Численное интегрирование — 1D

Для приближенного вычисления определенных интегралов обычно применяется метод квадратурных формул:

$$I^{[a,b]}(f) = \int\limits_a^b f(x)dx \approx S_n^{[a,b]}(f) = \sum_{i=1}^n c_i f(x_i).$$

При этом узлы $\{x_i\}$ и коэффициенты $\{c_i\}$ выбираются специальным образом так, что для погрешности $R_n(f) = |I^{[a,b]}(f) - S_n^{[a,b]}(f)|$ верна оценка вида $R_n(f) \leq C(b-a)^k$. Например:

формула Симпсона

$\frac{b-a}{6}(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))$ с погрешностью $\|f^{(4)}\|\frac{(b-a)^5}{2880}$,

формула Гаусса по трем узлам

$\frac{b-a}{18}(5f(x_-) + 8f(x_0) + 5f(x_+))$ с погрешностью $\|f^{(6)}\|\frac{(b-a)^7}{2016000}$,

где $x_0 = \frac{a+b}{2},\ x_\pm = \frac{a+b}{2} \pm \frac{b-a}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$.

В данном случае $\|g\| = \max_{x\in[a,b]} |g(x)|$.

Задача 1. Реализуйте метод Симпсона и метод Гаусса в виде функции с прототипом

```
double  Integral (double a, double b, double (*f)(double));
```

где `f` — указатель на подинтегральную функцию. Проверьте выполнение указанных оценок погрешности для $f(x) = x^n$, $n = 0, 1, 2, 3, 5, 9$, $a = 1, b = 1.1$.

Если значение погрешности $R_n(f)$ для конкретной задачи получается недопустимо велико, то обычно используют следующий прием. Область интегрирования $[a, b]$ разбивается на N подотрезков $[a, b] = \cup_{k=1}^N [a_k, b_k]$, и на каждом подотрезке $[a_k, b_k]$ значение интеграла $I^{[a_k,b_k]}(f)$ заменяется на значение квадратуры $S_n^{[a_k,b_k]}(f)$. В результате для вычисления интеграла $I^{[a,b]}(f) = \sum\limits_{k=1}^N I^{[a_k,b_k]}(f)$ получается так называемая составная квадратурная формула $S_{N,n}^{[a,b]}(f) = \sum\limits_{k=1}^N S_n^{[a_k,b_k]}(f)$ с оценкой погрешности $R_{N,n}^{[a,b]}(f) \leq \sum\limits_{k=1}^N R_n^{[a_k,b_k]}(f)$.

Задача 2. Реализуйте составную квадратуру Симпсона и квадратуру Гаусса в виде функции

```
double Integral (double a, double b, double (*f)(double), int N);
```

где `N` — число разбиений отрезка интегрирования $[a, b]$ на равные подотрезки. Выпишите явную асимптотику для погрешности составных квадратур Симпсона и Гаусса в форме $R_{N,n}^{[a,b]}(f) \sim C/N^p$. Сравните теоретические оценки с численными расчетами для следующих функций:

$$\int\limits_0^{1\pi} \cos 100x\, dx = 0, \quad \int\limits_0^1 \exp^{-1000x}\, dx \sim 10^{-3}, \quad \int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi.$$

Численное интегрирование — 2D

Пусть T — треугольник на плоскости, $S(T)$ — его площадь, A, B, C — середины сторон. Несложно показать, что квадратурная формула

$$I(f) = \iint\limits_{T} f(x)\,dx \approx S(f)\frac{1}{3}\,S(T)\big(f(A) + f(B) + f(C)\big),$$

где $x = (x_1, x_2)$, $dx = dx_1 dx_2$, точна для всех многочленов второй степени вида

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2.$$

Задача 3. Для заданного прямоугольника со сторонами Lx, Ly постройте его триангуляцию и результат сохраните в отдельном файле в формате:

```
  <число вершин>
  <число треугольников>
  <число внутренних ребер>
  <число граничных ребер>
(для каждой вершины)
  <номер вершины>:<x y>  (координаты вершины)
  . . .
(для каждого треугольника)
  <номер треугольника>:<i j k> (номера вершин)
  . . .
(для каждого внутреннего ребра)
  <номер внутреннего ребра>:<m n> (номера вершин)
  . . .
(для каждого граничного ребра)
  <номер граничного ребра>:<m n> (номера вершин)
  . . .
```

Указание. На первом шаге исходный прямоугольник делится на $Nx \times Ny$ равновеликих прямоугольников. На втором шаге каждый прямоугольник либо делится на два треугольника построением "северо-западной"/"северо-восточной"диагональю, либо делится на четыре треугольника проведением двух диагоналей. Полученный набор вершин и треугольников сохраняется в файл в указанном формате.

Задача 4. Используя файлы с указанной триангуляцией, построенные для $Lx = Ly = 1$ и различных $Nx = Ny = N$, численно найдите на примере задачи

$$I(f) = \int\limits_{[0,1]\times[0,1]}\!\!\int (x_1^4 + x_1^2x_2^2 + x_2^4)\,dx$$

асимптотику $R_N^{[0,1]^2}(f) = |(I(f) - S_N(f)| \sim C/N^p$ для погрешности полученной составнной квадратуры.