

Chapter 1 Methodology

1.1 History

1.2 数学的思维方式与创新-84-北大 (丘维声)

6,1039.

1.2.1 数学史上的重大创新

分析：微积分的创立和完备化

观察现象主要特征，抽象出概念。探索。猜测。证明。

如求瞬时速度， $s = at^2$, $\frac{\Delta s}{\Delta t} = 2at + \Delta t$ ，牛顿忽略 Δt ，叫做留数，留下来的数。

如何解决不等于零又等于零的矛盾？

Δt 趋近于 0，无限，柯西引入极限的概念：函数在 x_0 附近有定义，在 x_0 可以没有定义，如果存在 c 使得 x 趋近于 x_0 但不等于 x_0 时， $|f(x) - c|$ 可以无限小，称 c 是 x 趋近于 x_0 时 $f(x)$ 的极限。

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, that when $0 < |x - x_0| < \delta$, we have $|f(x) - c| < \varepsilon$

几何：欧几里得几何到非欧几里得几何

从平直空间到弯曲空间。

从定义和公理，推导和推演。平行公设。高斯和波约，罗巴切夫斯基（1829 年），平行公设只是假设。现实世界如何实现非欧几何的用处。高斯想法把球面本身看做一个空间。后来黎曼发展了。弯曲空间的几何是黎曼几何，如球面上的直线定义为大圆的一部分，这样发现过已知直线外一点不存在其平行线。在双曲几何模型下可以实现罗巴切夫斯基几何。

代数学中

伽瓦罗，代数学从研究方程的根，到研究代数系统的结构和保持运算的映射。

1.2.2 集合的划分

交空并全的划分方法：模 n 同余是 \mathbb{Z} 的一个二元关系。两个集合的笛卡尔积 a 与 b 模 n 同余： $(a, b) \in \bigcup_{i=0}^{n-1} H_i \times H_i \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. 抽象：非空集合 s , $S \times S$ 的子集 W 是 S 是上的二元关系，有关系的记为 aWb

等价关系

反身性，对称性，传递性， $a \sim b$. $a \sim b \Leftrightarrow b \sim a$. $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$
 \bar{a} 是 a 确定的等价类， $\{x \in S | x \sim a\}$ 。易有 $\bar{x} = \bar{y} \Leftrightarrow x \sim y$ 。

定理 1：集合 S 上等价关系 \sim 给出的等价类的集合是 S 的一个划分。

证明思路：需要证明并全，交空。交空比较难，需要研究等价类的性质。等价类的代表不唯一。

Step1) It is obvious that $\bigcup_{a \in S} \bar{a} \subseteq S$, and for any $b \in S$, we have $b \in \bar{b} \in \bigcup_{a \in S} \bar{a}$, this means $S \subseteq \bigcup_{a \in S} \bar{a}$, so $\bigcup_{a \in S} \bar{a} = S$.

Step2) To prove $\bar{x} \neq \bar{y} \Rightarrow \bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$, we prove the contrapositive $\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset \Rightarrow \bar{x} = \bar{y}$, and this is easy to prove.

Chapter 2 Introduction

Today is 20211204, and I decided to note down all of my knowledge about the math in this notebook.

2.1 Space

2.1.1 Operation Definition

Element

we define the basic element $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots]^T = \sum x_i \mathbf{e}_i$, \mathbf{e}_i means $x_i = 1, x_j = 0$ for all $j \neq i$. We define Kronecker sign to simply the description of $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$.

$$\delta_{i,j} := \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (2.1)$$

The set of bases $\{\mathbf{e}_i\} \xrightarrow{\text{apply}} \mathbf{x} \longrightarrow \{x_i\}$.

Dot Product

We define in algebra, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := \sum x_i y_i \mathbf{e}_i = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y}$.

Then the definition is restricted to the choice of the coordinate system. We take a look at the product with reflect $T : \mathbf{x} \rightarrow T \cdot \mathbf{x}$,

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = (a_{ik} b_{kj})^T = c_{ij}^T = c_{ji} = b_{jk} a_{ki} = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T \quad (2.2)$$

we have

$$(T \cdot \mathbf{x})^T (T \cdot \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T (T^T T) \mathbf{y} = [(T^T T) \mathbf{x}]^T \mathbf{y} \quad (2.3)$$

We name T a Contractive mapping when $T^T T \leq \theta, 0 \leq \theta \leq 1$.

geometry Properties

$$\begin{aligned}\| \mathbf{x} \| &:= \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} \\ \cos \theta_{x,y} &:= \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\| \mathbf{x} \| \cdot \| \mathbf{y} \|}\end{aligned}\tag{2.4}$$

Add

$$\begin{aligned}\mathbf{x} + \mathbf{y} &:= \sum (x_i + y_i) \mathbf{e}_i \\ k \cdot \mathbf{x} &:= \sum k x_i \mathbf{e}_i\end{aligned}\tag{2.5}$$

Law $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$, law $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$ is not obvious in the view of Set Theory.

2.2 Euclid 空间

有序的 n 元组的全体称为 n 维 Euclid 空间，记为 \mathbb{R}^n ，称 $\mathbf{p} = (p_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ 是 \mathbb{R}^n 的一个点。为便于研究，本论文以 \mathbb{R}^3 为背景空间，所涉及的函数默认为可微实值函数。如果实函数 f 的任意阶偏导数存在且连续，则称函数是可微的（或无限可微的，或光滑的，或 C^∞ 的）。

由于微分运算是函数的局部运算，限制所讨论函数的定义域在 \mathbb{R}^3 中的任意开集，所讨论的结论仍然成立。

自然坐标函数：定义在 \mathbb{R}^n 上的实值函数 $x_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ，使得 $\mathbf{p} = (p_i)_{i=1}^n = (x_i(\mathbf{p}))_{i=1}^n$

切向量：由 \mathbb{R}^n 中的二元组构成， $\mathbf{v}_{\mathbf{p}} = (\mathbf{p}, \mathbf{v})$ ，其中 \mathbf{p} 是作用点， \mathbf{v} 是向量部分

切空间 $T_{\mathbf{p}}\mathbb{R}^n$ ：作用点 $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ 的所有切向量的集合。利用向量加法与数量乘法使某点的切空间称为向量空间，与背景空间存在非平凡同构。

向量场 \mathbf{V} ：作用于空间点的向量函数， $\mathbf{V}(\mathbf{p}) \in T_{\mathbf{p}}\mathbb{R}^n$

逐点化原理： $(\mathbf{V} + \mathbf{W})(\mathbf{p}) = \mathbf{V}(\mathbf{p}) + \mathbf{W}(\mathbf{p})$, $(f\mathbf{V})(\mathbf{p}) = f(\mathbf{p})\mathbf{V}(\mathbf{p})$

自然标架场：定义 $\mathbf{U}_i = (\delta_j^i)_{j=1}^n$ ，按 Einstein 求和约定，有 $\mathbf{V}(\mathbf{p}) = v^i(\mathbf{p})\mathbf{U}_i(\mathbf{p})$ ，称 v^i 为场的 Euclid 坐标函数，其中 Kronecker δ 函数定义为：

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}\tag{2.6}$$

2.3 Reference

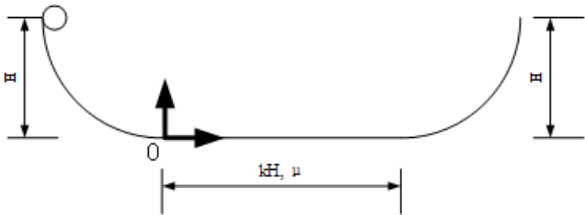


Figure 2.1: 正则项的几何意义

Chapter 3 Topology

3.1 Algebraic Topology

3.1.1 摘要

拓扑空间概念、性质、构造方法（如映射锥）基本群的计算方法奇异同调群 3 个定理：同伦不变性，正合序列，切除定理奇异上同调（有环结构），泛系数定理，Künneth 定理代数拓扑通过寻找拓扑不变量给拓扑空间做分类。通过函子，把输入的拓扑空间变成群，把映射对应为同态，把同胚对应为同构。梦想是通过证明同构能够断言空间同胚。梦想还未实现，目前三维流形的分类为完成。

3.1.2 拓扑空间

通常研究连续映射、度量空间

性质：紧致性（任意开覆盖有子覆盖），连通性（不能表示成不相交的开子集之并），道路连通，分离性

同胚：对于拓扑空间 X 和 Y ，称 $X \cong Y$ ，如果对于 $X \xrightleftharpoons[g]{f} Y$ ，有 $g \circ f = 1_X, f \circ g = 1_Y$

拓扑性质：同胚意义下不变的性质

Chapter 4 Geometry

4.1 Differential Geometry

4.1.1 摘要

以梁灿彬课程为主。

4.1.2 Topological Space

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is C^0 (读作 c nought, C^k 意思是 k 阶导函数存在且连续), if Y 得到任意开区间的“逆像” ($f^{-1}[B] := \{x \in X | f(x) \in B\}$) 是 x 的开区间之并, open set 之并。

$x \hookrightarrow y$, 一般用于表示 inclusion 或 embedding (嵌入)。在这里通常表示这个 map 具有 2 个性质, 1) injective, 1 个 y 只对应 1 个 x ; 2) structure-preserving, 不同 x 之间的关系和对应 y 之间的关系保持, 如 $X1 < X2$, 映射过去后 $y1 < y2$ 。

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, m 个 n 元函数。

X 的所有子集记为 \mathcal{P}

\mathcal{T} , X 的一些开集的集合, 称为 X 的一个拓扑。选拓扑是指定集合中的哪些子集的开的。先问 set 的拓扑是什么, 再问开不开。

$$\begin{aligned} X, \emptyset &\in \mathcal{T} \\ O_i &\in \mathcal{T}, i = 1, \dots, n \implies \bigcap_{i=1}^n O_i \in \mathcal{T}, \\ O_\alpha &\in \mathcal{T}, \forall \alpha, \implies \bigcup_{\alpha} O_\alpha \in \mathcal{T}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

$\mathcal{T} = \{\dots\}$, 离散拓扑, 开集最多; $\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$, 凝聚拓扑, 开集最少。

\mathbb{R}^1 , open interval; \mathbb{R}^2 , open disk; \mathbb{R}^n , open ball;

$B(X_0, r) := \{x_i \in \mathbb{R}^n | |x_i - x_0| \leq r\}$

usual topology: $\mathcal{T}_u := \{\text{可表为开球之并的集合}\}$, 一般认为 $\mathbb{R}^n \in \mathcal{T}_u$ 。属于。

(X, \mathcal{T}) , 拓扑空间 X ; $A \subset X$ (A, \mathcal{S}) , 拓扑子空间。 \subset 含于。

其中 $\mathcal{S} := \{V \subset A | \exists O \in \mathcal{T}, s.t. O \cap A = V\}$, \mathcal{S} 由 \mathcal{T} 诱导出。诱导拓扑的定义是, 可由父集合中的拓扑定义的开集, 交子集得到的集合。

open subset, 能写成开区间之并的 subset

4.1.3 Homeomorphism, 同胚

有拓扑结构的空问, 映射 map 的连续性有意义。

$f: X \rightarrow Y$ is C^0 if $O \in \mathcal{S} \rightarrow f^{-1}[O] \in \mathcal{T}$ 。即 X 中由 X 的拓扑定义的开集 O' , 映射到 Y 上后, 变成了 Y 上的 X 的拓扑的诱导拓扑下的开集。即映射到 Y 上后, 得到的这个集合 O , 这个集合 O 的子集可以由 X 的拓扑定义的开集, 交上集合 O 得到。

C^0 , continus;

无附加 structure, 只能说 one one, onto, 有了附加 structure 可以讨论 continus。

同胚: 存在一个 one one, onto, f 和 f^{-1} 均 C^0 。

微分同胚: one one, onto, f 和 f^{-1} 均 C^∞ 。即 one one, onto, 正反光滑。

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is C^0 at $x \in \mathbb{R}$, if $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t. |x' - x| < \delta \rightarrow |f(x') - f(x)| < \varepsilon$, 这样定义 C^0 需要用到距离, 附加的 structure

Chapter 5 Group Theory

Chapter 6 Group Representation

6.1 Introduction

丘维声。

运算：笛卡尔积 $S \times S \mapsto S$ 是集合 S 的二元代数运算。现代数学的鲜明特征是研究有各种运算的集合，称为代数系统。

现代数学的两大特征，1) 研究代数系统的结构;2) 利用同态映射研究代数系统结构。

核心：群表示论是研究 G 到各个线性空间的可逆线性变换群的各种同态映射，以获得 G 结构的完整信息。

群表示论是研究群结构的最强有力的工具。应用如晶体学，量子力学，抽象调和分析，组合数学，密码学，纠错编码

必备参考书，《抽象代数基础》丘维声，高教出版社，《高等代数学习指导书下》丘维声，清华大学。

6.1.1 环，域，群

表 6.1: algebra system

名称	运算	性质	举例
ring	加法; 乘法	交换, 结合, 0 元, 负元; 结合, 左右分配律	整数集 \mathbb{Z} , 偶数集 $2\mathbb{Z}$, 一元实系数多项式 $\mathbb{R}(x)$, 实 n 阶矩阵 $M_n(\mathbb{R})$

交换环，乘法可交换。单位元。

例子，星期 i ，记为 $\bar{i} = \{7k + i \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ，收集起 \bar{i} 可以实现整数的划分。类似的，定义模 m 剩余类：

$$\mathbb{Z}_m = \{\bar{i} \mid i = 1, \dots, m-1\} \quad (6.1)$$

定义加法和乘法, 有模 m 剩余类环

$$\begin{aligned}\bar{i} + \bar{j} &= \overline{i+j} \\ \bar{i} \cdot \bar{j} &= \overline{i \cdot j}\end{aligned}\tag{6.2}$$

可逆元, 单位 a : $a \in \text{ring}R, \exists b \in R, ab = ba = e$

左零因子 a : $a \neq 0, \exists c \neq 0, ac = 0$

例子: \mathbb{Z}_8 , 零因子 2,4,6; 可逆元 3,5,7;

例子: \mathbb{Z}_7 , 每个非零元都可逆;

域 F : 有单位元 e 的环, 且每个非零元都可逆。例子: 有理数集, 实数集, 复数集 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}$
域 F 中可以定义除法。

群 G : 只有乘法, 结合律, 单位元, 每个元素有逆元。

例子: \mathbb{Z}_m^* : \mathbb{Z}_m 所有可逆元的集合, 发现只对乘法封闭, 称为 \mathbb{Z}_m 的单位群; 如域 F 上的所有可逆矩阵的集合 $GL_n(F)$, 只有乘法, 称为域 F 上的一般线性群。

阿贝尔群: 乘法可交换。

例子: $GL(V)$, 域 F 上的线性空间 V 的所有可逆线性变换, 对于映射的乘法行程的 V 上可逆线性变换群。子群: $H < G$

6.1.2 等价关系与左陪集

研究 G 的第一个途径: 利用子群 H 研究 G 。

集合的划分与等价关系。对于 $a, b \in G$, 定义 $a \sim b : \Leftrightarrow b^{-1}a \in H$, 易有关系 具有反射性 (e 在 H 中), 对称性, 传递性, 所以这是等价关系。

定义 a 的等价类:

$$\begin{aligned}\bar{a} &:= \{x \in G \mid x \sim a\} \\ &:= \{x \in G \mid a^{-1}x \in H\} \\ &= \{x \in G \mid x = ah, h \in H\} \\ &= \{ah \mid h \in H\} \\ &=: aH\end{aligned}\tag{6.3}$$

aH 称为以 a 为代表的 H 的一个左陪集, 是一个等价类。

根据等价类的性质, 有 1) $aH = bH \Leftrightarrow b^{-1}a \in H$; 2) aH 与 bH 或者相等, 或者不相交 (交集为空集)。所以 H 的所有左陪集给出 G 的一个划分, 记为 G/H , 称为 G 关于 H 的左商集。 G/H 的基数称为 G 关于 H 的指数, 记为 $[G:H]$ 。基数相同可建立双射。

G 关于 H 的左陪集分解: $[G : H] = r, G = eH \cup a_1H \cup \cdots \cup a_{r-1}H$ 。

拉格朗日定理: 对于有限群 G , 易有其元素个数 $|G| = |H|[G : H]$, 即任何子群的阶是群的阶的因数。推论: 1) n 阶群 G 的任意元素 a , 有 $a^n \in G$; 2) 素数阶群是循环群。

6.1.3 同态

研究 G 的第二个途径: 通过研究 G 到 G' 的保持运算的映射, 同态映射, 简称同态。同态要变, 是函数。

通常利用 G 到 Ω 的同态, 等价于 G 在 Ω 的作用。既可以研究 G 的结构, 又可以对 Ω 的性质有所了解

$S(\Omega): \Omega$ 的全变换群, Full Transformation Group on Set Ω , Ω 自身的所有双射组成的集合, 对于映射的乘法构成的一个群。

6.1.4 作业

1. 环 R 中, $0a=a0=0$
2. 有 e 的环中, 零因子不是可逆元
3. \mathbb{Z}_m 中每个元素要么是可逆元要么是零因子;
4. $M_n(\mathbb{F})$ 中, 每个矩阵是可逆矩阵或者是零因子。

6.2 Abel 群的表示

6.2.1 映射 (Map)

映射: $f : a \mapsto b \Leftrightarrow f(a) = b$ 。 $f(x)$ f of x 原象, 象。映射 f 的定义域 (domain) A , 陪域 (codomain) B 。映射得到的所有象的集合叫值域, 记作 $f(A)$, 或 $\text{Im}f$ 。

$$\begin{aligned} f : a \mapsto b &\Leftrightarrow f(a) = b \\ f : A &\rightarrow B \end{aligned} \tag{6.4}$$

映射通常关心 is it one one? Is is onto?

满射, onto, 到上: $f(A) = B$

单射, 1-1, 一一的, 每个 a 对应的 b 是不同的。

双射, 两个集合一一对应。

逆映射。对于 $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow A$, 有 $g \circ f = 1_A, f \circ g = 1_B$ 。可逆的 f 是双射。

线性映射、线性变换是线性空间的同态映射，有点乘和加法。

补空间：域 \mathbb{F} 上的线性空间 $U \leq V$, 则 $\exists W, V = U \oplus W$ 。对于实内积空间 V , U 是有限维的, $W = U^\perp$, 正交补空间, 唯一的。

投影变换：域 \mathbb{F} 上的线性空间 $V = U \oplus W$, 有 $\alpha = \alpha_U + \alpha_W$, 有投影变换 $P_U : \alpha \mapsto \alpha_U$. 投影变换保持加法和数乘, 是 V 上的线性变换。投影是同态映射。

几何空间：以原点 O 为起点的定位向量组成的实线性空间。知道一空间点在两个坐标面的投影坐标可完全确定点。

6.2.2 群的同态

同态映射： G 到 G' 的映射 $\sigma : \sigma(a, b) = \sigma(a)\sigma(b)$ 。单射的话是单同态。满射是满同态。双射是同构, 此时两个群同构, $G \cong G'$ 。

同态的性质：1) 单位元、逆元、子群映射过去是 G' 的单位元、逆元、子群。例如 $G \leq G \Rightarrow \sigma(G) = \text{Im}\sigma \leq G'$, 同态的像是 G' 的子群

刻画单同态：找到映射成单位元的原象, 定义同态的核, $\text{Ker}\sigma := \{a \in G | \sigma(a) = e'\}$. 易有同态的核是 G 的子群。对于单同态, $\text{Ker}\sigma = \{e\}$.

子集乘法：类似与点乘, a 的所有和 b 的所有的乘积方式的组合。乘法满足结合律。

6.2.3 正规子群

$\forall k \in \ker \sigma, \forall g \in G$, we have:

$$\begin{aligned} \sigma(gkg^{-1}) &= \sigma(g)\sigma(k)\sigma(g^{-1}) = e' \\ \therefore gkg^{-1} &\in \ker \sigma \\ \therefore g \ker \sigma g^{-1} &\subset \ker \sigma \\ \& \ g^{-1} \ker \sigma g &\subset \ker \sigma \\ \therefore g \ker \sigma g^{-1} &= \ker \sigma \end{aligned} \tag{6.5}$$

normal subgroup 正规子群: $H \triangleleft G : \forall g \in G, gHg^{-1} = H$, gHg^{-1} 是 g 的共轭子群。

性质: $H \triangleleft G \Leftrightarrow gHg^{-1} = H, \forall g \in G \Leftrightarrow gH = Hg$, H 的左右陪集相等;

G 关于正规子群 H 的商群: 规定正规子群 H 的商群 G/H 乘法: $(aH)(bH) = abH$

6.2.4 群同态基本定理

$$\begin{aligned}\psi : G / \ker \sigma &\rightarrow \text{Im} \sigma \\ a(\ker \sigma) &\mapsto \sigma(a)\end{aligned}\quad (6.6)$$

看映射 ψ 的性质:

$$\left. \begin{aligned} a(\ker \sigma) &= b(\ker \sigma) \\ \Leftrightarrow b^{-1}a &\in \ker \sigma \\ \sigma(b^{-1}a) &= e' \\ \therefore \sigma(a) &= \sigma(b) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \psi \text{ is surjection} \quad (6.7)$$

从是映射、是单射、是满的, 得到是双射;

Let $K = \ker \sigma$, $\psi[(aK)(bK)] = \psi(abK) = \sigma(ab) = \psi(aK)\psi(bK)$, 所以保持运算, 所以是同构, 所以 $G / \ker \sigma \cong \text{Im} \sigma$

群同态基本定理: $\ker \sigma \triangleleft G$ & $G / \ker \sigma \cong \text{Im} \sigma$

6.3 线性表示

$GL(V)$: 对于群 G , 域 \mathbb{K} 上的线性空间 V , G 到 V 的所有可逆线性变换的集合, 对于映射的乘法成为一个可逆线性变换群。

G 到 $GL(V)$ 的同态 ψ 是 G 在 \mathbb{K} 上的线性表示, 简称为 \mathbb{K} 表示, 或者简称为表示。

V 叫做表示空间, 表示次数 $\deg \psi := \dim V$

(ψ, V)

如用两个视图可完全确定空间曲线, 即做了两个同态。

$\ker \psi = \{e_G\}$, ψ 是忠实的;

$\ker \psi = G$, ψ 是平凡的; 1 、称一次的平凡表示 ψ 是 G 的主表示, 单位表示, 记作 1_G ;

$\dim V = n$ 时, 有 $\psi(g)$ 在基 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 下的矩阵 $\Phi(g)$ 是 \mathbb{K} 上的可逆矩阵, 由同构 $GL(V) \cong GL_n(\mathbb{K})$, 有 G 到 $GL_n(\mathbb{K})$ 的同态 Φ , 称为 G 在 \mathbb{K} 上的 n 次矩阵表示。

Φ 称为是 ψ 提供的

6.3.1 表示的等价类

等价关系: 对于 G 的 2 个 \mathbb{K} 表示, $(\phi, V), (\psi, W)$, $\exists \sigma$ 到 W 的线性空间的同构 σ , 定义 $\psi(g)\sigma = \sigma\phi(g), \forall g \in G$, 这种 G 的所有 \mathbb{K} 表示的集合 Ω 上的二元关系, 易有具有反射性, 对称性, 传递性, 从而是等价关系。通常关注 G 的 \mathbb{K} 表示的等价类。

$(\phi, V), (\psi, W)$ 等价, 取基后的矩阵记为 $\Phi(g)|\{\alpha_i, \dots\}, \Psi(g)|\{\beta_i, \dots\}$, 同构 σ 把 V 的基映射到 W 上的 S , 有 $\sigma(\{\alpha_i, \dots\}) = \{\beta_i, \dots\}S$, $\therefore \Psi(g)S = S\Phi(g)$. 所以 G 在 K 的 2 个矩阵表示 Ψ, Φ 等价: 次数一样且 $\forall g \in G, \Psi = S\Phi(g)S^{-1}$. 所以群 G 的 2 个 K 表示 $(\phi, V), (\psi, W)$ 等价, $\Leftrightarrow K$ 表示提供的矩阵表示 Ψ, Φ 等价。

6.3.2 例: 1 次表示

G 在 K 上的 1 次矩阵表示 $\Phi: G \rightarrow K^*$; 非零元集合。映射是通用的不对定义域做要求, 陪域是域的子集的映射叫函数。称为 G 上的 K^* 函数, 且由于同态保持运算, 有 $\Phi(gh) = \Phi(g)\Phi(h), \forall g, h \in G$, and $\Phi(e) = 1$, where 1 is the unit of K^* . 所以一次表示是 G 到 K^* 的保持运算的函数。

6.3.3 例: 实数和加法的 1 次实表示

$f_a(x) = e^{ax}$ 是 $\mathbb{R}, +$ 的 1 次实表示。

6.3.4 例: 实数和加法的 1 次复表示

$f_a(x) = e^{iax}$ 是 $(\mathbb{R}, +)$ 的 1 次实表示。

$$\begin{aligned} f: (\mathbb{R}, +) &\rightarrow \mathbb{C}^* \\ x &\mapsto e^{iax} \end{aligned} \tag{6.8}$$