Cours d'Analyse 1

Damerdji Bouharis A.

Université des Sciences et de la Technologie Mohamed Boudiaf
Faculté des Mathématiques et Informatique.

Table des matières

1 **5**

2 **7**

3 **9**

4 **11**

5 Fonctions dérivables (suite) **13**
5.1 Théorèmes sur les fonctions dérivables 13
5.1.1 Théorème de Fermat 13
5.1.2 Théorème de Rolle 14
5.1.3 Théorème des accroissements finis 14
5.1.4 Variations d'une fonction 16
5.1.5 Formule de Cauchy- Accroissements finis généralisés 16
5.2 Formule de Taylor 17
5.2.1 Formule de Taylor avec reste de Lagrange 17
5.2.2 Formule de Taylor avec reste de Young 19
5.2.3 Formule de Taylor-Mac laurin-Young 19
5.3 Fonctions convexes 19
5.3.1 Paramétrage d'un segment 20
5.3.2 Point d'inflexion 20
5.4 Etude des branches infinies 21

Chapitre 5

Fonctions dérivables (suite)

5.1 Théorèmes sur les fonctions dérivables

5.1.1 Théorème de Fermat

Définition 5.1.1 *Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$.*
- On dit que f admet un maximum local au point x_0 si :

$$\exists \alpha > 0; \forall x \in I : |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$$

- On dit que f admet un minimum local au point x_0 si :

$$\exists \alpha > 0; \forall x \in I : |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x_0) \leq f(x)$$

- On dit que f admet un extrêmum au point x_0 si f admet en x_0 un maximum local ou bien un minimum local.

Théorème 5.1.2 (de Fermat) *Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle $]a, b[$, telle que f admet en x_0 un extrêmum, si $f'(x_0)$ existe (f est dérivable en x_0) alors $f'(x_0) = 0$.*

Preuve :
On suppose que f admet en x_0 est un maximum local, alors on a :
$\exists \alpha > 0; \forall x \in I : |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$.
Si $x < x_0$ alors $x - x_0 < 0$ or $f(x) \leq f(x_0)$ donc $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$.
Si $x > x_0$ alors $x - x_0 > 0$ or $f(x) \leq f(x_0)$ donc $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$.

Comme f est dérivable en x_0 alors la dérivée à gauche est égale à la dérivée à droite , par conséquent

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = 0.$$

□

5.1.2 Théorème de Rolle

Théorème 5.1.3 *Soit f une fonction définie de l'intervalle $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et telle que $f(a)=f(b)$; alors il existe un point c dans $]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.*

Preuve :
- Si f est constante sur $[a,b]$ alors c'est évident.
- Sinon ; comme f est continue sur $[a,b]$ alors elle est bornée sur $[a,b]$, d'où elle est majorée donc $\sup\limits_{x\in]a,b[} f(x)=M$ existe, on a alors $\forall x\in]a,b[\ : f(x)\leq M$, on peut supposer que M est différente de $f(a)=f(b)$ et donc il existe c dans $]a,b[$ tel que $M=f(c)$, par conséquent

$$\forall x\in]a,b[: f(x)\leq f(c),$$

alors c est un maximum local de f ainsi d'après le théorème de Fermat

$$f'(c)=0.$$

□

Exemples 5.1.4 .

1. *Pour montrer que l'équation $4x^3-18x^2+22x-6=0$ admet une solution dans l'intervalle $]1,3[$; il suffit d'appliquer le Théorème de Rolle à la fonction $f(x)=x^4-6x^3+11x^2-6x$ sur l'intervalle $]1,3[$; en effet f est continue sur $[1,3]$, dérivable sur $]1,3[$ et on a $f(1)=f(3)=0$, alors il existe $\alpha\in]1,3[$ tel que $f'(\alpha)=0$.*
2. *Etant donnée la fonction f définie sur $\left[-\frac{2}{\pi},\frac{2}{\pi}\right]$ par :*

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & si\ x\neq 0\\ 0 & si\ x=0\end{cases}$$

On ne peut pas appliquer le Théorème de Rolle à f sur $\left[-\frac{2}{\pi},\frac{2}{\pi}\right]$.
En effet ; f n'est pas dérivable sur $\left]-\frac{2}{\pi},\frac{2}{\pi}\right[$ car elle n'est pas dérivable en 0 car

$$\lim_{x\to\ 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to\ 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$$

n'existe pas.

5.1.3 Théorème des accroissements finis

Théorème 5.1.5 *Soit f une fonction définie de l'intervalle $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$; alors il existe un point c dans $]a,b[$ tel que :*

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$

Preuve :
On pose $h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

h est continue sur $[a,b]$ car f l'est et dérivable sur $]a,b[$ car f l'est et on a $h(a) = h(b)$, donc d'après le Théorème de Rolle on a :

$$\exists c \in \,]a,b[\,; h'(c) = 0,$$

or $h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ainsi $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$. □

Remarque : Soit $h > 0$, si on pose $a = x$, $b = x + h$, alors f est continue sur $[x, x+h]$ et dérivable sur $]x, x+h[$; et on a

$$f(x+h) - f(x) = h.f'(c)$$

où $c = x + \theta h$ tel que $0 < \theta < 1$.

En effet;

$$x < c < x + h \Leftrightarrow 0 < \frac{c-x}{h} < 1$$

alors en posant $\frac{c-x}{h} = \theta$; on a :

$$f(b) - f(a) = (b-a)\left[f'(a + \theta(b-a))\right]$$

Application :
Si on a $|f'(x)| \leq M$; $\forall x \in \,]a,b[$ alors

$$|f(b) - f(a)| \leq M(b-a).$$

Exemple 5.1.6 *Montrer que Pour tout $x > 0$: $\frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$*

On pose $f(x) = \ln x$; sur $[x, x+1]$

Pour tout $x > 0$; f est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$, donc d'après le théorème des accroissements finis ; $\exists c \in \,]x, x+1[$ tel que

$$\ln(x+1) - \ln x = \frac{1}{c} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{c}.$$

or

$$\begin{aligned} x < c < x+1 \quad &\Leftrightarrow \tfrac{1}{x+1} < \tfrac{1}{c} < \tfrac{1}{x} \\ &\Leftrightarrow \tfrac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \tfrac{1}{x} \\ &\Leftrightarrow \tfrac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \tfrac{1}{x}\right) < \tfrac{1}{x} \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x};\ \forall x > 0.$$

Corollaire 5.1.7 *Etant donnée f une fonction dérivable d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et x_1, x_2 deux points quelconques de I ; alors il existe un point c strictement compris entre x_1 et x_2 tel que*

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

.

5.1.4 Variations d'une fonction

Théorème 5.1.8 *Soit f une fonction définie de l'intervalle $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$; alors :*

1. *f est croissante sur $[a,b]$ si et seulement si $\forall x \in]a,b[: f'(x) \geq 0$.*
2. *f est décroissante sur $[a,b]$ si et seulement si $\forall x \in]a,b[: f'(x) \leq 0$.*
3. *f est constante sur $[a,b]$ si et seulement si $\forall x \in]a,b[: f'(x) = 0$.*

5.1.5 Formule de Cauchy- Accroissements finis généralisés

Théorème 5.1.9 *Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$; si $g'(x) \neq 0, \forall x \in]a,b[$ alors*

$$\exists c \in]a,b[\ / \ \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Preuve :
On pose

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x),$$

h est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ et on remarque que

$$h(a) = h(b) = \frac{f(a)g(b) - f(b)g(a)}{g(b)-g(a)}$$

alors d'après le Théorème de Rolle; on a $\exists c \in]a,b[\ / \ h'(c) = 0$, d'où

$$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

□

On a comme conséquence directe de ce théorème le corollaire suivant :

La règle de l'Hôpital.

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$; si $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ admet une limite l au point $x_0 \in]a,b[$, telle que $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$; alors

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = l.$$

En effet, il suffit de prendre dans le théorème des accroissements finis généralisés $a = x_0$ et $b = x$ d'où $c \in]x_0, x[$ et quand x tend vers x_0 alors c tend vers x_0 aussi et on a $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ d'où $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = l$.

Cette méthode est utilisée pour enlever les indéterminations du type $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

Exemples 5.1.10 *1.* $l_1 = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(kx)}{\sin(lx)} = \frac{k}{l}$, *car* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{k\cos(kx)}{l\cos(lx)} = \frac{k}{l}$.

2. $l_2 = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, *car* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}$.

5.2 Formule de Taylor

Une fonction $n-$fois dérivable peut être approximée dans un voisinage d'un point x_0 par un polynôme de degré n; on écrit

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

où $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ est un polynôme de degré n en $(x-x_0)$ et $R_n(x)$ est l'erreur commise dans cette approximation dite reste d'ordre n qui peut avoir plusieurs évaluations entrainant plusieurs formes de la formule de Taylor.

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) &+ \frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + ... \\ &+ \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + R_n(x) \end{aligned}$$

5.2.1 Formule de Taylor avec reste de Lagrange

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$; une fonction ; telle que $f \in C^\infty([a,b])$, $f^{(n)}$est dérivable sur $]a,b[$ et soit $x_0 \in [a,b]$ alors :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

où c est un point compris strictement entre x et x_0.

Remarques :

1. Le terme $\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$ est appelé reste de Lagrange.
2. Si on pose $h = x - x_0$; alors

$$x_0 < c < x \Leftrightarrow x_0 < c < x_0 + h \Leftrightarrow 0 < \frac{c - x_0}{h} < 1.$$

alors en posant $\theta = \frac{c-x_0}{h}$, on a $c = \theta h + x_0$ tel que $0 < \theta < 1$ et on obtient par conséquent que pour tout $h \in \mathbb{R}$, tel que $x_0 + h \in [a,b]$, $\exists \theta \in]0,1[$:

$$\begin{aligned} f(x_0+h) = f(x_0) &+ \frac{h}{1!}f'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + ... \\ ... &+ \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\theta h) \end{aligned}$$

Formule de Taylor-Mac laurin

Si $x_0 = 0$ alors $h = x$ et $c = \theta x$, d'où on obtient la formule de Taylor-Mac laurin avec reste de Lagrange :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + ... + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)\,; 0 < \theta < 1.$$

Exemples 5.2.1 *1. On donne La formule de Taylor-Mac laurin avec reste de Lagrange de la fonction $f(x) = \sin x$ à l'ordre $n = 3$:*

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \sin(\theta x)\,; 0 < \theta < 1.$$

2. Pour l'ordre n on a besoin de la dérivée n-ième de la fonction $\sin x$; on a $\forall n \geq 1$: $(\sin)^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$, d'où

$$(\sin)^{(n)}(0) = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^k, & si\ n = 2k+1 \\ 0 & ,\ si\ n = 2k \end{cases}$$

et le reste s'écrit : $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} (\sin)^{(n+1)}(\theta x)$, or le dernier terme non nul de la somme est de degré impair $n = 2k+1$; car toutes les dérivées d'ordre pair s'annulent ; d'où

$$R_n(x) = \frac{x^{2(k+1)}}{(2k+2)!} (\sin)^{(2k+2)}(\theta x)$$

et

$$\begin{aligned} (\sin)^{(2k+2)}(\theta x) &= \sin\left(\theta x + 2(k+1)\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \sin(\theta x + (k+1)\pi) \\ &= (-1)^{k+1} \sin(\theta x), \end{aligned}$$

car $\sin(\alpha + k\pi) = (-1)^k \sin \alpha; \forall k \in \mathbb{Z}$
d'où

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + ... + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} \sin(\theta x)\,;$$

avec $0 < \theta < 1$, est le développement de Taylor-Mac laurin avec reste de Lagrange de la fonction $\sin x$ à l'ordre $n = 2k+1$.

3. Pour $f(x) = \cos x$; de la même façon on a

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \sin(\theta x)\,;$$

avec $0 < \theta < 1$.

4. Pour $f(x) = e^x$; de la même façon on a

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}; \text{ avec } 0 < \theta < 1.$$

5.2.2 Formule de Taylor avec reste de Young

Dans cette formule nous allons nous passer de la dérivabilité de $f^{(n)}$, on supposera seulement son existence,

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$; une fonction et soit $x_0 \in [a, b]$ tel que $f^{(n)}(x_0)$ existe alors :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + o(x - x_0)^n$$

le reste $R_n(x) = o(x - x_0)^n$ est tel que $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$.

Il existe une deuxième écriture de cette formule en posant $\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = \varepsilon(x)$, d'où $R_n(x) = (x - x_0)^n \varepsilon(x)$ et par suite on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + (x - x_0)^n \varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

5.2.3 Formule de Taylor-Mac laurin-Young

Si $x_0 = 0$ alors on a

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + ... + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + o(x^n)$$

ou bien

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + ... + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + x^n \varepsilon(x),$$

avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Exemple 5.2.2 *Le développement de Taylor-Mac laurin-Young de la fonction :* $f(x) = \tan x$ *à l'ordre* $n = 3$ *est donné par*

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x).$$

On déduit la limite suivante

$$l = \lim_{x \to x_0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x \to x_0} \frac{x + \frac{x^3}{3} - x}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

5.3 Fonctions convexes

Définition 5.3.1 *Une fonction f définie sur un intervalle I est dite convexe sur I; si sa courbe (Γ) est en dessous de toutes ses cordes et au dessus de toutes ses tangentes.*

f est dite concave sur I si la fonction $(-f)$ est convexe sur I.

Exemple 5.3.2 *Soient $f(x) = x^2$; et $g(x) = \frac{1}{x}$;*

f est convexe sur tout $\mathbb{R}$, g est convexe sur $]0, +\infty[$ et concave sur $]-\infty, 0[$.

5.3.1 Paramétrage d'un segment

Définition 5.3.3 *Soit $a, b \in \mathbb{R}$, tels que $a < b$; soit $x \in \mathbb{R}$ alors :*
$x \in [a, b] \Leftrightarrow \exists t \in [0, 1] \quad / \ x = (1 - t)\, a + tb$.*(il suffit de poser* $t = \frac{x-a}{b-a}$*).*

Remarque : Si $t = 0$ alors $x = a$ et si $t = 1$ alors $x = b$ et si $t = \frac{1}{2}$ alors $x = \frac{a+b}{2}$.

Définition 5.3.4 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I.*
- On dit que f est convexe sur I si :

$$\forall x_1, x_2 \in I, \forall t \in [0, 1] : f\,(tx_1 + (1 - t)\, x_2) \leq tf\,(x_1) + (1 - t)\, f\,(x_2)$$

- On dit que f est concave sur I si :

$$\forall x_1, x_2 \in I, \forall t \in [0, 1] : f\,(tx_1 + (1 - t)\, x_2) \geq tf\,(x_1) + (1 - t)\, f\,(x_2)$$

Exemple 5.3.5 *La fonction $f\,(x) = |x|$ est convexe sur $\mathbb{R}$; en effet :*
pour $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, t \in [0, 1]$ on a

$$|tx_1 + (1 - t)\, x_2| \leq t\,|x_1| + (1 - t)\,|x_2|\,.$$

Proposition 5.3.6 *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, f est convexe sur I si et seulement si sa dérivée f' est croissante sur I.*

Corollaire 5.3.7 *Une fonction f deux fois dérivable sur I est convexe sur I si sa deuxième dérivée f'' est positive sur I.*

5.3.2 Point d'inflexion

Définition 5.3.8 *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, soit (Γ_f) le graphe de f.*

On dit que x_0 est un point d'inflexion de f si (Γ_f) change de concavité au point $M_0\,(x_0, f\,(x_0))$, i.e la courbe traverse sa tangente au point M_0.

En conclusion on a le théorème suivant :

Théorème 5.3.9 *Soit f une fonction définie sur $[a, b]$ et dérivable en $x_0 \in\,]a, b[$; alors x_0 est un point d'inflexion de f si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

1. *f change de concavité en x_0.*
2. *f est dérivable sur $[a, b]$ et f' admet un extrêmum en x_0.*
3. *f est 2-fois dérivable sur $]a, b[$ et f'' s'annule en x_0 en changeant de signe.*

Preuve :
On va prouver la condition 2. car 1. et 3. sont évidentes.

Supposons que f' admet un maximum en x_0;

$$\exists \alpha > 0, \forall x \in\,]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\, \Rightarrow f'\,(x) \leq f'\,(x_0)\,;$$

alors :

- Si $x \geq x_0$; alors d'après le théorème des accroissements finis sur $[x_0, x]$ on a :

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$$

avec $x_0 - \alpha < x_0 < c < x < x_0 + \alpha$, d'où $f'(c) \leq f'(x_0)$ donc

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

par suite sa courbe (Γ_f) est en dessous de sa tangente en x_0.

- Si $x \leq x_0$; alors d'après le théorème des accroissements finis sur $[x, x_0]$ on a :

$$f(x_0) - f(x) = f'(c)(x_0 - x)$$

avec $x_0 - \alpha < x < c < x_0 < x_0 + \alpha$, d'où $f'(c) \leq f'(x_0)$ donc

$$f(x_0) - f'(x_0)(x_0 - x) \leq f(x)$$

par suite sa courbe (Γ_f) est au dessus de sa tangente en x_0. □

Théorème 5.3.10 *Soit f une fonction $2-$fois dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$; si f admet un point d'inflexion au point $(x_0, f(x_0))$ alors f'' s'annule en x_0.*

Exemple 5.3.11 *Toute fonction polynômiale de degré 3 admet un point d'inflexion. En effet ; soit $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tel que $a > 0$.*

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ *et* $f''(x) = 6ax + 2b$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b}{3a}$.

x	$-\infty$		$\frac{-b}{3a}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f'	$+\infty$	$\searrow$	$f'(\frac{-b}{3a})$	$\nearrow$	$+\infty$
Convexité de f		*concave*		*convexe*	

5.4 Etude des branches infinies

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et (Γ_f) son graphe, soient a et l deux nombres réels, tels que a est l'une des extrêmités de I.

Définition 5.4.1 .

On dit que f possède une branche infinie en a si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ tel que l'un au moins des deux éléments de a ou l est égal à $+\infty$ ou $-\infty$.

1) *Si $a \in \mathbb{R}$ et $l = \pm\infty$, alors (Γ_f) admet une asymptote verticale d'équation $x = a$.*

2) *Si $a = \pm\infty$ et $l \in \mathbb{R}$, alors (Γ_f) admet une asymptote horizontale d'équation $y = l$*

3) *Si $a = \pm\infty$ et $l = \pm\infty$, alors on doit calculer $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha$:*

- **i)** *Si $\alpha = 0$ alors (Γ_f) admet une branche parabolique dans la direction de l'axe $(x'x)$.*
- **ii)** *Si $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - \alpha x] = \beta \in \mathbb{R}$ alors (Γ_f) admet une asymptote oblique (Δ) d'équation $y = \alpha x + \beta$.*
- **iii)** *Si $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - \alpha x] = \pm\infty$ alors (Γ_f) admet une branche parabolique dans la direction de la droite d'équation $y = \alpha x$.*
- **iv)** *Si $\alpha = \pm\infty$ alors (Γ_f) admet une branche parabolique dans la direction de l'axe $(y'y)$.*

Remarque : Pour étudier la position du graphe (Γ_f) de la fonction f par rapport à l'asymptote oblique (Δ) ; il suffit d'étudier le signe de la différence $f(x) - y$:
- Si $f(x) - y \leq 0$ alors (Γ_f) est en dessous de (Δ).
- Si $f(x) - y \geq 0$ alors (Γ_f) est au dessus de (Δ).

Exemples 5.4.2
1. *$f(x) = \frac{5}{x-1}$; (Γ_f) admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$.*
2. *$f(x) = e^{1-x^2} + 5$; (Γ_f) admet une asymptote verticale d'équation $y = 5$.*
3. *$f(x) = x + \frac{1}{x}$; (Γ_f) admet une asymptote oblique d'équation $y = x$.*
4. *$f(x) = \frac{1}{2}x + \sqrt{x} + 1$; (Γ_f) admet une branche parabolique dans la direction de la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x$.*
5. *$f(x) = \sqrt{x}$; (Γ_f) admet une branche parabolique dans la direction de l'axe $(x'x)$.*
6. *$f(x) = x^3$; (Γ_f) admet une branche parabolique dans la direction de l'axe $(y'y)$.*

Exercice 5.4.3
1. *Etudier les variations de la fonction définie par $f(x) = \ln \frac{e^{2x}+5}{e^x-2}$.*
2. *Montrer que le graphe (Γ_f) de f admet une asymptote oblique (Δ) au voisinage de $+\infty$, en précisant son équation.*
3. *Etudier la position de (Γ_f) par rapport à (Δ).*

Solution.

1. On a : $D_f =]\ln 2, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{e^x (e^x - 5)(e^x + 1)}{(e^{2x} + 5)(e^x - 2)}, \forall x \in]\ln 2, +\infty[.$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln 5,$
$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]\ln 2, \ln 5\right[,$
$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]\ln 5, +\infty\right[.$

x	$ln2$		$ln5$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$ln10$	$\nearrow$	$-\infty$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\left[\ln \frac{e^{2x}\left(1+5e^{-2x}\right)}{e^{x}(1+2e^{-x})}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\left[x + \ln \frac{\left(1+5e^{-2x}\right)}{(1+2e^{-x})}\right] = 1,$
$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln \frac{\left(1+5e^{-2x}\right)}{(1+2e^{-x})} = 0.$
D'où (Γ_f) admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique (Δ) d'équation $y = x$.
3. Comme $f(x) - y = \ln \frac{\left(1+5e^{-2x}\right)}{(1+2e^{-x})} > 0\,;\forall x > \ln 2$ alors (Γ_f) est au dessus de (Δ).

$\triangle$