Трептения и връщаща сила

- *Трептенията* са най-общият вид движение на физични системи в близост до равновесното им положение, при които се изменят определени физични величини характеризиращи системата
  - Физичните системи могат да бъдат: механични, електромагнитни, оптични и др.

- *Връщаща (квазиеластична) сила* – ако системата не е в равновесно положение, възниква сила, която я връща в него
  - При трептения с малки отклонения от равновесното положение, зависимостта на силата от разстотоянието до равновесното положение е линейна!

$$F\left(x\right)=-k\left(x-x_0\right);\ x_0=0\Rightarrow F\left(x\right)=-kx$$

  - Връщащата сила е пропорционална на отклонението на трептящото тяло от равновесното му положение и е насочена към него.

Видове сили и трептения

- *Видове сили*
  - *Връщаща (квазиеластична) сила*
  - *Сила на съпротивление на средата*
  - *Външна периодична сила*
- Видове трептения (според действащите сили)
  - *Собствени (свободни незатихващи) трептения*
    - Действа само *връщаща сила*
  - *Затихващи (свободни затихващи) трептения*
    - Действа *връщаща сила*
    - Действа *сила на съпротивление на средата*
  - *Принудени трептения*
    - Действа *връщаща сила*
    - Действа *сила на съпротивление на средата*
    - Действа *външна периодична сила*

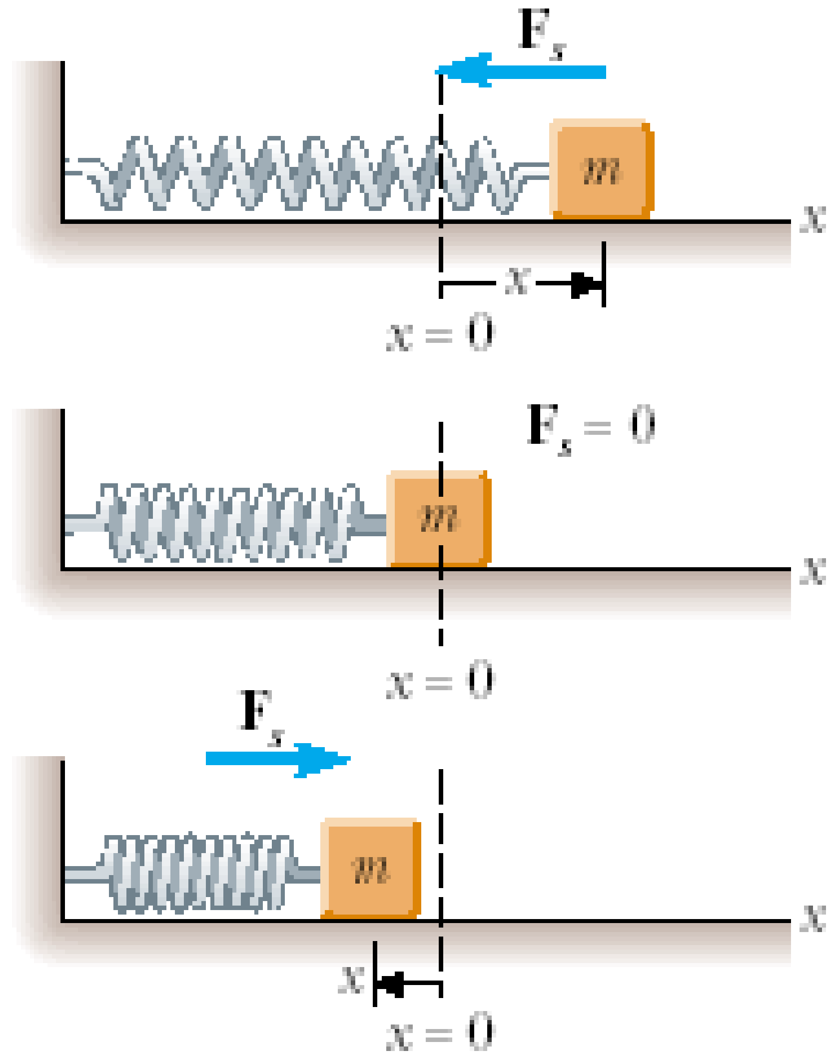
Собствени (свободни незатихващи) трептения

- Уравнение на движение на собствените трептения
  - Маса на тялото m
  - Коефициент на еластичност к на пружината

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = 0; \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

  - *Линейно хомогенно диференциално уравнение от втори ред с постоянни коефициенти*



Решения на уравнението за движение на хармоничния осцилатор

- *Частни решения* на уравнението

$$\cos(\omega_0 t), \sin(\omega_0 t)$$

- *Общо решение* на уравнението

$$x(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$$

$$C_1 = A\cos\varphi_0; C_2 = -A\sin\varphi_0$$

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Хармонично трептене –
закон за движение на хармоничния осцилатор

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

- *Амплитуда* – максималното отклонение от равновесното положение А — A
- *Фаза на трептене* — $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$
- *Начална фаза на трептене* — φ_0
- *Кръгова честота* — $\omega_0 = 2\pi f$
- *Период* — T
- *Честота на трептене* — $f = 1/T$

Закон за движение, закон за скоростта и закон за ускорението на хармоничното трептене

$$x\left(t\right) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$v\left(t\right) = \frac{dx\left(t\right)}{dt} = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$a\left(t\right) = \frac{dv\left(t\right)}{dt} = -\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Определяне на двете константи в закона на движението

- Стойностите на амплитудата и началната фаза можем да получим чрез началните стойности на отклонението и скоростта

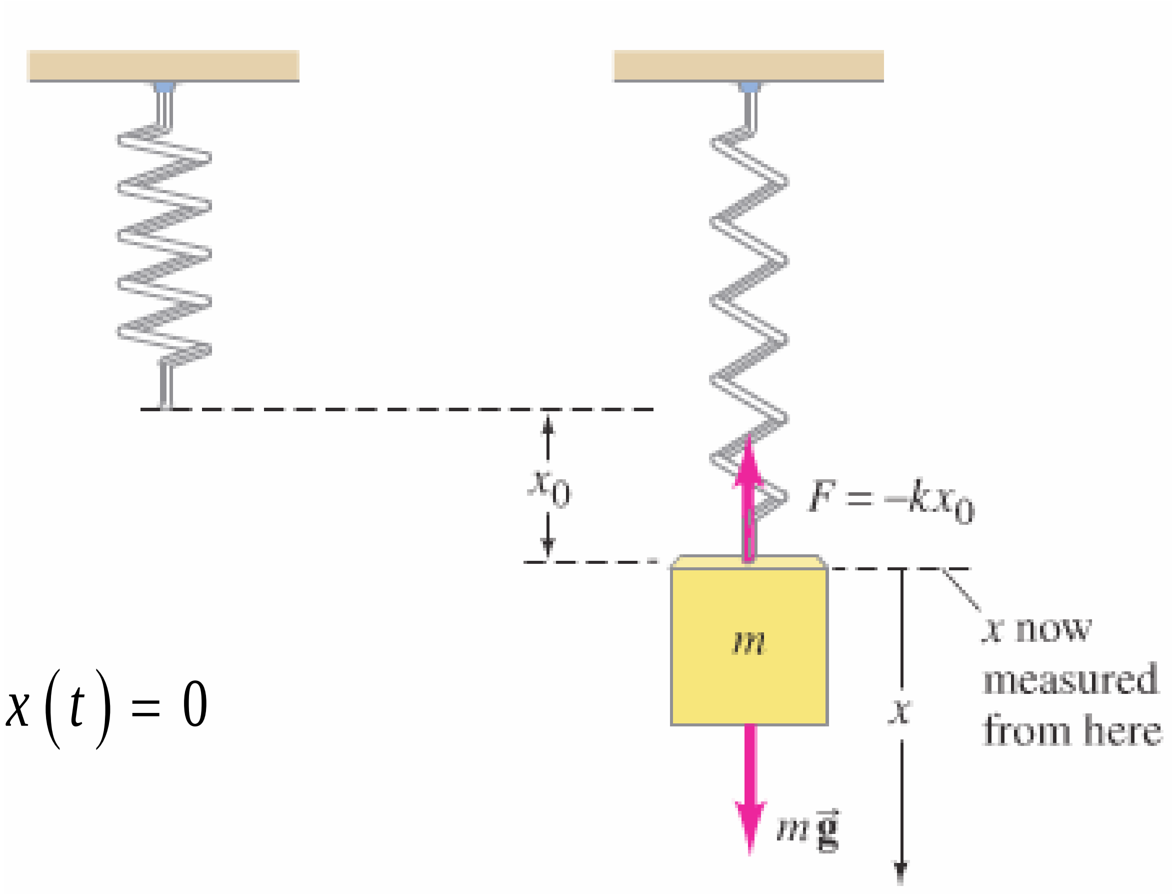
$$\left.\begin{aligned} x_0 &= x(0) = A\cos(\varphi_0) \\ v_0 &= v(0) = -\omega_0 A\sin(\varphi_0) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$tg(\varphi_0) = -\frac{v_0}{x_0\omega_0} \Rightarrow \varphi_0 = arctg\left(-\frac{v_0}{x_0\omega_0}\right)$$

$$x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2} = A^2 \quad \Rightarrow A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}$$

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

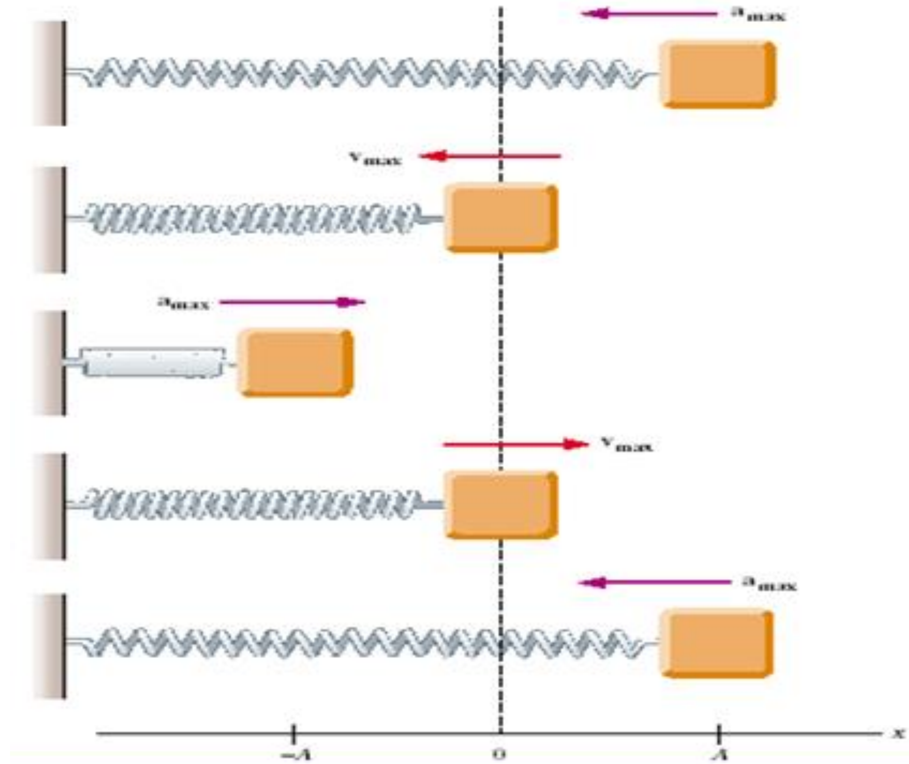
Уравнение за движението на пружинното махало



$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = 0$$

Енергия на хармоничното трептене

- *Пълната механична енергия* на трептящата система от тяло и пружина в произволен момент от времето е равна на сумата от кинетичната енергия на тялото и потенциалната енергия на деформираната пружина
- *Пълната механична енергия на системата се запазва:* превръщане на кинетичната енергия в потенциална и обратно



$$\left.\begin{aligned} K &= mv^2/2 = mA^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t+\varphi_0)/2 \\ U &= kx^2/2 = kA^2\cos^2(\omega_0 t+\varphi_0)/2 \end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$E = K + U = kA^2/2 = mA^2\omega_0^2/2 = const$$

Събиране на трептения

- *Принцип на суперпозицията* – когато едно тяло участва едновременно в две или повече хармонични трептения под действието на съответните връщащи сили, всяко от тях се извършва независимо от останалите и законът на резултантното трептене се получава като сума от съставните трептения

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

  – Следствие от линейността на уравнението за движение
- *Събиране на трептения*
  – с еднакви направления и еднакви честоти
  – с еднакви направления и близки честоти
  – с две взаимно-перпендикулярни трептения с *еднакви честоти*

Събиране на трептения с еднакви направления и еднакви честоти

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1),\ x_2(t) = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2)$$

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$A \cos(\omega_0 t + \varphi) = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2)$$

- Развиваме косинусите от сумите.
- За да бъде изпълнено горното равенство за всяко t, е необходимо коефициентите пред $\sin(\omega_0 t)$ и $\cos(\omega_0 t)$ в лявата и дясна страна да са равни.

$$A \cos\varphi = A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2$$

$$A \sin\varphi = A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2$$

Събиране на трептения с еднакви направления и еднакви честоти

- Чрез почленно разделяне и повдигане на квадрат двете уравнения получаваме:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)$$

$$tg\varphi = \frac{A_1\sin\left(\varphi_1\right) + A_2\sin\left(\varphi_2\right)}{A_1\cos\left(\varphi_1\right) + A_2\cos\left(\varphi_2\right)}$$

$$x\left(t\right) = A\cos\left(\omega_0 t + \varphi\right)$$

- *Кохерентни трептения* – хармонични трептения с еднаква честота, които се извършват с постоянна фазова разлика

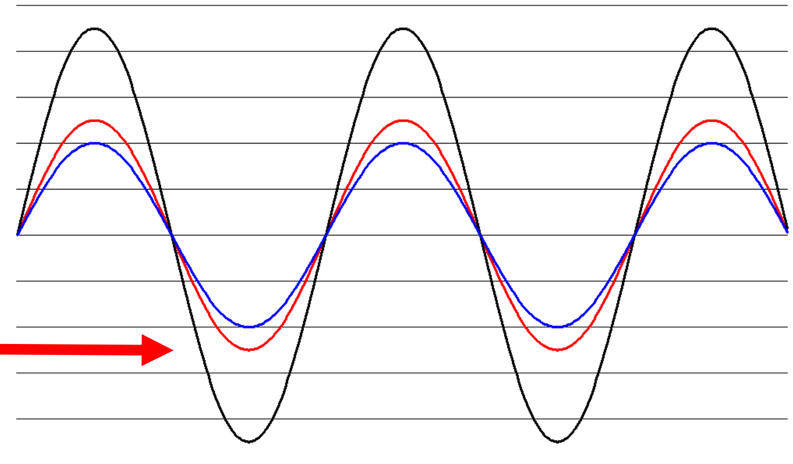
$$\varphi_1 - \varphi_2 = const$$

- При $\Delta\varphi = \pi/2$ получаваме:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2$$

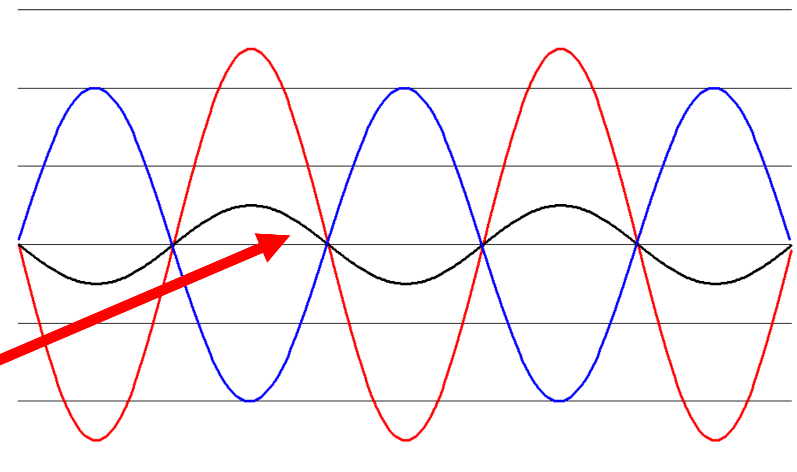
Събиране на трептения с еднакви направления и еднакви честоти – кохерентни трептения

$\Delta\varphi = 0 \qquad A = A_1 + A_2$



Трептенията са *синфазни*

$\Delta\varphi = \pi \qquad A = |A_1 - A_2|$



Трептенията са *в противофаза*

Събиране на трептения с еднакви направления и близки честоти - биене

- Получаване на хармонично трептене с пулсираща амплитуда

$$x_1(t) = A\cos(\omega_0 t); x_2(t) = A\cos\left[(\omega_0 + \Delta\omega)t\right];\ \Delta\omega << \omega_0$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = 2A\cos\left[t(2\omega_0 + \Delta\omega)t/2\right]\cos(t\Delta\omega/2)$$

$$x(t) \approx 2A\cos(t\Delta\omega/2)\cos(\omega_0 t) = A_{\mathrm{mod}}(t)\cos(\omega_0 t)$$

- ***Период на биене*** $T_\delta = 2\pi/\Delta\omega$ - времето между два последователни максимума на пулсиращата амплитуда

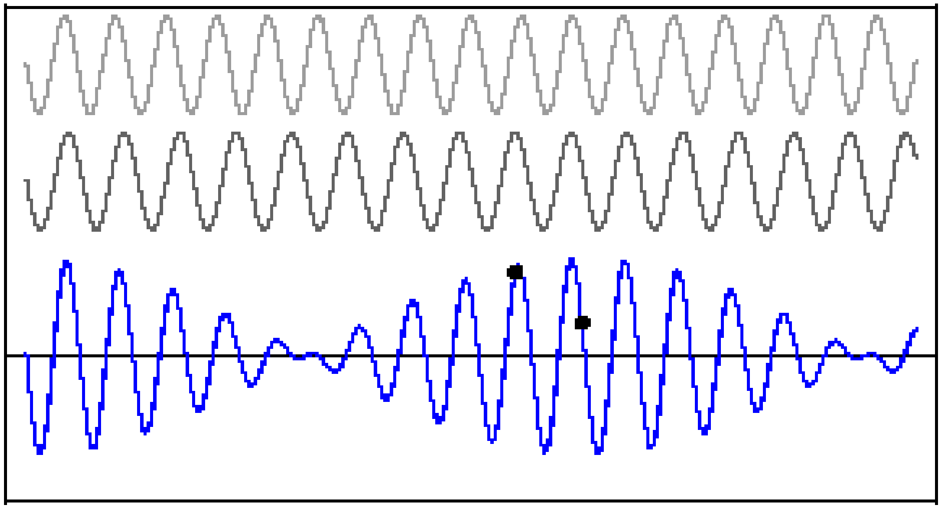
$$\left|A_{\mathrm{mod}}(t)\right|$$

Събиране на трептения с еднакви направления и близки честоти - биене

$$x_1(t) = A\cos(\omega_0 t)$$

$$x_2(t) = A\cos\left[(\omega_0 + \Delta\omega)t\right]$$

$$x(t) = 2A\cos\left(\frac{t\Delta\omega}{2}\right)\cos(\omega_0 t)$$



$$T = 2\pi/\omega_0 ; T_\delta = 2\pi/\Delta\omega ; T_\delta >> T$$

Периодичното изменение на амплитудата на трептението се нарича биене!

Събиране на две взаимно-перпендикулярни трептения с *еднакви честоти*

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) \Rightarrow x/A = \cos(\omega_0 t)$$

$$y(t) = B\cos(\omega_0 t + \varphi) =$$

$$\Rightarrow y/B = \cos(\omega_0 t)\cos(\varphi) - \sin(\omega_0 t)\sin(\varphi)$$

$$\sin(\omega_0 t) = \sqrt{1-\cos^2(\omega_0 t)} = \sqrt{1-(x/A)^2}$$

$$(x/A)\cos(\varphi) - y/B = \sin(\varphi)\sqrt{1-(x/A)^2}$$

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2\cos\varphi}{AB}\,x\,y + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\varphi$$

Събиране на две взаимно-перпендикулярни трептения с *еднакви честоти – траектория на движението*

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2\cos\varphi}{AB}\,x\,y + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\varphi$$

$$\varphi = \left(2k+1\right)\pi\big/2;\, k = 0, \pm 1, \ldots \Rightarrow x^2\big/A^2 + y^2\big/B^2 = 1$$

$$A = B \Rightarrow x^2 + y^2 = A^2$$

$$\varphi = k\pi;\; k = 0, \pm 1, \ldots \Rightarrow y = \pm\left(B/A\right)x$$

Основни тригонометрични формули

$$\cos(x+y)=\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)$$

$$\cos(x-y)=\cos(x)\cos(y)+\sin(x)\sin(y)$$

$$\cos(x+\pi/2)=-\sin(x)$$

$$\cos(x+\pi)=-\cos(x)$$

$$\cos(x)+\cos(y)=2\cos\left[(x+y)/2\right]\cos\left[(x-y)/2\right]$$