Université des Sciences et de la technologie USTO-MB.
Faculté des Mathématiques-Informatique.
1ère Année Informatique

Examen de remplacement d'Analyse 1

Dimanche 21/ 01/ 2024 Durée: 1h30min

Les calculatrices, téléphones portables sont interdits.

Exercice 1. I. Dire si les énoncés suivants sont vrais ou faux et justifier votre réponse.
1. A une partie de $\mathbb{R}$ minorée alors $\min A = \inf A$.
2. Si $(U_n)_n$ est suite réelle bornée alors elle est convergente .
3. Si f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ alors f est de classe $C^1(\mathbb{R})$

II. En utilisant la caractérisation de la borne suférieure montrer que $\sup\left\{1-\frac{1}{4n^2}, n\in\mathbb{N}^*\right\}=1$.

Exercice 2. 1. Soit f la fonction définie par: $f(x)=2-2e^{-x}$.
Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet sur $\mathbb{R}$ deux solutions réelles 0 et une autre, notée r, qui est strictement positive.

2. On considère la suite de nombres réels $(u_n)_n$ définie par:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n), n\in\mathbb{N} \end{cases}.$$

$a)$ Etudier les variations de la fonction f.
$b)$ Montrer que si $(u_n)_n$ converge alors elle converge vers r.
$c)$ Vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$|u_{n+1}-r| \le \frac{2}{e}|u_n-r|.$$

$e)$ En déduire que $(u_n)_n$ converge vers r.

Exercice 3. Considérons f la fonction définie de $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$ par:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{\arcsin x}{x} & \text{si } x\in\left]0,\frac{1}{2}\right] \\ 1 & \text{si } x=0 \end{cases},$$

1. Etudier la continuité de la fonction f sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$.
2. Etudier la dérivabilité de la fonction f sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, puis calculer sa dérivée sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$.
3. En utilisant le théorème des accroissements finis; montrer que pour tout x, tel que $0<x\le\frac{1}{2}$,

$$f(x)<\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

en déduire que f est strictement croissante sur $\left]0,\frac{1}{2}\right]$.

Exercice4.
Soient f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x)=2e^{x-1}-x^2-x$ et G_f sa courbe représentative.
1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$, pour tout x dans $\mathbb{R}$.
2. Etudier la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f admet un point d'inflexion A et préciser ses coordonnées .
4. Quelle est l'équation de la tangente (T_A) à G_f au point A?

5. En déduire que pour tout $x\ge 1: e^{x-1}\ge\frac{1}{2}(x^2+1)$.

Bon courage

Corrigé de l'examen de remplacement d'Analyse I 2023/2024

Exo 1 : I) (4 pts)

1. faux, (0,25)

en effet, $A =]0, +\infty[$, minorée et $\inf A = 0 \notin A$ donc $\min A$ n'existe pas (0,25)

2. $(U_n)_n$ bornée $\Rightarrow$ (U_n) convergente ~~faux~~ faux (0,25)

en effet, $U_n = (-1)^n$ bornée mais elle n'est pas convergente car elle admet 2 limites. (0,25)

3. f ~~deux~~ deux fois dérivable sur IR $\Rightarrow f \in C^1(\mathbb{R})$ Vraie (0,25)

en effet, f deux fois dérivable $\Rightarrow f''$ existe sur IR ce qui veut dire f' est dérivable sur IR $\Rightarrow f'$ continue d'où f' continue donc f continue et f' continue sur IR alors $f \in C^1(\mathbb{R})$. (0,25)

II) Montrons $\sup\left\{1 - \frac{1}{4n^2},\ n \in \mathbb{N}^*\right\} = 1$

Posons $A = \left\{1 - \frac{1}{4n^2},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$

$$\sup A = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A,\ x \leq 1 \ \dots (1) & (0,25) \\ \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* / \ 1 - \frac{1}{4n_0^2} > 1 - \varepsilon \ \dots (2) & (0,25) \end{cases}$$

(1) : $\forall x \in A$, $x = 1 - \frac{1}{4n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$

$$n \geq 1 \Rightarrow n^2 \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n^2} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\frac{1}{4n^2} < 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq 1 - \frac{1}{4n^2} < 1 \qquad (1)$$

$$0 \leq x < 1$$

d'où (1) est vérifiée

(2) : Soit $\varepsilon > 0$, $\cancel{1} - \frac{1}{4n_0^2} > \cancel{1} - \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{4n_0^2} < \varepsilon$

$$4n_0^2 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n_0^2 > \frac{1}{4\varepsilon} \Rightarrow n_0 > \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \qquad (1)$$

il suffit de Prendre $n_0 = \left[\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\right] + 1$

d'où $\sup A = 1$.

Exo2 (7,5) 1. $f(x) = 2 - 2e^{-x}$

. $f(x) = x$ posons $\varphi(x) = f(x) - x$

φ est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$

$\varphi'(x) = 2e^{-x} - 1 = 0 \iff e^{-x} = 1/2$

$\Rightarrow -x = -\ln 2 \Rightarrow x = \ln 2$. (0,5)

x	$-\infty$	0	$\ln 2$		$+\infty$
φ'	$+$		0	$-$	
φ	$-\infty$ $\nearrow$	0	$1-\ln 2$	$\searrow$ 0	$-\infty$

(0,5)

(0,25) On a $\varphi(0) = 0 \iff f(0) = 0$ donc 0 est une Solution de $f(x) = x$

(0,5) et si $x \in [\ln 2, +\infty[$, $\varphi(\ln 2) > 0$ et

$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = -\infty$ d'après le Théorème des Valeurs

(0,5) intermédiaires, $\exists\, r \in]\ln 2, +\infty[\,/\, \varphi(r) = 0$

i.e. $f(r) = r > \ln 2 > 0$

2. $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n) = 2 - 2e^{-U_n}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a) <u>Variation de f</u>: $f'(x) = 2e^{-x} > 0 \Rightarrow f$ est croissante. (0,5)

(0,25) Sur $\mathbb{R} \Rightarrow (U_n)$ est monotone

$U_1 - U_0 = 1 - 2e^{-1} > 0 \Rightarrow (U_n)$ est croissante.

b) Supposons que $\lim_{n \to +\infty} U_n = \ell \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} U_{n+1} = \ell$

d'où $f(\ell) = \ell \iff \begin{cases} \ell = 0 \\ \text{ou} \\ \ell = r \end{cases}$ (0,5) (0,25)

mais (U_n) est croissante alors $U_0 < U_n$ (0,25)

c.à.d. $U_n > 1 \Rightarrow \ell \geq 1$ (0,25)

d'où $\lim_{n \to +\infty} U_n = r$ (0,25)

c) $\forall n \in \mathbb{N},\ |U_{n+1} - r| \leq \frac{2}{e} |U_n - r|$

$U_{n+1} - r = f(U_n) - f(r)$ 0,25

0,25 f est Continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[U_n, r]$
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ " " " $]U_n, r[$

d'après le Théorème des accroissement fini, il existe

$c \in]U_n, r[\,/\, f(U_n) - f(r) = (U_n - r) f'(c)$
$\Rightarrow (U_n - r)\, 2e^{-c}$

$U_n < c < r \Rightarrow -r < -c < -U_n$
$e^{-r} < e^{-c} < e^{-U_n} \Rightarrow 2e^{-r} < 2e^{-c} < 2e^{-U_n}$

1 $f(U_n) - f(r) = (U_n - r)\frac{2}{e^c} < (U_n - r)\frac{2}{e^{U_n}}$

et $1 < U_n \Rightarrow e^{U_n} > e \Rightarrow \frac{2}{e^{U_n}} < \frac{2}{e}$

d'où $f(U_n) - f(r) < (U_n - r)\frac{2}{e}$

et $|f(U_n) - f(r)| < |U_n - r|\frac{2}{e}$.

c) Déduire que (U_n) converge vers r.

0,5 On a: $|f(U_n) - f(r)| < \left(\frac{2}{e}\right)|U_n - r| < \left(\frac{2}{e}\right)^2 |U_{n-1} - r| \ldots$
$\ldots < \left(\frac{2}{e}\right)^{n+1} |U_0 - r|$

0,5 et $\frac{2}{e} < 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{e}\right)^{n+1} = 0$

d'où $|U_{n+1} - r| \to 0 \Rightarrow U_{n+1} \to r \Rightarrow U_n \to r$.

5pts

Exo3 : $f(x) = \begin{cases} \frac{\arcsin x}{x}, & x \in]0, \frac{1}{2}] \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

$D_f = [0, \frac{1}{2}]$

1) Continuité sur $[0, \frac{1}{2}]$.

0,25 si $x \in]0, \frac{1}{2}]$, $f(x) = \frac{\arcsin x}{x}$ Continue sur $]0, \frac{1}{2}]$ car quotient de 2 fonctions continues sur $]0, \frac{1}{2}]$.

Si $x = 0$: $f(0) = 1$

$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$?

1 $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1} = 1 = f(0)$.

d'où f est continue en 0 par suite f continue sur $[0, \frac{1}{2}]$.

2) Dérivabilité sur $[0, \frac{1}{2}]$.

0,25 Si $x \in]0, \frac{1}{2}]$, $f(x) = \frac{\arcsin x}{x}$ dérivable sur $]0, \frac{1}{2}]$ car quotient de 2 fonctions dérivables sur $]0, \frac{1}{2}]$.

Si $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\arcsin x}{x} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x - x}{x^2} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1}{2x}$$

1 $$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{2x\sqrt{1-x^2}}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{2\sqrt{1-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}}} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{2(1-x^2-2x^2)}$$

$$= 0 = f'(0)$$

f est dérivable en 0 par suite dérivable sur $[0, \frac{1}{2}]$.

0,5
$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x}{x^2}, & x \in]0, \frac{1}{2}] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x - (\sqrt{1-x^2}) \arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}, & x \in]0, \frac{1}{2}] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

3. T.A.F. pour $f(x) = \arcsin x$ sur $[0, x]$

$\left.\begin{array}{l}\arcsin x \text{ est continue sur } [0,x] \\ \arcsin x \text{ est dérivable sur }]0,x[\end{array}\right\} \xrightarrow{T.A.F} \exists c \in]0,x[/$ (0,5)

$$\arcsin x - \arcsin 0 = (x-0)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}$$

$$\arcsin x = \frac{x}{\sqrt{1-c^2}} \Rightarrow \frac{\arcsin x}{x} = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}}$$ (0,5)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}}$$

$$0 < c < x \Rightarrow 0 < c^2 < x^2 \Rightarrow -x^2 < -c^2 < 0$$

$$\Rightarrow 1-x^2 < 1-c^2 < 1 \Rightarrow \sqrt{1-x^2} < \sqrt{1-c^2} < 1$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$ (0,5)

$$\Rightarrow 1 < f(x) < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad 0 < x \leq \frac{1}{2}$$

On a : sur $]0, \frac{1}{2}]$, $f'(x) = \dfrac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x}{x^2}$

$f'(x) > 0$ $\frac{\arcsin x}{x} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (0,5)

$$\arcsin x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x > 0$$

donc f est strictement croissante sur $]0, \frac{1}{2}]$

Exo4 : $f(x) = 2e^{x-1} - x^2 - x$

1) $f'(x) = 2e^{x-1} - 2x - 1$ (0,25)

$f''(x) = 2e^{x-1} - 2$ (0,25)

2) $2e^{x-1} - 2 \geq 0 \Rightarrow e^{x-1} \geq 1 \Rightarrow x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$

$f''(x) < 0 \Rightarrow x < 1$ (0,5)

d'où f est convexe si $x > 1$ et
f est concave si $x < 1$ 0,5

(1) 3) On a : $f''(x) = 0 \iff x = 1$ et $f''(x) > 0$ si $x > 1$ et $f''(x) < 0$ si $x < 1$ donc f'' change de signe en $x_0 = 1$ alors f admet un point d'inflexion d'abscisse 1

$$A = (1, f(1)) = (1, 0)$$

0,5 4) $(T_A) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = f'(1)(x-1) + f(1)$

$(T_A)\ y = -(x-1) = 1-x$

5) $\forall x \geq 1,\ e^{x-1} \geq \frac{1}{2}(x^2+1)$?

0,5 Pour $x > 1$, f est convexe alors le graphe de f est au dessus de toutes les tangentes, d'où

$f(x) \geq y$

0,5 $2e^{x-1} - x^2 - \cancel{x} \geq 1 - \cancel{x} \Rightarrow e^{x-1} \geq \frac{(1+x^2)}{2}$.