

Rešavanje problema minimalnog Štajnerovog stabla

Seminarski rad
Matematički fakultet,
Univerzitet u Beogradu

Stefan Stanišić, Marko Šerbić

Januar 2019

Sadržaj

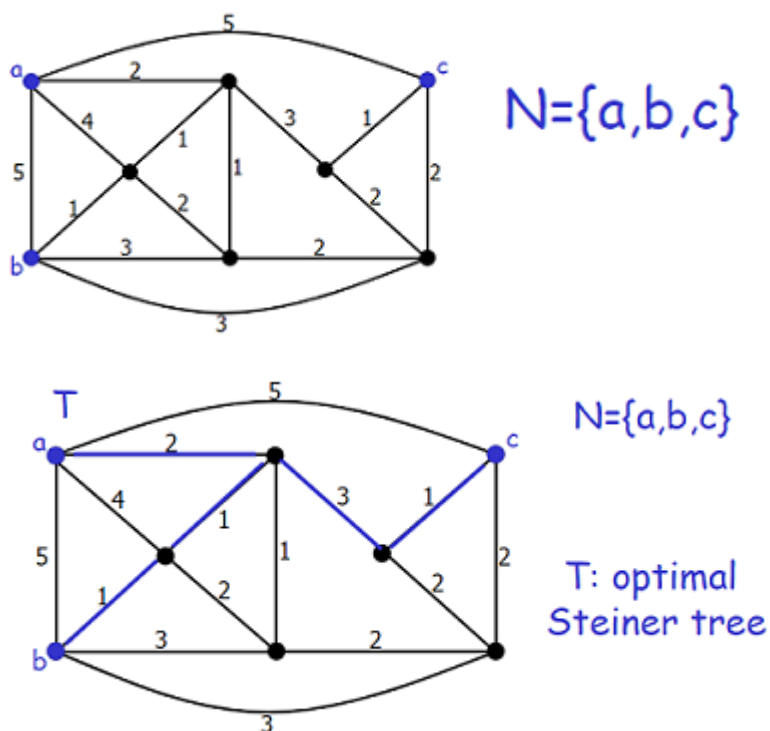
1	Uvod	3
2	Opis problema i opste informacije	3
2.1	Specijalni slučajevi	4
2.2	Primene	4
3	Simulirano kaljenje	4
4	Opis algoritma	5
5	Testiranje algoritma i rezultati	5
6	Zaključak	9

1 Uvod

U ovom seminarskom radu bavili smo se problemom pronalaženja Štajnerovog stabla u grafu. Ovo je rad iz kursa Računarska inteligencija kod profesora dr.Aleksandra Kartelja i asistenta dr.Stefana Miškovic na Matematičkom fakultetu, Univerziteta u Beogradu.

2 Opis problema i opste informacije

Problem Štajnerovog stabla, ili najmanjeg Štajnerovog stabla, nazvanog po Jakobu Štajneru je kombinatorni problem i problem optimizacije. To je problem stabla sličan problemu najmanjeg razapinjućeg stabla. Dati set tačaka(čvorova) V treba povezati u graf tako da zbir dužina ivica grafa bude minimalan. Razlika između Štajnerovog drveta i najmanjeg razapinjućeg stabla je u tome što se u Štajnerovo stablo mogu ubaciti dodatni(pomoćni) čvorovi i ivice kako bi se smanjila dužina razapinjućeg stabla. Ovakvi čvorovi, koji se dodaju zarad smanjivanja ukupne dužine stabla zovu se Štajnerove tačke ili Štajnerovi čvorovi. Dokazano je da se ovim postupkom dolazi do stabla, poznatog kao Štajnerovo stablo. Za zadati set tačaka može postojati više Štajnerovih stabala.



Većina problema Štajnerovog stabla pripada klasi NP kompletnih problema, a čak se i jedna verzija nalazi u Karpovoj grupi 21-og NP kompletnog problema. Neke prostije verzije problema mogu se rešiti u polinomijalnom vremenu.

2.1 Specijalni slučajevi

Specijalni slučajevi problema:

$\text{card}(N) = 1$ u ovom slučaju je trivijalno jer imamo samo jednu granu.

$\text{card}(N) = 2$ u ovom slučaju tražimo najkraći put

$\text{card}(N) = 3$ u ovom slučaju tražimo minimalno razapinjuće stablo

2.2 Primene

Traženje Štajnerovog stable ima primenu u biohemjskim mrežama kao što su mreže interakcije između proteina, metaboličke mreže, transkripcione regulatorne mreže kod gena. Takođe koriste se i kod mreža za emitovanja signala, tačnije kod kreiranja WiFi mreža za pokrivanje velikih oblasti. Imaju i primenu u dizajniranju integrisanih kola kao i za određivanje donje granice dužine potrebnih kablova u mrežama.

3 Simulirano kaljenje

To je algoritam koji pripada grupi S-metaheuristika, koje se zasnivaju na poboljšavanju vrednosti jednog rešenja. Na početku algoritma se proizvoljno ili na neki drugi način generiše početno rešenje i izračuna vrednost njegove funkcije cilja. Vrednost najboljeg rešenja se na početku inicijalizuje na vrednost početnog. Zatim se algoritam ponavlja kroz nekoliko iteracija. U svakom koraku se razmatra rešenje u okolini trenutnog. Ukoliko je vrednost njegove funkcije cilja bolja od vrednosti funkcije cilja trenutnog rešenja, ažurira se trenutno rešenje. Ukoliko vrednost funkcije cilja novog rešenja nije bolja od vrednosti funkcije cilja trenutnog, upoređuje se vrednost unapred definisane funkcije p i proizvoljno izabrane vrednosti q iz intervala $(0, 1)$. Ako je $p > q$ trenutno rešenje se ažurira novoizabranim. Takođe se, po potrebi, ažurira i vrednost najboljeg dostignutog rešenja. Algoritam se ponavlja dok nije ispunjen kriterijum zaustavljanja. Kriterijum zaustavljanja može biti, na primer, dostignut maksimalan broj iteracija, dostignut maksimalan broj ponavljanja najboljeg rešenja, ukupno vreme izvršavanja, itd.

Algoritam simuliranog kaljenja je zasnovan na procesu kaljenja čelika, čiji je cilj oplemenjivanje metala tako da on postane čvršći. Prvi korak

u kaljenju čelika je zagrevanje do određene temperature, a zatim, nakog kratkog zadržavanja na toj temperaturi, počinje postepeno hladjenje. Pritom treba voditi računa o brzini hladjenja, jer brzo hladjenje može da uzrokuje pucanje metala.

4 Opis algoritma

Naš algoritam smo programirali u programskom jeziku Python. Koristili smo algoritam simuliranim kaljenjem koji smo prilagodili nasem radu. Pošto je algoritam baziran na korišćenju algoritma simuliranim kaljenjem na početku algoritma smo napravili određeni broj stabala i za početnu vrednost uzeli ono koje ima najbolju funkciju cilja. Ta početna stabla smo generisali tako što smo uzeli proizvoljan Štajnerov čvor pa pravili stablo dodavajući proizvoljne grane na taj čvor Kao funkciju cilja uzeli smo zbir vrednosti tezina u rezultujućem stablu. Nakon toga smo u petlji pokušavali da nadjemo bolje rešenje od tog početnog, a petlja je izvršavana do zadatog broja iteracija. Traženje boljeg rešenja smo vršili tako što smo uklanjali proizvoljnu granu iz trenutno najboljeg stabla, a zatim iz skupa preostalih čvorova koji nisu u stablu koji predstavlja rešenje birali proizvoljni čvor i dodali ga u stablo Pre nego što smo upoređivali vrednost funkcije cilja tog novog stabla sa trenutni najboljim primenjivali smo našu funkciju trim. U njoj smo skraćivali tj izbacivali one grane stabla koje takoreći štrče, a čijim izbacivanjem se ne utiče na samo Štajnerovo stablo. Ukoliko je vrednost funkcije cilja za to novo stablo bolja od vrednosti funkcije cilja trenutnog najboljeg stabla, to novo stablo postaje najbolje.

5 Testiranje algoritma i rezultati

U testiranjima naseg algoritma menjali smo vrednosti sledećih parametara:

- broj čvorova u grafu
- broj iteracija
- broj štajnerovih čvorova
- težine grana u grafu

U nastavku prikazaćemo rezultate naših testiranja.

Rezultati za 10 čvorova i različite vrednosti težina grana:

broj čvorova	10
broj iteracija	2000
broj štajnerovih čvorova	4
težine grana	1
najbolja dobijena vrednost	8
prosečna dobijena vrednost	8.8
očekivano	3

broj čvorova	10
broj iteracija	2000
broj štajnerovih čvorova	4
težine grana	1-3
najbolja dobijena vrednost	10
prosečna dobijena vrednost	16.3
očekivano	7

broj čvorova	10
broj iteracija	2000
broj štajnerovih čvorova	4
težine grana	3-7
najbolja dobijena vrednost	30
prosečna dobijena vrednost	42.83
očekivano	17

broj čvorova	10
broj iteracija	2000
broj štajnerovih čvorova	4
težine grana	3-10
najbolja dobijena vrednost	35
prosečna dobijena vrednost	53.7
očekivano	24

Rezultati za 15 čvorova i različite vrednosti težina grana:

broj čvorova	15
broj iteracija	3000
broj štajnerovih čvorova	6
težine grana	1
najbolja dobijena vrednost	13
prosečna dobijena vrednost	14.87
očekivano	5

broj čvorova	15
broj iteracija	3000
broj štajnerovih čvorova	6
težine grana	1-3
najbolja dobijena vrednost	20
prosečna dobijena vrednost	25.6
očekivano	12

broj čvorova	15
broj iteracija	3000
broj štajnerovih čvorova	6
težine grana	3-7
najbolja dobijena vrednost	56
prosečna dobijena vrednost	67
očekivano	28

broj čvorova	15
broj iteracija	3000
broj štajnerovih čvorova	6
težine grana	3-10
najbolja dobijena vrednost	64
prosečna dobijena vrednost	85.5
očekivano	39

Rezultati za 18 čvorova i različite vrednosti težina grana:

broj čvorova	20
broj iteracija	3500
broj štajnerovih čvorova	8
težine grana	1
najbolja dobijena vrednost	15
prosečna dobijena vrednost	17.06
očekivano	5

broj čvorova	20
broj iteracija	3500
broj štajnerovih čvorova	8
težine grana	1-3
najbolja dobijena vrednost	26
prosečna dobijena vrednost	31.3
očekivano	12

broj čvorova	15
broj iteracija	3500
broj štajnerovih čvorova	8
težine grana	3-7
najbolja dobijena vrednost	70
prosečna dobijena vrednost	82.4
očekivano	28

broj čvorova	15
broj iteracija	3500
broj štajnerovih čvorova	8
težine grana	3-10
najbolja dobijena vrednost	82
prosečna dobijena vrednost	88.6
očekivano	40

Rezultati za 20 čvorova i različite vrednosti težina grana:

broj čvorova	20
broj iteracija	5000
broj štajnerovih čvorova	8
težine grana	1
najbolja dobijena vrednost	18
prosečna dobijena vrednost	19.26
očekivano	6

broj čvorova	20
broj iteracija	5000
broj štajnerovih čvorova	8
težine grana	1-3
najbolja dobijena vrednost	28
prosečna dobijena vrednost	35.53
očekivano	14

broj čvorova	20
broj iteracija	5000
broj štajnerovih čvorova	8
težine grana	3-7
najbolja dobijena vrednost	79
prosečna dobijena vrednost	96.3
očekivano	32

broj čvorova	20
broj iteracija	5000
broj štajnerovih čvorova	8
težine grana	3-10
najbolja dobijena vrednost	85
prosečna dobijena vrednost	115.3
očekivano	48

Rezultati za 25 čvorova i različite vrednosti težina grana:

broj čvorova	25
broj iteracija	5000
broj štajnerovih čvorova	9
težine grana	1
najbolja dobijena vrednost	23
prosečna dobijena vrednost	26.4
očekivano	8

broj čvorova	25
broj iteracija	5000
broj štajnerovih čvorova	9
težine grana	1-3
najbolja dobijena vrednost	36
prosečna dobijena vrednost	44.96
očekivano	21

broj čvorova	25
broj iteracija	5000
broj štajnerovih čvorova	9
težine grana	3-7
najbolja dobijena vrednost	103
prosečna dobijena vrednost	120.37
očekivano	42

broj čvorova	25
broj iteracija	5000
broj štajnerovih čvorova	9
težine grana	3-10
najbolja dobijena vrednost	126
prosečna dobijena vrednost	140.67
očekivano	65

Rezultati za 30 čvorova i različite vrednosti težina grana:

broj čvorova	30
broj iteracija	5000
broj štajnerovih čvorova	10
težine grana	1
najbolja dobijena vrednost	28
prosečna dobijena vrednost	36.13
očekivano	9

broj čvorova	30
broj iteracija	5000
broj štajnerovih čvorova	10
težine grana	1-3
najbolja dobijena vrednost	49
prosečna dobijena vrednost	60.06
očekivano	25

broj čvorova	30
broj iteracija	5000
broj štajnerovih čvorova	10
težine grana	3-7
najbolja dobijena vrednost	131
prosečna dobijena vrednost	152.83
očekivano	48

broj čvorova	30
broj iteracija	5000
broj štajnerovih čvorova	10
težine grana	3-10
najbolja dobijena vrednost	161
prosečna dobijena vrednost	186.7
očekivano	73

6 Zaključak

Na osnovu dobijenih rezultata možemo zaključiti da se naš algoritam za zadane grafove sa manjim brojem čvorova ponaša relativno dobro i da daje solidne rezultate, ali sa porastom kako broja čvorova samog grafa, tako i broja Štajnerovih stabla, algoritam daje slabije rezultate.