

ИЗПИТНА ТЕМА №1
ПО ВИСША МАТЕМАТИКА I

Задача 1. (10 точки) Точка A е проекцията на точка $D(3, -2)$ върху правата $g: x - y - 1 = 0$, а правата g_1 е успоредна на g и съдържа D .

Ако M е пресечната точка на g_1 и правата $h: 5x - y - 21 = 0$, да се определят координатите на точките A и M . Да се намери такава точка P , че A, D, M и P да бъдат върхове на правоъгълник.

Задача 2. (10 точки) Да се реши по метода на Гаус-Жордан матричното уравнение

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Задача 3.

а) (5 точки) Да се пресметне

$$z = \left(\frac{-6i}{1-i} - \frac{15-5i}{2+i} \right)^3.$$

б) (5 точки) Да се намери границата:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{4}{n} \right)^{n-3} + \frac{8n^3 + 7n^2 + 4}{-8n^3 + 5n^2 - 3n} \right].$$

Задача 4. (10 точки) Да се реши по метода на Гаус системата

$$\begin{cases} -2x - 3y - 2z = 12 \\ -x + y - 2z = 2 \\ x - 2y - 3z = 5 \\ -x - 3y + 5z = 3 \end{cases}.$$

Задача 5. (10 точки) Да се извърши деленето:

$$\frac{2x^5 + 8x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 28x + 18}{x^2 + 5x + 6},$$

след което полученият остатък да се разложи в сума от елементарни дроби.

Задача 6. (10 точки) Дадена е правата

$$g: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-2}{-3}$$

и точките $C(4, 2, 1)$, $M(1, 5, 6)$ и $P(-2, 2, 9)$. Равнината σ съдържа точка C и правата g .

Да се намери пресечната точка Q на равнината σ и правата, минаваща през точките M и P . Да се напише уравнението на правата, която минава през точка Q и е перпендикулярна на отсечките MP и CQ .

ИЗПИТНА ТЕМА №2
ПО ВИСША МАТЕМАТИКА I

Задача 1.

а) (5 точки) Да се намери границата:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{5n^3 - 5n - 2}{8n^3 + 6n^2 + 6n} + \left(1 - \frac{4}{n}\right)^{n-1} \right].$$

б) (5 точки) Да се намерят корените на уравнението

$$-iz^2 + (6 + 2i)z + 3 + 8i = 0.$$

Задача 2. (10 точки) Да се реши по метода на Гаус системата

$$\begin{cases} 2x + 2y - 2z = 8 \\ x + 3y - z = 6 \\ x + 2y + 2z = 2 \\ -x - y + 7z = -10 \end{cases}.$$

Задача 3. (10 точки) Даден е триъгълникът ABC . Уравнението на височината към страната AB е $3x + 4y - 14 = 0$. През върховете B и C минава правата $6x + 7y - 26 = 0$.

Да се намерят координатите на точките B и C , ако координатите на точка A са $(6, -8)$. Да се напише уравнението на медианата към страната AC .

Задача 4. (10 точки) Да се разложи в сума от елементарни дробни рационалната функция

$$Q(x) = \frac{2x^2 + 5x + 7}{(x + 2)(x^2 + 1)}.$$

Задача 5. (10 точки) Даден е триъгълник с върхове $C(-6, -4, 1)$, $G(4, 1, -9)$ и $M(-8, 2, -7)$.

Да се състави уравнението на равнината, съдържаща триъгълника. Да се намерят координатите на пресечната точка на височината през върха M и страната CG .

Задача 6. (10 точки) Да се реши по метода на Гаус-Жордан матричното уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ИЗПИТНА ТЕМА №3
ПО ВИСША МАТЕМАТИКА I

Задача 1. (10 точки) Да се намери уравнението на равнината, определена от точките $C(-10, -10, 0)$, $G(-9, 4, -12)$ и $P(5, 5, -5)$, а също така и проекцията на точка G върху правата, минаваща през C и P .

Задача 2.

а) (5 точки) Да се намери границата:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{6}{n-3} \right)^n - \frac{8n^3 + 4n^2 - 2}{7n^3 - 8n^2 + 8} \right].$$

б) (5 точки) Да се пресметне

$$z = \frac{(1 - \sqrt{3}i)^6 - 61 - i}{(1 - i)^8 - 13 - 2i}.$$

Задача 3. (10 точки) Да се реши по метода на Гаус системата

$$\begin{cases} -x - 3y - z = 9 \\ x + 2y - 2z = -4 \\ 2x - 3y - z = 3 \\ -5x - 4y + 4z = 14 \end{cases}.$$

Задача 4. (10 точки) Да се разложи в сума от елементарни дроби рационалната функция

$$Q(x) = \frac{5x + 1}{(x + 1)(x^2 + 1)}.$$

Задача 5. (10 точки) Дадени са матриците

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Да се намери матрицата A^{-1} и да се пресметне умножението $A^{-1}B$.

Задача 6. (10 точки) Даден е триъгълник ABC с върхове $A(1, 7)$, $B(-1, -3)$ и $C(10, 0)$.

Да се намерят координатите на точка C_1 , която е симетричка на върха C спрямо страната AB . Да се напише уравнението на правата, която минава през точка C_1 и е успоредна на страната AC .

ИЗПИТНА ТЕМА №4
ПО ВИСША МАТЕМАТИКА I

Задача 1. (10 точки) Точките $A(3, -2)$ и $B(0, 0)$ са върхове в триъгълника ABC .

Да се намерят координатите на върха C , ако е известно, че височините на триъгълника се пресичат в точка $H(1, -1)$. Използвайки скаларно произведение, да се покаже, че страната AB е перпендикулярна на отсечката CH .

Задача 2. (10 точки) Да се разложи в сума от елементарни дроби рационалната функция

$$Q(x) = \frac{3x^2 - 3x + 10}{(x - 1)(x^2 + 9)}.$$

Задача 3. (10 точки) Да се реши по метода на Гаус-Жордан матричното уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Задача 4.

а) (5 точки) Да се намери границата:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{7n^3 - 3n^2 - 4n}{-6n^3 + 7n^2 - 1} - \left(1 - \frac{4}{n}\right)^{n+2} \right].$$

б) (5 точки) Да се пресметне

$$z = \left(\frac{-12 + 6i}{3 + i} + \frac{13 - 13i}{3 - 2i} \right)^4.$$

Задача 5. (10 точки) Дадени са точките $B(-1, 3, -2)$, $G(-3, -3, 2)$, $M(-3, 6, -5)$ и $P(-7, 10, 6)$.

Да се определи дали четирите точки лежат в една равнина.

а) Ако точките лежат в една и съща равнина λ , да се намери точка B_1 , чиято проекция върху λ е точката B и която е на разстояние $r = \sqrt{139}$ от λ . Да се напише уравнението на равнината, която е перпендикулярна на λ и съдържа отсечката MB_1 .

б) Ако B, G, M и P не лежат в една равнина, да се намери точката, която е симетрична на P спрямо равнината, определена от точките B, G и M .

Задача 6. (10 точки) Да се реши по метода на Гаус системата

$$\begin{cases} 3x + y + 3z = -4 \\ 3x + y - 3z = -4 \\ 3x + y + 9z = -4 \end{cases}.$$

ИЗПИТНА ТЕМА №5
ПО ВИСША МАТЕМАТИКА I

Задача 1. (10 точки) Да се реши по метода на Гаус системата

$$\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 0 \\ x - 2y + z = -6 \\ 2x - 3y - 3z = -5 \\ -2x - y - 7z = 7 \end{cases}.$$

Задача 2.

а) (5 точки) Да се намери границата:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{5n^3 - 4n^2 + 2}{-5n^3 + 8n + 4} + \left(1 + \frac{4}{n}\right)^{n-2} \right].$$

б) (5 точки) Да се намерят корените на уравнението

$$iz^3 = \frac{5 - 15i}{3 - i}.$$

Задача 3. (10 точки) Точките $A(10, 2)$ и $C(4, 0)$ лежат върху хипотенузата на правоъгълен триъгълник, като една от двете е връх на триъгълника.

Да се намерят разстоянията от точките A и C до единия катет, ако същият катет има уравнение $x + 2y + 1 = 0$. Да се определят координатите на трите върха на триъгълника.

Задача 4. (10 точки) Да се разложи в сума от елементарни дроби рационалната функция

$$Q(x) = \frac{5x^2 - 5x + 6}{x^3 - 2x^2 + 2x}.$$

Задача 5. (10 точки) Правата

$$l: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+5}{2}$$

и точка $P(2, -2, 1)$ лежат в равнината β .

Да се напише уравнението на β и да се намерят координатите на точката, която е симетрична на P относно l . Да се определи разстоянието от точката P до правата l .

Задача 6. (10 точки) Дадени са матриците

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ -2 & 1 & -3 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Да се намери матрицата A^{-1} и да се пресметне умножението $A^{-1}B$.

ИЗПИТНА ТЕМА №6
ПО ВИСША МАТЕМАТИКА I

Задача 1. (10 точки) Даден е триъгълникът ABC . Уравнението на височината към страната BC е $11x - 8y + 101 = 0$. През върховете A и B минава правата $3x + 16y - 27 = 0$.

Да се намерят координатите на точките A и B , ако координатите на точка C са $(-2, 8)$. Да се напише уравнението на медианата през върха B .

Задача 2. (10 точки) Да се извърши деленето:

$$\frac{3x^5 - 19x^3 + 19x^2 - 11x + 17}{x^2 + x - 6},$$

след което полученият остатък да се разложи в сума от елементарни дробни.

Задача 3.

а) (5 точки) Да се намери границата:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{-7n^2 + 8n + 8}{n^2 - n - 3} - \left(1 + \frac{4}{n}\right)^{n+1} \right].$$

б) (5 точки) Да се пресметне

$$z = \frac{67 + 2i + (2 - 2i)^4}{66 - 2i + (\sqrt{3} - i)^6}.$$

Задача 4. (10 точки) Дадени са матриците

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Да се намери матрицата A^{-1} и да се пресметне умножението $A^{-1}B$.

Задача 5. (10 точки) Да се реши по метода на Гаус системата

$$\begin{cases} -3x - y - z = -7 \\ x + 2y - z = 4 \\ 3x + y + 3z = 7 \\ 5x + 5y - z = 15 \end{cases}.$$

Задача 6. (10 точки) Дадени са точките $A(-1, -7, 0)$, $D(7, 4, -3)$ и равнината $\gamma: x + 3y - z = 0$.

Да се намерят координатите на точката D_1 , която е симетрична на D спрямо γ . Да се напише уравнението на равнината, съдържаща триъгълника ADD_1 , а също така и уравнението на правата, минаваща през точките D_1 и A .

ИЗПИТНА ТЕМА №7
ПО ВИСША МАТЕМАТИКА I

Задача 1. (10 точки) Дадени са матриците

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Да се намери матрицата A^{-1} и да се пресметне умножението BA^{-1} .

Задача 2. (10 точки) Да се реши по метода на Гаус системата

$$\begin{cases} -2x - 2y - 2z = -8 \\ -x - y + z = -2 \\ -2x + 2y - z = -3 \\ -x - y - 3z = -6 \end{cases}.$$

Задача 3. (10 точки) Да се разложи в сума от елементарни дробни рационалната функция

$$Q(x) = \frac{6x^2 + 3}{(x-2)(x+1)^2}.$$

Задача 4. (10 точки) В правоъгълния триъгълник ABC хипотенузата AB има уравнение $19x + 4y - 216 = 0$. През върха A минава правата $5x - 2y - 66 = 0$ и тя е успоредна на катета BC . През върха B минава правата $2x - 5y + 64 = 0$.

Да се намерят координатите на трите върха на триъгълника.

Задача 5.

а) (5 точки) Да се пресметне

$$z = \left(\frac{7+i}{1+i} + \frac{3+11i}{1-3i} \right)^4.$$

б) (5 точки) Да се намери границата:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2n^3 - 6n^2 - 7n}{3n^3 + 6n^2 + 3n} + \left(1 - \frac{5}{n} \right)^{n-2} \right].$$

Задача 6. (10 точки) Дадени са правите

$$h: \frac{x+4}{1} = \frac{y+7}{3} = \frac{z+3}{2}, \quad l: \frac{x+4}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-4}{-1}$$

и равнината $\gamma: x - 3y + 3z - 13 = 0$.

Да се установи дали двете прави се пресичат.

а) Ако h и l се пресичат, да се намерят: пресечната им точка Q ; уравнението на равнината, която ги съдържа; уравнението на правата, минаваща през Q и перпендикулярна на γ .

б) Ако h и l не се пресичат, да се намерят: двете общи точки H и M на

равнината γ и двете прави; уравнението на равнината, спрямо която точките H и M са симетрични.

ИЗПИТНА ТЕМА №8
ПО ВИСША МАТЕМАТИКА I

Задача 1. (10 точки) Дадени са матриците

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Да се намери матрицата A^{-1} и да се пресметне умножението BA^{-1} .

Задача 2. (10 точки) Да се реши по метода на Гаус системата

$$\begin{cases} 2x - 3y - 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = -5 \\ -x - 2y - 5z = 6 \end{cases}.$$

Задача 3.

а) (5 точки) Да се намери границата:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{4}{n+1} \right)^n + \frac{6n^3 - 3n^2 + 4n}{-n^3 + 3n^2 - 4n} \right].$$

б) (5 точки) Да се намерят корените на уравнението

$$iz^3 = \frac{1-i}{1-i}.$$

Задача 4. (10 точки) Даден е триъгълник с върхове $D(0, 0, -1)$, $M(2, 4, 2)$ и $Q(-2, -8, 6)$.

Да се състави уравнението на равнината, съдържаща триъгълника. Да се намерят координатите на пресечната точка на височината през върха D и страната MQ .

Задача 5. (10 точки) Да се разложи в сума от елементарни дроби рационалната функция

$$Q(x) = \frac{5x^3 + 9x^2 + 4x - 4}{x^4 + 2x^3}.$$

Задача 6. (10 точки) Даден е триъгълникът ABC . Уравнението на височината към страната BC е $4x - 3y + 33 = 0$. През върховете A и C минава правата $4x + y + 5 = 0$.

Да се намерят координатите на точките A и C , ако координатите на точка B са $(-7, -3)$. Да се напише уравнението на медианата през върха B .