Exercices d'Analyse II

Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes

$$I = \int \frac{x^4 - 3x + 1}{x^2 - x + 3}\, dx \quad ; \quad J = \int \frac{x}{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+1}}\, dx$$

$$K = \int x \sqrt{x^2 + 2x + 5}\, dx$$

Exercice 2. Soit l'équation différentielle suivante :

$$2y'' + y' + y = \mathrm{ch}^2 x \quad \ldots \quad (E)$$

1] Déterminer une solution particulière de (E)

2] Résoudre l'équation différentielle de (E)

3] Trouver la solution de (E) qui vérifie les deux conditions : $y(0) = \dfrac{120}{77}$

et $y'(0) = 1$

Exercice 3. Soit l'équation diff : $y'(x)+xy($

1) Déterminer la solution générale de l'é

2) Trouver la solution de (E) qui vér

Exercice 4 :

1) Calculer l'intégrale : $I=\int \frac{2}{(x+1)(x^2+1)}dx$

2) En déduire l'intégrale : $J=\int \frac{\sin x}{1-\cos x+\sin}$

3) Résoudre l'équa. diff. : $y'(x)-y(x)=\frac{}{(x+}$

4) Trouver la solution de (E) qui verifie : $y($

Solution des exercices d'analyse II

Exercice 1.

- $I = \int \frac{x^4 - 3x + 1}{x^2 - x + 3} dx$;

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 3x + 1 & x^2 - x + 3 \\ \vdots & \overline{x^2 + x - 2} \\ -8x + 7 & \end{array}$$

Donc $I = \int \left[x^2 + x - 2 + \frac{-8x + 7}{x^2 - x + 3} \right] dx$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + \underbrace{\int \frac{-8x + 7}{x^2 - x + 3} dx}_{= I_1}$$

Calculons I_1

$I_1 = \int \frac{-8x + 7}{x^2 - x + 3} dx$

$$\left(\begin{array}{l} u = x^2 - x + 3 \\ u' = 2x - 1 \\ \text{On a: } -8x + 7 = -8x + 4 + 3 \\ \qquad\qquad\quad = -4(2x - 1) + 3 \end{array} \right)$$

$I_1 = \int \frac{-4(2x - 1) + 3}{x^2 - x + 3} dx$

$$= -4 \int \frac{2x - 1}{x^2 - x + 3} dx + 3 \int \frac{1}{x^2 - x + 3} dx$$

$$= -4 \ln(x^2 - x + 3) + I_2$$

Calculons I_2

$$I_2 = \int \frac{1}{x^2 - x + 3}\, dx \quad ; \text{ on a: } x^2 - x + 3 = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}$$

donc : $I_2 = \displaystyle\int \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}}\, dx$

Rappel:

$$\left(\int \frac{1}{(x+\alpha)^2 + \beta^2}\, dx = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg}\left[\frac{1}{\beta}(x+\alpha)\right] \right)$$

avec $\alpha = -\frac{1}{2}$

$\beta = \frac{\sqrt{11}}{2}$

Ainsi

$$I_2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{11}}{2}} \operatorname{arctg}\left[\frac{1}{\frac{\sqrt{11}}{2}}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{2\sqrt{11}}{11} \operatorname{arctg}\left[\frac{2\sqrt{11}}{11}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right] + C$$

On remplace :

$$I = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x - 4\ln(x^2 - x + 3) + \frac{6\sqrt{11}}{11} \operatorname{arctg}\left[\frac{2\sqrt{11}}{11}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right] + C$$

- $J = \displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+1}}\, dx$

Rappel: $\displaystyle\int f\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}\right] dx$

on pose $\dfrac{ax+b}{cx+d} = t^k$

avec $k = \text{ppcm}(q_1, \ldots, q_n)$

On a : $J = \int \frac{x}{(x+1)^{\frac{1}{2}} - (x+1)^{\frac{1}{3}}} dx$

on pose : $x+1 = t^k$; avec $k = ppcm(2,3) = 6$

i.e $x+1 = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5 dt$

Ainsi $J = \int \frac{t^6 - 1}{(t^6)^{\frac{1}{2}} - (t^6)^{\frac{1}{3}}} \cdot 6t^5 dt$

$$= 6\int \frac{(t^6-1)\,t^5}{t^3 - t^2} dt = 6\int \frac{(t^6-1)\,t^5}{t^2(t-1)} dt$$

$$= 6\int \frac{(t^6-1)t^3}{t-1} dt = 6\int \frac{t^9 - t^3}{t-1} dt$$

$$= 6\int [t^8 + t^7 + t^6 + t^5 + t^4 + t^3] dt$$

$$\left(\begin{array}{l|l} t^9 - t^3 & t-1 \\ \hline \vdots & t^8 + t^7 + t^6 \\ \vdots & + t^5 + t^4 + t^3 \\ 0 & \end{array}\right)$$

$J = 6\left(\frac{t^9}{9} + \frac{t^8}{8} + \frac{t^7}{7} + \frac{t^6}{6} + \frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{4}\right) + c$ $\left(\begin{array}{l} \text{comme :} \\ x+1 = t^6 \\ \text{donc } t = \sqrt[6]{x+1} \end{array}\right)$

puis on remplace

t par $\sqrt[6]{x+1}$ $\left(\text{i.e } t = (x+1)^{\frac{1}{6}}\right)$

• $K = \int x\sqrt{x^2+2x+5}\,dx$ $\left(\begin{array}{l} \text{on a: } u = x^2+2x+5 \\ u' = 2x+2 \end{array}\right)$

$= \frac{1}{2}\int [(2x+2)-2]\sqrt{x^2+2x+5}\;dx$

$= \frac{1}{2}\left[\int (2x+2)\sqrt{x^2+2x+5}\,dx - 2\int\sqrt{x^2+2x+5}\,dx\right]$

$= \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{3}\left(x^2+2x+5\right)^{\frac{3}{2}} - \int\sqrt{x^2+2x+5}\,dx$

$\left(\text{car}: \int u'\sqrt{u}\,dx = \frac{2}{3}(u)^{\frac{3}{2}}\right)$

$K = \frac{1}{3}\left(x^2+2x+5\right)^{\frac{3}{2}} - K_1$

Calculons $K_1 = \int\sqrt{x^2+2x+5}$

on a: $x^2+2x+5 = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$

$= (x+1)^2+4$

Donc $K_1 = \int\sqrt{(x+1)^2+2^2}\;dx$

<u>Rappel</u>: $\int\sqrt{(x+\alpha)^2+\beta^2}\;dx$; avec $\alpha = 1$; $\beta = 2$	on pose: $x+\alpha = \beta\,sh\,t$ $dx = \beta\,ch\,t\,dt$

On pose : $x+1 = 2\,sh t$ $\left(\Rightarrow t = argsh\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)$

$dx = 2\,ch t\,dt$

On remplace dans K_1 :

$$K_1 = \int \sqrt{(2\,sh t)^2 + 2^2}\,.\,2\,ch t\,dt$$

$$= 2\int \sqrt{4(sh^2 t + 1)}\,.\,ch t\,dt$$

$$= 4 \int \sqrt{ch^2 t}\,.\,ch t\,dt$$

$\left(\begin{array}{l}\text{Comme : } ch t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} > 0 \\ \text{alors } \sqrt{ch^2 t} = ch t\end{array}\right)$

$$= 4\int ch t\,.\,ch t\,dt$$

$$= 4 \int ch^2 t\,dt$$

$\left(\text{On a : } ch^2 t = \frac{1 + ch(2t)}{2}\right)$

$$= 2 \int \left[1 + ch(2t)\right] dt$$

$$= 2\left(t + \frac{1}{2} sh(2t)\right) + c = 2t + sh(2t) + c$$

$$= 2\,argsh\left(\frac{x+1}{2}\right) + sh\left(2\,argsh\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) + c$$

Ainsi $\boxed{K = \frac{1}{3}(x^2+2x+5)^{\frac{3}{2}} - 2\,argsh\left(\frac{x+1}{2}\right) - sh\left(2\,argsh\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) - c}$

Exercice 2 : $2y'' + y' + y = ch^2 x \ldots (E)$

1] Déterminons une solution particulière de (E)

On résoudre : $2y'' + y' + y = 0 \ldots (E_0)$

Soit : $2r^2 + r + 1 = 0 \ldots (C)$

$\Delta = -7 < 0$ $\begin{cases} r_1 = -\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{7}}{4} \\ r_2 = -\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{7}}{4} \end{cases}$ $\begin{pmatrix} p = -\frac{1}{4} \\ s = \frac{\sqrt{7}}{4} \end{pmatrix}$

Donc la sol. générale de (E_0) est :

$$y_0 = \left[c_1 \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{4}x\right) + c_2 \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{4}x\right)\right] e^{-\frac{1}{4}x}$$

d'autre part :

Soit $f(x) = ch^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{2x} + e^{-2x} + 2\right)$$

$$= \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{2}$$

Ainsi : la sol. part. de (E) est : $y_1 + y_2 + y_3$

Avec :

Scanné avec CamScanner

• y_1 est une sol. part. de: $2y''+y'+y=\frac{1}{4}e^{2x}$ .... (E_1)

avec : $P(x)=\frac{1}{4}$ ($\Rightarrow d^{\circ}P=0$)

et $\alpha=2$

la forme de $y_1=x^k.Q(x)\,e^{\alpha x}$

Comme $\alpha=2$ n'est pas une solution de $(C) \Rightarrow k=0$

et $d^{\circ}Q=d^{\circ}P=0 \Rightarrow Q(x)=a$

Donc $y_1=x^0.\,a\,e^{2x}$ i.e. $y_1=a\,e^{2x}$; $a=?$

Calculons $y_1'=2a\,e^{2x}$; $y_1''=4a\,e^{2x}$

et on remplace dans (E_1):

$$8a\,e^{\cancel{2x}}+2a\,e^{\cancel{2x}}+a\,e^{\cancel{2x}}=\frac{1}{4}e^{\cancel{2x}}$$

$$11a=\frac{1}{4} \Rightarrow a=\frac{1}{44}$$

Donc $y_1=\frac{1}{44}e^{2x}$

• y_2 est une sol. part. de : $2y'' + y' + y = \frac{1}{4} e^{-2x} \ldots (E_2)$

avec $P(x) = \frac{1}{4}$ $(\Rightarrow d° P = 0)$

et $\alpha = -2$

la forme de $y_2 = x^k \cdot Q(x) e^{\alpha x}$

Comme $\alpha = -2$ n'est pas une solution de $(c) \Rightarrow k = 0$

et $d° Q = d° P = 0 \Rightarrow Q(x) = b$

Donc $y_2 = x^0 \cdot b \cdot e^{-2x}$ i.e $y_2 = b e^{-2x}$; $b = ?$

Calculons $y_2' = -2b e^{-2x}$; $y_2'' = 4b e^{-2x}$

et on remplace dans (E_2) :

$$8b \cancel{e^{-2x}} - 2b \cancel{e^{-2x}} + b \cancel{e^{-2x}} = \frac{1}{4} \cancel{e^{-2x}}$$

$$7b = \frac{1}{4} \Rightarrow b = \frac{1}{28}$$

Donc $y_2 = \frac{1}{28} e^{-2x}$

• y_3 est une sol. part. de : $2y'' + y' + y = \frac{1}{2} \cdots (E_3)$

$= \frac{1}{2} e^{0.x}$

avec $P(x) = \frac{1}{2}$ ($\Rightarrow d^{\circ} P = 0$)

et $\alpha = 0$

la forme de $y_3 = x^k \cdot Q(x) \cdot e^{\alpha x}$

Comme $\alpha = 0$ n'est pas une solution de (C) $\Rightarrow k = 0$

et $d^{\circ} Q = d^{\circ} P = 0 \Rightarrow Q(x) = c$

Donc $y_3 = x^0 . c . e^{0.x}$ i.e. $y_3 = c$; $c = ?$

Calculons $y_3' = 0$ et $y_3'' = 0$

et on remplace dans (E_3)

$2(0) + 0 + c = \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{1}{2}$

Donc $y_3 = \frac{1}{2}$

Ainsi la sol. part. de (E) est

$y_1 + y_2 + y_3 = \frac{1}{44} e^{2x} + \frac{1}{28} e^{-2x} + \frac{1}{2}$

2] On résoudre l'équation : $2y''+y'+y = ch^2 x \dots (E)$

la sol. générale de (E) est:

$$y = y_0 + y_1 + y_2 + y_3$$

i.e. $\boxed{y = \left[c_1 \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{4}x\right) + c_2 \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{4}x\right)\right] e^{-\frac{1}{4}x} + \frac{1}{44} e^{2x} + \frac{1}{28} e^{-2x} + \frac{1}{2}}$

3] trouvons la solution de (E) qui verifie

$$y(0) = \frac{120}{77} \quad \text{et} \quad y'(0) = 1$$

i.e. Déterminons c_1 et c_2

On a:

* $y(0) = c_2 + \frac{1}{44} + \frac{1}{28} + \frac{1}{2}$

$$= c_2 + \frac{43}{77} = \frac{120}{77} \Rightarrow c_2 = 1$$

* Calculons y'

On a : $y = \left[c_1 \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{4}x\right) + \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{4}x\right)\right] e^{-\frac{1}{4}x} + \frac{1}{44} e^{2x} + \frac{1}{28} e^{-2x} + \frac{1}{2}$

Donc : $y' = \left[c_1 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4}\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{4}x\right) - \frac{\sqrt{7}}{4}\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{4}x\right)\right] e^{-\frac{1}{4}x}$

$$- \frac{1}{4}\left[c_1 \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{4}x\right) + \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{4}x\right)\right] e^{-\frac{1}{4}x}$$

$$+ \frac{1}{22}e^{2x} - \frac{1}{14}e^{-2x}$$

Calculons :

$$y'(0) = \frac{\sqrt{7}}{4}c_1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{22} - \frac{1}{14}$$

$$= \frac{\sqrt{7}}{4}c_1 - \frac{85}{308}$$

$$y'(0) = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{7}}{4}c_1 - \frac{85}{308} = 1$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{393\sqrt{7}}{539}$$

Donc la solution de (E) qui vérifie les conditions

est $y = \left[\frac{393\sqrt{7}}{539}\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{4}x\right) + \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{4}x\right)\right] e^{-\frac{1}{4}x}$

$$+ \frac{1}{44}e^{2x} + \frac{1}{28}e^{-2x} + \frac{1}{2}$$

Exercice 3. $y' + xy + xy^4 = 0 \;\dots\; (E)$

i.e. $y' + xy = y^4 \cdot (-x)$ (équation de Bernoulli avec : $k = 4$)

$\div y^4 \Rightarrow y' \cdot y^{-4} + x y^{-3} = -x \quad (y \neq 0)$

[pour $y = 0$ est une sol. part. de (E)]

On pose $z = y^{1-4} \Rightarrow z = y^{-3}$

donc $z' = -3 y' y^{-4}$

On remplace : $-\frac{1}{3} z' + x z = -x \;\dots\; (E_z)$

(équ. linéaire du 1er ordre)

Résolvons : $-\frac{1}{3} z' + x z = 0 \;\dots\; (E_{z_0})$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3}\frac{dz}{dx} + xz = 0$$

$$-\frac{1}{3}\frac{dz}{dx} = -xz$$

$$\frac{1}{z}\, dz = 3x\, dx \quad \text{avec } z \neq 0$$

[pour $z = 0$, on remplace dans (E_{z_0}) on trouve $0 = 0$, i.e. $z = 0$ est une sol. de (E_{z_0})]

$$\Rightarrow \int \frac{1}{z} dz = 3 \int x \, dx$$

$$\Rightarrow \ln|z| + c_1 = \frac{3}{2} x^2 + c_1$$

$$\Rightarrow \ln|z| = \frac{3}{2} x^2 + c_3 \quad (\text{avec } c_3 = c_1 - c_2)$$

$$\Rightarrow |z| = e^{\frac{3}{2}x^2} \cdot e^{c_3}$$

$$\Rightarrow z = C \, e^{\frac{3}{2}x^2} \; ; \text{ avec } C = \pm e^{c_3}$$

Ainsi la sol. générale de (E_z) est

$$z = c(x) \, e^{\frac{3}{2}x^2} \; ; \quad c(x) = ?$$

Calculons $z' = c'(x) \, e^{\frac{3}{2}x^2} + 3x \, . \, K(x) \, e^{\frac{3}{2}x^2}$

On remplace z et z' dans (E_z)

.... : $c'(x) = 3x e^{-\frac{3}{2}x^2}$

$\boxed{\text{Rappel: } \int u' . e^u dx = e^u}$

$$c'(x) = -\left[(-3x) \, e^{-\frac{3}{2}x^2}\right]$$

$$\Rightarrow c(x) = -\int (-3x) \cdot e^{-\frac{3}{2}x^2} dx$$

$$\Rightarrow c(x) = - e^{-\frac{3}{2}x^2} + k$$

Ainsi la sol. générale de (E_3)

est : $z = \left[-e^{-\frac{3}{2}x^2} + k\right] \cdot e^{\frac{3}{2}x^2}$

$\Rightarrow z = -1 + k\, e^{\frac{3}{2}x^2}$

et comme $z = y^{-3} \Rightarrow z = \frac{1}{y^3} \Rightarrow y^3 = \frac{1}{z}$

$\Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt[3]{z}}$

i.e. la solution générale de (E) est

de la forme : $\boxed{y = \frac{1}{\sqrt[3]{-1 + k\, e^{\frac{3}{2}x^2}}}}$

2) Trouvons la sol. de (E) telle que : $y(0) = 1$

i.e. Trouvons k

$y(0) = \frac{1}{\sqrt[3]{-1+k}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{-1+k}} = 1 \Rightarrow \sqrt[3]{k-1} = 1$

$\Rightarrow k - 1 = 1 \Rightarrow k = 1$

Donc la sol. de (E) qui vérifie cette condition

est $\boxed{y = \frac{1}{\sqrt[3]{-1 + 2\, e^{\frac{3}{2}x^2}}}}$

Exercice 4.

1) Calculons $I = \int \frac{2}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$

on a : $\frac{2}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+1}$ $\begin{pmatrix} a=1 \\ b=-1 \\ c=1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{x+1} + \frac{-x+1}{x^2+1}$ $\left(\begin{matrix} u = x^2+1 \\ u' = 2x \end{matrix} \right.$

$= \frac{1}{x+1} - \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}$

$= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) + \frac{1}{x^2+1}$

Donc $I = \int \left[\frac{1}{x+1}\right] dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx$

$$\boxed{I = \ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg}(x) + C}$$

2) En déduire $J = \int \frac{\sin x}{1-\cos x+\sin x}\,dx$

posons : $t = tg\left(\frac{x}{2}\right)$

et $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$

On remplace dans J et on trouve : . . . .

$$J = \int \frac{2}{(t+1)(1+t^2)} \, dt$$

et d'après la question 1]

$$J = \ln|t+1| - \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + \operatorname{arctg}(t) + c$$

donc : $\boxed{J = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2}\right)+1\right| - \frac{1}{2}\ln\left(tg^2\left(\frac{x}{2}\right)+1\right) + \frac{x}{2} + c}$

3] Résoudre l'équ. diff. $y' - y = \frac{2}{(x+1)(x^2+1)} e^x \ldots (E)$

Résolvons : $y' - y = 0 \ldots (E_0)$

$$\frac{dy}{dx} - y = 0 \Rightarrow \frac{1}{y}\,dy = dx \quad ; \; y \neq 0$$

[pour $y = 0$, on remplace dans $(E_0) \Rightarrow 0 = 0$

i.e. $y = 0$ est une sol. de (E_0)]

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int dx \Rightarrow \ln|y| + c_1 = x + c_2$$

$$\Rightarrow \ln|y| = x + c_3 \quad (\text{avec } c_3 = c_2 - c_1)$$

$$|y| = e^x \cdot e^{c_3} \Rightarrow y = c\,e^x \; ; \; c = \pm e^{c_3}$$

Ainsi la sol. générale de (E)

est $y = c(x) \cdot e^{x}$; $c(x) = ?$

Calculons $y' = c'(x) e^{x} + c(x) e^{x}$

On remplace y et y' dans (E), on trouve

.... $c'(x) = \dfrac{2}{(x+1)(x^2+1)} \Rightarrow c(x) = \displaystyle\int \frac{2}{(x+1)(x^2+1)} dx$

i.e $c(x) = I = \ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \operatorname{arctg}(x) + k$

Ainsi sol. géné. de (E) est de la forme

$$\boxed{y = \left(\ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \operatorname{arctg}(x) + k \right) e^{x}}$$

4) Trouvons la sol. de (E) qui verifie $y(1) = 0$ (i.e trouvons k)

Calculons : $y(1) = \frac{1}{2} \ln(2) + \frac{\pi}{4} + k$

et comme : $y(1) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \ln(2) + \frac{\pi}{4} + k = 0$

$\Rightarrow k = -\frac{1}{2} \ln(2) - \frac{\pi}{4}$

Donc sol. de (E) qui verifie cette condition

est : $\boxed{y = \left(\ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2} \ln(2) - \frac{\pi}{4} \right) e^{x}}$