Corrigé du Td5 Dérivabilité
2023/2024

Exercice1. Dérivabilité sur le domaine de définition

1.$f_1(x) = \begin{cases} x^2 \cos\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}, D_{f_1} = \mathbb{R}.$

Dérivabilité sur $\mathbb{R}$:

Pour $x \neq 0$; $f_1(x) = x^2 \cos\frac{1}{x}$ dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car produit et composition de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$.

Pour $\mathbf{x = 0}$; $f_1(0) = 0$,

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{f_1(x)-f_1(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow f_1$ est dérivable en 0 et on a $f'(0) = 0$.

Par suit f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2.$f_2(x) = \begin{cases} x+1, x \leq -1 \\ \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right), x > -1 \end{cases}, D_{f_2} = \mathbb{R}.$

Dérivabilité sur $\mathbb{R}$:

Pour $\mathbf{x < -1}$; $f_2(x) = x+1$ dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]-\infty, -1[$ car c'est un polynôme.

Pour $\mathbf{x > -1}$; $f_2(x) = \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]-1, +\infty[$ car produit de fonctions dérivables sur $]-1, +\infty[$.

Pour $\mathbf{x = -1}$; $f_2(-1) = -1+1 = 0$,

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \frac{f_2(x)-f_2(-1)}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \frac{x+1-0}{x+1} = 1 \Rightarrow f_2$ est dérivable à gauche de -1 et on a $f'_{2g}(-1) = 1$.

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{f_2(x)-f_2(-1)}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)-0}{x+1} = \lim\limits_{\substack{t \to -0 \\ >}} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi(t-1)}{2}\right)}{t} = \lim\limits_{\substack{t \to -0 \\ >}} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{t} = \lim\limits_{\substack{t \to -0 \\ >}} \frac{\frac{\pi}{2}\sin^2\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}t} = \lim\limits_{\substack{t \to -0 \\ >}} \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}t} = 0 \Rightarrow f_2$ est dérivable à droite de -1 et on a $f'_{2d}(-1) = 0$.

On a $f'_{2g}(-1) \neq f'_{2d}(-1)$ alors f_2 n'est pas dérivable en -1 par suit n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.

3.$f_3(x) = \begin{cases} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}, x \in]0, \pi[\\ 0, x = 0 \end{cases}, D_{f_3} = [0, \pi[.$

Dérivabilité sur $[0, \pi[$.

Pour $\mathbf{x} \in]0, \pi[$: $f_3(x) = \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ dérivable sur $]0, \pi[$ car produit, composition et quotient de fonctions dérivables sur $]0, \pi[$.

Pour $\mathbf{x = 0}$, $f_3(0) = 0$.

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{f_3(x)-f_3(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x \sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \sin\frac{1}{x}$ n'exite pas$\Rightarrow f_3$ n'est pas dérivable en 0 par suit n'est pas dérivable sur $[0, \pi[$.

4.$f_4(x) = \begin{cases} x^2 + x, x \leq 0 \\ \sin x, 0 < x \leq \pi \\ 1 + \cos x, x > \pi \end{cases}, D_{f_4} = \mathbb{R}.$

Dérivabilité sur $\mathbb{R}$:

Pour $\mathbf{x < 0}$; $f_4(x) = x^2 + x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]-\infty, 0[$ car c'est un polynôme.

Pour $\mathbf{0 < x < \pi}$; $f_4(x) = \sin x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]0, \pi[$.

Pour $\mathbf{x > \pi}$; $f_4(x) = 1 + \cos x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]\pi, +\infty[$.

Pour $\mathbf{x = 0}$; $f_4(0) = 0$,

$\lim\limits_{\substack{< \\ x \to -0}} \frac{f_4(x) - f_4(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 0}} \frac{x^2 + x - 0}{x} = 1 \Rightarrow f_4$ est dérivable à gauche de 0 et on a $f'_{4g}(0) = 1$.

$\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} \frac{f_4(x) - f_4(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow f_4$ est dérivable à droite de 0 et on a $f'_{4d}(0) = 1$.

On a $f'_{4g}(0) = f'_{4d}(0) = 1 \Rightarrow f_4$ est dérivable en 0 et on a $f'_4(0) = f'_{4g}(0) = f'_{4d}(0) = 1$.

Pour $\mathbf{x = \pi}$; $f_4(\pi) = 0$,

$\lim\limits_{\substack{< \\ x \to -\pi}} \frac{f_4(x) - f_4(\pi)}{x - \pi} = \lim\limits_{\substack{< \\ x \to \pi}} \frac{\sin x - 0}{x - \pi} = \lim\limits_{\substack{< \\ t \to 0}} \frac{\sin(t + \pi)}{x - \pi} = \lim\limits_{\substack{< \\ t \to 0}} \frac{-\sin t}{t} = -1 \Rightarrow f_4$ est dérivable à gauche de π et on a $f'_{4g}(\pi) = -1$.

$\lim\limits_{\substack{> \\ x \to \pi}} \frac{f_4(x) - f_4(\pi)}{x - \pi} = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to \pi}} \frac{1 + \cos x}{x - \pi} = \lim\limits_{\substack{> \\ t \to 0}} \frac{1 + \cos(t + \pi)}{t} = \lim\limits_{\substack{> \\ t \to 0}} \frac{1 - \cos t}{t} = \lim\limits_{\substack{> \\ t \to 0}} \frac{\frac{t^2}{2}}{t} = 0 \Rightarrow$ f_4 est dérivable à droite de π et on a $f'_{4d}(\pi) = 0$.

On a $f'_{4g}(\pi) \neq f'_{4d}(\pi) \Rightarrow f_4$ n'est pas dérivable en π.

Ce qui donne que f_4 n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.

5.$f_5(x) = \begin{cases} e^x - 1, x \leq 0 \\ \sin \pi x, 0 < x \leq 1 \\ -\pi \ln x, x > 1 \end{cases}$, $D_{f_5} = \mathbb{R}$.

Dérivabilité sur $\mathbb{R}$:

Pour $\mathbf{x < 0}$; $f_5(x) = e^x - 1$ dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]-\infty, 0[$.

Pour $\mathbf{0 < x < 1}$; $f_5(x) = \sin \pi x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]0, 1[$.

Pour $\mathbf{x > 1}$; $f_5(x) = \pi \ln x$ dérivable sur $]0, +\infty[$ en particulier sur $]1, +\infty[$.

Pour $\mathbf{x = 0}$; $f_5(0) = 0$,

$\lim\limits_{\substack{< \\ x \to -0}} \frac{f_5(x) - f_5(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 0}} \frac{e^x - 1 - 0}{x} = 1 \Rightarrow f_5$ est dérivable à gauche de 0 et on a $f'_{5g}(0) = 1$.

$\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} \frac{f_5(x) - f_5(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} \frac{\sin \pi x}{x} = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} \pi \frac{\sin \pi x}{\pi x} = \pi \Rightarrow f_5$ est dérivable à droite de 0 et on a $f'_{5d}(0) = \pi$.

On a $f'_{5g}(0) \neq f'_{5d}(0) \Rightarrow f_5$ n'est pas dérivable en 0.

Pour $\mathbf{x = 1}$; $f_5(1) = 0$,

$\lim\limits_{\substack{< \\ x \to -1}} \frac{f_5(x) - f_5(1)}{x - 1} = \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 1}} \frac{\sin \pi x - 0}{x - 1} = \lim\limits_{\substack{< \\ t \to 0}} \frac{\sin \pi(t + 1)}{t} = \lim\limits_{\substack{< \\ t \to 0}} \frac{-\sin \pi t}{t} = \lim\limits_{\substack{< \\ t \to 0}} \pi \frac{-\sin \pi t}{\pi t} = -\pi \Rightarrow f_5$ est dérivable à gauche de 1 et on a $f'_{5g}(1) = -\pi$.

$\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 1}} \frac{f_5(x) - f_5(1)}{x - 1} = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 1}} \frac{-\pi \ln x}{x - 1} = \lim\limits_{\substack{> \\ t \to 0}} -\pi \frac{\ln(t + 1)}{t} = -\pi \Rightarrow f_5$ est dérivable à droite de 1 et on a $f'_{5d}(\pi) = -\pi$.

On a $f'_{5g}(1) = f'_{5d}(1) \Rightarrow f_5$ est dérivable en 1 et on a $f'_5(1) = -\pi$.

Ce qui donne que f_5 n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.

Calcule de dérivée:

1. f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_1'(x) = \begin{cases} 2x\cos\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$.

2. f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ et $f_2'(x) = \begin{cases} 1, x < -1 \\ -2\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right), x > -1 \end{cases}$.

3. f_3 est dérivable sur $]0,\pi[$ et $f_3'(x) = \frac{\left(2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right)\sin x - x^2\cos x\sin\frac{1}{x}}{(\sin x)^2}$.

4. f_4 est dérivable sur $\mathbb{R}-\{\pi\}$ et $f_4'(x) = \begin{cases} 2x+1, x \leq 0 \\ \cos x, 0 < x < \pi \\ -\sin x, x > \pi \end{cases}$.

5. f_5 est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f_5'(x) = \begin{cases} e^x, x < 0 \\ \pi\cos\pi x, 0 < x \leq 1 \\ \frac{-\pi}{x}, x > 1 \end{cases}$.

Exercice2. Dérivée de fonctions composé

1) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)'}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{x\sqrt{1+x^2}+1+x^2}$.

2) $f(x) = tg\left(\dfrac{1-e^x}{1+e^x}\right) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{\left(\dfrac{1-e^x}{1+e^x}\right)'}{\cos^2\left(\dfrac{1-e^x}{1+e^x}\right)} = \dfrac{\frac{-2e^x}{(1+e^x)^2}}{\cos^2\left(\dfrac{1-e^x}{1+e^x}\right)} =$
$\dfrac{-2e^x}{(1+e^x)^2\cos^2\left(\dfrac{1-e^x}{1+e^x}\right)}$.

3) $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)'}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)^2}} = \frac{-2\left(x^2-1\right)}{(x^2+1)|x^2-1|} =$
$\begin{cases} \frac{-2}{1+x^2}, \text{ si } x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\\ \frac{2}{1+x^2}, \text{ si } x \in]-1,1[\end{cases}$.

4) $f(x) = arctg\left(\dfrac{1}{x}\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{-1}{1+x^2}$.

5) $f(x) = e^{arctgx^2} \Rightarrow f'(x) = \left(arctgx^2\right)' e^{arctgx^2} = \frac{2x}{1+x^4}e^{arctgx^2}$.

6) $f(x) = \arg shx\left(\dfrac{x}{1+x}\right) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{\left(\dfrac{x}{1+x}\right)'}{\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^2}} = \frac{1}{(x+1)^2\sqrt{\frac{2x^2+2x+1}{(x+1)^2}}} =$
$\frac{|x+1|}{(x+1)^2\sqrt{2x^2+2x+1}}$.

7. $f(x) = \ln(\ln(\ln x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{(\ln(\ln x))'}{\ln(\ln x)} = \frac{\frac{(\ln x)'}{\ln x}}{\ln(\ln x)} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x\ln(\ln x)} =$
$\frac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}$.

8. $f(x) = (chx)^{shx} = e^{shx\ln(chx)} \Rightarrow f'(x) = (shx\ln(\,chx))' e^{shx\ln(chx)} =$
$\left(chx\ln chx + shx\frac{(chx)'}{chx}\right)e^{shx\ln(chx)} = \left(chx\ln chx + \frac{(shx)^2}{chx}\right)e^{shx\ln(chx)}$.

Exercice3.

I. f définie de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivable sur $[0,1]$, et $f(0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) = 1$.

Montrer en utilisant le théorème de Rolle que f'' s'annule au moins une fois sur l'intervalle $[0,1]$.

f deux fois dérivable sur $[0,1] \Rightarrow f''$ existe $[0,1] \Rightarrow f'$ dérivable sur $[0,1] \Rightarrow f'$ continue sur $[0,1] \Rightarrow f$ est dérivable sur $[0,1] \Rightarrow f$ continue sur $[0,1]$.

Appliquons le théorème de Rolle pour la fonction f sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ et sur $\left[\frac{1}{2},1\right]$.

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ continue sur } \left[0,\frac{1}{2}\right] \\ f \text{ dérivable sur } \left]0,\frac{1}{2}\right[\\ f(0)=f\left(\frac{1}{2}\right) \end{array}\right\} \overset{Rolle}{\Rightarrow} \exists c_1 \in \left]0,\tfrac{1}{2}\right[/ f'(c_1)=0 ...(1)$$

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ continue sur } \left[\frac{1}{2},1\right] \\ f \text{ dérivable sur } \left]\frac{1}{2},1\right[\\ f\left(\frac{1}{2}\right)=f(1) \end{array}\right\} \overset{Rolle}{\Rightarrow} \exists c_2 \in \left]\tfrac{1}{2},1\right[/ f'(c_2)=0 ...(2)$$

On a $c_1 < c_2$ car $0 < c_1 < \frac{1}{2} < c_2 < 1$. Appliquons le théorème de Rolle pour la fonction f' sur $[c_1, c_2]$.

$$\left.\begin{array}{r} f' \text{ continue sur } [c_1,c_2] \subset [0,1] \\ f' \text{ dérivable sur }]c_1,c_2[\subset [0,1] \\ \text{de } (1) \text{ et } (2),\, f'(c_1)=f'(c_2)=0 \end{array}\right\} \overset{Rolle}{\Rightarrow} \exists c_3 \in]c_1,c_2[/ f''(c_3)=0.$$

II. Montrons que $\forall x>0, \frac{x}{1+x^2} < arctgx < x$.

Posons $f(t) = arctgt$, appliquons le théorème des accroissement finis($T.A.F.$) sur $[0,x]$.

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ continue sur } [0,x] \\ f \text{ dérivable sur }]0,x[\end{array}\right\} \overset{T.A.F.}{\Rightarrow} \exists c \in]0,x[/ f(x)-f(0)=(x-0)f'(c).$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} arctgx - arctg0 &= x\frac{1}{1+c^2} \\ arctgx &= \frac{x}{1+c^2} \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} 0 &< c < x \Rightarrow 0 < c^2 < x^2 \Rightarrow 1 < 1+c^2 < 1+x^2 \\ \frac{1}{1+x^2} &< \frac{1}{1+c^2} < 1 \Rightarrow \frac{x}{1+x^2} < \frac{x}{1+c^2} < x, x>0. \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{x}{1+x^2} < arctgx = \frac{x}{1+c^2} < x.$$

b) $ln(100) = 4,6052$, Montrons qu'en écrivant: $\ln(101) = 4,6151$ on commet une erreur inférieur à 10^{-4}.

Appliquons le théorème des accroissement finis sur $[100,101]$ pour la fonction $\ln x$.

$$\left.\begin{array}{r} \ln x \text{ continue sur } [100,101] \\ \ln x \text{ dérivable sur }]100,101[\end{array}\right\} \overset{T.A.F.}{\Rightarrow} \exists c \in]100,101[/ \ln 101 - \ln 100 = (101-100)\frac{1}{c}.$$

donc

$$\begin{aligned} \ln 101 - \ln 100 &= \frac{1}{c} \\ \ln 101 &= \ln 100 + \frac{1}{c} \end{aligned}$$

l'erreur commise est $E = \ln 101 - 4,6151 = \ln 100 + \frac{1}{c} - 4,6151 = 4,6052 - 4,6151 + \frac{1}{c}$.

Et on a $100 < c < 101 \Rightarrow \frac{1}{101} < \frac{1}{c} < \frac{1}{100}$.

Ce qui donne

$$\begin{aligned} E &= 4,6052 - 4,6151 + \frac{1}{c} \\ E &< 4,6052 - 4,6151 + \frac{1}{100} \\ E &< -0,0099 + 0,01 \\ E &< 0,0001 = 10^{-4}. \end{aligned}$$

Exercice4. En utilisant la règle de l'Hopital, calculer les limites:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\cos x} - e}{\cos x - 1} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x e^{\cos x}}{-\sin x} = e$ ($e^{\cos x} - e, \cos x - 1$ sont dérivables sur D_f.)

2. $\lim_{x\to 0} \frac{tgx - \sin x}{x - \sin x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{(\cos x)^2} - \cos x}{1 - \cos x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2\sin x}{(\cos x)^3} + \sin x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{(\cos x)^3} + 1 = 3$.

3. $\lim_{x\to 1} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 1}{(x-1)^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{2(x-1)} \overset{H}{=} \lim_{x\to 1} \frac{-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{2} = -\frac{\pi^2}{8}$.

4. $\lim_{x\to 0} \frac{arc\sin x}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1} = 1$.

5. $\lim_{x\to 0} \frac{(chx)^2 - 1}{3x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2chxshx}{3} = 0$.

Exercice 5. En utilisant la formule de Taylor-Mac-Laurin d'ordre n, pour la fonction e^x, on obtient

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \underbrace{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}}_{rest\ de\ Cauchy}, 0 < \theta < 1$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x} &> 0, \forall x > 0 \Rightarrow 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^c > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} \\ &\Rightarrow e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}, \forall x > 0 \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Taylor-Mac-Laurin d'ordre 2, montrons que $\frac{8}{3} < e < 3$.

On a

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}e^{\theta x}, 0 < \theta < 1.$$

Pour $x = 1$, on obtient

$$\begin{aligned} e &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}e^{\theta}, 0 < \theta < 1. \\ e &= \frac{5}{2} + \frac{1}{6}e^{\theta} \end{aligned}$$

On a $0<\theta<1 \Rightarrow 1<e^{\theta}<e \Rightarrow \frac{1}{6}<\frac{e^{\theta}}{6}<\frac{e}{6} \Rightarrow \frac{5}{2}+\frac{1}{6}<\underbrace{\frac{5}{2}+\frac{e^{\theta}}{6}}_{=e}<\frac{5}{2}+\frac{e}{6}$,

donc

$$\frac{8}{3}=\frac{16}{6}<e \ldots(1)$$

et

$$e<\frac{5}{2}+\frac{e}{6} \Rightarrow e-\frac{e}{6}<\frac{5}{2} \Rightarrow \frac{5e}{6}<\frac{5}{2} \Rightarrow e<\frac{6}{2}=3 \ldots(2)$$

De (1) et (2)

$$\frac{8}{3}<e<3.$$

On a

$$e^{x}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^{2}}{2!}+\ldots+\frac{x^{n}}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}, 0<\theta<1$$

Pour $x=1$, on aura

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!} e^{\theta}, 0<\theta<1$$

$$e-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)=\frac{1}{(n+1)!} e^{\theta}$$

et d'aprés la question précédente on a

$$\frac{1}{(n+1)!}<\frac{1}{(n+1)!} e^{\theta}<\frac{1}{(n+1)!} e<\frac{3}{(n+1)!} \text{ car } e<3$$

ce qui donne

$$\frac{1}{(n+1)!}<e-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)<\frac{3}{(n+1)!}.$$

Exercice 6. Soit la fonction $g(x)=e^{2x}-2$.
1. Convexité de la fonction g.
$g'(x)=2e^{2x}, g''(x)=4e^{2x}>0 \Rightarrow g$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Equation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 0.
$(T): y=g'(0)(x-0)+g(0)=2x-1$.
$y=2x-1$ est l'équation de la tangente à la courbe de g.
3. Déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{2}\left(e^{2x}-1\right) \geq x$.
Puisque g est convexe sur $\mathbb{R}$ alors sa courbe représentative est au dessus de toutes ses tangentes, alors $g(x) \geq y$.
c'est à dire $\forall x \in \mathbb{R}, e^{2x}-2 \geq 2x-1 \Rightarrow e^{2x}-1 \geq 2x \Rightarrow \frac{1}{2}\left(e^{2x}-1\right)$.
Exercice supplementaire:

$$f(x)=\begin{cases} e^{x}-1, & x<0 \\ arctg \frac{x}{1+x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

1. $D_f = \mathbb{R}$.
2. Continuité sur $\mathbb{R}$.
Pour $x < 0, f(x) = e^x - 1$ continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]-\infty, 0[$.
Pour $x > 0, f(x) = arctg\frac{x}{1+x}$ continue sur $]0, +\infty[$ car quotient et composition de fonctions continues sur $]0, +\infty[$.
Pour $x = 0, f(0) = arctg0 = 0$.
$\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}} e^x - 1 = 0 = f(0) \Rightarrow f$ continue à gauche de 0.
$\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} arctg\frac{x}{1+x} = 0 = f(0) \Rightarrow f$ continue à droite de 0.
d'où f continue en 0, par suit f continue sur $\mathbb{R}$.
3. Dérivabilité sur $\mathbb{R}$.
Pour $x < 0, f(x) = e^x - 1$ dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]-\infty, 0[$.
Pour $x > 0, f(x) = arctg\frac{x}{1+x}$ dérivable sur $]0, +\infty[$ car quotient et composition de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$.
Pour $x = 0, f(0) = arctg0 = 0$.
$\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{e^x-1}{x} = 1 \Rightarrow f$ dérivable à gauche de 0 et $f'_g(0) = 1$.
$\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{arctg\frac{x}{1+x}}{x} \overset{H}{=} \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{\frac{\left(\frac{x}{1+x}\right)'}{1+\left(\frac{x}{1+x}\right)^2}}{1} = \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{1}{1+2x+2x^2} = 1 \Rightarrow f$ dérivable à droite de 0 et $f'_d(0) = 1$.
On a $f'_g(0) = f'_d(0) = 1 \Rightarrow f$ dérivable en 0 et on a $f'(0) = 1$
par suit f dérivable sur $\mathbb{R}$.
4. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$f'(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ \frac{\left(\frac{x}{1+x}\right)'}{1+\left(\frac{x}{1+x}\right)^2}, & x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ \frac{1}{1+2x+2x^2}, & x \geq 0 \end{cases}.$$

II. Soit la fonction $\ln(x+1)$ définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
1. Appliquer le théorème des accroissements finies pour cette fonction sur $[0, x]$.

$\left.\begin{array}{r} \ln(t+1) \text{ continue sur } [0,+\infty[\text{ en particulier sur } [0,x] \\ \ln(t+1) \text{ dérivable sur }]0,x[\end{array}\right\} \overset{T.A.F.}{\Rightarrow} \exists c \in]0, x[/ \ln(x+1) - \ln(0+1) = (x-0)\frac{1}{c+1}$

donc

$$\ln(x+1) = \frac{x}{c+1}, \forall x > 0.$$

2. Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$g(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x).$$

D'aprés la première question $\ln(x+1) = \frac{x}{c+1}, 0 < c < x$, alors $1 < c+1 < x+1 \Rightarrow .\frac{x}{1+x} < \frac{x}{c+1} = \ln(x+1) \Rightarrow \frac{x}{1+x} - \ln(x+1) < 0, \forall x > 0$.
Pour $x = 0, g(0) = 0$ alors $\forall x \geq 0, g(x) \leq 0$.