Université des Sciences et de la Technologie d'Oran. 2023-2024
Faculté des Mathématiques − Informatique − LMD − Informatique - 1ère Année.
Analyse1

Fiche de TD1
Corps des nombres réels

Exercice 1:
I. 1. $|x| = \max(x, -x)$,2. $|x - y| \leq |x| + |y|$, 3. $||x| - |y|| \leq |x + y|$,
4. $\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$, 5. $\min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$,
6. $\sqrt{x + y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}_+$.
II. Soit $[x]$ la partie entière de x, montrer que :
1. $\forall x \in \mathbb{R}, x - 1 < [x] \leq x$.
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \Rightarrow [x] \leq [y]$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{Z}, [x + a] = [x] + a$
III. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ et $0,336433643364... \in \mathbb{Q}$.
Exercice 2 :
On considère l'ensemble $E \subseteq \mathbb{R}$ muni de l'ordre usuel et A une partie de E, déterminer pour chacun des ensembles suivants: l'ensemble des majorants $Maj(A)$, l'ensemble des minorants $Min(A)$, la borne supérieure $\sup A$, la borne inférieure $\inf A$, le plus petit élément $\min A$ et le plus grand élément $\max A$.
$A = [-2, 2], [-2, 2[,]-2, 2],]-2, 2[. E = \mathbb{R}$.
$A = \{\frac{1}{x-1}, x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\ \}, E = \mathbb{R}$.
$A = \{x \in \mathbb{Q}, x^2 \leq 2\}, E = \mathbb{Q}$.
Exercice 3:
En utilisant la caractérisation de la borne supérieure et la borne inférieure montrer que :
1. $\sup A = 0$, $\inf A = -1$ pour $A = \left\{\frac{1}{n^2} - 1 \ , \ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.
2. $\sup B = 2$, $\inf B = 0$ pour $B = \left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \ , \ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Déterminer le maximum et le minimum de chacun de ces ensembles s'ils existent.
Exercice 4 : Soit A une partie de $\mathbb{R}$ telle que: $A = \left\{\frac{2n}{3n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$
1. Trouver a et b tels que ; $\frac{2n}{3n+1} = a + \frac{b}{3n+1}$.
2. Montrer que A est bornée.
3. Montrer que $\sup A = \frac{2}{3}$ et $\inf A = 0$ et déterminer $\max A$ et $\min A$ s'ils existent.

Exercice 5 :

On note par $P_B(\mathbb{R})$ l'ensemble des parties bornées de $\mathbb{R}$, montrer que $\forall A, B \in P_B(\mathbb{R})$:
1. $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$, $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$.
2. $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$; $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$,où $A + B = \{x + y \ / \ x \in A \text{ et } y \in B\}$.

Application:
1. Soient $A = \{1\}, B = \left\{\frac{-2}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$.
a) Déterminer $\sup A, \inf A, \sup B$ et $\inf B$.
b) En déduire $\sup C, \inf C$ telle que $C = \left\{\frac{n-1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$.
2. Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in A$. Montrer que si $\sup A > \alpha$ alors

$$\sup A = \sup(A - \{\alpha\}).$$