Chap II : Les suites

Définitions :

I] Une suite des nombres réels est une partie de IN dans IR, qui à chaque élément de IN associe un unique élément noté U_n, appelé terme d'indice n de la suite (U_n).

$$U : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longrightarrow U_n$$

II] * Suite arithmétique $(a + n.r)$ $a \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$ حسابية

* Suite géométrique $(a . k^n)$ $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$ هندسية

* Suite puissance (n^α) $n \geqslant 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ أسية

Monotonie d'une suite réelle :

Soit (U_n) une suite réelle.

* (U_n) est croissante ↗ si : $\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} - U_n \geqslant 0$

(U_n) est strictement croissante si : $\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} - U_n > 0$

* (U_n) est décroissante ↘ si : $\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} - U_n \leqslant 0$

(U_n) est strictement décroissante si : $\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} - U_n < 0$

* (U_n) est monotone si elle est croissante ou décroissante.

(U_n) est strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

- Suites bornées :

Définitions : Soit (U_n) une suite réelle

* (U_n) est majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \leq M$.

  Alors M est appellé majorant de la suite (U_n).

* (U_n) est minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $m \leq U_n$.

  Alors m est appellé minorant de la suite (U_n).

* (U_n) est bornée si elle est majorée et minorée,

  $\exists m, M \in \mathbb{R} \ / \ \forall n \in \mathbb{N} \ ; \quad m \leq U_n \leq M$

ou : $\exists \ell \in \mathbb{R} \ / \ \forall n \in \mathbb{N} \ ; \quad |U_n| \leq \ell$

- Suites convergentes :

Définition :

On dit que (U_n) est convergente s'il existe un réel $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell \overset{\text{i.e}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \Rightarrow |U_n - \ell| < \varepsilon$

Théorème : Si (U_n) est convergente, alors sa limite est unique.

Propositions :

1. Toute suite convergente est bornée.
2. Si (U_n) est convergente alors toutes ses sous-suites sont convergentes vers la même limite.

Remarques :

* (U_n) est divergente si elle n'admet pas de limite ou elle tend vers l'infini ou bien elle admet plusieurs limites différentes.

* Par contraposée, une suite non bornée est divergente.

Mais la réciproque n'est pas vraie, une suite bornée n'est pas toujours convergente.

* Par contraposée, il suffit de trouver 2 sous-suites qui ne convergent pas vers la même limite pour dire qu'une suite est divergente.

* Si (U_n) croissante et majorée, alors elle est convergente vers sa borne sup.

* Si (U_n) décroissante et minorée, alors elle est convergente vers sa bonne inf.

Opérations sur les suites convergentes :

Théorème : Soient (U_n) et (V_n) deux suites convergentes. $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \ell_1 \qquad \lim_{n \to +\infty} V_n = \ell_2$$

1. $\lim_{n \to +\infty} (U_n + V_n) = \ell_1 + \ell_2$
2. $\lim_{n \to +\infty} (\lambda . U_n) = \lambda . \ell_1$
3. $\lim_{n \to +\infty} (U_n . V_n) = \ell_1 . \ell_2$
4. $\lim_{n \to +\infty} \frac{U_n}{V_n} = \frac{\ell_1}{\ell_2}$ avec $\ell_2 \neq 0$
5. $\lim_{n \to +\infty} |U_n| = |\ell_1|$

Remarque :

- La somme de 2 suites divergentes peut être convergente.
- La valeur absolue d'une suite divergente peut être convergente.

Propriétés :

- Si $U_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, alors : $\lim_{n \to +\infty} U_n \geq 0$
- Si $U_n < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, alors : $\lim_{n \to +\infty} U_n \leq 0$
- Si $U_n < V_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, alors : $\lim_{n \to +\infty} U_n \leq \lim_{n \to +\infty} V_n$

Théorème d'encadrement / Théorème des gendarmes :

Soient (U_n), (V_n) et (W_n) trois suites définis sur $\mathbb{N}$.
Si, à partir d'un certain rang, $U_n \leq V_n \leq W_n$
et $\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} W_n = \ell \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} V_n = \ell$

Théorème :

(X_n) bornée

et

$\lim_{n\to+\infty} Y_n = 0$

$\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} X_n \cdot Y_n = 0$

Théorème :

Toute suite réelle bornée (U_n) admet une sous-suite convergente

• Suites adjacentes :

Définition :

(U_n) et (V_n) sont adjacentes si :

1. (U_n) croissante $\nearrow$.
2. (V_n) décroissante $\searrow$.
3. $\lim_{n\to+\infty} (U_n - V_n) = 0$.

ou l'inverse

Théorème :

Deux suites réelle adjacentes (U_n) et (V_n) sont convergentes vers la même limite.

i.e: $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} V_n$

- ## La définition de la limite de la Suite (U_n) :

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \ell \iff \forall \varepsilon>0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \Rightarrow |U_n-\ell|<\varepsilon$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty \iff \forall A>0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \Rightarrow U_n > A$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = -\infty \iff \forall A>0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \Rightarrow U_n < -A$$

- ## Suites de Cauchy :

Définition : Soit (U_n) une suite

On dit que (U_n) est de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall p,q \in \mathbb{N} : \begin{cases} p \geq N_\varepsilon \\ \wedge\, q \geq N_\varepsilon \end{cases} \Rightarrow |U_p-U_q|<\varepsilon$$

Théorème : (U_n) convergente $\iff$ (U_n) est de Cauchy.

(U_n) Cauchy $\iff$ (U_n) convergente $\Rightarrow$ (U_n) bornée.

- ## Suites divergentes :

Définition : On dit que (U_n) est divergente si elle ne converge pas si :

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \exists \varepsilon>0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ n \geq N,\ |U_n-a|>\varepsilon$$

Remarque :

- Une suite non bornée est divergente.
- Si 2 extraites de (U_n) converge vers 2 limites distinctes alors (U_n) diverge.

Définition :

* (U_n) diverge vers $+\infty$ ou admet pour limite $+\infty$ notée $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

si : $\forall a \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, U_n > a$

* (U_n) diverge vers $-\infty$ ou admet pour limite $-\infty$ notée $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$

si : $\forall a \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, U_n < a$

Remarque : On distingue 2 cas de divergence :

* Cas des limites infinies.
* Cas où la suite n'admet pas de limite.

Théorème : Soit (U_n) croissante (resp. décroissante)

Les conditions suivantes sont équivalentes :

* $\lim\limits_{n\to+\infty} (U_n) = +\infty \ (-\infty)$.
* La suite (U_n) est non majorée (resp. non (U_n) minorée).

Limites infinies :

Soient (U_n) et (V_n) deux suites telles que, à partir un certain rang N, $U_n \leqslant V_n$

* Si $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$
* Si $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$

Suites récurrentes :

Définition : Soit (U_n) une suite récurrente

$$\begin{cases} \text{Le premier terme } (U_p) \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

Si f est croissante $(f'(x) \geq 0)$ alors (U_n) est monotone

Il suffit de calculer la différence $f(U_p) - U_p$:

- $f(U_p) - U_p > 0 \Rightarrow (U_n)$ croissante ↗
- $f(U_p) - U_p < 0 \Rightarrow (U_n)$ décroissante ↘

Remarque : Si (U_n) est convergente vers ℓ alors sa limite vérifie l'équation $f(\ell) = \ell$.

Sous-suites :

Définition : Une suite extraite ou une sous-suite de (U_n) est une suite de la forme $(U_{s(n)})$ où $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

Théorème : Si (U_n) est bornée, (U_n) a une sous-suite convergente.

Remarque : Généralement, une sous-suite d'une sous-suite est une sous-suite.

Propositions :

- Toute suite extraite d'une suite monotone est monotone.

  (La réciproque est fausse)

- Toute suite extraite d'une suite bornée est bornée.

  (La réciproque est fausse)

- Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente.
- Si (U_n) tend vers ℓ (finie ou infinie) alors toute suite extraite de (U_n) tend vers la même limite ℓ.
- Si on a deux sous-suite de (U_n) qui ont des limites différentes la suite (U_n) ne converge pas.
- . Si (U_n) n'est pas majorée, (U_n) admet une sous-suite qui converge vers $+\infty$.

  . Si (U_n) n'est pas minorée, (U_n) admet une sous-suite qui converge vers $-\infty$.

Bonus

Bonus ①:

Si on nous dit de montrer $\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} + Y \overset{\leq}{\geq} U_n + X$

*Note: Si il y a (U_{n-1}) au lieu de (U_{n+1}), il faut rendre l'inégalité avec (U_{n+1})

1èr méthode:

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N} : \ U_{n+1} + Y \overset{\leq}{\geq} U_n + X$

i.e: $\quad U_{n+1} + Y - U_n - X \overset{\leq}{\geq} 0$

(autre chose ou طريقة البناء)

2ème méthode:

On a : $\quad U_{n+1} + Y \overset{\leq}{\geq} U_n + X$

Si $n \in \mathbb{N}$

0 : $\quad \cancel{U_1} + Y \overset{\leq}{\geq} U_0 + X$

1 : $\quad \cancel{U_2} + Y \overset{\leq}{\geq} \cancel{U_1} + X$

2 : $\quad \cancel{U_3} + Y \overset{\leq}{\geq} \cancel{U_2} + X$

⋮

n : $\quad U_{n+1} + Y \overset{\leq}{\geq} \cancel{U_n} + X$

---

par addition : ~~~

ou

par multiplication : ~~~

(tout dépend de l'exercice mais c'est ça l'idée)

[la 2ème méthode marche aussi avec des inégalités avec U_n et n]

Bonus ②:

Propriété:

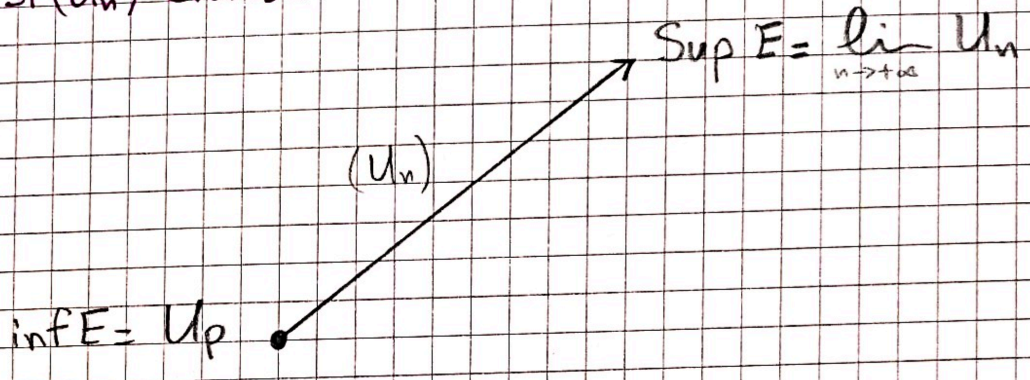
- (ω_n) croissante ↗ alors : $\omega_p \leq \omega_n$ (premier terme)

- (ω_n) décroissante ↘ alors : $\omega_n \leq \omega_p$

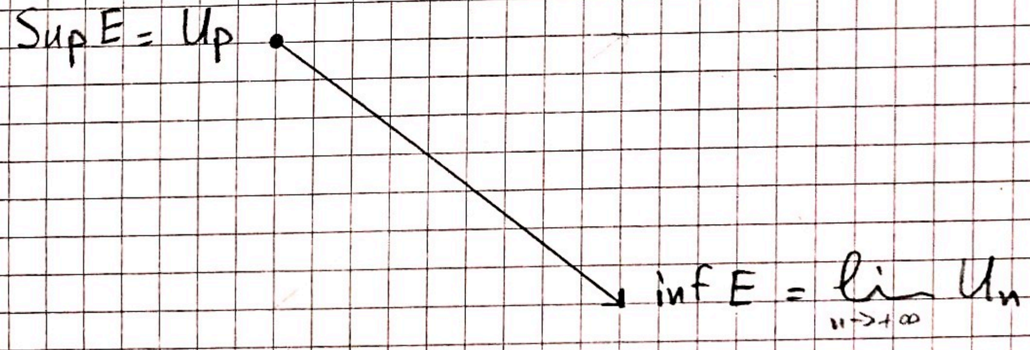
Bonus ③:

Exemple: Soit $E = \{ U_n \; ; \; n \in \mathbb{N} \}$

- Si (U_n) croissante :



- Si (U_n) décroissante :



Bonus ④:

Propriété:

- $\left.\begin{array}{l} U_n \leq V_n \\ \text{et } \lim V_n = M \\ \text{et } (U_n) \nearrow \end{array}\right\} \Rightarrow M = \operatorname{Sup}(U_n)$

- $\left.\begin{array}{l} V_n \leq U_n \\ \text{et } \lim V_n = m \\ \text{et } (U_n) \searrow \end{array}\right\} \Rightarrow m = \inf(U_n)$