Cours et exercices d'Analyse 1

Damerdji Bouharis A.
Université des Sciences et de la Technologie Mohamed Boudiaf
Faculté des Mathématiques et Informatique.

9 octobre 2021

Table des matières

0.1 Enoncés des exercices

Exercice 1 :

1. Montrer les inégalités suivantes :
   (a) $|x| + |y| \leq |x+y| + |x-y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
   (b) $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$.
   (c) $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leq \sqrt{|x-y|}$; $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$.
2. Soit $[x]$ la partie entière de x ; montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}$:
   (a) $x \leq y \Rightarrow [x] \leq [y]$,
   (b) $[x] + [y] \leq [x+y] \leq [x] + [y] + 1$.

Exercice 2 :

1. Montrer que :
   (a) la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.
   (b) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
   (c) $0,336433643364\ldots \in \mathbb{Q}$
2. Soit $a \in [1, +\infty[$, simplifier $x = \sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}}$
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$, en déduire que :
   $$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln(n+1).$$

Exercice 3 :

On considère l'ensemble $E \subseteq \mathbb{R}$ muni de l'ordre usuel et A une partie de E, déterminer pour chacun des ensembles suivants : l'ensemble des majorants $Maj(A)$, l'ensemble des minorants $Min(A)$, la borne supérieure $Sup(A)$, la borne inférieure $Inf(A)$, le plus petit élément $min(A)$ et le plus grand élément $max(A)$.

1. $A = [-\alpha, \alpha], [-\alpha, \alpha[,]-\alpha, \alpha],]-\alpha, \alpha[.(\text{telque } \alpha > 0), E = \mathbb{R}$.

2. $A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ \ x^2 < 2 \ \}, E = \mathbb{R}$.
3. $A = \{1 - \frac{1}{n} \ \ / \ \ n \in \mathbb{N}^* \ \}, E = \mathbb{R}$.

Exercice 4 :
Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$.
On note $B = \{|x - y|; (x, y) \in A^2\}$

1. Justifier que B est majorée.
2. On note $\sup B$ la borne supérieure de l'ensemble B, montrer que

$$\sup B = \sup(A) - \inf(A).$$

Exercice 5 :
On note par $P_B(R)$ l'ensemble des parties bornées de $\mathbb{R}$, montrer que $\forall A, B \in P_B(\mathbb{R})$:

1. (a) $\sup{(A \cup B)} = \max(\sup A, \sup B)$,
   (b) $\inf{(A \cup B)} = \min(\inf A, \inf B)$,
2. Si $A \cap B \neq \emptyset$ alors :
   (a) $\sup{(A \cap B)} \leq \min(\sup A, \sup B)$,
   (b) $\inf{(A \cap B)} \geq \max(\inf A, \inf B)$,
3. $\sup{(A + B)} = \sup A + \sup B$;
4. $\inf{(A + B)} = \inf A + \inf B$
   où $A + B = \{x + y \ / \ x \in A \text{ et } y \in B\}$
   (a) $\sup(-A) = -\inf(A)$;
   (b) $\inf(-A) = -\sup A$

   tel que $-A = \{-x \ / \ \ x \in A\}$.

Exercice 6 :
En utilisant la caractérisation de la borne supérieure et la borne inférieure montrer que :

1. $\sup A = \frac{3}{2}, \ \inf A = 1$ pour $A = \left\{\frac{3n+1}{2n+1} \ , \ n \in \mathbb{N}\right\}$
2. $\sup B = 2, \ \inf B = 0$ pour $B = \left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \ , \ n \in \mathbb{N}^*\right\}$
3. $\sup C = 1, \ \inf C = 0$ pour $C = \{e^{-n} \ , \ n \in \mathbb{N}\}$
4. $\sup D = -1, \ \inf D = -2$ pour $D = \left\{\frac{1}{n^2} - 2 \ , \ n \in \mathbb{N}^*\right\}$

Calculer $\max A, \min A, \max B, \min B, \max C, \min C$ et $\max D, \min D$ s'ils existent.

0.2 Corrigés

Exercice 1 :

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a :

   (a) $2|x| = |(x+y)+(x-y)| \Rightarrow 2|x| \leq |x+y| + |x-y|$
   et $2|y| = |(x+y)+(y-x)| \Rightarrow 2|y| \leq |x+y| + |x-y|$
   d'où $|x| \ + |y| \ \leq |x+y| \ + \ |x-y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

   (b) $\forall x, y \geq 0$, on a :
   $x + y \leq x + 2\sqrt{xy} + y$, car $2\sqrt{xy} \geq 0$.
   $\Leftrightarrow x + y \leq \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2$
   $\Leftrightarrow \sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

   (c) $\forall x, y \geq 0$, on a :
   $x = (x-y) + y$ et $(x-y) + y \leq |x-y| + y$
   d'où $\sqrt{x} \leq \sqrt{|x-y| + y}$
   Donc en utilisant (b), on a :
   $\sqrt{x} \leq \sqrt{|x-y|} + \sqrt{y} \Leftrightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{|x-y|} ... (1)$
   de la même façon, on a :
   $\sqrt{y} \leq \sqrt{|y-x| + x}$
   et en utilisant (b), on a :
   $\sqrt{y} \leq \sqrt{|x-y|} + \sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y} \geq -\sqrt{|x-y|} ... (2)$
   $(1) \wedge \ (2) \Rightarrow \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leq \sqrt{|x-y|}$.

2. $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

   (a) $x \leq y \Rightarrow [x] \leq x \leq y < [y] + 1 \Rightarrow [x] \leq y < [y] + 1$
   or $[y]$ est le plus grand entier inférieur à y, et comme $[x]$ est un entier alors $[x] \leq [y]$.

   (b) On a :
   $$\left.\begin{array}{l} [x] \leq x < [x] + 1 \\ [y] \leq y < [y] + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow [x] + [y] \leq x + y < [x] + [y] + 2$$
   or $[x+y]$ est le plus grand entier inférieur à $x+y$, alors
   $[x] + [y] \leq [x+y] \, ... (3)$
   D'une autre part, on a $[x+y]+1$ est le plus petit entier supérieur à $x+y$,
   donc $[x+y] + 1 \leq [x] + [y] + 2 \Leftrightarrow [x+y] \leq [x] + [y] + 1 ... (4)$
   $(3) \wedge (4) \Rightarrow [x] + [y] \leq [x+y] \leq [x] + [y] + 1$.

Exercice 2 :

1. (a) Soient $x \in \mathbb{Q}, y \notin \mathbb{Q}$, on suppose par l'absurde que $z = x + y \in \mathbb{Q}$, d'où $y = z - x \in \mathbb{Q}$, contradiction.

   (b) On suppose par l'absurde que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, alors :
   $\exists p, q \in \mathbb{Z}$, $PGCD(p,q) = 1$ tels que
   $\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow 2$ divise $p^2 \Rightarrow 2$ divise p (car 2 est premier)$\Rightarrow p = 2k$,$(k \in \mathbb{Z})$.
   d'où $4k^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 2k^2 = q^2 \Rightarrow 2$ divise $q^2 \Rightarrow 2$ divise q ; contradiction car p et q sont premiers entre eux.

   (c) Soit $x = 0,336433643364...$
   On a $10^4 x = 3364,336433643364...$
   d'où $10^4 x - x = 9999x = 3364$ alors $x = \frac{3364}{9999} \in \mathbb{Q}$.

2. On a $x^2 = 2a + 2\left|a-2\right| = \begin{cases} 4a-4, \text{ si } a \geq 2 \\ 4\ , \text{ si } 1 \leq a \leq 2 \end{cases}$

3. On a $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right) = 2.\frac{3}{2}.\frac{4}{3}.\frac{5}{4}...\frac{n+1}{n} = n+1.$

   et $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln\left[\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)\right]$, d'où on déduit que :

   $$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln\left(n+1\right).$$

Exercice 3 :

1.

A	Maj(A)	Min(A)	sup A	inf A	max A	min A
$[-\alpha,\alpha]$	$[\alpha,+\infty[$	$]-\infty,-\alpha]$	α	$-\alpha$	α	$-\alpha$
$[-\alpha,\alpha[$	$[\alpha,+\infty[$	$]-\infty,-\alpha]$	α	$-\alpha$	$\nexists$	$-\alpha$
$]-\alpha,\alpha]$	$[\alpha,+\infty[$	$]-\infty,-\alpha]$	α	$-\alpha$	α	$\nexists$
$]-\alpha,\alpha[$	$[\alpha,+\infty[$	$]-\infty,-\alpha]$	α	$-\alpha$	$\nexists$	$\nexists$

2. $A =]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$, (4ème cas du tableau ci-dessus).
3. $A = \left\{\frac{n-1}{n} \ / \ n \in \mathbb{N}^*\right\}$
   On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$:
   $$n \geq 1 \Leftrightarrow n-1 \geq 0 \Rightarrow \frac{n-1}{n} \geq 0$$
   et $0 \in A$, d'où $\min A = \inf A = 0$.
   $$\sup A = 1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1)\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n-1}{n} \leq 1 \\ 2)\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*; 1-\varepsilon < \frac{n_\varepsilon - 1}{n_\varepsilon} \end{array} \right.$$
   1)$\forall n \in \mathbb{N}^*$,
   $$n-1 \leq n \Leftrightarrow \frac{n-1}{n} \leq 1.$$
   2) Soit $\varepsilon > 0$,
   $$1-\varepsilon < \frac{n-1}{n} \Leftrightarrow 1-\varepsilon < 1-\frac{1}{n} \Leftrightarrow \varepsilon > \frac{1}{n} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}.$$
   alors il suffit de prendre $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.

Exercice 4 :
$B = \{|x-y| \; ; \; (x,y) \in A^2\}$.

1. A est une partie bornée, alors $\sup A$ et $\inf A$ existent.
   On note $\sup A = M$ et $\inf A = m$.
   On a $\forall\,(x,y) \in A^2$:

$$\begin{aligned} \begin{cases} m \le x \le M \\ m \le y \le M \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} m \le x \le M \\ -M \le -y \le -m \end{cases} \\ &\Rightarrow -(M-m) \le x-y \le M-m \\ &\Leftrightarrow |x-y| \le M-m. \end{aligned}$$

   donc $M-m$ est un majorant de B.
2. On a

$$\begin{array}{ll} \sup A = M \Rightarrow & \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, M - \frac{\varepsilon}{2} < x ... (1) \\ \inf A = m \Rightarrow & \forall \varepsilon > 0, \exists y \in A, y < m + \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow -m - \frac{\varepsilon}{2} < -y ... (2) \\ (1) \wedge (2) \Rightarrow & \forall \varepsilon > 0, \exists\,(x,y) \in A^2 \;,\; (M-m) - \varepsilon < x - y, \end{array}$$

   or $x-y \le |x-y|$ alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\,(x,y) \in A^2 \;,\; (M-m) - \varepsilon < |x-y| \,.$$

   par conséquent,

$$\sup B = M - m = \sup A - \inf A.$$

Exercice 5 :

1. (a) $\sup(A \cup B) \overset{?}{=} \max(\sup A, \sup B)$
   On a :

$$\begin{cases} (A \subset (A \cup B)) \\ \text{et} \\ (B \subset (A \cup B)) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\sup A \le \sup(A \cup B)) \\ \text{et} \\ (\sup B \le \sup(A \cup B)) \end{cases}$$

   d'où

$$\max(\sup A, \sup B) \le \sup(A \cup B) \; ... \; (1)$$

   D'une autre part, on a :

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ \text{ou} \\ x \in B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le \sup A \\ \text{ou} \\ x \le \sup B \end{cases} \Rightarrow x \le \max(\sup A, \sup B)$$

   d'où $\max(\sup A, \sup B)$ est un majorant de $A \cup B$, or $\sup(A \cup B)$ est le plus petit des majorants de $(A \cup B)$, donc

$$\sup(A \cup B) \le \max(\sup A, \sup B) \; ... \; (2)$$

   de (1) et (2) on a donc l'égalité.

(b) $\inf(A\cup B)\overset{?}{=}\min(\inf A,\inf B)$
On a :

$$\left\{\begin{array}{c}(A\subset(A\cup B))\\ \text{et}\\ (B\subset(A\cup B))\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}(\inf A\geq\inf(A\cup B))\\ \text{et}\\ (\inf B\geq\inf(A\cup B))\end{array}\right.$$

d'où

$$\min(\inf A,\inf B)\geq\inf(A\cup B)\ldots(3)$$

D'une autre part, on a :

$$x\in A\cup B\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}x\in A\\ \text{ou}\\ x\in B\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}x\geq\inf A\\ \text{ou}\\ x\geq\inf B\end{array}\right.\Rightarrow x\geq\min(\inf A,\inf B)$$

d'où $\min(\inf A,\inf B)$ est un minorant de $(A\cup B)$, or $\inf(A\cup B)$ est le plus grand des minorants de $(A\cup B)$, donc

$$\inf(A\cup B)\geq\min(\inf A,\inf B)\ldots(4)$$

de (3) et (4) on a donc l'égalité.

2. Si $A\cap B\neq\emptyset$, alors

(a) $\sup(A\cap B)\overset{?}{\leq}\min(\sup A,\sup B)$
On a

$$\left\{\begin{array}{c}((A\cap B)\subset A)\\ \text{et}\\ ((A\cap B)\subset B)\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}\sup(A\cap B)\leq\sup A\\ \text{et}\\ \sup(A\cap B)\leq\sup B\end{array}\right.$$

d'où $\sup(A\cap B)\leq\min(\sup A,\sup B)$.

(b) $\inf(A\cap B)\overset{?}{\geq}\max(\inf A,\inf B)$
On a

$$\left\{\begin{array}{c}((A\cap B)\subset A)\\ \text{et}\\ ((A\cap B)\subset B)\end{array}\right.\left\{\begin{array}{c}\inf(A\cap B)\geq\inf A\\ \text{et}\\ \inf(A\cap B)\geq\inf B\end{array}\right.$$

d'où $\inf(A\cap B)\geq\max(\inf A,\inf B)$.

(c) $\sup(A+B)\overset{?}{=}\sup A+\sup B$

- $\sup A=M_A\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}1)\forall x\in A:x\leq M_A\ \ldots(1)\\ 2)\forall\varepsilon>0,\exists x\in A:M_A-\frac{\varepsilon}{2}<x\ \ldots(2)\end{array}\right.$
- $\sup B=M_B\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}1)\forall y\in B:y\leq M_B\ \ldots(3)\\ 2)\forall\varepsilon>0,\exists y\in B:M_B-\frac{\varepsilon}{2}<y\ \ldots(4)\end{array}\right.$

alors on a :

$$(1)+(3)\Rightarrow\forall z\in A+B:z\leq M_A+M_B$$

$$(2)+(4)\ \Rightarrow\forall\varepsilon>0,\exists z\in A+B:(M_A+M_B)-\varepsilon<z$$

donc $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$.

(d) $\inf(A+B) \stackrel{?}{=} \inf A + \inf B$

- $\inf A = m_A \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\forall x \in A : m_A \leq x \ ...\ (1) \\ 2)\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : x < m_A + \frac{\varepsilon}{2} \ ...\ (2) \end{cases}$
- $\inf B = m_B \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\forall y \in B : m_B \leq y \ ...\ (3) \\ 2)\forall \varepsilon > 0, \exists y \in B : y < m_B + \frac{\varepsilon}{2} \ ...\ (4) \end{cases}$

  alors on a :

$$(1) + (3) \Rightarrow \forall z \in A + B : m_A + m_B \leq z$$

$$(2) + (4) \ \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists z \in A + B : z < (m_A + m_B) + \varepsilon$$

  donc $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$.

(e) $\sup(-A) \stackrel{?}{=} -\inf A$

- $\forall x \in A : x \geq \inf A \Leftrightarrow -x \leq -\inf A$
  d'où $-\inf A$ est un majorant de $-A$, or $\sup(-A)$ est le plus petit des majorants de $-A$, alors $\sup(-A) \leq -\inf A$ ... (1)
- $\forall(-x) \in (-A) : -x \leq \sup(-A) \Leftrightarrow x \geq -\sup(-A)$
  d'où $-\sup(-A)$ est un minorant de A, or $\inf A$ est le plus grand des minorants de A, alors
  $\inf A \geq -\sup(-A) \Leftrightarrow -\inf A \leq \sup(-A)$ ...(2)

de (1) et (2) on a l'égalité.

(f) $\inf(-A) \stackrel{?}{=} -\sup A$

- $\forall x \in A : x \leq \sup(A) \Leftrightarrow -x \geq -\sup(A)$
  d'où $-\sup(A)$ est un minorant de $-A$, or $\inf(-A)$ est le plus grand des minorants de $-A$, alors $\inf(-A) \geq -\sup(A)$ ...(3)
- $\forall(-x) \in (-A) : -x \geq \inf(-A) \Leftrightarrow x \leq -\inf(-A)$
  d'où $-\inf A$ est un majorant de A, or $\sup(A)$ est le plus petit des majorants de A, alors
  $\sup(A) \leq -\inf(-A) \Leftrightarrow -\sup(A) \geq \inf(-A)$... (4)

de (3) et (4) on a l'égalité.

Exercice 6 :

1. $A = \left\{ \frac{3n+1}{2n+1} \ , \ n \in \mathbb{N} \right\}$

   - $\inf A \stackrel{?}{=} 1$

     — On a $\forall n \in \mathbb{N}$:
     $$3n+1 \geq 2n+1 \Leftrightarrow \frac{3n+1}{2n+1} \geq 1,$$
     alors 1 est un minorant de A.

     — On remarque que $1 \in A$, pour $n = 0$.

     alors $\min A = 1 = \inf A$.

   - $\sup A \stackrel{?}{=} \frac{3}{2}$

     — On a $\forall n \in \mathbb{N}$:
     $$6n+2 \leq 6n+3 \Leftrightarrow \frac{3n+1}{2n+1} \leq \frac{3}{2},$$
     alors $\frac{3}{2}$ est un majorant de A.

     — $\forall \varepsilon > 0, \exists ? n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \frac{3}{2} - \varepsilon < \frac{3n_\varepsilon+1}{2n_\varepsilon+1}$
     Soit $\varepsilon > 0$,
     $$\frac{3}{2} - \varepsilon < \frac{3n+1}{2n+1} \Leftrightarrow \frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon} < n,$$
     alors il suffit de prendre $n_\varepsilon = \left[\left| \frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon} \right| \right] + 1$.

     Donc $\sup A = \frac{3}{2}$, mais $\frac{3}{2} \notin A$ alors $\max A$ n'existe pas.

2. $B = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \ , \ n \in \mathbb{N}^* \right\}$

   - $\sup B \stackrel{?}{=} 2$

     — On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\begin{cases} n \geq 1 \\ n^2 \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \geq \frac{1}{n} \\ 1 \geq \frac{1}{n^2} \end{cases} \Rightarrow 2 \geq \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2},$
     alors 2 est un majorant de B.

     — On remarque que $2 \in B$, pour $n = 1$.

     alors $\max B = 2 = \sup B$.

   - $\inf B \stackrel{?}{=} 0$

     — On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} > 0$, alors 0 est un minorant de B.

     — $\forall \varepsilon > 0, \exists ? n_\varepsilon \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{n_\varepsilon} + \frac{1}{n_\varepsilon^2} < \varepsilon$
     Soit $\varepsilon > 0$, on a
     $$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* : n+1 \leq 2n \ &\Leftrightarrow \ \tfrac{n+1}{n^2} \leq \tfrac{2n}{n^2} \\ &\Leftrightarrow \ \tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{n^2} \leq \tfrac{2}{n} \end{aligned}$$
     alors pour que $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} < \varepsilon$; il suffit que :
     $\frac{2}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{\varepsilon} < n$,
     et donc il suffit de prendre $n_\varepsilon = \left[\frac{2}{\varepsilon} \right] + 1$.

Donc $\inf B = 0$, mais $0 \notin B$ alors $\min B$ n'existe pas.

3. $C = \{e^{-n} \ , \ n \in \mathbb{N}\}$

   - $\sup C = 1$

     — On a $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq n \Leftrightarrow -n \leq 0 \Leftrightarrow e^{-n} \leq 1$ alors 1 est un majorant de C.

     — On remarque que $1 \in C$, pour $n = 0$.

     alors $\max C = 1 = \sup C$.

   - $\inf C = 0$

     — On a $\forall n \in \mathbb{N} : e^{-n} > 0$, alors 0 est un minorant de C.

     — $\forall \varepsilon > 0, \exists ? n_\varepsilon \in \mathbb{N} : e^{-n_\varepsilon} < \varepsilon$
     Soit $\varepsilon > 0$, on a

$$\begin{aligned} e^{-n} < \varepsilon &\Leftrightarrow -n < \ln \varepsilon \\ &\Leftrightarrow -\ln \varepsilon < n \end{aligned}$$

     alors il suffit de prendre $n_\varepsilon = [|\ln \varepsilon|] + 1$.

     Donc $\inf C = 0$, mais $0 \notin C$ alors $\min C$ n'existe pas.

4. $D = \left\{\frac{1}{n^2} - 2 \ , \ n \in \mathbb{N}^*\right\}$

   - $\sup D = -1$,

     — On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} 1 \leq n &\Leftrightarrow 1 \leq n^2 \Leftrightarrow \tfrac{1}{n^2} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \tfrac{1}{n^2} - 2 \leq -1 \end{aligned}$$

     alors -1 est un majorant de D.

     — On remarque que $-1 \in D$, pour $n = 1$.

     alors $\max D = -1 = \sup D$.

   - $\inf D = -2$

     — On a $\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 < \frac{1}{n^2} \Leftrightarrow -2 < \frac{1}{n^2} - 2$, alors -2 est un minorant de D.

     — $\forall \varepsilon > 0, \exists ? n_\varepsilon \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{n^2} - 2 < \varepsilon - 2$
     Soit $\varepsilon > 0$, on a

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{n^2} - 2 < \varepsilon - 2 &\Leftrightarrow \tfrac{1}{n^2} < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \tfrac{1}{\varepsilon} < n^2 \\ &\Leftrightarrow \tfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}} < n; \ \text{car } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

     alors il suffit de prendre $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right] + 1$.

     Donc $\inf D = -2$, mais $-2 \notin D$ alors $\min D$ n'existe pas.