(2020-2021) **Exercices d'Analyse I**

Exercice 1:

Soient A et B deux ensembles non-vides de $\mathbb{R}^+$.
On définit l'ensemble suivant : $A \cdot B = \{x \cdot y : x \in A \text{ et } y \in B\}$

1) Montrer que : $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$

2) Déduire $\sup\left[\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^2\right]$

Exercice 2:

Soit la suite (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n \, e^{-U_n} \; ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) Montrer que la suite (U_n) est positive.
2) Etudier la monotonie de (U_n).
3) En déduire la nature de (U_n) et trouver sa limite
4) Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$.
   a] Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} = e^{-S_n}$
   b] En déduire $\lim_{n \to +\infty} S_n$

Exercice 3: Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$

2) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ (en utilisant : $\lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$)

3) $\lim_{x \to +\infty} \frac{[x]}{x}$; 4) $\lim_{x \to +\infty} \frac{[x] + \frac{1}{x}}{[x] - \frac{1}{x}}$