

## 09-05-Geometry

Created on 20220605.

Last modified on 2022 年 6 月 11 日.



# 目录



# Chapter 1 Introduction

这里把代数几何也包括进来。

a: 几何学基础, b: 欧氏几何学, c: 非欧几何学 (包括黎曼几何学等), d: 球面几何学, e: 向量和张量分析, f: 仿射几何学, g: 射影几何学, h: 微分几何学, i: 分数维几何, j: 计算几何学, k: 几何学其他学科。l: 代数几何



## Chapter 2    Basic Geometry





## Chapter 3 欧氏几何学



# Chapter 4 非欧几何学

非欧几何学（包括黎曼几何学等）



## Chapter 5    Riemann 几何



## Chapter 6   Finsler 几何





# Chapter 7 辛几何

变分法导出的几何。与拓扑学中的同调联系紧密。



## Chapter 8 球面几何学



## Chapter 9 向量和张量分析



## Chapter 10 仿射几何学





# Chapter 11 射影几何学

## 11.1 Differential Geometry

### 11.1.1 摘要

以梁灿彬课程为主。

### 11.1.2 Topological Space

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  is  $C^0$  (读作 c nought,  $C^k$  意思是 k 阶导函数存在且连续), if  $Y$  得到任意开区间的“逆像” ( $f^{-1}[B] := \{x \in X | f(x) \in B\}$ ) 是  $x$  的开区间之并, open set 之并。

$x \hookrightarrow y$ , 一般用于表示 inclusion 或 embedding (嵌入)。在这里通常表示这个 map 具有 2 个性质, 1) injective, 1 个  $y$  只对应 1 个  $x$ ; 2) structure-preserving, 不同  $x$  之间的关系和对应  $y$  之间的关系保持, 如  $X1 < X2$ , 映射过去后  $y1 < y2$ 。

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $m$  个  $n$  元函数。

$X$  的所有子集记为  $\mathcal{P}$

$\mathcal{T}$ ,  $X$  的一些开集的集合, 称为  $X$  的一个拓扑。选拓扑是指定集合中的哪些子集的开的。先问 set 的拓扑是什么, 再问开不开。

$$\begin{aligned} X, \emptyset &\in \mathcal{T} \\ O_i &\in \mathcal{T}, i = 1, \dots, n \implies \bigcap_{i=1}^n O_i \in \mathcal{T}, \\ O_\alpha &\in \mathcal{T}, \forall \alpha, \implies \bigcup_{\alpha} O_\alpha \in \mathcal{T}, \end{aligned} \tag{11.1}$$

$\mathcal{T} = \{\dots\}$ , 离散拓扑, 开集最多;  $\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$ , 凝聚拓扑, 开集最少。

$\mathbb{R}^1$ , open interval;  $\mathbb{R}^2$ , open disk;  $\mathbb{R}^n$ , open ball;

$B(X_0, r) := \{x_i \in \mathbb{R}^n | |x_i - x_0| \leq r\}$

usual topology:  $\mathcal{T}_u := \{\text{可表为开球之并的集合}\}$ , 一般认为  $\mathbb{R}^n \in \mathcal{T}_u$ 。属于。

$(X, \mathcal{T})$ , 拓扑空间  $X$ ;  $A \subset X, (A, \mathcal{S})$ , 拓扑子空间。  $\subset$  含于。

其中  $\mathcal{S} := \{V \subset A | \exists O \in \mathcal{T}, s.t. O \cap A = V\}$ ,  $\mathcal{S}$  由  $\mathcal{T}$  诱导出。诱导拓扑的定义是, 可由父集合中的拓扑定义的开集, 交子集得到的集合。

open subset, 能写成开区间之并的 subset

例如,  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u)$ , 取子集为圆周, 则  $A$  用  $\mathcal{T}_u$  衡量不是开集, 但是用  $\mathcal{T}_u$  的诱导拓扑衡量, 即  $\mathcal{T}_u$  决定的开集的交集, 衡量是开集。

### 11.1.3 Homeomorphism, 同胚

有拓扑结构的空空间, 映射 map 的连续性有意义。

$f: X \rightarrow Y$  is  $C^0$  if  $O \in \mathcal{S} \rightarrow f^{-1}[O] \in \mathcal{T}$ 。即  $X$  中由  $X$  的拓扑定义的开集  $O'$ , 映射到  $Y$  上后, 变成了  $Y$  上的  $X$  的拓扑的诱导拓扑下的开集。即映射到  $Y$  上后, 得到的这个集合  $O$ , 这个集合  $O$  的子集可以由  $X$  的拓扑定义的开集, 交上集合  $O$  得到。

$C^0$ , continus;  $C^1$ , 可微, 是流形;  $C^k$ , 直到  $k$  阶导数存在且连续,  $C^\infty$ , 光滑。

无附加 structure, 只能说 one one, onto, 有了附加 structure 可以讨论 continus。

同胚: 存在一个 one one, onto,  $f$  和  $f^{-1}$  均  $C^0$ 。

微分同胚: one one, onto,  $f$  和  $f^{-1}$  均  $C^\infty$ 。即 one one, onto, 正反光滑。

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  is  $C^0$  at  $x \in \mathbb{R}$ , if  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t. |x' - x| < \delta \rightarrow |f(x') - f(x)| < \varepsilon$ , 这样定义  $C^0$  需要用到距离, 附加的 structure

### 11.1.4 Manifold

局部像  $\mathbb{R}^n$

Given a topological space  $(M, \mathcal{T})$ , if  $M = \cup_\alpha O_\alpha, O_\alpha \in \mathcal{T}$ , the  $\{O_\alpha\}$  is an open cover.

$$O_\alpha \xrightarrow[\text{homeo.}]{\psi_\alpha} V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$$

$$O_\alpha \cap O_\beta \neq \emptyset \implies \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} \text{ is } C^\infty, [\text{注: compatibility, 相容}]$$

Then  $M$  is a manifold. 其中, 复合映射  $f \circ g$ , 从右向左结合, 先作用  $g$ , 再作用  $f$ 。注意到上式的  $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \psi_\alpha[O_\alpha \cap O_\beta] \rightarrow \psi_\beta[O_\alpha \cap O_\beta]$  是  $n$  个  $n$  元函数。

$\Psi$  美国一般读作 sai,  $\xi$ , 这个一般读作 c, 和英文字母 c 一个音。

$(O_\alpha, \psi_\alpha)$  叫做坐标系, 或 chart (图), 其中  $O_\alpha$  是坐标域。  $\{O_\alpha, \psi_\alpha\}$  叫做图册, atlas。

拓扑空间  $M$  可由不同的图册定义不同的流形, 这两个图册中, 坐标域有交集时, 若矛盾, 称这 2 个流形的微分结构不同; 否则就是同一个微分流形, 将图册并起来。

例子: Is  $\mathbb{R}^2$  a manifold? We try to find an open cover, it is easy that if  $\{O_\alpha, \psi_\alpha\}$  is trivial, which means that  $O_\alpha = \mathbb{R}^2$ , and  $\psi_\alpha(x) = x$ . One set can cover means it is trivial.

## Chapter 12 分数维几何



## Chapter 13 计算几何学



## Chapter 14 代数几何





## Chapter 15   Else