$Test1$ d'Analyse 1-2022/2023

Choisir 2 exercices parmis les trois exercices proposés

Exercice1. Soit l'ensemble $A = \left\{ \frac{2^n}{2^n - 1}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2^{n-1} \leq 2^n - 1$, en dédure que $\frac{2^n}{2^n-1} \leq 2$.
2. Montrer en utilisant la caractérisation de la borne supérieur et la borne inférieur que:

$$\sup A = 2 \text{ et } \inf A = 1.$$

Exercice2.

Soit $(U_n)_n$ une suite définie par la relation de recurrence $\left\{ \begin{array}{c} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{3U_n}{1+2U_n}, n \in \mathbb{N} \end{array} \right.$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < U_n < 1$, et que la suite $(U_n)_n$ est monotone.
2. En déduire que la suite $(U_n)_n$ est convergente, déterminer sa limite.
3. On pose $E = \{U_n / n \in \mathbb{N}\}$, déterminer $\sup E$ et $\inf E$.

Exercice3.

Soit le nombre complexe $z = \frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}$.

1. Ecrire z sous la forme algèbrique et trigonométrique.
2. Déduire $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$.

$Test1$ d'Analyse 1-2022/2023

Choisir 2 exercices parmis les trois exercices proposés

Exercice1. Soit l'ensemble $A = \left\{ \frac{2^n}{2^n - 1}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2^{n-1} \leq 2^n - 1$, En dédure que $\frac{2^n}{2^n-1} \leq 2$.
2. Montrer en utilisant la caractérisation de la borne supérieur et la borne inférieur que:

$$\sup A = 2 \text{ et } \inf A = 1.$$

Exercice2.

Soit $(U_n)_n$ une suite définie par la relation de recurrence $\left\{ \begin{array}{c} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{3U_n}{1+2U_n}, n \in \mathbb{N} \end{array} \right.$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < U_n < 1$, et que la suite $(U_n)_n$ est monotone.
2. En déduire que la suite $(U_n)_n$ est convergente, déterminer sa limite.
3. On pose $E = \{U_n / n \in \mathbb{N}\}$, déterminer $\sup E$ et $\inf E$.

Exercice3.

Soit le nombre complexe $z = \frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}$.

1. Ecrire z sous la forme algèbrique et trigonométrique.
2. Déduire $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$.