Cours d'Analyse 1

Damerdji Bouharis A.

Université des Sciences et de la Technologie Mohamed Boudiaf
Faculté des Mathématiques et Informatique.

1.5 La partie entière

Définition 1.5.1 *La partie entière d'un nombre réel x ; est le plus grand entier n inférieur ou égal à x. En d'autres termes, la partie entière de x est le seul entier $n \in Z$ tel que $n \leq x < n+1$. Elle est notée par $[x]$ ou $E(x)$.*

Ainsi tout nombre réel x s'écrit de façon unique sous la forme

$$x = [x] + \alpha; \text{ où } \alpha \in [0, 1[.$$

Exemple 1.5.2 $[5,70911] = 5$, $[-5,70911] = -6$.

Propriétés 2
1. $[x] \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}$.
2. $[x+m] = [x] + m, \forall x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{Z}$.
3. $[x] \leq x \leq [x] + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
4. $[x] + [y] \leq [x+y] \leq [x] + [y] + 1, \forall x, y \in \mathbb{R}$.
5. $x \leq y \Rightarrow [x] \leq [y], \forall x, y \in \mathbb{R}$.

1.6 Caractérisation de la borne supérieure et de la borne inférieure

Etant donnée une partie A non vide, bornée de $\mathbb{R}$, soient $m, M \in \mathbb{R}$, on a la caractérisation suivante

1. $M = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} 1/ \ \forall x \in A; \ x \leq M \\ 2/ \ \forall \varepsilon > 0; \ \exists x \in A, \ M - \varepsilon < x \end{cases}$
2. $m = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} 1/ \ \forall x \in A; \ m \leq x \\ 2/ \ \forall \varepsilon > 0; \ \exists x \in A, \ x < m + \varepsilon \end{cases}$

Preuve :

1.
   - Montrons tout d'abord que si $M = \sup A$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in A$ tel que $M - \varepsilon < x$.
     On supposera par l'absurde que $\exists \varepsilon > 0, \forall x \in A; \ x \leq M - \varepsilon$, par conséquent $M - \varepsilon$ devient un majorant de A, or M étant la borne supérieure de A ; c'est le plus petit des majorants de A donc :
     $M \leq M - \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon \leq 0$, qui est une contradiction.
   - A présent montrons que si M est un majorant de A qui vérifie $\forall \varepsilon > 0; \ \exists x_0 \in A, \ M - \varepsilon < x_0$ alors M est le plus petit des majorants de A.
     Soit M' un autre majorant de A, d'où $x_0 \leq M'$, par conséquent ;
     $\forall \varepsilon > 0; \ M - \varepsilon < x_0 \leq M' \Rightarrow \forall \varepsilon > 0; \ M - M' < \varepsilon$
     d'où $M - M' \leq 0 \Leftrightarrow M \leq M'$.
2. On peut montrer la caractérisation de la borne inférieure de la même façon, (à faire en exercice).

| $\square$

Exercice 1.6.1 *Etant donné l'ensemble* $A = \left\{ \frac{n+2}{n-2} \ / \ n \in \mathbb{N}, \ n \geq 3 \right\}$.

1. *Montrer que* A *est borné.*
2. *Montrer que* $\sup A = 5, \inf A = 1$.
3. *Déterminer* $\max A$ *et* $\min A$ *s'ils existent.*

Solution.

1. On a : $\forall n \geq 3$:
$$1 \leq n-2 \leq n+2 \Rightarrow 1 \leq \frac{n+2}{n-2},$$
d'où la partie A est minorée par 1. D'une autre part on a $\forall n \geq 3$:
$$\begin{aligned} 4n \geq 12 \quad & \Leftrightarrow 5n - 10 \geq n+2 \\ & \Leftrightarrow 5(n-2) \geq n+2 \\ & \Leftrightarrow \tfrac{n+2}{n-2} \leq 5 \end{aligned}$$
d'où la partie A est majorée par 5, donc A est bornée.
2. Montrons que $\sup A = 5$
5 est un majorant de A et $5 \in A$, pour $n = 3$ donc $\max A = 5 = \sup A$.
3. Montrons que $\inf A = 1$
Soit $\varepsilon > 0$; cherchons $x \in A$, tel que $x < 1 + \varepsilon$, ceci revient à chercher $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ tel que
$$\frac{n+2}{n-2} < 1 + \varepsilon \Leftrightarrow \frac{4}{\varepsilon} + 2 < n,$$
alors il suffit de prendre $n = \left[\frac{4}{\varepsilon} + 2\right] + 1$.
On remarque que $1 \notin A$; sinon
$$\exists n \in \mathbb{N}, \ n \geq 3 \text{ tel que } \frac{n+2}{n-2} = 1 \Leftrightarrow 2 = -2 \text{ ; absurde.}$$
d'où $\min A$ n'existe pas.

$\triangle$

Propriétés 3 *1. Etant donnés* A *et* B *deux ensembles non vides, bornés de* $\mathbb{R}$, *tels que* $A \subset B$, *alors :*
$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$$
En effet ; on a
$$\inf A \leq x \leq \sup A; \forall x \in A \Rightarrow \inf A \leq \sup A$$
d'une autre part on a
$$\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B \Rightarrow \inf B \leq x; \ \forall x \in A$$

d'où $\inf B$ *est un minorant de* A, *or* $\inf A$ *est le plus grand des minorants de* A, *donc* $\inf B \leq \inf A$.

et on a

$$\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \leq \sup B;\ \forall x \in A$$

d'où $\sup B$ *est un majorant de* A, *or* $\sup A$ *est le plus petit des majorants de* A, *donc* $\sup A \leq \sup B$.

2. *Etant donnés* C *et* D *deux ensembles non vides, bornés de* $\mathbb{R}$, *alors :*

   (a) $\sup(C \cup D) = \max(\sup C, \sup D)$
   $\inf(C \cup D) = \min(\inf C, \inf D)$

   (b) $\sup(C \cap D) \leq \min(\sup C, \sup D)$
   $\inf(C \cap D) \geq \max(\inf C, \inf D)$

   (c) $\sup(C + D) = \sup C + \sup D$
   $\inf(C + D) = \inf C + \inf D$
   où $C + D = \{x + y \ / \ x \in C,\ y \in D\}$

   (d) $\sup(-C) = -\inf C$
   $\inf(-C) = -\sup C$
   où $-C = \{-x \ / \ x \in C\}$

Exemple 1.6.2 *Soit* $A = \left\{\frac{n}{n+1}, (-1)^n \ ,\ n \in \mathbb{N}\right\}$,
Montrer que $\sup A = 1$ *et* $\inf A = -1$.
On remarque que $A = C \cup D$, *où*

$$C = \left\{\frac{n}{n+1}\ ,\ n \in \mathbb{N}\right\} \text{ et } D = \{(-1)^n \ ,\ n \in \mathbb{N}\} = \{-1, 1\}$$

On a $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$n \leq n + 1 \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} \leq 1,$$

d'où 1 *est un majorant de* C.

Soit $\varepsilon > 0$; *cherchons* $x \in C$, *tel que* $1 - \varepsilon < x$, *ceci revient à chercher* $n \in \mathbb{N}$, *tel que*

$$1 - \varepsilon < \frac{n}{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} - 1 < n,$$

alors il suffit de prendre $n = \left[\left|\frac{1}{\varepsilon} - 1\right|\right] + 1$.
donc $\sup C = 1$.
On a $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq \frac{n}{n+1},$$

d'où 0 *est un minorant de* C, *or* $0 \in C$, *pour* $n = 0$ *donc* $\min C = 0 = \inf C$.
Pour l'ensemble D, *on a* $\sup D = 1$, $\inf D = -1$.
Par conséquent on a :
$\sup A = \max\{1, 1\} = 1$ *et* $\inf A = \min\{-1, 0\} = -1$.

1.7 Principe d'Archimède

Le corps des réels $\mathbb{R}$ vérifie le principe d'Archimède ; qui s'énonce comme suit

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists n \in \mathbb{N} : x < n.$$

c'est à dire que $\mathbb{N}$ n'est pas majoré.

Preuve :
Supposons par l'absurde que $\mathbb{N}$ est majoré dans $\mathbb{R}$, alors il existe $S \in \mathbb{R}$; tel que $S = \sup \mathbb{N}$, d'où

$$n \leq S,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

On pose aussi $n_0 = [S] + 1$, où $[S]$ désigne la partie entière de S, or $S < [S] + 1$, donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}, S < n_0$; contradiction. □

Remarque : Il existe une autre version du principe d'Archimède.

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x > 0,\ y \geq 0;\ \exists n \in \mathbb{N}^* : nx > y.$$

Preuve :
on va supposer par l'absurde que :

$$\exists x, y \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}^* : nx \leq y,$$

alors l'ensemble $A = \{nx \ / \ n \in \mathbb{N}^*\}$ est une partie non vide, majorée par y dans $\mathbb{R}$ donc $\sup A = M$ existe, d'où

$$\begin{aligned} nx \leq M; \forall n \in \mathbb{N}^* \quad &\Rightarrow (n+1)\, x \leq M;\ \forall n \in \mathbb{N}^* \\ &\Leftrightarrow nx \leq M - x;\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \end{aligned}$$

donc $M - x$ est un majorant de A et $M - x < M$, car $x > 0$, ce qui est absurde car M est le plus petit des majorants de A. □

1.8 La densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Théorème 1.8.1 *Etant donnés deux nombres réels a et b distincts tels que $a < b$, alors l'intervalle $]a, b[$ contient au moins un nombre rationnel $q \in \mathbb{Q}$. On dit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et on note $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.*

Preuve :
$a < b \Leftrightarrow b - a > 0$, alors d'après le principe d'Archimède, il existe $n \in \mathbb{N}$, tel que

$$\frac{1}{b-a} < n,$$

d'où $\frac{1}{n} < b - a$, posons $p = [an]$, alors

$$\begin{aligned} p \leq an < p+1 \quad & \Leftrightarrow \tfrac{p}{n} \leq a < \tfrac{p}{n} + \tfrac{1}{n} < a + (b-a) \\ & \Rightarrow a < \tfrac{p+1}{n} < b, \end{aligned}$$

et $\mathbb{Q}$, donc $\frac{p+1}{n} \in \left]a, b\right[\cap \mathbb{Q}$. □

Exemple 1.8.2 *Montrer que $A = \{r^3\ ,\ r \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ alors

$$\exists r \in \mathbb{Q}, \sqrt[3]{a} < r < \sqrt[3]{b},$$

d'où

$$a < r^3 < b$$

et donc A est dense dans $\mathbb{R}$.

1.9 La droite réelle achevée.

Définition 1.9.1 *On appelle droite réelle achevée qu'on note par $\overline{\mathbb{R}}$; l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.*

Propriétés 4

1. $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}; -\infty \leq x \leq +\infty.$
2. $\forall x \in \mathbb{R}; x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty$; $x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty$
   $(+\infty) + (+\infty) = (+\infty)\ , (-\infty) + (-\infty) = (-\infty)$
3. $\forall x > 0; x.(+\infty) = (+\infty)\ ;\ x.(-\infty) = (-\infty)$
4. $\forall x < 0; x.(+\infty) = (-\infty);\ x.(-\infty) = (+\infty)$
5. $(+\infty).(+\infty) = (+\infty)\ ,\ (-\infty).(-\infty) = (+\infty)$
   $(+\infty).(-\infty) = (-\infty).(+\infty) = (-\infty)$
6. $\forall x \in \mathbb{R}; \frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0.$

Corollaire 1.9.2 *Toute partie non vide de $\overline{\mathbb{R}}$, admet une borne supérieure et une borne inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$.*