

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра вычислительной математики

Курсовая работа

Тема: *Введение в фотометрическое стерео.*

Theme: *Introduction to Photometric Stereo.*

Выполнил:

студент 4 курса 431 группы

Шерстобитов Андрей Сергеевич

Научный руководитель:

Валединский Владимир Дмитриевич

Москва
2022

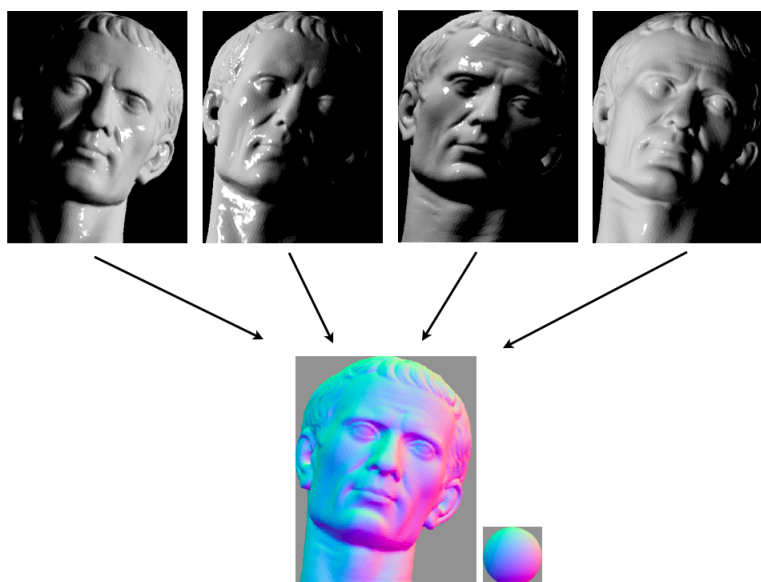
Содержание

1	Вступление	2
2	Радиометрия	3
2.1	Телесный угол	3
2.2	Сила света	4
2.3	Поток	4
2.4	Освещенность	5
2.5	Энергетическая яркость	6
3	Поверхности	7
3.1	Двулучевая функция отражательной способности (ДФОС)	7
3.2	Механизмы, порождающие отражение	8
3.3	Модели отражения	9
3.3.1	Светорассеивающая поверхность, закон Ламберта	9
3.3.2	Зеркальная поверхность	10
4	Фотометрическое стерео	11
4.1	Постановка задачи	11
4.2	Восстановление нормалей	11
4.3	Восстановление поверхности из нормалей	12
4.4	Проблемы, возможные решения	14
5	Литература	15

1 Вступление

Компьютерное зрение - это наука, занимающаяся разработкой алгоритмов и систем для анализа и интерпретации изображений, созданных с помощью камер и других датчиков. Одной из ключевых проблем компьютерного зрения является восстановление трехмерной формы объектов из двумерных изображений. Для решения этой проблемы используется много различных технологий, одной из которых является фотометрическое стерео.

Фотометрическое стерео - это метод восстановления трехмерной формы объектов из серии изображений, полученных под различными углами освещения. Он основан на анализе освещения объекта, что позволяет получать данные о его форме. Суть метода заключается в анализе изменений яркости поверхности объекта в различных точках изображения при разных углах освещения. На основе этих данных можно получить трехмерную модель поверхности объекта.



Один из ключевых элементов фотометрического стерео - это модель отражения света, которая описывает изменение яркости той же точки при изменении направления освещения. В случае модели Ламберта изменения яркости точки отображают только нормаль поверхности, и при этом яркость точки не зависит от направления освещения. Это свойство значительно упрощает процесс восстановления поверхности, поскольку можно точно определить нормали по изображениям под разными углами.

Фотометрическое стерео может быть использовано в различных областях приложений, таких как инспекция качества промышленных изделий, создание 3D-моделей для игр и виртуальной реальности и многого другого. Но несмотря на все его преимущества, метод фотометрического стерео довольно сложен и чувствителен к шумам и погрешностям, таким как тени, блики и т.д.

В данной курсовой работе мы рассмотрим основные принципы, которые лежат в основе фотометрического стерео, а также алгоритм восстановления поверхности объектов из полученных нормалей. В конце мы проанализируем различные ограничения и сложности, связанные с применением этого метода.

2 Радиометрия

2.1 Телесный угол

Познакомимся с понятием *телесного угла*, разберемся как и в чем происходит измерение этой величины. Именно с него будет начинаться наше погружение в фотометрическое стерео.

Поставим наблюдателя в центр сферы O радиуса R . Обозначим Σ наблюдаемую из точки O поверхность. Площадь сферы покрываемую объектом обозначим S . Тогда величиной телесного угла является следующее отношение:

$$\omega = \frac{S}{R^2}$$

Точка O называется вершиной телесного угла. **Телесный угол** - пучок лучей из O до Σ . Говорят, что наблюдатель *стягивает* его телесный угол в вершине.

Единица измерения в системе СИ - стерadian (ср), равный телесному углу, вырезающему из сферы радиуса R поверхность с площадью R^2 .

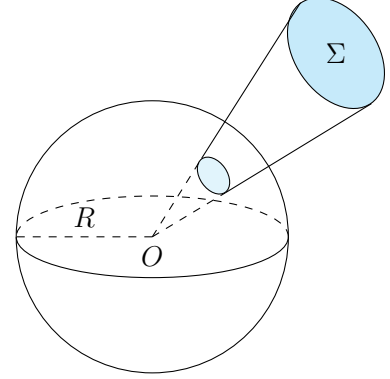


Рис. 1: Телесный угол

Замечание. Площадь поверхности сферы $= 4\pi R^2$, тогда полный телесный угол равен

$$\omega = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi$$

Замечание. Для кругового конуса с углом раствора θ телесный угол при его вершине равен

$$\omega = \frac{2\pi R^2(1 - \cos \theta)}{R^2} = 2\pi(1 - \cos \theta)$$

Чаще всего бывает, что изучаемая поверхность находится под углом θ к наблюдателю. На рис. (2) n это нормаль к изучаемой поверхности dA , S_0 - центр единичной окружности. Расстояние между S_0 и dA обозначим r . Заметим, что угол между нормалью плоскости n и направлением взгляда наблюдателя обозначим θ . dA_0 является проекцией dA на единичную сферу, тогда телесный угол имеет величину:

$$d\omega = \frac{dA \cos \theta}{r^2}$$

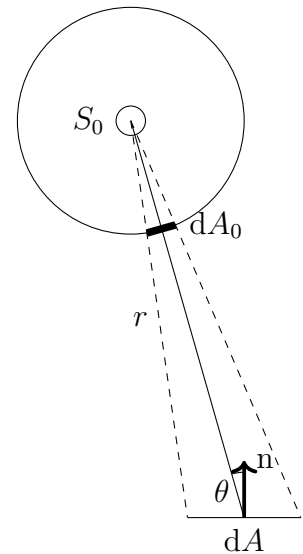


Рис. 2: Стянутый объектом S_0 телесный угол

2.2 Сила света

Простыми словами фотометрия - наука об измерении света с точки зрения его яркости, воспринимаемой человеческим глазом. Сразу можно задать вопрос: как и в чем измеряется свет? Попробуем формализовать ответы на эти вопросы.

Современное определение единицы силы света было зафиксировано в 1979 г. XVI Генеральной конференцией по мерам и весам. Международной системе единиц (СИ) имеет следующее описание:

Сила света в заданном направлении источника, испускающего монохроматическое излучение частотой $540 \cdot 10^{12}$ Гц, энергетическая сила света которого в этом направлении составляет $1/683$ Вт/ср.

Единица силы света имеет общепринятое название – кандела (кд, cd). Сила света имеет обозначение I .

Для силы света оказался верен закон обратных квадратов: значение силы света в данной точке пространства обратно пропорционально квадрату расстояния от источника света. То есть имея два источника света с соответствующими силами I_1 и I_2 , расположенные соответственно на расстояниях r_1 и r_2 верно следующее равенство:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \quad (1)$$

2.3 Поток

Рассмотрим некоторый источник света S_0 в некотором пространстве. Излучаемый свет можно представить как совокупность телесных углов ω с вершиной в источнике S_0 . Пусть источник света имеет силу I .

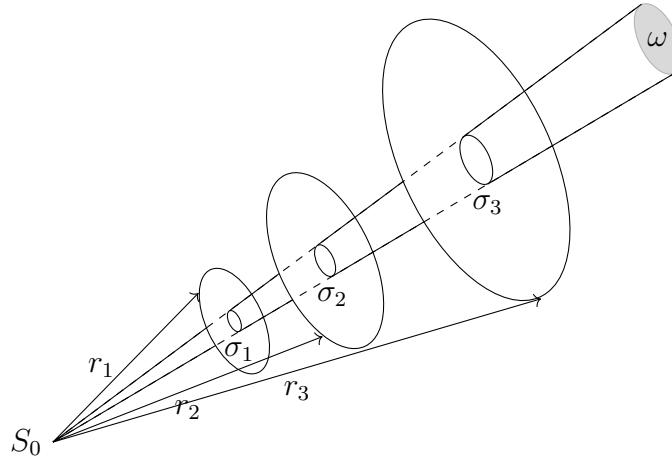


Рис. 3: Световой поток источника S_0 внутри угла ω

Произвольными радиусами r_1 , r_2 , r_3 построим сферы с центром в вершине телесного угла S_0 и обозначим выделенные телесным углом площади на сферах соответственно σ_1 , σ_2 , σ_3 . За единицу времени на эти площади упадет одна и та же энергия: $\frac{I}{r_1^2}\sigma_1$, $\frac{I}{r_2^2}\sigma_2$, $\frac{I}{r_3^2}\sigma_3$. Обратим внимание, что $\frac{\sigma_1}{r_1^2} = \frac{\sigma_2}{r_2^2} = \frac{\sigma_3}{r_3^2} = \omega$. Таким образом, **поток** - физическая величина пропорциональная световой мощности, переносимой пучком лучей, распространяющимися внутри

телесного угла ω .

$$\Phi := I\omega$$

Световой поток, выходящий из телесного угла 1sr , с силой света 1кд называется *люмен* (лм, lm).

Также заметим, что в качестве источника света здесь рассматривается вершина телесного угла, то есть точка в пространстве, но в жизни же источники света не только не могут быть точкой, но и могут достигать весьма больших размеров. Всегда стоит помнить, что если речь идет об источнике света как о точке, то подразумевается, что расстояние между освещаемым объектом во много раз превышает размер источника и, в следствие различные лучи источника попадают в достаточно малый телесный угол.

2.4 Освещенность

Зафиксируем точечный источник света S_0 с силой света I на расстоянии r от поверхности площадью σ .

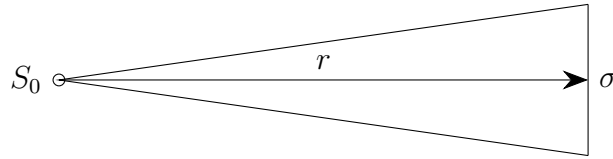


Рис. 4: Лучи S_0 , падающие по нормали к поверхности

Величина

$$E := \frac{I}{r^2} \quad (2)$$

является мерой освещения, получающегося на поверхности при падении лучей под прямым углом.

За единицу освещенности принимается такая освещенность, которую создает источник силой света в 1кд , освещающий по нормали поверхность, отстоящую от него на расстояние 1м . Единица освещенности — люкс (лк, lx).

Проводя аналогии с физическими величинами, можно сравнить освещенность с плотностью потока. Действительно, домножив числитель и знаменатель (2) на бесконечно малый телесный угол $d\omega$, получим следующее

$$E = \frac{Id\omega}{r^2 d\omega} = \frac{d\Phi}{d\sigma}$$

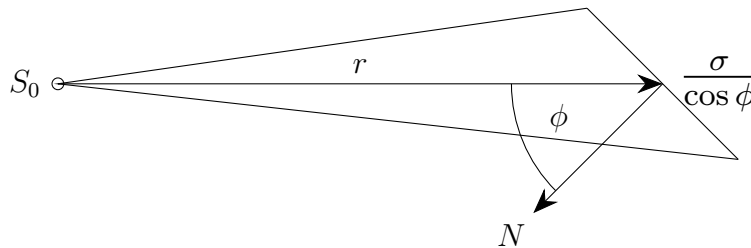


Рис. 5: Лучи S_0 , падающие под углом ϕ

В случае, когда лучи источника падают под углом ϕ к нормали на Рис. (5), сила светового потока распределяется по увеличенной площади, в следствие чего освещенность поверхности оказывается меньше:

$$E = \frac{d\Phi}{d\sigma / \cos \phi} = \frac{I}{r^2} \cos \phi \quad (3)$$

2.5 Энергетическая яркость

На рисунке (6) в качестве источника рассматривается бесконечно малая площадь поверхности $d\sigma_1$, в качестве получателя рассматривается бесконечно малая площадь поверхности $d\sigma_2$, расстояние между ними конечно и равно r . Пусть нормаль n_1 поверхности $d\sigma_1$ образует с пучком света угол ϕ_1 , нормаль n_2 соответственно ϕ_2 .

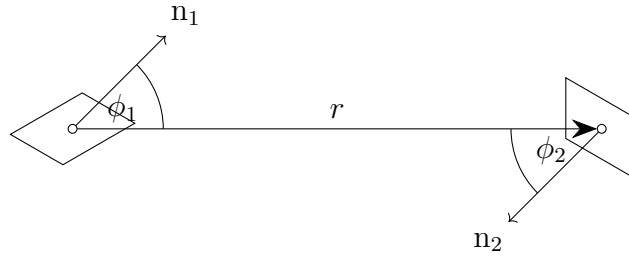


Рис. 6: Световой поток пластинки $d\sigma_1$ на $d\sigma_2$

По определению световой поток должен быть пропорционален площадям проекций каждой из площадок $d\sigma_1$ и $d\sigma_2$ на плоскость, перпендикулярную направлению падающего пучка, и обратно пропорционален квадрату расстояния между ними. Его можно представить в следующей форме

$$d^2\Phi = L \frac{d\sigma_1 \cos \phi_1 d\sigma_2 \cos \phi_2}{r^2} \quad (4)$$

Коэффициент пропорциональности L называется **яркостью** излучающего элемента $d\sigma_1$ в направлении к освещаемому элементу $d\sigma_2$.

Рассмотрим выражение (4) иначе. Возьмем за источник $d\sigma_1$ с силой dI , тогда световой поток, падающий на пластинку $d\sigma_2$, можно представить следующим образом:

$$d^2\Phi = dE_2 d\sigma_2 = \frac{dI}{r^2} \cos \phi_2 d\sigma_2 \quad (5)$$

Из (4) и (5) следует

$$L = \frac{dI}{d\sigma_1 \cos \phi_1} \quad (6)$$

Выражение (6) определяет *яркость поверхности в заданной точке и в заданном направлении*. Единица яркости – кандела на квадратный метр (кд/м²).

3 Поверхности

3.1 Двухлучевая функция отражательной способности (ДФОС)

Очевидно, что яркость точки на поверхности как-то зависит от материала поверхности, на которую падает свет. Иначе говоря, яркость зависит от так называемых отражательных способностей поверхности. На Рис. (7) компьютером отрисованы различные сферы. В данном примере и камера и источник света находятся относительно далеко от сфер. Причина, по которой мы видим их различными – их материал, или различные отражательные способности.

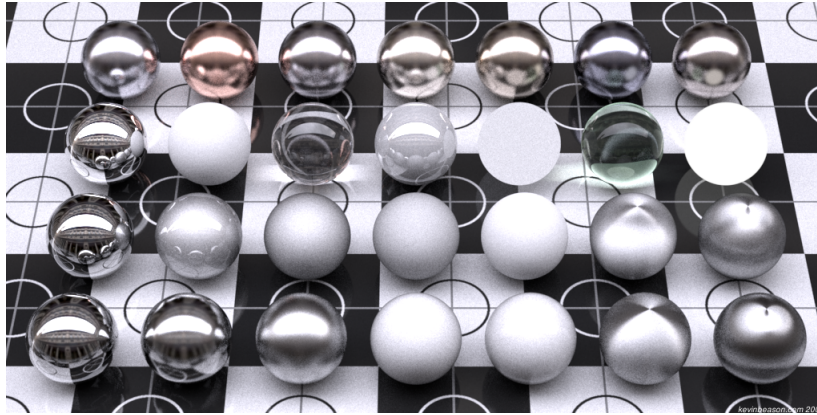


Рис. 7: Пример разных отражательных способностей

Возникает идея формализовать представление отражательных способностей любого материала, с чем нам поможет двухлучевая функция отражательной способности или ДФОС.

Для определения нам важны направления: направление света, падающего на предмет, и направление отраженного и полученного света. Двухлучевая функция, потому что речь будет идти про два луча.

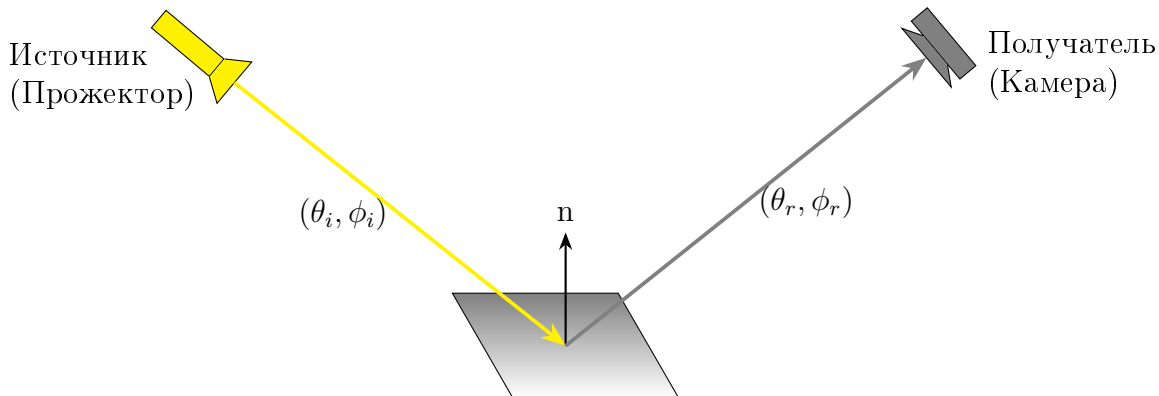


Рис. 8: Отражение поверхности

Таким образом, чтобы представить свойства отражения любого материала, мы хотим иметь возможность описать его свойства как с точки зрения направления освещения, так и с точки зрения направления взгляда или направления отражения.

Выражая направление источника в полярных координатах через углы (θ_i, ϕ_i) и направление отраженного света через (θ_r, ϕ_r) , мы можем следующее

1. Освещенность поверхности зависит от углов (θ_i, ϕ_i) , то есть $E := E(\theta_i, \phi_i)$.

2. Яркость поверхности зависит от углов (θ_r, ϕ_r) , то есть $L := L(\theta_r, \phi_r)$.

И теперь мы можем описать отражательную способность как двулучевую функцию отражательной способности:

$$\rho(\theta_i, \phi_i, \theta_r, \phi_r) = \frac{L(\theta_r, \phi_r)}{E(\theta_i, \phi_i)} \quad (7)$$

Измеряется в sr^{-1} , где стерадиан (sr) - единица измерения телесного угла. Перечислим некоторые свойства ДФОС:

1. Неотрицательность: $\rho(\theta_i, \phi_i, \theta_r, \phi_r) > 0$. Следует из того, что и яркость, и освещенность неотрицательны, значит и их отношение.
2. Удовлетворяет равенству Гельмгольца: $\rho(\theta_i, \phi_i, \theta_r, \phi_r) = \rho(\theta_r, \phi_r, \theta_i, \phi_i)$. Это нам говорит о том, что поменяв местами прожектор и камеру, мы получим то же самое значение ДФОС.

Существуют множество поверхностей, которые отражают одинаковое количество света вне зависимости от вращения этой поверхности вокруг ее нормали. Такие поверхности называют *изотропными*, в обратном случае *анизотропными*. Когда говорят об изотропных поверхностях ДФОС определяют как функцию принимающую три аргумента вместо четырех: $\rho(\theta_i, \theta_r, \phi)$.

3.2 Механизмы, порождающие отражение

Давайте поговорим об основных механизмах, порождающие отражение света.

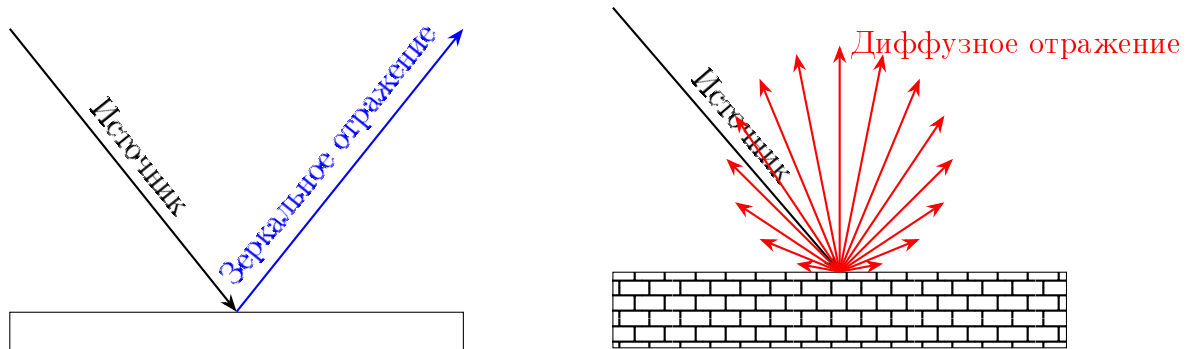


Рис. 9: Диффузное и зеркальное отражение

Рассмотрим рис. (9). Различают три механизма:

- Первый - отражательная способность поверхности. Свет падает на поверхность и отражение происходит на самой плоскости. Такое отражение света называется *зеркальным* отражением. Оно придает поверхностям глянцевый или блестящий вид и свойственно гладким однородным материалам (зеркалам, стеклу, полированным металлам).
- Второй случай возникает, когда часть света проходит сквозь поверхность и проникает внутрь материала. Обычно вещества неоднородны и содержат различные частицы с разными показателями преломления. В результате попадающий внутрь свет преломляется и отражается несколько раз, отскакивает внутри случайным образом. Это происходит на небольшой глубине под поверхностью, поэтому частицы света проникают обратно и рассеиваются во многих направлениях. Это явление называется *диффузным*. Из-за неоднородности среды объекты обладают матовостью.

- При анализе яркости точки изображения надо учитывать, что это результат отражения света из окружающей среды, который имеет составляющие диффузного и поверхностного отражения. Чаще всего встречается *гибридное* отражение — комбинация этих двух механизмов.

3.3 Модели отражения

Рассмотрим широко используемые модели отражения.

3.3.1 Светорассеивающая поверхность, закон Ламберта

Большинство предметов, с которыми нам чаще всего приходится работать в жизни (бумага, песок, камень, мел), рассеивают падающий на них свет таким образом, что их яркости в разных направлениях оказываются примерно одинаковыми.

В 1760 году немецкий ученый Ламберт сформулировал закон, согласно которому *яркости светорассеивающей поверхности во всех направлениях одинаковы*. Хотя и установлено, что не существует предмета, который бы строго удовлетворял закону Ламберта, этот закон часто используют в компьютерном зрении и компьютерной графике, потому что несмотря на ее простоту она позволяет достаточно точно описывать многие поверхности.

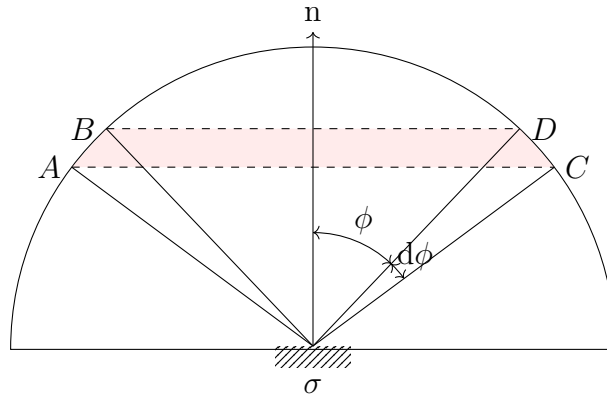


Рис. 10: Расчет светового потока, излучаемого поверхностью с постоянной яркостью

На Рис. (10) рассматривается площадка площади σ , яркость L которой одинакова во всех направлениях. Сила света в направлении к точке D : $I = L\sigma \cos \phi$. Рассмотрим телесный угол $d\omega$, заключенный между двумя конусами, полученными вращениями прямых проведенных от середины площадки до точек C и D вокруг нормали n . Посчитаем его значение:

$$d\omega = 2\pi(\cos \phi - \cos \phi \cos d\phi + \sin \phi \sin d\phi) \approx 2\pi \sin \phi d\phi$$

Так как сила света внутри этого телесного угла постоянна, то световой поток, получаемый из площадки:

$$d\Phi = Id\omega = 2\pi L\sigma \cos \phi \sin \phi d\phi$$

Тогда чтобы получить световой поток, излучаемой площадкой, для всей полусферы:

$$\Phi = 2\pi L\sigma \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \phi \sin \phi d\phi = \pi L\sigma \sin^2 \phi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi L\sigma \quad (8)$$

Если взять в качестве площадки объект, который отражает весь падающий на него поток и рассеивает его так, что яркость во все стороны оказывается одинаковой (удовлетворяет свойствам *идеального рассеивателя*), то выражение (8) можно переписать следующим образом:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{L\sigma}{\Phi} = \frac{L}{E} = \rho(\theta_i, \theta_r, \phi)$$

Получается, что для светорассеивающей поверхности, удовлетворяющей закону Ламберта, ДФОС является константой.

Поверхность любого тела не обладает свойствами идеального рассеивателя, поэтому для того чтобы численно характеризовать изменение яркости в разных направлениях используют *коэффициент диффузии* или *альбедо*. Принято обозначать греческой буквой β , $0 \leq \beta \leq 1$. Тогда выражение ДФОС по фиксированному направлению для любого тела имеет вид:

$$\rho(\theta_i, \phi_i, \theta_r, \phi_r) = \frac{\beta}{\pi} \quad (9)$$

3.3.2 Зеркальная поверхность

Рассмотрим противоположную модель - модель для идеально зеркальной поверхности. Все отражение происходит на поверхности, диффузное отражение отсутствует. В этом случае вся энергия падающего света отражается в одном направлении.

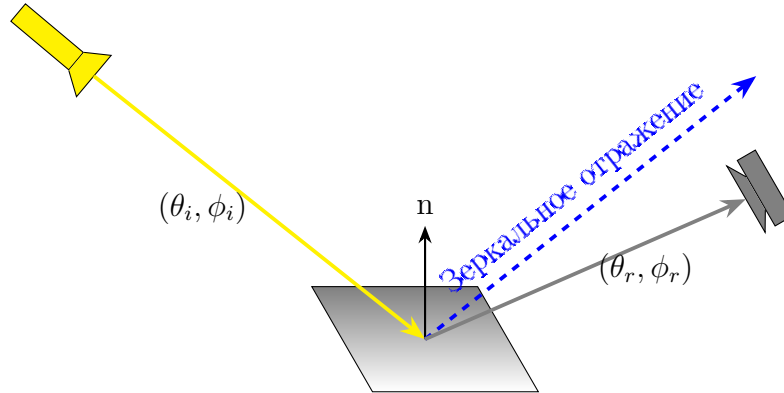


Рис. 11: Отражение зеркальной поверхности

ДФОС в случае идеального зеркала выглядит следующим образом:

$$\rho(\theta_i, \phi_i, \theta_r, \phi_r) = \frac{\delta(\theta_i - \theta_r)\delta(\phi_i + \pi - \phi_r)}{\cos \theta_i \sin \theta_i} \quad (10)$$

где $\delta(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$, то есть это обозначает, что наблюдатель видит свет только когда вектор наблюдения совпадает с вектором отражения.

В знаменателе произведение косинуса и синуса, коэффициент пропорциональности, обеспечивающий выполнение закона сохранения энергии: весь свет, отражаемый сферой независимо от направления, равен свету, падающему на поверхность.

4 Фотометрическое стерео

4.1 Постановка задачи

Задача, которую решает фотометрическое стерео, довольно проста и интересна: если у нас имеется некоторый набор фотографий зафиксированного объекта, сделанных под различными источниками света, можем ли восстановить трехмерную модель этого объекта?

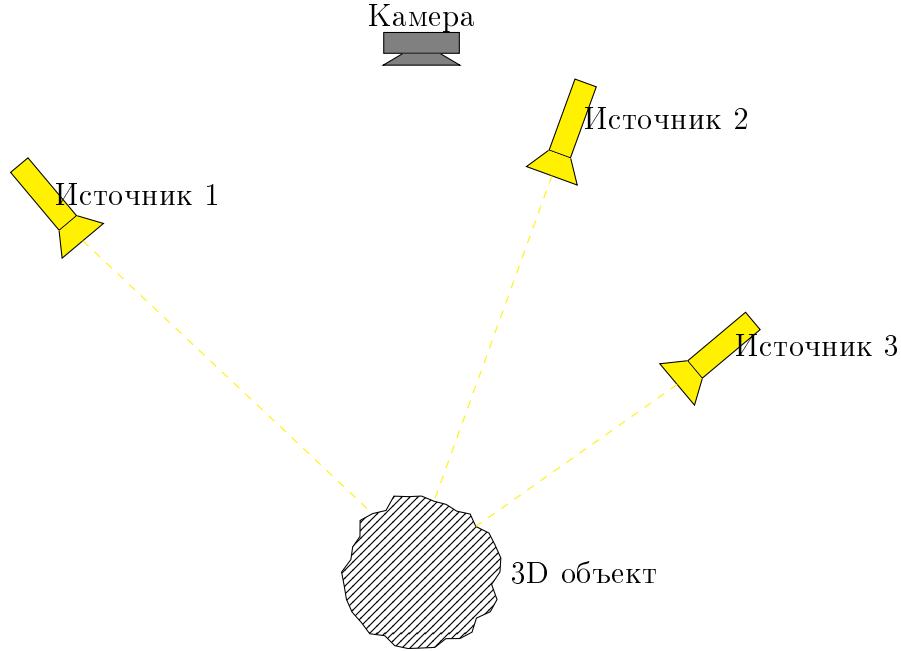


Рис. 12: Постановка задачи

Для простоты сделаем два предположения: рассматриваются поверхности, удовлетворяющие закону Ламберта, и источники света находятся на довольно большом расстоянии.

4.2 Восстановление нормалей

Из предыдущих разделов мы определили, что яркость изображения для поверхностей, удовлетворяющих закону Ламберта, можно выразить как

$$I = \frac{\beta}{\pi} \cos \theta = \frac{\beta}{\pi} \mathbf{s}^T \mathbf{n}$$

где β - коэффициент диффузии, закладывающий в себя альбедо. Предположим, что имеется три различных точечных источника света $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$. Сделав три фотографии используя эти источники, мы можем записать следующее выражение

$$I_i = \frac{\beta}{\pi} \mathbf{s}_i^T \mathbf{n}, \quad i = 1, 2, 3$$

Так как положение камеры и объекта остается неизменным, каждый пиксель на трех фотографиях соответствует единственной точке в трехмерном пространстве. Это значит, что для конкретного пикселя, I_i - функция, зависящая от направления источника света, так как β и \mathbf{n} не меняются. Таким образом, мы можем переписать предыдущее выражение в матричной

форме следующим образом:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \frac{\beta}{\pi} \begin{bmatrix} s_1^T \\ s_2^T \\ s_3^T \end{bmatrix} \mathbf{n} = \frac{\beta}{\pi} \mathbf{S} \mathbf{n}$$

где \mathbf{S} - матрица 3×3 . Так как направления источников света нам известны, то

$$\frac{\beta}{\pi} \mathbf{n} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{I}$$

при условии, что матрица \mathbf{S} обратима.

Замечание. Обратим внимание, что использовать для алгоритма фотографии какого-либо объекта с таким источником освещения как солнце в разные временные промежутки – не самая лучшая идея, так как любые три вектора направления такого источника света будут почти линейно зависимы, что сразу влечет необратимость матрицы \mathbf{S} .

Решив эту систему уравнений мы одновременно сможем посчитать как и нормали поверхности $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{S}^{-1} \mathbf{I}}{\|\mathbf{S}^{-1} \mathbf{I}\|}$, так и коэффициент диффузии $\beta = \pi \|\mathbf{S}^{-1} \mathbf{I}\|$.

Мы можем получить более точные результаты, используя $k > 3$ источника света.

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_k \end{bmatrix} = \frac{\beta}{\pi} \begin{bmatrix} s_1^T \\ s_2^T \\ \vdots \\ s_k^T \end{bmatrix} \mathbf{n} = \frac{\beta}{\pi} \mathbf{S} \mathbf{n}$$

В таком случае \mathbf{S} является матрицей $k \times 3$, то есть не является квадратной, а значит ее нельзя обратить. Решить эту проблему возможно воспользовавшись методом наименьших квадратов:

$$\mathbf{S}^T \mathbf{I} = \frac{\beta}{\pi} \mathbf{S}^T \mathbf{S} \mathbf{n} \Rightarrow \frac{\beta}{\pi} \mathbf{n} = (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^T \mathbf{I}$$

4.3 Восстановление поверхности из нормалей

Мы получили нормали поверхностей, теперь нам требуется восстановить саму поверхность. Как восстановить поверхность из нормалей? Вспомним, что такое нормаль к поверхности. Представим нашу поверхность как функцию зависящую от двух параметров: $z = f(x, y)$. Обозначим $p = -\frac{\partial z}{\partial x}$, $q = -\frac{\partial z}{\partial y}$. Тогда нормаль в точке (x_0, y_0) будет иметь вид

$$\mathbf{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} [p, q, 1] \right)_{(x_0, y_0)}$$

Для получения трехмерного объекта требуется решить обратную задачу: проинтегрировать наш набор нормалей.

Зафиксируем точку (x_0, y_0) как начало отсчета, возьмем $z(x_0, y_0) = 0$. Тогда мы можем посчитать интеграл по любому направлению следующим образом:

$$z(x, y) = z(x_0, y_0) + \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -(p dx + q dy)$$

Самая простая идея получения итоговой поверхности - это интегрирование сначала в направлении одной оси координат, а затем в направлении второй.

```

1:  $z(0, 0) \leftarrow 0$ ;
2: for  $y = 0, H - 1$  do
3:    $z(0, y) \leftarrow z(0, y - 1) - q(0, y)$ ;
4: end for
5: for  $y = 0, H - 1$  do
6:   for  $x = 1, W - 1$  do
7:      $z(x, y) \leftarrow z(x - 1, y) - p(x, y)$ ;
8:   end for
9: end for

```

Такой наивный метод чаще всего приведет к шуму в полученных данных, так как никто не обещает, что значения в конечных точках направлений будут совпадать. В таких случаях можно брать среднее по каждому направлению и надеяться, что количество шумов уменьшится.

Возникает идея минимизировать погрешность между посчитанным нами градиентом (p, q) и градиентом приближенной поверхности $z(x, y)$. В качестве меры ошибки рассмотрим

$$D = \int_{\Omega} \int \left(\frac{\partial z}{\partial x} + p \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} + q \right)^2 dx dy \quad (11)$$

где Ω - фотография, $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ - градиенты приближенной поверхности.

Для нахождения поверхности $z(x, y)$, которая минимизирует D , будем использовать алгоритм Франкорт-Челлаппа.

Положим $Z(u, v)$, $P(u, v)$ и $Q(u, v)$ дискретными преобразованиями Фурье $z(x, y)$, $p(x, y)$ и $q(x, y)$ соответственно. Тогда

$$z(x, y) = \int \int_{-\infty}^{+\infty} Z(u, v) e^{i2\pi(ux+vy)} du dv$$

$$p(x, y) = \int \int_{-\infty}^{+\infty} P(u, v) e^{i2\pi(ux+vy)} du dv$$

$$q(x, y) = \int \int_{-\infty}^{+\infty} Q(u, v) e^{i2\pi(ux+vy)} du dv$$

Подставим $z(x, y)$, $p(x, y)$ и $q(x, y)$ в (11). Найдем $Z(u, v)$ с помощью $\frac{\partial D}{\partial Z} = 0$. В итоге получим

$$\hat{Z}(u, v) = \frac{i u P(u, v) + i v Q(u, v)}{u^2 + v^2}$$

Для восстановления искомой поверхности воспользуемся обратным преобразованием Фурье и получим $\hat{z}(x, y)$.

4.4 Проблемы, возможные решения

- Не находясь в лабораторных условиях довольно затруднительно посчитать направление источников света. Для подсчета используют дополнительный объект для калибровки, например, шар из хрома. Так как он обладает хорошими отражательными способностями, то зная его размер, можно довольно просто определить направление источника света.
- Чаще всего мы не знаем об отражательных свойствах рассматриваемого объекта, а значит и не можем выписать для него значения ДФОС. Что делать в таком случае? В таких случаях используют дополнительный объект заранее известной формы и сделанный из того же материала или покрытый тем же материалом, что и рассматриваемый объект. Этот метод имеет название "Calibration based Photometric Stereo".
- Рассмотрим в качестве объекта глиняный горшок, и расположим камеру ровно над ним. В подходе Photometric stereo предполагается, что точка на поверхности получает свет только от одного источника, тогда как при попадании свет в глиняном горшке будет распространяться по всей его внутренней поверхности. Это приведет к тому, что значение альбедо для каждой точки будет больше, чем является на самом деле. Предлагается итеративно восстанавливать корректную форму, принимая во внимание взаимоотражения внутри горшка.

5 Литература

1. Гуревич М. М. Фотометрия. Теория, методы и приборы. — 2-е изд. — Л.: Энергоатомиздат. Ленинградское отделение, 1983. — С. 23—24. — 272 с.
2. Ying Wu. "Radiometry, BRDF and Photometric Stereo". Northwestern University. Retrieved 2015-03-25.
3. A. V. Arecchi, T. Messadi, and R. J. Koshel, Field Guide to Illumination, SPIE Press, Bellingham, WA (2007)
4. Woodham, R.J. 1980. Photometric method for determining surface orientation from multiple images. Optical Engineerings 19, I, 139-144.
5. R. T. Frankot and R. Chellappa, "A method for enforcing integrability in shape from shading algorithms," IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 10, no. 4, pp. 439–451, July 1988