Corrigé test 1 Modèle 1

Exercice1:

$$A = \left\{1 + \frac{1}{2n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

Montrons d'abord que A est bornée.

Soit $x \in A \Rightarrow x = 1 + \frac{1}{2n}, n \geq 1$.

On a: $n \geq 1 \Leftrightarrow 2n \geq 2 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 < 1 + \frac{1}{2n} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow A$ est bornée.$(*)$

On a aussi $\frac{3}{2} \in A$ pour $n = 1$, $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2.1} \in A$ et $\frac{3}{2}$ est un mojorant de A, alors $\max A = \frac{3}{2} = \sup A$.

$$\inf A = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, x \geq 1 \text{ vérifiée d'aprés } (*) \\ \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \geq 1/1 + \frac{1}{2n_\varepsilon} < 1 + \varepsilon \end{cases}$$

Soit $\varepsilon > 0, 1 + \frac{1}{2n_\varepsilon} < 1 + \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{2n_\varepsilon} < \varepsilon \Rightarrow n_\varepsilon > \frac{1}{2\varepsilon}$, il suffit de prendre $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{2\varepsilon}\right] + 1$.

Exercice2:

$$\begin{cases} U_0 \leq 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 1, n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

1. Montrons que $U_n \leq 2, \forall n \in \mathbb{N}$ par recurrence.

Pour $n = 0$, on a $U_0 \leq 2$ vraie.

Supposons que $U_n \leq 2$ et montrons que $U_{n+1} \leq 2$.

On a $U_n \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}U_n \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}U_n + 1 \leq 2 \Leftrightarrow U_{n+1} \leq 2$. D'où $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq 2$.

Monotonie:

$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}U_n + 1 - U_n = -\frac{1}{2}U_n + 1$.

On a $U_n \leq 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}U_n + 1 \geq 0$ alors (U_n) est croissante.

2. Puisque (U_n) est croissante et majorée alors elle est convergente vers l.

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1} = l \Leftrightarrow l = \frac{1}{2}l + 1 \Leftrightarrow l = 2$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 2$.

3. $V_n = U_n - 2$.

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{\frac{1}{2}U_n + 1 - 2}{U_n - 2} = \frac{\frac{1}{2}U_n - 1}{U_n - 2} = \frac{\frac{1}{2}(U_n - 2)}{U_n - 2} = \frac{1}{2}.$$

D'où (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

Expression de U_n en fonction de U_0 et n.

On a (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$, alors

$$V_n = V_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n = (U_0 - 2)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

et

$$U_n = V_n + 2 = (U_0 - 2)\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2.$$