Exercice 6 (Les Nombres Réels)

Soient A et B deux ensembles non vides et bornés de $\mathbb{R}$

1) Montrer que si $A \subset B$, alors : $\sup A \leqslant \sup B$

et $\inf B \leqslant \inf A$

2) Montrer que $A \cup B$ est borné dans $\mathbb{R}$, et :

i) $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$

ii) $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$

3) Montrer que $A \cap B$ est borné dans $\mathbb{R}$, et si $A \cap B$ est non vide, on a alors :

i) $\sup(A \cap B) \leqslant \min(\sup A, \sup B)$

ii) $\inf(A \cap B) \geqslant \max(\inf A, \inf B)$

Solution :

Comme A et B sont bornés, alors : $\sup A$, $\inf A$, $\sup B$ et $\inf B$ existent

1) On a : $A \subset B$, alors : $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$ donc : $x \leqslant \sup B$

i.e $\forall x \in A : x \leqslant \sup B$.

Donc $\sup B$ est un majorant de A et comme $\sup A$ est le p.p. des majorants A, alors : $\sup A \leqslant \sup B$.

On a : $A \subset B$, alors : $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$, donc : $\inf B \leqslant x$

i.e. $\forall x \in A : \inf B \leqslant x$

On a : $\inf B$ est un minorant de A et puisque $\inf A$ est le p.g. des minorants de A, alors : $\inf B \leqslant \inf A$

2) Montrons $A \cup B$ est borné

On a : $\forall x \in A \cup B \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ \text{ou} \\ x \in B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \inf A \leqslant x \leqslant \sup A \\ \text{ou} \\ \inf B \leqslant x \leqslant \sup B \end{cases}$

$\Rightarrow \min(\inf A, \inf B) \leqslant x \leqslant \max(\sup A, \sup B)$

i.e. $\forall x \in A \cup B$: $\min(\inf A, \inf B) \leq x \leq \max(\sup A, \sup B)$

Donc $A \cup B$ est borné $\Rightarrow$ $\sup(A \cup B)$ et $\inf(A \cup B)$ existent

i) Montrons : $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$

i.e $\begin{cases} \sup(A \cup B) \leq \max(\sup A, \sup B) \\ \text{et} \\ \max(\sup A, \sup B) \leq \sup(A \cup B) \end{cases}$

On a : $\forall x \in A \cup B$: $x \leq \max(\sup A, \sup B)$

Donc $\max(\sup A, \sup B)$ est un majorant de $A \cup B$ et comme $\sup(A \cup B)$ est le p.p des majorants de $A \cup B$, alors :

$$\sup(A \cup B) \leq \max(\sup A, \sup B)$$

Donc part : on a : $\begin{cases} A \subset A \cup B \\ \text{et} \\ B \subset A \cup B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sup A \leq \sup(A \cup B) \\ \text{et} \\ \sup B \leq \sup(A \cup B) \end{cases}$

$\Rightarrow \max(\sup A, \sup B) \leq \sup(A \cup B)$

Ainsi : $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$

De la même manière, on montre l'autre relation

ii) $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$

3 Montrons : $A \cap B$ est borné

Comme $A \cap B \subset A$ et A est borné, alors : $A \cap B$ est aussi borné. De plus si $A \cap B$ est non vide, alors $\sup(A \cap B)$ et $\inf(A \cap B)$ existent.

i) Montrons : $\sup(A \cap B) \leqslant \min(\sup A, \sup B)$

On a : $\begin{cases} A \cap B \subset A \\ \text{et} \\ A \cap B \subset B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sup(A \cap B) \leqslant \sup A \\ \text{et} \\ \sup(A \cap B) \leqslant \sup B \end{cases}$

$\Rightarrow \sup(A \cap B) \leqslant \min(\sup A, \sup B)$

ii) Montrons : $\inf(A \cap B) \geqslant \max(\inf A, \inf B)$

On a : $\begin{cases} A \cap B \subset A \\ \text{et} \\ A \cap B \subset B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \inf A \leqslant \inf(A \cap B) \\ \text{et} \\ \inf B \leqslant \inf(A \cap B) \end{cases}$

$\Rightarrow \max(\inf A, \inf B) \leqslant \inf(A \cap B)$