Численное решение дифференциального уравнения второго порядка. Отчет.

Шерстобитов Андрей, задача 4

Общая постановка задачи:

$$\begin{cases} -y''(x) + p(x)y(x) = f(x),\ p(x) \geq 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

Предлагается исследовать разностную схему вида

$$\begin{cases} -\frac{y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}}{h^2} + p_k y_k = f_k,\ h = \frac{2}{2N-1},\ 1 \leq k \leq N-1 \\ x_k = kh,\ f_k := f(x_k),\ p_k := p(x_k) \\ y_0 = 0 \\ y_N = y_{N-1} \end{cases}$$

Запишем канонический вид. Найдем коэффициенты для краевых условий

$$k = 1 : \frac{y_2 - 2y_1}{h^2} + p_1 y_1 = f_1$$
$$k = N-1 : \frac{-y_{N-1} + y_{N-2}}{h^2} + p_{N-1} y_{N-1} = f_{N-1}$$

Задача в матричном виде имеет вид:

$$-\begin{pmatrix} \frac{-2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & & & & 0 \\ \frac{1}{h^2} & \frac{-2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & & & \\ & & \cdots & \cdots & & \\ & & & \frac{1}{h^2} & \frac{-2}{h^2} & \frac{1}{h^2} \\ 0 & & & & \frac{1}{h^2} & \frac{-1}{h^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p_{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}$$

Будем использовать сеточную интегральную норму

$$\|y_h\|_h^2 = (y_h, y_h)_h = \sum_{k=1}^{N-1} y_k^2 h$$

согласованной с нормой $\|y(x)\|^2_{L^2(0,1)} = \int_0^1 y^2(x)dx$ исходной задачи.

План:

I. Доказать, что разностная схема имеет порядок аппроксимации $O(h^2)$.

II. Доказать устойчивость разностный схемы.

III. Доказать, что есть сходимость $O(h^2)$.

IV. Выписать алгоритм решения для метода Фурье и метода прогонки.

V. Показать, что сходимость численно действительно $O(h^2)$ либо иначе.

I. Докажем аппроксимацию второго порядка на решении:

(a) $\|L_h(y)_{Y_h} - f_h\|_{F_h} \leq \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^2)$

$$\max_{x_k}\left|-\frac{y(x_k+h)-2y(x_k)+y(x_k-h)}{h^2}+p(x_k)y(x_k)-f(x_k)\right| =$$

$$y(x_k \pm h) = y(x_k) \pm hy'(x_k) + \frac{h^2}{2}y''(x_k) \pm \frac{h^3}{6}y'''(x_k) + \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^4)$$

$$= \max_{x_k}\left|-\frac{h^2y''(x_k)+\underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^4)}{h^2}+p(x_k)y(x_k)-f(x_k)\right| =$$

$$= \max_{x_k}\left|-y''(x_k)+\underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^2)+p(x_k)y(x_k)-f(x_k)\right| = \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^2)$$

(b) $\|l_h(y)_{Y_h} - \varphi_h\|_{\Phi_h} \leq \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^2)$

$$y_0 = 0: \ \|y(0)-0\|_{\Phi_h} = 0$$

$$\frac{y_N - y_{N-1}}{h} = 0: \ \left\|\frac{y\left(1+\frac{h}{2}\right)-y\left(1-\frac{h}{2}\right)}{h}\right\|_{\Phi_h} =$$

$$y\left(1 \pm \frac{h}{2}\right) = y(1) \pm \frac{h}{2}y'(1) + \frac{h^2}{2}y''(x_k) + \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^3)$$

$$= \left\|y'(1)+\underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^2)\right\|_{\Phi_h} = \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^2)$$

(c) Условия нормировки

$$\lim_{h\to 0}\|f_h - (f)_{F_h}\|_{F_h} = 0 \Rightarrow f(x_k) - f(x_k) = 0$$
$$\lim_{h\to 0}\|\varphi_h - (\varphi)_{\Phi_h}\|_{\Phi_h} = 0 \Rightarrow (0\ 0)^T - (0\ 0)^T = 0$$

Значит схема имеет **второй порядок аппроксимации**.

Замечание: Доказали аппроксимацию на решении в $\|\cdot\|_e$, но

$$\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{N-1} x_i^2 h\right)} \leq \max|x_i|\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{N-1} h\right)} = \max|x_i| \leq Ch^2$$

То есть из аппроксимации в $\|\cdot\|_e$ следует аппроксимация в $\|\cdot\|_h$.

II. Напомним определение устойчивости разностной схемы.

Определение. *Пусть уравнение $y''(x) = f(x)$ доопределено краевыми условиями на разных концах отрезка. Разностная схема $A_h y_h = f_h$ линейной задачи устойчива, если существуют C, h_0 такие, что для произвольных $A_h y_h^{(1,2)} = f_h^{(1,2)}$ выполняется оценка*

$$\|y_h^{(1)} - y_h^{(2)}\|_h \le C\|f_h^{(1)} - f_h^{(2)}\|_h \ \forall h \le h_0$$

с константой C, не зависящей от h.

Будем доказывать устойчивость разностной схемы энергетическим методом. Запишем нашу дифференциалную задачу

$$-y''(x) + p(x)y(x) = f(x),\ y(0) = y'(1) = 0,\ p(x) \ge 0$$

Умножим уравнение на $y(x)$, и результат проинтегрируем по отрезку $[0, 1]$

$$\int_0^1 (-y''y + py^2)dx = \int_0^1 fydx$$

$$\int_0^1 -y''ydx + \int_0^1 py^2dx = \int_0^1 fydx$$

Проинтегрируем по частям первое слагаемое

$$\int_0^1 -y''ydx = \int_0^1 -ydy' = -yy'|_0^1 - \int_0^1 y'd(-y) = \int_0^1 (y')^2dx$$

Получили интегральное тождество

$$\int_0^1 (y'(x))^2dx + \int_0^1 py^2dx = \int_0^1 fydx$$

Оценим слева через неравенство, связывающее интегралы от квадратов функции и ее производной. Так как $y(0) = 0$, то справедливо следующее:

$$y(x_0) = \int_0^{x_0} y'(x)dx$$

Применим интегральную форму неравенства Коши-Буняковского:

$$|y(x_0)|^2 = \left|\int_0^{x_0} y'dx\right|^2 \le \left(\int_0^{x_0} 1^2dx\right)\left(\int_0^{x_0} (y')^2dx\right) \le \int_0^{x_0} (y')^2dx \le \int_0^1 (y')^2dx$$

После интегрирования по x_0 по отрезку $[0, 1]$ обеих частей получим искомое равенство

$$\int_0^1 |y(x_0)|^2dx_0 \le \int_0^1 (y')^2dx \int_0^1 dx_0 \Leftrightarrow \int_0^1 y^2dx \le \int_0^1 (y')^2dx$$

Оценку справа выведем из разности квадратов:

$$0 \le \left(\int_0^1 fdx - \int_0^1 ydx\right)^2 \le \left(\int_0^1 fdx\right)^2 - 2\int_0^1 fydx + \left(\int_0^1 ydx\right)^2$$

$$\Rightarrow \int_0^1 fy dx \le \frac{1}{2}\left(\int_0^1 f^2 dx + \int_0^1 y^2 dx\right)$$

Таким образом имеем:

$$\int_0^1 y^2 dx \le \int_0^1 (y'(x))^2 dx + \int_0^1 py^2 dx = \int_0^1 fy dx \le \frac{1}{2}\left(\int_0^1 f^2 dx + \int_0^1 y^2 dx\right)$$

Таким образом верна оценка

$$\int_0^1 y^2 dx \le \int_0^1 f^2 dx \Rightarrow \|y\|_{L_2(0,1)} \le \|f\|_{L_2(0,1)}$$

Это означает устойчивость дифференциальной задачи по правой части.

Докажем теперь устойчивость разностной схемы.

$$-\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + p_k y_k = f_k,\ 1 \le k \le N-1,\ y_0 = 0,\ y_N = y_{N-1}$$

Умножим на y_k и просуммируем от 1 до $N-1$. Так как $y_0 = 0,\ y_N = y_{N-1}$

$$-\frac{1}{h^2}\left(\sum_{k=1}^{N-1}(y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1})\, y_k\right) = -\frac{1}{h^2}\left(\sum_{k=1}^{N-1}(y_{k+1} - y_k - y_k + y_{k-1})\, y_k\right) =$$

$$= -\frac{1}{h^2}\sum_{k=1}^{N-1}(y_{k+1} - y_k)\, y_k + \frac{1}{h^2}\sum_{k=1}^{N-1}(y_k - y_{k-1})\, y_k =$$

$$= -\frac{1}{h^2}\sum_{k=2}^{N}(y_k - y_{k-1})\, y_{k-1} + \frac{1}{h^2}\sum_{k=1}^{N-1}(y_k - y_{k-1})\, y_k = \frac{1}{h^2}\sum_{k=1}^{N}(y_k - y_{k-1})^2$$

Получили конечномерный аналог интегрального тождества:

$$\frac{1}{h^2}\sum_{k=1}^{N}(y_k - y_{k-1})^2 + \sum_{k=1}^{N-1} p_k y_k^2 = \sum_{k=1}^{N-1} f_k y_k$$

Для оценки слева докажем сеточный аналог неравенства для функции и ее производной в точках $k = 1, ..., N-1$. Так как $y_0 = 0$, справедливо следующее:

$$y_k = \sum_{i=1}^{k}(y_i - y_{i-1})$$

Воспользуемся неравенством Коши-Буняковского и $y_N = y_{N-1}$

$$y_k^2 \le \left(\sum_{i=1}^{k} 1^2\right)\left(\sum_{i=1}^{k}(y_i - y_{i-1})^2\right) \le (N-1)\sum_{i=1}^{N-1}(y_i - y_{i-1})^2$$

Суммируя до $N-1$ обе части, при $h = \frac{2}{2N-1}$ получаем оценку:

$$\sum_{k=1}^{N-1} y_k^2 \le (N-1)^2 \sum_{k=1}^{N-1}(y_k - y_{k-1})^2 \le \frac{1}{h^2}\sum_{k=1}^{N-1}(y_k - y_{k-1})^2$$

Найдем аналогично дифференциальному неравенству оценку справа

$$0 \le \sum_{k=1}^{N-1} (f_k - y_k)^2 = \sum_{k=1}^{N-1} f_k^2 - 2\sum_{k=1}^{N-1} f_k y_k + \sum_{k=1}^{N-1} y_k^2$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{N-1} f_k y_k \le \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{N-1} f_k^2 + \sum_{k=1}^{N-1} y_k^2\right)$$

Итоговая оценка имеет вид

$$\sum_{k=1}^{N-1} y_k^2 \le \frac{1}{h^2}\sum_{k=1}^{N-1}(y_k - y_{k-1})^2 + \sum_{k=1}^{N-1} p_k y_k^2 = \sum_{k=1}^{N-1} f_k y_k \le \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{N-1} f_k^2 + \sum_{k=1}^{N-1} y_k^2\right)$$

Таким образом

$$\sum_{k=1}^{N-1} y_k^2 \le \sum_{k=1}^{N-1} f_k^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{N-1} y_k^2 h \le \sum_{k=1}^{N-1} f_k^2 h \Rightarrow \|y_h\|_h^2 \le \|f_h\|_h^2$$

То есть **разностная схема устойчива** в норме $\|\cdot\|_h$.

III. Докажем, что у схемы есть сходимость порядка $\underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^2)$.

Теорема (Филиппов А.Ф.). *Пусть выполнены следующие условия:*

(a) операторы L, l и L^h, l^h - линейные;

(b) решение дифференциальной задачи $\exists!$;

(c) разностная схема аппроксимирует на решении дифференциальную задачу с порядком p;

(d) разностная схема устойчива;

Тогда решение разностной схемы сходится к решению дифференциальной задачи с порядком не ниже p

Посмотрим на наши результаты

(a) операторы L, l и L^h, l^h - действительно линейные;

(b) решение дифференциальной задачи $\exists!$, так как по условию y и f хорошие гладкие функции.

(c) разностная схема аппроксимирует на решении дифференциальную задачу с порядком 2;

(d) разностная схема действительно устойчива;

Таким образом решение разностной схемы **сходится** к решению дифференциальной задачи **с порядком не ниже** 2.

IV. Выпишем алгоритм решения для метода Фурье и метода прогонки.

(a) Метод Фурье

$$Ay = f,\ A \in \mathbb{R}^{N-1\times N-1}$$

$$A = -\begin{pmatrix} \frac{-2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & & & & 0 \\ \frac{1}{h^2} & \frac{-2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & & & \\ & & \cdots & \cdots & & \\ & & & \frac{1}{h^2} & \frac{-2}{h^2} & \frac{1}{h^2} \\ 0 & & & & \frac{1}{h^2} & \frac{-1}{h^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p_{N-1} \end{pmatrix} = \tilde{A} + pI$$

i. Для сходимости решения требуется $A = A^T \geq 0$. Это возможно $\Leftrightarrow p \equiv const \geq 0$

ii. Так как матрица $A = A^T \geq 0$, значит

$$\exists\{(e_i, \lambda_i)_{i=1,\ldots,N-1} | Ae_i = \lambda_i e_i\},\ (e_i, e_j)_h = \delta_{ij}\ \forall i, j$$

iii. Собственные числа и вектора для матрицы $\tilde{A}$ находятся аналитически

$$\tilde{e}_i = \sqrt{2}\sin\frac{\pi(2m-1)i}{2N-1} \qquad m = 1, \ldots, N-1$$
$$\tilde{\lambda} = \frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{\pi(2m-1)}{2(2N-1)}\right) \qquad i = 1, \ldots, N-1$$

При этом

$$\tilde{A}\tilde{e}_i = \tilde{\lambda}_i\tilde{e}_i$$
$$(A - pI)\tilde{e}_i = A\tilde{e}_i - p\tilde{e}_i = \tilde{\lambda}_i\tilde{e}_i \Leftrightarrow A\tilde{e}_i = (\tilde{\lambda}_i + p)\tilde{e}_i$$

Таким образом собственные вектора A: $e_i = \tilde{e}_i$, собственные числа $\lambda_i = \tilde{\lambda}_i + p$

iv. Можем применить метод:

$$Ay = f,\ y = \sum_{m=1}^{N-1} c_m e_m,\ f = \sum_{m=1}^{N-1} d_m e_m,\ d_m = (f, e_m)_h$$

$$A\left(\sum_{m=1}^{N-1} c_m e_m\right) = \sum_{m=1}^{N-1} c_m\lambda_m e_m = \sum_{m=1}^{N-1} d_m e_m \Rightarrow c_m = \frac{d_m}{\lambda_m},\ \lambda_m \neq 0$$

(b) Метод прогонки

$$Ay = f,\ A \in \mathbb{R}^{N-1\times N-1}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{h^2}+p_1 & -\frac{1}{h^2} & & & & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2}+p_2 & -\frac{1}{h^2} & & & \\ & & \cdots & \cdots & & \\ & & & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2}+p_{N-2} & -\frac{1}{h^2} \\ 0 & & & & -\frac{1}{h^2} & \frac{1}{h^2}+p_{N-1} \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \\ \vdots \\ \\ y_{N-1} \end{pmatrix} \ f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \\ \vdots \\ \\ f_{N-1} \end{pmatrix}$$

Перепишем матрицу A следующим образом:

$$\begin{pmatrix} c_1 & -b_1 & & & & 0 \\ -a_2 & c_2 & -b_2 & & & \\ & & \cdots & \cdots & & \\ & & & -a_{N-2} & c_{N-2} & -b_{N-2} \\ 0 & & & & -a_{N-1} & c_{N-1} \end{pmatrix}$$

Тогда задачу можно переписать следующем образом

$$\begin{array}{rc} c_1y_1 - b_1y_2 = f_1, & k=1 \\ -a_ky_{k-1} + c_ky_k - b_ky_{k+1} = f_k & k=2,\dots,N-2 \\ -a_{N-1}y_{N-2} + c_{N-1}y_{N-1} = f_{N-1}, & k=N-1 \end{array}$$

Перепишем первое уравнение

$$c_1y_1 - b_1y_2 = f_1 \Rightarrow y_1 - \frac{b_1}{c_1}y_2 = \frac{f_1}{c_1} \Rightarrow y_1 = \alpha_2y_2 + \beta_2,\ \alpha_2 = \frac{b_1}{c_1},\ \beta_2 = \frac{f_1}{c_1}$$

Найдем α_{k+1} и β_{k+1}, используя полученную формулу $y_{k-1} = \alpha_ky_k + \beta_k$, подставив во второе уравнение

$$-a_k(\alpha_ky_k + \beta_k) + c_ky_k - b_ky_{k+1} = (-a_k\alpha_k + c_k)y_k - a_k\beta_k - b_ky_{k+1} = f_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-\alpha_ka_k + c_k)y_k + (-b_k)y_{k+1} = a_k\beta_k + f_k \Rightarrow y_k = \left(\frac{b_k}{c_k - \alpha_ka_k}\right)y_{k+1} + \frac{a_k\beta_k + f_k}{c_k - \alpha_ka_k}$$

$$\alpha_{k+1} = \frac{b_k}{c_k - \alpha_ka_k},\ \beta_{k+1} = \frac{a_k\beta_k + f_k}{c_k - \alpha_ka_k}$$

Рассмотрим последнее равенство, подставим в него $y_{N-2} = \alpha_{N-1}y_{N-1} + \beta_{N-1}$

$$-a_{N-1}(\alpha_{N-1}y_{N-1} + \beta_{N-1}) + c_{N-1}y_{N-1} = f_{N-1}$$

$$y_{N-1} = \frac{f_{N-1} + a_{N-1}\beta_{N-1}}{c_{N-1} - a_{N-1}\alpha_{N-1}};\ y_k = \alpha_{k+1}y_{k+1} + \beta_{k+1},\ k = N-2,\dots,1$$

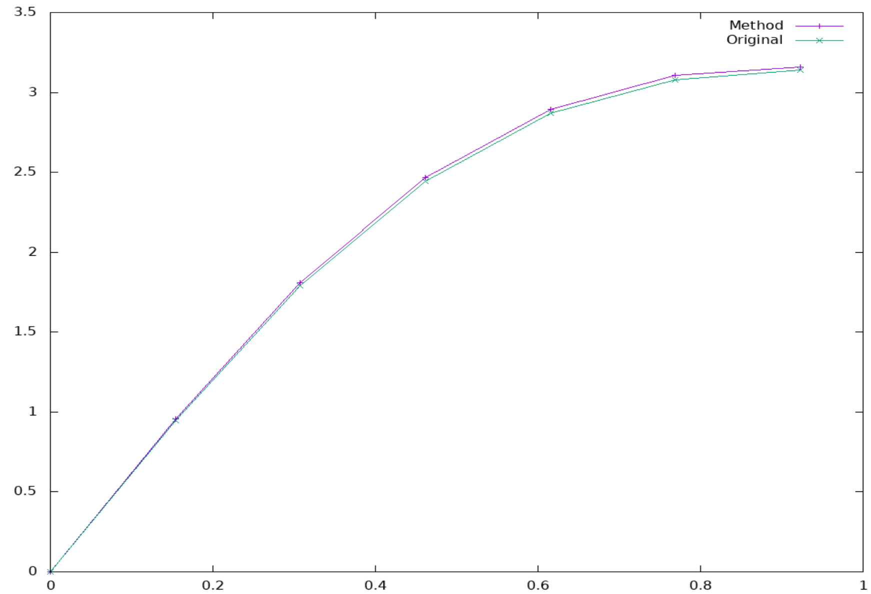
Получили формулы для правой прогонки.

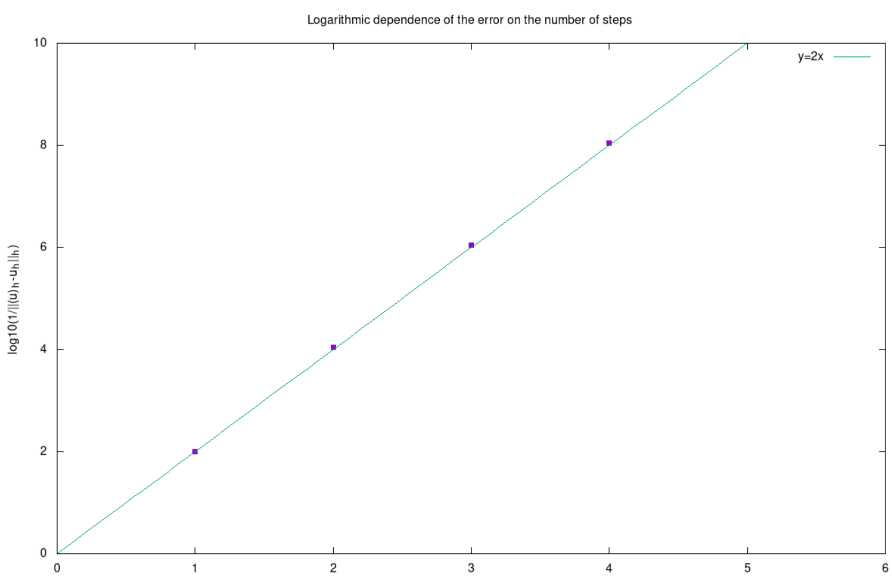
V. В качестве эксперимента рассматривается задача

$$\begin{cases} -y''(x) + y(x) = \pi^2 \sin(\pi x) + \pi x + \sin(\pi x), \\ y(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

Данная задача имеет точное решение $y(x) = \pi x + \sin(\pi x)$.

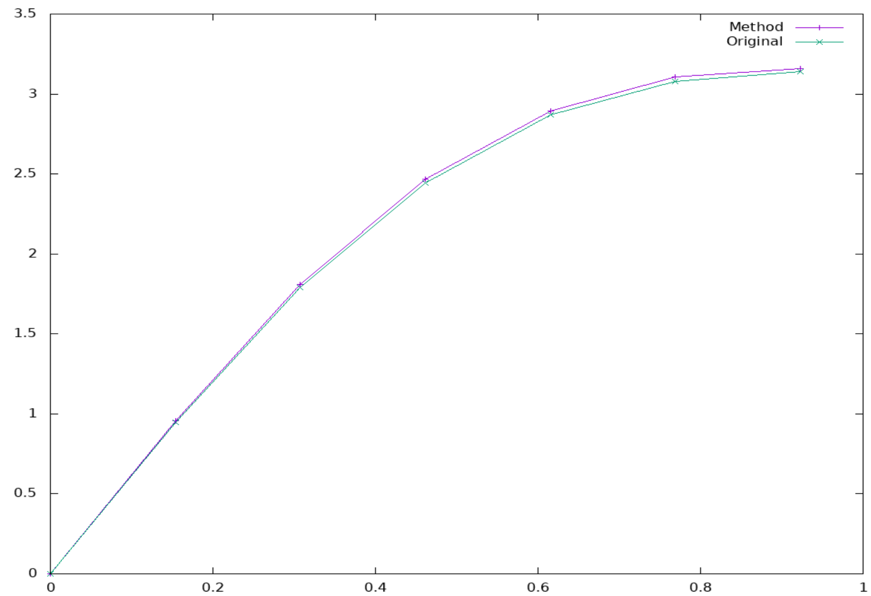
Метод Фурье показал:

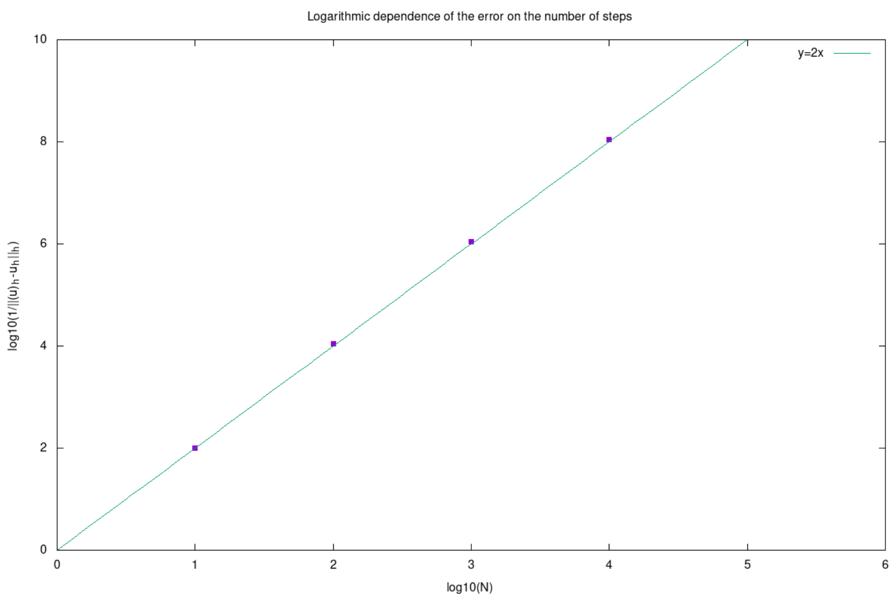




N	$\|(y)_h - y_h\|_h$
10	1.004384e-02
100	9.120604e-05
1000	9.038345e-07
10000	9.030208e-09

Метод прогонки показал:





N	$\|(y)_h - y_h\|_h$
10	1.004384e-02
100	9.120604e-05
1000	9.038359e-07
10000	9.092472e-09