# Analyse 1
# Corrigé de la fiche de TD2

Damerdji Bouharis A.

Université des Sciences et de la Technologie Mohamed Boudiaf
Faculté des Mathématiques et Informatique.

# Table des matières



## 0.1 Enoncés des exercices

**Exercice 1 :**
Calculer les limites des suites suivantes de terme général :
1. $U_n = \frac{\cos\left(2n^3-5\right)}{3n^3+2n^2+1}$,2. $U_n = \frac{\sqrt{n}-9n+8}{2\sqrt{n}+3n+7}$,3. $U_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$,
4. $U_n = \frac{3^n-2.5^n+6.7^n}{7.2^n+3.4^n+5.7^n}$, 5.$U_n = \frac{3^n+(-3)^n}{3^n}$,6. $U_n = \frac{e^{2n}-e^n+1}{2e^n+3}$.

**Exercice 2 :**
En utilisant la définition de la limite d'une suite, montrer que :
1/ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n-1}{2n+3} = \frac{3}{2}$, 2/ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = 0$, 3/ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2\ln(1+n)}{\ln n} = 2$,
4/ $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$, 5/ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-5n^2-2}{4n} = -\infty$, 6/ $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(\ln n) = +\infty$.

**Exercice 3 :**

1. En utilisant le principe d'encadrement d'une suite, montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $l$ à déterminer dans chaque cas :
   $a/U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n}{n^3+k}$, $b/U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$
   $c/U_n = \frac{\left[\sqrt{n}\right]}{n}, n \in \mathbb{N}^*$, (où [ ] désigne la partie entière).
2. Soit $U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{3+|\sin k|\sqrt{k}}$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.

**Exercice 4 :**
On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{7U_n+4}{3U_n+3}; \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Montrer que : $0 \leq U_n \leq 2$ ; $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. Etudier la monotonie de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ .
3. Déduire que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente puis calculer sa limite.
4. Soit $E = \{U_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ ; déterminer $\sup E$ et $\inf E$.

**Exercice 5 :**

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n + 2}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Montrer que : $0 \leq U_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire la monotonie de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ .
3. On considère la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $V_n = 2 - U_n$ ,$\forall n \in \mathbb{N}$.
   (a) Quel est le signe de $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel $n$, on a : $\frac{V_{n+1}}{V_n} \leq \frac{1}{2}$.
   (c) En utilisant un raisonnement par récurrence montrer que :
   $$V_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$
   (d) En déduire la limite de la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis celle de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ .

**Exercice 6 : (Rattrapage 2021)**

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\begin{cases} 0 < u_1 < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ u_{n+1} = u_n - 2u_n^3, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_n < \frac{1}{\sqrt{2}}$.
2. Etudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ .
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et trouver sa limite.
4. Déterminer $\sup E$ et $\inf E$ où $E = \{u_n;\ \ n \in \mathbb{N}^*\}$ .

**Exercice 7 :**

En utilisant le critère de Cauchy montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N},n\geq 2}$ est divergente.

$$1/U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin k}{2^k}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 2/V_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\ln k}, \forall n \geq 2.$$

**Exercices supplémentaires :**

**Exercice 8 : (Examen 2021)**

On considère la suite de nombres réels $(u_n)_{n\in N}$ définie par $\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1 \end{cases}$

1. Montrer que : $1 < u_n < 2$ ,$\forall n \in N$.
2. Etudier la monotonie de $(u_n)_{n\in N}$ .

3. Déduire la convergence de $(u_n)_{n\in N}$ puis calculer sa limite.
4. Soit l'ensemble $E = \{u_n \ / \ n \in N\}$, déterminer $\inf E$ et $\sup E$.

**Exercice 9 :**

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ , définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n e^{-U_n}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Montrer que $U_n > 0; \forall n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire la monotonie de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. En déduire que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente puis calculer sa limite.
4. Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$, montrer que $U_{n+1} = e^{-S_n}, \forall n \in \mathbb{N}$. En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty.$$

## 0.2 Corrigés

**Exercice 1 :**

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\cos\left(2n^3-5\right)}{3n^3+2n^2+1}=0$, car $|\cos(2n^3-5)|\leq 1\,;\forall n\in\mathbb{N}$; et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{3n^3+2n^2+1}=0$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}-9n+8}{2\sqrt{n}+3n+7}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}-9+\frac{8}{n}}{2\frac{1}{\sqrt{n}}+3+\frac{7}{n}}=-3$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}}$
   $=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}=1$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3^n-2.5^n+6.7^n}{7.2^n+3.4^n+5.7^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\left(\frac{3}{7}\right)^n-2.\left(\frac{5}{7}\right)^n+6}{7.\left(\frac{2}{7}\right)^n+3.\left(\frac{4}{7}\right)^n+5}=\frac{6}{5}$
5. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3^n+(-3)^n}{3^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}[1+(-1)^n]=\begin{cases}0 \text{ si } n \text{ est impair}\\ 2 \text{ si } n \text{ est pair}\end{cases}$
6. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e^{2n}-e^n+1}{2e^n+3}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1-e^{-n}+e^{-2n}}{2e^{-n}+3e^{-2n}}=+\infty$.

**Exercice 2 :**

1. $\left(\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3n-1}{2n+3}=\frac{3}{2}\right)\Leftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0,\ \exists?n_\varepsilon\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N};\left(n\geq n_\varepsilon\Rightarrow\ \left|\frac{3n-1}{2n+3}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon\right)\right)$
   On a $\left|\frac{3n-1}{2n+3}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\frac{11}{4n+6}<\varepsilon\Leftrightarrow\frac{11}{4\varepsilon}-\frac{3}{2}<n$
   Alors il suffit de prendre $n_\varepsilon=\left[\left|\frac{11}{4\varepsilon}-\frac{3}{2}\right|\right]+1$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}=0\Leftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0,\ \exists?n_\varepsilon\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N};\left(n\geq n_\varepsilon\Rightarrow\ \left|\frac{1}{2^n}\right|<\varepsilon\right)\right)$
   On a $\frac{1}{2^n}<\varepsilon\Leftrightarrow\frac{-\ln\varepsilon}{\ln 2}<n$. Alors il suffit de $n_\varepsilon=\left[\left|\frac{-\ln\varepsilon}{\ln 2}\right|\right]+1$.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2\ln(1+n)}{\ln n}=2\Leftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0,\ \exists?n_\varepsilon\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N};\left(n\geq n_\varepsilon\Rightarrow\ \left|\frac{2\ln(1+n)}{\ln n}-2\right|<\varepsilon\right)\right)$
   On a
   $\left|\frac{2\ln(1+n)}{\ln n}-2\right|=\left|\frac{2\ln(1+n)-2\ln n}{\ln n}\right|=\left|\frac{2\ln\left(\frac{1+n}{n}\right)}{\ln n}\right|=2\left|\frac{\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)}{\ln n}\right|=\frac{2\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)}{\ln n}$
   et on sait que $\forall n\in\mathbb{N}^*$ : $\frac{1}{n}\leq 1$ donc $\frac{2\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)}{\ln n}\leq\frac{2\ln 2}{\ln n}$, alors pour que $\left|\frac{2\ln(1+n)}{\ln n}-2\right|<\varepsilon$; il suffit que : $\frac{2\ln 2}{\ln n}<\varepsilon\Leftrightarrow n>e^{\frac{2\ln 2}{\varepsilon}}$, d'où il suffit de prendre $n_\varepsilon=\left[e^{\frac{\ln 4}{\varepsilon}}\right]+1$.
4. $\lim\limits_{n\to+\infty}3^n=+\infty\Leftrightarrow(\forall A>0,\ \exists?n_\varepsilon\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N};(n\geq n_\varepsilon\Rightarrow\ 3^n>A))$
   On a $3^n>A\Leftrightarrow n>\frac{\ln A}{\ln 3}$, alors il suffit de prendre $n_\varepsilon=\left[\frac{|\ln A|}{\ln 3}\right]+1$.
5. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-5n^2-2}{4n}=-\infty\Leftrightarrow\left(\forall B<0,\ \exists?n_\varepsilon\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N};\left(n\geq n_\varepsilon\Rightarrow\ \frac{-5n^2-2}{4n}<B\right)\right)$
   On a $\frac{-5n^2-2}{4n}<B\Leftrightarrow\frac{5n^2+2}{4n}>-B$ et on sait que :
   $\forall n\in\mathbb{N}^*$ : $5n^2+2>5n^2\Leftrightarrow\frac{5n^2+2}{4n}>\frac{5n}{4}$, alors pour que $\frac{5n^2+2}{4n}>-B$; il suffit que $\frac{5n}{4}>-B\Leftrightarrow n>\frac{-4B}{5}$ : d'où il suffit de prendre $n_\varepsilon=\left[\frac{-4B}{5}\right]+1$.
6. $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(\ln n)=+\infty\Leftrightarrow(\forall A>0,\ \exists?n_\varepsilon\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N};(n\geq n_\varepsilon\Rightarrow\ \ln(\ln n)>A))$
   $\ln(\ln n)>A\Leftrightarrow n>e^{e^A}$, alors il suffit de prendre $n_\varepsilon=\left[e^{e^A}\right]+1$.

**Exercice 3 :**

1. (a) Pour $U_n = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{n}{n^3+k}$;

   On a $\forall k = 1, ..., n$ :

$$n^3 + 1 \leq n^3 + k \leq n^3 + n \Leftrightarrow \frac{n}{n^3+n} \leq \frac{n}{n^3+k} \leq \frac{n}{n^3+1}$$

   d'où

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^3+n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^3+k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^3+1} \Leftrightarrow \frac{n^2}{n^3+n} \leq U_n \leq \frac{n^2}{n^3+1}$$

   Comme

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^3+n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^3+1} = 0,$$

   alors d'après le théorème de l'encadrement d'une suite on a

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 0.$$

   (b) Pour $U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$

   On a $\forall k = 1, ..., n$ :

$$\begin{aligned} n^2 + 1 \leq n^2 + k \leq n^2 + n \quad &\Leftrightarrow \sqrt{n^2+1} \leq \sqrt{n^2+k} \leq \sqrt{n^2+n} \\ &\Leftrightarrow \tfrac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \tfrac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \tfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} \end{aligned}$$

   d'où

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \Leftrightarrow \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq U_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

   Comme

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1,$$

   alors d'après le théorème de l'encadrement d'une suite on a

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 1.$$

   (c) Pour $U_n = \frac{[\sqrt{n}]}{n}, n \in \mathbb{N}^*$,

   On a

$$\forall x \in \mathbb{R} : [x] \leq x \leq [x] + 1,$$

   donc en particulier :

$$[\sqrt{n}] \leq \sqrt{n} \leq [\sqrt{n}] + 1,$$

   posons $[\sqrt{n}] = p$ alors :

$$\begin{aligned} 0 < p \leq \sqrt{n} \leq p+1 \quad & \Leftrightarrow p^2 \leq n \leq (p+1)^2 \\ & \Leftrightarrow \tfrac{1}{(p+1)^2} \leq \tfrac{1}{n} \leq \tfrac{1}{p^2} \\ & \Leftrightarrow \tfrac{p}{(p+1)^2} \leq U_n \leq \tfrac{1}{p}, \end{aligned}$$

alors d'après le théorème de l'encadrement d'une suite on a

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 0.$$

2. Soit $U_n = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{3+|\sin k|\sqrt{k}}$, ;

   On a $\forall k = 1, ..., n$ :

$$\begin{aligned} |\sin k| \leq 1 \quad & \Leftrightarrow 3 + |\sin k| \sqrt{k} \leq 3 + \sqrt{k} \leq 3 + \sqrt{n} \\ & \Rightarrow 3 + |\sin k| \sqrt{k} \leq 3 + \sqrt{n} \Leftrightarrow \tfrac{1}{3+\sqrt{n}} \leq \tfrac{1}{3+|\sin k|\sqrt{k}} \\ & \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{3+\sqrt{n}} \leq \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{3+|\sin k|\sqrt{k}} \Leftrightarrow \tfrac{n}{3+\sqrt{n}} \leq U_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

   Et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{3+\sqrt{n}} = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.

**Exercice 4 :**

1. Par récurrence :

   pour $n = 0$ : on a $0 \leq U_0 \leq 2$.

   On suppose que $0 \leq U_n \leq 2$ , d'où :

$$U_n \geq 0 \Rightarrow \frac{7U_n + 4}{3U_n + 3} \geq 0$$

   et

$$U_n \leq 2 \Leftrightarrow 7U_n + 4 \leq 6 + 6U_n \Leftrightarrow \frac{7U_n + 4}{3U_n + 3} \leq 2$$

   donc $0 \leq U_{n+1} \leq 2$.

   Et par conséquent : $0 \leq U_n \leq 2$ ; $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. La monotonie de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ :

$$U_{n+1} - U_n = \frac{7U_n + 4}{3U_n + 3} - U_n = \frac{-3U_n^2 + 4U_n + 4}{3U_n + 3} = \frac{(2 + 3U_n)(2 - U_n)}{3U_n + 3}$$

   comme on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n \leq 2,$$

   alors

$$(2 + 3U_n)(2 - U_n) \geq 0$$

   et on a aussi $3U_n + 3 > 0$ donc $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

3. $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et majorée alors elle est convergente vers sa borne supérieure.
   Posons $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l = \lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1}$, d'où
$$\begin{aligned} U_{n+1} = \tfrac{7U_n+4}{3U_n+3} \quad & \Rightarrow l = \tfrac{7l+4}{3l+3} \\ & \Leftrightarrow 3l^2 - 4l - 4 = 0 \\ & \Leftrightarrow (2+3l)(l-2) = 0 \\ & \Leftrightarrow l = 2 \vee l = -\tfrac{2}{3}. \end{aligned}$$
   or $U_n \geq 0 \Rightarrow l \geq 0$ d'où
$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 2.$$
4. $E = \{U_n \ / \ \ n \in \mathbb{N}\}$ ; d'où
$$\sup E = \lim_{n\to+\infty} U_n = 2.$$
   Comme $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ; alors $U_0$ est un minorant de $E$, en effet : $U_0 \leq U_n ; \forall n \in \mathbb{N}$, de plus $U_0 \in E$; donc $\min E = U_0 = \inf E$.

**Exercice 5 :**

1. Par récurrence :
   pour $n = 0$ : on a $0 \leq U_0 < 2$.
   On suppose que $0 \leq U_n < 2$, alors
$$2 \leq U_n + 2 < 4 \Leftrightarrow \sqrt{2} \leq U_{n+1} < 2 \Rightarrow 0 \leq U_{n+1} < 2.$$
   donc
$$0 \leq U_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}.$$
2. La monotonie de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ :
$$U_{n+1} - U_n = \sqrt{U_n+2} - U_n = \frac{U_n + 2 - U_n^2}{\sqrt{U_n+2} + U_n} = \frac{(U_n+1)(2-U_n)}{\sqrt{U_n+2}+U_n}$$
   et on a
$$0 \leq U_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}$$
   donc
$$(U_n+1)(2-U_n) > 0$$
   et par conséquent $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. $V_n = 2 - U_n \ ,\forall n \in \mathbb{N}$.
   (a) On remarque de la question 1 que $U_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}$ donc
$$0 < V_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

(b)

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{2-U_{n+1}}{2-U_n} = \frac{2-\sqrt{U_n+2}}{2-U_n} = \frac{(2-U_n)}{(2-U_n)\left(2+\sqrt{U_n+2}\right)} = \frac{1}{2+\sqrt{U_n+2}}$$

or $\forall n \in \mathbb{N}$ :

$$0 \leq U_n \Leftrightarrow 2+\sqrt{2} \leq 2+\sqrt{U_n+2} \Rightarrow 2 \leq 2+\sqrt{U_n+2} \Leftrightarrow \frac{1}{2+\sqrt{U_n+2}} \leq \frac{1}{2}.$$

(c) Par récurrence :
pour $n=1$ : on a $V_1 \leq 1$.
On suppose que $V_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, alors

$$V_{n+1} \leq \frac{1}{2}V_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

car $0 < V_n, \forall n \in \mathbb{N}$ d'où

$$V_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

donc

$$V_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

(d) Comme

$$0 < V_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

et

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$$

par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$ et comme $U_n = 2 - V_n$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 2.$$

**Exercice 6 :**

1. Par récurrence : On a $U_{n+1} = U_n\left(1-2U_n^2\right)$
   Pour $n=1$ : on a $0 < U_1 < \frac{1}{\sqrt{2}}$.
   On suppose que $0 < U_n < \frac{1}{\sqrt{2}}$ , d'où :

$$1-\sqrt{2}U_n > 0$$

   or

$$1-2U_n^2 = \left(1-\sqrt{2}U_n\right)\left(1+\sqrt{2}U_n\right)$$

alors
$$0 < 1 - 2U_n^2$$
d'une autre part, on a
$$1 - 2U_n^2 < 1$$
donc
$$0 < 1 - 2U_n^2 < 1$$
or $0 < U_n < \frac{1}{\sqrt{2}}$, alors
$$0 < U_n \left(1 - 2U_n^2\right) < \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\Leftrightarrow 0 < U_{n+1} < \frac{1}{\sqrt{2}}$$
et par conséquent : $0 < U_n < \frac{1}{\sqrt{2}};\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

2. La monotonie de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ :
$$U_{n+1} - U_n = \left(U_n - 2U_n^3\right) - U_n = -2U_n^3$$
et comme on a
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < U_n$$
alors
$$U_{n+1} - U_n < 0$$
donc $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

3. $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante et minorée alors elle est convergente vers sa borne inférieure.
Posons $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l = \lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1}$, d'où
$$U_{n+1} = U_n - 2U_n^3 \Rightarrow l = l - 2l^3$$
$$\Leftrightarrow 0 = -2l^3 \Leftrightarrow l = 0.$$
d'où
$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 0.$$

4. $E = \{U_n \;/\; n \in \mathbb{N}^*\}$ ; d'où
$$\inf E = \lim_{n\to+\infty} U_n = 0.$$
Comme $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante ; alors $U_1$ est un majorant de $E$, en effet : $U_1 \geq U_n; \forall n \in \mathbb{N}^*$, de plus $U_1 \in E$; donc
$$\max E = \sup E = U_1.$$

**Exercice 7 :**

1. $U_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\sin k}{2^k}, \forall n \in \mathbb{N}^*$,

   $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N};\ \forall p, q \in \mathbb{N} : \left( \begin{cases} n_\varepsilon \leq p \\ n_\varepsilon \leq q \end{cases} \Rightarrow |U_p - U_q| < \varepsilon \right)$$

   Etant donnés $\varepsilon > 0, p, q \in \mathbb{N}$, supposons $p > q$ :

$$\begin{aligned} |U_p - U_q| = \left| \sum_{k=1}^{p} \frac{\sin k}{2^k} - \sum_{k=1}^{q} \frac{\sin k}{2^k} \right| &= \left| \sum_{k=q+1}^{p} \frac{\sin k}{2^k} \right| \\ &\leq \sum_{k=q+1}^{p} \left| \frac{\sin k}{2^k} \right| \leq \sum_{k=q+1}^{p} \frac{1}{2^k}, \end{aligned}$$

   car $|\sin k| \leq 1$, $\forall k = 1, ..., n$.
   Or,

$$\sum_{k=q+1}^{p} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{q+1}} + \frac{1}{2^{q+2}} + ... + \frac{1}{2^p}$$

   est la somme des $p - q$ termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$, d'où :

$$\sum_{k=q+1}^{p} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{q+1}} \left( \frac{1 - \frac{1}{2^{p-q}}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2^q} \left( 1 - \frac{1}{2^{p-q}} \right)$$

   donc

$$\sum_{k=q+1}^{p} \frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2^q}.$$

   Par conséquent :

$$|U_p - U_q| \leq \frac{1}{2^q}.$$

   Alors pour que $|U_p - U_q| < \varepsilon$, il suffit que :

$$\frac{1}{2^q} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < 2^q \Leftrightarrow q > \frac{-\ln \varepsilon}{\ln 2}.$$

   Et donc il suffit de prendre $n_\varepsilon = \left[ \left| \frac{-\ln \varepsilon}{\ln 2} \right| \right] + 1$.

2. $V_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{\ln k}, \forall n \geq 2$.

   $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une suite de Cauchy si et seulement si

$$\exists \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N};\ \exists p, q \in \mathbb{N} : \left( \begin{cases} n \leq p \\ n \leq q \end{cases} \wedge |V_p - V_q| \geq \varepsilon \right)$$

   On prend $q = n$ et $p = 2n$ alors

$$|V_p - V_q| = |V_{2n} - V_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\ln k} \right| = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\ln k}$$

or $\ln k < k$, $\forall k > 0$, d'où

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\ln k} > \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \Rightarrow |V_p - V_q| > \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

D'une autre part ; on a pour tout $k$ tel que : $2 \leq k \leq 2n$ :

$$\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n},$$

d'où

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n}$$

or

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \Rightarrow |V_p - V_q| > \frac{1}{2}.$$

par conséquent, il suffit de prendre $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

**Exercice 8 :**

1. Par récurrence :
   pour $n = 0$ : on a $1 < U_0 < 2$.
   On suppose que $1 < U_n < 2$ , d'où :
   $$\begin{aligned} 1 < U_n < 2 &\Leftrightarrow 0 < U_n - 1 < 1 \\ &\Rightarrow 0 < (U_n - 1)^2 < 1 \\ &\Leftrightarrow 1 < (U_n - 1)^2 + 1 < 2 \end{aligned}$$
   donc $1 < U_{n+1} < 2$.
   Et par conséquent :$1 < U_n < 2$ ; $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. La monotonie de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ :
   $$U_{n+1} - U_n = (U_n - 1)^2 + 1 - U_n = (U_n - 1)(U_n - 2)$$
   comme on a
   $$\forall n \in \mathbb{N}, 1 < U_n < 2,$$
   alors
   $$U_{n+1} - U_n < 0$$
   et donc $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et minorée alors elle est convergente vers sa borne inférieure.
   Posons $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l = \lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1}$, d'où
   $$\begin{aligned} U_{n+1} = (U_n - 1)^2 + 1 \quad &\Rightarrow l = (l - 1)^2 + 1 \\ &\Leftrightarrow (l - 1)(l - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow l = 1 \vee l = 2. \end{aligned}$$
   or $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $U_0 = \frac{3}{2}$ ; alors
   $$\lim_{n\to+\infty} U_n = 1.$$

4. $E = \{U_n \ / \ \ n \in \mathbb{N}\}$ ; d'où

$$\inf E = \lim_{n \to +\infty} U_n = 1$$

Comme $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ; alors $U_0$ est un majorant de $E$, en effet : $U_0 \geq U_n; \forall n \in \mathbb{N}$, de plus $U_0 \in E$; donc $\max E = U_0 = \sup E$, donc

$$\sup E = \frac{3}{2}.$$

**Exercice 9 :**

1. Par récurrence :
pour $n = 0$ : on a $U_0 > 0$.
On suppose que $U_n > 0$ alors $U_n e^{-U_n} > 0$, donc

$$U_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. La monotonie de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ :

$$U_{n+1} - U_n = U_n \left(e^{-U_n} - 1\right)$$

comme $U_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ donc

$$-U_n < 0 \Leftrightarrow e^{-U_n} - 1 < 0$$

et par suite

$$U_{n+1} - U_n < 0$$

donc $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3. $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite minorée et décroissante alors elle est convergente vers sa borne inférieure.
Posons $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = l = \lim\limits_{n \to +\infty} U_{n+1}$, d'où

$$U_{n+1} = U_n e^{-U_n} \Rightarrow l = le^{-l} \Leftrightarrow l\left(e^{-l} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow l = 0.$$

Alors

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = 0.$$

4. Par récurrence :
pour $n = 0$ : on a $U_1 = e^{-U_0} = e^{-S_0}$.
Supposons que $U_{n+1} = e^{-S_n}$, et montrons que $U_{n+2} = e^{-S_{n+1}}$

$$U_{n+2} = U_{n+1} e^{-U_{n+1}} = e^{-S_n} e^{-U_{n+1}} = e^{-S_{n+1}}$$

donc

$$U_{n+1} = e^{-S_n}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

5. On a

$$S_n = -\ln U_{n+1} \text{ et } \lim_{n \to +\infty} U_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} U_n = 0$$

alors :

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty.$$