 4 张恭庆, 变分学讲义, 高等教育出版社

5.2.1 Introduction

泛函极值、临界值问题。临界值问题的处理需要引入拓扑学的知识形成“大范围变分学”。

找到求极值的必要条件、充分条件, 变分问题的求解时通过必要条件转化为常微分方程、偏微分方程求解。真正能用初等方法求解的常微分方程很有限。Dirichlet 指出特殊的调和方程可以通过变分来做, 漏洞是微分方程解的存在性转化为变分问题解的存在性, Dirichlet 不清楚存在不存在, 认为转化后解自然存在。Weierstrass 专门做数学严格化的人, 黎曼证明复变函数中的保形映射的存在性定理是依赖 Dirichlet 原理。Hilbert 把 Dirichlet 说清楚了, 说明了为什么解是存在的。从 Hilbert 后研究解的存在性。

变分析应用的学科: 力学、物理、ODE (动力系统)、PDE (特别是椭圆型方程)、几何 (如极小曲面、黎曼几何、Finsler 几何、测地线、调和映射、Yang-Mills 方程等, 另外一类是辛几何)、拓扑学 (福伦同调)、实分析、泛函分析、经济学 (拉姆塞)、控制论 (苏联盲人庞特里亚金)、工

程最优设计、图像处理、分形（具有微分和积分的不等式、等周不等式等）、数值方法（有限元即变分问题离散化、最优化方法）、概率论（随机变分理论）。

欧拉之后 2 个重要的发展：

变分-> 几何（辛几何）-> 拓扑-> 大范围变分。

与数值方法结合，产生有限元和最优化方法，用于工程应用。

起源于 1696 年约翰-伯努利的最速降线问题。牛顿、莱布尼兹都有解法。其中约翰用光的折射做出来，约翰的哥哥雅各布-伯努利用变分的思想做出来。Euler, Lagrange, Weierstrass, Hamilton, Jacobi 等都有很大贡献。

5.2.2 经典变分学

诺特定理。守恒律是给定泛函在群作用下的不变性。

5.2.3 存在性

5.2.4 应用

5.3 拓扑线性空间

5.4 希尔伯特空间

5.5 函数空间

5.6 巴拿赫空间

5.7 算子代数

5.8 测度与积分

5.9 广义函数论

5.10 非线性泛函分析

5.11 泛函分析其他学科