Analyse 2
Les équations différentielles
Corrigé de la fiche de TD 3

Damerdji Bouharis A.
Université des Sciences et de la Technologie Mohamed Boudiaf
Faculté des Mathématiques et Informatique.

Exercice 1 :

1.
$$xy' + 2y = 1$$

On voit bien qu'on peut résoudre cette équation par la séparation de variables comme suit

$$xy' + 2y = 1 \Leftrightarrow xy' = 1 - 2y \Leftrightarrow \frac{y'}{1-2y} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{1-2y} = \frac{dx}{x}$$

d'où

$$\ln|1-2y| = -2\ln|x| + c,\ c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y_{gle} = \frac{x^2 - K}{2x^2} \text{ avec } K = \pm e^c.$$

On peut également résoudre cette équation par la méthode de la variation de la constante (à faire en exercice).

2.
$$\frac{4}{7}x^4 y' + x^3 y = 1 \tag{1}$$

On peut résoudre cette équation par la méthode de la variation de la constante comme suit

<u>Equation homogène :</u>

$$\frac{4}{7}y' + \frac{1}{x}y = 0 \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{-7}{4x} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{-7dx}{4x}$$

d'où

$$\ln|y| = \frac{-7}{4}\ln|x| + c,\ c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y_{\text{hom}} = Kx^{-\frac{7}{4}},\ \text{avec } K = \pm e^c.$$

Ensuite on fait varier la constante K comme fonction de x d'où

$$y' = K'x^{-\frac{7}{4}} - \frac{7}{4}Kx^{-\frac{11}{4}},$$

puis on remplace dans (1), on obtient :

$$\frac{4}{7}K'x^{-\frac{7}{4}} = x^{-4} \Leftrightarrow dK = \frac{7}{4}x^{\frac{-9}{4}} \Rightarrow K = -\frac{7}{5}x^{\frac{-5}{4}} + c', c' \in \mathbb{R}.$$

alors

$$y_{gle} = -\frac{7}{5}x^{-3} + cx^{-\frac{7}{4}}, c' \in \mathbb{R}.$$

3.
$$y' + \frac{1}{x}y + 1 = 0 \tag{2}$$

On peut résoudre cette équation par la méthode de la variation de la constante comme suit

Equation homogène :

$$y' + \frac{y}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{-1}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{-dx}{x}$$

d'où

$$\ln|y| = -\ln|x| + c,\ c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y_{\text{hom}} = \frac{K}{x},\ \text{avec } K = \pm e^c.$$

Ensuite on fait varier la constante K comme fonction de x d'où

$$y' = \frac{K'x - K}{x^2}$$

$$(2) \Rightarrow \frac{K'}{x} = -1 \Leftrightarrow dK = -xdx \Rightarrow K = -\frac{x^2}{2} + c', c' \in \mathbb{R}.$$

donc

$$y_{gle} = \frac{2c' - x^2}{2x},\ c' \in \mathbb{R}.$$

4.

$$xy' - y + 1 = 0 \tag{3}$$

On peut résoudre cette équation par la méthode de la variation de la constante comme suit

Equation homogène :

$$xy' - y = 0 \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

d'où

$$\ln|y| = \ln|x| + c,\ c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y_{\text{hom}} = Kx,\ \text{avec } K = \pm e^c.$$

Ensuite on fait varier la constante K comme fonction de x d'où

$$y' = K'x + K$$

$$(3) \Rightarrow K' = \frac{-1}{x^2} \Leftrightarrow dK = \frac{-1}{x^2}dx$$

donc

$$K = \frac{1}{x} + c',\ c' \in \mathbb{R}.$$

alors

$$y_{gle} = 1 + c'x,\ c' \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2 :

1.
$$y' = -\frac{1}{x}y^2 + \frac{2}{x}y \tag{4}$$

On remarque que c'est une équation de Bernoulli avec $\alpha = 2$, alors on divise l'équation (4) par y^2 et on a :

$$\frac{y'}{y^2} - \frac{2}{xy} = -\frac{1}{x} \tag{5}$$

puis on fait le changement de variable suivant :

$$CV : z = y^{-1} = \frac{1}{y} \Rightarrow z' = -\frac{y'}{y^2},$$

ensuite on remplace dans (5) et on obtient :

$$-z' - \frac{2}{x}z = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow xz' + 2z = 1$$

et d'après l'exercice 1 on a donc

$$z_{gle} = \frac{x^2 - K}{2x^2} \Rightarrow y_{gle} = \frac{2x^2}{x^2 - K}, \text{ avec } K \in \mathbb{R}.$$

2.
$$y' + \frac{y}{x} - \frac{1}{x^4}y^{\frac{-3}{4}} = 0 \tag{6}$$

On remarque que c'est une équation de Bernoulli avec $\alpha = \frac{-3}{4}$, alors on divise l'équation (6) par $y^{\frac{-3}{4}}$ et on a :

$$y'y^{\frac{3}{4}} + \frac{y^{\frac{7}{4}}}{x} - \frac{1}{x^4} = 0 \tag{7}$$

puis on fait le changement de variable suivant :

$$CV : z = y^{\frac{7}{4}} \Rightarrow z' = \frac{7}{4}y^{\frac{3}{4}}y',$$

ensuite on remplace dans (7) et on obtient :

$$\frac{4}{7}z' + \frac{z}{x} = \frac{1}{x^4}$$

et d'après l'exercice 1 on a donc

$$z_{gle} = -\frac{7}{5}x^{-3} + cx^{-\frac{7}{4}}, c \in \mathbb{R}.$$

par conséquent

$$y_{gle} = \left(-\frac{7}{5}x^{-3} + cx^{-\frac{7}{4}}\right)^{\frac{4}{7}}, c \in \mathbb{R}.$$

3.
$$y' + \frac{y}{x} - y^2 = -\frac{1}{x^2} \tag{8}$$

On remarque que c'est une équation de Riccati, et comme $s = \frac{1}{x}$ est une solution particulière de l'équation, alors on fait le changement variable $y = z + \frac{1}{x}$, d'où $y' = z' - \frac{1}{x^2}$, et en remplaçant dans l'équation (8), on obtient :

$$z' - \frac{z}{x} - z^2 = 0 \tag{9}$$

qui est une équation de Bernoulli avec $\alpha = 2$, alors on divise l'équation (9) par z^2 et on a :

$$\frac{z'}{z^2} - \frac{1}{zx} - 1 = 0 \tag{10}$$

ensuite on fait le changement de variables suivant :

$$t = z^{-1} \Rightarrow t' = -\frac{z'}{z^2}$$

d'où

$$(10) \Leftrightarrow t' + \frac{t}{x} + 1 = 0 \tag{11}$$

qui est une équation linéaire qu'on peut résoudre comme suit

Equation homogène :

$$t' + \frac{t}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{t'}{t} = \frac{-1}{x} \Leftrightarrow \frac{dt}{t} = \frac{-dx}{x}$$

d'où

$$\ln|t| = -\ln|x| + c',\ c' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow t_{\text{hom}} = \frac{K}{x},\ K \in \mathbb{R}.$$

ensuite on fait varier la constante K comme fonction de x d'où :

$$t' = \frac{K'x - K}{x^2}$$

$$(11) \Rightarrow \frac{K'}{x} = -1 \Leftrightarrow dK = -xdx \Rightarrow K = -\frac{x^2}{2} + c$$

donc

$$t_{gle} = \frac{2c - x^2}{2x},$$

d'où

$$z_{gle} = \frac{2x}{2c - x^2},$$

par conséquent

$$y_{gle} = \frac{2x}{2c - x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x^2 + 2c}{x\,(2c - x^2)}.$$

4.
$$xy' - y^2 + (2x+1)\,y - x^2 - 2x = 0 \tag{12}$$

On remarque que c'est une équation de Riccati, et comme $s = x$ est une solution particulière de l'équation, alors on fait le changement variable $y = z + x$, d'où $y' = z' + 1$, et en remplaçant dans l'équation (12), on obtient :

$$xz' + z - z^2 = 0, \tag{13}$$

qui est une équation de Bernoulli avec $\alpha = 2$, alors on divise l'équation (13) par z^2 et on a :

$$x\frac{z'}{z^2} + \frac{1}{z} - 1 = 0 \tag{14}$$

ensuite on fait le changement de variables suivant :

$$t = z^{-1} \Rightarrow t' = -\frac{z'}{z^2}$$

d'où

$$(14) \Leftrightarrow -xt' + t - 1 = 0 \tag{15}$$

alors d'après l'exercice 1

$$t_{gle} = 1 + cx,\ c \in \mathbb{R}.$$

d'où

$$z_{gle} = \frac{1}{1+cx},\ c \in \mathbb{R}.$$

par conséquent

$$y_{gle} = \frac{1}{1+cx} + x = \frac{1+x+cx^2}{1+cx},\ c \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3 :

1. $y'' + 3y' + 2y = e^{-2x} - \cos 3x + 2\sin 3x$

Equation homogène :

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

Equation caractéristique :

$$r^2 + 3r + 2 = 0 \overset{\Delta>0}{\Longleftrightarrow} (r+2)(r+1) = 0,$$

d'où $r_1 = -2$, $r_2 = -1$ et on a

$$y_{\text{hom}} = Ae^{-2x} + Be^{-x},\quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Pour la solution particulière y_p, d'après le principe de superposition, on a

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2},$$

où y_{p_1} est solution particulière de l'équation $y'' + 3y' + 2y = e^{-2x}$ et y_{p_2} est solution particulière de l'équation $y'' + 3y' + 2y = -\cos 3x + 2\sin 3x$.

- $y'' + 3y' + 2y = e^{-2x} \ldots (1)$
  On cherche une solution particulière y_{p_1} de l'équation (1) , comme $r = -2$ est une solution de l'équation caractéristique alors elle est de la forme
  $$y_{p_1} = \alpha x e^{-2x},$$
  puis on la dérive deux fois :
  $$y' = \alpha e^{-2x} (1 - 2x) \text{ et } y'' = 4\alpha e^{-2x} (x - 1),$$
  puis en remplaçant dans (1) et en faisant l'identification, on obtient
  $$\alpha = -1$$
  d'où
  $$y_{p_1} = -x e^{-2x}.$$
- $y'' + 3y' + 2y = -\cos 3x + 2 \sin 3x \ldots (2)$
  On cherche une solution particulière y_{p_2} de l'équation (2) , comme $r = 3i$ n'est pas solution de l'équation caractéristique alors elle est de la forme
  $$y_{p_2} = \alpha \cos 3x + \beta \sin 3x,$$
  puis on la dérive deux fois :
  $$y' = 3\beta \cos 3x - 3\alpha \sin 3x$$
  $$y'' = -9\alpha \cos 3x - 9\beta \sin 3x$$
  puis en remplaçant dans (2) et en faisant l'identification, on obtient
  $$\begin{cases} -7\alpha + 9\beta = -1 \\ -9\alpha - 7\beta = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{11}{130} \\ \beta = -\frac{23}{130} \end{cases}$$
  d'où
  $$y_{p_2} = -\frac{1}{130} [11 \cos 3x + 23 \sin 3x]$$

donc
$$y_p = -x e^{-2x} - \frac{1}{130} [11 \cos 3x + 23 \sin 3x]$$
et par conséquent :
$$y_{gle} = A e^{-2x} + B e^{-x} - x e^{-2x} - \frac{1}{130} [11 \cos 3x + 23 \sin 3x], \quad A, B \in \mathbb{R}$$

2. $y'' - 6y' + 9y = (x - 1) e^{3x} + x - 1$
   <u>Equation homogène</u> :
   $$y'' - 6y' + 9y = 0$$
   <u>Equation caractéristique</u> :
   $$r^2 - 6r + 9 = 0 \overset{\Delta = 0}{\Leftrightarrow} (r - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow r = 3.$$

d'où

$$y_{\text{hom}} = Ae^{3x} + Bxe^{3x},\ \ A, B \in \mathbb{R}.$$

Pour la solution particulière y_p, d'après le principe de superposition, on a

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2},$$

où y_{p_1} est solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + 2y = (x-1)\,e^{3x}$ et y_{p_2} est solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + 2y = x - 1$.

- $y'' - 6y' + 9y = (x-1)\,e^{3x}$... (3)
  On cherche une solution particulière y_{p_1} de l'équation (3) : Comme $r = 3$ est une solution double de l'équation caractéristique alors $k = 2$ et y_{p_1} est de la forme

  $$y_{p_1} = x^2\,(\alpha x + \beta)\,e^{3x} = \left(\alpha x^3 + \beta x^2\right) e^{3x},$$

  on la dérive deux fois :

  $$\begin{aligned} y' &= \left(3\alpha x^3 + (3\alpha + 3\beta)\,x^2 + 2\beta x\right) e^{3x} \\ y'' &= \left(9\alpha x^3 + (18\alpha + 9\beta)\,x^2 + x\,(6\alpha + 12\beta) + 2\beta\right) e^{3x} \end{aligned}$$

  puis en remplaçant dans (3) et en faisant l'identification, on obtient le système suivant :

  $$\left\{\begin{array}{l} 6\alpha = 1 \\ 2\beta = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = \frac{1}{6} \\ \beta = \frac{-1}{2} \end{array}\right.$$

  d'où

  $$y_{p_1} = \left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right) e^{3x}.$$

- $y'' - 6y' + 9y = x - 1$... (4)
  On cherche une solution particulière y_{p_2} de l'équation (4) , comme $r = 0$ n'est pas solution de l'équation caractéristique alors elle est de la forme

  $$y_{p_2} = ax + b,$$

  puis on la dérive deux fois :

  $$y' = a \text{ et } y'' = 0$$

  puis en remplaçant dans (4) et en faisant l'identification, on obtient le système suivant

  $$\left\{\begin{array}{l} 9a = 1 \\ -6a + 9b = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \frac{1}{9} \\ b = \frac{-1}{27} \end{array}\right.$$

  d'où

  $$y_{p_2} = \frac{1}{9}x - \frac{1}{27}$$

donc
$$y_p = \left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right)e^{3x} + \frac{1}{9}x - \frac{1}{27}$$
et par conséquent :
$$y_{gle} = Ae^{3x} + Bxe^{3x} + \left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right)e^{3x} + \frac{1}{9}x - \frac{1}{27}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

3. $y'' + 2y' + 2y = 2x - e^{-x}\sin x + \cos 2x$

<u>Equation homogène</u> :
$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

<u>Equation caractéristique</u> :
$$r^2 + 2r + 2 = 0 \overset{\Delta<0}{\Longleftrightarrow} (r - r_1)(r - r_2) = 0,$$
où $r_1 = -1 + i$ et $r_2 = -1 - i$
d'où
$$y_{\text{hom}} = e^{-x}(A\cos x + B\sin x)\ , A, B \in \mathbb{R}.$$
Pour la solution particulière y_p, d'après le principe de superposition, on a
$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3},$$
où y_{p_1} est solution particulière de l'équation $y'' + 2y' + 2y = 2x$
et y_{p_2} est solution particulière de l'équation
$y'' + 2y' + 2y = -e^{-x}\sin x$ et y_{p_3} est solution particulière de l'équation
$y'' + 2y' + 2y = \cos 2x$.

- $y'' + 2y' + 2y = 2x ... (1)$
On cherche une solution particulière y_{p_1} de l'équation (1), comme $r = 0$ n'est pas solution de l'équation caractéristique alors elle est de la forme
$$y_{p_1} = ax + b,$$
puis on la dérive deux fois :
$$y' = a \text{ et } y'' = 0,$$
puis en remplaçant dans (1) et en faisant l'identification, on obtient le système suivant :
$$2ax + 2a + 2b = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$
d'où
$$y_{p_1} = x - 1.$$

- $y'' + 2y' + 2y = -e^{-x}\sin x ... (2)$
  On cherche une solution particulière y_{p_2} de l'équation (2) ,
  comme $r = -1 + i$ est solution de l'équation caractéristique alors elle est de la forme
  $$y_{p_2} = xe^{-x}\left(a\sin x + b\cos x\right),$$
  puis on la dérive deux fois :
  $$\begin{aligned} y' &= e^{-x}\left[\left(\left(a-b\right)x+b\right)\cos x + \left(a-\left(a+b\right)x\right)\sin x\right] \\ &\text{et} \\ y'' &= e^{-x}\left[2\left(a-b-ax\right)\cos x + 2\left(bx-b-a\right)\sin x\right] \end{aligned}$$
  puis en remplaçant dans (2) et en faisant l'identification, on obtient le système suivant :
  $$\begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$
  d'où
  $$y_{p_2} = \frac{x}{2}e^{-x}\cos x,$$
- $y'' + 2y' + 2y = \cos 2x \; ... (3)$
  On cherche une solution particulière y_{p_3} de l'équation (3) , comme $r = 2i$ n'est pas solution de l'équation caractéristique alors elle est de la forme
  $$y_{p_3} = a\cos 2x + b\sin 2x,$$
  puis on la dérive deux fois :
  $$\begin{aligned} y' &= 2b\cos 2x - 2a\sin 2x \\ y'' &= -4a\cos 2x - 4b\sin 2x \end{aligned}$$
  puis en remplaçant dans (3) et en faisant l'identification, on obtient le système suivant :
  $$\begin{cases} -4a - 2b = 0 \\ -2a + 4b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-1}{10} \\ b = \frac{1}{5} \end{cases}$$
  d'où
  $$y_{p_3} = \frac{-1}{10}\cos 2x + \frac{1}{5}\sin 2x,$$
  donc
  $$y_p = x - 1 + \frac{x}{2}e^{-x}\cos x - \frac{1}{10}\cos 2x + \frac{1}{5}\sin 2x,$$

et par conséquent :
$$y_{gle} = e^{-x}(A\cos x + B\sin x) + x - 1 + \frac{x}{2}e^{-x}\cos x - \frac{1}{10}\cos 2x + \frac{1}{5}\sin 2x.$$
avec $A, B \in \mathbb{R}$.

4. $y'' + 3y' + 2y = -e^{-x} + 2\cos 2x + 3x - x\sin 2x + 4.$
   Equation homogène :
$$y'' + 3y' + 2y = 0$$
   Equation caractéristique :
$$r^2 + 3r + 2 = 0 \overset{\Delta>0}{\Longleftrightarrow} (r+2)(r+1) = 0 \Leftrightarrow r_1 = -2 \text{ et } r_2 = -1$$
   d'où
$$y_{\text{hom}} = Ae^{-2x} + Be^{-x},\ \ A, B \in \mathbb{R}.$$
   Pour la solution particulière y_p, d'après le principe de superposition, on a
$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3},$$
   où y_{p_1} est solution particulière de l'équation $y'' + 3y' + 2y = -e^{-x}$
   et y_{p_2} est solution particulière de l'équation
   $y''+3y'+2y = 2\cos 2x - x\sin 2x$ et et y_{p_3} est solution particulière de l'équation $y'' + 3y' + 2y = 3x + 4.$

   - $y'' + 3y' + 2y = -e^{-x}$
     On cherche une solution particulière y_{p_1} de l'équation (1), comme $r = -1$ est une solution simple de l'équation caractéristique alors elle est de la forme $y_{p_1} = \alpha x e^{-x}$, puis on la dérive deux fois :
$$y' = (\alpha - \alpha x)\, e^{-x}$$
$$y'' = (-2\alpha + \alpha x)\, e^{-x}$$
     et en remplaçant dans (1), on obtient :
$$\alpha = -1$$
     d'où
$$y_{p_1} = -xe^{-x}.$$
   - $y'' + 3y' + 2y = 2\cos 2x - x\sin 2x.... (2)$
     On cherche une solution particulière y_{p_2} de l'équation (2), comme $r = 2i$ n'est pas solution de l'équation caractéristique alors elle est de la forme
$$y_{p_2} = (ax + b)\cos 2x + (cx + d)\sin 2x,$$
     puis on la dérive deux fois :
$$y' = (a + 2d + 2cx)\cos 2x + (c - 2b - 2ax)\sin 2x$$
     et
$$y'' = (4c - 4ax - 4b)\cos 2x + (-4a - 4cx - 4d)\sin 2x$$

puis en remplaçant dans (2) et en faisant l'identification, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} -2a+6c=0 \\ -4a-6b+3c-2d=0 \\ -6a-2c=-1 \\ 3a-2b+4c+6d=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{3}{20} \\ b=-\frac{27}{200} \\ c=\frac{1}{20} \\ d=\frac{9}{50} \end{cases}$$

d'où

$$y_{p_2}=\left(\frac{3}{20}x-\frac{27}{200}\right)\cos 2x+\left(\frac{1}{20}x+\frac{9}{50}\right)\sin 2x,$$

- $y''+3y'+2y=3x+4\ldots(3)$

  On cherche une solution particulière y_{p_3} de l'équation (3) , comme $r=0$ n'est pas solution de l'équation caractéristique alors elle est de la forme

$$y_{p_3}=ax+b$$

puis on la dérive deux fois :

$$y'=a \ \text{ et } y''=0$$

puis en remplaçant dans (3) et en faisant l'identification, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 2a=3 \\ 3a+2b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{3}{2} \\ b=\frac{-1}{4} \end{cases}$$

d'où

$$y_{p_3}=\frac{3}{2}x-\frac{1}{4},$$

donc

$$y_p=-xe^{-x}+\frac{1}{2}e^{x}+\left(\frac{3}{20}x-\frac{27}{200}\right)\cos 2x+\left(\frac{1}{20}x+\frac{9}{50}\right)\sin 2x+\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}.$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned} y_{gle} &= Ae^{-2x}+Be^{-x}-xe^{-x}+\frac{1}{2}e^{x}+\left(\frac{3}{20}x-\frac{27}{200}\right)\cos 2x \\ &+\left(\frac{1}{20}x+\frac{9}{50}\right)\sin 2x+\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

avec $A,B\in\mathbb{R}$.