Université des Sciences et de la Technologie d'Oran. 2021-2022
Faculté des Mathématiques – Informatique – LMD – MI - 1ère Année.
Analyse1

Fiche de TD 4 **(2**ème **partie)**
Théorème de Rolle - Accroissements finis
Règle de l'Hôpital - Formule de Taylor - Etude de fonctions.

Exercice 5: Soit g la fonction définie de l'intervalle $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivable sur $[0,1]$, on suppose que: $g(0) = g\left(\frac{1}{2}\right) = g(1) = 1$. Montrer en utilisant le théorème de Rolle que g'' s'annule au moins une fois sur $[0,1]$.

Exercice 6.

1. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que:
$$\forall x > 0, \frac{x}{1+x^2} < arctgx < x.$$
2. Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et telle que sa dérivée f' est une fonction croissante. Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x < z < y$; montrer que
$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(y)-f(z)}{y-z}.$$
3. Etant donné $ln(100) = 4,6052$, montrer qu'en écrivant: $\ln(101) = 4,6151$ on commet une erreur inférieur à 10^{-4}.

Exercice 7. Calculer les limites suivantes en utilisant la règle de l'Hôpital (quand c'est possible).
$$1.\lim_{x\to 1}\frac{Arctg\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)}{x-1}, \quad 2.\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sin x}{2x+\sin x}, \quad 3.\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}, \quad 4.\lim_{x\to 5}(6-x)^{\frac{1}{x-5}}.$$

Exercice 8.
1)En utilisant la formule de Taylor-Mac-Laurin d'ordre n, montrer que
$$\forall x \geq 0, 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} \leq e^x$$
2)En utilisant la formule de Taylor-Mac-Laurin d'ordre 2, montrer que $\frac{8}{3} < e < 3$.
3)En déduire que $\frac{1}{(n+1)!} < e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}\right) < \frac{3}{(n+1)!}$.

<u>Exercice 9.</u> (Examen 2020)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \arcsin\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

1) Etudier les variations de la fonction $g(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

2) En déduire que la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

4) Donner l'expression de la dérivée f' sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

5) Etudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$, existe-t-il des points d'inflexion?

6) Etudier les variations de f puis tracer son graphe (Γ).

<u>Exercice 10.</u> (Examen 2019)

Soient f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = 2e^{x-1} - x^2 - x$ et G_f sa courbe représentative.

1) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$, pour tout x dans $\mathbb{R}$.

2) Etudier la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que f admet un point d'inflexion A et préciser ses coordonnées .

4) Quelle est l'équation de la tangente (T_A) à G_f au point A?

- En déduire que pour tout $x \geq 1 : e^{x-1} \geq \frac{1}{2}(x^2+1)$.

<u>Exercice supplémentaire 1</u>

Soit f la fonction définie et continue sur $[0,1]$ telle que $f(0) = 0, f(1) = 1$.

On suppose que f est dérivable sur $[0,1]$ et que $f'(0) = f'(1) = 0$.

On considère la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{f(x)}{x} - \frac{f(x)-1}{x-1} & \text{si } x \in]0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

1) Etudier la continuité de g sur $[0,1]$.

2) Montrer qu'il existe $\alpha \in]0,1[/ g(\alpha) = 0$. En déduire que $f(\alpha) = \alpha$.

3) Montrer qu'il existe $\beta \in]0,1[\ /\ f'(\beta) = 1$.

<u>Exercice supplémentaire 2</u> (Examen 2021)

On considère la fonction f définie par: $f(x) = \begin{cases} xe^{\frac{1}{x}} & , \text{ si } x < 0. \\ 0 & , \text{ si } x = 0. \\ arctgx & , \text{ si } x > 0. \end{cases}$

1) Donner le domaine de définition D_f de la fonction f.

2) Etudier la continuité puis la dérivabilité de f sur D_f.

3) Montrer que la fonction f s'annule dans l'intervalle $]-1, 1[$.

4) Donner l'expression de la dérivée, puis étudier les variations de f

5) Donner l'expression de la dérivée seconde f'', puis en déduire l'étude de la convexité de f sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

6) Déterminer les asymptotes du graphe (Γ) puis tracer (Γ).