

Общая постановка задачи:

$$\begin{cases} -y''(x) + p(x)y(x) = f(x), & p(x) \geq 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

Предлагается исследовать разностную схему вида

$$\begin{cases} -\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + p_k y_k = f_k, & h = \frac{2}{2N-1}, \quad 1 \leq k \leq N-1 \\ x_k = kh, & f_k := f(x_k), \quad p_k := p(x_k) \\ y_0 = 0 \\ y_N = y_{N-1} \end{cases}$$

Запишем канонический вид. Найдем коэффициенты для краевых условий

$$\begin{aligned} k = 1 : & \frac{y_2 - 2y_1}{h^2} + p_1 y_1 = f_1 \\ k = N-1 : & \frac{-y_{N-1} + y_{N-2}}{h^2} + p_{N-1} y_{N-1} = f_{N-1} \end{aligned}$$

Задача в матричном виде имеет вид:

$$-\begin{pmatrix} \frac{-2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & & & 0 \\ \frac{1}{h^2} & \frac{-2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & & \\ & \dots & \dots & \dots & \\ & & \frac{1}{h^2} & \frac{-2}{h^2} & \frac{1}{h^2} \\ 0 & & & \frac{1}{h^2} & \frac{-1}{h^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p_{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}$$

Будем использовать сеточную интегральную норму

$$\|y_h\|_h^2 = (y_h, y_h)_h = \sum_{k=1}^{N-1} y_k^2 h$$

согласованной с нормой $\|y(x)\|_{L^2(0,1)}^2 = \int_0^1 y^2(x) dx$ исходной задачи.

План:

- I. Доказать, что разностная схема имеет порядок аппроксимации $O(h^2)$.
- II. Доказать устойчивость разностной схемы.
- III. Доказать, что есть сходимость $O(h^2)$.
- IV. Выписать алгоритм решения для метода Фурье и метода прогонки.
- V. Показать, что сходимость численно действительно $O(h^2)$ либо иначе.

I. Докажем аппроксимацию второго порядка на решении:

$$(a) \|L_h(y)_{Y_h} - f_h\|_{F_h} \leq \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^2)$$

$$\begin{aligned} \max_{x_k} \left| -\frac{y(x_k + h) - 2y(x_k) + y(x_k - h)}{h^2} + p(x_k)y(x_k) - f(x_k) \right| = \\ y(x_k \pm h) = y(x_k) \pm hy'(x_k) + \frac{h^2}{2}y''(x_k) \pm \frac{h^3}{6}y'''(x_k) + \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^4) \\ = \max_{x_k} \left| -\frac{h^2y''(x_k) + \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^4)}{h^2} + p(x_k)y(x_k) - f(x_k) \right| = \\ = \max_{x_k} \left| -y''(x_k) + \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^2) + p(x_k)y(x_k) - f(x_k) \right| = \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^2) \end{aligned}$$

$$(b) \|l_h(y)_{Y_h} - \varphi_h\|_{\Phi_h} \leq \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^2)$$

$$y_0 = 0 : \|y(0) - 0\|_{\Phi_h} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{y_N - y_{N-1}}{h} = 0 : \left\| \frac{y(1 + \frac{h}{2}) - y(1 - \frac{h}{2})}{h} \right\|_{\Phi_h} = \\ y\left(1 \pm \frac{h}{2}\right) = y(1) \pm \frac{h}{2}y'(1) + \frac{h^2}{2}y''(x_k) + \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^3) \\ = \|y'(1) + \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^2)\|_{\Phi_h} = \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^2) \end{aligned}$$

(c) Условия нормировки

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \|f_h - (f)_{F_h}\|_{F_h} = 0 \Rightarrow f(x_k) - f(x_k) = 0 \\ \lim_{h \rightarrow 0} \|\varphi_h - (\varphi)_{\Phi_h}\|_{\Phi_h} = 0 \Rightarrow (0 \ 0)^T - (0 \ 0)^T = 0 \end{aligned}$$

Значит схема имеет **второй порядок аппроксимации**.

Замечание: Доказали аппроксимацию на решении в $\|\cdot\|_\infty$, но

$$\|x\|_h = \sqrt{\sum_{i=1}^{N-1} x_i^2 h} \leq \max_i |x_i| \sqrt{\sum_{i=1}^{N-1} h} \leq \max_i |x_i| \sqrt{\frac{2(N-1)}{2N-1}} \leq \max_i |x_i| \cdot 1 = \|x\|_\infty$$

То есть из аппроксимации в $\|\cdot\|_\infty$ следует аппроксимация в $\|\cdot\|_h$.

II. Напомним определение устойчивости разностной схемы.

Определение. Пусть уравнение $y''(x) = f(x)$ доопределено краевыми условиями на разных концах отрезка. Разностная схема $A_h y_h = f_h$ линейной задачи устойчива, если существуют C, h_0 такие, что для произвольных $A_h y_h^{(1,2)} = f_h^{(1,2)}$ выполняется оценка

$$\|y_h^{(1)} - y_h^{(2)}\|_h \leq C \|f_h^{(1)} - f_h^{(2)}\|_h \quad \forall h \leq h_0$$

с константой C , не зависящей от h .

Будем доказывать устойчивость разностной схемы энергетическим методом. Запишем нашу дифференциальную задачу

$$-y''(x) + p(x)y(x) = f(x), \quad y(0) = y'(1) = 0, \quad p(x) \geq 0$$

Умножим уравнение на $y(x)$, и результат проинтегрируем по отрезку $[0, 1]$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (-y''y + py^2) dx &= \int_0^1 f y dx \\ \int_0^1 -y''y dx + \int_0^1 py^2 dx &= \int_0^1 f y dx \end{aligned}$$

Проинтегрируем по частям первое слагаемое

$$\int_0^1 -y''y dx = \int_0^1 -y dy' = -yy'|_0^1 - \int_0^1 y' d(-y) = \int_0^1 (y')^2 dx$$

Получили интегральное тождество

$$\int_0^1 (y'(x))^2 dx + \int_0^1 py^2 dx = \int_0^1 f y dx$$

Оценим слева через неравенство, связывающее интегралы от квадратов функции и ее производной. Так как $y(0) = 0$, то справедливо следующее:

$$y(x_0) = \int_0^{x_0} y'(x) dx$$

Применим интегральную форму неравенства Коши-Буняковского:

$$|y(x_0)|^2 = \left| \int_0^{x_0} y' dx \right|^2 \leq \left(\int_0^{x_0} 1^2 dx \right) \left(\int_0^{x_0} (y')^2 dx \right) \leq \int_0^{x_0} (y')^2 dx \leq \int_0^1 (y')^2 dx$$

После интегрирования по x_0 по отрезку $[0, 1]$ обеих частей получим искомое равенство

$$\int_0^1 |y(x_0)|^2 dx_0 \leq \int_0^1 (y')^2 dx \int_0^1 dx_0 \Leftrightarrow \int_0^1 y^2 dx \leq \int_0^1 (y')^2 dx$$

Оценку справа выведем из разности квадратов:

$$0 \leq \int_0^1 (f - y)^2 dx \leq \int_0^1 f^2 dx - 2 \int_0^1 f y dx + \int_0^1 y^2 dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f y dx \leq \frac{1}{2} \left(\int_0^1 f^2 dx + \int_0^1 y^2 dx \right)$$

Таким образом имеем:

$$\int_0^1 y^2 dx \leq \int_0^1 (y'(x))^2 dx + \int_0^1 p y^2 dx = \int_0^1 f y dx \leq \frac{1}{2} \left(\int_0^1 f^2 dx + \int_0^1 y^2 dx \right)$$

Таким образом верна оценка

$$\int_0^1 y^2 dx \leq \int_0^1 f^2 dx \Rightarrow \|y\|_{L_2(0,1)} \leq \|f\|_{L_2(0,1)}$$

Это означает устойчивость дифференциальной задачи по правой части.

Докажем теперь устойчивость разностной схемы.

$$-\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + p_k y_k = f_k, \quad 1 \leq k \leq N-1, \quad y_0 = 0, \quad y_N = y_{N-1}$$

Умножим на y_k и просуммируем от 1 до $N-1$. Так как $y_0 = 0$, $y_N = y_{N-1}$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{h^2} \left(\sum_{k=1}^{N-1} (y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}) y_k \right) &= -\frac{1}{h^2} \left(\sum_{k=1}^{N-1} (y_{k+1} - y_k - y_k + y_{k-1}) y_k \right) = \\ &= -\frac{1}{h^2} \sum_{k=1}^{N-1} (y_{k+1} - y_k) y_k + \frac{1}{h^2} \sum_{k=1}^{N-1} (y_k - y_{k-1}) y_k = \\ &= -\frac{1}{h^2} \sum_{k=2}^N (y_k - y_{k-1}) y_{k-1} + \frac{1}{h^2} \sum_{k=1}^{N-1} (y_k - y_{k-1}) y_k = \frac{1}{h^2} \sum_{k=1}^N (y_k - y_{k-1})^2 \end{aligned}$$

Получили конечномерный аналог интегрального тождества:

$$\frac{1}{h^2} \sum_{k=1}^N (y_k - y_{k-1})^2 + \sum_{k=1}^{N-1} p_k y_k^2 = \sum_{k=1}^{N-1} f_k y_k$$

Для оценки слева докажем сеточный аналог неравенства для функции и ее производной в точках $k = 1, \dots, N-1$. Так как $y_0 = 0$, справедливо следующее:

$$y_k = \sum_{i=1}^k (y_i - y_{i-1})$$

Воспользуемся неравенством Коши-Буняковского и $y_N = y_{N-1}$

$$y_k^2 \leq \left(\sum_{i=1}^k 1^2 \right) \left(\sum_{i=1}^k (y_i - y_{i-1})^2 \right) \leq (N-1) \sum_{i=1}^{N-1} (y_i - y_{i-1})^2$$

Суммируя до $N-1$ обе части, при $h = \frac{2}{2N-1}$ получаем оценку:

$$\sum_{k=1}^{N-1} y_k^2 \leq (N-1)^2 \sum_{k=1}^{N-1} (y_k - y_{k-1})^2 \leq \frac{1}{h^2} \sum_{k=1}^{N-1} (y_k - y_{k-1})^2$$

Найдем аналогично дифференциальному неравенству оценку справа

$$\begin{aligned}
0 &\leq \sum_{k=1}^{N-1} (f_k - y_k)^2 = \sum_{k=1}^{N-1} f_k^2 - 2 \sum_{k=1}^{N-1} f_k y_k + \sum_{k=1}^{N-1} y_k^2 \\
&\Rightarrow \sum_{k=1}^{N-1} f_k y_k \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{N-1} f_k^2 + \sum_{k=1}^{N-1} y_k^2 \right)
\end{aligned}$$

Итоговая оценка имеет вид

$$\sum_{k=1}^{N-1} y_k^2 \leq \frac{1}{h^2} \sum_{k=1}^{N-1} (y_k - y_{k-1})^2 + \sum_{k=1}^{N-1} p_k y_k^2 = \sum_{k=1}^{N-1} f_k y_k \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{N-1} f_k^2 + \sum_{k=1}^{N-1} y_k^2 \right)$$

Таким образом

$$\sum_{k=1}^{N-1} y_k^2 \leq \sum_{k=1}^{N-1} f_k^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{N-1} y_k^2 h \leq \sum_{k=1}^{N-1} f_k^2 h \Rightarrow \|y_h\|_h^2 \leq \|f_h\|_h^2$$

То есть **разностная схема устойчива** в норме $\|\cdot\|_h$.

III. Докажем, что у схемы есть сходимость порядка $\underline{\underline{O}}(h^2)$.

Теорема (Филиппов А.Ф.). Пусть выполнены следующие условия:

- (a) операторы L, l и L^h, l^h - линейные;
- (b) решение дифференциальной задачи $\exists!$;
- (c) разностная схема аппроксимирует на решении дифференциальную задачу с порядком p ;
- (d) разностная схема устойчива;

Тогда решение разностной схемы сходится к решению дифференциальной задачи с порядком не ниже p

Посмотрим на наши результаты

- (a) операторы L, l и L^h, l^h - действительно линейные;
- (b) решение дифференциальной задачи $\exists!$, так как по условию y и f хорошие гладкие функции.
- (c) разностная схема аппроксимирует на решении дифференциальную задачу с порядком 2;
- (d) разностная схема действительно устойчива;

Таким образом решение разностной схемы **сходится** к решению дифференциальной задачи **с порядком не ниже 2**.

IV. Выпишем алгоритм решения для метода Фурье и метода прогонки.

(а) Метод Фурье

$$Ay = f, \quad A \in \mathbb{R}^{N-1 \times N-1}$$

$$A = - \begin{pmatrix} \frac{-2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & & & 0 \\ \frac{1}{h^2} & \frac{-2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & & \\ & \dots & \frac{1}{h^2} & \frac{-2}{h^2} & \frac{1}{h^2} \\ 0 & & \frac{1}{h^2} & \frac{-1}{h^2} & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p_{N-1} \end{pmatrix} = \tilde{A} + pI$$

- i. Для сходимости решения требуется $A = A^T \geq 0$. Это возможно $\Leftrightarrow p \equiv \text{const} \geq 0$
- ii. Так как матрица $A = A^T \geq 0$, значит

$$\exists \{(e_i, \lambda_i)_{i=1, \dots, N-1} | Ae_i = \lambda_i e_i\}, \quad (e_i, e_j)_h = \delta_{ij} \quad \forall i, j$$

- iii. Собственные числа и вектора для матрицы \tilde{A} находятся аналитически

$$\tilde{e}_i = \sqrt{2} \sin \frac{\pi(2m-1)i}{2N-1} \quad m = 1, \dots, N-1$$

$$\tilde{\lambda} = \frac{4}{h^2} \sin^2 \left(\frac{\pi(2m-1)}{2(2N-1)} \right) \quad i = 1, \dots, N-1$$

При этом

$$\tilde{A}\tilde{e}_i = \tilde{\lambda}_i \tilde{e}_i$$

$$(A - pI)\tilde{e}_i = A\tilde{e}_i - p\tilde{e}_i = \tilde{\lambda}_i \tilde{e}_i \Leftrightarrow A\tilde{e}_i = (\tilde{\lambda}_i + p)\tilde{e}_i$$

Таким образом собственные вектора A : $e_i = \tilde{e}_i$, собственные числа $\lambda_i = \tilde{\lambda}_i + p$

- iv. Можем применить метод:

$$Ay = f, \quad y = \sum_{m=1}^{N-1} c_m e_m, \quad f = \sum_{m=1}^{N-1} d_m e_m, \quad d_m = (f, e_m)_h$$

$$A \left(\sum_{m=1}^{N-1} c_m e_m \right) = \sum_{m=1}^{N-1} c_m \lambda_m e_m = \sum_{m=1}^{N-1} d_m e_m \Rightarrow c_m = \frac{d_m}{\lambda_m}, \quad \lambda_m \neq 0$$

(b) Метод прогонки

$$Ay = f, \quad A \in \mathbb{R}^{N-1 \times N-1}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{h^2} + p_1 & -\frac{1}{h^2} & & & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + p_2 & -\frac{1}{h^2} & & \\ & & \dots & \dots & \\ & & & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + p_{N-2} & -\frac{1}{h^2} \\ 0 & & & & -\frac{1}{h^2} & \frac{1}{h^2} + p_{N-1} \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}$$

Перепишем матрицу A следующим образом:

$$\begin{pmatrix} c_1 & -b_1 & & & 0 \\ -a_2 & c_2 & -b_2 & & \\ & & \dots & \dots & \\ & & & -a_{N-2} & c_{N-2} & -b_{N-2} \\ 0 & & & & -a_{N-1} & c_{N-1} \end{pmatrix}$$

Тогда задачу можно переписать следующим образом

$$\begin{aligned} c_1 y_1 - b_1 y_2 &= f_1, & k &= 1 \\ -a_k y_{k-1} + c_k y_k - b_k y_{k+1} &= f_k & k &= 2, \dots, N-2 \\ -a_{N-1} y_{N-2} + c_{N-1} y_{N-1} &= f_{N-1}, & k &= N-1 \end{aligned}$$

Перепишем первое уравнение

$$c_1 y_1 - b_1 y_2 = f_1 \Rightarrow y_1 - \frac{b_1}{c_1} y_2 = \frac{f_1}{c_1} \Rightarrow y_1 = \alpha_2 y_2 + \beta_2, \quad \alpha_2 = \frac{b_1}{c_1}, \quad \beta_2 = \frac{f_1}{c_1}$$

Найдем α_{k+1} и β_{k+1} , используя полученную формулу $y_{k-1} = \alpha_k y_k + \beta_k$, подставив во второе уравнение

$$\begin{aligned} -a_k(\alpha_k y_k + \beta_k) + c_k y_k - b_k y_{k+1} &= (-a_k \alpha_k + c_k) y_k - a_k \beta_k - b_k y_{k+1} = f_k \Rightarrow \\ \Rightarrow (-\alpha_k a_k + c_k) y_k + (-b_k) y_{k+1} &= a_k \beta_k + f_k \Rightarrow y_k = \left(\frac{b_k}{c_k - \alpha_k a_k} \right) y_{k+1} + \frac{a_k \beta_k + f_k}{c_k - \alpha_k a_k} \\ \alpha_{k+1} &= \frac{b_k}{c_k - \alpha_k a_k}, \quad \beta_{k+1} = \frac{a_k \beta_k + f_k}{c_k - \alpha_k a_k} \end{aligned}$$

Рассмотрим последнее равенство, подставим в него $y_{N-2} = \alpha_{N-1} y_{N-1} + \beta_{N-1}$

$$\begin{aligned} -a_{N-1}(\alpha_{N-1} y_{N-1} + \beta_{N-1}) + c_{N-1} y_{N-1} &= f_{N-1} \\ y_{N-1} &= \frac{f_{N-1} + a_{N-1} \beta_{N-1}}{c_{N-1} - a_{N-1} \alpha_{N-1}}; \quad y_k = \alpha_{k+1} y_{k+1} + \beta_{k+1}, \quad k = N-2, \dots, 1 \end{aligned}$$

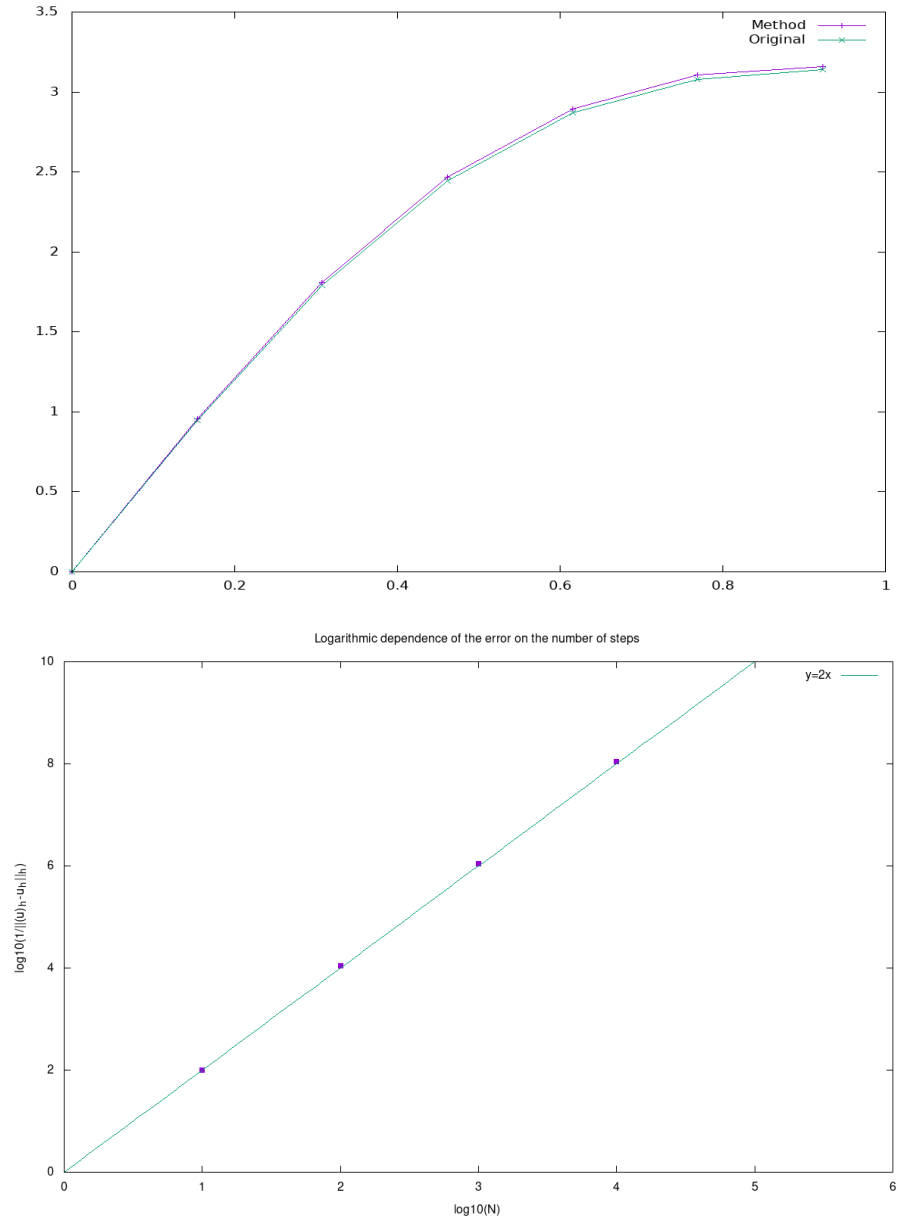
Получили формулы для правой прогонки.

V. В качестве эксперимента рассматривается задача

$$\begin{cases} -y''(x) + y(x) = \pi^2 \sin(\pi x) + \pi x + \sin(\pi x), \\ y(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

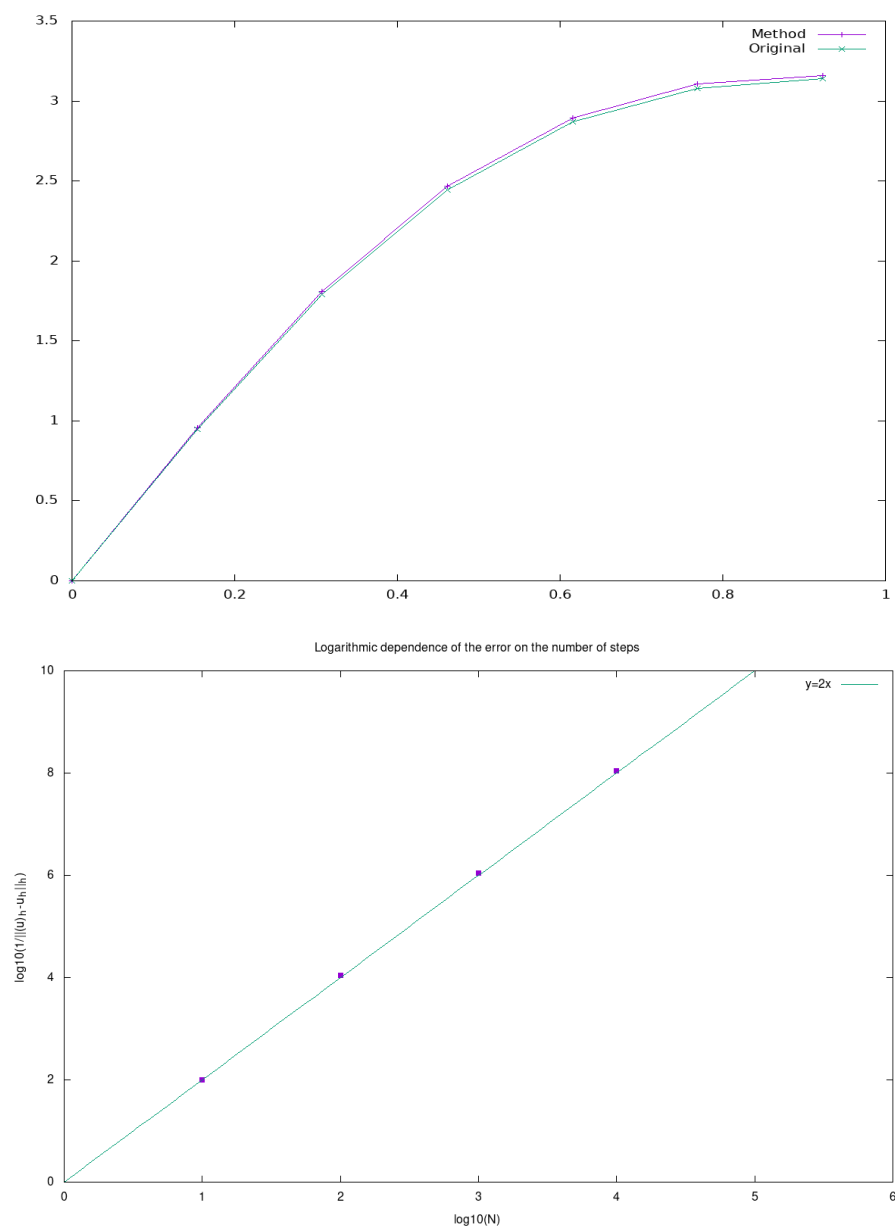
Данная задача имеет точное решение $y(x) = \pi x + \sin(\pi x)$.

Метод Фурье показал:



| N | $\ (y)_h - y_h\ _h$ |
|-------|---------------------|
| 10 | 1.004384e-02 |
| 100 | 9.120604e-05 |
| 1000 | 9.038345e-07 |
| 10000 | 9.030208e-09 |

Метод прогонки показал:



| N | $\ (y)_h - y_h\ _h$ |
|-------|---------------------|
| 10 | 1.004384e-02 |
| 100 | 9.120604e-05 |
| 1000 | 9.038359e-07 |
| 10000 | 9.092472e-09 |