

09-07-Analysis

Created on 20220605.

Last modified on 2024 年 12 月 2 日.

目录

Chapter 1 Introduction

Chapter 2 Mathematical Analysis

in 09-07-01-MathematicalAnalysis.tex

Chapter 3 Non-standard analysis

概念上又可称为实无限分析

Chapter 4 function theory

Chapter 5 变分法

学习材料张恭庆。

参考书目：1 G.Buttazzo, M. Giaquinta, S.Hildebrandt. One-dimensional Variational Problems, An Introduction. Clarendon Press, Oxford, 1998. 2 I.M.Gelfand, S.V.Fomin. Calculus of Variations(English translated by R.A.Silverman). Prentice Hall, 1964. 3 J.Jost, X Li-Jost, Calculus of Variations. Cambridge University Press, 1998. 4 张恭庆, 变分学讲义, 高等教育出版社

5.1 Introduction

泛函极值、临界值问题。临界值问题的处理需要引入拓扑学的知识形成“大范围变分学”。

找到求极值的必要条件、充分条件，变分问题的求解时通过必要条件转化为常微分方程、偏微分方程求解。真正能用初等方法求解的常微分方程很有限。Dirichlet 指出特殊的调和方程可以通过变分来做，漏洞是微分方程解的存在性转化为变分问题解的存在性，Dirichlet 不清楚存在不存在，认为转化后解自然存在。Weierstrass 专门做数学严格化的人，黎曼证明复变函数中的保形映射的存在性定理是依赖 Dirichlet 原理。Hilbert 把 Dirichlet 说清楚了，说明了为什么解是存在的。从 Hilbert 后研究解的存在性。

变分析应用的学科：力学、物理、ODE（动力系统）、PDE（特别是椭圆型方程）、几何（如极小曲面、黎曼几何、Finsler 几何、测地线、调和映射、Yang-Mills 方程等，另外一类是辛几何）、拓扑学（福伦同调）、实分析、泛函分析、经济学（拉姆塞）、控制论（苏联盲人庞特里亚金）、工程最优设计、图像处理、分形（具有微分和积分的不等式、等周不等式等）、数值方法（有限元即变分问题离散化、最优化方法）、概率论（随机变分理论）。

欧拉之后 2 个重要的发展：

变分 \rightarrow 几何（辛几何） \rightarrow 拓扑 \rightarrow 大范围变分。

与数值方法结合，产生有限元和最优化方法，用于工程应用。

起源于 1696 年约翰-伯努利的最速降线问题。牛顿、莱布尼兹都有解法。其中约翰用光的折射做出来，约翰的哥哥雅各布-伯努利用变分的思想做出来。Euler, Lagrange, Weierstrass, Hamilton, Jacobi 等都有很大贡献。

5.1.1 经典变分学

诺特定理。守恒律是给定泛函在群作用下的不变性。

5.1.2 存在性

5.2 极小曲面方程

5.3 等周问题

5.4 大范围变分法

5.5 应用

Chapter 6 Functional Analysis

6.1 函数空间

6.2 算子代数

6.2.1 线性算子理论

6.3 测度与积分

6.4 希尔伯特空间及其线性算子理论

6.5 巴拿赫空间及其线性算子理论

6.6 线性空间理论 (向量空间)

6.6.1 拓扑线性空间

6.6.2 半序线性空间

6.6.3 其他线性空间

6.7 广义函数论

6.8 巴拿赫代数 (赋范代数)、拓扑代数、抽象调和分析

6.9 积分变换及算子演算

6.10 谱理论

6.11 积分论 (基于泛函分析观点的)

6.12 非线性泛函分析

6.13 泛函分析的应用

6.14 其他

Chapter 7 整体分析、流形上分析

7.1 整体分析、流形上分析、突变理论

7.2 微分动力系统