

Для построения приближенного решения задачи

$$y'(x) + Ay(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad x \in [0, 1], \quad A > 0$$

С известным точным решением $y(x) = e^{-Ax}$ найдем порядок аппроксимации и проверим α -устойчивость схем:

1. $\frac{y_{k+1} - y_k}{h} + Ay_k = 0, y_0 = 1$

$$\begin{aligned} \left| y'(x_k) + Ay(x_k) - \frac{y(x_k + h) - y(x_k)}{h} - Ay(x_k) \right| = \\ \left| y'(x_k) - \frac{hy'(x_k) + \frac{h^2}{2}y''(\xi)}{h} \right| = \left| \frac{h}{2}y''(\xi) \right| = \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^1) \end{aligned}$$

Разностная схема имеет первый порядок аппроксимации.

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = 0 \Rightarrow P(\mu) = \mu - 1 \Rightarrow \mu = 1$$

Схема α -устойчива

2. $\frac{y_{k+1} - y_k}{h} + Ay_{k+1} = 0, y_0 = 1$

$$\begin{aligned} \left| y'(x_k) + Ay(x_k) - \frac{y(x_k + h) - y(x_k)}{h} - Ay(x_k + h) \right| = \\ \left| y'(x_k) - \frac{hy'(x_k) + \frac{h^2}{2}y''(\xi)}{h} - Ay'(\eta)h \right| = \left| \frac{h}{2}y''(\xi) - Ay'(\eta)h \right| = \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^1) \end{aligned}$$

Разностная схема имеет первый порядок аппроксимации.

Схема α -устойчива (см. схему 1).

3. $\frac{y_{k+1} - y_k}{h} + A\frac{y_{k+1} + y_k}{2} = 0, y_0 = 1$

$$\begin{aligned} \left| y'(x_k) + Ay(x_k) - \frac{y(x_k + h) - y(x_k)}{h} - A\frac{y(x_k + h) + y(x_k)}{2} \right| = \\ \left| \frac{2h(y'(x_k) + Ay(x_k)) - 2(y(x_k + h) - y(x_k)) - Ah(y(x_k + h) + y(x_k))}{2h} \right| = \\ \left| \frac{2h(y'(x_k) + Ay(x_k)) - 2(y'(x_k)h + y''(x_k)\frac{h^2}{2} + \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^3)) - Ah(2y(x_k) + y'(x_k)h + \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^2))}{2h} \right| = \\ \left| \frac{-y''(x_k)h^2 + \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^3) - Ay'(x_k)h^2 + \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^3)}{2h} \right| = \left| \frac{-h \overbrace{(y''(x_k) + Ay'(x_k))}^{=(y'(x) + Ay(x))'=0} + \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^2)}{2} \right| = \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^2) \end{aligned}$$

Разностная схема имеет второй порядок аппроксимации.

Схема α -устойчива (см. схему 1).

4. $\frac{y_{k+1}-y_{k-1}}{2h} + Ay_k = 0, y_0 = 1, y_1 = 1 - Ah$

(a) Проверим схему

$$\begin{aligned} \left| y'(x_k) + Ay(x_k) - \frac{y(x_k+h) - y(x_k-h)}{2h} - Ay(x_k) \right| = \\ \left\| y(x_k \pm h) = y(x_k) \pm y'(x_k)h + y''(x_k)\frac{h^2}{2} \pm y'''(x_k)\frac{h^3}{6} + \underline{\underline{O}}(h^4) \right\| = \\ \left| \frac{2hy'(x_k) - 2hy'(x_k) + \underline{\underline{O}}(h^3)}{2h} \right| = \underline{\underline{O}}(h^2) \end{aligned}$$

(b) Проверим краевое условие

$$|y(h) - y_1| = |\overbrace{y(0)}^{=1} + y'(0)h + \underline{\underline{O}}(h^2) - 1 + Ah| = |h \overbrace{(y'(0) + Ay(0))}^{=0} + \underline{\underline{O}}(h^2)| = \underline{\underline{O}}(h^2)$$

Разностная схема имеет второй порядок аппроксимации.

$$\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} = 0 \Rightarrow P(\mu) = \mu^2 - 1 \Rightarrow \mu = \pm 1$$

Схема α -устойчива.

5. $\frac{1.5y_k - 2y_{k-1} + 0.5y_{k-2}}{h} + Ay_k = 0, y_0 = 1, y_1 = 1 - Ah.$

(a) Проверим аппроксимацию схемы

$$\begin{aligned} \left| y'(x_k) - \frac{1.5y(x_k) - 2y(x_k-h) + 0.5y(x_k-2h)}{h} \right| = \\ \left| y'(x_k) - \frac{-2 \left[-hy'(x_k) + \frac{h^2}{2}y''(x_k) + \underline{\underline{O}}(h^3) \right] + \frac{1}{2} \left[-2hy'(x_k) + 2h^2y''(x_k) + \underline{\underline{O}}(h^3) \right]}{h} \right| = \\ \left| -2 \left[\frac{h^2}{2}y''(x_k) + \underline{\underline{O}}(h^2) \right] + \frac{1}{2} \left[2h^2y''(x_k) + \underline{\underline{O}}(h^2) \right] \right| = \underline{\underline{O}}(h^2) \end{aligned}$$

(b) Аппроксимация краевого условия $\underline{\underline{O}}(h^2)$ (см. схему 4)

Разностная схема имеет второй порядок аппроксимации.

$$\frac{1.5y_k - 2y_{k-1} + 0.5y_{k-2}}{h} = 0 \Rightarrow P(\mu) = 1.5\mu^2 - 2\mu + 0.5 \Rightarrow \mu_1 = 1; \mu_2 = \frac{1}{3}$$

Схема α -устойчива.

6. $\frac{-0.5y_{k+2}+2y_{k+1}-1.5y_k}{h} + Ay_k = 0, y_0 = 1, y_1 = 1 - Ah.$

(а) Проверим аппроксимацию схемы

$$\begin{aligned} & \left| y'(x_k) - \frac{-0.5y(x_k + 2h) + 2y(x_k + h) - 1.5y(x_k)}{h} \right| = \\ & \left| y'(x_k) - \frac{-\frac{1}{2} [2hy'(x_k) + 2h^2y''(x_k) + \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^3)] + 2 [hy'(x_k) + \frac{h^2}{2}y''(x_k) + \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^3)]}{h} \right| = \\ & \left| y'(x_k) - \frac{-[hy'(x_k) + h^2y''(x_k) + \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^3)] + [2hy'(x_k) + h^2y''(x_k) + \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^3)]}{h} \right| = \\ & |y'(x_k) + [y'(x_k) + hy''(x_k) + \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^2)] - [2y'(x_k) + hy''(x_k) + \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^2)]| = \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^2) \end{aligned}$$

(б) Аппроксимация краевого условия $\underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^2)$ (см. схему 4)

Разностная схема имеет второй порядок аппроксимации.

$$\frac{-0.5y_{k+2} + 2y_{k+1} - 1.5y_k}{h} = 0 \Rightarrow P(\mu) = -0.5\mu^2 + 2\mu - 1.5 \Rightarrow \mu_1 = 1; \mu_2 = 3$$

Схема **не** α -устойчива.

Результаты программы

№	E1	E2	E3	E6	m	A
1	1.920100e-02	1.847100e-03	1.840164e-04	1.839504e-07	1	1
1	0.000000e+00	1.920100e-02	1.847100e-03	1.839403e-06	1	10
1	9.043821e+19	2.656140e+95	0.000000e+00	0.000000e+00	1	1000
2	1.766385e-02	1.831771e-03	1.838631e-04	1.839699e-07	1	1
2	1.321206e-01	1.766385e-02	1.831771e-03	1.839387e-06	1	10
2	0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	1	1000
3	3.068988e-04	3.065695e-06	3.065658e-08	5.842771e-12	2	1
3	3.454611e-02	3.068988e-04	3.065695e-06	4.302614e-12	2	10
3	9.607843e-01	0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	2	1000
4	1.000000e-01	1.000000e-02	1.000000e-03	1.000000e-06	2	1
4	0.000000e+00	5.375719e+01	5.505286e-01	1.000000e-05	2	10
4	5.070070e+22	7.321840e+129	0.000000e+00	inf	2	1000
5	1.839902e+02	4.460325e+25	inf	inf	2	1
5	0.000000e+00	7.383011e+25	inf	inf	2	10
5	5.019147e+04	1.936319e+30	0.000000e+00	inf	2	1000
6	1.679148e+02	1.758994e+43	inf	inf	2	1
6	0.000000e+00	2.455656e+46	inf	inf	2	10
6	3.468003e+12	4.839576e+81	0.000000e+00	inf	2	1000