Cours d'Analyse 2
Chapitre 2 : Intégrale définie
Partie 1

Damerdji Bouharis A.
Université des Sciences et de la Technologie Mohamed Boudiaf
Faculté des Mathématiques et Informatique.

CHAPITRE 2 Intégrales définies

Introduction

Dans cette partie nous allons nous intéresser à l'intégration des fonctions définies et bornées dans un intervalle fermé $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. L'intégrale définie d'une fonction f positive et continue sur $[a, b]$ mesure l'aire de la partie du plan comprise entre (Γ) la courbe de la fonction $y = f(x)$, l'axe des abscisses $y = 0$ et les droites $x = a$ et $x = b$.

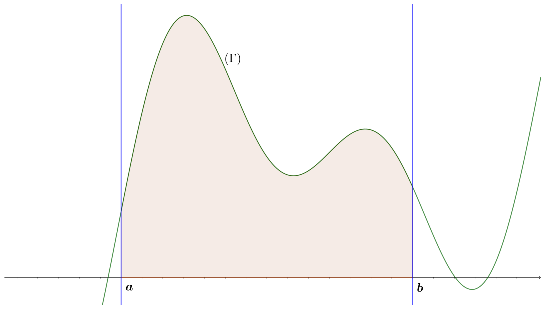

FIGURE 2.1 – Représentation géométrique de l'intégrale de f sur $[a, b]$

2.1 Sommes de Darboux

2.1.1 Subdivision d'un intervalle

Définition 2.1.1 *Soit $[a, b]$ un intervalle fermé de $\mathbb{R}$. On appelle subdivision de l'intervalle $[a, b]$, toute suite finie de nombres $d = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ telle que :*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

On appelle le pas de cette subdivision le nombre réel positif noté

$$\delta(d) = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}).$$

2.1.2 Sommes de Darboux

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et soit $d = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ une subdivision de $[a, b]$. On pose :

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \text{ et } m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \forall i = 1, .., n.$$

On considère

$$s\left(f,d\right)=\sum_{i=1}^{n}m_i\left(x_i-x_{i-1}\right) \text{ et } S\left(f,d\right)=\sum_{i=1}^{n}M_i\left(x_i-x_{i-1}\right).$$

Ces deux sommes sont dites sommes de Darboux, respectivement inférieure et supérieure de f relativement à la subdivision à d.

Propriétés 2 (des sommes de Darboux) *1. Pour toute subdivision d de $[a,b]$:*

$$s\left(f,d\right)\leq S\left(f,d\right).$$

2. *Si d et d' sont deux subdivisions de $[a,b]$, tels que $d\subset d'$(d' est dite plus fine que d), alors*
   (a) $s\left(f,d\right)\leq s\left(f,d'\right)$,
   (b) $S\left(f,d'\right)\leq S\left(f,d\right)$.
3. *Si d_1 et d_2 sont deux subdivisions quelconques de $[a,b]$, alors*

$$s\left(f,d_1\right)\leq S\left(f,d_2\right).$$

4. *Si $m=\inf\limits_{x\in[a,b]}f\left(x\right)$ et $M=\sup\limits_{x\in[a,b]}f\left(x\right)$, alors*

$$m\left(b-a\right)\leq s\left(f,d\right)\leq S\left(f,d\right)\leq M\left(b-a\right)$$

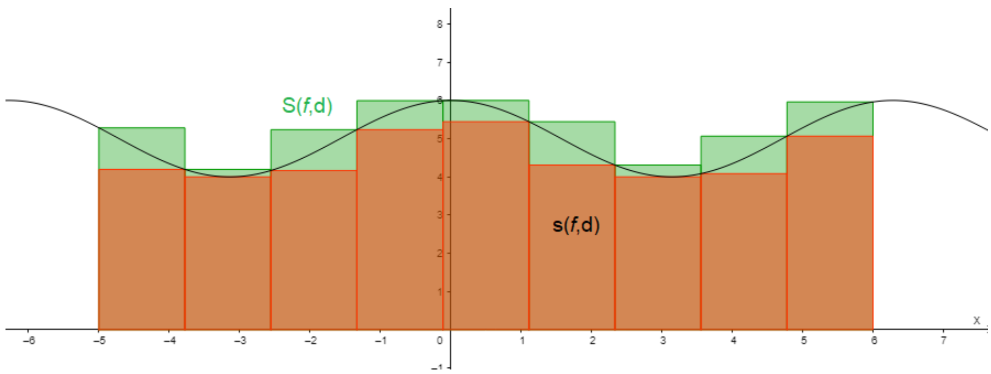

Figure 2.2 – Sommes de Darboux

Notation 2.1.2 *A chaque fonction f définie et bornée sur $[a,b]$, on associe l'ensemble $D_*\left(f\right)$ (respectivement $D^*\left(f\right)$), constitué de toutes les sommes de Darboux infèrieures (respectivement supèrieures), obtenues de toutes les subdivisions de $[a,b]$.*

Proposition 2.1.3 *On a*

$$\sup D_*\left(f\right)\leq\inf D^*\left(f\right). \tag{2.1}$$

Preuve :
L'ensemble $D^*(f)$ est non vide et minoré, donc admet une borne infèrieure et l'ensemble $D_*(f)$ est non vide et majoré, donc admet une borne supèrieure. Soient d_1 et d_2 sont deux subdivisions quelconques de $[a,b]$: $s(f,d_1) \in D_*(f)$ et $S(f,d_2) \in D^*(f)$, on a alors $s(f,d_1) \le S(f,d_2)$, d'où $S(f,d_2)$ est un majorant de $D_*(f)$, donc $\sup D_*(f) \le S(f,d_2)$, car $\sup D_*(f)$ est le plus petit des majorants de $D_*(f)$, alors $\sup D_*(f)$ est un minorant de $D^*(f)$ donc $\sup D_*(f) \le \inf D^*(f)$ car $\inf D^*(f)$ est le plus grand des minorants de $D^*(f)$. □

Notation 2.1.4 *On note*

$$\sup D_*(f) = \int_{*a}^{b} f(x)dx$$

et on l'appelle intégrale infèrieure de f *sur* $[a,b]$ *et on note*

$$\inf D^*(f) = \int_{a}^{*b} f(x)dx$$

et on l'appelle intégrale supèrieure de f *sur* $[a,b]$.

Corollaire 2.1.5 *On a*

$$\int_{*a}^{b} f(x)dx \le \int_{a}^{*b} f(x)dx$$

2.2 Fonctions intégrables

Définition 2.2.1 *Soit* $f : [a,b] \to R$ *une fonction bornée, on dit que* f *est intégrable au sens de Riemann sur* $[a,b]$, *si :*

$$\int_{*a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{*b} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

cette intégrale est appelée intégrale définie de f *sur* $[a,b]$, a *et* b *sont appelés les bornes d'intégration,* x *est une variable dite "muette". Le nombre* $\int_a^b f(x)\,dx$ *ne dépend pas de* x, *il dépend de* a *et de* b

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(y)\,dy = \int_{a}^{b} f(t)\,dt.$$

Notation On note par $R([a,b])$ l'ensemble des fonctions intégrables sur $[a,b]$.

Théorème 2.2.2 (de Darboux) *Soit $f : [a,b] \to R$ une fonction bornée ; pour que f soit (Riemann)-intégrable ; il faut et il suffit que :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists d \text{ subdivision de } [a,b] \text{ telle que } S(f,d) - s(f,d) < \varepsilon.$$

Preuve :
La condition est nécessaire en effet, supposons que f est intégrable sur $[a,b]$ alors

$$\int_{*a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{*b} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

c'est à dire que

$$\sup D_*(f) = \inf D^*(f) = \int_a^b f(x)dx$$

alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux subdivisions d' et d'' de $[a,b]$ telles que :

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2} < s(f,d') \tag{2.2}$$

et

$$S(f,d'') < \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.3}$$

d'où

$$S(f,d'') - \frac{\varepsilon}{2} < \int_a^b f(x)dx < s(f,d') + \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\Rightarrow S(f,d'') - s(f,d') < \varepsilon.$$

La condition est suffisante d'après ce qui précède, en effet, supposons que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision d de $[a,b]$ telle que

$$S(f,d) - s(f,d) < \varepsilon$$

alors on a

$$S(f,d) - \varepsilon < s(f,d) < S(f,d)$$

donc $S(f,d) = \sup D_*(f)$ et on a

$$s(f,d) < S(f,d) < s(f,d) + \varepsilon$$

donc $s(f,d) = \inf D^*(f)$, d'où

$$\inf D^*(f) \leq \sup D_*(f)$$

et d'après (2.1), on a $\sup D_*(f) \leq \inf D^*(f)$, par conséquent,

$$\inf D^*(f) = \sup D_*(f)$$

d'où f est intégrable car

$$\int_{*a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{*b} f(x)dx.$$

□

Théorème 2.2.3 *Soit $f : [a,b] \to R$ une fonction bornée ; alors*

$$\int_{*a}^{b} f(x)dx = \lim_{\delta(d)\to 0} s(f,d)$$

et

$$\int_{a}^{*b} f(x)dx = \lim_{\delta(d)\to 0} S(f,d)$$

Corollaire 2.2.4 *Etant donnée $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de subdivisions de l'intervalle $[a,b]$, telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta(d_n) = 0$, alors*

$$\int_{*a}^{b} f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} s(f,d_n)$$

et

$$\int_{a}^{*b} f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} S(f,d_n)$$

en particulier, si f est intégrable sur $[a,b]$, alors on a

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} s(f,d_n) = \lim_{n\to+\infty} S(f,d_n).$$

Remarque : Pour que l'intégrabilité de la fonction f sur $[a,b]$ soit exprimée par les sommes de Darboux, on doit considérer une subdivision d de $[a,b]$ dont le pas $\delta(d)$ tend vers zéro.

Exemples 2.2.5 *1. Etant donnée la fonction f définie sur $[a,b]$ par $f(x) = 2$, $\forall x \in [a,b]$ et soit $d = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ une subdivision de $[a,b]$ dont le pas $\delta(d)$ tend vers zéro, alors on a*

$$M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = 2 = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = m_i, \forall i = 1,..,n$$

et donc

$$s(f,d) = S(f,d) = 2\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = 2(b-a).$$

d'où

$$D^*(f) = D_*(f) = \{2(b-a)\}$$

alors f est intégrable sur $[a,b]$ car

$$\sup D_*(f) = \inf D^*(f) = \int_a^b f(x)\,dx = 2(b-a).$$

2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, tels que $a < b$ et la fonction de Dirichlet f définie sur $[a,b]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & si\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

soit $d = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ une subdivision de $[a,b]$ dont le pas $\delta(d)$ tend vers zéro, alors on a $\forall i = 1,..,n$

$$M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = 1,$$
$$m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = 0,$$

donc

$$s(f,d) = 0\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = 0,$$
$$S(f,d) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = (b-a),$$

d'où

$$D^*(f) = \{(b-a)\},$$
$$D_*(f) = \{0\}$$

alors

$$\sup D_*(f) = 0$$
$$\inf D^*(f) = (b-a).$$

par conséquent la fonction f n'est pas intégrable sur $[a,b]$.

2.3 Sommes de Riemann

2.3.1 Sommes de Riemann

Définition 2.3.1 *Soit $f : [a, b] \to R$, une fonction bornée et $d = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ une subdivision de $[a, b]$ et soient $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ des nombres réels tels que :*
$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]\,,\ \forall i = 1, 2, \ldots, n,$ *alors le nombre*

$$\sigma(f, d) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, f(\xi_i)$$

est appelé ***somme de Riemann*** *de f correspondant à d et au système de points $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$.*

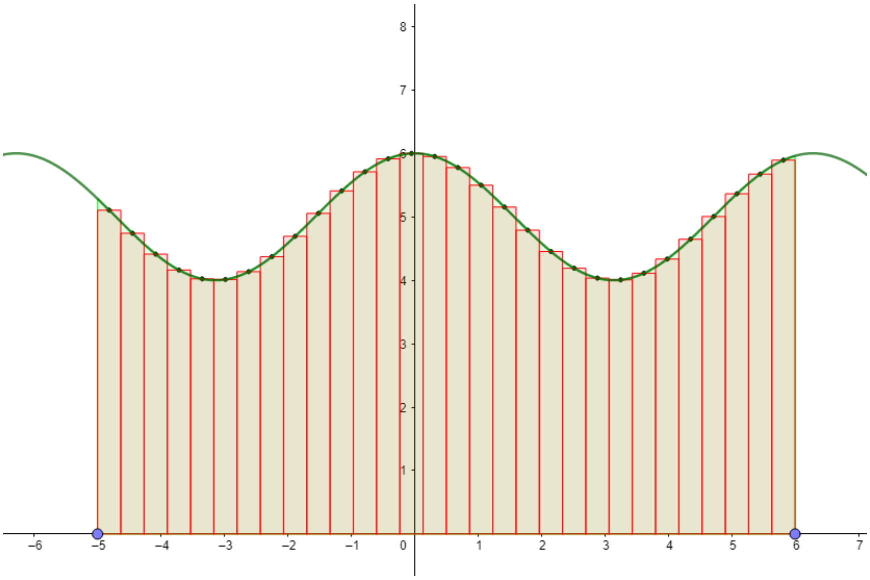

FIGURE 2.3 – Sommes de Riemann

Théorème 2.3.2 *Si f est intégrable sur $[a, b]$ alors :*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\delta(d) \to 0} \sigma(f, d)\,.$$

Remarque : On peut prendre ξ_i l'une des bornes des intervalles $[x_{i-1}, x_i]$, par exemple $\xi_i = x_i$. D'où

$$\sigma(f, d) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, f(x_i)\,.$$

2.3.2 Subdivision régulière

Définition 2.3.3 *Une subdivision régulière* $d_n = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ *de l'intervalle* $[a, b]$ *est une subdivision telle que tous les intervalles partiels sont de longueur égale, et on a*

$$\begin{cases} x_i = a + \frac{i}{n}(b-a) \\ x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} \end{cases}, \forall i = 1, .., n.$$

D'où

$$\delta(d_n) = \frac{b-a}{n} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \delta(d_n) = 0,$$

Par conséquent, si f est intégrable sur $[a, b]$ alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \lim_{n\to+\infty} \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right) \quad (2.4)$$

en effet,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta(d_n)\to 0} \sigma(f, d_n) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(x_i) = \lim_{n\to+\infty} \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

d'où

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right).$$

2.4 Propriétés de l'intégrale définie

On considère $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée.

Théorème 2.4.1 *Si* f *est continue sur* $[a, b]$ *alors* f *est intégrable sur* $[a, b]$.

Preuve :
Si f est continue sur $[a, b]$ alors f est uniformément continue sur $[a, b]$, donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$, tel que

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b] \ / \ |x_1 - x_2| < \alpha \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

alors pour toute subdivision d vérifiant $\delta(d) < \alpha$, en particulier la subdivision régulière où $\delta(d) = \frac{b-a}{n}$, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \forall x_1, x_2 \in [a, b] : \left(|x_1 - x_2| < \frac{b-a}{n} \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}\right)$$

en particulier pour $\alpha_i, \beta_i \in [x_{i-1}, x_i]$, tel que $f(\alpha_i) = M_i = \sup\limits_{x\in[x_{i-1}, x_i]} f(x)$, $f(\beta_i) =$

$m_i = \inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$, d'où on a

$$\begin{array}{ll} |\alpha_i - \beta_i| < \frac{b-a}{n} & \Rightarrow |f(\alpha_i) - f(\beta_i)| < \frac{\varepsilon}{(b-a)} \\ & \Rightarrow M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{(b-a)} \end{array}$$

alors

$$(M_i - m_i)\frac{b-a}{n} < \frac{\varepsilon}{n} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\frac{b-a}{n} < \varepsilon$$

donc

$$S(f,d) - s(f,d) < \varepsilon$$

par conséquent f est intégrable sur $[a,b]$. □

Définition 2.4.2 *Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite continue par morceaux s'il existe un entier n et une subdivision $\{x_0,...,x_n\}$ telle que f soit continue sur chaque intervalle partiel $]x_{i-1},x_i[$, et admette une limite finie à droite de x_{i-1} et une limite finie à gauche de x_i pour tout $i \in \{1,...,n\}$.*

Corollaire 2.4.3 *Les fonctions continues par morceaux sont intégrables.*

Théorème 2.4.4 *Si la fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est monotone sur $[a,b]$. alors f est intégrable sur $[a,b]$.*

Preuve :
On suppose que f est croissante sur $[a,b]$, et on considère d la subdivision régulière sur $[a,b]$, alors on a $m_i = f(x_{i-1})$ et $M_i = f(x_i)$, $\forall i = 1,...,n$, d'où

$$\begin{aligned} S(f,d) - s(f,d) &= \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\tfrac{b-a}{n} \\ &= \sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1}))\tfrac{b-a}{n} \\ &= \tfrac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1})) \\ &= \tfrac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) \end{aligned}$$

donc pour que f soit intégrable sur $[a,b]$, il suffit de choisir d telle que

$$n > \frac{(f(b) - f(a))(b-a)}{\varepsilon}.$$

□

Proposition 2.4.5 *Si la fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable alors la restriction de f à tout intervalle $[c,d] \subset [a,b]$ est encore intégrable.*

Proposition 2.4.6 *Si f et g sont deux fonctions bornées et définies de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, telles que f est intégrable sur $[a,b]$ et l'ensemble $\{x \in [a,b] \ / \ f(x) \neq g(x)\}$ est fini alors la fonction g est intégrable sur $[a,b]$ et $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b g(x)dx$.*

Exemple 2.4.7 *Calculer les intégrales suivantes, en utilisant les sommes de Riemann*

1. $I = \int\limits_1^3 \alpha.dx$, *où* $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

   On pose $f(x) = \alpha$ (fonction constante) sur l'intervalle $[1,3]$ et on considère la subdivision régulière $d = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ de $[1,3]$, d'où on a

   $$\begin{cases} x_i = 1 + \frac{2i}{n} \\ x_i - x_{i-1} = \frac{2}{n} \end{cases}, \forall i = 1, .., n \ ,$$

   d'où

   $$f(x_i) = f\left(1 + \frac{2i}{n}\right) = \alpha, \forall i = 1, .., n.$$

   f est continue sur $[1,3]$ alors f est intégrable sur $[1,3]$, alors d'après (2.4) on a

   $$\int\limits_1^3 \alpha.dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} \alpha = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n}(n\alpha) = 2\alpha.$$

2. $I = \int\limits_0^1 xdx$.

   On pose $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0,1]$ et on considère la subdivision régulière $d = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ de $[0,1]$, d'où :

   $$\begin{cases} x_i = \frac{i}{n} \\ x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n} \end{cases}, \forall i = 1, .., n \ ,$$

   d'où

   $$f(x_i) = f\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{i}{n}, \forall i = 1, .., n.$$

   f est continue sur $[0,1]$ alors f est intégrable sur $[0,1]$, donc d'après (2.4) on a

   $$\int\limits_0^1 xdx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

2.4.1 Propriétés

1. Soit $f \in R([a,b])$ i.e., une fonction intégrable sur $[a,b]$ alors

(a) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx.$

(b) $\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0.$

2. Relation de Chasles
Soient a, b et c trois réels tels que $a < c < b$. Si f est intégrable sur $[a, b]$, alors f est intégrable sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$. Et on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

3. Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$, telle que $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$ alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

4. Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$, telles que $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a, b]$ alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

5. Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$, alors

(a) Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la fonction $\alpha f + \beta g$ est intégrable sur $[a, b]$ et on a

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx.$$

(b) La fonction $f.g$ est intégrable sur $[a, b]$, mais en général

$$\int_a^b [f(x).g(x)]\,dx \neq \left(\int_a^b f(x)\,dx\right).\left(\int_a^b g(x)\,dx\right).$$

Contre-exemple

On a $\int\limits_1^2 xe^x dx = [e^x(x-1)]_1^2 = e^2$,

par contre $\int\limits_1^2 xdx = \frac{1}{2}[x^2]_1^2 = \frac{3}{2}$ et $\int\limits_1^2 e^x dx = [e^x]_1^2 = e^2 - e$

alors $\left(\int\limits_1^2 xdx\right)\left(\int\limits_1^2 e^x dx\right) = \frac{3}{2}(e^2 - e).$

6. Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$ alors $|f|$ est intégrable sur $[a,b]$, et on a :

   (a)
   $$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

   (b) Soit g une fonction intégrable sur $[a,b]$ alors
   $$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right| &\leq \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \int_a^b |g(x)|\,dx \\ &\leq c \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.\end{aligned}$$

7. Si $f(x) = 0$, $\forall x \in [a,b]$ alors
   $$\int_a^b f(x)\,dx = 0.$$
   (la réciproque est fausse.)
   Contre-exemple
   On a $f(x) = x$ sur $[-1,1]$ et $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$.

8. Si f est continue sur $[a,b]$ et
   $$f(x) \geq 0, \forall x \in [a,b] \;\; et \int_a^b f(x)\,dx = 0,$$
   alors
   $$f(x) = 0, \forall x \in [a,b].$$

9. Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$, telle que
   $$m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a,b],$$
   alors
   $$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

Preuve :

1. (a) On considère une subdivision régulière $d_n = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ de l'intervalle $[a,b]$, comme f est intégrable sur $[a,b]$ alors
   $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = -\lim_{n\to+\infty} \frac{(a-b)}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

(b) $\int\limits_a^a f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^a f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx - \int\limits_a^b f(x)\,dx = 0.$

2. Soient a, b et c trois réels tels que $a < c < b$. Si f est intégrable sur $[a, b]$, alors f est intégrable sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$. On considère une subdivision $d_n = \{x_0, x_1, .x_{j-1}, c, x_{j+1}.., x_n\}$ de l'intervalle $[a, b]$ telle que son pas $\delta(d_n)$ tende vers 0, on a

$$\begin{aligned}
\int\limits_a^b f(x)\,dx &= \lim_{\delta(d_n)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \lim_{\delta(d_n)\to 0}\sum_{i=1}^{j-1} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) + f(c)(c - x_{j-1}) \\
&+ f(x_{j+1})(x_{j+1} - c) + \sum_{i=j+1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \lim_{\delta(d_n)\to 0}\left[\left(\sum_{i=1}^{j-1} f(x_i)(x_i - x_{i-1})\right) + f(c)(c - x_{j-1})\right] \\
&+ \lim_{\delta(d_n)\to 0}\left[f(x_{j+1})(x_{j+1} - c) + \left(\sum_{i=j+1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1})\right)\right] \\
&= \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.
\end{aligned}$$

9. Si on a

$$m \le f(x) \le M, \forall x \in [a, b],$$

alors

$$\begin{aligned}
&m \le f(x_i) \le M, \forall x_i \in [a, b] \\
&\Rightarrow m(x_i - x_{i-1}) \le f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \le M(x_i - x_{i-1}), \forall i = 1, ..., n \\
&\Rightarrow m\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \le M\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \\
&\Rightarrow m(b - a) \le \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \le M(b - a)
\end{aligned}$$

d'où

$$m(b - a) \le \int\limits_a^b f(x)\,dx \le M(b - a).$$

□

2.4.2 Théorème de la moyenne

Théorème 2.4.8 *Soient $f, g \in R([a,b])$, g ayant un signe constant sur $[a,b]$, alors il existe un nombre réel $\mu \in [m, M]$, où $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$, tel que :*

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = \mu \int_a^b g(x)\, dx.$$

Si de plus f est continue sur $[a,b]$, alors il existe $\xi \in [a,b]$ tel que : $\mu = f(\xi)$.

Preuve :
On suppose que $g(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$.

Si $\int_a^b g(x)\, dx = 0$ alors d'après la propriété 6.b, on a

$$\left|\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx\right| \leq \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \int_a^b |g(x)|\, dx$$

alors $\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = 0$ et dans ce cas μ peut être quelconque.

Et si $\int_a^b g(x)\, dx > 0$ alors on a $\forall x \in [a,b]$

$$m \leq f(x) \leq M \Rightarrow mg(x) \leq f(x)\, g(x) \leq Mg(x)$$

alors d'après la propriété 9

$$m\int_a^b g(x)\, dx \leq \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \leq M\int_a^b g(x)\, dx$$

ce qui implique que

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx}{\int_a^b g(x)\, dx} \leq M$$

alors il existe $\mu \in [m, M]$, tel que

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx}{\int_a^b g(x)\, dx} \Leftrightarrow \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = \mu\int_a^b g(x)\, dx.$$

Si de plus f est continue sur $[a,b]$ alors elle atteint toutes les valeurs comprises entre m et M d'où

$$\exists \xi \in [a,b] \text{ telque } \mu = f(\xi).$$

□

Corollaire 2.4.9 *Si f est continue sur $[a,b]$ alors*

$$\exists \xi \in [a,b], \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi).$$

Exemple 2.4.10 *Soit l'intégrale*

$$I = \int_0^\pi \sin^2 x dx$$

en appliquant le théorème de la moyenne, montrer qu'il existe un nombre réel $\mu \in [-1,1]$, tel que

$$I = \mu \int_0^\pi \sin x dx$$

puis calculer sa valeur.

Solution

On pose $f(x) = g(x) = \sin x$, on remarque que $g(x) \geq 0, \forall x \in [0,\pi]$, et que

$$\inf_{x\in[0,\pi]} f(x) = -1, \sup_{x\in[0,\pi]} f(x) = 1$$

alors d'après le théorème de la moyenne, il existe $\mu \in [-1,1]$ tel que

$$\int_0^\pi \sin^2 x dx = \mu \int_0^\pi \sin x dx$$

Et en utilisant la linéarisation, on a $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ alors

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin^2 x dx &= \frac{1}{2}\int_0^\pi (1-\cos 2x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

et

$$\int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = 2$$

d'où

$$\mu = \frac{\pi}{4}.$$

2.5 Exemples d'application

En utilisant les sommes de Riemann d'une fonction à déterminer, calculer les limites suivantes :

1. $l_1 = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2+i^2}$,
2. $l_2 = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\ln(i+n)-\ln n}{i+n}$,
3. $l_3 = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\tan\left(\frac{i\pi}{6n}\right)$.

On considère la subdivision régulière $d_n = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ de l'intervalle $[a, b]$ telle que

$$\begin{cases} x_i = a + \frac{i(b-a)}{n} \\ x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} \end{cases}, \forall i = 1, ..., n\ .$$

Comme la somme de Riemann est telle que

$$\sigma(f, d_n) = \frac{(b-a)}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{(b-a)}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right) \tag{2.5}$$

et si la fonction est intégrable sur $[a, b]$ alors on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\frac{(b-a)}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \tag{2.6}$$

1.
$$l_1 = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}$$

et donc par analogie avec (2.6), on pose $\forall i = 1, ..., n$

$$f(x_i) = \frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2},$$
$$x_i = \frac{i}{n} = 0 + \frac{i}{n}.1 \Rightarrow a = 0 \text{ et } b = 1$$

alors

$$f(x_i) = \frac{1}{1+(x_i)^2}, \forall i = 1, ..., n$$

d'où

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

f est continue sur $[0, 1]$ alors f est intégrable sur $[0, 1]$, et donc on a

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2} = l_1$$

d'où

$$l_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

2.

$$\begin{aligned} l_2 &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\ln(i+n) - \ln n}{i+n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\ln\left(\frac{i+n}{n}\right)}{\frac{i}{n}+1} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\ln\left(\frac{i}{n}+1\right)}{\frac{i}{n}+1} \end{aligned}$$

et donc par analogie avec (2.6), on pose $\forall i = 1, ..., n$

$$f(x_i) = \frac{\ln\left(\frac{i}{n}+1\right)}{\frac{i}{n}+1},$$

$$x_i = \frac{i}{n} + 1 \Rightarrow a = 1 \text{ et } b = 2$$

alors

$$f(x_i) = \frac{\ln(x_i)}{x_i}, \forall i = 1, ..., n$$

d'où

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

f est continue sur $[1, 2]$ alors f est intégrable sur $[1, 2]$, et donc on a

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\ln\left(\frac{i}{n}+1\right)}{\frac{i}{n}+1} = l_2.$$

d'où

$$l_2 = \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx.$$

On fait un changement de variables ,

$$t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$$

et d'où

$$l_2 = \int_0^{\ln 2} t dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\ln 2} = \frac{(\ln 2)^2}{2}.$$

3.

$$l_3 = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \tan\left(\frac{i\pi}{6n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \tan\left(\frac{i\pi}{6n}\right)$$

et donc par analogie avec (2.6), on pose $\forall i = 1, ..., n$

$$f(x_i) = \tan\left(\frac{i\pi}{6n}\right),$$

$$x_i = \frac{i\pi}{6n} \Rightarrow a = 0 \text{ et } b = \frac{\pi}{6}$$

alors

$$f(x_i) = \tan x_i, \forall i = 1, ..., n$$

d'où

$$f(x) = \tan x.$$

f est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ alors f est intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, et donc on a

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan x \, dx &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{6n} \sum_{i=1}^{n} \tan\left(\frac{i\pi}{6n}\right) \\ &= \frac{\pi}{6}\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \tan\left(\frac{i\pi}{6n}\right)\right) = \frac{\pi}{6} l_3,\end{aligned}$$

d'où

$$l_3 = \frac{6}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\cos x} dx.$$

On fait un changement de variables,

$$t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$$

pour les bornes

$$x = 0 \Rightarrow t = 1$$

$$x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

et d'où

$$l_3 = \frac{-6}{\pi} \int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{t} = \frac{-6}{\pi} [\ln t]_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{6}{\pi} \ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

On remarque ici que ce n'est pas l'unique choix, on pourrait aussi prendre :

(a)

$$x_i = \frac{i}{6n} \Rightarrow a = 0, b = \frac{1}{6} \text{ et } f(x) = \tan \pi x,$$

ou bien

(b)

$$x_i = \frac{i\pi}{n} \Rightarrow \; a = 0, b = \pi \text{ et } f(x) = \tan\frac{x}{6},$$

ou bien

(c)

$$x_i = \frac{i}{n} \Rightarrow \; a = 0, b = 1 \text{ et } f(x) = \tan\left(\frac{\pi x}{6}\right).$$

Tous les choix donnent évidemment le même résultat c'est à dire la même valeur de l'intégrale - à faire comme exercice -.