09-04-05-LinearAlgebra

Created on 20230405.

Last modified on 2024 年 12 月 9 日.

目录

Chapter 1 Overall

2 条主线：linear space, linear mapping

Chapter 2　Space and its mapping

线性空间（加法、乘法）-> 线性映射 <-> 矩阵

现实几何空间还有距离和角度的概念，可用内积（双线性函数）来刻画。具有度量的线性空间。分类：欧几里得空间（实数域、有限维、线性空间、内积，内积有交换律）、酉空间（复数域、有限维、线性空间、内积，内积有共轭交换律）。

线性变换：空间 A 到空间 AZ 自身的线性映射。

2.0.1 Linear Space

向量加法、标量乘法构成的单位环。

2.0.2 Metric Space

Definition 2.1. *The set X with a distance function d, d satisfies*??. *Metric Space is noted as* (X, d).

Definition 2.2. 紧集：(X, d) 中的子集 A，A 中任意序列都存在一子列 x_n,x_n 收敛到 A 中某点。

Definition 2.3. 稠密集：(X, d) 中的子集 A，对于 X 中的任意点 x，A 中存在点 a，使得 $d(x, a) < \varepsilon$

Definition 2.4. X 可分：(X, d) 中存在一个可数稠密集。

2.0.2.1 Complete Metric Space

Definition 2.5. 收敛：*sequence* $\{x_n\}$ 收敛到 c，*means that* $\lim_{x\to\infty} d(x_n, c) = 0$, *noted as* $\lim_{x\to\infty} x_n = c$

Definition 2.6. *Cauchy* 基本列：$\lim_{m\to\infty,n\to\infty} d(x_m, x_n) = 0$

Definition 2.7. 完备距离空间：所有 *Cauchy* 基本列收敛于一点

Definition 2.8. 不完备：对于苹果空间，从宇宙开始到宇宙结束的所有苹果序列，收敛到我，则不完备。

2.0.3 Banach Space

完备、赋范、线性。

2.0.4 Inner Product Space

$$
\begin{aligned}
&(\alpha x+\beta y)\cdot z=\alpha x\cdot z+\beta y\cdot z, && \text{线性}\\
&x\cdot(\alpha y+\beta z)=\bar{\alpha}x\cdot y+\bar{\beta}x\cdot z, && \text{共轭线性}\\
&x\cdot y=y\bar{\cdot}x, && \text{共轭对称}\\
&x\cdot x\geqslant 0, && \text{正定}\Rightarrow ||x||=\sqrt{x\cdot x}\\
&|x\cdot y|\leqslant ||x||\cdot||y||, && satisfies Cauchy-Schwarz
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

2.0.4.1 给定基中的内积表示

《矩阵理论-陈大新》

2.0.5 Hilbert Space

完备，内积。

内积 $\Rightarrow$ 范数 $\Rightarrow$ 完备

Proposition 2.1. *$[0,1]$ 上的复连续函数空间 $C([0,1])$，定义内积 $f\cdot g=\int_0^1 f(t)g(t)\,dt$, proof that $C([0,1])$ 不是 Hilbert Space*

$$
\begin{aligned}
&f_n(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}\\ -2n(t-\frac{1}{2})+1, & \frac{1}{2}<t\leqslant\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}\\ 0, & \frac{1}{2n}+\frac{1}{2}<t\leqslant 1\end{cases}\\
&||f_n-f_m||\leqslant(\frac{1}{n}+\frac{1}{m})^{\frac{1}{2}}\to 0, is\ Cauchy\ Sequence.\\
&\lim f_n=\begin{cases}1, 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}\\ 0, \frac{1}{2}<t\leqslant 1\end{cases}\\
&\therefore \lim f_n\notin C([0,1])
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

2.0.6 Euclid Space

有序的 n 元组的全体称为 n 维 Euclid 空间，记为 $\mathbb{R}^n$，称 $\boldsymbol{p}=(p_i)_{i=1}^n\in\mathbb{R}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个点。为便于研究，本论文以 $\mathbb{R}^3$ 为背景空间，所涉及的函数默认为可微实值函数。如果实函数 f 的任

意阶偏导数存在且连续，则称函数是可微的（或无限可微的，或光滑的，或 C^∞ 的）。

由于微分运算是函数的局部运算，限制所讨论函数的定义域在 $\mathbb{R}^3$ 中的任意开集，所讨论的结论仍然成立。

自然坐标函数：定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的实值函数 $x_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，使得 $\boldsymbol{p}=(p_i)_{i=1}^n=(x_i(\boldsymbol{p}))_{i=1}^n$

切向量：由 $\mathbb{R}^n$ 中的二元组构成，$\boldsymbol{v_p}=(\boldsymbol{p},\boldsymbol{v})$，其中 $\boldsymbol{p}$ 是作用点，$\boldsymbol{v}$ 是向量部分

切空间 $T_p\mathbb{R}^n$: 作用点 $\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^n$ 的所有切向量的集合。利用向量加法与数量乘法使某点的切空间称为向量空间，与背景空间存在非平凡同构。

向量场 $\boldsymbol{V}$: 作用于空间点的向量函数，$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{p})\in T_p\mathbb{R}^n$

逐点化原理：$(\boldsymbol{V}+\boldsymbol{W})(\boldsymbol{p})=\boldsymbol{V}(\boldsymbol{p})+\boldsymbol{W}(\boldsymbol{p})$, $(f\boldsymbol{V})(\boldsymbol{p})=f(\boldsymbol{p})\boldsymbol{V}(\boldsymbol{p})$

自然标架场：定义 $\boldsymbol{U}_i=(\delta_j^i)_{j=1}^n$，按 Einstein 求和约定，有 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{p})=v^i(\boldsymbol{p})\boldsymbol{U}_i(\boldsymbol{p})$, 称 v^i 为场的 Euclid 坐标函数，其中 Kronecker δ 函数定义为：

$$\delta_i^j=\begin{cases}1,\ i=j\\0,\ i\neq j\end{cases}\tag{2.3}$$

与度量有关的线性变换：正交变换对称变换

2.0.7 Unitary Linear Space

酉空间

与度量有关的线性变换：酉变换 Hermite 变换

Chapter 3 Vector

3.1 Basic Defination

we define the basic element as following, where $\boldsymbol{e}_i$ means $x_i = 1, x_j = 0$ for all $j \neq i$. When we say a vector, it means a column vector.

$$\vec{x} = \boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \dots]^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \Sigma x_i \boldsymbol{e_i} \tag{3.1}$$

We define Kronecker sign to simply the description of $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j$.

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{3.2}$$

The set of bases $\{\boldsymbol{e}_i\} \xrightarrow{apply} \boldsymbol{x} \longrightarrow \{x_i\}$.

3.2 Operation

3.2.1 Dot Product

We define in algebra, $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} := \sum x_i y_i \delta_{ij} = \boldsymbol{x}^T \cdot \boldsymbol{y}$.

Then the defination is restricted to the choose of the coordinate system.

3.2.2 Cross Product

$a, b \in \mathbb{F}^m, a \wedge b = c \in \mathbb{F}^n$, if m = n, we have m = 0, 1, 3, 7. Therefore, we define cross product in 3d.

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \tag{3.3}$$

Proposition 3.1. 外积对于 u、v 双线性。从定义易知。

Proposition 3.2. $(a \times b) \times c = (c \cdot a)b - (b \cdot c)a$

证明：

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 23 & 31 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \tag{3.4}$$

例如对 i 分量，有 $31 \cdot 3 - 12 \cdot 2$，形式上 ijk 一样，因而证明 i 即可。展开后，按正负号分类，we have $(313 + 212) - (133 + 122)$, 两部分都加上 111 即得。b 和-a 的线性组合。

Proposition 3.3. 混合积 $(u, v, w) = (u \times v) \cdot w$，其具有轮换对称性。

证明：*for* $\cdot w$*, we have* $23 \cdot 1 + 31 \cdot 2 + 12 \cdot 3$

$231 - 321, 312 - 132, 123 - 213$

对 $\cdot v$，即中间元素按 *1,2,3* 顺序组合，易有 wu；同样对 $\cdot u$，易有 vw。即证。

另外，从展开后的分量对应上，易有

$$(u, v, w) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \tag{3.5}$$

3.2.3 Add

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} &:= \sum (x_i + y_i)\boldsymbol{e}_i \\ k \cdot \boldsymbol{x} &:= \sum k x_i \boldsymbol{e}_i \end{aligned} \tag{3.6}$$

Law $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$, law $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$ is not obvious in the view of Set Theory.

3.2.4 geometry Properties

3.2.4.1 Length and Angle

$$
\begin{aligned}
&\parallel \boldsymbol{x} \parallel := \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}} \\
&\cos\theta_{x,y} := \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}{\parallel \boldsymbol{x} \parallel \cdot \parallel \boldsymbol{y} \parallel}
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

3.2.4.2 Distance

Distance function satisfies the following:

$$
\begin{aligned}
&d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geqslant 0 \\
&d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \\
&d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leqslant d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + d(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

$$
\begin{aligned}
&d_p = [\sum |x_i - y_i|^p]^{\frac{1}{p}}, 1 \leqslant p < \infty \\
&d_\infty = \max_i |x_i - y_i|
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Chapter 4 Matrix Theory

Chapter 5 determinant

行列式论行列式，定义、性质、展开、Gramer 法则等

Chapter 6 Matrix Analysis

《矩阵理论-陈大新》

6.1 矩阵序列

6.2 矩阵幂级数

6.3 矩阵函数

6.3.1 定义

6.3.2 $e^A t$

6.3.3 计算

Chapter 7 Generalized Inverse

7.1 单边逆

7.2 Moore-Penrose Pseudoniverse

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{AGA} &= \boldsymbol{A} \\
\boldsymbol{GAG} &= \boldsymbol{G} \\
(\boldsymbol{GA})^T &= \boldsymbol{GA} \\
(\boldsymbol{AG})^T &= \boldsymbol{AG}
\end{aligned}
$$

Lemma 7.1. $\boldsymbol{G}$ *is unique.*

Prove: suppose $\boldsymbol{G}_1 \neq \boldsymbol{G}_2$,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{G}_2 &= \boldsymbol{G}_2\underline{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{G}_2 \\
&= \boldsymbol{G}_2\underline{\boldsymbol{AG}_1} \cdot \underline{\boldsymbol{AG}_2} = \boldsymbol{G}_2[(\boldsymbol{AG}_1)^T \cdot (\boldsymbol{AG}_2)^T] = \boldsymbol{G}_2(\boldsymbol{AG}_2\boldsymbol{AG}_1)^T = \boldsymbol{G}_2(\boldsymbol{AG}_1)^T \\
&= \boldsymbol{G}_2\underline{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{G}_1 \\
&= \underline{\boldsymbol{G}_2\boldsymbol{A}} \cdot \underline{\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{A}}\boldsymbol{G}_1 = \boldsymbol{G}_1\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{G}_2\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{G}_1 = \boldsymbol{G}_1\boldsymbol{AG}_1 \\
&= \boldsymbol{G}_1 \quad \square
\end{aligned}
$$

7.2.1 Properties

7.2.1.1 solution of Ax=y

$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{y}$, where$\boldsymbol{A}_{mn}, m > n$

Algorithm 1: Algorithm LinearEquation:MP

Input: $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, where $\boldsymbol{A}_{mn}, m > n$, and $\boldsymbol{y}$ are unknown.

Output: $\boldsymbol{x}$

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}^{-T})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$;

let $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$, $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}^{-T}\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{C}\boldsymbol{I} = \boldsymbol{y}$;

solve $\boldsymbol{I}$;

$\boldsymbol{x} =$;

return $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{I}$;

The algorithm meas $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}^{-T})^{-1}\boldsymbol{y} = [(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T)\boldsymbol{A}^{-T}]^{-1}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T)^{-1}\boldsymbol{y}$.

$\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T)^{-1}$, and $(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T$ are Moore-Penrose Pseudoniverse

7.2.2 相容方程的解

7.2.3 反射广义逆

7.2.4 最小范数解

7.2.5 最小二乘解

Chapter 8 多线性代数

Chapter 9 向量代数、因子代数、代数不变量论

Chapter 10　线性不等式

Chapter 11　线性代数的应用

Chapter 12 参考文献说明

《矩阵理论-陈大新》[?]：好的观点的来源。

参考文献