Corrigé de la fiche de TD 4 (1ère Partie)

Damerdji Bouharis A.
Université des Sciences et de la Technologie Mohamed Boudiaf
Faculté des Mathématiques et Informatique.

Fiche de TD 4 (1ère Partie)

Dérivabilité des fonctions réelles

Enoncés des exercices

Exercice 1 :

1. Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes en x_0, et donner $f'(x_0)$ (quand elle existe)

a. $f(x)=\begin{cases} xe^{\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x<0 \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \\ x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x>0 \end{cases}, \quad x_0=0$

b. $g(x)=\begin{cases} arctg\ x & \text{si} \quad |x|\leq 1 \\ \frac{\pi}{4}sign(x)+\frac{x-1}{2} & \text{si} \quad |x|>1 \end{cases}, \quad x_0=1,\ x_0=-1$

c. $h(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-a^2}} & \text{si} \quad |x|<a \\ 0 & \text{si} \quad |x|\geq a \end{cases}, \quad x_0=a$

2. Déterminer les constantes a,b,c et d pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$:

$f(x)=\begin{cases} ax+b & \text{si} \quad x\leq 0 \\ cx^2+dx & \text{si} \quad 0<x\leq 1 \\ 1-\frac{1}{x} & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$

Exercice 2 :

a) Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$1/\ f_1(x)=\sin(\ln x),\ 2/f_2(x)=\ln\left(\cos\frac{1}{x}\right),\ 3/f_3(x)=\frac{(shx)^2}{e^x},$
$4/\ f_4(x)=e^{arctgx},\ 5/f_5(x)=\cos(\arcsin x),\ 6/f_6(x)=arctg\left(\frac{2x}{3+x}\right).$

b) Etudier les variations de la fonction $f(x)=arctg\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$.

Exercice 3 : Calculer les dérivées n-ièmes des fonctions suivantes :

1. $f_1(x)=\ (1+x)^{\alpha}$, pour $\alpha=-1$ et $\alpha=\pm\frac{1}{2}$,
2. $f_2(x)=\ln(1+x)$, $3/f_3(x)=(x+1)^3e^{-x}$.

Exercice 4 : On considère la fonction f définie par $f(x)=\frac{x^2}{x+2}e^{\frac{1}{x}}$

1. Déterminer D_f le domaine de définition de f.
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur D_f.
3. f est-elle prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$?
4. Etudier les variations de f.

<u>Exercice supplémentaire</u> (Examen 2019)

Considérons f la fonction définie de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\arcsin x}{x} & \text{si} \quad x \in \left]0, \frac{1}{2}\right] \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de la fonction f sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.
2. Etudier la dérivabilité de la fonction f sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, puis calculer f' sa dérivée sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.
3. Montrer que pour tout x, tel que $0 < x \leq \frac{1}{2}$ on a $f(x) < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

   En déduire que f est strictement croissante sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$.
4. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1}, et qu'elle est continue et strictement croissante.
5. Déterminer $D_{f^{-1}}$ le domaine de définition de f^{-1}.

NB. Il n'est pas demandé de calculer $f^{-1}(x)$.

Corrigés

Exercice 1 :

1. (a) $f(x)=\begin{cases} xe^{\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x<0 \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \\ x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x>0 \end{cases}, \qquad x_0=0$

$$\lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{xe^{\frac{1}{x}}}{x}=0$$
$$\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x}$$
$$=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\left[x\ln(x+1)-x\ln x\right]=0.$$

d'où f est dérivable en $x_0=0$ et on a $f'(0)=0$.

(b) $g(x)=\begin{cases} arctg\ x & \text{si} \quad |x|\leq 1 \\ \frac{\pi}{4}sign(x)+\frac{x-1}{2} & \text{si} \quad |x|>1 \end{cases}$

- $\lim_{x\overset{<}{\to}1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\overset{<}{\to}1}\frac{\arctan x-\frac{\pi}{4}}{x-1}=\frac{1}{2}$

  $\lim_{x\overset{>}{\to}1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\overset{>}{\to}1}\frac{\frac{\pi}{4}x+\frac{x-1}{2}-\frac{\pi}{4}}{x-1}=\frac{1}{2}$

  d'où g est dérivable en $x_0=1$ et donc $g'(1)$ n'existe pas.
- $\lim_{x\overset{<}{\to}-1}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}=\lim_{x\overset{<}{\to}-1}\frac{-\frac{\pi}{4}x+\frac{x-1}{2}+\frac{\pi}{4}}{x+1}=+\infty.$

  d'où g n'est pas dérivable en $x_0=-1$.

(c) $h(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-a^2}} & \text{si} \quad |x|<a \\ 0 & \text{si} \quad |x|\geq a \end{cases}, \qquad x_0=a$

$$\lim_{x\overset{<}{\to}a}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}=\lim_{x\overset{<}{\to}a}\frac{e^{\frac{1}{x^2-a^2}}}{x-a}=0$$
$$\lim_{x\overset{>}{\to}a}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}=0$$

d'où h est dérivable en $x_0=a$ et on a $h'(0)=0$.

2. $f(x)=\begin{cases} ax+b & \text{si} \quad x\leq 0 \\ cx^2+dx & \text{si} \quad 0<x\leq 1 \\ 1-\frac{1}{x} & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$

Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors f est dérivable et continue en $x_0=0$ et $x_0=1$ alors :

- $\lim_{x\overset{<}{\to}0}f(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}0}f(x)\Leftrightarrow\lim_{x\overset{<}{\to}0}ax+b=\lim_{x\overset{>}{\to}0}cx^2+dx\Leftrightarrow b=0$
- $\lim_{x\overset{<}{\to}1}f(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}1}f(x)\Leftrightarrow\lim_{x\overset{<}{\to}1}cx^2+dx=\lim_{x\overset{>}{\to}1}1-\frac{1}{x}\Leftrightarrow c+d=0\ ...(1)$
- $\lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\Leftrightarrow\lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{ax}{x}=\lim_{x\overset{>}{\to}0}cx+d\Leftrightarrow a=d\ ...\ (2)$

- $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{cx^2+dx-0}{x-1}$,

  $x \overset{<}{\to} 1$

  et en faisant le changement de variables $t = x - 1$, on obtient :

  $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{t \overset{<}{\to} 0} \frac{2ct+dt}{t} = 2c + d \overset{(2)}{=} c$ ...(3)

  et $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{1-\frac{1}{x}-0}{x-1} = 1$ ...(4)

  de (3) et (4) on a $c = 1$ alors $d = a = -1$.

Exercice 2 :

1. (a) $f_1'(x) = \frac{\cos(\ln x)}{x}$,

   (b) $f_2'(x) = \frac{tg\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$,

   (c) $f_3'(x) = \frac{2shxchx - sh^2x}{e^x}$,

   (d) $f_4'(x) = \frac{e^{arctgx}}{1+x^2}$,

   (e) $f_5'(x) = -\frac{\sin(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$,

   (f) $f_6'(x) = \frac{\left(\frac{2x}{3+x}\right)'}{1+\left(\frac{2x}{3+x}\right)^2} = \frac{6}{5x^2+6x+9}$.

2. $f(x) = \arctan\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$

   $D_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x^2 - 1 \geq 0 \ \} =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

   $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \arctan\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \arctan \frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)}{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)}$

   $= \lim\limits_{x\to-\infty} \arctan \frac{1}{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)} = 0.$

   $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \arctan\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) = \frac{\pi}{2}$.

   On a $f'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{x^2-1}}$,

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$		$\Vert$	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{\pi}{4}$ $\Vert$		$\Vert$ $\frac{\pi}{4}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

Exercice 3 :

1. $f_1(x) = (1+x)^{\alpha}$,

   $f_1'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $f_1''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$,... alors

   $f_1^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}, \forall n \in \mathbb{N}$ (à vérifier facilement par récurrence.)

(a) Pour $\alpha = -1$: $f_1(x) = \frac{1}{1+x}$
$\forall n \in \mathbb{N}$,

$$f_1^{(n)}(x) = (-1)(-2)...(-n)(1+x)^{-1-n} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{1+n}}.$$

(b) Pour $\alpha = \frac{1}{2}$: $f_2(x) = \sqrt{1+x}$
$\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} f_1^{(n)}(x) &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)...\left(\frac{3}{2}-n\right)(1+x)^{\frac{1}{2}-n} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} 1.3.5...(2n-3)(1+x)^{\frac{1}{2}-n} \end{aligned}$$

(c) Pour $\alpha = -\frac{1}{2}$: $f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$
$\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} f_1^{(n)}(x) &= \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)...\left(\frac{1}{2}-n\right)(1+x)^{-\frac{1}{2}-n} \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^n 1.3.5...(2n-1)(1+x)^{-\frac{1}{2}-n} \end{aligned}$$

2. $f_2(x) = \ln(1+x) \Rightarrow f_2'(x) = \frac{1}{1+x} = f_1(x)$, alors
$\forall n \in \mathbb{N}$,

$$f_2^{(n)}(x) = \left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n-1)} = f_1^{(n-1)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

3. $f_3(x) = (x+1)^3 e^{-x}$
On a la formule de Leibnitz : $(g.h)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k . g^{(k)} . h^{(n-k)}$
On pose $g(x) = (x+1)^3$ et $h(x) = e^{-x}$,
Alors :
$g'(x) = 3(x+1)^2$, $g''(x) = 3.2(x+1)$, $g'''(x) = 3.2.1$, d'où

$$\forall n = 0, 1, 2, 3,\ g^{(n)}(x) = \frac{3!}{(3-n)!}(x+1)^{3-n} \text{ et } g^{(n)}(x) = 0; \forall n \geq 4$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, h^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x},$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_3^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{3} C_n^k . \frac{3!}{(3-k)!}(x+1)^{3-k}(-1)^{n-k} e^{-x}$$

(à vérifier facilement par récurrence).

Exercice 4 :

$f(x) = \frac{x^2}{x+2} e^{\frac{1}{x}}$

1. $D_f =]-\infty, -2[\cup]-2, 0[\cup]0, +\infty[$.
2. f est continue sur D_f car c'est la composée, le produit et le quotient (division) de fonctions continues sur D_f.

   f est dérivable sur D_f car c'est la composée, le produit et le quotient (division) de fonctions dérivables sur D_f.
3. $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -2} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} -2} \frac{x^2}{x+2} e^{\frac{1}{x}} = -\infty$

   $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -2} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} -2} \frac{x^2}{x+2} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$

   d'où f n'admet pas un prolongement par continuité en $x_0 = -2$

   $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{x^2}{x+2} e^{\frac{1}{x}} = 0$

   $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{x^2}{x+2} e^{\frac{1}{x}}$, en faisant le changement de variables $t = \frac{1}{x}$, on obtient

   $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{1}{t(1+2t)} e^{t} = +\infty$

   d'où f n'admet pas un prolongement par continuité en $x_0 = 0$.
4. $f'(x) = \frac{x^2+3x-2}{(x+2)^2} e^{\frac{1}{x}} = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x+2)^2} e^{\frac{1}{x}}$

   où $x_1 = \frac{-3-\sqrt{17}}{2} < -2$ et $x_2 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2} > 0$

x	$-\infty$		x_1		-2		0		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(x_1)$	↘	$-\infty \,\|\, +\infty$	↘	$0 \,\|\, +\infty$	↘	$f(x_2)$	↗	$+\infty$

Exercice supplémentaire. (Examen 2019)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\arcsin x}{x} & \text{si} \quad x \in \left]0, \frac{1}{2}\right] \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

1. La fonction f est continue sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ car c'est le quotient (la division) de deux fonctions continues sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ et on a

   $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1 = f(0)$, car $\arcsin x \underset{0}{\sim} x$, alors f est continue en $x_0 = 0$. Donc f est continue sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

2. La fonction f est dérivable sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ car c'est le quotient (la division) de deux fonctions dérivables sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ et on a

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \tfrac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x \to 0} \tfrac{\frac{\arcsin x}{x}-1}{x} &&= \lim_{x \to 0} \tfrac{\arcsin x - x}{x^2} \\
&\overset{RH1}{=} \lim_{x \to 0} \tfrac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1}{2x} &&\overset{RH2}{=} \lim_{x \to 0} \tfrac{x}{2(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

alors f est dérivable en $x_0 = 0$ et $f'(0) = 0$.
Donc f est dérivable sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et on a pour tout x dans $\left]0, \frac{1}{2}\right]$,

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x}{x^2} = \frac{x - \sqrt{1-x^2} \arcsin x}{x^2 \sqrt{1-x^2}}.$$

D'où sa dérivée sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ est donnée par

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}} & \text{si} \quad x \in \left]0, \frac{1}{2}\right] \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

3. Pour tout $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$, on pose $g(x) = \arcsin x$, alors on a g est continue sur $[0, x]$, g est dérivable sur $]0, x[$, donc d'après le théorème des accroissements finis ; il existe $c \in]0, x[$; tel que

$$g(x) - g(0) = g'(c)(x-0) \Leftrightarrow \arcsin x = \frac{x}{\sqrt{1-c^2}} \Leftrightarrow \frac{\arcsin x}{x} = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}}$$

or

$$\begin{aligned}
0 < c < x \quad &\Leftrightarrow 1 - x^2 < 1 - c^2 < 1 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} < \sqrt{1-c^2} < 1 \quad \text{car } 1 - x^2 > 0 \text{ pout tout } x \in \left]0, \tfrac{1}{2}\right]. \\
&\Leftrightarrow 1 < \tfrac{1}{\sqrt{1-c^2}} < \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},
\end{aligned}$$

par conséquent : $\forall x \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$;

$$\frac{\arcsin x}{x} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Leftrightarrow f(x) < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

On déduit de ce qui précède que $\forall x \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$;

$$\frac{\arcsin x}{x} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Leftrightarrow x - \sqrt{1-x^2} \arcsin x > 0$$

d'où $\forall x \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$;

$$\frac{x - \sqrt{1-x^2} \arcsin x}{x^2 \sqrt{1-x^2}} > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0,$$

alors f est strictement croissante sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$.

4. f est continue et strictement croissante sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$, alors f est bijective de $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ dans $f\left(\left]0, \frac{1}{2}\right]\right)$ et admet une fonction réciproque f^{-1} de $f\left(\left]0, \frac{1}{2}\right]\right)$ dans $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ qui est continue et strictement croissante.
5. On a $\forall x \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$;

$$\begin{aligned} 0 < x \leq \tfrac{1}{2} \ & \Leftrightarrow f(0) < f(x) \leq f\left(\tfrac{1}{2}\right), \quad \text{car } f \text{ est strictement croissante} \\ & \Leftrightarrow 1 < f(x) \leq \tfrac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

alors $f\left(\left]0, \frac{1}{2}\right]\right) = \left]1, \frac{\pi}{3}\right]$ par conséquent $D_{f^{-1}} = \left]1, \frac{\pi}{3}\right]$.