

Fiche de TD n°1
 Calcul des primitives

Exercice1.

Calculer les primitives suivantes:

- | | |
|---|---|
| 1. $I = \int x \sin x dx$ | $rép : I = \sin x - x \cos x + c$ |
| 2. $I = \int \arcsin x dx$ | $rép : I = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$ |
| 3. $I = \int x \arctan x dx$ | $rép : I = \frac{1}{2} (x^2 + 1) \arctan x - \frac{x}{2} + c$ |
| 4. $I = \int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ | $rép : I = x - \sqrt{1-x^2} \arcsin x + c$ |

Exercice2.

Calculer les primitives suivantes en utilisant le changement de variables adéquat:

- | | |
|---|---|
| 1. $I = \int (\sin ax) dx$ | $rép : I = -\frac{1}{a} \cos ax + c$ |
| 2. $I = \int \frac{dx}{(\cos 3x)^2}$ | $rép : I = \frac{1}{3} \tan(3x) + c$ |
| 3. $I = \int \frac{dx}{5-2x}$ | $rép : I = -\frac{1}{2} \ln 5-2x + c$ |
| 4. $I = \int \frac{\sin x}{(\cos x)^2} dx$ | $rép : I = \frac{-1}{\cos x} + c$ |
| 5. $I = \int \frac{\sin 2x}{(1+\cos 2x)^2} dx$ | $rép : I = \frac{1}{2(1+\cos 2x)} + c$ |
| 6. $I = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2} \arcsin x} dx$ | $rép : I = \ln \arcsin x + c$ |
| 7. $I = \int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$ | $rép : I = \sin(\ln x) + c$ |
| 8. $I = \int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx$ | $rép : I = \arcsin(e^x) + c$ |
| 9. $I = \int \frac{1}{1+2x^2} dx$ | $rép : I = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}x) + c$ |
| 10. $I = \int \frac{1}{\sqrt{1-16x^2}} dx$ | $rép : I = \frac{1}{4} \arcsin(4x) + c$ |
| 11. $I = \int \frac{1}{4-9x^2} dx$ | $rép : I = \frac{1}{12} \ln \left \frac{2+3x}{2-3x} \right + c$ |

Exercice3.

Calculer les primitives suivantes

- | | |
|---|---|
| 1. $I = \int \frac{1}{x^2+2x+5} dx$ | $rép : I = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + c$ |
| 2. $I = \int \frac{1}{x^2+3x+1} dx$ | $rép : I = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left \frac{2x+3-\sqrt{5}}{2x+3+\sqrt{5}} \right + c$ |
| 3. $I = \int \frac{3x-2}{5x^2-3x+2} dx$ | $rép : I = \frac{3}{10} \ln(5x^2-3x+2) - \frac{11}{5\sqrt{31}} \arctan \frac{10x-3}{\sqrt{31}} + c$ |

4. $\dots I = \int \frac{6x^4 - 5x^3 + 4x^2}{2x^2 - x + 1} dx$, $\text{rép} : I = x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4} \ln(2x^2 - x + 1) + \frac{1}{2\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{4x-1}{\sqrt{7}}\right) + c$
5. $I = \int \frac{1}{\sqrt{2-3x-4x^2}} dx$ $\text{rép} : I = \frac{1}{2} \arcsin \frac{8x+3}{\sqrt{41}} + c$
6. $I = \int \frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}} dx$ $\text{rép} : I = \arg sh\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c$
7. $I = \int \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}} dx$, $\text{rép} : I = \frac{1}{4} \sqrt{4x^2+4x+3} + \frac{5}{4} \arg sh\left(\frac{2x+1}{\sqrt{2}}\right) + c$

Exercice4.

Calculer les primitives des fractions rationnelles suivantes :

1. $I = \int \frac{1}{(x-1)^2(x-2)} dx$, $\text{rép} : I = \frac{1}{x-1} + \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + c$
2. $I = \int \frac{x^4}{x^3+2x^2-x-2} dx$, $\text{rép} : I = \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{6} \ln\left|\frac{x-1}{(x+1)^3}\right| + \frac{16}{3} \ln|x+2| + c$
3. $\dots I = \int \frac{2x^2-3x-3}{x^3-3x^2+7x-5} dx$, $\text{rép} : I = \ln\left|\frac{(x^2-2x+5)^{\frac{3}{2}}}{x-1}\right| + \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + c$
4. $I = \int \frac{(x^4+1)dx}{(x^3+5x^2+7x+3)(x^2+1)}$, $\text{rép} : I = \frac{1}{20} \ln\left|\frac{(x+3)^{41}}{(x+1)^{15}(x^2+1)^3}\right| - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{\arctan x}{10} + c$

Exercice5.

Calculer les primitives des fonctions irrationnelles suivantes :

1. $I = \int \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}}{6\sqrt[4]{x}} dx$ $\text{rép} : I = \frac{2}{27} \sqrt[4]{x^9} - \frac{2}{13} \sqrt[12]{x^{13}} + c$
2. $I = \int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$ $\text{rép} : I = 2 \arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right| + c$
3. $\dots I = \int \sqrt{\frac{2+3x}{x-3}} dx$, $\text{rép} : I = \sqrt{3x^2-7x-6} + \frac{11}{2\sqrt{3}} \ln\left|\frac{6x-7}{6} + \sqrt{\frac{3x^2-7x-6}{3}}\right| + c$
4. $I = \int \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}} dx$, $\text{rép} : I = \frac{1}{2} \left[x^2 + x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2} - \ln|x + \sqrt{x^2-1}| \right] + c$
5. $I = \int \frac{1}{(2x-x^2)\sqrt{2x-x^2}} dx$ $\text{rép} : I = \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}} + c$

Exercice6.

Calculer les primitives des fonctions trigonométriques suivantes:

1. $I = \int \frac{1}{5-3\cos x} dx$ $\text{rép} : I = \frac{1}{2} \arctan\left|2tg\frac{x}{2}\right| + c$
2. $I = \int \frac{\sin x}{1+\sin x} dx$ $\text{rép} : I = \frac{2}{1+\tan \frac{x}{2}} + x + c$
3. $I = \int (\cos x)^2 dx$ $\text{rép} : I = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + c$
4. $I = \int (\tan x)^4 dx$ $\text{rép} : I = \frac{1}{3} (\tan x)^3 - \tan x + x + c$