Cours d'Analyse 1

Damerdji Bouharis A.

Université des Sciences et de la Technologie Mohamed Boudiaf
Faculté des Mathématiques et Informatique.

Table des matières

Chapitre 1

Le corps des nombres complexes

Tout au long du chapitre ; on considère le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ appelé plan complexe.

1.1 Représentation algébrique

Définition 1.1.1 *On appelle l'ensemble des nombres complexes et on note* $\mathbb{C}$ *; l'ensemble contenant l'ensemble des nombres réels* $\mathbb{R}$; *tel que*

$$\mathbb{C} = \left\{ z = x + iy \quad / \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2; \; i^2 = -1 \right\}$$

où $x = \mathrm{Re}\,(z)$ *est dite partie réelle de* z *et* $y = \mathrm{Im}\,(z)$ *est dite partie imaginaire de* z; *on a*

$$z = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)i.$$

Cette représentation est dite représentation algébrique du nombre z, *il existe d'autres représentations.*

Propriétés 1 *On a les propriétés suivantes :*

1. *Si* $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $z = x + iy$ *alors* $z = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$.
2. *Si* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *tels que* $z_1 = x_1 + iy_1$ *et* $z_2 = x_2 + iy_2$ *alors*

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

1.2 Représentation graphique

1.2.1 Définitions et notations

Dans le plan complexe, à tout point $M\,(a, b)$; on peut associer le nombre complexe $z = a + ib$, on dit que z est l'affixe du point M, ou que M est l'image ponctuelle de z et que $\overrightarrow{OM}$ est l'image vectorielle de z.

Dans le repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ sur l'axe horizontal ; il y a les réels qui sont les nombres complexes dont la partie imaginaire est nulle et sur l'axe vertical ; il y a les nombres appelés imaginaires purs dont la partie réelle est nulle. Le point correspondant au nombre complexe $z = a + ib$ est situé à la verticale du réel a et à l'horizontale de l'imaginaire pur ib, (figure 1.1).

Dans le plan complexe ; le module de z est la longueur du vecteur $\overrightarrow{OM}$. L'argument de z est la mesure de l'angle entre l'axe des réels et $\overrightarrow{OM}$, orienté suivant le sens trigonométrique et le conjugué de z est l'affixe du vecteur symétrique de $\overrightarrow{OM}$ par rapport à l'axe horizontal des réels.

- Le conjugué du nombre complexe $z = a + ib$ est le nombre complexe noté $\overline{z}$ tel que
$$\overline{z} = a - ib.$$
- Le module de z; noté $|z|$ est la longueur du vecteur $\overrightarrow{OM}$
$$OM = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

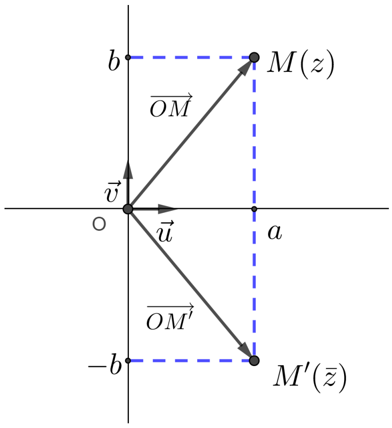

FIGURE 1.1 – Représentation graphique d'un nombre complexe et de son conjugué

Propriétés 2 *On a les propriétés suivantes :*

1. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
2. $\overline{\overline{z}} = z$.
3. *On a*
$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2},\ \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2}.$$
4. *z est un réel pur si et seulement si $z = \overline{z}$.*
5. *z est un imaginaire pur si et seulement si $z = -\,\overline{z}$.*
6. $|z| = |\overline{z}| = |-z| = |-\overline{z}|$
7. *Si le point M a pour affixe $z = a + ib$ et le point M' a pour affixe $z' = a' + ib'$ avec $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$, alors :*
   (a) *Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z' - z = (a' - a) + i\,(b' - b)$*
   (b) *La longueur du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est donnée par*
$$MM' = \left\|\overrightarrow{MM'}\right\| = \sqrt{(a' - a)^2 + (b' - b)^2} = |z' - z|\,.$$

1.3 Représentation trigonométrique

Tout nombre complexe $z = a + ib$ de $\mathbb{C}$; peut s'écrire sous la forme

$$z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right);\ r \geq 0$$

où $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$ est le module de z et $\begin{cases} a = r\cos\theta \\ b = r\sin\theta \end{cases}$, où θ est l'argument de z ; noté $\arg(z)$, qui est la mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}\right)$ d'où la représentation trigonométrique (figure 1.2), dite aussi forme polaire de z

$$z = a + ib = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$$

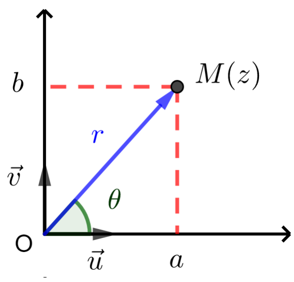

FIGURE 1.2 – Représentation trigonométrique d'un nombre complexe

Remarque : Si $z = a + ib = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$ (avec $a \neq 0$) alors $\tan\theta = \frac{b}{a}$.

Propriétés 3 *On a les propriétés suivantes :*

1. *Si* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *tels que* $z_1 = r_1\left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\right)$ *et* $z_2 = r_2\left(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\right)$ *alors*
$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \theta_1 = \theta_2\,[2\pi] = \theta_2 + 2\pi k\ ,\ \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
2. *Si* $z = x \in \mathbb{R} \Rightarrow |z| = |x|$ *(la valeur absolue de* x*) et* $\arg(z) = 0\,[\pi] = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
3. *Si* $z = iy \Rightarrow |z| = |y|$ *(la valeur absolue de* y*) et* $\arg(z) = \frac{\pi}{2}\,[\pi] = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
4. *Soit* $z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$, *alors on a :*

   (a)
   $$\overline{z} = r\left(\cos\theta - i\sin\theta\right) = r\left[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right]$$
   d'où $\arg(\overline{z}) = -\theta = -\arg(z)$.

   (b) $-z = r\left(-\cos\theta - i\sin\theta\right) = r\left[\cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi)\right]$, *donc*
   $\arg(-z) = \theta + \pi = \arg(z) + \pi$.

Exemples 1.3.1 *1.* $z = \sqrt{6} + \sqrt{2}i \Rightarrow \mathrm{Re}(z) = \sqrt{6}, \mathrm{Im}(z) = \sqrt{2}$

$$|z| = \left|\sqrt{6} + \sqrt{2}i\right| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}\ \text{ et }\ \arg(z) = \frac{\pi}{6}\,[2\pi],$$

d'où $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

2. $z = 3 + 3i \Rightarrow \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z) = 3$

$$|z| = |3 + 3i| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}\ \text{ et }\ \arg(z) = \frac{\pi}{4}\,[2\pi],$$

d'où $z = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

1.4 Forme exponentielle

Pour tout nombre réel θ; on appelle "exponentiel complexe" ; noté $e^{i\theta}$; le nombre complexe de module 1 et d'argument θ

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

d'où $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$ et par suite on a les formules d'Euler

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$$
$$\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$$

par conséquent ; pour un nombre complexe $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$; où $(r_1 = |z_1|)$ on a

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$$
$$\overline{z}_1 = r_1 e^{-i\theta_1}$$

et pour $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_2 e^{i\theta_2}$, où $(r_2 = |z_2|)$ tel que $r_2 \neq 0$; on a

$$\begin{array}{ll} z_1.z_2 & = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \\ \frac{z_1}{z_2} & = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)} \end{array}$$

Remarques :

1. Cette forme sert à la linéarisation des puissances du cosinus et du sinus.
2. On a
$$e^{2\pi i} = 1,\ e^{i\frac{\pi}{2}} = i,\ \ e^{i\pi} = -1,\ e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i.$$
(voir figure 1.3)
A cause de la périodicité modulo 2π des fonctions sinus et cosinus ; on a la périodicité modulo 2π de l'exponentielle complexe, comme suit
$$e^{i\theta} = e^{i(\theta+2\pi k)};\ \ \forall\theta \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}.$$
d'où
$$e^{2\pi k i} = 1, e^{(2k+1)\pi i} = -1, e^{\pi(\frac{1}{2}+2k)i} = i, e^{\pi(\frac{-1}{2}+2k)i} = -i.$$

Propriétés 4 *Pour tous réels θ et θ' et pour tout entier naturel n non nul ; on a*

$$e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')},\ \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta},$$

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}},\ \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$$

Exemples 1.4.1 *On a* $-6 = 6e^{\pi i}$, $4i = 4e^{\frac{\pi}{2}i}$, $-4i = 4e^{\frac{-\pi}{2}i}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = e^{i\frac{\pi}{6}}$.

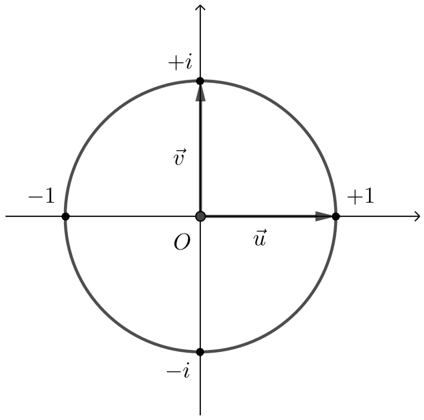

FIGURE 1.3 – Représentation des nombres complexes 1,-1,i et -i

1.5 Opérations sur les nombres complexes

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes tels que $z_1 = a_1+ib_1 = r_1 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ et $z_2 = a_2 + ib_2 = r_2 (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$.

1.5.1 L'addition

On a

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i (b_1 + b_2) \text{ (Forme algébrique)}$$
$$z_1 + z_2 = r_1 \cos\theta_1 + r_2 \cos\theta_2 + i (r_1 \sin\theta_1 + r_2 \sin\theta_2) \text{ (Forme trigonométrique)}$$

1.5.2 Le produit

On a

$$z_1.z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i (a_1b_2 + a_2b_1) \text{ (Forme algébrique)}$$
$$z_1.z_2 = r_1r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)) \text{ (Forme trigonométrique)}$$
$$z_1.z_2 = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)} \text{ (Forme exponentielle)}$$

1.5.3 Division

On a

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + i (a_2b_1 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

Propriétés 5 *Si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes tel que $z_2 \neq 0$ alors*

1. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

2. $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$ *et* $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.
3. $z.\overline{z} = |z|^2$ *(c'est un réel positif).*
4. $\arg(z_1.z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$, $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$.
5. $\frac{1}{z_2} = \frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2}$.

Remarque : L'ensemble $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ est un corps commutatif (A vérifier en exercice).

Propriétés 6 1. *Soit z un nombre complexe et α un nombre réel positif, alors*

$$\arg(\alpha z) = \arg(z) + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$$

en effet ; $\arg(\alpha z) = \arg(\alpha) + \arg(z) = \arg(z)$, *car* $\arg(\alpha) = 0\,[2\pi] = 2k\pi$.

2. *Soit z un nombre complexe et α un nombre réel négatif, alors*

$$\arg(\alpha z) = \arg(z) + \pi(2k+1)\,,\ \ k \in \mathbb{Z}$$

en effet ; car $\arg(\alpha) = \pi\,[2\pi] = \pi + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$.

3. *Soient M, M' deux points du plan complexe ; d'affixes z et z' respectivement, tels que $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.*
   (a) *La longueur du segment $[MM']$ est égale à $MM' = |z' - z|$.*
   (b) *Les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont orthogonaux si et seulement si* $\operatorname{Re}(\overline{z}z') = 0$.
   En effet ; on a $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OM'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et

$$\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{OM'} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0 = \operatorname{Re}(\overline{z}z')\,,$$

   car $\overline{z}z' = (x - iy)(x' + iy') = xx' + yy' + i(xy' - yx')$.
   (c) *Les points O, M, M' sont alignés si et seulement si* $\operatorname{Im}(\overline{z}z') = 0$.
   En effet ; O, M, M' sont alignés si et seulement si $\det\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) = 0$ *et*

$$\det\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) = xy' - yx' = \operatorname{Im}(\overline{z}z')\,.$$

1.5.4 Formule de Moivre

Soit z le nombre complexe de module r égal à 1 et d'argument $\theta \in \mathbb{R}$,

$$z = \cos\theta + i\sin\theta$$

alors

$$\forall n \in \mathbb{N};\ \ z^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

cette formule est appelée formule de Moivre, on peut la vérifier par récurrence. (A faire en exercice).

1.6 Racines $n-ième$ d'un nombre complexe

1.6.1 Racines $n-ième$ d'un nombre complexe

Soit $\omega \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ tel que $\omega = \varrho\left(\cos\alpha + i\sin\alpha\right)$.
Pour résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^n = \omega$, on pose $z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$ d'où

$$z^n = r^n\left(\cos n\theta + i\sin n\theta\right) = \varrho\left(\cos\alpha + i\sin\alpha\right)$$

et par identification on a

$$\left\{\begin{array}{l} r^n = \varrho \\ n\theta = \alpha\left[2\pi\right] = \alpha + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} r = \sqrt[n]{\varrho} \\ \theta = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k}{n}\pi;\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

on trouve n solutions pour $k = 0, 1, 2, ..., n-1$.

Exemple 1.6.1 *Trouver la racine cubique du nombre complexe $\omega = 1$.*
On a $1 = \cos\left(2k\pi\right) + i\sin\left(2k\pi\right)$, et soit $z \in \mathbb{C}$; $z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$
$z^3 = 1 \Leftrightarrow r^3\left(\cos 3\theta + i\sin 3\theta\right) = \cos\left(2k\pi\right) + i\sin\left(2k\pi\right)$, d'où

$$r = 1 \text{ et } \theta = \frac{2k\pi}{3};\ k = 0, 1, 2 \Rightarrow z = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3};\ k = 0, 1, 2$$

par conséquent on a trois racines cubiques

$$\left\{\begin{array}{l} z_1 = 1 \\ z_2 = -\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_3 = -\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$$

Remarque : On peut également calculer la racine carrée d'un nombre complexe en utilisant la représentation algébrique.

1.6.2 Racine carrée d'un nombre complexe

Exemple 1.6.2 (D'application) *Déterminer les racines carrées du nombre complexe $\omega = 3 + 4i$*
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z = a + ib$ et $z^2 = \omega$

$$z^2 = \omega \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2iab = 3 + 4i \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a^2 + b^2 = 5 \\ a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a^2 = 4 \\ b^2 = 1 \\ ab = 2 \end{array}\right.,$$

alors $(a, b) = (2, 1)$ ou $(a, b) = (-2, -1)$ d'où les racines carrées de ω sont

$$z_1 = 2 + i$$
$$z_2 = -2 - i.$$

1.7 Résolution des équations du second degré dans $\mathbb{C}$

Etant donnée l'équation $(E) : az^2 + bz + c = 0$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$.

Pour la résolution ; on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$, puis on distingue trois cas :

1er Cas : Si $\Delta > 0$ alors l'équation (E) admet deux solutions réelles distinctes

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2ème Cas : Si $\Delta = 0$ alors l'équation (E) admet une solution réelle double

$$z_0 = \frac{-b}{2a}$$

3ème Cas : Si $\Delta < 0$ alors l'équation (E) admet deux solutions complexes distinctes

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Remarque : Si les coefficients a, b et c sont complexes alors le discriminant Δ pourrait être un nombre complexe donc il faudra calculer sa racine carrée.

Exemple 1.7.1 *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) telle que :*

$$(E) : z^2 - (7 + i)\, z + 12 + 3i = 0$$

Le discriminant de cette équation vaut

$$\Delta = (7 + i)^2 - 4\,(12 + 3i) = 2i$$

On calcule les racines carrées de Δ qui sont $1 + i$ et $-1 - i$; d'où les solutions de l'équation (E) sont :

$$z_1 = \frac{(7 + i) + 1 + i}{2} = 4 + i$$
$$z_2 = \frac{(7 + i) - 1 - i}{2} = 3.$$

1.8 Applications à la géométrie

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$; soient A, B et C trois points du plan complexe dont les affixes sont z_A, z_B et z_C respectivement, alors

1. L'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ a pour mesure $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg\left(z_C - z_A\right) - \arg\left(z_B - z_A\right)$.
2. Les vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2}\,[\pi]$$

ie. le nombre complexe $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est imaginaire pur non nul.

Exemple 1.8.1 *L'ensemble $C = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z - \omega| = r\}$ est le cercle de rayon r et de centre Ω ; d'affixe ω.*

1.8.1 Transformations géométriques

Translation :

L'application qui au point M d'affixe z; associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' = z + a,$$

avec $a \in \mathbb{C}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe a et on a : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$.

Rotation :

L'application qui au point M d'affixe z; associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' = \omega + e^{i\alpha}(z - \omega),$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{C}$ est la rotation de centre Ω; d'affixe ω et d'angle α et on a $\overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{\Omega M}$ avec $\left(\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{\Omega M}\right) = \alpha + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

Homothétie :

L'application qui au point M d'affixe z; associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' = \omega + k(z - \omega),$$

avec $k \in \mathbb{R}^*, \omega \in \mathbb{C}$ est l'homothétie de centre Ω; d'affixe ω et de rapport $k \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ et on a $\overrightarrow{\Omega M'} = k.\overrightarrow{\Omega M}$.

Exemples 1.8.2 *1. Soient A, B et C trois points d'affixes respectives :*

$$z_A = -2 - i, z_B = 1 - 2i \text{ et } z_C = -1 + 2i$$

(a) Montrer que le triangle ABC est isocèle en A.

(b) Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

2. Dans le plan complexe, on donne le point Ω d'affixe i.

(a) Donner l'écriture complexe de la rotation de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

(b) A tout nombre complexe $z \neq -2$, on associe le nombre complexe z' défini par

$$z' = \frac{z + 4i}{z + 2}.$$

i. Déterminer l'ensemble D des points M d'affixe z; tels que $|z'| = 1$.

ii. L'ensemble E des points M d'affixe z tels que z' est un réel.

Solution :

1. (a) $AB = |z_B - z_A| = |3 - i| = \sqrt{10}$, $AC = |z_C - z_A| = |1 + 3i| = \sqrt{10}$, d'où le triangle ABC est isocèle en A.

(b) $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg\left(\frac{1+3i}{3-i}\right) = \arg\left(\frac{1+3i}{3-i}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

(a)

$$z' = i + e^{-\frac{i\pi}{3}}\,(z - i)$$

d'où

$$z' = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}.$$

i. *On a*

$$|z'| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z+4i}{z+2}\right| = 1 \Leftrightarrow |z+4i| = |z+2|$$

alors l'ensemble D *est la droite dont les points* M *sont équidistants des deux points* A *et* B; *d'affixes respectives* $4i$ *et* -2, *d'où* D *est la médiatrice de* $[AB]$.

ii. $z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg z' = 0\,[\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right) = \arg\left(\frac{z+4i}{z+2}\right) = 0\,[\pi]$, *où* $\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)$ *est la mesure de l'angle* $\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right)$ *d'où l'ensemble* E *est la droite* (AB) *privée du point* B.