



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ *Робототехники и комплексной автоматизации*

КАФЕДРА *Системы автоматизированного проектирования (РК-6)*

ОТЧЕТ О ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

по дисциплине: «Вычислительная математика»

Студент

Шереметов Вадим Романович

Группа

РК6-63Б

Тип задания

лабораторная работа

Тема лабораторной
работы

Интерполяция

Студент

_____ **Шереметов В.Р.**
подпись, дата фамилия, и.о.

Преподаватель

_____ **Першин А.Ю.**
подпись, дата фамилия, и.о.

Оценка _____

Москва, 2020 г.

Оглавление

Задание на лабораторную работу	3
Цель выполнения лабораторной работы	5
Выполненные задачи	5
1. Расчет значения i -го базисного полинома Лагранжа	6
2. Расчет значения интерполяционного полинома Лагранжа	6
3. Анализ интерполяции Лагранжа при равномерном распределении узлов.	6
4. Анализ интерполяции Лагранжа при оптимальном расположении узлов.	11
5. Анализ кусочно-линейной интерполяции	16
6. Сравнение численной погрешности для трех видов интерполяции.	20
7. Исследование функции ошибок.	21
Заключение	22
Список использованной литературы	23

Задание на лабораторную работу

Дана функция:

$$f(x) = e^{-x^2}, \quad (1)$$

где $x \in [-5; 5]$, и функция ошибок

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^x f(t) dt. \quad (2)$$

Требуется:

1. Разработать функцию $l_i(i, x, x_nodes)$, которая возвращает значение i -го базисного полинома Лагранжа, заданного на узлах с абсциссами x_nodes , в точке x .
2. Написать функцию $L(x, x_nodes, y_nodes)$, которая возвращает значение интерполяционного полинома Лагранжа, заданного на узлах с абсциссами x_nodes и ординатами y_nodes , в точке x .
3. Провести следующий анализ:
 - а) Для равномерно расположенных узлов в интервале $x \in [-5; 5]$ вывести на экран одновременно графики $f(x)$ и полученного интерполяционного полинома $L(x)$ для нескольких различных количеств узлов, обозначаемых N . Опишите, что наблюдается при увеличении количества узлов N ?
 - б) Для каждого $N = 4, 5, \dots, 20$ рассчитайте расстояние между $f(x)$ и $L(x)$ в лебеговом пространстве L^∞ .
 - в) Используя формулу для остаточного члена интерполяции, аналитически оценить верхнюю границу зависимости погрешности интерполяции от N . Вывести на экран сравнение полученного результата с зависимостью расстояния между $f(x)$ и $L(x)$ в лебеговом пространстве L^∞ от N^8 . Как соотносятся друг с другом полученные аналитическая и численная оценки погрешности аппроксимации?
4. Повторить пункт 3 для случая оптимально расположенных узлов и для случая кусочно-линейной интерполяции.

5. Вывести на едином графике зависимости расстояния между $f(x)$ и $L(x)$ в лебеговом пространстве L^∞ от N для трех случаев интерполяции. Как влияет расположение узлов на погрешность аппроксимации? Какое расположение узлов и для каких N дает более точную интерполяцию? Как влияет использование локальной или глобальной интерполяции на точность интерполяции?
6. Найти приближенное значение функции ошибок $erf(x)$ для $x = 2$, используя кусочно-линейную интерполяцию для $f(x)$ для $N = 3, 5, 7, 9$, и сравнить полученные значения. Дополнительно требуется представить аналитическое выражение для интеграла от кусочно-линейного интерполанта, используемого для аппроксимации $erf(x)$. Опишите, где применяется функция ошибок.

Цель выполнения лабораторной работы

Цель выполнения лабораторной работы - изучение интерполяции полиномами Лагранжа и кусочной интерполяции на практике, реализация алгоритмов на языке Python с использованием библиотек Numpy и Matplotlib.

Выполненные задачи

1. Разработана функция, реализующая расчет базисного полинома Лагранжа в данной точке x .
2. Разработана функция, реализующая расчет значения интерполяционного полинома Лагранжа в данной точке x .
3. Анализ интерполяции Лагранжа при равномерном распределении узлов.
4. Анализ интерполяции Лагранжа при оптимальном расположении узлов.
5. Анализ кусочно-линейной интерполяции
6. Сравнение зависимости расстояния $f(x)$ и $L(x)$ в Лебеговом пространстве для трех случаев интерполяции
7. Исследование функции ошибок.

1. Расчет значения i -го базисного полинома Лагранжа

Была разработана функция $l_i(i, x, x_nodes)$, аргументами которой являются: i - номер базисного полинома Лагранжа, x - произвольная точка, x_nodes - массив абсцисс узлов полинома. Функция возвращает значение i -го базисного полинома Лагранжа в указанной точке x .

Функция основана на формуле:

$$l_i(x) = \prod_{i \neq j} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (3)$$

2. Расчет значения интерполяционного полинома Лагранжа

Была разработана функция $L(x, x_nodes, y_nodes)$, аргументами которой являются: x - произвольная точка, x_nodes и y_nodes - массивы абсцисс и ординат узлов полинома соответственно. Функция возвращает значение интерполяционного полинома Лагранжа в указанной точке x .

Функция основана на формуле:

$$L_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) l_i(x), \quad (4)$$

где n - количество узлов (длина массивов x_nodes и y_nodes).

3. Анализ интерполяции Лагранжа при равномерном распределении узлов.

Были выведены графики $f(x)$ и полученного интерполяционного полинома $L(x)$ для разных количеств узлов, обозначаемых N .

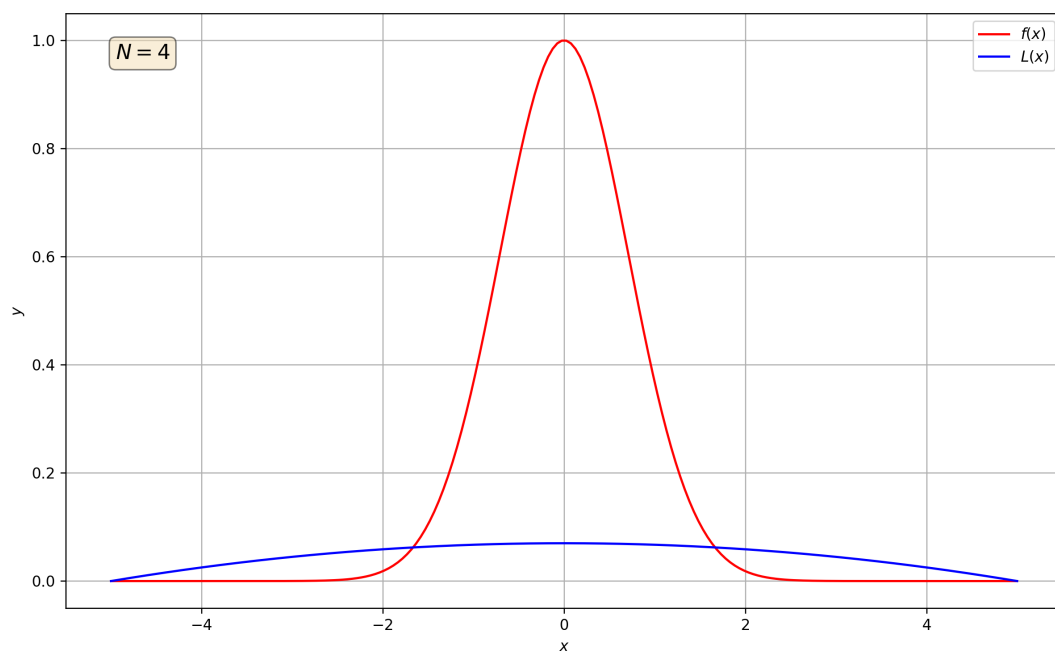


Рис.1. Функция $f(x)$ и интерполяционный полином $L(x)$ при $N = 4$.

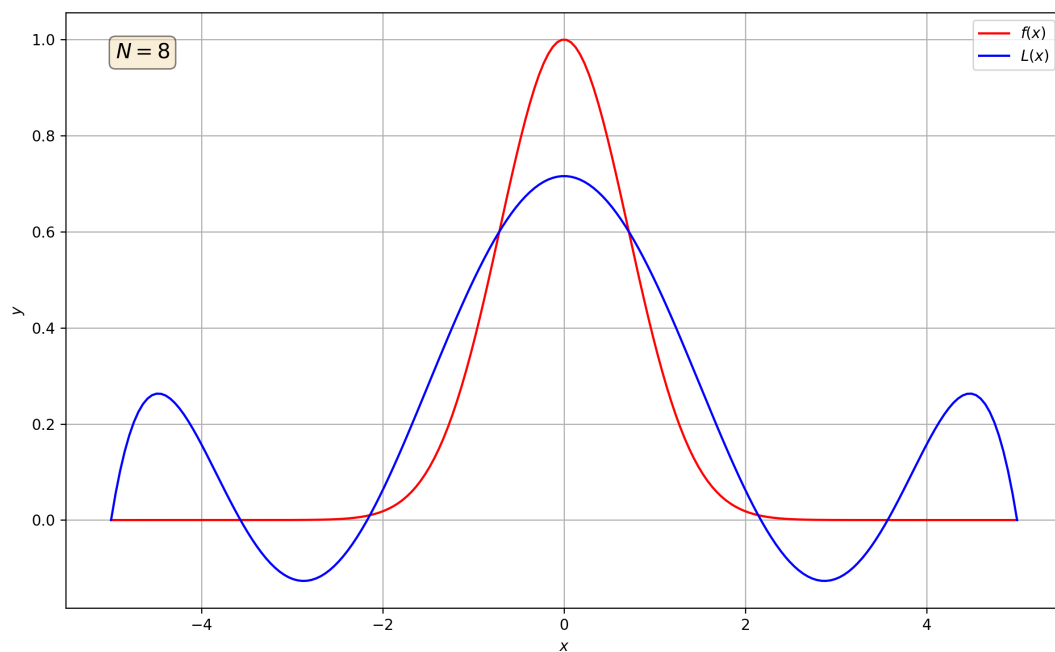


Рис.2. Функция $f(x)$ и интерполяционный полином $L(x)$ при $N = 8$.

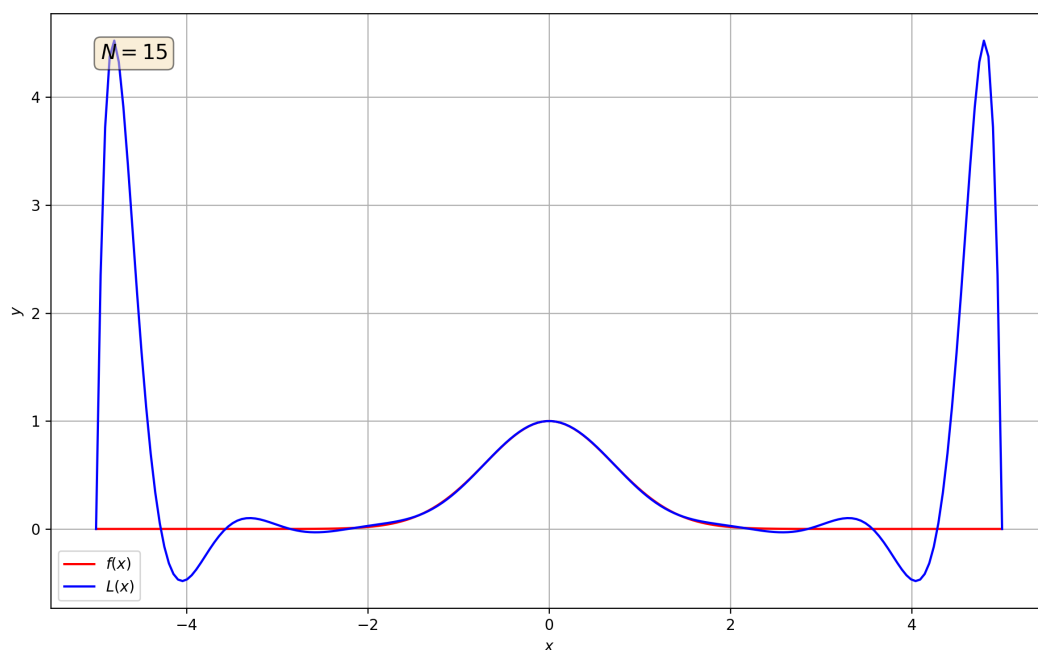


Рис.3. Функция $f(x)$ и интерполяционный полином $L(x)$ при $N = 15$.

По графикам видно, что при интерполяции с большим количеством равномерно распределенных узлов ближе к граничным узлам появляются паразитные осцилляции. Это приводит к увеличению расстояния между функцией и ее интерполяцией.

Также были выведены графики численной и аналитической оценок погрешности в зависимости от числа узлов и их сравнение.

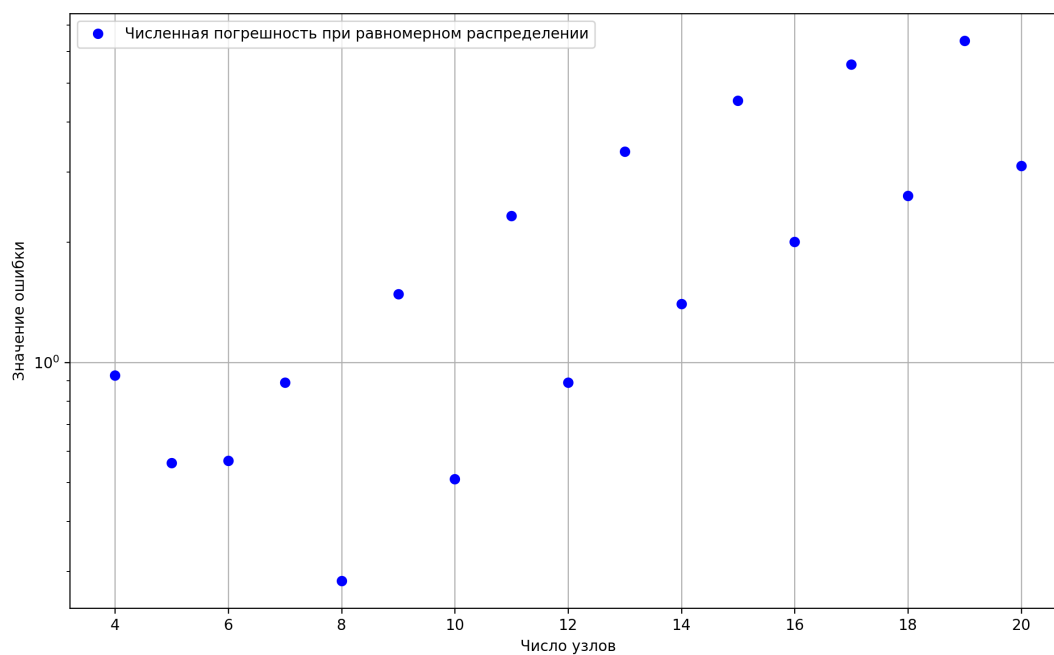


Рис. 4. Зависимость численной оценки погрешности от числа узлов при равномерном распределении узлов.

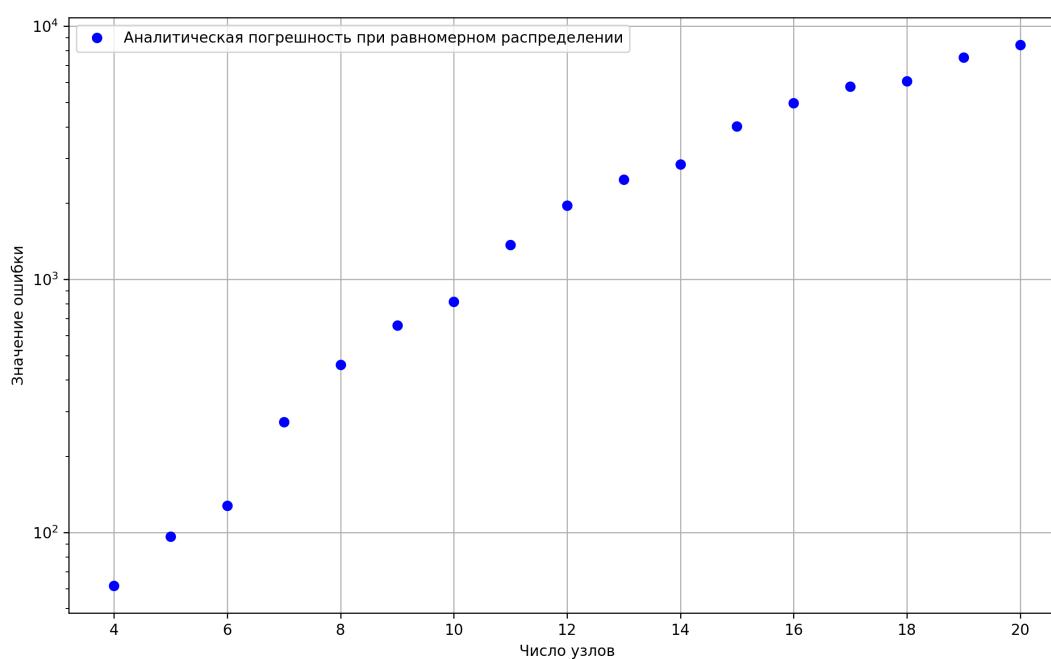


Рис. 5. Зависимость аналитической оценки верхней границы погрешности от числа узлов при равномерном распределении узлов.

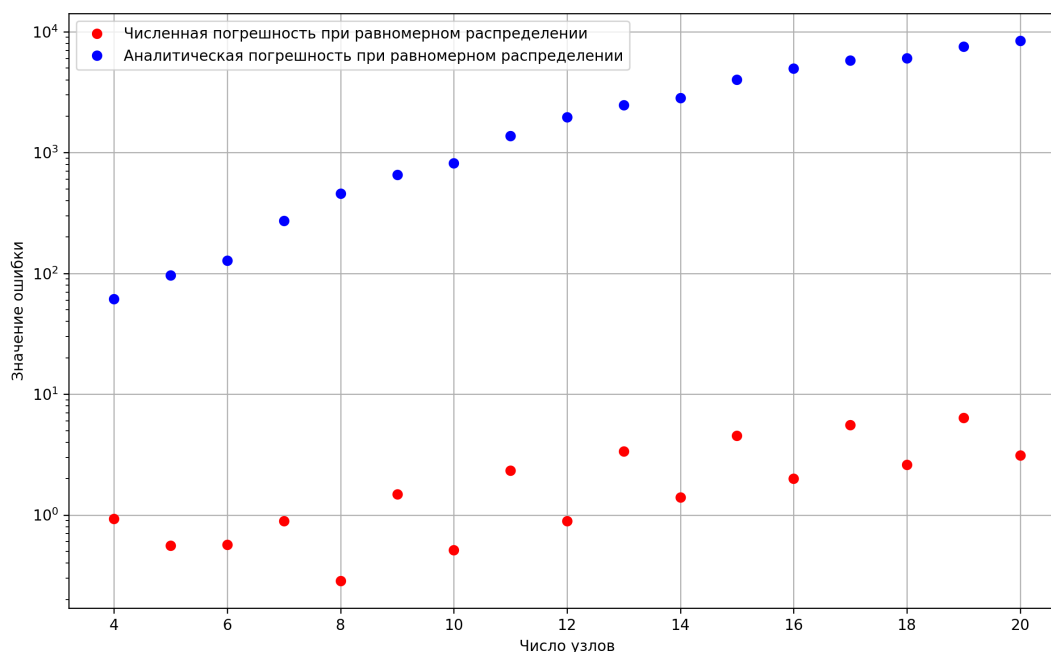


Рис.6. Сравнение численной и аналитической оценок погрешности при равномерном распределении узлов.

Для получения численной оценки погрешности используется формула:

$$||f(x) - L(x)||_{\infty} = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - L(x)| \quad (5)$$

Аналитическая оценка верхней границы погрешности определяется по формуле:

$$f(x) - L_{n-1}(x) = \frac{f^n(\xi)}{n!} \prod_{i=1}^n (x - x_i) \quad (6)$$

Из графика сравнения оценок на рис.5 можно сделать вывод, что аналитическая погрешность при равномерном распределении на порядок отличается от реальной - численной погрешности.

4. Анализ интерполяции Лагранжа при оптимальном расположении узлов.

Интерполяция Лагранжа для любой достаточно гладкой функции $f(x)$, является оптимальной тогда, когда узлы интерполяции распределены в соответствии с корнями многочлена Чебышева. Корни находятся по следующей формуле (7)[1]:

$$\bar{x}_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2n} * \pi\right), \quad i = 1, \dots, n \quad (7)$$

Узлы интерполирования находятся с помощью непрерывной замены переменной по формуле (8)[1]:

$$\tilde{x} = \frac{1}{2}[(b-a)x + a + b], \quad (8)$$

где $\tilde{x} \in [a, b]$ и $x \in [-1; 1]$.

Для оптимально расположенных узлов были построены графики $f(x)$ и интерполяционного полинома $L(x)$ для $N = 4, 8, 15$.

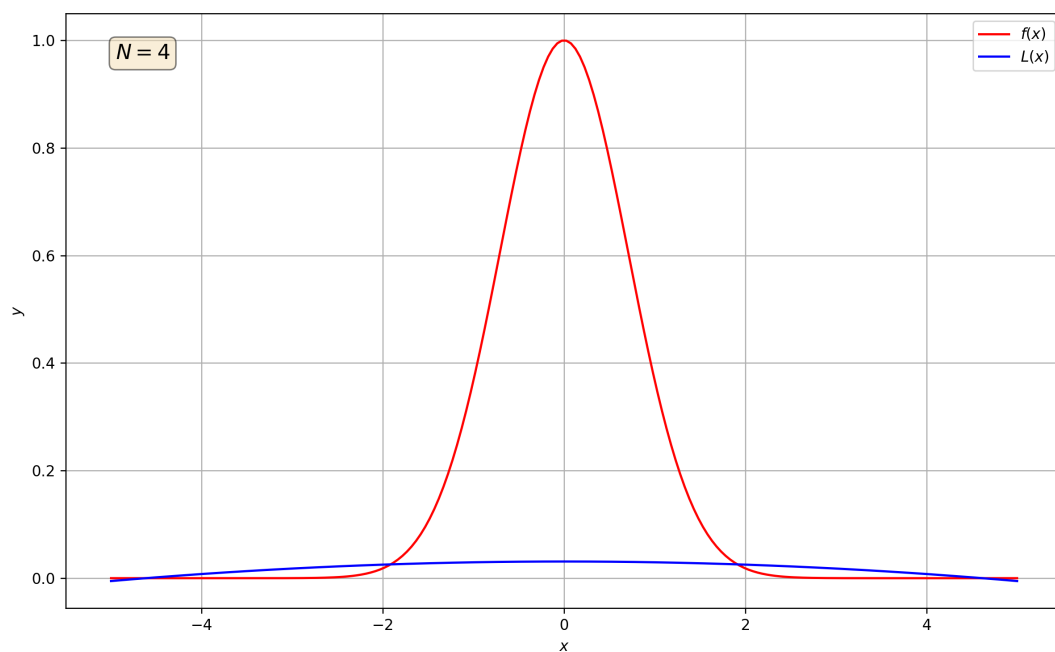


Рис. 7. Функция $f(x)$ и интерполяционный полином $L(x)$ при $N = 4$.

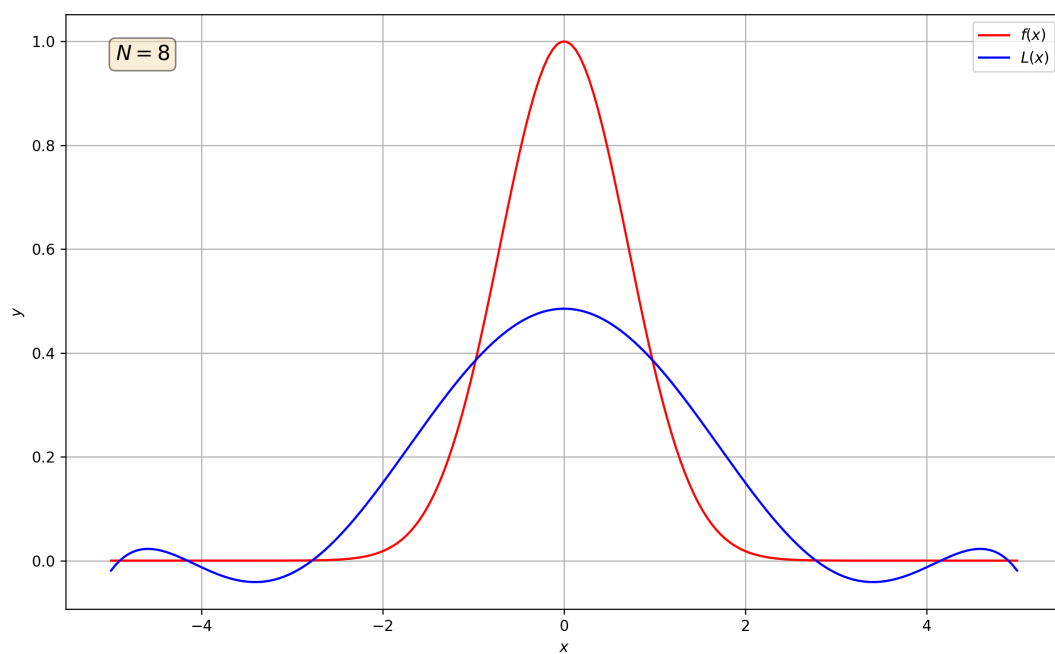


Рис. 8. Функция $f(x)$ и интерполяционный полином $L(x)$ при $N = 8$.

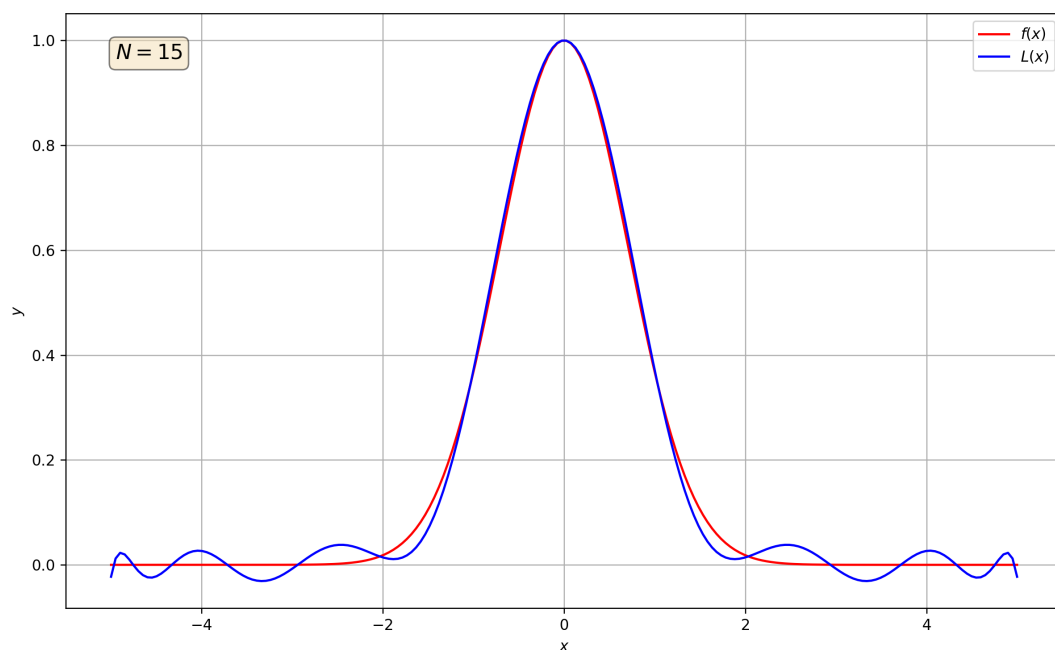


Рис. 9. Функция $f(x)$ и интерполяционный полином $L(x)$ при $N = 15$.

По графикам можно сказать, что при использовании чебышевских узлов не возникает паразитных осцилляций, как в случае с равномерно распределенными узлами.

Также были получены графики численной и аналитической оценок погрешности в зависимости от числа узлов и их сравнение.

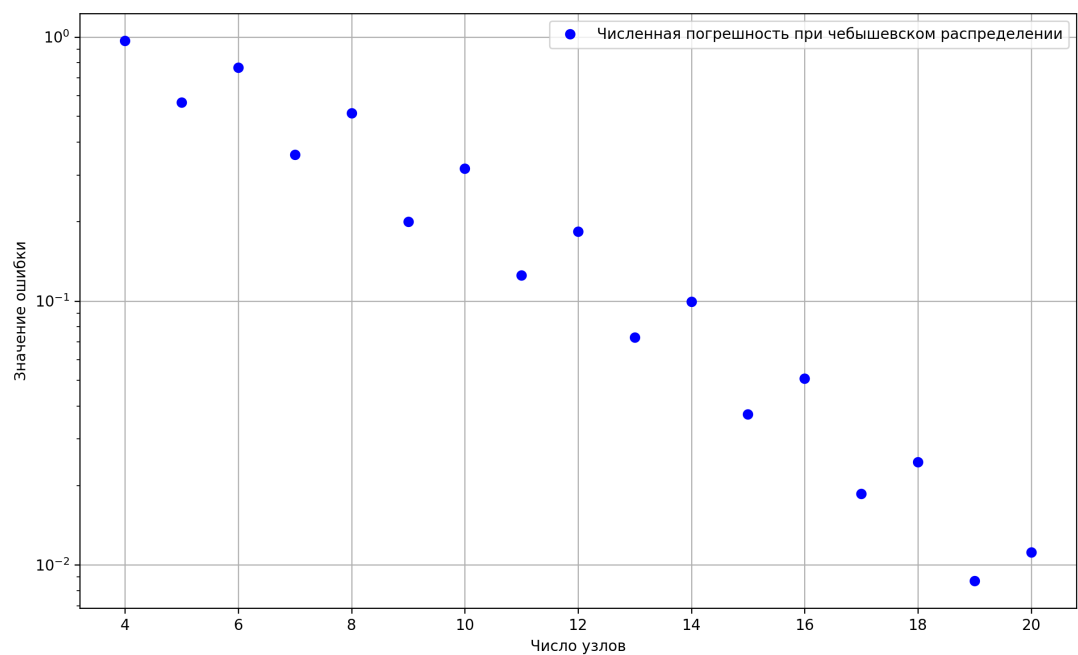


Рис. 10. Зависимость численной оценки погрешности от числа узлов при оптимально расположенных узлах.

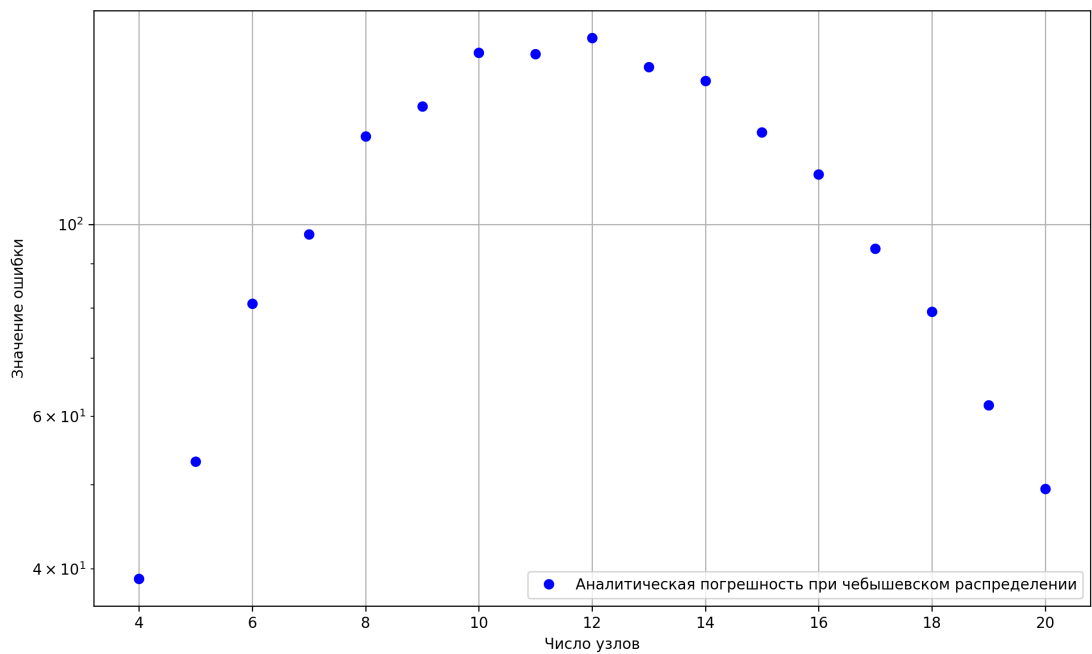


Рис. 11. Зависимость аналитической оценки верхней границы погрешности от числа узлов при оптимально расположенных узлах.

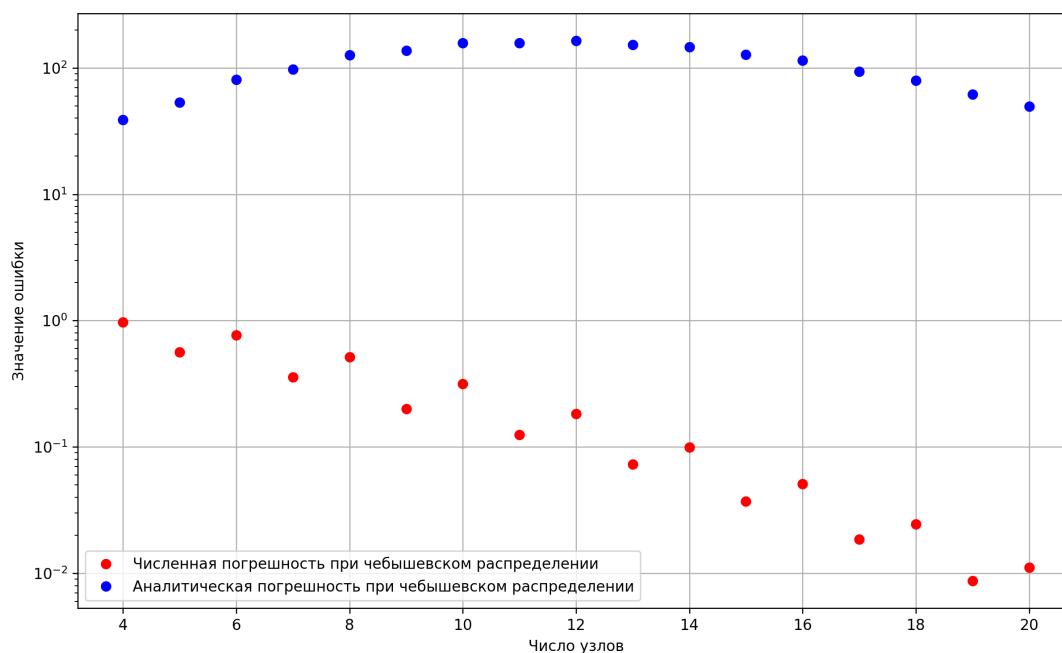


Рис. 12. Сравнение численной и аналитической оценок погрешности при оптимальном расположении узлов.

Численная погрешность также, как и в случае с равномерным распределением узлов была найдена по формуле (5).

Аналитическая оценка погрешности на интервале $[a, b]$ определяется по формуле (9)[4]:

$$|f(x) - L_{n-1}(x)| = \frac{1}{2^{n-1}n!} \left(\frac{b-a}{2}\right)^n \max_{x \in [a,b]} |f^{(n)}(\xi)| \quad (9)$$

По графику на рис. 11 видно, что при $n > 12$ аналитическая погрешность начинает убывать.

Из графика сравнения оценок на рис.12 видно, что аналитическая погрешность при оптимальном расположении узлов все еще сильно отличается от найденной численно погрешности.

5. Анализ кусочно-линейной интерполяции

Простейшим видом интерполяции является кусочно-линейная интерполяция. Она состоит в том, что заданные точки (x_i, f_i) , $i = 0, \dots, N$ соединяются прямолинейными отрезками, и функция $f(x)$ приближается полученной ломаной.

Были построены графики $f(x)$ и полученного интерполяционного полинома $L(x)$ для $N=4, 8, 15$.

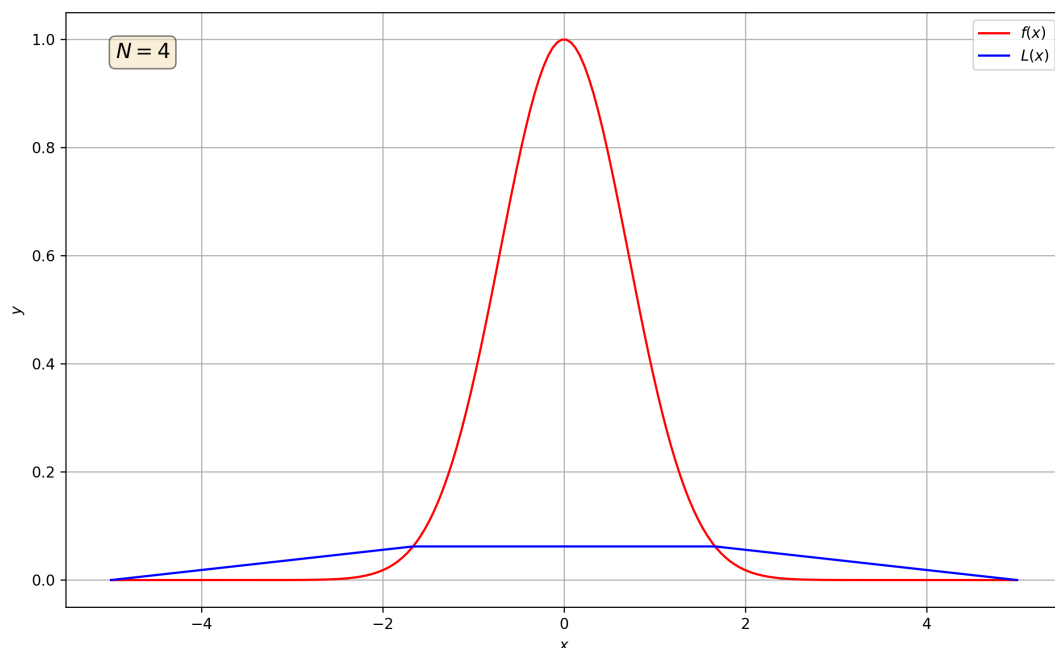


Рис.13. Функция $f(x)$ и интерполяционный полином $L(x)$ при $N = 4$.

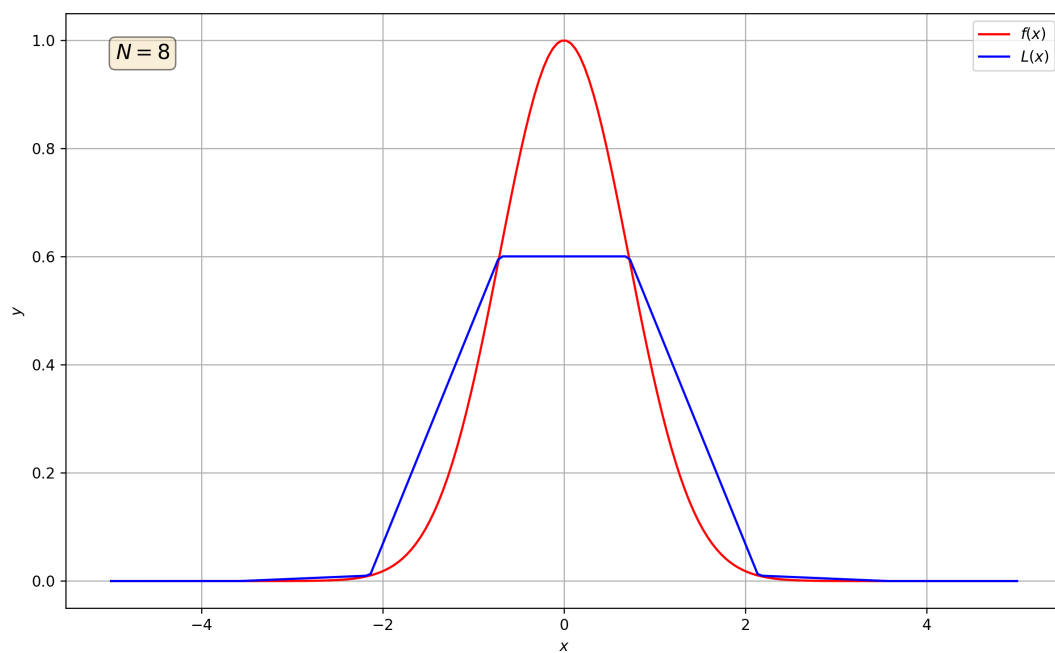


Рис.14. Функция $f(x)$ и интерполяционный полином $L(x)$ при $N = 8$.

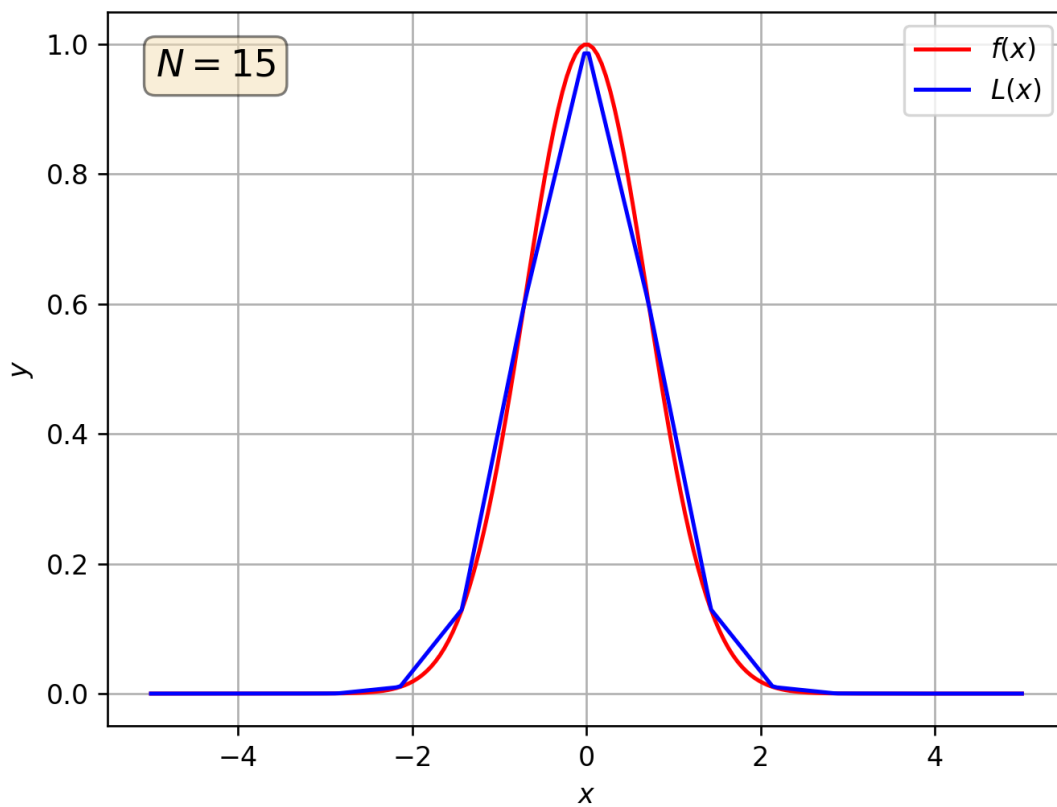


Рис.15. Функция $f(x)$ и интерполяционный полином $L(x)$ при $N = 15$.

По графикам на рис.13 - рис. 15 видно, что при увеличении числа узлов полином все больше соотносится с исходной функцией. Также проявляется и главный недостаток данного вида интерполяции - отсутствие гладкости. Паразитные осцилляции - отсутствуют.

Были получены графики численной и аналитической оценок погрешности в зависимости от числа узлов и их сравнение.

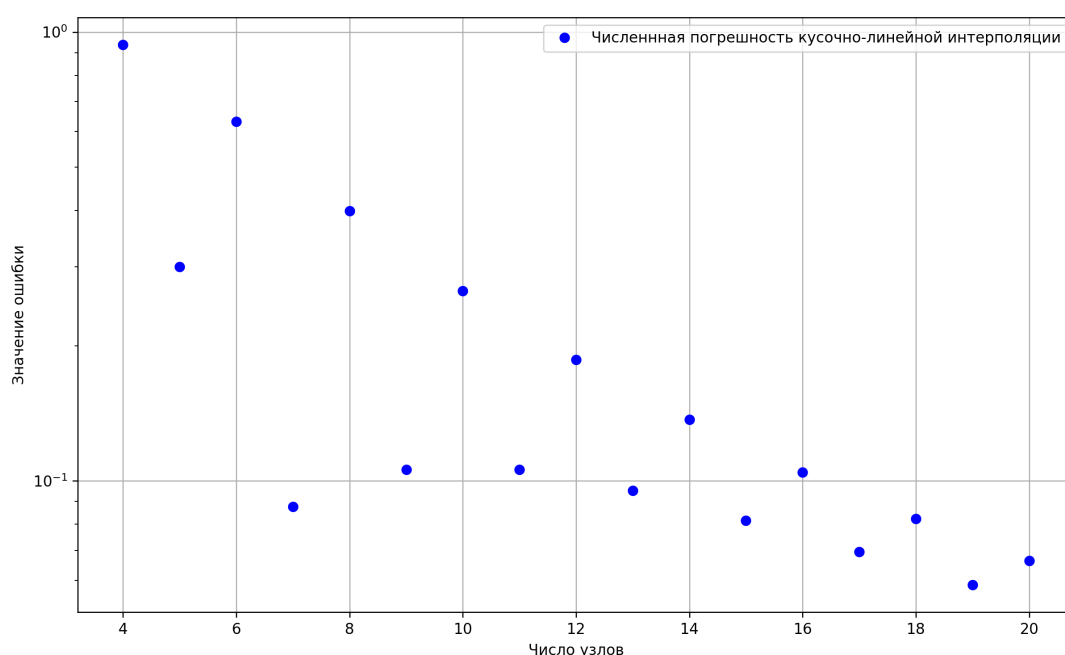


Рис. 16. Зависимость численной оценки погрешности от числа узлов при кусочно-линейной интерполяции.

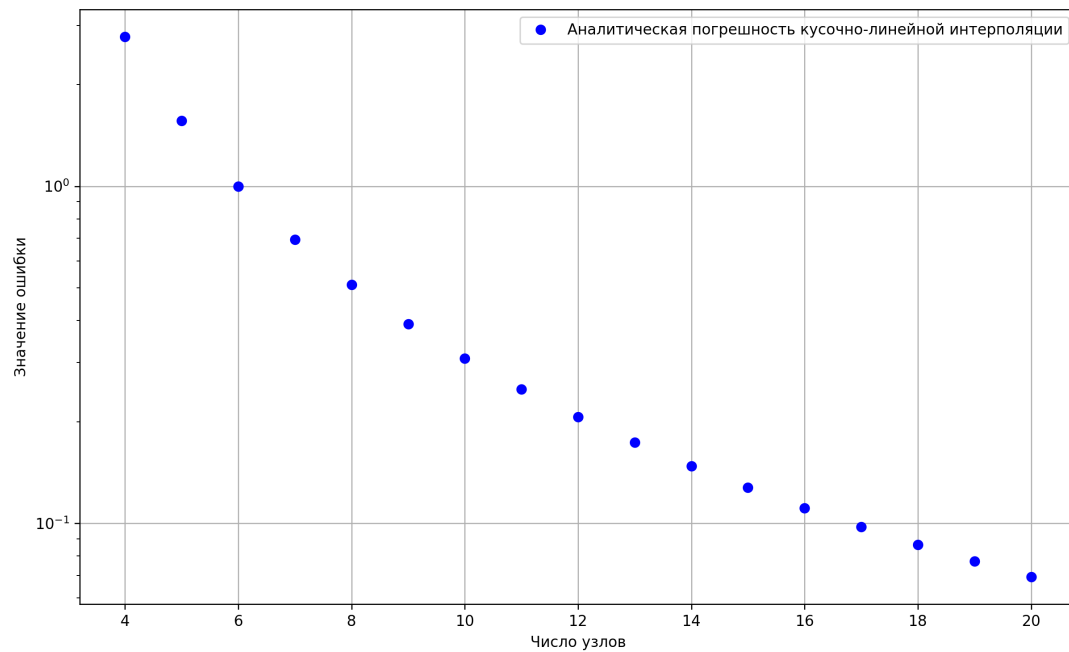


Рис. 17. Зависимость аналитической оценки погрешности от числа узлов при кусочно-линейной интерполяции.

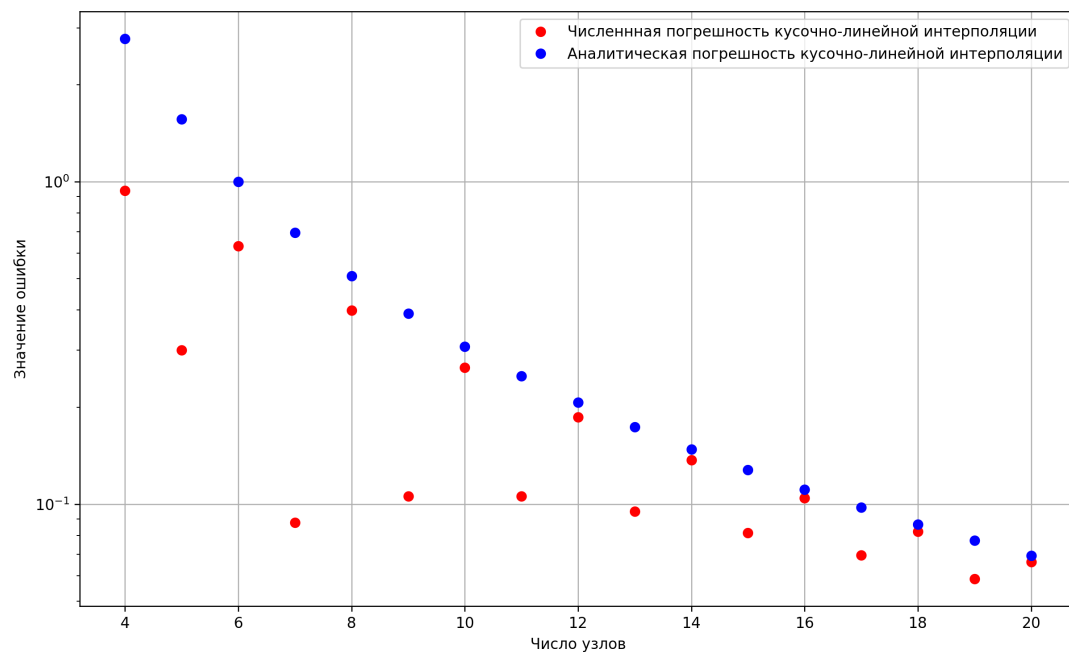


Рис. 18. Сравнение численной и аналитической оценок погрешности при кусочно-линейной интерполяции.

Численная погрешность найдена по формуле (5).

Аналитическая погрешность найдена по формуле (10)[3]:

$$|f(x) - L_1(x)| = \max_{x \in [a,b]} \left| \frac{f^{(2)}(\xi)}{2} (x - x_i)(x - x_{i+1}) \right|, \quad (10)$$

где $i = 1, \dots, n - 1$.

По рис. 17 видно, что при увеличении количества узлов аналитическая оценка погрешности сходится к численной.

6. Сравнение численной погрешности для трех видов интерполяции.

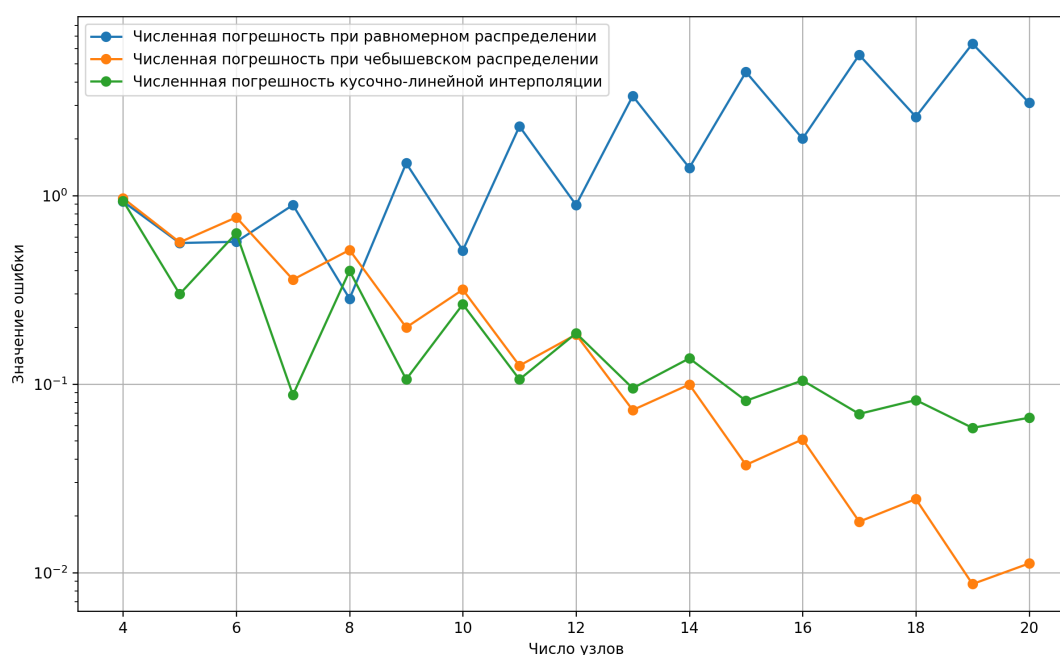


Рис. 19. Сравнение численных оценок погрешности для трех видов интерполяции.

По графику на рис. 19 видно, что численная погрешность при равномерном распределении узлов сопоставима с другими методами только при малом количестве узлов ($N < 8$), так как при его увеличении возрастают паразитные осцилляции.

Наиболее точную аппроксимацию при большом количестве узлов дает интерполянт Лагранжа, проходящий через чебышевские узлы. Кусочно-линейная интерполяция дает более точную аппроксимацию

только до $N < 12$. Следовательно, глобальную интерполяцию с оптимально расположенными узлами стоит использовать при $N > 12$.

Также необходимо отметить, что в каждом случае численные оценки погрешности зависят от четности количества узлов. Интерполяция с равномерно распределенными узлами дает более точную аппроксимацию с четным N , а с оптимально расположенными и в случае кусочно-линейной интерполяции с нечетным.

7. Исследование функции ошибок.

$$erf(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^x f(t) dt \quad (11)$$

Для вычисления значений функции ошибок использовалась кусочно-линейная интерполяция для $f(x)$ при $N = 3, 5, 7, 9$ и квадратурная формула трапеций (для случая равномерной сетки) [5]:

$$erf(x) = \frac{1}{\pi} h \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(a + ih) \right), \quad (12)$$

где $h = \frac{b - a}{n}$.

Приближенные значения функции ошибок представлены в таблице 1.

Таблица 1. Приближенное значение функции ошибок.

N	3	5	7	9
$erf(x)$	1.303904815	1.228791815	1.001402563	0.949956421

Функция ошибок применяется в теории вероятностей, в цифровых системах связи и в уравнениях теплопроводности [2].

Заключение

В ходе выполнения лабораторной работы были рассмотрены различные случаи интерполяции и разработаны реализующие их алгоритмы на языке Python.

В итоге, можно сделать вывод, что равномерное распределение узлов имеет сильные отклонения ближе к граничным узлам - паразитные осцилляции. При глобальной интерполяции с оптимально расположенными узлами данная проблема исчезает.

Также была рассмотрена кусано-линейная интерполяция и ее применение в задаче исследования функции ошибок. Было определено, что она очень проста в реализации, но применима только при малом количестве узлов.

Список использованной литературы

1. **Першин А.Ю.** Лекции по вычислительной математике. [Электронный ресурс] // МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2020. - 145 с.
2. Википедия [Электронный ресурс] // https://en.wikipedia.org/wiki/Error_function - (Дата обращения: 20.03.2020)
3. Википедия [Электронный ресурс] // https://ru.wikipedia.org/wiki/Линейная_интерполяция - (Дата обращения: 20.03.2020)
4. Вики [Электронный ресурс] // https://ru.qwe.wiki/wiki/Chebyshev_nodes - (Дата обращения: 20.03.2020)
5. Вычисление определенных интегралов: базовые алгоритмы [Электронный ресурс] // <https://habr.com/ru/post/420867/> - (Дата обращения: 20.03.2020)