Chapter 1

1.

Chapter 2

2.

Chapter 3

3.

Chapter 4

Fonctions réelles d'une variable réelle

4.1 Généralités

1. Définition: On appelle fonction réelle d'une variable réelle toute application de l'ensemble $E \subset \mathbb{R}$ dans un ensemble $F \subset \mathbb{R}$. On notera

$$\begin{array}{rccc} f: & E & \rightarrow & F \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

x s'appelle l'antécédent et $f(x)$ est l'image de x par f. On notera

$$f(E) = \{f(x) / x \in E\}.$$

2. Graphe d'une fonction réelle (ou courbe représentative de f **):**

On appelle graphe d'une fonction $f : E \rightarrow F$ toute partie $\Gamma(f)$ du produit cartésien $E \times F$ telle que

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) / x \in E\}.$$

3. Domaine de définition d'une fonction:

Le domaine de définition d'une fonction f est l'ensemble des valeurs de $x \in E$ pour lesquelles la fonction f est bien définie. On note par D_f.

$$D_f = \{x \in E / f(x) \in \mathbb{R}\}.$$

Exemple:

1. $f(x) = e^x, D_f = \mathbb{R}.$
2. $f(x) = \frac{1}{x}, D_f = \mathbb{R}^*.$
3. $f(x) = \frac{1}{\ln(x+2)},$

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} / x + 2 > 0 \text{ et } \ln(x+2) \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x > -2 \text{ et } x + 2 \neq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x > -2 \text{ et } x \neq -1\} \\ &= \left]-2, -1\right[\cup \left]-1, +\infty\right[. \end{aligned}$$

3. $f(x) = tgx$

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

4. Parité d'une fonction:

Soit f une fonction définie sur un intervalle I symetrique par rapport à 0.

On dit que f est paire si $\forall x \in I; f(-x) = f(x).$

On dit que f est impaire si $\forall x \in I; f(-x) = -f(x)$.

Remarque:

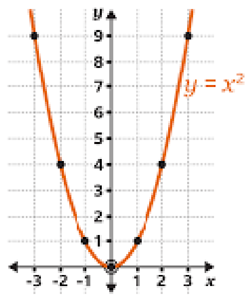
1. Si f est paire alors son graphe est symetrique par rapport à l'axe des ordonnées.

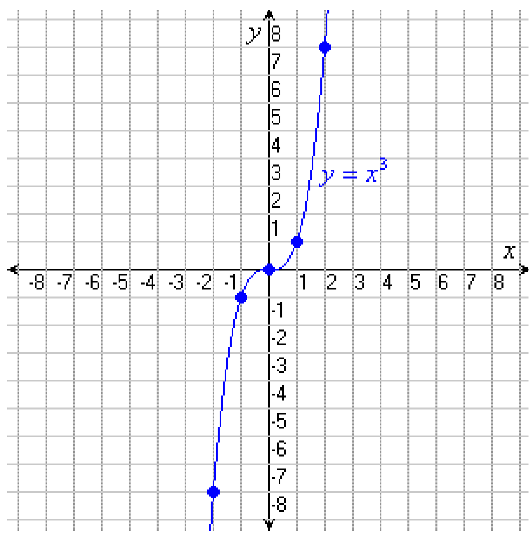
2. Si f est impaire alors son graphe est symetrique par rapport à l'origine.

Exemple:

$f(x) = x^2$ est paire car $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

$f(x) = x^3$ est impaire car $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.





5. Périodicité d'une fonction:

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite périodique s'il existe $T > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x-T) = f(x)$. T est appelé période de f.

Remarque: Si T est une période de f alors tout nombre de la forme $kT, k \in \mathbb{N}^*$ est aussi une période de f.

Exemple:

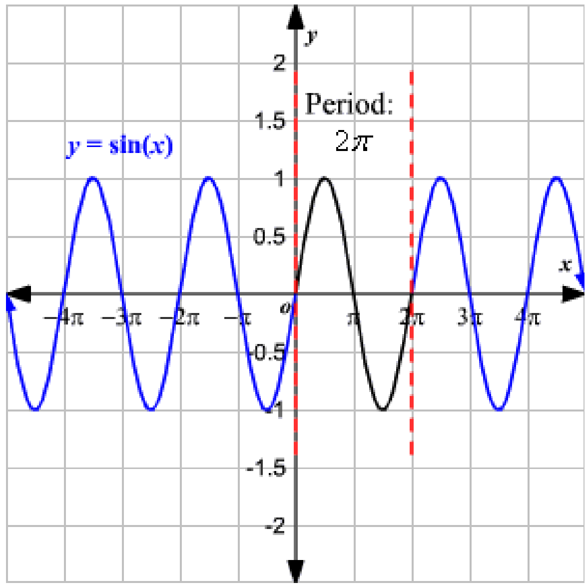
$f(x) = \sin x, T = 2\pi.$

$f(x) = x - [x], T = 1$ car $f(x+1) = x + 1 - [x+1] = x + 1 - [x] - 1 = x + [x] = f(x).$

$f(x) = tgx, T = \pi$ car $f(x+\pi) = tg(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = tgx.$

Remarque: Si f est périodique alors il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur T et tracer le graphe. Le graphe complet se déduit du graphe précédent par des translations de valeurs $(kT)\,, k \in \mathbb{Z}$.

Par exemple le graphe de la fonction $f(x) = \sin x$



6. Fonctions bornées, Fonctions monotones:

Fonctions bornées

Soit $f : E \to F$. On dira que

1. f est majorée si l'ensemble $f(E)$ est majorée, c'est à dire

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in E / f(x) \leq M.$$

2. f est minorée si l'ensemble $f(E)$ est minorée, c'est à dire

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in E / f(x) \geq m.$$

3. f est bornée si elle est majorée et minorée (l'ensemble $f(E)$ est borrée), c'est à dire

$$\exists \alpha > 0, \forall x \in E / |f(x)| \leq \alpha.$$

Exemple:

1. $f(x) = \sin x, -1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow f$ bornée.

2. $f(x) = \frac{1}{x}, x \in]0, 1]$, n'est pas bornée mais elle est minorée par 0.

Remarque:

Si f est majorée alors elle admet une borne supérieure

$$\sup_{x\in E} f(x) = \sup f(E) = \sup \{f(x) / x \in E\}.$$

Si f est minorée alors elle admet une borne inférieure

$$\inf_{x\in E} f(x) = \inf f(E) = \inf \{f(x) / x \in E\}.$$

Fonctions monotones:

Soit $f : E \to F$. On dira que

1. f est croissante dans E si

$$\forall x, y \in E, x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

2. f est strictement croissante dans E si

$$\forall x, y \in E, x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

3. f est décroissante dans E si

$$\forall x, y \in E, x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y).$$

4. f est strictement décroissante dans E si

$$\forall x, y \in E, x < y \Rightarrow f(x) > f(y).$$

7. Opérations sur les fonctions réelles:

Soient f et g deux fonctions définies sur $E \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.

2. $(\lambda f)(x) = \lambda . f(x), \lambda \in \mathbb{R}$.

3. $(fg)(x) = f(x) . g(x)$.

4. $\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$.

4.2 Limite d'une fonction

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Définition: On dit qu'une fonction f définie au voisinage de x_0 (sauf peut être en x_0) a une limite $l \in \mathbb{R}$ au point x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

et on écrit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ ou $f \underset{x \to x_0}{\to} l$.

c'est à dire

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Exemple: 1. $f(x) = 2x + 1$

$$\lim_{x \to 2} 2x + 1 = 5 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - 2| < \eta \Rightarrow |2x + 1 - 5| < \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$,

$$|2x - 4| = |2(x - 2)| = 2|(x - 2)| < 2\eta = \varepsilon \Rightarrow \eta = \frac{\varepsilon}{2}$$

Il suffit de prendre $\eta = \frac{\varepsilon}{2}$.

2. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ n'est pas définie en 0 mais admet une limite $l = 1$ en 0.

Remarque: 1. Pour prouver que f n'admet pas pour limite l quand $x \to x_0$, on peut prendre la négation, c'est à dire

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in I, |x - x_0| < \eta \text{ et } |f(x) - l| \geq \varepsilon.$$

2. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ alors on n'a pas toujours $f(x_0) = l$ ou $f(x_0)$ existe, par exemple

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, \text{ si } x \neq 0 \\ 2, \text{ si } x = 0 \end{cases},$$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 \neq 2 = f(0)$.

Unicité de la limite:

Théorème: Si f admet une limite au point x_0, cette limite est unique.

Preuve

Supposons que la fonction f admet deux limites l et l' au point x_0, alors

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta_1 > 0, \forall x \in I, |x - x_0| < \eta_1 \Rightarrow |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l' \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta_2 > 0, \forall x \in I, |x - x_0| < \eta_2 \Rightarrow |f(x) - l'| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si on pose $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$, on obtient

$$\begin{aligned} |l - l'| &= |l - f(x) + f(x) - l'| \\ &\leq |l - f(x)| + |f(x) - l'| \\ &\leq |f(x) - l| + |f(x) - l'| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

On a obtenu $\forall \varepsilon > 0, |l - l'| < \varepsilon \Leftrightarrow l - l' = 0 \Leftrightarrow l = l'$.

Limite à droite et à gauche:

Définition:

1. On dit que f admet une limite à droite au point x_0 si

$$\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0,\forall x\in I,0<x-x_0<\eta\Rightarrow\left|f\left(x\right)-l\right|<\varepsilon.$$

On notera $\lim\limits_{x\overset{>}{\rightarrow}x_0}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\rightarrow x_0^+}f\left(x\right)=f\left(x_0+0\right).$

2. On dit que f admet une limite à gauche au point x_0 si

$$\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0,\forall x\in I,-\eta<x-x_0<0\Rightarrow\left|f\left(x\right)-l\right|<\varepsilon.$$

On notera $\lim\limits_{x\overset{<}{\rightarrow}x_0}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\rightarrow x_0^-}f\left(x\right)=f\left(x_0-0\right).$

Exemple

$f\left(x\right)=1+\frac{|x|}{x}=\begin{cases}2,\ \text{si } x>0\\ 0,\ \text{si } x<0\end{cases}$, on a $\lim\limits_{x\overset{>}{\rightarrow}0}f\left(x\right)=2,\lim\limits_{x\overset{<}{\rightarrow}0}f\left(x\right)=0.$

Remarque:

.Si $\lim\limits_{x\rightarrow x_0}f\left(x\right)=l$ existe alors $\lim\limits_{x\overset{<}{\rightarrow}x_0}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\overset{<}{\rightarrow}x_0}f\left(x\right)=l.$

. Inversement, si $\lim\limits_{x\overset{<}{\rightarrow}x_0}f\left(x\right)$ et $\lim\limits_{x\overset{<}{\rightarrow}x_0}f\left(x\right)$ existent et sont égales alors la limite de f existe, elle est égale à la valeur commune.

Limites infinies:

$$
\begin{aligned}
1. \lim_{x\to+\infty} f(x) &= l \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists A>0, \forall x\in I, \in x>A \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon. \\
2. \lim_{x\to-\infty} f(x) &= l \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists B<0, \forall x\in I, \in x<B \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon. \\
3. \lim_{x\to x_0} f(x) &= +\infty \Leftrightarrow \forall A>0, \exists\eta>0, \forall x\in I, \in |x-x_0|<\eta \Rightarrow f(x)>A. \\
4. \lim_{x\to x_0} f(x) &= -\infty \Leftrightarrow \forall B<0, \exists\eta>0, \forall x\in I, \in |x-x_0|<\eta \Rightarrow f(x)<B. \\
5. \lim_{x\to+\infty} f(x) &= +\infty \Leftrightarrow \forall A>0, \exists B>0, \forall x\in I, \in x>B \Rightarrow f(x)>A. \\
6. \lim_{x\to+\infty} f(x) &= -\infty \Leftrightarrow \forall A<0, \exists B>0, \forall x\in I, \in x>B \Rightarrow f(x)<A. \\
7. \lim_{x\to-\infty} f(x) &= +\infty \Leftrightarrow \forall A>0, \exists B<0, \forall x\in I, \in x<B \Rightarrow f(x)>A. \\
8. \lim_{x\to-\infty} f(x) &= -\infty \Leftrightarrow \forall A<0, \exists B<0, \forall x\in I, \in x<B \Rightarrow f(x)<A.
\end{aligned}
$$

Exemple: $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$

$$\lim_{x\to1} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A>0, \exists\eta>0, \forall x\in I, \in |x-1|<\eta \Rightarrow \frac{1}{(x-1)^2} > A,$$

Soit $A>0$, $\frac{1}{(x-1)^2} > A \Rightarrow (x-1)^2 < \frac{1}{A} \Rightarrow |x-1| < \frac{1}{A} = \eta$, il suffit de prendre $\eta = \frac{1}{A}$.

Théorème sur les limites

Théorème: Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, et $x_0 \in [a,b]$, alors

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall (x_n)_n, x_n \in \lim_{x\to x_0} [a,b] / x_n \to x_0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l.$$

Preuve

($\Rightarrow$) On a

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\eta>0, \forall x\in I, |x-x_0|<\eta \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon.$$

et on a

$$x_n \to x_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon' > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n > N_\varepsilon \Rightarrow |x_n - x_0| < \varepsilon',$$

pour $\varepsilon' = \eta$, on a $|x_n - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x_n) - l| < \varepsilon$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = l$.

$(\Leftarrow)$ Par l'absurde. Supposons que $x_n \to x_0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = l$ et $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq l$.

$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in I, |x - x_0| < \eta$ et $|f(x) - l| \geq \varepsilon$, en particulier pour $\eta = \frac{1}{n} \Rightarrow \forall n \geq 1, \exists x_n \in [a,b]\,; |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - l| \geq \varepsilon$,

on a $\frac{1}{n} - x_0 < x_n < \frac{1}{n} + x_0$, c'est à dire $x_n \to x_0$, mais $f(x_n)$ ne tend pas vers l contradiction.

Remarque: On peut utiliser ce théorème pour démontrer la non existance de la limite d'une fonction.

Si il existe deux suites $(x_n), (y_n)$ qui ont la même limite mais $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n)$.

Si il existe une suite $(x_n)/x_n \to x_0$ mais $f(x_n)$ n'admet pas de limite.

Exemple:

1. $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right)$, montrons que f n'admet pas delimite en 0.

Posons $\left.\begin{array}{c} x_n = \frac{1}{\sqrt{2n}} \to 0 et f(x_n) = \cos(2n\pi) = 1. \\ y_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \to 0 et f(y_n) = \cos((2n+1)\pi) = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ n'exite pas.

2. $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, montrons que f n'admet pas delimite en 0.

Posons $x_n = \frac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{(2n+1)\pi} \to 0$ et $f(x_n) = \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n$ qui admet deux limites 1 et -1 alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ n'exite pas.

Proposition: Si f admet une limite en x_0 alors f est bornée au voisinage de x_0.

Preuve

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0, \forall x \in I, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

$\forall x \in \left]x_0 - \eta, x_0 + \eta\right[\Rightarrow l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon \Rightarrow f$ est bornée dans $\left]x_0 - \eta, x_0 + \eta\right[$ qui est un voisinage de x_0.

Remarque: La réciproque n'est pas vraie. En effet, $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right)$ est bornée mais elle n'admet pas une limite en 0 (exemple précédent).

Opérations sur les limites:

Soient f et g deux fonctions définies sur $E \subset \mathbb{R}$ et admettant des limites finies l et l' au point x_0. Alors:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) + g(x) = l + l'$.
2. $\lim\limits_{x\to x_0} (\lambda f)(x) = \lambda l, \lambda \in \mathbb{R}$.
3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) . g(x) = l.l'$.
4. $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{l'}, l' \neq 0$.
5. $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |l|$.

Limite et relation d'ordre:

Soit $x_0 \in E, f, g, h$ trois fonctions définies sur $\left]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha\right[, \alpha > 0$.

Théorème:

1. $f(x) < g(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.
2. $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty \\ \text{et } f(x) \leq g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty.$
3. $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty \\ \text{et } g(x) \leq f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty.$

4. $$\left.\begin{array}{c} f(x) \leq g(x) \leq h(x) \\ \text{et } \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} h(x) = l.$$

5. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ et g est bornée$\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\, g(x) = 0.$

6. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ et g est bornée$\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + g(x) = \infty.$

Forme indéterminées:

Lorsque les limites ne sont pas finies, On a quatre formes indéterminées lorsque $x \to x_0$.

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, $f+g$ se présente sous la forme indéterminée $+\infty - \infty$.

2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, $\frac{f}{g}$ se présente sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$, $\frac{f}{g}$ se présente sous la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.

4. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$, $f.g$ se présente sous la forme indéterminée $0.\infty$.

Lorsque les limites sont finies, On a une formes indéterminée lorsque $x \to x_0$.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, $(f(x))^{g(x)}$ se présente sous la forme indéterminée 1^0.

On résout le problème par des transformations élémentaires.

Exemple:

$\lim\limits_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{x^3-a^3} = \frac{0}{0}$, F.I.

On a $x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$

et $\quad x^3 - a^3 = (x-a)(x^2+ax+a^2)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x^3-a^3} &= \lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+a)}{(x-a)(x^2+ax+a^2)}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{(x+a)}{(x^2+ax+a^2)}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{2a}{3a^2}=\frac{2}{3a}.\end{aligned}$$

4.3 Comparaison des fonctions au voisinage d'un point (notation de Landau)

Soient f et g deux fonctions définies dans un voisinage du point x_0 (sauf peut être en x_0).

Définition 1: On dit que la fonction f est négligeable devant g lorsque $x \to x_0$ et on écrit $f = o(g)$ si

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x(|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)|\leq\varepsilon\,|g(x)|$$

ou bien pour $g(x)\neq 0$ au voisinage de x_0,

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x(|x-x_0|<\delta\Rightarrow\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|\leq\varepsilon.$$

c'est à dire

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0.$$

Remarque:

1. $f=o(g)\Leftrightarrow f(x)=h(x)\,g(x)\,/h(x)\to 0$, quand $x\to x_0$.
2. Si $g(x)=1, f=o(g)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.

3. De la même façon, on définit $f = o(g)$ au voisinage de ∞.

Exemple:

1. $x^4 = o(x)$ en 0 car $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^4}{x} = 0$.

2. $x = o(x^4)$ en $+\infty$ car $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{x^4} = 0$.

3. $x = o(e^x)$ en $+\infty$ car $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$.

Définition 2. On dit que la fonction f est dominée par g lorsque $x \to x_0$ et on écrit $f = O(g)$ si

$$\exists k > 0, \exists \delta > 0, \forall x \left(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leq k\, |g(x)|\right),$$

c'est à dire

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \text{ bornée au voisinage de } x_0.$$

Remarque:

1. Pour démontrer que $f = O(g)$, il suffit de montrer que $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$. (car si elle admet une limite finie, elle est bornée).

2. $f = O(1)$ en $x_0 \Rightarrow f$ est bornée.

3. Même définition pour $x_0 = \infty$.

Exemple:

1. $x \sin x = O(x)$ en $+\infty$ car $\left|\frac{x \sin x}{x}\right| = |\sin x| \leq 1$ i.e. bornée.

2. $tgx = O(2x)$ en 0 car $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tgx}{2x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{tgx}{2x}$ bornée.

Les symboles o et O s'appellent notation de Landau.

Fonctions équivalentes:

Définition: Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0 sauf peut être en x_0.

On dit que f est équivalente à g lorsque $x \to x_0$ et on note $f \sim^{x_0} g$ si

$$f - g = o(f), x \to x_0 .$$

ou encore $f(x) = g(x) U(x) / U(x) \to 1$ quand $x \to x_0$.

Remarque: Si f et g ne sont pas nulles au voisinage de x_0 alors

1. $f \sim^{x_0} g \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

2. $f \sim^{x_0} g \Leftrightarrow f(x) = (1 + \varepsilon(x)) g(x) / \varepsilon(x) \to 0$ lorsque $x \to x_0$.

3. On peut définir l'équivalence au voisinage de ∞ de la même façon.

Exemple:

1. $\ln(1+x) \sim^0 x$ car $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

2. $\sin x \sim^0 x$ car $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

3. $1 - \cos x \sim^0 \frac{x^2}{2}$ car $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} = 1$.

4. $e^x - 1 \sim^0 x$ car $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Opérations sur les notations de Landau:

a) o et O.

1. $f = o(g) \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} f = O(g)$, car $f = o(g) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}$ bornée.

2. $f = O(g), h = O(g) \Rightarrow f + h = O(g) \Leftrightarrow O(g) + O(g) = O(g)$.

3. $f = o(g), h = o(g) \Rightarrow f + h = o(g) \Leftrightarrow o(g) + o(g) = o(g)$.

4. $f = o(g), h = o(1) \Rightarrow f.h = o(g) \Leftrightarrow o(g).o(1) = o(g)$.

5. $f = o(g), h = O(g) \Rightarrow f + h = O(g) \Leftrightarrow o(g) + O(g) = O(g)$.

6. $f = o(g), h = O(1) \Rightarrow f.h = O(g) \Leftrightarrow o(g) O(1) = O(g)$.

7. $f = o(g), h = O(f) \Rightarrow h = o(g) \Leftrightarrow O(o(g)) = o(g)$.

8. $f = O(g), h = o(f) \Rightarrow h = o(g) \Leftrightarrow O(o(g)) = o(g)$.

b) $\sim$ en x_0.

1. $\left.\begin{array}{l} f_1 \sim^{x_0} g_1 \\ \\ f_2 \sim^{x_0} g_2 \end{array}\right\} \Rightarrow f_1 f_2 \sim^{x_0} g_1 g_2.$

2. $\left.\begin{array}{l} f_1 \sim^{x_0} g_1 \\ \\ f_2 \sim^{x_0} g_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{f_1}{f_2} \sim^{x_0} \frac{g_1}{g_2}, f_2 \neq 0, g_2 \neq 0.$

3. $\left.\begin{array}{l} f_1 \sim^{x_0} g_1 \\ \\ f_2 \sim^{x_0} g_2 \end{array}\right\} \not\Rightarrow f_1 + f_2 \sim^{x_0} g_1 + g_2.$

contre exemple:

$\left.\begin{array}{c} \cos x \sim^0 x + 1 \\ \\ -1 \sim^0 -1 \end{array}\right\}$ mais $\cos x - 1 \nsim^0 x$, car $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$.

Corollaire: Dans le calcule des limites, on peut remplacer une fonction par une fonction équivalente dans le produit et la division seulement. Ceci n'est pas vrai pour la somme.

Exemple:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(e^x - 1)(tgx)^2}{x(1 - cox)} = \frac{0}{0}$ F.I.

On a $e^x - 1 \sim^0 x$ et $tgx \sim^0 x$ et $1 - \cos x \sim^0 \frac{x^2}{2}$.

Donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1)(tgx)^2}{x(1 - cox)} = \lim_{x \to 0} \frac{x.x^2}{x.\frac{x^2}{2}} = 2.$$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{\left(\sqrt{\cos x} + 1\right) \ln\left(1 + (tgx)^2\right)} = \frac{0}{0}$ F.I.

On a $\cos x - 1 \sim^0 -\frac{x^2}{2}$ et $\ln\left(1 + (tgx)^2\right) \sim^0 (tgx)^2 \sim^0 x^2$.

Donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{\left(\sqrt{\cos x} + 1\right) \ln\left(1 + (tgx)^2\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{x^2}{2}}{\left(\sqrt{\cos x} + 1\right) x^2} = \frac{1}{4}.$$

4.4 Fonctions continues

1. **Continuité en un point:**

Définitions:

1. Soit f une fonction définie sur $I \subset \mathbb{R}$. On dit que f est continue en $x_0 \in I$ si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

c'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I \left(|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \right).$$

Exemple:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, \text{ si } x \neq 0 \\ 0, \text{ si } x = 0 \end{cases}.$$

$D_f = \mathbb{R}, x_0 = 0 \in D_f$.

Continuité de f en 0.

$\lim\limits_{x \to 0} \underbrace{x^2}_{\to 0} \underbrace{\cos \frac{1}{x}}_{Born\acute{e}e} = 0 = f(0)$. donc f est continue en 0.

2. On dit que la fonction f est continue à droite en x_0 si

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = f(x_0).$$

c'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I \left(0 \leq (x - x_0) < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \right).$$

3. De même, on dira que la fonction f est continue à gauche en x_0 si

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = f(x_0).$$

c'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I \left(-\eta < (x - x_0) \leq 0 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \right).$$

4. f est continue en x_0 si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en x_0.

C'est à dire

$$\lim_{\substack{> \\ x \to x_0}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x \to x_0}} f(x) = f(x_0).$$

Exemple: $f(x) = |x|, f(0) = 0.$

Continuité de f en 0.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} |x| = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} x = 0 = f(0) \Rightarrow f \text{ est continue à droite en } 0. \\ \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 0}} |x| = \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 0}} x = 0 = f(0) \Rightarrow f \text{ est continue à gauche en } 0. \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 0}} f(x) = f(0).$

D'où f est cotinue en 0.

5. f est cotinue en $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \forall (x_n) \subset I / x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x_0 \Rightarrow f(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(x_0)$.

Exemple:

1.

$$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x}, \text{ si } x \neq 0 \\ 0, \text{ si } x = 0 \end{cases} . D_f = \mathbb{R}$$

Continuité en 0 :

$\lim\limits_{x \to 0} \cos \frac{1}{x} \nexists$ car pour $x_n = \frac{1}{n\pi} \to 0$ et $\cos x_n = \cos n\pi = (-1)^n \Rightarrow f(x_n)$ n'admet pas de limite alors f n'est pas continue en 0.

2. $f(x) = [x], D_f = \mathbb{R}.$

Continuité en $x_0 = k \in \mathbb{Z}, f(k) = [k] = k.$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{> \\ x \to k}} f(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to k}} [x] = k \\ \\ \lim\limits_{\substack{< \\ x \to k}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x \to k}} [x] = k-1 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ n'est pas continue en } k \in \mathbb{Z}.$$

3.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ si } x \geq 0 \\ \\ 1, \text{ si } x < 0 \end{cases} .D_f = \mathbb{R}$$

Continuité en $x_0 = 0, f(0) = 0^2 = 0.$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} x^2 = 0 = f(0) \ \Rightarrow f \text{ est continue à droite en } 0. \\ \\ \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 0}} 1 = 1 \neq 0 = f(0) \Rightarrow f \text{ n'est continue à gauche en } 0. \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ n'estpas}$$

continue en 0.

Continuité sur un intervalle:

On dit que f est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout point de I.

Notation: On note l'ensemble des fonctions continues par $C(I)$.

Opérations sur les fonctions continues:

Soient f et g deux fonctions continues en x_0 alors:

1. $f + g$ est continue en x_0.

2. (λf) est continue en $x_0, \lambda \in \mathbb{R}$.

3. $f.g$ est continue en x_0.

4. $\frac{f}{g}$ est continue en x_0, si $g(x_0) \neq 0$.

5. $|f|$ est continue en x_0.

6. Si $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}, x_0 \in I$ telles que f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est continue en x_0.

Preuve

f est continue en $x_0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0, \forall x \in I\left(|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\right).$

g est continue en $y_0 = f(x_0) \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\eta' > 0, \forall y \in J\left(|y - y_0| < \eta' \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon\right).$

Pour $\eta' > 0$, ob associe un $\eta > 0/x \in I, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \eta' \Rightarrow$ $|y - y_0| < \eta'$

Comme $x \in I$ alors $f(x) \in J$, donc

$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0 \forall x \in I\left(|x - x_0| < \eta \Rightarrow |y - y_0| < \eta' \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon\right)$

Par suite $g \circ f$ est continue en x_0.

Théorèmes fondamentales sur les fonctions continues:

Théorème 1. Toute fonction f continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ est une fonction bornée sur $[a, b]$.

Théorème 2. Toute fonction f continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ atteint au moins une fois ses bornes, autrement dit $\exists x_1, x_2 \in [a, b] / f(x_1) = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x), f(x_2) = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x).$

Preuve: f continue sur $[a, b] \Rightarrow f$ est une fonction bornée, alors $\sup f(x)$ et $\inf f(x)$ existent.

Montrons qu'ils existent $x_1 \in [a, b]$ et $x_2 \in [a, b] / f(x_1) = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x), f(x_2) = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x).$

Par l'absurde On pose $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ alors $\forall x \in [a, b], f(x) < M$.

La fonction $g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$ continue sur $[a, b]$ donc bornée, soit alors $C = \sup\limits_{x\in[a,b]} g(x), C > 0$ car $g > 0$.

$\forall x \in [a, b], g(x) \leq C \Leftrightarrow \forall x \in [a, b], \frac{1}{M - f(x)} \leq C \Rightarrow f(x) \leq \underbrace{M - \frac{1}{C}}_{\text{majorant}<M}$ contradic-

tion car $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$ est le plus petit des majorants.

Théorème 3: (théorème des valeurs intermédiaires)

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors il existe au moins un point $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$.

$$\begin{cases} f \text{ continue sur } [a,b] \\ f(a).f(b) < 0 \end{cases} \Rightarrow \exists c \in [a,b] \text{ telque } f(c) = 0.$$

Exemple: $f(x) = x^5 - 3x + 1$.

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur $]0,1[$.

$$\begin{cases} f \text{ continue sur }]0,1[\text{ car c'est un polynôme} \\ f(0) = 1.f(1) = -1 \end{cases} \Rightarrow \exists c \in]0,1[\text{ telque } f(c) = 0.$$

Théorème 4. (Théorème des valeurs intermédiaires généralisé)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, I étant un intervalle quelconque. Soient x_1 et x_2 deux éléments de $I / x_1 < x_2$ alors $\forall y \in]f(x_1), f(x_2)[, \exists x_0 \in]x_1, x_2[$ tel que $y = f(x_0)$.

Preuve.

Soient $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ et $y \in]f(x_1), f(x_2)[$.

On pose $\begin{array}{cccc} g: & [x_1,x_2] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & g(x) = f(x) - y \end{array}$, g est continue sur $[x_1,x_2]$ car somme de fonctions continues.

$g(x_1) = f(x_1) - y < 0$ car $f(x_1) < y < f(x_2)$.

$g(x_2) = f(x_2) - y > 0$ car $f(x_1) < y < f(x_2)$.

D'aprés le théorème 3, $\exists x_0 \in]x_1, x_2[/ g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - y = 0 \Leftrightarrow y = f(x_0)$.

Résultat:

1. Image d'un intervalle fermé, borné par une fonction continue est un intervalle fermé, borné.

$f: \ [a,b] \ \rightarrow \ \mathbb{R}$ continue, $f\left([a,b]\right) = [m, M], m, M \in \mathbb{R}$.

2. Image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle, en général, $f\left([a,b]\right) \neq [f(a), f(b)]$.

3. $f\left(]a,b[\right)$ n'est pas toujours ouvert, borné.

4. Si f est continue et monotone sur I. Alors

. $f\left([a,b]\right) = [f(a), f(b)]$ si f est croissante.

. $f\left([a,b]\right) = [f(b), f(a)]$ si f est décroissante.

. $f\left([a,+\infty[\right) = \left[f(a), \lim\limits_{x\rightarrow+\infty} f(x)\right[$ si f est croissante.

. $f\left([a,+\infty[\right) = \left[\lim\limits_{x\rightarrow+\infty} f(x), f(a)\right[$ si f est décroissante.

. $f\left(]a,b[\right) = \left]\lim\limits_{x\rightarrow a} f(x), \lim\limits_{x\rightarrow b} f(x)\right[$ si f est croissante.

. $f\left(]a,b[\right) = \left]\lim\limits_{x\rightarrow b} f(x), \lim\limits_{x\rightarrow a} f(x)\right[$ si f est décroissante.

Prolongement par continuité:

Soit f une fonction définie sur un intervalle I sauf peut être en $x_0 \in I$. Supposons que f ait une limite finie l au point x_0, la fonction $\widetilde{f}$ définie par

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), \text{ si } x \in I \setminus \{x_0\} \\ l, \text{ si } x = x_0 \end{cases}.$$

coïncide avec f sur $I \setminus \{x_0\}$ et continue en x_0. On dira que $\widetilde{f}$ est un prolongement par continuité de f au point x_0.

Exemple:

1. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $D_f = \mathbb{R}^*$, on a $0 \notin D_f$ et $\lim\limits_{x\rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ alors f admet un prolonge-

ment par continuité en 0 défini par

$$\widetilde{f}(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, \text{ si } x\neq 0\\ \\ 1, \text{ si } x=0\end{cases}.$$

2. $f(x)=\cos\left(\frac{1}{x-1}\right), 1\notin D_f$ et $\lim\limits_{x\to 1}\cos\left(\frac{1}{x-1}\right)\nexists$ alors f n'admet pas un prolongement par continuité en 1.

Contnuité uniformed'une fonction sur un intervalle

Définition: Une fonction f définie sur un intervalle I est dite uniformement continue sur I si

$$\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0,\forall x',x''\in I\left(|x'-x''|<\eta\Rightarrow|f(x')-f(x'')|<\varepsilon\right).$$

η ne dépend que de ε seulement.

Remarque:

1. Toute fonction uniformement continue sur I est une fonction continue sur I. L'inverse est faux.

2. La continuité uniforme est la continuité sur tout l'intervalle, alors que la continuité sur l'intervalle I est la continuité en tout point de l'intervalle (η dépend de ε et x_0).

Exemple:

1. $f(x)=x^2$ continue uniformement sur $]0,1]$, en effet,

$$\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0,\forall x',x''\in\,]0,1]\,;|x'-x''|<\eta\Rightarrow\begin{cases}\left|(x')^2-(x'')^2\right|\leq|(x'-x'')(x'+x'')|\\ \leq 2|x'-x''|<\varepsilon.\\ \text{car } 0<x'\leq 1 \text{ et } 0<x''\leq 1, 0<x'+x''\leq 2\end{cases}$$

Il suffit de prendre $\eta=\frac{\varepsilon}{2}$.

2. $f(x) = x^2$ continue sur $[0,+\infty[$ mais n'est pas uniformement continue sur $[0,+\infty[$, en effet,

$$\exists\varepsilon>0,\forall\eta>0,\exists x',x''\in[0,+\infty[\left(|x'-x''|<\eta \text{ et } \left|(x')^2-(x'')^2\right|\geq\varepsilon\right).$$

$\exists x' = n, \exists x'' = n+\frac{1}{n}\in[0,+\infty[$,

$|x'-x''| = \frac{1}{n} < \eta$ et $\left|n^2-\left(n^2+\frac{1}{n^2}+2\right)\right| = \left|-\frac{1}{n^2}-2\right| = \frac{1}{n^2}+2 > 2 = \varepsilon.$

3. $f(x) = \ln x$ continue sur $]0,+\infty[$ mais n'est pas uniformement continue sur $]0,+\infty[$, en effet,

$$\exists\varepsilon>0,\forall\eta>0,\exists x',x''\in]0,+\infty[\,(|x'-x''|<\eta \text{ et } |\ln x'-\ln x''|\geq\varepsilon).$$

$\exists x' = \frac{\eta}{2}, x'' = \eta \in]0,+\infty[$.

$|x'-x''| = \frac{\eta}{2} < \eta$ et $\left|\ln\frac{\eta}{2}-\ln\eta\right| = |-\ln 2| = \ln 2 = \varepsilon.$

Théorème de Heine:

Soit f une fonction définie sur un intervalle fermé bornée $[a,b]$ alors

$$f \text{ est continue sur } [a,b] \Leftrightarrow f \text{ est uniformement continue sur } [a,b].$$

Fonctions Lipschitzienne:

Définition 1: Soit $f: I\to\mathbb{R}$ est dite Lipschitzienne, si

$$\exists k\geq 0,\forall x',x''\in I; |f(x')-f(x'')|\leq k\,|x'-x''|.$$

Définition 2: Soit $f: I\to\mathbb{R}$ est dite contractante si elle est Lipschitzienne avec $0\leq k<1$.

Théorème: Toute fonction Lipschitzienne est uniformement continue.

Preuve

$$\exists k \geq 0, |f(x') - f(x'')| \leq k|x' - x''| < k\eta = \varepsilon.$$

Exemple $\begin{array}{rlcl} f: & [1,+\infty[& :\rightarrow & [1,+\infty[\\ & x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$,

$|f(x') - f(x'')| = \left|\sqrt{x'} - \sqrt{x''}\right| = \left|\frac{x'-x''}{\sqrt{x'}+\sqrt{x''}}\right| \leq \frac{|x'-x''|}{\sqrt{x'}+\sqrt{x''}} \leq \frac{1}{2}|x' - x''|$, car $x' \geq 1$ et $x'' \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x'} + \sqrt{x''} \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x'}+\sqrt{x''}} \leq \frac{1}{2}$.

Donc f est contractante.

Théorème du point fixe:

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et prend ses valeurs dans $[a,b]$ $(f : [a,b] \rightarrow [a,b])$, alors il existe au moins un point $x_0 \in [a,b]$ tel que $\in f(x_0) = x_0$.

c'est à dire la droite $y = x$ rencontre le graphe de f.

Preuve

On définit la fonction $\begin{array}{rlcl} g: & [a,b] & :\rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) - x \end{array}$,

g est continue sur $[a,b]$ car somme de fonctions continues sur $[a,b]$.

$g(a) = f(a) - a \geq 0$ car $a \leq f(a) \leq b. (f : [a,b] \rightarrow [a,b])$

$g(b) = f(b) - b \leq 0$ car $a \leq f(b) \leq b. (f : [a,b] \rightarrow [a,b])$.

Si $g(a) = 0$ alors $f(a) = a$ et $x_0 = a$.

Si $g(b) = 0$ alors $f(b) = b$ et $x_0 = b$.

Si $g(a) > 0$ et $g(b) < 0$ alors il existe $x_0 \in]a,b[/g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0'$.

(D'aprés le théorème des valeurs intermédiaires).

Théorème 1: Soit $f : [a,b] \rightarrow [a,b]$ une fonction contractante, alors f admet un point fixe et un seule.

Preuve

Puisque f est contractante sur $[a,b]$ alors elle est uniformement continue sur $[a,b]$ donc continue sur $[a,b]$ et d'aprés le théorème du point fixe la fonction f admet un point fixe $x_0 = f(x_0)$.

Montrons que x_0 est unique. Par l'absurde. Supposons $\exists x_0, x_1 \in [a,b] / f(x_0) = x_{0\in}$ et $f(x_1) = x_1 / x_0 \neq x_1$.

$\exists 0 \leq k < 1, |f(x_1) - f(x_0)| \leq k|x_1 - x_0| \Leftrightarrow |x_1 - x_0| \leq k|x_1 - x_0| \Leftrightarrow 1 \leq k$ contradiction car $k < 1$.

Théorème 2: Toute fonction strictement monotone sur un intervalle I est injective sur I.

Preuve

$$f \text{ injective sur } I \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Soit $x_1, x_2 \in I / x_1 \neq x_2$ alors soit $x_1 > x_2$ ou $x_1 < x_2$.

Supposons que $x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} f(x_1) < f(x_2) \text{ si } f \text{ est strictement croissante} \\ f(x_1) > f(x_2) \text{ si } f \text{ est strictement décroissante} \end{cases} \Rightarrow$ $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Théorème 3. Si la fonction f est définie et continue sur $[a,b]$ et f est strictement monotone sur $[a,b]$ et si $f(a).f(b) < 0$ alors $\exists! c \in]a,b[/ f(c) = 0$.

Preuve

D'aprés le théorème des valeurs intermédiaires $\exists c \in]a,b[/ f(c) = 0$.

Montrons que c est unique.

Supposons que $\exists c, c' \in]a,b[, c \neq c'$ et $f(c) = f(c')$.

$f(c) = f(c') \Rightarrow c = c'$ car f est strictement monotone donc injective, alors c est unique.

4.5 Fonctions inverses des fonctions continues monotones sur I

Proposition 1: Si f est une fonction strictement monotone sur $X \subset \mathbb{R}$ alors $f : X \to f(X)$ est bijective et en plus f^{-1} est strictement monotone sur $f(X)$ (même monotonie que f).

Preuve $f : X \to f(X)$ est surjective et puisque f est strictement monotone alors f est injective d'où f est bijective $\Leftrightarrow f^{-1}$ existe.

Montrons que f^{-1} est strictement monotone.

supposons que f est strictement croissante, alors $\forall x_1, x_2 \in X, \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 0.$

Soient $y_1, y_2 \in f(X) / y_1 < y_2 \Rightarrow \exists x_1, x_2 \in X / y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$ tels que $f(x_1) < f(x_2)$.

$\forall y_1, y_2 \in f(X) / y_1 < y_2, \frac{f^{-1}(y_1)-f^{-1}(y_2)}{y_1-y_2} = \frac{x_1-x_2}{f(x_1)-f(x_2)} > 0 \Leftrightarrow f^{-1}$ est strictement croissante.

Proposition 2: Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}, f : I \to \mathbb{R}$ strictement monotone alors

$$f \text{ continue sur } I \Leftrightarrow f(I) \text{ est un intervalle.}$$

Théorème des fonctions inverses:

Si la fonction f est continue et strictement monotone sue I alors l'application

$f: I \to f(i)$ est bijective et $f^{-1}: f(I) \to I$ est continue et monotone sur $f(I)$ (la même monotonie que f)

Preuve D'aprés la proposition1 f est strictement monotone sur $I \Rightarrow f: I \to f(I)$ est bijective et $f^{-1}: f(I) \to I$ est est strictement monotone sur $f(I)$. Reste à montrer que f^{-1} est continue.

On a $f^{-1}(f(I)) = I$ d'aprés la proposition 2 f^{-1} est continue.

Fonctions trigonométriques inverses:

1. Fonction $x \mapsto \arcsin x$:

Soit

$$\begin{array}{cccc} f: & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \to & [-1,1] \\ & x & \mapsto & f(x) = \sin x \end{array}$$

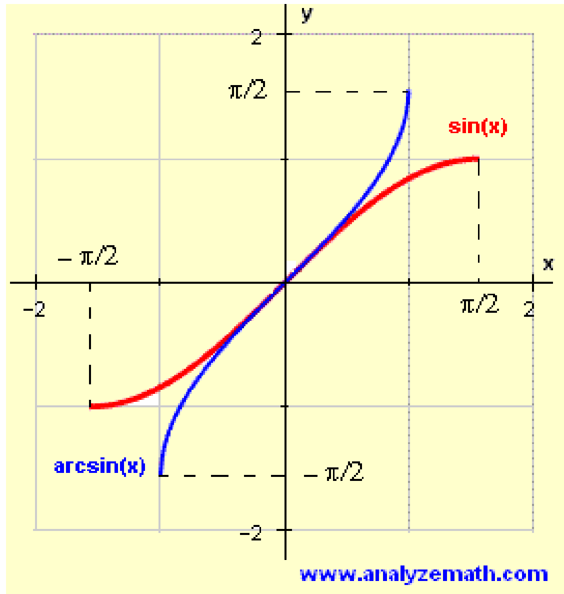
f est continue sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc elle admet un inverse défini par

$$\begin{array}{cccc} f^{-1} & [-1,1] & \to & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ & y & \mapsto & f^{-1}(y) = \arcsin y \end{array}$$

D'où on a

$$\begin{pmatrix} y = \sin x \\ \\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x = \arcsin y \\ \\ y \in [-1,1] \end{pmatrix}$$

On a $\arcsin 0 = 0, \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}, \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}, \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.



2. Fonction $x \mapsto \arccos x$:

Soit

$$\begin{array}{rccc} f: & [0,\pi] & \to & [-1,1] \\ & x & \mapsto & f(x) = \cos x \end{array}$$

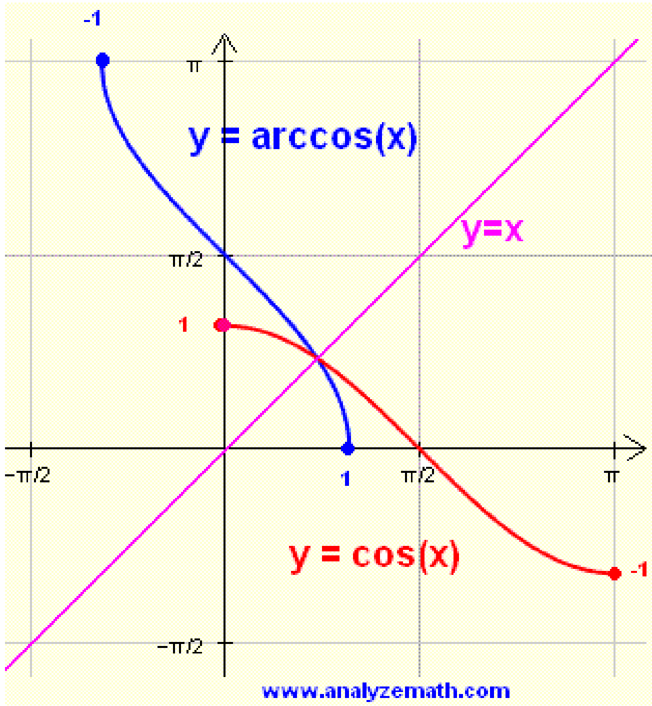
f est continue sur $[0,\pi]$ et strictement décroissante sur $]0,\pi[$ donc elle admet un inverse défini par

$$\begin{array}{rccc} f^{-1} & [-1,1] & \to & [0,\pi] \\ & y & \mapsto & f^{-1}(y) = \arccos y \end{array}$$

D'où on a

$$\begin{pmatrix} y = \cos x \\ x \in [0,\pi] \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x = \arccos y \\ y \in [-1,1] \end{pmatrix}$$

On a $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, $\arccos 1 = 0$, $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.



3. Fonction $x \mapsto arctgx$:

Soit

$$f: \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \cos x$$

f est continue sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc elle admet un inverse défini par

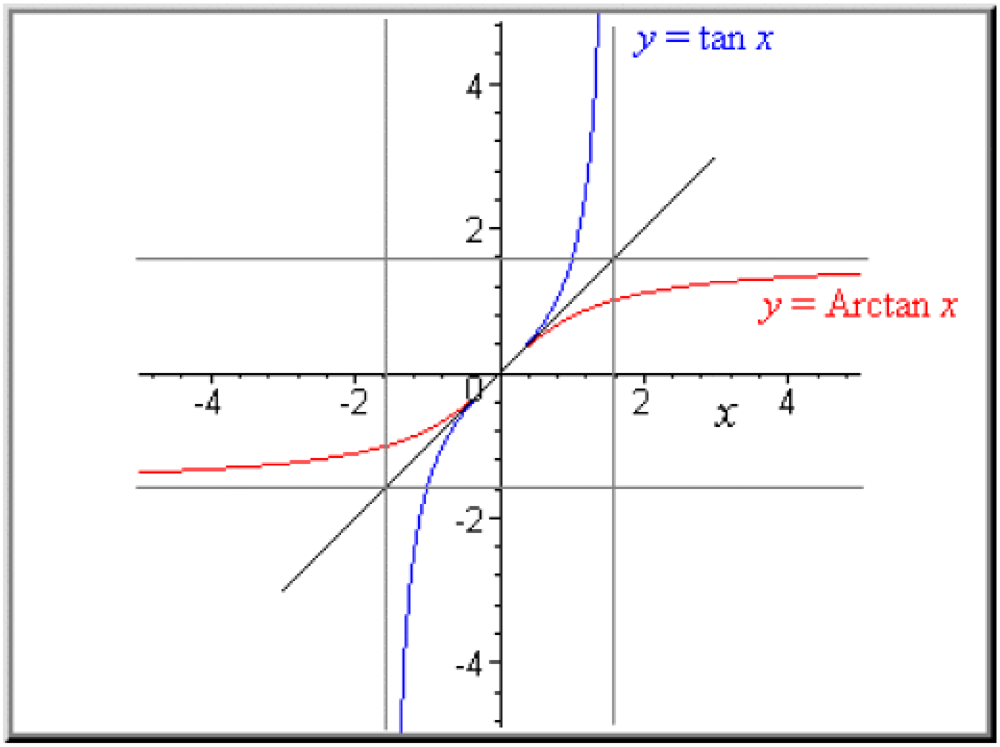
$$f^{-1} \ \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$y \mapsto f^{-1}(y) = arctgy$$

D'où on a

$$\begin{pmatrix} y = tgx \\ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x = arctgy \\ y \in \mathbb{R} \end{pmatrix}$$

On a $arctg0 = 0, arctg1 = \frac{\pi}{4}, arctg(+\infty) = \frac{\pi}{2}, = arctg(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$.



Fonctions hyperboliques et leur inverses:

1. Fonction sh **et** ch :

Définition: On appelle sinus hyperbolique (resp. cosinus hyperbolique) la fonction notée

$$shx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ (resp. } chx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{).}$$

Propriétés:

1. chx est une fonction paire, $ch(-x) = chx$.
2. shx est une fonction impaire, $sh(-x) = -shx$.
3. $chx + shx = e^x$.
4. $chx - shx = e^{-x}$.
5. $(chx)^2 - (shx)^2 = 1$.
6. $ch(x+y) = chxchy + shxshy$.

7. $ch\left(x-y\right)=chxchy-shxshy.$

8. $sh\left(x+y\right)=shxchy+shychx.$

9. $sh\left(x-y\right)=shxchy-shychx.$

En particulier pour $x=y$.

$ch2x=\left(chx\right)^{2}+\left(shx\right)^{2}.$

$sh2x=2shxchx.$

$\left(chx\right)^{2}=\frac{ch(2x)+1}{2}, \left(shx\right)^{2}=\frac{ch(2x)-1}{2}.$

Variation:

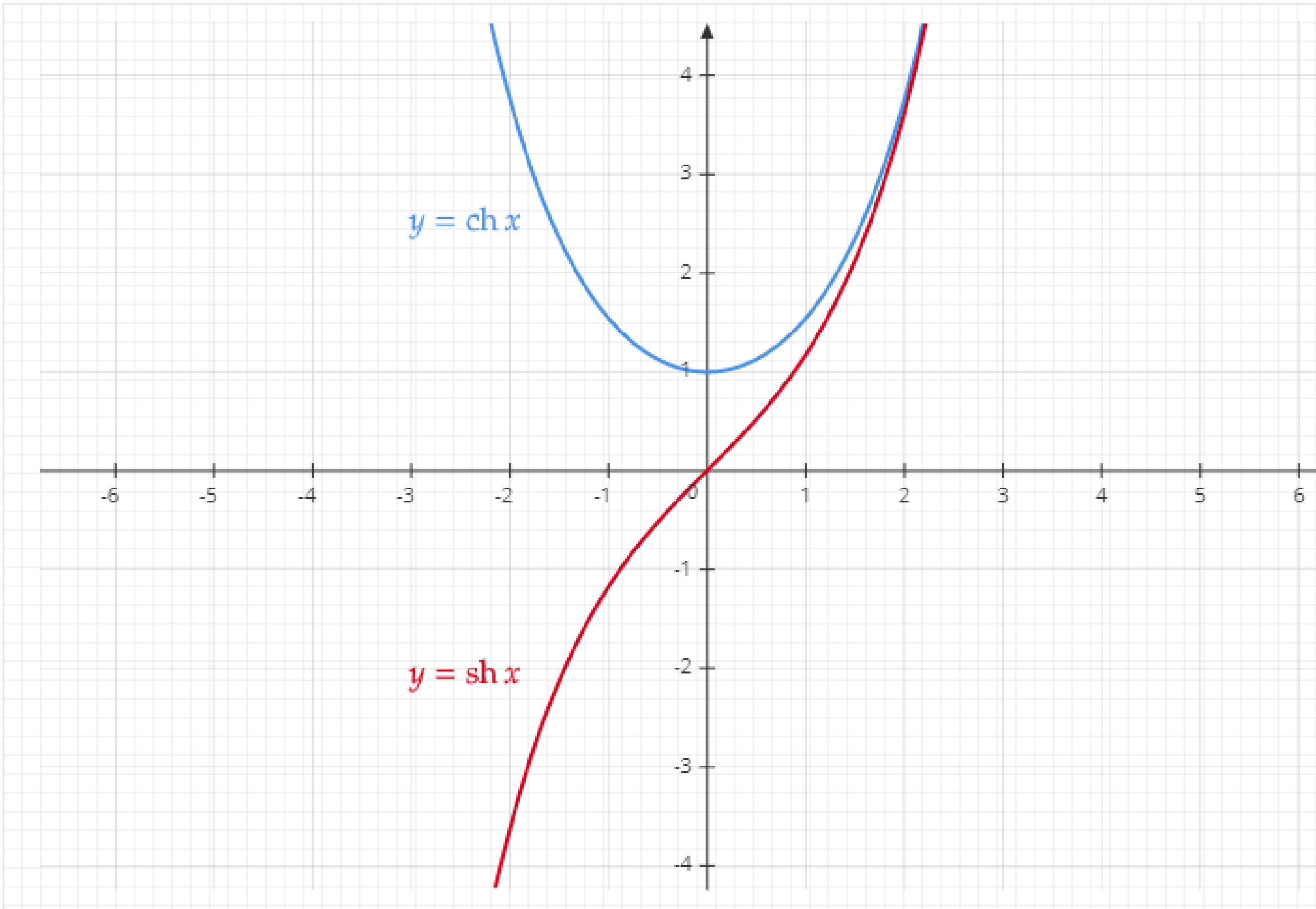
ch étant paire et sh étant impaire, on peut se borner à les étudier dans l'intervalle $\left[0,+\infty\right[$.

La fonction ch est toujours positive.

La fonction sh est positive si $x>0$ car $shx=\frac{e^{x}}{2}\left(1-e^{-2x}\right)>0$ si $x>0$.

$\left(chx\right)'=shx$ et $\left(shx\right)'=chx.$

La fonction chx est strictement croissante sur $\left]0,+\infty\right[$ et la fonction shx est strictement croissante sur $\left[0,+\infty\right[$.



Fonction tangente hyperbolique:

On appelle fonction tangente hyperbolique (resp. cotangente hyperbolique) la fonction définie et notée par

$$thx = \frac{shx}{chx}, x \in \mathbb{R}(\text{ resp. } cothx = \frac{chx}{shx}, x \in \mathbb{R}^*).$$

Propriétés

1. Les fonctions thx et $\coth x$ sont impaires.
2. $\frac{1}{(chx)^2} = 1 - (thx)^2$.
3. $th\left(x+y\right) = \frac{thx+thy}{1+thxthy}, th\left(x-y\right) = \frac{thx-thy}{1+thxthy}, th2x = \frac{2thx}{1+(thx)^2}$.

Variation:

$(thx)' = \frac{1}{(chx)^2} > 0, (\coth x)' = \frac{1}{(shx)^2} > 0.$

$\lim\limits_{x \to +\infty} thx = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \cot hx = 1.$

Fonctions hyperboliques inverses:

1. Fonction $\arg chx$:

La fonction chx est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$ donc elle admet une fonction inverse continue et strictement croissante appelée argument cosinus hyperbolique notée $\arg chx$.

On a $x = chy \Leftrightarrow y = \arg chx, y \geq 0.$

Expression au moyen de logarithme

$y = \arg chx \Leftrightarrow x = chy$ et $shy = \sqrt{ch^2 x - 1} = \sqrt{x^2 - 1},$

or $chy + shy = e^y$ i.e. $x + \sqrt{x^2 - 1} = e^y \Leftrightarrow y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$

d'où

$$\arg chx = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$$

2. Fonction $\arg shx$:

La fonction shx est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty]$ donc elle admet une fonction inverse continue et strictement croissante appelée argument sinus hyperbolique notée $\arg shx$.

On a $x = shy \Leftrightarrow y = \arg shx, y \geq 0.$

Expression au moyen de logarithme

$y = \arg shx \Leftrightarrow x = shy$ et $chy = \sqrt{sh^2 x + 1} = \sqrt{x^2 + 1},$

or $chy + shy = e^y$ i.e. $\sqrt{x^2 + 1} + x = e^y \Leftrightarrow y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right).$

d'où

$$\arg shx = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).$$

3. Fonction $\arg thx$:

La fonction thx est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc elle admet une fonction inverse continue et strictement croissante sur $]-1,1[$ appelée argument tangente hyperbolique notée $\arg thx$.

On a $x = thy \Leftrightarrow y = \arg thx, x \in \left]-1,1\right[.$

Expression au moyen de logarithme

$y = \arg thx \Leftrightarrow x = thy$ et $ch^2y = \frac{1}{1-th^{2y}} = \frac{1}{1-x^2},$

$.sh^2y = ch^2y - 1 = \frac{1}{1-th^{2y}} - 1 = \frac{th^2y}{1-th^{2y}} = \frac{x^2}{1-x^2},$

or $e^y = chy + shy \Rightarrow y = \ln\left(chy+shy\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \ln\left(\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), |x| < 1.$

d'où

$$\arg thx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), |x| < 1.$$