

# 1 Introduction

丘维声。

运算：笛卡尔积  $S \times S \mapsto S$  是集合  $S$  的二元代数运算。现代数学的鲜明特征是研究有各种运算的集合，称为代数系统。

现代数学的两大特征，1) 研究代数系统的结构;2) 利用同态映射研究代数系统结构。

核心：群表示论是研究  $G$  到各个线性空间的可逆线性变换群的各种同态映射，以获得  $G$  结构的完整信息。

群表示论是研究群结构的最强有力的工具。应用如晶体学，量子力学，抽象调和分析，组合数学，密码学，纠错编码

必备参考书，《抽象代数基础》丘维声，高教出版社，《高等代数学习指导书下》丘维声，清华大学。

## 1.1 环，域，群

表 1: algebra system

名称	运算	性质	举例
ring	加法; 乘法	交换, 结合, 0 元, 负元; 结合, 左右分配律	整数集 $\mathbb{Z}$ , 偶数集 $2\mathbb{Z}$ , 一元实系数多项式 $\mathbb{R}(x)$ , 实 $n$ 阶矩阵 $M_n(\mathbb{R})$

交换环，乘法可交换。单位元。

例子，星期  $i$ ，记为  $\bar{i} = \{7k + i\} | k \in \mathbb{Z}$ ，收集起  $\bar{i}$  可以实现整数的划分。类似的，定义模  $m$  剩余类：

$$\mathbb{Z}_m = \{\bar{i} | i = 1, \dots, m-1\} \quad (1)$$

定义加法和乘法，有模  $m$  剩余类环

$$\begin{aligned} \bar{i} + \bar{j} &= \overline{i+j} \\ \bar{i} \cdot \bar{j} &= \overline{i \cdot j} \end{aligned} \quad (2)$$

可逆元，单位  $a$ :  $a \in \text{ring} R, \exists b \in R, ab = ba = e$

左零因子  $a$ :  $a \neq 0, \exists c \neq 0, ac = 0$

例子:  $\mathbb{Z}_8$ , 零因子 2,4,6; 可逆元 3,5,7;

例子:  $\mathbb{Z}_7$ , 每个非零元都可逆;

域  $F$ : 有单位元  $e$  的环，且每个非零元都可逆。例子：有理数集，实数集，复数集  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ，域  $F$  中可以定义除法。

群  $G$ : 只有乘法, 结合律, 单位元, 每个元素有逆元。

例子:  $\mathbb{Z}_m^*$ :  $\mathbb{Z}_m$  所有可逆元的集合, 发现只对乘法封闭, 称为  $\mathbb{Z}_m$  的单位群; 如域  $F$  上的所有可逆矩阵的集合  $GL_n(F)$ , 只有乘法, 称为域  $F$  上的一般线性群。

阿贝尔群: 乘法可交换。

例子:  $GL(V)$ , 域  $F$  上的线性空间  $V$  的所有可逆线性变换, 对于映射的乘法行程的  $V$  上可逆线性变换群。子群:  $H < G$

## 1.2 等价关系与左陪集

研究  $G$  的第一个途径: 利用子群  $H$  研究  $G$ 。

集合的划分与等价关系。对于  $a, b \in G$ , 定义  $a \sim b \Leftrightarrow b^{-1}a \in H$ , 易有关系 具有反射性 ( $e$  在  $H$  中), 对称性, 传递性, 所以这是等价关系。

定义  $a$  的等价类:

$$\begin{aligned}\bar{a} &:= \{x \in G \mid x \sim a\} \\ &:= \{x \in G \mid a^{-1}x \in H\} \\ &= \{x \in G \mid x = ah, h \in H\} \\ &= \{ah \mid h \in H\} \\ &=: aH\end{aligned}\tag{3}$$

$aH$  称为以  $a$  为代表的  $H$  的一个左陪集, 是一个等价类。

根据等价类的性质, 有 1)  $aH = bH \Leftrightarrow b^{-1}a \in H$ ; 2)  $aH$  与  $bH$  或者相等, 或者不相交 (交集为空集)。所以  $H$  的所有左陪集给出  $G$  的一个划分, 记为  $G/H$ , 称为  $G$  关于  $H$  的左商集。 $G/H$  的基数称为  $G$  关于  $H$  的指数, 记为  $[G:H]$ 。基数相同可建立双射。

$G$  关于  $H$  的左陪集分解:  $[G:H] = r, G = eH \cup a_1H \cup \cdots \cup a_{r-1}H$ 。

拉格朗日定理: 对于有限群  $G$ , 易有其元素个数  $|G| = |H|[G:H]$ , 即任何子群的阶是群的阶的因数。推论: 1)  $n$  阶群  $G$  的任意元素  $a$ , 有  $a^n \in G$ ; 2) 素数阶群是循环群。

## 1.3 同态

研究  $G$  的第二个途径: 通过研究  $G$  到  $G'$  的保持运算的映射, 同态映射, 简称同态。同态要变, 是函数。

通常利用  $G$  到  $\Omega$  的同态, 等价于  $G$  在  $\Omega$  的作用。既可以研究  $G$  的结构, 又可以对  $\Omega$  的性质有所了解

$S(\Omega)$ :  $\Omega$  的全变换群, Full Transformation Group on Set  $\Omega$ ,  $\Omega$  自身的所有双射组成的集合, 对于映射的乘法构成的一个群。

## 1.4 作业

1. 环  $R$  中,  $0a=a0=0$
2. 有  $e$  的环中, 零因子不是可逆元
3.  $\mathbb{Z}_m$  中每个元素要么是可逆元要么是零因子;
4.  $M_n(\mathbb{F})$  中, 每个矩阵是可逆矩阵或者是零因子。

## 2 Abel 群的表示

### 2.1 映射

映射:  $f: a \mapsto b \Leftrightarrow f(a) = b$ , 原象, 象。映射  $f$  的定义域 (domain)  $A$ , 陪域 (codomain)  $B$ 。  
映射得到的所有象的集合叫值域, 记作  $f(A)$ , 或  $\text{Im}f$ 。

满射, onto, 到上:  $f(A) = B$

单射, 一一的, 每个  $a$  对应的  $b$  是不同的。

双射, 两个集合一一对应。

逆映射。对于  $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow A$ , 有  $g \circ f = 1_A, f \circ g = 1_B$ 。可逆的  $f$  是双射。

线性映射、线性变换是线性空间的同态映射, 有点乘和加法。

补空间: 域  $\mathbb{F}$  上的线性空间  $U < V$ , 则  $\exists W, V = U \oplus W$ 。对于实内积空间  $V$ ,  $U$  是有限维的,  $W = U^\perp$ , 正交补空间, 唯一的。

投影变换: 域  $\mathbb{F}$  上的线性空间  $V = U \oplus W$ , 有  $\alpha = \alpha_U + \alpha_W$ , 有投影变换  $P_U: \alpha \mapsto \alpha_U$ 。投影变换保持加法和数乘, 是  $V$  上的线性变换。投影是同态映射。

几何空间: 以原点  $O$  为起点的定位向量组成的实线性空间。知道一空间点在两个坐标面的投影坐标可完全确定点。

### 2.2 群的同态

同态映射:  $G$  到  $G'$  的映射  $\sigma: \sigma(a, b) = \sigma(a)\sigma(b)$ 。单射的话是单同态。满射是满同态。双射是同构, 此时两个群同构,  $G \cong G'$ 。

同态的性质: 1) 单位元、逆元、子群映射过去是  $G'$  的单位元、逆元、子群。例如  $G < G \Rightarrow \sigma(G) = \text{Im}\sigma < G'$ , 同态的像是  $G'$  的子群

刻画单同态: 找到映射成单位元的原象, 定义同态的核,  $\text{Ker}\sigma := \{a \in G | \sigma(a) = e'\}$ 。易有同态的核是  $G$  的子群。对于单同态,  $\text{Ker}\sigma = \{e\}$ 。

子集乘法: 类似与点乘,  $a$  的所有和  $b$  的所有的乘积方式的组合。乘法满足结合律。

### 2.3 正规子群

$\forall k \in \ker \sigma, \forall g \in G$ , we have:

$$\begin{aligned}
 \sigma(gkg^{-1}) &= \sigma(g)\sigma(k)\sigma(g^{-1}) = e' \\
 \therefore gkg^{-1} &\in \ker \sigma \\
 \therefore g \ker \sigma g^{-1} &\subset \ker \sigma \\
 \& \ g^{-1} \ker \sigma g &\subset \ker \sigma \\
 \therefore g \ker \sigma g^{-1} &= \ker \sigma
 \end{aligned} \tag{4}$$

normal subgroup 正规子群:  $H \triangleleft G : \forall g \in G, gHg^{-1} = H$ ,  $gHg^{-1}$  是  $g$  的共轭子群。

性质:  $H \triangleleft G \Leftrightarrow gHg^{-1} = H, \forall g \in G \Leftrightarrow gH = Hg$ ,  $H$  的左右陪集相等;

$G$  关于正规子群  $H$  的商群: 规定正规子群  $H$  的商群  $G/H$  乘法:  $(aH)(bH) = abH$

### 2.4 群同态基本定理

$$\begin{aligned}
 \psi : G/\ker \sigma &\rightarrow \text{Im} \sigma \\
 a(\ker \sigma) &\mapsto \sigma(a)
 \end{aligned} \tag{5}$$

看映射  $\psi$  的性质:

$$\left. \begin{aligned}
 a(\ker \sigma) &= b(\ker \sigma) \\
 \Leftrightarrow b^{-1}a &\in \ker \sigma \\
 \sigma(b^{-1}a) &= e' \\
 \therefore \sigma(a) &= \sigma(b)
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \psi \text{ is surjection} \tag{6}$$

从是映射、是单射、是满的, 得到是双射;

Let  $K = \ker \sigma$ ,  $\psi[(aK)(bK)] = \psi(abK) = \sigma(ab) = \psi(aK)\psi(bK)$ , 所以保持运算, 所以是同构, 所以  $G/\ker \sigma \cong \text{Im} \sigma$

群同态基本定理:  $\ker \sigma \triangleleft G$  &  $G/\ker \sigma \cong \text{Im} \sigma$

### 3 线性表示

$GL(V)$ : 对于群  $G$ , 域  $\mathbb{K}$  上的线性空间  $V$ ,  $G$  到  $V$  的所有可逆线性变换的集合, 对于映射的乘法成为一个可逆线性变换群。

$G$  到  $GL(V)$  的同态  $\psi$  是  $G$  在  $\mathbb{K}$  上的线性表示, 简称为  $\mathbb{K}$  表示, 或者简称为表示。

$V$  叫做表示空间, 表示次数  $\deg \psi := \dim V$

$(\psi, V)$

如用两个视图可完全确定空间曲线, 即做了两个同态。

$\ker \psi = \{e_G\}$ ,  $\psi$  是忠实的;

$\ker \psi = G$ ,  $\psi$  是平凡的;  $1$ 、称一次的平凡表示  $\psi$  是  $G$  的主表示, 单位表示, 记作  $1_G$ ;

$\dim V = n$  时, 有  $\psi(g)$  在基  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  下的矩阵  $\Phi(g)$  是  $\mathbb{K}$  上的可逆矩阵, 由同构  $GL(V) \cong GL_n(\mathbb{K})$ , 有  $G$  到  $GL_n(\mathbb{K})$  的同态  $\Phi$ , 称为  $G$  在  $\mathbb{K}$  上的  $n$  次矩阵表示。

$\Phi$  称为是  $\psi$  提供的

#### 3.1 表示的等价类

等价关系: 对于  $G$  的 2 个  $\mathbb{K}$  表示,  $(\phi, V), (\psi, W), \exists$  到  $W$  的线性空间的同构  $\sigma$ , 定义  $\psi(g)\sigma = \sigma\phi(g), \forall g \in G$ , 这种  $G$  的所有  $\mathbb{K}$  表示的集合  $\Omega$  上的二元关系, 具有具有反射性, 对称性, 传递性, 从而是等价关系。通常关注  $G$  的  $\mathbb{K}$  表示的等价类。

$(\phi, V), (\psi, W)$  等价, 取基后的矩阵记为  $\Phi(g)|\{\alpha_i, \dots\}, \Psi(g)|\{\beta_i, \dots\}$ , 同构  $\sigma$  把  $V$  的基映射到  $W$  上的  $S$ , 有  $\sigma(\{\alpha, \dots\}) = \{\beta, \dots\}S, \therefore \Psi(g)S = S\Phi(g)$ . 所以  $G$  在  $\mathbb{K}$  的 2 个矩阵表示  $\Psi, \Phi$  等价: 次数一样且  $\forall g \in G, \Psi = S\Phi(g)S^{-1}$ . 所以群  $G$  的 2 个  $\mathbb{K}$  表示  $(\phi, V), (\psi, W)$  等价,  $\Leftrightarrow \mathbb{K}$  表示提供的矩阵表示  $\Psi, \Phi$  等价。

#### 3.2 例: 1 次表示

$G$  在  $\mathbb{K}$  上的 1 次矩阵表示  $\Phi: G \rightarrow \mathbb{K}^*$ ; 非零元集合。映射是通用的不对定义域做要求, 陪域是域的子集的映射叫函数。称为  $G$  上的  $\mathbb{K}^*$  函数, 且由于同态保持运算, 有  $\Phi(gh) = \Phi(g)\Phi(h), \forall g, h \in G$ , and  $\Phi(e) = 1$ , where  $1$  is the unit of  $\mathbb{K}^*$ . 所以一次表示是  $G$  到  $\mathbb{K}^*$  的保持运算的函数。

#### 3.3 例: 实数和加法的 1 次实表示

$f_a(x) = e^{ax}$  是  $\mathbb{R}, +$  的 1 次实表示。

### 3.4 例：实数和加法的 1 次复表示

$f_a(x) = e^{iax}$  是  $(\mathbb{R}, +)$  的 1 次实表示。

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{R}, +) &\rightarrow \mathbb{C}^* \\ x &\mapsto e^{iax} \end{aligned} \tag{7}$$