Содержание

1 Асимптотические оптимальные оценки

Пусть сл. векторы $\xi_n, \xi \in \mathbb{R}^K$, и определены на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Пусть функция распределения ξ_n есть $F_n(x)$, хар. ф-ция есть $\phi_n(t)$, а распределение есть Q_n. Для вектора ξ функцию распределения, хар. ф-цию и распределенеие обозначим $F(x)$, $\phi(t)$, Q соответственно.

Опр. 1. *Функция распределения $F_n(x)$ сходится к $F(x)$ при $n \to \infty$ в основном (пишем $F_n(x) \Rightarrow F$), если $F_n(x) \to F(x)$ $\forall x \in C(F)$*

Опр. 2. *Распределение Q_n сходится к распределению Q слабо (пишем $Q_n \xrightarrow{w} Q$), если $\forall$ непреревной и ограниченной $g : \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^1$*

$$\int_{\mathbb{R}^K} g(x) Q_n(dx) \to \int_{\mathbb{R}^K} g(x) Q(dx)$$

или, эквивалентно, $\mathrm{E}g(\xi_n) \to \mathrm{E}g(\xi)$.

Теорема 1. *Следующие условия эквивалентны:*

1. $F_n(x) \Rightarrow F$
2. $Q_n \xrightarrow{w} Q$
3. $\phi_n(t) \to \phi$ $\forall t \in \mathbb{R}^K$

Если выполненое любое из условий $1-3$, будем писать $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ и говорить, что ξ_n сходится к ξ по распределению.

Теорема 2 (О наследовании сходимости)**.** *Пусть сл. векторы $\xi_n,\ \xi \in \mathbb{R}^K,\ H : \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^1$ непрерывная. Тогда:*

1. *Если $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, то $H(\xi_n) \xrightarrow{d} H(\xi)$*
2. *Если $\xi_n \xrightarrow{\mathrm{P}} \xi$, то $H(\xi_n) \xrightarrow{\mathrm{P}} H(\xi)$*

1.1 Лемма Слуцкого

Пусть $\xi_n, \xi, \eta_n, a \in \mathbb{R}^1, \xi_n \xrightarrow{d} \xi$, а $\eta_n \xrightarrow{\mathrm{P}} a$. Тогда:

1. $\xi_n + \eta_n \xrightarrow{d} \xi + a$
2. $\xi_n \eta_n \xrightarrow{d} a\xi$

Доказательство. Достаточно показать, что вектор

$$(\xi_n, \eta_n)^T \xrightarrow{d} (\xi, a)^T \tag{1}$$

Действительно, если (1) верно, то при $H(x,y) = x + y$ в силу Теоремы 2 получаем пункт (1) леммы, а при $H(x,y) = xy$ - пункт (2).

Для доказательства (1), проверим, что хар. ф-ция вектора $(\xi_n, \eta_n)^T$ сходится к хар. функции вектора $(\xi, \eta)^T$. Имеем:

$$\left|\mathrm{E}e^{it\xi_n + is\eta_n} - \mathrm{E}e^{it\xi + isa}\right| \leq \left|\mathrm{E}e^{it\xi_n + is\eta_n} - \mathrm{E}e^{it\xi_n + isa}\right| + \left|\mathrm{E}e^{it\xi_n + isa} - \mathrm{E}e^{it\xi + isa}\right| = \alpha_n + \beta_n$$

$$\alpha_n \le \mathrm{E}\left|e^{it\xi_n}(e^{it\eta_n+isa})\right| = \mathrm{E}\left|e^{it\eta_n+isa}\right| = \mathrm{E}g(\eta_n),\ g(x) \overset{\text{def}}{=} \left|e^{isx}-e^{isa}\right|$$

Ф-ция g(x) непрерывна и ограничена, а т.к. $\eta_n \xrightarrow{d} a$, то в силу Теоремы 2 $\mathrm{E}g(\eta_n) \to \mathrm{E}g(a) = 0$ Итак, $\alpha \to 0$.

$$\beta_n = \left|\mathrm{E}e^{isa}(e^{it\xi_n}-e^{it\xi})\right| = \left|e^{isa}\mathrm{E}(e^{it\xi_n}-e^{it\xi})\right| = \left|\mathrm{E}(e^{it\xi_n}-e^{it\xi})\right| \to 0$$

т.к. $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ и $\phi_n(t) \to \phi(t)$. □

Пусть наблюедние $X \sim P_\theta,\ \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^K$, а $\widehat{\theta}_n$ - оценка θ

Опр. 3. *Если $\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \Sigma(\theta))\ \forall\theta \in \Theta$ и коварицционная матрица $0 < \Sigma(\theta) < \infty$, то $\widehat{\theta}_n$ называется асимптотической нормальной оценкой.*

Опр. 4. *Если $\widehat{\theta}_n \xrightarrow{\mathrm{P}} \theta\ \forall\theta \in \Theta$, то $\widehat{\theta}_n$ называется состоятельной оценкой.*

Замечание 1. *Дальше $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^1$, то есть θ и $\widehat{\theta}_n$ - скаляры.*

Если $\widehat{\theta}_n$ - состоятельная оценка θ, то при больших и $\widehat{\theta}_n \approx \theta$ с вероятностью, близкой к единице.

Если $\widehat{\theta}_n$ - асимптотическая нормальная оценка θ (так как θ и $\widehat{\theta}_n$ скаляры: $\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2(\theta))\ 0 < \sigma^2 < \infty,\ \forall\theta \in \Theta$), то:

1. $\widehat{\theta}_n$ - состоятельная оценка θ, так как $\widehat{\theta}_n - \theta = n^{-1/2}\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$ в силу п. (2) леммы Слуцкого.

2. Скорость сходимости $\widehat{\theta}_n$ к θ есть $O(\sqrt{n})$

3. При больших n со сл. в. $\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta)$ можно обращаться (с осторожностью!) как с Гауссовской величиной.

   Например, пусть дисперсия предельного Гауссовского закона $\sigma^2(\theta)$ будет непреревной ф-цией θ. Тогда

$$\frac{\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta)}{\sigma(\widehat{\theta}_n)} = \underbrace{\frac{\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta)}{\sigma(\theta)}}_{\xrightarrow{d} N(0,1)} \underbrace{\frac{\sigma(\theta)}{\sigma(\widehat{\theta}_n)}}_{\xrightarrow{\mathrm{P}} 1} \xrightarrow{d} \eta \sim N(0,1)$$

   в силу п. 2 леммы Слуцкого. Значит,

$$\mathrm{P}_\theta\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta)}{\sigma(\widehat{\theta}_n)}\right| < \xi_{1-\alpha/2}\right) \to \mathrm{P}(|\eta| < \xi_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

   То есть примерно с вероятностью $1-\alpha$ выполнено неравенство, или эквивалентно раскроем по модулю

$$\underbrace{\widehat{\theta}_n - n^{-1/2}\sigma(\widehat{\theta}_n)\xi_{1-\alpha/2} < \theta < \widehat{\theta}_n + n^{-1/2}\sigma(\widehat{\theta}_n)\xi_{1-\alpha/2}}_{\text{Асимптотический доверительный интервал уровня } 1-\alpha}$$

4. Асимптотические Гауссовские оценки можно сравнивать между собой:
Если $\sqrt{n}(\widehat{\theta}_{i,n} - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_i^2(\theta))$, $i = 1, 2, \ldots$, то можно посчитать асимптотическую относительную эффективность (АОЭ):

$$e_{1,2} = \frac{\sigma_2^2(\theta)}{\sigma_1^2(\theta)}$$

Напомним, $e_{1,2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n'(x)}{n(x)}$, где $\sqrt{n}(\widehat{\theta}_{1,n} - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_1^2(\theta))$ и $\sqrt{n}(\widehat{\theta}_{2,n'} - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_1^2(\theta))$.

Вопрос: Есть ли такая оценка θ_n^*, что АОЭ $e_{\theta_n^*, \widehat{\theta}_n}(\theta) \geq 1$ $\forall \widehat{\theta}_n$ и всех $\theta \in \Theta$, то есть эффективнее всех остальных?

Если да, то θ_n^* требует не больше наблюдений, чем любая $\widehat{\theta}_n$, чтобы достичь одинаковой с $\widehat{\theta}_n$ точности. Ясно, что пределеная дисперсия $\sqrt{n}(\theta_n^* - \theta)$ должна быть не больше асимптотической дисперсии $\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta)$ для любой асимптотической Гауссовской оценки $\widehat{\theta}_n$. Но какова самая маленькая асимптотическая дисперсия у $\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta)$?

1.2 Теорема Бахадура

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ - н. о. р. сл. в., X_1 имеет плотность вероятности $f(x, \theta)$, $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^1$, по мере ν. Пусть выполнены следующие условия:

1. Θ - интервал.

2. Носитель $N_f = \{x : f(x, \theta) > 0\}$ не зависит от θ.

3. $\forall x \in N_f$ плотность $f(x, \theta)$ дважды непрерывно дифференцируема по θ

4. Интеграл $\int f(x, \theta)\nu(dx)$ можно дважды дифференцировать по θ, внося знак дифференцирования под знак интеграла.

5. Информация Фишера $0 < i(\theta) < \infty$ $\forall \theta \in \Theta$

6. $\left|\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln(f(x, \theta))\right| \leq M(x)$ $\forall x \in N_f$, $\theta \in \Theta$, $\mathrm{E}_\theta M(X_1) < \infty$

Тогда, если $\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2(\theta))$, то $\sigma^2(\theta) \geq \frac{1}{i(\theta)}$ всюду за исключением множества Лебеговой меры нуль.

Замечание 2. *Если вдобавок $\sigma^2(\theta)$ и $i(\theta)$ непрерывны, то $\sigma^2(\theta) \geq \frac{1}{i(\theta)}$ при всех $\theta \in \Theta$.*

Доказательство. Без доказательства. $\square$

Опр. 5. *Если $\theta, \widehat{\theta}_n \in \mathbb{R}^1$ и $\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \frac{1}{i(\theta)})$, $n \to \infty$, $\forall \theta \in \Theta$, причем $0 < i(\theta) < \infty$, то $\widehat{\theta}_n$ называется* ***асимптотически эффективной оценкой****.*

Вопрос: Вообще можно ли найти такую оценку $\widehat{\theta}_n$? Да

Дальше $X = (X_1, \dots, X_n),\ X \sim \mathrm{P}_\theta,\ \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^1$. Условие (A):

1. Θ - интервал, $\mathrm{P}_{\theta_1} \neq P_{\theta_2}$ при $\theta_1 \neq \theta_2$.
2. $X_1, \dots, X_n$ - независимые одинаково распределенные случайные величины
3. X_1 имеет плотность вероятности $f(x, \theta)$ по мере ν
4. Носитель $N_f = \{x : f(x, \theta) > 0\}$ не зависит от θ.
5. Плотность вектора X есть $p(x, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$.

Опр. 6. *Функция $p(X, \theta)$ как функция θ при фиксированном X называется* ***правдоподобием*** *функции.*

$$L_n(X, \theta) = \ln p(X, \theta) = \sum_{i=1}^n \ln f(X_i, \theta)$$

называется логарифмическим правдоподобием.

Пусть θ_0 будет истинное значение параметра.

Лемма 1 (Неравенство Йенсена)**.** *Пусть $g(x)$ выпукла книзу борелевская функция,* $\mathrm{E}\,|\xi| < \infty$*,* $\mathrm{E}\,|g(\xi)| < \infty$*. Тогда $g(\mathrm{E}\xi) \leq \mathrm{E}g(\xi)$. Если ξ не является почти наверное константой и g строго выпукла, то неравенство строгое.*

Теорема 3 (Экстремальное свойство правдоподобия)**.** *Пусть выполнено Условие (A). Пусть $E_{\theta_0} |\ln f(X_1, \theta)| < \infty,\ \forall \theta \in \Theta$. Тогда*

$$\mathrm{P}_{\theta_0}(p(X, \theta_0) > p(X, \theta)) \to 1,\ n \to \infty,\ \theta_0 \neq \theta$$

Доказательство.

$$p(X, \theta_0) > p(X, \theta) \Leftrightarrow \ln p(X, \theta_0) > \ln p(X, \theta) \Leftrightarrow$$

$$\eta_n \overset{\text{def}}{=} n^{-1} \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{f(X_i, \theta)}{f(X_i, \theta_0)}\right) < 0$$

То есть надо показать, что $\mathrm{P}_{\theta_0}(\eta_n < 0) \to 1$. Но по слабому закону больших чисел:

$$\eta_n = n^{-1} \sum \ln\left(\frac{f(X_i, \theta)}{f(X_i, \theta_0)}\right) \xrightarrow{\mathrm{P}} E_{\theta_0} \ln\left(\frac{f(X_1, \theta)}{f(X_1, \theta_0)}\right)$$

Возьмем функцию $-\ln x$ - строго выпукла вниз и $\frac{f(X_1,\theta)}{f(X_1,\theta_0)}$ не является п.н. константой (так как иначе если плотности п.н. совпадают, то и распределения при разных значениях совпадают, что противоречит Условию(A)(1)).

В силу неравенства Йенсена:

$$\mathrm{E}_{\theta_0} \ln \frac{f(X_1, \theta)}{f(X_1, \theta_0)} < \ln \mathrm{E}_{\theta_0} \frac{f(X_1, \theta)}{f(X_1, \theta_0)} = \ln \int_{N_f} \frac{f(x, \theta)}{f(x, \theta_0)} f(x, \theta_0) \nu(dx) = \ln 1 = 0$$

Но если η_n сходится по вероятности к отрицательному числу, то $P_{\theta_0}(\eta_n < 0) \to 1$ $\square$

В силу теоремы 3 естественно брать оценкой то значение θ, которое максимизирует $p(X, \theta)$ при данном X

Опр. 7. *Случайная величина $\widehat{\theta}_n \in \Theta$ называется* ***оценкой максимального правдоподобия (о.м.п.)****, если $p(X, \widehat{\theta}_n) = \max_{\theta \in \Theta} p(X, \theta)$, или эквивалентно $L_n(X, \widehat{\theta}_n) = max_{\theta \in \Theta} L_n(X, \theta)$*

Итак, о.м.п $\widehat{\theta}_n = \arg\max_{\theta \in \Theta} L_n(X, \theta)$.

Если в $\forall \theta \in \Theta$ максимум не достигается, то о.м.п. не существует.

Если Θ - интервал, $L_n(X, \theta)$ - гладкая по θ функция, то θ удовлетворяет уравнению правдоподобия

$$\frac{\partial}{\partial \theta} L_n(X, \theta) = 0 \tag{2}$$

Теорема 4 (О состоятельности решения уравнения правдоподобия)**.** *Пусть выполнено Условие (A). Пусть $\forall x \in N_f$ $\exists$ непрерывная производная $f'_\theta(x, \theta)$. Тогда уравнение (2) с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \to \infty$ имеет решение $\in \Theta$. При этом среди всех таких решений есть такой корень $\widehat{\theta}_n$, что он является состоятельнаой оценкой θ_0*

Доказательство. Пусть $S_n = \{\omega\}$, при которых уравнение (2) имеет решение для $\theta \in \Theta$. Тогда теорема 4 утверждает:

1. $P_{\theta_0}(S_n) \to 1$.

2. Существует такое решение $\widehat{\theta}_n \in \Theta$, что

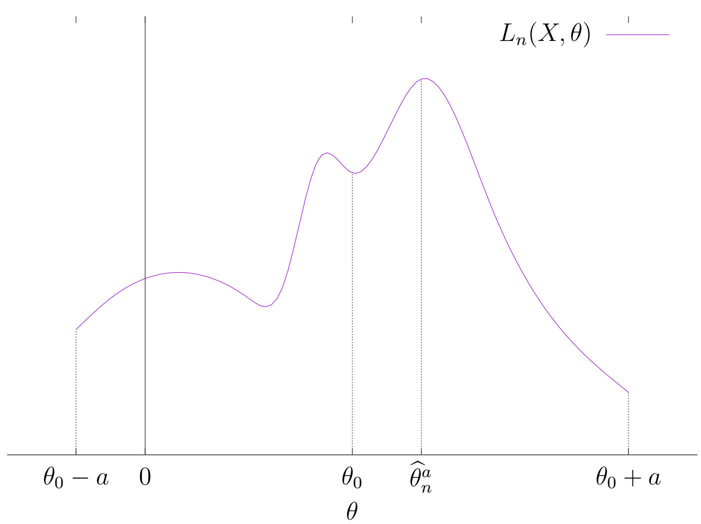
$$P_{\theta_0}\left(\left|\widehat{\theta}_n - \theta_0\right| < \varepsilon, S_n\right) \to 1, \; n \to \infty, \; \forall \varepsilon > 0$$

Докажем пункт 1: Выберем малое $a > 0$ так, что на $(\theta_0 - a, \theta_0 + a) \subseteq \Theta$. Пусть

$$S_n^a = \{\omega : L_n(X, \theta_0) > L_n(X, \theta_0 - a), L_n(X, \theta_0) > L_n(X, \theta_0 + a)\}$$

В силу теоремы 3 $\mathrm{P}_{\theta_0}(S_n^a) \to 1$

При $\omega \in S_n^a$ функция $L_n(X, \theta)$ имеет локальный максимум $\widehat{\theta}_n^a$ на интервале $(\theta_0 - a, \theta_0 + a)$



Значит, $\frac{\partial}{\partial \theta} L_n(X, \widehat{\theta}_n^a) = 0$. Тогда $\mathrm{P}_{\theta_0}(S_n) \geq \mathrm{P}_{\theta_0}(S_n^a) \to 1$, так как $S_n^a \subseteq S_n$, и пункт 1 доказан.

Докажем пункт 2: $\forall n$ при $\omega \in S_n$ может сущестовать целое множество корней $\{\theta_n^*\}$. Выберем в этом множестве корень $\widehat{\theta}_n$, ближайший к θ_0. Это можно сделать, так как функция

$\frac{\partial}{\partial\theta}L_n(x,\theta)$ непрерывна по θ, и последовательность корней есть корень. Этот корень $\widehat{\theta}_n$ и есть состоятельная оценка θ. Покажем это:

$\forall$ малого $\varepsilon > 0$:

$$\mathrm{P}_{\theta_0}(\left|\widehat{\theta}_n - \theta_0\right| < \varepsilon, S_n) \geq \mathrm{P}_{\theta_0}(\left|\widehat{\theta}_n^{\varepsilon} - \theta_0\right| < \varepsilon, S_n^{\varepsilon}) \tag{3}$$

Так как $S_n^{\varepsilon} \subseteq S_n,\ (\omega : \left|\widehat{\theta}_n^{\varepsilon} - \theta_0\right| < \varepsilon) \subseteq (\omega : \left|\widehat{\theta}_n - \theta_0\right| < \varepsilon)$

Но $\mathrm{P}_{\theta_0}(\left|\widehat{\theta}_n^{\varepsilon} - \theta_0\right| < \varepsilon, S_n^{\varepsilon}) \underset{\text{т.к. события из } S_n^{\varepsilon} \text{ лежат в } \left|\widehat{\theta}_n^{\varepsilon} - \theta_0\right| < \varepsilon}{=} \mathrm{P}_{\theta_0}(S_n^{\varepsilon}) \to 1$, значит в силу (3)

$$\mathrm{P}_{\theta_0}(\left|\widehat{\theta}_n - \theta_0\right| < \varepsilon, S_n) \to 1$$

$\square$

Замечание 3. *Пусть*

$$\theta_n^* = \begin{cases} \textit{сост. корню уравнения правдоподобия, если он сущ.} \\ \theta',\ \theta' \in \Theta, \textit{иначе} \end{cases}$$

Тогда случайная величина θ_n^* всегда определена, и $\theta_n^* \xrightarrow{\mathrm{P}} \theta_0$, так как

$$\mathrm{P}(|\theta_n^* - \theta_0| < \varepsilon) = \mathrm{P}(\left|\widehat{\theta}_n - \theta_0\right| < \varepsilon, S_n) + \mathrm{P}(|\theta' - \theta_0| < \varepsilon, \overline{S}_n) \to 1$$

Ясно, что

$$\frac{\partial}{\partial\theta}L_n(X, \theta_n^*) = \overline{\overline{o}}_p(1) \tag{4}$$

Так как производная отлична от нуля только на $\overline{S}_n$.

Будем называть θ_n^* ***обобщенным состоятельным корнем уравнения правдоподобия***

Теорема 5 (Об асимптотической эффективности состоятельности решения)**.** *Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$, $\{X_i\}$ - н.о.р. сл.в., и удовлетворяются предположения Теоремы Бахадура, в которых условия 3 и 6 заменены на предположения о третьей, а не второй производной. То есть*

$$\left|\frac{\partial^3}{\partial\theta^3}\ln f(x,\theta)\right| \leq M(x)\ \forall x \in N_f,\ \forall\theta \in \Theta,\ \mathrm{E}_{\theta_0}M(X_1) < \infty$$

Тогда, если θ_n^* - обобщенный состоятельный корень из теоремы 4, то

$$\sqrt{n}(\theta_n^* - \theta_0) \xrightarrow{d} N(0, \frac{1}{i(\theta_0)})$$

То есть θ_n^* - асимптотическая эффективная оценка.

Доказательство. Будем обозначать $\frac{\partial}{\partial\theta}L_n(X,\theta), \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}L_n(X,\theta), \ldots$ через $L_n'(\theta), L_n^{(2)}(\theta), \ldots$.

Для фиксированного X в силу формулы Тейлора и последнего замечания:

$$\overline{\overline{o}}_p(1) = L_n'(\theta_n^*) = L_n'(\theta_0) + L_n^{(2)}(\theta_0)(\theta_n^* - \theta_0) + \frac{1}{2}L_n^{(3)}(\widetilde{\theta}_n)(\theta_n^* - \theta_0)^2,\ \widetilde{\theta}_n \in (\theta_0, \theta_n^*)$$

Отсюда,

$$\sqrt{n}(\theta_n^* - \theta_0) = -\frac{n^{-1/2}L_n'(\theta_0) + \bar{\bar{o}}_p(1)}{n^{-1}(L_n^{(2)}(\theta_0) + \frac{1}{2}L_n^{(3)}(\widetilde{\theta}_n)(\theta_n^* - \theta_0))} \tag{5}$$

Рассмотрим числитель (5) и покажем, что

$$n^{-1/2}L_n'(\theta_0) = n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}\frac{f_\theta'(X_i,\theta_0)}{f(X_i,\theta_0)} \xrightarrow{d} \xi \sim N(0, i(\theta_0)) \tag{6}$$

Действительно,

$$\mathrm{E}_{\theta_0}\frac{f_{\theta_0}'(X_1,\theta_0)}{f(X_i,\theta_0)} = \int_{N_f}\frac{f_\theta'(x,\theta_0)}{f(x,\theta_0)}f(x,\theta_0)\nu(dx) = 0$$

$$\mathrm{D}_{\theta_0}\frac{f_{\theta_0}'(X_1,\theta_0)}{f(X_i,\theta_0)} = \mathrm{E}_{\theta_0}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X_1,\theta_0)\right)^2 - \underbrace{\left(\mathrm{E}_{\theta_0}\frac{f_{\theta_0}'(X_1,\theta_0)}{f(X_i,\theta_0)}\right)^2}_{=\ 0} \underset{\text{по опр.}}{=} i(\theta_0)$$

Так как f, f' - борелевские функции, то случайные величины $\{\frac{f_\theta'(X_i,\theta_0)}{f(X_i,\theta_0)},\ i = 1,\dots,n\}$ - н.о.р., соотношение (6) следует из Центр. пред. Теоремы.

В силу Леммы Слуцкого числитель (5) $\xrightarrow{\mathrm{P}} N(0, i(\theta_0))$

Теперь рассмотрим знаменатель (5):

$$n^{-1}L_n^{(2)}(\theta_0) = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{f_\theta^{(2)}(X_i,\theta_0)}{f(X_i,\theta_0)} - \left(\frac{f_\theta'(X_i,\theta_0)}{f(X_i,\theta_0)}\right)^2\right] \xrightarrow{\mathrm{P}} -i(\theta) \tag{7}$$

Действительно, в силу ЗБЧ

$$n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{f_\theta^{(2)}(X_i,\theta_0)}{f(X_i,\theta_0)} \xrightarrow{\mathrm{P}} \mathrm{E}_{\theta_0}\frac{f_\theta^{(2)}(X_1,\theta_0)}{f(X_1,\theta_0)} = \int_{N_f}\frac{f_\theta^{(2)}(x,\theta_0)}{f(x,\theta_0)}f(x,\theta_0)\nu(dx) = 0$$

$$n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{f_\theta'(X_i,\theta_0)}{f(X_i,\theta_0)}\right)^2 \xrightarrow{\mathrm{P}} E_{\theta_0}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X_1,\theta_0)\right)^2 = i(\theta)$$

Применяя лемму Слуцкого, получим (7).

Далее рассмотрим второе слагаемое в знаменете (5)

$$\left|\frac{1}{2n}L_n^{(3)}(\widetilde{\theta}_n)(\theta_n^* - \theta_0)\right| \le \frac{1}{2}\left|\theta_n^* - \theta_0\right| n^{-1}\sum_{i=1}^{n}M(X_i) \xrightarrow[\text{л. Слуцкого}]{\mathrm{P}} 0 \tag{8}$$

В силу (7) и (8) и Леммы Слуцкого знаменатель (5) сходится по вероятности к $-i(\theta_0)$

Значит, что вся дробь (5) сходится по распределению к $\frac{1}{i(\theta_0)}\xi \sim N(0, \frac{1}{i(\theta_0)})$ $\square$

Оценки максимального правдоподобия для векторого параметра

Пусть $X = (X_1,\dots,X_n)$ - н.о.р., $X_1 \sim f(x,\theta),\ \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k,\ \Theta$ - открытое множество

Тогда логарифмические правдоподобие имеет вид

$$L_n(X,\theta) = \sum_{i=1}^{n}\ln f(X_i,\theta)$$

Система уравнений правдоподобия

$$\frac{\partial L_n(X,\theta)}{\partial \theta_i} = 0,\ i = 1, 2, \ldots, k$$

При условиях регулярности, похожих на условия теоремы 5, показыватся:

1. С вероятностью, стремящейся к единице при $n \to \infty$, система уравнений (1.2) имеет такое решение $\widehat{\theta}_n \in \Theta$, что $\widehat{\theta}_n$ сходится к истинному значению θ_0.

2. Соответствующая оценка θ_n^* асимптотически нормальна. А именно

$$\sqrt{n}(\theta_n^* - \theta_0) \xrightarrow{d} N(0, I^{-1}(\theta_0)),\ n \to \infty$$

Здесь $I(\theta) > 0$ - матрица информации Фишера, то есть

$$I(\theta) = (I_{ij}(\theta)),\ I_{ij}(\theta) = \mathrm{E}_\theta \left\{ \frac{\partial \ln f(X,\theta)}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial \ln f(X,\theta)}{\partial \theta_j} \right\}$$

Пример. *$X = (X_1, \ldots, X_n)$, где $\{X_i\}$ - н.о.р., $X_1 \sim N(0, \sigma^2)$, $a < \theta < b$, a и b - известные конечные числа, дисперсия σ^2 известна. Построим асимптотически эффективную оценку θ_n^* для θ.*

Здесь $p(x,\theta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\theta)^2}$, значит

$$L_n(X,\theta) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (X_i - \theta)^2$$

Уравнение правдоподобия имеет вид

$$\frac{\partial L_n(X,\theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n (X_i - \theta) = 0$$

Его решение существует и единственно, это $\overline{X}$, причем в т. $\theta = \overline{X}$ $L_n(X,\theta)$ достигает максимума, так как $\frac{\partial^2 L_n(X,\overline{X})}{\partial \theta^2} = -\frac{1}{\sigma^2} < 0$

Таким образом, если $a < \overline{X} < b$, то о.м.п. существует и равна $\overline{X}$, в противном случае о.м.п. не существует. Если положить

$$\theta_n^* = \begin{cases} \overline{X},\ a < \overline{X} < b \\ \frac{a+b}{2},\ \overline{X} \notin (a,b) \end{cases} \tag{9}$$

То в силу теоремы 5 (её условия выполнены, проверьте сами), θ_n^* - асимптотически эффективная оценка, то есть

$$\sqrt{n}(\theta_n^* - \theta_0) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2) \tag{10}$$

Напомним, что в этой модели $i(\theta) = \frac{1}{\sigma^2}$. Справедливость (10) с θ_n^* из (9) легко проверить непосредственно.

Пример. *Если Θ - компакт (то есть отрезок $[a,b]$), то о.м.п. существует всегда, так как непрерывная функция на отрезке всегда достигает своего максимума. Значит значение о.м.п.*

$$\theta_n^* = \begin{cases} \overline{X},\ a < \overline{X} < b \\ a,\ \overline{X} < a \\ b,\ \overline{X} > b \end{cases}$$

Но на границах теряется асимптотическая Гауссовость.

2 Проверка статистических гипотез

$X = (X_1, \ldots, X_n)$ имеет плотность вероятности $p(X, \theta)$ по мере μ, $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^1$

Опр. 1. *Предположение вида $H_0 : \theta \in \Theta_0$, где $\Theta_0 \in \Theta$, называется параметрической гипотезой. Альтернатива $H_1 : \theta \in \Theta_1$, где $\Theta_1 \in \Theta \backslash \Theta_0$*

Опр. 2. *Если $\Theta_0(\Theta_1)$ состоит из одной точки, то гипотеза H_0 (альтернатива H_1) называется простой. В противном случае $H_0(H_1)$ - сложная*

Постановка задачи:

Необходимо построить правило (статистический критерий - *test*), который позволяет заключить, согласуется ли наблюдение X с H_0 или нет.

Правило.

Выберем в множестве значений x вектора X (у нас либо $x = \mathbb{R}^n$, либо $x = N_p \subseteq \mathbb{R}^n$ - носитель плотности) подмножество S. Если $X \in S$, то H_0 отвергается и принимается H_1. Если $X \in \overline{S} = X \backslash S$, то H_0 принимается.

Опр. 3. *Множество S называется критическим множеством или критерием, $\overline{S}$ - область принятия гипотезы.*

Опр. 4. ***Ошибка 1-го рода*** *- принять H_1, когда верна H_0. Вероятность ошибки 1-го рода $\alpha = \mathrm{P}(H_1|H_0)$ (это условная запись, а не условная вероятность).* ***Ошибка 2-го рода*** *- принять H_0, когда верна H_1. Вероятность ошибки 2-го рода $\beta = \mathrm{P}(H_0|H_1)$.*

Опр. 5. ***Мощность критерия*** *S называется функция $W(S, \theta) = W(\theta) \stackrel{def}{=} \mathrm{P}_\theta(X \in S)$ (вероятность отвергнуть H_0, когда значение параметра есть θ).*

Тогда

$$\alpha = \alpha(\theta) = W(\theta),\ \theta \in \Theta_0;$$
$$\beta = \beta(\theta) = 1 - W(\theta),\ \theta \in \Theta_1$$

Опр. 6. *Обычно H_0 более важна. Поэтому рассматривают критерии такие, что*

$$\alpha(\theta) = W(\theta) = \mathrm{P}_\theta(X \in S) \leq \alpha\ \forall \theta \in \Theta_0$$

Число α называют ***уровнем значимости критерия****. Пишут S_α - критерий уровня α. Обычно α - маленькое число, которое мы задаем сами.*

Опр. 7. *Если критерий $S^*_\alpha \in \{S_\alpha\}$ и $\forall \theta \in \Theta_1$ и $\forall S_\alpha$ $W(S^*_\alpha, \theta) \geq W(S_\alpha, \theta)$, то критерий S^*_α называется* ***РНМ-критерием (равномерно наиболее мощным)****.*

Если $H_0 : \theta = \theta_0,\ H_1 : \theta = \theta_1$ (то есть H_0 и H_1 - простые), то задача отыскания РНМ-критерия заданного уровня α имеет вид:

$$\mathrm{P}_{\theta_0}(X \in S^*_\alpha) \leq \alpha,$$
$$\mathrm{P}_{\theta_1}(X \in S^*_\alpha) \geq \mathrm{P}_{\theta_1}(X \in S_\alpha)\ \forall S_\alpha$$

Положим для краткости: $p_0(x) \stackrel{\text{def}}{=} p(x, \theta_0),\ \mathrm{E}_0 = \mathrm{E}_{\theta_0},\ p_1(x) = p(x, \theta_1),\ \mathrm{E}_1 = \mathrm{E}_{\theta_1}$

Введем множество

$$S(\lambda) = \{x : p_1(x) - \lambda p_0(x) > 0\}, \lambda > 0$$

2.1 Лемма Неймана-Пирсона

Пусть для некоторого $\lambda > 0$ и критерия R (когда X попадает в R, то H_0 отвергается) выполнено:

1. $\mathrm{P}_0(X \in R) \leq \mathrm{P}_0(X \in S(\lambda))$

   Тогда:

2. $P_1(X \in R) \leq \mathrm{P}_1(X \in S(\lambda))$

3. $P_1(X \in S(\lambda)) \geq \mathrm{P}_0(X \in S(\lambda))$

Замечание 1. *$X \in S(\lambda) \Leftrightarrow \frac{p_1(x)}{p_0(x)} > \lambda$. Так как $p_1(X)$ и $p_0(X)$ - правдоподобие, то критерий называется критерием отношения правдоподобия Неймана-Пирсона.*

Замечание 2. *Утверждение 3 для $S(\lambda)$ означает, что*

$$\mathrm{P}(H_1\,|H_1) \geq \mathrm{P}(H_1|\,H_0) \Leftrightarrow W(S(\lambda), \theta_1) \geq W(S(\lambda), \theta_0)$$

Это свойство называется несмещенностью критерия $S(\lambda)$

Доказательство. Дальше для краткости $S(\lambda) = S$. Пусть $I_R(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{R} \\ 0, x \notin \mathbb{R} \end{cases}$, $I_S(x)$ определяем аналогично. Тогда Условие (A) имеет вид:

$$\mathrm{E}_0 I_R(x) \leq \mathrm{E}_0 I_S(x) \tag{1}$$

Докажем пункт 2: Верно неравенство

$$I_R(x)[p_1(x) - \lambda p_0(x)] \leq I_S(x)[p_1(x) - \lambda p_0(x)] \tag{2}$$

Действительно, если $(p_1(x) - \lambda p_0(x)) > 0$, то $I_S(x) = 1$ и (2) очевидно.
Если же $p_1(x) - \lambda p_0(x) \leq 0$, то правая часть (2) есть ноль, а левая $\leq$ нуля.
Итак, (2) верно: интегрируем это неравенство по $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\mathrm{E}_1 I_R(X) - \lambda \mathrm{E}_0 I_R(X) \leq \mathrm{E}_1 I_S(X) - \lambda \mathrm{E}_0 I_S(X)$$

$$\mathrm{E}_1 I_S(X) - \mathrm{E}_1 I_R(X) \geq \lambda \underbrace{[\mathrm{E}_0 I_S(X) - \mathrm{E}_0 I_R(X)]}_{\geq 0 \text{ по условию (1)}} \tag{3}$$

В силу (1), (3) и условия $\lambda > 0$ получаем:

$$E_1 I_S(X) \geq E_1 I_{\mathbb{R}}(X)$$

Докажем пункт 3: Пусть $\lambda \geq 1$. Из определения S $p_1(x) > p_0(x)$ $\forall x \in S$. Отсюда

$$\mathrm{P}_0(X \in S) = \int_{R^n} I_S(X) p_0(x) \mu(dx) \leq \int_{R^n} I_S(X) p_1(x) \mu(dx) = \mathrm{P}_1(X \in S)$$

То есть $\mathrm{P}(H_1\,|H_0) \leq \mathrm{P}(H_1|\,H_1)$

Пусть $\lambda < 1$. Рассмотрим $\overline{S} = \{x : p_1(x) \leq \lambda p_0(x)\}$. При $\lambda < 1$ $p_1(x) < p_0(x)$ при $x \in \overline{S}$. Отсюда

$$\mathrm{P}_1(X \in \overline{S}) = \int_{R^n} I_{\overline{S}}(X) p_1(x) \mu(dx) \leq \int_{R^n} I_{\overline{S}}(X) p_0(x) \mu(dx) = \mathrm{P}_0(X \in \overline{S})$$

То есть $1 - \mathrm{P}_1(X \in S) \leq 1 - \mathrm{P}_0(X \in S)$, откуда $\mathrm{P}_1(X \in S) \geq \mathrm{P}_0(X \in S)$ $\square$

Пример. $X = (X_1, \dots, X_n), \{X_i\}$ - *н.о.р.,* $X_1 \sim N(\theta, \sigma^2)$, *дисперсия* σ^2 *известна. Построим наиболее мощный критерий для проверки* $H_0 : \theta = \theta_0$ *против* $H_1 : \theta = \theta_1$ *(в случае* $\theta_1 > \theta_0$*). Уровень значимости возьмем* α.

1. *Имеем*

$$p_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i - \theta_0)^2\right\},\ p_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i - \theta_1)^2\right\};$$

$$S(\lambda) = \{x : p_1(x) - \lambda p_0(x) > 0\} \underset{\text{делим на } p_0}{\Leftrightarrow} \exp\left\{\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n \left[(x_i - \theta_1)^2 - (x_i - \theta_0)^2\right]\right\} > \lambda \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \left[(x_i - \theta_1)^2 - (x_i - \theta_0)^2\right] < \lambda_1 = -2\sigma^2 \ln \lambda \underset{\text{арифметика}}{\Leftrightarrow} (\theta_0 - \theta_1)\sum_{i=1}^n x_i \le \lambda_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i > \widetilde{\lambda},\ \widetilde{\lambda}(\lambda, n, \sigma^2, \theta_0, \theta_1)$$

Итак,

$$S(\lambda) = \left\{x : \sum_{i=1}^n x_i > \widetilde{\lambda}\right\} \text{ при некотором } \widetilde{\lambda}$$

2. *Определим* $\widetilde{\lambda} = \widetilde{\lambda}_\alpha$ *из уравнения*

$$\alpha = \mathrm{P}_{\theta_0}(X \in S(\widetilde{\lambda}_\alpha)) = \mathrm{P}_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^n X_i > \widetilde{\lambda}_\alpha\right)$$

Преобразуем левую сумму в стандартную Гауссовскую величину. Тогда

$$\alpha = \mathrm{P}_{\theta_0}\left(\frac{1}{\sqrt{n}\sigma}\sum_{i=1}^n (X_i - \theta_0) > \frac{\widetilde{\lambda}_\alpha - n\theta_0}{\sqrt{n}\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\widetilde{\lambda}_\alpha - n\theta_0}{\sqrt{\pi}\sigma}\right)$$

так как $\frac{1}{\sqrt{n}\sigma}\sum_i (X_i - \theta_0) \sim N(0,1)$ *при* H_0.

Значит $\Phi\left(\frac{\widetilde{\lambda}_\alpha - n\theta_0}{\sqrt{\pi}\sigma}\right) = 1 - \alpha$, $\left(\frac{\widetilde{\lambda}_\alpha - n\theta_0}{\sqrt{\pi}\sigma}\right) = \xi_{1-\alpha}$ - *квантиль станд. норм. закона уровня* $1 - \alpha$. *Окончательно,* $\widetilde{\lambda}_\alpha = n\theta_0 + \sqrt{n}\sigma\xi_{1-\alpha}$

3. *Положим* $S^*_\alpha = \{x : \sum_{i=1}^n x_i > \widetilde{\lambda}_\alpha\}$. *Тогда:*

$$\mathrm{P}_{\theta_0}(X \in S^*_\alpha) = \alpha \text{ и } \forall S_\alpha\ \mathrm{P}_{\theta_0}(X \in S_\alpha) \le \alpha = \mathrm{P}_{\theta_0}(X \in S^*_\alpha)$$

Значит, выполнено условие 1 Леммы Неймана-Пирсона, и в силу пункта 2 этой леммы

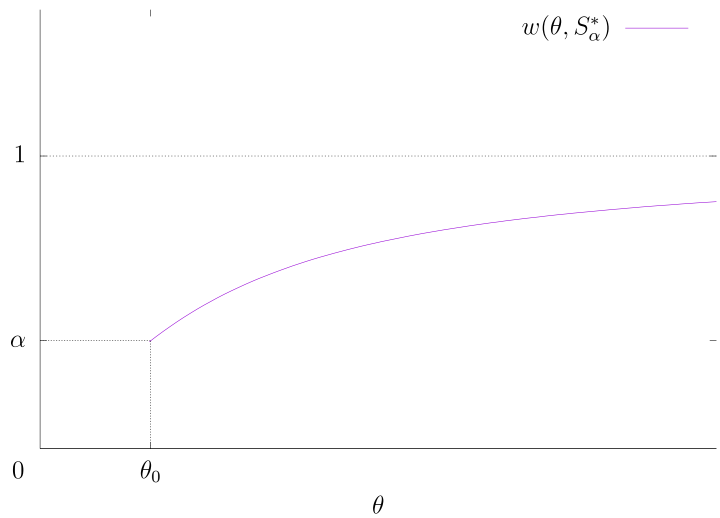
$$\mathrm{P}_{\theta_1}(X \in S_\alpha) \le \mathrm{P}_{\theta_1}(X \in S^*_\alpha)$$

То есть S^*_α *- наиболее мощный критерий уровня* α.

Так как S^*_α не зависит от θ_1, то S^*_α - РНМ-критерий для $H_0 : \theta = \theta_0$ против $H_1^+ : \theta > \theta_1$ Мощность критерия S^*_α для H_0 при альт. H_1^+

$$W(\theta, S^*_\alpha) = \mathrm{P}_\theta\left(\sum_{i=1}^n X_i > n\theta_0 + \sqrt{n}\sigma\xi_{1-\alpha}\right) =$$

$$= \mathrm{P}_\theta\left(\frac{1}{\sqrt{n}\sigma}\sum_{i=1}^n (X_i - \theta) > \frac{\sqrt{n}(\theta_0 - \theta)}{\sigma} + \xi_{1-\alpha}\right) = 1 - \Phi\left(\xi_{1-\alpha} + \frac{\sqrt{n}(\theta - \theta_0)}{\sigma}\right)$$



О связи между доверительным оцениванием и проверкой гипотез

Опр. 8. *Случайное подмножество $\Theta^* = \Theta^*(X, \alpha) \subseteq \Theta$ называется доверительным множеством уровня $1 - \alpha$, $0 < \alpha < 1$, если*

$$\mathrm{P}_\theta(\theta \in \Theta^*(X, \alpha)) \geq 1 - \alpha \ \forall \theta \in \Theta$$

Теорема 1. *1. Пусть $\forall \theta_0 \in \Theta$ гипотеза $H_0 : \theta = \theta_0$ при альтернативе $H_1 : \theta \neq \theta_0$ имеет $S_\alpha(\theta_0)$ критерием уровня α. Пусть $\Theta^*(x, \alpha) = \{\theta : x \in \overline{S_\alpha}(\theta)\}$. тогда $\Theta^*(X, \alpha)$ - доверительное множество уровня $1 - \alpha$. (Если есть критерий, то можно по этому построить доверительное множество)*

2. Если $\Theta^*(X, \alpha)$ - доверительное множество уровня $1 - \alpha$, то $\overline{S_\alpha}(\theta_0) = \{x : \theta_0 \notin \Theta(x, \alpha)\}$ есть область применения гипотезы H_0 (следовательно и критерий).

Замечание 3. *Пункт 2 означает, что если θ_0 попало в доверительное множество, то H_0 надо принимать.*

Доказательство.

$$1.\ \mathrm{P}_\theta(\theta \in \Theta^*(X, \alpha)) = \mathrm{P}_\theta(X \in \overline{S_\alpha}(\theta)) = 1 - \underbrace{\mathrm{P}_\theta(X \in S_\alpha(\theta))}_{\leq \alpha} \geq 1 - \alpha \ \forall \theta \in \Theta$$

$$2.\ \mathrm{P}_{\theta_0}(X \in S_\alpha(\theta_0)) = 1 - \mathrm{P}_{\theta_0}(X \in \overline{S_\alpha}(\theta_0)) = 1 - \underbrace{\mathrm{P}_{\theta_0}(\theta_0 \in \Theta^*(X, \alpha))}_{\geq 1-\alpha} \leq 1 - (1 - \alpha) = \alpha$$

$\square$

Пример. *Пусть* $X = (X_1, \ldots, X_n)$, $\{X_i\}$ *- н.о.р. сл.в.,* $X_1 \sim N(0, \sigma^2), \theta \in \mathbb{R}^1$. *Построим критерий для* $H_0 : \theta = \theta_0$ *против* $H_1 : \theta \neq \theta_0$. *Уровень значимости пусть будет* α, $0 < \alpha < 1$.

Построим доверительное множество для θ *уровня* $1-\alpha$. *Пусть* $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ *- оптимальная оценка* θ. *Тогда* $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\theta)}{\sigma} \sim N(0,1)$,

$$\mathrm{P}_\theta\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\theta)}{\sigma}\right| < \xi_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$\Phi(\xi_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha/2$$

То есть $\Theta^*(X, \alpha) = \{\theta : \left|\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\theta)}{\sigma}\right| < \xi_{1-\alpha/2}\}$. *В силу замечания к Теореме 1* $S_\alpha(\theta_0) = \{X : \left|\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\theta_0)}{\sigma}\right| \geq \xi_{1-\alpha}\}$ *есть критическое множество для* H_0. *Мощность*

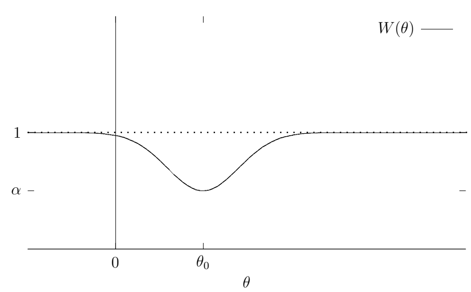
$$W(\theta) = \mathrm{P}_\theta(X \in S_\alpha(\theta_0)) = \mathrm{P}_\theta\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\theta_0)}{\sigma}\right| \geq \xi_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \mathrm{P}_\theta\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\theta_0)}{\sigma}\right| < \xi_{1-\alpha/2}\right) =$$

$$= 1 - \mathrm{P}\left(-\xi_{1-\alpha/2} + \frac{\sqrt{n}(\theta_0-\theta)}{\sigma} < \frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\theta)}{\sigma} < \xi_{1-\alpha} + \frac{\sqrt{n}(\theta_0-\theta)}{\sigma}\right) =$$

$$= 1 - \left[\Phi\left(\xi_{1-\alpha/2} + \frac{\sqrt{n}(\theta_0-\theta)}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\xi_{1-\alpha/2} + \frac{\sqrt{n}(\theta_0-\theta)}{\sigma}\right)\right] =$$

$$= \left[\Phi\left(\xi_{\alpha/2} + \frac{\sqrt{n}(\theta_0-\theta)}{\sigma}\right) + \Phi\left(\xi_{\alpha/2} + \frac{\sqrt{n}(\theta-\theta_0)}{\sigma}\right)\right]$$

При $n \to \infty$ $W(\theta) \to 1$ $\forall \theta \neq \theta_0$. *То есть* $S_\alpha(\theta_0)$ *состоятелен против любой фиксированной*



альтернативы.

2.2 Критерий Фишера (F-критерий) в Гауссовской линейной регрессии

Опр. 9. *Если* $\xi \sim N(0,1)$, $\eta_k \sim \chi^2(k)$, ξ *и* η_k *независимы, а константа* $\mu \in \mathbb{R}^1$, *то сл.в.*

$$t_k(\mu) \stackrel{d}{=} \frac{\xi + \mu}{\sqrt{\eta_k/k}} \sim S(k, \mu)$$

имеет нецентральное распределение Стьюдента с k *степенями свободы и параметром нецентральности* μ

Опр. 10. *Если* $\xi_i \sim N(a_i, 1), i = 1, \ldots, k,$ *и* $\{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$ *независимы, а* $\Delta^2 = \sum_{j=1}^k a_j^2$, *то сл. в.*

$$\eta_k(\Delta) \stackrel{d}{=} \xi_1^2 + \ldots + \xi_k^2 \sim \chi^2(k, \Delta^2)$$

имеет нецентральное распределение хи-квадрат Пирсона с k степенями свободы и параметром нецентральности Δ^2

Опр. 11. *Если* $\eta_k \sim \chi^2(k, \Delta^2),\ \nu_m \sim \chi^2(m),$ *и* η_k *и* ν_m *независимы, то сл.в.*

$$f_{k,m}(\Delta) \stackrel{d}{=} \frac{\frac{1}{k}\eta_k}{\frac{1}{m}\nu_m} \sim F(k, m, \Delta^2)$$

имеет нецентральное распределение Фишера с (k, m) *степенями свободы и параметром нецентральности* Δ^2

Лемма 1. *1. Распределение сл.в.* $\eta_k \sim \chi^2(k, \Delta^2)$ *зависит лишь от* Δ, *но не от* $a_1, \ldots, a_k$. *А именно*

$$\eta_k \stackrel{d}{=} (z_1 + \Delta)^2 + z_2^2 + \ldots + z_k^2, \text{ где } \{z_1, \ldots, z_k\} \text{ - н.о.р. } N(0,1) \text{ сл.в.}$$

2. Если вектор $\xi \in \mathbb{R}^k, \xi \sim N(a, \Sigma), \Sigma > 0,$ *то*

$$\xi^T \Sigma^{-1} \xi \sim \chi^2(k, \Delta^2), \Delta^2 = a^T \Sigma^{-1} a$$

Доказательство. 1. По определению $\eta_k(\Delta) \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^k \xi_i^2$, где $(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ - н.о.р. $N(a_i, 1)$ сл.в.

Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k)^T$, ортогональная матрица

$$C = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{\Delta} & \cdots & \frac{a_k}{\Delta} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},\ \nu = C\xi$$

Тогда $\eta_k \stackrel{d}{=} |\xi|^2 = |\nu|^2$, так как C - ортог. Но

$$\nu = C \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} + C\mathring{\xi} = \begin{pmatrix} \Delta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + Z, \text{ где } \mathring{\xi} = \xi - \mathrm{E}\xi, Z = C\mathring{\xi} \sim N(0, \mathrm{E}_k)$$

Итак, $\eta_k \stackrel{d}{=} |\nu|^2 = (z_1 + \Delta)^2 + z_2^2 + \ldots + z_k^2$

2. $\xi^T \Sigma^{-1} \xi = \left|\Sigma^{-1/2}\xi\right|^2$, причем $\Sigma^{-1/2}\xi \sim N(\Sigma^{-1/2}a, \mathrm{E}_k)$. Отсюда $\left|\Sigma^{-1/2}\xi\right|^2 \sim \chi^2(k, \Delta^2)$ с $\Delta^2 = \left|\Sigma^{-1/2}a\right|^2 = a^T \Sigma^{-1} a$

□

Лемма 2. *Случайная величина* $t_k(\mu)$ *обладает следующим свойством стохастической упорядоченности. при* $\mu_2 > \mu_1$

$$\mathrm{P}\left(t_k(\mu_2) > x\right) > \mathrm{P}\left(t_k(\mu_1) > x\right) \text{ при всех } x \in \mathbb{R}^1 \tag{4}$$

Аналогично

$$\mathrm{P}(\eta_k(\Delta_2) > x) > \mathrm{P}(\eta_k(\Delta_1) > x), \Delta_2 > \Delta_1 \tag{5}$$

$$\mathrm{P}(f_{k,m}(\Delta_2) > x) > \mathrm{P}(f_{k,m}(\Delta_1) > x), \Delta_2 > \Delta_1 \tag{6}$$

Нецентральные распределения Пирсона и Фишера стохастически упорядочены по параметру нецентральности.

Доказательство. Докажем соотношение 4, 5 и 6 доказываются аналогично.

Заметим, что, если ξ и η - независимые случайные величины, и $\mathrm{E}\,|\phi(\xi,\eta)| < \infty$, то

$$\mathrm{E}\phi(\xi,\eta) = \mathrm{E}\left\{ \mathrm{E}\phi(\xi,\eta)\big|_{\xi=\eta} \right\} \tag{7}$$

В силу (7)

$$\mathrm{P}(t_k(\mu_2) > x) = \mathrm{P}\left(\frac{\xi+\mu_2}{\sqrt{\frac{1}{k}\eta_k}} > x\right) = \mathrm{E}I\left(\xi > x\sqrt{\frac{1}{k}\eta_k} - \mu_2\right) =$$

$$= \mathrm{E}\left\{1 - I\left(\xi \le x\sqrt{\frac{1}{k}\eta_k} - \mu_2\right)\right\} = 1 - E\left\{ EI(\xi \le y)\Big|_{y = x\sqrt{\frac{\eta_k}{k}} - \mu_2} \right\} =$$

$$= 1 - \mathrm{E}\Phi\left(x\sqrt{\frac{1}{k}\eta_k} - \mu_2\right) > 1 - \mathrm{E}\Phi\left(x\sqrt{\frac{1}{k}\eta_k} - \mu_1\right) = \mathrm{P}(t_k(\mu_1) > x)$$

$$\text{так как } \mathrm{E}\Phi\left(x\sqrt{\frac{1}{k}\eta_k} - \mu_2\right) < \mathrm{E}\Phi\left(x\sqrt{\frac{1}{k}\eta_k} - \mu_1\right) \text{ в силу возрастающей } \Phi(y)$$

□

Обратимся к линейной гауссовской модели

$$X = Zc + \mathcal{E}$$

$$X = (X_1, \ldots, X_n)^T \text{ - наблюдения, } Z \text{ - } n \times p \text{ матрица регрессоров } p < n$$

$$\mathcal{E} \sim N(0, \sigma^2 \mathrm{E}_n),\ c = (c_1, \ldots, c_p)^T$$

$$\underline{c \text{ и } \sigma^2 \text{ неизвестны}}$$

Рассмотрим новый вектор $\beta = Ac$, $A - k \times p$ матрица, $rkA = k, k \le p$.

Построим для β доверительное множество уровня $1-\alpha$

Пусть $\widehat{c}_n$ - оценка наименьших квадратов (о.н.к.) для c, $\widehat{s}_n^2$ - о.н.к. для σ^2. Пусть $\widehat{\beta}_n = A\widehat{c}_n$.

$$\widehat{c}_n \sim N(c, \sigma^2(Z^TZ)^{-1}) \Rightarrow \widehat{\beta}_n \sim N(\underbrace{Ac}_{\beta}, \sigma^2 D), \text{ где } D = A(Z^TZ)^{-1}A^T$$

Заметим, что $D > 0$, так как для $\alpha \in \mathbb{R}^k, \alpha \ne 0$,

$$\alpha^T D \alpha = (A^t\alpha)^T (Z^TZ)^{-1}(A^T\alpha) > 0, \text{ т.к. } (Z^TZ)^{-1} > 0, A^T\alpha \ne 0 \text{ при } rkA = k, \alpha \ne 0$$

В силу пункта 2 леммы 1

$$\frac{1}{\sigma^2}\left(\widehat{\beta}_n - \beta\right) D^{-1} \left(\widehat{\beta}_n - \beta\right) \sim \chi^2(k)$$

так как $\frac{(n-p)\widehat{s}_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-p)$, $\widehat{\beta}_n$ и $\widehat{s}_n^2$ независимы, то

$$f_{k,n-p}(X,\beta) \overset{\text{def}}{=} \frac{\frac{1}{k}(\widehat{\beta}_n-\beta)^T D^{-1}(\widehat{\beta}_n-\beta)/\sigma^2}{\frac{1}{n-p}(n-p)\widehat{s}_n^2/\sigma^2} = \frac{(\widehat{\beta}_n-\beta)D^{-1}(\widehat{\beta}_n-\beta)}{k\widehat{s}_n^2} \sim F(k,n-p)$$

Значит,

$$\mathrm{P}_{\beta,\sigma^2}\left((\widehat{\beta}_n-\beta)^T D^{-1}(\widehat{\beta}_n-\beta) \leq k\widehat{s}_n^2 f_{1-\alpha}(k,n-p)\right) = 1-\alpha$$

$f_{1-\alpha}(k,n-p)$ - квантиль уровня $1-\alpha$ $F(k,n-p)$.
Доверительное множество для β уровня $1-\alpha$

$$\Theta^*(X,\alpha) = \left\{\beta : (\widehat{\beta}_n-\beta)^T D^{-1}(\widehat{\beta}_n-\beta) < k\widehat{s}_n^2 f_{1-\alpha}(k,n-p)\right\} =$$

$$= \{\beta : f_{k,n-p}(X,\beta) < f_{1-\alpha}(k,n-p)\} \text{ - \textbf{доверительный эллипсоид}}$$

Рассмотрим проверку гипотезы $H_0 : \beta = \beta_0$ против $H_1 : \beta \neq \beta_0$. H_0 называют линейной гипотезой, так как $\beta = Ac$ получается линейным преобразованием c. В силу замечания 3 H_0 надо принимать, если $\beta_0 \in \Theta^*(X,\alpha)$, то есть область принятия H_0:

$$\overline{S}_\alpha(\beta_0) = \{x : f_{k,n-p}(x,\beta_0) \leq f_{1-\alpha}(k,n-p)\}$$

То есть критическое множество (критерий уровня α):

$$S_\alpha(\beta_0) = \{x : f_{k,n-p}(x,\beta_0) > f_{1-\alpha}(k,n-p)\} \tag{8}$$

Критерий 8 называют **критерием Фишера** или F**-критерием**. $f_{k,n-p}(X,\beta_0)$ - статистика F-критерия.

Рассмотрим поведение F-критерия при альтернативе H_1.
При H_1 в силу пункта 2 Леммы 1

$$f_{k,n-p}(X,\beta_0) = \frac{\frac{1}{k}\overbrace{(\widehat{\beta}_n-\beta)^T D^{-1}(\widehat{\beta}_n-\beta)/\sigma^2}^{\chi^2(k,\Delta^2)}}{\frac{1}{n-p}\underbrace{(n-p)\widehat{s}_n^2/\sigma^2}_{\chi^2(n-p)}} \sim F(k,n-p,\Delta^2)$$

Параметр нецентральности

$$\Delta^2 = \frac{1}{\sigma^2}(\beta-\beta_0)^T D^{-1}(\beta-\beta_0) \tag{9}$$

Мощность F-критерия

$$W(\beta, S_\alpha(\beta_0)) = \mathrm{P}_{\beta,\sigma^2}(f_{k,n-p}(X,\beta_0) > f_{1-\alpha}(k,n-p)) = 1 - F_{k,n-p}(f_{1-\alpha}(k,n-p),\Delta^2)$$

Свойства мощности

1. Так как $\Delta = \Delta(\beta) = \Delta(\beta_0) > 0$ при $\beta \neq \beta_0$, то в силу соотношения 6

$$\mathrm{P}_{\beta,\sigma^2}(f_{k,n-p}(X,\beta_0) > f_{1-\alpha}(k,n-p)) > \mathrm{P}_{\beta_0,\sigma}(f_{k,n-p}(X,\beta_0) > f_{1-\alpha}(k,n-p)) = \alpha$$

То есть при $\beta \neq \beta_0$ $\mathrm{P}(H_1|H_1) > \mathrm{P}(H_1|H_0)$. То есть F-критерий несмещенный!

2. Мощность $W(\beta, S_\alpha(\beta_0))$ строго монотонна по Δ из соотношения 9

Пример (Определение порядка регрессии)**.** $c_n^T = (\underbrace{c_{(1)n}^T}_{m-\textit{вектор}}, \underbrace{c_{(2)n}^T}_{p-m-\textit{вектор}}),\ 1 \le m \le p$

$H_0:\ \ c_{(2)} = 0 \quad$ (*порядок не больше* m)
$H_1:\ \ c_{(2)} \ne 0$

Рассмотрим матрицу

$$A = \overbrace{\left(\begin{array}{ccc:ccc} 0 & & & 1 & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & 0 & & & 1 \end{array}\right)}^{p} \Rightarrow Ac = c_{(2)} \Rightarrow H_0 \Leftrightarrow Ac = 0$$
$$\qquad\quad m \qquad\qquad p-m$$

Пусть $\widehat{c}_n^T = (\underbrace{\widehat{c}_{(1)n}^T}_{m-\text{в-р}}, \underbrace{\widehat{c}_{(2)n}^T}_{p-m-\text{в-р}})$. Тогда $\widehat{\beta}_n = A\widehat{c}_n = \widehat{c}_{(2)n}$.

$$(Z^TZ)^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right) \to D = A(Z^TZ)^{-1}A^T = B_{22} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_{p-m,n-p}(X,0) = \frac{\widehat{c}_{(2)n}^T B_{22}^{-1} \widehat{c}_{(2)n}}{(p-m)\widehat{s}_n^2} \underset{H_0}{\sim} F(p-m, n-p)$$

H_0 отвергается, если $f_{p-m,n-p}(X,0) > f_{1-\alpha}(p-m, n-m)$, то есть

$$S_\alpha(0) = \{x : \frac{\widehat{c}_{(2)n}^T B_{22}^{-1} \widehat{c}_{(2)n}}{(p-m)\widehat{s}_n^2} > f_{1-\alpha}(p-m, n-m)\} \tag{10}$$

$$f_{p-m,n-p}(X,0) \underset{H_1}{\sim} F(p-m, n-p, \Delta^2),\ \text{где } \Delta^2 = \frac{c_{(2)}^T B_{22}^{-1} c_{(2)}}{\sigma^2} \tag{11}$$

Критерий 10 - несмещенный, то есть $\mathrm{P}(H_1|H_1) > \mathrm{P}(H_1|H_0) = \alpha$. Его мощность

$$W(c_{(2)}, S_\alpha(0)) = \mathrm{P}_{c_{(2),\sigma^2}}(f_{p-m,n-p}(X,0) > f_{1-\alpha}(p-m, n-p)) = 1 - F_{p-m,n-p}(f_{1-\alpha}(p-m, n-p), \Delta^2)$$

строго возрастает по Δ^2. Параметр нецентральности Δ^2 определен в 11.

Пример (Проверка однородности двух выборок)**.** $X = (X_1, \dots, X_m),\ Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ - *независимые гауссовские выборки. То есть* $\{X_i\},\ \{Y_i\}$ *- н.о.р.,* $X_1 \sim N(a, \sigma^2),\ Y_1 \sim N(b, \sigma^2)$. *Совокупность* $\{X_i\}$ *и* $\{Y_j\}$ *независимы,* $m + n > 2$.

Дисперсии $DX_1,\ DY_1$ *одинаковы* ($= \sigma^2$)*, неизвестны, средние* a *и* b *неизвестны.*

$H_0:\ \ a = b \quad$ (***гипотеза однородности***)
$H_1:\ \ a \ne b$

Замечание. *При* $\mathrm{D}X_1 \ne \mathrm{D}Y_1$ *эта задача называется* ***проблемой Беренса-Фишера***.

$$\begin{cases} X_i = a + \varepsilon_i, & i = 1, \dots, m,\ \varepsilon_i = X_i - a \\ Y_i = b + \widehat{\varepsilon}_j, & j = 1, \dots, n,\ \widehat{\varepsilon}_j = Y_j - b \end{cases} \Rightarrow \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m, \widehat{\varepsilon}_1, \dots, \widehat{\varepsilon}_n \text{ - н.о.р. } N(0, \sigma^2) \text{ сл.в.}$$

$$\widehat{X} \overset{def}{=} (X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_n)^T \qquad Z = \begin{pmatrix} m\begin{cases}1\\ \vdots \\ 1\end{cases} & 0 \\ 0 & n\begin{cases}1\\ \vdots \\ 1\end{cases} \end{pmatrix} \Rightarrow \underset{\textbf{гаусс. лин. регрессия}}{\widehat{X} = Zc + \mathcal{E}} \qquad (12)$$

$$c = (a, b)^T$$

$$\mathcal{E}^T = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m, \widehat{\varepsilon}_1, \dots, \widehat{\varepsilon}_n)^T$$

Положим $A = (1, -1)$. *Тогда* $Ac = a - b = \beta$.
$H_0: \quad Ac = a - b = \beta = 0 \quad (= \beta_0)$
$H_1: \qquad Ac = a - b \neq 0 \qquad (\beta \neq 0)$
О.н.к. для вектора c - решение задачи

$$\sum_{i=1}^{m}(X_i - a)^2 + \sum_{j=1}^{n}(Y_j - b)^2 \to \min_{a,b} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\sum_i (X_i - a) = 0 \\ -2\sum_j (Y_j - b) = 0 \end{cases}$$

Решением системы является $\widehat{a}_m = \overline{X}$, $\widehat{b}_n = \overline{Y}$ *- оптимальные оценки a и b,* $\widehat{c}_n = (\overline{X}, \overline{Y})^T$ *- оптимальная оценка для c. Оптимальная оценка для* σ^2*:*

$$\widehat{S}^2_{m+n} = \frac{1}{m+n-2}\left[\sum_i (X_i - \overline{X})^2 + \sum_j (Y_j - \overline{Y})^2\right]$$

Тогда

$$\widehat{\beta}_n = A\widehat{c}_n = \overline{X} - \overline{Y}$$

$$Z^T Z = \begin{pmatrix} \overbrace{1 \ \dots \ 1}^{m} & 0 \\ 0 & \underbrace{1 \ \dots \ 1}_{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 1 \\ 0 & \vdots \\ & 1 \\ 1 & \\ \vdots & 0 \\ 1 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \boxed{f_{1,m+n-2}(X, 0) = \frac{(\overline{X} - \overline{Y})^2}{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)\widehat{S}^2_{m+n}}}$$

$$D = A(Z^T Z)^{-1} A^T = (1 \ \ -1) \begin{pmatrix} \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$$

F-критерий для H_0 *имеет вид*

$$S_\alpha(0) = \{x \in \mathbb{R}^{m+n} : f_{1,m+n-2}(x, 0) > f_{1-\alpha}(1, m+n-2)\}$$

$$f_{1,m+n-2}(X, 0) \underset{H_0}{\sim} F(1,\ m+n-2)$$

$$f_{1,m+n-2}(X, 0) \underset{H_1}{\sim} F(1,\ m+n-2, \Delta^2),$$

$$\text{где параметр нецентральности } \Delta^2 = \Delta^2(\underset{a-b}{\beta}) = \frac{(a-b)^2}{\sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}$$

1. *Если* $|a - b|$ *возрастает, то мощность F-теста возрастает*

2. *Если* $\sigma \to 0$ *или* $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \to 0$, *то мощность возрастает*

2.3 Критерий согласия Хи-квадрат Пирсона. Проверка простой гипотезы в схеме Бернулли.

Пусть проводятся n независимых испытаний, и в каждом испытании возможны $m \geq 2$ исходов $A_1, \ldots, A_m$ таких, что $A_i A_j = \emptyset,\ i \neq j,\ \sum A_i = \Omega$, тогда $\mathrm{P}(A_j) = p_j > 0,\ \sum_{j=1}^m p_j = 1$. Пусть $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_m)^T$, а ν_j - число появления A_j в n опытах, тогда $\sum_{j=1}^m \nu_j = n$. По вектору наблюдений ν необходимо проверить следующую гипотезу:

$H_0 :\ \ p_j = p_j^\circ,\ j = 1, \ldots, m$

$H_1 :\ \ p_j \neq p_j^\circ$ хотя бы при одном j

Замечание. *H_0 - простая гипотеза, т.к. полностью определяет распределение вектора ν.*

$$\mathrm{P}(\nu_1 = k_1, \ldots, \nu_m = k_m) \underset{H_0}{=} \frac{n!}{k_1! \ldots k_m!} (p_1^\circ)^{k_1} \ldots (p_m^\circ)^{k_m}$$

Это полиномиальное распределение $\prod(n, p_1^\circ, \ldots, p_m^\circ)$. Статистика Хи-квадрат Пирсона:

$$\chi_n^2 \underset{H_0}{\overset{\mathrm{def}}{=}} \sum_{j=1}^m \frac{(\nu_j - np_j^\circ)^2}{np_j^\circ}$$

<u>Поведение при альтернативе:</u> Очевидно

$$\chi_n^2 = n \sum_{j=1}^m \frac{(\nu_j/n - p_j^\circ)^2}{p_j^\circ}$$

В силу теоремы Бернулли $\frac{\nu_j}{n} \xrightarrow{\mathrm{P}} p_j$. Поэтому

$$\sum_{j=1}^m \frac{(\nu_j/n - p_j^\circ)^2}{p_j^\circ} \xrightarrow[\text{Т. о наслед. сход.}]{\mathrm{P}} \sum_{j=1}^m \frac{(p_j - p_j^\circ)^2}{p_j^\circ} \underset{H_1}{>} 0$$

Значит,

$$\chi_n^2 \xrightarrow[H_1]{\mathrm{P}} \infty,\ n \to \infty$$

Поэтому большие значения χ_n^2 часто свидетельсвтуют о том, что стоит отвергнуть H_0. Но насколько "большие"значения?

2.4 Теорема Пирсона

$$\chi_n^2 \xrightarrow[H_0]{d} \chi^2(m-1),\ n \to \infty$$

<u>Правило</u>: Если $\chi_n^2 \leq \chi_{1-\alpha}(m-1)$, то принимаем H_0, иначе принимаем H_1.

Замечание. *Тогда*

$$\mathrm{P}(H_1|H_0) = \mathrm{P}(\chi_n^2 > \chi_{1-\alpha}(m-1)|H_0) \to \alpha$$
$$\mathrm{P}(H_0|H_1) = \mathrm{P}(\chi_n^2 \leq \chi_{1-\alpha}(m-1)|H_1) \to 0$$

То есть

$$\begin{cases} \mathrm{P}(H_0|H_0) \to 1 - \alpha \\ \mathrm{P}(H_1|H_1) \to 1 \end{cases}$$

<u>*Вероятность принять правильную гипотезу близка к единице!*</u>

Доказательство. Покажем, что вектор $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)^T$ асимптотически нормален, то есть

$$\sqrt{n}(\nu/n - p) \xrightarrow{d} N(0, P - pp^T), \text{ где } P \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} p_1^\circ & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p_m^\circ \end{pmatrix} \tag{13}$$

Введем вектора $X_1, \dots, X_n$, где $X_i = (0, \dots, 0, \frac{1}{j}, 0, \dots, 0)^T$, если в i-ом испытании произошло A_j. Тогда $\nu = \sum_{i=1}^n X_i$

$$\sqrt{n}(\nu/n - p) = \sqrt{n}\sum_{i=1}^n (X_i - p) \tag{14}$$

Здесь $\{X_i\}$ - н.о.р., $EX_1 = p$, $\operatorname{cov}(X_1, X_1) = \mathrm{E}(X_1 - p)(X_1 - p)^T = \mathrm{E}X_1 X_1^T - pp^T = P - pp^T$. Поэтому соотношение (13) следует из соотноешния (14) и ЦПТ.
Матрица $P - pp^T$ вырождена, так как сумма ее столбцов равна нулю: если $e = (1, \dots, 1)^T$, то $(P - pp^T)e = p - p(p^T e) = p - p = 0$

Пусть

$$P^{-1/2} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{p_1^\circ}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\sqrt{p_m^\circ}} \end{pmatrix}, \ \xi_n \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{n} P^{-1/2}(\nu/n - p)$$

В силу теоремы о наследовании слабой сходимости и соотношения (13)

$$\xi_n \xrightarrow{d} N(0, P^{-1/2}(P - pp^T)(P^{-1/2})^T) = N(0, E_m - zz^T), \text{ где } z = (\sqrt{p_1^\circ}, \dots, \sqrt{p_m^\circ})^T \tag{15}$$

Пусть ортогональная матрица $U = \begin{pmatrix} \sqrt{p_1^\circ} & \cdots & \sqrt{p_m^\circ} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$. Тогда

$$U(E_m - zz^T)U^T = E_m - (Uz)(Uz)^T =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} = \widetilde{\mathrm{E}}_1$$

В силу (15) и теоремы о слабой сходимости

$$U\xi_n \xrightarrow{d} N(0, \widetilde{\mathrm{E}}_1) = (0, \eta_2, \dots, \eta_m)^T \tag{16}$$

где $\{\eta_2, \dots, \eta_m\}$ - независимые $N(0, 1)$ сл.в. Из (16) и теоремы о наследовании слабой сходимости следует:

$$|U\xi_n|^2 \xrightarrow{d} \eta_2^2 + \ldots + \eta_m^2 \sim \chi^2(m - 1) \tag{17}$$

Осталось заметить, что

$$|U\xi_n|^2 = |\xi_n|^2 = \sum_{j=1}^m \left[\frac{1}{\sqrt{p_j^\circ}}\sqrt{n}(\nu_j/n - p_j^\circ)\right]^2 = \sum_{j=1}^m \frac{(\nu_j - np_j^\circ)^2}{np_j^\circ} = \chi_n^2$$

Из этого равенства и соотноешния (17) следует теорема Пирсона. □

Пример (Проверка простой гипотезы о виде функции распределения)**.** $X = (X_1, \dots, X_n)$, $\{X_i\}$ - *н.о.р.*, $X_1 \sim F(x)$.

$H_0: \;\; F(x) = F_0(x), \; (F_0$ *известна*)

$H_1: \;\; F(x) = F_1(x), \; F_1(x) \neq F_0(x)$

Разобьем носитель X_1 *на непересекающиеся отрезки* $\Delta_1, \dots, \Delta_m, \; m \geq 2$ *так, что* $X_1 \in \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \dots \cup \Delta_m$

$$p_j^\circ \stackrel{def}{=} \mathrm{P}(X_1 \in \Delta_j | H_0) = \int_{\Delta_j} dF_0(x) > 0 \; \forall j$$

Тогда $\sum_{j=1}^m p_j^\circ = 1$. *С каждой величиной* X_i *свяжем испытание с исходами* $A_1, \dots, A_m$, *причем* A_j *происходит тогда и только тогда, когда* $X_i \in \Delta_j$. *При* H_0 $\mathrm{P}(A_j) = p_j^\circ$. *Тогда наблюдения* $X_1, \dots, X_n$ *порождают полиномиальную схему независимых испытаний. Пусть* ν_j*-число исхода* A_j *в этих испытаниях, то есть число наблюдений среди* $X_1, \dots, X_n$, *попавших в* Δ_j. *В силу теоремы Пирсона:*

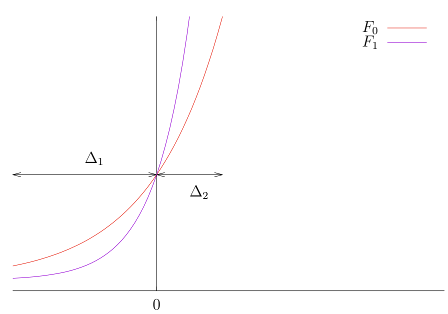
$$\chi_n^2 \stackrel{def}{=} \sum_{j=1}^m \frac{(\nu_j - np_j^\circ)^2}{np_j^\circ} \xrightarrow[H_0]{d} \chi^2(m-1)$$

Правило: H_0 *будем отвергать, если* $\chi_n^2 > \chi_{1-\alpha}(m-1)$. *(*$\alpha$ *задано) Тогда* $\mathrm{P}(H_1|H_0) \to \alpha, \; n \to \infty$.

$$p_j \stackrel{def}{=} \mathrm{P}(X_1 \in \Delta_j | H_1) = \int_{\Delta_j} dF_1(x)$$

Если верна H_1 *и хоть при одном* j $p_j \neq p_j^\circ$, *то* $\mathrm{P}(H_0|H_1) = \mathrm{P}(\chi_n^2 < \chi_{1-\alpha}(m-1)|H_1) \to 0$

Замечание. *Если* $F_0 \not\equiv F_1$, *но* $p_j = p_j^\circ \; \forall j$, *то* $\mathrm{P}(H_0|H_1) = \mathrm{P}(H_0|H_0) \to 1 - \alpha \neq 0$. *Например:*



$m = 2$

Здесь $\mathrm{P}(X_1 \in \Delta_1 | H_0) = F_0(0) = \mathrm{P}(X_1 \in \Delta_1 | H_1) = F_1(0)$. *Значит, и* $\mathrm{P}(X_1 \in \Delta_2 | H_0) = 1 - F_0(0) = \mathrm{P}(X_1 \in \Delta_1 | H_1) = 1 - F_1(0)$.

Проверка сложной гипотезы в схеме испытаний Бернулли

Пусть проводится n независимых испытаний, исходы $A_1, \dots, A_m$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)^T$ - вектор наблюдений. Пусть $H_0: \; \mathrm{P}(A_j) = p_j(\theta), \; \theta \in \Theta \in \mathbb{R}^k, \; k < m - 1$.

Условия регулярности

1. $\sum_{j=1}^m p_j(\theta) = 1, \; \theta \in \Theta$

2. $p_j(\theta) \geq c > 0 \; \forall j = 1, \dots, m$ и $\exists \; \frac{\partial p_j(\theta)}{\partial \theta_l}, \frac{\partial^2 p_j(\theta)}{\partial \theta_l \partial \theta_r}$

3. $rank(\underbrace{\frac{\partial p_j(\theta)}{\partial \theta_l}}_{m \times k}) = k, \ \forall \theta \in \Theta$

В качестве оценки θ при H_0 будем использовать мультиномиальные оценки максимального правдоподобия:

$$\mathrm{P}(\nu_1 = k_1, \dots, \nu_m = k_m) = \frac{n!}{k_1! \dots k_m!} p_1^{k_1}(\theta) \dots p_m^{k_m}(\theta)$$

логарифмического правдоподобия:

$$L_n(\nu, \theta) = \ln\left(\frac{n!}{\nu_1! \dots \nu_m!}\right) + \sum_{j=1}^{m} \nu_j \ln p_j(\theta)$$

оценки максимального правдоподобия (мультиномиальные):

$$L_n(\nu, \theta) \to \max_{\theta \in \Theta}$$

2.5 Теорема Фишера

Пусть выполнены условия регулярности, $\widehat{\theta}_n$ - мульт. о.м.п. Тогда

$$\widehat{\chi}_n^2 = \sum_{j=1}^{m} \frac{(\nu_j - np_j(\widehat{\theta}_n))^2}{np_j(\widehat{\theta}_n)} \xrightarrow[H_0]{d} \chi(m-k-1)$$

Правило: Если $\widehat{\chi}_n^2 \leq \chi_{1-\alpha}(m-k-1)$, то принимаем H_0, иначе принимаем H_1. Тогда $\mathrm{P}(\overline{H_0}|H_0) \to \alpha$

Пример (Проверка независимости признаков). *Пусть объект классифицирован по двум A и B, $A = \{A_1, \dots, A_s\}, \ B = \{B_1, \dots, B_r\}, \ s > 1, \ r > 1$. Проводится n опытов, и пусть ν_{ij} - число объектов, имеющих признаки $A_i B_j$.*
Пусть $p_{ij} = \mathrm{P}(A_i B_j)$. Гипотеза независимости $H_0: \ p_{ij} = p_{i\bullet} p_{\bullet j}$ для положительных $p_{i\bullet}$ и $p_{\bullet j}$ таких, что $\sum_{i=1}^{s} p_{i\bullet} = 1, \ \sum_{j=1}^{r} p_{\bullet j} = 1$.
При H_0 логарифмическое правдоподобие

$$L_n(\nu, p_{i\bullet}, p_{\bullet j}) = \ln \frac{n!}{\prod_{i,j} \nu_{ij}} + \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{r} \nu_{ij} \ln(p_{i\bullet} p_{\bullet j})$$

Максимизируя эту функцию по $p_{i\bullet}, \ p_{\bullet j}$ при условиях, что $\sum_{i=1}^{s} p_{i\bullet} = 1, \ \sum_{j=1}^{r} p_{\bullet j} = 1$, находим оценки

$$\widehat{p}_{i\bullet} = \frac{\nu_{i\bullet}}{n}, \ \widehat{p}_{\bullet j} = \frac{\nu_{\bullet j}}{n}, \ \text{где } \nu_{i\bullet} = \sum_{j} \nu_{ij}, \ \nu_{\bullet j} = \sum_{i} \nu_{ij}$$

Статистика Хи-квадрат имеет вид

$$\widehat{\chi}_n^2 = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{r} \frac{(\nu_{ij} - n\widehat{p}_{i\bullet}\widehat{p}_{\bullet j})^2}{n\widehat{p}_{i\bullet}\widehat{p}_{\bullet j}}$$

$$\widehat{\chi}_n^2 \xrightarrow[H_0]{d} \chi((s-1)(r-1))$$

так как $m - k - 1 = sr - (s + r - 2) - 1 = (s-1)(r-1)$.
Правило: Если $\widehat{\chi}_n^2 > \chi_{1-\alpha}((s-1)(r-1))$, то отвергаем H_0. Асимптотический уровень теста есть α

Пример (W.H.Gilby. Biometrika, 8,94). *1725 школьников классифицировали в соответствии с их качеством одежды и в соответствии с умственными способностями. Использовали следующие градации:*

A – *умственно отсталый*
B – *медлительный и тупой*
C – *тупой*
D – *медлительный, но умный*
E – *достаточно умный*
F – *способный*
G – *очень способный*

$\boxed{H_0: \text{ признаки независимы}}$

	Способности						
Как одевается	A и B	C	D	E	F	G	Сумма
Очень хорошо	33	48	113	209	194	39	636
Хорошо	41	100	202	255	138	15	751
Сносно	39	58	70	61	33	4	256
Очень плохо	17	13	22	10	10	1	73
Сумма	130	219	407	535	375	59	1725

Здесь $\chi_n^2 = 174.92 > \chi_{0.999}(15) = 37.697.$
Здесь $15 = (s-1)(r-1) = (4-3)(6-1) \Rightarrow$ *Отвергаем* H_0

3 Введение в робастное оценивание

Схема засорений Мартина-Йохаи имеет вид:

$$y_t = u_t + z_t^\gamma \xi_t,\ t = 1, \dots, n$$

Здесь $\{u_t\}$ - "полезный сигнал"(временной ряд);
$\{z_t^\gamma\}$ - н.о.р. сл.в., $z_1^\gamma \sim Bin(1, \gamma)$ с $0 \leq \gamma \leq 1$ (γ - уровень засорения);
$\{\xi_t\}$ - н.о.р. сл.в. - грубые выбросы, ξ_1 - имеет распределение $\mu_\xi \in M_\xi$; Распределение μ_ξ неизвестно, а множество M_ξ известно;
Последовательности $\{u_t\}, \{z_t^\gamma\}, \{\xi_t\}$ независимы между собой.
Пусть $y_1, \dots, y_n$ - наблюдения, и распределение вектора $Y_n = (y_1, \dots, y_n)$ зависит от неизвестного параметра β. Пусть $\hat{\beta}_n$ - некоторая оценка β

Основное предположение

При любом $0 \leq \gamma \leq 1$ существует предел

$$\hat{\beta}_n \xrightarrow{\text{P}} \theta_\gamma,\ n \to \infty;\ \theta_0 = \beta$$

Опр. 1. *Если существует предел*

$$IF(\theta_\gamma, \mu_\xi) \overset{def}{=} \lim_{\gamma \to +0} \frac{\theta_\gamma - \theta_0}{\gamma}$$

*то $IF(\theta_\gamma, \mu_\xi)$ называется **функционалом влияния оценки** $\widehat{\beta}_n$*

Если функционал влияния существует, то

$$\theta_\gamma = \theta_0 + IF(\theta_\gamma, \mu_\xi)\gamma + \overline{\overline{o}}(\gamma),\ \gamma \to +0$$

> $IF(\theta_\gamma, \mu_\xi)$ характеризует главный линейный по γ член в разложении по γ асимптотического смещения $\theta_\gamma - \theta_0 = \theta_\gamma - \beta$

Опр. 2. *Величина $GES(\theta_\gamma, M_\xi) \overset{def}{=} \sup_{\mu_\xi \in M_\xi} |IF(\theta_\gamma, \mu_\xi)|$ называется чувствительностью оценки $\widehat{\beta}_n$ к засорениям (выбросам).*

> Если $GES(\theta_\gamma, M_\xi) < \infty$, то главный член по γ асимптотического смещения $IF(\theta_\gamma, \mu_\xi)\gamma$ равномерно по μ_ξ max при таких γ

Опр. 3. *Если $GES(\theta_\gamma, M_\xi) < \infty$, то оценка $\widehat{\beta}_n$ называется **робастной по смещению**, или B-робастной.*

Пример (Выборочное среднее)**.**

$$\begin{cases} u_t = a + \varepsilon_t \\ y_t = u_t + z_t^\gamma \xi_t,\ t = 1, \dots, n \end{cases}$$

$\{\varepsilon_t\}$ *- н.о.р. сл.в.,* $\text{E}\varepsilon_1 = 0$ *(тогда* $\text{E}u_t = a$*),* $\text{E}|\xi_1| < \infty$
Возьмем оценкой a *эмпирическое среднее* $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^n y_t$*. Тогда*

$$\overline{y} \xrightarrow{\text{P}} E(u_1 + z_1^\gamma \xi_1) = a + \gamma \text{E}\xi_1 = \theta_\gamma^{LS}$$

Функция θ_γ^{LS} определена при всех γ,

$$\frac{d\theta_\gamma^{LS}}{d\gamma} = \mathrm{E}\xi_1 = IF(\theta_\gamma^{LS}, \mu_\xi)$$

Если M_1 - класс распределений с конечным первым моментом, то

$$GES(\theta_\gamma^{LS}, M_1) = \sup_{\mu_\xi \in M_1} |\mathrm{E}\xi_1| = \infty$$

Оценка $\overline{y}$ не B-робастна на классе M_1!

Пример (Выборочная медиана)**.** *Пусть*

$$u_t = a + \varepsilon_t,\ t = 1, \dots, n,\ \text{где } \{\varepsilon_t\} \text{ - н.о.р. сл.в.} \tag{1}$$

$\varepsilon_1 \sim G(x)$, функция распределения $G(x)$ неизвестна, $G(0) = 1/2$. Тогда функция распределения u_1 есть $F(x) = G(x - a)$, то есть $F(a) = 1/2$. Таким образом, медиана $G(x)$ это 0, медиана $F(x)$ - a.

> *Если ε_1 имеет симметричное относительно 0 распределение (то есть $\varepsilon_1 \overset{d}{=} -\varepsilon_1$, что для непрерывной $G(x)$ равносильно условию $G(x) + G(-x) = 1\ \forall x$), то автоматически $G(0) = 1/2$. Если вдобавок $\mathrm{E}|\varepsilon_1| < \infty$, то $\mathrm{E}\varepsilon_1 = 0, \mathrm{E}u_1 = a$*

Итак, при сформулированных условия оценку медианы можно использовать как оценку математического ожидания.

Пусть $u_{(1)} \le u_{(2)} \le \ldots \le u_{(n)}$ будет вариационный ряд наблюдений $u_1, \dots, u_n$.

Опр. 4. *Величина*

$$\widehat{m}_n = \begin{cases} u_{(k+1)} & n = 2k-1 \\ \frac{u_{(k+1)} + u_{(k)}}{2} & n = 2k \end{cases}$$

называется ***выборочной медианой*** *наблюдений $u_1, \dots, u_n$.*

Мы знаем, что если $G(x)$ дифф. в нуле, и $g(0) = G'(0) > 0$, то для выборочной медианы справедлива асимптотическая нормальность:

$$\sqrt{n}(\widehat{m}_n - a) \xrightarrow{d} N(0, \frac{1}{4g^2(0)}),\ n \to \infty$$

Если в (1) $\{\varepsilon_t\}$ - н.о.р., $\mathrm{E}\varepsilon_1 = 0$, $0 < \mathrm{E}\varepsilon_1^2 = \sigma^2 < \infty$, то $\sqrt{n}(\widetilde{u} - a) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$. Значит асимптотическая оптимальная эффективность выборочной медианы относительно $\widetilde{u}$ равна

$$\boxed{e_{\widehat{m}_n,\ \overline{X}} = 4g^2(0)\sigma^2}$$

Изучим B-робастность выборочной медианы. Пусть

$$\begin{cases} u_t = a + \varepsilon_t \\ y_t = u_t + z_t^\gamma \xi_t,\ t = 1, \dots, n \end{cases} \qquad \widehat{m}_n^y = \begin{cases} y_{(k+1)},\ n = 2k-1 \\ \frac{y_{(k)} + y_{(k+1)}}{2},\ n = 2k \end{cases}$$

Теорема 1. *Пусть* $\exists\ g(x) = G'(x)$, $g(x)$ *непрерывна и ограничена,* $g(0) > 0$, $G(0) = 1/2$. *Тогда:*

1. $\widehat{m}_n^y \xrightarrow{\mathrm{P}} \theta_\gamma^m,\ \theta_0 = a$

2. *Существует функционал влияния выборочной медианы*

$$IF(\theta_\gamma^m, \mu_\xi) = \frac{1 - 2\mathrm{E}G(-\xi_1)}{2g(0)}$$

3. *Чувствительность выборочной медианы на классе всех возможных распределений* M_ξ

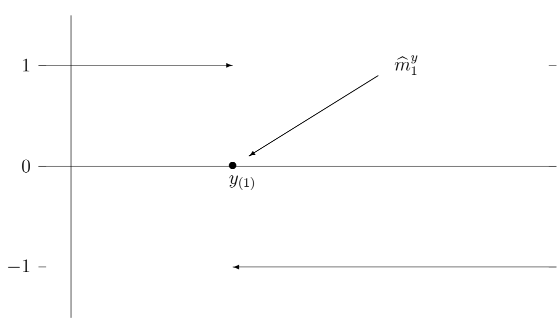
$$GES(\theta_\gamma^m, \mu_\xi) = \sum_{\mu_\xi \in M_\xi} |IF(\theta_\gamma^m, \mu_\xi)| = \frac{1}{2g(0)} < \infty$$

то есть выборочная медиана B-робастна.

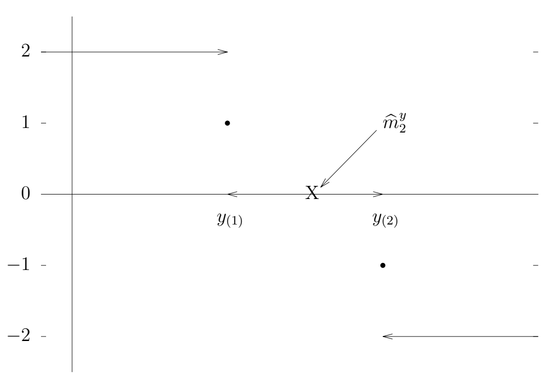
Доказательство. 1. Выборочная медиана $\widehat{m}_n^y$ удовлетворяет уравнению

$$l_n(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} sgn(y_t - \theta) = 0,\ \text{где } sgn(x) = \begin{cases} -1, x < 0 \\ 0, x = 0 \\ 1, x > 0 \end{cases} \tag{2}$$

Справедливость формулы (2) легко понять из следующих рисунков:



$n = 1$



$n = 2$

Так бывает всегда: при нечетном n решение уравнения (2) всегда $\exists!$, это $\widehat{m}_n^y$; при четном n решений целый интервал и $\widehat{m}_n^y$ - его середина.

В силу Закона Больших Чисел при любом θ и любом $0 \le \gamma \le 1$

$$l_n(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} sgn(y_t - \theta) \xrightarrow{\mathrm{P}} \mathrm{E}sgn(y_1 - \theta) \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda_M(\gamma, \theta)$$

Задача: Пусть ξ и η - независимые случайные векторы, причем η - дискретный вектор со значениями $\eta_1, \eta_2, \ldots$. Проверить, что

$$\mathrm{E}\phi(\xi,\eta) = \sum_{k\ge1} \mathrm{E}\phi(\xi,\eta_k)\mathrm{P}(\eta = \eta_k) = \sum_{k\ge1} \mathrm{E}(\phi(\xi,\eta_k)|H_k)\mathrm{P}(H_k),\ \text{где гипотеза } H_k = (\eta = \eta_k)$$

Найдем удобный вид для $\Lambda_M(\gamma,\theta)$. Имеем

$$\Lambda_M(\gamma,\theta) = \mathrm{E}(1-2I(y_1-\theta\le 0)) = 1-2\mathrm{E}I(\varepsilon_1\le\theta-a-z_1^\gamma\xi_1) = 1-2\mathrm{E}G(\theta-a-z_1^\gamma\xi_1) \quad (3)$$

так как $sign x = 1-2I(x<0),\ x\neq 0$. Чтобы упростить (3), введем две гипотезы $H_1=(z_1^\gamma=0)$ и $H_2=(z_2^\gamma=1)$. Тогда, используя задачу, получаем из (3):

$$\Lambda_M(\gamma,\theta) = 1-2(1-\gamma)G(\theta-a)-2\gamma\mathrm{E}G(\theta-a-\xi_1)$$

Функция $\Lambda_M(\gamma,\theta)$ определена при всех γ,θ.

2. Функция $\Lambda_M(\gamma,\theta)$ в окрестности точки $(0,a)$ удовлетворяет всем предположениям теормы о неявной функции. А именно:

   (a) $\Lambda_M(0,a)=1-2G(0)=0$

   (b) Существует и непрерывны по паре (γ,θ) функции $\frac{\partial\Lambda_M(\gamma,\theta)}{\partial\gamma}$ и $\frac{\partial\Lambda_M(\gamma,\theta)}{\partial\theta}$

   (c)
$$\frac{\partial\Lambda_M(\gamma,\theta)}{\partial\theta} = -2g(0)\neq 0$$

   Значит, в окрестности точки $(0,a)$ определена функция $\theta_m(\gamma)=\theta_\gamma^m$ такая, что

$$\Lambda_M(\gamma,\theta_\gamma^m)=0$$

   Кроме того, $\theta_0^m=a;\ \theta_\gamma^m\to\theta_0$ при $\gamma\to 0$; Функция θ_0^m дифференцируема в точке $\gamma=0$, и

$$\left.\frac{d\theta_\gamma^m}{d\gamma}\right|_{\gamma=0} = -\left(\frac{\partial\Lambda_m(0,a)}{\partial\theta}\right)^{-1}\frac{\partial\Lambda_m(0,a)}{\partial\gamma} = \frac{1-2\mathrm{E}G(-\xi_1)}{2g(0)} \quad (4)$$

3. Покажем, что

$$\widehat{m}_n^y \xrightarrow{\mathrm{P}} \theta_\gamma^m,\ n\to\infty \quad (5)$$

   Тогда из (4)-(5) будет слеовать, что функционал влияния выборочной медианы равен

$$IF(\theta_\gamma^m,\mu_\xi) = \frac{1-2\mathrm{E}G(-\xi_1)}{2g(0)} \quad (6)$$

   Модуль числителя в (6) не больше единицы, причем если θ_1 неслучайно и $\theta_1\to\infty$, то числитель стремится к единице. Значит,

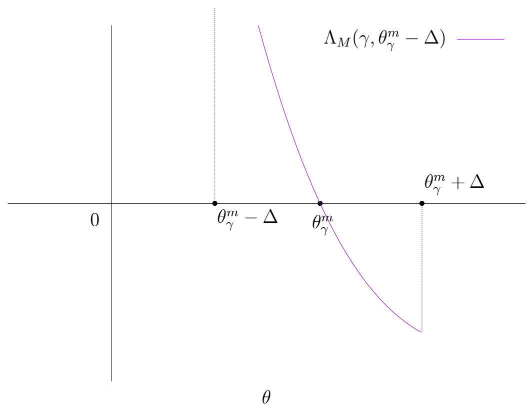
$$GES(\theta_\gamma^m,M_\xi) = \sup_{\mu_\xi\in M_\xi}|IF(\theta_\gamma^M,\mu_\xi)| = \frac{1}{2g(0)}$$

   то есть мы докажем теорему.

   Докажем (5). Имеем при малых $\gamma,\ \xi,\ \theta$ (γ-фикс.) вблизи a:

$$\frac{\partial\Lambda_M(\gamma,\theta)}{\partial\theta} = -2(1-\gamma)g(\theta-a)-2\gamma\mathrm{E}g(\theta-a-\xi_1)<0$$

   то есть $\underline{\Lambda_M(\gamma,\theta)\text{ убывает по }\theta}$. Значит, $\begin{cases}\Lambda_M(\gamma,\theta_\gamma^m-\Delta)>0\\ \Lambda_M(\gamma,\theta_\gamma^m+\Delta)<0\end{cases}$ Но



$$\begin{cases} l_n(\theta_\gamma^m-\Delta)\xrightarrow{\mathrm{P}}\Lambda_M(\gamma,\theta_\gamma^m-\Delta)>0 \\ l_n(\theta_\gamma^m+\Delta)\xrightarrow{\mathrm{P}}\Lambda_M(\gamma,\theta_\gamma^m+\Delta)<0 \end{cases} \tag{7}$$

Функция $l_n(\theta)$ монотонно убывает (точнее, не возрастает) по θ. В силу (7) с вероятностью сколь угодно близкой к единице при достаточно больших n все корни уравнения $l_n(\theta)=0$ лежат в интервале $(\theta_\gamma^m-\Delta,\theta_\gamma^m+\Delta)$. А значит и выборочная медиана тоже! Поскольку $\Delta>0$ любое, то получаем

$$\widehat{m}_n^y\xrightarrow{\mathrm{P}}\theta_\gamma^m,\ n\to\infty$$

что и доказывает теорему.

$\square$

Как находить функционал влияния в общей ситуации?

Пусть оценка $\widehat{\beta}_n$ ищется как корень уравнения:

$$l_n(\theta)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\phi_t(J_n,\theta)=0 \tag{8}$$

Пусть будут выполнены следующие условия

1. $$l_n(\theta)=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\phi_t(J_n,\theta)\xrightarrow{\mathrm{P}}\Lambda(\gamma,\theta)$$

   при всех $|\theta-\beta|<\delta,\ 0\le\gamma<\gamma_0$

2. $\Lambda(0,\beta)=0$

3. Пусть $\Lambda(\gamma,\theta)$ можно продолжить на отрезок малых γ так, что при $|\theta-\beta|<\delta,\ |\gamma|<\gamma_0$ сущесвтуют и непрерывны по паре аргументов (γ,θ) частные производные $\frac{\partial\Lambda(\gamma,\theta)}{\partial\gamma}$, $\frac{\partial\Lambda(\gamma,\theta)}{\partial\theta}$.

4. Пусть $\lambda(\beta)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\frac{\partial\Lambda(0,\theta)}{\partial\theta}\neq 0$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (1)-(4), и функции $\phi_t(J_n,\theta)$ непрерывны по θ. Тогда уравнение* (8) *с вероятностью, стремящейся к единице при $n\to\infty$, имеет при достаточно малых $\gamma>0$ решение $\widehat{\beta}_n$, что соответствующая оценка $\widetilde{\beta}_n \xrightarrow{\mathrm{P}} \theta_\gamma,\ \theta_0=0$, и существует функционал влияния:*

$$\boxed{IF(\theta_\gamma,\mu_\xi)=-\frac{1}{\lambda(\beta)}\frac{\partial}{\partial\gamma}\Lambda(0,\beta)}$$

Пример (M-оценка медианы)**.** *Пусть*

$$\begin{cases} u_t=a+\varepsilon_t \\ y_t=u_t+z_t^\gamma\xi_t \end{cases} \quad \{\varepsilon_t\}\text{-н.о.р.},\ \varepsilon_1\sim g(x)=G'(x),\ g(x)=g(-x)$$

Тогда a - медиана функции распределения случайной величины u_1.

Будем искать оценку a, обозначим ее как $\widehat{a}_n$, как корень уравнения

$$\sum_{t=1}^{n}\psi(y_t-\theta)=0 \tag{9}$$

*Тогда оценка называется M**-оценкой**. В частности, при $\psi(x)=x,\ \widehat{a}_n=\overline{y}$; при $\psi(x)=sgn(x),\ \widehat{a}_n=\widehat{m}_n^y$.*

Пусть выполняются условия:

1. *$\psi(x)$ - нечетная строго возрастающая функция*

$$\lim_{x\to+\infty}\psi(x)=c_1>0,\ \lim_{x\to-\infty}\psi(x)=c_2<\infty$$

2. *Существует непрерывная и ограниченая $\psi'(x)$,* $\mathrm{E}\psi'(\varepsilon_1)\neq 0$

Тогда уравнение (9) *всегда имеет и притом* <u>единственное</u> *решение. Условия (1)-(2) выполнены, например, для $\psi(x)=arctan(x)$.*

Найдем функционал влияния и чувствительность M-оценки, используя теорему 2. Проверим ее условия:

1. $$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\psi(y_t-\theta)\xrightarrow{\mathrm{P}}\mathrm{E}\psi(y_1-\theta)\overset{def}{=}\Lambda(\gamma,\theta),\ \forall\theta,\ \forall 0\le\gamma\le 1$$

   Введем гипотезы $H_1=(z_1^\gamma=0),\ H_2=(z_2^\gamma=0)$. Тогда

$$\Lambda(\gamma,\theta)=\sum_{i=1}^{2}\mathrm{E}(\psi(\underbrace{\varepsilon_1+a+z_1^\gamma\xi_1}_{y_1}-\theta)|H_i)\mathrm{P}(H_i)=(1-\gamma)\mathrm{E}\psi(\varepsilon_1+a-\theta)+\gamma\mathrm{E}\psi(\varepsilon_1+\xi_1+a-\theta)$$

2. $\Lambda(0,a)=\mathrm{E}\psi(\varepsilon_1)=0$*, так как $\psi(x)$ - нечетная, а $g(x)$-четная.*

3. *Функция $\Lambda(\gamma,\theta)$ определена при всех γ и θ. Частные производные $\frac{\partial\Lambda(\gamma,\theta)}{\partial\gamma}$, $\frac{\partial\Lambda(\gamma,\theta)}{\partial\theta}$ существуют при условиях (1)-(2) и непрерывны по паре (γ,θ). В частности,*

$$\frac{\partial\Lambda(0,a)}{\partial\gamma}=-\mathrm{E}\psi(\varepsilon_1)+\mathrm{E}\psi(\varepsilon_1+\xi_1)=\mathrm{E}\psi(\varepsilon_1+\xi_1)$$

4. $\frac{\partial \Lambda(0,a)}{\partial \theta} = -\mathrm{E}\psi'(\varepsilon_1) \neq 0$

В силу теоремы 2

$$\widehat{a}_n \xrightarrow{\mathrm{P}} \theta_\gamma,\ \ \theta_0 = a$$

$$IF(\theta_\gamma, \mu_\xi) = \frac{\mathrm{E}\psi(\varepsilon_1 + \xi_1)}{\mathrm{E}\psi'(\varepsilon_1)}$$

$$GES(\theta_\gamma, M_\xi) \leq \frac{\max\{|c_1|, |c_2|\}}{\mathrm{E}\psi'(\varepsilon_1)} < \infty,\ \ M_\xi\text{-}\textit{класс всех вер. распределений}$$

4 Статистистический анализ авторегрессионных моделей.

Пусть $\ldots, S_{-1}, S_0, S_1, \ldots$ - стоимости ценных бумаг, например, акций. Величины

$$u_t = \ln(S_t/S_{t-1}) = \ln S_t - \ln S_{t-1}$$

называются логарифмическими приращениями и для описания их поведения часто используют стохастические разностные уравнения. Например, $AR(p)$-уравнение имеет вид

$$u_t = \beta_1 u_{t-1} + \beta_2 u_{t-2} + \ldots + \beta_p u_{t-p} + \varepsilon_t,\ t \in \mathbb{Z}$$

Здесь $\{\varepsilon_t\}$ - н.о.р. сл.в., $\mathrm{E}\varepsilon_1 = 0$, $0 < \mathrm{E}\varepsilon_1^2 = \sigma^2 < \infty$; $\beta_1, \ldots, \beta_p \in \mathbb{R}^1$ ($\beta_p \neq 0$) - это неизвестные коэффициенты авторегрессии.

Иногда удобно рассматривать $AR(p)$-уравнение для $t = 1, 2, \ldots$ при начальных условиях $u_{1-p}, \ldots, u_n$.

$ARCH(p)$-уравнение имеет вид:

$$u_t = \sigma_t \varepsilon_t,\ \text{где } \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_p u_{t-p}^2,\ t \in \mathbb{Z}$$

Здесь $\alpha_0 > 0,\ \alpha_k \geq 0,\ \alpha_p > 0,\ \{\varepsilon_t\}$ - н.о.р., $\mathrm{E}\varepsilon_1 = 0, \mathrm{E}\varepsilon_1^2 = 1$

4.1 Метод максимального правдоподобия и метод наименьших квадратов в авторегрессии.

$AR(1)$-модель.

$$u_t = \beta u_{t-1} + \varepsilon_t,\ t = 1, 2, \ldots;\ u_0 = 0,\ \beta \in \mathbb{R}^1,\ \{\varepsilon_t\} \text{ - н.о.р. сл.в, } \mathrm{E}\varepsilon_1 = 0,\ 0 < \mathrm{E}\varepsilon_1^2 < \infty \qquad (1)$$

Тогда

$$u_t = \beta(\beta u_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t = \varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1} + \beta^2 u_{t-2} = \ldots = \varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1} + \ldots + \beta^{t-1}\varepsilon_1$$

1. Стационарный случай $|\beta| < 1$.

$$u_t \xrightarrow{\text{с.к.}} u_t^0 \overset{\text{def}}{=} \sum_{j \geq 0} \beta^j \varepsilon_{t-j}$$

   и ряд среднеквадратично сходится, так как

$$\mathrm{E}(u_t - u_t^\circ)^2 = \mathrm{E}(\sum_{j \geq t} \beta^j \varepsilon_{t-j})^2 = \mathrm{E}\varepsilon_1^2 \sum_{j \geq t} \beta^{2j} = \underline{\underline{\mathcal{O}}}(\beta^{2t}) = \bar{\bar{o}}(1),\ t \to \infty$$

2. Критический случай (неустойчивая авторегрессия) $|\beta| = 1$

3. Взрывающаяся авторегрессия $|\beta| > 1$

$$\mathrm{D}u_t = \mathrm{D}\sum_{j=1}^{t-1} \beta^j \varepsilon_{t-j} = \mathrm{E}\varepsilon_1^2 \sum_{j=0}^{t-1} \beta^{2j} = \frac{\mathrm{E}\varepsilon_1^2(1 - \beta^{2t})}{1 - \beta^2} = \underline{\underline{\mathcal{O}}}(\beta^{2t}) \to \infty,\ t \to \infty \text{ эксп. быстро}$$

Мы знаем: оптимальный среднеквадратичный прогноз u_{n+1} по $u_1, \dots, u_n$ есть $\widetilde{u}_{n+1} = \beta u_n$. <u>Надо уметь оценивать β!</u>

Пусть $\varepsilon_1 \sim g(x)$ это плотность вероятности по мере Лебега. Положим

$$\mathcal{E} \overset{\text{def}}{=} (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)^T,\ U = (u_1, \dots, u_n)^T,\ B = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ -\beta & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -\beta & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда из (1)

$$\mathcal{E} = BU \Rightarrow U = B^{-1}\mathcal{E} \tag{2}$$

Плотность вероятности вектора $\mathcal{E}$ есть $g_{\mathcal{E}}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n g(x_i)$. Тогда пл.в. вектора U есть в силу (2)

$$g_n(y, \beta) = \frac{1}{|\det(B^{-1})|} g_{\mathcal{E}}(By) = \left| By = \begin{pmatrix} y_1 - \beta * 0 \\ y_2 - \beta y_1 \\ \vdots \\ y_n - \beta y_{n-1} \end{pmatrix} \right| = \prod_{t=1}^n g(y_t - \beta y_{t-1}),\ \text{где } y = (y_1, \dots, y_n)$$

О.м.п. для β - решение задачи

$$\ln g_U(U, \theta) = \sum_{t=1}^n \ln g(u_t - \theta u_{t-1}) \to \max_{\theta \in \mathbb{R}^1} \tag{3}$$

Для гладкой g уравнение максимального правдоподобия

$$\sum_{t=1}^n u_{t-1} \frac{g'(u_t - \theta u_{t-1})}{g(u_t - \theta u_{t-1})} = 0 \tag{4}$$

Пример $(\varepsilon_1 \sim N(0, \sigma^2))$**.** *Тогда* $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}$ *и задача* (3) *имеет вид*

$$\sum_{t=1}^n \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(u_t - \theta u_{t-1})^2}{2\sigma^2}\right\} \to \max_{\theta \in \mathbb{R}^1}$$

Последняя задача эквивалентна следующей:

$$\sum_{t=1}^n (u_t - \theta u_{t-1})^2 \to \min_{\theta \in \mathbb{R}^1} \tag{5}$$

Решение задачи (5) *- о.м.п.*

$$\widehat{\beta}_{n,ML} = \frac{\sum_{t=1}^n u_{t-1} u_t}{\sum_{t=1}^n u_{t-1}^2} \tag{6}$$

Если мы не предполагаем гауссовость ε_1*, то решение задачи* (5) *есть о.н.к.*

$$\widehat{\beta}_{n,LS} = \frac{\sum_{t=1}^n u_{t-1} u_t}{\sum_{t=1}^n u_{t-1}^2} \tag{7}$$

Оценка $\widehat{\beta}_{n,ML}$ *- параметрическая, а* $\widehat{\beta}_{n,LS}$ *- непараметрическая.*

Пример ($\varepsilon_1 \sim Lap(\lambda)$). *Тогда* $g(x)=\frac{\lambda}{2}\exp\{-\lambda|x|\},\ \lambda>0$. *Задача* (5) *имеет вид:*

$$\sum_{t=1}^{n}\ln\frac{\lambda}{2}\exp\{-\lambda|u_t-\theta u_{t-1}|\}\to\max_{\theta\in\mathbb{R}^1}$$

что эквивалентно задаче

$$\sum_{t=1}^{n}|u_t-\theta u_{t-1}|\to\min_{\theta\in\mathbb{R}^1} \tag{8}$$

Решение (8) *- о.м.п.* $\widehat{\beta}_{n,ML}$. *Если распределение* ε_1 *неизвестно, то решение* (8) *- о.н.к.* $\widehat{\beta}_{n,LS}$.

Оценка $\widehat{\beta}_{n,LS}$ *не выписывается явно!*

Рассмотрим случай гауссовских $\{\varepsilon_t\},\ \varepsilon_1\sim N(0,1)$. Пусть

$$d_n^2(\beta)\stackrel{\text{def}}{=}\begin{cases}\frac{n}{1-\beta^2}, & |\beta|<1\\ \frac{n^2}{2}, & |\beta|=1\\ \frac{\beta^{2n}}{(\beta^2-1)^2}, & |\beta|>1\end{cases}$$

Покажем, что $d_n^2(\beta)\sim J_n(\beta),\ n\to\infty$, где $J_n(\beta)$ - информации Фишера о параметре β, содержащаяся в $u_1,\dots,u_n$. Действительно, если $U=(u_1,\dots,u_n),\ y=(y_1,\dots,y_n)$, то пл. вер.

$$g_U(y,\beta)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}(y_t-\beta y_{t-1})^2\right\}$$

и поэтому

$$J_n(\beta)=\mathrm{E}_\beta\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\ln g_U(U,\beta)\right)^2=\mathrm{E}_\beta\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}(u_t-\beta u_{t-1})^2\right)\right)=$$

$$=\mathrm{E}_\beta\left(\sum_{t=1}^{n}u_{t-1}(u_t-\beta u_{t-1})\right)^2=\mathrm{E}_\beta\left(\sum_{t=1}^{n}u_{t-1}\varepsilon_t\right)^2=\sum_{t=1}^{n}\mathrm{E}_\beta u_{t-1}^2=\sum_{t=1}^{n-1}\mathrm{E}_\beta u_t^2$$

Но $u_t=\sum_{j=0}^{t-1}\beta^j\varepsilon_{y-j}$, и

$$\mathrm{E}u_t^2=\mathrm{E}(\sum_{j=0}^{t-1}\beta^j\varepsilon_{t-j})^2=\sum_{j=1}^{t-1}\beta^{2j}=\begin{cases}\frac{1-\beta^{2t}}{1-\beta^2}, & |\beta|\neq 1\\ t, & |\beta|=1\end{cases}$$

Значит,

$$J_N(\beta)=\begin{cases}\frac{u-1}{1-\beta^2}-\frac{\beta^2(1-\beta^{2(n-1)})}{(1-\beta^2)^2}, & |\beta|\neq 1\\ \frac{(n-1)(1+(n-1))}{2}, & |\beta|=1\end{cases}$$

Отсюда

$$J_n(\beta)\sim\begin{cases}\frac{u}{1-\beta^2}, & |\beta|<1\\ \frac{u^2}{2}, & |\beta|=1\\ \frac{\beta^{2n}}{(\beta^2-1)^2}, & |\beta|>1\end{cases}=d_n^2(\beta)$$

Распределение Коши с параметрами $(0,1)$ обозначается $K(0,1)$, $f(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$.

Пусть $W(s),\ s\in[0,1]$ - стандартный винеровский процесс. Обозначим $H(\beta),\ |\beta|=1$, распределение сл. в. β

$$H(\beta)=\frac{W^2(1)-1}{2^{3/2}\int_0^1 W^2(s)ds}$$

Теорема 1. *Пусть $\{\varepsilon_t\}$-н.о.р. сл.в., $\varepsilon_1 \sim N(0,1)$. Тогда*

$$d_n(\beta)(\widehat{\beta}_{n,ML}-\beta) \xrightarrow{d} \begin{cases} N(0,1), & |\beta|<1 \\ H(0,1), & |\beta|=1 \\ K(0,1), & |\beta|>1 \end{cases}, \quad n\to\infty$$

Доказательство.

$$\widehat{\beta}_{n,ML} = \frac{\sum_{t=1}^n u_{t-1}u_t}{\sum_{t=1}^n u_{t-1}^2} = \frac{\sum_{t=1}^n u_{t-1}(\beta u_{t-1}+\varepsilon_t)}{\sum_{t=1}^n u_{t-1}^2} = \beta + \frac{\sum_{t=1}^n \varepsilon_t u_{t-1}}{\sum_{t=1}^n u_{t-1}^2}$$

Положим для краткости

$$M_n \stackrel{\text{def}}{=} d_n^{-1}(\beta)\sum_{t=1}^n \varepsilon_t u_{t-1},\ V_n \stackrel{\text{def}}{=} d_n^{-2}(\beta)\sum_{t=1}^n u_{t-1}^2$$

Тогда

$$d_n(\beta)(\widehat{\beta}_{n,ML}-\beta) = \frac{M_n}{V_n}$$

Пусть $f_n(t,s)$ - совместная характеристическая функция M_n и V_n. Тогда (см [RAO M.M. Statist, 1978, V.6, pp. 185-190])

$$f_n(t,s) \to f(t,s) = \begin{cases} \exp\left\{is-\frac{t^2}{2}\right\}, & |\beta|<1 \\ (1+t^2-2is)^{-1/2}, & |\beta|>1 \end{cases} \tag{9}$$

1. $\underline{|\beta|<1}$. Тогда $f(t,s)$ есть характеристическая функция вектора $(\xi,1)^T$, где $\xi\sim N(0,1)$. Действительно,

$$\phi(t,s) = \mathrm{E}\exp\{i(t\xi+s)\} = e^{is}\phi_\xi(t) = \exp\left\{is-\frac{t^2}{2}\right\}$$

Теорема (О наследовании сходимости). *Пусть случайный вектор $S_n \underset{n\to\infty}{\xrightarrow{d}} S,\ S_n,S\in\mathbb{R}^k,\ H: R^k\to R^1$ - борелевская функция, непрерывная на множестве A таком, что* $\mathrm{P}(S\in A)=1$. *Тогда $H(S_n) \underset{n\to\infty}{\xrightarrow{d}} H(S)$*

В силу (9) $(M_n,V_n)^T \xrightarrow{d} (\xi,1)^T$. Если $H(x,y)=\frac{x}{y}$, то $H(x,y)$ непрерывна при $y>0$. Можно взять $A=\{y: y>0\},\ \mathrm{P}((\xi,1)^T\in A)=1$. В силу теоремы о наследовании слабой сходимости

$$d_n(\beta)(\widehat{\beta}_{n,ML}-\beta) = \frac{M_n}{V_n} = H(M_n,V_n) \xrightarrow{d} H(\xi,1)=\xi$$

2. $\underline{|\beta|>1}$. Тогда $f(t,s)$ есть хар. функция вектора $(\xi\eta,\eta^2)^T$, где $\xi,\eta\sim N(0,1)$, ξ и η независимы. Действительно,

$$\mathrm{E}\exp\left\{it(\xi\eta)+is\eta^2\right\} = \mathrm{E}\mathrm{E}\left(\exp\left\{\frac{it(\xi\eta)+is\eta^2}{2}\right\}\right) = \mathrm{E}\exp\left\{is\eta^2\right\}\mathrm{E}\left(\exp\left\{\frac{i(t\xi)\eta}{2}\right\}\right) =$$

$$= \mathrm{E}\exp\left\{is\eta^2\right\}\exp\left\{\frac{-t^2\eta^2}{2}\right\} = \mathrm{E}\exp\left\{i\left(s+\frac{it^2}{2}\right)\eta^2\right\} = \left|\mathrm{E}\exp\left\{ilx_1^2\right\} = (1-2il)^{-1/2}\right| =$$

$$= \left(1-2is+\frac{2t^2}{2}\right)^{-1/2} = (1+t^2-2is)^{-1/2} = \phi(t,s)$$

Значит, $(M_n, V_n)^T \xrightarrow{d} (\xi\eta, \eta^2)^T$,

$$d_n(\beta)(\widehat{\beta}_{n,ML}-\beta) = \frac{M_n}{V_n} \xrightarrow{d} \frac{\xi\eta}{\eta^2} = \frac{\xi}{\eta} \sim K(0,1)$$

3. $\underline{|\beta| = 1}$. Тогда

$$M_n = \frac{\sqrt{2}}{n}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t u_{t-1},\ V_n = \frac{2}{n^2}\sum_{t=1}^{n}u_{t=1}^2$$

Далее, $u_t = u_{t-1}t\varepsilon_t = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_t$.

Введем киферовский последовательный процесс

$$w_n(s) \stackrel{\text{def}}{=} n^{-1/2}\sum_{i\le ns}\varepsilon_i,\ \ s\in[0,1],\ \ w_n(s)=0,\ \ 0\le s\le 1/n$$

Тогда

$$n^{-1/2}u_{t-1} = w_n\left(\frac{t-1}{n}\right)$$

Пусть

$$\Delta w_n\left(\frac{t}{n}\right) \stackrel{\text{def}}{=} w_n\left(\frac{t}{n}\right) - w_n\left(\frac{t-1}{n}\right) = \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{n}}$$

Тогда

$$M_n = \sqrt{2}\sum_{t=1}^{n} w_n\left(\frac{t-1}{n}\right)\Delta w_n\left(\frac{t}{n}\right),\ V_n = 2\sum_{t=1}^{n} w_n^2\left(\frac{t-1}{n}\right)\frac{1}{n}$$

Пусть

$$U_n \stackrel{\text{def}}{=} \left(w_n\left(\frac{1}{n}\right), w_n\left(\frac{2}{n}\right), \ldots, w_n\left(\frac{n}{n}\right)\right)^T$$

Тогда $U_n = \left(\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{n}}, \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_n}{\sqrt{n}}\right)^T$ и это есть гауссовский вектор со средним ноль, $cov\left(w_n\left(\frac{i}{n}\right), w_n\left(\frac{j}{n}\right)\right) = \frac{\min(i,j)}{n}$

Действительно,

$$U_n \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

Для $i \le j$

$$cov\left(w_n\left(\frac{i}{n}\right), w_n\left(\frac{j}{n}\right)\right) = \mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{i}\varepsilon_t \times \sum_{k=1}^{j}\varepsilon_k\right) = \frac{1}{n}\mathrm{E}\left(\sum_{t=1}^{i}\varepsilon_i\right)^2 = \frac{i}{n} = \frac{min(i,j)}{n}$$

Введем вектор $U \overset{\text{def}}{=} \left(w\left(\frac{1}{n}\right), w\left(\frac{2}{n}\right), \dots, w\left(\frac{n}{n}\right)\right)^T$, где $w(s)$ - стандартный винеровский. Это гауссовский вектор со средним 0, $cov\left(w\left(\frac{i}{n}\right), w\left(\frac{j}{n}\right)\right) = \frac{\min(i,j)}{n}$. Значит,

$$U_n \overset{d}{=} U \Rightarrow \phi(U_n) \overset{d}{=} \phi(u), \text{ где } \phi \text{ - } \forall \text{ бор.} \tag{10}$$

Действительно, пусть $\xi \overset{d}{==} \eta,\ \xi, \eta \in \mathbb{R}^k$. Тогда $f(\xi) \overset{d}{==} f(\eta)$, так как $\mathrm{P}(f(\xi) \in A) = \mathrm{P}(\xi \in f^{-1}(A)) = \mathrm{P}(\eta \in f^{-1}(A)) = \mathrm{P}(f(\eta) \in A)$

Пусть

$$\overline{M}_n = \sqrt{2} \sum_{t=1}^{n} w\left(\frac{t-1}{n}\right) \Delta w\left(\frac{t}{n}\right),\ \overline{V}_n = 2 \sum_{t=1}^{n} w^2\left(\frac{t-1}{n}\right) \frac{1}{n}$$

Так как $M_n,\ V_n$ - борелевские функции от U_n, а $\overline{M}_n,\ \overline{V}_n$ - борелевские функции от U, то из (10) следует:

$$\frac{M_n}{V_n} \overset{d}{=} \frac{\overline{M}_n}{\overline{V}_n} \tag{11}$$

Но

$$\overline{M}_n \xrightarrow{\text{с.к.}} \sqrt{2} \int_0^1 w(s) dw(s),\ \overline{V}_n \xrightarrow{\text{с.к.}} 2 \int_0^1 w^2(s) ds$$

Значит, $(\overline{M}_n, \overline{V}_n)^T \overset{d}{\to} \left(\sqrt{2} \int_0^1 w(s) dw(s), 2 \int_0^1 w^2(s) ds\right)$, и, следовательно,

$$\frac{\overline{M}_n}{\overline{V}_n} \to \frac{\sqrt{2} \int_0^1 w(s) dw(s)}{2 \int_0^1 w^2(s) ds} = \frac{w^2(1) - 1}{2^{3/2} \int_0^1 w^2(s) ds} \tag{12}$$

Поскольку

$$d_n(\beta)(\widehat{\beta}_{n,ML} - \beta) = \frac{M_n}{V_n}$$

то соотношения (11)-(12) влекут утверждение теоремы.

$\square$

Теорема 2. *Пусть $\{\varepsilon_t\}$ - н.о.р. $N(0,1)$ сл.в. Тогда*

$$\sqrt{\sum_{t=1}^{n} u_{t-1}^2} (\widehat{\beta}_{n,ML} - \beta) \overset{d}{\to} \begin{cases} N(0,1), & |\beta| \neq 1 \\ \widetilde{H}(\beta), & |\beta| = 1 \end{cases}$$

Здесь

$$\widetilde{H}(\beta) \text{ - распр. сл.в. } \frac{w^2(1) - 1}{2\sqrt{\int_0^1 w^2(s) ds}} = \frac{\int_0^1 w(s) dw(s)}{\sqrt{\int_0^1 w^2(s) ds}}$$

Доказательство.

$$\sqrt{\sum_{t=1}^{n} u_{t-1}^2} (\widehat{\beta}_{n,ML} - \beta) = \frac{M_n}{\sqrt{V_n}}$$

1. $\underline{|\beta| < 1}$: Тогда $(M_n, V_n)^T \xrightarrow{d} (\xi, 1)^T$, значит

$$\frac{M_n}{\sqrt{V_n}} \xrightarrow{d} \frac{\xi}{\sqrt{1}} \sim N(0,1)$$

2. $\underline{|\beta| > 1}$: Тогда $(M_n, V_n)^T \xrightarrow{d} (\xi\eta, \eta^2)^T$, значит

$$\frac{M_n}{\sqrt{V_n}} \xrightarrow{d} \frac{\xi\eta}{\sqrt{\eta^2}} = \xi \cdot sgn\eta \sim N(0,1)$$

3. $\underline{|\beta| = 1}$: Тогда $(M_n, V_n)^T \xrightarrow{d} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(w^2(1) - 1), 2\int_0^1 w^2(s)ds\right)^T$, значит

$$\frac{M_n}{\sqrt{V_n}} \xrightarrow{d} \frac{w^2(1) - 1}{2\sqrt{\int_0^1 w^2(s)ds}}$$

$\square$

4.2 Об оценке наименьших квадратов в авторегрессии

Если $\{\varepsilon_t\}$ - н.о.р. $N(0,1)$ сл.в. в $AR(1)$ ур-нии

$$u_t = \beta u_{t-1} + \varepsilon_t,\ u_0 = 0,\ t = 1, 2, \dots,\ \beta \in \mathbb{R}^1 \tag{13}$$

то о.м.п. - решение задачи

$$\sum_{t=1}^{n} (u_t - \theta u_{t-1})^2 \to \min_{\theta \in \mathbb{R}^1} \tag{14}$$

Если же $\{\varepsilon_t\}$ - н.о.р. сл.в. с неизвестным распределением, то задача (14) определяет о.н.к.

$$\widehat{\beta}_{n,LS} = \frac{\sum_{t=1}^n u_{t-1}u_t}{\sum_{t=1}^n u_{t-1}^2}$$

О.н.к. $\widehat{\beta}_{n,LS}$ - непараметрическая!

Теорема 3. *Пусть $u_t = \beta u_{t-1} + \varepsilon_t,\ |\beta| < 1,\ t \in \mathbb{Z}$. Если $\{\varepsilon_t\}$ - н.о.р., $\mathrm{E}\varepsilon_1 = 0,\ 0 < \mathrm{E}\varepsilon_1^2 < \infty$, то*

$$\sqrt{n}(\widehat{\beta}_{n,LS} - \beta) \underset{n\to\infty}{\xrightarrow{d}} N(0, 1 - \beta^2)$$

Замечание. *1. Если $|\beta| = 1$, то при $\mathrm{E}\varepsilon_1 = 0,\ 0 < \mathrm{E}\varepsilon_1^2 < \infty$,*

$$d_n(\beta)(\widehat{\beta}_{n,LS} - \beta) \xrightarrow{d} H(\beta)$$

2. Если $|\beta| > 1$, то в усл. п. (1)

$$d_n(\beta)(\widehat{\beta}_{n,LS} - \beta) \xrightarrow{d} \frac{\sum_{j\geq 1} \beta^{-j}\varepsilon_j}{\sum_{j\geq 1} \beta^{-j}\varepsilon'_j},\ \{\varepsilon_t\},\ \{\varepsilon'_t\} \text{ - \textit{нез. посл. с н.о.р. комп.}}$$

Рассмотрим стационарное $AR(1)$ уравнение

$$u_t = \beta u_{t-1} + \varepsilon_t,\ t \in \mathbb{Z},\ |\beta| < 1,\ \{\varepsilon_t\} \text{ - н.о.р.},\ \mathrm{E}\varepsilon_1 = 0,\ 0 < \mathrm{E}\varepsilon_1^2 = \sigma^2 < \infty \tag{15}$$

Опр. 1. *Любая последовательность $\{u_t\}$, для которой в (15) левая часть равно правой почти наверное, называется* ***решением уравнения*** (15)

Теорема 4. *При $|\beta| < 1$ существует п.н. единственное строго стационарное решение уравнения* (15). *Оно имеет вид:*

$$u_t = \sum_{j \geq 0} \beta^j \varepsilon_{t-j},\ \text{ряд с.к. сходится.} \tag{16}$$

Решение (16) *является также стационарным в широком смысле, причем*

$$\mathrm{E}u_t = 0,\ R(\tau) = cov(u_t, u_{t+\tau}) = \frac{\sigma^2 \beta^{|\tau|}}{1 - \beta^2}$$

Доказательство. 1. Сущестование предела

Пусть $u_t^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{n} \beta^j \varepsilon_{t-j}$ - частная сумма ряда (16). Ряд с.к. сходится, если для некоторой случайной величины $S_t,\ \mathrm{E}S_t^2 < \infty$, существует с.к. предел

$$\lim_{n \to \infty} u_t^{(n)} = S_t,\ S_t - \text{ есть сумма ряда}$$

То есть $\mathrm{E}\left|u_t^{(n)} - S_t\right|^2 \to 0,\ n \to \infty$. Известно (по критерию Коши), что эта с.к. сходимость с.к. фундаментальности, то есть

$$\lim_{n,m \to \infty} \mathrm{E}\left|u_t^{(n)} - u_t^{(m)}\right|^2 = 0$$

Пусть для краткости $l \stackrel{\text{def}}{=} \min(m,n)$, $k \stackrel{\text{def}}{=} \max(m,n)$. Тогда

$$\mathrm{E}\left|u_t^{(n)} - u_t^{(m)}\right|^2 = \mathrm{E}\left|\sum_{j=l+1}^{k} \beta^j \varepsilon_{t-j}\right|^2 = \sigma^2 \sum_{j=l+1}^{k} \beta^{2j} \to 0,\ \text{т.к. } l, k \to \infty,\ |\beta| < 1$$

Значит, что ряд (16) с.к. сходится. Имеем п.н.

$$u_t = \sum_{j \geq 0} \beta^j \varepsilon_{t-j} = \varepsilon_t + \beta \sum_{j \geq 1} \beta^j \varepsilon_{t-j} = \varepsilon_t + \beta \sum_{s \geq 0} \beta^s \varepsilon_{t-s-1} = \varepsilon_t + \beta u_{t-1}$$

Значит, $\{u_t\}$ из (16) есть решение (15).

2. Строгая стационарность

Пусть $U(\tau) = (u_{t_1+\tau}, \ldots, u_{t_1+\tau})$. Надо показать, что $U(\tau) \stackrel{d}{=} U(0)$.
Пусть $U_n(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} (u_{t_1+\tau}^{(n)}, \ldots, u_{t_1+\tau}^{(n)})$

Задача. *Если $\{\xi_t\}$ - строго стац. посл., а $\eta_t = f(\xi_t, \xi_{t-1}, \ldots, \xi_{t-k})$, ($f$ - бор.), то $\{\eta_t\}$ - строго стац. посл.*

В силу этой задачи $\{u_t^{(n)}\}$ - строго стационарна, то есть распределение вектора $U_n(\tau)$ вовсе не зависит от τ, но

$$U_n(\tau) \xrightarrow[n\to\infty]{d} U(\tau), \text{ т.к. } u_t^{(n)} \xrightarrow{\text{с.к.}} u_t \tag{17}$$

Значит, в силу (17), распределение $U(\tau)$ от τ не зависит.

3. Единственность
Пусть $\{\widetilde{u}_t\}$ - любое строго стационарное решение (15). Тогда п.н.

$$\widetilde{u}_t = \beta\widetilde{u}_{t-1} + \varepsilon_t = \underbrace{\varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1} + \ldots + \beta^{k-1}\varepsilon_{t-k+1}}_{u_t^{(k)}} + \beta^k\widetilde{u}_{t-k}$$

Имеем

$$\mathrm{P}(\left|\beta^k\widetilde{u}_{t-k}\right| > \delta) = \mathrm{P}(\left|\beta^k\widetilde{u}_0\right| > \delta) \underset{|\beta|<1}{\to} 0,\ k \to \infty$$

Знаем, что $u_t^{(k)} \xrightarrow{\text{с.к.}} u_t = \sum_{j\geq 0}\beta^j\varepsilon_{t-j},\ \mathrm{E}u_t^2 < \infty$. Значит, $u_t^{(k)} + \beta^k\widetilde{u}_{t-k} \xrightarrow{\mathrm{P}} u_t,\ \to \infty$. Следовательно, п.н.

$$\widetilde{u}_t = p\lim_{k\to\infty}(u_t^{(k)} + \beta^k\widetilde{u}_{t-k}) = u_t = \sum_{j\geq 0}\beta^j\varepsilon_{t-j}$$

4. Стационарность в широком смысле
Последовательность $\{u_t\}$ из (16) стационарна в широком смысле так как она стационарная в узком смысле и есть момент до 2-го порядка. Тогда из (15)

$$\mathrm{E}u_t = \beta\mathrm{E}u_{t-1} + \mathrm{E}\varepsilon_t;\ (1-\beta)\mathrm{E}u_0 = 0,\ \mathrm{E}u_0 = 0$$

Для $\varepsilon > 0$ $\mathrm{E}u_{t+\tau}u_t = \beta\mathrm{E}u_{t+\tau-1}u_t + \mathrm{E}\varepsilon_{t+\tau}u_t$. Но $\mathrm{E}\varepsilon_{t+\tau}u_t = \mathrm{E}\varepsilon_{t+\tau}\mathrm{E}u_t = 0$, т.к. $\varepsilon_{t+\tau}$ и u_t нез.

$$\mathrm{E}u_t^2 = \beta^2\mathrm{E}u_{t-1}^2 + \underbrace{2\beta\mathrm{E}(u_{t-1}\varepsilon_t)}_{0} + \mathrm{E}\varepsilon_t^2 \Rightarrow (1-\beta^2)\mathrm{E}\underbrace{u_0^2}_{R(0)} = \mathrm{E}\varepsilon_0^2 = \sigma^2 \Rightarrow R(0) = \frac{\sigma^2}{1-\beta^2}$$

Получаем:

$$R(\tau) = \beta R(\tau-1),\ R(0) = \frac{\sigma^2}{1-\beta^2} \Rightarrow R(\tau) = \frac{\sigma^2\beta^{|\tau|}}{1-\beta^2},\ \forall\tau$$

□

4.3 Замечания о последовательностях с сильным перемешиванием (с.п.)

Опр. 2. *Пусть $\{u_t\},\ t \in \mathbb{Z}$, строго стационарная последовательность. Если*

$$\alpha(\tau) \overset{def}{=} \sup_{\substack{A\in M_{-\infty}^0 \\ B\in M_\tau^\infty}} |\mathrm{P}(AB) - \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)| \to 0,\ \tau \to \infty$$

То $\{u_t\}$ удовлетворяет условию ***сильного перемешивания с коэффициентом пер.*** *$\alpha(\tau)$. Здесь $M_a^b = \sigma\{u_t,\ a \leq t \leq b\}$*

Примеры. *1.* $\{\varepsilon_t\}$ - *н.о.р. сл.в. Здесь* $\alpha(\tau) = 0,\ \tau > 0$

2. $u_t = \varepsilon_t + \alpha_1\varepsilon_{t-1} + \ldots + \alpha_q\varepsilon_{t-q}$, $\{\varepsilon_t\}$ - *н.о.р. Здесь* $\alpha(\tau) = 0,\ \tau > q$

3. $u_t = \beta_1 u_{t-1} + \ldots + \beta_q u_{t-p} + \varepsilon_t$, $\{\varepsilon_t\}$ - *н.о.р.,* ε_1 *имеет Лебегову пл. в.,* $\mathrm{E}\varepsilon_1 = 0, \mathrm{E}\varepsilon_1^2 < \infty$
Mokkadem (1988): стр. стац. реш. $\{u_t\}$ *удовлетворяет усл. с.п. с* $\alpha(\tau) \le c\lambda^\tau,\ 0 < \lambda < 1$

Задача. *Если* $\{u_t\}$ *удовлетворяет условию сильного перемешивания с коэффициентом* $\alpha(\tau)$, *а* $\eta_t = f(u_t, u_{t-1}, \ldots, u_{t-k})$, *то* $\{\eta_t\}$ *уд. усл. с.п. с* $\alpha_\eta(\tau) \le \alpha(\tau - k),\ \tau > k$

Теорема (Закон больших чисел (З.Б.Ч.))**.** *Если* $\{u_t\},\ t \in \mathbb{Z}$, *строго стац. посл. с с.п.,* $\mathrm{E}\,|u_1| < \infty$, *то*

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} u_t \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} \mathrm{E}u_1$$

Теорема (Центральная предельная теорема (Ц.П.Т.))**.** *Пусть* $\{u_t\},\ t \in \mathbb{Z}$, *стр. стац. посл. с с.п.,* $\mathrm{E}u_1 = 0,\ \mathrm{E}\,|u_1|^{2+\delta} < \infty$ *при некотором* $\delta > 0$. *Пусть* $\sum_{\tau\ge1}(\alpha(\tau))^{\frac{2}{2+\delta}} < \infty$. *Тогда*

1. *Ряд* $\Delta \stackrel{def}{=} \mathrm{E}u_0^2 + 2\sum_{\tau\ge1}\mathrm{E}u_0u_\tau$ *сходится абсолютно*

2. *Если* $\Delta > 0$, *то* $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n} u_t \xrightarrow{d} N(0, \Delta^2)$

Следствие. *Если* $\{u_t\}$ *уд. с.п.,* $\mathrm{E}u_1 = m,\ \mathrm{E}\,|u_1 - m|^{2+\delta} < \infty,\ \sum_{\tau\ge1}(\alpha(\tau))^{\frac{2}{2+\delta}} < \infty,\ \overline{\Delta}^2 = \mathrm{D}u_t + 2\sum_{t\ge1}R(\tau)$, *то при* $\widetilde{\Delta} > 0$

$$\sup_x\left|\mathrm{P}(\sqrt{n}(\overline{u} - m) \le x) - \Phi\left(\frac{x}{\widetilde{\Delta}}\right)\right| \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Мы рассматриваем $AR(1)$ модель.

$$u_t = \beta u_{t-1} + \varepsilon_t,\ t \in \mathbb{Z} \tag{18}$$

в которой $\{\varepsilon_t\}$ - н.о.р. сл.в., $\mathrm{E}\varepsilon_1 = 0,\ 0 < \sigma^2 = \mathrm{E}\varepsilon_1^2 < \infty,\ |\beta| < 1$. Пусть функция распределения ε_1 есть $G(x),\ g(x) = G'(x)$, $G(x)$ и $g(x)$ неизвестны. Пусть наблюдения $u_0, \dots, u_n$ - выборка из стационарного решения $AR(1)$ уравнения. Мы берем оценкой неизвестного парметра β о.н.к., которая получается решением задачи

$$\sum_{t=1}^{n} (u_t - \theta u_{t-1})^2 \to \min_{\theta}$$

Эту оценку обозначим $\widehat{\beta}_{n,LS}$, очевидно,

$$\widehat{\beta}_{n,LS} = \frac{\sum_{t=1}^{n} u_{t-1} u_t}{\sum_{t=1}^{n} u_{t-1}^2} \tag{18'}$$

Наша ближайшая цель - доказать теорему 3,

Вот что нам известно и что будем использовать

1. В силу доказанной теоремы 4 стационарное решение уравнения (18) при $|\beta| < 1,\ \mathrm{E}\varepsilon_1 = 0,\ 0 < \mathrm{E}\varepsilon_1^2 = \sigma^2 < \infty$ имеет вид

$$u_t = \sum_{j \geq 0} \beta^j \varepsilon_{t-j},\ \text{ряд с.к. сход.} \tag{19}$$

   Последовательность $\{u_t\},\ t \in \mathbb{Z}$, и (19) является строго стационарной, а также стационарной в широком смысле

$$\mathrm{E}u_t = 0,\ R(\tau) = cov(u_t, u_{t+\tau}) = \frac{\sigma^2 \beta^{|\tau|}}{1 - \beta^2},\ \tau \in \mathbb{Z}$$

   Поскольку $u_{t-1} = u_{t-1}(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots)$, сл.в. ε_t не зависит от $\{u_{t-1}, u_{t-2}, \dots\}$

2. Строго стационарная последовательность (19) удовлетворяет условию сильного перемешивания с коэффициентом перемешивания $\alpha(\tau) \leq c\lambda^\tau,\ 0 < \lambda < 1$, если ε_1 имеет плотность вероятности $g(x)$.

3. З.Б.Ч. для посл. с с.п.

4. Ц.П.Т. для посл. с с.п.

5. Mokkadem (1988): Если $\{u_t\}$ удовлетворяет условию сильного перемешивания с коэффициентом $\alpha(\tau)$, а $\eta_t = f(u_t, u_{t-1}, \dots, u_{t-k})$, то $\{\eta_t\}$ уд. усл. с.п. с $\alpha_\eta(\tau) \leq \alpha(\tau - k),\ \tau > k$

Доказательство теоремы 3. Предположим дополнительно, что $\mathrm{E}\,|\varepsilon_1|^{2+\delta} < \infty$ при некотором $\delta > 0$. Пусть еще сущесвтует плотность вероятности $\varepsilon_1 \sim g(x)$ по мере Лебега.

1. Покажем, что ряд (19) сходится не только в L^2 (с.к.), но и в $L^{2+\delta}$, и, значит, $\mathrm{E}\,|u_1|^{2+\delta} < \infty$

   Справедливо неравенство Миньковского: если $\mathrm{E}\,|\xi|^{2+\delta} < \infty,\ \mathrm{E}\,|\eta|^{2+\delta} < \infty$ при $\delta > 0$, то

$$\{\mathrm{E}\,|\xi+\eta|^{2+\delta}\}^{\frac{1}{2+\delta}} \le \{\mathrm{E}\,|\xi|^{2+\delta}\}^{\frac{1}{2+\delta}} + \{\mathrm{E}\,|\eta|^{2+\delta}\}^{\frac{1}{2+\delta}}$$

   Рассмотрим частную сумму $S_n \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{n} \beta^j \varepsilon_{t-j},\ l \overset{\text{def}}{=} \min(m,n),\ k \overset{\text{def}}{=} \max(m,n)$,

$$\{\mathrm{E}\,|S_n - S_m|^{2+\delta}\}^{\frac{1}{2+\delta}} = \{\mathrm{E}\left|\sum_{j=l+1}^{k} \beta^j \varepsilon_{t-j}\right|^{2+\delta}\}^{\frac{1}{2+\delta}} \le$$

$$\le \sum_{j=l+1}^{k} \{\mathrm{E}\left|\beta^j \varepsilon_{t-j}\right|^{2+\delta}\}^{\frac{1}{2+\delta}} = \mathrm{E}\{|\varepsilon_1|^{2+\delta}\}^{\frac{1}{2+\delta}} \sum_{j=l+1}^{k} |\beta|^j \xrightarrow[|\beta|<1,\ l,k\to\infty]{} 0$$

   Значит, последовательность $\{S_n\}$ частных сумм фундаментальна, и ряд $u_t = \sum_{j\ge 0} \beta^j \varepsilon_{t-j}$ сходится в $L^{2+\delta}$, $\mathrm{E}\,|u_1|^{2+\delta} < \infty$

2.
$$\widehat{\beta}_{n,LS} = \frac{\sum_{t=1}^{n} u_{t-1} u_t}{\sum_{t=1}^{n} u_{t-1}^2} \overset{\text{п.н.}}{=} \beta + \frac{\sum_{t=1}^{n} u_{t-1}\varepsilon_t}{\sum_{t=1}^{n} u_{t-1}^2}$$
$$\sqrt{n}(\widehat{\beta}_{n,LS} - \beta) = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n} u_{t-1}\varepsilon_t}{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} u_{t-1}^2}$$

3. В силу результатов Mokkadem (1988) посл. $\{u_t\}$ удовлетворяет условию сильного перемешивания с коэффициентом $\alpha(\tau) \le c\lambda^\tau,\ 0 < \lambda < 1$. Последовательность $\{\varepsilon_t u_{t-1} = (u_t - \beta u_{t-1})u_{t-1}\}$ тоже удовлетворяет условию сильного перемешивания с эксп. убывающим коэфф. $\alpha'(\tau) \le c'\lambda^\tau$,

$$\sum_{\tau\ge 1} (\alpha'(\tau))^{\frac{\delta}{2+\delta}} \le \sum_{\tau\ge 1} (c'\lambda^\tau)^{\frac{\delta}{2+\delta}} = \frac{(c'\lambda)^{\frac{\delta}{2+\delta}}}{1-\lambda^{\frac{\delta}{2+\delta}}} < \infty$$

$$\mathrm{E}\varepsilon_t u_{t-1} = \mathrm{E}\varepsilon_t \mathrm{E}u_{t-1} = 0;\ \mathrm{E}\,|\varepsilon_t u_{t-1}|^{2+\delta} = \mathrm{E}\,|\varepsilon_1|^{2+\delta}\,\mathrm{E}\,|u_1|^{2+\delta} < \infty$$

   В силу Ц.П.Т. для посл. с с.п.

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t u_{t-1} \xrightarrow{d} N(0,\Delta^2),\ \text{где } \Delta^2 = \mathrm{E}(\varepsilon_1 u_0)^2 + \underbrace{2\sum_{\tau\ge 1} \mathrm{E}(\varepsilon_1 u_0 \varepsilon_{1+\tau} u_\tau)}_{0} = \mathrm{E}\varepsilon_1^2 \mathrm{E}u_0^2$$

4.
$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} u_{t-1}^2 \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathrm{E}u_0^2 \text{ в силу З.Б.Ч. для посл с с.п.}$$

5. Значит

$$\sqrt{n}(\widehat{\beta}_{n,LS}-\beta) \xrightarrow{d} \frac{1}{\mathrm{E}u_0^2} N(0, \mathrm{E}\varepsilon_1^2 \mathrm{E}u_0^2) = N\left(0, \frac{\mathrm{E}\varepsilon_1^2 \mathrm{E}u_0^2}{(\mathrm{E}u_0^2)^2}\right) = N\left(0, \frac{\mathrm{E}\varepsilon_1^2}{\mathrm{E}u_0^2}\right) = N(0, 1-\beta^2)$$

□

Вот два важных вопроса:

1. Как построить непараметрические оценки, асимптотически гауссовские, и с меньшей ас. дисперсией, чем у о.н.к?
2. Будет ли о.н.к. $\widehat{\beta}_{n,LS}$ B-робастна?

Асимптотические доверительные интервалы

В силу (18')

$$\frac{\sqrt{n}(\widehat{\beta}_{n,LS}-\beta)}{\sqrt{1-\widehat{\beta}_{n,LS}^2}} = \underbrace{\frac{\sqrt{n}(\widehat{\beta}_{n,LS}-\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}}}_{\xrightarrow{d} N(0,1)} \underbrace{\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\widehat{\beta}_{n,LS}^2}}}_{\xrightarrow{\mathrm{P}} 1} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1) \text{ по лемме Слуцкого}$$

Пусть $\xi_{1-\alpha/2}$ - квантиль уровня $1-\alpha/2$ ф.р. $\Phi(x) \sim N(0,1)$. Тогда

$$\mathrm{P}(\left|\frac{\sqrt{n}(\widehat{\beta}_{n,LS}-\beta)}{\sqrt{1-\widehat{\beta}_{n,LS}^2}}\right| < \xi_{1-\alpha/2}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1-\alpha$$

То есть при больших n примерно с вероятностью $1-\alpha$

$$\widehat{\beta}_{n,LS} - \frac{\sqrt{1-\widehat{\beta}_{n,LS}^2}}{\sqrt{n}}\xi_{1-\alpha/2} < \beta < \widehat{\beta}_{n,LS} + \frac{\sqrt{1-\widehat{\beta}_{n,LS}^2}}{\sqrt{n}}\xi_{1-\alpha/2}$$

Получили доверительный интервал для β ас. уровня $1-\alpha$.

Проверка гипотез

Проверим гипотезу $H_0 : \beta = \beta_0$ против альтернатив $H_1 : \beta \neq \beta_0$. Критическое множество (критерий):

$$S_\alpha = \left\{ u_0, \dots, u_n : |\frac{\sqrt{n}(\widehat{\beta}_{n,LS}-\beta_0)}{\sqrt{1-\beta_0^2}} > \xi_{1-\alpha/2} \right\}$$

. Тогда, очевидно, $\mathrm{P}(H_1|H_0) \to \alpha$, а так как при H_1:

$$\frac{\sqrt{n}(\widehat{\beta}_{n,LS}-\beta_0)}{\sqrt{1-\beta_0^2}} = \frac{\sqrt{n}(\widehat{\beta}_{n,LS}-\beta)}{\sqrt{1-\beta_0^2}} + \frac{\sqrt{n}(\beta-\beta_0)}{\sqrt{1-\beta_0^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}}$$

то $\mathrm{P}(H_0|H_1) \to 0$. Значит

$$\begin{cases} \mathrm{P}(H_0|H_0) \to 1-\alpha \\ \mathrm{P}(H_1|H_1) \to 1 \end{cases} \qquad n \to \infty$$

Вероятность принять правильную гипотезу близка к единице!

О робастности о.н.к.

$$u_t = \beta u_{t-1} + \varepsilon_t,\ t \in \mathbb{Z},\ \{\varepsilon_t\} \text{ - н.о.р, } \mathrm{E}\varepsilon_1 = 0,\ 0 < \sigma^2 = \mathrm{E}\varepsilon_1^2 < \infty,\ |\beta| < 1$$

Пусть наблюдаются

$$y_t = u_t + z_t^\gamma \xi_t,\ t = 0, 1, \ldots, n;$$

$\{u_t\}$ - стац.;
$\{z_t^\gamma\}$ - н.о.р., $z_1^\gamma \sim Br(\gamma)$ и $0 \le \gamma \le 1$;
$\{\xi_t\}$ - н.о.р., $\xi_1 \sim \mu_\xi,\ \mu_x \xi \in M_2$, т.е. $\mathrm{E}\xi_1^2 < \infty$;
Последовательности $\{u_t\}$, $\{z_t^\gamma\}$, $\{\xi_t\}$ независимы между собой. Пусть

$$\widehat{\beta}_{n,LS}^y = \frac{\sum_{t=1}^n y_{t-1} y_t}{\sum_{t=1}^n} y_{t-1}^2 \text{ - о.н.к., построенная по засоренным данным } \{y_t\}$$

Найдем ее функционал влияния.

Первый способ.

Предположим дополнительно, что у ε_1 сущесвтует плотность вероятности $g(x) = G'(x)$. Тогда последовательность $\{u_t\}$ удовлетворяет условиям с.п., а так как $\{z_t^\gamma \xi_t\},\ t \in \mathbb{Z}$, - посл. н.о.р. сл.в., которые не зависят от $\{u_t\}$, то $\{y_t\}$ - строго стационрная последовательность с с.п. Кроме того,

$$\mathrm{E}\,|y_1| < \infty,\ \text{т.к. } \mathrm{E}y_1^2 = \mathrm{E}(u_1 + z_1^\gamma \xi_1)^2 = \mathrm{E}u_1^2 + 2\underbrace{\mathrm{E}u_1}_{0}\mathrm{E}z_1^\gamma \mathrm{E}\xi_1 + \mathrm{E}(z_1^\gamma \xi_1)^2 = \mathrm{E}u_1^2 + \gamma \mathrm{E}\xi_1^2 < \infty$$

Значит, в силу З.Б.Ч. для посл. с с.п. имеем:

$$\widehat{\beta}_{n,LS}^y = \frac{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^n y_{t-1} y_t}{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^n y_t^2} \xrightarrow{\mathrm{P}} \theta_\gamma^{LS} = \frac{\mathrm{E}y_0 y_1}{\mathrm{E}y_0^2} = \frac{\mathrm{E}(u_0 + z_0^\gamma \xi_0)(u_1 + z_1^\gamma \xi_1)}{\mathrm{E}(u_1 + z_1^\gamma \xi_1)^2} = \frac{\mathrm{E}u_0 u_1 + \gamma^2 (\mathrm{E}\xi_0)^2}{\mathrm{E}u_0^2 + \gamma \mathrm{E}\xi_0^2}$$

Отсюда

$$IF(\theta_\gamma^{LS}, \mu_\xi) = \left.\frac{d\theta_\gamma^{LS}}{d\gamma}\right|_{\gamma=0} = -\beta(1-\beta^2)\frac{\mathrm{E}\xi_0^2}{\mathrm{E}\varepsilon_1^2}$$

Если M_2 - множество распределений с конечным 2-ым моментом, то при $\beta \ne 0$

$$GES(\theta_\gamma^{LS}, M_2) = \sup_{\mu_\xi \in M_2} \left| IF(\theta_\gamma^{LS}, \mu_\xi) \right| = \infty$$

О.н.к. неробастна!

Второй способ.

Предположим опять, что ε_1 имеет плотность вероятности (Лебегову) $g(x)$. Тогда, как говорилось, последовательность $\{y_t\}$ удовлетворяет усл. с.п.

Оценка $\widehat{\beta}_{n,LS}^y$ - корень уравнения

$$l_{n,LS}(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^n y_{t-1}(y_t - \theta y_{t-1}) = 0$$

1.

$$l_{n,LS}(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^n y_{t-1}(y_t - \theta y_{t-1}) \xrightarrow{\mathrm{P}} \mathrm{E}y_0(y_1 - \theta y_0),\ \theta \in \mathbb{R},\ 0 \le \gamma \le 1$$

То есть $\Lambda_{LS}(\gamma,\theta) = \mathrm{E}y_0(y_1-\theta y_0)$. Пусть

$$H_{00} = (z_0^\gamma = 0, z_1^\gamma = 0); \quad H_{01} = (z_0^\gamma = 0, z_1^\gamma = 1);$$
$$H_{10} = (z_0^\gamma = 1, z_1^\gamma = 0); \quad H_{11} = (z_0^\gamma = 1, z_1^\gamma = 1);$$

Тогда

$$\Lambda_{LS}(\gamma,\theta) = \sum_{i,j=0}^{1} \mathrm{E}(y_0(y_1-\theta y_0)|H_{ij})\mathrm{P}(H_{ij}) = (1-\gamma)^2\mathrm{E}u_0(u_1-\theta u_0)+$$

$$+\gamma(1-\gamma)\mathrm{E}(u_0+\xi_0)(u_1-\theta u_0-\theta\xi_0)+\gamma^2\mathrm{E}(u_0+\xi_0)(u_1+\xi_1-\theta u_0-\theta\xi_1)$$

Значит, функция $\Lambda_{LS}(\gamma,\theta)$ определена при всех γ и θ.

2.
$$\Lambda_{LS}(0,\beta) = \mathrm{E}u_0(u_1-\beta u_0) = \mathrm{E}u_0\xi_1 = 0$$

3. $\frac{\partial\Lambda_{LS}(\gamma,\theta)}{\partial\gamma}$, $\frac{\partial\Lambda_{LS}(\gamma,\theta)}{\partial\theta}$ сущесвтуют и непрерывны по паре (γ,θ) при $\gamma,\theta \in \mathbb{R}^1$

$$\frac{\partial\Lambda_{LS}(\gamma,\theta)}{\partial\gamma} = -\beta\mathrm{E}\xi_0^2,\ \frac{\partial\Lambda_{LS}(\gamma,\theta)}{\partial\theta} = -\mathrm{E}u_0^2$$

4.
$$\lambda(\beta) = -\mathrm{E}u_0^2 = -\frac{\mathrm{E}\varepsilon_1^2}{1-\beta^2} < 0$$

Так как $\phi_t(J_n,\theta)$ непр., то

$$IF(\theta_\gamma^{LS},\mu_\xi) = -\left(\frac{\partial\Lambda_{LS}(0,\beta)}{\partial\theta}\right)^{-1}\frac{\partial\Lambda_{LS}(0,\beta)}{\partial\gamma} = -\frac{(-\beta\mathrm{E}\xi_0^2)(1-\beta^2)}{-\mathrm{E}\varepsilon_1^2} = -\beta(1-\beta^2)\frac{\mathrm{E}\xi_0^2}{\mathrm{E}\varepsilon_1^2}$$

Очевидно, что при $\beta \neq 0$

$$GES(\theta_\gamma^{LS}, M_2) = \infty$$

то есть $\widehat{\beta}_{n,LS}^y$ не B - робастна!

Задача.

$$u_t = \beta u_{t-1}+\varepsilon_t,\ t\in\mathbb{Z},\ \{\varepsilon_t\} \text{ - н.о.р}, \ \mathrm{E}\varepsilon_1 = 0,\ 0<\sigma^2 = \mathrm{E}\varepsilon_1^2 < \infty,\ |\beta|<1,\ \beta\neq 0$$

$$y_t = u_t + z_t^\gamma\xi_t$$

Оценка $\widehat{\beta}_n$ - ищется как корень уравнения

$$\sum_{t=1}^{n} y_{t-2}(y_t-\theta y_{t-1}) = 0$$

1. *Будет ли оценка $\widehat{\beta}_n$ B-робастной?*
2. *Чему равен фунционал влияния 2-го порядка?*

4.4 О процедурах наименьших квадратов в $AR(p)$

Авторегрессия порядка p ($AR(p)$ - модель) описывается стохастическим разностным уравнением

$$u_t = \beta_1 u_{t-1} + \beta_2 u_{t-2} + \ldots + \beta_p u_{t-p} + \varepsilon_t,\ t \in \mathbb{Z} \tag{20}$$

Здесь $\{\varepsilon_t\}$ - н.о.р. сл.в., $\mathrm{E}\varepsilon_1 = 0,\ 0 < \mathrm{E}\varepsilon_1^2 = \sigma^2 < \infty$; $\beta_1, \ldots, \beta_p$ - неизвестные коэффициенты авторегрессии, $\beta_j \in \mathbb{R}$

Опр. 3. *Уравнение*

$$x^p = \beta_1 x^{p-1} + \ldots + \beta_p \tag{21}$$

называется характеристическим уравнением, соответствующим уравнению (20).

Теорема 5. *Пусть корни характеристического уравнения* (21) *по модулю меньше единицы. Тогда уравнение* (20) *имеет почти наверное единственное строго стационарное решение*

$$u_t = \sum_{j \geq 0} \gamma_j \varepsilon_{t-j},\ \textit{ряд с.к. сходится (в } L_2\textit{)} \tag{22}$$

Коэффициенты $\{\gamma_j\}$ *определяются рекуррентным соотношением*

$$\gamma_j = \beta_1 \gamma_{j=1} + \ldots + \beta_p \gamma_{j-p},\ j = 1, 2, \ldots;$$

$$\gamma_0 = 1,\ \gamma_j = 0, j < 0;$$
$$|\gamma_j| \leq c\lambda^j,\ 0 < \lambda < 1$$

Ряд (16) определяет также стационарную в широком смысле последовательность с нулевым средним.

В случае $p = 1$ утверждение Теоремы 5 совпадает с утверждением доказанной нами Теоремы 4. Доказательство теоремы 5 при $p > 1$ идейно не отличается от доказательства теоремы 4, но технически громоздко. Мы его опускаем.

Замечание. *Поскольку из* (22) $u_t = u_t(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \ldots)$, *то сл.в.* ε_{t+1} *не зависит от множества сл.в.* $\{u_t, u_{t-1}, \ldots\}$.

Прогнозирование

Пусть наблюдения $u_1, u_2, \ldots, u_n$ будут выборкой из стационарного решения (22). Пусть $n \geq p$. Оптимальный с.к. прогноз ненаблюдаемой величины u_{n+1} по наблюдениям $u_1, u_2, \ldots, u_n$ есть решение задачи

$$\mathrm{E}\left|u_{n+1} - \phi(u_1, u_2, \ldots, u_n)\right|^2 \to \min_{\substack{\text{бор. } \phi: \\ \mathrm{E}\phi(u_1, u_2, \ldots, u_n) < \infty}}$$

Мы знаем, что решение этой задачи есть

$$u^*_{n+1} = \phi^*(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \mathrm{E}(u_{n+1} | u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

Имеем:

$$\mathrm{E}(u_{n+1} | u_1, u_2, \ldots, u_n) = \mathrm{E}\left(\sum_{j=1}^{p} \beta_j u_{n+1-j} + \varepsilon_{n+1} | u_1, u_2, \ldots, u_n\right) =$$

$$= \mathrm{E}\left(\sum_{j=1}^{p}\beta_j u_{n+1-j}|u_1,u_2,\ldots,u_n\right) + \mathrm{E}\left(\varepsilon_{n+1}|u_1,u_2,\ldots,u_n\right) = \beta_1 u_n + \beta_2 u_{n-1} + \ldots + \beta_p u_{n+1-p}$$

так как $\mathrm{E}\left(\varepsilon_{n+1}|u_1,u_2,\ldots,u_n\right) = \mathrm{E}\varepsilon_{n+1} = 0$ в силу Замечания. Итак, опт. с.к. прогноз

$$\boxed{u^*_{n+1} = \beta_1 u_n + \ldots + \beta_p u_{n+1-p}}$$

Чтобы построить u^*_{n+1} надо оценить $\beta_1,\ldots,\beta_p$.

Построим о.н.к. неизвестных $\beta_1,\ldots,\beta_p$ по наблюдениям $u_{n-p},\ldots,u_n$.

Положим $\widetilde{u}_{t-1} \stackrel{\text{def}}{=} (u_{t-1},\ldots,u_{t-p})^T,\ \beta = (\beta_1,\ldots,\beta_p)^T$, тогда (20) имеет вид

$$u_t = \widetilde{u}^T_{t-1}\beta + \varepsilon_t,\ t \in \mathbb{Z}$$

Оценка наименьших квадратов вектора β - решение задачи

$$\sum_{t=1}^{n}(u_t - \widetilde{u}^T_{t-1}\theta)^2 \to \min_{\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_p)^T\in\mathbb{R}^1} \tag{23}$$

Решение задачи (23) совпадает с решением системы уравнений

$$\sum_{t=1}^{n} u_{t-j}(u_t - \widetilde{u}^T_{t-1}\theta) = 0,\ j = 1,\ldots,p$$

Запишем эти уравнения в векторной форме

$$\sum_{t=1}^{n}\widetilde{u}_{t-1}(u_t - \widetilde{u}^T_{t-1}\theta) = 0 \tag{23'}$$

Решение этого векторного уравнения

$$\widehat{\beta}_{n,LS} = \left(\sum_{t=1}^{n}\widetilde{u}_{t-1}\widetilde{u}^T_{t-1}\right)^{-1}\sum_{t=1}^{m}\widetilde{u}_{t-1}u_t$$

Если $p\times p$ матрица $\sum_{t=1}^{n}\widetilde{u}_{t-1}\widetilde{u}^T_{t-1}$ вырождена, то полагаем $\widehat{\beta}_{n,LS} = 0$

Теорема 6. *Пусть $\{\varepsilon_t\}$ - н.о.р. сл.в., $\mathrm{E}\varepsilon_1 = 0,\ 0 < \mathrm{E}\varepsilon_1^2 = \sigma^2 < \infty$. Пусть корни характеристического уравнения (21) по модулю меньше единицы. Тогда*

$$\sqrt{n}(\widehat{\beta}_{n,LS} - \beta) \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,\delta^2 K^{-1}),\ \text{где } K = \mathrm{E}\widetilde{u}_0\widetilde{u}_0^T > 0$$

Замечание 1. *В теореме 6 речь идет о сходимости по распределению векторов $\xi_n \stackrel{def}{=} \sqrt{n}(\widehat{\beta}_{n,LS} - \beta)$ к гауссовскому вектору $\xi \sim N(0,\sigma^2 K^{-1})$*

Напомним, что если $\xi_n,\xi \in \mathbb{R}^p$ случ. векторы, то $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, если

$$\int_{\mathbb{R}^p} g(x)d\mathrm{P}_n(x) \to \int_{\mathbb{R}^p} g(x)d\mathrm{P}(x) \tag{24}$$

для любой непрерывной и ограниченной функции $g:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^1$. Здесь P_n и P - распределения векторов ξ_n и ξ. Можно проверить, что это определенеие равносильно следующему: для *любой непрерывной и ограниченной $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{C}$ выполнено (24). Разумеется, (24) означает, что $\mathrm{E}g(\xi_n) \to \mathrm{E}g(\xi)$. Мы знаем, что если $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, то для любого постоянного вектора $\lambda \in \mathbb{R}^p$*

$$\lambda^T \xi_n \xrightarrow{d} \lambda^T \xi \tag{25}$$

Действительно, функция $\pi(x) = \lambda^T x$ непрерывна, и (25) следует из теоремы о наследовании сходимости, но верно и обратное: если выполнено соотношение (25), то $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$.

Действительно, функция $g(x) = e^{ix}$, $x \in \mathbb{R}^1$, ограниченная непрерывная функция $g : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{C}$. Тогда из (25) следует, что

$$\mathrm{E}g(\xi_n) = \mathrm{E}e^{i\lambda^T \xi_n} \to \mathrm{E}g(\xi) = \mathrm{E}e^{i\lambda^T \xi},\ \forall \lambda \in \mathbb{R}^p$$

Последнее соотношение означает, что характеристическая функция вектора ξ_n $\mathrm{E}e^{i\lambda^T \xi_n}$ при любом значении аргумента λ сходится к характеристической функциии $\mathrm{E}e^{i\lambda^T \xi}$ вектора ξ. Значит $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$.

Лемма 1 (Прием Крамера-Уолда)**.** *Если $\xi_n, \xi \in \mathbb{R}^p$, то*

$$\xi_n \xrightarrow{d} \xi \Leftrightarrow \lambda^T \xi_n \xrightarrow{d} \lambda^T \xi,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}^p$$

> *Этот прием сводит сходимость по распределению векторов ξ_n, ξ к сходимости скаляров $\lambda^T \xi_n$, $\lambda^T \xi$, но при всех λ*

Замечание 2. *Пусть $\{\xi_n\}$ - сл. посл., $\xi_n \in \mathbb{R}^k$.*
Будем писать $\xi_n = \overline{\overline{o}}_p(1)$, $n \to \infty$, если $\xi_n \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$.
Будем говорить, что последовательность $\{\xi_n\}$ ограничена по вероятности и писать $\underline{\underline{\mathcal{O}}}_p(1)$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists A = A(\varepsilon) :\ \sup_n \mathrm{P}(|\xi_n| > A) < \varepsilon$$

Задача. *Пусть $\xi_n \in \mathbb{R}^k$, $\eta_n \in \mathbb{R}^1$.*

1. *Если $\xi_n = \underline{\underline{\mathcal{O}}}_p(1)$, а $\eta_n = \overline{\overline{o}}_p(1)$, то $\xi_n \eta_n = \overline{\overline{o}}_p(1)$*

2. *Если $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, то $\xi_n = \underline{\underline{\mathcal{O}}}_p(1)$.*

Доказательство теоремы 6. Мы докажем теорему при дополнительных предположениях: $\mathrm{E}\,|\varepsilon_1|^{2+\delta} < \infty$ для некоторой $\delta > 0$; существует плотность вероятности $g(x)$ по мере Лебега.

1. Покажем, что матрица $K = \mathrm{E}\widetilde{u}_0 \widetilde{u}_0^T > 0$. Для $\alpha \in \mathbb{R}^p$, $\alpha \neq 0$, имеем:

   $$\alpha^T K \alpha = \mathrm{E}(\alpha^T \widetilde{u}_0)(\widetilde{u}_0^T \alpha) = \mathrm{E}\,|\alpha \widetilde{u}_0|^2$$

   Но $u_t = \sum_{s \geq 0} \gamma_s \varepsilon_{t-s} = \varepsilon_t + \sum_{s \geq 1} \gamma_s \varepsilon_{t-s}$, ряд сходится в $L^{2+\delta}$.

   Значит,

   $$\alpha^T \widetilde{u}_0 = \alpha^T (u_{-1}, \ldots, u_{-p})^T = \alpha_1 \varepsilon_{-1} + \sum_{s \geq 1} \gamma_s \varepsilon_{-1} + \alpha_2 u_{-2} + \ldots + \alpha_p u_{-p}$$

   Случайная величина ε_{-1} абсолютно непрерывна и не зависит от остальных слагаемых. Значит, при $\alpha_1 \neq 0$ величина $\alpha^T \widetilde{u}_0$ абсолютно непрерывна, $\mathrm{P}(\alpha^T \widetilde{u}_0 \neq 0) = 1$, $\mathrm{E}\left|\alpha^T \widetilde{u}_0\right|^2 > 0$. Если $\alpha_1 = 0$, то повторяем рассуждения для первой ненулевой комп. вектора α

2. Покажем, что следующий вектор

$$K^{-1}\sqrt{n}\sum_{t=1}^{n}\widetilde{u}_{t-1}\varepsilon_t \xrightarrow{d} N(0,\sigma^2K^{-1})$$

Для этого достаточно показать, что $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n}\widetilde{u}_{t-1}\varepsilon_t \xrightarrow{d} N(0,\sigma^2K)$ и применить Теорему о слабой сходимости. В силу леммы 1 достаточно проверить, что $\forall\lambda\in\mathbb{R}^p$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n}\lambda^T\widetilde{u}_{t-1}\varepsilon_t = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n}\eta_t \xrightarrow{d} N(0,\sigma^2\lambda^TK\lambda) \tag{26}$$

Последовательность η_t есть функция от $\{u_t\}$, это строго стац. последовательность с сильным перемешиванием с коэффициентом перемешивания $\alpha(\tau)\neq c\lambda^T,\ 0<\lambda<1$.

$$\mathrm{E}\eta_t = \mathrm{E}(\lambda^T\widetilde{u}_{t-1})\mathrm{E}\varepsilon_t = 0$$

$$\mathrm{E}\left|\eta_t\right|^{2+\delta} = \mathrm{E}\left|\lambda^T\widetilde{u}_{t-1}\right|^{2+\delta}\underbrace{\mathrm{E}\left|\varepsilon_t\right|^{2+\delta}}_{<\infty\text{ по усл.}}<\infty,\ \text{т.к. }\mathrm{E}\left|u_t\right|^{2+\delta}<\infty\text{ (см. док-во Т. 3)}$$

$$\left\{\mathrm{E}\left|\lambda^T\widetilde{u}_{t-1}\right|^{2+\delta}\right\}^{\frac{1}{2+\delta}} \le \sum_{i=1}^{p}|\lambda_i|\left\{\mathrm{E}\left|u_1\right|^{2+\delta}\right\}^{\frac{1}{2+\delta}}<\infty\text{ в силу нер-ва Минковсокго}$$

Крмое того, при $t<s$

$$\mathrm{E}\eta_t\eta_s = \mathrm{E}\left\{(\lambda^T\widetilde{u}_{t-1}\varepsilon_t)(\lambda^T\widetilde{u}_{s-1})\right\}\mathrm{E}\varepsilon_s = 0$$

Кроме того,

$$\sum_{\tau\ge1}(\alpha(\tau))^{\frac{2}{2+\delta}}<\infty$$

В силу Ц.П.Т. для последовательности с с.п.

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n}\eta_t \xrightarrow{d} N(0,\mathrm{E}\eta_0^2),\ \mathrm{E}\eta_0^2=\sigma^2\lambda^TK\lambda$$

Т.о. доказали (26), поэтому

$$K^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n}\widetilde{u}_{t-1}\varepsilon_t \xrightarrow{d} N(0,\sigma^2K^{-1}) \tag{27}$$

3. Пусть $K_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\widetilde{u}_{t-1}\widetilde{u}_{t-1}^T$. Если $\det(K_n)>0$, то

$$\widetilde{\beta}_{n,LS} = K_n^{-1}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\widetilde{u}_{t-1}u_t = K_n^{-1}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\widetilde{u}_{t-1}(\widetilde{u}_{t-1}^T\beta+\varepsilon_t) = \beta + K_n^{-1}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\widetilde{u}_{t-1}\varepsilon_t$$

Значит, при невырожденной K_n

$$\sqrt{n}(\widehat{\beta}_{n,LS}-\beta) = K_n^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n}\widetilde{u}_{t-1}\varepsilon_t$$

В силу З.Б.Ч. для посл. с с.п.

$$K_n \xrightarrow{\text{п.н.}} K = \mathrm{E}\widetilde{u}_0\widetilde{u}_0^T > 0,\ \det(K) > 0$$

Поэтому $\det(K_n) \xrightarrow{\text{п.н.}} \det(K) > 0$, и если $S_n = \{\omega : \det(K_n) > 0\}$, то $\mathrm{P}(S_n) \to 1$.

Напомним,

$$\widehat{\beta}_{n,LS} = \begin{cases} K_n^{-1}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^n \widetilde{u}_{t-1}u_t,\ \omega \in S_n \\ 0,\ \omega \in \overline{S}_n \end{cases}$$

Покажем, что

$$\gamma_n \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{n}(\widehat{\beta}_{n,LS} - \beta) - K^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^n \widetilde{u}_{t-1}\varepsilon_t \xrightarrow{\mathrm{P}} 0 \tag{28}$$

Из (27) и (28) следует, что

$$\sqrt{n}(\widehat{\beta}_{n,LS} - \beta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2 K^{-1})$$

Действительно, если ξ_n и η_n - любые случайные векторы такие, что $\xi_n = \eta_n + \alpha_n$, и $\eta_n \xrightarrow{d} \xi$, а $\alpha_n = \overline{\overline{o}}_p(1)$, то $\lambda^T\xi_n = \lambda^T\eta_n + \lambda^T\alpha_n \xrightarrow{d} \lambda^T\xi$ в силу Леммы Слуцкого (т.к. $\lambda^T\eta_n \xrightarrow{d} \lambda^T\xi$, а $\lambda^T\alpha_n \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$) $\forall\lambda \in \mathbb{R}^p$.

Значит, $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ в силу Леммы 1.

Пусть

$$S_n^\Delta = \left\{\omega :\ \det(K_n) \geq \Delta = \frac{1}{2}\det(K)\right\}$$

Тогда

$$\mathrm{P}(\overline{S_n^\Delta}) \leq \mathrm{P}(|\det(K_n) - \det(K)| > \Delta) \to 0 \Rightarrow \mathrm{P}(S_n^\Delta) \to 1$$

Далее $|\bullet|$ - Евклидова норма матрицы или вектора на S_n^Δ

$$\sqrt{n}(\widehat{\beta}_{n,LS} - \beta) = K_n^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^n \widetilde{u}_{t-1}\varepsilon_t$$

Поэтому $\forall\delta > 0$:

$$\mathrm{P}(|\gamma_n| > \delta) = \mathrm{P}\left(\left|(K_n^{-1} - K^{-1})\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^n \widetilde{u}_{t-1}\varepsilon_t\right| > \delta, S_n^\Delta\right) + \mathrm{P}\left(|\gamma_n| > \delta, \overline{S}_n^\Delta\right)$$

Вторая вероятность не больше $\mathrm{P}(\overline{S}_n^\Delta) \to 0$. Первая вероятность не больше

$$\mathrm{P}(\left|K_n^{-1}\right| |K - K_n| \left|K^{-1}\right| \left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^n \widetilde{u}_{t-1}\varepsilon_t\right| > \delta, S_n^\Delta) \tag{29}$$

В (29) $|K - K_n| \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$, $|K^{-1}|$ - кон. число, $\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^n \widetilde{u}_{t-1}\varepsilon_t\right| = \underline{\underline{\mathcal{O}}}_p(1)$.

Рассмотрим $|K_n^{-1}|$ на S_n^Δ. Пусть A_{ji}^n и A_{ji} - алгебр. доп. в K_n и K соответственно. Тогда:

$$K_n^{-1} = (a_{ij}^n) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{A_{ji}^n}{\det(K_n)}\right)$$

На S_n^{Δ}:

$$\left|a_{ij}^n\right| \le \frac{\left|A_{ij}^n\right|}{\Delta}$$

Пусть $B_n = (b_{ij}^n) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\left|A_{ji}^n\right|}{\Delta}\right)$, $B = (b_{ij}) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{|A_{ji}|}{\Delta}\right)$ - $p \times p$ матрицы.

Поскольку $b_{ij}^n \xrightarrow{\text{п.н.}} b_{ij}$, то $|B_n| \xrightarrow{\text{п.н.}} |B|$, и поэтому $|K_n^{-1}| \le |B_n| = \underline{\underline{\mathcal{O}}}_p(1)$.

Поэтому вероятность в (27) не больше

$$\mathrm{P}(|B_n|\,|K-K_n|\,\left|K^{-1}\right|\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n}\widetilde{u}_{t-1}\varepsilon_t\right| > \delta) \to 0$$

Соотношение (28) доказано, а значит и Теорема.

$\square$

4.5 Проверка гипотез о порядке авторегрессии