Université des Sciences et de la Technologie d'Oran. 2021-2022
Faculté des Mathématiques – Informatique –LMD– MI -1ère Année.
Analyse1

Fiche deTD3
Fonctions réelles à une variable réelle.
Limites - Fonctions équivalentes - Continuité
Prolongement par continuité - Fonctions réciproques des fonctions trigonométriques et hyperboliques.

Exercice 1:

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1/ $f(x) = \frac{x+1}{1-e^{\frac{1}{x}}}$ **2**/ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$, **3**/ $f(x) = \sqrt{x^2-1}\left(e^{\frac{1}{1-x}}\right)$,

4/ $f(x) = (1+\ln x)^{\frac{1}{x}}$, **5**/ $f(x) = \frac{1}{[x]}$, **6**/ $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-2}\,, & x > 1 \\ \ln(x+2)\,, & x \leq 1 \end{cases}$

Exercice 2 :

Calculer les limites des fonctions suivantes:

1/ $l_1 = \lim\limits_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x}$, **2**/ $l_2 = \lim\limits_{x\to +\infty} x\sin\frac{1}{x}$, **3**/ $l_3 = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin(2x)}{x+\sin(3x)}$,

4/ $l_4 = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$, **5**/ $l_5 = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{1-tgx}$, **6**/ $l_6 = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x\ln x)}{x^2}$,

7/ $l_7 = \lim\limits_{x\overset{>}{\to} a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$, **8**/ $l_8 = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$,

9/ $l_9 = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$, **10**/ $l_{10} = \lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$.

Exercice 3 :

En utilisant la définition de la limite d'une fonction, montrer que:

1/ $\lim\limits_{x\to 4}(2x-1) = 7$, 2/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{2x+1} = \frac{3}{2}$,

3/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$, 4/ $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-3}\frac{4}{x+3} = +\infty$.

Exercice 4 :

En utilisant les fonctions équivalentes, calculer les limites suivantes :

1/ $l_1 = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x\ln x}{\sin(2x)}$, **2**/ $l_2 = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+(\sin x)^2\right)}{tg\frac{x}{2}}$,

3/ $l_3 = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} e^{\frac{1}{2x-\pi}(\ln(\sin x))}$, **4**/ $l_4 = \lim\limits_{x\overset{<}{\to} e}\ln(e-x)\ln(\ln(x))$,

5/ $l_5 = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$, **6**/ $l_6 = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x}$.

Exercice 5 :

On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0 \ , & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{et } g(x) = \begin{cases} xe^{\frac{1}{x}}, & \text{si } x < 0 \\ 0 \ , & \text{si } x = 0 \\ x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right), & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f et de g sur leurs domaines de définition.

Exercice 6 :

Etudier le prolongement par continuité des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$

1/ $f(x) = \cos\frac{1}{x}$, 2/ $f(x) = x.e^{\arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)}$, 3/ $f(x) = \frac{\sin \pi x}{1-x}$.

Exercice 7 :

Montrer que:

1/ $\forall x \in [-1,1] : \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

2/ $\forall x \in [-1,1] : \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$.

Exercice 8 :

Résoudre les équations suivantes:

1/ $\arcsin x + \arcsin\left(x\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{2}$.

2/ $(\arctan x)(\arctan x + 2) = 3$.

Exercice 9 :

Simplifier les expressions suivantes:

1/ $ch(\arg shx)$,

2/ $th(\arg shx)$,

3/ $sh(2\arg shx)$.

Exercice 10 :

Déterminer le domaine de définition de la fonction f, puis la simplifier

$f(x) = \arg ch\left(\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right)$.