Метод Ньютона.

1. Реализуйте функцию для решения уравнения $f(x) = 0$ с точностью ε методом Ньютона (Ньютона–Рапсона) со следующим заголовком:

```
int NewtonRaphson (double *x, double (*f)(double),
                   double (*df)(double), double eps);
```

Здесь x — указатель на начальное приближение x_0 и полученный в результате корень; f — указатель на функцию, задающую уравнение; df — указатель на функцию, вычисляющую производную функции f; eps — точность. Возвращаемое значение: 0, если точность достигнута, -1, если решить не удалось.

Указание. Возьмем некоторое начальное приближение $x_0 \approx z$ и заменим исходную задачу $f(x) = 0$ на приближенный линейный аналог $f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = 0$. Отсюда найдем x_1. Таким образом, метод Ньютона (метод касательных) состоит в вычислении последовательных приближений $x_1, x_2, \ldots$ к корню z по формуле

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \text{ при заданном } x_0\,.$$

В качестве предварительного критерия окончания вычислений можно взять стандартное условие $|\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}| < \varepsilon$, что в данном алгоритме эквивалентно $|x_k - x_{k+1}| < \varepsilon$. Однако данное неравенство не гарантирует требуемой точности приближения x_{k+1}. Поэтому желательно сделать дополнительную проверку знаков функции f на краях отрезка $[x_{k+1} - \varepsilon, x_{k+1} + \varepsilon]$. Если эта проверка даст одинаковые знаки на концах отрезка, то следует продолжить вычисление приближений, взяв меньшее ε. Если точность не достигается за значительное число итераций (например, 200), то вычисления разумно прекратить и вернуть значение -1.

1a. На задачах с известным решением численно проверьте, что если z — корень кратности единица (т.н. простой корень), то метод Ньютона имеет асимптотически квадратичную скорость сходимости, т.е. верна оценка $|z - x_{n+1}| \leq c|z - x_n|^2$. Если же кратность корня $p > 1$, то метод сходится со скоростью геометрической прогрессии: $|z - x_{n+1}| \leq \frac{p-1}{p}|z - x_n|$. В качестве пробных функций $f(x)$ можно, например, взять $x^2 - 17$, $\sin x - 1$, $x^3 \cos^2 x$.

1b. Реализуйте модифициораванный метод Ньютона, заменив точное вычисление значения производной на приближенный аналог: $f'(x_n) = \frac{f(x_n+h)-f(x_n-h)}{2h} + O(h^2)$. Численно проверьте, как влияет выбор величины $h = 10^{-k}$, $k = 0, 2, 4, \ldots 14$, на скорость сходимости метода.

2. Реализуйте для решения системы уравнений

$$\begin{cases} f_1(x^1, x^2, ..., x^m) = 0, \\ f_2(x^1, x^2, ..., x^m) = 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ f_m(x^1, x^2, ..., x^m) = 0; \end{cases} \quad \Leftrightarrow F(\mathbf{x}) = 0,\ \mathbf{x} = (x^1, ..., x^m)^T$$

с точностью ε метод Ньютона в виде функции со следующим заголовком:

```
int root(double *x,
         void (*F)(double *, const double *, int),
         void (*dF)(double *, const double *, int),
         int m, double eps);
```

Здесь x — указатель на начальное приближение и полученный корень; F — указатель на функцию, задающую систему уравнений; dF — указатель на функцию , вычисляющую матрицу частных производных функции F; eps — точность. Возвращаемое значение: 0, если точность достигнута, -1, если решить не удалось.

Указание. Метод Ньютона для системы имеет вид

$$F'(\mathbf{x}_n)(\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n) = -F(\mathbf{x}_n), \quad F'(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x^j}\right] \in \mathbf{R}^{m\times m}\,.$$

В качестве критерия окончания вычислений можно взять неравенство $\max\limits_{i=1,\ldots,m} |\mathbf{x}_k^i - \mathbf{x}_{k+1}^i| < \varepsilon$.

2.a. Для решения нелинейной краевой задачи

$$y'' = f(x, y) \quad \text{при} \quad x \in (0, X), \quad y(0) = a, \quad y(X) = b,$$

рассматривается система нелинейных алгебраических уравнений с параметром $h = X/N$:

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} = f(x_k, y_k),\ k = 1, 2, \ldots, N-1, \quad y_0 = a, \ \ y_N = b.$$

Здесь y_k — приближения к значениям $y(kh)$. Изучите сходимость метода в зависимости от выбора начального приближения для одной из следующих правых частей:

1)$f(x, y) = x^2 + y^3$; 2)$f(x, y) = y^2 \exp(x)$; 3)$f(x, y) = \cos x \sin y$.