

09-10-ComputationalMathematics

Created on 20220605.

Last modified on 2023 年 3 月 19 日.

目录

Chapter 1 Introduction

计算数学 a: 插值法与逼近论, b: 常微分方程数值解, c: 偏微分方程数值解, d: 积分方程数值解, e: 数值代数, f: 连续问题离散化方法, g: 随机数值实验, h: 误差分析, i: 计算数学其他学科。

Chapter 2 插值法

给定点集求一条曲线，曲线过点集所有点。

$A = \{a, a \in \mathbb{R}^n\}$ ，插值函数 $P(x)$ 过点。 $P(x)$ 可以是有理函数、三角多项式、代数多项式，等等。

2.1 多项式插值

$$P(x) = \sum a_n x^n$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ & & \ddots & \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Vandermonde determinant

$$\begin{aligned}
& \left| \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_{n-1}^n & x_n^n \end{bmatrix} \right| \\
& \xrightarrow{L_j = L_j - L_{j-1} \cdot x_1} \left| \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \cdots & x_{n-1} - x_1 & x_n - x_1 \\ 0 & x_2^2 - x_2^1 x_1 & \cdots & x_{n-1}^2 - x_{n-1}^1 x_1 & x_n^2 - x_n^1 x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & x_2^{n-1} - x_2^{n-2} x_1 & \cdots & x_{n-1}^{n-1} - x_{n-1}^{n-2} x_1 & x_n^{n-1} - x_n^{n-2} x_1 \\ 0 & x_2^n - x_2^{n-1} x_1 & \cdots & x_{n-1}^n - x_{n-1}^{n-1} x_1 & x_n^n - x_n^{n-1} x_1 \end{bmatrix} \right| \quad (2.2) \\
& = (x_2 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \left| \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & x_2^1 & \cdots & x_{n-1}^1 & x_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_n^{n-2} \\ 0 & x_2^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \right| \\
& = \left| \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & D \end{bmatrix} \right|_{=|D|} \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} (x_j - x_i)
\end{aligned}$$

2.2 Lagrange

2.3 Newton

2.4 分段线性

2.5 Hermite

2.6 样条

Chapter 3 逼近论

给定点集，求一条曲线，曲线可以不过点集中的点。

Chapter 4 常微分方程数值解

Chapter 5 偏微分方程数值解

Chapter 6 积分方程数值解

Chapter 7 数值代数

Chapter 8 连续问题离散化方法

Chapter 9 随机数值实验

Chapter 10 误差分析

Chapter 11 计算数学其他学科