

Билет 1.

Задача (Интерполяция полиномом). $f(x) \approx \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x)$.
Дано: $a \leq x_1 < \dots < x_n \leq b$. Найдите $P_{n-1}(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$.

Теорема 1

$\exists! P_{n-1}(x) : P_{n-1} = f(x_i) \forall f(x_i), a \leq x_1 < \dots < x_n \leq b, \forall i = 1, \dots, n$

Доказательство. $P_{n-1}(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \dots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

$$\det A = \prod_{i \neq j} (x_i - x_j) \neq 0 \Rightarrow \exists! \hat{a} \forall f$$

□

Замечание. Обусловленность матрицы A довольно плохая, так вектора матрицы "слабо" линейно независимы. То есть решать поставленную задачу таким методом довольно неточно. Будем решать задачу иначе: представим базис, в котором поставленные вектора будут ортогональны.

Рассмотрим полиномы $\Phi_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$ степени $n - 1$.

Они линейно-независимы, так как $\begin{cases} \Phi_i(x_j) = 0, & i \neq j \\ \Phi_i(x_i) = 1 \end{cases}$

Лемма.

$$P_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Phi_i(x) \stackrel{def}{=} L_n(x)$$

Доказательство. Рассмотрим разность $L_n - P_{n-1} \equiv Q_{n-1}$. Обратим внимание, $\forall x_i, i = 1, \dots, n$:

$$Q_{n-1}(x_i) = L_n(x_i) - P_{n-1}(x_i) = f(x_i) - f(x_i) = 0$$

Но $\deg Q_{n-1} \leq n - 1 \Rightarrow Q_{n-1} \equiv 0 \Rightarrow L_n \equiv P_{n-1}$

□

Теорема 2

Пусть $f(x) \in C^n[a, b]$, тогда $\forall x \in [a, b] \exists \xi = \xi(x) \in [a, b]$:

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi(x))}{n!} \omega_n(x), \text{ где } \omega_n = \prod_i (x - x_i)$$

Доказательство. 1. Для $\bar{x} = x_i, i = 1, \dots, n$ верно:

$$f(x_i) - L_n(x_i) = 0 = \frac{f^{(n)}(\xi(\bar{x}))}{n!} \underbrace{\prod_i (\bar{x} - x_i)}_0$$

2. Для зафиксированного $\bar{x} \neq x_i, i = 1, \dots, n, \bar{x} \in [a, b]$ рассмотрим

$$\phi(t) = f(t) - L_n(t) - k \omega_n(t),$$

$$\omega_n(t) = \prod_{i=1}^n (t - x_i), \quad k = \frac{f(\bar{x}) - L_n(\bar{x})}{\prod_i (\bar{x} - x_i)} = \text{const}$$

Заметим, что $\phi(x_i) = 0, \forall i$ и $\phi(\bar{x}) = 0 \Rightarrow \exists n + 1$ нуль. Также $\phi(x) \in C^n[a, b]$, т.к. $f, L_n, \omega_n \in C^n[a, b]$. Значит $\phi'(x)$ имеет n нулей, $\dots, \phi^{(n)}$ имеет 1 нуль, то есть $\exists \xi = \xi(x) : \phi^{(n)}(\xi) = 0$:

$$\begin{aligned} f^{(n)}(t) \Big|_{t=\xi} - \underbrace{L_n^{(n)}(t) \Big|_{t=\xi}}_{0, \deg L_n = n-1} - \underbrace{k \omega_n^{(n)}(t) \Big|_{t=\xi}}_{n!} &= 0 \\ \Rightarrow k &= \frac{f^{(n)}(\xi(x))}{n!}, \quad x \in [a, b] \end{aligned}$$

□

Следствие.

$$\|f - L_n\|_{C[a,b]} \leq \frac{\|f^{(n)}\|_{C[a,b]}}{n!} \|\omega_n\|_{C[a,b]}$$

Задача (Минимизация остаточного члена погрешности). Рассмотрим класс функций

$$\mathcal{F} = \{f : f \in C^n[a, b], \|f^{(n)}\|_C \leq A_n\}$$

Для набора узлов $\{x_i\}$ определим соответственно погрешность интерполяции для функции f и для класса \mathcal{F} :

$$l(f, \{x_i\}) = \|f - L_n\|, \quad l(\mathcal{F}, \{x_i\}) = \sup_{f \in \mathcal{F}} l(f, \{x_i\})$$

Надо найти оптимальный набор узлов $\{\bar{x}_i\}$:

$$\inf_{\{x_i\}} l(\mathcal{F}, \{x_i\}) = l(\mathcal{F}, \{\bar{x}_i\})$$

Возьмем некоторый набор $\{x_i\}$. Тогда

$$\begin{aligned} l(\mathcal{F}, \{x_i\}) &= \sup_{f \in \mathcal{F}} \left\| \frac{f^{(n)}(\xi(x))}{n!} \omega_n(x) \right\| \leq \frac{A_n}{n!} \|\omega_n\| \Rightarrow \\ \inf_{\{x_i\}} l(\mathcal{F}, \{x_i\}) &\leq \frac{A_n}{n!} \inf_{\{x_i\}} \|\omega_n\| \end{aligned}$$

Решением задачи

$$\inf_{\{x_i\}} \|\omega_n\| = \inf_{\{x_i\}} \max_{x \in [a,b]} |(x - x_1) \dots (x - x_n)|$$

является нормированный многочлен Чебышева, x_i - его корни: $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{\pi(2i-1)}{2n}$. При этом

$$\omega_n(x) = \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}} T_n \left(\frac{2x - (a+b)}{b-a} \right), \quad \|\omega_n\| = \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}}$$

Это приводит к оценке

$$\inf_{\{x_i\}} l(\mathcal{F}, \{x_i\}) \leq \frac{A_n}{n!} \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}}$$

Результат оптимизации на классе не лучше, чем результат оптимизации на одном из элементов класса. Возьмем $f_0 \in \mathcal{F} : f_0 = \frac{A_n}{n!} x^n$. Для него получаем оценку:

$$\inf_{\{x_i\}} l(\mathcal{F}, \{x_i\}) \geq \inf_{\{x_i\}} l(f_0, \{x_i\}) = \frac{A_n}{n!} \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}}$$

т.е. найденная для класса оценка сверху достигается на функции $f_0(x)$, т.е. является точной. Таким образом, интерполяция по узлам Чебышёва оптимальна на классе \mathcal{F} .

Билет 2. Наилучшее приближение в линейном пространстве Пусть L - линейное (векторное) пространство с нормой $\| \doteq \|$. Пусть $\{g^{(i)}\}$, $i = 1, \dots, n$ - л.н. нез. набор. Решаем задачу $f \in L$

$$\inf_{\{c_i\}} \left\| f - \sum_{i=1}^n c_i g^{(i)} \right\| \quad (1)$$

Теорема 3

В линейном полном норм. пр-ве \exists решение (1), то есть $\exists g^f = \sum_{i=1}^n c_i^f g^{(i)}$, $g^f \in \langle g^{(1)}, \dots, g^{(n)} \rangle$

Доказательство. Докажем, что \inf достигается. Рассмотрим фиксированный $F_f(c) = \|f - \sum_{i=1}^n c_i g^{(i)}\|$ - непрерывен по $\bar{c} = (c_1, \dots, c_n)^T$, так как

$$\begin{aligned} |F_f(c) - F_f(\tilde{c})| &= \left\| \left\| f - \sum_{i=1}^n c_i g^{(i)} \right\| - \left\| f - \sum_{i=1}^n \tilde{c}_i g^{(i)} \right\| \right\| \leq \\ &\leq \left\| \sum_{i=1}^n (c_i g^{(i)} - \tilde{c}_i g^{(i)}) \right\| \leq \sum_{i=1}^n |c_i - \tilde{c}_i| \|g^{(i)}\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Заметим, что $0 \leq \inf_{c \in \mathbb{R}^n} F_f(c) \leq \|f\|$ □

Наилучшее приближение в гильбертовом пространстве Отличается от полного линейного нормой $\|f\| = (f, f)^{\frac{1}{2}}$, то есть $f \in H$ - бесконечномерное нормированное пространство. $\{g^{(i)}\}_{i=1}^n$ - л.н. набор. Тогда \exists решение (1), найдем его:

$$\begin{aligned} \hat{f}_f &= \left\| f - \sum_{i=1}^n c_i g^{(i)} \right\|^2 = \left(f - \sum_{i=1}^n c_i g^{(i)}, f - \sum_{i=1}^n c_i g^{(i)} \right) = \\ &= (f, f) - 2 \left(\sum_{i=1}^n c_i g^{(i)}, f \right) + \left(\sum_{i=1}^n c_i g^{(i)}, \sum_{i=1}^n c_i g^{(i)} \right) \rightarrow \inf_{\{c_i\}} \end{aligned}$$

Но по $\{c_i\}$ - это обычный квадратичный функционал, а чтобы найти его \min продифф. по $\{c_i\}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{f}_f}{\partial c_i} = 0 &\Leftrightarrow \\ \begin{pmatrix} (g^{(1)}, g^{(1)}) & \dots & (g^{(n)}, g^{(1)}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (g^{(1)}, g^{(n)}) & \dots & (g^{(n)}, g^{(n)}) \end{pmatrix}_{G_n} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (f, g^{(1)}) \\ \vdots \\ (f, g^{(n)}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Теорема 4

Пусть $\{g^{(i)}\}_{i=1}^n$ л.н., тогда $G_n = G_n^T > 0$, $\deg G_n \neq 0$, то есть $\forall f \exists! \mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^T$ - решение (1), где \mathbf{c} удовлетворяет системе $G_n \mathbf{c} = \mathbf{b}$, $G_{n,i,j} = (g^{(i)}, g^{(j)})$, $\mathbf{b} = (f, g^{(i)})$.

Билет 3 (Многочлен наилучшего равномерного приближения, теорема Валле-Пуссена, теорема Чебышёва). Пусть $f : \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| < \infty$ - функционал огр. вариации, $\{g^{(i)}\}_{i=1}^{n+1} = \{1, x, \dots, x^n\}$. Решаем задачу

$$\inf_{a_0, \dots, a_n} \max_{x \in [a,b]} \left| f(x) - \sum_{i=1}^n a_i x^i \right| = \inf_{Q_n} \|f - Q_n\|_{C[a,b]} \quad (2)$$

\exists решение (т.к. пространство полн. лин.), проверим единственность.

Опр. 1. $Q_n^o(x)$ - многочлен наилучшего равномерно приближения (МНРП) для $f(x)$ на $[a, b]$, если

$$\forall Q_n \|f - Q_n\|_{C[a,b]} \geq \|f - Q_n^o\|_{C[a,b]}$$

Замечание. Q_n^o - в общем случае не многочлен Чебышева, т.к. он приближает 0, но МНРП для 0 есть 0. Разница в том, что в мн-не Чебышева зафиксирован свободный член, тогда как здесь участвуют все коэф.

Замечание. Такой многочлен существует всегда (по теореме об элементе наилучшего приближения в линейном нормированном пространстве), а его единственность (см. далее) имеет место для непрерывных функц

Теорема 5: Валле-Пуссен

$f(x)$, $Q_n(x)$, $\exists n+2$ точки, $a \leq x_0 \leq \dots \leq x_{n+1} \leq b$

$$\operatorname{sgn}(f(x_i) - Q_n(x_i)) \cdot (-1)^i \equiv \operatorname{const}$$

т.е. при переходе от точки к точке разность $f(x_i) - Q_n(x_i)$ меняет знак. Тогда

$$\|f - Q_n^o\| \geq \mu = \min_{i=0, \dots, n+1} |f(x_i) - Q_n(x_i)|$$

Теорема 6: Чебышев

Пусть $f \in C[a, b]$ тогда Q_n^o - МНРП \Leftrightarrow на отрезке $[a, b]$

\exists по крайней мере $n+2$ точек $a \leq x_0 \leq \dots \leq x_{n+1} \leq b$:

$$f(x_i) - Q_n^o(x_i) = \alpha(-1)^i \|f - Q_n^o\|$$

где $i = 0, \dots, n+1$; $\alpha = 1$ или $\alpha = -1$ одновременно для всех i .

Точки x_0, \dots, x_{n+1} , удовлетворяющие условию теоремы, называются точками Чебышёвского альтернанса.

Билет 4.

Пример.

Теорема 7

МНРП непрерывной функции единственен

Следствие. Если $f(x) \in C[a, b]$ - симметричная (кососимметричная) относительно $\frac{a+b}{2}$ функция, то $Q_n^o(x)$ симметричный (кососимметричный) относительно $\frac{a+b}{2}$ многочлен.