1 Parties bornées de $\mathbb{R}$

Définition: Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. On dit que A est majorée si

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A; x \leq M.$$

Le réel M est appelé majorant de A. Si $\exists M' \in \mathbb{R}/M \leq M'$, alors M' est aussi un majorant de A, en effet, $x \leq M$ et $M \leq M'$ alors $x \leq M'$.

On en déduit que le majorant de A n'est pas unique.

L'ensemble des majorants de A est noté $Maj\left(A\right) = \left[M, +\infty\right[$.

2. On dit que A est minorée si

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A; x \geq m.$$

Le réel m est appelé minorant de A. Si $\exists m' \in \mathbb{R} / m \geq m'$, alors m' est aussi un minorant de A, en effet, $x \geq m$ et $m \geq m'$ alors $x \geq m'$.

On en déduit que le minorant de A n'est pas unique.

L'ensemble des minorants de A est noté $Min\,(A) = \left]-\infty, m\right]$.

3. On dit que A est bornée si elle est majorée et minorée.

c'est à dire

$$\exists M \in \mathbb{R}, \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A; m \leq x \leq M.$$

ou bien

$$\exists a > 0, \forall x \in A; |x| \leq a.$$

Exemple:

1. $A = [0, 2]$, $\forall x \in A, 0 \leq x \leq 2$ donc A bornée car elle est majorée par 2 et minorée par 0.

2 est un majorant de A et $Maj(A) = [2, +\infty[$. 0 est un minorant de A et $Min(A) =]-\infty, 0]$.

2. $A =]0, 2[$, $\forall x \in A, 0 < x < 2$ donc A bornée car elle est majorée par 2 et minorée par 0.

2 est un majorant de A et $Maj(A) = [2, +\infty[$. 0 est un minorant de A et $Min(A) =]-\infty, 0]$.

3. $A =]-\infty, 3]$, $\forall x \in A, x \leq 3$ donc A n'est pas bornée car elle n'est pas minorée mais elle est majorée par 3.

1.1 Maximum et minimum

Définition:

1. Une partie A non vide de $\mathbb{R}$ admet un maximum α s'il existe un majorant de A appartenant à A.

c'est à dire $\begin{cases} \alpha \text{ un majorant de } A \\ \alpha \in A \end{cases}$ et on note $\max A = \alpha$.

2. Une partie A non vide de $\mathbb{R}$ admet un minimum β s'il existe un minorant de A appartenant à A.

c'est à dire $\begin{cases} \beta \text{ un minorant de } A \\ \beta \in A \end{cases}$ et on note $\min A = \beta$.

Remarque: $\max A$ et $\min A$ s'ils existent, ils sont unique.

2 Borne supérieure et borne inférieure

Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$.

1. On appelle borne supérieure de A le plus petit des majorants de A, on la note par $\sup A$.

c'est à dire $\begin{cases} \forall x \in A, x \leq \sup A \\ \forall x \in A, x \leq M \end{cases}$ alors $\sup A \leq M$.

2. On appelle borne inférieure de A le plus grand des minorants de A, on la note par $\inf A$.

c'est à dire $\begin{cases} \forall x \in A, x \geq \inf A \\ \forall x \in A, x \geq m \end{cases}$ alors $\inf A \geq m$.

Exemple:

1. $A = [-1, 1], \forall x \in A, -1 \leq x \leq 1$ donc A bornée car elle est majorée par 1 et minorée par -1.

1 est un majorant de A et $Maj(A) = [1, +\infty[$ alors $\sup A = 1$. -1 est un minorant de A et $Min(A) =]-\infty, -1]$ alors $\inf A = -1$.

2. $A = [0, 1[\,, \forall x \in A, 0 \leq x < 1$ donc A bornée car elle est majorée par 1 et minorée par 0.

1 est un majorant de A et $Maj\,(A) = [1, +\infty[$ alors $\sup A = 1$. 0 est un minorant de A et $Min\,(A) =]-\infty, 0]$ alors $\inf A = 0$.

Remarque: 1. $\sup A$ et $\inf A$ s'ils existent, ils sont unique.

2. Ne pas confondre $\sup A$ avec $\max A$ et $\inf A$ avec $\min A$.

En effet, Si A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$,

Si $\sup A \in A$ alors $\max A = \sup A$.

Si $\inf A \in A$ alors $\min A = \inf A$.

Si $\sup A \notin A$ alors $\max A$ n'existe pas.

Si $\inf A \notin A$ alors $\min A$ n'existe pas.

Si A n'admet pas une borne supérieure (resp. une borne inférieure), on écrit $\sup A = +\infty$ (resp. $\inf A = -\infty$).

Exemple:

1. $A = [0,1[$, d'aprés l'exemple précédent on a trouvé $\sup A = 1 \notin A$ alors $\max A$ n'existe pas. $\inf A = 0 \in A$ alors $\min A = 0$.

2. $A = \left\{x \in \mathbb{Q}; x^2 \leq 2\right\}$

$\forall x \in A, x \in \mathbb{Q}$ et $x^2 \leq 2 \Leftrightarrow |x| \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ donc A est bornée

$Maj\,(A) = \left[\sqrt{2}, +\infty\right[\Rightarrow \sup A = \sqrt{2} \notin A$ (car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$) alors $\max A$ n'existe pas.

$Min\,(A) = \left]-\infty, -\sqrt{2}\right] \Rightarrow \inf A = -\sqrt{2} \notin A$ (car -$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$) alors $\min A$ n'existe pas.

2.1 Caractérisation de la borne supérieure et la borne inférieure

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. Si A est majorée, alors

$$\sup A = M \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A; x \leq M \text{........} M \text{ majorant} \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A; M - \varepsilon < x_\varepsilon \text{.....le plus petit} \\ \text{des majorants} \end{cases}$$

2. Si A est minorée, alors

$$\inf A = m \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A; x \geq m \text{........} m \text{ minorant} \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A; x_\varepsilon < m + \varepsilon \text{.....le plus grand} \\ \text{des minorants} \end{cases}$$

Exemple:

1. $A = \left\{ \left(3 - \frac{1}{n}\right) \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}^* \right\}$, Montrer que $\sup A = 3$ et $\inf A = 2$ et déterminer $\max A$ et $\min A$.

les éléments de l'ensemble A sont de la forme $3 - \frac{1}{n}$ tels que $n \geq 1$. Montrons d'abord que A est bornée.

Soit $x \in A$ alors $x = 3 - \frac{1}{n}, n \geq 1$.

On a $n \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\frac{1}{n} < 0 \Rightarrow 2 \leq 1 - \frac{1}{n} < 3$, donc $\forall x \in A, 2 \leq x < 3$, A est bornée.

$Maj\,(A) = [3, +\infty[\,, Min\,(A) =]-\infty, 2]\,.$

Montrons que le $\sup A = 3$.

$$\sup A = 3 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \forall x \in A; x \leq 3 \text{ elle est vérifiée car } x < 3 \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A; 3 - \varepsilon < x_\varepsilon \end{array} \right.$$

$x_\varepsilon \in A, x_\varepsilon = 3 - \frac{1}{n_\varepsilon}$, pour chercher x_ε on cherche n_ε. Soit $\varepsilon > 0$, cherchons $n_\varepsilon \geq 1$ tel que $3 - \varepsilon < 3 - \frac{1}{n_\varepsilon} \Rightarrow -\varepsilon < -\frac{1}{n_\varepsilon} \Rightarrow n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$, alors Il suffit de prendre $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ (ou bien n_ε existe d'aprés Archimed

1ère formule). On remarque que $\sup A = 3 \notin A$ sinon $3 = 3 - \frac{1}{n} \Leftrightarrow -\frac{1}{n} = 0$ absurde d'où $\max A$ n'existe pas.

Montrons que $\inf A = 2$.

2 est un minorant de A et $2 \in A$ pour $n = 1$ donc $\min A = 2 = \inf A$.

2. $A = \left\{ \frac{n+1}{n-1}; n \geq 2 \right\}$.

Montrer que $\sup A = 3$ et $\inf A = 1$ et déterminer $\max A$ et $\min A$.

les éléments de l'ensemble A sont de la forme $\frac{n+1}{n-1}$ tels que $n \geq 2$. Montrons d'abord que A est bornée.

Soit $x \in A$ alors $x = \frac{n+1}{n-1} = 1 + \frac{2}{n-1}, n \geq 2$.

On a $n \geq 2 \Rightarrow n - 1 \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n-1} \leq 1 \Rightarrow 0 < \frac{2}{n-1} \leq 2 \Rightarrow 1 < 1 + \frac{2}{n-1} \leq 3$, donc $\forall x \in A, 1 < x \leq 3$, A est bornée.

$Maj\,(A) = [3, +\infty[\,, Min\,(A) =]-\infty, 1]\,.$

Montrons que $\sup A = 3$.

3 est un majorant de A et $3 \in A$ pour $n = 2$ donc $\max A = 3 = \sup A$.

Montrons que $\inf A = 1$.

$$\inf A = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A; x \geq 1 \text{ elle est vérifiée car } x > 1 \\ \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \geq 2; 1 + \frac{2}{n_\varepsilon - 1} < 1 + \varepsilon \end{cases}$$

cherchons $n_\varepsilon \geq 2$ tel que $1 + \frac{2}{n_\varepsilon - 1} < 1 + \varepsilon \Rightarrow \frac{2}{n_\varepsilon - 1} < \varepsilon \Rightarrow n_\varepsilon > \frac{2}{\varepsilon} + 1$, alors Il suffit de prendre $n_\varepsilon = \left[\frac{2}{\varepsilon} + 1\right] + 1$ (ou bien n_ε existe d'aprés Archimed 1ère formule). On remarque que $\inf A = 1 \notin A$ sinon $1 = 1 + \frac{2}{n-1} \Leftrightarrow -\frac{2}{n-1} = 0$ absurde d'où $\min A$ n'existe pas.

2.2 Propriétés de la borne supérieure et la borne inférieure

Soient A et B deux parties non vide de $\mathbb{R}$.

1. Si $A \subset B$ et B est bornée alors A est bornée et on a

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$$

2. Si A et B sont bornées alors

$$\begin{aligned} \sup(A \cup B) &= \max(\sup A, \sup B) \\ \inf(A \cup B) &= \min(\inf A, \inf B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sup(A \cap B) &\leq \min(\sup A, \sup B) \\ \inf(A \cap B) &\geq \max(\inf A, \inf B) \end{aligned}$$

$$\sup(-A) = -\inf A \text{ avec } -A = \{-x; x \in A\}$$

¨**Preuve:**

1. Puisque B est bornée alors $\sup B$ et $\inf B$ existent et $\forall x \in B, \inf B \leq x \leq \sup B$ et puisque $A \subset B$ alors $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$, donc $\inf B \leq x \leq \sup B$ alors A est bornée (car $x \in A$)

Pour tout $x \in A$, $\inf B \leq x \leq \sup B$ donc $\sup B$ est un majorant de A mais par définition $\sup A$ est le plus petit des majorants de A alors $\sup A \leq \sup B$. $\inf B$ est un minorant de A mais par définition $\inf A$ est le plus grand des minorants de A alors $\inf A \geq \inf B$ d'où $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$.

Exemple:

$A = \left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n, n \geq 1 \right\}$, déterminer $\sup A$ et $\inf A$.

On a $(-1)^n = \begin{cases} 1, & \text{si } n \text{ est pair} \\ -1, & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$, on pose alors $B = \left\{ \frac{1}{2n} + 1, n \geq 1 \right\}$ et $C = \left\{ \frac{1}{2n+1} - 1, n \geq 1 \right\}$.

On remarque que $A = B \cup C$. Cherchons $\sup B, \sup C, \inf B, \inf C$

$\forall x \in B, x = \frac{1}{2n} + 1$

On a $n \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 1 < 1 + \frac{1}{2n} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow B$ est bornée.

Montrons que $\sup B = \frac{3}{2}$ et $\inf B = 1$.

$\frac{3}{2}$ est un majorant de B et $\frac{3}{2} \in B$ pour $n = 1$ alors $\max B = \frac{3}{2} = \sup B$.

Montrons que $\inf B = 1$

$$\inf B = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in B; x \geq 1 \text{ elle est vérifiée car } x > 1 \\ \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \geq 1; 1 + \frac{1}{2n_\varepsilon} < 1 + \varepsilon \end{cases}$$

cherchons $n_\varepsilon \geq 1$ tel que $1 + \frac{1}{2n_\varepsilon} < 1 + \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{2n_\varepsilon} < \varepsilon \Rightarrow n_\varepsilon > \frac{1}{2\varepsilon}$, alors Il suffit de prendre $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{2\varepsilon}\right] + 1$.

D'autre part, $\forall x \in C, x = \frac{1}{2n+1} - 1$.

On a $n \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{2n+1} \leq \frac{1}{3} \Rightarrow -1 < \frac{1}{2n+1} - 1 \leq \frac{-2}{3} \Rightarrow C$ est bornée.

Montrons que $\sup C = \frac{-2}{3}$ et $\inf B = -1$.

$\frac{-2}{3}$ est un majorant de C et $\frac{-2}{3} \in C$ pour $n = 1$ alors $\max C = \frac{-2}{3} = \sup C$.

Montrons que $\inf C = -1$

$$\inf B = -1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \forall x \in C; x \geq 1 \text{ elle est vérifiée car } x > 1 \\ \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \geq 1; \frac{1}{2n_\varepsilon+1} - 1 < -1 + \varepsilon \end{array} \right.$$

cherchons $n_\varepsilon \geq 1$ tel que $\frac{1}{2n_\varepsilon+1} - 1 < -1 + \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{2n_\varepsilon+1} < +\varepsilon \Rightarrow n_\varepsilon > \frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{2}$, alors Il suffit de prendre $n_\varepsilon = \left[\left|\frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{2}\right|\right] + 1$.

Finalement,

$$\begin{aligned} \sup A &= \sup(B \cup C) = \max(\sup B, \sup C) = \max\left(\frac{3}{2}, \frac{-2}{3}\right) \\ \inf A &= \inf(B \cup C) = \min(\inf B, \inf C) = \min(1, -1) = - \end{aligned}$$

2.3 Intervalles

1. **Intervalles ouverts:** Soient $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$ est appelé intervalle ouvert.

2. **Intervalles fermés:** Soient $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$ est appelé intervalle fermé.

3. **Intervalles semi ouverts:** Soient $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, $\begin{cases} [a, b[= \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\} \\ ]a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\} \end{cases}$ sont appelés intervalles semi ouverts.

Théorème: (critère d'intervalle)

A une partie bornée de $\mathbb{R}$.

A est un intervalle $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A, x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow [x_1, x_2] \subset A$.

Voisinage: Soit $x_0 \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, on appelle voisinage de x_0 noté $V_\varepsilon(x_0)$ un intervalle contenant x_0 de la forme

$$V_\varepsilon(x_0) =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$$

$\forall x \in V_{\varepsilon}(x_0)\,; x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x - x_0 < \varepsilon \Leftrightarrow |x - x_0| < \varepsilon.$

Droite réelle achevée

Définition: On appelle droite réelle achevée qu'on note par $\overline{\mathbb{R}}$, l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ muni de la relation d'ordre total,obtenu en prolongeant l'ordre de $\mathbb{R}$ par les conditions:

$\forall x \in \mathbb{R}, -\infty < x$ et $x < +\infty$.

L'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$ est totalement ordonée par la relation définie par $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}, -\infty \leq x$ et $x \leq +\infty$.

Les opérations sur $\mathbb{R}$ s'étendent à $\overline{\mathbb{R}}$ en posant:

$$
\begin{aligned}
x+(+\infty) &= (+\infty)+x=+\infty, \forall x \in \mathbb{R}. \\
x+(-\infty) &= (-\infty)+x=-\infty, \forall x \in \mathbb{R}. \\
x.(+\infty) &= (+\infty).x=\begin{cases} +\infty \text{ si } x>0 \\ -\infty \text{ si } x<0 \end{cases}. \\
x.(-\infty) &= (-\infty).x=\begin{cases} -\infty \text{ si } x>0 \\ +\infty \text{ si } x<0 \end{cases} \\
(+\infty)+(+\infty) &= +\infty. \\
(-\infty)+(-\infty) &= -\infty. \\
(+\infty).(+\infty) &= +\infty. \\
(-\infty).(-\infty) &= +\infty. \\
(+\infty).(-\infty) &= (-\infty).(+\infty)=-\infty..
\end{aligned}
$$

La somme $(+\infty)+(-\infty)$ et le produit $0.(+\infty), 0.(-\infty)$ ne sont pas définis.

Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$:

Théorème: Etant donnée deux nombres réels a et $b/a<b$, il existe au moins un nombre rationnel $r/a<r<b$, on dit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et on note $\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$.

C'est à dire entre deux réels, il existe un rationnel.

Exemple: Montrer que $A = \left\{ r^3 / r \in \mathbb{Q} \right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Soient $x, y \in \mathbb{R} / x < y$, en utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on a $\exists r \in \mathbb{Q} / \sqrt[3]{x} < r < \sqrt[3]{y}$, d'où $x < r^3 < y$ ce qui donne A est dense dans $\mathbb{R}$.