Chap I : Le corps des nombres réels

• Les ensembles des nombres :

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$:

- $\mathbb{N}$: Ensemble des nombres entiers naturels.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, +\infty\}$$

- $\mathbb{Z}$: Ensemble des nombres entiers relatifs.

$$\mathbb{Z} = \{-\infty, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, +\infty\}$$

- $\mathbb{D}$: Ensemble des nombres décimaux.

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^n} ; a \in \mathbb{Z} , n \in \mathbb{N} \right\}$$

- $\mathbb{Q}$: Ensemble des nombres rationnels.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} , a \in \mathbb{Z} , b \in \mathbb{N}^* \right\}$$

- $\mathbb{R}$: Ensemble des nombres réels.

$$\mathbb{R} = \{-\infty, \dots, -\sqrt{2}, 0, \pi, 10, \dots, +\infty\}$$

Conclusion : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

La valeur absolue :

Pour tout nombre réel x, la valeur absolue de x est notée $|x|$,

$$|x| = \begin{cases} +x & \text{si} \quad x > 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Propriétés : Pour tous réels x, y et a, on a :

1. $|x| \geqslant 0$.
2. $|x| = 0 \iff x = 0$
3. $|x| \leqslant a \iff -a \leqslant x \leqslant a$
4. $|x| \geqslant a \iff x \geqslant a$ ou $x \leqslant a$
5. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
6. $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ (L'inégalité triangulaire)
7. $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$ (La seconde inégalité triangulaire)

- La partie entière :

Definition : Soit $x \in \mathbb{R}$

la partie entière de x est notée $[x]$ ou $E(x)$:

$$[x] \leqslant x < [x] + 1 \qquad [x] \in \mathbb{Z}$$

Remarque : $[x]$ est le plus grand entier qui est inférieur ou égale à x.

Propriétés : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $\forall m \in \mathbb{Z}$

1. $[x] \leqslant x < [x] + 1$
2. $x - 1 < [x] \leqslant x$
3. $x \leqslant y \Rightarrow [x] \leqslant [y]$
4. $[x] + [y] \leqslant [x + y] \leqslant [x] + [y] + 1$
5. $[x + m] = [x] + m$

Exemple :

- $[-6,1] = E(-6,1) = -7$ $\qquad -7 \leqslant -6,1 < -6$
- $[0,7] = E(0,7) = 0$ $\qquad 0 \leqslant 0,7 < 1$
- $[-0,2] = E(-0,2) = -1$ $\qquad -1 \leqslant -0,2 < 0$
- $[\sqrt{5}] = E(\sqrt{5}) = 2$ $\qquad 2 \leqslant \sqrt{5} < 3$

- La borne supérieur et la borne inférieur:

Définition: Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $m, M \in \mathbb{R}$

I] ① On dit que m est un minorant de A

(ou bien A est minorée par m)

si: $\forall x \in A : m \leqslant x$

② Le plus grand des minorants de A est la borne inférieur de A : $\inf A$

③ Si $\inf A \in A$, alors: minimum de A est $\inf A$

i.e: $\min A = \inf A$

II] ① On dit que M est un majorant de A

(ou bien A est majorée par M)

si: $\forall x \in A : x \leqslant M$

② Le plus petit des majorants de A est la borne supérieur de A : $\operatorname{Sup} A$

③ Si $\sup A \in A$, alors: maximum de A est $\sup A$

i.e: $\max A = \sup A$

Définition: A est bornée si elle est minorée et majorée

i.e: $\forall x \in A : m \leqslant x \leqslant M$

Remarque:

- Si A est majorée, alors $\operatorname{Sup} A$ existe.
- Si A est minorée, alors $\inf A$ existe.
- Si A est bornée, alors $\operatorname{Sup} A$ et $\inf A$ existe.

Propriétés :

Soit E un ensemble non vide de $\mathbb{R}$

- Le **maximum** de E, quand il existe, il est **unique**.
- Le **minimum** de E, quand il existe, il est **unique**.

Proposition :

Soit E une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $m, M \in \mathbb{R}$

- M est un **maximum** de E $\Rightarrow$ M est la **borne supérieur** de E
$\Rightarrow$ M est un **majorant** de E
- m est un **minimum** de E $\Rightarrow$ m est la **borne inférieur** de E
$\Rightarrow$ m est un **minorant** de E.

Remarque : Soit E une partie non vide de $\mathbb{R}$

- Quand le $\text{Sup}\,E$ n'existe pas, on note : $\text{Sup}\,E = +\infty$.
- Quand l'$\inf E$ n'existe pas, on note : $\inf E = -\infty$.

Propriétés : Soient A et B deux ensembles non vides et bornées

1. $\forall x \in A : \inf A \leqslant x \leqslant \text{Sup}\,A$; $\forall y \in B : \inf B \leqslant y \leqslant \text{Sup}\,B$.
2. $\text{Sup}(A+B) = \text{Sup}\,A + \text{Sup}\,B$
$\inf(A+B) = \inf A + \inf B$
3. $\text{Sup}(-A) = -\inf A$
$\inf(-A) = -\text{Sup}\,A$
4. $\text{Sup}(A \cup B) = \max(\text{Sup}\,A, \text{Sup}\,B)$
$\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$
5. Soit $A \subset B$:
   - $\inf A \geqslant \inf B$
   - $\text{Sup}\,A \leqslant \text{Sup}\,B$
6. $\text{Sup}(A.B) = \text{Sup}\,A \,.\, \text{Sup}\,B$; $\inf(A.B) = \inf(A) \,.\, \inf(B)$
7. $\text{Sup}(A \cap B) \leqslant \min(\text{Sup}\,A, \text{Sup}\,B)$
$\inf(A \cap B)$

- Opérations sur les ...

Caractérisation de la borne supérieur et la borne inférieur:

Pour montrer que:

$$\operatorname{Sup} A = M \iff \begin{cases} ① \ \forall x \in A : x \leqslant M \ (\text{i.e: } M \text{ est un majorant de } A) \\ ② \ \text{si: } M \in A \text{ donc } M = \max A = \operatorname{Sup} A \\ \quad \text{Sinon } (\text{i.e: } M \notin A) \\ ② \ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : \boxed{M - \varepsilon < x} \leqslant M \end{cases}$$

x?

il suffit de prendre $x = \left[|M - \varepsilon| \right] + 1$

pareil

$$\inf A = m \iff \begin{cases} ① \ \forall x \in A : m \leqslant x \\ ② \ \text{si: } m \in A \text{ donc } m = \min A = \inf A \\ \quad \text{Sinon } (\text{i.e: } m \notin A) \\ ② \ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : m \leqslant \boxed{x < m + \varepsilon} \end{cases}$$

x?

*Note: il faut toujours trouver quelque chose (avec ε) $< x$