# 09-04-Algebra

Created on 20220605.

Last modified on 2023 年 2 月 12 日.

# 目录

# Chapter 1 Introduction

a: 线性代数, linear algebra b: 群论, group theory c: 域论, field theory d: 李群, lie group e: 李代数, f: Kac-Moody 代数, g: 环论（包括交换环与交换代数, 结合环与结合代数, 非结合环与非结合代数等）, h: 模论, i: 格论, j: 泛代数理论, k: 范畴论, l: 同调代数, m: 代数 K 理论, n: 微分代数, o: 代数编码理论, p: 代数学其他学科。

# Chapter 2　线性代数

# Chapter 3 GroupTheory

## 3.1 GroupRepresentation

### 3.1.1 Introduction

丘维声。

运算: 笛卡尔积 $S \times S \mapsto S$ 是集合 S 的二元代数运算。现代数学的鲜明特征是研究有各种运算的集合, 称为代数系统。

现代数学的两大特征, 1）研究代数系统的结构;2）利用同态映射研究代数系统结构。

核心: 群表示论是研究 G 到各个线性空间的可逆线性变换群的各种同态映射, 以获得 G 结构的完整信息。

群表示论是研究群结构的最强有力的工具。应用如晶体学, 量子力学, 抽象调和分析, 组合数学, 密码学, 纠错编码

必备参考书,《抽象代数基础》丘维声, 高教出版社,《高等代数学习指导书下》丘维声, 清华大学。

#### 环, 域, 群

表 3.1: algebra system

| 名称 | 运算 | 性质 | 举例 |
|---|---|---|---|
| ring | 加法;<br>乘法 | 交换, 结合, 0 元, 负元;<br>结合, 左右分配律 | 整数集 $\mathbb{Z}$, 偶数集 $2\mathbb{Z}$,<br>一元实系数多项式 $\mathbb{R}(x)$, 实 n 阶矩阵 $M_n(\mathbb{R})$ |

交换环, 乘法可交换。单位元。

例子, 星期 i, 记为 $\bar{i} = \{7k + i\} \, |k \in \mathbb{Z}$, 收集起 $\bar{i}$ 可以实现整数的划分。类似的, 定义模 m 剩余类:

$$\mathbb{Z}_m = \{\bar{i}|i = 1, \cdots, m-1\} \tag{3.1}$$

定义加法和乘法, 有模 m 剩余类环

$$\begin{aligned}\bar{i}+\bar{j} &= i\bar{+}j \\ \bar{i}\cdot\bar{j} &= i\bar{\cdot}j\end{aligned} \tag{3.2}$$

可逆元, 单位 a: $a \in ringR, \exists b \in R, ab = ba = e$
左零因子 a: $a \neq 0, \exists c \neq 0, ac = 0$
例子: $\mathbb{Z}_8$, 零因子 2,4,6；可逆元 3,5,7；
例子: $\mathbb{Z}_7$, 每个非零元都可逆;

域 F: 有单位元 e 的环, 且每个非零元都可逆。例子: 有理数集, 实数集, 复数集 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}$
域 F 中可以定义除法。

群 G: 只有乘法, 结合律, 单位元, 每个元素有逆元。
例子: $\mathbb{Z}_m^*$ :$\mathbb{Z}_m$ 所有可逆元的集合, 发现只对乘法封闭, 称为 Zm 的单位群；如域 F 上的所有可逆矩阵的集合 $Gl_n(\mathbb{F})$, 只有乘法, 称为域 $\mathbb{F}$ 上的一般线性群。
阿贝尔群: 乘法可交换。
例子: $GL(V)$, 域 F 上的线性空间 V 的所有可逆线性变换, 对于映射的乘法行程的 V 上可逆线性变换群。子群: H<G

### 等价关系与左陪集

研究 G 的第一个途径: 利用子群 H 研究 G.
集合的划分与等价关系。对于 $a, b \in G$, 定义 $a\ b :\Leftrightarrow b^{-1}a \in H$, 易有关系 具有反射性（e 在 H 中）, 对称性, 传递性, 所以这是等价关系。
定义 a 的等价类:

$$\begin{aligned}\bar{a} &:= \{x \in G | x\ a\} \\ &:= \left\{x \in G | a^{-1}x \in H\right\} \\ &= \{x \in G | x = ah, h \in H\} \\ &= \{ah | h \in H\} \\ &=: aH\end{aligned} \tag{3.3}$$

aH 称为以 a 为代表的 H 的一个左陪集, 是一个等价类。
根据等价类的性质, 有 1）$aH = bH \Leftrightarrow b^{-1}a \in H$;2) aH 与 bH 或者相等, 或者不相交（交集为空集）。所以 H 的所有左陪集给出 G 的一个划分, 记为 $G/H$, 称为 G 关于 H 的左商集。G/H 的基数称为 G 关于 H 的指数, 记为 [G:H]。基数相同可建立双射。

G 关于 H 的左陪集分解: $[G:H]=r, G=eH\bigcup a_1H\bigcup\cdots\bigcup a_{r-1}H$。
拉格朗日定理: 对于有限群 G, 易有其元素个数 $|G|=|H|[G:H]$, 即任何子群的阶是群的阶的因数。推论: 1)n 阶群 G 的任意元素 a, 有 $a^n\in G$;2) 素数阶群是循环群。

#### 同态

研究 G 的第二个途径: 通过研究 G 到 G' 的保持运算的映射, 同态映射, 简称同态。同态要变, 是函数。
通常利用 G 到 Ω 的同态, 等价于 G 在 Ω 的作用。既可以研究 G 的结构, 又可以对 Ω 的性质有了解
$S(\Omega)$:Ω 的全变换群, Full Transformation Group on Set Ω, Ω 自身的所有双射组成的集合, 对于映射的乘法构成的一个群.

#### 作业

1. 环 R 中, 0a=a0=0
2. 有 e 的环中, 零因子不是可逆元
3.$\mathbb{Z}_m$ 中每个元素要么是可逆元要么是零因子;
4. $M_n(\mathbb{F})$ 中, 每个矩阵是可逆矩阵或者是零因子。

### 3.1.2 Abel 群的表示

#### 映射 (Map)

映射: $f:a\mapsto b\Leftrightarrow f(a)=b$。$f(x)$ $f\ of\ x$ 原象, 象。映射 $f$ 的定义域 (domain)A, 陪域 (codomain)B。映射得到的所有象的集合叫值域, 记作 $f(A)$, 或 Imf。

$$\begin{aligned} &f:a\mapsto b\Leftrightarrow f(a)=b\\ &f:A\to B \end{aligned} \tag{3.4}$$

映射通常关心 is it one one? Is is onto?
满射, onto, 到上: $f(A)=B$
单射, 1-1, 一一的, 每个 a 对应的 b 是不同的。
双射, 两个集合一一对应。
逆映射。对于 $f:A\to B, g:B\to A$, 有 $g\circ f=1_A, f\circ g=1_B$。可逆的 f 是双射。

线性映射、线性变换是线性空间的同态映射, 有点乘和加法。
补空间: 域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 U<V, 则 $\exists W, V=U\oplus W$。对于实内积空间 V, U 是有限维的,

$W = U^{\perp}$, 正交补空间, 唯一的。
投影变换: 域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 $V = U \oplus W$, 有 $\alpha = \alpha_U + \alpha_W$, 有投影变换 $P_U : \alpha \mapsto \alpha_U$. 投影变换保持加法和数乘, 是 V 上的线性变换。投影是同态映射。
几何空间: 以原点 O 为起点的定位向量组成的实线性空间。知道一空间点在两个坐标面的投影坐标可完全确定点。

#### 群的同态

同态映射: G 到 G' 的映射 $\sigma : \sigma(a,b) = \sigma(a)\sigma(b)$。单射的话是单同态。满射是满同态。双射是同构, 此时两个群同构, $G \cong G'$。
同态的性质: 1）单位元、逆元、子群映射过去是 G’ 的单位元、逆元、子群。例如 $G < G \Rightarrow \sigma(G) = Im\sigma < G'$, 同态的像是 G' 的子群
刻化单同态: 找到映射成单位元的原象, 定义同态的核, $Ker\sigma := \{a \in G | \sigma(a) = e'\}$. 易有同态的核是 G 的子群。对于单同态, $Ker\sigma = \{e\}$.
子集乘法: 类似与点乘, a 的所有和 b 的所有的乘积方式的组合。乘法满足结合律。

#### 正规子群

$\forall k \in \ker\sigma, \forall g \in G$, we have:

$$\begin{aligned} &\sigma(gkg^{-1}) = \sigma(g)\sigma(k)\sigma(g^{-1}) = e' \\ &\therefore gkg^{-1} \in \ker\sigma \\ &\therefore g\ker\sigma g^{-1} \subset \ker\sigma \\ &\&\ g^{-1}\ker\sigma g \subset \ker\sigma \\ &\therefore g\ker\sigma g^{-1} = \ker\sigma \end{aligned} \tag{3.5}$$

normal subgroup 正规子群:$H \lhd G : \forall g \in G, gHg^{-1} = H$, $gHg^{-1}$ 是 g 的共轭子群。
性质: $H \lhd G \Leftrightarrow gHg^{-1} = H, \forall g \in G \Leftrightarrow gH = Hg$,H 的左右陪集相等;
G 关于正规子群 H 的商群: 规定正规子群 H 的商群 G/H 乘法: $(aH)(bH) = abH$

### 3.1.3 群同态基本定理

$$\begin{aligned} \psi : &G/\ker\sigma \to Im\sigma \\ &a(\ker\sigma) \mapsto \sigma(a) \end{aligned} \tag{3.6}$$

看映射 $\psi$ 的性质:

$$\left.\begin{aligned} & a(\ker\sigma) = b(\ker\sigma) \\ & \Leftrightarrow b^{-1}a \in \ker\sigma \\ & \sigma(b^{-1}a) = e' \\ & \therefore \sigma(a) = \sigma(b) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \psi \ is \ surjection \tag{3.7}$$

从是映射、是单射、是满的, 得到是双射;

Let $K = \ker\sigma$, $\psi[(aK)(bK)] = \psi(abK) = \sigma(ab) = \psi(aK)\psi(bK)$, 所以保持运算, 所以是同构, 所以 $G/\ker\sigma \cong Im\sigma$

群同态基本定理: $\ker\sigma \lhd G$ & $G/\ker\sigma \cong Im\sigma$

### 3.1.4 线性表示

$GL(V)$: 对于群 G, 域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间 V, G 到 V 的所有可逆线性变换的集合, 对于映射的乘法成为一个可逆线性变换群。

G 到 GL(V) 的同态 $\psi$ 是 G 在 $\mathbb{K}$ 上的线性表示, 简称为 $\mathbb{K}$ 表示, 或者简称为表示。

V 叫做表示空间, 表示次数 $\deg\psi := \dim V$

$(\psi, V)$

如用两个视图可完全确定空间曲线, 即做了两个同态。

$\ker\psi = \{e_G\}$,$\psi$ 是忠实的;

$\ker\psi = G$, $\psi$ 是平凡的; |、称一次的平凡表示 $\psi$ 是 G 的主表示, 单位表示, 记作 $1_G$;

$dimV = n$ 时, 有 $\psi(g)$ 在基 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 下的矩阵 $\Phi(g)$ 是 $\mathbb{K}$ 上的可逆矩阵, 由同构 $GL(V) \cong GLn(\mathbb{K})$, 有 G 到 $GLn(\mathbb{K})$ 的同态 $\Phi$, 称为 G 在 $\mathbb{K}$ 上的 n 次矩阵表示。

$\Phi$ 称为是 $\psi$ 提供的

#### 表示的等价类

等价关系: 对于 G 的 2 个 k 表示, $(\phi, V), (\psi, W)$,∃v 到 w 的线性空间的同构 $\sigma$, 定义 $\psi(g)\sigma = \sigma\phi(g), \forall g \in G$, 这种 G 的所有 K 表示的集合 $\Omega$ 上的二元关系, 易有具有反射性, 对称性, 传递性, 从而是等价关系。通常关注 G 的 k 表示的等价类。

$(\phi, V), (\psi, W)$ 等价, 取基后的矩阵记为 $\Phi(g)|\{\alpha_i, \cdots\}, \Psi(g)|\{\beta_i, \cdots\}$, 同构 $\sigma$ 把 V 的基映射到 W 上的 S, 有 $\sigma(\{\alpha, \cdots\}) = \{\beta, \cdots\}S, \therefore \Psi(g)S = S\Phi(g)$. 所以 G 在 K 的 2 个矩阵表示 $\Psi, \Phi$ 等价: 次数一样且 $\forall g \in G, \Psi = S\Phi(g)S^{-1}$. 所以群 G 的 2 个 K 表示 $(\phi, V), (\psi, W)$ 等价, ⇔K 表示提供的矩阵表示 $\Psi, \Phi$ 等价。

**例: 1 次表示**

G 在 K 上的 1 次矩阵表示 $\Phi : G \to \mathbb{K}^*$; 非零元集合。映射是通用的不对定义域做要求, 陪域是域的子集的映射叫函数。称为 G 上的 K* 函数, 且由于同态保持运算, 有 $\Phi(gh) = \Phi(g)\Phi(h), \forall g, h \in G$, and $\Phi(e) = 1$, where 1 is the unit of K*. 所以一次表示是 G 到 K* 的保持运算的函数。

**例: 实数和加法的 1 次实表示**

$f_a(x) = e^{ax}$ 是 $\mathbb{R}, +$ 的 1 次实表示。

**例: 实数和加法的 1 次复表示**

$f_a(x) = e^{iax}$ 是 $(\mathbb{R}, +)$ 的 1 次实表示。

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{R}, +) &\to \mathbb{C}^* \\ x &\mapsto e^{iax} \end{aligned} \tag{3.8}$$

# Chapter 4 域论

# Chapter 5 李群

# Chapter 6 李代数

# Chapter 7 Kac-Moody 代数

# Chapter 8　环论

环论（包括交换环与交换代数, 结合环与结合代数, 非结合环与非结合代数等）

# Chapter 9 模论

# Chapter 10 格论

# Chapter 11 泛代数理论

# Chapter 12 范畴论

# Chapter 13 同调代数

# Chapter 14　代数 K 理论

# Chapter 15　微分代数

# Chapter 16　代数编码理论

# Chapter 17　代数学其他学科