Билет 1.

Задача (Интерполяция полиномом). $f(x) \approx \sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i(x)$. *Дано:* $a \le x_1 < \ldots < x_n \le b$. *Найти* $P_{n-1}(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}$.

> **Теорема 1**
>
> $\exists! P_{n-1}(x) : P_{n-1} = f(x_i)\ \forall f(x_i),\ a \le x_1 < \ldots < x_n \le b, \forall i = 1, \ldots, n$

Доказательство. $P_{n-1}(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \ldots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

$$\det A = \prod_{i \ne j}(x_i - x_j) \ne 0 \Rightarrow \exists!\ \hat{a}\ \forall f$$

□

Замечание. *Обсуловленность матрицы A довольно плохая, так вектора матрицы "слабо"линейно независимы. То есть решать поставленную задачу таким методом довольно неточно. Будем решать задачу иначе: представим базис, в котором поставленные вектора будут ортогональны.*

Рассмотрим полиномы $\Phi_i(x) = \prod_{j \ne i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$ *степени* $n-1$. *Они линейно-независимы, так как* $\begin{cases} \Phi_i(x_j) = 0,\ i \ne j \\ \Phi_i(x_i) = 1 \end{cases}$

Лемма.

$$P_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Phi_i(x) \overset{def}{=} L_n(x)$$

Доказательство. Рассмотрим разность $L_n - P_{n-1} \equiv Q_{n-1}$. Обратим внимание, $\forall x_i,\ i = 1, \ldots, n$:

$$Q_{n-1}(x_i) = L_n(x_i) - P_{n-1}(x_i) = f(x_i) - f(x_i) = 0$$

Но $\deg Q_{n-1} \le n - 1 \Rightarrow Q_{n-1} \equiv 0 \Rightarrow L_n \equiv P_{n-1}$ □

> **Теорема 2**
>
> *Пусть* $f(x) \in C^n[a,b]$, *тогда* $\forall x \in [a,b]\ \exists\ \xi = \xi(x) \in [a,b]$:
>
> $$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi(x))}{n!}\omega_n(x),\ \text{где } w_n = \prod_i (x - x_i)$$

Доказательство. 1. Для $\overline{x} = x_i,\ i = 1, \ldots, n$ верно:

$$f(x_i) - L_n(x_i) = 0 = \frac{f^{(n)}(\xi(\overline{x}))}{n!} \underbrace{\prod_i (\overline{x} - x_i)}_{0}$$

2. Для зафиксированного $\overline{x} \ne x_i,\ i = 1, \ldots, n,\ \overline{x} \in [a,b]$ рассмотрим

$$\phi(t) = f(t) - L_n(t) - k\omega_n(t),$$

$$\omega_n(t) = \prod_{i=1}^{n}(t - x_i),\ k = \frac{f(\overline{x}) - L_n(\overline{x})}{\prod_i (\overline{x} - x_i)} = \text{const}$$

Заметим, что $\phi(x_i) = 0,\ \forall i$ и $\phi(\overline{x}) = 0 \Rightarrow \exists\ n+1$ нуль. Также $\phi(x) \in C^n[a,b]$, т.к. $f, L_n, \omega_n \in C^n[a,b]$. Значит $\phi'(x)$ имеет n нулей, …, $\phi^{(n)}$ имеет 1 нуль, то есть $\exists\ \xi = \xi(x) :\ \phi^{(n)}(\xi) = 0$:

$$f^{(n)}(t)\Big|_{t=\xi} - \underbrace{L_n^{(n)}(t)\Big|_{t=\xi}}_{0,\ \deg L_n = n-1} - k\underbrace{\omega_n^{(n)}(t)\Big|_{t=\xi}}_{n!} = 0$$

$$\Rightarrow k = \frac{f^{(n)}(\xi(x))}{n!},\ x \in [a,b]$$

□

Следствие.

$$\|f - L_n\|_{C[a,b]} \le \frac{\|f^{(n)}\|_{C[a,b]}}{n!}\|\omega_n\|_{C[a,b]}$$

Задача (Минимизация остаточного члена погрешности). *Рассмотрим класс функций*

$$\mathcal{F} = \{f : f \in C^n[a,b],\ \|f^{(n)}\|_C \le A_n\}$$

Для набора узлов $\{x_i\}$ *определим соответственно погрешность интерполяции для функции* f *и для класса* $\mathcal{F}$:

$$l(f, \{x_i\}) = \|f - L_n\|,\ l(\mathcal{F}, \{x_i\}) = \sup_{f \in \mathcal{F}} l(f, \{x_i\})$$

Надо найти оптимальный набор узлов $\{\overline{x}_i\}$:

$$\inf_{\{x_i\}} l(\mathcal{F}, \{x_i\}) = l(\mathcal{F}, \{\overline{x}_i\})$$

Возьмем некоторый набор $\{x_i\}$. *Тогда*

$$l(\mathcal{F}, \{x_i\}) = \sup_{f \in \mathcal{F}} \left\| \frac{f^{(n)}(\xi(x))}{n!}\omega_n(x) \right\| \le \frac{A_n}{n!}\|\omega_n\| \Rightarrow$$

$$\inf_{\{x_i\}} l(\mathcal{F}, \{x_i\}) \le \frac{A_n}{n!} \inf_{\{x_i\}} \|\omega_n\|$$

Решением задачи

$$\inf_{\{x_i\}} \|\omega_n\| = \inf_{\{x_i\}} \max_{x \in [a,b]} |(x - x_1)\ldots(x - x_n)|$$

является нормированный многочлен Чебышева, x_i *- его корни:* $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\frac{\pi(2i-1)}{2n}$. *При этом*

$$w_n(x) = \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}} T_n\left(\frac{2x - (a+b)}{b - a}\right),\ \|\omega_n\| = \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}}$$

Это приводит к оценке

$$\inf_{\{x_i\}} l(\mathcal{F}, \{x_i\}) \le \frac{A_n}{n!}\frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}}$$

Результат оптимизации на классе не лучше, чем результат оптимизации на одном из элементов класса. Возьмем $f_0 \in \mathcal{F} :\ f_0 = \frac{A_n}{n!}x^n$. *Для него получаем оценку:*

$$\inf_{\{x_i\}} l(\mathcal{F}, \{x_i\}) \ge \inf_{\{x_i\}} l(f_0, \{x_i\}) = \frac{A_n}{n!}\frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}}$$

т.е. найденная для класса оценка сверху достигается на функции $f_0(x)$, *т.е. является точной. Таким образом, интерполяция по узлам Чебышёва оптимальна на классе* $\mathcal{F}$.

Билет 2. ***Наилучшее приближение в линейном пространстве*** *Пусть L - линейное (векторное) пространство с нормой $\| \doteq \|$. Пусть $\{g^{(i)}\},\ i = 1, \dots, n$ - лин. нез. набор. Решаем задачу $f \in L$*

$$\inf_{\{c_i\}} \left\| f - \sum_{i=1}^{n} g^{(i)} \right\| \tag{1}$$

Теорема 3

В линейном полном норм. пр-ве $\exists$ решение (1), то есть $\exists\ g^f = \sum_{i=1}^{n} c_i^f g^{(i)},\ g^f \in < g^{(1)}, \dots, g^{(n)} >$

Доказательство. Докажем, что inf достигается. Рассмотрим фиксированный $F_f(c) = \left\| f - \sum_{i=1}^{n} c_i g^{(i)} \right\|$ - непрерывен по $\overline{c} = (c_1, \dots, c_n)^T$, так как

$$|F_f(c) - F_f(\tilde{c})| = \left| \left\| f - \sum_{i=1}^{n} c_i g^{(i)} \right\| - \left\| f - \sum_{i=1}^{n} \tilde{c}_i g^{(i)} \right\| \right| \leq$$
$$\leq \left\| \sum_{i=1}^{n} (c_i g^{(i)} - \tilde{c}_i g^{(i)}) \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |c_i - \tilde{c}_i| \, \|g^{(i)}\| \to 0$$

Заметим, что $0 << \inf_{c \in \mathbb{R}^n} F_f(c) \leq \|f\|$ □

Наилучшее приближение в гильбертовом пространстве