Нахождение корней линейной системы уравнения с помощью метода Гаусса с нахождением максимального элемента по столбцу

Шерстобитов Андрей
332 группа

22 октября 2020 г.

Содержание

1 Постановка задачи

Пусть дана матрица A размера $n \times n$, вектор b размера n. Требуется найти решение линейной системы $Ax = b$, используя метод Гаусса с выбором максимального элмента по столбцу.

2 Алгоритм

2.1 Разбиение матрицы на блоки

Разобьем матрицу A на блоки размера $m \times m$ по формуле $n = k \cdot m + l$:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} A_{1,1}^{m\times m} & A_{1,2}^{m\times m} & \dots & A_{1,k}^{m\times m} & A_{1,k+1}^{m\times l} & B_1^m \\ A_{2,1}^{m\times m} & A_{2,2}^{m\times m} & \dots & A_{2,k}^{m\times m} & A_{2,k+1}^{m\times l} & B_2^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{k,1}^{m\times m} & A_{k,2}^{m\times m} & \dots & A_{k,k}^{m\times m} & A_{k,k+1}^{m\times l} & B_k^m \\ A_{k+1,1}^{l\times m} & A_{k+1,2}^{l\times m} & \dots & A_{k+1,k}^{l\times m} & A_{k+1,k+1}^{l\times l} & B_{k+1}^l \end{array}\right)$$

2.2 Прямой ход

1. $A_{1,1}^{m\times m} \to V_1$, методом Гаусса с выбором максимального элемента по столбцу для находим обратную матрицу $V_1|V_3 \Rightarrow V_3 = V_1^{-1} = (A_{1,1}^{m\times m})^{-1}$, $min = \|V_3\|$

   Если $\nexists (A_{1,1}^{m\times m})^{-1}$, то выбираем следующую строчку.

   Если $\forall A_{i,1}^{m\times m}, i = 1, \dots k \nexists (A_{i,1}^{m\times m})^{-1}$, то алгоритм не применим.

   $\forall i = 2, \dots k \; A_{i,1}^{m\times m} \to V_1$. $V_1|V_2 \Rightarrow V_2 = V_1^{-1}$, если $\|V_2\| < min$, то меняем местами указатели V_3 и V_2.

2. $I_i \leftrightarrow I_1$ (строчки)

3. $A_{1,1}^{m\times m} = E_{1,1}^{m\times m}$, $V_3 \times (A_{1,2}^{m\times m} \; \dots \; A_{1,k}^{m\times m} \; A_{1,k+1}^{m\times l} = B_1^m)$:
   $A_{1,j}^{m\times m}, j = 2, \dots, k$; $A_{1,j}^{m\times l}, j = k+1$ сохраняем в V_1, затем $V_2 = V_3 \cdot V_1$ и $V_2 \to A_{1,j}$. В итоге получаем: $E_{1,1}^{m\times m} \; A_{1,2}^{m\times m^*} \; \dots \; A_{1,k}^{m\times m^*} \; A_{1,k+1}^{m\times l^*} = B_1^{m^*}$

4. Далее действуем по формуле $A_{i,j} = A_{i,j} - A_{i,1} \cdot A_{1,j}$, получим матрицу:
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} E_{1,1}^{m\times m} & A_{1,2}^{m\times m^*} & \dots & A_{1,k}^{m\times m^*} & A_{1,k+1}^{m\times l^*} & B_1^{m^*} \\ 0 & A_{2,2}^{m\times m^*} & \dots & A_{2,k}^{m\times m^*} & A_{2,k+1}^{m\times l^*} & B_2^{m^*} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & A_{k,2}^{m\times m^*} & \dots & A_{k,k}^{m\times m^*} & A_{k,k+1}^{m\times l^*} & B_k^{m^*} \\ 0 & A_{k+1,2}^{l\times m^*} & \dots & A_{k+1,k}^{l\times m^*} & A_{k+1,k+1}^{l\times l^*} & B_{k+1}^{l^*} \end{array}\right)$$

5. Далее повторяем алгоритм для матрицы $(n-m)\times(n-m)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} A_{2,2}^{m\times m^*} & \dots & A_{2,k}^{m\times m^*} & A_{2,k+1}^{m\times l^*} & B_2^{m^*} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{k,2}^{m\times m^*} & \dots & A_{k,k}^{m\times m^*} & A_{k,k+1}^{m\times l^*} & B_k^{m^*} \\ A_{k+1,2}^{l\times m^*} & \dots & A_{k+1,k}^{l\times m^*} & A_{k+1,k+1}^{l\times l^*} & B_{k+1}^{l^*} \end{array}\right)$$

На $r < k+1$ ходу алгоритма:

1. Ищем вышеописанную обратную среди матриц $A_{qr}^{m\times m},\ q = r, \dots, k$

2. $I_r \leftrightarrow I_q$ (строчки)

3. $A_{r,r}^{m\times m} = E_{r,r}^{m\times m},\ (A_{r,r}^{m\times m})^{-1} \times (A_{r,r+1}^{m\times m}\ \dots\ A_{r,k}^{m\times m}\ A_{r,k+1}^{m\times l} = B_r^m)$

4. $$\begin{array}{rl} i,j = r+1,\dots,k & A_{i,j}^{m\times m} = A_{i,j}^{m\times m} - A_{i,r}^{m\times m} \times A_{r,j}^{m\times m} \\ i = r+1,\dots,k & A_{i,k+1}^{m\times l} = A_{i,k+1}^{m\times l} - A_{i,r}^{m\times m} \times A_{r,k+1}^{m\times l} \\ j = r+1,\dots,k & A_{k+1,j}^{l\times m} = A_{k+1,j}^{l\times m} - A_{k+1,r}^{l\times m} \times A_{r,j}^{m\times m} \\ & A_{k+1,k+1}^{l\times l} = A_{k+1,k+1}^{l\times l} - A_{k+1,r}^{l\times m} \times A_{r,k+1}^{m\times l} \\ i = r+1,\dots,k & B_i^m = B_i^m - A_{i,r}^{m\times m} \times B_r^m \\ & B_{k+1}^l = B_{k+1}^l - A_{k+1,r}^{l\times m} \times B_r^m \\ i = r+1,\dots,k & A_{i,r}^{m\times m} = 0 \\ & A_{k+1,r}^{l\times m} = 0 \end{array}$$

На $r = k+1$ ходу алгоритма:

1. Ищем вышеописанную обратную к $A_{k+1,k+1}^{l\times l}$

3. $A_{k+1,k+1}^{l\times l} = E_{k+1,k+1}^{l\times l},\ B_{k+1}^l = (A_{k+1,k+1}^{l\times l})^{-1} \times B_{k+1}^l$

После прямого хода получаем матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}
E_{1,1}^{m\times m} & A_{1,2}^{m\times m^*} & \dots & A_{1,k}^{m\times m^*} & A_{1,k+1}^{m\times l^*} & B_1^{m^*}\\
0 & E_{2,2}^{m\times m^*} & \dots & A_{2,k}^{m\times m^*} & A_{2,k+1}^{m\times l^*} & B_2^{m^*}\\
\multicolumn{5}{c|}{\dotfill} & \dots\\
0 & 0 & \dots & E_{k,k}^{m\times m^*} & A_{k,k+1}^{m\times l^*} & B_k^{m^*}\\
0 & 0 & \dots & 0 & E_{k+1,k+1}^{l\times l^*} & B_{k+1}^{l^*}
\end{array}\right)$$

2.3 Обратный ход

$$r=1:\ E_{k+1,k+1}^{l\times l}=X_{k+1}^{l}$$

$$r=2:\ X_k^m=B_i^k-A_{k,k+1}^{m\times l}\cdot B_{k+1}^{l},\ A_{k,k+1}^{m\times l}=0$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}
E_{1,1}^{m\times m} & A_{1,2}^{m\times m^*} & \dots & A_{1,k}^{m\times m^*} & A_{1,k+1}^{m\times l^*} & B_1^{m}\\
0 & E_{2,2}^{m\times m} & \dots & A_{2,k}^{m\times m^*} & A_{2,k+1}^{m\times l^*} & B_2^{m}\\
\multicolumn{5}{c|}{\dotfill} & \dots\\
0 & 0 & \dots & E_{k,k}^{m\times m} & 0 & X_k^{m}\\
0 & 0 & \dots & 0 & E_{k+1,k+1}^{l\times l} & X_{k+1}^{l}
\end{array}\right)$$

$$\forall r=3,\dots,k:\ X_i^m=B_i^m-\sum_{j=i+1}^{n}A_{i,j}^{m\times h}\cdot X_j^h,\ A_{i,j}^{m\times h}=0, i=k-2,\dots,0$$

$$h=(j\ <\ k)\ ?\ m\ :\ l$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}
E_{1,1}^{m\times m} & 0 & \dots & 0 & 0 & X_1^{m}\\
0 & E_{2,2}^{m\times m} & \dots & 0 & 0 & X_2^{m}\\
\multicolumn{5}{c|}{\dotfill} & \dots\\
0 & 0 & \dots & E_{k,k}^{m\times m} & 0 & X_k^{m}\\
0 & 0 & \dots & 0 & E_{k+1,k+1}^{l\times l} & X_{k+1}^{l}
\end{array}\right)$$

3 Хранение в памяти

Матрицу A храним в памяти таким образом:

$$A=\{a_{1,1},a_{1,2},\dots,a_{1,m},a_{2,1},a_{2,2},\dots,a_{2,m},\dots,a_{m,1},a_{m,2},\dots,a_{m,m},\\ a_{1,m+1},a_{1,m+2},\dots,a_{1,2m},\dots,a_{n,n},b_1,\dots,b_n\}$$

В блочном виде:

$$A = \{A_{1,1}, A_{1,2}, \ldots, A_{1,k+1}, A_{2,1}, A_{2,2}, \ldots, A_{2,k+1}, \ldots,$$
$$A_{k+1,1}, A_{k+1,2}, \ldots, A_{k+1,k+1}, B_1, \ldots, B_{k+1}\}$$

Тогда указатель на блок $A_{i,j} : A + (i-1) \cdot n \cdot m + (j-1) \cdot last\_i \cdot m,.$ Указатель на элемент (p, q) этой же матрицы: $A + (i-1) \cdot n \cdot m + (j-1) \cdot last\_i \cdot m + (p-1) \cdot last\_j + (q-1)$, где $last\_i = i \ < \ k \ ? \ m \ : \ l, \ last\_j = j \ < \ k \ ? \ m \ : \ l$.

Указатель на i-ый элемент B: $A + n \cdot n + (i-1)$

4 Оценка сложности

1. Нахождение обратной матрицы для $A^{n \times n}$: $\frac{8}{3}n^3 + O(n^2)$
2. Умножение матриц $A^{n \times m} \times A^{m \times l}$: $2mnl - nl$
3. Сложение матриц $A^{n \times m} + A^{n \times m}$: nm

4.1 Прямой ход

На $r < k+1$ ходу прямого хода:

На шаге 1:

$(k - r + 1)$ нахождений обратной матрицы к матрице $m \times m$

На шаге 3:

$(k - r)$ умножений матриц $m \times m$ на $m \times m$

1 умножение матрицы $m \times m$ на матрицу $m \times l$

1 умножение матрицы $m \times m$ на матрицу $m \times 1$

На шаге 4:

$m \times m$: по $(k - r)^2$ умножений и сложений

по $(k - r)$ умножений матриц $l \times m$ на $m \times m$ и $m \times m$ на $m \times l$

по $(k - r)$ сложений матриц $l \times m$ и $m \times l$

$(k - r)$ умножений матрицы $m \times m$ на $m \times 1$

$(k - r)$ сложений матриц $m \times 1$

1 умножение матрицы $l \times m$ на $m \times l$

1 сложение $l \times l$

1 умножение $l \times m$ матрицы на $m \times 1$

1 сложение $l \times 1$ матриц

На $r = k+1$ ходу:

На шаге 1:

1 нахождение обратной матрицы к матрице $l \times l$

На шаге 3:

1 умножение матрицы $l \times l$ на матрицу $l \times 1$

Сложнось прямого хода:

$$\sum_{i=0}^{k-1}((i+1)\frac{8}{3}m^3 + i(i+1)(2m^3 - m^2) + i^2m^2 + (1+2i)(2m^2l - ml) + 2iml$$
$$+ 2ml^2 - ml + l^2 + (1+i)(2m^2 - m) + im + 2ml - l + l) + \frac{8}{3}l^3 + 2l^2 - l$$

4.2 Обратный ход

На шаге 1: k умножений матриц $m \times l$ на $l \times 1$ и k сложений $m \times 1$ матриц. На каждом следующем шаге r: $(k-r)$ умножений $m \times m$ на $m \times 1$ и $(k-r)$ сложений $m \times 1$ матриц.

Сложность обратного хода:

$$\sum_{i=0}^{k-2}(i(2m^2 - m) + im) + k(ml - m) + km$$

4.3 Сложность алгоритма

Сложность всего алгоритма:

$$\boxed{\frac{2}{3}n^3 + \frac{4}{3}mn^2 + \frac{2}{3}m^2n + O(n^2)}$$

При $m = 1$: $\frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$;

При $m = n$: $\frac{8}{3}n^3 + O(n^2)$;