

Нахождение корней линейной системы  
уравнения с помощью метода Гаусса с  
нахождением максимального элемента по  
столбцу

Шерстобитов Андрей  
332 группа

7 декабря 2020 г.

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Линейный способ решения</b>	<b>2</b>
1.1	Постановка задачи . . . . .	2
1.2	Хранение в памяти . . . . .	2
1.3	Алгоритм . . . . .	3
1.3.1	Прямой ход . . . . .	3
1.3.2	Обратный ход . . . . .	4
1.4	Оценка сложности алгоритма . . . . .	5
1.4.1	Прямой ход . . . . .	5
1.4.2	Обратный ход . . . . .	6
1.4.3	Итоговая сложность . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Многопоточный способ решения</b>	<b>7</b>
2.1	Постановка задачи . . . . .	7
2.2	Хранение в памяти . . . . .	7
2.3	Алгоритм . . . . .	8
2.3.1	Прямой ход . . . . .	8

# Глава 1

## Линейный способ решения

### 1.1 Постановка задачи

Пусть дана матрица  $A$  размера  $n \times n$ , вектор  $b$  размера  $n$ . Требуется найти решение линейной системы  $Ax = b$ , используя метод Гаусса с выбором максимального элемента по столбцу.

### 1.2 Хранение в памяти

Разобьем матрицу  $A$  на блоки размера  $m \times m$  по формуле  $n = k \cdot m + l$ :

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} A_{1,1}^{m \times m} & A_{1,2}^{m \times m} & \dots & A_{1,k}^{m \times m} & A_{1,k+1}^{m \times l} & B_1^m \\ A_{2,1}^{m \times m} & A_{2,2}^{m \times m} & \dots & A_{2,k}^{m \times m} & A_{2,k+1}^{m \times l} & B_2^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{k,1}^{m \times m} & A_{k,2}^{m \times m} & \dots & A_{k,k}^{m \times m} & A_{k,k+1}^{m \times l} & B_k^m \\ A_{k+1,1}^{l \times m} & A_{k+1,2}^{l \times m} & \dots & A_{k+1,k}^{l \times m} & A_{k+1,k+1}^{l \times l} & B_{k+1}^l \end{array} \right)$$

Матрицу  $A$  храним в памяти таким образом:

$$A = \{a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,m}, a_{2,1}, a_{2,2}, \dots, a_{2,m}, \dots, a_{m,1}, a_{m,2}, \dots, a_{m,m}, \\ a_{1,m+1}, a_{1,m+2}, \dots, a_{1,2m}, \dots, a_{n,n}, b_1, \dots, b_n\}$$

В блочном виде:

$$A = \{A_{1,1}, A_{1,2}, \dots, A_{1,k+1}, A_{2,1}, A_{2,2}, \dots, A_{2,k+1}, \dots, \\ A_{k+1,1}, A_{k+1,2}, \dots, A_{k+1,k+1}, B_1, \dots, B_{k+1}\}$$

Тогда указатель на блок  $A_{i,j} : A + (i-1) \cdot n \cdot m + (j-1) \cdot last\_i \cdot m$ ,  
 Указатель на элемент  $(p, q)$  этой же матрицы:  $A + (i-1) \cdot n \cdot m + (j-1) \cdot last\_i \cdot m + (p-1) \cdot last\_j + (q-1)$ , где  $last\_i = i < k ? m : l$ ,  $last\_j = j < k ? m : l$ .

Указатель на  $i$ -ый элемент  $B$ :  $A + n \cdot n + (i-1)$

## 1.3 Алгоритм

### 1.3.1 Прямой ход

1.  $A_{1,1}^{m \times m} \rightarrow V_1$ , методом Гаусса с выбором максимального элемента по столбцу для находим обратную матрицу  $V_1|V_3 \Rightarrow V_3 = V_1^{-1} = (A_{1,1}^{m \times m})^{-1}$ ,  $min = \|V_3\|$   
 Если  $\nexists (A_{1,1}^{m \times m})^{-1}$ , то выбираем следующую строчку.  
 Если  $\forall A_{i,1}^{m \times m}, i = 1, \dots, k \nexists (A_{i,1}^{m \times m})^{-1}$ , то алгоритм не применим.  
 $\forall i = 2, \dots, k A_{i,1}^{m \times m} \rightarrow V_1$ .  $V_1|V_2 \Rightarrow V_2 = V_1^{-1}$ , если  $\|V_2\| < min$ , то меняем местами указатели  $V_3$  и  $V_2$ .

2.  $I_i \leftrightarrow I_1$  (строчки)

3.  $A_{1,1}^{m \times m} = E_{1,1}^{m \times m}$ ,  $V_3 \times (A_{1,2}^{m \times m} \dots A_{1,k}^{m \times m} A_{1,k+1}^{m \times l} = B_1^m)$ :  
 $A_{1,j}^{m \times m}, j = 2, \dots, k; A_{1,j}^{m \times l}, j = k+1$  сохраняем в  $V_1$ , затем  $V_2 = V_3 \cdot V_1$  и  $V_2 \rightarrow A_{1,j}$ . В итоге получаем:  $E_{1,1}^{m \times m} A_{1,2}^{m \times m*} \dots A_{1,k}^{m \times m*} A_{1,k+1}^{m \times l*} = B_1^{m*}$
4. Далее действуем по формуле  $A_{i,j} = A_{i,j} - A_{i,1} \cdot A_{1,j}$ , получим матрицу:

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} E_{1,1}^{m \times m} & A_{1,2}^{m \times m*} & \dots & A_{1,k}^{m \times m*} & A_{1,k+1}^{m \times l*} & B_1^{m*} \\ 0 & A_{2,2}^{m \times m*} & \dots & A_{2,k}^{m \times m*} & A_{2,k+1}^{m \times l*} & B_2^{m*} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & A_{k,2}^{m \times m*} & \dots & A_{k,k}^{m \times m*} & A_{k,k+1}^{m \times l*} & B_k^{m*} \\ 0 & A_{k+1,2}^{l \times m*} & \dots & A_{k+1,k}^{l \times m*} & A_{k+1,k+1}^{l \times l*} & B_{k+1}^{l*} \end{array} \right)$$

5. Далее повторяем алгоритм для матрицы  $(n-m) \times (n-m)$ :

$$\left( \begin{array}{cccc|c} A_{2,2}^{m \times m*} & \dots & A_{2,k}^{m \times m*} & A_{2,k+1}^{m \times l*} & B_2^{m*} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{k,2}^{m \times m*} & \dots & A_{k,k}^{m \times m*} & A_{k,k+1}^{m \times l*} & B_k^{m*} \\ A_{k+1,2}^{l \times m*} & \dots & A_{k+1,k}^{l \times m*} & A_{k+1,k+1}^{l \times l*} & B_{k+1}^{l*} \end{array} \right)$$

На  $r < k + 1$  ходу алгоритма:

1. Ищем вышеописанную обратную среди матриц  $A_{qr}^{m \times m}$ ,  $q = r, \dots, k$
2.  $I_r \leftrightarrow I_q$  (строчки)
3.  $A_{r,r}^{m \times m} = E_{r,r}^{m \times m}$ ,  $(A_{r,r}^{m \times m})^{-1} \times (A_{r,r+1}^{m \times m} \dots A_{r,k}^{m \times m} A_{r,k+1}^{m \times l} = B_r^m)$
4.  $i, j = r + 1, \dots, k$   $A_{i,j}^{m \times m} = A_{i,j}^{m \times m} - A_{i,r}^{m \times m} \times A_{r,j}^{m \times m}$   
 $i = r + 1, \dots, k$   $A_{i,k+1}^{m \times l} = A_{i,k+1}^{m \times l} - A_{i,r}^{m \times m} \times A_{r,k+1}^{m \times l}$   
 $j = r + 1, \dots, k$   $A_{k+1,j}^{l \times m} = A_{k+1,j}^{l \times m} - A_{k+1,r}^{l \times m} \times A_{r,j}^{m \times m}$   
 $A_{k+1,k+1}^{l \times l} = A_{k+1,k+1}^{l \times l} - A_{k+1,r}^{l \times m} \times A_{r,k+1}^{m \times l}$   
 $i = r + 1, \dots, k$   $B_i^m = B_i^m - A_{i,r}^{m \times m} \times B_r^m$   
 $B_{k+1}^l = B_{k+1}^l - A_{k+1,r}^{l \times m} \times B_r^m$   
 $i = r + 1, \dots, k$   $A_{i,r}^{m \times m} = 0$   
 $A_{k+1,r}^{l \times m} = 0$

На  $r = k + 1$  ходу алгоритма:

1. Ищем вышеописанную обратную к  $A_{k+1,k+1}^{l \times l}$
3.  $A_{k+1,k+1}^{l \times l} = E_{k+1,k+1}^{l \times l}$ ,  $B_{k+1}^l = (A_{k+1,k+1}^{l \times l})^{-1} \times B_{k+1}^l$

После прямого хода получаем матрицу:

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} E_{1,1}^{m \times m} & A_{1,2}^{m \times m^*} & \dots & A_{1,k}^{m \times m^*} & A_{1,k+1}^{m \times l^*} & B_1^{m^*} \\ 0 & E_{2,2}^{m \times m^*} & \dots & A_{2,k}^{m \times m^*} & A_{2,k+1}^{m \times l^*} & B_2^{m^*} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & E_{k,k}^{m \times m^*} & A_{k,k+1}^{m \times l^*} & B_k^{m^*} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & E_{k+1,k+1}^{l \times l^*} & B_{k+1}^{l^*} \end{array} \right)$$

### 1.3.2 Обратный ход

$$r = 1 : E_{k+1,k+1}^{l \times l} = X_{k+1}^l$$

$$r = 2 : X_k^m = B_i^k - A_{k,k+1}^{m \times l} \cdot B_{k+1}^l, A_{k,k+1}^{m \times l} = 0$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} E_{1,1}^{m \times m} & A_{1,2}^{m \times m^*} & \dots & A_{1,k}^{m \times m^*} & A_{1,k+1}^{m \times l^*} & B_1^m \\ 0 & E_{2,2}^{m \times m} & \dots & A_{2,k}^{m \times m^*} & A_{2,k+1}^{m \times l^*} & B_2^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & E_{k,k}^{m \times m} & 0 & X_k^m \\ 0 & 0 & \dots & 0 & E_{k+1,k+1}^{l \times l} & X_{k+1}^l \end{array} \right)$$

$$\forall r = 3, \dots, k : X_i^m = B_i^m - \sum_{j=i+1}^n A_{i,j}^{m \times h} \cdot X_j^h, \quad A_{i,j}^{m \times h} = 0, i = k-2, \dots, 0$$

$$h = (j < k) ? m : l$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} E_{1,1}^{m \times m} & 0 & \dots & 0 & 0 & X_1^m \\ 0 & E_{2,2}^{m \times m} & \dots & 0 & 0 & X_2^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & E_{k,k}^{m \times m} & 0 & X_k^m \\ 0 & 0 & \dots & 0 & E_{k+1,k+1}^{l \times l} & X_{k+1}^l \end{array} \right)$$

## 1.4 Оценка сложности алгоритма

1. Нахождение обратной матрицы для  $A^{n \times n}$ :  $\frac{8}{3}n^3 + O(n^2)$
2. Умножение матриц  $A^{n \times m} \times A^{m \times l}$ :  $2mnl - nl$
3. Сложение матриц  $A^{n \times m} + A^{n \times m}$ :  $nm$

### 1.4.1 Прямой ход

На  $r < k + 1$  ходу прямого хода:

На шаге 1:

$(k - r + 1)$  нахождений обратной матрицы к матрице  $m \times m$

На шаге 3:

$(k - r)$  умножений матриц  $m \times m$  на  $m \times m$

1 умножение матрицы  $m \times m$  на матрицу  $m \times l$

1 умножение матрицы  $m \times m$  на матрицу  $m \times 1$

На шаге 4:

$m \times m$  : по  $(k - r)^2$  умножений и сложений

по  $(k - r)$  умножений матриц  $l \times m$  на  $m \times m$  и  $m \times m$  на  $m \times l$

по  $(k - r)$  сложений матриц  $l \times m$  и  $m \times l$

$(k - r)$  умножений матрицы  $m \times m$  на  $m \times 1$

$(k - r)$  сложений матриц  $m \times 1$

1 умножение матрицы  $l \times m$  на  $m \times l$

1 сложение  $l \times l$

1 умножение  $l \times m$  матрицы на  $m \times 1$

1 сложение  $l \times 1$  матриц

На  $r = k + 1$  ходу:

На шаге 1:

1 нахождение обратной матрицы к матрице  $l \times l$

На шаге 3:

1 умножение матрицы  $l \times l$  на матрицу  $l \times 1$

Сложность прямого хода:

$$\sum_{i=0}^{k-1} ((i+1) \frac{8}{3} m^3 + i(i+1)(2m^3 - m^2) + i^2 m^2 + (1+2i)(2m^2 l - ml) + 2iml + 2ml^2 - ml + l^2 + (1+i)(2m^2 - m) + im + 2ml - l + l) + \frac{8}{3} l^3 + 2l^2 - l$$

### 1.4.2 Обратный ход

На шаге 1:  $k$  умножений матриц  $m \times l$  на  $l \times 1$  и  $k$  сложений  $m \times 1$  матриц.

На каждом следующем шаге  $r$ :  $(k-r)$  умножений  $m \times m$  на  $m \times 1$  и  $(k-r)$  сложений  $m \times 1$  матриц.

Сложность обратного хода:

$$\sum_{i=0}^{k-2} (i(2m^2 - m) + im) + k(ml - m) + km$$

### 1.4.3 Итоговая сложность

Сложность всего алгоритма:

$$\boxed{\frac{2}{3}n^3 + \frac{4}{3}mn^2 + \frac{2}{3}m^2n + O(n^2)}$$

При  $m = 1$ :  $\frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$ ;

При  $m = n$ :  $\frac{8}{3}n^3 + O(n^2)$ ;

## Глава 2

# Многопоточный способ решения

### 2.1 Постановка задачи

Условие такое же, как и в пункте 1.1, но теперь требуется задействовать потоки для решения задачи. Количество потоков передается в качестве аргумента командной строки. Для удобства обозначим это количество  $p$  и будем считать, что  $p < n$

### 2.2 Хранение в памяти

Разобьем матрицу  $A$  на блоки размера  $m \times m$  по формуле  $n = k \cdot m + l$  аналогично пункту 1.2:

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} A_{1,1}^{m \times m} & A_{1,2}^{m \times m} & \dots & A_{1,k}^{m \times m} & A_{1,k+1}^{m \times l} & B_1^m \\ A_{2,1}^{m \times m} & A_{2,2}^{m \times m} & \dots & A_{2,k}^{m \times m} & A_{2,k+1}^{m \times l} & B_2^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{k,1}^{m \times m} & A_{k,2}^{m \times m} & \dots & A_{k,k}^{m \times m} & A_{k,k+1}^{m \times l} & B_k^m \\ A_{k+1,1}^{l \times m} & A_{k+1,2}^{l \times m} & \dots & A_{k+1,k}^{l \times m} & A_{k+1,k+1}^{l \times l} & B_{k+1}^l \end{array} \right)$$

Каждый поток получает  $\frac{n}{p}$  блоков. Если  $\frac{n}{p} = 1$  и  $p > \frac{n}{2}$ , то последний поток получит больше блоков, чем остальные.



## 2.3 Алгоритм

### 2.3.1 Прямой ход

1.  $A_{1,1}^{m \times m} \rightarrow V_1$ , методом Гаусса с выбором максимального элемента по столбцу для находим обратную матрицу  $V_1|V_3 \Rightarrow V_3 = V_1^{-1} = (A_{1,1}^{m \times m})^{-1}$ ,  $min = \|V_3\|$

Если  $\nexists (A_{1,1}^{m \times m})^{-1}$ , то выбираем следующую строчку.

Если  $\forall A_{i,1}^{m \times m}, i = 1, \dots, k \nexists (A_{i,1}^{m \times m})^{-1}$ , то алгоритм не применим.

$\forall i = 2, \dots, k A_{i,1}^{m \times m} \rightarrow V_1$ .  $V_1|V_2 \Rightarrow V_2 = V_1^{-1}$ , если  $\|V_2\| < min$ , то меняем местами указатели  $V_3$  и  $V_2$ .

2.  $I_i \leftrightarrow I_1$  (строчки)
3.  $A_{1,1}^{m \times m} = E_{1,1}^{m \times m}$ ,  $V_3 \times (A_{1,2}^{m \times m} \dots A_{1,k}^{m \times m} A_{1,k+1}^{m \times l} = B_1^m)$ :  
 $A_{1,j}^{m \times m}, j = 2, \dots, k$ ;  $A_{1,j}^{m \times l}, j = k+1$  сохраняем в  $V_1$ , затем  $V_2 = V_3 \cdot V_1$  и  $V_2 \rightarrow A_{1,j}$ . В итоге получаем:  $E_{1,1}^{m \times m} A_{1,2}^{m \times m*} \dots A_{1,k}^{m \times m*} A_{1,k+1}^{m \times l*} = B_1^{m*}$
4. Далее действуем по формуле  $A_{i,j} = A_{i,j} - A_{i,1} \cdot A_{1,j}$ , получим матрицу:

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} E_{1,1}^{m \times m} & A_{1,2}^{m \times m*} & \dots & A_{1,k}^{m \times m*} & A_{1,k+1}^{m \times l*} & B_1^{m*} \\ 0 & A_{2,2}^{m \times m*} & \dots & A_{2,k}^{m \times m*} & A_{2,k+1}^{m \times l*} & B_2^{m*} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & A_{k,2}^{m \times m*} & \dots & A_{k,k}^{m \times m*} & A_{k,k+1}^{m \times l*} & B_k^{m*} \\ 0 & A_{k+1,2}^{l \times m*} & \dots & A_{k+1,k}^{l \times m*} & A_{k+1,k+1}^{l \times l*} & B_{k+1}^{l*} \end{array} \right)$$

5. Далее повторяем алгоритм для матрицы  $(n - m) \times (n - m)$ :

$$\left( \begin{array}{cccc|c} A_{2,2}^{m \times m*} & \dots & A_{2,k}^{m \times m*} & A_{2,k+1}^{m \times l*} & B_2^{m*} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{k,2}^{m \times m*} & \dots & A_{k,k}^{m \times m*} & A_{k,k+1}^{m \times l*} & B_k^{m*} \\ A_{k+1,2}^{l \times m*} & \dots & A_{k+1,k}^{l \times m*} & A_{k+1,k+1}^{l \times l*} & B_{k+1}^{l*} \end{array} \right)$$

На  $r < k + 1$  ходу алгоритма:

1. Ищем вышеописанную обратную среди матриц  $A_{qr}^{m \times m}$ ,  $q = r, \dots, k$
2.  $I_r \leftrightarrow I_q$  (строчки)

$$3. A_{r,r}^{m \times m} = E_{r,r}^{m \times m}, (A_{r,r}^{m \times m})^{-1} \times (A_{r,r+1}^{m \times m} \dots A_{r,k}^{m \times m} A_{r,k+1}^{m \times l} = B_r^m)$$

$$4. \begin{aligned} i, j = r+1, \dots, k & \quad A_{i,j}^{m \times m} = A_{i,j}^{m \times m} - A_{i,r}^{m \times m} \times A_{r,j}^{m \times m} \\ i = r+1, \dots, k & \quad A_{i,k+1}^{m \times l} = A_{i,k+1}^{m \times l} - A_{i,r}^{m \times m} \times A_{r,k+1}^{m \times l} \\ j = r+1, \dots, k & \quad A_{k+1,j}^{l \times m} = A_{k+1,j}^{l \times m} - A_{k+1,r}^{l \times m} \times A_{r,j}^{m \times m} \\ & \quad A_{k+1,k+1}^{l \times l} = A_{k+1,k+1}^{l \times l} - A_{k+1,r}^{l \times m} \times A_{r,k+1}^{m \times l} \\ i = r+1, \dots, k & \quad B_i^m = B_i^m - A_{i,r}^{m \times m} \times B_r^m \\ & \quad B_{k+1}^l = B_{k+1}^l - A_{k+1,r}^{l \times m} \times B_r^m \\ i = r+1, \dots, k & \quad A_{i,r}^{m \times m} = 0 \\ & \quad A_{k+1,r}^{l \times m} = 0 \end{aligned}$$

На  $r = k+1$  ходу алгоритма:

1. Ищем вышеописанную обратную к  $A_{k+1,k+1}^{l \times l}$
3.  $A_{k+1,k+1}^{l \times l} = E_{k+1,k+1}^{l \times l}, B_{k+1}^l = (A_{k+1,k+1}^{l \times l})^{-1} \times B_{k+1}^l$

После прямого хода получаем матрицу:

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} E_{1,1}^{m \times m} & A_{1,2}^{m \times m^*} & \dots & A_{1,k}^{m \times m^*} & A_{1,k+1}^{m \times l^*} & B_1^{m^*} \\ 0 & E_{2,2}^{m \times m^*} & \dots & A_{2,k}^{m \times m^*} & A_{2,k+1}^{m \times l^*} & B_2^{m^*} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & E_{k,k}^{m \times m^*} & A_{k,k+1}^{m \times l^*} & B_k^{m^*} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & E_{k+1,k+1}^{l \times l^*} & B_{k+1}^{l^*} \end{array} \right)$$