Corrigé de l'examen final S1 22/23

Exercice 1 : (6pts)

$$u_0=0 \;,\; u_{n+1}=\frac{5u_n+4}{u_n+2}$$

1) $0\le u_n<4$; $\forall n\in\mathbb{N}$:

0,25 (•) pour $n=0$; $0\le u_0<4$; vraie

(•) $0\le u_n<4 \overset{?}{\Rightarrow} 0\le u_{n+1}<4$

0,75 On a : $0\le u_n<4 \iff 4u_n+4\le 5u_n+4<4u_n+8$

$$\iff 0\le \frac{4u_n+4}{u_n+2}\le u_{n+1}<4$$

$$\Rightarrow 0\le u_{n+1}<4.$$

(•) Donc $\forall n\in\mathbb{N}$: $0\le u_n<4$

0,25 2) $u_{n+1}-u_n=\frac{5u_n+4}{u_n+2}-u_n=\frac{-u_n^2+3u_n+4}{u_n+2}$

0,5 $=\frac{(u_n+1)(4-u_n)}{u_n+2}>0$ car $0\le u_n<4$

0,25

	-1		0		4	
$-$		$+$		$+$		$-$

1 $(u_n)_n$ est croissante et majorée donc convergente vers sa borne supérieure.

2ème méthode pour la question 1 :

$$u_{n+1}=\frac{5u_n+4}{u_n+2}=\frac{(5u_n+10)-10+4}{u_n+2}$$

$$=5-\frac{6}{u_n+2}$$

On a : $0\le u_n<4 \iff 2\le u_n+2<6$

$$\iff \frac{1}{6}<\frac{1}{u_n+2}\le\frac{1}{2} \Rightarrow 0\le 2\le 5-\frac{6}{u_n+2}<4$$

$$\iff 0\le u_{n+1}<4.$$

Exercice 2 (6 pts)

$f(x) = 1 - x\left[\frac{1}{x}\right]$

0,5 1) On a : $\forall t \in \mathbb{R}$: $[t] \underset{①}{\leq} t \underset{②}{<} [t]+1$

0,5 d'où :

$t-1 \underset{②}{<} [t] \underset{①}{\leq} t$

0,25 2) On pose $t = \frac{1}{x} > 0$

0,25 Q1) $\Rightarrow$ $\frac{1}{x} - 1 < \left[\frac{1}{x}\right] \leq \frac{1}{x}$

0,25 $\Leftrightarrow$ $-1 \leq -x\left[\frac{1}{x}\right] < x - 1$ (car $-x<0$)

0,25 $\Leftrightarrow$ $0 \leq f(x) < x$

3) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = ?$

0,5 Comme $0 \leq f(x) < x$; $\forall x > 0$

alors en passant à la limite, on obtient

0,5 $0 \leq \lim\limits_{x\to 0} f(x) \leq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

Donc f admet un prolongement par continuité en 0 :

0,5 $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

0,5 4) $\forall x > 1$ $0 < \frac{1}{x} < 1 \Rightarrow \left[\frac{1}{x}\right] = 0$

0,5 $\Rightarrow f(x) = \boxed{1}$

0,5 5) $f(1) = 1 - 1 = \boxed{0}$

1 f est discontinue en $x=1$ car $f(1) = 0$

et $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = 1$ (de la Q4)

03

Exercice3 : (08 pts)

1) $0 < a < b$ 0,25

On pose $g(x) = \ln x$ sur $[a, b]$ 0,25

0,25 (•) g est continue sur $[a,b]$; car g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

0,25 (•) g est dérivable sur $]a,b[$; car g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

0,5 A.F

$\Longrightarrow \exists c \in]a,b[\ / \ g(b) - g(a) = g'(c).(b-a).$

$\Leftrightarrow \ln b - \ln a = \dfrac{b-a}{c}$

0,5 $\Leftrightarrow \dfrac{b-a}{\ln b - \ln a} = c$

et comme $c \in]a,b[$ alors : $a < \dfrac{b-a}{\ln b - \ln a} < b.$

0,5 2) f est dérivable sur $[0,1]$; car elle est bien définie sur $[0,1]$ et que c'est la somme et la composée de fonctions dérivables sur $[0,1]$.

0,5 $f'(t) = \dfrac{b-a}{(1-t)a+tb} + \ln a - \ln b \ ; \ \forall t \in [0,1].$

0,25 3) $f(0) = f(1) = 0$

0,25 f est continue sur $[0,1]$

0,25 f est dérivable sur $]0,1[$

0,25 $\left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \underset{\text{Rolle}}{\overset{\text{th}}{\Longrightarrow}} \exists t_0 \in]0,1[\ / \ f'(t_0) = 0$

0,5 4) $f''(t) = \dfrac{-(b-a)^2}{((1-t)a+tb)^2} < 0 \ ; \ \forall t \in [0,1].$

0,5 Donc f' est décroissante sur $[0,1]$.

5) $\forall t \in [0,1]$; on a : $t \leq t_0$ ou $t \geq t_0$.

0,75 (•) Si $t \leq t_0 \Longrightarrow f'(t) \geq f'(t_0)$

$\Leftrightarrow f'(t) \geq 0$

0,75 (•) Si $t \geq t_0 \Longrightarrow f'(t) \leq f'(t_0)$

$\Leftrightarrow f'(t) \leq 0$

1 3) a) $V_n = \dfrac{U_n - 4}{U_n + 1}$

$V_{n+1} = \dfrac{U_{n+1} - 4}{U_{n+1} + 1} = \dfrac{\dfrac{5U_n + 4}{U_n + 2} - 4}{\dfrac{5U_n + 4}{U_n + 2} + 1}$

$= \dfrac{U_n - 4}{6(U_n + 1)}$

$\Rightarrow V_{n+1} = \dfrac{1}{6} V_n$

alors $(V_n)_n$ est une suite géométrique de raison $r = \dfrac{1}{6}$

0,5 b) $V_n = V_0 \cdot \dfrac{1}{6^n} = \dfrac{-4}{6^n}$; $\forall n \in \mathbb{N}$.

0,5 et $V_n = \dfrac{U_n - 4}{U_n + 1} \iff U_n = \dfrac{4 + V_n}{1 - V_n}$

0,5 d'où

$U_n = \dfrac{4 \cdot 6^n - 4}{6^n + 4}$; $\forall n \in \mathbb{N}$.

0,5 $\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{4 \cdot 6^n - 4}{6^n + 4} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{6^n(4 - 4 \cdot 6^{-n})}{6^n(1 + 4 \cdot 6^{-n})}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 4$.

Alors le signe de f' est donné comme suit :

0		t_0		1
	$+$		$-$	

0,5 c) **Tableau de variations de f**

t	0		t_0		1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$f(t_0)$	$\searrow$	0

0,5 b) On remarque que : $\forall t \in [0,1] : f(t) \geq 0$.

0,5 $\Longleftrightarrow \ln[(1-t)a + tb] \geq (1-t)\ln a + t \ln b$