Solution du Fiche TD n° 03 (Fonctions réelles d'une variable réelle Limite, continuité et dérivabilité)

Exercice 1: Calculons, lorsqu'elles existent, les limites suivantes:

1] $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\cancel{(x-2)}(x-1)}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-1}{x+2} = \boxed{\dfrac{1}{4}}$

2] $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^3-3}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3(x^3-1)}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{(x-2)\cancel{(x-1)}}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3(x^2+x+1)}{x-2} = \boxed{-9}$

3] $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}{\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}{x^2-x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}}{x-1} = \boxed{-2}$

4] $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{1+\cos x}{\sin^2 x} = \lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{1+\cos x}{1-\cos^2 x} = \lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\cancel{1+\cos x}}{(1-\cos x)\cancel{(1+\cos x)}}$

$= \lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{1}{1-\cos x} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$

5] $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x+3}-\sqrt{x-1} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}\right)}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}}$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}} = \boxed{0}$

6] $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+3|x|}{x} =$

$\to \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{x^2+3x}{x} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x+3 = \boxed{3}$

$\to \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \dfrac{x^2-3x}{x} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} x-3 = \boxed{-3}$

7] $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}-3}{e^{3x}+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cancel{e^{2x}}\left(1-\frac{3}{e^{2x}}\right)^{\to 0}}{\cancel{e^{2x}}\left(\underbrace{e^{x}}_{+\infty}+\underbrace{\frac{2}{e^{2x}}}_{0}\right)} = \boxed{0}$

8] $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{[x]}{x}$

on a: $x-1 < [x] \leqslant x$

Comme $x>0 \Rightarrow \frac{x-1}{x} < \frac{[x]}{x} \leqslant 1$

on a: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$
et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1$
Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{[x]}{x} = \boxed{1}$

Exercice 2: Etudier la continuité des fcts suivantes

1] $f(x) = \begin{cases} x\cos\frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$

On a f est continue sur $\mathbb{R}^*$,
il suffit d'étudier la continuité de f en 0 ?

i.e. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \overset{?}{=} f(0)$

on a: $f(0) = \boxed{0}$

et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \underbrace{x}_{0}\, \underbrace{\cos\frac{1}{x}}_{\text{bornée}} = \boxed{0}$

Donc f est continue en 0

Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}$

$\boxed{2}$ $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sin 2x} & ; x \neq 0 \\ 2 & ; x = 0 \end{cases}$

On a : g est continue sur $\mathbb{R}^*$

il suffit d'étudier la continuité de g en 0

i.e $\lim\limits_{x \to 0} g(x) \overset{?}{=} g(0)$

Rappel:

$$\lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

On a : $g(0) = \boxed{2}$

et $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin 2x}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{2 \underbrace{\dfrac{\sin 2x}{2x}}_{\to 1}} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$

Donc g n'est pas continue en 0,

Ainsi g est continue sur $\mathbb{R}^*$

$\boxed{3}$ $h(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ 2 & ; x = 0 \end{cases}$

On a : h est continue sur $\mathbb{R}^*$

il suffit d'étudier la continuité de h en 0.

i.e $\lim\limits_{x \to 0} h(x) \overset{?}{=} h(0)$

On a : $h(0) = 2$

et $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = \lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$: n'existe pas

Car : $\exists\, U_n = \dfrac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2}}$: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} f(U_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} \sin\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\right] = \lim\limits_{n \to +\infty} (-1)^n = \begin{cases} \to -1 \\ \to 1 \end{cases}$

Donc h n'est pas continue en 0 $\Rightarrow$ h est continue sur $\mathbb{R}^*$.