Université des Sciences et de la Technologie USTO-MB. 2022/2023
Faculté des Mathématiques - Informatique.
1ère Année Licence informatique et MI - Analyse1.

Examen final. Durée:1h30

Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Exercice1.(5 points)

On considère la suite de nombres réels $(u_n)_{n\in N}$ définie par $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{5u_n+4}{u_n+2} \end{cases}$

1) Montrer que : $0 \leq u_n < 4$, $\forall n \in N$.
2) Etudier la monotonie de $(u_n)_{n\in N}$
3)Déduire la convergence de $(u_n)_{n\in N}$ puis calculer sa limite.
4) On considère la suite $(V_n)_{n\in N}$ définie par $V_{n+1} = \frac{u_n-4}{u_n+1}$
   a. Montrer que est une suite géométrique, en calculant sa raison .
   b. Donner l'expression de u_n en fonction de n, puis déduire sa limite.

Exercice2.(10 points)

On définit la fonction f de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 1 - x.\left[\frac{1}{x}\right]$$

où [ ] désigne la partie entière.

1. Montrer que pour tout t dans $\mathbb{R}$, $t-1 < [t] \leq t$.
2. En déduire que pour tout $x > 0$; on a $0 \leq f(x) < x$.
3. Etudier le prolongement par continuité de f en $x = 0$.
4. Montrer que pour tout $x > 1$; on a $f(x) = 1$.
5. Calculer $f(1)$. La fonction f est-elle continue en $x = 1$?

Exercice 3. (10 points)

Soit deux réels a et b tels que $0 < a < b$.

1. Montrer que : $a < \frac{b-a}{\ln b - \ln a} < b$.
2. On définit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ par $f(t) = \ln[(1-t)a + tb] - (1-t)\ln a - t\ln b$.
   Montrer que f est dérivable sur $[0,1]$ et calculer sa dérivée f'.
3. Montrer qu'il existe $t_0 \in]0,1[$ tel que $f'(t_0) = 0$.
4. Calculer la dérivée seconde f'' de f sur $[0,1]$, puis déduire la monotonie de f'sur $[0,1]$.
5. En déduire le signe de f' sur $[0,1]$ puis le tableau de variation de f sur $[0,1]$.
6. Déduire de tout ce qui précède que $\forall t \in]0,1[$: $\ln[(1-t)a + tb] \geq (1-t)\ln a + t\ln b$.

Exercice4.(5 points)

En utilisant la règle de l'Hôpital, calculer la limite suivante

$$l = \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - \sin x}{\tan x - \arcsin x}$$