Université des Sciences et de la Technologie d'Oran. 2021-2022
Faculté des Mathématiques – Informatique – LMD – MI - 1ère Année.
Analyse1

Fiche de TD 4 (1$ère$ partie)
Dérivabilité des fonctions réelles – Calcul de dérivée
Dérivée n-ième – Etude de fonctions

Exercice 1:

1. Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes en x_0, et donner $f'(x_0)$ (quand elle existe)

   (a) $f(x) = \begin{cases} xe^{\frac{1}{x}} & si \quad x < 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \\ x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) & si \quad x > 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0$

   (b) $g(x) = \begin{cases} arctgx & si \quad |x| \leq 1 \\ \frac{\pi}{4} sign(x) + \frac{x-1}{2} & si \quad |x| > 1 \end{cases}, \quad x_0 = 1, x_0 = -1$

   (c) $h(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-a^2}} & si \quad |x| < a \\ 0 & si \quad |x| \geq a \end{cases}, \quad x_0 = a$

2. Déterminer les constantes a, b, c et d pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$:
   $f(x) = \begin{cases} ax + b & si \quad x \leq 0 \\ cx^2 + dx & si \quad 0 < x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{x} & si \quad x > 1 \end{cases}$

Exercice 2 :

1. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

   $1/f_1(x) = \sin(\ln x)$, $2/f_2(x) = \ln\left(\cos\frac{1}{x}\right)$, $3/f_3(x) = \frac{(shx)^2}{e^x}$,
   $4/f_4(x) = e^{arctgx}$, $5/f_5(x) = \cos(\arcsin x)$, $6/f_6(x) = arctg\left(\frac{2x}{3+x}\right)$.

2. Etudier les variations de la fonction $f(x) = arctg\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$.

Exercice 3 : Calculer les dérivées n-ièmes des fonctions suivantes :

$1/f_1(x) = \ (1+x)^{\alpha}$, pour $\alpha = -1$ et $\alpha = \pm\frac{1}{2}$,
$2/f_2(x) = \ln(1+x)$, $3/f_3(x) = (x+1)^3 e^{-x}$.
.
Exercice 4 : On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{x+2} e^{\frac{1}{x}}$$

1. Déterminer D_f le domaine de définition de f.
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur D_f.
3. f est-elle prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$?
4. Etudier les variations de f.

Exercice supplémentaire (Examen 2019)

.
Considérons f la fonction définie de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\arcsin x}{x} & si \quad x \in \left]0, \frac{1}{2}\right] \\ 1 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de la fonction f sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.
2. Etudier la dérivabilité de la fonction f sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, puis calculer f' sa dérivée sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.
3. Montrer que pour tout x, tel que $0 < x \leq \frac{1}{2}$ on a $f(x) < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

   En déduire que f est strictement croissante sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$.
4. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} , et qu'elle est continue et strictement croissante.
5. Déterminer $D_{f^{-1}}$ le domaine de définition de f^{-1}.

NB. Il n'est pas demandé de calculer $f^{-1}(x)$.