1. Corps des nombres réels

2. Corps des nombres complexes

2.1. Représentation algèbrique

On appelle l'ensemble des nombres complexes et on note $\mathbb{C}$ l'ensemble contenant les nombres réels tel que

$$\mathbb{C} = \left\{ z = x + iy / (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } i^2 = -1 \right\}$$

où $x = \operatorname{Re}(z)$ est dite partie réelle de z et $y = \operatorname{Im}(z)$ est dite partie imaginaire de z, et on a

$$z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z)$$

Cette représentation est dite représentation algèbrique du nombre complexe z.

Propriétés:

1. Si $z \in \mathbb{C}$ tel que $z = x + iy$ alors $z = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$.
2. Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tel que $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ alors $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$.

2.2. Représentation graphique

Dans le plan complexe, à tout point $M(x, y)$ on peut associer le nombre complexe $z = x + iy$. On dit que z est l'affixe du point M et que M est l'image ponctuelle de z et que $\overrightarrow{OM}$ est image vectorielle de z. .

Dans le repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ sur l'axe horizontal, il y a les réels dont la partie imaginaire est nulle et sur l'axe vertical, il y a les nombres imaginaire pure dont la partie réelle est nulle.

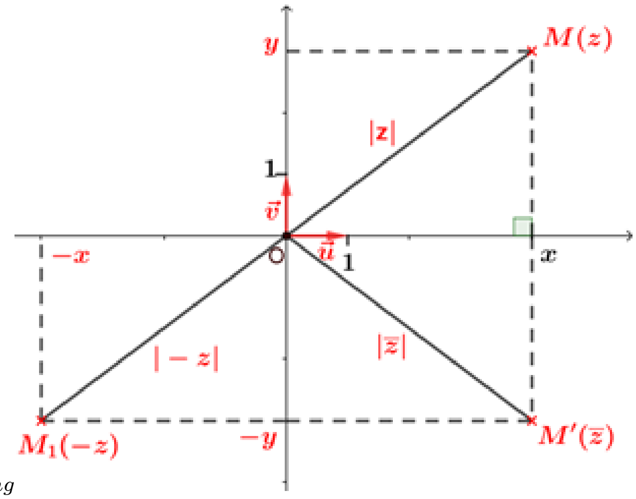
Dans le plan complexe, le module de z est la longueur du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

L'argument de z est la mesure de l'angle entre l'axe des réels et $\overrightarrow{OM}$, orienté suivant le sens trigonométrique on note $\arg z$.

Le conjugué du nombre complexe $z = x + iy$ est le nombre complexe $\overline{z} = x - iy$.

graphique d'un nombre

complexe



$_1$.png

$\overline{z}$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM'}$ (vecteur symetrique à $\overrightarrow{OM}$ par rapport à l'axe horizontal des réels.

Le module de z noté $|z| = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Propriétés:

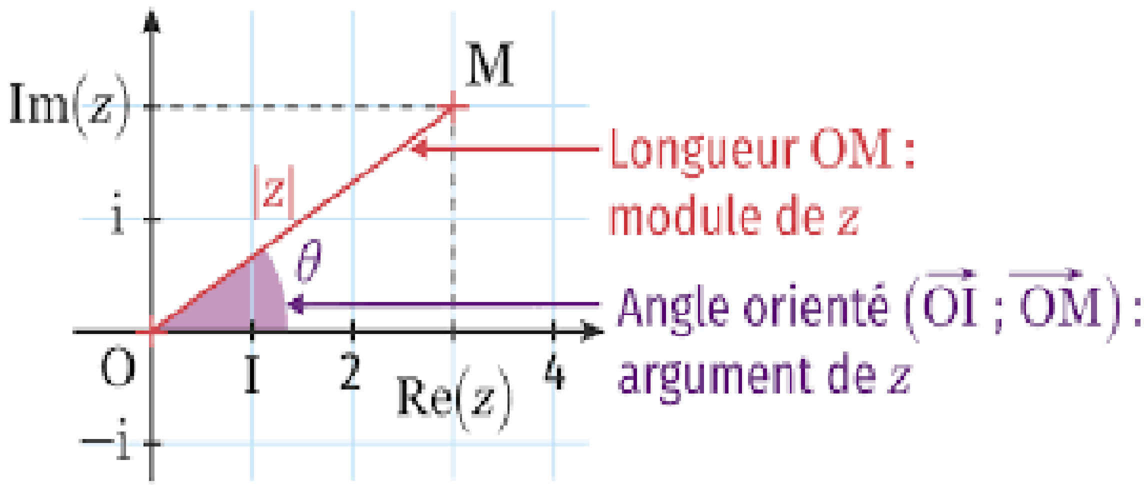
1. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
2. $\overline{\overline{z}} = z$.
3. $\operatorname{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}, \operatorname{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.
4. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$.
5. z imaginaire pur$\Leftrightarrow z = -\overline{z}$.

2.3. Représentation trigonométrique

Tout nombre complexe $z = x + iy$ peut s'écrire sous la forme

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta), r \geq 0$$

où $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ est le module de z et $\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right.$ où θ est l'argument de z. $tg\theta = \frac{y}{x}$ avec $x \neq 0$.



Propriétés:

1. $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ et $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ alors

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

2. Si $z = x \in \mathbb{R} \Rightarrow |z| = |x|$ et $\arg z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
3. Si $z = iy \Rightarrow |z| = |y|$ et $\arg z = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
4. Soit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ alors

a) $\overline{z} = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$, c'est à dire $\arg(\overline{z}) = -\arg z$.

b) $-z = -r(\cos\theta + i\sin\theta) = r(-\cos\theta - i\sin\theta) = r(\cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi))$ c'est à dire $\arg(-z) = \arg z + \pi$.

Exemple:

1. $z = 3+3i$, $\operatorname{Re} z = 3$ et $\operatorname{Im} z = 3$, $|z| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, $\begin{cases} \cos\theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

d'où

$$z = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

2. $z = \sqrt{6}+i\sqrt{2}$, $\operatorname{Re} z = \sqrt{6}$ et $\operatorname{Im} z = \sqrt{2}$, $|z| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

d'où

$$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

Exemple: Soient les nombres complexes suivants

$$z_1 = 1 - i, z_2 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}.$$

1. Déterminer la forme trigonométrique de $z_1; z_2; \frac{z_1}{z_2}$.
2. Déterminer la forme algèbrique de $\frac{z_1}{z_2}$.
3. En déduire les valeurs exactes de: $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right), \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right), \cos\left(\frac{\pi}{12}\right), \sin\left(\frac{\pi}{12}\right).$

Solution:

1. $|z_1| = \sqrt{2}, \begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_1 = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi.$

d'où

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

$|z_2| = \sqrt{2}, \begin{cases} \cos\theta_2 = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_2 = \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_2 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi.$

d'où

$$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)} = \cos\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) \\ \frac{z_1}{z_2} &= \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right). \end{aligned}$$

2. Forme algèbrique de $\frac{z_1}{z_2}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 - i}{\frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}} = \frac{2 - 2i}{\sqrt{6} - i\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

3. Par identification de la forme algèbrique avec le forme trigonométrique du nombre complexe $\frac{z_1}{z_2}$, on obtient:

$$\begin{aligned}
\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\\
\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\\
\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\\
\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= -\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) = -\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right).
\end{aligned}$$

2.4. Forme exponentielle

Pour tout nombre réel θ, on appelle exponentielle complexe noté $e^{i\theta}$, le nombre complexe de module 1 et d'argument θ,

$$\begin{aligned}
e^{i\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta\\
e^{-i\theta} &= \cos\theta - i\sin\theta
\end{aligned}$$

par suite on a la formule d'Euler

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\\
\sin\theta &= \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i},
\end{aligned}$$

par conséquent, pour tout nombre complexe $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, où $r_1 = |z_1|$, on a

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \text{ et } \overline{z_1} = r_1 e^{-i\theta_1}$$

et pour $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, où $r_2 = |z_2| / r_2 \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}
z_1.z_2 &= r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}\\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}.
\end{aligned}$$

Remarque:

1.
$$e^{2\pi i}=1, e^{i\frac{\pi}{2}}=i, e^{i\pi}=-1, e^{-i\frac{\pi}{2}}=-i.$$
2.
$$e^{i\theta}=e^{i(\theta+2k\pi)}, \forall\theta\in\mathbb{R}, \forall k\in\mathbb{Z}.$$

Propriétés:

1.
$$\forall\theta,\theta'\in\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{N}, e^{i\theta}.e^{i\theta'}=e^{i(\theta)+\theta'}, \left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta}.$$
2.
$$\frac{1}{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}=\overline{e^{i\theta}}, \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}=e^{i(\theta)-\theta'}.$$

2.5. Opérations sur les nombres complexes

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes tels que

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1+iy_1=r_1\left(\cos\theta_1+i\sin\theta_1\right)=r_1e^{i\theta_1} \\ z_2 &= x_2+iy_2=r_2\left(\cos\theta_2+i\sin\theta_2\right)=r_2e^{i\theta_2} \end{aligned}$$

1. L'addition

$$\begin{aligned} z_1+z_2 &= \left(x_1+x_2\right)+i\left(y_1+y_2\right)\text{...forme algèbrique} \\ z_1+z_2 &= r_1\left(\cos\theta_1+i\sin\theta_1\right)+r_2\left(\cos\theta_2+i\sin\theta_2\right)\text{...forme trigonométrique} \\ z_1+z_2 &= r_1e^{i\theta_1}+r_2e^{i\theta_2}\text{...forme exponentielle.} \end{aligned}$$

2. Le produit

$$\begin{aligned} z_1.z_2 &= \left(x_1x_2-y_1y_2\right)+i\left(x_1y_2+x_2y_1\right)\text{...forme algèbrique} \\ z_1.z_2 &= r_1r_2\left(\cos\left(\theta_1+\theta_2\right)+i\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\right)\text{...forme trigonométrique} \\ z_1.z_2 &= r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}\text{...forme exponentielle.} \end{aligned}$$

3. Division

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\left(x_1x_2+y_1y_2\right)}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{\left(x_2y_1-x_1y_2\right)}{x_2^2+y_2^2}\text{...forme algèbrique} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}\left(\cos\left(\theta_1-\theta_2\right)+i\sin\left(\theta_1-\theta_2\right)\right)\text{...forme trigonométrique} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}\text{...forme exponentielle.} \end{aligned}$$

Propriétés:
Si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes tels que $z_2 \neq 0$ alors
1. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
2. $|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$.
3. $z_1.\overline{z_1} = |z_1|^2 \in \mathbb{R}_+$.
4. $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2, \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$.
5. $\frac{1}{z_2} = \frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2}$.

2.6. Formule de Moivre

Soit z le nombre complexe de module $r = 1$ et d'argument $\theta \in \mathbb{R}$

$$z = \cos\theta + i\sin\theta$$

Alors

$$z^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Cette formule est appelée formule de Moivre.

2.7. Racine n^{ième} d'un nombre complexe

Soit $\omega \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}/\omega = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.

Pour résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^n = \omega,$$

on pose $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, cherchons r et θ tels que

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Par identification:4

$$5\begin{cases} r^n = \rho \\ n\theta = \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \theta = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

On trouve les solutions pour $k = 0, 1, 2, ..., \mathbf{n-1}$.

Exemple:

Trouver la racine cubique du nombre complexe $\omega = 1$.

On a $\omega = 1 = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi$ et cherchons $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ tel que $z^3 = 1$

$$z^3 = r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = 1(\cos 2k\pi + i\sin 2k\pi),$$

par identification

$$\left\{\begin{array}{c} r^3 = 1 \\ 3\theta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} r = \sqrt[3]{1} = 1 \\ \theta = \frac{2k\pi}{3}, k = 0, 1, 2 \end{array}\right.,$$

par conséquent, ona trois racines cubiques

$$\begin{aligned}
\text{Pour } k &= 0,\ z_1 = 1 \\
\text{Pour } k &= 1,\ z_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\
\text{Pour } k &= 2,\ z_3 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

Racine carrée d'un nombre complexe:

Exemple d'application: Déterminer les racines carrées de $\omega = 3 + 4i$.

On a $|\omega| = 5$, $\cos\alpha = \frac{3}{5}, \sin\alpha = \frac{4}{5}$ on remarque que $\arg\alpha$ n'est pas parmis les argument connus, pour celà on va utiliser la forme algèbrique.

Cherchons un $z = x + iy / z^2 = \omega$

$$\begin{aligned}
z^2 &= x^2 - y^2 + 2ixy = \omega = 3 + 4i \\
|z|^2 &= x^2 + y^2 = |\omega| = 5,
\end{aligned}$$

$$\left\{\begin{array}{c} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 = 4 \\ y^2 = 1 \\ xy = 2 \end{array}\right. \Rightarrow (x, y) = (2, 1) \text{ ou } (x, y) = (-2, -1)$$

d'où les racines carrées de $\omega = 3 + 4i$ sont $z_1 = 2 + i, z_2 = -2 - i$.

2.8. Résolution des équations du second degré dans $\mathbb{C}$

Etant donnée l'équation

$$az^2 + bz + c = 0, a, b, c \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}.$$

Pour résoudre cette équation, on calcule le discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

puis on distingue les trois cas:

1^{er} cas: $\Delta > 0, z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

$2^{ème}$ cas: $\Delta = 0, z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}$.

$3^{ème}$ cas: $\Delta < 0, z_1 = \frac{-b-i\sqrt{\Delta}}{2a}, z_2 = \frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Remarque: Si les coéfficients $a, b, c \in \mathbb{C}$ alors le discriminant Δ pourrait être un nombre complexe, donc il faudra calculer sa racine carrée.

Exemple: Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - (7+i)\,z + 12 + 3i = 0,$$

$\Delta = 2i$ et $\sqrt{\Delta} = 1 + i$ ou $-1 - i$.

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{7+i+1+i}{2} = 4+i \\ z_2 &= \frac{7+i-1-i}{2} = 3. \end{aligned}$$