# Затихващи и принудени трептения

- Затихващи трептения
  - Уравнение на движение на осцилатора извършващ затихващи трептения и закон за затихващи хармонични трептения
  - Режими на затихване
    - Слабозатихващи трептения - логаритмичен декремент на затихване и качествен фактор (доброкачественост)
    - Силнозатихващи трептения и апериодично движение
- Принудени трептения
  - Уравнение на движение на осцилатора извършващ принудени трептения и частно решение на нехомогенното уравнение
    - Общо решение на уравнението за принудени трептения
  - Резонанс

# Уравнение на движение на осцилатора извършващ затихващи трептения

- Връщаща сила и сила на съпротивление на средата

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F + F_C = -kx - b\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0,\ 2\beta = b/m, \omega_0^2 = k/m$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

- Силата на съпротивление е пропорционална на скоростта
  - b е *коефициент на съпротивление*
  - β е *коефициент на затихване*

- Хомогенно линейно обикновено диференциално уравнение от втори ред с постоянни коефициенти

# Слабо затихващи трептения $\omega_0 \gg \beta$

- *Кръгова честота на затихващите трептения*

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

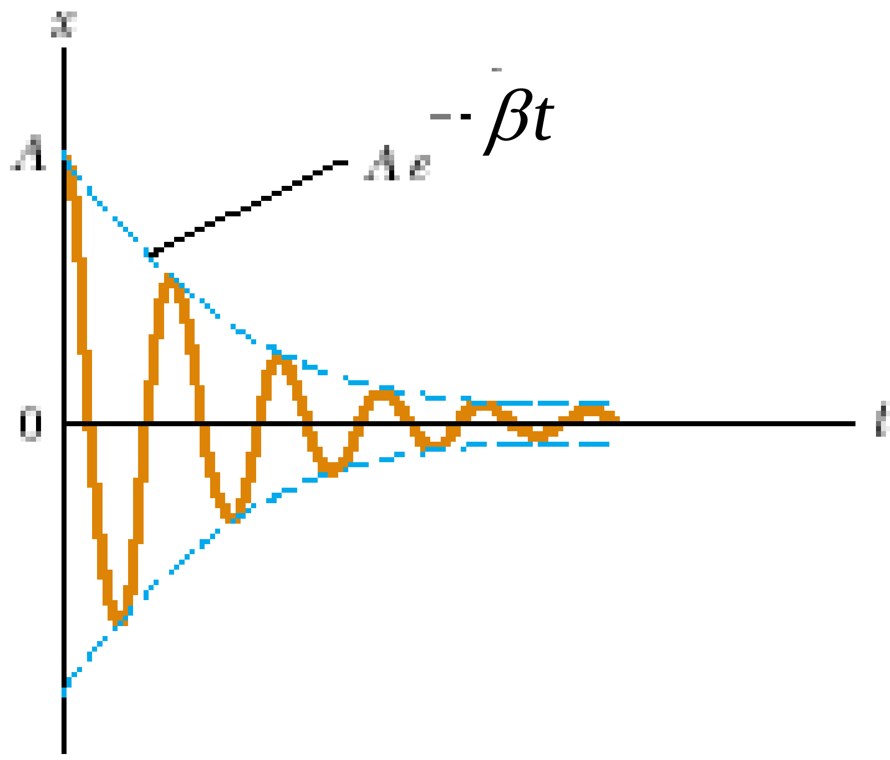
- *Период на затихващите трептения* :

$$T = 2\pi / \omega$$

- *Амплитуда на затихващите трептения*

$$A(t) = Ae^{-\beta t}$$

$$x(t) = A(t)\cos(\omega t + \varphi_0) =$$
$$= Ae^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0)$$



# Логаритмичен декремент на затихващите трептения

- *Декремент на затихващите трептения* – отношението на амплитудите в два последователни момента разделени с периода T

$$A(t)/A(t+T) = e^{\beta T}$$

- *Логаритмичен декремент на затихващите трептения*

$$\lambda = \ln\left[A(t)/A(t+T)\right] = \ln\left[e^{\beta T}\right] = \beta T$$

- За количествена характеристика на бързината, с която трептящата система губи енергия в резултат на действието на сили на триене и съпротивление, се използва и величината *качествен фактор (доброкачественост)*

$$Q = 2\pi \frac{E(t)}{E(t) - E(t+T)} = 2\pi \frac{1}{1 - e^{-2\beta T}} \approx \pi/\beta T = \pi/\lambda = \omega_0/2\beta$$

# Трептения и апериодично движение

- *Силно затихващи трептения - коефициента на затихване* е близък но по-малък от *собствената честота*

$$\beta \leq \omega_0$$

- *Гранично апериодично движение - коефициента на затихване* е равен на *собствената честота - критичен коефициент на затихване*

$$\beta_K = \omega_0$$

*Движението се прекратява най-бързо и системата се връща в равновесното си положение при критичен коефициент на затихване*

- *Апериодично движение - коефициента на затихване* е по-голям *от собствената честота*

$$\beta > \beta_K = \omega_0$$

# Трептения и апериодично движение

- *Силно заатихващи трептения*

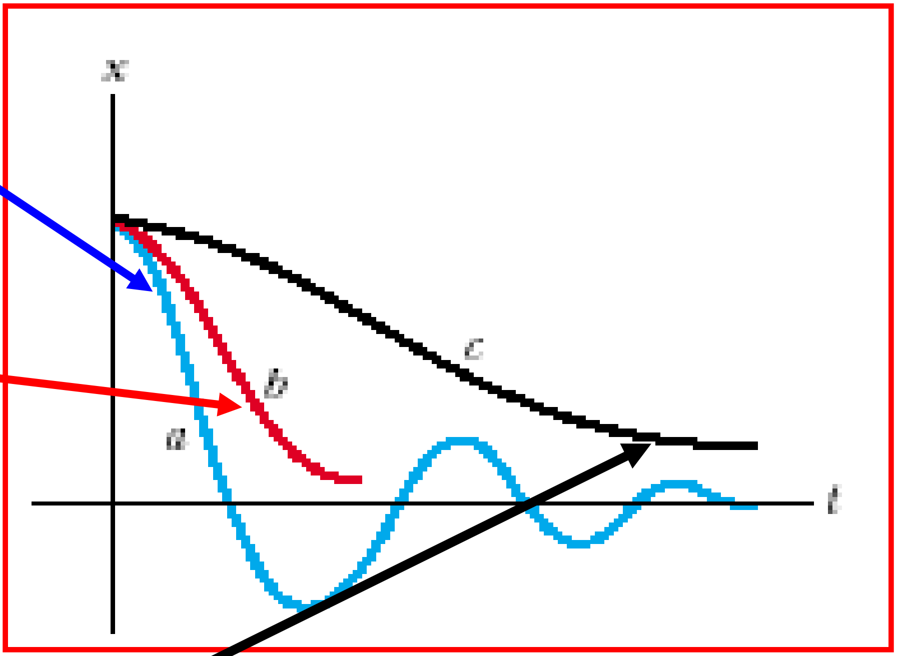
$$\beta \leq \omega_0$$

- *Гранично апериодично движение - критичен коефициент на затихване*

$$\beta_K = \omega_0$$

- *Апериодично движение*

$$\beta > \beta_K = \omega_0$$



# Принудени трептения

- За да може в една реално трептяща система със съпротивление да се получат незатихващи хармонични трептения, трябва да се компенсира загубата на енергия с помощта на *периодично изменяща се външна сила* от вида $F(t) = F\cos(\Omega t)$, където $F$ и $\Omega$ са амплитудата и кръговата и честота. Такива трептения се наричат *принудени трептения.*
- Уравнение на движение на осцилатора извършващ принудени трептения

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\,\frac{dx}{dt} + kx = F_0\cos(\Omega t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\,\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t); 2\beta = b/m; \quad \omega_0^2 = k/m$$

- Нехомогенно линейно ОДУ от втори ред с постоянни коефициенти

# Решение на уравнението

- *Общото решение* на това нехомогенно ОДУ е сума от *общото решение на съответното му хомогенно уравнение* $x_1(t)$, и едно *частно решение* на нехомогенното уравнение $x_2(t)$.

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

- *Общото решение на съответното му хомогенно уравнение* е решението на уравнението на затихващите свободни трептения

$$x_1(t) = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0); \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

- Може да се покаже, че едно частно решение на нехомогенното уравнение се задава с:

$$x_2(t) = A(\Omega)\cos\left(\Omega t - \phi(\Omega)\right)$$

$$A(\Omega) = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0{}^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}; \phi(\Omega) = arctg\left(\frac{2\beta\Omega}{\omega_0{}^2 - \Omega^2}\right)$$

# Резонанс

- *Амплитуда на принудените трептения* зависи от параметрите на системата и от външната сила

$$A\left(\Omega\right) = F_0 \Big/ \left( m \sqrt{(\omega_0{}^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2} \right)$$

- Явлението, при което *амплитудата на принудените трептения* рязко нараства, когато кръговата честота на външната сила се доближава до собствената кръгова честота на трептящата система, се нарича *резонанс*.
- Кръговата честотата, при която амплитудата на принуденото трептене е максимална се нарича *резонансна кръгова честота*:

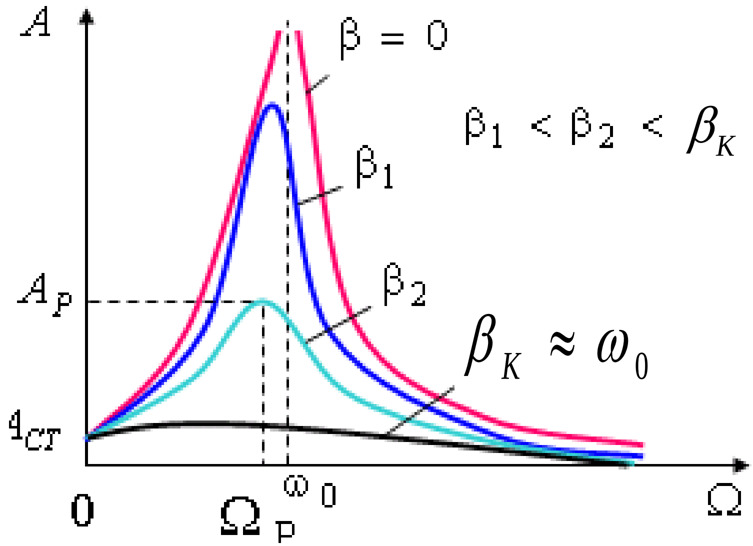
$$\Omega_p = \sqrt{\omega_0{}^2 - 2\beta^2}$$

- *Резонансна амплитуда* - амплитудата на принудените трептения при *резонансната кръгова честота*:

$$A_p = F_0 \Big/ \left( 2m\beta \sqrt{\omega_0{}^2 - \beta^2} \right)$$

# Резонансни амплитуда и честота

- Кривите изразяващи  зависимостта на амплитудата на принудените трептения от честотата на външната сила, се наричат *резонансни криви.*




$$\Omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

$$A_p = \frac{F_0}{2m\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

- *Резонансната амплитуда  и резонансната честота* зависят от *коефициента на затихване*!
  - *В система без триене*, амплитудата нараства безкрайно
  - *В система с триене*, нарастването на амплитудата е ограничено. При това с нарастването на коефициента на затихване намаляват и резонансната амплитуда и резонансната честота!