1 Introduction

丘维声。

运算：笛卡尔积 $S \times S \mapsto S$ 是集合 S 的二元代数运算。现代数学的鲜明特征是研究有各种运算的集合，称为代数系统。

现代数学的两大特征，1）研究代数系统的结构;2）利用同态映射研究代数系统结构。

核心：群表示论是研究 G 到各个线性空间的可逆线性变换群的各种同态映射，以获得 G 结构的完整信息。

群表示论是研究群结构的最强有力的工具。应用如晶体学，量子力学，抽象调和分析，组合数学，密码学，纠错编码

必备参考书，《抽象代数基础》丘维声，高教出版社，《高等代数学习指导书下》丘维声，清华大学。

1.1 环，域，群

表 1: algebra system

名称	运算	性质	举例
ring	加法; 乘法	交换，结合，0 元，负元; 结合，左右分配律	整数集 $\mathbb{Z}$，偶数集 $2\mathbb{Z}$, 一元实系数多项式 $\mathbb{R}(x)$, 实 n 阶矩阵 $M_n(\mathbb{R})$

交换环，乘法可交换。单位元。

例子，星期 i，记为 $\bar{i} = \{7k+i\} | k \in \mathbb{Z}$, 收集起 $\bar{i}$ 可以实现整数的划分。类似的，定义模 m 剩余类：

$$\mathbb{Z}_m = \{\bar{i} | i = 1, \cdots, m-1\} \tag{1}$$

定义加法和乘法, 有模 m 剩余类环

$$\begin{aligned} \bar{i} + \bar{j} &= \overline{i+j} \\ \bar{i} \cdot \bar{j} &= \overline{i \cdot j} \end{aligned} \tag{2}$$

可逆元，单位 a：$a \in ringR, \exists b \in R, ab = ba = 0$

左零因子 a：$a \neq 0, \exists c \neq 0, ac = 0$

例子：$\mathbb{Z}_8$, 零因子 2,4,6；可逆元 3,5,7；

例子：$\mathbb{Z}_7$，每个非零元都可逆;

域 F：有单位元 e 的环，且每个非零元都可逆。例子：有理数集，实数集，复数集 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}$

域 F 中可以定义除法。

群 G: 只有乘法，结合律，单位元，每个元素有逆元。

例子：$\mathbb{Z}_m^*$:$\mathbb{Z}_m$ 所有可逆元的集合，发现只对乘法封闭, 称为 Zm 的单位群；如域 F 上的所有可逆矩阵的集合 $Gl_n(\mathbb{F})$, 只有乘法，称为域 $\mathbb{F}$ 上的一般线性群。
阿贝尔群：乘法可交换。
例子：$GL(V)$，域 F 上的线性空间 V 的所有可逆线性变换，对于映射的乘法行程的 V 上可逆线性变换群。子群：H<G

1.2 等价关系与左陪集

研究 G 的第一个途径：利用子群 H 研究 G.
集合的划分与等价关系。对于 $a, b \in G$, 定义 $a\ b :\Leftrightarrow b^{-1}a \in H$，易有关系 具有反射性（e 在 H 中），对称性，传递性，所以这是等价关系。
定义 a 的等价类：

$$
\begin{aligned}
\bar{a} &:= \{x \in G | x\ a\} \\
&:= \left\{x \in G | a^{-1}x \in H\right\} \\
&= \{x \in G | x = ah, h \in H\} \\
&= \{ah | h \in H\} \\
&=: aH
\end{aligned}
\tag{3}
$$

aH 称为以 a 为代表的 H 的一个左陪集，是一个等价类。
根据等价类的性质，有 1）$aH = bH \Leftrightarrow b^{-1}a \in H$;2) aH 与 bH 或者相等，或者不相交（交集为空集）。所以 H 的所有左陪集给出 G 的一个划分，记为 G/H, 称为 G 关于 H 的左商集。G/H 的基数称为 G 关于 H 的指数，记为 [G:H]。基数相同可建立双射。
G 关于 H 的左陪集分解：$[G : H] = r, G = eH \bigcup a_1H \bigcup \cdots \bigcup a_{r-1}H$。
拉格朗日定理：对于有限群 G，易有其元素个数 $|G| = |H|[G : H]$，即任何子群的阶是群的阶的因数。推论：1)n 阶群 G 的任意元素 a，有 $a^n \in G$;2) 素数阶群是循环群。

1.3 同态

研究 G 的第二个途径：通过研究 G 到 G' 的保持运算的映射，同态映射，简称同态。同态要变，是函数。
通常利用 G 到 Ω 的同态，等价于 G 在 Ω 的作用。既可以研究 G 的结构，又可以对 Ω 的性质有了解
$S(\Omega)$:Ω 的全变换群，Full Transformation Group on Set Ω, Ω 自身的所有双射组成的集合，对于映射的乘法构成的一个群.

1.4 作业

1. 环 R 中，0a=a0=0

2. 有 e 的环中，零因子不是可逆元

3.$\mathbb{Z}_m$ 中每个元素要么是可逆元要么是零因子；

4. $M_n(\mathbb{F})$ 中，每个矩阵是可逆矩阵或者是零因子。

2 Abel 群的表示

2.1 映射

映射：$f : a \mapsto b \Leftrightarrow f(a) = b$，原象，象。映射 f 的定义域 (domain)A，陪域 (codomain)B。映射得到的所有象的集合叫值域，记作 $f(A)$, 或 Imf。

满射，onto, 到上：$f(A) = B$

单射，一一的，每个 a 对应的 b 是不同的。

双射，两个集合一一对应。

逆映射。对于 $f : A \to B, g : B \to A$, 有 $g \circ f = 1_A, f \circ g = 1_B$。可逆的 f 是双射。

线性映射、线性变换是线性空间的同态映射，有点乘和加法。

补空间：域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 U<V, 则 $\exists W, V = U \oplus W$。对于实内积空间 V，U 是有限维的，$W = U^{\perp}$, 正交补空间，唯一的。

投影变换：域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 $V = U \oplus W$, 有 $\alpha = \alpha_U + \alpha_W$, 有投影变换 $P_U : \alpha \mapsto \alpha_U$. 投影变换保持加法和数乘，是 V 上的线性变换。投影是同态映射。

几何空间：以原点 O 为起点的定位向量组成的实线性空间。知道一空间点在两个坐标面的投影坐标可完全确定点。

2.2 群的同态

同态映射：G 到 G' 的映射 $\sigma : \sigma(a, b) = \sigma(a)\sigma(b)$。单射的话是单同态。满射是满同态。双射是同构，此时两个群同构，$G \cong G'$。

同态的性质：1）单位元、逆元、子群映射过去是 G' 的单位元、逆元、子群。例如 $G < G \Rightarrow \sigma(G) = Im\sigma < G'$，同态的像是 G' 的子群

刻化单同态：找到映射成单位元的原象，定义同态的核，$Ker\sigma := \{a \in G | \sigma(a) = e'\}$. 易有同态的核是 G 的子群。对于单同态，$Ker\sigma = \{e\}$.

子集乘法：类似与点乘，a 的所有和 b 的所有的乘积方式的组合。乘法满足结合律。

2.3 正规子群

$\forall k \in \ker\sigma, \forall g \in G$, we have:

$$\begin{aligned}
&\sigma(gkg^{-1}) = \sigma(g)\sigma(k)\sigma(g^{-1}) = e' \\
&\therefore gkg^{-1} \in \ker\sigma \\
&\therefore g\ker\sigma g^{-1} \subset \ker\sigma \\
&\&\ g^{-1}\ker\sigma g \subset \ker\sigma \\
&\therefore g\ker\sigma g^{-1} = \ker\sigma
\end{aligned} \tag{4}$$

normal subgroup 正规子群:$H \lhd G : \forall g \in G, gHg^{-1} = H$, gHg^{-1} 是 g 的共轭子群。
性质：$H \lhd G \Leftrightarrow gHg^{-1} = H, \forall g \in G \Leftrightarrow gH = Hg$,H 的左右陪集相等;
G 关于正规子群 H 的商群：规定正规子群 H 的商群 G/H 乘法：$(aH)(bH) = abH$

2.4 群同态基本定理

$$\begin{aligned}
\psi :&G/\ker\sigma \to Im\sigma \\
&a(\ker\sigma) \mapsto \sigma(a)
\end{aligned} \tag{5}$$

看映射 ψ 的性质：

$$\left.\begin{aligned}
&a(\ker\sigma) = b(\ker\sigma) \\
&\Leftrightarrow b^{-1}a \in \ker\sigma \\
&\sigma(b^{-1}a) = e' \\
&\therefore \sigma(a) = \sigma(b)
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \psi\ is\ surjection \tag{6}$$

从是映射、是单射、是满的，得到是双射;
Let $K = \ker\sigma$, $\psi[(aK)(bK)] = \psi(abK) = \sigma(ab) = \psi(aK)\psi(bK)$, 所以保持运算，所以是同构，所以 $G/\ker\sigma \cong Im\sigma$
群同态基本定理：$\ker\sigma \lhd G\ \&\ G/\ker\sigma \cong Im\sigma$

3 线性表示

$GL(V)$: 对于群 G，域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间 V，G 到 V 的所有可逆线性变换的集合，对于映射的乘法成为一个可逆线性变换群。
G 到 GL(V) 的同态 ψ 是 G 在 $\mathbb{K}$ 上的线性表示，简称为 $\mathbb{K}$ 表示，或者简称为表示。

V 叫做表示空间，表示次数 $\deg\psi := \dim V$

(ψ, V)

如用两个视图可完全确定空间曲线，即做了两个同态。

$\ker\psi = \{e_G\}$,ψ 是忠实的；

$\ker\psi = G$, ψ 是平凡的；|、称一次的平凡表示 ψ 是 G 的主表示，单位表示，记作 1_G;

$dimV = n$ 时，有 $\psi(g)$ 在基 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 下的矩阵 $\Phi(g)$ 是 $\mathbb{K}$ 上的可逆矩阵，由同构 $GL(V) \cong GLn(\mathbb{K})$，有 G 到 $GLn(\mathbb{K})$ 的同态 Φ，称为 G 在 $\mathbb{K}$ 上的 n 次矩阵表示。

Φ 称为是 ψ 提供的

3.1 表示的等价类

等价关系：对于 G 的 2 个 k 表示，$(\phi, V), (\psi, W)$,∃v 到 w 的线性空间的同构 σ，定义 $\psi(g)\sigma = \sigma\phi(g), \forall g \in G$，这种 G 的所有 K 表示的集合 Ω 上的二元关系，易有具有反射性，对称性，传递性，从而是等价关系。通常关注 G 的 k 表示的等价类。

$(\phi, V), (\psi, W)$ 等价，取基后的矩阵记为 $\Phi(g)|\{\alpha_i, \cdots\}, \Psi(g)|\{\beta_i, \cdots\}$，同构 σ 把 V 的基映射到 W 上的 S，有 $\sigma(\{\alpha, \cdots\}) = \{\beta, \cdots\}S$，$\therefore \Psi(g)S = S\Phi(g)$. 所以 G 在 K 的 2 个矩阵表示 Ψ, Φ 等价：次数一样且 $\forall g \in G, \Psi = S\Phi(g)S^{-1}$. 所以群 G 的 2 个 K 表示 $(\phi, V), (\psi, W)$ 等价，⇔K 表示提供的矩阵表示 Ψ, Φ 等价。

3.2 例：1 次表示

G 在 K 上的 1 次矩阵表示 $\Phi : G \to \mathbb{K}^*$; 非零元集合。映射是通用的不对定义域做要求，陪域是域的子集的映射叫函数。称为 G 上的 K* 函数，且由于同态保持运算，有 $\Phi(gh) = \Phi(g)\Phi(h), \forall g, h \in G$, and $\Phi(e) = 1$, where 1 is the unit of K*. 所以一次表示是 G 到 K* 的保持运算的函数。

3.3 例：实数和加法的 1 次实表示

$f_a(x) = e^{ax}$ 是 $\mathbb{R}, +$ 的 1 次实表示。

3.4 例：实数和加法的 1 次复表示

$f_a(x) = e^{iax}$ 是 $(\mathbb{R}, +)$ 的 1 次实表示。

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{R}, +) &\to \mathbb{C}^* \\ x &\mapsto e^{iax} \end{aligned} \tag{7}$$