Cours d'Analyse 1

Damerdji Bouharis A.

Université des Sciences et de la Technologie Mohamed Boudiaf
Faculté des Mathématiques et Informatique.

Table des matières

1 **5**

2 **7**

3 **9**

4 Fonctions réelles d'une variable réelle (partie 1) **11**
4.1 Définitions. 11
4.1.1 Fonctions monotones 12
4.1.2 Fonctions bornées 12
4.2 Limite d'une fonction 12
4.2.1 Autres limites 13
4.2.2 Relation entre limite de fonctions et limite de suites 14
4.2.3 Opérations sur les limites de fonctions 16
4.3 Notations de Landau 16
4.4 Fonctions équivalentes 19

Chapitre 4

Fonctions réelles d'une variable réelle (partie 1)

4.1 Définitions.

Définition 4.1.1 - *Une fonction réelle d'une variable réelle est une application* f *d'un ensemble* $E \subset \mathbb{R}$ *dans un ensemble* $F \subset \mathbb{R}$, *notée*

$$f: \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}.$$

- *On appelle* x *la variable réelle et* $f(x)$ *l'image de* x *par* f.

- *On appelle graphe de* f *toute partie* Γ_f *du produit cartésien* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$; *telle que* $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \ / \ x \in E\}$.

- *Le domaine de définition de* f *est l'ensemble des valeurs de* $x \in E$ *pour lesquelles la fonction* f *est bien définie, on le note par* D_f.

- *On note par* $\mathcal{F}(E, F) = \{Ensemble\ des\ fonctions\ de\ E\ dans\ F\}$.

Définition 4.1.2 *(Parité d'une fonction)*

Soit f *une fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.

- f *est dite paire si* $\forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = f(x)$: *le graphe de* f *est symétrique par rapport à l'axe* $(y'y)$.

- f *est dite impaire si* $\forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = -f(x)$: *le graphe de* f *est symétrique par rapport à l'origine* o.

Définition 4.1.3 *(Périodicité d'une fonction)*

On dit que f *est une fonction périodique s'il existe un nombre réel strictement positif* T *tel que :*

$$\forall x \in D_f : f(x + T) = f(x).$$

Exemples 4.1.4 - *Pour* $f(x) = \sin x$ *ou* $f(x) = \cos x$, *on a* $T = 2\pi$.

- *Pour* $f(x) = tgx$, *on a* $T = \pi$.

- *Pour* $f(x) = x - [x]$, *on a* $T = 1$.

- *Pour* $f(x) = \cos\left(\frac{3x}{2}\right)$, *on a* $T = \frac{4\pi}{3}$.

Remarques :

1. Si f est paire ou impaire, alors il suffit de l'étudier sur la moitié de son domaine de définition.
2. Il existe des fonctions qui ne sont ni paires ni impaires.
3. Si f est périodique de période T, alors il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur T.

4.1.1 Fonctions monotones

Définition 4.1.5 *Soit $f : E \to F$ une fonction, telle que $E, F \subset \mathbb{R}$.*
- f est dite croissante si $\forall x, y \in E : x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
- f est dite décroissante si $\forall x, y \in E : x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.
- f est dite monotone si f est croissante ou décroissante.
- f est dite strictement croissante si $\forall x, y \in E : x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
- f est dite strictement décroissante si $\forall x, y \in E : x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.
-f est dite strictement monotone si f est strictement croissante ou strictement décroissante.

Remarque : Si la fonction f est strictement monotone alors f est injective.

4.1.2 Fonctions bornées

Définition 4.1.6 *Soit $f : E \to F$ une fonction, telle que $E, F \subset \mathbb{R}$.*
- f est dite majorée sur E si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in E : f(x) \leq M$.
- f est dite minorée sur E si $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in E : m \leq f(x)$.
- f est dite bornée sur E si f est minorée et majorée.

4.2 Limite d'une fonction

Définition 4.2.1 *Soit f une fonction définie d'un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et x_0 un point de I.*

On dit que f admet une limite lorsque x tend vers x_0 s'il existe un nombre réel l tel que :

$$\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = l\right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \ / \ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$$

Théorème 4.2.2 *Si f admet une limite au point x_0 alors cette limite est unique.*

Preuve :
Supposons par l'absurde que f admet deux limites différentes l_1 et l_2 $(l_1 \neq l_2)$ lorsque x tend vers x_0, d'où on a

$$\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1\right) \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_1 > 0, \forall x \in I \ / \ |x - x_0| < \alpha_1 \Rightarrow |f(x) - l_1| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$\left(\lim_{x\to x_0} f(x) = l_2\right) \Leftrightarrow \left(\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha_2 > 0, \forall x \in I \ / \ |x - x_0| < \alpha_2 \Rightarrow |f(x) - l_2| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Soit $\varepsilon > 0$,

$$|l_1 - l_2| = |(l_1 - f(x)) + (f(x) - l_2)|$$

alors pour $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$; on a

$$|l_1 - l_2| \leq |(f(x) - l_1)| + |(f(x) - l_2)| < \varepsilon$$

pour tout $\varepsilon > 0$, donc

$$l_1 = l_2.$$

□

Définition 4.2.3 .

- *On dit que* f *admet une limite* l_g *lorsque* x *tend vers* x_0 *à gauche ou par des valeurs inférieures et on note* $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = l_g$ *si*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha > 0, \forall x \in I \ / \ x_0 - \alpha < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

- *On dit que* f *admet une limite* l_d *lorsque* x *tend vers* x_0 *à droite ou par des valeurs supérieureset on note* $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = l_d$ *si*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha > 0, \forall x \in I \ / \ x_0 < x < x_0 + \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Remarques :

1. Si f admet une limite l lorsque x tend vers x_0 alors

$$\lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = l.$$

2. Si f admet une limite à gauche de x_0 notée l_g et une limite à droite de x_0 notée l_d ; telles que $l_g = l_d$ alors

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l_g = l_d.$$

3. Si les deux limites l_g et l_d existent et sont différentes alors f n'admet pas de limite lorsque x tend vers x_0.

4.2.1 Autres limites

1. $\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty\right) \Leftrightarrow (\forall A > 0, \exists\alpha > 0, \forall x \in I \ / \ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) > A)$
2. $\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty\right) \Leftrightarrow (\forall A < 0, \exists\alpha > 0, \forall x \in I \ / \ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) < A)$
3. $\left(\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = l\right) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha > 0, \forall x \in I \ / \ x > \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$

4. $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l\right) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha < 0, \forall x \in I \ / \ x < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$
5. $\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\right) \Leftrightarrow (\forall A > 0, \exists\alpha > 0, \forall x \in I \ / \ x > \alpha < \alpha \Rightarrow f(x) > A)$
6. $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty\right) \Leftrightarrow (\forall A > 0, \exists\alpha < 0, \forall x \in I \ / \ x < \alpha \Rightarrow f(x) > A)$
7. $\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty\right) \Leftrightarrow (\forall A < 0, \exists\alpha > 0, \forall x \in I \ / \ x > \alpha \Rightarrow f(x) < A)$
8. $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\right) \Leftrightarrow (\forall A < 0, \exists\alpha < 0, \forall x \in I \ / \ x < \alpha \Rightarrow f(x) < A)$
9. $\left(\lim\limits_{x\overset{<}{\to}x_0} f(x) = +\infty\right) \Leftrightarrow (\forall A > 0, \exists\alpha > 0, \forall x \in I \ / \ x_0 - \alpha < x < x_0 \Rightarrow f(x) > A)$
10. $\left(\lim\limits_{x\overset{<}{\to}x_0} f(x) = -\infty\right) \Leftrightarrow (\forall A < 0, \exists\alpha > 0, \forall x \in I \ / \ x_0 - \alpha < x < x_0 \Rightarrow f(x) < A)$
11. $\left(\lim\limits_{x\overset{>}{\to}x_0} f(x) = +\infty\right) \Leftrightarrow (\forall A > 0, \exists\alpha > 0, \forall x \in I \ / \ x_0 < x < x_0 + \alpha \Rightarrow f(x) > A)$
12. $\left(\lim\limits_{x\overset{>}{\to}x_0} f(x) = -\infty\right) \Leftrightarrow (\forall A < 0, \exists\alpha > 0, \forall x \in I \ / \ x_0 < x < x_0 + \alpha \Rightarrow f(x) < A)$

4.2.2 Relation entre limite de fonctions et limite de suites

Théorème 4.2.4 *Soit f une fonction définie de l'intervalle $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, x_0 un point de $[a,b]$, alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l.$
2. *Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $x_n \in [a,b]$, $\forall n \in \mathbb{N}$; $x_n \neq x_0$ et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$; on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = l.$*

Preuve :

$(1) \overset{?}{\Rightarrow} (2)$

On a

$$\left(\lim_{x\to x_0} f(x) = l\right) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha > 0, \forall x \in [a,b] \ / \ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$$

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $x_n \in [a,b]$; $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq x_0$ et telle que

$$\left(\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0\right) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon' > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N} \ / \ n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x_0| < \varepsilon')$$

alors en particulier pour $\varepsilon' = \alpha$; on a

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N} \ / \ n \geq n_0 : |x_n - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x_n) - l| < \varepsilon$$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = l$.

$(2) \overset{?}{\Rightarrow} (1)$

On suppose par l'absurde que la première assertion est fausse alors par la négation de la définition ; on a

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists x \in [a,b] \ / \ |x - x_0| < \alpha \wedge |f(x) - l| \geq \varepsilon$$

en particulier pour $\alpha = \frac{1}{n}$, d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; \exists x_n \in [a,b] \ / \ |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - l| \geq \varepsilon$$

donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x_0 mais $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers l; ce qui est absurde, alors la première assertion est vraie. □

Remarques :

1. Le théorème reste vrai pour $x = \pm\infty$ ou $l = \pm\infty$.
2. S'il existe deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $[a,b]$; qui convergent vers x_0 avec $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n)$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ n'existe pas.
3. S'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $[a,b]$; qui convergent vers x_0 mais $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$ n'existe pas alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ n'existe pas.

Exemple 4.2.5 *Soit* $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $\forall x \in \left[\frac{-1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right]$ *et montrons que* $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ *n'existe pas.*

On considère deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dans* $\left[\frac{-1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right]$; *qui convergent vers* 0; *et on pose* $\forall n \in \mathbb{N}^*$;

$$x_n = \frac{1}{2n\pi} \ \text{et} \ y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = 0$$

or

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to+\infty} f(y_n)$$

car

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 0 \ \text{et} \ \lim_{n\to+\infty} f(y_n) = 1$$

par conséquent $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ *n'existe pas.*

4.2.3 Opérations sur les limites de fonctions

Théorème 4.2.6 *Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, telles que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l_1$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l_2$ où $l_2 \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$; alors on a :*

1. $\lim\limits_{x\to x_0} (f+g)(x) = \lim\limits_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = l_1 + l_2$.
2. $\lim\limits_{x\to x_0} (f.g)(x) = \lim\limits_{x\to x_0} [f(x).g(x)] = l_1.l_2$
3. $\lim\limits_{x\to x_0} (\alpha f)(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \alpha [f(x)] = \alpha l_1$
4. $\lim\limits_{x\to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$

4.3 Notations de Landau

Soient f, g deux fonctions définies dans un voisinage d'un point x_0 de $\mathbb{R}$.

Définition 4.3.1 *On dit que f est négligeable devant g quand x tend vers x_0, et on écrit $f = o(g)$ si :*$\mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R};\ 0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$$

Remarques :

1. $f = o(g) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\ \to\ x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.
2. $f = o(g) \Leftrightarrow \left(f(x) = g(x) h(x) / \lim\limits_{x\ \to\ x_0} h(x) = 0 \right) \Leftrightarrow f = g.o(1)$
3. Si $g(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, alors $f = o(1) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\ \to\ x_0} f(x) = 0$.

Définition 4.3.2 *On dit que f est dominée par la fonction g quand x tend vers x_0, et on écrit $f = O(g)$ si :*

$$\exists K > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R};\ 0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x)| \leq K |g(x)|$$

- Les symboles o et O sont appelés notations de Landau.

Remarques :

1. $f = O(g) \Leftrightarrow f = g.O(1)$, ie, la fonction $\frac{f}{g}$ est bornée dans un voisinage de x_0.
2. Si $\lim\limits_{x\ \to\ x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$est finie alors $\frac{f}{g}$ est bornée dans un voisinage de x_0 d'où $f = O(g)$.
3. Si $g(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, alors $f = O(1) \Leftrightarrow f$ est bornée dans un voisinage de x_0.

Définition 4.3.3 *Soient f, g deux fonctions définies sur l'intervalle $]x_0, +\infty[$, on a :*

$$f \underset{+\infty}{=} o(g) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R};\ x > \alpha \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)| .$$
$$f \underset{+\infty}{=} O(g) \Leftrightarrow \exists K > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R};\ x > \alpha \Rightarrow |f(x)| \leq K |g(x)| .$$

Exemples 4.3.4 *1.* $x = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, *pour* $x_0 = 0$.
2. $\tan x = O(2x)$, *pour* $x_0 = 0$.
3. $x^2 \sin \frac{1}{x} \underset{+\infty}{=} -x^3 + o(x^4)$.
4. $\frac{1}{1-x} \underset{+\infty}{=} \frac{-1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Théorème 4.3.5 *Soient f et g deux fonctions définies dans un voisinage d'un point x_0 de $\mathbb{R}$.*

1. $f = o(g) \Rightarrow f = O(g)$, *la réciproque n'est pas toujours vraie.*
2. $f = O(g), h = O(g) \Rightarrow f + h = O(g)$
3. $f = o(g), h = o(g) \Rightarrow f + h = o(g)$
4. $f = o(g), h = O(1) \Rightarrow f.h = o(g)$
5. $f = o(g), h = O(g) \Rightarrow f + h = O(g)$
6. $f = O(g), h = O(1) \Rightarrow f.h = O(g)$
7. $f = o(g), h = O(f) \Rightarrow h = o(g)$
8. $f = O(g), h = o(f) \Rightarrow h = o(g)$

Preuve :

1. Evidente.
2. $$f = O(g) \Leftrightarrow \exists M_1 > 0, \exists \alpha_1 > 0, |x - x_0| < \alpha_1 \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < M_1.$$
$$h = O(g) \Leftrightarrow \exists M_2 > 0, \exists \alpha_2 > 0, |x - x_0| < \alpha_2 \Rightarrow \left|\frac{h(x)}{g(x)}\right| < M_2.$$
Alors en posant $M = M_1 + M_2$ et $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$, on a
$$\exists M > 0/, \exists \alpha > 0; |x - x_0| < \alpha \Rightarrow \left|\frac{f(x) + h(x)}{g(x)}\right| \leq \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| + \left|\frac{h(x)}{g(x)}\right| < M.$$
donc $f + h = O(g)$.
3. $$f = o(g) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$
$$h = o(g) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{h(x)}{g(x)} = 0$$
d'où
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + h(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} + \frac{h(x)}{g(x)} = 0$$
donc $f + h = o(g)$.
4. $$f = o(g) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$
$$h = O(1) \Leftrightarrow \exists M > 0, \exists \alpha > 0, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |h(x)| < M.$$

Alors
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}.h(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x).h(x)}{g(x)}=0\Leftrightarrow f.h=o(g).$$

5. $f=o(g)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$

   Donc la fonction $\frac{f}{g}$ est bornée dans un voisinage de x_0
   i.e
   $$\exists M_1>0,\exists\alpha_1>0,|x-x_0|<\alpha_1\Rightarrow\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|<M_1$$
   et on a
   $$h=O(g)\Leftrightarrow\left(\exists M_2>0,\exists\alpha_2>0,|x-x_0|<\alpha_2\Rightarrow\left|\frac{h(x)}{g(x)}\right|<M_2\right)$$
   Alors en posant $M=M_1+M_2$ et $\alpha=\min(\alpha_1,\alpha_2)$, on a
   $$\exists M>0/,\exists\alpha>0;|x-x_0|<\alpha\Rightarrow\left|\frac{f(x)+h(x)}{g(x)}\right|<\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|+\left|\frac{h(x)}{g(x)}\right|<M$$
   d'où $f+h=O(g)$.

6.
   $$\begin{array}{c} f=O(g)\Leftrightarrow\exists M_1>0,\exists\alpha_1>0,|x-x_0|<\alpha_1\Rightarrow\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|<M_1. \\ h=O(1)\Leftrightarrow\exists M_2>0,\exists\alpha_2>0,|x-x_0|<\alpha_2\Rightarrow|h(x)|<M_2. \end{array}$$
   Alors en posant $M=M_1M_2$ et $\alpha=\min(\alpha_1,\alpha_2)$, on a
   $$\exists M>0/,\exists\alpha>0;|x-x_0|<\alpha\Rightarrow\left|\frac{f(x)\,h(x)}{g(x)}\right|<M\Leftrightarrow f.h=O(g).$$

7. $f=o(g)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$

   $h=O(f)$ donc la fonction $\frac{h}{f}$ est bornée dans un voisinage de x_0,
   d'où
   $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}.\frac{h(x)}{f(x)}=0\Leftrightarrow h=o(g).$$

8. $f=O(g)$ donc la fonction $\frac{f}{g}$ est bornée dans un voisinage de x_0 et on a
   $$h=o(f)\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0}\frac{h(x)}{f(x)}=0$$
   Alors
   $$\lim_{x\to x_0}\frac{h(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{h(x)\,f(x)}{f(x)\,g(x)}=0\Leftrightarrow h=o(g).$$

$\square$

4.4 Fonctions équivalentes

Définition 4.4.1 *Soient f, g deux fonctions définies dans un voisinage d'un point x_0 de $\mathbb{R}$.*

On dit que f est équivalente à g quand x tend vers x_0, et on note $f \underset{x_0}{\sim} g$ si $f - g = o(f)$ au voisinage de x_0.

Remarques :

1. $f \underset{x_0}{\sim} g \Leftrightarrow f - g = o(f) \Leftrightarrow f - g = o(g)$.
2. S'il existe un voisinage V de x_0, tel que f et g ne s'annulent pas dans $V \setminus \{x_0\}$, alors
$$f \underset{x_0}{\sim} g \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$
3. La relation "f est équivalente à g quand x tend vers x_0" est une relation d'équivalence dans l'ensemble des fonctions définies dans un voisinage de x_0.

Théorème 4.4.2 *Soient f, f_1, g, g_1 des fonctions définies dans un voisinage de x_0, sauf peut être en x_0 telles que $f \underset{x_0}{\sim} f_1$ et $g \underset{x_0}{\sim} g_1$; si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe alors $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ existe aussi et les deux limites sont égales.*

Remarques :

1. Si $f \underset{x_0}{\sim} f_1$ et $g \underset{x_0}{\sim} g_1$ alors $\frac{f}{g} \underset{x_0}{\sim} \frac{f_1}{g_1}$.
2. On a le même résultat pour le produit : si $f \underset{x_0}{\sim} f_1$ et $g \underset{x_0}{\sim} g_1$ tel que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x).g(x)$ existe alors $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x).g_1(x)$ existe aussi et les deux limites sont égales, d'où si $f \underset{x_0}{\sim} f_1$ et $g \underset{x_0}{\sim} g_1$ alors $f.g \underset{x_0}{\sim} f_1.g_1$.
3. Dans le calcul des limites ; on peut remplacer une fonction par sa fonction équivalente dans le produit et la division seulement, ceci n'est pas vrai dans le cas de la somme et la différence.
4. Si f est une fonction dérivable en x_0 telle que $f'(x_0) \neq 0$; alors
$$f(x) - f(x_0) \underset{x_0}{\sim} f'(x_0)(x - x_0)$$

Exemples 4.4.3 .

1/ $\sin x \underset{0}{\sim} x$, 2/ $\tan x \underset{0}{\sim} x$, 3/ $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$,

4/ $\ln(x+1) \underset{0}{\sim} x$, 5/ $1 - \cos x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$.

Exercice 4.4.4 *En utilisant les fonctions équivalentes calculer les limites suivantes :*

1. $l_1 = \lim\limits_{x \to 0} \frac{(e^x-1)(\tan x)^2}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x(x)^2}{x} = \lim\limits_{x \to 0} (x)^2 = 0.$

2. $l_2 = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln\left(1+(\sin x)^2\right)}{\sin \frac{x}{3}} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{(\sin x)^2}{\frac{x}{3}} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{(x)^2}{\frac{x}{3}} = \lim\limits_{x \to 0} 3x = 0.$

3. $l_3 = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{\sin(x-1)}$
Ici on se ramène au voisinage de 0 *par le changement de variables suivant*

$$C.V : t = x - 1 \Leftrightarrow x = t + 1$$

d'où

$$l_3 = \lim_{t \to 0} \frac{\ln(t+1)}{\sin t} = \lim_{t \to 0} \frac{t}{t} = 1.$$

4. $l_4 = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)^2}{\ln\left(\frac{1}{x}+1\right)}$
Ici on se ramène au voisinage de 0 *par le changement de variables suivant*

$$C.V : t = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{t}$$

d'où

$$l_4 = \lim_{t \to 0} \frac{(e^t-1)^2}{\ln(t+1)} = \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{t} = \lim_{t \to 0} t = 0.$$