

## Полиномиальная интерполяция.

Пусть задана дискретная функция  $y_i = f(x_i)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ . Требуется построить алгебраический полином  $P_{n-1}(x)$  степени  $n-1$ , удовлетворяющий условиям:

$$P_{n-1}(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Такой полином называется интерполяционным. Его коэффициенты могут быть найдены из решения следующей системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ :

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + \dots + a_{n-1}x_0^{n-1} = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + \dots + a_{n-1}x_1^{n-1} = y_1 \\ \dots \\ a_0 + a_1x_{n-1} + \dots + a_{n-1}x_{n-1}^{n-1} = y_{n-1} \end{cases}$$

Система имеет единственное решение, т.к. ее определителем является определитель Ван дер Монда (отличен от нуля в случае  $x_i \neq x_j$ ,  $i \neq j$ ). Однако, построение полинома  $P_{n-1}(x)$  через явное вычисление его коэффициентов приводит к катастрофической потере точности уже при  $n \sim 20 \div 50$ . Поэтому обычно для расчетов используют запись интерполяционного полинома в форме Лагранжа:

$$P_{n-1}(x) \equiv L_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \Phi_i(x), \quad \text{где } \Phi_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

**1. Реализовать построение** интерполяционного полинома в канонической форме  $P_{n-1}(x)$  и в форме Лагранжа  $L_n(x)$ .

**2. Численно продемонстрировать:**

- 1) правильность работы программы;
- 2) плохую вычислительную устойчивость метода построения  $P_{n-1}(x)$ ;
- 3) отсутствие сходимости для бесконечно дифференцируемой функции Рунге по равноотстоящим узлам и экспоненциальную сходимость по узлам Чебышева;
- 4) сходимость/расходимость интерполяционного полинома в случае недифференцируемой функции  $|x|$ .

