Analyse 2
Corrigé de la fiche de TD 1

Damerdji Bouharis A.
Université des Sciences et de la Technologie Mohamed Boudiaf
Faculté des Mathématiques et Informatique.

Corrigés des exercices

Exercice 1 :

1. $I = \int x \sin x dx$

   IPP : $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin x.dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

   d'où $I = \sin x - x \cos x + c, c \in \mathbb{R}$.

2. $I = \int \arcsin x dx$

   IPP : $\begin{cases} u = \arcsin x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ v = x \end{cases}$

   d'où $I = x \arcsin x - \int \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c, c \in \mathbb{R}$.

3. $I = \int x \arctan x dx$

   IPP : $\begin{cases} u = \arctan x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x^2+1} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$

   d'où

$$I = \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1} dx = \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx$$

$$I = \frac{1}{2}\left(x^2+1\right) \arctan x - \frac{x}{2} + c, c \in \mathbb{R}.$$

4. $I = \int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

   IPP : $\begin{cases} u = \arcsin x \\ dv = \int \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ v = -\sqrt{1-x^2} \end{cases}$

   d'où

$$I = -\sqrt{1-x^2} \arcsin x + \int dx = x - \sqrt{1-x^2} \arcsin x + c, c \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2 :

1. $I = \int \sin(ax) dx$

$$C.V : t = ax \Rightarrow dt = a dx$$

   d'où

$$I = \frac{1}{a} \int \sin t dt = -\frac{1}{a} \cos t + c = -\frac{1}{a} \cos(ax) + c, c \in \mathbb{R}.$$

2. $I = \int \frac{dx}{(\cos 3x)^2}$

$$C.V : t = 3x \Rightarrow dt = 3dx$$

   d'où

$$I = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{3} \tan t + c = \frac{1}{3} \tan(3x) + c, c \in \mathbb{R}.$$

3. $I = \int \frac{dx}{5-2x}$

$$C.V : t = 5 - 2x \Rightarrow dt = -2dx$$

   d'où

$$I = \frac{-1}{2} \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2} \ln|t| + c = -\frac{1}{2} \ln|5-2x| + c, c \in \mathbb{R}.$$

4. $I=\int \frac{\sin x}{\cos x^{2}}dx$

$$C.V: t=\cos x \Rightarrow dt=-\sin x dx \Rightarrow I=-\int \frac{dt}{t^{2}}=\frac{1}{t}+c=\frac{1}{\cos x}+c, c\in\mathbb{R}.$$

5. $I=\int \frac{\sin 2x}{(1+\cos 2x)^{2}}dx$

$$C.V: t=1+\cos 2x \Rightarrow dt=-2\sin 2x dx$$

d'où

$$I=\int \frac{-1}{2t^{2}}dt=\frac{1}{t}+c=\frac{1}{\cos x}+c=\frac{1}{2\left(1+\cos 2x\right)}+c, c\in\mathbb{R}.$$

6. $I=\int \frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}\arcsin x}dx$

$$C.V: t=\arcsin x \Rightarrow dt=\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}dx$$

d'où

$$I=\int \frac{dt}{t}=\ln|t|+c=\ln|\arcsin x|+c, c\in\mathbb{R}.$$

7. $I=\int \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$

$$C.V: t=\ln x \Rightarrow dt=\frac{1}{x}dx$$
$$\Rightarrow I=\int \cos t.dt=\sin(t)+c=\sin(\ln x)+c, c\in\mathbb{R}.$$

8. $I=\int \frac{e^{x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$

$$C.V: t=e^{x} \Rightarrow dt=e^{x}dx$$

d'où

$$I=\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^{2}}}=\arcsin(t)+c=\arcsin(e^{x})+c, c\in\mathbb{R}.$$

9. $I=\int \frac{1}{1+2x^{2}}dx=\int \frac{1}{1+\left(\sqrt{2}x\right)^{2}}dx$

$$C.V: t=\sqrt{2}x \Rightarrow dt=\sqrt{2}dx$$

d'où

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{1+t^{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(t)+c=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}x\right)+c, c\in\mathbb{R}.$$

10. $I=\int \frac{1}{\sqrt{1-16x^{2}}}dx=\int \frac{1}{\sqrt{1-(4x)^{2}}}dx$

$$C.V: t=4x \Rightarrow dt=4dx$$

d'où

$$I=\frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^{2}}}=\frac{1}{4}\arcsin(t)+c=\frac{1}{4}\arcsin(4x)+c, c\in\mathbb{R}.$$

11. $I=\int \frac{1}{4-9x^2}dx=\frac{1}{4}\int \frac{1}{1-\left(\frac{3}{2}x\right)^2}dx$

$$C.V: t=\frac{3}{2}x \Rightarrow dt=\frac{3}{2}dx$$

d'où

$$I=\frac{1}{6}\int \frac{1}{1-t^2}dt=\frac{1}{12}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+c;\ c\in\mathbb{R}.$$

donc

$$I=\frac{1}{12}\ln\left|\frac{1+\frac{3}{2}x}{1-\frac{3}{2}x}\right|+c=\frac{1}{12}\ln\left|\frac{2+3x}{2-3x}\right|+c;\ c\in\mathbb{R}.$$

Exercice 3 :

1.

$$I=\int \frac{1}{x^2+2x+5}dx=\int \frac{1}{(x+1)^2+4}dx=\frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}dx$$
$$I=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)+c, c\in\mathbb{R}.$$

2.

$$I=\int \frac{1}{x^2+3x+1}dx=\int \frac{1}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+1}dx=\int \frac{1}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}dx$$
$$I=\frac{4}{5}\int \frac{1}{\left(\frac{2x+3}{\sqrt{5}}\right)^2-1}dx=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x+3-\sqrt{5}}{2x+3+\sqrt{5}}\right|+c, c\in\mathbb{R}.$$

3. $I=\int \frac{3x-2}{5x^2-3x+2}dx$

On commence par dériver le dénominateur : $(5x^2-3x+2)'=10x-3$ ensuite on écrit le numérateur en fonction de cette dérivée :

$$3x-2=3\left(x-\frac{2}{3}\right)=\frac{3}{10}\left(10x-\frac{20}{3}-3+3\right)=\frac{3}{10}\left[(10x-3)-\frac{11}{3}\right]$$

d'où

$$I=\int \frac{3x-2}{5x^2-3x+2}dx=\int \frac{\frac{3}{10}\left[(10x-3)-\frac{11}{3}\right]}{5x^2-3x+2}dx$$
$$I=\frac{3}{10}\left[\int \frac{(10x-3)}{5x^2-3x+2}dx-\frac{11}{3}\int \frac{1}{5x^2-3x+2}dx\right]$$
$$I=\frac{3}{10}\ln\left(5x^2-3x+2\right)-\frac{11}{10}\int \frac{1}{5x^2-3x+2}dx$$

et on a

$$\int \frac{1}{5x^2-3x+2}dx=\int \frac{1}{5\left[\left(x-\frac{3}{10}\right)^2+\frac{31}{100}\right]}dx$$

$$= \frac{20}{31}\int \frac{1}{\left[\left(\frac{10x-3}{\sqrt{31}}\right)^2+1\right]}dx = \frac{2}{\sqrt{31}}\arctan\left(\frac{10x-3}{\sqrt{31}}\right)+c$$

donc

$$I = \frac{3}{10}\ln\left(5x^2-3x+2\right) - \frac{11}{5\sqrt{31}}\arctan\left(\frac{10x-3}{\sqrt{31}}\right)+c, c\in\mathbb{R}.$$

4. $I = \int \frac{6x^4-5x^3+4x^2}{2x^2-x+1}dx$
En effectuant la division Euclidienne, on a

$$6x^4-5x^3+4x^2 = \left(2x^2-x+1\right)\left(3x^2-x\right)+x$$

d'où

$$I = \int\left[\left(3x^2-x\right)+\frac{x}{2x^2-x+1}\right]dx = x^3-\frac{1}{2}x^2+\int\frac{x}{2x^2-x+1}dx$$

$$\left(2x^2-x+1\right)' = 4x-1$$

et

$$x = \frac{1}{4}\left[(4x-1)+1\right],$$

d'où

$$\begin{aligned}\int\frac{x}{2x^2-x+1}dx &= \frac{1}{4}\int\frac{(4x-1)+1}{2x^2-x+1}dx\\ &= \frac{1}{4}\left[\ln\left(2x^2-x+1\right)+\int\frac{1}{2x^2-x+1}dx\right]\end{aligned}$$

et on a

$$2x^2-x+1 = 2\left[\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}+\frac{1}{2}\right] = 2\left[\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{16}\right]$$

Alors

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{2x^2-x+1}dx &= \frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{16}}dx\\ &= \frac{8}{7}\int\frac{1}{\left(\frac{4x-1}{\sqrt{7}}\right)^2+1}dx\\ &= \frac{2}{\sqrt{7}}arctg\left(\frac{4x-1}{\sqrt{7}}\right)+c, c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

donc

$$I = x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}\ln\left(2x^2-x+1\right)+\frac{1}{2\sqrt{7}}arctg\left(\frac{4x-1}{\sqrt{7}}\right)+c.$$

5. $I=\int \frac{1}{\sqrt{2-3x-4x^2}}dx$

$$2-3x-4x^2=-4\left(x^2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}\right)=-4\left[\left(x+\frac{3}{8}\right)^2-\frac{41}{64}\right]$$

d'où

$$I=\int \frac{1}{\sqrt{4\left[\frac{41}{64}-\left(x+\frac{3}{8}\right)^2\right]}}dx=\frac{4}{\sqrt{41}}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{8x+3}{\sqrt{41}}\right)^2}}dx$$

$$I=\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{8x+3}{\sqrt{41}}\right)+c, c\in\mathbb{R}.$$

6.

$$I=\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}$$

$$I=\frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}}=\arg sh\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+c, c\in\mathbb{R}.$$

7. $I=\int \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}}dx$

On commence par dériver

$$\left(4x^2+4x+3\right)'=8x+4$$

ensuite on écrit le numérateur en fonction de cette dérivée :

$$x+3=\frac{1}{8}\left[(8x+4)+20\right],$$

d'où

$$I=\int \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}}dx=\frac{1}{8}\int \frac{(8x+4)+20}{\sqrt{4x^2+4x+3}}dx$$

$$I=\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x+3}+\frac{5}{2}\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+4x+3}}dx$$

et on a

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+4x+3}}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right]}}dx\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{\left[\left(\frac{2x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right]}}dx\\ &= \frac{1}{2}\arg sh\left(\frac{2x+1}{\sqrt{2}}\right)+c\end{aligned}$$

d'où

$$I=\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x+3}+\frac{5}{4}\arg sh\left(\frac{2x+1}{\sqrt{2}}\right)+c, c\in\mathbb{R}.$$

Exercice 4 :

1. $I = \int \frac{1}{(x-1)^2(x-2)}dx$

   On décompose la fraction en éléments simples

$$I = \int \left[\frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-2)}\right] dx,$$

   puis on calcule les constantes A, B et C d'où

$$I = \int \frac{A(x-1)(x-2) + B(x-2) + C(x-1)^2}{(x-1)^2(x-2)}dx$$
$$I = \int \frac{x^2(A+C) + x(-3A+B-2C) + 2A-2B+C}{(x-1)^2(x-2)}dx$$

   donc par identification on a

$$\begin{cases} A+C=0 \\ -3A+B-2C=0 \\ 2A-2B+C=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-C \\ B+C=0 \\ -2B-C=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=-1 \\ C=1 \end{cases}$$

   d'où

$$I = \int \frac{-1}{(x-1)} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-2)}dx = -\ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + \ln|x-2| + c$$

   donc

$$I = \frac{1}{x-1} + \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + c, c \in \mathbb{R}.$$

2. $I = \int \frac{x^4}{x^3+2x^2-x-2}dx$

   En effectuant la division Euclidienne, on a

$$x^4 = \left(x^3+2x^2-x-2\right)(x-2) + \left(5x^2-4\right)$$

   d'où

$$I = \int \left[x-2+\frac{5x^2-4}{x^3+2x^2-x-2}\right] dx = \frac{x^2}{2} - 2x + \int \frac{5x^2-4}{x^3+2x^2-x-2}dx$$

   On factorise ensuite le dénominateur x^3+2x^2-x-2, en remarquant qu'il admet comme racine $x=1$, et ceci en utilisant soit la division Euclidienne soit la méthode de l'identification, d'où

$$x^3+2x^2-x-2 = (x-1)\left(x^2+3x+2\right) = (x-1)(x+1)(x+2)$$

et on décompose en éléments simples la fraction d'où

$$\int \frac{5x^2-4}{x^3+2x^2-x-2}dx = \int \frac{5x^2-4}{(x-1)(x+1)(x+2)}dx$$
$$= \int \left[\frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+2)}\right] dx,$$

puis on calcule les constantes A, B et C par la méthode d'identification où on récupère le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} A+B+C=5 \\ 3A+B=0 \\ 2A-B-C=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2A+C=5 \\ 3A+B=0 \\ 8A-C=-4 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} B=-3A \\ -2A+C=5 \\ 6A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{6} \\ B=\frac{-1}{2} \\ C=\frac{16}{3} \end{cases}$$

d'où

$$\int \frac{5x^2-4}{x^3+2x^2-x-2}dx = \frac{1}{6}\int \frac{dx}{(x-1)} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1)} + \frac{16}{3}\int \frac{dx}{(x+2)}dx$$

alors

$$I = \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{6}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{16}{3}\ln|x+2| + c$$

donc

$$I = \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{(x+1)^3}\right| + \frac{16}{3}\ln|x+2| + c, c \in \mathbb{R}.$$

3. $I = \int \frac{2x^2-3x-3}{x^3-3x^2+7x-5}dx$
On a

$$x^3-3x^2+7x-5 = (x-1)\left(x^2-2x+5\right)$$

alors

$$I = \int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx = \int \frac{A}{(x-1)} + \frac{Bx+C}{(x^2-2x+5)}dx$$

puis on calcule les constantes A, B et C par la méthode d'identification où on récupère le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} A+B=2 \\ -2A-B+C=-3 \\ 5A-C=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=2 \\ -A+C=-1 \\ 5A-C=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=2 \\ -A+C=-1 \\ 4A=-4 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=3 \\ C=-2 \end{cases},$$

d'où

$$I = \int \frac{-1}{(x-1)} + \frac{3x-2}{(x^2-2x+5)}dx = -\ln|x-1| + \int \frac{3x-2}{x^2-2x+5}dx$$

$\left(x^2-2x+5\right)'=2x-2$, et on a

$$3x-2=\frac{3}{2}\left[(2x-2)+2-\frac{4}{3}\right]=\frac{3}{2}\left[(2x-2)+\frac{2}{3}\right]$$

d'où

$$\int\frac{3x-2}{x^2-2x+5}dx=\frac{3}{2}\int\frac{(2x-2)+\frac{2}{3}}{x^2-2x+5}dx=\frac{3}{2}\ln\left(x^2-2x+5\right)+\int\frac{1}{x^2-2x+5}dx$$

et

$$\int\frac{1}{x^2-2x+5}dx=\int\frac{1}{(x-1)^2+4}dx=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right)+c$$

Donc

$$I=\ln\left|\frac{\left(x^2-2x+5\right)^{\frac{3}{2}}}{x-1}\right|+\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right)+c,c\in\mathbb{R}.$$

4. $I=\int\frac{x^4+1}{(x^3+5x^2+7x+3)(x^2+1)}dx$
On remarque que

$$x^3+5x^2+7x+3=(x+1)^2(x+3),$$

et donc on a

$$I=\int\frac{x^4+1}{(x+1)^2(x+3)\left(x^2+1\right)}dx=\int\left[\frac{A}{(x+1)}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+3)}+\frac{Dx+E}{x^2+1}\right]dx$$

puis on calcule les constantes A,B,C,D et E par la méthode d'identification où on récupère le système d'équations suivant :

$$\begin{cases}A+C+D=1\\4A+B+2C+5D+E=0\\4A+3B+2C+7D+5E=0\\4A+B+2C+3D+7E=0\\3A+3B+C+3E=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=1-C-D\\B-2C+D+E=-4\\3B-2C+3D+5E=-4\\B-2C-D+7E=-4\\3B-2C-3D+3E=-2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}A=1-C-D\\2D-6E=0\\6D+2E=-2\\B-2C-D+7E=-4\\3B-2C-3D+3E=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=1-C-D\\D=\frac{-3}{10}\\E=\frac{-1}{10}\\B-2C=\frac{-18}{5}\\3B-2C=\frac{-13}{5}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow A=\frac{-3}{4},D=\frac{-3}{10},E=\frac{-1}{10},B=\frac{1}{2},C=\frac{41}{20}$$

d'où

$$I=\frac{-3}{4}\int\frac{dx}{(x+1)}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+1)^2}+\frac{41}{20}\int\frac{dx}{(x+3)}-\frac{1}{10}\int\frac{3x+1}{x^2+1}dx$$

$$I = \frac{-3}{4} \ln|x+1| - \frac{1}{2(x+1)} + \frac{41}{20} \ln|x+3| - \frac{1}{10} \int \frac{3x+1}{x^2+1} dx$$

$$\int \frac{3x+1}{x^2+1} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2xdx}{x^2+1} + \int \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{3}{2} \ln\left(x^2+1\right) + \arctan x + c$$

donc

$$I = \frac{1}{20} \ln\left|\frac{(x+3)^{41}}{(x+1)^{15}\left(x^2+1\right)^3}\right| - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{10} \arctan x + c, c \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5 :

1. $I = \int \frac{\sqrt{x^3} - \sqrt[3]{x}}{6\sqrt[4]{x}} dx = \int \frac{x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{3}}}{6x^{\frac{1}{4}}} dx$

   Soit $k = PPCM(2,3,4) = 12$, et faisons le changement de variables

$$C.V : x = t^{12} \Rightarrow dx = 12t^{11}dt$$

   d'où

$$I = 2\int \left(t^{26} - t^{12}\right) dx = \frac{2}{27} t^{27} - \frac{2}{13} t^{13} + c = \frac{2}{27} x^{\frac{27}{12}} - \frac{2}{13} x^{\frac{13}{12}} + c$$

   donc

$$I = \frac{2}{27} \sqrt[4]{x^9} - \frac{2}{13} \sqrt[12]{x^{13}} + c, c \in \mathbb{R}.$$

2. $I = \int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$

$$C.V : \frac{1-x}{1+x} = t^2 \Leftrightarrow x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \Rightarrow dx = \frac{-4t}{\left(1+t^2\right)^2} dt$$

   d'où

$$I = \int \frac{-4t^2}{\left(1+t^2\right)\left(1-t^2\right)} dt = \int \frac{A}{(1-t)} + \frac{B}{1+t} + \frac{Ct+D}{1+t^2} dt$$

   en utilisant la méthode d'identification, avec un calcul simple ; on récupère les constantes

$$A = -1, B = -1, C = 0, D = 2.$$

   et donc

$$I = \int \frac{-1}{(1-t)} - \frac{1}{1+t} + \frac{2}{1+t^2} dt = \ln|1-t| - \ln|1+t| + 2\arctan t + c$$

   d'où

$$I = \ln\left|\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}\right| + 2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + c, c \in \mathbb{R}.$$

3. $I=\int\sqrt{\frac{2+3x}{x-3}}dx$

$$C.V:\frac{2+3x}{x-3}=t^2\Leftrightarrow x=\frac{2+3t^2}{t^2-3}\Rightarrow dx=\frac{-22t}{\left(t^2-3\right)^2}dt$$

d'où

$$I=\int\frac{-22t^2}{\left(t-\sqrt{3}\right)^2\left(t+\sqrt{3}\right)^2}dt=\int\frac{A}{\left(t-\sqrt{3}\right)}+\frac{B}{\left(t-\sqrt{3}\right)^2}+\frac{C}{t+\sqrt{3}}+\frac{D}{\left(t+\sqrt{3}\right)^2}dt$$

en utilisant la méthode d'identification, avec un calcul simple ; on récupère le système suivant :

$$\begin{cases}A+C=0\\A\sqrt{3}+B-C\sqrt{3}+D=-22\\-3A-2\sqrt{3}B-3C+2\sqrt{3}D=0\\-3\sqrt{3}A+3B+3\sqrt{3}C+3D=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-C\\B-2\sqrt{3}C+D=-22\\-2\sqrt{3}B+2\sqrt{3}D=0\\3B+6\sqrt{3}C+3D=0\end{cases}$$

qui est équivalent à

$$\begin{cases}A=-C\\B+D=-11\\B=D\\c=\frac{11}{2\sqrt{3}}\end{cases}$$

d'où on a les constantes

$$A=-\frac{11}{2\sqrt{3}},C=\frac{11}{2\sqrt{3}},B=D=\frac{-11}{2},$$

et donc

$$I=-\frac{11}{2\sqrt{3}}\int\frac{dx}{\left(t-\sqrt{3}\right)}-\frac{11}{2}\int\frac{dt}{\left(t-\sqrt{3}\right)^2}+\frac{11}{2\sqrt{3}}\int\frac{dt}{t+\sqrt{3}}-\frac{11}{2}\int\frac{dt}{\left(t+\sqrt{3}\right)^2}dt$$

d'où

$$I=-\frac{11}{2\sqrt{3}}\ln\left|t-\sqrt{3}\right|+\frac{11}{2\left(t-\sqrt{3}\right)}+\frac{11}{2\sqrt{3}}\ln\left|t+\sqrt{3}\right|+\frac{11}{2\left(t+\sqrt{3}\right)}+c$$

alors

$$I=\frac{11}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t+\sqrt{3}}{t-\sqrt{3}}\right|+\frac{11t}{t^2-3}+c$$

et enfin

$$I=\frac{11}{2\sqrt{3}}\ln\left|x-\frac{7}{6}+\sqrt{x^2-\frac{7}{3}x-2}\right|+\sqrt{3x^2-7x-6}+c,c\in\mathbb{R}.$$

Dans ces deux derniers exemples on va utiliser les substitutions d'Euler :

4. $I=\int\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}dx$

$$a=1>0\overset{C.V}{\Rightarrow}\sqrt{x^2-1}=-x+t\Leftrightarrow -1=-2xt+t^2\Leftrightarrow x=\frac{t^2+1}{2t}$$

alors

$$dx=\frac{t^2-1}{2t^2}dt$$
$$\text{et }\sqrt{x^2-1}=\frac{t^2-1}{2t}\Rightarrow x-\sqrt{x^2-1}=\frac{1}{t},$$

d'où

$$I=\int\frac{t^2-1}{2t}dt=\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{2}\ln|t|+c$$

donc

$$I=\frac{1}{2}\left[x^2+x\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}-\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right]+c, c\in\mathbb{R}.$$

5. $I=\int\frac{1}{(2x-x^2)\sqrt{2x-x^2}}dx$

$$a=-1<0\Rightarrow\Delta>0\Rightarrow 2x-x^2=x(2-x)$$

$$\overset{C.V}{\Rightarrow}\sqrt{2x-x^2}=xt\Leftrightarrow(2-x)=xt^2\Leftrightarrow x=\frac{2}{t^2+1}$$

alors

$$dx=\frac{-4t}{(t^2+1)^2}dt$$
$$\text{et }\sqrt{2x-x^2}=\frac{2t}{t^2+1}\Rightarrow 2x-x^2=\frac{4t^2}{(t^2+1)^2},$$

d'où

$$I=-\int\frac{t^2+1}{2t^2}dt=\frac{-1}{2}t+\frac{1}{2t}+c=\frac{-1}{2}\frac{\sqrt{2x-x^2}}{x}+\frac{x}{2\sqrt{2x-x^2}}+c$$

donc

$$I=\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}+c, c\in\mathbb{R}.$$

6. $I=\int\frac{1}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}dx$

$$a=1>0\overset{C.V}{\Rightarrow}\sqrt{x^2+x+1}=-x+t\Leftrightarrow x+1=-2xt+t^2$$

d'où

$$x=\frac{t^2-1}{1+2t}\Rightarrow dx=\frac{2(t^2+t+1)}{(1+2t)^2}dt$$

et

$$\sqrt{x^2+x+1}=\frac{t^2+t+1}{(1+2t)}$$

et

$$1+x=\frac{t\left(t+2\right)}{1+2t}$$

alors

$$I=\int\frac{2}{t\left(t+2\right)}dt=\int\frac{A}{t}+\frac{B}{t+2}dt,$$

où

$$A=1,B=-1$$

donc

$$I=\int\frac{1}{t}dt-\int\frac{1}{t+2}dt=\ln|t|-\ln|t+2|+c=\ln\left|\frac{t}{t+2}\right|+c$$

et enfin

$$I=\ln\left|\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{2+x+\sqrt{1+x+x^2}}\right|+c,c\in\mathbb{R}.$$

Exercice 6 :

1. $I=\int\frac{1}{5-3\cos x}dx$

$$C.V:t=\tan\frac{x}{2}\Leftrightarrow x=2\arctan t\Rightarrow dx=\frac{2}{1+t^2}dt\text{ et }\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

d'où

$$I=\int\frac{1}{1+4t^2}dt=\frac{1}{2}\arctan\left(2t\right)+c=\frac{1}{2}\arctan\left(2\tan\frac{x}{2}\right)+c,c\in\mathbb{R}.$$

2. $I=\int\frac{\sin x}{1+\sin x}dx$
On utilise le même changement de variables que la primitive précédante

$$C.V:t=\tan\frac{x}{2}\Leftrightarrow x=2\arctan t\Rightarrow dx=\frac{2}{1+t^2}dt$$

et

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$$

d'où

$$I=\int\frac{4t}{\left(1+t\right)^2\left(1+t^2\right)}dt=\int\frac{A}{\left(1+t\right)}+\frac{B}{\left(1+t\right)^2}+\frac{Ct+D}{1+t^2}dt,$$

et en faisant les calculs et l'identification ; on récupère un système d'équations qu'on résoud et on obtient

$$A=C=0,B=-2,D=2$$

alors

$$I=\int\left[\frac{-2}{\left(1+t\right)^2}+\frac{2}{1+t^2}\right]dt=\frac{2}{1+t}+2\arctan t+c,c\in\mathbb{R}$$

d'où

$$I=\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}+x+c,c\in\mathbb{R}.$$

3. $I = \int \cos^2 x.dx$
   On utilise la linéarisation
$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos(2x) + 1)$$
   d'où
$$I = \frac{1}{2}\int (\cos(2x) + 1)\, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + c, c \in \mathbb{R}.$$
4. $I = \int (\tan x)^4\, dx$
$$C.V : t = \tan x \Leftrightarrow x = \arctan t \Rightarrow dx = \frac{1}{1+t^2}dt$$
   alors
$$I = \int \frac{t^4}{1+t^2}dt = \int \left[\left(t^2 - 1\right) + \frac{1}{1+t^2}\right] dt = \frac{1}{3}t^3 - t + \arctan t + c$$

d'où
$$I = \frac{1}{3}(\tan x)^3 - \tan x + x + c, c \in \mathbb{R}.$$