Содержание

1 Асимптотические оптимальные оценки

Пусть сл. векторы $\xi_n, \xi \in \mathbb{R}^K$, и определены на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Пусть функция распределения ξ_n есть $F_n(x)$, хар. ф-ция есть $\phi_n(t)$, а распределение есть Q_n. Для вектора ξ функцию распределения, хар. ф-цию и распреденеие обозначим $F(x)$, $\phi(t)$, Q соответственно.

Опр. 1. *Функция распределения $F_n(x)$ сходится к $F(x)$ при $n \to \infty$ в основном (пишем $F_n(x) \Rightarrow F$), если $F_n(x) \to F(x)\ \forall x \in C(F)$*

Опр. 2. *Распределение Q_n сходится к распределению Q слабо (пишем $Q_n \xrightarrow{w} Q$), если $\forall$ непреревной и ограниченной $g : \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^1$*

$$\int_{\mathbb{R}^K} g(x) Q_n(dx) \to \int_{\mathbb{R}^K} g(x) Q(dx)$$

или, эквивалентно, $\mathrm{E}g(\xi_n) \to \mathrm{E}g(\xi)$.

Теорема 1.
Следующие условия эквивалентны:

1. $F_n(x) \Rightarrow F$
2. $Q_n \xrightarrow{w} Q$
3. $\phi_n(t) \to \phi\ \forall t \in \mathbb{R}^K$

Если выполненое любое из условий $1-3$, будем писать $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ и говорить, что ξ_n сходится к ξ по распределению.

Теорема 2 (О наследовании сходимости)**.**
Пусть сл. векторы $\xi_n,\ \xi \in \mathbb{R}^K,\ H : \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^1$ непрерывная. Тогда:

1. *Если $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, то $H(\xi_n) \xrightarrow{d} H(\xi)$*
2. *Если $\xi_n \xrightarrow{\mathrm{P}} \xi$, то $H(\xi_n) \xrightarrow{\mathrm{P}} H(\xi)$*

1.1 Лемма Слуцкого

Пусть $\xi_n, \xi, \eta_n, a \in \mathbb{R}^1, \xi_n \xrightarrow{d} \xi$, а $\eta_n \xrightarrow{\mathrm{P}} a$. Тогда:

1. $\xi_n + \eta_n \xrightarrow{d} \xi + a$
2. $\xi_n \eta_n \xrightarrow{d} a\xi$

Доказательство. Достаточно показать, что вектор

$$(\xi_n, \eta_n)^T \xrightarrow{d} (\xi, a)^T \tag{1}$$

Действительно, если (1) верно, то при $H(x,y) = x + y$ в силу Теоремы 2 получаем пункт (1) леммы, а при $H(x,y) = xy$ - пункт (2).

Для доказательства (1), проверим, что хар. ф-ция вектора $(\xi_n, \eta_n)^T$ сходится к хар. функции вектора $(\xi, \eta)^T$. Имеем:

$$\left|\mathrm{E}e^{it\xi_n+is\eta_n} - \mathrm{E}e^{it\xi+isa}\right| \le \left|\mathrm{E}e^{it\xi_n+is\eta_n} - \mathrm{E}e^{it\xi_n+isa}\right| + \left|\mathrm{E}e^{it\xi_n+isa} - \mathrm{E}e^{it\xi+isa}\right| = \alpha_n + \beta_n$$

$$\alpha_n \le \mathrm{E}\left|e^{it\xi_n}(e^{it\eta_n+isa})\right| = \mathrm{E}\left|e^{it\eta_n+isa}\right| = \mathrm{E}g(\eta_n),\ \ g(x) \overset{\mathrm{def}}{=} \left|e^{isx} - e^{isa}\right|$$

Ф-ция g(x) непрерывна и ограничена, а т.к. $\eta_n \xrightarrow{d} a$, то в силу Теоремы 2 $\mathrm{E}g(\eta_n) \to \mathrm{E}g(a) = 0$ Итак, $\alpha \to 0$.

$$\beta_n = \left|\mathrm{E}e^{isa}(e^{it\xi_n} - e^{it\xi})\right| = \left|e^{isa}\mathrm{E}(e^{it\xi_n} - e^{it\xi})\right| = \left|\mathrm{E}(e^{it\xi_n} - e^{it\xi})\right| \to 0$$

т.к. $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ и $\phi_n(t) \to \phi(t)$. □

Пусть наблюедние $X \sim P_\theta,\ \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^K$, а $\widehat{\theta}_n$ - оценка θ

Опр. 3. *Если* $\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \Sigma(\theta))\ \forall\theta \in \Theta$ *и коварицонная матрица* $0 < \Sigma(\theta) < \infty$*, то* $\widehat{\theta}_n$ *называется асимптотической нормальной оценкой.*

Опр. 4. *Если* $\widehat{\theta}_n \xrightarrow{\mathrm{P}} \theta\ \forall\theta \in \Theta$*, то* $\widehat{\theta}_n$ *называется состоятельной оценкой.*

Замечание 1. *Дальше* $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^1$*, то есть* θ *и* $\widehat{\theta}_n$ *- скаляры.*

Если $\widehat{\theta}_n$ - состоятельная оценка θ, то при больших и $\widehat{\theta}_n \approx \theta$ с вероятностью, близкой к единице.

Если $\widehat{\theta}_n$ - асимптотическая нормальная оценка θ (так как θ и $\widehat{\theta}_n$ скаляры: $\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2(\theta))\ 0 < \sigma^2 < \infty,\ \forall\theta \in \Theta$), то:

1. $\widehat{\theta}_n$ - состоятельная оценка θ, так как $\widehat{\theta}_n - \theta = n^{-1/2}\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$ в силу п. (2) леммы Слуцкого.

2. Скорость сходимости $\widehat{\theta}_n$ к θ есть $O(\sqrt{n})$

3. При больших n со сл. в. $\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta)$ можно обращаться (с осторожностью!) как с Гауссовской величиной.

   Например, пусть дисперсия предельного Гауссовского закона $\sigma^2(\theta)$ будет непреревной ф-цией θ. Тогда

$$\frac{\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta)}{\sigma(\widehat{\theta}_n)} = \underbrace{\frac{\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta)}{\sigma(\theta)}}_{\xrightarrow{d} N(0,1)} \underbrace{\frac{\sigma(\theta)}{\sigma(\widehat{\theta}_n)}}_{\xrightarrow{\mathrm{P}} 1} \xrightarrow{d} \eta \sim N(0,1)$$

   в силу п. 2 леммы Слуцкого. Значит,

$$\mathrm{P}_\theta\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta)}{\sigma(\widehat{\theta}_n)}\right| < \xi_{1-\alpha/2}\right) \to \mathrm{P}(|\eta| < \xi_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

   То есть примерно с вероятностью $1 - \alpha$ выполнено неравенство, или эквивалентно раскроем по модулю

$$\underbrace{\widehat{\theta}_n - n^{-1/2}\sigma(\widehat{\theta}_n)\xi_{1-\alpha/2} < \theta < \widehat{\theta}_n + n^{-1/2}\sigma(\widehat{\theta}_n)\xi_{1-\alpha/2}}_{\text{Асимптотический доверительный интервал уровня } 1-\alpha}$$

4. Асимптотические Гауссовские оценки можно сравнивать между собой:
   Если $\sqrt{n}(\widehat{\theta}_{i,n} - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_i^2(\theta)),\ i = 1, 2, \ldots$, то можно посчитать асимптотическую относительную эффективность (АОЭ):

$$e_{1,2} = \frac{\sigma_2^2(\theta)}{\sigma_1^2(\theta)}$$

   Напомним, $e_{1,2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n'(x)}{n(x)}$, где $\sqrt{n}(\widehat{\theta}_{1,n} - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_1^2(\theta))$ и $\sqrt{n}(\widehat{\theta}_{2,n'} - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_1^2(\theta))$.

Вопрос: Есть ли такая оценка θ_n^*, что АОЭ $e_{\theta_n^*, \widehat{\theta}_n}(\theta) \geq 1\ \forall \widehat{\theta}_n$ и всех $\theta \in \Theta$, то есть эффективнее всех остальных?

Если да, то θ_n^* требует не больше наблюдений, чем любая $\widehat{\theta}_n$, чтобы достичь одинаковой с $\widehat{\theta}_n$ точности. Ясно, что пределеная дисперсия $\sqrt{n}(\theta_n^* - \theta)$ должна быть не больше асимптотической дисперсии $\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta)$ для любой асимптотической Гауссовской оценки $\widehat{\theta}_n$. Но какова самая маленькая асимптотическая дисперсия у $\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta)$?

1.2 Теорема Бахадура

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ - н. о. р. сл. в., X_1 имеет плотность вероятности $f(x, \theta),\ \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^1$, по мере ν. Пусть выполнены следующие условия:

1. Θ - интервал.
2. Носитель $N_f = \{x : f(x, \theta) > 0\}$ не зависит от θ.
3. $\forall x \in N_f$ плотность $f(x, \theta)$ дважды непрерывно дифференцируема по θ
4. Интеграл $\int f(x, \theta)\nu(dx)$ можно дважды дифференцировать по θ, внося знак дифференцирования под знак интеграла.
5. Информация Фишера $0 < i(\theta) < \infty\ \forall \theta \in \Theta$
6. $\left|\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln(f(x, \theta))\right| \leq M(x)\ \forall x \in N_f,\ \theta \in \Theta,\ \mathrm{E}_\theta M(X_1) < \infty$

Тогда, если $\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2(\theta))$, то $\sigma^2(\theta) \geq \frac{1}{i(\theta)}$ всюду за исключением множества Лебеговой меры нуль.

Замечание 2. *Если вдобавок $\sigma^2(\theta)$ и $i(\theta)$ непрерывны, то $\sigma^2(\theta) \geq \frac{1}{i(\theta)}$ при всех $\theta \in \Theta$.*

Доказательство. Без доказательства. □

Опр. 5. *Если $\theta, \widehat{\theta}_n \in \mathbb{R}^1$ и $\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \frac{1}{i(\theta)}),\ n \to \infty,\ \forall \theta \in \Theta$, причем $0 < i(\theta) < \infty$, то $\widehat{\theta}_n$ называется* ***асимптотически эффективной оценкой****.*

Вопрос: Вообще можно ли найти такую оценку $\widehat{\theta}_n$? Да

Дальше $X = (X_1, \ldots, X_n),\ X \sim \mathrm{P}_\theta,\ \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^1$. Условие (А):

1. Θ - интервал, $\mathrm{P}_{\theta_1} \neq P_{\theta_2}$ при $\theta_1 \neq \theta_2$.
2. $X_1, \ldots, X_n$ - независимые одинаково распределенные случайные величины
3. X_1 имеет плотность вероятности $f(x, \theta)$ по мере ν
4. Носитель $N_f = \{x : f(x, \theta) > 0\}$ не зависит от θ.
5. Плотность вектора X есть $p(x, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$.

Опр. 6. *Функция $p(X, \theta)$ как функция θ при фиксированном X называется* ***правдоподобием*** *функции.*

$$L_n(X, \theta) = \ln p(X, \theta) = \sum_{i=1}^n \ln f(X_i, \theta)$$

называется логарифмическим правдоподобием.

Пусть θ_0 будет истинное значение параметра.

Лемма 1 (Неравенство Йенсена)**.** *Пусть $g(x)$ выпукла книзу борелевская функция,* $\mathrm{E}\,|\xi| < \infty$*,* $\mathrm{E}\,|g(\xi)| < \infty$*. Тогда* $g(\mathrm{E}\xi) \leq \mathrm{E}g(\xi)$*. Если ξ не является почти наверное константой и g строго выпукла, то неравенство строгое.*

Теорема 1 (Экстремальное свойство правдоподобия)**.**
Пусть выполнено Условие (А). Пусть $E_{\theta_0}|\ln f(X_1, \theta)| < \infty,\ \forall \theta \in \Theta$*. Тогда*

$$\mathrm{P}_{\theta_0}(p(X, \theta_0) > p(X, \theta)) \to 1,\ n \to \infty,\ \theta_0 \neq \theta$$

Доказательство.

$$p(X, \theta_0) > p(X, \theta) \Leftrightarrow \ln p(X, \theta_0) > \ln p(X, \theta) \Leftrightarrow$$

$$\eta_n \stackrel{\text{def}}{=} n^{-1} \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{f(X_i, \theta)}{f(X_i, \theta_0)}\right) < 0$$

То есть надо показать, что $\mathrm{P}_{\theta_0}(\eta_n < 0) \to 1$. Но по слабому закону больших чисел:

$$\eta_n = n^{-1} \sum \ln\left(\frac{f(X_i, \theta)}{f(X_i, \theta_0)}\right) \xrightarrow{\mathrm{P}} E_{\theta_0} \ln\left(\frac{f(X_1, \theta)}{f(X_1, \theta_0)}\right)$$

Возьмем функцию $-\ln x$ - строго выпукла вниз и $\frac{f(X_1, \theta)}{f(X_1, \theta_0)}$ не является п.н. константой (так как иначе если плотности п.н. совпадают, то и распределения при разных значениях совпадают, что противоречит Условию(А)(1)).

В силу неравенства Йенсена:

$$\mathrm{E}_{\theta_0} \ln \frac{f(X_1, \theta)}{f(X_1, \theta_0)} < \ln \mathrm{E}_{\theta_0} \frac{f(X_1, \theta)}{f(X_1, \theta_0)} = \ln \int_{N_f} \frac{f(x, \theta)}{f(x, \theta_0)} f(x, \theta_0) \nu(dx) = \ln 1 = 0$$

Но если η_n сходится по вероятности к отрицательному числу, то $P_{\theta_0}(\eta_n < 0) \to 1$ $\square$

В силу теоремы 1 естественно брать оценкой то значение θ, которое максимизирует $p(X, \theta)$ при данном X

Опр. 7. *Случайная величина $\widehat{\theta}_n \in \Theta$ называется **оценкой максимального правдоподобия (о.м.п.)**, если $p(X, \widehat{\theta}_n) = \max_{\theta\in\Theta} p(X, \theta)$, или эквивалентно $L_n(X, \widehat{\theta}_n) = max_{\theta\in\Theta} L_n(X, \theta)$*

Итак, о.м.п $\widehat{\theta}_n = \arg\max_{\theta\in\Theta} L_n(X, \theta)$.

Если в $\forall\theta \in \Theta$ максимум не достигается, то о.м.п. не существует.

Если Θ - интервал, $L_n(X, \theta)$ - гладкая по θ функция, то θ удовлетворяет уравнению правдоподобия

$$\frac{\partial}{\partial\theta} L_n(X, \theta) = 0 \tag{2}$$

Теорема 2 (О состоятельности решения уравнения правдоподобия)**.**
Пусть выполнено Условие (A). Пусть $\forall x \in N_f$ $\exists$ непрерывная производная $f'_\theta(x, \theta)$. Тогда уравнение (2) с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \to \infty$ имеет решение $\in \Theta$. При этом среди всех таких решений есть такой корень $\widehat{\theta}_n$, что он является состоятельнаой оценкой θ_0

Доказательство. Пусть $S_n = \{\omega\}$, при которых уравнение (2) имеет решение для $\theta \in \Theta$. Тогда теорема 2 утверждает:

1. $P_{\theta_0}(S_n) \to 1$.

2. Существует такое решение $\widehat{\theta}_n \in \Theta$, что

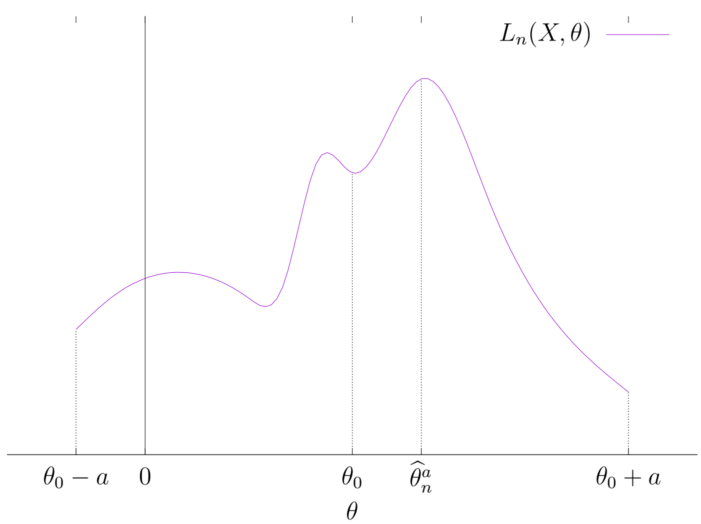
$$P_{\theta_0}\left(\left|\widehat{\theta}_n - \theta_0\right| < \varepsilon, S_n\right) \to 1,\ n \to \infty,\ \forall\varepsilon > 0$$

<u>Докажем пункт 1</u>: Выберем малое $a > 0$ так, что на $(\theta_0 - a, \theta_0 + a) \subseteq \Theta$. Пусть

$$S_n^a = \{\omega : L_n(X, \theta_0) > L_n(X, \theta_0 - a), L_n(X, \theta_0) > L_n(X, \theta_0 + a)\}$$

В силу теоремы 1 $\mathrm{P}_{\theta_0}(S_n^a) \to 1$

При $\omega \in S_n^a$ функция $L_n(X, \theta)$ имеет локальный максимум $\widehat{\theta}_n^a$ на интервале $(\theta_0 - a, \theta_0 + a)$



Значит, $\frac{\partial}{\partial\theta} L_n(X, \widehat{\theta}_n^a) = 0$. Тогда $\mathrm{P}_{\theta_0}(S_n) \geq \mathrm{P}_{\theta_0}(S_n^a) \to 1$, так как $S_n^a \subseteq S_n$, и пункт 1 доказан.

Докажем пункт 2: $\forall n$ при $\omega \in S_n$ может существовать целое множество корней $\{\theta_n^*\}$. Выберем в этом множестве корень $\widehat{\theta}_n$, ближайший к θ_0. Это можно сделать, так как функция $\frac{\partial}{\partial\theta}L_n(x,\theta)$ непрерывна по θ, и последовательность корней есть корень. Этот корень $\widehat{\theta}_n$ и есть состоятельная оценка θ. Покажем это:

$\forall$ малого $\varepsilon > 0$:

$$\mathrm{P}_{\theta_0}(\left|\widehat{\theta}_n - \theta_0\right| < \varepsilon, S_n) \geq \mathrm{P}_{\theta_0}(\left|\widehat{\theta}_n^\varepsilon - \theta_0\right| < \varepsilon, S_n^\varepsilon) \tag{3}$$

Так как $S_n^\varepsilon \subseteq S_n,\ (\omega : \left|\widehat{\theta}_n^\varepsilon - \theta_0\right| < \varepsilon) \subseteq (\omega : \left|\widehat{\theta}_n - \theta_0\right| < \varepsilon)$

Но $\mathrm{P}_{\theta_0}(\left|\widehat{\theta}_n^\varepsilon - \theta_0\right| < \varepsilon, S_n^\varepsilon) \underset{\text{т.к. события из } S_n^\varepsilon \text{ лежат в } \left|\widehat{\theta}_n^\varepsilon - \theta_0\right| < \varepsilon}{=} \mathrm{P}_{\theta_0}(S_n^\varepsilon) \to 1$, значит в силу (3)

$$\mathrm{P}_{\theta_0}(\left|\widehat{\theta}_n - \theta_0\right| < \varepsilon, S_n) \to 1$$

$\square$

Замечание 3. *Пусть*

$$\theta_n^* = \begin{cases} \textit{сост. корню уравнения правдоподобия, если он сущ.} \\ \theta',\ \theta' \in \Theta, \textit{иначе} \end{cases}$$

Тогда случайная величина θ_n^* всегда определена, и $\theta_n^* \xrightarrow{\mathrm{P}} \theta_0$, так как

$$\mathrm{P}(|\theta_n^* - \theta_0| < \varepsilon) = \mathrm{P}(\left|\widehat{\theta}_n - \theta_0\right| < \varepsilon, S_n) + \mathrm{P}(|\theta' - \theta_0| < \varepsilon, \overline{S}_n) \to 1$$

Ясно, что

$$\frac{\partial}{\partial\theta}L_n(X, \theta_n^*) = \overline{\overline{o}}_p(1) \tag{4}$$

Так как производная отлична от нуля только на $\overline{S}_n$.

Будем называть θ_n^* ***обобщенным состоятельным корнем уравнения правдоподобия***

Теорема 3 (Об асимптотической эффективности состоятельности решения)**.**
Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$, $\{X_i\}$ - н.о.р. сл.в., и удовлетворяются предположения Теоремы Бахадура, в которых условия 3 и 6 заменены на предположения о третьей, а не второй производной. То есть

$$\left|\frac{\partial^3}{\partial\theta^3}\ln f(x,\theta)\right| \leq M(x)\ \forall x \in N_f,\ \forall\theta \in \Theta,\ \mathrm{E}_{\theta_0}M(X_1) < \infty$$

Тогда, если θ_n^* - обобщенный состоятельный корень из теоремы 2, то

$$\sqrt{n}(\theta_n^* - \theta_0) \xrightarrow{d} N(0, \frac{1}{i(\theta_0)})$$

То есть θ_n^* - асимптотическая эффективная оценка.

Доказательство. Будем обозначать $\frac{\partial}{\partial\theta}L_n(X,\theta), \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}L_n(X,\theta), \dots$ через $L_n'(\theta), L_n^{(2)}(\theta), \dots$.

Для фиксированного X в силу формулы Тейлора и последнего замечания:

$$\overline{\overline{o}}_p(1) = L_n'(\theta_n^*) = L_n'(\theta_0) + L_n^{(2)}(\theta_0)(\theta_n^* - \theta_0) + \frac{1}{2}L_n^{(3)}(\widetilde{\theta}_n)(\theta_n^* - \theta_0)^2,\ \widetilde{\theta}_n \in (\theta_0, \theta_n^*)$$

Отсюда,

$$\sqrt{n}(\theta_n^* - \theta_0) = -\frac{n^{-1/2}L_n'(\theta_0) + \overline{\overline{o}}_p(1)}{n^{-1}(L_n^{(2)}(\theta_0) + \frac{1}{2}L_n^{(3)}(\widetilde{\theta}_n)(\theta_n^* - \theta_0))} \tag{5}$$

Рассмотрим числитель (5) и покажем, что

$$n^{-1/2}L_n'(\theta_0) = n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}\frac{f_\theta'(X_i,\theta_0)}{f(X_i,\theta_0)} \xrightarrow{d} \xi \sim N(0, i(\theta_0)) \tag{6}$$

Действительно,

$$\mathrm{E}_{\theta_0}\frac{f_{\theta_0}'(X_1,\theta_0)}{f(X_i,\theta_0)} = \int_{N_f}\frac{f_\theta'(x,\theta_0)}{f(x,\theta_0)}f(x,\theta_0)\nu(dx) = 0$$

$$\mathrm{D}_{\theta_0}\frac{f_{\theta_0}'(X_1,\theta_0)}{f(X_i,\theta_0)} = \mathrm{E}_{\theta_0}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X_1,\theta_0)\right)^2 - \underbrace{\left(\mathrm{E}_{\theta_0}\frac{f_{\theta_0}'(X_1,\theta_0)}{f(X_i,\theta_0)}\right)^2}_{=\ 0} \underset{\text{по опр.}}{=} i(\theta_0)$$

Так как f, f' - борелевские функции, то случайные величины $\{\frac{f_\theta'(X_i,\theta_0)}{f(X_i,\theta_0)},\ i = 1,\dots,n\}$ - н.о.р., соотношение (6) следует из Центр. пред. Теоремы.

В силу Леммы Слуцкого числитель (5) $\xrightarrow{\mathrm{P}} N(0, i(\theta_0))$

Теперь рассмотрим знаменатель (5):

$$n^{-1}L_n^{(2)}(\theta_0) = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{f_\theta^{(2)}(X_i,\theta_0)}{f(X_i,\theta_0)} - \left(\frac{f_\theta'(X_i,\theta_0)}{f(X_i,\theta_0)}\right)^2\right] \xrightarrow{\mathrm{P}} -i(\theta) \tag{7}$$

Действительно, в силу ЗБЧ

$$n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{f_\theta^{(2)}(X_i,\theta_0)}{f(X_i,\theta_0)} \xrightarrow{\mathrm{P}} \mathrm{E}_{\theta_0}\frac{f_\theta^{(2)}(X_1,\theta_0)}{f(X_1,\theta_0)} = \int_{N_f}\frac{f_\theta^{(2)}(x,\theta_0)}{f(x,\theta_0)}f(x,\theta_0)\nu(dx) = 0$$

$$n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{f_\theta'(X_i,\theta_0)}{f(X_i,\theta_0)}\right)^2 \xrightarrow{\mathrm{P}} E_{\theta_0}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X_1,\theta_0)\right)^2 = i(\theta)$$

Применяя лемму Слуцкого, получим (7).

Далее рассмотрим второе слагаемое в знаменете (5)

$$\left|\frac{1}{2n}L_n^{(3)}(\widetilde{\theta}_n)(\theta_n^* - \theta_0)\right| \le \frac{1}{2}\left|\theta_n^* - \theta_0\right| n^{-1}\sum_{i=1}^{n}M(X_i) \xrightarrow[\text{л. Слуцкого}]{\mathrm{P}} 0 \tag{8}$$

В силу (7) и (8) и Леммы Слуцкого знаменатель (5) сходится по вероятности к $-i(\theta_0)$

Значит, что вся дробь (5) сходится по распределению к $\frac{1}{i(\theta_0)}\xi \sim N(0, \frac{1}{i(\theta_0)})$ $\square$

Оценки максимального правдоподобия для векторого параметра

Пусть $X = (X_1, \dots, X_n)$ - н.о.р., $X_1 \sim f(x, \theta),\ \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k,\ \Theta$ - открытое множество

Тогда логарифмические правдоподобие имеет вид

$$L_n(X, \theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln f(X_i, \theta)$$

Система уравнений правдоподобия

$$\frac{\partial L_n(X, \theta)}{\partial \theta_i} = 0,\ i = 1, 2, \dots, k$$

При условиях регулярности, похожих на условия теоремы 3, показыватся:

1. С вероятностью, стремящейся к единице при $n \to \infty$, система уравнений (1.2) имеет такое решение $\widehat{\theta}_n \in \Theta$, что $\widehat{\theta}_n$ сходится к истинному значению θ_0.

2. Соответствующая оценка θ_n^* асимптотически нормальна. А именно

$$\sqrt{n}(\theta_n^* - \theta_0) \xrightarrow{d} N(0, I^{-1}(\theta_0)),\ n \to \infty$$

   Здесь $I(\theta) > 0$ - матрица информации Фишера, то есть

$$I(\theta) = (I_{ij}(\theta)),\ I_{ij}(\theta) = \mathrm{E}_\theta \left\{ \frac{\partial \ln f(X, \theta)}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial \ln f(X, \theta)}{\partial \theta_j} \right\}$$

Пример. *$X = (X_1, \dots, X_n)$, где $\{X_i\}$ - н.о.р., $X_1 \sim N(0, \sigma^2),\ a < \theta < b$, a и b - известные конечные числа, дисперсия σ^2 известна. Построим асимптотически эффективную оценку θ_n^* для θ.*

Здесь $p(x, \theta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2}$, значит

$$L_n(X, \theta) = \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \theta)^2$$

Уравнение правдоподобия имеет вид

$$\frac{\partial L_n(X, \theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \theta) = 0$$

Его решение существует и единственно, это $\overline{X}$, причем в т. $\theta = \overline{X}$ $L_n(X, \theta)$ достигает максимума, так как $\frac{\partial^2 L_n(X, \overline{X})}{\partial \theta^2} = -\frac{1}{\sigma^2} < 0$

Таким образом, если $a < \overline{X} < b$, то о.м.п. существует и равна $\overline{X}$, в противном случае о.м.п. не существует. Если положить

$$\theta_n^* = \begin{cases} \overline{X},\ a < \overline{X} < b \\ \frac{a+b}{2},\ \overline{X} \notin (a, b) \end{cases} \tag{9}$$

То в силу теоремы 3 (её условия выполнены, проверьте сами), θ_n^* - асимптотически эффективная оценка, то есть

$$\sqrt{n}(\theta_n^* - \theta_0) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2) \tag{10}$$

Напомним, что в этой модели $i(\theta) = \frac{1}{\sigma^2}$. Справедливость (10) с θ_n^* из (9) легко проверить непосредственно.

Пример. *Если Θ - компакт (то есть отрезок $[a, b]$), то о.м.п. существует всегда, так как непрерывная функция на отрезке всегда достигает своего максимума. Значит значение о.м.п.*

$$\theta_n^* = \begin{cases} \overline{X}, \; a < \overline{X} < b \\ a, \; \overline{X} < a \\ b, \; \overline{X} > b \end{cases}$$

Но на границах теряется асимптотическая Гауссовость.

2 Проверка статистических гипотез

$X = (X_1, \dots, X_n)$ имеет плотность вероятности $p(X, \theta)$ по мере μ, $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^1$

Опр. 1. *Предположение вида $H_0 : \theta \in \Theta_0$, где $\Theta_0 \in \Theta$, называется параметрической гипотезой. Альтернатива $H_1 : \theta \in \Theta_1$, где $\Theta_1 \in \Theta \backslash \Theta_0$*

Опр. 2. *Если $\Theta_0(\Theta_1)$ состоит из одной точки, то гипотеза H_0 (альтернатива H_1) называется простой. В противном случае $H_0(H_1)$ - сложная*

Постановка задачи:

Необходимо построить правило (статистический критерий - *test*), который позволяет заключить, согласуется ли наблюдение X с H_0 или нет.

Правило.

Выберем в множестве значений x вектора X (у нас либо $x = \mathbb{R}^n$, либо $x = N_p \subseteq \mathbb{R}^n$ - носитель плотности) подмножество S. Если $X \in S$, то H_0 отвергается и принимается H_1. Если $X \in \overline{S} = X \backslash S$, то H_0 принимается.

Опр. 3. *Множество S называется критическим множеством или критерием, $\overline{S}$ - область принятия гипотезы.*

Опр. 4. ***Ошибка 1-го рода** - принять H_1, когда верна H_0. Вероятность ошибки 1-го рода $\alpha = \mathrm{P}(H_1|H_0)$ (это условная запись, а не условная вероятность). **Ошибка 2-го рода** - принять H_0, когда верна H_1. Вероятность ошибки 2-го рода $\beta = \mathrm{P}(H_0|H_1)$.*

Опр. 5. ***Мощность критерия** S называется функция $W(S, \theta) = W(\theta) \overset{def}{=} \mathrm{P}_\theta(X \in S)$ (вероятность отвергнуть H_0, когда значение параметра есть θ).*

Тогда

$$\alpha = \alpha(\theta) = W(\theta),\ \theta \in \Theta_0;$$
$$\beta = \beta(\theta) = 1 - W(\theta),\ \theta \in \Theta_1$$

Опр. 6. *Обычно H_0 более важна. Поэтому рассматривают критерии такие, что*

$$\alpha(\theta) = W(\theta) = \mathrm{P}_\theta(X \in S) \leq \alpha\ \forall \theta \in \Theta_0$$

*Число α называют **уровнем значимости критерия**. Пишут S_α - критерий уровня α. Обычно α - маленькое число, которое мы задаем сами.*

Опр. 7. *Если критерий $S_\alpha^* \in \{S_\alpha\}$ и $\forall \theta \in \Theta_1$ и $\forall S_\alpha$ $W(S_\alpha^*, \theta) \geq W(S_\alpha, \theta)$, то критерий S_α^* называется **РНМ-критерием (равномерно наиболее мощным)**.*

Если $H_0 : \theta = \theta_0,\ H_1 : \theta = \theta_1$ (то есть H_0 и H_1 - простые), то задача отыскания РНМ-критерия заданного уровня α имеет вид:

$$\mathrm{P}_{\theta_0}(X \in S_\alpha^*) \leq \alpha,$$
$$\mathrm{P}_{\theta_1}(X \in S_\alpha^*) \geq \mathrm{P}_{\theta_1}(X \in S_\alpha)\ \forall S_\alpha$$

Положим для краткости: $p_0(x) \overset{\text{def}}{=} p(x, \theta_0),\ \mathrm{E}_0 = \mathrm{E}_{\theta_0},\ p_1(x) = p(x, \theta_1),\ \mathrm{E}_1 = \mathrm{E}_{\theta_1}$

Введем множество

$$S(\lambda) = \{x : p_1(x) - \lambda p_0(x) > 0\}, \lambda > 0$$

2.1 Лемма Неймана-Пирсона

Пусть для некоторого $\lambda > 0$ и критерия R (когда X попадает в R, то H_0 отвергается) выполнено:

1. $\mathrm{P}_0(X \in R) \leq \mathrm{P}_0(X \in S(\lambda))$

   Тогда:

2. $P_1(X \in R) \leq \mathrm{P}_1(X \in S(\lambda))$

3. $P_1(X \in S(\lambda)) \geq \mathrm{P}_0(X \in S(\lambda))$

Замечание 1. $X \in S(\lambda) \Leftrightarrow \frac{p_1(x)}{p_0(x)} > \lambda$. *Так как* $p_1(X)$ *и* $p_0(X)$ *- правдоподобие, то критерий называется критерием отношения правдоподобия Неймана-Пирсона.*

Замечание 2. *Утверждение 3 для* $S(\lambda)$ *означает, что*

$$\mathrm{P}(H_1 \,|H_1) \geq \mathrm{P}(H_1|\, H_0) \Leftrightarrow W(S(\lambda), \theta_1) \geq W(S(\lambda), \theta_0)$$

Это свойство называется несмещенностью критерия $S(\lambda)$

Доказательство. Дальше для краткости $S(\lambda) = S$. Пусть $I_R(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{R} \\ 0, x \notin \mathbb{R} \end{cases}$, $I_S(x)$ определяем аналогично. Тогда Условие (A) имеет вид:

$$\mathrm{E}_0 I_R(x) \leq \mathrm{E}_0 I_S(x) \tag{1}$$

Докажем пункт 2: Верно неравенство

$$I_R(x)[p_1(x) - \lambda p_0(x)] \leq I_S(x)[p_1(x) - \lambda p_0(x)] \tag{2}$$

Действительно, если $(p_1(x) - \lambda p_0(x)) > 0$, то $I_S(x) = 1$ и (2) очевидно.
Если же $p_1(x) - \lambda p_0(x) \leq 0$, то правая часть (2) есть ноль, а левая $\leq$ нуля.
Итак, (2) верно: интегрируем это неравенство по $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\mathrm{E}_1 I_R(X) - \lambda \mathrm{E}_0 I_R(X) \leq \mathrm{E}_1 I_S(X) - \lambda \mathrm{E}_0 I_S(X)$$

$$\mathrm{E}_1 I_S(X) - \mathrm{E}_1 I_R(X) \geq \lambda \underbrace{[\mathrm{E}_0 I_S(X) - \mathrm{E}_0 I_R(X)]}_{\geq 0 \text{ по условию (1)}} \tag{3}$$

В силу (1), (3) и условия $\lambda > 0$ получаем:

$$E_1 I_S(X) \geq E_1 I_{\mathbb{R}}(X)$$

Докажем пункт 3: Пусть $\lambda \geq 1$. Из определения S $p_1(x) > p_0(x)$ $\forall x \in S$. Отсюда

$$\mathrm{P}_0(X \in S) = \int_{R^n} I_S(X) p_0(x) \mu(dx) \leq \int_{R^n} I_S(X) p_1(x) \mu(dx) = \mathrm{P}_1(X \in S)$$

То есть $\mathrm{P}(H_1 \,|H_0) \leq \mathrm{P}(H_1|\, H_1)$

Пусть $\lambda < 1$. Рассмотрим $\overline{S} = \{x : p_1(x) \leq \lambda p_0(x)\}$. При $\lambda < 1$ $p_1(x) < p_0(x)$ при $x \in \overline{S}$. Отсюда

$$\mathrm{P}_1(X \in \overline{S}) = \int_{R^n} I_{\overline{S}}(X) p_1(x) \mu(dx) \leq \int_{R^n} I_{\overline{S}}(X) p_0(x) \mu(dx) = \mathrm{P}_0(X \in \overline{S})$$

То есть $1 - \mathrm{P}_1(X \in S) \leq 1 - \mathrm{P}_0(X \in S)$, откуда $\mathrm{P}_1(X \in S) \geq \mathrm{P}_0(X \in S)$ $\square$

Пример. *$X = (X_1, \ldots, X_n), \{X_i\}$ - н.о.р., $X_1 \sim N(\theta, \sigma^2)$, дисперсия σ^2 известна. Построим наиболее мощный критерий для проверки $H_0 : \theta = \theta_0$ против $H_1 : \theta = \theta_1$ (в случае $\theta_1 > \theta_0$). Уровень значимости возьмем α.*

1. *Имеем*

$$p_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\theta_0)^2\right\},\ p_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\theta_1)^2\right\};$$

$$S(\lambda) = \{x : p_1(x) - \lambda p_0(x) > 0\} \underset{\text{делим на } p_0}{\Leftrightarrow} \exp\left\{\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n \left[(x_i-\theta_1)^2 - (x_i-\theta_0)^2\right]\right\} > \lambda \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \left[(x_i-\theta_1)^2 - (x_i-\theta_0)^2\right] < \lambda_1 = -2\sigma^2 \ln\lambda \underset{\text{арифметика}}{\Leftrightarrow} (\theta_0-\theta_1)\sum_{i=1}^n x_i \le \lambda_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i > \widetilde{\lambda},\ \widetilde{\lambda}(\lambda, n, \sigma^2, \theta_0, \theta_1)$$

Итак,

$$S(\lambda) = \left\{x : \sum_{i=1}^n x_i > \widetilde{\lambda}\right\} \text{ при некотором } \widetilde{\lambda}$$

2. *Определим $\widetilde{\lambda} = \widetilde{\lambda}_\alpha$ из уравнения*

$$\alpha = \mathrm{P}_{\theta_0}(X \in S(\widetilde{\lambda}_\alpha)) = \mathrm{P}_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^n X_i > \widetilde{\lambda}_\alpha\right)$$

Преобразуем левую сумму в стандартную Гауссовскую величину. Тогда

$$\alpha = \mathrm{P}_{\theta_0}\left(\frac{1}{\sqrt{n}\sigma}\sum_{i=1}^n (X_i-\theta_0) > \frac{\widetilde{\lambda}_\alpha - n\theta_0}{\sqrt{n}\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\widetilde{\lambda}_\alpha - n\theta_0}{\sqrt{\pi}\sigma}\right)$$

так как $\frac{1}{\sqrt{n}\sigma}\sum_i (X_i-\theta_0) \sim N(0,1)$ при H_0.

Значит $\Phi\left(\frac{\widetilde{\lambda}_\alpha - n\theta_0}{\sqrt{\pi}\sigma}\right) = 1-\alpha$, $\left(\frac{\widetilde{\lambda}_\alpha - n\theta_0}{\sqrt{\pi}\sigma}\right) = \xi_{1-\alpha}$ - квантиль станд. норм. закона уровня $1-\alpha$. Окончательно, $\widetilde{\lambda}_\alpha = n\theta_0 + \sqrt{n}\sigma\xi_{1-\alpha}$

3. *Положим $S^*_\alpha = \{x : \sum_{i=1}^n x_i > \widetilde{\lambda}_\alpha\}$. Тогда:*

$$\mathrm{P}_{\theta_0}(X \in S^*_\alpha) = \alpha \text{ и } \forall S_\alpha\ \mathrm{P}_{\theta_0}(X \in S_\alpha) \le \alpha = \mathrm{P}_{\theta_0}(X \in S^*_\alpha)$$

Значит, выполнено условие 1 Леммы Неймана-Пирсона, и в силу пункта 2 этой леммы

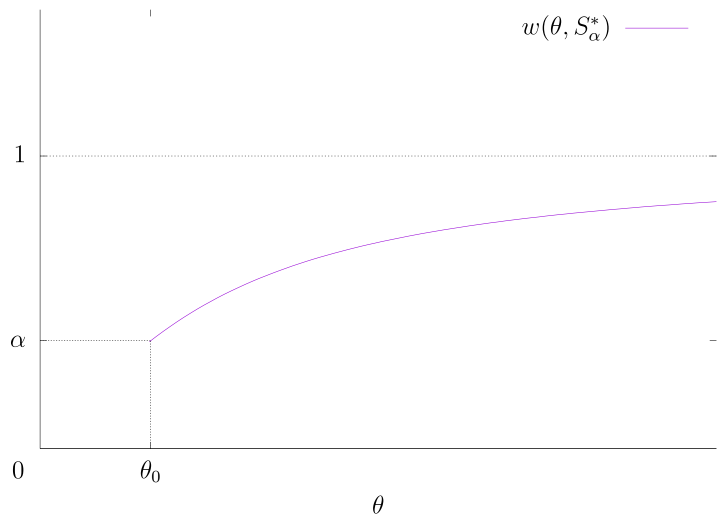
$$\mathrm{P}_{\theta_1}(X \in S_\alpha) \le \mathrm{P}_{\theta_1}(X \in S^*_\alpha)$$

То есть S^*_α - наиболее мощный критерий уровня α.

Так как S_α^* не зависит от θ_1, то S_α^* - РНМ-критерий для $H_0 : \theta = \theta_0$ против $H_1^+ : \theta > \theta_1$ Мощность критерия S_α^* для H_0 при альт. H_1^+

$$W(\theta, S_\alpha^*) = \mathrm{P}_\theta\left(\sum_{i=1}^n X_i > n\theta_0 + \sqrt{n}\sigma\xi_{1-\alpha}\right) =$$

$$= \mathrm{P}_\theta\left(\frac{1}{\sqrt{n}\sigma}\sum_{i=1}^n (X_i - \theta) > \frac{\sqrt{n}(\theta_0 - \theta)}{\sigma} + \xi_{1-\alpha}\right) = 1 - \Phi\left(\xi_{1-\alpha} + \frac{\sqrt{n}(\theta - \theta_0)}{\sigma}\right)$$



О связи между доверительным оцениванием и проверкой гипотез

Опр. 8. *Случайное подмножество $\Theta^* = \Theta^*(X, \alpha) \subseteq \Theta$ называется доверительным множеством уровня $1 - \alpha$, $0 < \alpha < 1$, если*

$$\mathrm{P}_\theta(\theta \in \Theta^*(X, \alpha)) \geq 1 - \alpha \ \forall\theta \in \Theta$$

Теорема 1. *1. Пусть $\forall\theta_0 \in \Theta$ гипотеза $H_0 : \theta = \theta_0$ при альтернативе $H_1 : \theta \neq \theta_0$ имеет $S_\alpha(\theta_0)$ критерием уровня α. Пусть $\Theta^*(x, \alpha) = \{\theta : x \in \overline{S_\alpha}(\theta)\}$. тогда $\Theta^*(X, \alpha)$ - доверительное множество уровня $1 - \alpha$. (Если есть критерий, то можно по этому построить доверительное множество)*

2. Если $\Theta^*(X, \alpha)$ - доверительное множество уровня $1 - \alpha$, то $\overline{S_\alpha}(\theta_0) = \{x : \theta_0 \notin \Theta(x, \alpha)\}$ есть область применения гипотезы H_0 (следовательно и критерий).

Замечание 3. *Пункт 2 означает, что если θ_0 попало в доверительное множество, то H_0 надо принимать.*

Доказательство.

$$1.\ \mathrm{P}_\theta(\theta \in \Theta^*(X, \alpha)) = \mathrm{P}_\theta(X \in \overline{S_\alpha}(\theta)) = 1 - \underbrace{\mathrm{P}_\theta(X \in S_\alpha(\theta))}_{\leq\alpha} \geq 1 - \alpha \ \forall\theta \in \Theta$$

$$2.\ \mathrm{P}_{\theta_0}(X \in S_\alpha(\theta_0)) = 1 - \mathrm{P}_{\theta_0}(X \in \overline{S_\alpha}(\theta_0)) = 1 - \underbrace{\mathrm{P}_{\theta_0}(\theta_0 \in \Theta^*(X, \alpha))}_{\geq 1-\alpha} \leq 1 - (1 - \alpha) = \alpha$$

□

Пример. *Пусть* $X = (X_1, \dots, X_n)$, $\{X_i\}$ *- н.о.р. сл.в.,* $X_1 \sim N(0, \sigma^2), \theta \in \mathbb{R}^1$. *Построим критерий для* $H_0 : \theta = \theta_0$ *против* $H_1 : \theta \neq \theta_0$. *Уровень значимости пусть будет* α, $0 < \alpha < 1$.

Построим доверительное множество для θ *уровня* $1 - \alpha$. *Пусть* $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ *- оптимальная оценка* θ. *Тогда* $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\theta)}{\sigma} \sim N(0,1)$,

$$\mathrm{P}_\theta\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\theta)}{\sigma}\right| < \xi_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

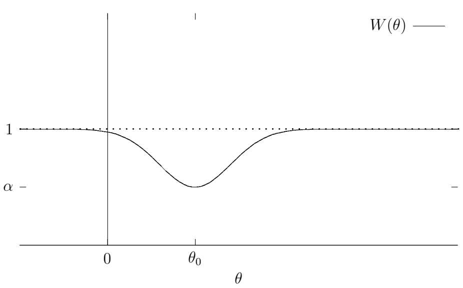
$$\Phi(\xi_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$$

То есть $\Theta^*(X, \alpha) = \{\theta : \left|\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\theta)}{\sigma}\right| < \xi_{1-\alpha/2}\}$. *В силу замечания к Теореме 1* $S_\alpha(\theta_0) = \{X : \left|\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\theta_0)}{\sigma}\right| \geq \xi_{1-\alpha}\}$ *есть критическое множество для* H_0. *Мощность*

$$W(\theta) = \mathrm{P}_\theta(X \in S_\alpha(\theta_0)) = \mathrm{P}_\theta\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\theta_0)}{\sigma}\right| \geq \xi_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \mathrm{P}_\theta\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\theta_0)}{\sigma}\right| < \xi_{1-\alpha/2}\right) =$$

$$= 1 - \mathrm{P}\left(-\xi_{1-\alpha/2} + \frac{\sqrt{n}(\theta_0-\theta)}{\sigma} < \frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\theta)}{\sigma} < \xi_{1-\alpha} + \frac{\sqrt{n}(\theta_0-\theta)}{\sigma}\right) =$$
$$= 1 - \left[\Phi\left(\xi_{1-\alpha/2} + \frac{\sqrt{n}(\theta_0-\theta)}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\xi_{1-\alpha/2} + \frac{\sqrt{n}(\theta_0-\theta)}{\sigma}\right)\right] =$$
$$= \left[\Phi\left(\xi_{\alpha/2} + \frac{\sqrt{n}(\theta_0-\theta)}{\sigma}\right) + \Phi\left(\xi_{\alpha/2} + \frac{\sqrt{n}(\theta-\theta_0)}{\sigma}\right)\right]$$

При $n \to \infty$ $W(\theta) \to 1$ $\forall \theta \neq \theta_0$. *То есть* $S_\alpha(\theta_0)$ *состоятелен против любой фиксированной*



альтернативы.

2.2 Критерий Фишера (F-критерий) в Гауссовской линейной регрессии

Опр. 9. *Если* $\xi \sim N(0,1)$, $\eta_k \sim \chi^2(k)$, ξ *и* η_k *независимы, а константа* $\mu \in \mathbb{R}^1$, *то сл.в.*

$$t_k(\mu) \stackrel{d}{=} \frac{\xi + \mu}{\sqrt{\eta_k/k}} \sim S(k, \mu)$$

имеет нецентральное распределение Стьюдента с k *степенями свободы и параметром нецентральности* μ

Опр. 10. *Если* $\xi_i \sim N(a_i, 1), i = 1, \ldots, k,$ *и* $\{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$ *независимы, а* $\Delta^2 = \sum_{j=1}^k a_j^2$*, то сл. в.*

$$\eta_k(\Delta) \stackrel{d}{=} \xi_1^2 + \ldots + \xi_k^2 \sim \chi^2(k, \Delta^2)$$

имеет нецентральное распределение хи-квадрат Пирсона с k *степенями свободы и параметром нецентральности* Δ^2

Опр. 11. *Если* $\eta_k \sim \chi^2(k, \Delta^2),\ \nu_m \sim \chi^2(m),$ *и* η_k *и* ν_m *независимы, то сл.в.*

$$f_{k,m}(\Delta) \stackrel{d}{=} \frac{\frac{1}{k}\eta_k}{\frac{1}{m}\nu_m} \sim F(k, m, \Delta^2)$$

имеет нецентральное распределение Фишера с (k, m) *степенями свободы и параметром нецентральности* Δ^2

Лемма 1. 1. *Распределение сл.в.* $\eta_k \sim \chi^2(k, \Delta^2)$ *зависит лишь от* Δ*, но не от* $a_1, \ldots, a_k$*. А именно*

$$\eta_k \stackrel{d}{=} (z_1 + \Delta)^2 + z_2^2 + \ldots + z_k^2, \text{ где } \{z_1, \ldots, z_k\} \text{ - н.о.р. } N(0,1) \text{ сл.в.}$$

2. *Если вектор* $\xi \in \mathbb{R}^k, \xi \sim N(a, \Sigma), \Sigma > 0$*, то*

$$\xi^T \Sigma^{-1} \xi \sim \chi^2(k, \Delta^2), \Delta^2 = a^T \Sigma^{-1} a$$

Доказательство. 1. По определению $\eta_k(\Delta) \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^k \xi_i^2$, где $(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ - н.о.р. $N(a_i, 1)$ сл.в. Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k)^T$, ортогональная матрица

$$C = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{\Delta} & \cdots & \frac{a_k}{\Delta} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},\ \nu = C\xi$$

Тогда $\eta_k \stackrel{d}{=} |\xi|^2 = |\nu|^2$, так как C - ортог. Но

$$\nu = C \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} + C\mathring{\xi} = \begin{pmatrix} \Delta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + Z, \text{ где } \mathring{\xi} = \xi - \mathrm{E}\xi, Z = C\mathring{\xi} \sim N(0, \mathrm{E}_k)$$

Итак, $\eta_k \stackrel{d}{=} |\nu|^2 = (z_1 + \Delta)^2 + z_2^2 + \ldots + z_k^2$

2. $\xi^T \Sigma^{-1} \xi = \left|\Sigma^{-1/2}\xi\right|^2$, причем $\Sigma^{-1/2}\xi \sim N(\Sigma^{-1/2}a, \mathrm{E}_k)$. Отсюда $\left|\Sigma^{-1/2}\xi\right|^2 \sim \chi^2(k, \Delta^2)$ с $\Delta^2 = \left|\Sigma^{-1/2}a\right|^2 = a^T \Sigma^{-1} a$

□

Лемма 2. *Случайная величина* $t_k(\mu)$ *обладает следующим свойством стохастической упорядоченности. при* $\mu_2 > \mu_1$

$$\mathrm{P}\left(t_k(\mu_2) > x\right) > \mathrm{P}\left(t_k(\mu_1) > x\right) \text{ при всех } x \in \mathbb{R}^1 \tag{4}$$

Аналогично

$$\mathrm{P}(\eta_k(\Delta_2) > x) > \mathrm{P}(\eta_k(\Delta_1) > x), \Delta_2 > \Delta_1 \tag{5}$$

$$\mathrm{P}(f_{k,m}(\Delta_2) > x) > \mathrm{P}(f_{k,m}(\Delta_1) > x), \Delta_2 > \Delta_1 \tag{6}$$

Нецентральные распределения Пирсона и Фишера стохастически упорядочены по параметру нецентральности.

Доказательство. Докажем соотношение 4, 5 и 6 доказываются аналогично.

Заметим, что, если ξ и η - независимые случайные величины, и $\mathrm{E}\,|\phi(\xi,\eta)| < \infty$, то

$$\mathrm{E}\phi(\xi,\eta) = \mathrm{E}\left\{ \mathrm{E}\phi(\xi,\eta)\big|_{\xi=\eta} \right\} \tag{7}$$

В силу (7)

$$\mathrm{P}(t_k(\mu_2) > x) = \mathrm{P}\left(\frac{\xi+\mu_2}{\sqrt{\frac{1}{k}\eta_k}} > x \right) = \mathrm{E}I\left(\xi > x\sqrt{\frac{1}{k}\eta_k} - \mu_2 \right) =$$

$$= \mathrm{E}\left\{ 1 - I\left(\xi \le x\sqrt{\frac{1}{k}\eta_k} - \mu_2 \right) \right\} = 1 - E\left\{ EI(\xi \le y)\Big|_{y = x\sqrt{\frac{\eta_k}{k}} - \mu_2} \right\} =$$

$$= 1 - \mathrm{E}\Phi\left(x\sqrt{\frac{1}{k}\eta_k} - \mu_2 \right) > 1 - \mathrm{E}\Phi\left(x\sqrt{\frac{1}{k}\eta_k} - \mu_1 \right) = \mathrm{P}(t_k(\mu_1) > x)$$

$$\text{так как } \mathrm{E}\Phi\left(x\sqrt{\frac{1}{k}\eta_k} - \mu_2 \right) < \mathrm{E}\Phi\left(x\sqrt{\frac{1}{k}\eta_k} - \mu_1 \right) \text{ в силу возрастающей } \Phi(y)$$

□

<u>Обратимся к линейной гауссовской модели</u>

$$X = Zc + \mathcal{E}$$

$$X = (X_1, \ldots, X_n)^T \text{ - наблюдения, } Z \text{ - } n \times p \text{ матрица регрессоров } p < n$$

$$\mathcal{E} \sim N(0, \sigma^2 \mathrm{E}_n),\ c = (c_1, \ldots, c_p)^T$$

<u>c и σ^2 неизвестны</u>

Рассмотрим новый вектор $\beta = Ac$, $A - k \times p$ матрица, $rkA = k, k \le p$.

<u>Построим для β доверительное множество уровня $1-\alpha$</u>

Пусть $\widehat{c}_n$ - оценка наименьших квадратов (о.н.к.) для c, $\widehat{s}_n^2$ - о.н.к. для σ^2. Пусть $\widehat{\beta}_n = A\widehat{c}_n$.

$$\widehat{c}_n \sim N(c, \sigma^2 (Z^T Z)^{-1}) \Rightarrow \widehat{\beta}_n \sim N(\underbrace{Ac}_{\beta}, \sigma^2 D), \text{ где } D = A(Z^T Z)^{-1} A^T$$

Заметим, что $D > 0$, так как для $\alpha \in \mathbb{R}^k, \alpha \ne 0$,

$$\alpha^T D \alpha = (A^t \alpha)^T (Z^T Z)^{-1} (A^T \alpha) > 0,\ \text{т.к. } (Z^T Z)^{-1} > 0, A^T \alpha \ne 0 \text{ при } rkA = k, \alpha \ne 0$$

В силу пункта 2 леммы 1

$$\frac{1}{\sigma^2} \left(\widehat{\beta}_n - \beta \right) D^{-1} \left(\widehat{\beta}_n - \beta \right) \sim \chi^2(k)$$

так как $\frac{(n-p)\widehat{s}_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-p)$, $\widehat{\beta}_n$ и $\widehat{s}_n^2$ независимы, то

$$f_{k,n-p}(X,\beta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\frac{1}{k}(\widehat{\beta}_n-\beta)^T D^{-1}(\widehat{\beta}_n-\beta)/\sigma^2}{\frac{1}{n-p}(n-p)\widehat{s}_n^2/\sigma^2} = \frac{(\widehat{\beta}_n-\beta)D^{-1}(\widehat{\beta}_n-\beta)}{k\widehat{s}_n^2} \sim F(k,n-p)$$

Значит,

$$\mathrm{P}_{\beta,\sigma^2}\left((\widehat{\beta}_n-\beta)^T D^{-1}(\widehat{\beta}_n-\beta) \le k\widehat{s}_n^2 f_{1-\alpha}(k,n-p)\right) = 1-\alpha$$

$f_{1-\alpha}(k,n-p)$ - квантиль уровня $1-\alpha$ $F(k,n-p)$.
Доверительное множество для β уровня $1-\alpha$

$$\Theta^*(X,\alpha) = \left\{\beta : (\widehat{\beta}_n-\beta)^T D^{-1}(\widehat{\beta}_n-\beta) < k\widehat{s}_n^2 f_{1-\alpha}(k,n-p)\right\} =$$

$= \{\beta : f_{k,n-p}(X,\beta) < f_{1-\alpha}(k,n-p)\}$ - **доверительный эллипсоид**

Рассмотрим проверку гипотезы $H_0 : \beta = \beta_0$ против $H_1 : \beta \ne \beta_0$. H_0 называют линейной гипотезой, так как $\beta = Ac$ получается линейным преобразованием c. В силу замечания 3 H_0 надо принимать, если $\beta_0 \in \Theta^*(X,\alpha)$, то есть область принятия H_0:

$$\overline{S}_\alpha(\beta_0) = \{x : f_{k,n-p}(x,\beta_0) \le f_{1-\alpha}(k,n-p)\}$$

То есть критическое множество (критерий уровня α):

$$S_\alpha(\beta_0) = \{x : f_{k,n-p}(x,\beta_0) > f_{1-\alpha}(k,n-p)\} \tag{8}$$

Критерий 8 называют **критерием Фишера** или F**-критерием**. $f_{k,n-p}(X,\beta_0)$ - статистика F-критерия.

Рассмотрим поведение F-критерия при альтернативе H_1.
При H_1 в силу пункта 2 Леммы 1

$$f_{k,n-p}(X,\beta_0) = \frac{\frac{1}{k}\overbrace{(\widehat{\beta}_n-\beta)^T D^{-1}(\widehat{\beta}_n-\beta)/\sigma^2}^{\chi^2(k,\Delta^2)}}{\frac{1}{n-p}\underbrace{(n-p)\widehat{s}_n^2/\sigma^2}_{\chi^2(n-p)}} \sim F(k,n-p,\Delta^2)$$

Параметр нецентральности

$$\Delta^2 = \frac{1}{\sigma^2}(\beta-\beta_0)^T D^{-1}(\beta-\beta_0) \tag{9}$$

Мощность F-критерия

$$W(\beta, S_\alpha(\beta_0)) = \mathrm{P}_{\beta,\sigma^2}(f_{k,n-p}(X,\beta_0) > f_{1-\alpha}(k,n-p)) = 1 - F_{k,n-p}(f_{1-\alpha}(k,n-p),\Delta^2)$$

Свойства мощности

1. Так как $\Delta = \Delta(\beta) = \Delta(\beta_0) > 0$ при $\beta \ne \beta_0$, то в силу соотношения 6

$$\mathrm{P}_{\beta,\sigma^2}(f_{k,n-p}(X,\beta_0) > f_{1-\alpha}(k,n-p)) > \mathrm{P}_{\beta_0,\sigma}(f_{k,n-p}(X,\beta_0) > f_{1-\alpha}(k,n-p)) = \alpha$$

То есть при $\beta \ne \beta_0$ $\mathrm{P}(H_1|H_1) > \mathrm{P}(H_1|H_0)$. То есть F-критерий несмещенный!

2. Мощность $W(\beta, S_\alpha(\beta_0))$ строго монотонна по Δ из соотношения 9

Пример (Определение порядка регрессии)**.** $c_n^T = (\underbrace{c_{(1)n}^T}_{m-\text{вектор}}, \underbrace{c_{(2)n}^T}_{p-m-\text{вектор}}),\ 1 \le m \le p$

$H_0: \ \ c_{(2)} = 0 \quad$ (*порядок не больше* m)
$H_1: \ \ c_{(2)} \neq 0$

Рассмотрим матрицу

$$A = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & & & 1 & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & 0 & & & 1 \end{pmatrix}}^{p} \Rightarrow Ac = c_{(2)} \Rightarrow H_0 \Leftrightarrow Ac = 0$$

$$\qquad\qquad m \qquad\qquad p-m$$

Пусть $\widehat{c}_n^T = (\underbrace{\widehat{c}_{(1)n}^T}_{m-\text{в-р}}, \underbrace{\widehat{c}_{(2)n}^T}_{p-m-\text{в-р}})$. Тогда $\widehat{\beta}_n = A\widehat{c}_n = \widehat{c}_{(2)n}$.

$$(Z^TZ)^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right) \to D = A(Z^TZ)^{-1}A^T = B_{22} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_{p-m,n-p}(X,0) = \frac{\widehat{c}_{(2)n}^T B_{22}^{-1} \widehat{c}_{(2)n}}{(p-m)\widehat{s}_n^2} \underset{H_0}{\sim} F(p-m, n-p)$$

H_0 отвергается, если $f_{p-m,n-p}(X,0) > f_{1-\alpha}(p-m, n-m)$, то есть

$$S_\alpha(0) = \{x : \frac{\widehat{c}_{(2)n}^T B_{22}^{-1} \widehat{c}_{(2)n}}{(p-m)\widehat{s}_n^2} > f_{1-\alpha}(p-m, n-m)\} \tag{10}$$

$$f_{p-m,n-p}(X,0) \underset{H_1}{\sim} F(p-m, n-p, \Delta^2),\ \text{где } \Delta^2 = \frac{c_{(2)}^T B_{22}^{-1} c_{(2)}}{\sigma^2} \tag{11}$$

Критерий 10 - несмещенный, то есть $\mathrm{P}(H_1|H_1) > \mathrm{P}(H_1|H_0) = \alpha$. Его мощность

$$W(c_{(2)}, S_\alpha(0)) = \mathrm{P}_{c_{(2)},\sigma^2}(f_{p-m,n-p}(X,0) > f_{1-\alpha}(p-m, n-p)) = 1 - F_{p-m,n-p}(f_{1-\alpha}(p-m,n-p), \Delta^2)$$

строго возрастает по Δ^2. Параметр нецентральности Δ^2 определен в 11.

Пример (Проверка однородности двух выборок)**.** $X = (X_1, \ldots, X_m),\ Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ - *независимые гауссовские выборки. То есть* $\{X_i\},\ \{Y_i\}$ - *н.о.р.*, $X_1 \sim N(a, \sigma^2),\ Y_1 \sim N(b, \sigma^2)$. *Совокупность* $\{X_i\}$ *и* $\{Y_j\}$ *независимы*, $m + n > 2$.

<u>*Дисперсии* $DX_1,\ DY_1$ *одинаковы* ($= \sigma^2$), *неизвестны, средние* a *и* b *неизвестны.*</u>

$H_0: \ \ a = b \quad$ (***гипотеза однородности***)
$H_1: \ \ a \neq b$

Замечание. *При* $\mathrm{D}X_1 \neq \mathrm{D}Y_1$ *эта задача называется* ***проблемой Беренса-Фишера***.

$$\begin{cases} X_i = a + \varepsilon_i, & i = 1, \ldots, m,\ \varepsilon_i = X_i - a \\ Y_i = b + \widehat{\varepsilon}_j, & j = 1, \ldots, n,\ \widehat{\varepsilon}_j = Y_j - b \end{cases} \Rightarrow \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m, \widehat{\varepsilon}_1, \ldots, \widehat{\varepsilon}_n \text{ - н.о.р. } N(0, \sigma^2) \text{ сл.в.}$$

$$\widehat{X} \overset{def}{=} (X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_n)^T \qquad Z = \begin{pmatrix} m\begin{cases}1\\ \vdots\\ 1\end{cases} & 0 \\ 0 & n\begin{cases}1\\ \vdots \\ 1\end{cases}\end{pmatrix} \Rightarrow \underset{\textit{гаусс. лин. регрессия}}{\widehat{X} = Zc + \mathcal{E}} \qquad (12)$$

$$c = (a, b)^T$$

$$\mathcal{E}^T = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m, \widehat{\varepsilon}_1, \dots, \widehat{\varepsilon}_n)^T$$

Положим $A = (1, -1)$. *Тогда* $Ac = a - b = \beta$.

$H_0: \quad Ac = a - b = \beta = 0 \quad (= \beta_0)$

$H_1: \qquad Ac = a - b \neq 0 \qquad (\beta \neq 0)$

О.н.к. для вектора c *- решение задачи*

$$\sum_{i=1}^{m}(X_i - a)^2 + \sum_{j=1}^{n}(Y_j - b)^2 \to \min_{a,b} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\sum_i (X_i - a) = 0 \\ -2\sum_j (Y_j - b) = 0 \end{cases}$$

Решением системы является $\widehat{a}_m = \overline{X}$, $\widehat{b}_n = \overline{Y}$ *- оптимальные оценки* a *и* b, $\widehat{c}_n = (\overline{X}, \overline{Y})^T$ *- оптимальная оценка для* c. *Оптимальная оценка для* σ^2*:*

$$\widehat{S}^2_{m+n} = \frac{1}{m+n-2}\left[\sum_i (X_i - \overline{X})^2 + \sum_j (Y_j - \overline{Y})^2\right]$$

Тогда

$$\widehat{\beta}_n = A\widehat{c}_n = \overline{X} - \overline{Y}$$

$$Z^T Z = \begin{pmatrix} \overbrace{1 \ \dots \ 1}^{m} & 0 \\ 0 & \underbrace{1 \ \dots \ 1}_{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 1 \\ 0 & \vdots \\ & 1 \\ 1 & \\ \vdots & 0 \\ 1 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \boxed{f_{1,m+n-2}(X, 0) = \frac{(\overline{X} - \overline{Y})^2}{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)\widehat{S}^2_{m+n}}}$$

$$D = A(Z^T Z)^{-1} A^T = (1 \ -1)\begin{pmatrix} \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$$

F*-критерий для* H_0 *имеет вид*

$$S_\alpha(0) = \{x \in \mathbb{R}^{m+n} : f_{1,m+n-2}(x, 0) > f_{1-\alpha}(1, m+n-2)\}$$

$$f_{1,m+n-2}(X, 0) \underset{H_0}{\sim} F(1,\ m+n-2)$$

$$f_{1,m+n-2}(X, 0) \underset{H_1}{\sim} F(1,\ m+n-2, \Delta^2),$$

где параметр нецентральности $\Delta^2 = \Delta^2(\underset{a-b}{\beta}) = \dfrac{(a-b)^2}{\sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}$

1. *Если* $|a - b|$ *возрастает, то мощность* F*-теста возрастает*

2. *Если* $\sigma \to 0$ *или* $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \to 0$, *то мощность возрастает*

2.3 Критерий согласия Хи-квадрат Пирсона. Проверка простой гипотезы в схеме Бернулли.

Пусть проводятся n независимых испытаний, и в каждом испытании возможны $m \geq 2$ исходов $A_1, \ldots, A_m$ таких, что $A_i A_j = \emptyset,\ i \neq j,\ \sum A_i = \Omega$, тогда $\mathrm{P}(A_j) = p_j > 0,\ \sum_{j=1}^m p_j = 1$. Пусть $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_m)^T$, а ν_j - число появления A_j в n опытах, тогда $\sum_{j=1}^m \nu_j = n$. По вектору наблюдений ν необходимо проверить следующую гипотезу:

$H_0 :\ \ p_j = p_j^\circ,\ j = 1, \ldots, m$

$H_1 :\ \ p_j \neq p_j^\circ$ хотя бы при одном j

Замечание. *H_0 - простая гипотеза, т.к. полностью определяет распределение вектора ν.*

$$\mathrm{P}(\nu_1 = k_1, \ldots, \nu_m = k_m) \underset{H_0}{=} \frac{n!}{k_1! \ldots k_m!} (p_1^\circ)^{k_1} \ldots (p_m^\circ)^{k_m}$$

Это полиномиальное распределение $\prod(n, p_1^\circ, \ldots, p_m^\circ)$. Статистика Хи-квадрат Пирсона:

$$\chi_n^2 \underset{H_0}{\overset{\mathrm{def}}{=}} \sum_{j=1}^m \frac{(\nu_j - np_j^\circ)^2}{np_j^\circ}$$

Поведение при альтернативе: Очевидно

$$\chi_n^2 = n \sum_{j=1}^m \frac{(\nu_j/n - p_j^\circ)^2}{p_j^\circ}$$

В силу теоремы Бернулли $\frac{\nu_j}{n} \xrightarrow{\mathrm{P}} p_j$. Поэтому

$$\sum_{j=1}^m \frac{(\nu_j/n - p_j^\circ)^2}{p_j^\circ} \xrightarrow[\text{Т. о наслед. сход.}]{\mathrm{P}} \sum_{j=1}^m \frac{(p_j - p_j^\circ)^2}{p_j^\circ} \underset{H_1}{>} 0$$

Значит,

$$\chi_n^2 \xrightarrow[H_1]{\mathrm{P}} \infty,\ n \to \infty$$

Поэтому большие значения χ_n^2 часто свидетельсвтуют о том, что стоит отвергнуть H_0. Но насколько "большие"значения?

2.4 Теорема Пирсона

$$\chi_n^2 \xrightarrow[H_0]{d} \chi^2(m-1),\ n \to \infty$$

Правило: Если $\chi_n^2 \leq \chi_{1-\alpha}(m-1)$, то принимаем H_0, иначе принимаем H_1.

Замечание. *Тогда*

$$\mathrm{P}(H_1|H_0) = \mathrm{P}(\chi_n^2 > \chi_{1-\alpha}(m-1)|H_0) \to \alpha$$
$$\mathrm{P}(H_0|H_1) = \mathrm{P}(\chi_n^2 \leq \chi_{1-\alpha}(m-1)|H_1) \to 0$$

То есть

$$\begin{cases} \mathrm{P}(H_0|H_0) \to 1-\alpha \\ \mathrm{P}(H_1|H_1) \to 1 \end{cases}$$

Вероятность принять правильную гипотезу близка к единице!

Доказательство. Покажем, что вектор $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_m)^T$ асимптотически нормален, то есть

$$\sqrt{n}(\nu/n - p) \xrightarrow{d} N(0, P - pp^T), \text{ где } P \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} p_1^\circ & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p_m^\circ \end{pmatrix} \tag{13}$$

Введем вектора $X_1, \ldots, X_n$, где $X_i = (0, \ldots, 0, \frac{1}{j}, 0, \ldots, 0)^T$, если в i-ом испытании произошло A_j. Тогда $\nu = \sum_{i=1}^n X_i$

$$\sqrt{n}(\nu/n - p) = \sqrt{n} \sum_{i=1}^n (X_i - p) \tag{14}$$

Здесь $\{X_i\}$ - н.о.р., $EX_1 = p$, $\operatorname{cov}(X_1, X_1) = \mathrm{E}(X_1 - p)(X_1 - p)^T = \mathrm{E}X_1 X_1^T - pp^T = P - pp^T$. Поэтому соотношение (13) следует из соотноешния (14) и ЦПТ.
Матрица $P - pp^T$ вырождена, так как сумма ее столбцов равна нулю: если $e = (1, \ldots, 1)^T$, то $(P - pp^T)e = p - p(p^T e) = p - p = 0$

Пусть

$$P^{-1/2} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{p_1^\circ}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\sqrt{p_m^\circ}} \end{pmatrix}, \ \xi_n \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{n} P^{-1/2}(\nu/n - p)$$

В силу теоремы о наследовании слабой сходимости и соотношения (13)

$$\xi_n \xrightarrow{d} N(0, P^{-1/2}(P - pp^T)(P^{-1/2})^T) = N(0, E_m - zz^T), \text{ где } z = (\sqrt{p_1^\circ}, \ldots, \sqrt{p_m^\circ})^T \tag{15}$$

Пусть ортогональная матрица $U = \begin{pmatrix} \sqrt{p_1^\circ} & \cdots & \sqrt{p_m^\circ} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$. Тогда

$$U(E_m - zz^T)U^T = E_m - (Uz)(Uz)^T =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} = \widetilde{\mathrm{E}}_1$$

В силу (15) и теоремы о слабой сходимости

$$U\xi_n \xrightarrow{d} N(0, \widetilde{\mathrm{E}}_1) = (0, \eta_2, \ldots, \eta_m)^T \tag{16}$$

где $\{\eta_2, \ldots, \eta_m\}$ - независимые $N(0,1)$ сл.в. Из (16) и теоремы о наследовании слабой сходимости следует:

$$|U\xi_n|^2 \xrightarrow{d} \eta_2^2 + \ldots + \eta_m^2 \sim \chi^2(m-1) \tag{17}$$

Осталось заметить, что

$$|U\xi_n|^2 = |\xi_n|^2 = \sum_{j=1}^m \left[\frac{1}{\sqrt{p_j^\circ}} \sqrt{n}(\nu_j/n - p_j^\circ) \right]^2 = \sum_{j=1}^m \frac{(\nu_j - np_j^\circ)^2}{np_j^\circ} = \chi_n^2$$

Из этого равенства и соотноешния (17) следует теорема Пирсона. $\square$

Пример (Проверка простой гипотезы о виде функции распределения)**.** $X = (X_1, \dots, X_n)$, $\{X_i\}$ - *н.о.р.*, $X_1 \sim F(x)$.

$H_0: \ \ F(x) = F_0(x), \ (F_0$ *известна*)

$H_1: \ \ F(x) = F_1(x), \ F_1(x) \neq F_0(x)$

Разобьем носитель X_1 *на непересекающиеся отрезки* $\Delta_1, \dots, \Delta_m, \ m \geq 2$ *так, что* $X_1 \in \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \dots \cup \Delta_m$

$$p_j^\circ \stackrel{def}{=} \mathrm{P}(X_1 \in \Delta_j | H_0) = \int_{\Delta_j} dF_0(x) > 0 \ \forall j$$

Тогда $\sum_{j=1}^m p_j^\circ = 1$. *С каждой величиной* X_i *свяжем испытание с исходами* $A_1, \dots, A_m$, *причем* A_j *происходит тогда и только тогда, когда* $X_i \in \Delta_j$. *При* H_0 $\mathrm{P}(A_j) = p_j^\circ$. *Тогда наблюдения* $X_1, \dots, X_n$ *порождают полиномиальную схему независимых испытаний. Пусть* ν_j*-число исхода* A_j *в этих испытаниях, то есть число наблюдений среди* $X_1, \dots, X_n$, *попавших в* Δ_j. *В силу теоремы Пирсона:*

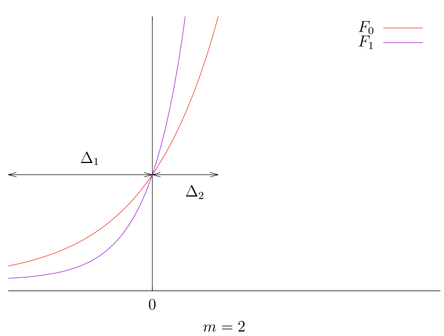
$$\chi_n^2 \stackrel{def}{=} \sum_{j=1}^m \frac{(\nu_j - np_j^\circ)^2}{np_j^\circ} \xrightarrow[H_0]{d} \chi^2(m-1)$$

Правило: H_0 *будем отвергать, если* $\chi_n^2 > \chi_{1-\alpha}(m-1)$. ($\alpha$ *задано*) *Тогда* $\mathrm{P}(H_1|H_0) \to \alpha, \ n \to \infty$.

$$p_j \stackrel{def}{=} \mathrm{P}(X_1 \in \Delta_j | H_1) = \int_{\Delta_j} dF_1(x)$$

Если верна H_1 *и хоть при одном* j $p_j \neq p_j^\circ$, *то* $\mathrm{P}(H_0|H_1) = \mathrm{P}(\chi_n^2 < \chi_{1-\alpha}(m-1)|H_1) \to 0$

Замечание. *Если* $F_0 \not\equiv F_1$, *но* $p_j = p_j^\circ \ \forall j$, *то* $\mathrm{P}(H_0|H_1) = \mathrm{P}(H_0|H_0) \to 1 - \alpha \neq 0$. *Например:*



Здесь $\mathrm{P}(X_1 \in \Delta_1 | H_0) = F_0(0) = \mathrm{P}(X_1 \in \Delta_1 | H_1) = F_1(0)$. *Значит, и* $\mathrm{P}(X_1 \in \Delta_2 | H_0) = 1 - F_0(0) = \mathrm{P}(X_1 \in \Delta_1 | H_1) = 1 - F_1(0)$.

Проверка сложной гипотезы в схеме испытаний Бернулли

Пусть проводится n независимых испытаний, исходы $A_1, \dots, A_m$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)^T$ - вектор наблюдений. Пусть $H_0: \ \mathrm{P}(A_j) = p_j(\theta), \ \theta \in \Theta \in \mathbb{R}^k, \ k < m - 1$.

Условия регулярности

1. $\sum_{j=1}^m p_j(\theta) = 1, \ \theta \in \Theta$

2. $p_j(\theta) \geq c > 0 \ \forall j = 1, \dots, m$ и $\exists \ \frac{\partial p_j(\theta)}{\partial \theta_l}, \frac{\partial^2 p_j(\theta)}{\partial \theta_l \partial \theta_r}$

3. $rank(\underbrace{\frac{\partial p_j(\theta)}{\partial \theta_l}}_{m \times k}) = k,\ \forall \theta \in \Theta$

В качестве оценки θ при H_0 будем использовать мультиномиальные оценки максимального правдоподобия:

$$\mathrm{P}(\nu_1 = k_1, \ldots, \nu_m = k_m) = \frac{n!}{k_1! \ldots k_m!} p_1^{k_1}(\theta) \ldots p_m^{k_m}(\theta)$$

логарифмического правдоподобия:

$$L_n(\nu, \theta) = \ln\left(\frac{n!}{\nu_1! \ldots \nu_m!}\right) + \sum_{j=1}^{m} \nu_j \ln p_j(\theta)$$

оценки максимального правдоподобия (мультиномиальные):

$$L_n(\nu, \theta) \to \max_{\theta \in \Theta}$$

2.5 Теорема Фишера

Пусть выполнены условия регулярности, $\widehat{\theta}_n$ - мульт. о.м.п. Тогда

$$\widehat{\chi}_n^2 = \sum_{j=1}^{m} \frac{(\nu_j - np_j(\widehat{\theta}_n))^2}{np_j(\widehat{\theta}_n)} \xrightarrow[H_0]{d} \chi(m-k-1)$$

Правило: Если $\widehat{\chi}_n^2 \leq \chi_{1-\alpha}(m-k-1)$, то принимаем H_0, иначе принимаем H_1. Тогда $\mathrm{P}(\overline{H_0}|H_0) \to \alpha$

Пример (Проверка независимости признаков). *Пусть объект классифицирован по двум A и B, $A = \{A_1, \ldots, A_s\},\ B = \{B_1, \ldots, B_r\},\ s > 1,\ r > 1$. Проводится n опытов, и пусть ν_{ij} - число объектов, имеющих признаки $A_i B_j$.*
Пусть $p_{ij} = \mathrm{P}(A_i B_j)$. Гипотеза независимости $H_0:\ p_{ij} = p_{i\bullet} p_{\bullet j}$ для положительных $p_{i\bullet}$ и $p_{\bullet j}$ таких, что $\sum_{i=1}^{s} p_{i\bullet} = 1,\ \sum_{j=1}^{r} p_{\bullet j} = 1$.
При H_0 логарифмическое правдоподобие

$$L_n(\nu, p_{i\bullet}, p_{\bullet j}) = \ln \frac{n!}{\prod_{i,j} \nu_{ij}} + \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{r} \nu_{ij} \ln(p_{i\bullet} p_{\bullet j})$$

Максимизируя эту функцию по $p_{i\bullet},\ p_{\bullet j}$ при условиях, что $\sum_{i=1}^{s} p_{i\bullet} = 1,\ \sum_{j=1}^{r} p_{\bullet j} = 1$, находим оценки

$$\widehat{p}_{i\bullet} = \frac{\nu_{i\bullet}}{n},\ \widehat{p}_{\bullet j} = \frac{\nu_{\bullet j}}{n},\ \textit{где } \nu_{i\bullet} = \sum_j \nu_{ij},\ \nu_{\bullet j} = \sum_i \nu_{ij}$$

Статистика Хи-квадрат имеет вид

$$\widehat{\chi}_n^2 = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{r} \frac{(\nu_{ij} - n\widehat{p}_{i\bullet}\widehat{p}_{\bullet j})^2}{n\widehat{p}_{i\bullet}\widehat{p}_{\bullet j}}$$

$$\widehat{\chi}_n^2 \xrightarrow[H_0]{d} \chi((s-1)(r-1))$$

так как $m - k - 1 = sr - (s + r - 2) - 1 = (s-1)(r-1)$.
Правило: Если $\widehat{\chi}_n^2 > \chi_{1-\alpha}((s-1)(r-1))$, то отвергаем H_0. Асимптотический уровень теста есть α

Пример (W.H.Gilby. Biometrika, 8,94). *1725 школьников классифицировали в соответствии с их качеством одежды и в соответствии с умственными способностями. Использовали следующие градации:*

A – *умственно отсталый*
B – *медлительный и тупой*
C – *тупой*
D – *медлительный, но умный*
E – *достаточно умный*
F – *способный*
G – *очень способный*

$\boxed{H_0: \text{ признаки независимы}}$

	Способности						
Как одевается	A и B	C	D	E	F	G	Сумма
Очень хорошо	33	48	113	209	194	39	636
Хорошо	41	100	202	255	138	15	751
Сносно	39	58	70	61	33	4	256
Очень плохо	17	13	22	10	10	1	73
Сумма	130	219	407	535	375	59	1725

Здесь $\chi^2_n = 174.92 > \chi_{0.999}(15) = 37.697$.
Здесь $15 = (s-1)(r-1) = (4-3)(6-1) \Rightarrow$ *Отвергаем* H_0

3 Введение в робастное оценивание

Схема засорений Мартина-Йохаи имеет вид:

$$y_t = u_t + z_t^\gamma \xi_t,\ t = 1, \dots, n$$

Здесь $\{u_t\}$ - "полезный сигнал"(временной ряд);
$\{z_t^\gamma\}$ - н.о.р. сл.в., $z_1^\gamma \sim Bin(1, \gamma)$ с $0 \le \gamma \le 1$ (γ - уровень засорения);
$\{\xi_t\}$ - н.о.р. сл.в. - грубые выбросы, ξ_1 - имеет распределение $\mu_\xi \in M_\xi$; Распределение μ_ξ неизвестно, а множество M_ξ известно;
Последовательности $\{u_t\}, \{z_t^\gamma\}, \{\xi_t\}$ независимы между собой.
Пусть $y_1, \dots, y_n$ - наблюдения, и распределение вектора $Y_n = (y_1, \dots, y_n)$ зависит от неизвестного параметра β. Пусть $\hat{\beta}_n$ - некоторая оценка β

Основное предположение

При любом $0 \le \gamma \le 1$ существует предел

$$\hat{\beta}_n \xrightarrow{\mathrm{P}} \theta_\gamma,\ n \to \infty;\ \theta_0 = \beta$$

Опр. 1. *Если существует предел*

$$IF(\theta_\gamma, \mu_\xi) \overset{def}{=} \lim_{\gamma \to +0} \frac{\theta_\gamma - \theta_0}{\gamma}$$

то $IF(\theta_\gamma, \mu_\xi)$ называется ***функционалом влияния оценки*** $\widehat{\beta}_n$

Если функционал влияния существует, то

$$\theta_\gamma = \theta_0 + IF(\theta_\gamma, \mu_\xi)\gamma + \overline{\overline{o}}(\gamma),\ \gamma \to +0$$

> $IF(\theta_\gamma, \mu_\xi)$ характеризует главный линейный по γ член в разложении по γ асимптотического смещения $\theta_\gamma - \theta_0 = \theta_\gamma - \beta$

Опр. 2. *Величина* $GES(\theta_\gamma, M_\xi) \overset{def}{=} \sup_{\mu_\xi \in M_\xi} |IF(\theta_\gamma, \mu_\xi)|$ *называется чувствительностью оценки* $\widehat{\beta}_n$ *к засорениям (выбросам).*

> Если $GES(\theta_\gamma, M_\xi) < \infty$, то главный член по γ асимптотического смещения $IF(\theta_\gamma, \mu_\xi)\gamma$ равномерно по μ_ξ max при таких γ

Опр. 3. *Если $GES(\theta_\gamma, M_\xi) < \infty$, то оценка $\widehat{\beta}_n$ называется* ***робастной по смещению****, или B-робастной.*

Пример (Выборочное среднее)**.**

$$\begin{cases} u_t = a + \varepsilon_t \\ y_t = u_t + z_t^\gamma \xi_t,\ t = 1, \dots, n \end{cases}$$

$\{\varepsilon_t\}$ - *н.о.р. сл.в.*, $\mathrm{E}\varepsilon_1 = 0$ *(тогда $\mathrm{E}u_t = a$)*, $\mathrm{E}|\xi_1| < \infty$
Возьмем оценкой a эмпирическое среднее $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^n y_t$. *Тогда* $\overline{y} \xrightarrow{\mathrm{P}} E(u_1 + z_1^\gamma \xi_1) = a + \gamma \mathrm{E}\xi_1 = \theta_\gamma^{LS}$ *Функция θ_γ^{LS} определена при всех γ,*

$$\frac{d\theta_\gamma^{LS}}{d\gamma} = \mathrm{E}\xi_1 = IF(\theta_\gamma^{LS}, \mu_\xi)$$

Если M_1 - класс распределений с конечным первым моментом, то

$$GES(\theta_\gamma^{LS}, M_1) = \sup_{\mu_\xi \in M_1} |\mathrm{E}\xi_1| = \infty$$

Оценка $\overline{y}$ не B-робастна на классе M_1!

Пример (Выборочная медиана)**.** *Пусть*

$$u_t = a + \varepsilon_t,\ t = 1, \ldots, n,\ \text{где } \{\varepsilon_t\} \text{ - н.о.р. сл.в.} \tag{1}$$

$\varepsilon_1 \sim G(x)$, функция распределения $G(x)$ неизвестна, $G(0) = 1/2$. Тогда функция распределения u_1 есть $F(x) = G(x - a)$, то есть $F(a) = 1/2$. Таким образом, медиана $G(x)$ это 0, медиана $F(x)$ - a.

> *Если ε_1 имеет симметричное относительно 0 распределение (то есть $\varepsilon_1 \overset{d}{=} -\varepsilon_1$, что для непрерывной $G(x)$ равносильно условию $G(x) + G(-x) = 1\ \forall x$), то автоматически $G(0) = 1/2$. Если вдобавок $\mathrm{E}|\varepsilon_1| < \infty$, то $\mathrm{E}\varepsilon_1 = 0, \mathrm{E}u_1 = a$*

Итак, при сформулированных условия оценку медианы можно использовать как оценку математического ожидания.

Пусть $u_{(1)} \le u_{(2)} \le \ldots \le u_{(n)}$ будет вариационный ряд наблюдений $u_1, \ldots, u_n$.

Опр. 4. *Величина*

$$\widehat{m}_n = \begin{cases} u_{(k+1)} & n = 2k - 1 \\ \frac{u_{(k+1)} + u_{(k)}}{2} & n = 2k \end{cases}$$

*называется **выборочной медианой** наблюдений $u_1, \ldots, u_n$.*

Мы знаем, что если $G(x)$ дифф. в нуле, и $g(0) = G'(0) > 0$, то для выборочной медианы справедлива асимптотическая нормальность:

$$\sqrt{n}(\widehat{m}_n - a) \xrightarrow{d} N(0, \frac{1}{4g^2(0)}),\ n \to \infty$$

Если в (1) $\{\varepsilon_t\}$ - н.о.р., $\mathrm{E}\varepsilon_1 = 0$, $0 < \mathrm{E}\varepsilon_1^2 = \sigma^2 < \infty$, то $\sqrt{n}(\widetilde{u} - a) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$. Значит асимптотическая оптимальная эффективность выборочной медианы относительно $\widetilde{u}$ равна

$$\boxed{e_{\widehat{m}_n,\ \overline{X}} = 4g^2(0)\sigma^2}$$

Изучим B-робастность выборочной медианы. Пусть

$$\begin{cases} u_t = a + \varepsilon_t \\ y_t = u_t + z_t^\gamma \xi_t,\ t = 1, \ldots, n \end{cases} \qquad \widehat{m}_n^y = \begin{cases} y_{(k+1)},\ n = 2k - 1 \\ \frac{y_{(k)} + y_{(k+1)}}{2},\ n = 2k \end{cases}$$

Теорема 1.
Пусть $\exists\ g(x) = G'(x)$, $g(x)$ непрерывна и ограничена, $g(0) > 0,\ G(0) = 1/2$. Тогда:

1. $\widehat{m}_n^y \xrightarrow{\mathrm{P}} \theta_\gamma^m,\ \theta_0 = a$

2. *Существует функционал влияния выборочной медианы*

$$IF(\theta^m_\gamma, \mu_\xi) = \frac{1 - 2\mathrm{E}G(-\xi_1)}{2g(0)}$$

3. *Чувствительность выборочной медианы на классе всех возможных распределений* M_ξ

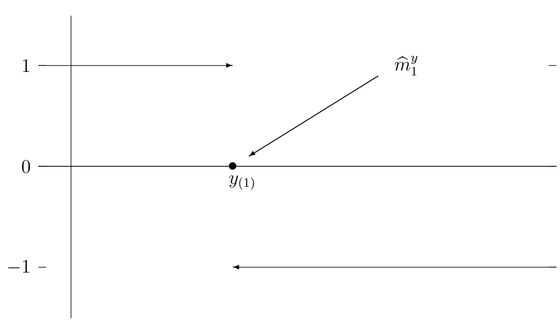
$$GES(\theta^m_\gamma, \mu_\xi) = \sum_{\mu_\xi \in M_\xi} |IF(\theta^m_\gamma, \mu_\xi)| = \frac{1}{2g(0)} < \infty$$

то есть выборочная медиана B-робастна.

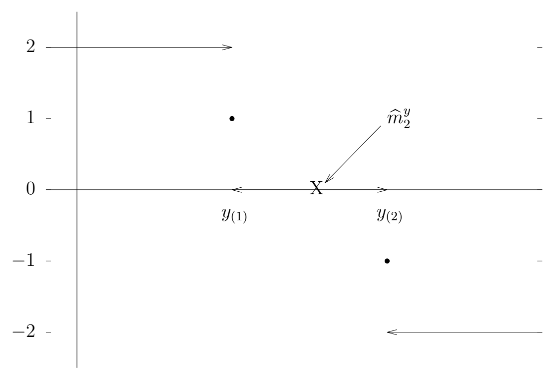
Доказательство. 1. Выборочная медиана $\widehat{m}^y_n$ удовлетворяет уравнению

$$l_n(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} sgn(y_t - \theta) = 0, \text{ где } sgn(x) = \begin{cases} -1, x < 0 \\ 0, x = 0 \\ 1, x > 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Справедливость формулы (2) легко понять из следующих рисунков:



$n = 1$



$n = 2$

Так бывает всегда: при нечетном n решение уравнения (2) всегда $\exists!$, это $\widehat{m}^y_n$; при четном n решений целый интервал и $\widehat{m}^y_n$ - его середина.

В силу Закона Больших Чисел при любом θ и любом $0 \le \gamma \le 1$

$$l_n(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} sgn(y_t - \theta) \xrightarrow{\mathrm{P}} \mathrm{E}sgn(y_1 - \theta) \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda_M(\gamma, \theta)$$

Задача: Пусть ξ и η - независимые случайные векторы, причем η - дискретный вектор со значениями $\eta_1, \eta_2, \ldots$. Проверить, что

$$\mathrm{E}\phi(\xi, \eta) = \sum_{k \ge 1} \mathrm{E}\phi(\xi, \eta_k)\mathrm{P}(\eta = \eta_k) = \sum_{k \ge 1} \mathrm{E}(\phi(\xi, \eta_k)|H_k)\mathrm{P}(H_k), \text{ где гипотеза } H_k = (\eta = \eta_k)$$

Найдем удобный вид для $\Lambda_M(\gamma, \theta)$. Имеем

$$\Lambda_M(\gamma, \theta) = \mathrm{E}(1 - 2I(y_1 - \theta \le 0)) = 1 - 2\mathrm{E}I(\varepsilon_1 \le \theta - a - z^\gamma_1\xi_1) = 1 - 2\mathrm{E}G(\theta - a - z^\gamma_1\xi_1) \quad (3)$$

так как $signx = 1 - 2I(x < 0),\ x \neq 0$. Чтобы упростить (3), введем две гипотезы $H_1 = (z_1^\gamma = 0)$ и $H_2 = (z_2^\gamma = 1)$. Тогда, используя задачу, получаем из (3):

$$\Lambda_M(\gamma, \theta) = 1 - 2(1-\gamma)G(\theta - a) - 2\gamma \mathrm{E}G(\theta - a - \xi_1)$$

Функция $\Lambda_M(\gamma, \theta)$ определена при всех γ, θ.

2. Функция $\Lambda_M(\gamma, \theta)$ в окрестности точки $(0, a)$ удовлетворяет всем предположениям теормы о неявной функции. А именно:

   (a) $\Lambda_M(0, a) = 1 - 2G(0) = 0$

   (b) Существует и непрерывны по паре (γ, θ) функции $\frac{\partial \Lambda_M(\gamma,\theta)}{\partial \gamma}$ и $\frac{\partial \Lambda_M(\gamma,\theta)}{\partial \theta}$

   (c)
$$\frac{\partial \Lambda_M(\gamma, \theta)}{\partial \theta} = -2g(0) \neq 0$$

   Значит, в окрестности точки $(0, a)$ определена функция $\theta_m(\gamma) = \theta_\gamma^m$ такая, что

$$\Lambda_M(\gamma, \theta_\gamma^m) = 0$$

   Кроме того, $\theta_0^m = a$; $\theta_\gamma^m \to \theta_0$ при $\gamma \to 0$; Функция θ_0^m дифференцируема в точке $\gamma = 0$, и

$$\left.\frac{d\theta_\gamma^m}{d\gamma}\right|_{\gamma=0} = -\left(\frac{\partial \Lambda_m(0, a)}{\partial \theta}\right)^{-1} \frac{\partial \Lambda_m(0, a)}{\partial \gamma} = \frac{1 - 2\mathrm{E}G(-\xi_1)}{2g(0)} \tag{4}$$

3. Покажем, что

$$\widehat{m}_n^y \xrightarrow{\mathrm{P}} \theta_\gamma^m,\ n \to \infty \tag{5}$$

   Тогда из (4)-(5) будет слеовать, что функционал влияния выборочной медианы равен

$$IF(\theta_\gamma^m, \mu_\xi) = \frac{1 - 2\mathrm{E}G(-\xi_1)}{2g(0)} \tag{6}$$

   Модуль числителя в (6) не больше единицы, причем если θ_1 неслучайно и $\theta_1 \to \infty$, то числитель стремится к единице. Значит,

$$GES(\theta_\gamma^m, M_\xi) = \sup_{\mu_\xi \in M_\xi} |IF(\theta_\gamma^M, \mu_\xi)| = \frac{1}{2g(0)}$$

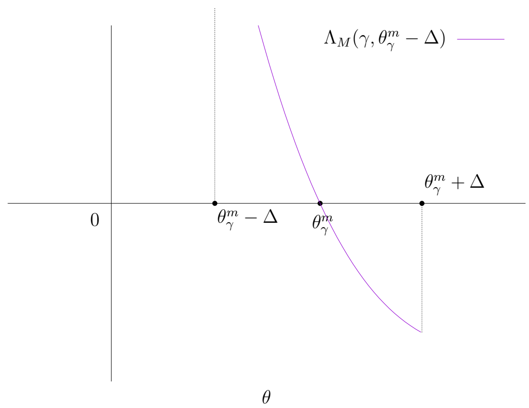
   то есть мы докажем теорему.

   Докажем (5). Имеем при малых $\gamma,\ \xi,\ \theta$ (γ-фикс.) вблизи a:

$$\frac{\partial \Lambda_M(\gamma, \theta)}{\partial \theta} = -2(1-\gamma)g(\theta - a) - 2\gamma \mathrm{E}g(\theta - a - \xi_1) < 0$$

   то есть $\underline{\Lambda_M(\gamma, \theta) \text{ убывает по } \theta}$. Значит, $\begin{cases} \Lambda_M(\gamma, \theta_\gamma^m - \Delta) > 0 \\ \Lambda_M(\gamma, \theta_\gamma^m + \Delta) < 0 \end{cases}$ Но

$$\begin{cases} l_n(\theta_\gamma^m - \Delta) \xrightarrow{\mathrm{P}} \Lambda_M(\gamma, \theta_\gamma^m - \Delta) > 0 \\ l_n(\theta_\gamma^m + \Delta) \xrightarrow{\mathrm{P}} \Lambda_M(\gamma, \theta_\gamma^m + \Delta) < 0 \end{cases} \tag{7}$$



Функция $l_n(\theta)$ монотонно убывает (точнее, не возрастает) по θ. В силу (7) с вероятностью сколь угодно близкой к единице при достаточно больших n все корни уравнения $l_n(\theta) = 0$ лежат в интервале $(\theta_\gamma^m - \Delta, \theta_\gamma^m + \Delta)$. А значит и выборочная медиана тоже! Поскольку $\Delta > 0$ любое, то получаем

$$\widehat{m}_n^y \xrightarrow{\text{P}} \theta_\gamma^m, \ n \to \infty$$

что и доказывает теорему.

$\square$

Как находить функционал влияния в общей ситуации?

Пусть оценка $\widehat{\beta}_n$ ищется как корень уравнения:

$$l_n(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \phi_t(J_n, \theta) = 0 \tag{8}$$

Пусть будут выполнены следующие условия

1. $$l_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \phi_t(J_n, \theta) \xrightarrow{\text{P}} \Lambda(\gamma, \theta)$$

   при всех $|\theta - \beta| < \delta, \ 0 \le \gamma < \gamma_0$

2. $\Lambda(0, \beta) = 0$

3. Пусть $\Lambda(\gamma, \theta)$ можно продолжить на отрезок малых γ так, что при $|\theta - \beta| < \delta, \ |\gamma| < \gamma_0$ сущесвтуют и непрерывны по паре аргументов (γ, θ) частные производные $\frac{\partial \Lambda(\gamma,\theta)}{\partial \gamma}, \frac{\partial \Lambda(\gamma,\theta)}{\partial \theta}$.

4. Пусть $\lambda(\beta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \Lambda(0,\theta)}{\partial \theta} \neq 0$

Теорема 2.
Пусть выполнены условия (1)-(4), и функции $\phi_t(J_n, \theta)$ непрерывны по θ. Тогда уравнение (8) с вероятностью, стремящейся к единице при $n \to \infty$, имеет при достаточно малых $\gamma > 0$ решение $\widehat{\beta}_n$, что соответствующая оценка $\widetilde{\beta}_n \xrightarrow{\text{P}} \theta_\gamma, \ \theta_0 = 0$, и существует функционал влияния:

$$\boxed{IF(\theta_\gamma, \mu_\xi) = -\frac{1}{\lambda(\beta)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \Lambda(0, \beta)}$$

Пример (M-оценка медианы)**.** *Пусть*

$$\begin{cases} u_t = a + \varepsilon_t \\ y_t = u_t + z_t^\gamma \xi_t \end{cases} \quad \{\varepsilon_t\}\text{-}н.о.р.,\ \varepsilon_1 \sim g(x) = G'(x),\ g(x) = g(-x)$$

Тогда a - медиана функции распределения случайной величины u_1.

Будем искать оценку a, обозначим ее как $\widehat{a}_n$, как корень уравнения

$$\sum_{t=1}^{n} \psi(y_t - \theta) = 0 \tag{9}$$

*Тогда оценка называется M**-оценкой**. В частности, при $\psi(x) = x$, $\widehat{a}_n = \overline{y}$; при $\psi(x) = sgn(x)$, $\widehat{a}_n = \widehat{m}_n^y$.*

Пусть выполняются условия:

1. *$\psi(x)$ - нечетная строго возрастающая фунцкия*

$$\lim_{x\to+\infty} \psi(x) = c_1 > 0,\ \lim_{x\to-\infty} \psi(x) = c_2 < \infty$$

2. *Существует непрерывная и ограниченая $\psi'(x)$, $\mathrm{E}\psi'(\varepsilon_1) \neq 0$*

Тогда уравнение (9) всегда имеет и притом <u>единственное</u> решение. Условия (1)-(2) выполнены, например, для $\psi(x) = arctan(x)$.

Найдем функционал влияния и чувствительность M-оценки, используя теорему 2. Проверим ее условия:

1. $$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \psi(y_t - \theta) \xrightarrow{\mathrm{P}} \mathrm{E}\psi(y_1 - \theta) \stackrel{def}{=} \Lambda(\gamma, \theta),\ \forall\theta,\ \forall 0 \le \gamma \le 1$$

   Введем гипотезы $H_1 = (z_1^\gamma = 0)$, $H_2 = (z_2^\gamma = 0)$. Тогда

$$\Lambda(\gamma,\theta) = \sum_{i=1}^{2} \mathrm{E}(\psi(\underbrace{\varepsilon_1 + a + z_1^\gamma\xi_1}_{y_1} - \theta)|H_i)\mathrm{P}(H_i) = (1-\gamma)\mathrm{E}\psi(\varepsilon_1 + a - \theta) + \gamma\mathrm{E}\psi(\varepsilon_1 + \xi_1 + a - \theta)$$

2. *$\Lambda(0, a) = \mathrm{E}\psi(\varepsilon_1) = 0$, так как $\psi(x)$ - нечетная, а $g(x)$-четная.*

3. *Функция $\Lambda(\gamma,\theta)$ определена при всех γ и θ. Частные производные $\frac{\partial\Lambda(\gamma,\theta)}{\partial\gamma}$, $\frac{\partial\Lambda(\gamma,\theta)}{\partial\theta}$ существуют при условиях (1)-(2) и непрерывны по паре (γ,θ). В частности,*

$$\frac{\partial\Lambda(0,a)}{\partial\gamma} = -\mathrm{E}\psi(\varepsilon_1) + \mathrm{E}\psi(\varepsilon_1 + \xi_1) = \mathrm{E}\psi(\varepsilon_1 + \xi_1)$$

4. $\frac{\partial\Lambda(0,a)}{\partial\theta} = -\mathrm{E}\psi'(\varepsilon_1) \neq 0$

В силу теоремы 2

$$\widehat{a}_n \xrightarrow{\mathrm{P}} \theta_\gamma,\ \theta_0 = a$$

$$IF(\theta_\gamma, \mu_\xi) = \frac{\mathrm{E}\psi(\varepsilon_1 + \xi_1)}{\mathrm{E}\psi'(\varepsilon_1)}$$

$$GES(\theta_\gamma, M_\xi) \le \frac{\max\{|c_1|, |c_2|\}}{\mathrm{E}\psi'(\varepsilon_1)} < \infty,\ M_\xi\text{-класс всех вер. распределений}$$

4 Статистистический анализ авторегрессионных моделей.

Пусть $\ldots, S_{-1}, S_0, S_1, \ldots$ - стоимости ценных бумаг, например, акций. Величины

$$u_t = \ln(S_t/S_{t-1}) = \ln S_t - \ln S_{t-1}$$

называются логарифмическими приращениями и для описания их поведения часто используют стохастические разностные уравнения. Например, <u>$AR(p)$-уравнение</u> имеет вид

$$u_t = \beta_1 u_{t-1} + \beta_2 u_{t-2} + \ldots + \beta_p u_{t-p} + \varepsilon_t,\ t \in \mathbb{Z}$$

Здесь $\{\varepsilon_t\}$ - н.о.р. сл.в., $\mathrm{E}\varepsilon_1 = 0$, $0 < \mathrm{E}\varepsilon_1^2 = \sigma^2 < \infty$; $\beta_1, \ldots, \beta_p \in \mathbb{R}^1$ $(\beta_p \neq 0)$ - это неизвестные коэффициенты авторегрессии.

Иногда удобно рассматривать $AR(p)$-уравнение для $t \equiv 1, 2, \ldots$ при начальных условиях $u_{1-p}, \ldots, u_n$.

<u>$ARCH(p)$-уравнение</u> имеет вид:

$$u_t = \sigma_t \varepsilon_t,\ \text{где } \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_p u_{t-p}^2,\ t \in \mathbb{Z}$$

Здесь $\alpha_0 > 0,\ \alpha_k \geq 0,\ \alpha_p > 0,\ \{\varepsilon_t\}$ - н.о.р., $\mathrm{E}\varepsilon_1 = 0, \mathrm{E}\varepsilon_1^2 = 1$

4.1 Метод максимального правдоподобия и метод наименьших квадратов в авторегрессии.

$AR(1)$-модель.

$$u_t = \beta u_{t-1} + \varepsilon_t,\ t = 1, 2, \ldots;\ u_0 = 0,\ \beta \in \mathbb{R}^1,\ \{\varepsilon_t\} \text{ - н.о.р. сл.в, } \mathrm{E}\varepsilon_1 = 0,\ 0 < \mathrm{E}\varepsilon_1^2 < \infty \qquad (1)$$

Тогда

$$u_t = \beta(\beta u_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t = \varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1} + \beta^2 u_{t-2} = \ldots = \varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1} + \ldots + \beta^{t-1}\varepsilon_1$$

1. <u>Стационарный случай $|\beta| < 1$</u>.

$$u_t \xrightarrow{\text{с.к.}} u_t^0 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j \geq 0} \beta^j \varepsilon_{t-j}$$

и ряд средне-квадратично сходится, так как

$$\mathrm{E}(u_t - u_t^\circ)^2 = \mathrm{E}(\sum_{j \geq t} \beta^j \varepsilon_{t-j})^2 = \mathrm{E}\varepsilon_1^2 \sum_{j \geq t} \beta^{2j} = \underline{\underline{\mathcal{O}}}(\beta^{2t}) = \overline{\overline{o}}(1),\ t \to \infty$$

2. <u>Критический случай (неустойчивая авторегрессия) $|\beta| = 1$</u>

3. <u>Взрывающаяся авторегрессия $|\beta| > 1$</u>

$$\mathrm{D}u_t = \mathrm{D}\sum_{j=1}^{t-1} \beta^j \varepsilon_{t-j} = \mathrm{E}\varepsilon_1^2 \sum_{j=0}^{t-1} \beta^{2j} = \underbrace{\mathrm{E}\varepsilon_1^2(1 - \beta^{2t})}_{1-\beta^2} = \underline{\underline{\mathcal{O}}}(\beta^{2t}) \to \infty,\ t \to \infty \text{ эксп. быстро}$$

Мы знаем: оптимальный средне-квадратичный прогноз u_{n+1} по $u_1, \ldots, u_n$ есть $\widetilde{u}_{n+1} = \beta u_n$. Надо уметь оценивать β!

Пусть $\varepsilon_1 \sim g(x)$, ???. Положим

$$\mathcal{E} \stackrel{\text{def}}{=} (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)^T,\ U = (u_1, \ldots, u_n)^T,\ B = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ -\beta & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -\beta & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда из (1)

$$\mathcal{E} = BU \Rightarrow U = B^{-1}\mathcal{E} \tag{2}$$

Пл.в. вектора $\mathcal{E}$ есть $g_{\mathcal{E}}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^n g(x_i)$. Тогда пл.в. вектора U есть в силу (2)

$$g_n(y, \beta) = \frac{1}{|\det(B^{-1})|} g_{\mathcal{E}}(By) = \left| By = \begin{pmatrix} y_1 - \beta * 0 \\ y_2 - \beta y_1 \\ \vdots \\ y_n - \beta y_{n-1} \end{pmatrix} \right| = \prod_{t=1}^n g(y_t - \beta y_{t-1}),\ \text{где } y = (y_1, \ldots, y_n)$$

О.м.п. для β - решение задачи

$$\ln g_U(U, \theta) = \sum_{t=1}^n \ln g(u_t - \theta u_{t-1}) \to \max_{\theta \in \mathbb{R}^1} \tag{3}$$

Для гладкой g уравнение максимального правдоподобия

$$\sum_{t=1}^n u_{t-1} \frac{g'(u_t - \theta u_{t-1})}{g(u_t - \theta u_{t-1})} = 0 \tag{4}$$

Пример $(\varepsilon_1 \sim N(0, \sigma^2))$**.** *Тогда* $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}$ *и задача* (3) *имеет вид*

$$\sum_{t=1}^n \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(u_t - \theta u_{t-1})^2}{2\sigma^2}\right\} \to \max_{\theta \in \mathbb{R}^1}$$

Последняя задача эквивалентна следующей:

$$\sum_{t=1}^n (u_t - \theta u_{t-1})^2 \to \min_{\theta \in \mathbb{R}^1} \tag{5}$$

Решение задачи (5) *- о.м.п.*

$$\widehat{\beta}_{n,ML} = \frac{\sum_{t=1}^n u_{t-1} u_t}{\sum_{t=1}^n u_{t-1}^2} \tag{6}$$

Если мы не предполагаем гауссовость ε_1*, то решение задачи* (5) *есть о.н.к.*

$$\widehat{\beta}_{n,LS} = \frac{\sum_{t=1}^n u_{t-1} u_t}{\sum_{t=1}^n u_{t-1}^2} \tag{7}$$

Оценка $\widehat{\beta}_{n,ML}$ *- параметрическая, а* $\widehat{\beta}_{n,LS}$ *- непараметрическая.*

Пример $(\varepsilon_1 \sim Lap(\lambda))$**.** *Тогда* $g(x) = \frac{\lambda}{2}\exp\{-\lambda|x|\},\ \lambda > 0$. *Задача* (5) *имеет вид:*

$$\sum_{t=1}^{n} \ln \frac{\lambda}{2} \exp\{-\lambda|u_t - \theta u_{t-1}|\} \to \max_{\theta\in\mathbb{R}^1}$$

что эквивалентно задаче

$$\sum_{t=1}^{n} |u_t - \theta u_{t-1}| \to \min_{\theta\in\mathbb{R}^1} \tag{8}$$

Решение (8) *- о.м.п.* $\widehat{\beta}_{n,ML}$*. Если распределение* ε_1 *неизвестно, то решение* (8) *- о.н.м.* $\widehat{\beta}_{n,LS}$*.*
Оценка $\widehat{\beta}_{n,LS}$ *не выписывается явно!*

Рассмотрим случай гауссовских $\{\varepsilon_t\},\ \varepsilon_1 \sim N(0,1)$. Пусть

$$d_n^2(\beta) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{u}{1-\beta^2}, & |\beta| < 1 \\ \frac{u^2}{2}, & |\beta| = 1 \\ \frac{\beta^{2n}}{(\beta^2-1)^2}, & |\beta| > 1 \end{cases}$$

Покажем, что $d_n^2(\beta) \sim J_n(\beta),\ n \to \infty$, где $J_n(\beta)$ - информации Фишера о параметре β, содержащаяся в $u_1, \dots, u_n$. Действительно, если $U = (u_1, \dots, u_n),\ y = (y_1, \dots, y_n)$, то пл. вер.

$$g_U(y,\beta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}(y_t - \beta y_{t-1})^2\right\}$$

и поэтому

$$J_n(\beta) = \mathrm{E}_\beta\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\ln g_U(U,\beta)\right)^2 = \mathrm{E}_\beta\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}(u_t - \beta u_{t-1})^2\right)\right) =$$

$$= \mathrm{E}_\beta\left(\sum_{t=1}^{n} u_{t-1}(u_t - \beta u_{t-1})\right)^2 = \mathrm{E}_\beta\left(\sum_{t=1}^{n} u_{t-1}\varepsilon_t\right)^2 = \sum_{t=1}^{n}\mathrm{E}_\beta u_{t-1}^2 = \sum_{t=1}^{n-1}\mathrm{E}_\beta u_t^2$$

Но $u_t = \sum_{j=0}^{t-1}\beta^j\varepsilon_{y-j}$, и

$$\mathrm{E}u_t^2 = \mathrm{E}(\sum_{j=0}^{t-1}\beta^j\varepsilon_{t-j})^2 = \sum_{j=1}^{t-1}\beta^{2j} = \begin{cases} \frac{1-\beta^{2t}}{1-\beta^2}, & |\beta| \neq 1 \\ t, & |\beta| = 1 \end{cases}$$

Значит,

$$J_N(\beta) = \begin{cases} \frac{u-1}{1-\beta^2} - \frac{\beta^2(1-\beta^{2(n-1)})}{(1-\beta^2)^2}, & |\beta| \neq 1 \\ \frac{(n-1)(1+(n-1))}{2}, & |\beta| = 1 \end{cases}$$

Отсюда

$$J_n(\beta) \sim \begin{cases} \frac{u}{1-\beta^2}, & |\beta| < 1 \\ \frac{u^2}{2}, & |\beta| = 1 \\ \frac{\beta^{2n}}{(\beta^2-1)^2}, & |\beta| > 1 \end{cases} = d_n^2(\beta)$$

Распределение Коши с параметрами $(0,1)$ обозначается $K(0,1)$, $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$.
Пусть $W(s),\ s \in [0,1]$ - стандартный винеровский процесс. Обозначим $H(\beta),\ |\beta| = 1$, распределение сл. в. β

$$H(\beta) = \frac{W^2(1) - 1}{2^{3/2}\int_0^1 W^2(s)ds}$$

Теорема 1.
Пусть $\{\varepsilon_t\}$-н.о.р. сл.в., $\varepsilon_1 \sim N(0,1)$. Тогда

$$d_n(\beta)(\widehat{\beta}_{n,ML} - \beta) \xrightarrow{d} \begin{cases} N(0,1), & |\beta| < 1 \\ H(0,1), & |\beta| = 1\,, \quad n \to \infty \\ K(0,1), & |\beta| > 1 \end{cases}$$

Доказательство.

$$\widehat{\beta}_{n,ML} = \frac{\sum_{t=1}^n u_{t-1}u_t}{\sum_{t=1}^n u_{t-1}^2} = \frac{\sum_{t=1}^n u_{t-1}(\beta u_{t-1} + \varepsilon_t)}{\sum_{t=1}^n u_{t-1}^2} = \beta + \frac{\sum_{t=1}^n \varepsilon_t u_{t-1}}{\sum_{t=1}^n u_{t-1}^2}$$

Положим для краткости

$$M_n \stackrel{\text{def}}{=} d_n^{-1}(\beta)\sum_{t=1}^n \varepsilon_t u_{t-1},\ V_n \stackrel{\text{def}}{=} d_n^{-2}(\beta)\sum_{t=1}^n u_{t-1}^2$$

Тогда

$$d_n(\beta)(\widehat{\beta}_{n,ML} - \beta) = \frac{M_n}{V_n}$$

Пусть $f_n(t,s)$ - совместная характеристическая функция M_n и V_n. Тогда (см [RAO M.M. Statist, 1978, V.6, pp. 185-190])

$$f_n(t,s) \to f(t,s) = \begin{cases} \exp\left\{is - \frac{t^2}{2}\right\}, & |\beta| < 1 \\ (1 + t^2 - 2is)^{-1/2}, & |\beta| > 1 \end{cases} \tag{9}$$

1. $\underline{|\beta| < 1}$. Тогда $f(t,s)$ есть характеристическая функция вектора $(\xi,1)^T$, где $\xi \sim N(0,1)$. Действительно,

   $$\phi(t,s) = \mathrm{E}\exp\{i(t\xi + s)\} = e^{is}\phi_\xi(t) = \exp\left\{is - \frac{t^2}{2}\right\}$$

   Теорема (О наследовании сходимости)**.**
   Пусть случайный вектор $S_n \xrightarrow{d} S,\ n \to \infty,\ S_n, S \in \mathbb{R}^k,\ H : R^k \to R^1$ - борелевская функция, непрерывная на множестве A таком, что $\mathrm{P}(S \in A) = 1$. Тогда $H(S_n) \xrightarrow{d} H(S),\ n \to \infty$

   В силу (9) $(M_n, V_n)^T \xrightarrow{d} (\xi,1)^T$. Если $H(x,y) = \frac{x}{y}$, то $H(x,y)$ непрерывна при $y > 0$. Можно взять $A = \{y : y > 0\},\ \mathrm{P}((\xi,1)^T \in A) = 1$. В силу теоремы о наследовании слабой сходимости

   $$d_n(\beta)(\widehat{\beta}_{n,ML} - \beta) = \frac{M_n}{V_n} = H(M_n, V_n) \xrightarrow{d} H(\xi,1) = \xi$$

2. $\underline{|\beta| > 1}$. Тогда $f(t,s)$ есть хар. функция вектора $(\xi\eta, \eta^2)^T$, где $\xi, \eta \sim N(0,1)$, ξ и η независимы. Действительно,

   $$\mathrm{E}\exp\left\{it(\xi\eta) + is\eta^2\right\} = \mathrm{EE}\left(\exp\left\{\frac{it(\xi\eta) + is\eta^2}{2}\right\}\right) = \mathrm{E}\exp\left\{is\eta^2\right\}\mathrm{E}\left(\exp\left\{\frac{i(t\xi)\eta}{2}\right\}\right) =$$

$$= \mathrm{E}\exp\left\{is\eta^2\right\}\exp\left\{\frac{-t^2\eta^2}{2}\right\} = \mathrm{E}\exp\left\{i\left(s+\frac{it^2}{2}\right)\eta^2\right\} = \left|\mathrm{E}\exp\left\{ilx_1^2\right\} = (1-2il)^{-1/2}\right| =$$

$$= \left(1-2is+\frac{2t^2}{2}\right)^{-1/2} = (1+t^2-2is)^{-1/2} = \phi(t,s)$$

Значит, $(M_n, V_n)^T \xrightarrow{d} (\xi\eta, \eta^2)^T$,

$$d_n(\beta)(\widehat{\beta}_{n,ML}-\beta) = \frac{M_n}{V_n} \xrightarrow{d} \frac{\xi\eta}{\eta^2} = \frac{\xi}{\eta} \sim K(0,1)$$

3. $\underline{|\beta| = 1}$. Тогда

$$M_n = \frac{\sqrt{2}}{n}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t u_{t-1},\ V_n = \frac{2}{n^2}\sum_{t=1}^{n}u_{t=1}^2$$

$\square$