Chapter 1 Methodology

1.1 History

1.2 数学的思维方式与创新-84-北大 (丘维声)

6,1039.

1.2.1 数学史上的重大创新

分析：微积分的创立和完备化

观察现象主要特征，抽象出概念。探索。猜测。证明。
如求瞬时速度，$s = at^2, \frac{\Delta s}{\Delta t} = 2at + \Delta t$，牛顿忽略 Δt，叫做留数，留下来的数。
如何解决不等于零又等于零的矛盾？
delta t 趋近于 0，无限，柯西引入极限的概念：函数在 x0 附近有定义，在 x0 可以没有定义，如果存在 c 使得 x 趋近于 x0 但不等于 x0 时，$|f(x) - c|$ 可以无限小，称 c 是 x 趋近于 x0 时 f(x) 的极限。
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$, that when $0 < |x - x_0| < \delta$, we have $|f(x) - c| < \varepsilon$

几何：欧几里得几何到非欧几里得几何

从平直空间到弯曲空间。
从定义和公理，推导和推演。平行公设。高斯和波约，罗巴切夫斯基（1829 年）, 平行公设只是假设。现实世界如何实现非欧几何的用处。高斯想法把球面本身看做一个空间。后来黎曼发展了。弯曲空间的几何是黎曼几何，如球面上的直线定义为大圆的一部分，这样发现过已知直线外一点不存在其平行线。在双曲几何模型下可以实现罗巴切夫斯基几何。

代数学中

伽瓦罗，代数学从研究方程的根，到研究代数系统的结构和保持运算的映射。

1.2.2 集合的划分

交空并全的划分方法：模 n 同余是 $\mathbb{Z}$ 的一个二元关系。两个集合的笛卡尔积
a 与 b 模 n 同余：$(a,b) \in \bigcup_{i=0}^{n-1} H_i \times H_i \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. 抽象：非空集合 s，$S \times S$ 的子集 W 是 S 是上的二元关系，有关系的记为 aWb

等价关系

反身性，对称性，传递性，$a \sim b$. $a \sim b \Leftrightarrow b \sim a$. $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$
$\bar{a}$ 是 a 确定的等价类，$\{x \in S | x \sim a\}$。易有 $\bar{x} = \bar{y} \Leftrightarrow x \sim y$ 。

定理 1：集合 S 上等价关系 $\sim$ 给出的等价类的集合是 S 的一个划分。
证明思路：需要证明并全，交空。交空比较难，需要研究等价类的性质。等价类的代表不唯一。
Step1) It is obvious that $\cup_{a \in S} \bar{a} \subseteq S$，and for any $b \in S$, we have $b \in \bar{b} \in \cup_{a \in S} \bar{a}$, this means $S \subseteq \cup_{a \in S} \bar{a}$, so $\cup_{a \in S} \bar{a} = S$.
Step2) To prove $\bar{x} \neq \bar{y} \Rightarrow \bar{x} \bigcap \bar{y} = \varnothing$, we prove the contrapositive $\bar{x} \bigcap \bar{y} \neq \varnothing \Rightarrow \bar{x} = \bar{y}$, and this is easy to prove.

Chapter 2 Introduction

Today is 20211204, and I deciede to note down all of my knowledge about the math in this notebook.

2.1 Space

2.1.1 Operation Defination

Element

we define the basic element $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \dots]^T = \Sigma x_i \boldsymbol{e_i}$, $\boldsymbol{e}_i$ means $x_i = 1, x_j = 0$ for all $j \neq i$. We define Kronecker sign to simply the description of $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j$.

$$\delta_{i,j} := \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{2.1}$$

The set of bases $\{\boldsymbol{e}_i\} \overset{apply}{\longrightarrow} \boldsymbol{x} \longrightarrow \{x_i\}$.

Dot Product

We define in algebra, $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} := \sum x_i y_i \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{x}^T \cdot \boldsymbol{y}$.

Then the defination is restricted to the choose of the coordinate system. We take a look a the product with reflect $T : \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{x}$,

$$(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^T = (a_{ik} b_{kj})^T = c_{ij}^T = c_{ji} = b_{jk} a_{ki} = \boldsymbol{B}^T \cdot \boldsymbol{A}^T \tag{2.2}$$

we have

$$(\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{x})^T (\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T (\boldsymbol{T}^T \boldsymbol{T}) \boldsymbol{y} = [(\boldsymbol{T}^T \boldsymbol{T}) \boldsymbol{x}]^T \boldsymbol{y} \tag{2.3}$$

We name T a Contractive mapping when $\boldsymbol{T}^T \boldsymbol{T} \leqslant \theta, 0 \leqslant \theta \leqslant 1$.

geometry Properties

$$
\begin{aligned}
\| \boldsymbol{x} \| &:= \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}} \\
\cos \theta_{x,y} &:= \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}{\| \boldsymbol{x} \| \cdot \| \boldsymbol{y} \|}
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Add

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} &:= \sum (x_i + y_i) \boldsymbol{e}_i \\
k \cdot \boldsymbol{x} &:= \sum k x_i \boldsymbol{e}_i
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Law $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$, law $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$ is not obvious in the view of Set Theory.

2.2 Euclid 空间

有序的 n 元组的全体称为 n 维 Euclid 空间，记为 $\mathbb{R}^n$，称 $\boldsymbol{p}=(p_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个点。为便于研究，本论文以 $\mathbb{R}^3$ 为背景空间，所涉及的函数默认为可微实值函数。如果实函数 f 的任意阶偏导数存在且连续，则称函数是可微的（或无限可微的，或光滑的，或 C^∞ 的）。
由于微分运算是函数的局部运算，限制所讨论函数的定义域在 $\mathbb{R}^3$ 中的任意开集，所讨论的结论仍然成立。
自然坐标函数：定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的实值函数 $x_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，使得 $\boldsymbol{p}=(p_i)_{i=1}^n=(x_i(\boldsymbol{p}))_{i=1}^n$
切向量：由 $\mathbb{R}^n$ 中的二元组构成，$\boldsymbol{v_p}=(\boldsymbol{p},\boldsymbol{v})$，其中 $\boldsymbol{p}$ 是作用点，$\boldsymbol{v}$ 是向量部分
切空间 $T_p\mathbb{R}^n$: 作用点 $\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^n$ 的所有切向量的集合。利用向量加法与数量乘法使某点的切空间称为向量空间，与背景空间存在非平凡同构。
向量场 $\boldsymbol{V}$: 作用于空间点的向量函数，$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{p}) \in T_p\mathbb{R}^n$
逐点化原理：$(\boldsymbol{V}+\boldsymbol{W})(\boldsymbol{p})=\boldsymbol{V}(\boldsymbol{p})+\boldsymbol{W}(\boldsymbol{p})$, $(f\boldsymbol{V})(\boldsymbol{p})=f(\boldsymbol{p})\boldsymbol{V}(\boldsymbol{p})$
自然标架场：定义 $\boldsymbol{U}_i=(\delta_j^i)_{j=1}^n$，按 Einstein 求和约定，有 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{p})=v^i(\boldsymbol{p})\boldsymbol{U}_i(\boldsymbol{p})$, 称 v^i 为场的 Euclid 坐标函数，其中 Kronecker δ 函数定义为：

$$
\delta_i^j = \begin{cases} 1,\ i=j \\ 0,\ i\neq j \end{cases}
\tag{2.6}
$$

2.3 Reference

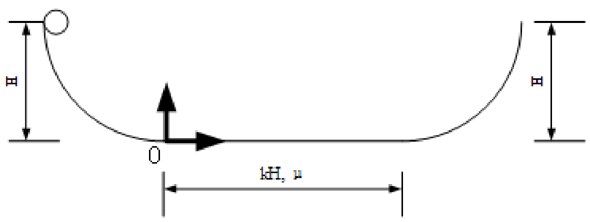

Figure 2.1: 正则项的几何意义

Chapter 3 Topology

3.1 AlgebraicTopology

3.1.1 摘要

拓扑空间概念、性质、构造方法（如映射锥）基本群的计算方法奇异同调群 3 个定理：同伦不变性，正合序列，切除定理奇异上同调（有环结构），泛系数定理，Kűnneth 定理代数拓扑通过寻找拓扑不变量给拓扑空间做分类。通过函子，把输入的拓扑空间变成群，把映射对应为同态，把同胚对应为同构。梦想是通过证明同构能够断言空间同胚。梦想还未实现，目前三维流形的分类为完成。

3.1.2 拓扑空间

通常研究连续映射、度量空间

性质：紧致性（任意开覆盖有子覆盖），连通性（不能表示成不相交的开子集之并），道路连通，分离性

同胚：对于对于拓扑空间 X 和 Y，称 $X \cong Y$，如果对于 $X \underset{\mathrm{g}}{\overset{\mathrm{f}}{\rightleftarrows}} Y$，有 $g \circ f = 1_X, f \circ g = 1_Y$

拓扑性质：同胚意义下不变的性质

Chapter 4 GroupTheory

Chapter 5　GroupRepresentation

5.1　Introduction

丘维声。
运算：笛卡尔积 $S \times S \mapsto S$ 是集合 S 的二元代数运算。现代数学的鲜明特征是研究有各种运算的集合，称为代数系统。
现代数学的两大特征，1）研究代数系统的结构;2）利用同态映射研究代数系统结构。
核心：群表示论是研究 G 到各个线性空间的可逆线性变换群的各种同态映射，以获得 G 结构的完整信息。
群表示论是研究群结构的最强有力的工具。应用如晶体学，量子力学，抽象调和分析，组合数学，密码学，纠错编码
必备参考书，《抽象代数基础》丘维声，高教出版社，《高等代数学习指导书下》丘维声，清华大学。

5.1.1　环，域，群

表 5.1: algebra system

名称	运算	性质	举例
ring	加法; 乘法	交换，结合，0 元，负元; 结合，左右分配律	整数集 $\mathbb{Z}$，偶数集 $2\mathbb{Z}$, 一元实系数多项式 $\mathbb{R}(x)$, 实 n 阶矩阵 $M_n(\mathbb{R})$

交换环，乘法可交换。单位元。
例子，星期 i，记为 $\bar{i} = \{7k+i\}\,|k \in \mathbb{Z}$, 收集起 $\bar{i}$ 可以实现整数的划分。类似的，定义模 m 剩余类：

$$\mathbb{Z}_m = \{\bar{i}|i = 1, \cdots, m-1\} \tag{5.1}$$

定义加法和乘法, 有模 m 剩余类环

$$\begin{aligned} \bar{i}+\bar{j} &= \bar{i+j} \\ \bar{i}\cdot\bar{j} &= \bar{i\cdot j} \end{aligned} \tag{5.2}$$

可逆元，单位 a：$a \in ringR, \exists b \in R, ab = ba = e$
左零因子 a：$a \neq 0, \exists c \neq 0, ac = 0$
例子：$\mathbb{Z}_8$, 零因子 2,4,6；可逆元 3,5,7；
例子：$\mathbb{Z}_7$，每个非零元都可逆;

域 F：有单位元 e 的环，且每个非零元都可逆。例子：有理数集，实数集，复数集 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}$
域 F 中可以定义除法。

群 G: 只有乘法，结合律，单位元，每个元素有逆元。
例子：$\mathbb{Z}_m^*$:$\mathbb{Z}_m$ 所有可逆元的集合，发现只对乘法封闭, 称为 Zm 的单位群；如域 F 上的所有可逆矩阵的集合 $Gl_n(\mathbb{F})$, 只有乘法，称为域 $\mathbb{F}$ 上的一般线性群。
阿贝尔群：乘法可交换。
例子：$GL(V)$，域 F 上的线性空间 V 的所有可逆线性变换，对于映射的乘法行程的 V 上可逆线性变换群。子群：H<G

5.1.2 等价关系与左陪集

研究 G 的第一个途径：利用子群 H 研究 G.
集合的划分与等价关系。对于 $a,b \in G$, 定义 $a\ b :\Leftrightarrow b^{-1}a \in H$，易有关系 具有反射性（e 在 H 中），对称性，传递性，所以这是等价关系。
定义 a 的等价类：

$$\begin{aligned} \bar{a} &:= \{x \in G | x\ a\} \\ &:= \left\{x \in G | a^{-1}x \in H\right\} \\ &= \{x \in G | x = ah, h \in H\} \\ &= \{ah | h \in H\} \\ &=: aH \end{aligned} \tag{5.3}$$

aH 称为以 a 为代表的 H 的一个左陪集，是一个等价类。
根据等价类的性质，有 1）$aH = bH \Leftrightarrow b^{-1}a \in H$;2) aH 与 bH 或者相等，或者不相交（交集为空集）。所以 H 的所有左陪集给出 G 的一个划分，记为 G/H, 称为 G 关于 H 的左商集。G/H 的基数称为 G 关于 H 的指数，记为 [G:H]。基数相同可建立双射。

G 关于 H 的左陪集分解：$[G:H]=r, G=eH\bigcup a_1H\bigcup\cdots\bigcup a_{r-1}H$。
拉格朗日定理：对于有限群 G，易有其元素个数 $|G|=|H|[G:H]$，即任何子群的阶是群的阶的因数。推论：1)n 阶群 G 的任意元素 a，有 $a^n\in G$;2) 素数阶群是循环群。

5.1.3 同态

研究 G 的第二个途径：通过研究 G 到 G' 的保持运算的映射，同态映射，简称同态。同态要变，是函数。
通常利用 G 到 Ω 的同态，等价于 G 在 Ω 的作用。既可以研究 G 的结构，又可以对 Ω 的性质有了解
$S(\Omega)$:Ω 的全变换群，Full Transformation Group on Set Ω, Ω 自身的所有双射组成的集合，对于映射的乘法构成的一个群.

5.1.4 作业

1. 环 R 中，0a=a0=0
2. 有 e 的环中，零因子不是可逆元
3.$\mathbb{Z}_m$ 中每个元素要么是可逆元要么是零因子；
4. $M_n(\mathbb{F})$ 中，每个矩阵是可逆矩阵或者是零因子。

5.2 Abel 群的表示

5.2.1 映射

映射：$f:a\mapsto b\Leftrightarrow f(a)=b$，原象，象。映射 f 的定义域 (domain)A，陪域 (codomain)B。映射得到的所有象的集合叫值域，记作 $f(A)$, 或 Imf。
满射，onto, 到上：$f(A)=B$
单射，一一的，每个 a 对应的 b 是不同的。
双射，两个集合一一对应。
逆映射。对于 $f:A\to B, g:B\to A$, 有 $g\circ f=1_A, f\circ g=1_B$。可逆的 f 是双射。

线性映射、线性变换是线性空间的同态映射，有点乘和加法。
补空间：域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 U<V, 则 $\exists W, V=U\oplus W$。对于实内积空间 V，U 是有限维的，$W=U^{\perp}$, 正交补空间，唯一的。
投影变换：域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 $V=U\oplus W$, 有 $\alpha=\alpha_U+\alpha_W$, 有投影变换 $P_U:\alpha\mapsto\alpha_U$. 投影变换保持加法和数乘，是 V 上的线性变换。投影是同态映射。

几何空间：以原点 O 为起点的定位向量组成的实线性空间。知道一空间点在两个坐标面的投影坐标可完全确定点。

5.2.2 群的同态

同态映射：G 到 G' 的映射 $\sigma : \sigma(a,b) = \sigma(a)\sigma(b)$。单射的话是单同态。满射是满同态。双射是同构，此时两个群同构，$G \cong G'$。
同态的性质：1）单位元、逆元、子群映射过去是 G’ 的单位元、逆元、子群。例如 $G < G \Rightarrow \sigma(G) = Im\sigma < G'$，同态的像是 G' 的子群
刻化单同态：找到映射成单位元的原象，定义同态的核，$Ker\sigma := \{a \in G|\sigma(a) = e'\}$. 易有同态的核是 G 的子群。对于单同态，$Ker\sigma = \{e\}$.
子集乘法：类似与点乘，a 的所有和 b 的所有的乘积方式的组合。乘法满足结合律。

5.2.3 正规子群

$\forall k \in \ker\sigma, \forall g \in G$, we have:

$$\begin{aligned} &\sigma(gkg^{-1}) = \sigma(g)\sigma(k)\sigma(g^{-1}) = e' \\ &\therefore gkg^{-1} \in \ker\sigma \\ &\therefore g\ker\sigma g^{-1} \subset \ker\sigma \\ &\&\ g^{-1}\ker\sigma g \subset \ker\sigma \\ &\therefore g\ker\sigma g^{-1} = \ker\sigma \end{aligned} \tag{5.4}$$

normal subgroup 正规子群:$H \lhd G : \forall g \in G, gHg^{-1} = H$, gHg^{-1} 是 g 的共轭子群。
性质：$H \lhd G \Leftrightarrow gHg^{-1} = H, \forall g \in G \Leftrightarrow gH = Hg$,H 的左右陪集相等；
G 关于正规子群 H 的商群：规定正规子群 H 的商群 G/H 乘法：$(aH)(bH) = abH$

5.2.4 群同态基本定理

$$\begin{aligned} \psi : &G/\ker\sigma \to Im\sigma \\ &a(\ker\sigma) \mapsto \sigma(a) \end{aligned} \tag{5.5}$$

看映射 ψ 的性质：

$$\left.\begin{aligned} & a(\ker\sigma)=b(\ker\sigma) \\ & \Leftrightarrow b^{-1}a\in\ker\sigma \\ & \sigma(b^{-1}a)=e' \\ & \therefore \sigma(a)=\sigma(b) \end{aligned}\right\}\Rightarrow \psi\ is\ surjection \tag{5.6}$$

从是映射、是单射、是满的，得到是双射；

Let $K=\ker\sigma$, $\psi[(aK)(bK)]=\psi(abK)=\sigma(ab)=\psi(aK)\psi(bK)$, 所以保持运算，所以是同构，所以 $G/\ker\sigma\cong Im\sigma$

群同态基本定理：$\ker\sigma\lhd G\ \&\ G/\ker\sigma\cong Im\sigma$

5.3 线性表示

$GL(V)$: 对于群 G，域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间 V，G 到 V 的所有可逆线性变换的集合，对于映射的乘法成为一个可逆线性变换群。

G 到 GL(V) 的同态 ψ 是 G 在 $\mathbb{K}$ 上的线性表示，简称为 $\mathbb{K}$ 表示，或者简称为表示。

V 叫做表示空间，表示次数 $\deg\psi:=\dim V$

(ψ,V)

如用两个视图可完全确定空间曲线，即做了两个同态。

$\ker\psi=\{e_G\}$,ψ 是忠实的；

$\ker\psi=G$, ψ 是平凡的；|、称一次的平凡表示 ψ 是 G 的主表示，单位表示，记作 1_G;

$dimV=n$ 时，有 $\psi(g)$ 在基 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 下的矩阵 $\Phi(g)$ 是 $\mathbb{K}$ 上的可逆矩阵，由同构 $GL(V)\cong GLn(\mathbb{K})$，有 G 到 $GLn(\mathbb{K})$ 的同态 Φ，称为 G 在 $\mathbb{K}$ 上的 n 次矩阵表示。

Φ 称为是 ψ 提供的

5.3.1 表示的等价类

等价关系：对于 G 的 2 个 k 表示，$(\phi,V),(\psi,W)$,∃v 到 w 的线性空间的同构 σ，定义 $\psi(g)\sigma=\sigma\phi(g),\forall g\in G$, 这种 G 的所有 K 表示的集合 Ω 上的二元关系，易有具有反射性，对称性，传递性，从而是等价关系。通常关注 G 的 k 表示的等价类。

$(\phi,V),(\psi,W)$ 等价，取基后的矩阵记为 $\Phi(g)|\{\alpha_i,\cdots\},\Psi(g)|\{\beta_i,\cdots\}$, 同构 σ 把 V 的基映射到 W 上的 S，有 $\sigma(\{\alpha,\cdots\})=\{\beta,\cdots\}S$，$\therefore\Psi(g)S=S\Phi(g)$. 所以 G 在 K 的 2 个矩阵表示 Ψ,Φ 等价：次数一样且 $\forall g\in G,\Psi=S\Phi(g)S^{-1}$. 所以群 G 的 2 个 K 表示 $(\phi,V),(\psi,W)$ 等价，⇔K 表示提供的矩阵表示 Ψ,Φ 等价。

5.3.2 例：1 次表示

G 在 K 上的 1 次矩阵表示 $\Phi : G \to \mathbb{K}^*$; 非零元集合。映射是通用的不对定义域做要求，陪域是域的子集的映射叫函数。称为 G 上的 K* 函数，且由于同态保持运算，有 $\Phi(gh) = \Phi(g)\Phi(h), \forall g, h \in G$, and $\Phi(e) = 1$, where 1 is the unit of K*. 所以一次表示是 G 到 K* 的保持运算的函数。

5.3.3 例：实数和加法的 1 次实表示

$f_a(x) = e^{ax}$ 是 $\mathbb{R}, +$ 的 1 次实表示。

5.3.4 例：实数和加法的 1 次复表示

$f_a(x) = e^{iax}$ 是 $(\mathbb{R}, +)$ 的 1 次实表示。

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{R}, +) &\to \mathbb{C}^* \\ x &\mapsto e^{iax} \end{aligned} \tag{5.7}$$