Solution des Exercices d'Analyse I

Sol. Exo1:

1] **fausse**; car: contre exemple: $A =]0;1[$

On a: A est minorée par 0 et $\inf A = 0 \notin A$, donc: $\min A$ n'existe pas

2] **Vraie**; car: $A \subset B \Rightarrow \inf B \leq \inf A$

$$\left.\begin{array}{l} A \subset B \Rightarrow \inf B \leq \inf A \\ \text{et comme } \inf A \leq \sup A \end{array}\right\} \Rightarrow \inf B \leq \sup A$$

3] **Vraie**; car: $\inf(A \cup B) = \min(\inf A ; \inf B)$

Trouvons $\inf A$ et $\inf B$:

On a: $|1-3x| < 2 \Rightarrow -2 < 1-3x < 2 \Rightarrow -3 < -3x < 1$

$\Rightarrow -\frac{1}{3} < x < 1$; donc: $A =]-\frac{1}{3} ; 1[\Rightarrow \inf A = -\frac{1}{3}$

et $3 \leq n < +\infty \Rightarrow 1 \leq n-2 < +\infty \Rightarrow 0 < \frac{1}{n-2} \leq 1$

$\Rightarrow 0 < \frac{5}{n-2} \leq 5 \Rightarrow 1 < 1 + \frac{5}{n-2} \leq 6 \Rightarrow \inf B = 1$

Ainsi: $\inf(A \cup B) = \min(-\frac{1}{3} ; 1) = \boxed{-\frac{1}{3}}$

4] **fausse**: contre exemple:

$A =]-\infty ; 2]$ et $B = [1 ; +\infty[$. On a: A et B non bornées,

mais: $A \cap B = [1 ; 2]$ est bornée.

5] **fausse**; contre exemple:

$U_n = \frac{(-1)^n}{n}$; on a: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n} = 0$ $\left(\begin{array}{l} \text{car: } (-1)^n \text{ est bornée} \\ \text{et } \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \end{array}\right)$

Proposition: $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{n \to +\infty} X_n = 0 \\ \text{et } (Y_n) \text{ une une bornée} \end{array}\right. \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} (X_n \cdot Y_n) = 0$

mais (U_n) n'est pas monotone $\left(\text{car: } U_{n+1} - U_n = (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right)\right]$

Sol. exo2: Soit $A = \left\{ \frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} \; ; n \in \mathbb{N}^* \right\} = \left\{ \frac{n-1}{n+1} \; ; \; n \in \mathbb{N}^* \right\}$

1) Montrons que A est non vide :

Comme $n \in \mathbb{N}^*$; pour $n = 1 \Rightarrow \frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0 \in A$; donc : $A \neq \emptyset$

Montrons A est bornée : i.e $\exists m, M \in \mathbb{R} ; \forall n \in \mathbb{N}^* : m \leq \frac{n-1}{n+1} \leq M$

On a : $n \in \mathbb{N}^* : \left. \begin{array}{l} n \geq 1 \Rightarrow n-1 \geq 0 \\ \text{et comme } n+1 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 \leq \frac{n-1}{n+1}$

i.e. $m = 0$

D'autre part : on a : $n-1 \leq n+1 \Rightarrow \frac{n-1}{n+1} \leq 1$ i.e. $M = 1$

Donc : $0 \leq \frac{n-1}{n+1} \leq 1$ i.e. A est bornée.

2] Montrons que $\sup A = 1$ $(M = 1)$

> **Rappel:** Montrons : $\sup A = M$
> i.e
> 1) $\forall x \in A : x \leq M$
> 2) $M \in A$, sinon (i.e. $M \notin A$)
> 2) $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A ; \; M - \varepsilon < x \leq M$

1) Montrons : $\forall n \geq 1 : \frac{n-1}{n+1} \leq 1$

2) $1 \overset{?}{\in} A$: $1 = \frac{n-1}{n+1} \Rightarrow \cancel{n} - 1 = \cancel{n} + 1 \Rightarrow -1 = 1$ contradiction !

2) $\forall \varepsilon > 0, \exists n \geq 1 : \boxed{1 - \varepsilon < \frac{n-1}{n+1}} \leq 1$

$(1-\varepsilon)(n+1) < n-1 \Rightarrow n + 1 - \varepsilon n - \varepsilon < n - 1$

$\Rightarrow 1 - \varepsilon + 1 < \cancel{n} - \cancel{n} + \varepsilon n$

$\Rightarrow 2 - \varepsilon < \varepsilon n \Rightarrow \frac{2-\varepsilon}{\varepsilon} < n$

il suffit de prendre $n = \left[\left| \frac{2-\varepsilon}{\varepsilon} \right| \right] + 1$

Donc : $\sup A = 1$

Montrons : $\inf A = 0$ $(m=0)$

1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq \frac{n-1}{n+1}$

2) $0 \overset{?}{\in} A$: $0 = \frac{n-1}{n+1} \Rightarrow 0 = n-1$

$\Rightarrow n = 1 \in \mathbb{N}^*$

vraie, donc $0 \in A$.

Rappel: Montrons : $\inf A = m$

1) $\forall x \in A$: $m \leq x$

2) $m \in A$, sinon (i.e. $m \notin A$)

2) $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : m \leq x < m + \varepsilon$

Donc : $\inf A = 0$

3) On a : $\sup A = 1 \notin A$, donc : $\max A$: n'existe pas

et $\inf A = 0 \in A$, donc $\min A = \boxed{0}$

4) * On a : $B = A + \{2\} \Rightarrow \sup B = \sup A + \sup\{2\}$

$= 1 + 2 = \boxed{3}$

et $\inf B = \inf A + \inf\{2\} = 0 + 2 = \boxed{2}$

* $C = \left\{ \frac{n-1}{n+1} , \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) / n \in \mathbb{N}^* \right\} =$

$C = A \cup D$; avec $D = \left\{ \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) / n \in \mathbb{N}^* \right\}$

$\Rightarrow D = \{1 ; 0 ; -1\}$

Donc $\sup C = \sup(A \cup D) =$

$= \max(\sup A ; \sup D)$

$= \max(1 ; 1)$

$= \boxed{1}$

et $\inf C = \inf(A \cup D)$

$= \min(\inf A ; \inf B)$

$= \min(0 ; -1)$

$= \boxed{-1}$

Sol. exo3: soit $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n^2}{1+U_n^2} \end{cases}$; $n \in \mathbb{N}$

1) Montrons par reccurence : $\forall n \in \mathbb{N} : U_n > 0$

On pose: $P(n) : U_n > 0$

⊛ pour $P(0)$: $U_0 > 0$

$1 > 0$ vraie

⊛ supposons que : $P(n) : U_n > 0$ est vraie

et montrons $P(n+1) : U_{n+1} > 0$

i.e. $\dfrac{U_n^2}{1+U_n^2} > 0$

Comme $U_n > 0$, alors : $\left.\begin{array}{l} U_n^2 > 0 \\ \text{et } 1+U_n^2 > 1 \Rightarrow 1+U_n^2 > 0 \end{array}\right\}$ $\dfrac{U_n^2}{1+U_n^2} > 0$ vraie

2] Etudions la monotomie de (U_n)

On a : $U_{n+1} = f(U_n)$; avec $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ où $x > 0$

Calculons $f'(x) = \dfrac{2x}{(1+x^2)^2} > 0$ (car : $x > 0$)

Donc : f est croissante, ainsi, d'aprés le théorème

(U_n) est monotone :

Calculons $U_1 = f(U_0) = f(1) = \dfrac{1}{2}$

Comme : $U_1 - U_0 = \dfrac{1}{2} - 1 = -\dfrac{1}{2} < 0$, alors (U_n) est décroissante

3] (U_n) est bornée $\Leftrightarrow \exists m, M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : m \leq U_n \leq M$

On a : $0 < U_n$, donc $0 \leq U_n$ $(m = 0)$

d'autre part : (U_n) est décroissante, alors

$U_n \leq U_0 \Rightarrow U_n \leq 1$ $(M = 1)$

Donc : $0 \leq U_n \leq 1 \Longrightarrow (U_n)$ est bornée.

4] Comme (U_n) est ↘ et minorée par 0, alors (U_n) est C.V

Calculons : $l = \lim_{n \to +\infty} U_n$, on résoudre : $l = f(l)$

i.e $l = \frac{l^2}{1+l^2} \Rightarrow l^3 - l^2 + l = 0 \Rightarrow l(l^2 - l + 1) = 0$ ↗ $l = 0$ ↘ $l^2 - l + 1 = 0$ $(\Delta < 0)$

Donc : $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$

5] Montrons (U_n) et (v_n) sont adjacentes

* (U_n) est décroissante
* Montrons que (v_n) est croissante

avec : $v_n = (\sqrt{n} - \sqrt{n+1}) U_n \Rightarrow v_n = \frac{-1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} U_n$

Calculons : $v_{n+1} - v_n = \frac{-1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} U_{n+1} + \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} U_n$

On a : (U_n) est ↘ i.e $U_{n+1} - U_n \leqslant 0 \Rightarrow U_{n+1} \leqslant U_n$

Comme : $\frac{-1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} < 0 \Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} U_{n+1} \geqslant \frac{-1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} U_n \cdots$ (I)

D'autre part : $\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} \geqslant \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$

$\Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} \geqslant \frac{-1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$ et comme $U_n > 0$

Donc : $\frac{-1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} U_n \geqslant \frac{-1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} U_n \cdots$ (II)

D'après (I) et (II) ; on a : $\frac{-1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} U_{n+1} \geqslant \frac{-1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} U_n$

$\Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} U_{n+1} + \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} U_n \geqslant 0 \Rightarrow v_{n+1} - v_n \geqslant 0 \Rightarrow (v_n) \nearrow$

* Montrons : $\lim_{n \to +\infty} (U_n - v_n) \stackrel{?}{=} 0$

On a : $\lim_{n \to +\infty} (U_n - v_n) = \lim_{n \to +\infty} U_n + \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} U_n = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}\right) U_n$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} (U_n - v_n) = 0$. Ainsi : (U_n) et (v_n) sont adjacentes