Corrigé de l'examen de rattrapage
Analyse 1

Exercice 1 : (5 pts)

1pt 1) Faux

Contre-ex : $A =]-\infty, 4]$

$\sup A = 4$; $4 \in A$

1pt 2) Faux :

$U_n = -n$; $\forall n \in \mathbb{N}$

$(U_n)_n$ est décroissante, or $\lim_{n \to +\infty} U_n = -\infty$

1pt 3) Faux :

$U_n = (-1)^n$; $\forall n \in \mathbb{N}$

$(U_n)_n$ est bornée : $|U_n| = 1$; $\forall n \in \mathbb{N}$

or $(U_n)_n$ est divergente (deux limites différentes)

donc $(U_n)_n$ n'est pas de Cauchy.

1pt 4) Vraie

Car Toute fonction réelle dérivable en x_0 est continue en x_0 (par contraposée)

1pt 5) Faux :

$f(x) = |x|$; $\forall x \in \mathbb{R}$

f est non dérivable en $x_0 = 0$; mais f est continue en $x_0 = 0$

Exercice 2 : (5,5 pts)

1) $\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 < U_n \leq 2$ ... $P(n)$

0,25 • $n = 1$; $U_1 = \sqrt{2} \Rightarrow P(1)$ Vraie

0,75 • $P(n) \overset{?}{\Rightarrow} P(n+1)$

On a :

$$0 < U_n \leq 2 \Rightarrow 2 < U_n + 2 \leq 4$$

$$\Rightarrow 0 < \sqrt{2} < \sqrt{U_n + 2} \leq 2$$

$$\Rightarrow 0 < U_{n+1} \leq 2$$

• Donc $\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 < U_n \leq 2$

0,25 2) $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n + 2} - u_n$

0,75 $= \dfrac{-u_n^2 + u_n + 2}{\sqrt{u_n+2} + u_n}$

$= \dfrac{(2-u_n)(u_n+1)}{\sqrt{u_n+2} + u_n} \geq 0$, car : $0 < u_n \leq 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

0,5

$-\quad -1 \quad + \quad 0 \quad + \quad 2 \quad -$

D'où $(U_n)_n$ est croissante.

1pt 3) $(u_n)_n$ est croissante et majorée donc convergente vers sa borne supérieure.

On pose : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}$, d'où :

1pt $l = \sqrt{l+2} \iff l^2 - l - 2 = 0$

$\iff (l-2)(l+1) = 0$

$\implies l = 2 \vee l = -1$ (refusée car $u_n > 0 \implies l \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$)

d'où $\boxed{l = 2}$.

4) • $u_1 = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2^{1+1}}\right) = 2\cos\dfrac{\pi}{4} = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{\sqrt{2}}$ vraie.

• On suppose que : $u_n = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)$

0,5 $u_{n+1} = \sqrt{2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}} + 2} = \sqrt{2\left[\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}} + 1\right]}$

$= \sqrt{2} \cdot \sqrt{\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}} + 1}$.

or $\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}} = \cos\left(2\left(\dfrac{\pi}{2^{n+2}}\right)\right) = 2\cos^2\dfrac{\pi}{2^{n+2}} - 1$

0,5 d'où $u_{n+1} = \sqrt{2}\sqrt{2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2^{n+2}}\right) + \cancel{1} - \cancel{1}}$

$\implies u_{n+1} = 2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+2}}$ C.Q.F.D

P2

Exercice 3 : (6,5pts)

1) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{1+x^2} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$

0,5 $D_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

0,75 2) f est continue sur $\mathbb{R}^*$ car c'est le produit, le quotient et la composition de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$

0,75 $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \dfrac{x^2}{1+x^2} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = 0 \cdot \dfrac{\pi}{2} = \boxed{0}$

$f(0) = \boxed{0}$

Donc f est continue en 0 et par conséquent sur $\mathbb{R}$.

0,75 3) f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car c'est le quotient, le produit et la composition de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$

0,75 $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \dfrac{\frac{x^2}{1+x^2} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x}$

$= \lim_{x \to 0} \dfrac{x}{1+x^2} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

$= 0 \cdot \dfrac{\pi}{2} = \boxed{0}$

Donc f est dérivable en 0, et par conséquent sur $\mathbb{R}$.

et $\boxed{f'(0) = 0}$.

1 4) $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{(x^2+1)^2} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x^2}\right) - \dfrac{2x^3}{(x^2+1)(x^4+1)} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$

0,5

P3

(1pt) 5) f est continue sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $[-1,1]$
f est dérivable sur $\mathbb{R}$; " " " $]-1,1[$

$f(-1) = f(1) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{8}$

(0,5) Th Rolle
$\Longrightarrow \exists\, \alpha \in]-1,1[\,/\, f'(\alpha) = 0$

Exercice 4 (3 pts)

$g(x) = e^{2x} - 2$; g est dérivable, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

(0,25) 1) $g'(x) = 2e^{2x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(0,25) $g''(x) = 4e^{2x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(0,25) et on a $g''(x) > 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$.
(0,25) donc : g est convexe sur $\mathbb{R}$.

(0,5) 2) $y = g(0) + g'(0)(x-0)$

(0,5) $= -1 + 2x$
(T) : $y = 2x - 1$

(0,5) 3) Comme g est convexe sur $\mathbb{R}$, alors son graphe est au dessus de toutes ses tangentes en particulier (T)
ie :

(0,5) $g(x) \geq y$; $\forall x \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow e^{2x} - 2 \geq 2x - 1$; $\forall x \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow \frac{e^{2x} - 1}{2} \geq x$; $\forall x \in \mathbb{R}$

P4