Corrigé test1 modèle

Exercice1:

$$A=\left\{\frac{2^n}{2^n-1},n\in\mathbb{N}^*\right\}.$$

1. $\forall n\in\mathbb{N}^*,2^{n-1}\leq 2^n-1$ par recurrence.

Pour $n=1,2^0=1\leq 2^1-1=1$ vraie.

supposons que $2^{n-1}\leq 2^n-1$ et montrons que $2^n\leq 2^{n+1}-1$.

On a $2^n=2^{n-1+1}=2^{n-1}.2\leq(2^n-1).2=2^{n+1}-2\leq 2^{n+1}-1$, ce qui donne $2^n\leq 2^{n+1}-1$.

Déduire $\frac{2^n}{2^n-1}\leq 2$.

On a d'aprés la question 1. $2^{n-1}\leq 2^n-1\Leftrightarrow\frac{2^n}{2}\leq 2^n-1\Leftrightarrow\frac{2^n}{2^n-1}\leq 2$.

2. Montrone que $\sup A=2,\inf A=1$.

On a $\forall x\in A,x=\frac{2^n}{2^n-1}$,

D'aprés la question 1. (déduction) on a $\frac{2^n}{2^n-1}\leq 2$ et $2^n-1<2^n\Rightarrow\frac{2^n}{2^n-1}>1\,(*)$,

d'où $1<\frac{2^n}{2^n-1}\leq 2$, ce qui donne que A est bornée.

$\sup A=2$.

On a $2\in A$ pour $n=1$, $\frac{2^1}{2^1-1}=2$ et 2 est un majorant de A alors $\max A=2=\sup A$.

$\inf A=1$.

$$\inf A=2\Leftrightarrow\begin{cases}\forall x\in A,x\geq 1,\text{ vérifiée d'aprés }(*)\\ \forall\varepsilon>0,\exists x_\varepsilon\in A/x_\varepsilon<1+\varepsilon\\ \forall\varepsilon>0,\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}^*/\frac{2^{n_\varepsilon}}{2^{n_\varepsilon}-1}<1+\varepsilon\end{cases}$$

Soit $\varepsilon>0$, $\frac{2^{n_\varepsilon}}{2^{n_\varepsilon}-1}<1+\varepsilon\Leftrightarrow 1+\frac{1}{2^{n_\varepsilon}-1}<1+\varepsilon\Leftrightarrow\frac{1}{2^{n_\varepsilon}-1}<\varepsilon\Leftrightarrow 2^{n_\varepsilon}>1+\frac{1}{\varepsilon}\Leftrightarrow n_\varepsilon>\frac{\ln\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\ln 2}$.

IL suffit de prendre $n_\varepsilon=\left[\frac{\ln\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\ln 2}\right]+1$.

Exercice2:

$$\begin{cases}U_0=\frac{1}{2}\\ U_{n+1}=\frac{3U_n}{1+2U_n},n\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

$$\begin{cases}U_0=\frac{1}{2}\\ U_{n+1}=\frac{3U_n}{1+2U_n},n\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

1. $\forall n\in\mathbb{N},0<U_n<1$. Montrons par recurrence.

Pour $n=0,U_0=\frac{1}{2}$ et $0<U_0<1$.

Supposons que $0<U_n<1$ et montrons que $0<U_{n+1}<1$.

On a $U_{n+1}=\frac{3U_n}{1+2U_n}=\frac{3}{2}+\frac{-\frac{3}{2}}{1+2U_n}$.

$0<U_n<1\Leftrightarrow 0<2U_n<2\Leftrightarrow 1<1+2U_n<3\Leftrightarrow\frac{1}{3}<\frac{1}{1+2U_n}<1\Leftrightarrow-\frac{3}{2}<\frac{-\frac{3}{2}}{1+2U_n}<-\frac{1}{2}\Leftrightarrow 0<\frac{3}{2}+\frac{-\frac{3}{2}}{1+2U_n}<1$.

d'où $\forall n\in\mathbb{N}, 0<U_n<1$.

2. La monotonie de (U_n).

$1^{ère}$ méthode:

$U_{n+1}-U_n=\frac{3U_n}{1+2U_n}-U_n=\frac{3Un-U_n-2U_n^2}{1+2U_n}=\frac{2U_n(1-U_n)}{1+2U_n}>0$ car $0<U_n<1$, ce qui donne (U_n) est croissante.

$2^{ème}$ méthode:

Posons $f(x)=\frac{3x}{1+2x}=\frac{3}{2}+\frac{-\frac{3}{2}}{1+2x}, 0<x<1$.

$f\prime(x)=\frac{3}{(1+2x)^2}>0\Rightarrow (U_n)$ monotone.

$U_1-U_0=\frac{3\left(\frac{1}{2}\right)}{1+2\left(\frac{1}{2}\right)}-\frac{1}{2}=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}>0\Leftrightarrow (U_n)$ croissante.

3. Déduire que (U_n) est convergente.

Puisque (U_n) est croissante et majorée alors elle est convergente vers la borne supérieure.

Calculons la limite: (U_n) est convergente vers l, alors

$\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=l\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}U_{n+1}=l\Leftrightarrow l=\frac{3l}{1+2l}\Leftrightarrow l+2l^2=3l\Leftrightarrow 2l^2-2l=0\Leftrightarrow$

$$2l(l-1)=0\Rightarrow\left\{\begin{array}{c} l=0 \text{ refusée car } (U_n) \text{ est croissante(converge vers la borne supérieure).}\\ \text{ou}\\ l=1\end{array}\right..$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty}U_n=1.$$

4. $E=\{U_n, n\in\mathbb{N}\}$.

Puisque (U_n) est convergente et croissante alors

$$\begin{aligned}\sup E &= \lim_{n\to+\infty}U_n=1.\\ \inf E &= U_0=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Remarque 1 est un minorant pour E mais $\frac{1}{2}$ est le plus gand des minorants de E.

Exercice3.

$$z=\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}$$

1. Forme algèbrique

$$z=\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}=\frac{(1+i)\left(1+i\sqrt{3}\right)}{4}=\frac{\left(1-\sqrt{3}\right)}{4}+i\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)}{4}$$

Forme trigonométrique

$z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta), \theta=\arg z$

$|z|=\frac{|1+i|}{\left|1-i\sqrt{3}\right|}=\frac{\sqrt{2}}{2}, \theta=\arg z=\arg(1+i)-\arg\left(1-i\sqrt{3}\right)=\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{7\pi}{12}$.

D'où

$$z=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right).$$

2. Déduire $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right), \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.
On a

$$z = \frac{\left(1-\sqrt{3}\right)}{4} + i\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)}{4}$$

et

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right).$$

Par identification, on obtient

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) &= \frac{2}{\sqrt{2}}\frac{\left(1-\sqrt{3}\right)}{4} = \frac{\left(1-\sqrt{3}\right)}{2\sqrt{2}} \\
\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) &= \frac{2}{\sqrt{2}}\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)}{4} = \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$