

## Билет 1.

**Задача** (Интерполяция полиномом).  $f(x) \approx \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x)$ .  
Дано:  $a \leq x_1 < \dots < x_n \leq b$ . Найти  $P_{n-1}(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$ .

### Теорема 1

$\exists! P_{n-1}(x) : P_{n-1} = f(x_i) \forall f(x_i), a \leq x_1 < \dots < x_n \leq b, \forall i = 1, \dots, n$

**Доказательство.**  $P_{n-1}(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \dots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

$$\det A = \prod_{i \neq j} (x_i - x_j) \neq 0 \Rightarrow \exists! \hat{a} \forall f$$

□

**Замечание.** Обусловленность матрицы  $A$  довольно плохая, так вектора матрицы "слабо" линейно независимы. То есть решать поставленную задачу таким методом довольно неточно. Будем решать задачу иначе: представим базис, в котором поставленные вектора будут ортогональны.

Рассмотрим полиномы  $\Phi_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$  степени  $n - 1$ .

Они линейно-независимы, так как  $\begin{cases} \Phi_i(x_j) = 0, & i \neq j \\ \Phi_i(x_i) = 1 \end{cases}$

**Лемма.**

$$P_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Phi_i(x) \stackrel{def}{=} L_n(x)$$

**Доказательство.** Рассмотрим разность  $L_n - P_{n-1} \equiv Q_{n-1}$ . Обратим внимание,  $\forall x_i, i = 1, \dots, n$ :

$$Q_{n-1}(x_i) = L_n(x_i) - P_{n-1}(x_i) = f(x_i) - f(x_i) = 0$$

Но  $\deg Q_{n-1} \leq n - 1 \Rightarrow Q_{n-1} \equiv 0 \Rightarrow L_n \equiv P_{n-1}$

□

### Теорема 2

Пусть  $f(x) \in C^n[a, b]$ , тогда  $\forall x \in [a, b] \exists \xi = \xi(x) \in [a, b]$ :

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi(x))}{n!} \omega_n(x), \text{ где } \omega_n = \prod_i (x - x_i)$$

**Доказательство.** 1. Для  $\bar{x} = x_i, i = 1, \dots, n$  верно:

$$f(x_i) - L_n(x_i) = 0 = \frac{f^{(n)}(\xi(\bar{x}))}{n!} \underbrace{\prod_i (\bar{x} - x_i)}_0$$

2. Для зафиксированного  $\bar{x} \neq x_i, i = 1, \dots, n, \bar{x} \in [a, b]$  рассмотрим

$$\phi(t) = f(t) - L_n(t) - k \omega_n(t),$$

$$\omega_n(t) = \prod_{i=1}^n (t - x_i), \quad k = \frac{f(\bar{x}) - L_n(\bar{x})}{\prod_i (\bar{x} - x_i)} = \text{const}$$

Заметим, что  $\phi(x_i) = 0, \forall i$  и  $\phi(\bar{x}) = 0 \Rightarrow \exists n + 1$  нуль. Также  $\phi(x) \in C^n[a, b]$ , т.к.  $f, L_n, \omega_n \in C^n[a, b]$ . Значит  $\phi'(x)$  имеет  $n$  нулей,  $\dots, \phi^{(n)}$  имеет 1 нуль, то есть  $\exists \xi = \xi(x) : \phi^{(n)}(\xi) = 0$ :

$$\begin{aligned} f^{(n)}(t) \Big|_{t=\xi} - \underbrace{L_n^{(n)}(t) \Big|_{t=\xi}}_{0, \deg L_n = n-1} - \underbrace{k \omega_n^{(n)}(t) \Big|_{t=\xi}}_{n!} &= 0 \\ \Rightarrow k &= \frac{f^{(n)}(\xi(x))}{n!}, \quad x \in [a, b] \end{aligned}$$

□

**Следствие.**

$$\|f - L_n\|_{C[a,b]} \leq \frac{\|f^{(n)}\|_{C[a,b]}}{n!} \|\omega_n\|_{C[a,b]}$$

**Задача** (Минимизация остаточного члена погрешности). Рассмотрим класс функций

$$\mathcal{F} = \{f : f \in C^n[a, b], \|f^{(n)}\|_C \leq A_n\}$$

Для набора узлов  $\{x_i\}$  определим соответственно погрешность интерполяции для функции  $f$  и для класса  $\mathcal{F}$ :

$$l(f, \{x_i\}) = \|f - L_n\|, \quad l(\mathcal{F}, \{x_i\}) = \sup_{f \in \mathcal{F}} l(f, \{x_i\})$$

Надо найти оптимальный набор узлов  $\{\bar{x}_i\}$ :

$$\inf_{\{x_i\}} l(\mathcal{F}, \{x_i\}) = l(\mathcal{F}, \{\bar{x}_i\})$$

Возьмем некоторый набор  $\{x_i\}$ . Тогда

$$\begin{aligned} l(\mathcal{F}, \{x_i\}) &= \sup_{f \in \mathcal{F}} \left\| \frac{f^{(n)}(\xi(x))}{n!} \omega_n(x) \right\| \leq \frac{A_n}{n!} \|\omega_n\| \Rightarrow \\ \inf_{\{x_i\}} l(\mathcal{F}, \{x_i\}) &\leq \frac{A_n}{n!} \inf_{\{x_i\}} \|\omega_n\| \end{aligned}$$

**Решением задачи**

$$\inf_{\{x_i\}} \|\omega_n\| = \inf_{\{x_i\}} \max_{x \in [a,b]} |(x - x_1) \dots (x - x_n)|$$

является нормированный многочлен Чебышева,  $x_i$  - его корни:  $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{\pi(2i-1)}{2n}$ . При этом

$$\omega_n(x) = \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}} T_n \left( \frac{2x - (a+b)}{b-a} \right), \quad \|\omega_n\| = \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}}$$

Это приводит к оценке

$$\inf_{\{x_i\}} l(\mathcal{F}, \{x_i\}) \leq \frac{A_n}{n!} \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}}$$

Результат оптимизации на классе не лучше, чем результат оптимизации на одном из элементов класса. Возьмем  $f_0 \in \mathcal{F} : f_0 = \frac{A_n}{n!} x^n$ . Для него получаем оценку:

$$\inf_{\{x_i\}} l(\mathcal{F}, \{x_i\}) \geq \inf_{\{x_i\}} l(f_0, \{x_i\}) = \frac{A_n}{n!} \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}}$$

т.е. найденная для класса оценка сверху достигается на функции  $f_0(x)$ , т.е. является точной. Таким образом, интерполяция по узлам Чебышёва оптимальна на классе  $\mathcal{F}$ .

**Билет 2. Наилучшее приближение в линейном пространстве** Пусть  $L$  - линейное (векторное) пространство с нормой  $\| \doteq \|$ . Пусть  $\{g^{(i)}\}$ ,  $i = 1, \dots, n$  - л.н. нез. набор. Решаем задачу  $f \in L$

$$\inf_{\{c_i\}} \left\| f - \sum_{i=1}^n c_i g^{(i)} \right\| \quad (1)$$

### Теорема 3

В линейном полном норм. пр-ве  $\exists$  решение (1), то есть  $\exists g^f = \sum_{i=1}^n c_i^f g^{(i)}$ ,  $g^f \in \langle g^{(1)}, \dots, g^{(n)} \rangle$

*Доказательство.* Докажем, что  $\inf$  достигается. Рассмотрим фиксированный  $F_f(c) = \|f - \sum_{i=1}^n c_i g^{(i)}\|$  - непрерывен по  $\bar{c} = (c_1, \dots, c_n)^T$ , так как

$$\begin{aligned} |F_f(c) - F_f(\tilde{c})| &= \left\| \left\| f - \sum_{i=1}^n c_i g^{(i)} \right\| - \left\| f - \sum_{i=1}^n \tilde{c}_i g^{(i)} \right\| \right\| \leq \\ &\leq \left\| \sum_{i=1}^n (c_i g^{(i)} - \tilde{c}_i g^{(i)}) \right\| \leq \sum_{i=1}^n |c_i - \tilde{c}_i| \|g^{(i)}\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Заметим, что  $0 \leq \inf_{c \in \mathbb{R}^n} F_f(c) \leq \|f\|$  □

**Наилучшее приближение в гильбертовом пространстве** Отличается от полного линейного нормой  $\|f\| = (f, f)^{\frac{1}{2}}$ , то есть  $f \in H$  - бесконечномерное нормированное пространство.  $\{g^{(i)}\}_{i=1}^n$  - л.н. набор. Тогда  $\exists$  решение (1), найдем его:

$$\begin{aligned} \hat{f}_f &= \left\| f - \sum_{i=1}^n c_i g^{(i)} \right\|^2 = \left( f - \sum_{i=1}^n c_i g^{(i)}, f - \sum_{i=1}^n c_i g^{(i)} \right) = \\ &= (f, f) - 2 \left( \sum_{i=1}^n c_i g^{(i)}, f \right) + \left( \sum_{i=1}^n c_i g^{(i)}, \sum_{i=1}^n c_i g^{(i)} \right) \rightarrow \inf_{\{c_i\}} \end{aligned}$$

Но по  $\{c_i\}$  - это обычный квадратичный функционал, а чтобы найти его  $\min$  продифф. по  $\{c_i\}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{f}_f}{\partial c_i} = 0 &\Leftrightarrow \\ \begin{pmatrix} (g^{(1)}, g^{(1)}) & \dots & (g^{(n)}, g^{(1)}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (g^{(1)}, g^{(n)}) & \dots & (g^{(n)}, g^{(n)}) \end{pmatrix}_{G_n} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (f, g^{(1)}) \\ \vdots \\ (f, g^{(n)}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### Теорема 4

Пусть  $\{g^{(i)}\}_{i=1}^n$  л.н., тогда  $G_n = G_n^T > 0$ ,  $\deg G_n \neq 0$ , то есть  $\forall f \exists! \mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^T$  - решение (1), где  $\mathbf{c}$  удовлетворяет системе  $G_n \mathbf{c} = \mathbf{b}$ ,  $G_{n,i,j} = (g^{(i)}, g^{(j)})$ ,  $\mathbf{b} = (f, g^{(i)})$ .

**Билет 3** (Многочлен наилучшего равномерного приближения, теорема Валле-Пуссена, теорема Чебышёва). Пусть  $f : \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| < \infty$  - функционал огр. вариации,  $\{g^{(i)}\}_{i=1}^{n+1} = \{1, x, \dots, x^n\}$ . Решаем задачу

$$\inf_{a_0, \dots, a_n} \max_{x \in [a,b]} \left| f(x) - \sum_{i=1}^n a_i x^i \right| = \inf_{Q_n} \|f - Q_n\|_{C[a,b]} \quad (2)$$

$\exists$  решение (т.к. пространство полн. лин.), проверим единственность.

**Опр. 1.**  $Q_n^o(x)$  - многочлен наилучшего равномерно приближения (МНРП) для  $f(x)$  на  $[a, b]$ , если

$$\forall Q_n \|f - Q_n\|_{C[a,b]} \geq \|f - Q_n^o\|_{C[a,b]}$$

**Замечание.**  $Q_n^o$  - в общем случае не многочлен Чебышева, т.к. он приближает 0, но МНРП для 0 есть 0. Разница в том, что в мн-не Чебышева зафиксирован свободный член, тогда как здесь участвуют все коэф.

**Замечание.** Такой многочлен существует всегда (по теореме об элементе наилучшего приближения в линейном нормированном пространстве), а его единственность (см. далее) имеет место для непрерывных функц

#### Теорема 5: Валле-Пуссен

$f(x)$ ,  $Q_n(x)$ ,  $\exists n+2$  точки,  $a \leq x_0 \leq \dots \leq x_{n+1} \leq b$

$$\operatorname{sgn}(f(x_i) - Q_n(x_i)) \cdot (-1)^i \equiv \operatorname{const}$$

т.е. при переходе от точки к точке разность  $f(x_i) - Q_n(x_i)$  меняет знак. Тогда

$$\|f - Q_n^o\| \geq \mu = \min_{i=0, \dots, n+1} |f(x_i) - Q_n(x_i)|$$

#### Теорема 6: Чебышев

Пусть  $f \in C[a, b]$  тогда  $Q_n^o$  - МНРП  $\Leftrightarrow$  на отрезке  $[a, b]$

$\exists$  по крайней мере  $n+2$  точек  $a \leq x_0 \leq \dots \leq x_{n+1} \leq b$ :

$$f(x_i) - Q_n^o(x_i) = \alpha(-1)^i \|f - Q_n^o\|$$

где  $i = 0, \dots, n+1$ ;  $\alpha = 1$  или  $\alpha = -1$  одновременно для всех  $i$ .

Точки  $x_0, \dots, x_{n+1}$ , удовлетворяющие условию теоремы, называются точками Чебышёвского альтернанса.

Билет 4.

Пример.

**Теорема 7**

*МНРП непрерывной функции единственен*

**Следствие.** Если  $f(x) \in C[a, b]$  - симметричная (кососимметричная) относительно  $\frac{a+b}{2}$  функция, то  $Q_n^o(x)$  симметричный (кососимметричный) относительно  $\frac{a+b}{2}$  многочлен.