Chap II : Les suites

Définitions :

I] Une suite des nombres réels et une partie de IN dans IR, qui à chaque élément de IN associe un unique élément noté U_n, appele terme d'indice n de la suite (U_n).

$$U : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longrightarrow U_n$$

II] * Suite arithmétique $(a + n.r)$ $a \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$ حسابية
* Suite géométrique $(a.k^n)$ $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$ هندسية
* Suite puissance (n^α) $n \geqslant 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ أسية

Monotonie d'une suite réelle :

Soit (U_n) une suite réelle.

* (U_n) est croissante ↗ si : $\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} - U_n \geqslant 0$
(U_n) est strictement croissante si : $\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} - U_n > 0$
* (U_n) est décroissante ↘ si : $\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} - U_n \leqslant 0$
(U_n) est strictement décroissante si : $\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} - U_n < 0$
* (U_n) est monotone si elle est croissante ou décroissante.
(U_n) est strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

- ## Suites bornées :

Définitions : Soit (U_n) une suite réelle

- (U_n) est majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \leq M$.
  Alors M est appellé majorant de la suite (U_n).
- (U_n) est minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $m \leq U_n$.
  Alors m est appellé minorant de la suite (U_n).
- (U_n) est bornée si elle est majorée et minorée,
  $\exists m, M \in \mathbb{R} \;/\; \forall n \in \mathbb{N} \;;\; m \leq U_n \leq M$

ou : $\exists \ell \in \mathbb{R} \;/\; \forall n \in \mathbb{N} \;;\; |U_n| \leq \ell$

- ## Suites convergentes :

Définition :

On dit que (U_n) est convergente s'il existe un réel $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \ell \overset{\text{i.e}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \Rightarrow |U_n - \ell| < \varepsilon$$

Théorème : Si (U_n) est convergente, alors sa limite est unique.

Propositions :

1. Toute suite convergente est bornée.
2. Si (U_n) est convergente alors toutes ses sous-suites sont convergentes vers la même limite.

Remarques :

- (U_n) est divergente si elle n'admet pas de limite ou elle tend vers l'infini ou bien elle admet plusieurs limites différentes.
- Par contraposée, une suite non bornée est divergente.

Mais la réciproque n'est pas vraie, une suite bornée n'est pas toujours convergente.

- Par contraposée, il suffit de trouver 2 sous-suites qui ne convergent pas vers la même limite pour dire qu'une suite est divergente.
- Si (U_n) croissante et majorée, alors elle est convergente vers sa borne sup.
- Si (U_n) décroissante et minorée, alors elle est convergente vers sa bonne inf.

- **Opérations sur les suites convergentes :**

Théorème : Soient (U_n) et (V_n) deux suites convergentes. $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \ell_1 \qquad \lim_{n\to+\infty} V_n = \ell_2$$

① $\lim\limits_{n\to+\infty} (U_n + V_n) = \ell_1 + \ell_2$

② $\lim\limits_{n\to+\infty} (\lambda . U_n) = \lambda . \ell_1$

③ $\lim\limits_{n\to+\infty} (U_n . V_n) = \ell_1 . \ell_2$

④ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{U_n}{V_n} = \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$ avec $\ell_2 \neq 0$

⑤ $\lim\limits_{n\to+\infty} |U_n| = |\ell_1|$

Remarque :

- La somme de 2 suites divergentes peut être convergente.
- La valeur absolue d'une suite divergente peut être convergente.

Propriétés :

- Si $U_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n \geqslant 0$
- Si $U_n < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n \leqslant 0$
- Si $U_n < V_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} V_n$

Théorème d'encadrement / Théorème des gendarmes :

Soient (U_n), (V_n) et (W_n) trois suites définis sur $\mathbb{N}$.
Si, à partir d'un certain rang, $U_n \leqslant V_n \leqslant W_n$
et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} W_n = \ell \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \ell$

Théorème :

(X_n) bornée

et

$\lim_{n\to+\infty} Y_n = 0$

$\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} X_n \cdot Y_n = 0$

Théorème :

Toute suite réelle bornée (U_n) admet une sous-suite convergente

- ## Suites adjacentes :

Définition :

(U_n) et (V_n) sont adjacentes si :

1. (U_n) croissante $\nearrow$.
2. (V_n) décroissante $\searrow$.
3. $\lim_{n\to+\infty} (U_n - V_n) = 0$.

ou l'inverse

Théorème :

Deux suites réelle adjacentes (U_n) et (V_n) sont convergentes vers la même limite.

i.e : $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} V_n$

- La définition de la limite de la Suite (U_n) :

(*) $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \Rightarrow |U_n - \ell| < \varepsilon$

(*) $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty \iff \forall A > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \Rightarrow U_n > A$

(*) $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -\infty \iff \forall A > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \Rightarrow U_n < -A$

- Suites de Cauchy :

Définition : Soit (U_n) une suite

On dit que (U_n) est de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N} : \begin{cases} p \geq N_\varepsilon \\ \wedge\, q \geq N_\varepsilon \end{cases} \Rightarrow |U_p - U_q| < \varepsilon$$

Théorème : (U_n) convergente $\iff$ (U_n) est de Cauchy.

(U_n) Cauchy $\iff$ (U_n) convergente $\Rightarrow$ (U_n) bornée.

- Suites divergentes :

Définition : On dit que (U_n) est divergente si elle ne converge pas si :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, n \geq N, |U_n - a| > \varepsilon$$

Remarque :

(*) Une suite non bornée est divergente.

(*) Si 2 extraites de (U_n) converge vers 2 limites distinctes alors (U_n) diverge.

Définition :

- (U_n) diverge vers $+\infty$ ou admet pour limite $+\infty$ notée $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

si : $\forall a \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, U_n > a$

- (U_n) diverge vers $-\infty$ ou admet pour limite $-\infty$ notée $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$

si : $\forall a \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, U_n < a$

Remarque : On distingue 2 cas de divergence :

- Cas des limites infinies.
- Cas où la suite n'admet pas de limite.

Théorème : Soit (U_n) croissante (resp. décroissante)

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} (U_n) = +\infty \quad (-\infty)$.
- La suite (U_n) est non majorée (resp. non (U_n) minorée).

Limites infinies :

Soient (U_n) et (V_n) deux suites telles que, à partir un certain rang N, $U_n \leq V_n$

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$

- Suites récurrentes :

Définition : Soit (U_n) une suite récurrente

$$\begin{cases} \text{Le premier terme } (U_p) \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

Si f est croissante $(f'(x) \geq 0)$ alors (U_n) est monotone

Il suffit de calculer la différence $f(U_p) - U_p$:

- $f(U_p) - U_p > 0 \Rightarrow (U_n)$ croissante ↗
- $f(U_p) - U_p < 0 \Rightarrow (U_n)$ décroissante ↘

Remarque : Si (U_n) est convergente vers ℓ alors sa limite vérifie l'équation $f(\ell) = \ell$.

- Sous-suites :

Définition : Une suite extraite ou une sous-suite de (U_n) est une suite de la forme $(U_{s(n)})$ où $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

Théorème : Si (U_n) est bornée, (U_n) a une sous-suite convergente.

Remarque : Généralement, une sous-suite d'une sous-suite est une sous-suite.

Propositions :

- Toute suite extraite d'une suite monotone est monotone.

  (La réciproque est fausse)

- Toute suite extraite d'une suite bornée est bornée.

  (La réciproque est fausse)

- Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente.
- Si (U_n) tend vers ℓ (finie ou infinie) alors toute suite extraite de (U_n) tend vers la même limite ℓ.
- Si on a deux sous-suite de (U_n) qui ont des limites différentes la suite (U_n) ne converge pas.
- . Si (U_n) n'est pas majorée, (U_n) admet une sous-suite qui converge vers $+\infty$.

  . Si (U_n) n'est pas minorée, (U_n) admet une sous-suite qui converge vers $-\infty$.