Численное решение дифференциального уравнения второго порядка. Отчет.

Шерстобитов Андрей, задача 4

Общая постановка задачи:

$$\begin{cases} -y''(x) + p(x)y(x) = f(x), \ p(x) \geq 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

Предлагается исследовать разностную схему вида

$$\begin{cases} -\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + p_k y_k = f_k, \ h = \frac{2}{2N-1}, \ 1 \leq k \leq N-1 \\ f_k := f(x_k), \ p_k := p(x_k) \\ y_0 = 0 \\ y_N = y_{N-1} \end{cases}$$

Запишем канонический вид. Найдем коэффициенты для краевых условий

$$k = 1: \frac{y_2 - 2y_1}{h^2} + p_1 y_1 = f_1$$
$$k = N-1: \frac{-y_{N-1} + y_{N-2}}{h^2} + p_{N-1} y_{N-1} = f_{N-1}$$

Задача в матричном виде имеет вид:

$$-\begin{pmatrix} \frac{-2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & & & & 0 \\ \frac{1}{h^2} & \frac{-2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & & & \\ & & \cdots & \cdots & & \\ & & & \frac{1}{h^2} & \frac{-2}{h^2} & \frac{1}{h^2} \\ 0 & & & & \frac{1}{h^2} & \frac{-1}{h^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p_{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}$$

Будем использовать сеточную интегральную норму

$$\|y_h\|_h^2 = (y_h, y_h)_h = \sum_{k=1}^{N-1} y_k^2 h$$

согласованной с нормой $\|y(x)\|^2_{L^2(0,1)} = \int_0^1 y^2(x)dx$ исходной задачи.

План:

I. Доказать, что разностная схема имеет порядок аппроксимации $O(h^2)$.

II. Доказать устойчивость разностный схемы.

III. Доказать, что есть сходимость $O(h^2)$.

IV. Исследовать применимость метода Фурье при $p \equiv const$ и метода прогонки/

V. Показать, что сходимость численно действительно $O(h^2)$ либо иначе.

I. Докажем аппроксимацию второго порядка на решении:

(a) $\|L_h(u)_{U_h} - f_h\|_{F_h} \leq \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^2)$

$$\max_{x_k} \left| -\frac{y(x_k+h) - 2y(x_k) + y(x_k-h)}{h^2} + p(x_k)y(x_k) - f(x_k) \right| =$$

$$y(x_k \pm h) = y(x_k) \pm hy(x_k)\frac{h^2}{2}y''(x_k) \pm \frac{h^3}{6}y'''(x_k) + \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^4)$$

$$= \max_{x_k} \left| -\frac{h^2 y''(x_k) + \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^4)}{h^2} + p(x_k)y(x_k) - f(x_k) \right| =$$

$$= \max_{x_k} \left| -y''(x_k) + \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^2) + p(x_k)y(x_k) - f(x_k) \right| = \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^2)$$

(b) $\|l_h(u)_{U_h} - \varphi_h\|_{\Phi_h} \leq \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^2)$

i. $y_0 = 0$ TODO

ii. $y_N = y_{N-1}$ TODO

(c) Условия нормировки

$$\lim_{h\to 0} \|f_h - (f)_{F_h}\|_{F_h} = 0; \ \lim_{h\to 0} \|\varphi_h - (\varphi)_{\Phi_h}\|_{\Phi_h} = 0$$

II. Напомним определение устойчивости разностной схемы.

Определение. *Пусть уравнение $y''(x) = f(x)$ доопределено краевыми условиями на разных концах отрезка. Разностная схема $A_h y_h = f_h$ линейной задачи устойчива, если существуют C, h_0 такие, что для произвольных $A_h y_h^{(1,2)} = f_h^{(1,2)}$ выполняется оценка*

$$\|y_h^{(1)} - y_h^{(2)}\|_h \leq C\|f_h^{(1)} - f_h^{(2)}\|_h \ \forall h \leq h_0$$

с константой C, не зависящей от h.

Будем доказывать устойчивость разностной схемы энергетическим методом. Запишем нашу дифференциалную задачу

$$-y''(x) + p(x)y(x) = f(x),\ y(0) = y'(1) = 0,\ p(x) \geq 0$$

Умножим уравнение на $y(x)$, и результат проинтегрируем по отрезку $[0, 1]$

$$\int_0^1 (-y''y + py^2)dx = \int_0^1 fydx$$

$$\int_0^1 -y''ydx + \int_0^1 py^2dx = \int_0^1 fydx$$

Проинтегрируем по частям первое слагаемое

$$\int_0^1 -y''ydx = \int_0^1 -ydy' = -yy'|_0^1 - \int_0^1 y'd(-y) = \int_0^1 (y')^2dx$$

Получили интегральное тождество

$$\int_0^1 (y'(x))^2dx + \int_0^1 py^2dx = \int_0^1 fydx$$

Оценим слева через неравенство, связывающее интегралы от квадратов функции и ее производной. Так как $y(0) = 0$, то справедливо следующее:

$$y(x_0) = \int_0^{x_0} y'(x)dx$$

Применим интегральную форму неравенства Коши-Буняковского:

$$|y(x_0)|^2 = \left|\int_0^{x_0} y'dx\right|^2 \leq \left(\int_0^{x_0} 1^2dx\right)\left(\int_0^{x_0} (y')^2dx\right) \leq \int_0^{x_0} (y')^2dx \leq \int_0^1 (y')^2dx$$

После интегрирования по x_0 по отрезку $[0, 1]$ обеих частей получим искомое равенство

$$\int_0^1 |y(x_0)|^2dx_0 \leq \int_0^1 (y')^2dx \int_0^1 dx_0 \Leftrightarrow \int_0^1 y^2dx \leq \int_0^1 (y')^2dx$$

Оценку справа выведем из разности квадратов:

$$0 \leq \left(\int_0^1 fdx - \int_0^1 ydx\right)^2 \leq \left(\int_0^1 fdx\right)^2 - 2\int_0^1 fydx + \left(\int_0^1 ydx\right)^2$$

$$\Rightarrow \int_0^1 fydx \le \frac{1}{2}\left(\int_0^1 f^2dx + \int_0^1 y^2dx\right)$$

Таким образом имеем:

$$\int_0^1 y^2dx \le \int_0^1 (y'(x))^2dx + \int_0^1 py^2dx = \int_0^1 fydx \le \frac{1}{2}\left(\int_0^1 f^2dx + \int_0^1 y^2dx\right)$$

Таким образом верна оценка

$$\int_0^1 y^2dx \le \int_0^1 f^2dx \Rightarrow \|y\|_{L_2(0,1)} \le \|f\|_{L_2(0,1)}$$

Это означает устойчивость дифференциальной задачи по правой части.

Докажем теперь устойчивость разностной схемы.

$$-\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + p_k y_k = f_k,\ 1 \le k \le N-1,\ y_0 = 0,\ y_N = y_{N-1}$$

Умножим на y_k и просуммируем от 1 до $N-1$. Так как $y_0 = 0,\ y_N = y_{N-1}$

$$-\frac{1}{h^2}\left(\sum_{k=1}^{N-1}\left(y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}\right)y_k\right) = -\frac{1}{h^2}\left(\sum_{k=1}^{N-1}\left(y_{k+1} - y_k - y_k + y_{k-1}\right)y_k\right) =$$

$$= -\frac{1}{h^2}\sum_{k=1}^{N-1}\left(y_{k+1} - y_k\right)y_k + \frac{1}{h^2}\sum_{k=1}^{N-1}\left(y_k - y_{k-1}\right)y_k =$$

$$= -\frac{1}{h^2}\sum_{k=2}^{N}\left(y_k - y_{k-1}\right)y_{k-1} + \frac{1}{h^2}\sum_{k=1}^{N-1}\left(y_k - y_{k-1}\right)y_k = \frac{1}{h^2}\sum_{k=1}^{N}(y_k - y_{k-1})^2$$

Получили конечномерный аналог интегрального тождества:

$$\frac{1}{h^2}\sum_{k=1}^{N}(y_k - y_{k-1})^2 + \sum_{k=1}^{N-1} p_k y_k^2 = \sum_{k=1}^{N-1} f_k y_k$$

Для оценки слева докажем сеточный аналог неравенства для функции и ее производной в точках $k = 1, ..., N-1$. Так как $y_0 = 0$, справедливо следующее:

$$y_k = \sum_{i=1}^{k}(y_i - y_{i-1})$$

Воспользуемся неравенством Коши-Буняковского и $y_N = y_{N-1}$

$$y_k^2 \le \left(\sum_{i=1}^{k} 1^2\right)\left(\sum_{i=1}^{k}(y_i - y_{i-1})^2\right) \le (N-1)\sum_{i=1}^{N-1}(y_i - y_{i-1})^2$$

Суммируя до $N-1$ обе части, при $h = \frac{2}{2(N-1)}$ получаем оценку:

$$\sum_{k=1}^{N-1} y_k^2 \le (N-1)^2\sum_{k=1}^{N-1}(y_k - y_{k-1})^2 \le \frac{1}{h^2}\sum_{k=1}^{N-1}(y_k - y_{k-1})^2$$

Найдем аналогично дифференциальному неравенству оценку справа

$$0 \leq \left(\sum_{k=1}^{N-1} f_k - \sum_{k=1}^{N-1} y_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{N-1} f_k\right)^2 - 2\sum_{k=1}^{N-1} f_k y_k + \left(\sum_{k=1}^{N-1} y_k\right)^2$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{N-1} f_k y_k \leq \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{N-1} f_k^2 + \sum_{k=1}^{N-1} y_k^2\right)$$

Итоговая оценка имеет вид

$$\sum_{k=1}^{N-1} y_k^2 \leq \frac{1}{h^2}\sum_{k=1}^{N-1}(y_k - y_{k-1})^2 + \sum_{k=1}^{N-1} p_k y_k^2 = \sum_{k=1}^{N-1} f_k y_k \leq \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{N-1} f_k^2 + \sum_{k=1}^{N-1} y_k^2\right)$$

Таким образом

$$\sum_{k=1}^{N-1} y_k^2 \leq \sum_{k=1}^{N-1} f_k^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{N-1} y_k^2 h \leq \sum_{k=1}^{N-1} f_k^2 h \Rightarrow \|y_h\|_h^2 \leq \|f_h\|_h^2$$

Устойчивость разностной схемы доказана.

III. Докажем, что у схемы есть сходимость порядка $\underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^2)$.

Теорема (Филиппов А.Ф.). *Пусть выполнены следующие условия:*

(a) операторы L, l и L^h, l^h - линейные;

(b) решение дифференциальной задачи $\exists!$;

(c) разностная схема аппроксимирует на решении дифференциальную задачу с порядком p;

(d) разностная схема устойчива;

Тогда решение разностной схемы сходится к решению дифференциальной задачи с порядком не ниже p

Посмотрим на наши результаты

(a) операторы L, l и L^h, l^h - действительно линейные;

(b) решение дифференциальной задачи $\exists!$, так как по условию y и f хорошие гладкие функции.

(c) разностная схема аппроксимирует на решении дифференциальную задачу с порядком 2;

(d) разностная схема устойчива;

Таким образом решение разностной схемы сходится к решению дифференциальной задачи с порядком не ниже 2.