Université des Sciences et de la Technologie d'Oran. 2021-2022
Faculté des Mathématiques − Informatique − LMD − MI - 1ère Année.
Analyse1

Fiche deTD1
Nombres réels et nombres complexes

Exercice 1:

1. Montrer les inégalités suivantes :
   (a) $|x| + |y| \leq |x+y| + |x-y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. $(*)$
   (b) $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}_+$. $(*)$
   (c) $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leq \sqrt{|x-y|}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}_+$.
2. Soit $[x]$ la partie entière de x, montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}$:
   (a) $x \leq y \Rightarrow [x] \leq [y]$. $(*)$
   (b) $[x] + [y] \leq [x+y] \leq [x] + [y] + 1$.

Exercice 2 :

1. Montrer que:
   (a) la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.$(*)$
   (b) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ et que 0,336433643364... $\in \mathbb{Q}$
2. Soit $a \in [1, +\infty[$, simplifier $x = \sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}}$
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$, en déduire que:
$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln(n+1).(*)$$

Exercice 3:

On considère l'ensemble $E \subseteq \mathbb{R}$ muni de l'ordre usuel et A une partie de E, déterminer pour chacun des ensembles suivants: l'ensemble des majorants $Maj(A)$, l'ensemble des minorants $Min(A)$, la borne supérieure $\sup(A)$, la borne inférieure $\inf(A)$, le plus petit élément $\min(A)$ et le plus grand élément $\max(A)$.

1. $A = [-\alpha, \alpha], [-\alpha, \alpha[,]-\alpha, \alpha],]-\alpha, \alpha[.$(telque $\alpha > 0), E = \mathbb{R}.$ $(*)$

2. $A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ \ x^2 < 2 \ \}, E = \mathbb{R}.$ $(*)$

3. $A = \{1 - \frac{1}{n} \ \ / \ \ n \in \mathbb{N}^* \ \}, E = \mathbb{R}.$ $(*)$

Exercice 4 :

Soit A une partie non-vide et bornée de $\mathbb{R}$.
On note $B = \{|x - y| \ ; \ (x, y) \in A^2\}$.

1. Justifier que B est majorée, on note $\sup B$ la borne supérieure de cet ensemble,

2. Montrer que $\sup B = \sup A - \inf A$.

Exercice 5 :

On note par $P_B(R)$ l'ensemble des parties bornées de $\mathbb{R}$, montrer que $\forall A, B \in P_B(\mathbb{R})$:

1. $\sup (A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$; $(*)$

2. $\inf (A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$

3. Si $A \cap B \neq \emptyset$ alors :
   a) $\sup (A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B)$
   b) $\inf (A \cap B) \geq \max(\inf A, \inf B)$ $(*)$

4. $\sup (A + B) = \sup A + \sup B$; $\inf (A + B) = \inf A + \inf B$
   où $A + B = \{x + y \ / \ x \in A \text{ et } y \in B\}$

5. $\sup(-A) = -\inf(A)$; $\inf(-A) = -\sup A$;
   tel que $-A = \{-x \ / \ x \in A\}$.

Exercice 6 :
En utilisant la caractérisation de la borne supérieure et la borne inférieure montrer que :

1. $\sup A = \frac{3}{2}$, $\inf A = 1$ pour $A = \left\{ \frac{3n+1}{2n+1} \text{ , } n \in \mathbb{N} \right\}$ $(*)$
2. $\sup C = 1$, $\inf C = 0$ pour $C = \{e^{-n} \text{ , } n \in \mathbb{N}\}$ $(*)$
3. $\sup D = -1$, $\inf D = -2$ pour $D = \left\{ \frac{1}{n^2} - 2 \text{ , } n \in \mathbb{N}^* \right\}$ $(*)$

Déterminer le maximum et le minimum de chacun de ces ensembles s'ils existent. $(*)$

Exercice 7 $(*)$:

Soit le nombre complexe $z = x + iy$, et $\overline{z}$ son conjugué, on définit

$$L(z) = z\left(\overline{z} - 4\left(1 - i\sqrt{3}\right)\right) - 4i\left(x\sqrt{3} - y\right) + 12.$$

1. Montrer que $L(z) \in \mathbb{R}$, $\forall z \in \mathbb{C}$.
2. Déterminer l'ensemble (C) des points M; d'affixe z, tels que $L(z) = 0$.
3. Soit ω l'affixe du centre du cercle (C), donner la forme exponentielle de ω, puis montrer que $\omega^{2016} = 2^{4032}$.
4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + (3i - 4)z + 1 - 7i = 0$.
5. Soit P le polynôme de la variable complexe z, tel que:

$$P(z) = z^3 + z^2\left(\sqrt{3} - 4i\right) + z\left(-5 - 3i\sqrt{3}\right) - 2\left(\sqrt{3} - i\right)$$

   (a) Montrer que $2i$ est une racine de P, puis factoriser $P(z)$.

   (b) Déduire toutes les solutions de $P(z) = 0$.

Exercice 8 :

Dans le plan complexe; muni du repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$; on considère les points A, B, C, E et F dont les affixes sont données par:

$$z_A = \sqrt{3} + i, z_B = \sqrt{3} - i, z_C = i, z_E = 2ie^{i\frac{2\pi}{3}}, z_F = 2e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

1. Ecrire z_A, z_B sous la forme exponentielle et z_E et z_F sous la forme algèbrique.
2. Vérifier que $\left(\frac{z_A}{2}\right)^{2013} + \left(\frac{iz_E}{2}\right)^{2013} = -1 - i$.

3. Soit le nombre complexe $2\alpha = \left(-1+\sqrt{3}\right) + i\left(1+\sqrt{3}\right)$,

   (a) Déterminer le nombre complexe z_D tel que $z_D = \alpha^2$, puis l'écrire sous la forme exponentielle.

   (b) Déterminer l'entier naturel $n \in \mathbb{N}$, tel que $\left(\frac{z_D}{z_E}\right)^n \in \mathbb{R}$.