

Нахождение корней линейной системы
уравнения с помощью метода Гаусса с
нахождением максимального элемента по
столбцу

Шерстобитов Андрей
332 группа

9 ноября 2020 г.

Содержание

1	Постановка задачи	3
2	Алгоритм	3
2.1	Разбиение матрицы на блоки	3
2.2	Прямой ход	3
2.3	Обратный ход	5
3	Хранение в памяти	5
4	Оценка сложности	6
4.1	Прямой ход	6
4.2	Обратный ход	7
4.3	Сложность алгоритма	7

1 Постановка задачи

Пусть дана матрица A размера $n \times n$, вектор b размера n . Требуется найти решение линейной системы $Ax = b$, используя метод Гаусса с выбором максимального элемента по столбцу.

2 Алгоритм

2.1 Разбиение матрицы на блоки

Разобьем матрицу A на блоки размера $m \times m$ по формуле $n = k \cdot m + l$:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} A_{1,1}^{m \times m} & A_{1,2}^{m \times m} & \dots & A_{1,k}^{m \times m} & A_{1,k+1}^{m \times l} & B_1^m \\ A_{2,1}^{m \times m} & A_{2,2}^{m \times m} & \dots & A_{2,k}^{m \times m} & A_{2,k+1}^{m \times l} & B_2^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{k,1}^{m \times m} & A_{k,2}^{m \times m} & \dots & A_{k,k}^{m \times m} & A_{k,k+1}^{m \times l} & B_k^m \\ A_{k+1,1}^{l \times m} & A_{k+1,2}^{l \times m} & \dots & A_{k+1,k}^{l \times m} & A_{k+1,k+1}^{l \times l} & B_{k+1}^l \end{array} \right)$$

2.2 Прямой ход

1. $A_{1,1}^{m \times m} \rightarrow V_1$, методом Гаусса с выбором максимального элемента по столбцу для находим обратную матрицу $V_1|V_3 \Rightarrow V_3 = V_1^{-1} = (A_{1,1}^{m \times m})^{-1}$, $min = \|V_3\|$

Если $\nexists (A_{1,1}^{m \times m})^{-1}$, то выбираем следующую строчку.

Если $\forall A_{i,1}^{m \times m}, i = 1, \dots, k \nexists (A_{i,1}^{m \times m})^{-1}$, то алгоритм не применим.

$\forall i = 2, \dots, k A_{i,1}^{m \times m} \rightarrow V_1$. $V_1|V_2 \Rightarrow V_2 = V_1^{-1}$, если $\|V_2\| < min$, то меняем местами указатели V_3 и V_2 .

2. $I_i \leftrightarrow I_1$ (строчки)

3. $A_{1,1}^{m \times m} = E_{1,1}^{m \times m}$, $V_3 \times (A_{1,2}^{m \times m} \dots A_{1,k}^{m \times m} A_{1,k+1}^{m \times l} = B_1^m)$:
 $A_{1,j}^{m \times m}, j = 2, \dots, k$; $A_{1,j}^{m \times l}, j = k+1$ сохраняем в V_1 , затем $V_2 = V_3 \cdot V_1$ и $V_2 \rightarrow A_{1,j}$. В итоге получаем: $E_{1,1}^{m \times m} A_{1,2}^{m \times m*} \dots A_{1,k}^{m \times m*} A_{1,k+1}^{m \times l*} = B_1^{m*}$

4. Далее действуем по формуле $A_{i,j} = A_{i,j} - A_{i,1} \cdot A_{1,j}$, получим матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} E_{1,1}^{m \times m} & A_{1,2}^{m \times m^*} & \dots & A_{1,k}^{m \times m^*} & A_{1,k+1}^{m \times l^*} & B_1^{m^*} \\ 0 & A_{2,2}^{m \times m^*} & \dots & A_{2,k}^{m \times m^*} & A_{2,k+1}^{m \times l^*} & B_2^{m^*} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & A_{k,2}^{m \times m^*} & \dots & A_{k,k}^{m \times m^*} & A_{k,k+1}^{m \times l^*} & B_k^{m^*} \\ 0 & A_{k+1,2}^{l \times m^*} & \dots & A_{k+1,k}^{l \times m^*} & A_{k+1,k+1}^{l \times l^*} & B_{k+1}^{l^*} \end{array} \right)$$

5. Далее повторяем алгоритм для матрицы $(n - m) \times (n - m)$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} A_{2,2}^{m \times m^*} & \dots & A_{2,k}^{m \times m^*} & A_{2,k+1}^{m \times l^*} & B_2^{m^*} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{k,2}^{m \times m^*} & \dots & A_{k,k}^{m \times m^*} & A_{k,k+1}^{m \times l^*} & B_k^{m^*} \\ A_{k+1,2}^{l \times m^*} & \dots & A_{k+1,k}^{l \times m^*} & A_{k+1,k+1}^{l \times l^*} & B_{k+1}^{l^*} \end{array} \right)$$

На $r < k + 1$ ходу алгоритма:

1. Ищем вышеописанную обратную среди матриц $A_{qr}^{m \times m}$, $q = r, \dots, k$
2. $I_r \leftrightarrow I_q$ (строочки)
3. $A_{r,r}^{m \times m} = E_{r,r}^{m \times m}$, $(A_{r,r}^{m \times m})^{-1} \times (A_{r,r+1}^{m \times m} \dots A_{r,k}^{m \times m} A_{r,k+1}^{m \times l} = B_r^m)$
4. $i, j = r + 1, \dots, k$ $A_{i,j}^{m \times m} = A_{i,j}^{m \times m} - A_{i,r}^{m \times m} \times A_{r,j}^{m \times m}$
 $i = r + 1, \dots, k$ $A_{i,k+1}^{m \times l} = A_{i,k+1}^{m \times l} - A_{i,r}^{m \times m} \times A_{r,k+1}^{m \times l}$
 $j = r + 1, \dots, k$ $A_{k+1,j}^{l \times m} = A_{k+1,j}^{l \times m} - A_{k+1,r}^{l \times m} \times A_{r,j}^{m \times m}$
 $A_{k+1,k+1}^{l \times l} = A_{k+1,k+1}^{l \times l} - A_{k+1,r}^{l \times m} \times A_{r,k+1}^{m \times l}$
 $i = r + 1, \dots, k$ $B_i^m = B_i^m - A_{i,r}^{m \times m} \times B_r^m$
 $B_{k+1}^l = B_{k+1}^l - A_{k+1,r}^{l \times m} \times B_r^m$
 $i = r + 1, \dots, k$ $A_{i,r}^{m \times m} = 0$
 $A_{k+1,r}^{l \times m} = 0$

На $r = k + 1$ ходу алгоритма:

1. Ищем вышеописанную обратную к $A_{k+1,k+1}^{l \times l}$
3. $A_{k+1,k+1}^{l \times l} = E_{k+1,k+1}^{l \times l}$, $B_{k+1}^l = (A_{k+1,k+1}^{l \times l})^{-1} \times B_{k+1}^l$

После прямого хода получаем матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} E_{1,1}^{m \times m} & A_{1,2}^{m \times m^*} & \dots & A_{1,k}^{m \times m^*} & A_{1,k+1}^{m \times l^*} & B_1^{m^*} \\ 0 & E_{2,2}^{m \times m^*} & \dots & A_{2,k}^{m \times m^*} & A_{2,k+1}^{m \times l^*} & B_2^{m^*} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & E_{k,k}^{m \times m^*} & A_{k,k+1}^{m \times l^*} & B_k^{m^*} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & E_{k+1,k+1}^{l \times l^*} & B_{k+1}^{l^*} \end{array} \right)$$

2.3 Обратный ход

$$r = 1 : E_{k+1,k+1}^{l \times l} = X_{k+1}^l$$

$$r = 2 : X_k^m = B_i^k - A_{k,k+1}^{m \times l} \cdot B_{k+1}^l, \quad A_{k,k+1}^{m \times l} = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} E_{1,1}^{m \times m} & A_{1,2}^{m \times m^*} & \dots & A_{1,k}^{m \times m^*} & A_{1,k+1}^{m \times l^*} & B_1^m \\ 0 & E_{2,2}^{m \times m} & \dots & A_{2,k}^{m \times m^*} & A_{2,k+1}^{m \times l^*} & B_2^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & E_{k,k}^{m \times m} & 0 & X_k^m \\ 0 & 0 & \dots & 0 & E_{k+1,k+1}^{l \times l} & X_{k+1}^l \end{array} \right)$$

$$\forall r = 3, \dots, k : X_i^m = B_i^m - \sum_{j=i+1}^n A_{i,j}^{m \times h} \cdot X_j^h, \quad A_{i,j}^{m \times h} = 0, i = k-2, \dots, 0$$

$$h = (j < k) ? m : l$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} E_{1,1}^{m \times m} & 0 & \dots & 0 & 0 & X_1^m \\ 0 & E_{2,2}^{m \times m} & \dots & 0 & 0 & X_2^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & E_{k,k}^{m \times m} & 0 & X_k^m \\ 0 & 0 & \dots & 0 & E_{k+1,k+1}^{l \times l} & X_{k+1}^l \end{array} \right)$$

3 Хранение в памяти

Матрицу A храним в памяти таким образом:

$$A = \{a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,m}, a_{2,1}, a_{2,2}, \dots, a_{2,m}, \dots, a_{m,1}, a_{m,2}, \dots, a_{m,m}, \\ a_{1,m+1}, a_{1,m+2}, \dots, a_{1,2m}, \dots, a_{n,n}, b_1, \dots, b_n\}$$

В блочном виде:

$$A = \{A_{1,1}, A_{1,2}, \dots, A_{1,k+1}, A_{2,1}, A_{2,2}, \dots, A_{2,k+1}, \dots, \\ A_{k+1,1}, A_{k+1,2}, \dots, A_{k+1,k+1}, B_1, \dots, B_{k+1}\}$$

Тогда указатель на блок $A_{i,j} : A + (i-1) \cdot n \cdot m + (j-1) \cdot last_i \cdot m, .$
 Указатель на элемент (p, q) этой же матрицы: $A + (i-1) \cdot n \cdot m + (j-1) \cdot last_i \cdot m + (p-1) \cdot last_j + (q-1)$, где $last_i = i < k ? m : l, last_j = j < k ? m : l$.

Указатель на i -ый элемент B : $A + n \cdot n + (i-1)$

4 Оценка сложности

1. Нахождение обратной матрицы для $A^{n \times n}$: $\frac{8}{3}n^3 + O(n^2)$
2. Умножение матриц $A^{n \times m} \times A^{m \times l}$: $2mnl - nl$
3. Сложение матриц $A^{n \times m} + A^{n \times m}$: nm

4.1 Прямой ход

На $r < k+1$ ходу прямого хода:

На шаге 1:

$(k-r+1)$ нахождений обратной матрицы к матрице $m \times m$

На шаге 3:

$(k-r)$ умножений матриц $m \times m$ на $m \times m$

1 умножение матрицы $m \times m$ на матрицу $m \times l$

1 умножение матрицы $m \times m$ на матрицу $m \times 1$

На шаге 4:

$m \times m$: по $(k-r)^2$ умножений и сложений

по $(k-r)$ умножений матриц $l \times m$ на $m \times m$ и $m \times m$ на $m \times l$

по $(k-r)$ сложений матриц $l \times m$ и $m \times l$

$(k-r)$ умножений матрицы $m \times m$ на $m \times 1$

$(k-r)$ сложений матриц $m \times 1$

1 умножение матрицы $l \times m$ на $m \times l$

1 сложение $l \times l$

1 умножение $l \times m$ матрицы на $m \times 1$

1 сложение $l \times 1$ матриц
На $r = k + 1$ ходу:
На шаге 1:
1 нахождение обратной матрицы к матрице $l \times l$
На шаге 3:
1 умножение матрицы $l \times l$ на матрицу $l \times 1$
Сложность прямого хода:

$$\sum_{i=0}^{k-1} ((i+1) \frac{8}{3} m^3 + i(i+1)(2m^3 - m^2) + i^2 m^2 + (1+2i)(2m^2 l - ml) + 2iml + 2ml^2 - ml + l^2 + (1+i)(2m^2 - m) + im + 2ml - l + l) + \frac{8}{3} l^3 + 2l^2 - l$$

4.2 Обратный ход

На шаге 1: k умножений матриц $m \times l$ на $l \times 1$ и k сложений $m \times 1$ матриц.
На каждом следующем шаге r : $(k-r)$ умножений $m \times m$ на $m \times 1$ и $(k-r)$ сложений $m \times 1$ матриц.

Сложность обратного хода:

$$\sum_{i=0}^{k-2} (i(2m^2 - m) + im) + k(ml - m) + km$$

4.3 Сложность алгоритма

Сложность всего алгоритма:

$$\boxed{\frac{2}{3}n^3 + \frac{4}{3}mn^2 + \frac{2}{3}m^2n + O(n^2)}$$

При $m = 1$: $\frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$;

При $m = n$: $\frac{8}{3}n^3 + O(n^2)$;