Université des Sciences et de la Technologie d'Oran USTO-MB.
Faculté des Mathématiques-Informatique. 23-07-2022
1ère Année MI Durée: 1h30min

Examen de rattrapage d'Analyse 1

Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Exercice 1. (5 points)

Répondre par vrai ou faux aux propositions suivantes en justifiant votre réponse.

Toute réponse non justifiée sera notée par un zéro même si elle est juste.

1. Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, si $M = \sup A$ alors $M \notin A$.
2. Toute suite réelle décroissante est convergente.
3. Toute suite réelle bornée est de Cauchy.
4. Toute fonction réelle discontinue en un point x_0 est non dérivable en x_0.
5. Toute fonction réelle non dérivable en x_0 est discontinue en x_0.

Exercice 2. (5,5 points)

Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite récurrente définie par

$$\begin{cases} U_1 = \sqrt{2} \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n + 2} \quad ; n \geq 1 \end{cases}$$

1. Montrer que $0 < U_n \leq 2; \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.
2. Etudier la monotonie de la suite $(U_n)_{n\geq 1}$.
3. Déduire que $(U_n)_{n\geq 1}$ est convergente puis calculer sa limite.
4. Montrer en utilisant un raisonnement par récurrence que

$$U_n = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

(utiliser $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$).

Exercice 3. (6,5 points)

Soit la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+1} \arctan \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

1. Donner le domaine de définition de la fonction f.
2. Etudier la continuité de la fonction f sur D_f.
3. Etudier la dérivabilité de la fonction f sur D_f.
4. Donner la dérivée de la fonction f sur son domaine de dérivation.
5. Montrer qu'il existe $\alpha \in]-1, 1[$ tel que $f'(\alpha) = 0$.

Exercice 4. (3 points)

Soit la fonction $g(x) = e^{2x} - 2$.

1. Etudier la convexité de la fonction g.
2. Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe de g au point d'abecisse 0.
3. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{2}(e^{2x} - 1) \geq x$.

Bon courage