Билет 1.

Задача (Интерполяция полиномом)**.** $f(x) \approx \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i(x)$. *Дано:* $a \le x_1 < \ldots < x_n \le b$. *Найти* $P_{n-1}(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}$.

> **Теорема 1**
>
> $\exists! P_{n-1}(x) : P_{n-1} = f(x_i)\ \forall f(x_i),\ a \le x_1 < \ldots < x_n \le b, \forall i = 1, \ldots, n$

Доказательство. $P_{n-1}(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \ldots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

$$\det A = \prod_{i \ne j}(x_i - x_j) \ne 0 \Rightarrow \exists!\ \hat{a}\ \forall f$$

□

Замечание. *Обсуловленность матрицы A довольно плохая, так вектора матрицы "слабо"линейно независимы. То есть решать поставленную задачу таким методом довольно неточно. Будем решать задачу иначе: представим базис, в котором поставленные вектора будут ортогональны.*

Рассмотрим полиномы $\Phi_i(x) = \prod_{j \ne i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$ степени $n-1$. *Они линейно-независимы, так как* $\begin{cases} \Phi_i(x_j) = 0,\ i \ne j \\ \Phi_i(x_i) = 1 \end{cases}$

Лемма.

$$P_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Phi_i(x) \overset{def}{=} L_n(x)$$

Доказательство. Рассмотрим разность $L_n - P_{n-1} \equiv Q_{n-1}$. Обратим внимание, $\forall x_i,\ i = 1, \ldots, n$:

$$Q_{n-1}(x_i) = L_n(x_i) - P_{n-1}(x_i) = f(x_i) - f(x_i) = 0$$

Но $\deg Q_{n-1} \le n - 1 \Rightarrow Q_{n-1} \equiv 0 \Rightarrow L_n \equiv P_{n-1}$ □

> **Теорема 2**
>
> *Пусть $f(x) \in C^n[a, b]$, тогда $\forall x \in [a, b]\ \exists\ \xi = \xi(x) \in [a, b]$:*
>
> $$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi(x))}{n!}\omega_n(x),\ \text{где } w_n = \prod_i (x - x_i)$$

Доказательство. 1. Для $\overline{x} = x_i,\ i = 1, \ldots, n$ верно:

$$f(x_i) - L_n(x_i) = 0 = \frac{f^{(n)}(\xi(\overline{x}))}{n!} \underbrace{\prod_i (\overline{x} - x_i)}_{0}$$

2. Для зафиксированного $\overline{x} \ne x_i,\ i = 1, \ldots, n,\ \overline{x} \in [a, b]$ рассмотрим

$$\phi(t) = f(t) - L_n(t) - k\omega_n(t),$$
$$\omega_n(t) = \prod_{i=1}^{n}(t - x_i),\ k = \frac{f(\overline{x}) - L_n(\overline{x})}{\prod_i (\overline{x} - x_i)} = \text{const}$$

Заметим, что $\phi(x_i) = 0,\ \forall i$ и $\phi(\overline{x}) = 0 \Rightarrow \exists\ n+1$ нуль. Также $\phi(x) \in C^n[a, b]$, т.к. $f, L_n, \omega_n \in C^n[a, b]$. Значит $\phi'(x)$ имеет n нулей, ..., $\phi^{(n)}$ имеет 1 нуль, то есть $\exists\ \xi = \xi(x) :\ \phi^{(n)}(\xi) = 0$:

$$f^{(n)}(t)\Big|_{t=\xi} - \underbrace{L_n^{(n)}(t)\Big|_{t=\xi}}_{0,\ \deg L_n = n-1} - k\underbrace{\omega_n^{(n)}(t)\Big|_{t=\xi}}_{n!} = 0$$

$$\Rightarrow k = \frac{f^{(n)}(\xi(x))}{n!},\ x \in [a, b]$$

□

Следствие.

$$\|f - L_n\|_{C[a,b]} \le \frac{\|f^{(n)}\|_{C[a,b]}}{n!}\|\omega_n\|_{C[a,b]}$$

Задача (Минимизация остаточного члена погрешности)**.** *Рассмотрим класс функций*

$$\mathcal{F} = \{f : f \in C^n[a, b],\ \|f^{(n)}\|_C \le A_n\}$$

Для набора узлов $\{x_i\}$ определим соответственно погрешность интерполяции для функции f и для класса $\mathcal{F}$:

$$l(f, \{x_i\}) = \|f - L_n\|,\ l(\mathcal{F}, \{x_i\}) = \sup_{f \in \mathcal{F}} l(f, \{x_i\})$$

Надо найти оптимальный набор узлов $\{\overline{x}_i\}$:

$$\inf_{\{x_i\}} l(\mathcal{F}, \{x_i\}) = l(\mathcal{F}, \{\overline{x}_i\})$$

Возьмем некоторый набор $\{x_i\}$. Тогда

$$l(\mathcal{F}, \{x_i\}) = \sup_{f \in \mathcal{F}} \left\| \frac{f^{(n)}(\xi(x))}{n!}\omega_n(x) \right\| \le \frac{A_n}{n!}\|\omega_n\| \Rightarrow$$
$$\inf_{\{x_i\}} l(\mathcal{F}, \{x_i\}) \le \frac{A_n}{n!} \inf_{\{x_i\}} \|\omega_n\|$$

Решением задачи

$$\inf_{\{x_i\}} \|\omega_n\| = \inf_{\{x_i\}} \max_{x \in [a,b]} |(x - x_1)\ldots(x - x_n)|$$

является нормированный многочлен Чебышева, x_i - его корни: $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\frac{\pi(2i-1)}{2n}$. При этом

$$w_n(x) = \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}} T_n\left(\frac{2x - (a+b)}{b - a}\right),\ \|\omega_n\| = \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}}$$

Это приводит к оценке

$$\inf_{\{x_i\}} l(\mathcal{F}, \{x_i\}) \le \frac{A_n}{n!}\frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}}$$

Результат оптимизации на классе не лучше, чем результат оптимизации на одном из элементов класса. Возьмем $f_0 \in \mathcal{F}$: $f_0 = \frac{A_n}{n!}x^n$. Для него получаем оценку:

$$\inf_{\{x_i\}} l(\mathcal{F}, \{x_i\}) \ge \inf_{\{x_i\}} l(f_0, \{x_i\}) = \frac{A_n}{n!}\frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}}$$

т.е. найденная для класса оценка сверху достигается на функции $f_0(x)$, т.е. является точной. Таким образом, интерполяция по узлам Чебышёва оптимальна на классе $\mathcal{F}$.

Билет 2. ***Наилучшее приближение в линейном пространстве*** *Пусть L - линейное (векторное) пространство с нормой $\| \doteq \|$. Пусть $\{g^{(i)}\},\ i = 1, \dots, n$ - лин. нез. набор. Решаем задачу $f \in L$*

$$\inf_{\{c_i\}} \left\| f - \sum_{i=1}^{n} c_i g^{(i)} \right\| \tag{1}$$

> **Теорема 3**
>
> *В линейном полном норм. пр-ве $\exists$ решение (1), то есть $\exists\ g^f = \sum_{i=1}^{n} c_i^f g^{(i)},\ g^f \in < g^{(1)}, \dots, g^{(n)} >$*

Доказательство. Докажем, что inf достигается. Рассмотрим фиксированный $F_f(c) = \left\| f - \sum_{i=1}^{n} c_i g^{(i)} \right\|$ - непрерывен по $\overline{c} = (c_1, \dots, c_n)^T$, так как

$$|F_f(c) - F_f(\tilde{c})| = \left| \left\| f - \sum_{i=1}^{n} c_i g^{(i)} \right\| - \left\| f - \sum_{i=1}^{n} \tilde{c}_i g^{(i)} \right\| \right| \leq$$
$$\leq \left\| \sum_{i=1}^{n} (c_i g^{(i)} - \tilde{c}_i g^{(i)}) \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |c_i - \tilde{c}_i| \, \|g^{(i)}\| \to 0$$

Заметим, что $0 << \inf_{c \in \mathbb{R}^n} F_f(c) \leq \|f\|$ □

Наилучшее приближение в гильбертовом пространстве *Отличается от полного линейного нормой $\|f\| = (f, f)^{\frac{1}{2}}$, то есть $f \in H$ - бесконечномерное нормированное пространство. $\{g^{(i)}\}_{i=1}^{n}$ - л.н. набор. Тогда $\exists$ решение (1), найдем его:*

$$\hat{f}_f = \left\| f - \sum_{i=1}^{n} c_i g^{(i)} \right\|^2 = \left(f - \sum_{i=1}^{n} c_i g^{(i)}, f - \sum_{i=1}^{n} c_i g^{(i)} \right) =$$
$$= (f, f) - 2 \left(\sum_{i=1}^{n} c_i g^{(i)}, f \right) + \left(\sum_{i=1}^{n} c_i g^{(i)}, \sum_{i=1}^{n} c_i g^{(i)} \right) \to \inf_{\{c_i\}}$$

Но по $\{c_i\}$ – это обычный квадратичный функционал, а чтобы найти его $\min$ продифф. по $\{c_i\}$:

$$\frac{\partial \hat{f}_f}{\partial c_i} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\underbrace{\begin{pmatrix} (g^{(1)}, g^{(1)}) & \dots & (g^{(n)}, g^{(1)}) \\ \dots & \dots & \dots \\ (g^{(1)}, g^{(n)}) & \dots & (g^{(n)}, g^{(n)}) \end{pmatrix}}_{G_n} \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, g^{(1)}) \\ \dots \\ (f, g^{(n)}) \end{pmatrix}$$

> **Теорема 4**
>
> *Пусть $\{g^{(i)}\}_{i=1}^{n}$ л.н., тогда $G_n = G_n^T > 0$, $\deg G_n \neq 0$, то есть $\forall f\ \exists!\ \mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^T$ - решение (1), где $\mathbf{c}$ удовлетворяет системе $G_n \mathbf{c} = \mathbf{b}$, $G_{n i,j} = (g^{(i)}, g^{(j)})$, $\mathbf{b} = (f, g^{(i)})$.*

Билет 3 (Многочлен наилучшего равномерного приближения, теорема Валле-Пуссена, теорема Чебышёва). *Пусть* $f\ :\ \sup_{x\in[a,b]}|f(x)|\ <\ \infty$ *- функционал огр. вариации,* $\{g^{(i)}\}_{i=1}^{n+1} = \{1, x, \ldots, x^n\}$. *Решаем задачу*

$$\inf_{a_0,\ldots,a_n}\max_{x\in[a,b]}\left|f(x) - \sum_{i=1}^{n} a_i x^i\right| = \inf_{Q_n}\|f - Q_n\|_{C[a,b]} \qquad (2)$$

$\exists$ *решение (т.к. пространство полн. лин.), проверим единственность.*

Опр. 1. $Q_n^o(x)$ *- многочлен наилучшего равномерно приближения (МНРП) для* $f(x)$ *на* $[a,b]$*, если*

$$\forall\ Q_n\ \|f - Q_n\|_{C[a,b]} \geq \|f - Q_n^o\|_{C[a,b]}$$

Замечание. Q_n^o *- в общем случае* <u>*не*</u> *многочлен Чебышева, т.к. он приближает 0, но МНРП для 0 есть 0. Разница в том, что в мн-не Чебышева зафиксирован свободный член, тогда как здесь участвуют* <u>*все*</u> *коэф.*

Замечание. *Такой многочлен существует всегда (по теореме об элементе наилучшего приближения в линейном нормированном пространстве), а его единственность (см. далее) имеет место для непрерывных функц*

Теорема 5: Валле-Пуссен

$f(x)$, $Q_n(x)$, $\exists\ n+2$ *точки,* $a \leq x_0 \leq \ldots \leq x_{n+1} \leq b$

$$\operatorname{sgn}\left(f(x_i) - Q_n(x_i)\right)\cdot(-1)^i \equiv \mathrm{const}$$

т.е. при переходе от точки к точке разность $f(x_i) - Q_n(x_i)$ *меняет знак. Тогда*

$$\|f - Q_n^o\| \geq \mu = \min_{i=0,\ldots,n+1}|f(x_i) - Q_n(x_i)|$$

Теорема 6: Чебышев

Пусть $f \in C[a,b]$ *тогда* Q_n^o *- МНРП* $\Leftrightarrow$ *на отрезке* $[a,b]$ $\exists$ *по крайней мере* $n+2$ *точек* $a \leq x_0 \leq \ldots \leq x_{n+1} \leq b$:

$$f(x_i) - Q_n^o(x_i) = \alpha(-1)^i\|f - Q_n^o\|$$

где $i = 0, \ldots, n+1$; $\alpha = 1$ *или* $\alpha = -1$ *одновременно для всех* i.

Точки $x_0, \ldots, x_{n+1}$*, удовлетворяющие условию теоремы, называются точками Чебышёвского альтернанса.*

Билет 4.

Пример. *TODO: add examples*

Теорема 7

МНРП непрерывной функции единственен

Следствие. *Если* $f(x) \in C[a, b]$ *- симметричная (кососимметричная) относительно* $\frac{a+b}{2}$ *функция, то* $Q_n^o(x)$ *симметричный (кососимметричный) относительно* $\frac{a+b}{2}$ *многочлен.*

Билет 5.

Пример.

Теорема 8

МНРП непрерывной функции единственен

Следствие. *Если* $f(x) \in C[a, b]$ *- симметричная (кососимметричная) относительно* $\frac{a+b}{2}$ *функция, то* $Q_n^o(x)$ *симметричный (кососимметричный) относительно* $\frac{a+b}{2}$ *многочлен.*

TODO: add examples