

◇0.1. Найти общее действительное решение уравнения

$$13y_{k-1} + 4y_k + y_{k+1} = 0.$$

◇0.2. Найти ограниченное фундаментальное решение уравнения

$$y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1} = \delta_k^0.$$

◇0.3. Найти все решения задачи на собственные значения

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} = -\lambda y_k, \quad h = \frac{2}{2N-1}, \quad 1 \leq k \leq N-1, \\ y_0 = 0, \quad y_N = -y_{N-1}.$$

◇0.4. Приближение к числу $\ln 15,2$ вычислено следующим образом. Найдены точные значения $\ln 15$ и $\ln 16$ и построена линейная интерполяция между этими числами. Показать, что если x и y — соответственно точное и интерполированное значения $\ln 15,2$, то справедлива оценка $0 < x - y < 4 \cdot 10^{-4}$.

◇0.5. Среди всех многочленов вида $5x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ найти наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[1, 2]$.

◇0.6. Построить многочлен наилучшего равномерного приближения степени $n = 3$ для функции $f(x) = x^5 - 7x$ на отрезке $[-2, 2]$.

◇0.7. Оценить число разбиений отрезка N для вычисления интеграла $\int_0^1 \sqrt{x} e^x dx$ по составной квадратурной формуле прямоугольников, обеспечивающее точность 10^{-4} .

◇0.8. Построить квадратуру Гаусса с двумя узлами для вычисления интеграла $I(f) = \int_{-3}^3 x^2 f(x) dx$. Указать алгебраический порядок точности построенной квадратуры.

◇0.9. Пусть числа $d_k > 0$, $k = 1, \dots, n$. Доказать, что $\max_k (d_k |x_k|)$ — норма вектора \mathbf{x} . Найти норму матрицы, подчиненную этой векторной норме.

◇0.10. Пусть для невырожденной матрицы простой структуры A порядка n известны все собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Построить итерационный метод (??) с переменными параметрами τ_k , который не более чем за n шагов приводил бы в точной арифметике к решению системы $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

◇0.11. Для решения системы $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

применяется метод Гаусса – Зейделя. Найти все значения параметров α, β , обеспечивающие сходимость с произвольного начального приближения.

◇0.12. Исследовать сходимость метода простой итерации $x_{n+1} = x_n^2 - 3x_n + 1$ в зависимости от выбора начального приближения x_0 .

◇0.13. Построить метод простой итерации для вычисления наибольшего действительного корня уравнения $x^7 - 7x^6 + x - 7 = 0$. Обосновать сходимость.

◇0.14. Для задачи $y' - 7y = \sin 2x$, $y(0) = 1$ построить двухточечную разностную схему второго порядка сходимости.

◇0.15. Для задачи

$$-u'' + 2u = f(x), \quad u(0) = 1, \quad u'(1) = 0$$

построить разностную схему второго порядка аппроксимации на сетке $x_i = ih$, $i = 0, \dots, N$, $h = 1/N$. Исследовать устойчивость.