Chapter 1　09-01-Introduction

Today is 20211204, and I deciede to note down all of my knowledge about the math in this notebook.

数学史不单独作为一章，分布在各个章节中。

1.1　Methodology

方法论，数学重要思想。

1.2　History

1.2.1　古代【公元前 2000 年-公元 1689 年】

古巴比伦和古埃及

公元前 3000 年左右，巴比伦和埃及，数学出现。

有：整数和分数的算术、进制计数法、初步代数、几何经验公式。无：成套记号、有意识的抽象思维、一般方法论、证明、直观推理。

古巴比伦　巴比伦，美索不达米亚平原，公元前 600 年到公元 300 年间，泥板和楔形文字，公元前 2000 年左右的泥板也有部分保留下来。60 进制，几个特殊的分数 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\ \frac{2}{3}$ 有单独的记号。

算术，平方、平方根、立方、立方根表。代数，$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ 的公式。$x^2 + y^2 = 2z^2$ 的整数解。用特殊名称和记号表示未知量。几何，特定等腰三角形的外接圆半径。计算简单平面图形和简单立体体积的方法。

【应用】

计算长度、重量，兑换钱币和交换商品，计算单利、复利、税收，分配粮食，划分土地、遗产。

月日观察的数据计算，计算相继数据之间的一次差分、二次查分。观察到这些差分等于常数时的情况，对数据做内插和外插。新月和亏蚀出现的时间计算误差在几分钟。恒星年（太阳相对恒星的位置复原所需要的时间）相差 4.5 分。

用阴历。每月在月球全黑（所谓的新月）后首次出现峨眉月开始，日子从出现峨眉月那天晚上开始计算，从日落到第二天日落之间算作一天。逐年算出夏至时间，定出冬至、春分、秋分。

算术、代数、几何的步骤是根据物理事实、不断试验和修改，从直观认识中得到的。

埃及 埃及文化在公元前 2500 年左右达到顶峰，修建金字塔。到公元 600 年左右，埃及的历史和数学附属于希腊文明。

有多套文字：象形文字，用在碑文和器皿上；僧侣文，用于日常书写。

算术，单位分数。代数，$ax^2 = b$。几何，椎底是正方形的截棱锥体积 $V = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)$。

【应用】

计算报酬、谷仓容积、土地面积、天文历法。

观察天狼星计算太阳年，这颗星在夏季某一天可以在太阳快出来的时候在地平线上看到，称为天狼星的先阳升日，2 个先阳升日之间相差 365.25 天，定一年为 365 天。尼罗河水开始上涨的那天定为一年第一天。起初定一年 12 个月，每月 30 天。在公元前 45 年，定一年为 365.25 天。

古希腊

公元前 775 年，将象形文字改为拼音字母。

古典时期【公元前 600 年-公元 300 年】 Euclid 的《几何原本》和 Apollonius 的《圆锥曲线》

Pythagoras 学派开始，研究抽象概念。三角形数，沙滩上的小石子堆，求和公式。$1+2+\cdots+n$ 的公式。

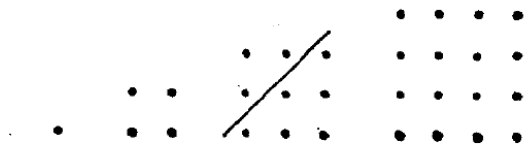

Figure 1.1: [三角形数]

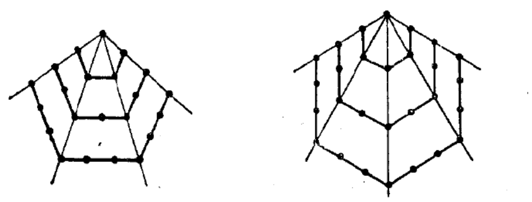

Figure 1.2: [n 边形数]

Zeno 生于公元前 495 到公元前 480 年间，当时人们对空间和时间有 2 种相对的看法，一是无限可分，运动是连续和平顺的；另一是由不可分的小段组成，运动是一系列小跳动。

Aristotle 批判 Zeno 悖论：悖论 1，两分法悖论：从 A 到 B，要先到之间的中点，空间无限可分，包含无限中点，不可能在有限时间内通过有限长度，若能通过，意味着必须到达没有终点的某种东西的终点。【Aristotle 批，长度由无限点组成，时间段由无限时刻组成，有限时间段内可通过长度。】悖论 2，运动慢的不会被运动快的追上，因为要不断到达被追者前一刻所在的点。悖论 3，飞矢不动，任意瞬时必定在确定位置，因而是静止的。【Aristotle 批，不承认时间具有不可分的单元。】悖论 4，A 静止，一定时间内 B 左走 1，C 右走 1，则 B 和 C 相差 2。【速度是相对的，没有绝对的空间可以作为规定速度的依据】

Eudoxus 证明了圆锥和棱锥的体积等于同底同高的圆柱和棱柱的三分之一。

Hippias，生于公元前 460 年左右，诡辩学派。

AB 顺时针匀速转到 AD，BC 匀速运动到 AD，交点从 B 逐渐运动到 G。$\frac{\phi}{\pi*0.5} = \frac{E'H}{BA}$

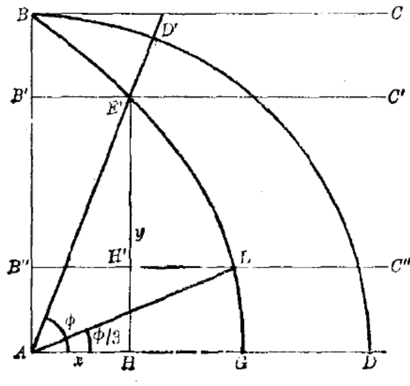

Figure 1.3: [割圆曲线]

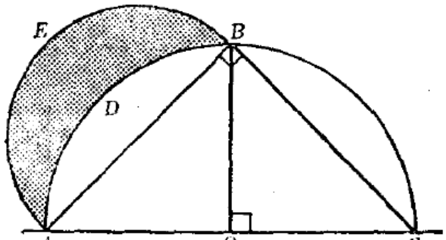

Figure 1.4: [阴影面积 = 三角形 AOB 的面积]

Plato 学派。Archytas 把曲线作为动点的轨迹，把曲面作为是曲线移动而产生的。Plato 认为具体事物的完美理想才是实在，相信有一个独立、永恒的观念世界。从 Plato 开始要求根据公认的原理进行形式上的演绎证明。Plato 学派字重要的发现是圆锥曲线。

Endoxus 引入变量的概念。建立了数学上以明确公理为依据的推演。

形而上学家研究数学家和自然哲学家（科学家）认为是不言而喻的东西，如研究对象的存在性、真实性问题、公理的本性问题。

Aristotle 指出 (据 Plutarch 说 Plato 较早指出过) 一个定义只能告诉我们一件事物是什么，

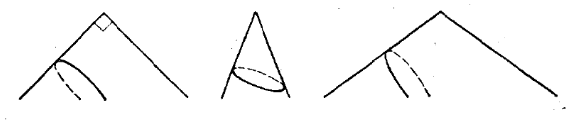

Figure 1.5: [Menaechmus 通过垂直于锥面的母线割锥面获得圆锥曲线]

并不说明它一定存在．定义了的东西是否存在有待于证明，除非是少数几个第一性的东西诸如点和直线, 它们的存在是同公理 (第一性原理) 一起事先为人们所接受的.

Aristotle 和 Euelid 所采取的用以证明存在性的方法是构造 (construction).Euelid《原本》中头三个公理承认直线和圆的构造; 所有其他数学概念则必须构造出来以证明其存在, 例如角的三等分线虽可定义, 但不能用直线和圆构造出来, 所以在希腊几何学里不能加以考虑. Aristotle 也讨论数学的基本原理．他把公理和公设加以区别, 认为公理是一切科学所公有的真理, 而公设则只是为某一门科学所接受的第一性原理．他把逻辑原理 (诸如矛盾律、排中律、等量加减等量后结果相等的公理以及其他这类原理) 都列为公理. 公设无需是不言自明的，但其是否属真应受所推出结果的检验. 所列出的一批公理或公设, 数目应该愈少愈好, 只要它们能用以证明所有结果.

Aristotle 讨论了怎样能把点同线联系起来这个基本问题. 他说点不可分，然而占有位置．但那样的话，尽管聚集起多少点来，还总是聚不成能分的东西, 而线段则肯定是能分的量. 因此点不能形成象线这类连续的东西，因为点与点不能自己连续在-起．他说一点好比是时间中的“此刻”(现在)．此刻不可分，因而并非时间的一部分．一点可能是一线的末端、开端或其上的分界处, 但它不能是线的一部分，也不成其为量．一点只有通过运动才能产生一线从而成其为量的本原.. 他又论证说点没有长度，因此若–线由点组成，它将没有长度．同样，如果时间由瞬刻组成, 那就没有整个的时段了: 关于线所具有的连续性, 他是这样定义的: 如果一件东西的任何两个相继部分在其接触处的两个界限合而为一，这东西就是连续的. 实际上 Aristotle 讲过许多次关于连续量的话，讲法都不一致．但他那个主张的实质是: 点和数是离散量, 必须同几何上的连续量区别开来．在算术上没有连续集合 (连续统)．至于就两门学科的关系来说, 他认为算术 (即数论) 是更准确的, 因为数比几何概念更易于抽象化．他又认为算术要先行于儿何，因为在考察三角形之前先需要有三这个数.

时间在两个方向上是潜在无穷的。

【Euclid 的《几何原本》】

一线的两端是点。从任一点到任一点做直线是可能的。【他假设线是唯一的】把有限直线不断沿着直线延长是可能的。

延长 AB 到 AF，延长 AC 到 AG，使得 BF=CG, 由三角形全等，得到角 3= 角 4，角 5= 角 6，从而证明等腰三角形两底角相等。

希腊人不承认无理数。

《几何原本》第 5 章，根据 Eudoxus 的工作写的“比例论”，是 Euclid 几何的最大成就。

求两数最大公度 (公因子) 的步骤. Euclid 描述这个步骤的说法是: 若 A 与 B 是两数且 B<A，

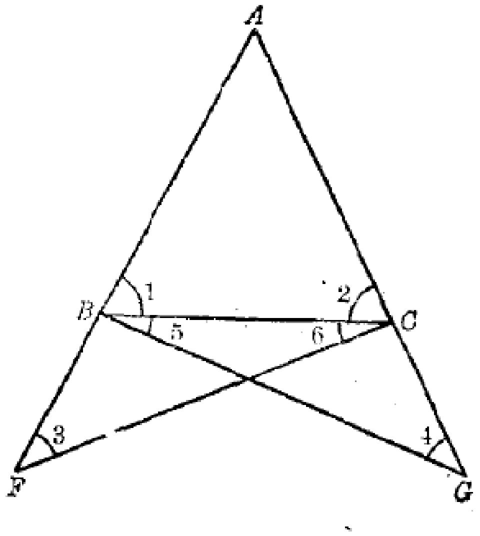

Figure 1.6: [证明等腰三角形两底角相等]

从 4 减去足够多次的 B 一直到余数 小于 B．然后再从 B 减去足够多次的 C 直到余数小于 C．这样一直做下去．若 A 与 B 互质，最后余数是 1．那样 1 就是它们最大公因数．若 A 与 B 不互质，就会在某一阶段有最后一数量尽前一个数的情况．这最后的数便是 A 与的最大公因数．这种步骤现今称作 Euclid 算法.

可以每个顶点用 3 个正方形构成立方体，用 3 个正五边形构成正二十面体。

先给出一系列公理，然后推理。

对于无限远空间所必须成立的任何说法，其具体意义总是含糊不清的。【但是说两直线在有限远相交，但无法指出有限远在何处，是不是含糊不清呢？】

要假定移动图形而不改变图形的性质，需要对物理空间做很多限定。

两条直线可以相交但是没有公共点。

【Apollonius 的《圆锥曲线》】

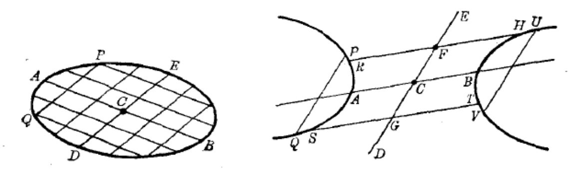

Figure 1.7: 弦中点

椭圆中弦 PQ，平行于弦 PQ 的所有弦的中点在一条直线上，记为 AB。过 AB 的中点做弦 DE 平行于 PQ，则 DE 上所有的点是平行于 AB 的弦的中点。

【切线与面积】1.2.1过 O 做圆锥曲线的两切线 OP 和 OQ，做弦 RS 和 $R'S'$ 分别平行于两切线，交点 J，则有 $\frac{RJ*JS}{R'J*JS'} = \frac{OP^2}{OQ^2}$

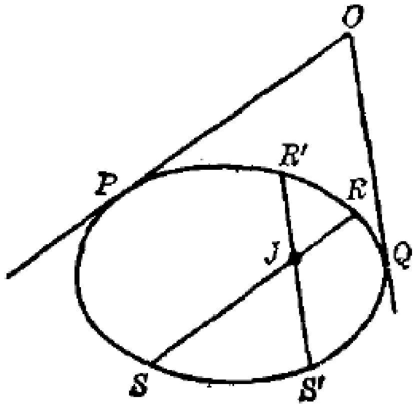

Figure 1.8: 【切线与面积】

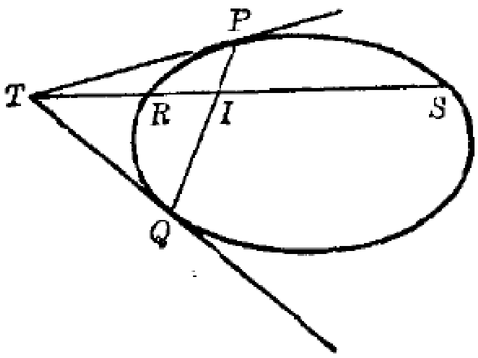

Figure 1.9: 【调和 1】

【调和 1】$\frac{TR}{TS} = \frac{IR}{IS}$

【调和 2】$\frac{OR}{OS} = \frac{VR}{VS}$

【焦距】圆锥曲线上点 P 与两焦点连线与切线交于等角。P 与两焦点连线之和或差等于 $A'A$

Euclid 部分解决一个问题：与四根固定直线距离 p,q,r,s，满足 $pq = \alpha rs$，其中 α 已知，求动点轨迹。Pappus 也早知道这动点是圆锥曲线。

希腊时期【公元 300 年-公元 600 年】

1.2.2 近代【公元 1689 年-公元 1917 年】

1.2.3 现代【公元 1917 年-现在】

1.3 数学的思维方式与创新-84-北大 (丘维声)

6,1039.

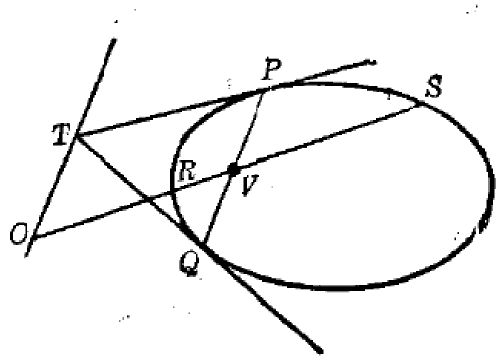

Figure 1.10: 【调和 2】

1.3.1 数学史上的重大创新

分析：微积分的创立和完备化

观察现象主要特征，抽象出概念。探索。猜测。证明。
如求瞬时速度，$s = at^2, \frac{\Delta s}{\Delta t} = 2at + \Delta t$，牛顿忽略 Δt，叫做留数，留下来的数。
如何解决不等于零又等于零的矛盾？
delta t 趋近于 0，无限，柯西引入极限的概念：函数在 x0 附近有定义，在 x0 可以没有定义，如果存在 c 使得 x 趋近于 x0 但不等于 x0 时，$|f(x) - c|$ 可以无限小，称 c 是 x 趋近于 x0 时 f(x) 的极限。
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$, that when $0 < |x - x_0| < \delta$, we have $|f(x) - c| < \varepsilon$

几何：欧几里得几何到非欧几里得几何

从平直空间到弯曲空间。
从定义和公理，推导和推演。平行公设。高斯和波约，罗巴切夫斯基（1829 年），平行公设只是假设。现实世界如何实现非欧几何的用处。高斯想法把球面本身看做一个空间。后来黎曼发展了。弯曲空间的几何是黎曼几何，如球面上的直线定义为大圆的一部分，这样发现过已知直线外一点不存在其平行线。在双曲几何模型下可以实现罗巴切夫斯基几何。

代数学中

伽瓦罗，代数学从研究方程的根，到研究代数系统的结构和保持运算的映射。

1.3.2 集合的划分

交空并全的划分方法：模 n 同余是 $\mathbb{Z}$ 的一个二元关系。两个集合的笛卡尔积
a 与 b 模 n 同余：$(a, b) \in \bigcup_{i=0}^{n-1} H_i \times H_i \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. 抽象：非空集合 s，$S \times S$ 的子集 W 是 S 是上

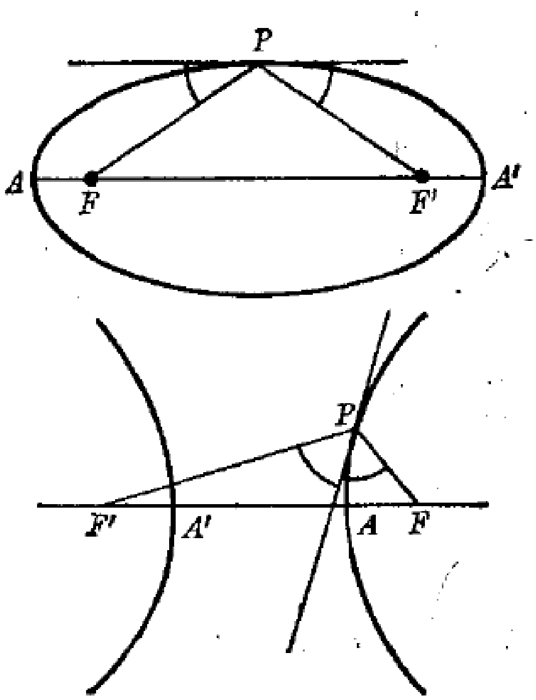

Figure 1.11: 【焦距】

的二元关系，有关系的记为 aWb

等价关系

反身性，对称性，传递性，$a \sim b$. $a \sim b \Leftrightarrow b \sim a$. $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$
$\bar{a}$ 是 a 确定的等价类，$\{x \in S | x \sim a\}$。易有 $\bar{x} = \bar{y} \Leftrightarrow x \sim y$ 。

定理 1：集合 S 上等价关系 $\sim$ 给出的等价类的集合是 S 的一个划分。
证明思路：需要证明并全，交空。交空比较难，需要研究等价类的性质。等价类的代表不唯一。
Step1) It is obvious that $\cup_{a \in S} \bar{a} \subseteq S$，and for any $b \in S$, we have $b \in \bar{b} \in \cup_{a \in S} \bar{a}$, this means $S \subseteq \cup_{a \in S} \bar{a}$, so $\cup_{a \in S} \bar{a} = S$.
Step2) To prove $\bar{x} \neq \bar{y} \Rightarrow \bar{x} \bigcap \bar{y} = \varnothing$, we prove the contrapositive $\bar{x} \bigcap \bar{y} \neq \varnothing \Rightarrow \bar{x} = \bar{y}$, and this is easy to prove.

1.4 Space

1.4.1 Operation Defination

Element

we define the basic element as following, where $\boldsymbol{e}_i$ means $x_i = 1, x_j = 0$ for all $j \neq i$.

$$\vec{x} = \boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \ldots]^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \Sigma x_i \boldsymbol{e_i} \tag{1.1}$$

We define Kronecker sign to simply the description of $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j$.

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{1.2}$$

The set of bases $\{\boldsymbol{e}_i\} \stackrel{apply}{\longrightarrow} \boldsymbol{x} \longrightarrow \{x_i\}$.

Dot Product

We define in algebra, $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} := \sum x_i y_i \delta_{ij} = \boldsymbol{x}^T \cdot \boldsymbol{y}$.

Then the defination is restricted to the choose of the coordinate system. We take a look a the product with reflect $T : \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{x}$,

$$(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^T = (a_{ik} b_{kj})^T = c_{ij}^T = c_{ji} = b_{jk} a_{ki} = \boldsymbol{B}^T \cdot \boldsymbol{A}^T \tag{1.3}$$

we have

$$(\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{x})^T (\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T (\boldsymbol{T}^T \boldsymbol{T}) \boldsymbol{y} = [(\boldsymbol{T}^T \boldsymbol{T}) \boldsymbol{x}]^T \boldsymbol{y} \tag{1.4}$$

We name T a Contractive mapping when $\boldsymbol{T}^T \boldsymbol{T} \leqslant \theta, 0 \leqslant \theta \leqslant 1$.

geometry Properties

$$\begin{aligned} \parallel \boldsymbol{x} \parallel &:= \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}} \\ \cos \theta_{x,y} &:= \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}{\parallel \boldsymbol{x} \parallel \cdot \parallel \boldsymbol{y} \parallel} \end{aligned} \tag{1.5}$$

Add

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} &:= \sum (x_i+y_i)\boldsymbol{e}_i \\
k\cdot\boldsymbol{x} &:= \sum k x_i \boldsymbol{e}_i
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

Law $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$, law $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$ is not obvious in the view of Set Theory.

1.5 Euclid 空间

有序的 n 元组的全体称为 n 维 Euclid 空间，记为 $\mathbb{R}^n$，称 $\boldsymbol{p}=(p_i)_{i=1}^n\in\mathbb{R}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个点。为便于研究，本论文以 $\mathbb{R}^3$ 为背景空间，所涉及的函数默认为可微实值函数。如果实函数 f 的任意阶偏导数存在且连续，则称函数是可微的（或无限可微的，或光滑的，或 C^∞ 的）。
由于微分运算是函数的局部运算，限制所讨论函数的定义域在 $\mathbb{R}^3$ 中的任意开集，所讨论的结论仍然成立。
自然坐标函数：定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的实值函数 $x_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，使得 $\boldsymbol{p}=(p_i)_{i=1}^n=(x_i(\boldsymbol{p}))_{i=1}^n$
切向量：由 $\mathbb{R}^n$ 中的二元组构成，$\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{p}}=(\boldsymbol{p},\boldsymbol{v})$，其中 $\boldsymbol{p}$ 是作用点，$\boldsymbol{v}$ 是向量部分
切空间 $T_p\mathbb{R}^n$: 作用点 $\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^n$ 的所有切向量的集合。利用向量加法与数量乘法使某点的切空间称为向量空间，与背景空间存在非平凡同构。
向量场 $\boldsymbol{V}$: 作用于空间点的向量函数，$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{p})\in T_p\mathbb{R}^n$
逐点化原理：$(\boldsymbol{V}+\boldsymbol{W})(\boldsymbol{p})=\boldsymbol{V}(\boldsymbol{p})+\boldsymbol{W}(\boldsymbol{p})$, $(f\boldsymbol{V})(\boldsymbol{p})=f(\boldsymbol{p})\boldsymbol{V}(\boldsymbol{p})$
自然标架场：定义 $\boldsymbol{U}_i=(\delta_j^i)_{j=1}^n$，按 Einstein 求和约定，有 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{p})=v^i(\boldsymbol{p})\boldsymbol{U}_i(\boldsymbol{p})$, 称 v^i 为场的 Euclid 坐标函数，其中 Kronecker δ 函数定义为：

$$
\delta_i^j=\begin{cases}1,\ i=j\\ 0,\ i\neq j\end{cases}
\tag{1.7}
$$

1.6 Reference