Corrigé Test 2 modèle 3 : (1)

<u>Exo1</u> : $f(x) = \begin{cases} ax+b , & x \geq 0 \\ \frac{1}{x+1} , & x < 0 \end{cases}$ $a, b \in \mathbb{R}$.

1) f continue sur $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ f continue pour $x > 0$ et $x < 0$ et $x = 0$

<u>ono</u> $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = f(0) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{1}{x+1} = 1$

$\boxed{b = 1}$

2) f dérivable sur $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ f dérivable pour $x > 0$ et $x < 0$ et $x = 0$

<u>ono</u> : $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{ax + \cancel{b} - 1}{x} = a = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{\frac{1}{x+1} - 1}{x} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{-\cancel{x}}{\cancel{x}(x+1)} = -1$

$\boxed{a = -1}$

et $f'(0) = a = -1$

<u>Exo2</u> : $\forall x > 0, \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$

Appliquons le T.A.F. pour $f(t) = \ln(1+t)$ sur $[0, x]$

$\left.\begin{array}{l} \ln(1+t) \text{ continue sur } [0,x] \\ \ln(1+t) \text{ dérivable sur }]0,x[\end{array}\right\} \xrightarrow{T.A.F.} \exists\, c \in]0, x[\,/\, \ln(1+x) - \ln 1 = \frac{x}{1+c}$

On a : $0 < c < x \Rightarrow 1 < 1+c < 1+x \Rightarrow \frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+c} < 1$

$\Rightarrow \frac{x}{1+x} < \underbrace{\frac{x}{1+c}} < x$

$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$

Corrigé Test2 modèle 3 (2).

Exo1:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{si } x \leq 1 \\ 1/x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1) $D_f = \mathbb{R}$.

Si $x<1$, $f(x) = \frac{3-x^2}{2}$ continue sur $x<1$ car c'est un polynôme.

Si $x>1$, $f(x) = 1/x$ " " $x>1$.

Si $x = 1$: $f(1) = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} 1/x = 1 = f(1) \\ \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{3-x^2}{2} = 1 = f(1) \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ continue en } 1 \text{ par suite continue sur } \mathbb{R}.$$

Dérivabilité sur $\mathbb{R}$:

si $x<1$ f dérivable sur $x<1$ car c'est un polynôme.

si $x>1$ f dérivable sur $x>1$.

si $x = 1$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{1/x - 1}{x-1} = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{1-x}{x(x-1)} = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{-1}{x} = -1 = f'_d(1)$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{\frac{3-x^2}{2} - 1}{x-1} = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{1-x^2}{2(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{-(1+x)}{2} = -1 = f'_g(1)$$

$f'_d(1) = f'_g(1) \Rightarrow f$ dérivable en 1 par suite sur $\mathbb{R}$.

2) $\left.\begin{array}{l} f \text{ continue sur } \mathbb{R} \text{ en particulier sur } [0,2] \\ f \text{ dérivable " " " }]0,2[\end{array}\right\} \overset{T.A.F.}{\Longrightarrow}$

$\exists\, c \in]0,2[\,/\, f(2) - f(0) = (2-0) f'(c)$.

$c \in]0,2[=]0,1] \cup]1,2[$.

$c \in]0,1]$ ou $c \in]1,2[$.

Si $c \in]0,1]$ $f(x) = \frac{3-x^2}{2} \Rightarrow f'(x) = -x$.

$f(2) - f(0) = 2 f'(c)$

$1/2 - 3/2 = 2(-c) \Leftrightarrow \boxed{c = \frac{1}{2}}$

Si $c \in]1,2[$, $f(x) = 1/x \Rightarrow f'(x) = -1/x^2$

$f(2) - f(0) = 2\left(\frac{-1}{c^2}\right)$

$-1 = \frac{-2}{c^2} \Leftrightarrow c^2 = 2 \Leftrightarrow c = \sqrt{2}$

$\vee$

$c = -\sqrt{2}$ refusé

car $c \in]1,2[$