Université des Sciences et de la Technologie d'Oran USTO-MB.
Faculté des Mathématiques et Informatique. Juin 2023
1ère Année LMD MI - Informatique Durée: 1h30 min

Examen de rattrapage d'Analyse 1
Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Exercice 1. (6.5 points)
1. Montrer que : $\sin x < x$; $\forall x > 0$.
2. En déduire que :
   a) $\sin x > x$; $\forall x < 0$.
   b) L'équation $\sin x = x$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$ que l'on précisera.
3. On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\\ u_{n+1} = \sin u_n, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

   a) Montrer que : $0 < u_n < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
   b) Etudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   c) En déduire qu'elle est convergente puis donner sa limite.
   d) Déterminer $\sup A$ et $\inf A$ tel que $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 2. (8 points)
On considère la fonction f définie par : $f(x) = \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$

1. Déterminer D_f le domaine de définition de f.
2. Etudier la continuité de f sur D_f.
3. Etudier la dérivabilité de f sur D_f en précisant là où elle n'est pas dérivable .
4. Déterminer la dérivée f' de la fonction f sur son domaine de dérivabilité.
5. Etudier la concavité de f.
6. Donner le tableau de variations de f puis tracer son graphe (Γ).

Exercice 3. (3,5 points)
Soit f une fonction 2-fois dérivable sur l'intervalle $[a,b]$, telle que $f(a) = f(b) = 0$, et telle que pour tout $x \in]a,b[$, $f''(x) \leq 0$.

1. Montrer qu'il existe c dans $]a,b[$, tel que $f'(c) = 0$.
2. En utilisant la monotonie de f, étudier le signe de f' sur $]a,b[$.
3. En déduire que $\forall x \in [a,b] : f(x) \geq 0$.

Exercice 4. (2 points)
En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$10 + \frac{1}{22} < \sqrt{101} < 10 + \frac{1}{20}$$

Bon courage