**Corrigé du TD4 Fonctions réelles à variable réelle**
2023/2024

**Exercice1:**
1. $f(x) = \frac{5x+4}{x^2+3x+2}$

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{x \in \mathbb{R}/x^2+3x+2 \neq 0\right\} = \mathbb{R} - \{-1, -2\} \\ &= \left]-\infty, -2\right[ \cup \left]-2, -1\right[ \cup \left]-1, +\infty\right[. \end{aligned}$$

2. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$
On a $\sqrt[3]{x}$ est définie sur $\mathbb{R}$ car si $y = \sqrt[3]{x} \Leftrightarrow x = y^3 \in \mathbb{R}$
et $\sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^+$ car si $y = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = y^2 \in \mathbb{R}^+$.
Donc

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{x \in \mathbb{R}/\sqrt{x} \text{ définie } \textbf{et } \sqrt[3]{x} \text{ est définie}\right\} \\ D_f &= \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

3. $f(x) = \sqrt{4-3x^2}$

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{x \in \mathbb{R}/4-3x^2 \geq 0\right\} \\ &= \left[\frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right]. \end{aligned}$$

4. $f(x) = tg(2x)$

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R}/\cos(2x) \neq 0\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}/2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}/x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}. \end{aligned}$$

5. $f(x) = \frac{x \sin\frac{1}{x}}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{x \in \mathbb{R}/x \neq 0 \text{ et } 1-x^2 > 0\right\} \\ &= \left]-1, 0\right[ \cup \left]0, 1\right[. \end{aligned}$$

6. $f(x) = \begin{cases} \ln x, & \text{si } x \geq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{1-x}}, & \text{si } x < 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} D_f &= D_1 \cup D_2 \\ D_1 &= \{x \geq 1/x > 0\} = [1, +\infty[ \\ D_2 &= \{x < 1/1-x > 0\} = ]-\infty, 1[ \\ D_f &= [1, +\infty[ \cup ]-\infty, 1[ = \mathbb{R}. \end{aligned}$$

II. Composition des fonctions.
1. $f(x) = 1 - x^3, g(x) = \frac{1}{x}, D_f = \mathbb{R}, D_g = \mathbb{R}^*$
$f \circ g$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et $f \circ g(x) = f(g(x)) = 1 - \left(\frac{1}{x}\right)^3$.
$g \circ f$ est définie telle que $f(x) \neq 0$ c.a.d. $x \neq 1$ donc $D_{g \circ f} = \mathbb{R} - \{1\}$ et $g \circ f(x) = g(f(x)) = \frac{1}{1-x^3}$.
$f \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}$ et $f \circ f(x) = f(f(x)) = 1 - \left(1-x^3\right)^3$.
$g \circ g$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et $g \circ g(x) = g(g(x)) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$.
2. $f(x) = \sqrt{2x+3}, g(x) = x^2+2, D_f = \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[, D_g = \mathbb{R}$.
$f \circ g$ est définie sur $\mathbb{R}$ et $f \circ g(x) = f(g(x)) = \sqrt{2(x^2+2)+3} = \sqrt{2x^2+7}$.
$g \circ f$ est définie sur $\left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[$ et $g \circ f(x) = g(f(x)) = .\left(\sqrt{2x+3}\right)^2 + 2 = 2x+5$.
$f \circ f$ est définie sur $\left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[$ et $f \circ f(x) = f(f(x)) = \sqrt{2\sqrt{2x+3}+3}$
$g \circ g$ est définie sur $\mathbb{R}$ et $g \circ g(x) = g(g(x)) = \left(x^2+2\right)^2 + 2$.
Exercice2:
I. Calcule de limite:
1. $\lim \frac{1}{[illegible]} = -\infty.$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+2-3x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\left(\frac{\sqrt{x}}{x}+\frac{2}{x}-3\right)}{x}=-3.$

3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x+5}{\sqrt{-x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2\left(\sqrt{-x}\right)^2+5}{\sqrt{-x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{-x}\left(-2\sqrt{-x}+\frac{5}{\sqrt{-x}}\right)}{\sqrt{-x}}=-\infty.$

4. $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}2}\frac{x^2-4}{\sqrt{2}-\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}2}\frac{\left(x^2-4\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{x}\right)}{2-x}=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}2}\frac{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{2}+\sqrt{x}\right)}{2-x}=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}2}-(x+2)\left(\sqrt{2}+\sqrt{x}\right)=-8\sqrt{2}.$

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x, a>0,$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\tfrac{a}{x}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}e^{x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}e^{\,a\underbrace{\frac{\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}{\frac{a}{x}}}_{\to1}}=e^a\ .$$

6. $\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{|x|}{x}}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}e^{\frac{|x|}{x}}=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}e^{\frac{x}{x}}=e\\ \lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}e^{\frac{|x|}{x}}=\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}e^{\frac{-x}{x}}=e^{-1}\end{array}\right\}\text{limite à droite}\neq\text{limite à gauche alors }\lim_{x\to0}e^{\frac{|x|}{x}}\text{ n'existe pas.}$$

7. $\lim\limits_{x\to1}\underbrace{|x-1|}_{\to0}\underbrace{\cos\left(\frac{1}{x-1}\right)}_{bornée}=0.$

8. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x},\alpha,\beta\in\mathbb{R}.$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{\alpha x}-1+1-e^{\beta x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{\alpha x}-1}{x}-\frac{e^{\beta x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\alpha\underbrace{\frac{e^{\alpha x}-1}{\alpha x}}_{\to1}-\beta\underbrace{\frac{e^{\beta x}-1}{\beta x}}_{\to1}=\alpha-\beta.$$

ou bien $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\underbrace{e^{\beta x}}_{\to1}\underbrace{\left(\frac{e^{(\alpha-\beta)x}-1}{x}\right)}_{=\left(e^{(\alpha-\beta)x}\right)'(0)}=\left(e^{(\alpha-\beta)x}\right)'(0)=\alpha-\beta.$

9. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^3-1}{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{3}{2}.$

II. Définition de la limite.

1.

$$\lim_{x\to4}(2x-1)=7\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0,\forall x\in\mathbb{R};\left(|x-4|<\eta\Rightarrow|(2x-1)-7|<\varepsilon\right)$$

Soit $\varepsilon>0,|(2x-1)-7|=|2x-8|=2|x-4|<2\eta=\varepsilon.$

Il suffit de prendre $\eta=\frac{\varepsilon}{2}$.

2.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{2x+1}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists A>0,\forall x\in\mathbb{R};\left(x>A\Rightarrow\left|\frac{3x-1}{2x+1}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon\right)$$

Soit $\varepsilon>0,\left|\frac{3x-1}{2x+1}-\frac{3}{2}\right|=\left|\frac{-5}{2(2x+1)}\right|=\frac{5}{2(2x+1)}<\varepsilon\Rightarrow4x+2>\frac{5}{\varepsilon}\Rightarrow x>\frac{\left(\frac{5}{\varepsilon}-2\right)}{4}=A.$

Il suffit de prendre $A=\frac{\left(\frac{5}{\varepsilon}-2\right)}{4}$.

3.

$$\lim_{x\to+\infty}\ln(\ln x)=+\infty\Leftrightarrow\forall A>0,\exists B>0,\forall x>1;\left(x>B\Rightarrow\ln\ln x>A\right)$$

Soit $A>0,\ln\ln x>A\Rightarrow\ln x>e^A\Rightarrow x>e^{e^A}=B.$

Il suffit de prendre $B=e^{e^A}$.

**Exercice3.** Fonctions équivalentes:

1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+2x)}{x^2-x^4}$, on a $1-\cos x\sim^0\frac{x^2}{2}$ d'où

$$\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+2x)}{x^2-x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}(1+2x)}{x^2-x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}(1+2x)}{1-x^2}=\frac{1}{2}.$$

2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\cos x}-e}{\cos x-1}$, On a $cosx-1\sim^0-\frac{x^2}{2}$, et $e^{\cos x}-e=e\left(e^{\cos x-1}-1\right)\sim^0e\left(e^{-\frac{x^2}{2}}-1\right)\sim^0e\left(-\frac{x^2}{2}\right)$, d'où

$$\lim\frac{e^{\cos x}-e}{\cdots}=\lim\frac{e\left(e^{\cos x-1}-1\right)}{\cdots}=\lim\frac{e\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{\cdots}=e.$$

3. $\lim\limits_{x\to 0} x\,(3+x)\,\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}$, on a $3+x \sim^0 3$ et $\sqrt{x+3}\sim^0 \sqrt{3}$ et $\sin\sqrt{x}\sim^0 \sqrt{x}$, d'où

$$\lim_{x\to 0} x\,(3+x)\,\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0} x.3\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}\sqrt{x}} = 3\sqrt{3}.$$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{tg(6x)}$, on a $\sin x \sim^0 x \Rightarrow \ln(1+\sin x) \sim^0 \sin x \sim^0 x$ et $tg\,(6x) \sim^0 6x$, d'où

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{tg\,(6x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{6x} = \frac{1}{6}.$$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\ln\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\sin x}{x-\sin x}\ln\left(\frac{x}{\sin x}\right)} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\sin x}{x-\sin x}\ln\left(\frac{x}{\sin x}-1+1\right)}$,
On a $\frac{x}{\sin x}-1\to 0$ pour $x\to 0$ donc $\ln\left(\left(\frac{x}{\sin x}-1\right)+1\right)\sim^0\left(\frac{x}{\sin x}-1\right)$, d'où

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}} &= \lim_{x\to 0} e^{\ln\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}}\\
&= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\sin x}{x-\sin x}\ln\left(\frac{x}{\sin x}\right)} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\sin x}{x-\sin x}\ln\left(\frac{x}{\sin x}-1+1\right)}\\
&= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\sin x}{x-\sin x}\left(\frac{x}{\sin x}-1\right)}\\
&= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\sin x}{x-\sin x}\left(\frac{x-\sin x}{\sin x}\right)} = e.
\end{aligned}$$

6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x, a>1, b>1.$
On a $\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x = e^{x\ln\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)} = e^{x\ln\left(\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}-1\right)+1\right)}$ et $\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}-1\right)\to 0$ pour $x\to+\infty$, alors

$$\ln\left(\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}-1\right)+1\right)\sim^{+\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}-1\right)$$

et

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}-1\right) &= \frac{e^{\frac{1}{x}\ln a}+e^{\frac{1}{x}\ln b}}{2}-1\\
&= \frac{e^{\frac{1}{x}\ln a}+e^{\frac{1}{x}\ln b}-2}{2}\\
&= \frac{\left(e^{\frac{1}{x}\ln a}-1\right)+\left(e^{\frac{1}{x}\ln b}-1\right)}{2}
\end{aligned}$$

et on a encore

$$\begin{aligned}
\left(e^{\frac{1}{x}\ln a}-1\right) &\sim^{+\infty}\frac{1}{x}\ln a\\
\left(e^{\frac{1}{x}\ln b}-1\right) &\sim^{+\infty}\frac{1}{x}\ln b
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^{x} &= \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}-1\right)+1\right)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} e^{x\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}-1\right)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} e^{x\left(\frac{\left(e^{\frac{1}{x}\ln a}-1\right)+\left(e^{\frac{1}{x}\ln b}-1\right)}{2}\right)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} e^{x\left(\frac{\frac{1}{x}\ln a+\frac{1}{x}\ln b}{2}\right)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln a+\ln b}{2}} \\
&= e^{\frac{1}{2}\ln ab} = e^{\ln(ab)^{\frac{1}{2}}} \\
&= (ab)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{ab}.
\end{aligned}$$

**Exercice4:**

1. $f_1(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}, D_{f_1} = \mathbb{R}^*$.

$f_1$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ car somme et quotient de fonctions continues sue $\mathbb{R}^*$.

$0 \notin D_{f_1}$ mais $f_1$ est définie au voisinage de 0, étudions la possibilité du prolongement par continuité en 0, pour celà calculons la limite

$$\lim_{x\to0} f_1(x) = \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2},$$

d'où $f_1$ admet un prolongement par continuité en 0 donné par

$$\widetilde{f_1}(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2}, x\neq 0 \\ \frac{1}{2}, x=0 \end{cases}.$$

2. $f_2(x) = x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right), D_{f_2} = \mathbb{R}^*$.

$f_2$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ car produit et composition de fonctions continues sue $\mathbb{R}^*$.

$0 \notin D_{f_2}$ mais $f_2$ est définie au voisinage de 0, étudions la possibilité du prolongement par continuité en 0, pour celà calculons la limite

$$\lim_{x\to0} f_2(x) = \lim_{x\to0}\underbrace{x^2}_{\to0}\underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{bornée} = 0,$$

d'où $f_2$ admet un prolongement par continuité en 0 donné par

$$\widetilde{f_2}(x) = \begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right), x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}.$$

3. $f_3(x) = \frac{\sin(\pi x)}{|x-1|}, D_{f_3} = \mathbb{R}-\{1\}$.

$f_3$ est continue sur $\mathbb{R}-\{1\}$ car quotient de fonctions continues sue $\mathbb{R}-\{1\}$.

$1 \notin D_{f_3}$ mais $f_3$ est définie au voisinage de 0, étudions la possibilité du prolongement par continuité en 1, pour celà calculons la limite

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{>\\x\to1}} f_3(x) &= \lim_{\substack{>\\x\to1}}\frac{\sin(\pi x)}{|x-1|} = \lim_{\substack{>\\x\to1}}\frac{\sin(\pi x)}{x-1} = \lim_{\substack{>\\y\to0}}\frac{\sin(\pi(y+1))}{y} = \lim_{\substack{>\\y\to0}}\frac{-\sin\pi y}{y} = \lim_{\substack{>\\y\to0}}\frac{-\pi y}{y} = -\pi. \\
\lim_{\substack{<\\x\to1}} f_3(x) &= \lim_{\substack{<\\x\to1}}\frac{\sin(\pi x)}{|x-1|} = \lim_{\substack{<\\x\to1}}\frac{\sin(\pi x)}{-(x-1)} = \lim_{\substack{<\\y\to0}}\frac{\sin(\pi(y+1))}{-y} = \lim_{\substack{<\\y\to0}}\frac{-\sin\pi y}{-y} = \lim_{\substack{>\\y\to0}}\frac{-\pi y}{-y} = \pi.
\end{aligned}$$

$$\lim_{\substack{>\\x\to1}} f_3(x) \neq \lim_{\substack{<\\x\to1}} f_3(x)$$

4. $f_4(x) = \begin{cases} e^x, x \geq 0 \\ \cos x, x < 0 \end{cases}, D_{f_4} = \mathbb{R}.$

Continuité sur $\mathbb{R}$ :

*) $x > 0, f_4(x) = e^x$ continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $\mathbb{R}_+^*$.

*) $x < 0, f_4(x) = \cos x$ continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $\mathbb{R}_-^*$.

*) $x = 0, f_4(0) = e^0 = 1$.

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{> \\ x \to 0}} f_4(x) &= \lim_{\substack{> \\ x \to 0}} e^x = 1 = f_4(0) \Rightarrow f_4 \text{ est continue à droite de } 0. \\ \lim_{\substack{< \\ x \to 0}} f_4(x) &= \lim_{\substack{< \\ x \to 0}} \cos x = 1 = f_4(0) \Rightarrow f_4 \text{ est continue à gauche de } 0. \end{aligned}$$

D'où $f_4$ est continue en 0, par conséquent $f_4$ est continue sur $\mathbb{R} = D_{f_4}$.

5. $f_5(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}, D_{f_5} = \mathbb{R}.$

Continuité sur $\mathbb{R}$ :

*) $x \neq 0, f_5(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$ continue $\mathbb{R}^*$ car produit et quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$.

*) $x = 0, f_5(0) = 0$.

$$\lim_{x \to 0} f_5(x) = \lim_{x \to 0} \underbrace{x^2}_{\to 0} \underbrace{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{bornée} = 0 = f_5(0),$$

D'où $f_5$ est continue en 0, par conséquent $f_5$ est continue sur $\mathbb{R} = D_{f_5}$.

6. $f_6(x) = \begin{cases} x + 1, x \leq -1 \\ \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right), x > -1 \end{cases}, D_{f_6} = \mathbb{R}.$

Continuité sur $\mathbb{R}$ :

*) $x > -1, f_6(x) = \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ continue sur $]-1, +\infty[$ car produit et composition de fonctions continues sur $]-1, +\infty[$.

*) $x < -1, f_6(x) = x + 1$ continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]-\infty, -1[$ car c'est un polynôme.

*) $x = -1, f_4(-1) = -1 + 1 = 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{> \\ x \to -1}} f_6(x) &= \lim_{\substack{> \\ x \to -1}} \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0 = f_6(0) \Rightarrow f_6 \text{ est continue à droite de } -1. \\ \lim_{\substack{< \\ x \to -1}} f_6(x) &= \lim_{\substack{< \\ x \to -1}} x + 1 = 0 = f_6(-1) \Rightarrow f_6 \text{ est continue à gauche de } -1. \end{aligned}$$

D'où $f_6$ est continue en $-1$, par conséquent $f_6$ est continue sur $\mathbb{R} = D_{f_6}$.

7. $f_7(x) = \begin{cases} x^2 arctg \frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}, D_{f_7} == \mathbb{R}.$

Continuité sur $\mathbb{R}$ :

*) $x \neq 0, f_7(x) = x^2 arctg \frac{1}{x}$ continue $\mathbb{R}^*$ car produit et composition de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$.

*) $x = 0, f_7(0) = 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{> \\ x \to 0}} f_7(x) &= \lim_{\substack{> \\ x \to 0}} x^2 arctg \frac{1}{x} = 0.\frac{\pi}{2} = f_7(0) \Rightarrow f_7 \text{ est continue à droite de } 0, \\ \lim_{\substack{< \\ x \to 0}} f_7(x) &= \lim_{\substack{< \\ x \to 0}} x^2 arctg \frac{1}{x} = 0.\frac{-\pi}{2} = f_7(0) \Rightarrow f_7 \text{ est continue à gauche de } 0, \end{aligned}$$

D'où $f_7$ est continue en 0, par conséquent $f_7$ est continue sur $\mathbb{R} = D_{f_7}$.

**Exercice5.**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x - \pi}, x \neq \pi \\ \alpha, x = \pi \end{cases},$$

$D_f = \mathbb{R}$.

Continuité sur $\mathbb{R}$.

Si $x \neq \pi, f(x) = \frac{\sin x}{x - \pi}$ continue sur $\mathbb{R} - \{\pi\}$ car quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R} - \{\pi\}$.

Si $x = \pi, f(\pi) = \alpha$.

$f$ est continue en $\pi \Leftrightarrow \lim_{x \to \pi} f)x = f(\pi) = \alpha$.

d'où
$$\alpha = -1.$$
**Exercice6.**
1. $xe^x = 1$ admet au moins une solution dans $]0,1[$.
Appliquons le théorème des valeurs intermédiaires pour $f(x) = xe^x - 1$ sur $[0,1]$.
$f$ est continue sur $[0,1]$ car somme et produit de fonctions continues sur $[0,1]$.
$f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = e - 1 > 0$.
d'où d'aprés le théorème des valeurs intermédiaires $\exists x_0 \in ]0,1[ / f(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 e^{x_0} = 1$.
2. $4x^3 - 3x + \frac{1}{2} = 0$ admet exactement trois solutions dans $]-1,1[$.
Posons $f(x) = 4x^3 - 3x + \frac{1}{2}$ continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[-1,1]$ car c'est un polynôme.
$f(-1) = \frac{-1}{2} < 0, f(1) = \frac{3}{2} > 0$,
d'aprés le théorème des valeurs intermédiaires il existe au moins une solution de $f(x) = 0$ sur $]-1,1[$.
Etudions les variations de $f$ pour avoir le nombre de solution.
$f'(x) = 12x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2}$ ou $x_2 = -\frac{1}{2}$.

On a:
$f(-1) = -\frac{1}{2} < 0, f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} > 0, f$ continue sur $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$ et croissante donc $\exists! x_1 \in \left]-1, -\frac{1}{2}\right[ / f(x_1) = 0$.
$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} < 0, f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} > 0, f$ continue sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ et décroissante donc $\exists! x_2 \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[ / f(x_2) = 0$.
$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} < 0, f(1) = \frac{3}{2} > 0, f$ continue sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et croissante donc $\exists! x_3 \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[ / f(x_3) = 0$.
En conclusion sur $]-1,1[$, il existe trois solutions de $f(x) = 0, x_1 \in \left]-1, -\frac{1}{2}\right[, x_2 \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[, x_3 \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$.
**Exercice7.**
1. $\forall x \in [-1,1]$, $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$.
On a $\cos^2 y + \sin^2 y = 1 \Rightarrow \sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y}$.
Posons $y = \arccos x$, on obtient
$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1 - x^2}.$$
2. $\arcsin x + \arcsin \sqrt{3}x = \frac{\pi}{2}$.
$$\begin{aligned}
\arcsin \sqrt{3}x &= \frac{\pi}{2} - \arcsin x \\
\sin\left(\arcsin \sqrt{3}x\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right) \\
\sqrt{3}x &= \sin\frac{\pi}{2}\cos(\arcsin x) - \cos\frac{\pi}{2}\sin(\arcsin x) \\
\sqrt{3}x &= \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - x^2} \\
3x^2 &= 1 - x^2 \Leftrightarrow 4x^2 = 1 \\
x &= \frac{1}{2} \text{ ou } x = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$
mais
$$\begin{cases} \text{pour } x = \frac{1}{2}, \arcsin\frac{1}{2} + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \\ \text{pour } x = -\frac{1}{2}, \arcsin -\frac{1}{2} + \arcsin -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$
Donc $x = -\frac{1}{2}$ ne vérifie pas l'équation, alors $x = \frac{1}{2}$ est la seule solution de l'équation $\arcsin x + \arcsin \sqrt{3}x = \frac{\pi}{2}$.
3. $f(x) = \arg ch\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right)$
$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R}^* / \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 1\right\}$$
$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) &\geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+1}{x}\right) - 1 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x + 1}{2x} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{2x} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow x > 0.
\end{aligned}$$

Donc

Simplifions $f$ :
L'expression logarithmique de $\arg chx$.

$$\arg chx = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

$$\begin{aligned}
\arg ch\left(\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right) &= \ln\left(\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)+\sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right)^2-1}\right)\\
&= \ln\left(\frac{x^2+1}{2x}+\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2-1}\right)\\
&= \ln\left(\frac{x^2+1}{2x}+\sqrt{\frac{x^4+2x^2+1-4x^2}{4x^2}}\right)\\
&= \ln\left(\frac{x^2+1}{2x}+\sqrt{\frac{x^4-2x^2+1}{4x^2}}\right)\\
&= \ln\left(\frac{x^2+1}{2x}+\sqrt{\frac{\left(x^2-1\right)^2}{4x^2}}\right)\\
&= \ln\left(\frac{x^2+1}{2x}+\frac{\left|x^2-1\right|}{2x}\right)\\
&= \left\{\begin{array}{c}\ln x, x>1\\ -\ln x, 0<x<1\end{array}\right.\\
&= \left|\ln x\right|.
\end{aligned}$$