Chapitre 3
Equations différentielles
Partie 3

Damerdji Bouharis A.
Université des Sciences et de la Technologie Mohamed Boudiaf
Faculté des Mathématiques et Informatique.

3.2.5 Equations de Riccati

Définition 3.2.15 *Une équation de Riccati est une équation différentielle non linéaire d'ordre 1 de la forme*

$$y'(x) = a(x)\, y^2(x) + b(x)\, y(x) + c(x) \tag{3.32}$$

où a, b et c sont des fonctions données, continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, avec $a(x) \neq 0$, $b(x) \neq 0$ et $c(x) \neq 0, \forall x \in I$.

Remarque L'équation de Riccati est non linéaire.

Méthode de résolution

La résolution consiste à trouver d'abord une solution particulière de l'équation (3.32) notée $s(x)$ puis faire le changement de variables suivant

$$y(x) = z(x) + s(x) \Rightarrow y'(x) = z'(x) + s'(x),$$

ensuite on remplace dans (3.32), d'où

$$\begin{aligned} z'(x) + s'(x) &= a(x)\,(z(x) + s(x))^2 + b(x)\,(z(x) + s(x)) + c(x) \qquad (3.33) \\ &= a(x)\, z^2(x) + b(x)\, z(x) + a(x)\, s^2(x) + b(x)\, s(x) + c(x) + 2a(x)\, z(x)\, s(x) \end{aligned}$$

et comme $s(x)$ est une solution particulière de (3.32) alors elle vérifie

$$s'(x) = a(x)\, s^2(x) + b(x)\, s(x) + c(x)$$

donc

$$\begin{aligned} (3.33) \quad &\Leftrightarrow z'(x) = a(x)\, z^2(x) + b(x)\, z(x) + 2a(x)\, z(x)\, s(x) \\ &= a(x)\, z^2(x) + z(x)\,[b(x) + 2a(x)\, s(x)] \\ &\Leftrightarrow z'(x) - z(x)\,(b(x) + 2a(x)\, s(x)) - a(x)\, z^2(x) = 0 \end{aligned}$$

qui est une équation de Bernoulli, avec $\alpha = 2$.

Exemple 3.2.16 *Intégrer l'équation différentielle suivante*

$$xy' - y^2 + (2x+1)\, y - x^2 - 2x = 0, \text{ pour } x \neq 0 \tag{3.34}$$

Solution

$$(3.34) \Leftrightarrow y' = \frac{1}{x} y^2 - \left(2 + \frac{1}{x}\right) y + x + 2. \tag{3.35}$$

On remarque que l'équation (3.35) *admet la fonction $s(x) = x$ comme solution particulière et on fait le changement de variables suivant :*

$$y = z + x \Rightarrow y' = z' + 1,$$

puis on remplace dans (3.35), d'où

$$z' + 1 = \frac{1}{x}(z+x)^2 - \left(2 + \frac{1}{x}\right)(z+x) + x + 2$$

ce qui est équivalent à

$$z' - \frac{1}{x}z^2 + \frac{z}{x} = 0 \Leftrightarrow xz' + z - z^2 = 0 \tag{3.36}$$

qui est une équation de Bernoulli avec $\alpha = 2$.

On divise l'équation (3.36) par z^2, d'où

$$x\frac{z'}{z^2} + \frac{1}{z} - 1 = 0 \tag{3.37}$$

$$CV : t = z^{-1} \Rightarrow t' = -\frac{z'}{z^2},$$

alors

$$(3.37) \Rightarrow -xt' + t = 1 \tag{3.38}$$

qui est une équation linéaire d'ordre 1 avec second membre.

Equation homogène

$$-xt' + t = 0 \Leftrightarrow \frac{t'}{t} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{dt}{t} = \frac{dx}{x}$$

d'où en intégrant on obtient

$$\ln|t| = \ln|x| + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R},$$
$$|t| = e^{\ln|x|+c_1} = e^{c_1}e^{\ln|x|},$$

donc

$$t_{\text{hom}}(x) = kx,\ \text{avec } k = \pm e^{c_1}.$$

Variation de la constante

On fait varier la constante k alors $t' = k'x + k$, d'où

$$(3.38) \Rightarrow k' = -\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow dk = -\frac{dx}{x^2}$$

alors en intégrant on obtient

$$k(x) = \frac{1}{x} + c,\ c \in \mathbb{R},$$

et en remplaçant dans t_{hom}, on obtient

$$t_{gle}(x) = \left(\frac{1}{x} + c\right)x = 1 + cx,\ \text{avec } c \in \mathbb{R},$$

par conséquent on a

$$z_{gle}(x) = \frac{1}{1+cx},\ \text{avec } c \in \mathbb{R},$$

et enfin

$$y_{gle}(x) = z_{gle} + x = \frac{1}{1+cx} + x,\ \text{avec } c \in \mathbb{R}.$$

Exemple 3.2.17 *Intégrer l'équation différentielle suivante, sachant que la fonction* $s(x) = \frac{1}{x}$ *est une solution particulière*

$$y' + \frac{y}{x} - y^2 = -\frac{1}{x^2}, \tag{3.39}$$

Solution *On fait le changement de variables suivant :*

$$y = z + \frac{1}{x} \Rightarrow y' = z' - \frac{1}{x^2},$$

puis on remplace dans (3.39) , *d'où*

$$z' - \frac{1}{x^2} + \frac{z}{x} + \frac{1}{x^2} - \left(z + \frac{1}{x}\right)^2 = -\frac{1}{x^2},$$

ce qui est équivalent à :

$$z' - \frac{z}{x} - z^2 = 0 \tag{3.40}$$

qui est une équation de Bernoulli avec $\alpha = 2$.

On divise l'équation (3.40) *par* z^2, *tout en supposant que* $z \neq 0$, *d'où*

$$\frac{z'}{z^2} - \frac{1}{zx} - 1 = 0 \tag{3.41}$$

$$CV : t = z^{-1} \Rightarrow t' = -\frac{z'}{z^2},$$

alors

$$(3.41) \Rightarrow -t' - \frac{t}{x} = 1 \tag{3.42}$$

qui est une équation linéaire d'ordre 1 non homogène,

Equation homogène

$$-t' - \frac{t}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{t'}{t} = \frac{-1}{x} \Leftrightarrow \frac{dt}{t} = -\frac{dx}{x}$$

d'où en intégrant on obtient

$$\begin{aligned} \ln|t| &= -\ln|x| + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R}, \\ |t| &= e^{-\ln|x| + c_1} = e^{c_1} e^{-\ln|x|}, \end{aligned}$$

donc

$$t_{\text{hom}}(x) = \frac{k}{x},\ \text{avec } k = \pm e^{c_1}.$$

Variation de la constante

On fait varier la constante k *alors* $t' = \frac{k'}{x} - \frac{k}{x^2}$, *d'où*

$$(3.42) \Rightarrow k' = -x \Leftrightarrow dk = -x dx$$

alors en intégrant on obtient

$$k(x) = -\frac{x^2}{2} + c,\ c \in \mathbb{R},$$

et en remplaçant dans t_{Hom}, on obtient :

$$t_{gle}(x) = \frac{1}{x}\left(-\frac{x^2}{2}+c\right) = \frac{-x^2+2c}{2x},\ \text{avec } c \in \mathbb{R},$$

par conséquent on a

$$z_{gle}(x) = \frac{2x}{-x^2+2c},\ \text{avec } c \in \mathbb{R},$$

donc

$$y_{gle}(x) = z_{gle} + \frac{1}{x} = \frac{2x}{-x^2+2c} + \frac{1}{x},\ \text{avec } c \in \mathbb{R}.$$

et enfin

$$y_{gle}(x) = \frac{x^2+2c}{x(-x^2+2c)},\ \text{avec } c \in \mathbb{R}.$$

Exemple 3.2.18 *Intégrer l'équation différentielle suivante, sachant que la fonction $s(x) = x+1$ est une solution particulière*

$$y' - 2xy + y^2 = 2 - x^2. \tag{3.43}$$

Solution *On remarque que l'équation* (3.43) *admet comme solution particulière la fonction $s(x) = x+1$, et on fait le changement de variables suivant*

$$y = z + (x+1) \Rightarrow y' = z' + 1,$$

puis on remplace dans (3.43) *, d'où*

$$z' + 1 - 2x(z + (x+1)) + (z + (x+1))^2 = 2 - x^2,$$

ce qui est équivalent à

$$z' + 2z + z^2 = 0 \tag{3.44}$$

qui est une équation de Bernoulli avec $\alpha = 2$.

On divise l'équation (3.44) *par z^2 tout en supposant que $z \neq 0$, d'où*

$$\frac{z'}{z^2} + \frac{2}{z} + 1 = 0$$

$$CV : t = z^{-1} \Rightarrow t' = -\frac{z'}{z^2},$$

alors

$$(3.41) \Rightarrow -t' + 2t = -1 \tag{3.45}$$

qui est une équation linéaire d'ordre 1 avec second membre.

Equation homogène :

$$-t' + 2t = 0 \Leftrightarrow \frac{t'}{t} = 2 \Leftrightarrow \frac{dt}{t} = 2dx$$

d'où en intégrant on obtient :

$$\begin{aligned} \ln|t| = 2x + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R}, \\ \Leftrightarrow |t| = e^{2x+c_1} = e^{c_1}.e^{2x} \end{aligned}$$

donc

$$t_{\text{hom}}(x) = ke^{2x},\ \textit{avec } k = \pm e^{c_1}.$$

<u>*Variation de la constante*</u>
Ensuite on fait varier la constante k *alors* $t' = e^{2x}(k' + 2k)$, *d'où*

$$(3.45) \Rightarrow k' = e^{-2x} \Leftrightarrow dk = e^{-2x}dx$$

alors en intégrant on obtient :

$$k(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + c,\ c \in \mathbb{R},$$

et en remplaçant dans t_{hom}, *on obtient :*

$$t_{gle}(x) = e^{2x}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x} + c\right) = ce^{2x} - \frac{1}{2},\ \textit{avec } c \in \mathbb{R},$$

par conséquent on a :

$$z_{gle}(x) = \frac{2}{2ce^{2x} - 1},\ \textit{avec } c \in \mathbb{R},$$

donc

$$y_{gle}(x) = z_{gle} + 1 + x = \frac{2}{2ce^{2x} - 1} + 1 + x,\ \textit{avec } c \in \mathbb{R}.$$

et enfin

$$y_{gle}(x) = \frac{1 - x + 2ce^{2x}(x+1)}{2ce^{2x} - 1},\ \textit{avec } c \in \mathbb{R}.$$