Суперпозиция на вълни

Принцип на суперпозиция
Интерференция на вълни
Стоящи вълни
Вълнов пакет и групова скорост

Интерференция на вълни

- *Принцип на суперпозицията:* Когато в една среда се разпространяват едновременно две вълни, всяка от тях предизвиква същите отклонения на частиците на средата от равновесните им положения, както, ако вълната се разпространяваше самостоятелно.
  - Резултантната вълна се получава, като се сумират отклоненията, предизвикани от отделните вълни
- *Кохерентни вълни -* вълни с еднакви честоти и постоянна фазова разлика в дадена точка . Създават се от *кохерентни източници*.
- *Интерференция* (терминът е въведен от Юнг през 1803 г.) – явлението при което в резултат на суперпозиция на две кохерентни вълни, в едни точки на пространството се наблюдава усилване, а в други отслабване на амплитудата на резултантната вълна

Интерференция на вълни

- *Интерференция на кохерентни вълни* създадени от два точкови монохроматични източника с една и съща честота:

$$y_1(t,r_1)=A_1\cos(\omega t-kr_1);y_2(t,r_2)=A_2\cos(\omega t-kr_2)$$

$$y=A_I\cos(\omega t+\Phi)=y_1(t,r_1)+y_2(t,r_2)$$

$$A_I^2=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\Delta\varphi);\Delta\varphi=k(r_2-r_1)=k\Delta r$$

- При равни амплитуди $A_1=A_2=A\Rightarrow A_I=2A\cos^2(\Delta\varphi/2)$
- *Условие за усилване на резултантната амплитуда* (максимална амплитуда) (конструктивна интерференция):

$$\Delta\varphi=k\Delta r=2m\pi\Rightarrow\Delta r=m\lambda\Rightarrow A_{MAX}=A_1+A_2;m=0,\pm1,...$$

- *Условие за отслабване на резултантната амплитуда* (минимална амплитуда) (деструктивна интерференция):

$$\Delta\varphi=k\Delta r=(2m+1)\pi\Rightarrow\Delta r=(2m+1)\lambda/2\Rightarrow A_{MIN}=|A_1-A_2|;m=0,\pm1,...$$

m - порядък на интерференцията

Оптичен път

- *Разлика в пътищата на двете вълни* $\Delta r = r_2 - r_1$
- Ако вълните от точковите източници се разпространяват в оптически еднородна среда, фазовата разлика между двете вълни в точката на наблюдение се дава с

$$\Delta\varphi = k\Delta r = k\left(r_2 - r_1\right) = \frac{2\pi}{\lambda}\left(r_2 - r_1\right); \lambda = \frac{\lambda_0}{n}$$

- Ако вълните от двата източника изминават разстоянията до точката на наблюдение в среди с различен показател на пречупване, то фазовата разлика между двете вълни в точката на наблюдение се дава с

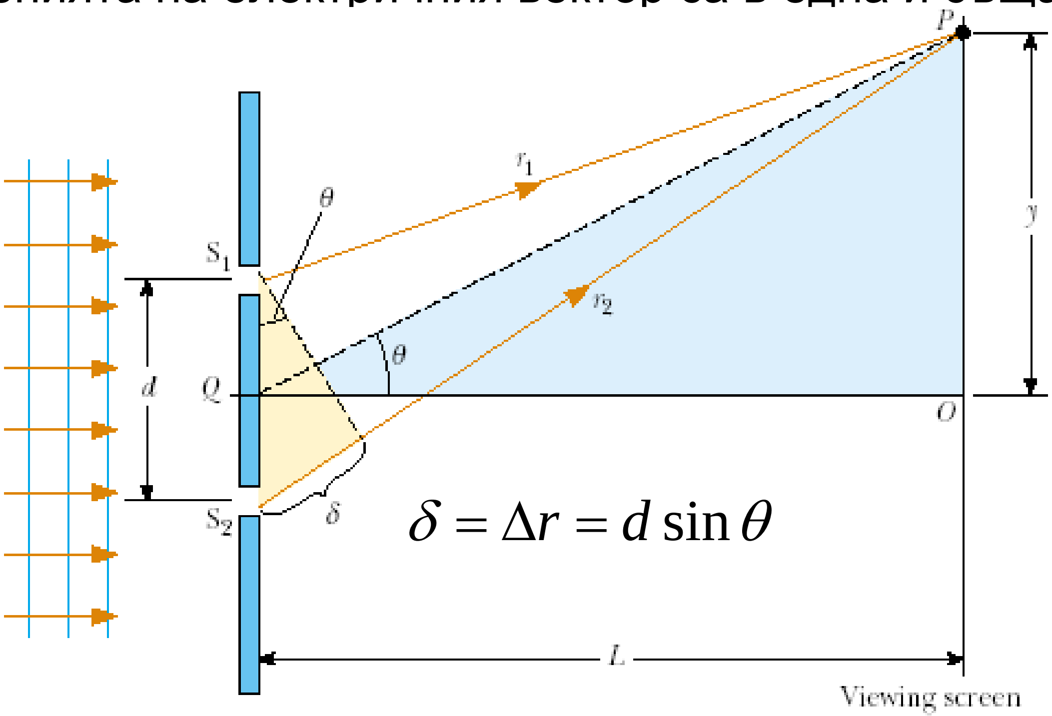
$$\Delta\varphi = k_2 r_2 - k_1 r_1 = \frac{2\pi}{\lambda_2} r_2 - \frac{2\pi}{\lambda_1} r_1,\ \lambda_1 = \frac{\lambda_0}{n_1}, \lambda_2 = \frac{\lambda_0}{n_2} \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}\left(n_2 r_2 - n_1 r_1\right)$$

- *Оптичен път* – величината, равна на произведението от геометричния път на лъча и показателя на пречупване на средата nr
  - Следователно, фазовата разлика между две вълни с еднакви честоти се определя от разликата в оптичните им пътища:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}\left(n_2 r_2 - n_1 r_1\right)$$

Опит на Юнг

- Получаване на *кохерентни вълни* чрез разделяне на фронта на вълната на един точков източник на светлина.
  - Сферична вълна от точков източник, вълна попада върху екран с два малки процепа лежащи на една и съща вълнова повърхност.
  - Процепите играят роля на вторични, излъчващи синфазно източници на сферични вълни с еднакви честоти, които са кохерентни
  - Трептенията на електричния вектор са в една и съща посока



$$\delta = \Delta r = d \sin\theta$$

Опит на Юнг

- *Условие за максимална амплитуда* – направление на максимумите

  $d \sin\theta = m\lambda$ m - порядък на интерференчния максимум

- *Условие за минимална амплитуда* – направление на минимумите:

  $d \sin\theta = (2m+1)\lambda/2$ m - порядък на интерференчния минимум

- Приближен израз за разликата в пътищата

$$\theta << 1 \Rightarrow \sin\theta \approx tg\theta = y/L \Rightarrow d\sin\theta \approx yd/L$$

- *Условие за максимална амплитуда* :

$$y_{m,MAX}d/L = m\lambda, m = 0, \pm 1, \ldots \Rightarrow y_{m,MAX} = m\lambda L/d$$

- *Условие за минимална амплитуда* :

$$y_{m,MIN}d/L = (2m+1)\lambda/2, m = 0, \pm 1, \ldots \Rightarrow y_{m,MIN} = (2m+1)\lambda L/2d$$

- *Реалните източници излъчват в спектрален диапазон с честотна ширина:* $\Delta\omega(= 2\pi\Delta\nu)$. Това води до хаотично изменение на фазовата разлика между вълните.

Време и дължина на кохерентност

- Време на кохерентност $t_{кох}$ – времето за което случайното изменение на фазата достига π
- Дължина на кохерентност $l_{кох} = ct_{кох}$
- Времето на кохерентност и честотната ширина са свързани:

$$t_{кох} \approx 1/\Delta\nu$$

- Изрази за времето на кохерентност и дължината на кохерентност:

$$\nu = c/\lambda \to \Delta\nu = c\Delta\lambda/\lambda^2 \Rightarrow t_{кох} = \lambda^2/c\Delta\lambda$$

$$\Rightarrow l_{кох} = ct_{кох} = \lambda^2/\Delta\lambda$$

- Максимален порядък на интерференционната ивица, която още се вижда

$$\Delta r = m\lambda; \Delta r = m_{гр}\lambda \approx l_{кох} = \lambda^2/\Delta\lambda \Rightarrow m_{гр} \approx \lambda/\Delta\lambda$$

Кохерентност

- *Реалните източници имат крайни размери.* Контрастна картина се наблюдава само ако лъчите от всички точки на източника излизат под един приблизително еднакъв ъгъл наречен *апертура на интерференцията* 2α .
  - Ако размерът на източника в направление перпендикулярно на излизащите от него лъчи е D, а дължината на вълната му е λ то можем да наблюдаваме интерференция, ако:
  $$2\alpha \leq \lambda/2D$$
- *Интерференция от реални източници е възможна, ако*:
  - Когато източниците не са монохроматични, разликата в оптичните пътища трябва да е по-малка от *дължината на кохерентност*
  - Когато източниците имат крайни размери, е необходима малка *апертура на интерференция*.

Стоящи вълни

- Стояща вълна - суперпозиция на две бягащи хармонични и кохерентни вълни, разпространяващи се в противоположни посоки

$$y_1(t,x) = A\cos(\omega t - kx);\ y_2(t,x) = A\cos(\omega t + kx + \Phi)$$

$$y(t,x) = y_1(t,x) + y_2(t,x) = 2A\cos(kx + \Phi/2)\cos(\omega t + \Phi/2)$$

  – *Върхове на стоящата вълна* - точките с максимална амплитуда

$$\left|\cos(kx+\Phi/2)\right| = 1 \Rightarrow kx + \Phi/2 = m\pi, m = 0,1,...$$

  – *Възли на стоящата вълна* - точките с нулева амплитуда

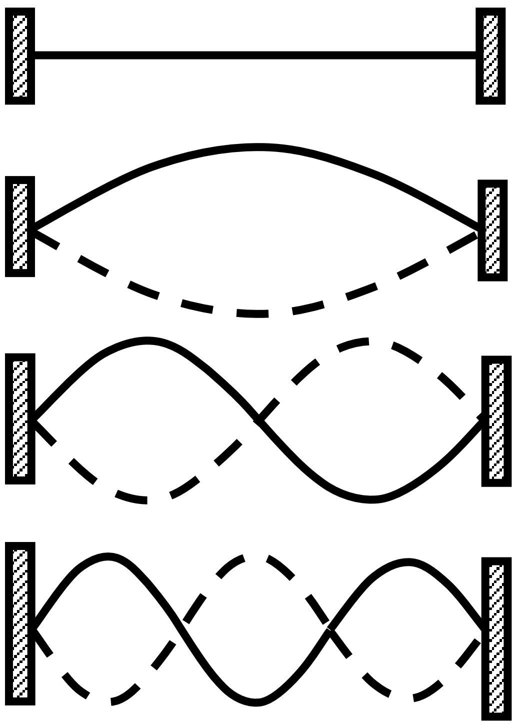
$$\left|\cos(kx+\Phi/2)\right| = 0 \Rightarrow kx + \Phi/2 = (2m+1)\pi/2, m = 0,1,...$$

  – Разстоянието между два съседни *върха, както и разстоянието между два съседни възела* е: $\lambda/2$
  – Положението на върховете и на възлите не се променя с времето.
  – Стоящата вълна не пренася енергия!

Стоящи вълни в опъната струна с два неподвижно закрепени края

Условие за възникване на стояща вълна:
По дължината на струната да се нанасят цяло число полудължини на стоящата вълна:

$$L = \frac{n\lambda_n}{2} \Rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n}; n = 1, 2, \ldots$$



$n = 1$

$n = 2$

$n = 3$

Честоти на стоящите вълни (собствени честоти):

$$f_n = u/\lambda_n$$

u – е скоростта на напречните вълни по струната.

$f_1 = u/\lambda_1 = u/2L$ основна честота

$f_2 = u/\lambda_2 = u/L$ хармонична честота

Собствени трептения на опъната струна с два неподвижно закрепени края

- Стояща вълна с определена честота може да се възбуди с шаблон с подходяща форма.
- След отстраняването на шаблона, движението на струната се нарича *собствено трептене.*
- *Собственото трептене* на струната се характеризира със *собствените си честоти*, които се определят от граничните условия:
  - Най-ниската *собствена честота* се нарича *основна собствена честота*
  - Целочислено кратните на *основната*, честоти се наричат *хармонични собствени честоти* . (Номерът на *хармоничната собствена честота* дава броя на върховете на вълната.)
  - Собствените честоти на струната образуват аритметична прогресия - *хармоничен ред*
    - Разликата между две съседни хармонични собствени честоти е равна на основната собствена честота

Вълнов пакет

- *Вълнов пакет* е суперпозиция на вълни, с близки честоти, и вълнови числа

$$y_1(t,x) = A\cos(\omega t - kx); y_2(t,x) = A\cos\left[(\omega + d\omega)t - (k + dk)x\right]; d\omega << \omega; dk << k$$

$$y(t,x) = y_1(t,x) + y_2(t,x) = A(t,x)\cos\left[(2\omega + d\omega)t/2 - (2k + dk)x/2\right]$$

$$\Rightarrow y(t,x) \approx A(t,x)\cos(\omega t - kx);\ A(t,x) = 2A\cos\left[(td\omega - xdk)/2\right]$$

- *Амплитудата на вълновия пакет A* е хармонична вълна и бавноизменяща се функция на координатата и времето
- Обемната плътност на енергията на вълната е пропорционална на квадрата на *амплитудата на вълновия пакет*
- Скоростта на движение на фиксирана стойност на фазата на бавноизменящата се *амплитудата на вълновия пакет* се нарича *групова скорост*, Хамилтон 1839 г.

$$A(t,x) = 2A\cos\left[(td\omega - xdk)/2\right]; td\omega - xdk = const$$

$$\Rightarrow dtd\omega - dxdk = 0;\ u_g = \frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk}$$

Сравнение на *груповата* и *фазова* скорости

- *Груповата скорост* е различна от *фазовата скорост!*

$$u_g = \frac{d\omega}{dk} \neq u = \frac{\omega}{k}$$

  – *Фазовата скорост* определя скоростта на разпространение на определена стойност *на фазата на вълната*
  – *Груповата скорост* определя скоростта на разпространение на определена стойност *на фазата на* бавноизменящата се *амплитуда на вълновия пакет*

- При разпространение на вълна, информация пренася *амплитудата на вълновия пакет*, а не фазата на вълната!
  – *Груповата скорост определя скоростта, с която се пренася информация чрез вълнов процес в дадена среда!*

Връзка между *груповата* и *фазовата* скорост – формула на Релей

- Ако *фазовата скорост* зависи от дължината на вълната, *груповата скорост* е различна *фазовата*!
  - Зависимостта на *фазовата скорост* на вълните от дължината на вълната се нарича *дисперсия*

$$u_g(\lambda) = u(\lambda) - \lambda \frac{du(\lambda)}{d\lambda}$$

- *Нормална дисперсия* $\frac{du(\lambda)}{d\lambda} > 0$ - *груповата скорост* е по-малка от *фазовата*
- *Аномална дисперсия* $\frac{du(\lambda)}{d\lambda} < 0$ - *груповата скорост* е по-голяма от *фазовата*
- Няма дисперсия $\frac{du(\lambda)}{d\lambda} = 0$ - *груповата скорост* е равна *на фазовата*

Нормална дисперсия на прозрачни вещества във видимата област

$$u(\lambda) = c_0 / n(\lambda)$$

$$\frac{du}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{c_0}{n(\lambda)}\right) = -\frac{c_0}{n(\lambda)^2}\frac{dn(\lambda)}{d\lambda}$$

$$\frac{dn(\lambda)}{d\lambda} < 0 \Rightarrow \frac{du(\lambda)}{d\lambda} > 0$$