1 Background

1.1 Euclid 空间

有序的 n 元组的全体称为 n 维 Euclid 空间，记为 $\mathbb{R}^n$，称 $\boldsymbol{p} = (p_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个点。为便于研究，本论文以 $\mathbb{R}^3$ 为背景空间，所涉及的函数默认为可微实值函数。如果实函数 f 的任意阶偏导数存在且连续，则称函数是可微的（或无限可微的，或光滑的，或 C^∞ 的）。

由于微分运算是函数的局部运算，限制所讨论函数的定义域在 $\mathbb{R}^3$ 中的任意开集，所讨论的结论仍然成立。

自然坐标函数：定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的实值函数 $x_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，使得 $\boldsymbol{p} = (p_i)_{i=1}^n = (x_i(\boldsymbol{p}))_{i=1}^n$

切向量：由 $\mathbb{R}^n$ 中的二元组构成，$\boldsymbol{v_p} = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v})$，其中 $\boldsymbol{p}$ 是作用点，$\boldsymbol{v}$ 是向量部分

切空间 $T_p\mathbb{R}^n$: 作用点 $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$ 的所有切向量的集合。利用向量加法与数量乘法使某点的切空间称为向量空间，与背景空间存在非平凡同构。

向量场 $\boldsymbol{V}$: 作用于空间点的向量函数，$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{p}) \in T_p\mathbb{R}^n$

逐点化原理：$(\boldsymbol{V} + \boldsymbol{W})(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{p}) + \boldsymbol{W}(\boldsymbol{p})$，$(f\boldsymbol{V})(\boldsymbol{p}) = f(\boldsymbol{p})\boldsymbol{V}(\boldsymbol{p})$

自然标架场：定义 $\boldsymbol{U}_i = (\delta_j^i)_{j=1}^n$，按 Einstein 求和约定，有 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{p}) = v^i(\boldsymbol{p})\boldsymbol{U}_i(\boldsymbol{p})$, 称 v^i 为场的 Euclid 坐标函数，其中 Kronecker δ 函数定义为：

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1,\ i = j \\ 0,\ i \neq j \end{cases} \tag{1}$$