Tableaux des dérivées et primitives et quelques formules en prime

Fonction	Domaine de dérivabilité	Dérivée
$\ln(x)$	$\mathbb{R}^{+,*}$	$\frac{1}{x}$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^{+,*}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^{+,*}$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$
$\tan(x)$	$]-\frac{\pi}{2}+k\pi; \frac{\pi}{2}+k\pi[, k \in \mathbb{Z}$	$1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
$\arccos(x)$	$]-1;1[$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arcsin(x)$	$]-1;1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$

Opération	Dérivée
$f+g$	$f'+g'$
$f \cdot g$	$f' \cdot g + f \cdot g'$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
$g \circ f$	$f' \times g' \circ f$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
u^n	$nu'u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
e^u	$u'e^u$
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$
$\sin(u)$	$u'\cos(u)$
$\cos(u)$	$-u'\sin(u)$

Fonction	Intervalle d'intégration	Primitive
$(x-a)^n, n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{n+1}(x-a)^{n+1}$
$\frac{1}{x-a}, a \in \mathbb{R}$	$]-\infty; a[$ OU $]a;+\infty[$	$\ln(\lvert x-a\rvert)$
$\frac{1}{(x-a)^n}, a \in \mathbb{R}, n \geq 2$	$]-\infty; a[$ OU $]a;+\infty[$	$-\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}$
$\cos(ax), a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{a}\sin(ax)$
$\sin(ax), a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	$\mathbb{R}$	$-\frac{1}{a}\cos(ax)$
$\tan(x)$	$]k\pi - \frac{\pi}{2}; k\pi + \frac{\pi}{2}[, k \in \mathbb{Z}$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert)$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}^{+,*}$	$x\ln(x) - x$
$e^{ax}, a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{a}e^{ax}$
$(x-a)^\alpha, a \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$	$]a;+\infty[$	$\frac{1}{\alpha+1}(x-a)^{\alpha+1}$
$a^x, a > 0$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\ln(a)}a^x$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\mathbb{R}$	$\arctan(x)$
$\sqrt{x-a}, a \in \mathbb{R}$	$]a;+\infty[$	$\frac{2}{3}(x-a)^{3/2}$
$\frac{1}{\sqrt{x-a}}, a \in \mathbb{R}$	$]a;+\infty[$	$2\sqrt{x-a}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1;1[$	$\arcsin(x)$

Quelques formules de trigonométrie vraiment utiles. a, b et x sont des réels (quelconques) :

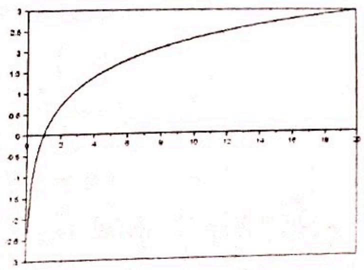
$$\cos^2(x)+\sin^2(x)=1, \quad \cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b), \quad \sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b),$$

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x)-1 = 1-2\sin^2(x), \quad \cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2},$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x), \quad \sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}.$$

Fonctions usuelles : logarithme et exponentielle, fonction puissance, fonctions circulaires et leurs réciproques

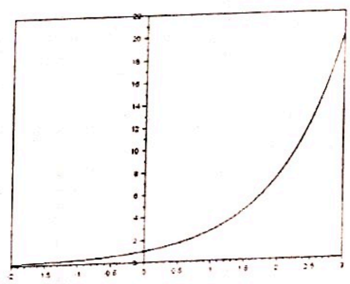
Définition 1 (Logarithme). On définit $\ln :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ comme **la** primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ qui s'annule en 1.



Propriété 1.

1. $\ln$ est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
2. $\forall x, y \in]0,+\infty[, \ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$.
3. $\forall x > 0, \ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$.
4. $\forall x, y \in]0,+\infty[, \ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$.
5. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0, \ln(x^n) = n\ln(x)$.
6. $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$

Définition 2 (Exponentielle). On définit $exp : \mathbb{R} \to]0,+\infty[$ comme **la** solution de l'équation différentielle $y' = y$ de condition initiale $y(0) = 1$.
On note $\exp(x) = e^x$.



Propriété 2.

1. exp est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, e^{x+y} = e^x \cdot e^y$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} = 1/e^x$.
4. $\forall x, y \in \mathbb{R}, e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$.
5. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, e^{nx} = (e^x)^n$.
6. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Propriété 3. On a $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x$ et $\forall x > 0, e^{\ln(x)} = x$.

Définition 3 (Fonction puissance). Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit la *fonction puissance* sur $]0,+\infty[$ par $p_a(x) := e^{a\ln(x)}$. On note $x^a := e^{a\ln(x)}$.

Exemples :

$$\ln(x^2) = 2\ln(x), \quad e^{2x+y} = e^{2x} \cdot e^y, \quad 2^x = e^{x\ln(2)}, \quad \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\ln(x)}, \quad \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}\ln(x)}.$$

Croissances comparées : Pour tous $\alpha > 0, \beta > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} x^\beta |\ln x|^\alpha = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} |x|^\beta e^{\alpha x} = 0$$

Autrement dit, l'exponentielle impose toujours sa limite en $\pm\infty$ aux fonctions puissances, et celles-ci imposent toujours leur limites en 0^+ ou $+\infty$ au logarithme.

Fonctions circulaires réciproques

On suppose connues les fonctions *sinus* et *cosinus*. On rappelle que la fonction *tangente* est définie sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ par $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Valeurs spéciales des fonctions trigonométriques

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Formules de trigonométrie

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \qquad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \qquad \sin(x + 2\pi) = \sin(x) \qquad \tan(x + \pi) = \tan(x)$$

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) \qquad \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

Définition 4 (Arcsinus). Sinus est une bijection de $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1; 1]$. On appelle *arcsinus* sa réciproque.

$$\forall x \in [-1; 1], \forall \theta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}], \quad x = \sin(\theta) \Leftrightarrow \arcsin(x) = \theta.$$

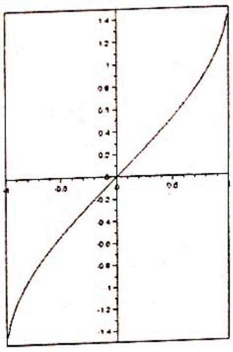
Définition 5 (Arccosinus). Cosinus est une bijection de $[0; \pi]$ sur $[-1; 1]$. On appelle *arccosinus* sa réciproque.

$$\forall x \in [-1; 1], \forall \theta \in [0; \pi], \quad x = \cos(\theta) \Leftrightarrow \arccos(x) = \theta.$$

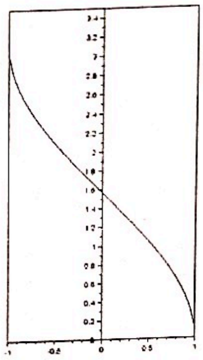
Définition 6 (Arctangente). Tangente est une bijection de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$. On appelle *arctangente* sa réciproque.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \theta \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[, \quad x = \tan(\theta) \Leftrightarrow \arctan(x) = \theta.$$

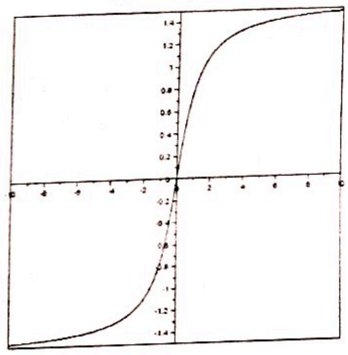
Arcsinus



Arccosinus



Arctangente



Propriété 4.

1. $\forall x \in [-1; 1], \sin(\arcsin(x)) = x$.
2. $\forall x \in [-1; 1], \cos(\arccos(x)) = x$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(x)) = x$.

Ici x appartient au domaine de définition de la fonction réciproque.

Propriété 5.

1. $\forall \theta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}], \arcsin(\sin(\theta)) = \theta$.
2. $\forall \theta \in [0; \pi], \arccos(\cos(\theta)) = \theta$.
3. $\forall \theta \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[, \arctan(\tan(\theta)) = \theta$.

★ Attention, ici θ ne parcourt pas tout l'ensemble de définition des fonctions sinus, cosinus ou tangente !

Exemples :

1. $\arcsin(\sin(\frac{17\pi}{5})) = \arcsin(\sin(\frac{20\pi}{5} - \frac{3\pi}{5})) = \arcsin(\sin(-\frac{3\pi}{5})) = -\frac{3\pi}{5}$.
2. $\arccos(\cos(\frac{17\pi}{5})) = \arccos(\cos(\frac{20\pi}{5} - \frac{3\pi}{5})) = \arccos(\cos(-\frac{3\pi}{5})) = \arccos(\cos(\frac{3\pi}{5})) = \frac{3\pi}{5}$.
3. $\arctan(\tan(\frac{17\pi}{5})) = \arctan(\tan(-\frac{3\pi}{5})) = -\frac{3\pi}{5}$.

Dérivées : Les fonctions arcsinus et arccosinus sont (infiniment) dérivables sur $]-1; 1[$ et arctangente est (infiniment) dérivable sur $\mathbb{R}$. Leurs dérivées sont données par

Propriété 6.

1. $\forall x \in]-1; 1[, \boxed{\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$.
2. $\forall x \in]-1; 1[, \boxed{\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \boxed{\arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2}}$.