Отчет по численному исследованию базовых разностных схем.

Шерстобитов Андрей, задача 02

Для построения приближенного решения задачи

$$y'(x) + Ay(x) = 0,\ y(0) = 1,\ x \in [0,1],\ A > 0$$

С известным точным решением $y(x) = e^{-Ax}$ найдем порядок аппроксимации и проверим α-устойчивость схем:

1. $\frac{y_{k+1}-y_k}{h} + Ay_k = 0, y_0 = 1$

$$\left|y'(x_k) + Ay(x_k) - \frac{y(x_k+h)-y(x_k)}{h} - Ay(x_k)\right| =$$
$$\left|y'(x_k) - \frac{hy'(x_k) + \frac{h^2}{2}y''(\xi)}{h}\right| = \left|\frac{h}{2}y''(\xi)\right| = \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^1)$$

Разностная схема имеет первый порядок аппроксимации.

$$\frac{y_{k+1}-y_k}{h} = 0 \Rightarrow P(\mu) = \mu - 1 \Rightarrow \mu = 1$$

Схема α-устойчива

2. $\frac{y_{k+1}-y_k}{h} + Ay_{k+1} = 0, y_0 = 1$

$$\left|y'(x_k) + Ay(x_k) - \frac{y(x_k+h)-y(x_k)}{h} - Ay(x_k+h)\right| =$$
$$\left|y'(x_k) - \frac{hy'(x_k) + \frac{h^2}{2}y''(\xi)}{h} - Ay'(\eta)h\right| = \left|\frac{h}{2}y''(\xi) - Ay'(\eta)h\right| = \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^1)$$

Разностная схема имеет первый порядок аппроксимации.
Схема α-устойчива (см. схему 1).

3. $\frac{y_{k+1}-y_k}{h} + A\frac{y_{k+1}+y_k}{2} = 0, y_0 = 1$

$$\left|y'(x_k) + Ay(x_k) - \frac{y(x_k+h)-y(x_k)}{h} - A\frac{y(x_k+h)+y(x_k)}{2}\right| =$$
$$\left|\frac{2h(y'(x_k)+Ay(x_k)) - 2(y(x_k+h)-y(x_k)) - Ah(y(x_k+h)+y(x_k))}{2h}\right| =$$
$$\left|\frac{2h(y'(x_k)+Ay(x_k)) - 2(y'(x_k)h + y''(x_k)\frac{h^2}{2} + \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^3)) - Ah(2y(x_k) + y'(x_k)h + \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^2))}{2h}\right| =$$
$$\left|\frac{-y''(x_k)h^2 + \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^3) - Ay'(x_k)h^2 + \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^3)}{2h}\right| = \left|\frac{-h\overbrace{(y''(x_k) + Ay'(x_k))}^{=(y'(x)+Ay(x))'=0} + \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^2)}{2}\right| = \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^2)$$

Разностная схема имеет второй порядок аппроксимации.
Схема α-устойчива (см. схему 1).

4. $\frac{y_{k+1}-y_{k-1}}{2h}+Ay_k=0, y_0=1, y_1=1-Ah$

   (a) Проверим схему

$$\left|y'(x_k)+Ay(x_k)-\frac{y(x_k+h)-y(x_k-h)}{2h}-Ay(x_k)\right|=$$

$$\left\|y(x_k\pm h)=y(x_k)\pm y'(x_k)h+y''(x_k)\frac{h^2}{2}\pm y'''(x_k)\frac{h^3}{6}+\underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^4)\right\|=$$

$$\left|\frac{2hy'(x_k)-2hy'(x_k)+\underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^3)}{2h}\right|=\underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^2)$$

   (b) Проверим краевое условие

$$|y(h)-y_1|=|\overbrace{y(0)}^{=1}+y'(0)h+\underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^2)-1+Ah|=|h\overbrace{(y'(0)+Ay(0))}^{=0}+\underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^2)|=\underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^2)$$

Разностная схема имеет второй порядок аппроксимации.

$$\frac{y_{k+1}-y_{k-1}}{2h}=0\Rightarrow P(\mu)=\mu^2-1\Rightarrow\mu=\pm1$$

Схема α-устойчива.

5. $\frac{1.5y_k-2y_{k-1}+0.5y_{k-2}}{h}+Ay_k=0, y_0=1, y_1=1-Ah.$

   (a) Проверим аппроксимацию схемы

$$\left|y'(x_k)-\frac{1.5y(x_k)-2y(x_k-h)+0.5y(x_k-2h)}{h}\right|=$$

$$\left|\begin{array}{c}2y(x_k-h)=2y(x_k)-2hy'(x_k)+h^2y''(x_k)+\underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^3)\\0.5y(x_k-2h)=0.5y(x_k)-hy'(x_k)+h^2y''(x_k)+\underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^3)\end{array}\right|$$

$$=\left|y'(x_k)-\frac{hy'(x_k)+\underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^3)}{h}\right|=\underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^2)$$

   (b) Аппроксимация краевого условия $\underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^2)$ (см. схему 4)

Разностная схема имеет второй порядок аппроксимации.

$$\frac{1.5y_k-2y_{k-1}+0.5y_{k-2}}{h}=0\Rightarrow P(\mu)=1.5\mu^2-2\mu+0.5\Rightarrow\mu_1=1;\mu_2=\frac{1}{3}$$

Схема α-устойчива.

6. $\frac{-0.5y_{k+2}+2y_{k+1}-1.5y_k}{h} + Ay_k = 0, y_0 = 1, y_1 = 1 - Ah.$

(a) Проверим аппроксимацию схемы

$$\left| y'(x_k) - \frac{-0.5y(x_k+2h) + 2y(x_k+h) - 1.5y(x_k)}{h} \right| =$$

$$\left| y'(x_k) - \frac{-\frac{1}{2}\left[2hy'(x_k) + 2h^2y''(x_k) + \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^3)\right] + 2\left[hy'(x_k) + \frac{h^2}{2}y''(x_k) + \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^3)\right]}{h} \right| =$$

$$\left| y'(x_k) - \frac{-\left[hy'(x_k) + h^2y''(x_k) + \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^3)\right] + \left[2hy'(x_k) + h^2y''(x_k) + \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^3)\right]}{h} \right| =$$

$$\left| y'(x_k) + \left[y'(x_k) + hy''(x_k) + \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^2)\right] - \left[2y'(x_k) + hy''(x_k) + \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^2)\right] \right| = \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^2)$$

(b) Аппроксимация краевого условия $\underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^2)$ (см. схему 4)

Разностная схема имеет второй порядок аппроксимации.

$$\frac{-0.5y_{k+2} + 2y_{k+1} - 1.5y_k}{h} = 0 \Rightarrow P(\mu) = -0.5\mu^2 + 2\mu - 1.5 \Rightarrow \mu_1 = 1; \mu_2 = 3$$

Схема **не** α-устойчива.

Результаты программы

№	E1	E2	E3	E6	m	A
1	1.920100e-02	1.847100e-03	1.840164e-04	1.839504e-07	1	1
1	0.000000e+00	1.920100e-02	1.847100e-03	1.839403e-06	1	10
1	9.043821e+19	2.656140e+95	0.000000e+00	0.000000e+00	1	1000
2	1.766385e-02	1.831771e-03	1.838631e-04	1.839699e-07	1	1
2	1.321206e-01	1.766385e-02	1.831771e-03	1.839387e-06	1	10
2	0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	1	1000
3	3.068988e-04	3.065695e-06	3.065658e-08	5.842771e-12	2	1
3	3.454611e-02	3.068988e-04	3.065695e-06	4.302614e-12	2	10
3	9.607843e-01	0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	2	1000
4	1.000000e-01	1.000000e-02	1.000000e-03	1.000000e-06	2	1
4	0.000000e+00	5.375719e+01	5.505286e-01	1.000000e-05	2	10
4	5.070070e+22	7.321840e+129	0.000000e+00	inf	2	1000
5	1.839902e+02	4.460325e+25	inf	inf	2	1
5	0.000000e+00	7.383011e+25	inf	inf	2	10
5	5.019147e+04	1.936319e+30	0.000000e+00	inf	2	1000
6	1.679148e+02	1.758994e+43	inf	inf	2	1
6	0.000000e+00	2.455656e+46	inf	inf	2	10
6	3.468003e+12	4.839576e+81	0.000000e+00	inf	2	1000