09-04-01-LinearAlgebra

Created on 20230405.

Last modified on 2023 年 6 月 23 日.

目录

Chapter 1 Vector

1.1 Basic Defination

we define the basic element as following, where $\boldsymbol{e}_i$ means $x_i = 1, x_j = 0$ for all $j \neq i$. When we say a vector, it means a column vector.

$$\vec{x} = \boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \dots]^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \Sigma x_i \boldsymbol{e_i} \tag{1.1}$$

We define Kronecker sign to simply the description of $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j$.

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{1.2}$$

The set of bases $\{\boldsymbol{e}_i\} \xrightarrow{apply} \boldsymbol{x} \longrightarrow \{x_i\}$.

1.2 Operation

1.2.1 Dot Product

We define in algebra, $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} := \sum x_i y_i \delta_{ij} = \boldsymbol{x}^T \cdot \boldsymbol{y}$.

Then the defination is restricted to the choose of the coordinate system.

1.2.2 Cross Product

$a, b \in \mathbb{F}^m, a \wedge b = c \in \mathbb{F}^n$, if m = n, we have m = 0, 1, 3, 7. Therefore, we define cross product in 3d.

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \tag{1.3}$$

Proposition 1.1. 外积对于 u、v 双线性。从定义易知。

Proposition 1.2. $(a \times b) \times c = (c \cdot a)b - (b \cdot c)a$

证明：

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 23 & 31 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \tag{1.4}$$

例如对 i 分量，有 $31 \cdot 3 - 12 \cdot 2$，形式上 ijk 一样，因而证明 i 即可。展开后，按正负号分类，we have $(313 + 212) - (133 + 122)$, 两部分都加上 111 即得。b 和-a 的线性组合。

Proposition 1.3. 混合积 $(u, v, w) = (u \times v) \cdot w$，其具有轮换对称性。

证明：*for* $\cdot w$*, we have* $23 \cdot 1 + 31 \cdot 2 + 12 \cdot 3$

$231 - 321, 312 - 132, 123 - 213$

对 $\cdot v$，即中间元素按 *1,2,3* 顺序组合，易有 wu；同样对 $\cdot u$，易有 vw。即证。

另外，从展开后的分量对应上，易有

$$(u, v, w) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \tag{1.5}$$

1.2.3 Add

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} &:= \sum (x_i + y_i)\boldsymbol{e}_i \\ k \cdot \boldsymbol{x} &:= \sum k x_i \boldsymbol{e}_i \end{aligned} \tag{1.6}$$

Law $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$, law $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$ is not obvious in the view of Set Theory.

1.2.4 geometry Properties

Length and Angle

$$
\begin{aligned}
\parallel \boldsymbol{x} \parallel &:= \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}} \\
\cos\theta_{x,y} &:= \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}{\parallel \boldsymbol{x} \parallel \cdot \parallel \boldsymbol{y} \parallel}
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

Distance

Distance function satisfies the following:

$$
\begin{aligned}
&d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geqslant 0 \\
&d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \\
&d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leqslant d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + d(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

$$
\begin{aligned}
&d_p = [\sum |x_i - y_i|^p]^{\frac{1}{p}}, 1 \leqslant p < \infty \\
&d_\infty = \max_i |x_i - y_i|
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

Chapter 2 Space

2.0.1 Linear Space

向量加法、标量乘法构成的单位环。

2.0.2 Metric Space

Definition 2.1. *The set X with a distance function d, d satisfies*??*. Metric Space is noted as* (X, d)*.*

Definition 2.2. 紧集：(X, d) 中的子集 A，A 中任意序列都存在一子列 x_n,x_n 收敛到 A 中某点。

Definition 2.3. 稠密集：(X, d) 中的子集 A，对于 X 中的任意点 x，A 中存在点 a，使得 $d(x, a) < \varepsilon$

Definition 2.4. X 可分：(X, d) 中存在一个可数稠密集。

Complete Metric Space

Definition 2.5. 收敛：*sequence* $\{x_n\}$ 收敛到 c，*means that* $\lim_{x\to\infty} d(x_n, c) = 0$*, noted as* $\lim_{x\to\infty} x_n = c$

Definition 2.6. *Cauchy* 基本列：$\lim_{m\to\infty, n\to\infty} d(x_m, x_n) = 0$

Definition 2.7. 完备距离空间：所有 *Cauchy* 基本列收敛于一点

Definition 2.8. 不完备：对于苹果空间，从宇宙开始到宇宙结束的所有苹果序列，收敛到我，则不完备。

2.0.3 Banach Space

完备、赋范、线性。

2.0.4 Inner Product Space

$$
\begin{aligned}
&(\alpha x+\beta y)\cdot z=\alpha x\cdot z+\beta y\cdot z, && \text{线性}\\
&x\cdot(\alpha y+\beta z)=\bar{\alpha}x\cdot y+\bar{\beta}x\cdot z, && \text{共轭线性}\\
&x\cdot y=y\bar{\cdot}x, && \text{共轭对称}\\
&x\cdot x\geqslant 0, && \text{正定}\Rightarrow ||x||=\sqrt{x\cdot x}\\
&|x\cdot y|\leqslant ||x||\cdot||y||, && satisfies Cauchy-Schwarz
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

2.0.5 Hilbert Space

完备，内积。

内积 ⇒ 范数 ⇒ 完备

Proposition 2.1. $[0,1]$ 上的复连续函数空间 $C([0,1])$, 定义内积 $f\cdot g=\int_0^1 f(t)g(t)\,dt$, *proof that* $C([0,1])$ 不是 *Hilbert Space*

$$
\begin{aligned}
&f_n(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}\\ -2n(t-\frac{1}{2})+1, & \frac{1}{2}<t\leqslant\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}\\ 0, & \frac{1}{2n}+\frac{1}{2}<t\leqslant 1\end{cases}\\
&||f_n-f_m||\leqslant(\frac{1}{n}+\frac{1}{m})^{\frac{1}{2}}\to 0, is\ Cauchy\ Sequence.\\
&\lim f_n=\begin{cases}1, 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}\\ 0, \frac{1}{2}<t\leqslant 1\end{cases}\\
&\therefore \lim f_n\notin C([0,1])
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

2.0.6 Euclid Space

有序的 n 元组的全体称为 n 维 Euclid 空间，记为 $\mathbb{R}^n$，称 $\boldsymbol{p}=(p_i)_{i=1}^n\in\mathbb{R}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个点。为便于研究，本论文以 $\mathbb{R}^3$ 为背景空间，所涉及的函数默认为可微实值函数。如果实函数 f 的任意阶偏导数存在且连续，则称函数是可微的（或无限可微的，或光滑的，或 C^∞ 的）。

由于微分运算是函数的局部运算，限制所讨论函数的定义域在 $\mathbb{R}^3$ 中的任意开集，所讨论的结论仍然成立。

自然坐标函数：定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的实值函数 $x_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，使得 $\boldsymbol{p}=(p_i)_{i=1}^n=(x_i(\boldsymbol{p}))_{i=1}^n$

切向量：由 $\mathbb{R}^n$ 中的二元组构成，$\boldsymbol{v_p}=(\boldsymbol{p},\boldsymbol{v})$，其中 $\boldsymbol{p}$ 是作用点，$\boldsymbol{v}$ 是向量部分

切空间 $T_p\mathbb{R}^n$: 作用点 $\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^n$ 的所有切向量的集合。利用向量加法与数量乘法使某点的切空间称为向量空间，与背景空间存在非平凡同构。

向量场 $\boldsymbol{V}$: 作用于空间点的向量函数，$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{p}) \in T_p\mathbb{R}^n$

逐点化原理：$(\boldsymbol{V}+\boldsymbol{W})(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{p}) + \boldsymbol{W}(\boldsymbol{p})$, $(f\boldsymbol{V})(\boldsymbol{p}) = f(\boldsymbol{p})\boldsymbol{V}(\boldsymbol{p})$

自然标架场：定义 $\boldsymbol{U}_i = (\delta_j^i)_{j=1}^n$，按 Einstein 求和约定，有 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{p}) = v^i(\boldsymbol{p})\boldsymbol{U}_i(\boldsymbol{p})$, 称 v^i 为场的 Euclid 坐标函数，其中 Kronecker δ 函数定义为：

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1,\ i = j \\ 0,\ i \neq j \end{cases} \tag{2.3}$$

Chapter 3 linear algebra

3.1 linear equation

Normally, we consider vector space over the fields of real or complex numbers.

3.1.1 Ax = B

Defination

linear equation in n variables.$\sum_{i=1}^{i=n} a_i x^i = b$, which can be written as $\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x} = b$. We collect m equations and write like this:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

Noticed that x_1 is only applied toe the first column of the left matrix, we can say that $\boldsymbol{x}$ is one point, or a specific composition, of the space spanned by the column vector of the matrix. Then it is easy to see that this equation has the solution, only if the vector $\boldsymbol{b}$ is in the space spanned by the column vector of the matrix.

Or we can write like this:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

The equation $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ has solution, means y 可由 A 的列向量线性表出。

If $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, called homogeneous linear equations, homogeneous because 所有非 0 项是 1 次的。if $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, it is inhomogeneous. 显然 0 向量 (zero solution, or trivial soltution) 是一个解. A 的列向量正交，只有零解；若 A 的列向量线性相关，有多解，即可按多种方式回到原点。

Number of solution

构造增广矩阵 $[\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}]$ 后，初等行变换化为阶梯型，如??所示，解的个数讨论。

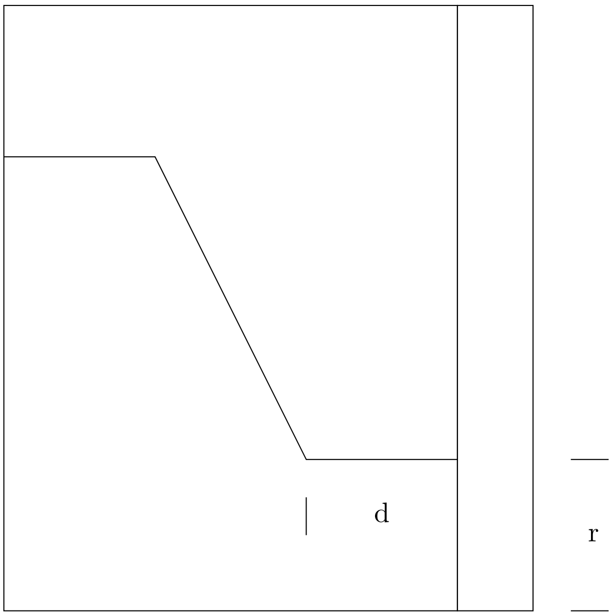

Figure 3.1: 【number of solution】

$r \neq 0$, no solution;

$d = 1$, one solution, $tr\boldsymbol{A}_{mn} = m$,;

$d \neq 1$, $tr\boldsymbol{A}_{mn} < m$,inifinity solution，最后一行是解的超平面方程, 图中 d 是解的维度，$d = n - tr\boldsymbol{A}_{mn}$, 如 d 为 3，有 3 列独立的，即解空间是三维的。齐次方程组的未知数个数大于方程个数，有无数解。

3.1.2 Matrix

Defination

If we have a serious of $\boldsymbol{x}$, we have a serious of b, like this:

$$A_{mn} \cdot X_{nt} = B_{mt} \Longrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{array}{c:c:c} x_{11} & \cdots & x_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nt} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c:c} b_{11} & \cdots & b_{1t} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mt} \end{array}\right] \tag{3.3}$$

The normal definition of the product of two matrix is as above.

Transposition

Defination: $a_{ij}^T = a_{ji}$

Proposition 3.1. $(\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$

Proof: $L = (a_{ik}b_{kj})^T = c_{ij}^T = c_{ji} = b_{jk}a_{ki} = R$ □

Proposition 3.2. *We take a look a the product with reflect* $T : \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{x}$. $(\boldsymbol{Tx})^T\boldsymbol{Ty} = \boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{T})\boldsymbol{y} = [(\boldsymbol{TT}^T)\boldsymbol{x}]^T\boldsymbol{y}$. $0 \leqslant \|\boldsymbol{TT}^T\| < 1$, $\boldsymbol{T}$ *is a contractive mapping.*

3.1.3 solve equation

求解方法，如消元法、迭代法等。

消元法

利用初等变换化为“阶梯形（或称上三角形）”，从下往上回代。

Augmented matrix

3.2 determinant

行列式，定义、性质、展开、Gramer 法则等

3.3 polynomial

因式分解定理，多项式的根，多元多项式。

3.4 operation

初等变换、代数运算、分块运算、乘法、秩

3.5 Transformation

线性变换、坐标变换、像与核、特征向量、特征子空间、商空间

正交变换规范变换

酉相似

3.5.1 Elementary Transformation

初等变换。

1) 交换两行: $\boldsymbol{A} \xrightarrow{(i,j)} \boldsymbol{B}$

2) 某行乘以不为 0 的数: $\boldsymbol{A} \xrightarrow{\lambda(i)} \boldsymbol{B}$

3) 某行乘以不为 0 的数加到另一行上: $\boldsymbol{A} \xrightarrow{\lambda(i)+(j)} \boldsymbol{B}$

初等矩阵: 单位矩阵执行一系列初等变换得到的矩阵.

初等变换作用于矩阵 $\boldsymbol{A}$, 等于初等变换作用于单位阵之后得到的初等矩阵 $\boldsymbol{E}$ 再作用于 $\boldsymbol{A}$.

3.6 Form

3.6.1 Jordan

Jordan 型、根子空间分解、循环子空间、多项式矩阵相抵不变量、特征方阵与相似标准型

3.6.2 二次

配方法构造、对称方阵的相合、相合不变量