Численное решение дифференциального уравнения второго порядка. Отчет.

Шерстобитов Андрей, задача 4

Общая постановка задачи:

$$\begin{cases} -y''(x) + p(x)y(x) = f(x), \ p(x) \geq 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

Предлагается использовать разностную схему вида

$$\begin{cases} -\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + p_k y_k = f_k, \ h = \frac{2}{2N-1}, \ 1 \leq k \leq N-1 \\ y_0 = 0 \\ y_N = y_{N-1} \end{cases}$$

План:

I. Доказать, что разностная схема имеет порядок аппроксимации $O(h^2)$

II. Доказать устойчивость разностный схемы (метод собственных векторов или энергетический).

III. Доказать, что есть сходимость $O(h^2)$ (теорема Филиппова, указать какая норма)

IV. Исследовать применимость метода Фурье при $p \equiv const$ и метода прогонки

V. Реализовать метод Фурье при $p \equiv const$ и метод прогонки

VI. Показать, что сходимость численно действительно $O(h^2)$ либо иначе

Пойдем по порядку

I. Запишем канонический вид. Найдем коэффициенты для краевых условий

$$k = 1 : \frac{y_2 - 2y_1}{h^2} = -\lambda y_1$$
$$k = N-1 : \frac{y_N - 2y_{N-1} + y_{N-2}}{h^2} = \frac{-y_{N-1} + y_{N-2}}{h^2} = -\lambda y_{N-1}$$

Таким образом задачу можно переписать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \frac{-2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & & & & 0 \\ \frac{1}{h^2} & \frac{-2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & & & \\ & & \cdots & \cdots & & \\ & & & \frac{1}{h^2} & \frac{-2}{h^2} & \frac{1}{h^2} \\ 0 & & & & \frac{1}{h^2} & \frac{-1}{h^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \\ \vdots \\ \\ y_{N-1} \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ \\ \vdots \\ \\ y_{N-1} \end{pmatrix}$$

II. Для более удобного решения сделаем замену $p = 1 - h^2\frac{\lambda}{2}$ и перепишем условие:

$$\begin{cases} y_{k+1} - 2py_k + y_{k-1} = 0,\ 1 \leq k \leq N-1 \\ y_0 = 0 \\ y_N = y_{N-1} \end{cases}$$

Решим полученненную разностную задачу:

$$P(\mu) = \mu^2 - 2p\mu + 1 = 0 \Leftrightarrow \mu_{1,2} = p \pm \sqrt{p^2 - 1}$$

Также по теореме Виета:

$$\mu_1 \cdot \mu_2 = 1 \tag{1}$$
$$\frac{\mu_1 + \mu_2}{2} = p \tag{2}$$

(a) $\mu_1 \neq \mu_2$. Тогда общее решение имеет вид

$$y_k = C_1\mu_1^k + C_2\mu_2^k$$

Подставим в начальные условия, чтобы найти C_1 и C_2:

$$\begin{cases} y_0 = 0 = C_1 + C_2 \Rightarrow C_2 = -C_1 \\ y_N = y_{N-1} : C_1\mu_1^N + C_2\mu_2^N = C_1\mu_1^{N-1} + C_2\mu_2^{N-1} \end{cases}$$

Преобразуем второе равенство, используя первое:

$$C_1(\mu_1^N - \mu_2^N) = C_1(\mu_1^{N-1} - \mu_2^{N-1})$$

Если $C_1 = 0$, то $C_2 = 0$, то $y_k \equiv 0$, что нам неинтересно, так как нулевой вектор не является собственным. Иначе

$$\mu_1^N - \mu_2^N = \mu_1^{N-1} - \mu_2^{N-1} \Leftrightarrow \mu_1^N - \mu_1^{N-1} = \mu_2^N - \mu_2^{N-1} \Leftrightarrow \mu_1^{N-1}(\mu_1 - 1) = \mu_2^{N-1}(\mu_2 - 1)$$

Используем п.1 из теоремы Виета:

$$\mu_1^{N-1}(\mu_1 - \mu_1\mu_2) = \mu_2^{N-1}(\mu_2 - 1) \Leftrightarrow -\mu_1^N(\mu_2 - 1) = \mu_2^{N-1}(\mu_2 - 1)$$

Заметим, что $\mu_2 \neq 1$, так как по теореме Виета $\mu_1 = \mu_2 = 1$ – противоречие.

$$\frac{\mu_1^N}{\mu_2^{N-1}} = -1 \Leftrightarrow \mu_1^{2N-1} = -1$$

Возьмем $2N-1$ комплексный корень из 1 и получим:

$$\begin{cases} \mu_1^{(m)} = \exp(\frac{\pi(2m+1)i}{2N-1}) \\ \mu_2^{(m)} = \exp(-\frac{\pi(2m+1)i}{2N-1}) \end{cases} \quad m = 0, ..., 2N-2$$

Решение имеет вид:

$$y_k = C_1\mu_1^k + C_2\mu_2^k = C\left(\exp\left(\frac{\pi(2m+1)i}{2N-1}\right) - \exp\left(-\frac{\pi(2m+1)i}{2N-1}\right)\right) =$$
$$= 2C\left(\frac{\exp\left(\frac{\pi(2m+1)i}{2N-1}\right) - \exp\left(-\frac{\pi(2m+1)i}{2N-1}\right)}{2}\right) = C\sin\frac{\pi(2m+1)k}{2N-1}$$
$$m = 0, ..., 2N-2, \; k = 1, ..., N-1$$

Или иначе:

$$y_k = C\sin\frac{\pi(2m-1)k}{2N-1}, \; m = 1, ..., 2N-1, \; k = 1, ..., N-1$$

Найдем собственные значения. По теореме Виета:

$$p = \frac{\mu_1+\mu_2}{2} = \frac{\exp\left(\frac{\pi(2m-1)i}{2N-1}\right) + \exp\left(-\frac{\pi(2m-1)i}{2N-1}\right)}{2} = \cos\left(\frac{\pi(2m-1)}{2N-1}\right)$$
$$m = 1, ..., 2N-1$$

$$p = 1 - \lambda\frac{h^2}{2} \Leftrightarrow$$
$$\lambda = \frac{2}{h^2}\left(1 - \cos\left(\frac{\pi(2m-1)}{2N-1}\right)\right) = \frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{\pi(2m-1)}{2(2N-1)}\right)$$
$$m = 1, ..., 2N-1$$

У симметричной матрицы размера $N-1 \times N-1$ не может быть больше $N-1$ собственного значения, но выше мы получили $2N-1$. Посмотрим на них подробнее: обозначим $\alpha_m = \frac{\pi(2m-1)}{2(2N-1)}$. Тогда

$$\alpha_1 = \frac{2\pi}{2(2N-1)} - \frac{\pi}{2(2N-1)} = \frac{\pi}{2(2N-1)}$$
$$\alpha_2 = \frac{4\pi}{2(2N-1)} - \frac{\pi}{2(2N-1)} = 3\alpha_1$$
$$...$$
$$\alpha_{2N-1} = \frac{2\pi(2N-1)}{2(2N-1)} - \frac{\pi}{2(2N-1)} = \pi - \frac{\pi}{2(2N-1)} < \pi$$

То есть все $2N-1$ угол расположены в верхней части триногометрического круга. Но так как sin имеет одинаковые значения для I и II частей круга, то половина корней будет совпадать. Осталось посмотреть в какой части находится Nый корень:

$$\alpha_N = \frac{\pi(2N-1)}{2(2N-1)} = \pi/2 \Rightarrow \lambda = \frac{4}{h^2}$$

Но такое возможно тогда и только тогда, когда $\mu_1 = \mu_2$, что нам не подходит. Таким образом ответ:

$$\begin{aligned} y_k =& C \sin \frac{\pi(2m-1)k}{2N-1} & m = 1, ..., N-1 \\ \lambda =& \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{\pi(2m-1)}{2(2N-1)}\right) = (2N-1)^2 \sin^2\left(\frac{\pi(2m-1)}{2(2N-1)}\right) & k = 1, ..., N-1 \end{aligned}$$

(b) $\mu_1 = \mu_2$: из теоремы Виета следует $\mu_1 = \mu_2 = p$ и $\mu_1\mu_2 = 1 \Rightarrow \lambda = 0$ и $\lambda = \frac{4}{h^2}$. Вставим это решение в ответ из случая $\mu_1 \neq \mu_2$

Итоговый ответ:

$$\begin{aligned} y_k =& C \sin \frac{\pi(2m-1)k}{2N-1} & m = 1, ..., N-1 \\ \lambda =& \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{\pi(2m-1)}{2(2N-1)}\right) & k = 0, ..., N \end{aligned}$$