# Examen final n° 1 de l'analyse I

**Exercice 1** (5 pts). Les assertions suivantes sont-elles vraies ? Justifier votre réponse.

(1). $a = 0,11111\ldots + 0,22222\ldots + 0,33333\ldots + 0,44444\ldots + 0,55555\ldots$ est un nombre rationnel.

(2). La somme et le produit de deux irrationnels peuvent très bien être des nombres rationnels.

(3). Soient $A$ et $B$ deux parties bornées de $\mathbb{R}$, alors

$$A \subset B \Longrightarrow \inf A \leq \inf B.$$

(4). Toute suite bornée est convergente.

**Exercice 2** (7 pts). Soient $A$ et $B$ deux parties non vides bornées de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}.$$

2. Soient les ensembles

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \quad |1 - 3x| < 2\}$$

et

$$B = \{1 + \frac{n}{n-2}, \quad n \in \mathbb{N},\ n \geq 3\},$$

déterminer $\sup(A \cup B)$ et $\max(A \cup B)$.

**Exercice 3** (8 pts). On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence ;

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{4}{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{7u_n + 4}{3u_n + 3}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Calculer $u_1$ et $u_2$.
2. Trouver $a$ et $b$ tels que $u_{n+1} = \dfrac{a}{b} - \dfrac{1}{u_n + 1}$
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_n < 2.$
4. Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Que peut-on déduire ?
6. Déterminer, si elle existe, la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
7. Soit

$$A = \{u_n, \quad n \in \mathbb{N}\}.$$

Déterminer la borne supérieure, la borne inférieure, le maximum et le minimum de $A$.

# Corrigé de l'examen final n° 1 de l'analyse I

**Exercice 1** (5 pts). Les assertions suivantes sont-elles vraies ? Justifier votre réponse.

(1). $a = 0,11111\ldots + 0,22222\ldots + 0,33333\ldots + 0,44444\ldots + 0,55555\ldots$ est un nombre rationnel.

**Vraie.**

Remarquons que 0.25

$$0,11111\ldots = \frac{1}{9};$$

$$0,22222\ldots = \frac{2}{9}; \qquad \ldots \qquad 0,55555\ldots = \frac{5}{9}.$$

D'où

$$a = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \cdots + \frac{5}{9} = \frac{1+2+\cdots+5}{9} = \frac{15}{9} \in \mathbb{Q}.$$ 01

(2). La somme et le produit de deux irrationnels peuvent très bien être des nombres rationnels.

**Vraie.**

**Exemple :** $1+\sqrt{2}$ et $1-\sqrt{2}$ sont deux nombres irrationnels avec 0.25

$$\left(1+\sqrt{2}\right) + \left(1-\sqrt{2}\right) = 2 \in \mathbb{Q} \qquad \text{et} \qquad \left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right) = -1 \in \mathbb{Q}.$$ 01

(3). Soient $A$ et $B$ deux parties bornées de $\mathbb{R}$, alors

$$A \subset B \Longrightarrow \inf A \leq \inf B. \qquad \textbf{Fausse.}$$ 0.25

**Contre exemple :** On a

$$A = \{0\} \subset B = \{0, -1\} \qquad \text{mais} \qquad \inf A = 0 > \inf B = -1.$$ 01

(4). Toute suite bornée est convergente. **Fausse.** En effet, 0.25

La suite du terme général $u_n = (-1)^n$ est bornée car $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leqslant u_n \leqslant 1$ (ou bien $|(-1)^n| \leqslant 1$), mais elle est divergente (n'admet pas de limite).

01

**Exercice 2** (7 pts). Soient $A$ et $B$ deux parties non vides bornées de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}.$$

Remarquons que $A$ et $B$ sont deux ensembles non vides et bornés de $\mathbb{R}$, alors $\sup A, \sup B$ et $\sup(A \cup B)$ existent. On a 0.5

$$\begin{aligned} x \in A \cup B &\Longrightarrow x \in A \quad \text{ou} \quad x \in B \\ &\Longrightarrow x \leq \sup A \quad \text{ou} \quad x \leq \sup B \\ &\Longrightarrow x \leq \max\{\sup A, \sup B\}. \end{aligned}$$

Donc $\max\{\sup A, \sup B\}$ est un majorant de $A \cup B$, mais par définition $\sup(A \cup B)$ est le plus petit des majorants de $A \cup B$, alors

$$\sup(A \cup B) \leq \max\{\sup A, \sup B\}. \qquad (1)$$

01.5

D'autre part,

$$A \subset A \cup B \quad \text{et} \quad B \subset A \cup B,$$

d'où

$$\sup A \leq \sup(A \cup B) \quad \text{et} \quad \sup B \leq \sup(A \cup B).$$

donc

$$\max\{\sup A, \sup B\} \leq \sup(A \cup B). \qquad (2)$$

01.5

De (1) et (2) nous avons $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

0.5

**Deuxième méthode :** Comme l'ensemble $\mathbb{R}$ est totalement ordonné, on a soit $\sup A \leq \sup B$ soit $\sup B \leq \sup A$.

Si $\sup A \leq \sup B$, alors

$$\max\{\sup A, \sup B\} = \sup B$$

et on doit montrer que

$$\sup(A \cup B) = \sup B.$$

Comme $B \subset A \cup B$, on a

$$\sup B \leq \sup(A \cup B). \qquad (3)$$

D'autre part, $\sup B$ est un majorant de $A$ et de $B$ (car $\sup A \leq \sup B$ ), donc

$$\forall x \in A \cup B, \qquad x \leq \sup B,$$

D'où $\sup B$ est un majorant de $A \cup B$, mais par définition $\sup(A \cup B)$ est le plus petit des majorants de $A \cup B$, alors

$$\sup(A \cup B) \leq \sup B. \qquad (4)$$

De (3) et (4) nous avons $\sup(A \cup B) = \sup B$.

On montre de la même façon que si $\sup B \leq \sup A$, alors $\sup(A \cup B) = \sup A$.

2. On a

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \quad |1 - 3x| < 2\}$$

$$\begin{aligned} x \in A &\Longleftrightarrow |1 - 3x| < 2 \\ &\Longleftrightarrow -2 < 1 - 3x < 2 \\ &\Longleftrightarrow -3 < -3x < 1 \\ &\Longleftrightarrow -\frac{1}{3} < x < 1 \\ &\Longleftrightarrow x \in \left]-\frac{1}{3}, 1\right[ \end{aligned}$$

01

Donc $\sup A = 1$.

$$B = \{1 + \frac{n}{n-2}, \quad n \in \mathbb{N},\ n \geq 3\}.$$

La suite $(1 + \frac{n}{n-2})_{n\geq 3}$ est une suite décroissante donc $\sup B = u_3 = 4$. 01

Alors

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\} = 4 \qquad \text{et} \qquad \max(A \cup B) = 4 \qquad (\text{ car } 4 \in A \cup B).$$ 0.5 +0.5

**Exercice 3** (8 pts).

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{4}{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{7u_n + 4}{3u_n + 3}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

1. $u_1 = \dfrac{40}{21}$ et $u_2 = \dfrac{124}{283}$. 0.25 X2
2. On a

$$\frac{a}{b} - \frac{1}{u_n + 1} = \frac{au_n + a - b}{b(u_n + 1)}$$

donc $a = 7$ et $b = 3$ . D'où

$$u_{n+1} = \frac{7}{3} - \frac{1}{u_n + 1}.$$ 01

3. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_n < 2$.

Pour $n = 0$, on a $0 < u_1 = \dfrac{4}{3} < 2$. Donc l'inégalité est vraie.

Supposons que l'inégalité est vraie jusqu'à l'ordre $n$, c'est-à-dire supposons que $0 < u_n < 2$ et montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n+1$, c'est-à-dire montrons que $0 < u_{n+1} < 2$. La relation de récurrence nous donne

$$\begin{aligned} 0 < u_n < 2 \Longrightarrow 1 < u_n + 1 < 3 &\Longrightarrow -1 < -\frac{1}{u_n + 1} < -\frac{1}{3} \\ &\Longrightarrow \frac{7}{3} - 1 < \frac{7}{3} - \frac{1}{u_n + 1} < \frac{7}{3} - \frac{1}{3} \\ &\Longrightarrow \frac{4}{3} < \frac{7}{3} - \frac{1}{u_n + 1} < 2 \end{aligned}$$

02,0

Par conséquent,

$$0 < u_{n+1} < 2.$$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}: \qquad 0 < u_n < 2.$$

4. Étude de la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Première méthode :** Nous avons, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \dfrac{7}{3} - \dfrac{1}{x+1}$, $x > 0$. Puisque $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$, $x > 0$, alors $f$ est croissante sur $]0, 2[$. 01.5

Comme $0 < u_n < 2$, $u_0 < u_1$ et $f$ est croissante sur $]0, 2[$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

**Deuxième méthode :** On a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-3u_n^2 + 4u_n + 4}{(3u_n + 3)^2} = \frac{-(3u_n + 2)(u_n - 2)}{(3u_n + 3)^2}.$$

Comme $0 < u_n < 2$, alors $u_{n+1} - u_n \geq 0$. Par conséquent la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

5. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée par 1, donc elle converge vers une limite $l$, avec $0 < l \leq 2$. 01

6. Comme $u_{n+1} = \dfrac{7u_n + 4}{3u_n + 3}$, alors passons à la limite, on obtient

$$l = \frac{7l + 4}{3l + 3} \Longrightarrow -3l^2 + 4l + 4 = 0 \Longrightarrow l = 2 \quad \text{ou} \quad l = -\frac{2}{3} < 0(\text{ exclue}).$$

Donc 01

$$l = 2.$$

7. $\sup A = 2$, $\inf A = \min A = u_0 = \dfrac{4}{3}$ et le $\max A$ n'existe pas. 0.25 x 4