Cours et exercices d'Analyse

Damerdji Bouharis A.
Université des Sciences et de la Technologie Mohamed Boudiaf
Faculté des Mathématiques et Informatique.

Table des matières

Chapitre 1

Intégrales indéfinies

1.1 Intégrales indéfinies

Définition 1.1.1 .

Soit f une fonction d'un intervalle fermé $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ et soit F une fonction dérivable sur $[a,b]$. F est dite primitive de f sur $[a,b]$ si :

$$\forall x \in [a,b]\,;\;\; F'(x) = f(x)\,.$$

Proposition 1.1.2 .

Si F et G sont deux primitives de f sur $[a,b]$; alors

$$F - G = c\ ; c \in \mathbb{R}.$$

Preuve :

En effet ; car $(F-G)'(x) = F'(x) - G'(x) = 0; \forall x \in [a,b]$ alors $F - G$ est une fonction constante sur $[a,b]$. □

Exemple 1.1.3 .

Les fonctions F et G définies sur $[1,2]$ par $F(x) = \ln x$ et $G(x) = \ln x + \alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ sont deux primitives de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $[1,2]$.

Définition 1.1.4 .

L'ensemble de toutes les primitives de la fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est appelé intégrale indéfinie de f; noté $\int f(x)\,dx$, alors si F est une primitive de f sur $[a,b]$; on a :

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c\ ; c \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1.1.5 .

$\forall x \in [1,2] : \int \frac{1}{x} dx = \ln x + c\ ; c \in \mathbb{R}.$

Remarque : Une fonction f admettant une primitive sur $[a,b]$; n'est pas forcément continue sur $[a,b]$.

Exemple 1.1.6 .

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}; & si\ x \in \left]0,1\right] \\ 0 & ;\ si\ x = 0 \end{cases}$$

f admet comme primitive sur $[0,1]$ la fonction F définie par :

$$F(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}; & si\ x \in \left]0,1\right] \\ 0 & ;\ si\ x = 0 \end{cases} ;\ car\ F'(x) = f(x), \forall x \in [0,1].$$

or f est discontinue en $x = 0$ donc discontinue sur $[0,1]$.

Propriétés 1 .

Si f et g sont deux fonctions admettant des primitives sur $[a,b]$; alors $f+g$ et αf où $\alpha \in \mathbb{R}$ admettent des primitives aussi et on a :

1. $\int (f+g)(x)\,dx = \int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$
2. $\int (\alpha f)(x)\,dx = \int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx.$
3. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x).$
4. $\int f'(x)\,dx = f(x) + c\ ;\ c \in \mathbb{R}.$

1.1.1 Primitives usuelles

Soit $c \in \mathbb{R}$,

Fonction f	**Primitive de** f **:** $\int f(x)\,dx$
$\alpha\ ;\ \ \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x + c$
$x^{\alpha}\ ;\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
$\frac{1}{x}\ ;\ x \in \mathbb{R}^*$	$\ln\|x\| + c$
e^x	$e^x + c$
$\frac{g'(x)}{g(x)}\ ;\ g(x) \neq 0$	$\ln\|g(x)\| + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
chx	$shx + c$
shx	$chx + c$
$\frac{1}{\cos^2 x}; \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\tan x + c$
$\frac{1}{\sin^2 x}; \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$	-cotan $x + c$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + c$
$\frac{1}{1-x^2}\ ; \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$	$\frac{1}{2} \ln\left\|\frac{1+x}{1-x}\right\| + c$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ ; \forall x \in \left]-1, 1\right[$	$\arcsin x + c$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\arg shx + c$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\ ;\ \forall x \in \left]1, +\infty\right[$	$\arg chx + c$

1.2 Méthodes de calcul des primitives

1.2.1 Intégration par parties - IPP -

Théorème 1.2.1 *Soient* u *et* v *deux fonctions dérivables de classe* C^1 *sur* $[a, b]$; *alors :*

$$\int u'(x)\, v(x)\, dx = u(x)\, v(x) - \int u(x)\, v'(x)\, dx$$

Preuve :
En effet car

$$u(x)v(x) = \int [u(x)v(x)]' dx = \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx$$

□

Remarque :

1. Dans certains exemples; il faut appliquer cette méthode plusieurs fois pour avoir le résultat.
2. On peut écrire la formule de l'intégration par parties en utilisant les différentielles de fonctions comme suit :

$$\int udv = uv - \int vdu$$

telle que $df = f'(x)dx$.

Exemples 1.2.2 .

1. $I_1 = \int xe^x dx$

IPP : $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$

d'où $I_1 = xe^x - \int e^x dx = e^x(x-1) + c\ ,\ c \in \mathbb{R}.$

2. $I_2 = \int \arctan x dx$

IPP : $\begin{cases} u = \arctan x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{1+x^2}dx \\ v = x \end{cases}$

d'où $I_2 = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c\ ,\ c \in \mathbb{R}.$

3. $I_3 = \int (\ln x)^2 dx$

IPP 1 : $\begin{cases} u = (\ln x)^2 \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2\frac{\ln x}{x}dx \\ v = x \end{cases}$

d'où $I_3 = x(\ln x)^2 - 2\int \ln x dx = x(\ln x)^2 - 2J$

IPP 2 : $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = x \end{cases}$

d'où $J = x\ln x - \int dx = x(\ln x - 1) + c\ ,\ c \in \mathbb{R}.$

donc $I_3 = x(\ln x)^2 - 2x(\ln x - 1) + c',\quad c' \in \mathbb{R}.$

4. $I_4 = \int e^x \cos x dx$

IPP 1 : $\begin{cases} u = e^x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = \sin x \end{cases}$

d'où $I_4 = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - J$

IPP 2 : $\begin{cases} u = e^x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

d'où $J = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = -e^x \cos x + I_4$

donc $I_4 = e^x \sin x + e^x \cos x - I_4 \Leftrightarrow I_4 = \frac{e^x}{2}[\sin x + \cos x] + c\ ;\ c \in \mathbb{R}.$

1.2.2 Changement de variables

Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ une fonction dérivable de classe C^1 sur $[a,b]$; telle que $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ alors on a

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

Il suffit de faire le changement de variables

$$x = \varphi(t) \;\Leftrightarrow\; dx = \varphi'(t)\,dt.$$

Exemples 1.2.3 *1.* $I_1 = \int \cos x . e^{\sin x} dx$

C.V : $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$, *d'où*

$I_1 = \int e^t dt = e^t + c;\; c \in \mathbb{R}$, *alors* $I_1 = e^{\sin x} + c;\; c \in \mathbb{R}$.

2. $I_2 = \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx$

C.V : $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$, *d'où*

$I_2 = \int \frac{dt}{t^2+1} = arctgt + c;\; c \in \mathbb{R}$, *alors* $I_2 = arctg(e^x) + c;\; c \in \mathbb{R}$.

3. $I_3 = \int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

C.V : $t = \arcsin x \Rightarrow dt = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$, *d'où*

$I_3 = \int t^3 dt = \frac{1}{4} t^4 + c;\; c \in \mathbb{R}$, *alors* $I_3 = \frac{1}{4}(\arcsin x)^4 + c;\; c \in \mathbb{R}$.

1.2.3 Intégration de certaines expressions contenant le trinôme $ax^2 + bx + c$

Calcul de $I_1 = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$

Etape 1 : On transforme le dénominateur en le mettant sous la forme canonique i.e. la somme ou la différence de deux carrés

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right], \tag{1.1}$$

On pose $\frac{4ac-b^2}{4a^2} = \pm M^2$ et on remarque que le signe qu'on aura dépendra du signe du discriminant du trinôme $\Delta = b^2 - 4ac$.

En effet ;

$$ax^2 + bx + c = \begin{cases} a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - M^2\right] & \text{si } \Delta > 0 \\ \\ a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + M^2\right] & \text{si } \Delta < 0 \end{cases}$$

et la primitive I_1 prendra la forme suivante :

$$I_1 = \int \frac{dx}{a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \pm M^2\right]} = \frac{1}{aM^2} \int \frac{dx}{\left[\left(\frac{2ax+b}{2aM}\right)^2 \pm 1\right]}$$

Etape 2 : On fait le changement de variables suivant :

$$\text{C.V} : t = \frac{2ax+b}{2aM} \Rightarrow dt = \frac{dx}{M} \Leftrightarrow dx = M dt$$

ensuite on remplace dans I_1 :

$$I_1 = \frac{1}{aM} \int \frac{dt}{t^2 \pm 1}$$

d'où :

1^er Cas : Si $I_1 = \frac{1}{aM} \int \frac{dt}{t^2+1}$ alors

$$I_1 = \frac{1}{aM} \arctan t + c;\ \ c \in \mathbb{R}$$

2^ème Cas : Si $I_1 = \frac{1}{aM} \int \frac{dt}{t^2-1}$ alors

$$I_1 = \frac{1}{2aM} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + c;\ \ c \in \mathbb{R}$$

Exemple 1.2.4 $I = \int \frac{dx}{x^2+2x+5}$

On décompose le trinôme $x^2 + 2x + 5$

$$x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 - 1 + 5 = (x+1)^2 + 4,$$

d'où

$$I = \int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + 1},$$

puis on fait le changement de variables

$$C.V : t = \frac{x+1}{2} \Rightarrow dt = \frac{1}{2} dx \Leftrightarrow dx = 2dt,$$

et on remplace dans I

$$I = \frac{1}{4} \int \frac{2dt}{t^2+1} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2} \arctan t + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

par conséquent

$$I = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Calcul de $I_2 = \int \frac{\alpha x + \beta}{ax^2+bx+c} dx$

Etape 1 : On dérive le dénominateur $(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b$.

Etape 2 : On écrit le numérateur en fonction de la dérivée du dénominateur :

$$\alpha x + \beta = \alpha \left(x + \frac{\beta}{\alpha} \right) = \frac{\alpha}{2a} \left(2ax + \frac{2a\beta}{\alpha} + b - b \right)$$

d'où

$$\alpha x+\beta=\frac{\alpha}{2a}\left[(2ax+b)+\frac{2a\beta}{\alpha}-b\right]$$

puis on remplace dans I_2

$$I_2=\frac{\alpha}{2a}\int\frac{(2ax+b)+\left(\frac{2a\beta}{\alpha}-b\right)}{ax^2+bx+c}dx$$

et là on récupère la somme de deux primitives simples

$$I_2=\frac{\alpha}{2a}\int\frac{(2ax+b)}{ax^2+bx+c}dx+\left(\beta-\frac{b\alpha}{2a}\right)\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

alors

$$I_2=\frac{\alpha}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right|+\left(\beta-\frac{b\alpha}{2a}\right)I_1$$

où I_1 est la primitive qu'on a calculée précédemment.

Exemple 1.2.5 $I=\int\frac{(3x-1)}{x^2-x+1}dx$

On dérive le dénominateur $(x^2-x+1)'=2x-1$

$$3x-1=3\left(x-\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{2}\left(2x-\frac{2}{3}-1+1\right)=\frac{3}{2}\left[(2x-1)+\frac{1}{3}\right]$$

puis on remplace dans I

$$I=\frac{3}{2}\int\frac{(2x-1)+\frac{1}{3}}{x^2-x+1}dx=\frac{3}{2}\int\frac{(2x-1)}{x^2-x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+1}$$

donc

$$I=\frac{3}{2}\ln\left(x^2-x+1\right)+\frac{1}{2}J$$

où

$$J=\int\frac{dx}{x^2-x+1}$$

et là on décompose le trinôme x^2-x+1

$$x^2-x+1=\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1\right]$$

$$x^2-x+1=\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]$$

puis on remplace dans J

$$J=\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}\int\frac{dx}{\left[\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]}$$

et on fait le changement de variables

$$C.V: t = \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow dt = \frac{2}{\sqrt{3}}dx \Leftrightarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{2}dt,$$

puis on remplace dans J

$$J = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan t + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

donc

$$J = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

par conséquent

$$I = \frac{3}{2} \ln\left(x^2 - x + 1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Calcul de $I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

On transforme le trinôme ax^2+bx+c en le mettant sous la forme canonique comme pour le modèle de la primitive I_1, puis on fait le même changement de variables ;

$$\text{C.V}: t = \frac{2ax+b}{2aM} \Rightarrow dt = \frac{dx}{M} \Leftrightarrow dx = Mdt$$

pour obtenir l'une des primitives suivantes

$$\begin{cases} I_3 = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm 1}}, & \text{si } a > 0 \\ I_3 = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

d'où :

Cas 1 : Si $I_3 = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$; alors

$$I_3 = \arg sht + c, \text{ où } c \in \mathbb{R}.$$

Cas 2 : Si $I_3 = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$; alors

$$I_3 = \arg cht + c, \text{ où } c \in \mathbb{R}.$$

Cas 3 : Si $I_3 = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$; alors

$$I_3 = \arcsin t + c, \text{ où } c \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1.2.6 *Calculer la primitive suivante* $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$

On a

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

d'où

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}}$$

$$C.V: t = \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \Rightarrow dt = \frac{2}{\sqrt{3}}dx \Leftrightarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{2}dt$$

alors

$$I = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \arg sht + c, \;\; c \in \mathbb{R}.$$

par conséquent

$$I = \arg sh\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c, \;\; c \in \mathbb{R}.$$

Calcul de $I_4 = \int \frac{\alpha x+\beta}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

Etape 1 : On dérive le trinôme $(ax^2+bx+c)' = 2ax+b$.

Etape 2 : On écrit le numérateur en fonction de cette dérivée comme pour le modèle de la primitive I_2,

$$\alpha x+\beta = \frac{\alpha}{2a}\left[(2ax+b) + \frac{2a\beta}{\alpha} - b\right]$$

puis on remplace dans I_4

$$I_4 = \frac{\alpha}{2a}\int \frac{(2ax+b) + \left(\frac{2a\beta}{\alpha} - b\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

et là on récupère la somme de deux primitives simples

$$I_4 = \frac{\alpha}{2a}\int \frac{(2ax+b)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx + \left(\beta - \frac{b\alpha}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$
$$I_4 = \frac{\alpha}{2a}\int \frac{(2ax+b)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx + \left(\beta - \frac{b\alpha}{2a}\right) I_3$$

pour la 1ère primitive ; il suffit de faire le changement de variables :

C.V : $t = ax^2+bx+c \Rightarrow dt = (2ax+b)\,dx$ alors

$$\int \frac{(2ax+b)}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \int \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \sqrt{t} + k, \;\; k \in \mathbb{R}.$$
$$\text{d'où } \int \frac{(2ax+b)}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \sqrt{ax^2+bx+c} + k, \;\; k \in \mathbb{R}.$$

donc

$$I_4 = \frac{\alpha}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \left(\beta - \frac{b\alpha}{2a}\right) I_3$$

où I_3 est la primitive qu'on a calculée précédemment.

Exemple 1.2.7 *Calculer la primitive suivante* $I = \int \frac{5x+3}{\sqrt{10+4x+x^2}}dx$

On a

$$\left(10+4x+x^2\right)' = 2x+4$$

$$5x+3=5\left(x+\frac{3}{5}\right)=\frac{5}{2}\left(2x+\frac{6}{5}+4-4\right)$$
$$5x+3=\frac{5}{2}\left((2x+4)-\frac{14}{5}\right)$$

d'où

$$I=\frac{5}{2}\int\frac{(2x+4)-\frac{14}{5}}{\sqrt{10+4x+x^2}}dx=\frac{5}{2}\int\frac{(2x+4)}{\sqrt{10+4x+x^2}}dx-7\int\frac{dx}{\sqrt{10+4x+x^2}}$$

pour la 1ère primitive on fait le changement de variables

$$C.V: t=10+4x+x^2 \Rightarrow dt=(2x+4)\,dx$$

alors

$$\int\frac{(2x+4)}{2\sqrt{10+4x+x^2}}dx=\int\frac{dt}{2\sqrt{t}}=\sqrt{t}+c_1,\ \ c_1\in\mathbb{R}.$$
$$\int\frac{(2x+4)}{2\sqrt{10+4x+x^2}}dx=\sqrt{10+4x+x^2}+c_1,\ \ c_1\in\mathbb{R}.$$

et pour la 2ème primitive on décompose le trinôme $10+4x+x^2$

$$10+4x+x^2=(x+2)^2+6$$

puis on le remplace dans la primitive

$$\int\frac{dx}{\sqrt{10+4x+x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+6}}=\frac{1}{\sqrt{6}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x+2}{\sqrt{6}}\right)^2+1}}$$

$C.V: t=\frac{x+2}{\sqrt{6}} \Rightarrow dt=\frac{1}{\sqrt{6}}dx \Leftrightarrow dx=\sqrt{6}dt$ *alors*

$$\int\frac{dx}{\sqrt{10+4x+x^2}}=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=\arg sht+c_2, c_2\in\mathbb{R}.$$

par conséquent

$$I=5\sqrt{10+4x+x^2}-7\arg sh\left(\frac{x+2}{\sqrt{6}}\right)+c,\ \ c\in\mathbb{R}.$$