1 Предварительные сведения

Опр. 1. *Пусть $\Omega = \{\omega\}$ - произвольное множество, а $\mathcal{F}$ - **σ-алгебра** его подмножеств, то есть система множетсв, таких что:*

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. *Если* $A \in \mathcal{F}$, *то* $\bar{A} := \Omega - A \in \mathcal{F}$
3. *Если* $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, *то* $\bigcup_i A_i \in \mathcal{F}$ *и* $\bigcap_i A_i \in \mathcal{F}$

Пример 1.1. *Система всех подмножеств $\mathcal{F}$ - σ-алгебра*

Пример 1.2. $\{0, \Omega\}$ *- σ-алгебра*

Опр. 2. *Пусть $\Omega = \mathbb{R}$, а $\mathcal{F}$ - наименьшая сигма-алгебра, содержащая все интервалы (α, β). Такая $\mathcal{F}$ обозначается $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ и называется **борелевской сигма-алгеброй**.*

Опр. 3. *Мера μ, определенная на $\mathcal{F}$, называется **сигма-аддитивной**, если это неотрицательная функция, $\mu(A) \geq 0$ для $A \in \mathcal{F}$, и она удовлетворяет условию сигма-аддитивности, то есть:*

$$\mu(\bigcup_i A_i) = \sum_i \mu(A_i),\ A_i \in \mathcal{F}, A_i \cap A_j \underset{i \neq j}{=} \varnothing$$

Опр. 4. *Мера μ называется **сигма-конечной**, если $\exists$ множетсва $A_i \in \mathcal{F}$ такие, что $\bigcup_i A_i = \Omega$ и $\mu(A_i) < \infty$*

Пример 4.1 (Считающая мера)**.** *Пусть Ω - счетное, $\mathcal{F}$ - множество всех подмножеств Ω. Положим для $A \in \mathcal{F}$*

$$\mu(A) := \{\text{числу точек } \Omega, \text{ попавших в } A\}$$

Такая мера называется считающей, она сигма-конечна.

Пример 4.2 (Лебегова мера)**.** *Пусть $\Omega = \mathbb{R}, \mathcal{F} = \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. $\exists!$ мера μ на $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ такая, что*

$$\mu((\alpha, \beta]) = \beta - \alpha$$

Это мера Лебега, она сигма-конечна.

Опр. 5. $(\Omega, \mathcal{F})$ - ***измеримое пространство***. $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ - ***пространство с мерой***.

Опр. 6. *Если $\mu(\Omega) = 1$, то μ - **вероятностная мера**, она обозначается через* P.

Опр. 7. *Тройка $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ - **вероятностное пространство**.*

Опр. 8. *Измеримая функция $\xi : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}.\mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ (то есть $\forall B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})\ \xi^{-1}(B) := (\omega : \xi(\omega) \in B) \in \mathcal{F}$) называется **случайной величной**.*

*Измеримая функция $\phi : (\mathbb{R}.\mathfrak{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}.\mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ называется **борелевской**.*

Опр. 9. *Рассмотрим сл. в. $\xi \in \mathbb{R}^1$. Для $x \in \mathbb{R}^1$ функция $F(x) = \mathrm{P}(\omega : \xi(\omega) \leq x) = \mathrm{P}(\xi \leq x)$ называется **функцией распределения**.*

Опр. 10. *Мера $\mathrm{P}_\xi(A) := \mathrm{P}(\omega : \xi(\omega) \in A),\ A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, называется **распределением** случайной величины ξ.*

Тогда $F(x) = \mathrm{P}_\xi((-\infty, x])$, то есть $\underline{\mathrm{P}_\xi \text{ определяет } F(x)}$.

Обратно: $\mathrm{P}(\alpha < \xi \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$, *и $\exists!$ вероятнаостная мера P_ξ такая, что $\mathrm{P}_\xi((\alpha, \beta]) = F(\beta) - F(\alpha)$, то есть $\underline{F(x) \text{ определяет } \mathrm{P}_\xi}$.*

Опр. 11. *Пусть на $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ задана σ-конечная мера μ. Если $\exists$ борелевская функция $f(x), f(x) \geq 0$, такая что:*

$$\mathrm{P}_\xi(A) = \int_A f(x)\mu(dx)\ \forall A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$$

*то $f(x)$ называется **плотностью вероятностни по мере** μ.*

Если μ - мера Лебега, то $f(x)$ - обычная плотность вероятности сл. в. ξ, введенная на 2-ом курсе. Если же ξ дискретна со значениями $x_1, x_2, \ldots$, а μ - считающая мера, сосредоточенная в этих точках, то, очевидно,

$$\mathrm{P}_\xi(A) = \int_A \mathrm{P}(\xi = x)\mu(dx)\ \forall A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$$

Последнее равенство означает, что у дискретной случайной величины ξ есть плотность вероятности $f(x) = \mathrm{P}(\xi = x),\ x = x_1, x_2, \ldots$ по считающей мере. (При $x \neq x_1, x_2, \ldots$ значения не важны, их можно положить равными 0)

Опр. 12. ***Математическим ожиданием*** *случайной величины ξ называется число*

$$\mathrm{E}\xi = \int_\Omega \xi(\omega)\mathrm{P}(d\omega)$$

(в предположении, что $\int_\Omega |\xi(\omega)|\mathrm{P}(d\omega) < \infty$, иначе говорим, что мат. ожидание $\nexists$)

Если $f(x)$ - плотность вероятности случайной величины ξ по мере μ, а $\phi(x)$ - борелевская функция, то

$$\mathrm{E}\phi(\xi) = \int_\mathbb{R} \phi(x)\mathrm{P}_\xi(dx) = \int_\mathbb{R} \phi(x)f(x)\mu(dx)$$

В частности, если ξ - абсолютно непрерывная случайная величина в терминологии 2-го курса (то есть μ - мера Лебега), то пишем

$$\mathrm{E}\phi(\xi) = \int_\mathbb{R} \phi(x)f(x)dx$$

Разумеется, только в случае $\int_\mathbb{R} |\phi(x)|f(x)dx < \infty$. Если же ξ дискретна со значениями $x_1, x_2, \dots$ и соответствующими вероятностями, то

$$\mathrm{E}\phi(\xi) = \sum_{i \geq 1} \phi(x_i)p_i \text{ (если ряд сходится абсолютно)}$$

Опр. 13. *Обозначим $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^K)$ борелевскую σ-алгебру подмножеств $\mathbb{R}^K$. Вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)^T$ называется* ***k-мерным случайным вектором****, если ξ - измеримое отображение $\xi : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}^K, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^K))$*

Известно: ξ - случайный вектор $\Leftrightarrow$ каждая компонента ξ_i - одномерная случайная величина.

Опр. 14. ***Функция распределения случайного вектора*** *ξ: $F(x_1, \dots, x_K) = \mathrm{P}(\xi_1 \leq x_1, \dots, \xi_K \leq x_K), x_i \in \mathbb{R}$*

Опр. 15. ***Распределение****:* $\mathrm{P}_\xi(A) = \mathrm{P}(\omega : \xi(\omega) \in A),\ A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^K)$.

Опр. 16. ***Плотность вероятности вектора ξ по мере*** *μ (μ определена на элементах $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^K)$) - борелевская функция $f(x), x = (x_1, \dots, x_K)$ такая, что:*

$$\mathrm{P}_\xi(A) = \int_A p(x)\mu(dx),\ \forall A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^K)$$

Опр. 17. *Случайные величины $\{\xi_1, \dots, \xi_K\}$* ***независимы****, если*

$$P(\xi_1 \in A_1, \dots, \xi_K \in A_K) = \prod_{i=1}^K \mathrm{P}(\xi_i \in A_i)\ \forall A_i \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$$

Бесконечная последовательность будет последовательностью независимых величин, если каждая конечная подпоследовательность независима.

Теорема 1 (Необходимые и достаточные условия независимости)**.**
Рассмотрим $x = (x_1, \dots, x_K) \in \mathbb{R}^K$ $F(x) = F_{\xi_1}(x_1)F_{\xi_2}(x_2)\dots F_{\xi_K}(x_K)$ $\forall x \in \mathbb{R}^K$
Если $\exists$ плотность $f(x)$: $f(x) = f_{\xi_1}(x_1)f_{\xi_2}(x_2)\dots f_{\xi_K}(x_K)$ для μ-почти всех $x \in \mathbb{R}^K$

Пусть случайные векторы $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ размера K со значениями в $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^K))$ определены на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Пусть $|\cdot|$ означает Евклидову норму вектора, то есть $|\xi| = \sqrt{\sum_{i=1}^K \xi_i^2}$.

Опр. 18. *Говорят, что последовательность ξ_n сходится* ***слабо*** *к ξ, если для любой непрерывной и ограниченной $g : \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^1$ $\int_{\mathbb{R}^K} g(x)\mathrm{P}_n(dx) \to \int_{R^K} g(x)\mathrm{P}(dx),\ n \to \infty$. Здесь P_n и P - распределения соотвественно ξ_n и ξ. Пишем $\xi_n \xrightarrow{w} \xi,\ n \to \infty$.*