# TD n°03 : "Fonctions réelles d'une Variable Réelle" (Analyse I)

**Exercice 3:** Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité?

**1** $f(x) = \sin x \cdot \sin\frac{1}{x}$ ; $U = D_f = \mathbb{R}^*$ donc $x_0 = 0$

* $x_0 = 0 \notin D_f$

* calculons $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \underbrace{\sin x}_{\to 0} \cdot \underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{\to \text{bornée}} = \boxed{0}$

Ainsi $f$ admet un P.C en $x_0 = 0 \Rightarrow f$ admet un P.C sur $\mathbb{R}$.

Donc en posant : $\tilde{f} : U \cup \{x_0\} = \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \tilde{f}(x) = \begin{cases} \sin x \cdot \sin\frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

**2** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{2} + \sqrt{x-2}}{6\sqrt{x^2-4}} & ; x > 2 \\ \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 8} & ; x < 2 \end{cases}$ ; $U = D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

il suffit d'étudier P.C en $x_0 = 2$ ?

* $x_0 = 2 \notin U$

* $\lim_{x \to 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \overset{>}{\to} 2} f(x) \\ \lim_{x \overset{<}{\to} 2} f(x) \end{cases}$

ⓐ $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{2} + \sqrt{x-2}}{6\sqrt{x^2-4}}$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2} + \sqrt{x-2}}{6\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+2}}$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 2} \frac{\cancel{\sqrt{x-2}}\left[\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}} + 1\right]}{6\cancel{\sqrt{x-2}}\cdot\sqrt{x+2}}$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 2} \frac{\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}}\cdot\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} + 1}{6\sqrt{x+2}}$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 2} \frac{\dfrac{x-2}{\sqrt{x-2}\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{2})} + 1}{6\sqrt{x+2}}$$

(On a : $x-2 = \sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x-2}$)

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 2} \frac{\cancel{\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}}^{\to 0} + 1}{6\sqrt{x+2}} = \frac{1}{12}$$

ⓑ $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} \dfrac{x^2-3x+2}{x^3-8} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} \dfrac{\cancel{(x-2)}(x-1)}{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)} = \dfrac{1}{12}$

Donc : $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \dfrac{1}{12}$ ; Ainsi $f$ admet un P.C en $x_0 = 2$

$\Rightarrow f$ admet un P.C sur $\mathbb{R}$

Donc en posant : $\tilde{f} : U \cup \{x_0\} = \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}+\sqrt{x-2}}{6\sqrt{x^2-4}} & ; \ x > 2 \\[2mm] \dfrac{1}{12} & ; \ x = 2 \\[2mm] \dfrac{x^2-3x+2}{x^3-8} & ; \ x < 2 \end{cases}$$

3 $f(x) = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2}$ ; $U = D_f = \mathbb{R} - \{-1;1\}$

il suffit d'étudier P.C en $x_0 = -1$ et $x_0 = 1$?

en $x_0 = -1$ :

* $x_0 = -1 \notin U$

* $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2}$

$= \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1+x-2}{1-x^2} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x-1}{(1-x)(1+x)}$

$= \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{-\cancel{(1-x)}}{\cancel{(1-x)}(1+x)} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{-1}{1+x} = \infty$

Donc $f$ n'admet pas P.C en $x_0 = -1$.

en $x_0 = 1$ :

* $x_0 = 1 \notin U$

* $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-1}{1+x} = \dfrac{-1}{2}$

Ainsi $f$ admet un P.C en $x_0 = 1 \Rightarrow f$ admet un P.C sur $\mathbb{R} - \{-1\}$

Donc en posant $\tilde{f} : U \cup \{1\} = \mathbb{R} - \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightsquigarrow \tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2} & ; x \in \mathbb{R} - \{-1;1\} \\ -\dfrac{1}{2} & ; x = 1 \end{cases}$$

$\dfrac{3}{3}$