

# Chapter 1 Methodology

## 1.1 History

## 1.2 数学的思维方式与创新-84-北大 (丘维声)

6,1039.

### 1.2.1 数学史上的重大创新

分析：微积分的创立和完备化

观察现象主要特征，抽象出概念。探索。猜测。证明。

如求瞬时速度， $s = at^2$ ,  $\frac{\Delta s}{\Delta t} = 2at + \Delta t$ ，牛顿忽略  $\Delta t$ ，叫做留数，留下来的数。

如何解决不等于零又等于零的矛盾？

$\Delta t$  趋近于 0，无限，柯西引入极限的概念：函数在  $x_0$  附近有定义，在  $x_0$  可以没有定义，如果存在  $c$  使得  $x$  趋近于  $x_0$  但不等于  $x_0$  时， $|f(x) - c|$  可以无限小，称  $c$  是  $x$  趋近于  $x_0$  时  $f(x)$  的极限。

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , that when  $0 < |x - x_0| < \delta$ , we have  $|f(x) - c| < \varepsilon$

几何：欧几里得几何到非欧几里得几何

从平直空间到弯曲空间。

从定义和公理，推导和推演。平行公设。高斯和波约，罗巴切夫斯基（1829 年），平行公设只是假设。现实世界如何实现非欧几何的用处。高斯想法把球面本身看做一个空间。后来黎曼发展了。弯曲空间的几何是黎曼几何，如球面上的直线定义为大圆的一部分，这样发现过已知直线外一点不存在其平行线。在双曲几何模型下可以实现罗巴切夫斯基几何。

代数学中

伽瓦罗，代数学从研究方程的根，到研究代数系统的结构和保持运算的映射。

### 1.2.2 集合的划分

交空并全的划分方法：模  $n$  同余是  $\mathbb{Z}$  的一个二元关系。两个集合的笛卡尔积  $a$  与  $b$  模  $n$  同余： $(a, b) \in \bigcup_{i=0}^{n-1} H_i \times H_i \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . 抽象：非空集合  $s$ ,  $S \times S$  的子集  $W$  是  $S$  是上的二元关系，有关系的记为  $aWb$

#### 等价关系

反身性，对称性，传递性， $a \sim b$ .  $a \sim b \Leftrightarrow b \sim a$ .  $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$   
 $\bar{a}$  是  $a$  确定的等价类， $\{x \in S | x \sim a\}$ 。易有  $\bar{x} = \bar{y} \Leftrightarrow x \sim y$ 。

定理 1：集合  $S$  上等价关系  $\sim$  给出的等价类的集合是  $S$  的一个划分。

证明思路：需要证明并全，交空。交空比较难，需要研究等价类的性质。等价类的代表不唯一。

Step1) It is obvious that  $\bigcup_{a \in S} \bar{a} \subseteq S$ , and for any  $b \in S$ , we have  $b \in \bar{b} \in \bigcup_{a \in S} \bar{a}$ , this means  $S \subseteq \bigcup_{a \in S} \bar{a}$ , so  $\bigcup_{a \in S} \bar{a} = S$ .

Step2) To prove  $\bar{x} \neq \bar{y} \Rightarrow \bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$ , we prove the contrapositive  $\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset \Rightarrow \bar{x} = \bar{y}$ , and this is easy to prove.

# Chapter 2 Introduction

Today is 20211204, and I decided to note down all of my knowledge about the math in this notebook.

## 2.1 Space

### 2.1.1 Operation Definition

#### Element

we define the basic element  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots]^T = \sum x_i \mathbf{e}_i$ ,  $\mathbf{e}_i$  means  $x_i = 1, x_j = 0$  for all  $j \neq i$ . We define Kronecker sign to simply the description of  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ .

$$\delta_{i,j} := \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (2.1)$$

The set of bases  $\{\mathbf{e}_i\} \xrightarrow{\text{apply}} \mathbf{x} \longrightarrow \{x_i\}$ .

#### Dot Product

We define in algebra,  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := \sum x_i y_i \mathbf{e}_i = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y}$ .

Then the definition is restricted to the choice of the coordinate system. We take a look at the product with reflect  $T : \mathbf{x} \rightarrow T \cdot \mathbf{x}$ ,

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = (a_{ik} b_{kj})^T = c_{ij}^T = c_{ji} = b_{jk} a_{ki} = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T \quad (2.2)$$

we have

$$(\mathbf{T} \cdot \mathbf{x})^T (\mathbf{T} \cdot \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T (\mathbf{T}^T \mathbf{T}) \mathbf{y} = [(\mathbf{T}^T \mathbf{T}) \mathbf{x}]^T \mathbf{y} \quad (2.3)$$

We name T a Contractive mapping when  $\mathbf{T}^T \mathbf{T} \leq \theta, 0 \leq \theta \leq 1$ .

## geometry Properties

$$\begin{aligned}\| \mathbf{x} \| &:= \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} \\ \cos \theta_{x,y} &:= \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\| \mathbf{x} \| \cdot \| \mathbf{y} \|}\end{aligned}\tag{2.4}$$

Add

$$\begin{aligned}\mathbf{x} + \mathbf{y} &:= \sum (x_i + y_i) \mathbf{e}_i \\ k \cdot \mathbf{x} &:= \sum k x_i \mathbf{e}_i\end{aligned}\tag{2.5}$$

Law  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ , law  $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$  is not obvious in the view of Set Theory.

## 2.2 Euclid 空间

有序的  $n$  元组的全体称为  $n$  维 Euclid 空间, 记为  $\mathbb{R}^n$ , 称  $\mathbf{p} = (p_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$  是  $\mathbb{R}^n$  的一个点。为便于研究, 本论文以  $\mathbb{R}^3$  为背景空间, 所涉及的函数默认为可微实值函数。如果实函数  $f$  的任意阶偏导数存在且连续, 则称函数是可微的 (或无限可微的, 或光滑的, 或  $C^\infty$  的)。

由于微分运算是函数的局部运算, 限制所讨论函数的定义域在  $\mathbb{R}^3$  中的任意开集, 所讨论的结论仍然成立。

自然坐标函数: 定义在  $\mathbb{R}^n$  上的实值函数  $x_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , 使得  $\mathbf{p} = (p_i)_{i=1}^n = (x_i(\mathbf{p}))_{i=1}^n$

切向量: 由  $\mathbb{R}^n$  中的二元组构成,  $\mathbf{v}_{\mathbf{p}} = (\mathbf{p}, \mathbf{v})$ , 其中  $\mathbf{p}$  是作用点,  $\mathbf{v}$  是向量部分

切空间  $T_{\mathbf{p}}\mathbb{R}^n$ : 作用点  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$  的所有切向量的集合。利用向量加法与数量乘法使某点的切空间称为向量空间, 与背景空间存在非平凡同构。

向量场  $\mathbf{V}$ : 作用于空间点的向量函数,  $\mathbf{V}(\mathbf{p}) \in T_{\mathbf{p}}\mathbb{R}^n$

逐点化原理:  $(\mathbf{V} + \mathbf{W})(\mathbf{p}) = \mathbf{V}(\mathbf{p}) + \mathbf{W}(\mathbf{p})$ ,  $(f\mathbf{V})(\mathbf{p}) = f(\mathbf{p})\mathbf{V}(\mathbf{p})$

自然标架场: 定义  $\mathbf{U}_i = (\delta_j^i)_{j=1}^n$ , 按 Einstein 求和约定, 有  $\mathbf{V}(\mathbf{p}) = v^i(\mathbf{p})\mathbf{U}_i(\mathbf{p})$ , 称  $v^i$  为场的 Euclid 坐标函数, 其中 Kronecker  $\delta$  函数定义为:

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}\tag{2.6}$$

## 2.3 Reference

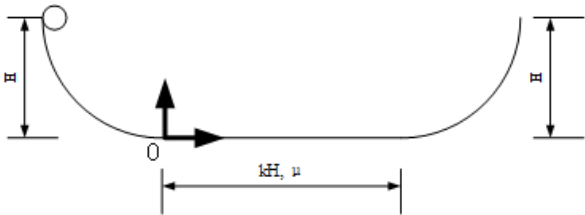


Figure 2.1: 正则项的几何意义



# Chapter 3    Topology

## 3.1   Algebraic Topology

### 3.1.1   摘要

拓扑空间概念、性质、构造方法（如映射锥）基本群的计算方法奇异同调群 3 个定理：同伦不变性，正合序列，切除定理奇异上同调（有环结构），泛系数定理，Künneth 定理代数拓扑通过寻找拓扑不变量给拓扑空间做分类。通过函子，把输入的拓扑空间变成群，把映射对应为同态，把同胚对应为同构。梦想是通过证明同构能够断言空间同胚。梦想还未实现，目前三维流形的分类为完成。

### 3.1.2   拓扑空间

通常研究连续映射、度量空间

性质：紧致性（任意开覆盖有子覆盖），连通性（不能表示成不相交的开子集之并），道路连通，分离性

同胚：对于拓扑空间  $X$  和  $Y$ ，称  $X \cong Y$ ，如果对于  $X \xrightleftharpoons[g]{f} Y$ ，有  $g \circ f = 1_X, f \circ g = 1_Y$

拓扑性质：同胚意义下不变的性质





# Chapter 4    Group Theory



# Chapter 5 Group Representation

## 5.1 Introduction

丘维声。

运算：笛卡尔积  $S \times S \mapsto S$  是集合  $S$  的二元代数运算。现代数学的鲜明特征是研究有各种运算的集合，称为代数系统。

现代数学的两大特征，1) 研究代数系统的结构;2) 利用同态映射研究代数系统结构。

核心：群表示论是研究  $G$  到各个线性空间的可逆线性变换群的各种同态映射，以获得  $G$  结构的完整信息。

群表示论是研究群结构的最强有力的工具。应用如晶体学，量子力学，抽象调和分析，组合数学，密码学，纠错编码

必备参考书，《抽象代数基础》丘维声，高教出版社，《高等代数学习指导书下》丘维声，清华大学。

### 5.1.1 环，域，群

表 5.1: algebra system

名称	运算	性质	举例
ring	加法; 乘法	交换, 结合, 0 元, 负元; 结合, 左右分配律	整数集 $\mathbb{Z}$ , 偶数集 $2\mathbb{Z}$ , 一元实系数多项式 $\mathbb{R}(x)$ , 实 $n$ 阶矩阵 $M_n(\mathbb{R})$

交换环，乘法可交换。单位元。

例子，星期  $i$ ，记为  $\bar{i} = \{7k + i \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ，收集起  $\bar{i}$  可以实现整数的划分。类似的，定义模  $m$  剩余类：

$$\mathbb{Z}_m = \{\bar{i} \mid i = 1, \dots, m-1\} \quad (5.1)$$

定义加法和乘法, 有模  $m$  剩余类环

$$\begin{aligned}\bar{i} + \bar{j} &= \overline{i+j} \\ \bar{i} \cdot \bar{j} &= \overline{i \cdot j}\end{aligned}\tag{5.2}$$

可逆元, 单位  $a$ :  $a \in \text{ring} R, \exists b \in R, ab = ba = e$

左零因子  $a$ :  $a \neq 0, \exists c \neq 0, ac = 0$

例子:  $\mathbb{Z}_8$ , 零因子 2,4,6; 可逆元 3,5,7;

例子:  $\mathbb{Z}_7$ , 每个非零元都可逆;

域  $F$ : 有单位元  $e$  的环, 且每个非零元都可逆。例子: 有理数集, 实数集, 复数集  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}$   
域  $F$  中可以定义除法。

群  $G$ : 只有乘法, 结合律, 单位元, 每个元素有逆元。

例子:  $\mathbb{Z}_m^*$ :  $\mathbb{Z}_m$  所有可逆元的集合, 发现只对乘法封闭, 称为  $\mathbb{Z}_m$  的单位群; 如域  $F$  上的所有可逆矩阵的集合  $GL_n(F)$ , 只有乘法, 称为域  $F$  上的一般线性群。

阿贝尔群: 乘法可交换。

例子:  $GL(V)$ , 域  $F$  上的线性空间  $V$  的所有可逆线性变换, 对于映射的乘法行程的  $V$  上可逆线性变换群。子群:  $H < G$

### 5.1.2 等价关系与左陪集

研究  $G$  的第一个途径: 利用子群  $H$  研究  $G$ 。

集合的划分与等价关系。对于  $a, b \in G$ , 定义  $a \sim b : \Leftrightarrow b^{-1}a \in H$ , 易有关系 具有反射性 ( $e$  在  $H$  中), 对称性, 传递性, 所以这是等价关系。

定义  $a$  的等价类:

$$\begin{aligned}\bar{a} &:= \{x \in G \mid x \sim a\} \\ &:= \{x \in G \mid a^{-1}x \in H\} \\ &= \{x \in G \mid x = ah, h \in H\} \\ &= \{ah \mid h \in H\} \\ &=: aH\end{aligned}\tag{5.3}$$

$aH$  称为以  $a$  为代表的  $H$  的一个左陪集, 是一个等价类。

根据等价类的性质, 有 1)  $aH = bH \Leftrightarrow b^{-1}a \in H$ ; 2)  $aH$  与  $bH$  或者相等, 或者不相交 (交集为空集)。所以  $H$  的所有左陪集给出  $G$  的一个划分, 记为  $G/H$ , 称为  $G$  关于  $H$  的左商集。 $G/H$  的基数称为  $G$  关于  $H$  的指数, 记为  $[G:H]$ 。基数相同可建立双射。

$G$  关于  $H$  的左陪集分解:  $[G : H] = r, G = eH \cup a_1H \cup \cdots \cup a_{r-1}H$ 。

拉格朗日定理: 对于有限群  $G$ , 易有其元素个数  $|G| = |H|[G : H]$ , 即任何子群的阶是群的阶的因数。推论: 1)  $n$  阶群  $G$  的任意元素  $a$ , 有  $a^n \in G$ ; 2) 素数阶群是循环群。

### 5.1.3 同态

研究  $G$  的第二个途径: 通过研究  $G$  到  $G'$  的保持运算的映射, 同态映射, 简称同态。同态要变, 是函数。

通常利用  $G$  到  $\Omega$  的同态, 等价于  $G$  在  $\Omega$  的作用。既可以研究  $G$  的结构, 又可以对  $\Omega$  的性质有所了解

$S(\Omega)$ :  $\Omega$  的全变换群, Full Transformation Group on Set  $\Omega$ ,  $\Omega$  自身的所有双射组成的集合, 对于映射的乘法构成的一个群。

### 5.1.4 作业

1. 环  $R$  中,  $0a = a0 = 0$
2. 有  $e$  的环中, 零因子不是可逆元
3.  $\mathbb{Z}_m$  中每个元素要么是可逆元要么是零因子;
4.  $M_n(\mathbb{F})$  中, 每个矩阵是可逆矩阵或者是零因子。

## 5.2 Abel 群的表示

### 5.2.1 映射

映射:  $f : a \mapsto b \Leftrightarrow f(a) = b$ , 原象, 象。映射  $f$  的定义域 (domain)  $A$ , 陪域 (codomain)  $B$ 。映射得到的所有象的集合叫值域, 记作  $f(A)$ , 或  $\text{Im}f$ 。

满射, onto, 到上:  $f(A) = B$

单射, 一一的, 每个  $a$  对应的  $b$  是不同的。

双射, 两个集合一一对应。

逆映射。对于  $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow A$ , 有  $g \circ f = 1_A, f \circ g = 1_B$ 。可逆的  $f$  是双射。

线性映射、线性变换是线性空间的同态映射, 有点乘和加法。

补空间: 域  $\mathbb{F}$  上的线性空间  $U < V$ , 则  $\exists W, V = U \oplus W$ 。对于实内积空间  $V$ ,  $U$  是有限维的,  $W = U^\perp$ , 正交补空间, 唯一的。

投影变换: 域  $\mathbb{F}$  上的线性空间  $V = U \oplus W$ , 有  $\alpha = \alpha_U + \alpha_W$ , 有投影变换  $P_U : \alpha \mapsto \alpha_U$ 。投影变换保持加法和数乘, 是  $V$  上的线性变换。投影是同态映射。

几何空间：以原点  $O$  为起点的定位向量组成的实线性空间。知道一空间点在两个坐标面的投影坐标可完全确定点。

### 5.2.2 群的同态

同态映射： $G$  到  $G'$  的映射  $\sigma : \sigma(a, b) = \sigma(a)\sigma(b)$ 。单射的话是单同态。满射是满同态。双射是同构，此时两个群同构， $G \cong G'$ 。

同态的性质：1) 单位元、逆元、子群映射过去是  $G'$  的单位元、逆元、子群。例如  $G < G' \Rightarrow \sigma(G) = \text{Im}\sigma < G'$ ，同态的像是  $G'$  的子群

刻化单同态：找到映射成单位元的原象，定义同态的核， $\text{Ker}\sigma := \{a \in G | \sigma(a) = e'\}$ 。易有同态的核是  $G$  的子群。对于单同态， $\text{Ker}\sigma = \{e\}$ 。

子集乘法：类似与点乘， $a$  的所有和  $b$  的所有的乘积方式的组合。乘法满足结合律。

### 5.2.3 正规子群

$\forall k \in \text{ker}\sigma, \forall g \in G$ , we have:

$$\begin{aligned} \sigma(gkg^{-1}) &= \sigma(g)\sigma(k)\sigma(g^{-1}) = e' \\ \therefore gkg^{-1} &\in \text{ker}\sigma \\ \therefore g\text{ker}\sigma g^{-1} &\subset \text{ker}\sigma \\ \& \ g^{-1}\text{ker}\sigma g &\subset \text{ker}\sigma \\ \therefore g\text{ker}\sigma g^{-1} &= \text{ker}\sigma \end{aligned} \tag{5.4}$$

normal subgroup 正规子群:  $H \triangleleft G : \forall g \in G, gHg^{-1} = H$ ,  $gHg^{-1}$  是  $g$  的共轭子群。

性质:  $H \triangleleft G \Leftrightarrow gHg^{-1} = H, \forall g \in G \Leftrightarrow gH = Hg$ ,  $H$  的左右陪集相等;

$G$  关于正规子群  $H$  的商群: 规定正规子群  $H$  的商群  $G/H$  乘法:  $(aH)(bH) = abH$

### 5.2.4 群同态基本定理

$$\begin{aligned} \psi : G / \text{ker}\sigma &\rightarrow \text{Im}\sigma \\ a(\text{ker}\sigma) &\mapsto \sigma(a) \end{aligned} \tag{5.5}$$

看映射  $\psi$  的性质:

$$\left. \begin{aligned} a(\ker \sigma) &= b(\ker \sigma) \\ \Leftrightarrow b^{-1}a &\in \ker \sigma \\ \sigma(b^{-1}a) &= e' \\ \therefore \sigma(a) &= \sigma(b) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \psi \text{ is surjection} \quad (5.6)$$

从是映射、是单射、是满的, 得到是双射;

Let  $K = \ker \sigma$ ,  $\psi[(aK)(bK)] = \psi(abK) = \sigma(ab) = \psi(aK)\psi(bK)$ , 所以保持运算, 所以是同构, 所以  $G/\ker \sigma \cong \text{Im} \sigma$

群同态基本定理:  $\ker \sigma \triangleleft G$  &  $G/\ker \sigma \cong \text{Im} \sigma$

## 5.3 线性表示

$GL(V)$ : 对于群  $G$ , 域  $\mathbb{K}$  上的线性空间  $V$ ,  $G$  到  $V$  的所有可逆线性变换的集合, 对于映射的乘法成为一个可逆线性变换群。

$G$  到  $GL(V)$  的同态  $\psi$  是  $G$  在  $\mathbb{K}$  上的线性表示, 简称为  $\mathbb{K}$  表示, 或者简称为表示。

$V$  叫做表示空间, 表示次数  $\deg \psi := \dim V$

$(\psi, V)$

如用两个视图可完全确定空间曲线, 即做了两个同态。

$\ker \psi = \{e_G\}$ ,  $\psi$  是忠实的;

$\ker \psi = G$ ,  $\psi$  是平凡的;  $\chi$ 、称一次的平凡表示  $\psi$  是  $G$  的主表示, 单位表示, 记作  $1_G$ ;

$\dim V = n$  时, 有  $\psi(g)$  在基  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  下的矩阵  $\Phi(g)$  是  $\mathbb{K}$  上的可逆矩阵, 由同构  $GL(V) \cong GL_n(\mathbb{K})$ , 有  $G$  到  $GL_n(\mathbb{K})$  的同态  $\Phi$ , 称为  $G$  在  $\mathbb{K}$  上的  $n$  次矩阵表示。

$\Phi$  称为是  $\psi$  提供的

### 5.3.1 表示的等价类

等价关系: 对于  $G$  的 2 个  $\mathbb{K}$  表示,  $(\phi, V), (\psi, W), \exists \sigma$  到  $W$  的线性空间的同构  $\sigma$ , 定义  $\psi(g)\sigma = \sigma\phi(g), \forall g \in G$ , 这种  $G$  的所有  $\mathbb{K}$  表示的集合  $\Omega$  上的二元关系, 易有具有反射性, 对称性, 传递性, 从而是等价关系。通常关注  $G$  的  $\mathbb{K}$  表示的等价类。

$(\phi, V), (\psi, W)$  等价, 取基后的矩阵记为  $\Phi(g)|\{\alpha_i, \dots\}, \Psi(g)|\{\beta_i, \dots\}$ , 同构  $\sigma$  把  $V$  的基映射到  $W$  上的  $S$ , 有  $\sigma(\{\alpha, \dots\}) = \{\beta, \dots\}S, \therefore \Psi(g)S = S\Phi(g)$ . 所以  $G$  在  $\mathbb{K}$  的 2 个矩阵表示  $\Psi, \Phi$  等价: 次数一样且  $\forall g \in G, \Psi = S\Phi(g)S^{-1}$ . 所以群  $G$  的 2 个  $\mathbb{K}$  表示  $(\phi, V), (\psi, W)$  等价,  $\Leftrightarrow \mathbb{K}$  表示提供的矩阵表示  $\Psi, \Phi$  等价。

### 5.3.2 例：1 次表示

$G$  在  $K$  上的 1 次矩阵表示  $\Phi: G \rightarrow K^*$ ; 非零元集合。映射是通用的不对定义域做要求, 陪域是域的子集的映射叫函数。称为  $G$  上的  $K^*$  函数, 且由于同态保持运算, 有  $\Phi(gh) = \Phi(g)\Phi(h), \forall g, h \in G$ , and  $\Phi(e) = 1$ , where 1 is the unit of  $K^*$ . 所以一次表示是  $G$  到  $K^*$  的保持运算的函数。

### 5.3.3 例：实数和加法的 1 次实表示

$f_a(x) = e^{ax}$  是  $(\mathbb{R}, +)$  的 1 次实表示。

### 5.3.4 例：实数和加法的 1 次复表示

$f_a(x) = e^{iax}$  是  $(\mathbb{R}, +)$  的 1 次复表示。

$$\begin{aligned} f: (\mathbb{R}, +) &\rightarrow \mathbb{C}^* \\ x &\mapsto e^{iax} \end{aligned} \tag{5.7}$$