Université des Sciences et de la Technologie d'Oran. 2021-2022
Faculté des Mathématiques et Informatique LMD - MI 1ère Année.
Analyse1

Fiche deTD2
Les suites réelles

Exercice 1 :
Calculer les limites des suites suivantes de terme général:
1. $U_n = \frac{\cos(2n^3-5)}{3n^3+2n^2+1}$,2. $U_n = \frac{\sqrt{n}-9n+8}{2\sqrt{n}+3n+7}$,3. $U_n = \sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}$,
4. $U_n = \frac{3^n-2.5^n+6.7^n}{7.2^n+3.4^n+5.7^n}$, 5.$U_n = \frac{3^n+(-3)^n}{3^n}$,6. $U_n = \frac{e^{2n}-e^n+1}{2e^n+3}$.

Exercice 2 :
En utilisant la définition de la limite d'une suite, montrer que:
1/ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n-1}{2n+3} = \frac{3}{2}$, 2/ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = 0$, 3/ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2\ln(1+n)}{\ln n} = 2$,
4/ $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$, 5/ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-5n^2-2}{4n} = -\infty$, 6/ $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(\ln n) = +\infty$.

Exercice 3 :

1. En utilisant le principe d'encadrement d'une suite, montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite l à déterminer dans chaque cas :

   $a/U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n}{n^3+k}$, $b/U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$

   $c/U_n = \frac{[\sqrt{n}]}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, (où [ ] désigne la partie entière).

2. Soit $U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{3+|\sin k|\sqrt{k}}$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.

Exercice 4 :
On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par: $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{7U_n+4}{3U_n+3}; \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Montrer que: $0 \leq U_n \leq 2$; $\forall n \in \mathbb{N}$
2. Etudier la monotonie de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$
3. Déduire que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente puis calculer sa limite
4. Soit $E = \{U_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$; déterminer $\sup E$ et $\inf E$.

Exercice 5 :

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n + 2}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Montrer que : $0 \leq U_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire la monotonie de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. On considère la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par: $V_n = 2 - U_n$,$\forall n \in \mathbb{N}$.
   (a) Quel est le signe de $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $\frac{V_{n+1}}{V_n} \leq \frac{1}{2}$.
   (c) En utilisant un raisonnement par récurrence montrer que:
   $$V_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$
   (d) En déduire la limite de la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis celle de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 6 : (Rattrapage 2021)

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\begin{cases} 0 < u_1 < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ u_{n+1} = u_n - 2u_n^3, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_n < \frac{1}{\sqrt{2}}$.
2. Etudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et trouver sa limite.
4. Déterminer $\sup E$ et $\inf E$ où $E = \{u_n;\ \ n \in \mathbb{N}^*\}$.

Exercice 7 :

En utilisant le critère de Cauchy montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N},n\geq 2}$ est divergente.

$$1/U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin k}{2^k}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 2/V_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\ln k}, \forall n \geq 2.$$

Exercices supplémentaires :

Exercice 8 : (Examen 2021)

On considère la suite de nombres réels $(u_n)_{n\in N}$ définie par $\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1 \end{cases}$

1. Montrer que : $1 < u_n < 2$,$\forall n \in N$.
2. Etudier la monotonie de $(u_n)_{n\in N}$.
3. Déduire la convergence de $(u_n)_{n\in N}$ puis calculer sa limite.
4. Soit l'ensemble $E = \{u_n \ / \ n \in N\}$, déterminer $\inf E$ et $\sup E$.

Exercice 9 :

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par :$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n e^{-U_n}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Montrer que $U_n > 0; \forall n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire la monotonie de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. En déduire que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente puis calculer sa limite.
4. Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$, montrer que $U_{n+1} = e^{-S_n}, \forall n \in \mathbb{N}$. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.