Corrigé test 1 Modèle 4

Exercice1: I.

$$A=\left\{1+\frac{1}{2n},n\in\mathbb{N}^*\right\}$$

Montrons d'abord que A est bornée.
Soit $x\in A\Rightarrow x=1+\frac{1}{2n},n\geq 1$.
On a: $n\geq 1\Leftrightarrow 2n\geq 2\Leftrightarrow 0<\frac{1}{2n}\leq\frac{1}{2}\Leftrightarrow 1<1+\frac{1}{2n}\leq\frac{3}{2}\Leftrightarrow A$ est bornée.$(*)$
On a aussi $\frac{3}{2}\in A$ pour $n=1,\frac{3}{2}=1+\frac{1}{2.1}\in A$ et $\frac{3}{2}$ est un mojorant de A, alors $\max A=\frac{3}{2}=\sup A$.

$$\inf A=1\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\forall x\in A,x\geq 1 \text{ vérifiée d'aprés } (*)\\ \forall\varepsilon>0,\exists n_\varepsilon\geq 1/1+\frac{1}{2n_\varepsilon}<1+\varepsilon\end{array}\right.$$

Soit $\varepsilon>0,1+\frac{1}{2n_\varepsilon}<1+\varepsilon\Rightarrow\frac{1}{2n_\varepsilon}<\varepsilon\Rightarrow n_\varepsilon>\frac{1}{2\varepsilon}$, il suffit de prendre $n_\varepsilon=\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]+1$.
II. Forme trigonométrique de $z=\sqrt{3}+i$.

$$z=|z|\left(\cos\theta+i\sin\theta\right),\text{ où }\theta=\arg z.$$

$|z|=\sqrt{3+1}=2$.
$\left\{\begin{array}{c}\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{6}+2k\pi.$

Exercice2:

$$\left\{\begin{array}{c}U_0=2\\ U_{n+1}=\frac{5U_n-4}{U_n},n\in\mathbb{N}\end{array}\right..$$

1. Montrons $\forall n\in\mathbb{N},1<U_n<4$ par recurrence.
Pour $n=0,1<U_0=2<4$ vraie.
Supposons que $1<U_n<4$ et montrons que $1<U_{n+1}<4$.
On a $U_{n+1}=\frac{5U_n-4}{U_n}=5-\frac{4}{U_n}$ et on a aussi $1<U_n<4\Leftrightarrow\frac{1}{4}<\frac{1}{U_n}<1\Leftrightarrow -4<\frac{-4}{U_n}<-1$
$\Leftrightarrow 1<5-\frac{4}{U_n}<4\Leftrightarrow 1<U_{n+1}<4$.
Par conséquent, $\forall n\in\mathbb{N},1<U_n<4$.
2. Monotonie:

$$\begin{aligned}U_{n+1}-U_n &= \frac{5U_n-4}{U_n}-U_n\\ &= \frac{5U_n-4-U_n^2}{U_n}\end{aligned}$$

$-x^2+5x-4=0,\Delta=9,x_1=1,x_2=4$, si $1<x<4,-x^2+5x-4\geq 0$.
D'où pour $x=U_n,5U_n-4-U_n^2\geq 0$, car $1<U_n<4$.

$$\begin{aligned}U_{n+1}-U_n &= \frac{\left(5U_n-4-U_n^2\right)\geq 0}{U_n\geq 0}\\ &\geq 0\end{aligned}$$

Ce qui donne (U_n) est croissante.
3. Puisque (U_n) est croissante et majorée alors elle est convergente vers l.
Calculons la limite: (U_n) est convergente vers l, alors
$\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=l\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}U_{n+1}=l\Leftrightarrow l=\frac{5l-4}{l}\Leftrightarrow l^2=5l-4\Leftrightarrow -l^2+5l-4=0\Leftrightarrow -\left(l-1\right)\left(l-4\right)=0\Rightarrow$
$\left\{\begin{array}{c}l=1\text{ refusée car }(U_n)\text{ est croissante(converge vers la borne supérieure).}\\ \text{ou}\\ l=4\end{array}\right..$
Donc

$$\lim_{n\to+\infty}U_n=4.$$

4. $E=\{U_n,n\in\mathbb{N}\}$.
Puisque (U_n) est convergente et croissante alors

$$\begin{aligned}\sup E &= \lim_{n\to+\infty}U_n=4.\\ \inf E &= U_0=1.\end{aligned}$$