1 Проверка статистических гипотез

$X = (X_1, \ldots, X_n)$ имеет плотность вероятности $p(X, \theta)$ по мере μ, $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^1$

Опр. 1. *Предположение вида $H_0 : \theta \in \Theta_0$, где $\Theta_0 \in \Theta$, называется параметрической гипотезой. Альтернатива $H_1 : \theta \in \Theta_1$, где $\Theta_1 \in \Theta \backslash \Theta_0$*

Опр. 2. *Если $\Theta_0(\Theta_1)$ состоит из одной точи, то гипотеза H_0 (альтернатива H_1) называется простой. В противном случае $H_0(H_1)$ - сложная*

Постановка задачи:
Необходимо построить правило (статистический критерий), который позволяет заключить, согласуется ли наблюдение X с H_0 или нет.
Правило.
Выберем в множестве значений x вектора X (у нас либо $x = \mathbb{R}^n$, либо $x = N_p \subseteq \mathbb{R}^n$) подмножество S. Если $X \in S$, то H_0 отвергается и принимается H_1. Если $X \in \overline{S} = x \backslash S$, то H_0 принимается.

Опр. 3. *Множество S называется критическим множеством или критерием, $\overline{S}$ - область принятия гипотезы.*

Возможны ошибки.
Ошибка 1-го рода - принять H_1, когда верна H_0. Вероятность ошибки 1-го рода $\alpha = \mathrm{P}(H_1|H_0)$ (это условная запись, а не условная вероятность)
Ошибка 2-го рода - принять H_0, когда верна H_1. Вероятность ошибки 2-го рода $\beta = \mathrm{P}(H_0|H_1)$.

Опр. 4. *Мощность критерия S называется функция $W(S, \theta) = W(\theta) := \mathrm{P}_\theta(X \in S)$ (вероятность отвергнуть H_0, когда значение параметра есть θ).*

Тогда

$$\alpha = \alpha(\theta) = W(\theta),\ \theta \in \Theta_0 \tag{1}$$
$$\beta = \beta(\theta) = 1 - W(\theta),\ \theta \in \Theta_1 \tag{2}$$

Обычно H_0 более важна. Поэтому рассматривают критерии такие, что

$$\alpha_0 = W(\theta) = \mathrm{P}_\theta(X \in S) \leq \alpha\ \forall \theta \in \Theta_0$$

Число α называют уровнем значимости критерия. Пишут S_α - критерий уровня α. Обычно α - маленькое число, которое мы задаем сами.

Опр. 5. *Если критерий $S_\alpha^* \in \{S_\alpha\}$ и $\forall \theta \in \Theta_1$ и $\forall S_\alpha$ $W(S_\alpha^*, \theta) \geq W(S_\alpha, \theta)$, то критерий S_α^* называется РНМ-критерием (равномерно наиболее мощным).*

Если $H_0 : \theta = \theta_0,\ H_1 : \theta = \theta_1$ (то есть H_0 и H_1 - простые), то задача отыскания РНМ-критерия заданного уровня α имеет вид:

$$\mathrm{P}_{\theta_0}(X \in S_\alpha^*) \leq \alpha,\ \mathrm{P}_{\theta_1}(X \in S_\alpha^*) \geq \mathrm{P}_{\theta_1}(X \in S_\alpha)\ \forall S_\alpha$$

Положим для краткости: $p_0(x) := p(x, \theta_0),\ \mathrm{E}_0 = \mathrm{E}_{\theta_0},\ p_1(x) = p(x, \theta_1),\ \mathrm{E}_1 = \mathrm{E}_{\theta_1}$
Введем множество

$$S(\lambda) = \{x : p_1(x) - \lambda p_0(x) > 0\}, \lambda > 0$$

Теорема 1 (Лемма Неймана-Пирсона).
Пусть для некоторого $\lambda > 0$ и критерия R (когда X попадает в R, то H_0 отвергается) выполнено:

1. $\mathrm{P}_0(X \in R) \le \mathrm{P}_0(X \in S(\lambda))$

   Тогда:

2. $P_1(X \in R) \le \mathrm{P}_1(X \in S(\lambda))$

3. $P_1(X \in S(\lambda)) \ge \mathrm{P}_0(X \in S(\lambda))$

Замечание.
$X \in S(\lambda) \Leftrightarrow \frac{p_1(x)}{p_0(x)} > \lambda$. Так как $p_1(X)$ и $p_0(X)$ - правдоподобие, то критерий называется критерием отношения правдоподобия Неймана-Пирсона.

Замечание.
Утверждение 3 для $S(\lambda)$ означает, что

$$\mathrm{P}(H_1|H_1) \ge \mathrm{P}(H_1|H_0) \Leftrightarrow W(S(\lambda), \theta_1) \ge W(S(\lambda), \theta_0)$$

Это свойство назыается несмещенностью критерия $S(\lambda)$

Доказательство. Дальше для краткости $S(\lambda) = S$. Пусть $I_R(x) = \begin{cases} 1, x \in R \\ 0, x \in \end{cases}$

$$\mathrm{E}_0 I_R(x) \le E_0 I_S(x) \tag{3}$$

Докажем пункт 2
Верно неравенство

$$I_R(x)[p_1(x) - \lambda p_0(x)] \le I_S(x)[p_1(x) - \lambda p_0(x)]$$

Действительно, если $(p_1(x) - \lambda p_0(x)) > 0$, то $I_S(x) = 1$ и 2 очевидно.
Если же $(p_1(x) - \lambda p_0(x)) \le 0$, то правая часть 2 есть ноль, а левая $\le$ нуля.
Итак, 2 верно:
Интегрируем 2 по $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\mathrm{E}_1 I_R(X) - \lambda \mathrm{E}_0 I_R(X) \le \mathrm{E}_1 I_S(X) - \lambda \mathrm{E}_0 I_S(X)$$

$$\mathrm{E}_1 I_S(X) - \mathrm{E}_1 I_R(X) \ge \lambda \underbrace{[\mathrm{E}_0 I_S(X) - \mathrm{E}_0 I_R(X)]}_{\ge 0} \tag{4}$$

Докажем пункт 3
Пусть $\lambda \ge 1$.
Из определения S $p_1(x) > p_0(x)$ $\forall x \in S$. Отсюда

$$\mathrm{P}_0(X \in S) = \int_{R^n} I_S(X) p_0(x) \mu(dx) \le \int_{R^n} I_S(X) p_1(x) \mu(dx) = \mathrm{P}_1(X \in S)$$

То есть $\mathrm{P}(H_1|H_0) \le \mathrm{P}(H_1|H_1)$
Пусть $\lambda < 1$
Рассмотрим $\overline{S} - \{x : p_1(x) \le \lambda p_0 * x()\}$. При $\lambda < 1$ $p_1(x) < p_0(x)$ при $x \in \overline{S}$. Отсюда

$$\mathrm{P}_1(X \in \overline{S}) = \int_{R^n} I_{\overline{S}}(X) p_0(x) \mu(dx) \le \int_{R^n} I_{\overline{S}}(X) p_1(x) \mu(dx) = \mathrm{P}_1(X \in \overline{S})$$

Откуда $\mathrm{P}_1(X \in S) \ge \mathrm{P}_0(X \in S)$ $\square$

Пример 1.
$X=(X_1,\ldots,X_n),\{X_i\}$ - *н.о.р.*, $X_1\sim N(\theta,\sigma^2)$, *дисперсия* σ^2 *известна. Построим наиболее мощный критерий для проверки* $H_0:\theta=\theta_0$ *против* $H_1:\theta=\theta_1$ *(в случае* $\theta_1>\theta_0$*). Уровень значимости возьмем* α.

1. *Имеем* $p_0=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\right)^n\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n(x_i-\theta_0)^2\right)$, $p_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\right)^n\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n(x_i-\theta_1)^2\right)$ $S(\lambda)=\{x:p_1(x)-\lambda p_0(x)>0\}\Leftrightarrow\exp$
   ******
   $(\theta_0-\theta_1)\sum_{i=1}^n x_i\le\lambda_2\Leftrightarrow\sum_{i=1}^n x_i>\widetilde{\lambda},\ \widetilde{\lambda}(\lambda)$
   *****

2. *Определим* $\widetilde{\lambda}=\widetilde{\lambda}_\alpha$ *из уравнения*
$$\alpha=\mathrm{P}_{\theta_0}(X\in S(\widetilde{\lambda}_\alpha))=\mathrm{P}_{\theta_0}(\sum_{i=1}^n X_i>\widetilde{\lambda}_\alpha)$$
   Тогда
$$\alpha=\mathrm{P}_{\theta_0}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma}\sum_{i=1}^n(X_i-\theta_0))>\frac{\widetilde{\lambda}_\alpha-n\theta_0}{\sqrt{\pi}\sigma}\right)=1-\Phi(\frac{\widetilde{\lambda}_\alpha-n\theta_0}{\sqrt{\pi}\sigma})$$
   так как $\frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma}\sum(X_i-\theta_0)\sim N(0,1)$ *при* H_0.

   Значит $\Phi(\frac{\widetilde{\lambda}_\alpha-n\theta_0}{\sqrt{\pi}\sigma})=1-\alpha$, $\Phi(\frac{\widetilde{\lambda}_\alpha-n\theta_0}{\sqrt{\pi}\sigma})=\xi_{1-\alpha}$ $\xi_{1-\alpha}$ - *квантиль станд. норм. закона уровня* $1-\alpha$. *Окончательно,* $\widetilde{\lambda}_\alpha=n\theta_0+\sqrt{\pi}\sigma\xi_{1-\alpha}$

3. *Положим* $S^*_\alpha=\{x:\sum_{i=1}^n x_i>\widetilde{\lambda}_\alpha\}$
   ****

   Так как S^*_α *не зависит от* θ_1, *то* S^*_α *- РНМ-критерий для* $H_0:\theta=\theta_0$ *против* $H_1^+:\theta>\theta_1$ *Мощность критерия* S^*_α *для* H_0 *при альт.* H_1^+
$$W(\theta,S^*_\alpha)=\mathrm{P}_\theta\left(\sum_i X_i>n\theta_0+\sqrt{n}\sigma\xi_{1-\alpha}\right)=$$
$$=\mathrm{P}_\theta\left(\frac{1}{\sqrt{n}\sigma}\sum_i(X_i-\theta)>\frac{\sqrt{n}(\theta_0-\theta)}{\sigma}+\xi_{1-\alpha}\right)=1-\Phi\left(\xi_{1-\alpha}+\frac{\sqrt{n}(\theta-\theta_0)}{\sigma}\right)$$