Chapter 1 Introduction

Today is 20211204, and I deciede to note down all of my knowledge about the math in this notebook.

1.1 分类

数学史不单独作为一章，分布在各个章节中。

1.1.1 Methodology

方法论，数学重要思想。

1.2 Space

1.2.1 Operation Defination

Element

we define the basic element $\vec{x} = \boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \ldots]^T = \Sigma x_i \boldsymbol{e_i}$, $\boldsymbol{e}_i$ means $x_i = 1, x_j = 0$ for all $j \neq i$. We define Kronecker sign to simply the description of $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j$.

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{1.1}$$

The set of bases $\{\boldsymbol{e}_i\} \overset{apply}{\longrightarrow} \boldsymbol{x} \longrightarrow \{x_i\}$.

Dot Product

We define in algebra, $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} := \sum x_i y_i \delta_{ij} = \boldsymbol{x}^T \cdot \boldsymbol{y}$.

Then the defination is restricted to the choose of the coordinate system. We take a look a the product with reflect $T : \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{x}$,

$$(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^T = (a_{ik} b_{kj})^T = c_{ij}^T = c_{ji} = b_{jk} a_{ki} = \boldsymbol{B}^T \cdot \boldsymbol{A}^T \tag{1.2}$$

we have

$$(\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{x})^T (\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T (\boldsymbol{T}^T \boldsymbol{T}) \boldsymbol{y} = [(\boldsymbol{T}^T \boldsymbol{T}) \boldsymbol{x}]^T \boldsymbol{y} \tag{1.3}$$

We name T a Contractive mapping when $\boldsymbol{T}^T \boldsymbol{T} \leqslant \theta, 0 \leqslant \theta \leqslant 1$.

geometry Properties

$$\begin{aligned} \parallel \boldsymbol{x} \parallel &:= \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}} \\ \cos \theta_{x,y} &:= \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}{\parallel \boldsymbol{x} \parallel \cdot \parallel \boldsymbol{y} \parallel} \end{aligned} \tag{1.4}$$

Add

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} &:= \sum (x_i + y_i) \boldsymbol{e}_i \\ k \cdot \boldsymbol{x} &:= \sum k x_i \boldsymbol{e}_i \end{aligned} \tag{1.5}$$

Law $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$, law $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$ is not obvious in the view of Set Theory.

1.3 Euclid 空间

有序的 n 元组的全体称为 n 维 Euclid 空间，记为 $\mathbb{R}^n$，称 $\boldsymbol{p} = (p_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个点。为便于研究，本论文以 $\mathbb{R}^3$ 为背景空间，所涉及的函数默认为可微实值函数。如果实函数 f 的任意阶偏导数存在且连续，则称函数是可微的（或无限可微的，或光滑的，或 C^∞ 的）。
由于微分运算是函数的局部运算，限制所讨论函数的定义域在 $\mathbb{R}^3$ 中的任意开集，所讨论的结论仍然成立。
自然坐标函数：定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的实值函数 $x_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，使得 $\boldsymbol{p} = (p_i)_{i=1}^n = (x_i(\boldsymbol{p}))_{i=1}^n$
切向量：由 $\mathbb{R}^n$ 中的二元组构成，$\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{p}} = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v})$，其中 $\boldsymbol{p}$ 是作用点，$\boldsymbol{v}$ 是向量部分
切空间 $T_p\mathbb{R}^n$: 作用点 $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$ 的所有切向量的集合。利用向量加法与数量乘法使某点的切空间称为向量空间，与背景空间存在非平凡同构。
向量场 $\boldsymbol{V}$: 作用于空间点的向量函数，$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{p}) \in T_p\mathbb{R}^n$
逐点化原理：$(\boldsymbol{V} + \boldsymbol{W})(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{p}) + \boldsymbol{W}(\boldsymbol{p})$，$(f\boldsymbol{V})(\boldsymbol{p}) = f(\boldsymbol{p})\boldsymbol{V}(\boldsymbol{p})$

自然标架场：定义 $\boldsymbol{U}_i = (\delta^i_j)^n_{j=1}$，按 Einstein 求和约定，有 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{p}) = v^i(\boldsymbol{p})\boldsymbol{U}_i(\boldsymbol{p})$, 称 v^i 为场的 Euclid 坐标函数，其中 Kronecker δ 函数定义为：

$$\delta^j_i = \begin{cases} 1,\ i = j \\ 0,\ i \neq j \end{cases} \tag{1.6}$$

1.4 Reference

Chapter 2 Methodology

2.1 History

2.2 数学的思维方式与创新-84-北大 (丘维声)

6,1039.

2.2.1 数学史上的重大创新

分析：微积分的创立和完备化

观察现象主要特征，抽象出概念。探索。猜测。证明。
如求瞬时速度，$s = at^2, \frac{\Delta s}{\Delta t} = 2at + \Delta t$，牛顿忽略 Δt，叫做留数，留下来的数。
如何解决不等于零又等于零的矛盾？
delta t 趋近于 0，无限，柯西引入极限的概念：函数在 x0 附近有定义，在 x0 可以没有定义，如果存在 c 使得 x 趋近于 x0 但不等于 x0 时，$|f(x) - c|$ 可以无限小，称 c 是 x 趋近于 x0 时 f(x) 的极限。
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$, that when $0 < |x - x_0| < \delta$, we have $|f(x) - c| < \varepsilon$

几何：欧几里得几何到非欧几里得几何

从平直空间到弯曲空间。
从定义和公理，推导和推演。平行公设。高斯和波约，罗巴切夫斯基（1829 年）, 平行公设只是假设。现实世界如何实现非欧几何的用处。高斯想法把球面本身看做一个空间。后来黎曼发展了。弯曲空间的几何是黎曼几何，如球面上的直线定义为大圆的一部分，这样发现过已知直线外一点不存在其平行线。在双曲几何模型下可以实现罗巴切夫斯基几何。

代数学中

伽瓦罗，代数学从研究方程的根，到研究代数系统的结构和保持运算的映射。

2.2.2 集合的划分

交空并全的划分方法：模 n 同余是 $\mathbb{Z}$ 的一个二元关系。两个集合的笛卡尔积
a 与 b 模 n 同余：$(a,b) \in \bigcup_{i=0}^{n-1} H_i \times H_i \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. 抽象：非空集合 s，$S \times S$ 的子集 W 是 S 是上的二元关系，有关系的记为 aWb

等价关系

反身性，对称性，传递性，$a \sim b$. $a \sim b \Leftrightarrow b \sim a$. $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$
$\bar{a}$ 是 a 确定的等价类，$\{x \in S | x \sim a\}$。易有 $\bar{x} = \bar{y} \Leftrightarrow x \sim y$ 。

定理 1：集合 S 上等价关系 $\sim$ 给出的等价类的集合是 S 的一个划分。
证明思路：需要证明并全，交空。交空比较难，需要研究等价类的性质。等价类的代表不唯一。
Step1) It is obvious that $\cup_{a \in S} \bar{a} \subseteq S$，and for any $b \in S$, we have $b \in \bar{b} \in \cup_{a \in S} \bar{a}$, this means $S \subseteq \cup_{a \in S} \bar{a}$, so $\cup_{a \in S} \bar{a} = S$.
Step2) To prove $\bar{x} \neq \bar{y} \Rightarrow \bar{x} \bigcap \bar{y} = \varnothing$, we prove the contrapositive $\bar{x} \bigcap \bar{y} \neq \varnothing \Rightarrow \bar{x} = \bar{y}$, and this is easy to prove.

Chapter 3 Logic

数理逻辑与数学基础 a：演绎逻辑学（也称符号逻辑学），b：证明论（也称元数学），c：递归论，d：模型论，e：公理集合论，f：数学基础，g：数理逻辑与数学基础其他学科

Chapter 4 NumberTheory

a：初等数论，b：解析数论，c：代数数论，d：超越数论，e：丢番图逼近，f：数的几何（几何数论），g：概率数论，h：计算数论，i：组合数论，j：算术代数几何 k：数论其他学科

Chapter 5 Algebra

a：线性代数，b：群论，c：域论，d：李群，e：李代数，f：Kac-Moody 代数，g：环论（包括交换环与交换代数，结合环与结合代数，非结合环与非结合代数等），h：模论，i：格论，j：泛代数理论，k：范畴论，l：同调代数，m：代数 K 理论，n：微分代数，o：代数编码理论，p：代数学其他学科。

5.1 GroupTheory

5.2 GroupRepresentation

5.2.1 Introduction

丘维声。

运算：笛卡尔积 $S \times S \mapsto S$ 是集合 S 的二元代数运算。现代数学的鲜明特征是研究有各种运算的集合，称为代数系统。

现代数学的两大特征，1）研究代数系统的结构;2）利用同态映射研究代数系统结构。

核心：群表示论是研究 G 到各个线性空间的可逆线性变换群的各种同态映射，以获得 G 结构的完整信息。

群表示论是研究群结构的最强有力的工具。应用如晶体学，量子力学，抽象调和分析，组合数学，密码学，纠错编码

必备参考书，《抽象代数基础》丘维声，高教出版社，《高等代数学习指导书下》丘维声，清华大学。

环，域，群

交换环，乘法可交换。单位元。

例子，星期 i，记为 $\bar{i} = \{7k + i\} \, |k \in \mathbb{Z}$, 收集起 $\bar{i}$ 可以实现整数的划分。类似的，定义模 m 剩余类：

$$\mathbb{Z}_m = \{\bar{i} | i = 1, \cdots, m-1\} \tag{5.1}$$

表 5.1: algebra system

名称	运算	性质	举例
ring	加法; 乘法	交换，结合，0 元，负元; 结合，左右分配律	整数集 $\mathbb{Z}$，偶数集 $2\mathbb{Z}$, 一元实系数多项式 $\mathbb{R}(x)$, 实 n 阶矩阵 $M_n(\mathbb{R})$

定义加法和乘法, 有模 m 剩余类环

$$\begin{aligned} \bar{i}+\bar{j} &= \overline{i+j} \\ \bar{i}\cdot\bar{j} &= \overline{i\cdot j} \end{aligned} \tag{5.2}$$

可逆元，单位 a：$a \in ringR, \exists b \in R, ab = ba = e$

左零因子 a：$a \neq 0, \exists c \neq 0, ac = 0$

例子：$\mathbb{Z}_8$, 零因子 2,4,6；可逆元 3,5,7；

例子：$\mathbb{Z}_7$，每个非零元都可逆;

域 F：有单位元 e 的环，且每个非零元都可逆。例子：有理数集，实数集，复数集 $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{Z}$ 域 F 中可以定义除法。

群 G: 只有乘法，结合律，单位元，每个元素有逆元。

例子：$\mathbb{Z}_m^*$:$\mathbb{Z}_m$ 所有可逆元的集合，发现只对乘法封闭, 称为 Zm 的单位群；如域 F 上的所有可逆矩阵的集合 $Gl_n(\mathbb{F})$, 只有乘法，称为域 $\mathbb{F}$ 上的一般线性群。

阿贝尔群：乘法可交换。

例子：$GL(V)$，域 F 上的线性空间 V 的所有可逆线性变换，对于映射的乘法行程的 V 上可逆线性变换群。子群：H<G

等价关系与左陪集

研究 G 的第一个途径：利用子群 H 研究 G.

集合的划分与等价关系。对于 $a,b \in G$, 定义 $a\ b :\Leftrightarrow b^{-1}a \in H$，易有关系 具有反射性（e 在 H 中），对称性，传递性，所以这是等价关系。

定义 a 的等价类：

$$\begin{aligned} \bar{a} &:= \{x \in G | x\ a\} \\ &:= \left\{x \in G | a^{-1}x \in H\right\} \\ &= \{x \in G | x = ah, h \in H\} \\ &= \{ah | h \in H\} \\ &=: aH \end{aligned} \tag{5.3}$$

aH 称为以 a 为代表的 H 的一个左陪集，是一个等价类。
根据等价类的性质，有 1）$aH = bH \Leftrightarrow b^{-1}a \in H$;2) aH 与 bH 或者相等，或者不相交（交集为空集）。所以 H 的所有左陪集给出 G 的一个划分，记为 G/H, 称为 G 关于 H 的左商集。G/H 的基数称为 G 关于 H 的指数，记为 [G:H]。基数相同可建立双射。
G 关于 H 的左陪集分解：$[G:H] = r, G = eH \bigcup a_1H \bigcup \cdots \bigcup a_{r-1}H$。
拉格朗日定理：对于有限群 G，易有其元素个数 $|G| = |H|[G:H]$，即任何子群的阶是群的阶的因数。推论：1)n 阶群 G 的任意元素 a，有 $a^n \in G$;2) 素数阶群是循环群。

同态

研究 G 的第二个途径：通过研究 G 到 G' 的保持运算的映射，同态映射，简称同态。同态要变，是函数。
通常利用 G 到 Ω 的同态，等价于 G 在 Ω 的作用。既可以研究 G 的结构，又可以对 Ω 的性质有了解
$S(\Omega)$:Ω 的全变换群，Full Transformation Group on Set Ω, Ω 自身的所有双射组成的集合，对于映射的乘法构成的一个群.

作业

1. 环 R 中，0a=a0=0
2. 有 e 的环中，零因子不是可逆元
3.$\mathbb{Z}_m$ 中每个元素要么是可逆元要么是零因子；
4. $M_n(\mathbb{F})$ 中，每个矩阵是可逆矩阵或者是零因子。

5.2.2 Abel 群的表示

映射 (Map)

映射：$f: a \mapsto b \Leftrightarrow f(a) = b$。$f(x)$ f of x 原象，象。映射 f 的定义域 (domain)A，陪域 (codomain)B。映射得到的所有象的集合叫值域，记作 $f(A)$, 或 Imf。

$$\begin{aligned} &f: a \mapsto b \Leftrightarrow f(a) = b \\ &f: A \to B \end{aligned} \tag{5.4}$$

映射通常关心 is it one one? Is is onto?
满射，onto, 到上：$f(A) = B$
单射，1-1, 一一的，每个 a 对应的 b 是不同的。
双射，两个集合一一对应。

逆映射。对于 $f:A\to B, g:B\to A$, 有 $g\circ f=1_A, f\circ g=1_B$。可逆的 f 是双射。

线性映射、线性变换是线性空间的同态映射，有点乘和加法。
补空间：域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 U<V, 则 $\exists W, V=U\oplus W$。对于实内积空间 V，U 是有限维的，$W=U^{\perp}$, 正交补空间，唯一的。
投影变换：域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 $V=U\oplus W$, 有 $\alpha=\alpha_U+\alpha_W$, 有投影变换 $P_U:\alpha\mapsto\alpha_U$. 投影变换保持加法和数乘，是 V 上的线性变换。投影是同态映射。
几何空间：以原点 O 为起点的定位向量组成的实线性空间。知道一空间点在两个坐标面的投影坐标可完全确定点。

群的同态

同态映射：G 到 G' 的映射 $\sigma:\sigma(a,b)=\sigma(a)\sigma(b)$。单射的话是单同态。满射是满同态。双射是同构，此时两个群同构，$G\cong G'$。
同态的性质：1）单位元、逆元、子群映射过去是 G’ 的单位元、逆元、子群。例如 $G<G\Rightarrow\sigma(G)=Im\sigma<G'$，同态的像是 G' 的子群
刻化单同态：找到映射成单位元的原象，定义同态的核，$Ker\sigma:=\{a\in G|\sigma(a)=e'\}$. 易有同态的核是 G 的子群。对于单同态，$Ker\sigma=\{e\}$.
子集乘法：类似与点乘，a 的所有和 b 的所有的乘积方式的组合。乘法满足结合律。

正规子群

$\forall k\in\ker\sigma, \forall g\in G$, we have:

$$\begin{aligned}
&\sigma(gkg^{-1})=\sigma(g)\sigma(k)\sigma(g^{-1})=e'\\
&\therefore gkg^{-1}\in\ker\sigma\\
&\therefore g\ker\sigma g^{-1}\subset\ker\sigma\\
&\&\ g^{-1}\ker\sigma g\subset\ker\sigma\\
&\therefore g\ker\sigma g^{-1}=\ker\sigma
\end{aligned}\tag{5.5}$$

normal subgroup 正规子群:$H\lhd G:\forall g\in G, gHg^{-1}=H$, gHg^{-1} 是 g 的共轭子群。
性质：$H\lhd G\Leftrightarrow gHg^{-1}=H,\forall g\in G\Leftrightarrow gH=Hg$,H 的左右陪集相等；
G 关于正规子群 H 的商群：规定正规子群 H 的商群 G/H 乘法：$(aH)(bH)=abH$

5.2.3 群同态基本定理

$$\begin{aligned}\psi :&G/\ker\sigma \to Im\sigma \\ &a(\ker\sigma) \mapsto \sigma(a)\end{aligned} \tag{5.6}$$

看映射 ψ 的性质：

$$\left.\begin{aligned}&a(\ker\sigma) = b(\ker\sigma) \\ &\Leftrightarrow b^{-1}a \in \ker\sigma \\ &\sigma(b^{-1}a) = e' \\ &\therefore \sigma(a) = \sigma(b)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \psi\ is\ surjection \tag{5.7}$$

从是映射、是单射、是满的，得到是双射；

Let $K = \ker\sigma$, $\psi[(aK)(bK)] = \psi(abK) = \sigma(ab) = \psi(aK)\psi(bK)$, 所以保持运算，所以是同构，所以 $G/\ker\sigma \cong Im\sigma$

群同态基本定理：$\ker\sigma \lhd G$ & $G/\ker\sigma \cong Im\sigma$

5.2.4 线性表示

$GL(V)$: 对于群 G，域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间 V，G 到 V 的所有可逆线性变换的集合，对于映射的乘法成为一个可逆线性变换群。

G 到 GL(V) 的同态 ψ 是 G 在 $\mathbb{K}$ 上的线性表示，简称为 $\mathbb{K}$ 表示，或者简称为表示。

V 叫做表示空间，表示次数 $\deg\psi := \dim V$

(ψ, V)

如用两个视图可完全确定空间曲线，即做了两个同态。

$\ker\psi = \{e_G\}$,ψ 是忠实的；

$\ker\psi = G$, ψ 是平凡的；|、称一次的平凡表示 ψ 是 G 的主表示，单位表示，记作 1_G;

$dimV = n$ 时，有 $\psi(g)$ 在基 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 下的矩阵 $\Phi(g)$ 是 $\mathbb{K}$ 上的可逆矩阵，由同构 $GL(V) \cong GLn(\mathbb{K})$，有 G 到 $GLn(\mathbb{K})$ 的同态 Φ，称为 G 在 $\mathbb{K}$ 上的 n 次矩阵表示。

Φ 称为是 ψ 提供的

表示的等价类

等价关系：对于 G 的 2 个 k 表示，$(\phi, V), (\psi, W)$,∃v 到 w 的线性空间的同构 σ，定义 $\psi(g)\sigma = \sigma\phi(g), \forall g \in G$, 这种 G 的所有 K 表示的集合 Ω 上的二元关系，易有具有反射性，对称性，传递性，从而是等价关系。通常关注 G 的 k 表示的等价类。

$(\phi, V), (\psi, W)$ 等价，取基后的矩阵记为 $\Phi(g)|\{\alpha_i, \cdots\}, \Psi(g)|\{\beta_i, \cdots\}$, 同构 σ 把 V 的基映射到

W 上的 S，有 $\sigma(\{\alpha,\cdots\})=\{\beta,\cdots\}S$，$\therefore \Psi(g)S=S\Phi(g)$. 所以 G 在 K 的 2 个矩阵表示 Ψ,Φ 等价：次数一样且 $\forall g\in G,\Psi=S\Phi(g)S^{-1}$. 所以群 G 的 2 个 K 表示 $(\phi,V),(\psi,W)$ 等价，$\Leftrightarrow$K 表示提供的矩阵表示 Ψ,Φ 等价。

例：1 次表示

G 在 K 上的 1 次矩阵表示 $\Phi:G\to\mathbb{K}^*$; 非零元集合。映射是通用的不对定义域做要求，陪域是域的子集的映射叫函数。称为 G 上的 K* 函数，且由于同态保持运算，有 $\Phi(gh)=\Phi(g)\Phi(h),\forall g,h\in G$, and $\Phi(e)=1$, where 1 is the unit of K*. 所以一次表示是 G 到 K* 的保持运算的函数。

例：实数和加法的 1 次实表示

$f_a(x)=e^{ax}$ 是 $\mathbb{R},+$ 的 1 次实表示。

例：实数和加法的 1 次复表示

$f_a(x)=e^{iax}$ 是 $(\mathbb{R},+)$ 的 1 次实表示。

$$\begin{aligned} f:(\mathbb{R},+)&\to\mathbb{C}^* \\ x&\mapsto e^{iax} \end{aligned} \tag{5.8}$$

Chapter 6 Geometry

这里把代数几何也包括进来。

a：几何学基础，b：欧氏几何学，c：非欧几何学（包括黎曼几何学等），d：球面几何学，e：向量和张量分析，f：仿射几何学，g：射影几何学，h：微分几何学，i：分数维几何，j：计算几何学，k：几何学其他学科。

6.1 Differential Geometry

6.1.1 摘要

以梁灿彬课程为主。

6.1.2 Topological Space

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ is C^0 (读作 c nought，C^k 意思是 k 阶导函数存在且连续)，if Y 得到任意开区间的“逆像”（$f^{-1}[B]:=\{x\in X|f(x)\in B\}$）是 x 的开区间之并，open set 之并。

$x\hookrightarrow y$, 一般用于表示 inclusion 或 embedding（嵌入）。在这里通常表示这个 map 具有 2 个性质，1）injective，1 个 y 只对应 1 个 x；2）structure-preserving，不同 x 之间的关系和对应 y 之间的关系保持，如 $X1<X2$, 映射过去后 $y1<y2$.

$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$，m 个 n 元函数。

X 的所有子集记为 $\mathscr{P}$

$\mathscr{T}$，X 的一些开集的集合，称为 X 的一个拓扑。选拓扑是指定集合中的哪些子集的开的。先问 set 的拓扑是什么，再问开不开。

$$
\begin{aligned}
&X,\varnothing\in\mathscr{T}\\
&O_i\in\mathscr{T},i=1,\cdots,n\Longrightarrow\bigcap_{i=1}^{n}O_i\in\mathscr{T},\\
&O_\alpha\in\mathscr{T},\forall\alpha,\Longrightarrow\bigcup_{\alpha}O_\alpha\in\mathscr{T},
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

$\mathscr{T} = \{\cdots\}$, 离散拓扑，开集最多；$\mathscr{T} = \{X, \varnothing\}$, 凝聚拓扑，开集最少。

$\mathbb{R}^1$, open interval;$\mathbb{R}^2$, open disk;$\mathbb{R}^n$, open ball;

$B(X_0, r) := \{x_i \in \mathbb{R}^n || x_i - x_0| \leq r\}$

usual topology: $\mathscr{T}_u := \{$可表为开球之并的集合$\}$, 一般认为 $\mathbb{R}^n \in \mathscr{T}_u$。$\in$ 属于。

$(X, \mathscr{T})$, 拓扑空间 X；$A \subset X$ $(A, \mathscr{S})$，拓扑子空间。$\subset$ 含于。

其中 $\mathscr{S} := \{V \subset A | \exists O \in \mathscr{T}, s.t. O \cap A = V\}$, $\mathscr{S}$ 由 $\mathscr{T}$ 诱导出。诱导拓扑的定义是，可由父集合中的拓扑定义的开集，交子集得到的集合。

open subset, 能写成开区间之并的 subset

例如，$(\mathbb{R}^2, \mathscr{T}_u)$, 取子集为圆周，则 A 用 $\mathscr{T}_u$ 衡量不是开集，但是用 $\mathscr{T}_u$ 的诱导拓扑衡量，即 $\mathscr{T}_u$ 决定的开集的交集，衡量是开集。

6.1.3 Homeomorphism, 同胚

有拓扑结构的空间，映射 map 的连续性有意义。

$f : X \to Y$ is C^0 if $O \in \mathscr{S} \to f^{-1}[O] \in \mathscr{T}$。即 X 中由 X 的拓扑定义的开集 O'，映射到 Y 上后，变成了 Y 上的 X 的拓扑的诱导拓扑下的开集。即映射到 Y 上后，得到的这个集合 O，这个集合 O 的子集可以由 X 的拓扑定义的开集，交上集合 O 得到。

C^0 ，continus; C^1，可微，是流形；C^k，直到 k 阶导数存在且连续，C^∞，光滑。

无附加 structure, 只能说 one one，onto，有了附加 structure 可以讨论 continus。

同胚：存在一个 one one，onto，f 和 f^{-1} 均 C^0。

微分同胚：one one，onto，f 和 f^{-1} 均 C^∞。即 one one，onto，正反光滑。

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is C^0 at $x \in \mathbb{R}$, if $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t. |x' - x| < \delta \to |f(x') - f(x)| < \delta$, 这样定义 C^0 需要用到距离，附加的 structure

6.1.4 Manifold

局部像 $\mathbb{R}^n$

Given a topological space $(M, \mathscr{T})$, if $M = \cup_\alpha O_\alpha, O_\alpha \in \mathscr{T}$, the $\{O_\alpha\}$ is an open cover.

$$O_\alpha \xrightarrow[homeo.]{\psi_\alpha} V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$$

$$O_\alpha \cap 0_\beta \neq \varnothing \Longrightarrow \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} \ is\ C^\infty，\text{[注：compatibility, 相容]}$$

Then M is a manifold. 其中，复合映射 $f \circ g$, 从右向左结合，先作用 g，再作用 f。注意到上式的 $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，$\psi_\alpha[O_\alpha \cap 0_\beta] \to \psi_\beta[O_\alpha \cap 0_\beta]$ 是 n 个 n 元函数。

Ψ 美国一般读作 sai，ξ, 这个一般读作 c，和英文字母 c 一个音。

(O_α, ψ_α) 叫做坐标系，或 chart（图）, 其中 O_α 是坐标域。$\{O_\alpha, \psi_\alpha\}$ 叫做图册，atlas。

拓扑空间 M 可由不同的图册定义不同的流形，这两个图册中，坐标域有交集时，若矛盾，称这 2 个流形的微分结构不同；否则就是同一个微分流形，将图册并起来。

例子：Is $\mathbb{R}^2$ a manifold? We try to find an open cover, it is easy that if $\{O_\alpha, \psi_\alpha\}$ is trival, which means that $O_\alpha = \mathbb{R}^2$, and $\psi_\alpha(x) = x$. One set can cover means it is trival.

Chapter 7 Topology

a：点集拓扑学，b：代数拓扑学，c：同伦论，d：低维拓扑学，e：同调论，f：维数论，g：格上拓扑学，h：纤维丛论，i：几何拓扑学，j：奇点理论，k：微分拓扑学，l：拓扑学其他学科。

7.1 AlgebraicTopology

7.1.1 摘要

拓扑空间概念、性质、构造方法（如映射锥）基本群的计算方法奇异同调群 3 个定理：同伦不变性，正合序列，切除定理奇异上同调（有环结构），泛系数定理，Kűnneth 定理代数拓扑通过寻找拓扑不变量给拓扑空间做分类。通过函子，把输入的拓扑空间变成群，把映射对应为同态，把同胚对应为同构。梦想是通过证明同构能够断言空间同胚。梦想还未实现，目前三维流形的分类为完成。

7.1.2 拓扑空间

通常研究连续映射、度量空间
性质：紧致性（任意开覆盖有子覆盖），连通性（不能表示成不相交的开子集之并），道路连通，分离性
同胚：对于对于拓扑空间 X 和 Y，称 $X \cong Y$，如果对于 $X \underset{\text{g}}{\overset{\text{f}}{\rightleftarrows}} Y$，有 $g \circ f = 1_X, f \circ g = 1_Y$
拓扑性质：同胚意义下不变的性质

Chapter 8 Mathematical Analysis

a：微分学，b：积分学，c：级数论,

Chapter 9 Non-standard analysis

概念上又可称为实无限分析

Chapter 10 function theory

函数论 a：实变函数论，b：单复变函数论，c：多复变函数论，d：函数逼近论，e：调和分析，f：复流形，g：特殊函数论，h：函数论其他学科。

Chapter 11 Functional Analysis

泛函分析 a：线性算子理论，b：变分法，c：拓扑线性空间，d：希尔伯特空间，e：函数空间，f：巴拿赫空间，g：算子代数 h：测度与积分，i：广义函数论，j：非线性泛函分析，k：泛函分析其他学科。

Chapter 12 Ordinary differential equation

常微分方程 a：定性理论，b：稳定性理论。c：解析理论，d：常微分方程其他学科。

Chapter 13 Partial differential equation

偏微分方程

a：椭圆型偏微分方程，b：双曲型偏微分方程，c：抛物型偏微分方程，d：非线性偏微分方程，e：偏微分方程其他学科。

Chapter 14 Integral equation

积分方程

Chapter 15 Mathematical Physics

这里把动力系统放进来

动力系统 a：微分动力系统，b：拓扑动力系统，c：复动力系统，d：动力系统其他学科。

1、微分方程的解算：很多物理问题，比如在经典力学和量子力学中求解运动方程，都可以被归结为求解一定边界条件下的微分方程。因此求解微分方程成为数学物理的最重要组成部分。相关的数学工具包括：常微分方程的求解偏微分方程求解特殊函数积分变换复变函数论 2、场的研究（场论）：场是现代物理的主要研究对象。电动力学研究电磁场；广义相对论研究引力场；规范场论研究规范场。对不同的场要应用不同的数学工具，包括：矢量分析张量分析微分几何 3、对称性的研究：对称性是物理中的重要概念。它是守恒律的基础，在晶体学和量子场论中都有重要应用。对称性由对称群或相关的代数结构描述，研究它的数学工具是：群论表示论 4、作用量（action）理论：作用量理论被广泛应用于物理学的各个领域，例如分析力学和路径积分。相关的数学工具包括：变分法泛函分析

Chapter 16 Computational Mathematics

计算数学 a：插值法与逼近论，b：常微分方程数值解，c：偏微分方程数值解，d：积分方程数值解，e：数值代数，f：连续问题离散化方法，g：随机数值实验，h：误差分析，i：计算数学其他学科。

Chapter 17 Probability Theory

概率论 a：几何概率，b：概率分布，c：极限理论，d：随机过程（包括正态过程与平稳过程、点过程等），e：马尔可夫过程，f：随机分析，g：鞅论，h：应用概率论（具体应用入有关学科），i：概率论其他学科。

Chapter 18 Statistics

数理统计学 a：抽样理论（包括抽样分布、抽样调查等），b：假设检验，c：非参数统计，d：方差分析，e：相关回归分析，f：统计推断，g：贝叶斯统计（包括参数估计等），h：试验设计，i：多元分析，j：统计判决理论，k：时间序列分析，l：数理统计学其他学科。

应用统计数学 a：统计质量控制，b：可靠性数学，c：保险数学，d：统计模拟。

18.1 Information Throry

香农第一定理（可变长无失真信源编码定理。霍夫曼编码也称为最佳编码，由 Huffman1952 年提出，压缩的极限是不同符号用不同的编码，如果做到每个符号的代码长度等于它出现概率的对数，则编码总长度就是信息熵。）香农第二定理（有噪信道编码定理）香农第三定理（保失真度准则下的有失真信源编码定理）

Shannon, 1948 年 10 月，A Mathematical Theory of Communication，提出信息熵：

$$H(X) = -\sum_i p_i log p_i \tag{18.1}$$

提出比特单位。一段信息的信息量是固定的，称为信息熵。无论怎么压缩，信息熵是无失真信源编码的极限值若编码的平均码长小于信息熵值，必然发生差错（也就是有损）。

信道容量 C 计算公式：

$$C = B * log(1 + \frac{S}{N}) \tag{18.2}$$

B 为信道带宽；S/N 为信噪比，通常用分贝（dB）表示。噪声大，信噪比接近 0，C 结果接近 0。离路由器越远，信噪比越小，网速约下降。

18.2 Models

统计模型

18.2.1 Fitts' Law

Paul Fitts 于 1954 年提出。是一个人机互动以及人体工程学中人类活动的模型。它预测了快速移动到目标区域所需的时间是目标区域的距离和目标区域大小的函数。费兹法则多用于表现指，点动作的概念模型。无论是用手或手指进行接触，或是在电脑屏幕上用假想的设备（例如，鼠标）进行虚拟的触碰。

费兹法则可用多种不同公式表达，比较普通用的是，用一维的 Shannon 公式（Mackenzie, 约克大学教授提出，因其与香农定律相似而命名）：从一个起始位置移动到一个最终目标所需的时间由两个参数来决定，到目标的距离和目标的大小（上图中的 D 与 W），用数学公式表达为时间 T = a + b log2(D/W+1)。T 是完成动作的时间 a 代表装置开始结束的时间，b 表示该装置的速度，这些常数可从实测数据进行直线近似取得。D 是起始位置到目标中心的距离。w 是目标区域在运动维上的宽度。

Chapter 19 OperationalResearch

运筹学 a：线性规划，b：非线性规划，c：动态规划，d：组合最优化，e：参数规划，f：整数规划，g：随机规划，h：排队论，i：对策论（也称博弈论），j：库存论，k：决策论，l：搜索论，m：图论，n：统筹论，o：最优化，p：运筹学其他学科。

Chapter 20 Others

20.1 combinatorics

组合数学，离散数学

广义的组合数学就是离散数学，狭义的组合数学是离散数学除图论、代数结构、数理逻辑等的部分。

狭义的组合数学主要研究满足一定条件的组态（也称组合模型）的存在、计数以及构造等方面的问题。组合数学的主要内容有组合计数、组合设计、组合矩阵、组合优化（最佳组合）等。

20.2 fuzzy mathematics

模糊数学

由于模糊性概念已经找到了模糊集的描述方式，人们运用概念进行判断、评价、推理、决策和控制的过程也可以用模糊性数学的方法来描述。例如模糊聚类分析、模糊模式识别、模糊综合评判、模糊决策与模糊预测、模糊控制、模糊信息处理等。

20.3 Quantum mathematics

量子数学

20.4 Applied mathematics

应用数学