Corrigé de la fiche de TD 1 (Corps des nombres réels)
2023/2024

Exercice 1.

1. $\max(x,-x) = |x|$

$$\max(x,-x) = \begin{cases} x, \text{ si } x \geq 0 \\ -x, \text{ si } x < 0 \end{cases} = |x|.$$

2. $|x-y| \leq |x| + |y|$ (on utilise $|X| \leq a \Leftrightarrow -a \leq X \leq a, a \geq 0), X = x - y$ et $a = |x| + |y| \geq 0$, alors on a

$$|x-y| \leq |x| + |y| \Leftrightarrow -(|x| + |y|) \leq x - y \leq |x| + |y|$$

donc il suffit de démontrer $-(|x| + |y|) \leq x - y \leq |x| + |y|$.

On a

$$\begin{aligned} -|x| &\leq x \leq |x| \ldots. (*) \\ -|y| &\leq y \leq |y| \Leftrightarrow -|y| \leq -y \leq |y| \ldots (**) \end{aligned}$$

$(*) + (**)$ donne

$$-(|x| + |y|) \leq x - y \leq |x| + |y| \Leftrightarrow |x-y| \leq |x| + |y|.$$

3. $||x| - |y|| \leq |x+y| \Leftrightarrow -|x+y| \leq |x| - |y| \leq |x+y|$.

On a

$$\begin{aligned} |x| &= |x + y - y| \\ &= |(x+y) + (-y)| \\ &\leq |x+y| + |-y|, \text{ et } |-y| = |y| \\ &\leq |x+y| + |y| \end{aligned}$$

d'où

$$|x| - |y| \leq |x+y| \ldots (1)$$

D'autre part

$$\begin{aligned} |y| &= |y + x - x| \\ &= |(x+y) + (-x)| \\ &\leq |x+y| + |-x|, \text{ et } |-x| = |x| \\ &\leq |x+y| + |x| \end{aligned}$$

donc

$$-|x+y| \leq |x|-|y| \ldots (2)$$

(1) et (2) donne

$$-|x+y| \leq |x|-|y| \leq |x+y| \Leftrightarrow ||x|-|y|| \leq |x+y|.$$

4. $\max(x,y) = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$, On considère les deux cas $x \geq y, y \geq x$.
Si $x \geq y \Rightarrow x-y \geq 0$ et $|x-y| = x-y$.
$\max(x,y) = x$,
et $\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) = \frac{1}{2}(x+y+x-y) = x = \max(x,y)$.
Si $y \geq x \Rightarrow x-y \leq 0$ et $|x-y| = -(x-y) = y-x$.
$\max(x,y) = y$,
et $\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) = \frac{1}{2}(x+y+y-x) = y = \max(x,y)$.
Dans les deux cas on a trouvé $\max(x,y) = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$.
5. $\min(x,y) = \frac{1}{2}(x+y-|x-y|)$. Même raisonnement que 4.
6. $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x}+\sqrt{y}, \forall x,y \in \mathbb{R}_+$.
On a $xy \geq 0$, alors $2\sqrt{xy} \geq 0 \Rightarrow \underbrace{x+y+2\sqrt{xy}}_{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2} \geq x+y$, d'où $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2 \geq x+y = \left(\sqrt{x+y}\right)^2$.
Ce qui donne

$$\sqrt{x}+\sqrt{y} \geq \sqrt{x+y}.$$

II. $[x]$ partie entière de $x \in \mathbb{R}$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x.
1. $\forall x \in \mathbb{R}, x-1 < [x] \leq x$.
On a par définition de la partie entière de x, $[x] \leq x < [x]+1$

$$x < [x]+1 \Leftrightarrow x-1 < [x]$$

et

$$[x] \leq x$$

donc

$$x-1 < [x] \leq x.$$

2. $\forall x,y \in \mathbb{R}, x \leq y \Rightarrow [x] \leq [y]$.
On a $\forall x,y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} [x] &\leq x < [x]+1 \\ [y] &\leq y < [y]+1 \end{aligned}$$

et $x \leq y$ donc $[x] \leq x \leq y \Rightarrow \underbrace{[x]}_{entier} \leq y$.

$[x]$ est un entier inférieur ou égal à y mais par définition $[y]$ est le **plus grand** entier inférieur ou égal à y alors

$$[x] \leq [y] .$$

3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{Z}, [x + a] = [x] + a$.
On pose $m = [x + a]$, alors $m \leq x + a < m + 1$,
et si on pose $[x] = n$, alors $\underbrace{(n + a)}_{entier} \leq x + a < (n + a) + 1$,

par définition $[x + a]$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $x + a$ et il est unique d'où $m = n + a$, c'est à dire $[x + a] = [x] + a$.

III. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ par l'absurde.

On suppose que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, alors $\exists a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}^* a \wedge b = 1/ \ \sqrt{2} = \frac{a}{b}$.

$2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow a^2 \ pair \Rightarrow a \ pair, a = 2k, k \in \mathbb{N}$ ainsi $a^2 = 4k^2 = 2b^2 \Leftrightarrow b^2 = 2k^2 \Leftrightarrow b^2$ pair$\Rightarrow b$ pair.

On obtient que 2 divise a et b, contradiction avec le fait qu'on a supposé que a et b sont premier entre eux, donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

$0.336433643364... \in \mathbb{Q}$.

On pose $x = 0.\underbrace{3364}\underbrace{3364}\underbrace{3364}...$

$10^{-4}x = 3364.33643364...$ et

$$\begin{aligned} 10^{-4}x - x &= 3364 \\ x\,(9999) &= 3364 \\ x &= \frac{3364}{9999} \in \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

Exercice2.

$A = [-2, 2] , \forall x \in A, -2 \leq x \leq 2$
$Maj\,(A) = [2, +\infty[\Rightarrow \sup A = 2 \in A \Rightarrow \max A = 2$.
$Min\,(A) =]-\infty, -2] \Rightarrow \inf A = -2 \in A \Rightarrow \min A = -2$.
$A = [-2, 2[, \forall x \in A, -2 \leq x < 2$
$Maj\,(A) = [2, +\infty[\Rightarrow \sup A = 2 \notin A \Rightarrow \max A$ n'existe pas.
$Min\,(A) =]-\infty, -2] \Rightarrow \inf A = -2 \in A \Rightarrow \min A = -2$.
$A =]-2, 2] , \forall x \in A, -2 < x \leq 2$
$Maj\,(A) = [2, +\infty[\Rightarrow \sup A = 2 \in A \Rightarrow \max A = 2$.
$Min\,(A) =]-\infty, -2] \Rightarrow \inf A = -2 \notin A \Rightarrow \min A$ n'existe pas.

$A=\left]-2,2\right[, \forall x\in A, -2<x<2$

$Maj\,(A)=\left[2,+\infty\right[\Rightarrow \sup A=2\notin A\Rightarrow \max A$ n'existe pas.

$Min\,(A)=\left]-\infty,-2\right]\Rightarrow \inf A=-2\notin A\Rightarrow \min A$ n$'$existe pas.

$A=\left\{\frac{1}{x-1}, x\in\left]0,\frac{1}{2}\right[\right\}$

Soit $X\in A, X=\frac{1}{x-1}, x\in\left]0,\frac{1}{2}\right[$,

on a $0<x<\frac{1}{2}\Rightarrow -1<x-1<-\frac{1}{2}\Rightarrow \frac{1}{2}<1-x<1\Rightarrow 1<\frac{1}{1-x}<2\Rightarrow -2<\frac{1}{x-1}<-1$, alors $-2<X<-1$.

$Maj\,(A)=\left[-1,+\infty\right[\Rightarrow \sup A=-1\notin A\Rightarrow \max A$ n'existe pas.

$Min\,(A)=\left]-\infty,-2\right]\Rightarrow \inf A=-2\notin A\Rightarrow \min A$ n$'$existe pas.

$A=\left\{x\in\mathbb{Q}, x^2\leq 2\right\}, E=\mathbb{R}$.

Soit $x\in A, x\in\mathbb{Q}$ et $x^2\leq 2\Leftrightarrow |x|\leq\sqrt{2}\Leftrightarrow -\sqrt{2}\leq x\leq\sqrt{2}$.

$Maj\,(A)=\left[\sqrt{2},+\infty\right[\Rightarrow \sup A=\sqrt{2}\notin A$ car $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}\Rightarrow \max A$ n'existe pas.

$Min\,(A)=\left]-\infty,-\sqrt{2}\right]\Rightarrow \inf A=-\sqrt{2}\notin A$ car $-\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}\Rightarrow \min A$ n$'$existe pas.

Exercice3.

1. $A=\left\{\frac{1}{n^2}-1, n\in\mathbb{N}^*\right\}$

Montrons d'abord que A est bornée.

Soit $x\in A\Leftrightarrow x=\frac{1}{n^2}-1, n\geq 1 (n\in\mathbb{N}^*)$.

On a $n\geq 1\Rightarrow n^2\geq 1\Rightarrow 0<\frac{1}{n^2}\leq 1\Rightarrow -1<\frac{1}{n^2}-1\leq 0$, d'où $\forall x\in A, -1<x\leq 0\Leftrightarrow A$ est bornée (majorée par 0 et minorée par -1).

On a $0=\frac{1}{1^2}-1\in A$ (pour $n=1$) et 0 est un majorant de A et puisque il appartient à A alors $\max A=0=\sup A$.

Montrons maintenant que $\inf A=-1$ en utilisant la caractérisation de la borne inférieure.

$$\inf A=-1\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\forall x\in A, x\geq -1 \text{ vérifiée}\\ \forall\varepsilon>0, \exists x_\varepsilon\in A/x_\varepsilon<-1+\varepsilon\end{array}\right.$$

Pour chercher $x_\varepsilon\in A$, il suffit de chercher $n_\varepsilon\geq 1/x_\varepsilon=\frac{1}{n_\varepsilon^2}-1<-1+\varepsilon\Leftrightarrow \frac{1}{n_\varepsilon^2}<\varepsilon\Leftrightarrow n_\varepsilon^2>\frac{1}{\varepsilon}\Leftrightarrow n_\varepsilon>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

Il suffit de prendre $n_\varepsilon=\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]+1$. (ou bien n_ε existe d'aprés la première formule d'Archimed).

2. $B=\left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}, n\in\mathbb{N}^*\right\}$

Montrons d'abord que B est bornée.

Soit $x\in B\Leftrightarrow x=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}-1, n\geq 1 (n\in\mathbb{N}^*)$.

On a $n\geq 1\Rightarrow 0<\frac{1}{n}\leq 1$, et $n\geq 1\Rightarrow n^2\geq 1\Rightarrow 0<\frac{1}{n^2}\leq 1\Rightarrow 0<\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\leq 2$, d'où $\forall x\in B, 0<x\leq 2\Leftrightarrow B$ est bornée (majorée par 2 et minorée par 0).

On a $2=\frac{1}{1}+\frac{1}{1^2}\in B$ (pour $n=1$) et 2 est un majorant de B et puisque il appartient à B alors $\max B=0=\sup B$.

Montrons maintenant que $\inf B=0$ en utilisant la caractérisation de la borne inférieure.

$$\inf B=0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\forall x\in B, x\geq 0 \text{ vérifiée}\\ \forall\varepsilon>0,\exists x_\varepsilon\in B/x_\varepsilon<0+\varepsilon\end{array}\right.$$

Pour chercher $x_\varepsilon\in B$, il suffit de chercher $n_\varepsilon\geq 1/x_\varepsilon=\frac{1}{n}+\frac{1}{n_\varepsilon^2}<0+\varepsilon$,

On a $\frac{1}{n_\varepsilon}<\frac{1}{n_\varepsilon}+\frac{1}{n_\varepsilon^2}<\varepsilon\Rightarrow\frac{1}{n_\varepsilon}<\varepsilon\Rightarrow n_\varepsilon>\frac{1}{\varepsilon}$. Il suffit de prendre $n_\varepsilon=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$.

Exercice4.

$A=\left\{\frac{2n}{3n+1},n\in\mathbb{N}\right\}2$

1. $\frac{2n}{3n+1}=\frac{2}{3}+\frac{-\frac{2}{3}}{3n+1},a=\frac{2}{3},b=-\frac{2}{3}$.

2. Soit $x\in A,x=\frac{2n}{3n+1}=\frac{2}{3}+\frac{-\frac{2}{3}}{3n+1}$,

$n\geq 0\Rightarrow 3n+1\geq 1\Rightarrow 0<\frac{1}{3n+1}\leq 1\Rightarrow-\frac{2}{3}\leq\frac{-\frac{2}{3}}{3n+1}<0\Rightarrow 0\leq\frac{2}{3}+\frac{-\frac{2}{3}}{3n+1}<\frac{2}{3}\Leftrightarrow\forall x\in A,0\leq x<\frac{2}{3}\Leftrightarrow A$ est bornée.

3. On a $0=\frac{2}{3}+\frac{-\frac{2}{3}}{3.0+1}\in A($ pour $n=0)$ et 0 est un minorant de A et puisque il appartient à A alors $\min A=0=\inf A$.

Montrons maintenant que $\sup A=\frac{2}{3}$ en utilisant la caractérisation de la borne supérieure.

$$\sup A=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\forall x\in A,x\leq\frac{2}{3}\text{ vérifiée}\\ \forall\varepsilon>0,\exists x_\varepsilon\in A/\frac{2}{3}-\varepsilon<x_\varepsilon.\end{array}\right.$$

Pour chercher $x_\varepsilon\in A$, il suffit de chercher $n_\varepsilon\geq 0/x_\varepsilon=\frac{2}{3}+\frac{-\frac{2}{3}}{3n_\varepsilon+1}>\frac{2}{3}-\varepsilon$,

$\frac{2}{3}+\frac{-\frac{2}{3}}{3n_\varepsilon+1}>\frac{2}{3}-\varepsilon\Rightarrow\frac{-\frac{2}{3}}{3n_\varepsilon+1}>-\varepsilon\Rightarrow\frac{\frac{2}{3}}{3n_\varepsilon+1}<\varepsilon\Rightarrow 3n_\varepsilon+1>\frac{2}{3\varepsilon}\Rightarrow n_\varepsilon>\frac{\frac{2}{3\varepsilon}-1}{3}=\frac{2}{9\varepsilon}-\frac{1}{3}$,

Il suffit de prendre $n_\varepsilon=\left[\left|\frac{2}{9\varepsilon}-\frac{1}{3}\right|\right]+1$ (on prend la valeur absolue de $\frac{2}{9\varepsilon}-\frac{1}{3}$ car on n'a pas le signe de $\frac{2}{9\varepsilon}-\frac{1}{3}$, on cherche un entier naturel $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$).

Exercice 5.

1. A et B sont bornées alors $A\cup B$ est bornée.

En effet, Soit $x\in A\cup B\Leftrightarrow x\in A$ ou $x\in B\Leftrightarrow\inf A\leq x\leq\sup A$ ou $\inf B\leq x\leq\sup B$ (car A et B sont bornées)$\Leftrightarrow A\cup B$ est bornée.

Montrons que $\sup(A\cup B)=\max(\sup A,\sup B)$.

$\sup(A\cup B)=\max(\sup A,\sup B)\Leftrightarrow\underbrace{\sup(A\cup B)\leq\max(\sup A,\sup B)}_{(1)}$ et $\underbrace{\sup(A\cup B)\geq\max(\sup A,\sup B)}_{(2)}$

On montre (1) et (2).

On a $\left\{\begin{array}{l} A \subset A \cup B \Rightarrow \sup A \leq \sup (A \cup B) \\ B \subset A \cup B \Rightarrow \sup B \leq \sup (A \cup B) \end{array}\right. \Rightarrow \sup (A \cup B) \geq \max (\sup A, \sup B)$ d'où (2) est démontrer.

On a aussi

$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ ou $x \in B \Leftrightarrow x \leq \sup A$ ou $x \leq \sup B \Rightarrow \sup A$ est un majorant de $A \cup B$ ou $\sup B$ est un majorant de $A \cup B$, mais par définition $\sup (A \cup B)$ est le plus petit des majorants de $A \cup B$, par conséquent, $\sup (A \cup B) \leq \sup A$ et $\sup (A \cup B) \leq \sup B$ ce qui donne $\sup (A \cup B) \leq \max (\sup A, \sup B)$ d'où (1) est démontrer.

Même raisonnement pour $\inf (A \cup B) = \min (\inf A, \inf B)$.

2. $A + B = \{z = x + y; x \in A, y \in B\}$

A et B sont bornées alors $A + B$ est bornée.

En effet, soit $z \in A + B$ alors $z = x + y / x \in A$ et $y \in B$.

$\left.\begin{array}{l} x \in A \text{ et } A \text{ est bornée alors } \inf A \leq x \leq \sup A \\ y \in B \text{ et } B \text{ est bornée alors } \inf B \leq y \leq \sup B \end{array}\right\} \Rightarrow \inf A + \inf B \leq x + y \leq$ $\sup A + \sup B \Leftrightarrow \inf A + \inf B \leq z \leq \sup A + \sup B \Leftrightarrow A + B$ bornée.

Montrons que $\sup (A + B) = \sup A + \sup B$ en utilisant la caractérisation de la borne supérieure.

$\left\{\begin{array}{c} \forall x \in A, x \leq \sup A \ldots (1) \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A; \sup A - \frac{\varepsilon}{2} < x_\varepsilon \ldots (2) \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{c} \forall y \in B, y \leq \sup B \ldots (1') \\ \forall \varepsilon > 0, \exists y_\varepsilon \in B; \sup B - \frac{\varepsilon}{2} < y_\varepsilon \ldots (2') \end{array}\right.$

Prenons $(1) + (1')$ et $(2) + (2')$.

$\left\{\begin{array}{c} \forall x \in A, \forall y \in B, x + y \leq \sup A + \sup B \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A, \exists y_\varepsilon \in B; \sup A + \sup B - \varepsilon < x_\varepsilon + y_\varepsilon \end{array}\right. \Leftrightarrow \sup (A + B) =$ $\sup A + \sup B$.

Même raisonnement pour $\inf (A + B) = \inf A + \inf B$.

Application:

$A = \{1\}, B = \left\{\frac{-2}{n+1}; n \in \mathbb{N}\right\}$.

a. $\forall x \in A; x = 1 \Leftrightarrow \sup A = \inf A = 1$.

$\forall y \in B; y = \frac{2}{n+1}, n \in \mathbb{N}$,

on a $n \geq 0 \Rightarrow n + 1 \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n+1} \leq 1 \Rightarrow -2 \leq \frac{-2}{n+1} < 0 \Leftrightarrow -2 \leq y < 0 \Leftrightarrow B$ est bornée.

Pour $n = 0, y = -2 = \frac{-2}{0+1} \in B$ et -2 est un minorant de B qui appartient à B donc $\min B = -2 = \inf B$.

Montrons que $\sup B = 0$ en utilisant la caractérisation de la borne supérieure.

$$\sup B = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \forall x \in B, y \leq 0 \text{ vérifiée} \\ \forall \varepsilon > 0, \exists y_\varepsilon \in B / 0 - \varepsilon < y_\varepsilon. \end{array}\right.$$

Pour chercher $y_\varepsilon \in B$, on cherche $n_\varepsilon \geq 0 / -\varepsilon < y_\varepsilon$,

$-\varepsilon < \frac{2}{n_\varepsilon+1} \Leftrightarrow \varepsilon > \frac{2}{n_\varepsilon+1} \Leftrightarrow n_\varepsilon + 1 > \frac{2}{\varepsilon} \Leftrightarrow n_\varepsilon > \frac{2}{\varepsilon} - 1$. Il suffit de prendre $n_\varepsilon = \left[\left|\frac{2}{\varepsilon} - 1\right|\right] + 1$.

b. Déduire $\sup C$ et $\inf C / C = \left\{\frac{n-1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$.

On a $\frac{n-1}{n+1} = 1 + \frac{-2}{n+1}$, alors $\forall z \in C, z = \underbrace{1}_{\in A} + \underbrace{\frac{-2}{n+1}}_{\in B}$ donc $z \in A + B$ ce qui donne $C = A + B$.

Donc $\sup C = \sup(A+B) = \sup A + \sup B = 1 + 0 = 1$

$\inf C = \inf(A+B) = \inf A + \inf B = 1 + (-2) = -1.$

2. $A \neq \phi, A$ majorée$\Rightarrow \sup A$ existe.

$\alpha \in A$; Montrons que $\sup A = \sup(A - \{\alpha\})$ si $\alpha < \sup A$,

On a $A = (A - \{\alpha\}) \cup \{\alpha\}$, donc

$$\begin{aligned}
\sup A &= \sup((A - \{\alpha\}) \cup \{\alpha\}) \\
&= \max(\sup(A - \{\alpha\}), \sup(\{\alpha\})) \\
&= \max(\sup(A - \{\alpha\}), \alpha),
\end{aligned}$$

puisque $\alpha < \sup A$ c'est à dire $\sup A \neq \alpha$ alors

$$\sup A = \sup(A - \{\alpha\})$$

.