# Cours d'Analyse 2
# Chapitre 2 : Intégrale définie
# Partie 2

Damerdji Bouharis A.
Université des Sciences et de la Technologie Mohamed Boudiaf
Faculté des Mathématiques et Informatique.

# Chapitre 1

•

# Chapitre 2

# Intégrale définie (Suite)

## 2.1 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient $f$ et $g$ deux fonctions bornées et intégrables sur $[a, b]$, alors

$$\left[\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx\right]^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)\, dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)\, dx\right)$$

**Preuve.** Comme $f, g \in R([a, b])$ alors $f + \lambda g \in R([a, b])\,, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ et on a

$$[f(x) + \lambda g(x)]^2 \geq 0,\ \forall x \in [a, b],$$

d'où

$$\int_a^b [f(x) + \lambda g(x)]^2\, dx \geq 0,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

car l'intégrale d'une fonction positive est positive et on a

$$\int_a^b \left[f^2(x) + 2\lambda f(x)\, g(x) + \lambda^2 g^2(x)\right] dx \geq 0,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

ce qui est équivalent à

$$\int_a^b f^2(x)\, dx + \lambda \int_a^b 2f(x)\, g(x)\, dx + \lambda^2 \int_a^b g^2(x)\, dx \geq 0,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

en posant

$$A = \int_a^b g^2(x)\,dx =,\ B = 2\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx,\ C = \int_a^b f^2(x)\,dx,$$

on a

$$A\lambda^2 + B\lambda + C \geq 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

c'est un trinôme du deuxième degré qui est positif pour tout $\lambda$ dans $\mathbb{R}$, alors son discriminant $\Delta$ est négatif ou nul ($\Delta \leq 0$)

or

$$\Delta = B^2 - 4AC = 4\left[\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right]^2 - 4\left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right)\left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)$$

donc

$$\left[\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right]^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right)$$

□

## 2.2 Intégrales et primitives

### 2.2.1 Intégrale définie en fonction de sa borne supérieure

**Définition 2.2.1** *Soit $f$ une fonction intégrable sur $[a,b]$.*

*On appelle $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, l'intégrale de $f$ définie en fonction de sa borne supérieure.*

**Proposition 2.2.2** *Soit $f$ une fonction intégrable sur $[a,b]$, et soit $F$ son intégrale définie en fonction de sa borne supérieure, alors*

1. *$F$ est continue sur $[a,b]$.*
2. *Si de plus $f$ est continue sur $[a,b]$, $F$ est dérivable sur $[a,b]$ et l'on a*

$$F'(x) = f(x) \text{ pour tout } x \text{ de } [a,b].$$

**Preuve.**

1. Pour montrer que $F$ est continue sur $[a,b]$, il suffit de montrer que
   $\lim\limits_{h\to 0} F(x+h) = F(x)\,,\ \forall x \in [a,b]$.

$$\begin{aligned} |F(x+h)-F(x)| &= \left|\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^{x} f(t)\,dt\right| = \left|\int_a^{x} f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^{x} f(t)\,dt\right| \\ &= \left|\int_x^{x+h} f(t)\,dt\right| \end{aligned}$$

   alors d'après les propriétés de l'intégrale définie on a

$$|F(x+h)-F(x)| \le \int_x^{x+h} |f(t)|\ dt \le \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| \int_x^{x+h} dt.$$

   d'où

$$|F(x+h)-F(x)| \le h \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$$

   si on pose

$$\sup_{t\in[a,b]} |f(t)| = M,$$

   donc

$$|F(x+h)-F(x)| \le M.h$$

   par conséquent quand $h$ tend vers 0, on obtient :

$$\lim_{h\to 0} F(x+h) = F(x)\,.$$

2. Pour montrer que $F$ est dérivable sur $[a,b]$, il suffit de calculer $\lim\limits_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ pour tout $x \in [a,b]$. Puisque $F$ est continue sur $[a,b]$ alors d'après le théorème de la moyenne, on a:

$$\exists c \in [x, x+h] \text{ tel que } F(x+h)-F(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt = h.f(c)\,,$$

   On a

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(c)\,.$$

Si $h$ tend vers 0, alors $c$ tend vers $x$ , d'où

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{c\to x}f(c)=f(x) \text{ car } f \text{ est continue,}$$

donc $F$ est dérivable sur $[a,b]$ et l'on a

$$F'(x)=f(x)\,,\ \forall x\in[a,b].$$

□

**Conclusion 1** *Toute fonction $f$ continue sur $[a,b]$ admet comme primitive la fonction $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ , telle que $F(a)=0$.*

### 2.2.2 Théorème de Newton-Leibnitz

**Théorème 2.2.3** *Soit $f$ une fonction continue sur $[a,b]$, et $F$ une primitive de $f$ sur $[a,b]$, alors*

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)\underset{Notation}{=}[F(x)]_{x=a}^{x=b}$$

**Preuve.** Soit $G(t)=\int_a^t f(x)\,dx$ une primitive de $f$ sur $[a,b]$, alors

$$\forall t\in[a,b]:G(t)-F(t)=c\,,\ c\in\mathbb{R}$$

or

$$G(a)=\int_a^a f(x)\,dx=0,$$

d'où

$$c=-F(a)\,,$$

alors

$$G(b)=\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)\,.$$

□

**Exemples 2.2.4** *1.* $I_1 = \int\limits_1^2 \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^2 = \ln 2 - \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\ln 1}} = \ln 2.$

*2.* $I_2 = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = [\arcsin x]_0^{\frac{1}{2}} = \arcsin \frac{1}{2} - \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\arcsin 0}} = \frac{\pi}{6}.$

## 2.3 Changement de variables dans une intégrale définie

**Théorème 2.3.1** *Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ une fonction de classe $C^1$, telle que $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, alors*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt.$$

Il suffit de faire le changement de variables

$$x = \varphi(t) \Rightarrow dx = \varphi'(t)\, dt \text{ et } \begin{cases} x = a \Leftrightarrow t = \alpha, \\ x = b \Leftrightarrow t = \beta. \end{cases}$$

**Exemple 2.3.2** $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\cos x}{1+\sin^2 x} dx$

$$CV : t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x.dx,$$

*d'où*

$$I = 3\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = 3\,[\arctan x]_0^1 = 3\left(\arctan 1 - \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\arctan 0}}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

## 2.4 Intégration par parties dans une intégrale définie

**Théorème 2.4.1** *Soient $u$ et $v$ deux fonctions dérivables sur $[a,b]$ alors*

$$\int_a^b u(x)\, v'(x)\, dx = [u(x)\, v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\, v(x)\, dx \qquad (2.1)$$

**Preuve.** En effet; il suffit de dériver le produit de fonctions $u(x)v(x)$

$$(u(x)v(x))' = u(x)v'(x) + u'(x)v(x), \forall x \in [a,b],$$

alors en intégrant de $a$ à $b$ on a d'une part

$$\int_a^b (u(x)v(x))'\,dx = [u(x)v(x)]_a^b,$$

et d'autre part

$$\int_a^b (u(x)v(x))'\,dx = \int_a^b u(x)v'(x)\,dx + \int_a^b u'(x)v(x)\,dx,$$

donc

$$[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b u(x)v'(x)\,dx + \int_a^b u'(x)v(x)\,dx,$$

par conséquent

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

□

On peut écrire l'égalité (2.1) sous la forme

$$\int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu.$$

**Exemple 2.4.2** $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} x\cos x\ dx$

*On fait un choix qui nous facilite le calcul de* $\int_a^b vdu$

$$IPP : \begin{cases} u = x \\ dv = \cos x\ dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$$

*d'où*

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cos x dx = [x \sin x]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + [\cos x]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - 1\right).$$

**Théorème 2.4.3** *Soit $f$ une fonction continue d'un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, soit $a \in I,\ a > 0$*
*- Si $f$ est paire alors : $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$*
*- Si $f$ est impaire alors : $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$*

**Preuve.** En faisant le changement de variables $t = -x$ on a $dx = -dt$ et

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(-t)\,dt = \int_0^a f(-t)\,dt = \int_0^a f(-x)\,dx,$$

car la variable d'intégration est muette; d'où
- Si $f$ est paire alors

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(-x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

- Si $f$ est impaire alors

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(-x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 0.$$

□

**Théorème 2.4.4** *Soit $f$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ , périodique de période $T \neq 0$, alors pour tout nombre réel $a$ ; on a :*

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx$$

**Preuve.** On a :

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^T f(x)\,dx + \underbrace{\int_T^{a+T} f(x)\,dx}_{J},$$

pour calculer la troisième intégrale $J$; on fait le changement de variables

$$t = x - T \Leftrightarrow x = t + T \Rightarrow dx = dt,$$

d'où

$$J = \int_0^a f(t+T)\,dt = \int_0^a f(t)\,dt = \int_0^a f(x)\,dx.$$

donc

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^T f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx,$$

et enfin

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = -\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^T f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx.$$

□

**Exercice 2.4.5** *Soit $f$ une fonction définie de l'intervalle $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ , répondre par vrai ou faux en justifiant votre réponse.*

1. *Si $f$ est continue sur $[a,b]$ alors $f$ admet une primitive sur $[a,b]$.*
2. *Si $f$ admet une primitive sur $[a,b]$ alors $f$ est continue sur $[a,b]$ .*
3. *Si $f$ est continue sur $[a,b]$ alors $f$ est intégrable sur $[a,b]$.*
4. *Si $f$ est intégrable sur $[a,b]$ alors $f$ est continue sur $[a,b]$ .*

5. *Si $f$ est intégrable sur $[a,b]$ alors $f$ admet une primitive sur $[a,b]$.*
6. *Si $f$ admet une primitive sur $[a,b]$ alors $f$ est intégrable sur $[a,b]$.*

***Solution:***

1. ***Vraie**, pour la preuve; voir la conclusion 1 .*
2. ***Faux**;*

   *Contre-exemple: Soient $f$ et $F$ deux fonctions définies sur $[0,1]$ par :*

   $$f(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & si \quad x \in \left]0,1\right] \\ 0 \quad , & si \quad x = 0 \end{cases}$$

   *et*

   $$F(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & si \quad x \in \left]0,1\right] \\ 0 \quad , & si \quad x = 0. \end{cases}$$

   *On remarque que $F$ est dérivable sur $]0,1]$ et que*

   $$F'(x) = f(x), \forall x \in \left]0,1\right]$$

   *et*

   $$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x} = \lim_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{x} = 0,$$

   *d'où $F$ est dérivable sur $[0,1]$ et*

   $$F'(x) = f(x), \forall x \in [0,1]$$

   *donc $F$ est une primitive de $f$ sur $[0,1]$; mais $f$ est discontinue sur $[0,1]$ car $f$ est discontinue en $x=0$.*
3. ***Vraie**, pour la preuve; voir le cours théorème (**??**.1).*
4. ***Faux***

   *Contre-exemple: On considère la fonction $f(x) = [x]$ (la partie entière de $x$ ) sur $[-2,1]$*

   *$f$ est intégrable sur $[-2,1]$ car $f$ est continue par morceaux sur $[-2,1]$ mais $f$ est discontinue sur $[-2,1]$ car $f$ est discontinue en $x=-1$ et $x=0$.*

5. ***Faux***

   *Contre-exemple: On considère la fonction* $f(x) = \frac{[x]}{x}$ *sur* $[1,3]$, $f$ *est intégrable sur* $[1,3]$ *car* $f$ *est continue par morceaux sur* $[1,3]$; *mais* $f$ *n'admet pas de primitives sur* $[1,3]$.

6. ***Faux***

   *Contre-exemple: On considère la fonction*

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & si \;\; x \in \left]0,1\right] \\ 0 \quad, & si \quad x = 0 \end{cases}$$

*F est dérivable sur* $\left]0,1\right]$ *et on a*

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x^2} = 0,$$

*alors*

$$F'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}, & si \;\; x \in \left]0,1\right] \\ 0 \quad, & si \quad x = 0 \end{cases}$$

*Sur l'intervalle* $[0,1]$; *on pose*

$$h(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2}, & si \;\; x \in \left]0,1\right] \\ 0 \quad, & si \quad x = 0 \end{cases}$$

*et*

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}, & si \;\; x \in \left]0,1\right] \\ 0 \quad, & si \quad x = 0 \end{cases}$$

*d'où*

$$F'(x) = h(x) - g(x), \; \forall x \in [0,1],$$

*la fonction* $h$ *est continue sur* $[0,1]$ *donc admet une primitive* $H$ *sur* $[0,1]$ :

$$H'(x) = h(x), \forall x \in [0,1],$$

*par conséquent :*

$$g(x) = H'(x) - F'(x) = (H - F)'(x), \; \forall x \in [0,1]$$

*d'où* $g$ *admet une primitive sur* $[0,1]$, *mais* $g$ *n'est pas intégrable sur* $[0,1]$ *car* $g$ *n'est pas bornée sur* $[0,1]$.