09-04-Algebra

Created on 20220605.

Last modified on 2023 年 4 月 2 日.

目录

Chapter 1 Introduction

a：线性代数，linear algebra

b：群论，group theory

c：域论，field theory

d：李群，lie group

e：李代数，

f：Kac–Moody代数，

g：环论（包括交换环与交换代数，结合环与结合代数，非结合环与非结合代数等），

h：模论，

i：格论，

j：泛代数理论，

k：范畴论，

l：同调代数，

m：代数K理论，

n：微分代数，

o：代数编码理论，

p：代数学其他学科。

Chapter 2 linear algebra

2.1 linear equation

Normally, we consider vector space over the fields of real or complex numbers.

2.1.1 Ax = B

Defination

linear equation in n variables.$\sum_{i=1}^{i=n} a_i x^i = b$, which can be written as $\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x} = b$. We collect m equations and write like this:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

Noticed that x_1 is only applied toe the first column of the left matrix, we can say that $\boldsymbol{x}$ is one point, or a specific composition, of the space spanned by the column vector of the matrix. Then it is easy to see that this equation has the solution, only if the vector $\boldsymbol{b}$ is in the space spanned by the column vector of the matrix.

Or we can write like this:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

The equation $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ has solution, means y 可由 A 的列向量线性表出。

If $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, called homogeneous linear equations, homogeneous because 所有非 0 项是 1 次的。if $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, it is inhomogeneous. 显然 0 向量 (zero solution, or trivial soltution) 是一个解. A 的列向量正交，只有零解；若 A 的列向量线性相关，有多解，即可按多种方式回到原点。

Number of solution

构造增广矩阵 $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}]$ 后，初等行变换化为阶梯型，如 2.1所示，解的个数讨论。

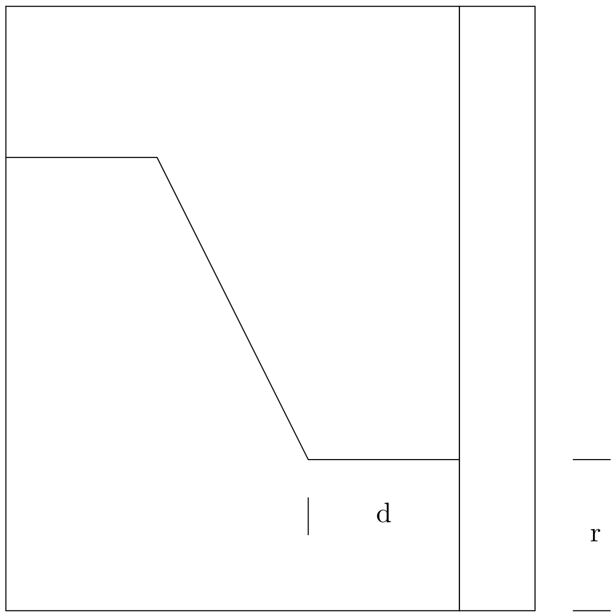

Figure 2.1: 【number of solution】

$r \neq 0$, no solution;

$d = 1$, one solution, $tr\boldsymbol{A}_{mn} = m$,;

$d \neq 1$, $tr\boldsymbol{A}_{mn} < m$,inifinity solution，最后一行是解的超平面方程, 图中 d 是解的维度，$d = n - tr\boldsymbol{A}_{mn}$, 如 d 为 3，有 3 列独立的，即解空间是三维的。齐次方程组的未知数个数大于方程个数，有无数解。

2.1.2 Matrix

Defination

If we have a serious of $\boldsymbol{x}$, we have a serious of b, like this:

$$A_{mn} \cdot X_{nt} = B_{mt} \Longrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{array}{c:c:c} x_{11} & \cdots & x_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nt} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c:c} b_{11} & \cdots & b_{1t} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mt} \end{array}\right] \tag{2.3}$$

The normal definition of the product of two matrix is as above.

2.1.3 solve equation

求解方法，如消元法、迭代法等。

消元法

利用初等变换化为“阶梯形（或称上三角形）”，从下往上回代。

Augmented matrix

2.2 determinant

行列式，定义、性质、展开、Gramer 法则等

2.3 polynomial

因式分解定理，多项式的根，多元多项式。

2.4 operation

初等变换、代数运算、分块运算、乘法、秩

2.5 Transformation

线性变换、坐标变换、像与核、特征向量、特征子空间、商空间

正交变换规范变换

酉相似

2.5.1 Elementary Transformation

初等变换。

1) 交换两行: $\boldsymbol{A} \xrightarrow{(i,j)} \boldsymbol{B}$

2) 某行乘以不为 0 的数: $\boldsymbol{A} \xrightarrow{\lambda(i)} \boldsymbol{B}$

3) 某行乘以不为 0 的数加到另一行上: $\boldsymbol{A} \xrightarrow{\lambda(i)+(j)} \boldsymbol{B}$

初等矩阵: 单位矩阵执行一系列初等变换得到的矩阵.

初等变换作用于矩阵 $\boldsymbol{A}$, 等于初等变换作用于单位阵之后得到的初等矩阵 $\boldsymbol{E}$ 再作用于 $\boldsymbol{A}$.

2.6 Form

2.6.1 Jordan

Jordan 型、根子空间分解、循环子空间、多项式矩阵相抵不变量、特征方阵与相似标准型

2.6.2 二次

配方法构造、对称方阵的相合、相合不变量

Chapter 3 GroupTheory

3.1 GroupRepresentation

3.1.1 Introduction

丘维声。

运算: 笛卡尔积 $S \times S \mapsto S$ 是集合 S 的二元代数运算。现代数学的鲜明特征是研究有各种运算的集合, 称为代数系统。

现代数学的两大特征, 1）研究代数系统的结构;2）利用同态映射研究代数系统结构。

核心: 群表示论是研究 G 到各个线性空间的可逆线性变换群的各种同态映射, 以获得 G 结构的完整信息。

群表示论是研究群结构的最强有力的工具。应用如晶体学, 量子力学, 抽象调和分析, 组合数学, 密码学, 纠错编码

必备参考书,《抽象代数基础》丘维声, 高教出版社,《高等代数学习指导书下》丘维声, 清华大学。

环, 域, 群

表 3.1: algebra system

名称	运算	性质	举例
ring	加法	交换, 结合, 0 元, 负元	整数集 $\mathbb{Z}$, 偶数集 $2\mathbb{Z}$,
	乘法	结合, 左右分配律	一元实系数多项式 $\mathbb{R}(x)$, 实 n 阶矩阵 $M_n(\mathbb{R})$

交换环, 乘法可交换。单位元。

例子, 星期 i, 记为 $\bar{i} = \{7k + i\} | k \in \mathbb{Z}$, 收集起 $\bar{i}$ 可以实现整数的划分。类似的, 定义模 m 剩余类:

$$\mathbb{Z}_m = \{\bar{i} | i = 1, \cdots, m-1\} \tag{3.1}$$

定义加法和乘法, 有模 m 剩余类环

$$\begin{aligned}\bar{i}+\bar{j}&=i\bar{+}j\\ \bar{i}\cdot\bar{j}&=i\bar{\cdot}j\end{aligned}\tag{3.2}$$

可逆元, 单位 a: $a\in ringR,\exists b\in R,ab=ba=e$
左零因子 a: $a\neq 0,\exists c\neq 0,ac=0$
例子: $\mathbb{Z}_8$, 零因子 2,4,6；可逆元 3,5,7；
例子: $\mathbb{Z}_7$, 每个非零元都可逆;

域 F: 有单位元 e 的环, 且每个非零元都可逆。例子: 有理数集, 实数集, 复数集 $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{Z}$
域 F 中可以定义除法。

群 G: 只有乘法, 结合律, 单位元, 每个元素有逆元。
例子: $\mathbb{Z}_m^*$:$\mathbb{Z}_m$ 所有可逆元的集合, 发现只对乘法封闭, 称为 Zm 的单位群；如域 F 上的所有可逆矩阵的集合 $Gl_n(\mathbb{F})$, 只有乘法, 称为域 $\mathbb{F}$ 上的一般线性群。
阿贝尔群: 乘法可交换。
例子: $GL(V)$, 域 F 上的线性空间 V 的所有可逆线性变换, 对于映射的乘法行程的 V 上可逆线性变换群。子群: H<G

等价关系与左陪集

研究 G 的第一个途径: 利用子群 H 研究 G.
集合的划分与等价关系。对于 $a,b\in G$, 定义 $a\ b:\Leftrightarrow b^{-1}a\in H$, 易有关系 具有反射性（e 在 H 中）, 对称性, 传递性, 所以这是等价关系。
定义 a 的等价类:

$$\begin{aligned}\bar{a}&:=\{x\in G|x\ a\}\\ &:=\left\{x\in G|a^{-1}x\in H\right\}\\ &=\{x\in G|x=ah,h\in H\}\\ &=\{ah|h\in H\}\\ &=:aH\end{aligned}\tag{3.3}$$

aH 称为以 a 为代表的 H 的一个左陪集, 是一个等价类。
根据等价类的性质, 有 1）$aH=bH\Leftrightarrow b^{-1}a\in H$;2) aH 与 bH 或者相等, 或者不相交（交集为空集）。所以 H 的所有左陪集给出 G 的一个划分, 记为 G/H, 称为 G 关于 H 的左商集。G/H 的基数称为 G 关于 H 的指数, 记为 [G:H]。基数相同可建立双射。

G 关于 H 的左陪集分解: $[G:H]=r, G=eH\bigcup a_1H\bigcup\cdots\bigcup a_{r-1}H$。
拉格朗日定理: 对于有限群 G, 易有其元素个数 $|G|=|H|[G:H]$, 即任何子群的阶是群的阶的因数。推论: 1)n 阶群 G 的任意元素 a, 有 $a^n\in G$;2) 素数阶群是循环群。

同态

研究 G 的第二个途径: 通过研究 G 到 G' 的保持运算的映射, 同态映射, 简称同态。同态要变, 是函数。
通常利用 G 到 Ω 的同态, 等价于 G 在 Ω 的作用。既可以研究 G 的结构, 又可以对 Ω 的性质有了解
$S(\Omega)$:Ω 的全变换群, Full Transformation Group on Set Ω, Ω 自身的所有双射组成的集合, 对于映射的乘法构成的一个群.

作业

1. 环 R 中, 0a=a0=0
2. 有 e 的环中, 零因子不是可逆元
3.$\mathbb{Z}_m$ 中每个元素要么是可逆元要么是零因子;
4. $M_n(\mathbb{F})$ 中, 每个矩阵是可逆矩阵或者是零因子。

3.1.2 Abel 群的表示

映射 (Map)

映射: $f:a\mapsto b\Leftrightarrow f(a)=b$。$f(x)$ f of x 原象, 象。映射 f 的定义域 (domain)A, 陪域 (codomain)B。映射得到的所有象的集合叫值域, 记作 $f(A)$, 或 Imf。

$$\begin{aligned} &f:a\mapsto b\Leftrightarrow f(a)=b \\ &f:A\to B \end{aligned} \tag{3.4}$$

映射通常关心 is it one one? Is is onto?
满射, onto, 到上: $f(A)=B$
单射, 1-1, 一一的, 每个 a 对应的 b 是不同的。
双射, 两个集合一一对应。
逆映射。对于 $f:A\to B, g:B\to A$, 有 $g\circ f=1_A, f\circ g=1_B$。可逆的 f 是双射。

线性映射、线性变换是线性空间的同态映射, 有点乘和加法。
补空间: 域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 U<V, 则 $\exists W, V=U\oplus W$。对于实内积空间 V, U 是有限维的,

$W = U^{\perp}$, 正交补空间, 唯一的。
投影变换: 域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 $V = U \oplus W$, 有 $\alpha = \alpha_U + \alpha_W$, 有投影变换 $P_U : \alpha \mapsto \alpha_U$. 投影变换保持加法和数乘, 是 V 上的线性变换。投影是同态映射。
几何空间: 以原点 O 为起点的定位向量组成的实线性空间。知道一空间点在两个坐标面的投影坐标可完全确定点。

群的同态

同态映射: G 到 G' 的映射 $\sigma : \sigma(a,b) = \sigma(a)\sigma(b)$。单射的话是单同态。满射是满同态。双射是同构, 此时两个群同构, $G \cong G'$。
同态的性质: 1）单位元、逆元、子群映射过去是 G’ 的单位元、逆元、子群。例如 $G < G \Rightarrow \sigma(G) = Im\sigma < G'$, 同态的像是 G' 的子群
刻化单同态: 找到映射成单位元的原象, 定义同态的核, $Ker\sigma := \{a \in G | \sigma(a) = e'\}$. 易有同态的核是 G 的子群。对于单同态, $Ker\sigma = \{e\}$.
子集乘法: 类似与点乘, a 的所有和 b 的所有的乘积方式的组合。乘法满足结合律。

正规子群

$\forall k \in \ker\sigma, \forall g \in G$, we have:

$$\begin{aligned}
&\sigma(gkg^{-1}) = \sigma(g)\sigma(k)\sigma(g^{-1}) = e' \\
&\therefore gkg^{-1} \in \ker\sigma \\
&\therefore g\ker\sigma g^{-1} \subset \ker\sigma \\
&\&\ g^{-1}\ker\sigma g \subset \ker\sigma \\
&\therefore g\ker\sigma g^{-1} = \ker\sigma
\end{aligned} \tag{3.5}$$

normal subgroup 正规子群:$H \lhd G : \forall g \in G, gHg^{-1} = H$, gHg^{-1} 是 g 的共轭子群。
性质: $H \lhd G \Leftrightarrow gHg^{-1} = H, \forall g \in G \Leftrightarrow gH = Hg$,H 的左右陪集相等;
G 关于正规子群 H 的商群: 规定正规子群 H 的商群 G/H 乘法: $(aH)(bH) = abH$

3.1.3 群同态基本定理

$$\begin{aligned}
\psi :&G/\ker\sigma \to Im\sigma \\
&a(\ker\sigma) \mapsto \sigma(a)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

看映射 ψ 的性质:

$$\left.\begin{aligned} &a(\ker\sigma) = b(\ker\sigma) \\ &\Leftrightarrow b^{-1}a \in \ker\sigma \\ &\sigma(b^{-1}a) = e' \\ &\therefore \sigma(a) = \sigma(b) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \psi\ is\ surjection \tag{3.7}$$

从是映射、是单射、是满的, 得到是双射;

Let $K = \ker\sigma$, $\psi[(aK)(bK)] = \psi(abK) = \sigma(ab) = \psi(aK)\psi(bK)$, 所以保持运算, 所以是同构, 所以 $G/\ker\sigma \cong Im\sigma$

群同态基本定理: $\ker\sigma \lhd G$ & $G/\ker\sigma \cong Im\sigma$

3.1.4 线性表示

$GL(V)$: 对于群 G, 域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间 V, G 到 V 的所有可逆线性变换的集合, 对于映射的乘法成为一个可逆线性变换群。

G 到 GL(V) 的同态 ψ 是 G 在 $\mathbb{K}$ 上的线性表示, 简称为 $\mathbb{K}$ 表示, 或者简称为表示。

V 叫做表示空间, 表示次数 $\deg\psi := \dim V$

(ψ, V)

如用两个视图可完全确定空间曲线, 即做了两个同态。

$\ker\psi = \{e_G\}$,ψ 是忠实的;

$\ker\psi = G$, ψ 是平凡的; |、称一次的平凡表示 ψ 是 G 的主表示, 单位表示, 记作 1_G;

$dimV = n$ 时, 有 $\psi(g)$ 在基 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 下的矩阵 $\Phi(g)$ 是 $\mathbb{K}$ 上的可逆矩阵, 由同构 $GL(V) \cong GLn(\mathbb{K})$, 有 G 到 $GLn(\mathbb{K})$ 的同态 Φ, 称为 G 在 $\mathbb{K}$ 上的 n 次矩阵表示。

Φ 称为是 ψ 提供的

表示的等价类

等价关系: 对于 G 的 2 个 k 表示, $(\phi, V), (\psi, W)$,$\exists$v 到 w 的线性空间的同构 σ, 定义 $\psi(g)\sigma = \sigma\phi(g), \forall g \in G$, 这种 G 的所有 K 表示的集合 Ω 上的二元关系, 易有具有反射性, 对称性, 传递性, 从而是等价关系。通常关注 G 的 k 表示的等价类。

$(\phi, V), (\psi, W)$ 等价, 取基后的矩阵记为 $\Phi(g)|\{\alpha_i, \cdots\}, \Psi(g)|\{\beta_i, \cdots\}$, 同构 σ 把 V 的基映射到 W 上的 S, 有 $\sigma(\{\alpha, \cdots\}) = \{\beta, \cdots\}S$, $\therefore \Psi(g)S = S\Phi(g)$. 所以 G 在 K 的 2 个矩阵表示 Ψ, Φ 等价: 次数一样且 $\forall g \in G, \Psi = S\Phi(g)S^{-1}$. 所以群 G 的 2 个 K 表示 $(\phi, V), (\psi, W)$ 等价, $\Leftrightarrow$K 表示提供的矩阵表示 Ψ, Φ 等价。

例: 1 次表示

G 在 K 上的 1 次矩阵表示 $\Phi : G \to \mathbb{K}^*$; 非零元集合。映射是通用的不对定义域做要求, 陪域是域的子集的映射叫函数。称为 G 上的 K* 函数, 且由于同态保持运算, 有 $\Phi(gh) = \Phi(g)\Phi(h), \forall g, h \in G$, and $\Phi(e) = 1$, where 1 is the unit of K*. 所以一次表示是 G 到 K* 的保持运算的函数。

例: 实数和加法的 1 次实表示

$f_a(x) = e^{ax}$ 是 $\mathbb{R}, +$ 的 1 次实表示。

例: 实数和加法的 1 次复表示

$f_a(x) = e^{iax}$ 是 $(\mathbb{R}, +)$ 的 1 次实表示。

$$
\begin{aligned}
f : (\mathbb{R}, +) &\to \mathbb{C}^* \\
x &\mapsto e^{iax}
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

Chapter 4　域论

所有数域都包含有理数域。有理数域指含有 0,1 的，且对加减乘除（除数不是 0）封闭的域。最小的数域是 $A = 0, 1$，包含 $\sqrt{5}$ 的最小数域是 $x|x = a + b\sqrt{5}, a, b \in A$

x|x=a+b√5,a,b A.

Chapter 5 李群

Chapter 6　李代数

Chapter 7　Kac-Moody 代数

Chapter 8　环论

环论（包括交换环与交换代数, 结合环与结合代数, 非结合环与非结合代数等）

Chapter 9　模论

Chapter 10 格论

Chapter 11 泛代数理论

Chapter 12 范畴论

Chapter 13　同调代数

Chapter 14 代数 K 理论

Chapter 15　微分代数

Chapter 16 代数编码理论

Chapter 17 代数学其他学科