

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
Московский государственный университет  
имени М. В. Ломоносова  
Механико-математический факультет  
Кафедра вычислительной математики

## Курсовая работа

**Тема:** *Введение в Photometric Stereo.*  
**Theme:** *Introduction to Photometric Stereo.*

**Выполнил:**  
студент 4 курса 431 группы  
*Шерстобитов Андрей Сергеевич*

**Научный руководитель:**  
*Валединский Владимир Дмитриевич*

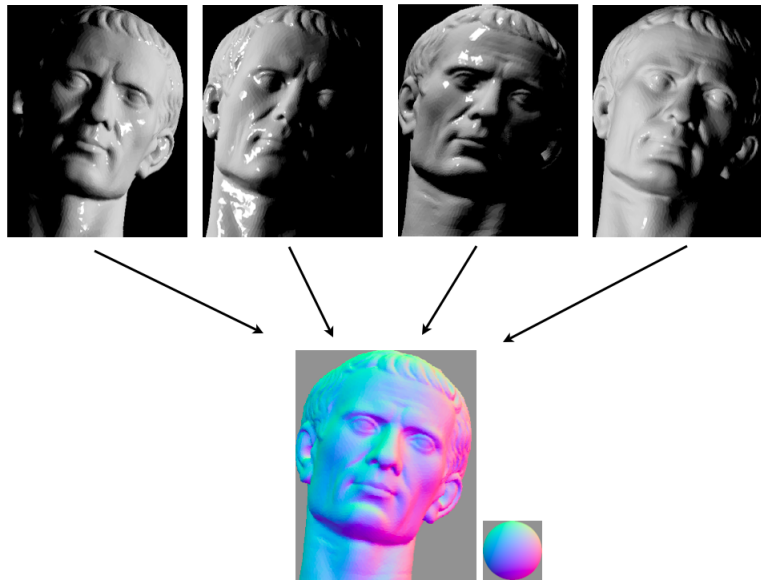
Москва  
2022

# Содержание

<b>1</b>	<b>Вступление</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Радиометрия</b>	<b>3</b>
2.1	Телесный угол . . . . .	3
2.2	Сила света (Intensity) . . . . .	4
2.3	Поток (Flux) . . . . .	4
2.4	Освещенность (Irradiance) . . . . .	5
2.5	Энергетическая яркость (Radiance) . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Поверхности</b>	<b>7</b>
3.1	Двулучевая функция отражательной способности (BRDF) . . . . .	7
3.2	Механизмы, порождающие отражение . . . . .	8
3.3	Модели отражения . . . . .	9
3.3.1	Светорассеивающая поверхность, закон Ламберта . . . . .	9
3.3.2	Зеркальная поверхность . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Photometric stereo</b>	<b>11</b>
4.1	Постановка задачи . . . . .	11
4.2	Восстановление нормалей . . . . .	11
4.3	Восстановление поверхности из нормалей . . . . .	11
4.4	Проблемы, возможные решения . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Литература</b>	<b>11</b>

# 1 Вступление

Photometric stereo — метод в компьютерном зрении для определения нормалей поверхности объектов путем наблюдения за этим объектом при различных условиях освещения. Он основан на том факте, что количество света, отражаемого поверхностью, зависит от ориентации поверхности относительно источника света и наблюдателя.



При использовании этого метода путем измерения количества света, отраженного в камеру, пространство возможных ориентаций поверхности может быть ограничено. Если объект наблюдается под достаточным количеством источников света с разных углов, то ориентация поверхности может быть ограничена до одной ориентации или даже получиться больше, чем необходимо.

Метод был впервые предложен в 1980 году Уодхэмом. Особый случай, когда данные представлены одним изображением, известен как "shape from shading" и был analyzed Б. К. П. Хорном в 1989 году. Расширенные методы фотометрического стерео были разработаны для учета проецируемых теней и других неоднородных условий освещения.

Однако, этот метод требует тщательного планирования и контроля эксперимента, чтобы получить необходимое количество данных, и считается, что он неэффективен для объектов с неоднородной поверхностью и большим числом полостей. Тем не менее, photometric stereo все еще остается важной технологией в области компьютерного зрения, особенно для задач реконструкции трехмерных объектов.

## 2 Радиометрия

### 2.1 Телесный угол

Познакомимся с понятием *телесного угла*, разберемся как и в чем происходит измерение этой величины. Именно с него будет начинаться наше погружение в Photometric stereo.

Поставим наблюдателя в центр сферы  $O$  радиуса  $R$ . Обозначим  $\Sigma$  наблюдаемую из точки  $O$  поверхность. Площадь сферы покрываемую объектом обозначим  $S$ . Тогда величиной телесного угла является следующее отношение:

$$\omega = \frac{S}{R^2}$$

Точка  $O$  называется вершиной (арех) телесного угла. **Телесный угол** - пучок лучей из  $O$  до  $\Sigma$ . Говорят, что наблюдатель *стягивает* его телесный угол в вершине.

Единица измерения в системе СИ -стерадиан (ср, sr), равный телесному углу, вырезающему из сферы радиуса  $R$  поверхность с площадью  $R^2$ .

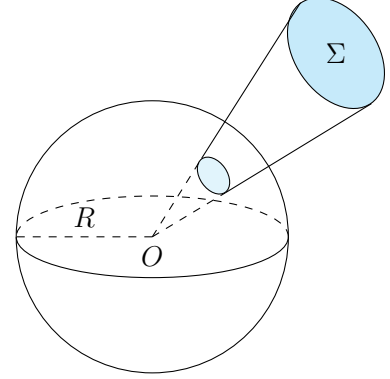


Рис. 1: Телесный угол

**Замечание.** Площадь поверхности сферы  $= 4\pi R^2$ , тогда полный телесный угол равен

$$\omega = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi$$

**Замечание.** Для кругового конуса с углом раствора  $\theta$  телесный угол при его вершине равен

$$\omega = \frac{2\pi R^2(1 - \cos \theta)}{R^2} = 2\pi(1 - \cos \theta)$$

Чаще всего бывает, что изучаемая поверхность находится под углом  $\theta$  к наблюдателю. На рис. (2)  $n$  это нормаль к изучаемой поверхности  $dA$ ,  $S_0$  - центр единичной окружности. Расстояние между  $S_0$  и  $dA$  обозначим  $r$ . Заметим, что угол между нормалью плоскости  $n$  и направлением взгляда наблюдателя обозначим  $\theta$ .  $dA_0$  является проекцией  $dA$  на единичную сферу, тогда телесный угол имеет величину:

$$d\omega = \frac{dA \cos \theta}{r^2}$$

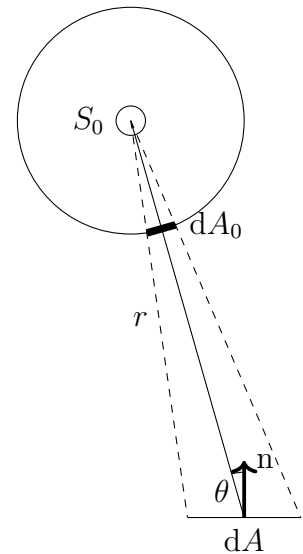


Рис. 2: Стянутый объектом  $S_0$  телесный угол

## 2.2 Сила света (Intensity)

Простыми словами фотометрия - наука об измерении света с точки зрения его яркости, воспринимаемой человеческим глазом. Сразу можно задать вопрос: как и в чем измеряется свет? Попробуем формализовать ответы на эти вопросы.

Современное определение единицы силы света было зафиксировано в 1979 г. XVI Генеральной конференцией по мерам и весам. Международной системе единиц (СИ) имеет следующее описание:

Сила света в заданном направлении источника, испускающего монохроматическое излучение частотой  $540 \cdot 10^{12}$  Гц, энергетическая сила света которого в этом направлении составляет  $1/683$  Вт/ср.

Единица силы света имеет общепринятое название – кандела (кд, cd). Сила света имеет обозначение  $I$ .

Для силы света оказался верен закон обратных квадратов: значение силы света в данной точке пространства обратно пропорционально квадрату расстояния от источника света. То есть имея два источника света с соответствующими силами  $I_1$  и  $I_2$ , расположенные соответственно на расстояниях  $r_1$  и  $r_2$  верно следующее равенство:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \quad (1)$$

## 2.3 Поток (Flux)

Рассмотрим некоторый источник света  $S_0$  в некотором пространстве. Излучаемый свет можно представить как совокупность телесных углов  $\omega$  с вершиной в источнике  $S_0$ . Пусть источник света имеет силу  $I$ .

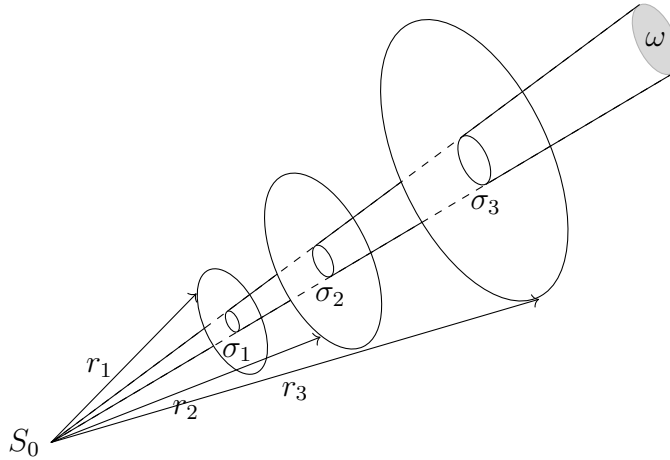


Рис. 3: Световой поток источника  $S_0$  внутри угла  $\omega$

Произвольными радиусами  $r_1, r_2, r_3$  построим сферы с центром в вершине телесного угла  $S_0$  и обозначим выделенные телесным углом площади на сферах соответственно  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . За единицу времени на эти площади упадет одна и та же энергия:  $\frac{I}{r_1^2} \sigma_1, \frac{I}{r_2^2} \sigma_2, \frac{I}{r_3^2} \sigma_3$ . Обратим внимание, что  $\frac{\sigma_1}{r_1^2} = \frac{\sigma_2}{r_2^2} = \frac{\sigma_3}{r_3^2} = \omega$ . Таким образом, **поток** - физическая величина пропорциональная световой мощности, переносимой пучком лучей, распространяющимися внутри

телесного угла  $\omega$ .

$$\Phi := I\omega$$

Световой поток, выходящий из телесного угла  $1\text{sr}$ , с силой света  $1\text{кд}$  называется *люмен* (лм, lm).

Обратим внимание, что в качестве источника света здесь рассматривается вершина телесного угла, то есть точка в пространстве, но в жизни же источники света не только не могут быть точкой, но и могут достигать весьма больших размеров. Всегда стоит помнить, что если речь идет об источнике света как о точке, то подразумевается, что расстояние между освещаемым объектом во много раз превышает размер источника и, в следствие различные лучи источника попадают в достаточно малый телесный угол.

## 2.4 Освещенность (Irradiance)

Зафиксируем точечный источник света  $S_0$  с силой света  $I$  на расстоянии  $r$  от поверхности площадью  $\sigma$ .

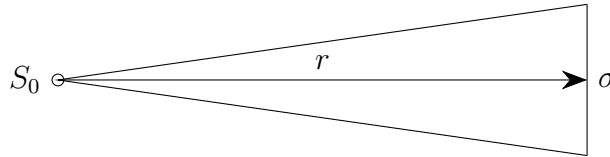


Рис. 4: Лучи  $S_0$ , падающие по нормали к поверхности

Величина

$$E := \frac{I}{r^2} \quad (2)$$

является мерой освещения, получающегося на поверхности при падении лучей под прямым углом.

За единицу освещенности принимается такая освещенность, которую создает источник силой света в 1 кд, освещающий по нормали поверхность, отстоящую от него на расстояние 1 м. Единица освещенности — люкс (лк, lx).

Проводя аналогии с физическими величинами, можно сравнить освещенность с плотностью потока. Действительно, домножив числитель и знаменатель (2) на бесконечно малый телесный угол  $d\omega$ , получим следующее

$$E = \frac{Id\omega}{r^2d\omega} = \frac{d\Phi}{d\sigma}$$

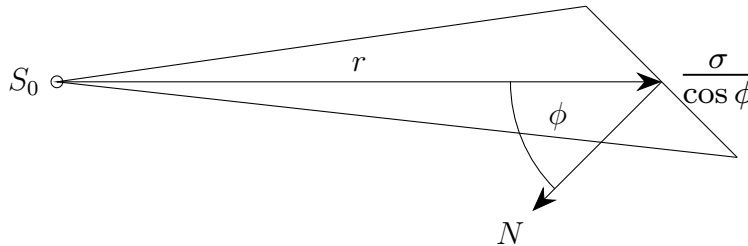


Рис. 5: Лучи  $S_0$ , падающие под углом  $\phi$

В случае, когда лучи источника падают под углом  $\phi$  к нормали на Рис. (5), сила светового потока распределяется по увеличенной площади, в следствие чего освещенность поверхности оказывается меньше:

$$E = \frac{d\Phi}{d\sigma / \cos \phi} = \frac{I}{r^2} \cos \phi \quad (3)$$

## 2.5 Энергетическая яркость (Radiance)

На рисунке (6) в качестве источника рассматривается бесконечно малая площадь поверхности  $d\sigma_1$ , в качестве получателя рассматривается бесконечно малая площадь поверхности  $d\sigma_2$ , расстояние между ними конечно и равно  $r$ . Пусть нормаль  $n_1$  поверхности  $d\sigma_1$  образует с пучком света угол  $\phi_1$ , нормаль  $n_2$  соответственно  $\phi_2$ .

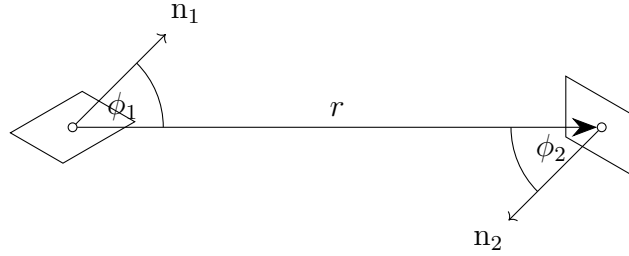


Рис. 6: Световой поток пластинки  $d\sigma_1$  на  $d\sigma_2$

По определению световой поток должен быть пропорционален площадям проекций каждой из площадок  $d\sigma_1$  и  $d\sigma_2$  на плоскость, перпендикулярную направлению падающего пучка, и обратно пропорционален квадрату расстояния между ними. Его можно представить в следующей форме

$$d^2\Phi = L \frac{d\sigma_1 \cos \phi_1 d\sigma_2 \cos \phi_2}{r^2} \quad (4)$$

Коэффициент пропорциональности  $L$  называется **яркостью** излучающего элемента  $d\sigma_1$  в направлении к освещаемому элементу  $d\sigma_2$ .

Рассмотрим выражение (4) иначе. Возьмем за источник  $d\sigma_1$  с силой  $dI$ , тогда световой поток, падающий на пластинку  $d\sigma_2$ , можно представить следующим образом:

$$d^2\Phi = dE_2 d\sigma_2 = \frac{dI}{r^2} \cos \phi_2 d\sigma_2 \quad (5)$$

Из (4) и (5) следует

$$L = \frac{dI}{d\sigma_1 \cos \phi_1} \quad (6)$$

Выражение (6) определяет *яркость поверхности в заданной точке и в заданном направлении*. Единица яркости – кандела на квадратный метр (кд/м<sup>2</sup>).

## 3 Поверхности

### 3.1 Двухлучевая функция отражательной способности (BRDF)

Очевидно, что яркость точки на поверхности как-то зависит от материала поверхности, на которую падает свет. Иначе говоря, яркость зависит от так называемых отражательных способностей поверхности. На Рис. (7) компьютером отрисованы различные сферы. В данном примере и камера и источник света находятся относительно далеко от сфер. Причина, по которой мы видим их различными – их материал, или различные отражательные способности.

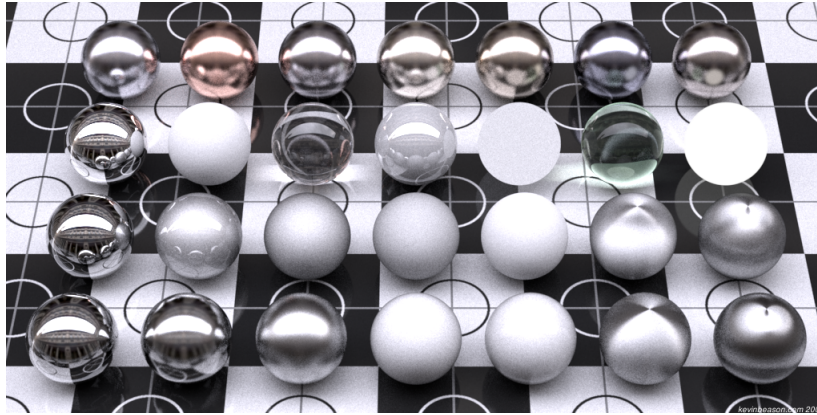


Рис. 7: Пример разных отражательных способностей

Возникает идея формализовать представление отражательных способностей любого материала, с чем нам поможет двухлучевая функция отражательной способности или ДФОС.

Для определения нам важны направления: направление света, падающего на предмет, и направление отраженного и полученного света. Двухлучевая функция, потому что речь будет идти про два луча.

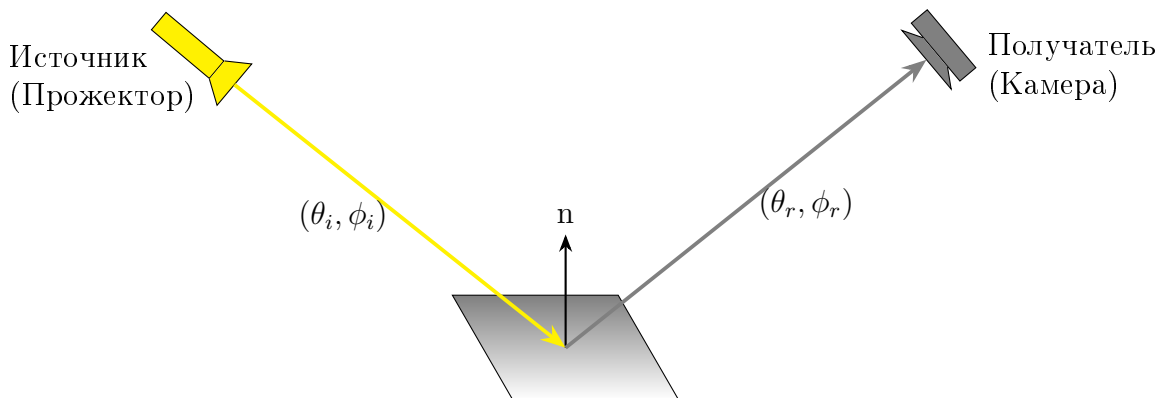


Рис. 8: Отражение поверхности

Таким образом, чтобы представить свойства отражения любого материала, мы хотим иметь возможность описать его свойства как с точки зрения направления освещения, так и с точки зрения направления взгляда или направления отражения.

Выражая направление источника в полярных координатах через углы  $(\theta_i, \phi_i)$  и направление отраженного света через  $(\theta_r, \phi_r)$ , мы можем следующее

1. Освещенность поверхности зависит от углов  $(\theta_i, \phi_i)$ , то есть  $E := E(\theta_i, \phi_i)$ .



2. Яркость поверхности зависит от углов  $(\theta_r, \phi_r)$ , то есть  $L := L(\theta_r, \phi_r)$ .

И теперь мы можем описать отражательную способность как двулучевую функцию отражательной способности:

$$\rho(\theta_i, \phi_i, \theta_r, \phi_r) = \frac{L(\theta_r, \phi_r)}{E(\theta_i, \phi_i)} \quad (7)$$

Измеряется в  $\text{sr}^{-1}$ , где стерадиан (sr) - единица измерения телесного угла. Перечислим некоторые свойства ДФОС:

1. Неотрицательность:  $\rho(\theta_i, \phi_i, \theta_r, \phi_r) > 0$ . Следует из того, что и яркость, и освещенность неотрицательны, значит и их отношение.
2. Удовлетворяет равенству Гельмгольца:  $\rho(\theta_i, \phi_i, \theta_r, \phi_r) = \rho(\theta_r, \phi_r, \theta_i, \phi_i)$ . Это нам говорит о том, что поменяв местами прожектор и камеру, мы получим то же самое значение ДФОС.

Существуют множество поверхностей, которые отражают одинаковое количество света вне зависимости от вращения этой поверхности вокруг ее нормали. Такие поверхности называют *изотропными*, в обратном случае *анизотропными*. Когда говорят об изотропных поверхностях ДФОС определяют как функцию принимающую три аргумента вместо четырех:  $\rho(\theta_i, \theta_r, \phi)$ .

### 3.2 Механизмы, порождающие отражение

Давайте поговорим об основных механизмах, порождающие отражение света.

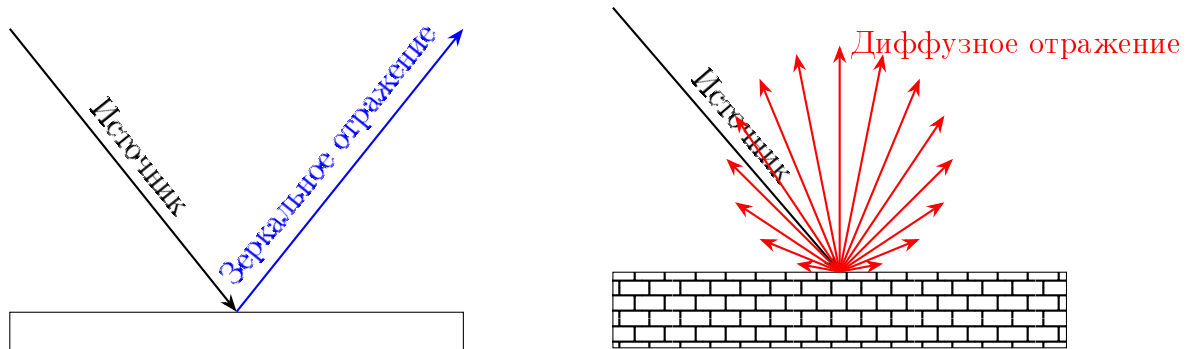


Рис. 9: Диффузное и зеркальное отражение

Рассмотрим рис. (9). Различают три механизма:

- Первый - отражательная способность поверхности. Свет падает на поверхность и отражение происходит на самой плоскости. Такое отражение света называется *зеркальным* отражением. Оно придает поверхностям глянцевый или блестящий вид и свойственно гладким однородным материалам (зеркалам, стеклу, полированным металлам).
- Второй случай возникает, когда часть света проходит сквозь поверхность и проникает внутрь материала. Обычно вещества неоднородны и содержат различные частицы с разными показателями преломления. В результате попадающий внутрь свет преломляется и отражается несколько раз, отскакивает внутри случайным образом. Это происходит на небольшой глубине под поверхностью, поэтому частицы света проникают обратно и рассеиваются во многих направлениях. Это явление называется *диффузным*. Из-за неоднородности среды объекты обладают матовостью.

- При анализе яркости точки изображения надо учитывать, что это результат отражения света из окружающей среды, который имеет составляющие диффузного и поверхностного отражения. Чаще всего встречается *гибридное* отражение — комбинация этих двух механизмов.

### 3.3 Модели отражения

Рассмотрим широко используемые модели отражения.

#### 3.3.1 Светорассеивающая поверхность, закон Ламберта

Большинство предметов, с которыми нам чаще всего приходится работать в жизни (бумага, песок, камень, мел), рассеивают падающий на них свет таким образом, что их яркости в разных направлениях оказываются примерно одинаковыми.

В 1760 году немецкий ученый Ламберт сформулировал закон, согласно которому *яркости светорассеивающей поверхности во всех направлениях одинаковы*. Хотя и установлено, что не существует предмета, который бы строго удовлетворял закону Ламберта, этот закон часто используют в компьютерном зрении и компьютерной графике, потому что несмотря на ее простоту она позволяет достаточно точно описывать многие поверхности.

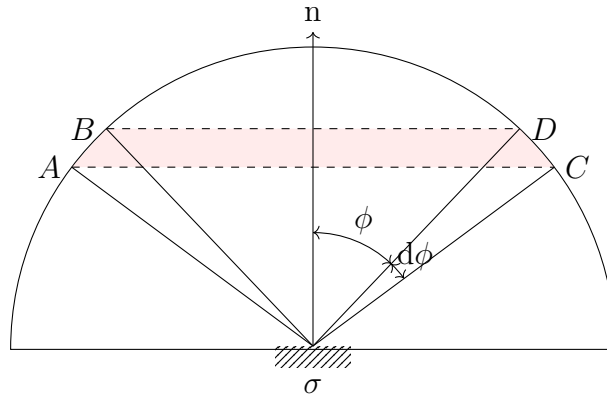


Рис. 10: Расчет светового потока, излучаемого поверхностью с постоянной яркостью

На Рис. (10) рассматривается площадка площади  $\sigma$ , яркость  $L$  которой одинакова во всех направлениях. Сила света в направлении к точке  $D$ :  $I = L\sigma \cos \phi$ . Рассмотрим телесный угол  $d\omega$ , заключенный между двумя конусами, полученными вращениями прямых проведенных от середины площадки до точек  $C$  и  $D$  вокруг нормали  $n$ . Посчитаем его значение:

$$d\omega = 2\pi(\cos \phi - \cos \phi \cos d\phi + \sin \phi \sin d\phi) \approx 2\pi \sin \phi d\phi$$

Так как сила света внутри этого телесного угла постоянна, то световой поток, получаемый из площадки:

$$d\Phi = Id\omega = 2\pi L\sigma \cos \phi \sin \phi d\phi$$

Тогда чтобы получить световой поток, излучаемой площадкой, для всей полусферы:

$$\Phi = 2\pi L\sigma \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \phi \sin \phi d\phi = \pi L\sigma \sin^2 \phi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi L\sigma \quad (8)$$

Если взять в качестве площадки объект, который отражает весь падающий на него поток и рассеивает его так, что яркость во все стороны оказывается одинаковой (удовлетворяет свойствам *идеального рассеивателя*), то выражение (8) можно переписать следующим образом:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{L\sigma}{\Phi} = \frac{L}{E} = \rho(\theta_i, \theta_r, \phi)$$

Получается, что для светорассеивающей поверхности, удовлетворяющей закону Ламберта, ДФОС является константой.

Поверхность любого тела не обладает свойствами идеального рассеивателя, поэтому для того чтобы численно характеризовать изменение яркости в разных направлениях используют *коэффициент яркости* или *альбедо*. Принято обозначать греческой буквой  $\beta$ ,  $0 \leq \beta \leq 1$ . Тогда выражение ДФОС по фиксированному направлению для любого тела имеет вид:

$$\rho(\theta_i, \phi_i, \theta_r, \phi_r) = \frac{\beta}{\pi} \quad (9)$$

### 3.3.2 Зеркальная поверхность

Рассмотрим противоположную модель - модель для идеально зеркальной поверхности. Все отражение происходит на поверхности, диффузное отражение отсутствует. В этом случае вся энергия падающего света отражается в одном направлении.

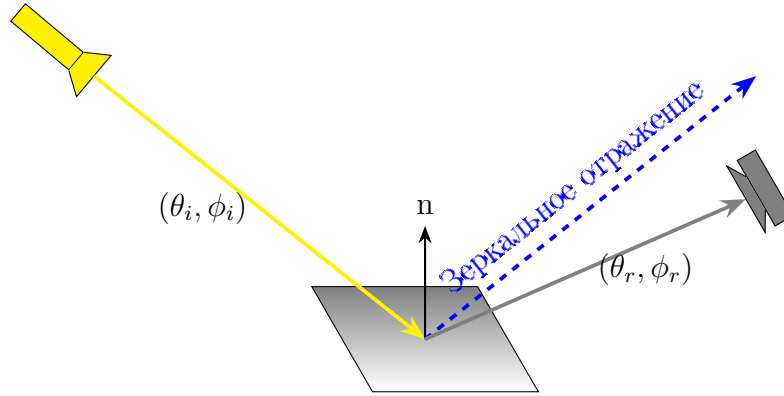


Рис. 11: Отражение зеркальной поверхности

ДФОС в случае идеального зеркала выглядит следующим образом:

$$\rho(\theta_i, \phi_i, \theta_r, \phi_r) = \frac{\delta(\theta_i - \theta_r)\delta(\phi_i + \pi - \phi_r)}{\cos \theta_i \sin \theta_i} \quad (10)$$

где  $\delta(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$ , то есть это обозначает, что наблюдатель видит свет только когда вектор наблюдения совпадает с вектором отражения.

В знаменателе произведение косинуса и синуса, коэффициент пропорциональности, обеспечивающий выполнение закона сохранения энергии: весь свет, отражаемый сферой независимо от направления, равен свету, падающему на поверхность.

## 4 Photometric stereo

### 4.1 Постановка задачи

### 4.2 Восстановление нормалей

### 4.3 Восстановление поверхности из нормалей

### 4.4 Проблемы, возможные решения

## 5 Литература

1. Гуревич М. М. Фотометрия. Теория, методы и приборы. — 2-е изд. — Л.: Энергоатомиздат. Ленинградское отделение, 1983. — С. 23—24. — 272 с.
2. Ying Wu. "Radiometry, BRDF and Photometric Stereo". Northwestern University. Retrieved 2015-03-25.
3. A. V. Arecchi, T. Messadi, and R. J. Koshel, Field Guide to Illumination, SPIE Press, Bellingham, WA (2007)
4. Woodham, R.J. 1980. Photometric method for determining surface orientation from multiple images. Optical Engineerings 19, I, 139-144.