Нахождение корней линейной системы уравнения с помощью метода Гаусса с нахождением максимального элемента по столбцу

Шерстобитов Андрей
332 группа

8 декабря 2020 г.

Оглавление

Глава 1

Линейный способ решения

1.1 Постановка задачи

Пусть дана матрица A размера $n \times n$, вектор b размера n. Требуется найти решение линейной системы $Ax = b$, используя метод Гаусса с выбором максимального элмента по столбцу.

1.2 Хранение в памяти

Разобьем матрицу A на блоки размера $m \times m$ по формуле $n = k \cdot m + l$:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} A_{1,1}^{m\times m} & A_{1,2}^{m\times m} & \dots & A_{1,k}^{m\times m} & A_{1,k+1}^{m\times l} & B_1^m \\ A_{2,1}^{m\times m} & A_{2,2}^{m\times m} & \dots & A_{2,k}^{m\times m} & A_{2,k+1}^{m\times l} & B_2^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{k,1}^{m\times m} & A_{k,2}^{m\times m} & \dots & A_{k,k}^{m\times m} & A_{k,k+1}^{m\times l} & B_k^m \\ A_{k+1,1}^{l\times m} & A_{k+1,2}^{l\times m} & \dots & A_{k+1,k}^{l\times m} & A_{k+1,k+1}^{l\times l} & B_{k+1}^l \end{array}\right)$$

Матрицу A храним в памяти таким образом:

$$A = \{a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,m}, a_{2,1}, a_{2,2}, \dots, a_{2,m}, \dots, a_{m,1}, a_{m,2}, \dots, a_{m,m},\\ a_{1,m+1}, a_{1,m+2}, \dots, a_{1,2m}, \dots, a_{n,n}, b_1, \dots, b_n\}$$

В блочном виде:

$$A = \{A_{1,1}, A_{1,2}, \dots, A_{1,k+1}, A_{2,1}, A_{2,2}, \dots, A_{2,k+1}, \dots,\\ A_{k+1,1}, A_{k+1,2}, \dots, A_{k+1,k+1}, B_1, \dots, B_{k+1}\}$$

Тогда указатель на блок $A_{i,j}$: $A + (i-1) \cdot n \cdot m + (j-1) \cdot last\_i \cdot m$,. Указатель на элемент (p,q) этой же матрицы: $A + (i-1) \cdot n \cdot m + (j-1) \cdot last\_i \cdot m + (p-1) \cdot last\_j + (q-1)$, где $last\_i = i \ < \ k \ ? \ m \ : \ l$, $last\_j = j \ < \ k \ ? \ m \ : \ l$.

Указатель на i-ый элемент B: $A + n \cdot n + (i-1)$

1.3 Алгоритм

1.3.1 Прямой ход

1. $A_{1,1}^{m\times m} \to V_1$, методом Гаусса с выбором максимального элемента по столбцу для находим обратную матрицу $V_1|V_3 \Rightarrow V_3 = V_1^{-1} = (A_{1,1}^{m\times m})^{-1}$, $min = \|V_3\|$

   Если $\nexists (A_{1,1}^{m\times m})^{-1}$, то выбираем следующую строчку.

   Если $\forall A_{i,1}^{m\times m}, i = 1, \dots k \ \nexists (A_{i,1}^{m\times m})^{-1}$, то алгоритм не применим.

   $\forall i = 2, \dots k \ A_{i,1}^{m\times m} \to V_1$. $V_1|V_2 \Rightarrow V_2 = V_1^{-1}$, если $\|V_2\| < min$, то меняем местами указатели V_3 и V_2.

2. $I_i \leftrightarrow I_1$ (строчки)

3. $A_{1,1}^{m\times m} = E_{1,1}^{m\times m}, \ V_3 \times (A_{1,2}^{m\times m} \ \dots \ A_{1,k}^{m\times m} \ A_{1,k+1}^{m\times l} = B_1^m)$:
   $A_{1,j}^{m\times m}, j = 2, \dots, k$; $A_{1,j}^{m\times l}, j = k+1$ сохраняем в V_1, затем $V_2 = V_3 \cdot V_1$ и $V_2 \to A_{1,j}$. В итоге получаем: $E_{1,1}^{m\times m} \ A_{1,2}^{m\times m^*} \ \dots \ A_{1,k}^{m\times m^*} \ A_{1,k+1}^{m\times l^*} = B_1^{m^*}$

4. Далее действуем по формуле $A_{i,j} = A_{i,j} - A_{i,1} \cdot A_{1,j}$, получим матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}
E_{1,1}^{m\times m} & A_{1,2}^{m\times m^*} & \dots & A_{1,k}^{m\times m^*} & A_{1,k+1}^{m\times l^*} & B_1^{m^*} \\
0 & A_{2,2}^{m\times m^*} & \dots & A_{2,k}^{m\times m^*} & A_{2,k+1}^{m\times l^*} & B_2^{m^*} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & A_{k,2}^{m\times m^*} & \dots & A_{k,k}^{m\times m^*} & A_{k,k+1}^{m\times l^*} & B_k^{m^*} \\
0 & A_{k+1,2}^{l\times m^*} & \dots & A_{k+1,k}^{l\times m^*} & A_{k+1,k+1}^{l\times l^*} & B_{k+1}^{l^*}
\end{array}\right)$$

5. Далее повторяем алгоритм для матрицы $(n-m) \times (n-m)$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}
A_{2,2}^{m\times m^*} & \dots & A_{2,k}^{m\times m^*} & A_{2,k+1}^{m\times l^*} & B_2^{m^*} \\
\dots & \dots & & \dots & \dots \\
A_{k,2}^{m\times m^*} & \dots & A_{k,k}^{m\times m^*} & A_{k,k+1}^{m\times l^*} & B_k^{m^*} \\
A_{k+1,2}^{l\times m^*} & \dots & A_{k+1,k}^{l\times m^*} & A_{k+1,k+1}^{l\times l^*} & B_{k+1}^{l^*}
\end{array}\right)$$

На $r < k+1$ ходу алгоритма:

1. Ищем вышеописанную обратную среди матриц $A^{m\times m}_{qr},\ q = r, \dots, k$

2. $I_r \leftrightarrow I_q$ (строчки)

3. $A^{m\times m}_{r,r} = E^{m\times m}_{r,r},\ (A^{m\times m}_{r,r})^{-1} \times (A^{m\times m}_{r,r+1}\ \dots\ A^{m\times m}_{r,k}\ A^{m\times l}_{r,k+1} = B^m_r)$

4.
$$
\begin{array}{lr}
i,j = r+1,\dots,k & A^{m\times m}_{i,j} = A^{m\times m}_{i,j} - A^{m\times m}_{i,r} \times A^{m\times m}_{r,j} \\
i = r+1,\dots,k & A^{m\times l}_{i,k+1} = A^{m\times l}_{i,k+1} - A^{m\times m}_{i,r} \times A^{m\times l}_{r,k+1} \\
j = r+1,\dots,k & A^{l\times m}_{k+1,j} = A^{l\times m}_{k+1,j} - A^{l\times m}_{k+1,r} \times A^{m\times m}_{r,j} \\
 & A^{l\times l}_{k+1,k+1} = A^{l\times l}_{k+1,k+1} - A^{l\times m}_{k+1,r} \times A^{m\times l}_{r,k+1} \\
i = r+1,\dots,k & B^m_i = B^m_i - A^{m\times m}_{i,r} \times B^m_r \\
 & B^l_{k+1} = B^l_{k+1} - A^{l\times m}_{k+1,r} \times B^m_r \\
i = r+1,\dots,k & A^{m\times m}_{i,r} = 0 \\
 & A^{l\times m}_{k+1,r} = 0
\end{array}
$$

На $r = k+1$ ходу алгоритма:

1. Ищем вышеописанную обратную к $A^{l\times l}_{k+1,k+1}$

3. $A^{l\times l}_{k+1,k+1} = E^{l\times l}_{k+1,k+1},\ B^l_{k+1} = (A^{l\times l}_{k+1,k+1})^{-1} \times B^l_{k+1}$

После прямого хода получаем матрицу:

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
E^{m\times m}_{1,1} & A^{m\times m^*}_{1,2} & \dots & A^{m\times m^*}_{1,k} & A^{m\times l^*}_{1,k+1} & B^{m^*}_1 \\
0 & E^{m\times m^*}_{2,2} & \dots & A^{m\times m^*}_{2,k} & A^{m\times l^*}_{2,k+1} & B^{m^*}_2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & E^{m\times m^*}_{k,k} & A^{m\times l^*}_{k,k+1} & B^{m^*}_k \\
0 & 0 & \dots & 0 & E^{l\times l^*}_{k+1,k+1} & B^{l^*}_{k+1}
\end{array}\right)
$$

1.3.2 Обратный ход

$$r = 1:\ E^{l\times l}_{k+1,k+1} = X^l_{k+1}$$

$$r = 2:\ X^m_k = B^k_i - A^{m\times l}_{k,k+1} \cdot B^l_{k+1},\ A^{m\times l}_{k,k+1} = 0$$

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
E_{1,1}^{m\times m} & A_{1,2}^{m\times m^*} & \dots & A_{1,k}^{m\times m^*} & A_{1,k+1}^{m\times l^*} & B_1^m \\
0 & E_{2,2}^{m\times m} & \dots & A_{2,k}^{m\times m^*} & A_{2,k+1}^{m\times l^*} & B_2^m \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & E_{k,k}^{m\times m} & 0 & X_k^m \\
0 & 0 & \dots & 0 & E_{k+1,k+1}^{l\times l} & X_{k+1}^l
\end{array}\right)
$$

$$
\forall r = 3,\dots,k:\ X_i^m = B_i^m - \sum_{j=i+1}^{n} A_{i,j}^{m\times h}\cdot X_j^h,\ A_{i,j}^{m\times h} = 0, i = k-2,\dots,0
$$

$$
h = (j\ <\ k)\ ?\ m\ :\ l
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
E_{1,1}^{m\times m} & 0 & \dots & 0 & 0 & X_1^m \\
0 & E_{2,2}^{m\times m} & \dots & 0 & 0 & X_2^m \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & E_{k,k}^{m\times m} & 0 & X_k^m \\
0 & 0 & \dots & 0 & E_{k+1,k+1}^{l\times l} & X_{k+1}^l
\end{array}\right)
$$

1.4 Оценка сложности алгоритма

1. Нахождение обратной матрицы для $A^{n\times n}$: $\frac{8}{3}n^3 + O(n^2)$
2. Умножение матриц $A^{n\times m} \times A^{m\times l}$: $2mnl - nl$
3. Сложение матриц $A^{n\times m} + A^{n\times m}$: nm

1.4.1 Прямой ход

На $r < k+1$ ходу прямого хода:
  На шаге 1:
    $(k-r+1)$ нахождений обратной матрицы к матрице $m\times m$
  На шаге 3:
    $(k-r)$ умножений матриц $m\times m$ на $m\times m$
    1 умножение матрицы $m\times m$ на матрицу $m\times l$
    1 умножение матрицы $m\times m$ на матрицу $m\times 1$
  На шаге 4:
    $m\times m$: по $(k-r)^2$ умножений и сложений
    по $(k-r)$ умножений матриц $l\times m$ на $m\times m$ и $m\times m$ на $m\times l$
    по $(k-r)$ сложений матриц $l\times m$ и $m\times l$

$(k-r)$ умножений матрицы $m \times m$ на $m \times 1$
$(k-r)$ сложений матриц $m \times 1$
1 умножение матрицы $l \times m$ на $m \times l$
1 сложение $l \times l$
1 умножение $l \times m$ матрицы на $m \times 1$
1 сложение $l \times 1$ матриц

На $r = k+1$ ходу:

На шаге 1:

1 нахождение обратной матрицы к матрице $l \times l$

На шаге 3:

1 умножение матрицы $l \times l$ на матрицу $l \times 1$

Сложнось прямого хода:

$$\sum_{i=0}^{k-1}((i+1)\frac{8}{3}m^3 + i(i+1)(2m^3 - m^2) + i^2m^2 + (1+2i)(2m^2l - ml) + 2iml$$
$$+ 2ml^2 - ml + l^2 + (1+i)(2m^2 - m) + im + 2ml - l + l) + \frac{8}{3}l^3 + 2l^2 - l$$

1.4.2 Обратный ход

На шаге 1: k умножений матриц $m \times l$ на $l \times 1$ и k сложений $m \times 1$ матриц. На каждом следующем шаге r: $(k-r)$ умножений $m \times m$ на $m \times 1$ и $(k-r)$ сложений $m \times 1$ матриц.

Сложность обратного хода:

$$\sum_{i=0}^{k-2}(i(2m^2 - m) + im) + k(ml - m) + km$$

1.4.3 Итоговая сложность

Сложность всего алгоритма:

$$\boxed{\frac{2}{3}n^3 + \frac{4}{3}mn^2 + \frac{2}{3}m^2n + O(n^2)}$$

При $m = 1$: $\frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$;
При $m = n$: $\frac{8}{3}n^3 + O(n^2)$;

Глава 2

Многопоточный способ решения

2.1 Постановка задачи

Условие такое же, как и в пункте 1.1, но теперь требуется задействовать потоки для решения задачи. Количество потоков передается в качестве аргумента командной строки. Для удобства обозначим это количество p и будем считать, что $p < n$

2.2 Хранение в памяти

Разобьем матрицу A на блоки размера $m \times m$ по формуле $n = k \cdot m + l$ аналогично пункту 1.2:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} A_{1,1}^{m\times m} & A_{1,2}^{m\times m} & \dots & A_{1,k}^{m\times m} & A_{1,k+1}^{m\times l} & B_1^m \\ A_{2,1}^{m\times m} & A_{2,2}^{m\times m} & \dots & A_{2,k}^{m\times m} & A_{2,k+1}^{m\times l} & B_2^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{k,1}^{m\times m} & A_{k,2}^{m\times m} & \dots & A_{k,k}^{m\times m} & A_{k,k+1}^{m\times l} & B_k^m \\ A_{k+1,1}^{l\times m} & A_{k+1,2}^{l\times m} & \dots & A_{k+1,k}^{l\times m} & A_{k+1,k+1}^{l\times l} & B_{k+1}^l \end{array}\right)$$

Поток i получает $q = \frac{n}{p}$ блочных строк и работает соответственно с $i, i+p, \dots, i+(q-1)p$. Если $\frac{n}{p} = 1$ и $p > \frac{n}{2}$, то последний поток получит больше блоков, чем остальные.

2.3 Алгоритм

2.3.1 Прямой ход

1. $A_{1,1}^{m\times m} \to V_1$, методом Гаусса с выбором максимального элемента по столбцу для находим обратную матрицу $V_1|V_3 \Rightarrow V_3 = V_1^{-1} = (A_{1,1}^{m\times m})^{-1}$, $min = \|V_3\|$

   Если $\nexists (A_{1,1}^{m\times m})^{-1}$, то выбираем следующую строчку.

   Если $\forall A_{i,1}^{m\times m}, i = 1,\dots k \nexists (A_{i,1}^{m\times m})^{-1}$, то алгоритм не применим.

   $\forall i = 2,\dots k\ A_{i,1}^{m\times m} \to V_1$. $V_1|V_2 \Rightarrow V_2 = V_1^{-1}$, если $\|V_2\| < min$, то меняем местами указатели V_3 и V_2.

2. $I_i \leftrightarrow I_1$ (строчки)

3. $A_{1,1}^{m\times m} = E_{1,1}^{m\times m},\ V_3 \times (A_{1,2}^{m\times m}\ \dots\ A_{1,k}^{m\times m}\ A_{1,k+1}^{m\times l} = B_1^m)$:
   $A_{1,j}^{m\times m}, j = 2,\dots,k;\ A_{1,j}^{m\times l}, j = k{+}1$ сохраняем в V_1, затем $V_2 = V_3{\cdot}V_1$ и $V_2 \to A_{1,j}$. В итоге получаем: $E_{1,1}^{m\times m}\ A_{1,2}^{m\times m^*}\ \dots\ A_{1,k}^{m\times m^*}\ A_{1,k+1}^{m\times l^*} = B_1^{m^*}$

4. Далее действуем по формуле $A_{i,j} = A_{i,j} - A_{i,1}\cdot A_{1,j}$, получим матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}
E_{1,1}^{m\times m} & A_{1,2}^{m\times m^*} & \dots & A_{1,k}^{m\times m^*} & A_{1,k+1}^{m\times l^*} & B_1^{m^*} \\
0 & A_{2,2}^{m\times m^*} & \dots & A_{2,k}^{m\times m^*} & A_{2,k+1}^{m\times l^*} & B_2^{m^*} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & A_{k,2}^{m\times m^*} & \dots & A_{k,k}^{m\times m^*} & A_{k,k+1}^{m\times l^*} & B_k^{m^*} \\
0 & A_{k+1,2}^{l\times m^*} & \dots & A_{k+1,k}^{l\times m^*} & A_{k+1,k+1}^{l\times l^*} & B_{k+1}^{l^*}
\end{array}\right)$$

5. Далее повторяем алгоритм для матрицы $(n-m)\times(n-m)$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}
A_{2,2}^{m\times m^*} & \dots & A_{2,k}^{m\times m^*} & A_{2,k+1}^{m\times l^*} & B_2^{m^*} \\
\dots & \dots & & \dots & \dots \\
A_{k,2}^{m\times m^*} & \dots & A_{k,k}^{m\times m^*} & A_{k,k+1}^{m\times l^*} & B_k^{m^*} \\
A_{k+1,2}^{l\times m^*} & \dots & A_{k+1,k}^{l\times m^*} & A_{k+1,k+1}^{l\times l^*} & B_{k+1}^{l^*}
\end{array}\right)$$

На $r < k+1$ ходу алгоритма:

1. Ищем вышеописанную обратную среди матриц $A_{qr}^{m\times m},\ q = r,\dots,k$

2. $I_r \leftrightarrow I_q$ (строчки)

3. $A_{r,r}^{m\times m} = E_{r,r}^{m\times m},\ (A_{r,r}^{m\times m})^{-1} \times (A_{r,r+1}^{m\times m}\ \dots\ A_{r,k}^{m\times m}\ A_{r,k+1}^{m\times l} = B_r^m)$

4. $$\begin{aligned}
i,j = r+1,\dots,k \qquad & A_{i,j}^{m\times m} = A_{i,j}^{m\times m} - A_{i,r}^{m\times m} \times A_{r,j}^{m\times m}\\
i = r+1,\dots,k \qquad & A_{i,k+1}^{m\times l} = A_{i,k+1}^{m\times l} - A_{i,r}^{m\times m} \times A_{r,k+1}^{m\times l}\\
j = r+1,\dots,k \qquad & A_{k+1,j}^{l\times m} = A_{k+1,j}^{l\times m} - A_{k+1,r}^{l\times m} \times A_{r,j}^{m\times m}\\
& A_{k+1,k+1}^{l\times l} = A_{k+1,k+1}^{l\times l} - A_{k+1,r}^{l\times m} \times A_{r,k+1}^{m\times l}\\
i = r+1,\dots,k \qquad & B_i^m = B_i^m - A_{i,r}^{m\times m} \times B_r^m\\
& B_{k+1}^l = B_{k+1}^l - A_{k+1,r}^{l\times m} \times B_r^m\\
i = r+1,\dots,k \qquad & A_{i,r}^{m\times m} = 0\\
& A_{k+1,r}^{l\times m} = 0
\end{aligned}$$

На $r = k+1$ ходу алгоритма:

1. Ищем вышеописанную обратную к $A_{k+1,k+1}^{l\times l}$

3. $A_{k+1,k+1}^{l\times l} = E_{k+1,k+1}^{l\times l},\ B_{k+1}^l = (A_{k+1,k+1}^{l\times l})^{-1} \times B_{k+1}^l$

После прямого хода получаем матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}
E_{1,1}^{m\times m} & A_{1,2}^{m\times m^*} & \dots & A_{1,k}^{m\times m^*} & A_{1,k+1}^{m\times l^*} & B_1^{m^*}\\
0 & E_{2,2}^{m\times m^*} & \dots & A_{2,k}^{m\times m^*} & A_{2,k+1}^{m\times l^*} & B_2^{m^*}\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
0 & 0 & \dots & E_{k,k}^{m\times m^*} & A_{k,k+1}^{m\times l^*} & B_k^{m^*}\\
0 & 0 & \dots & 0 & E_{k+1,k+1}^{l\times l^*} & B_{k+1}^{l^*}
\end{array}\right)$$