Fonctions Réelles d'une Variable Réelle (suite) (Analyse I)

"Cours"

Fonctions Dérivables:

Définition: Soit $f: U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in U$

On dit que f est dérivable en x_0 si :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \text{ (existe et finie)}$$

l est appelé dérivée de f en x_0 et noté par : $l = f'(x_0)$

Remarque: $f(x) = x^3$; $x_0 = 1$

f est-elle dérivable en $x_0 = 1$?

Calculons : $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{x-1}}$$

$$= \lim_{x \to 1} x^2 + x + 1 = \boxed{3}$$

Donc f est dérivable en $x_0 = 1$ et $f'(1) = 3$

Proposition: Soit $f: U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in U$

f est dérivable en $x_0 \Longrightarrow f$ est continue en x_0

la contraposé :

f n'est pas continue en $x_0 \Longrightarrow f$ n'est pas dérivable en x_0

Remarque:

la réciproque : f est continue en $x_0 \Longrightarrow f$ est dérivable en x_0

Contre exemple: $(\overline{P \Rightarrow Q}) \Leftrightarrow (P \wedge \overline{Q})$

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \leadsto f(x) = |x| = \begin{cases} x & ; x \geqslant 0 \\ -x & ; x \leqslant 0 \end{cases}$$

On a f est continue en 0

$$\left(\text{car} : \lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} -x = 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0 \right)$$

<u>et</u> f n'est pas dérivable en 0

<u>car</u>: $$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - \overset{\to 0}{f(0)}}{x - 0} = \begin{cases} \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} = 1 \\ \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{-\cancel{x}}{\cancel{x}} = -1 \end{cases}$$

Comme $-1 \neq 1$, alors: f n'est pas dérivable en $x_0 = 0$.

Remarque

Si f est dérivable en x_0, alors la courbe (C_f) admet une droite tangente (T) au point de l'abscisse x_0 telle que : $(T) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Dérivée à droite et à gauche

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in U$

f admet en x_0 une dérivée à droite (resp. à gauche)

si : $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l_d$ où : $l_d = f'_d(x_0)$

(resp. $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l_g$ où : $l_g = f'_g(x_0)$)

Proposition : Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in U$

f est dérivable en $x_0 \Leftrightarrow f'_d(x_0) = f'_g(x_0) = l$

où : $l = f'(x_0)$

Remarques :

1) si f admet en x_0 une dérivée à droite $f'_d(x_0)$ alors admet une demi-tangente au point de l'absaisse x_0.

2) si $f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)$, alors $(\mathscr{C}_f)$ admet un point anguleux.

3) si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$, alors $(\mathscr{C}_f)$ admet une tangente verticale de l'équation $x = x_0$ au point de l'absaisse x_0

Propriétés: Soient f et g deux fcts dérivables sur U,

1) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

2) $(\alpha . f)'(x) = \alpha . f'(x)$

3) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x).g(x) - g'(x).f(x)}{[g(x)]^2}$ (avec : $g(x) \neq 0$)

4) $(f^n)'(x) = n\, f^{n-1}(x) . f'(x)$

5) supposons : $f : U \longrightarrow U'$ et $g : U' \longrightarrow \mathbb{R}$

alors : $g \circ f : U \xrightarrow{f} U' \xrightarrow{g} \mathbb{R}$

$x \longrightarrow f(x) \longrightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x))$

et $(g \circ f)'(x) = f'(x) . g'[f(x)]$

exemple $H(x) = \cos(\ln x)$

Donc : $H'(x) = [\cos(\ln x)]'$

$= (\ln x)' . (\cos)'(\ln x)$

$= -\frac{1}{x} . \sin(\ln x)$

6) $(f.g)'(x) = f'(x).g(x) + g'(x).f(x)$

7) $[\sqrt{f(x)}]' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$; 8) $[e^{f(x)}]' = f'(x)\, e^{f(x)}$

; 9) $[\ln(f(x))]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$

Règle de l'Hôpital :

Soient f, g deux fonctions dérivables sur U telles que :

* $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ (ou ∞)

* $g'(x) \neq 0$

Alors : $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Exemple : En utilisant la règle de l'Hôpital,

Déterminer les limites de :

1) $A(x) = \frac{e^{(x^2)} - \cos x}{x^2}$, quand x tend vers 0

2) $B(x) = \frac{\ln(x^4) + 2x^2}{3x^2 + \ln(x^4)}$, quand x tend vers $+\infty$

solution : 1) $\lim_{x \to 0} A(x) = \frac{0}{0} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{2x e^{(x^2)} + \sin x}{2x} \left(= \frac{0}{0}\right)$

$$\overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{2e^{(x^2)} + 4x^2 e^{(x^2)} + \cos x}{2} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

2) $\lim_{x \to +\infty} B(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{4\ln x + 2x^2}{3x^2 + 4\ln x} \left(= \frac{\infty}{\infty}\right)$

$$\overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{4}{x} + 4x}{6x + \frac{4}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{4+4x^2}{\cancel{x}}}{\frac{6x^2+4}{\cancel{x}}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2+4}{6x^2+4}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{4\cancel{x^2}}{6\cancel{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{6} = \boxed{\frac{2}{3}}$$