Chapter 1

1.

Chapter 2

2.

Chapter 3

3.

Chapter 4

4.

Chapter 5

Fonctions dérivables

Dérivée d'une fonction en un point:

Définition: Soit I un intervalle de $\mathbb{R}, x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonctionréelle. On dit que f est dérivable au point x_0 si la limite suivante existe et finie

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Cette limite est unique, elle est appelée dérivée de f en x_0 et noté $f'(x_0)$.(on notera aussi $Df(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$.

Remarque: La définition précédente permet d'écrire $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) + \varepsilon(x) / \varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to x_0$,

donc on peut écrire:

$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)(f\prime(x_0) + \varepsilon(x)) / \varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to x_0$.

Si on pose $h = x - x_0$, on obtient

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

Exemple:

1. Si $f = constante$ alors $f'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

2. $f(x) = x^2$.

$$
\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x_0^2 + h^2 + 2x_0h - x_0^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h^2 + 2x_0h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} h + 2x_0 = 2x_0.
\end{aligned}
$$

3. $f(x) = \sin x$

$$
\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sinh - \sin x_0}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x_0 (\cosh - 1) + \cos x_0 \sinh}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x_0 \left(-\frac{h^2}{2}\right)}{h} + \frac{\sinh}{h}\cos x_0 \\
&= \sin x_0 \lim_{h\to 0}\frac{h}{2} + \lim_{h\to 0}\frac{\sinh}{h}\cos x_0 \\
&= \cos x_0.
\end{aligned}
$$

3. $f(x) = \begin{cases} x^2\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right), x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$

$$
f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(2+\sin\frac{1}{x}\right) - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right) = 0.
$$

Dérivée à droite, dérivée à gauche:

Définition: On dit que f est dérivable à droite (resp. à gauche) du point x_0, si le rapport $\frac{f(x) f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie à droite (resp. à gauche), elle est appelée dérivée à droite (resp.à gauche) de f au point x_0, elle est notée $f'_d(x_0)$ ou $f'(x_0+0)$ (resp. $f'_g(x_0)$ ou $f'(x_0-0)$.

f est dérivable au point $x_0 \Leftrightarrow f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$ exiwstent et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Alors on a

$$f'_d(x_0) = f'_g(x_0) = f'(x_0).$$

Exemple:

1. $f(x) = |x|$ continue en 0.

Dérivabilité:

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{|x|-0}{x-0} = \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{x}{x} = 1 = f'_d(0).\\
\lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{|x|-0}{x-0} = \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{-x}{x} = -1 = f'_g(0).
\end{aligned}$$

On a $f'_d(0) \neq f'_g(0)$ alors f n'est pas dérivable en 0.

2. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3)}{|x|}, \text{ si } x \neq 0 \\ 0, \text{ si } x = 0 \end{cases}$

1. Continuité en 0.

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} f(x) &= \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{\sin(x^3)}{x} = \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} x^2 \underbrace{\frac{\sin(x^3)}{x^3}}_{\to 1} = 0 = f(0).\\
\lim_{\substack{< \\ x\to 0}} f(x) &= \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{\sin(x^3)}{-x} = \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} x^2 \frac{\sin(x^3)}{-x^3} = 0 = f(0).
\end{aligned}$$

f est continue en 0.

2. Dérivabilité en 0.

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{\frac{\sin\left(x^3\right)}{x}-0}{x-0} = \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{\sin\left(x^3\right)}{x^2} = \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} x \frac{\sin\left(x^3\right)}{x^3} = 0 = f'_d(0) \\
\lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{\frac{\sin\left(x^3\right)}{-x}-0}{x-0} = \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{\sin\left(x^3\right)}{-x^2} = \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} -x \frac{\sin\left(x^3\right)}{x^3} = 0 = f'_g(0)
\end{aligned}$$

On a $f'_d(0) = f'_g(0)$ alors f est dérivable en 0.

3. $f(x) = \sqrt{x}$. Continue en 0 car $\lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$.

Dérivabilité en 0.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 = f'(0).$$

Alors f est dérivable en 0.

Dérivabilité et continuité

Proposition: Si une fonction est dérivableen un point, elle est continue en ce point.

Preuve

Soit f une fonction dérivable en x_0, alors

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= f'(x_0) + \varepsilon(x) / \varepsilon(x) \to 0 \text{ quand } x \to x_0, \\
f(x) - f(x_0) &= (x-x_0)\left(f'(x_0) + \varepsilon(x)\right) / \varepsilon(x) \to 0 \text{ quand } x \to x_0, \\
f(x) &= f(x_0) + (x-x_0)\left(f'(x_0) + \varepsilon(x)\right) / \varepsilon(x) \to 0 \text{ quand } x \to x_0, \\
\lim_{x\to x_0} f(x) &= \lim_{x\to x_0} f(x_0) + (x-x_0)\left(f'(x_0) + \varepsilon(x)\right) \\
\lim_{x\to x_0} f(x) &= f(x_0),
\end{aligned}$$

alors f est continue en x_0.

Remarque:

1. L'inverse de la proposition est faux.

$$f \text{ est dérivable en } x_0 \Rightarrow f \text{ est continue en } x_0$$

$$f \text{ est continue en } x_0 \not\Rightarrow f \text{ est dérivable en } x_0.$$

2. Contraposé de (f est dérivable en $x_0 \Rightarrow f$ est continue en x_0) est

$$f \text{ n'est pas continue en } x_0 \Rightarrow f \text{ n'est pas dérivable en } x_0.$$

Exemple:

1. $f(x) = |x|$ continue en 0 mais elle n'est pas dérivable en 0.
2. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, x \neq 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$

Continuité en 0.

$\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} \frac{\sin x}{|x|} = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0) \Rightarrow f$ est continue à droite de 0.
$\lim\limits_{\substack{< \\ x \to 0}} \frac{\sin x}{|x|} = \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 0}} \frac{\sin x}{-x} = -1 \neq f(0) \Rightarrow f$ n'est pas continue à gauche de 0.
f n'est pas continue en $0 \Rightarrow f$ n'est pas dérivable en 0.

Interprétation géométrique:

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (\mathcal{C})$ son graphe.

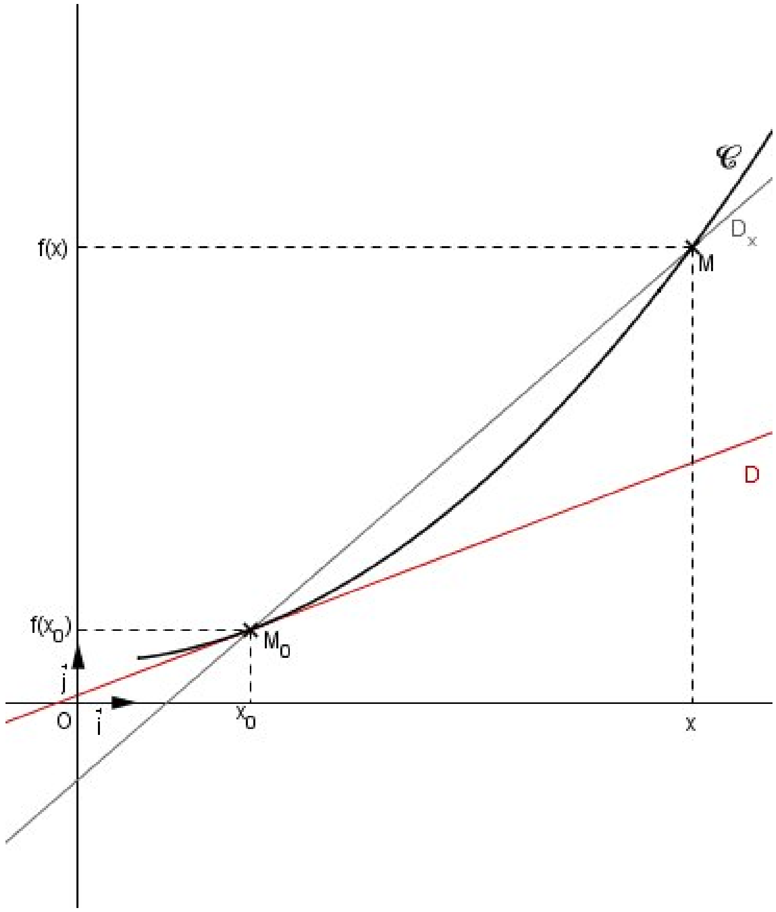
M_0 un point de $(\mathcal{C}) / M_0 = (x_0, f(x_0))$ et

M est un point de $(\mathcal{C}) / M = (x, f(x))$.

La droite $(M_0M) = (D_x)$

Montrons que l'équation de la tangente (D) en M_0 est:

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.



La pente de $(D_x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

On remarque que si $x \to x_0$ alors $M \to M_0$ et $(D_x) \to (D)$

alors la pente de (D) est $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.

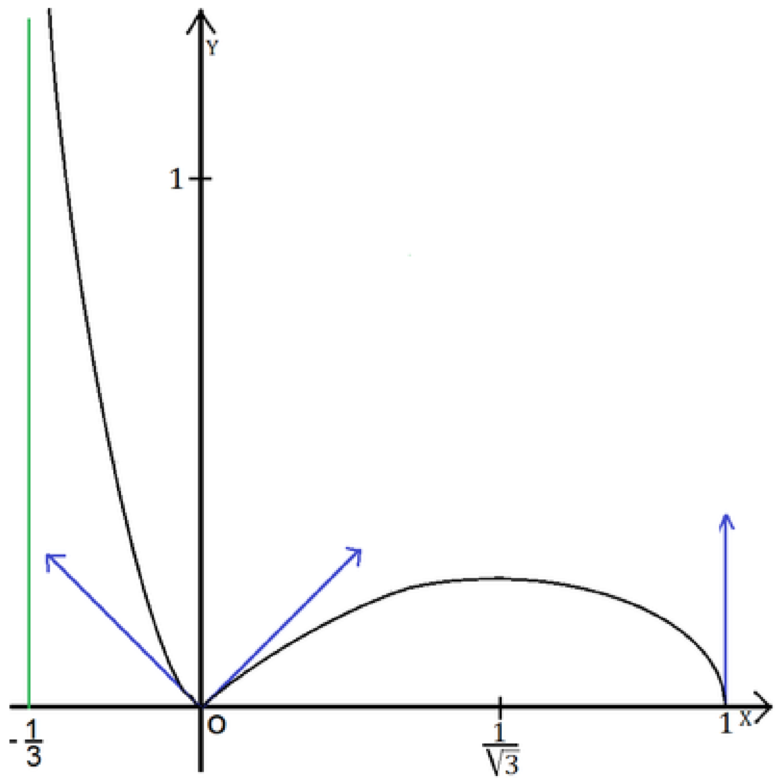
D'où $(d) : y = f'(x_0)\, x + b$.

$M_0 \in (D) \Leftrightarrow f(x_0) = f'(x_0)\, x_0 + b \Rightarrow b = f(x_0) - f'(x_0)\, x_0$.

Donc $(D) : y = f'(x_0)\, x + f(x_0) - f'(x_0)\, x_0$.

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Points anguleux: Si f admet une dérivée à gauche différente à la dérivée à droite du point x_0, alors le graphe de f admet au point x_0 deux demi tangentes et le point M_0 est un point anguleux.



Si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$ alors le graphe admet une tangente verticale $(T) : x = x_0$.

Opérations sur les fonctions dérivables:

Théorème: Soient f et g deux fonctions dérivables en x_0, alors

1. $f + g$ est dérivable en x_0 et $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

2. αf est dérivable en x_0 et $(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$.

3. $f.g$ est dérivable en x_0 et $(f.g)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$.

4. $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-g'(x_0)f(x_0)}{(g(x_0))^2} / g(x_0) \neq 0$.

Dérivée d'une fonction composée:

Proposition: Soit $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}, x_0 \in I$, si f est dérivable en x_0 et g

est dérivable en $f(x_0)$ alors $g\circ f$ est dérivable en x_0 et on a:

$$(g\circ f)'(x_0)=f'(x_0)\,g'(f(x_0)).$$

Exemple:

1. $\left(e^{f}\right)'(x)=f'(x)\,e^{f(x)}$.
2. $(\ln f)'(x)=f'(x)\,(\ln)'(f(x))=\frac{f'(x)}{f(x)}$.
3. $(\sin f)'(x)=f'(x)\,(\sin)'(f(x))=f'(x)\cos(f(x))$.
4. $\left(\sqrt{f}\right)'(x)=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$.
5. $\left(tg\left(x^2\right)\right)'=\left(x^2\right)'(tg)'\left(x^2\right)=2x.\frac{1}{\cos(x^2)}$.
6. $$\begin{aligned}\left((chx)^{shx}\right)'&=\left(e^{shx\ln chx}\right)'=(shx\ln chx)'\,e^{shx\ln chx}\\&=\left((shx)'\ln chx+shx\,(\ln chx)'\right)e^{shx\ln chx}\\&=\left(chx\ln chx+shx\frac{(chx)'}{chx}\right)e^{shx\ln chx}\\&=\left(chx\ln chx+\frac{(shx)^2}{chx}\right)e^{shx\ln chx}.\end{aligned}$$

Dérivée d'une fonction inverse:

Théorème: Soit f une application bijective et continue de $I\to J$, dérivable en $x_0\in I$ telle que $f'(x_0)\neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $y_0=f(x_0)\in J$ et on a:

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Dérivée de fonctions trigonométriques inverses:

1. Fonction $\arcsin \mathbf{x}$:

On a

$$\underset{-1\le x\le 1}{y=\arcsin x}\Leftrightarrow \underset{-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}}{x=\sin y}$$

$(\arcsin x)' = \left(\sin^{-1}\right)(x) = \frac{1}{(\sin)'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin y)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, -1 < x < 1$. D'où

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, -1 < x < 1.$$

En général,

$$(\arcsin f)' = \frac{1}{\sqrt{1-f^2}}, -1 < f(x) < 1.$$

2. Fonction $\arccos \mathbf{x}$:

On a

$$\underset{-1\leq x\leq 1}{y = \arccos x} \Leftrightarrow \underset{0\leq y\leq \pi}{x = \cos y}$$

$(\arccos x)' = \left(\cos^{-1}\right)(x) = \frac{1}{(\cos)'(y)} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-(\cos y)^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, -1 < x < 1$.

D'où

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, -1 < x < 1.$$

En général,

$$(\arccos f)' = \frac{-1}{\sqrt{1-f^2}}, -1 < f(x) < 1.$$

2. Fonction arctgx :

On a

$$\underset{x\in\mathbb{R}}{y = arctgx} \Leftrightarrow \underset{-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}}{x = tgy}$$

$(arctgx)' = \left(tg^{-1}\right)(x) = \frac{1}{(tg)'(y)} = \frac{1}{\cos^2 y} = \frac{1}{1+tg^2(x)} = \frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$. D'où

$$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

En général,

$$(arctgf)' = \frac{1}{1+f^2}.$$

Dérivée de fonctions thyperboliques inverses:

1. Fonction argchx :

On a

$$y = \underset{x\geq 1}{\arg} chx \Leftrightarrow x = \underset{y\geq 0}{chy}$$

$(\arg chx)' = \frac{1}{ch'(y)} = \frac{1}{shy} = \frac{1}{\sqrt{ch^2y-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. D'où

$$(\arg chx)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, x > 1.$$

En général,

$$(\arg chf)' = \frac{f'}{\sqrt{f^2-1}}, f(x) > 1.$$

1. Fonction arg **shx** :

On a

$$y = \underset{x\in\mathbb{R}}{\arg} shx \Leftrightarrow x = \underset{y\in\mathbb{R}}{shy}$$

$(\arg shx)' = \frac{1}{sh'(y)} = \frac{1}{chy} = \frac{1}{\sqrt{1+sh^2x}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. D'où

$$(\arg shx)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, x \in \mathbb{R}.$$

En général,

$$(\arg shf)' = \frac{f'}{\sqrt{1+f^2}}.$$

1. Fonction arg **thx** :

On a

$$y = \underset{-1<x<1}{\arg} thx \Leftrightarrow x = \underset{y\in\mathbb{R}}{thy}$$

$(\arg thx)' = \frac{1}{th'(y)} = \frac{1}{\frac{1}{ch^2 y}} = \frac{1}{1-th^2 x} = \frac{1}{1-x^2}, -1 < x < 1$. D'où

$$(\arg thx)' = \frac{1}{1-x^2}, -1 < x < 1.$$

En général,

$$(\arg thf)' = \frac{f'}{1-f^2}, -1 < f(x) < 1.$$

Dérivées successives:

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I, alors la fonction f' est appelée dérivée première de f ou dérivée d'ordre 1 de f et si la fonction $f' : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I, alors la fonction $(f')'$ est appelée dérivée deuxième de f ou dérivée d'ordre 2 de f , et on note f'' ou $f^{(2)}$. En général, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} : I \to \mathbb{R}$ est la fonction vérifiante:

1. $f^{(0)} = f$.
2. $f^{(p+1)} = \left(f^{(p)}\right)', 0 \leq p \leq n$.

$f^{(n)}$ est la dérivée $n^{i\grave{e}me}$ de f ou dérivée d'ordre n de f.

Fonction de classe C^n :

On dit que f est de classe $C^n\,(f \in C^n(I))$ si f admet des dérivées continues jusqu'à l'ordre n.

C'est à dire

$$f \in C^n(I) \Leftrightarrow f \text{ continue et } f', f'', ..., f^{(n)} \text{ existent et continues.}$$

Exemple:

1. $f(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(x) = (e^x)^{(n)} = e^x$ continue $\Rightarrow e^x \in C^n(\mathbb{R})$.
2. $f(x) = \cos x \Rightarrow f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ continue $\Rightarrow \cos x \in C^n(\mathbb{R})$.
3. $f(x) = \sin x \Rightarrow f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ continue $\Rightarrow \sin x \in C^n(\mathbb{R})$.

4. $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, \text{ si } x\neq 0 \\ 0, \text{ si } x=0 \end{cases}, D_f=\mathbb{R}$

f est continue sur $\mathbb{R}\Rightarrow f\in C^0(\mathbb{R})$ mais n'est pas de classe $C^1(\mathbb{R})$ car f' n'est pas continue en 0.

Définition:

$$f \text{ est dite de classe } C^\infty(I)\Leftrightarrow f\in C^n(I), \forall n\in\mathbb{N}.$$

$f(x)=e^x\in C^\infty(\mathbb{R})$ car $e^x\in C^n(\mathbb{R}), \forall n\in\mathbb{N}$.

$f(x)=\sin x\in C^\infty(\mathbb{R})$ car $\sin x\in C^n(\mathbb{R}), \forall n\in\mathbb{N}$.

Formule de Leibeniz:

Soient $f,g:I\to\mathbb{R}, x\in I$, si $f^{(n)}(x)$ et $g^{(n)}(x)$ existent, $\forall n\in\mathbb{N}$, alors $(f.g)$ admet une dérivée $n^{ième}$ au point x définie par

$$\begin{aligned}(f.g)^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(x)\, g^{(k)}(x) / C_n^k=\frac{n!}{k!\,(n-k)!} \\ &= C_n^0 f^{(n)}(x)\, g(x)+C_n^1 f^{(n-1)}(x)\, g'(x)+C_n^2 f^{(n-2)}(x)\, g''(x)+...+C_n^n f(x)\, g^{(n)}(x) \\ &= f^{(n)}(x)\, g(x)+n f^{(n-1)}(x)\, g'(x)+\frac{n(n-1)}{2} f^{(n-2)}(x)\, g''(x)+...+f(x)\, g^{(n)}(x).\end{aligned}$$

Exemple:

1. $f(x)=e^x\sin x$

$$\begin{aligned}f^{(n)}(x) &= (e^x\sin x)^{(n)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (e^x)^{(n-k)} \sin^{(k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k e^x \sin\left(x+k\frac{\pi}{2}\right) \\ &= e^x\sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin\left(x+k\frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

2. $f(x) = e^x(5x^2+3x+1)$

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \left(e^x\left(5x^2+3x+1\right)\right)^{(n)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(e^x\right)^{(n-k)} \left(5x^2+3x+1\right)^{(k)}(x) \\
&= e^x \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(5x^2+3x+1\right)^{(k)}(x) \\
&= e^x \left(C_n^0\left(5x^2+3x+1\right) + C_n^1(10x+3) + C_n^2(10) + C_n^3(0) + 0 + 0 + \ldots + 0\right) \\
&= e^x\left(5x^2+3x+1+n(10x+3)+5n(n-1)+0+\ldots 0\right). \\
&= e^x\left(5x^2+(10n+3)x+5n^2-2n+1\right).
\end{aligned}$$

5.1 Extremum

Définition: On dit que f admet un maximum (resp. minimum) local en x_0 s'il existe un intervalle ouvert I contenant x_0 tel que

$$\forall x \in I, f(x) \leq f(x_0) \text{ (resp. } f(x) \geq f(x_0)).$$

Un maximum local en x_0 ou un minimum local en x_0 est dit extremum local en x_0.

Théorème de Fermat: (condition necessaire d'extremum)

Soit f une fonction dérivable sur $]a,b[$ telle que f admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.

autrement dit: si f dérivable sur $]a,b[$

$$f \text{ admet un extremum local en } x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0.$$

Condition suffisante d'extremum:

f, f', f'' étant continues sur $[a,b]$, si $x_0 \in]a,b[, f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) \neq 0$, la fonction f admet un extremum local en x_0. Il sagit d'un maximum si $f''(x_0) < 0$ et d'un monimum local si $f''(x_0) > 0$.

Autrement dit

$$f'(x_0) = 0 \text{ et } f''(x_0) \neq 0 \Rightarrow f \text{ admet un extremum en } x_0 \begin{cases} \text{un maximum si } f''(x_0) < 0 \\ \text{un minimum si } f''(x_0) > 0 \end{cases}.$$

Exemple:

$f(x) = x^2, [-1, 1]$.

$f'(x) = 2x = 0 \Rightarrow x = 0$.

$f''(x) = 2 \neq 0$.

Alors f admet un extremum local en $x_0 = 0$ et puisque $f''(0) = 2 > 0$ alors f admet un minimum local en 0.

5.2 Théorème de Rolle et théorème des accroissements finies

Théorème de Rolle:

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a,b[\, / f'(c) = 0$.

Autrement dit

$$\begin{cases} f \text{ continue sur } [a,b] \\ f \text{ dérivable sur }]a,b[\\ f(a) = f(b) \end{cases} \Rightarrow \exists c \in]a,b[\, / f'(c) = 0.$$

Preuve.

1. Si f est constante sur $[a,b] \Rightarrow f'(c) = 0, \forall c \in \left]a,b\right[$.

2. Si f n'est pas constante.

f est continue sur $[a,b] \Rightarrow f$ atteint ses bornes.

c.a.d. $\exists x_1, x_2 \in [a,b] \, / \, f(x_1) = \sup\limits_{a \leq x \leq b} f(x)\, , f(x_2) = \inf\limits_{a \leq x \leq b} f(x)$.

On a: $x_1 \neq a$ et b et $x_2 \neq a$ et b car sinon

$\left.\begin{array}{l} x_1 = b \Rightarrow f(x_1) = f(b) \\ \\ x_2 = a \Rightarrow f(x_2) = f(a) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)\, (\sup f(x) = \inf f(x)) \Rightarrow f$ constante contradiction.

Donc $x_1, x_2 \in \left]a,b\right[$.

Si on pose $c = x_1$ (ou $c = x_2$) et f est dérivable sur $\left]a,b\right[$ et $f(x) \leq f(x_1) = \sup f(x) = f(c)\, , \forall x \in [a,b]$.

Alors $f(c)$ est un maximum de f et d'aprés le théorème de fermat $f'(c) = 0$.

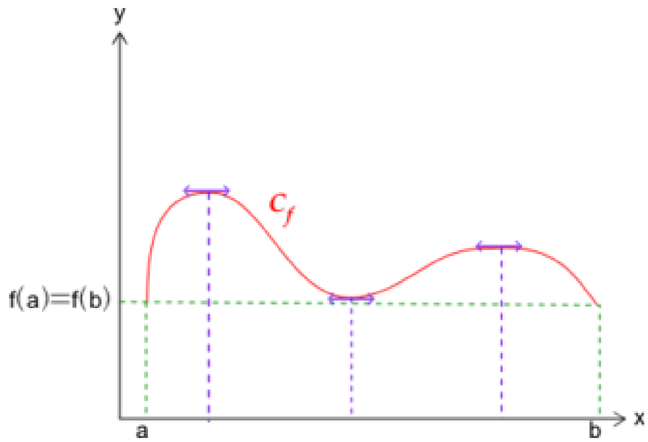
Interprétation géométrique:

Si f est continue sur $[a,b]$ alors son graphe est continue entre $M_a = (a, f(a))$ et $M_b = (b, f(b))$

et puisque f est dérivable sur $\left]a,b\right[$ le graphe G_f admet une tangente en tout point entre M_a et M_b et si $f(a) = f(b)$

alors il existe un point $M_c = (c, f(c))$ où la tangente est parallèle à la droite passante par M_a et M_b et l'axe des abcisses.

Remarque: Toutes les conditions du théorème de Rolle sont essentielles pour la validité du théorème.



1. La fonction $f(x) = \begin{cases} 1-x, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$, vérifie $f(0) = f(1)$, mais elle n'est pas continue en 0 donc pas continue sur $[0,1]$ et $\nexists c \in]0,1[/ f'(c) = 0$.

2. La fonction $f(x) = |x|$ est continue sur $[-1,1]$ et $f(-1) = f(1)$ mais elle n'est pas dérivable en 0 donc n'est pas dérivable sur $]-1,1[$.

3. La fonction $f(x) = x^3$ est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$ mais $f(-1) \neq f(1)$ et $\nexists c \in]-1,1[/ f'(c) = 0$.

Exemple.

Montrer que l'équation $4x^3 - 18x^2 + 22x - 6 = 0$ admet une solution dans $]1,3[$.

On pose $f(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$.

f est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[1,3]$, dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]1,3[$ (car c'est un polynôme).

$f(1) = 0, f(3) = 0$, d'aprés le théorème de Rolle $\exists c \in]1,3[/ f'(c) = 0$.

$f'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 22x - 6$ et $f'(c) = 0 \Leftrightarrow 4c^3 - 18c^2 + 22c - 6 = 0, c \in]1,3[$.

Théorème des accroissements finis:

Théorème: Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, alors

$\exists c \in]a,b[/ f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$.

c'est à dire

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ continue sur } [a,b] \\ \\ f \text{ dérivable sur }]a,b[\end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in]a,b[/ \ f(b) - f(a) = (b-a) f'(c).$$

Preuve

Posons

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a),$$

φ est continue sur $[a,b]$ car somme de fonctions continues sur $[a,b]$.

φ est dérivable sur $]a,b[$ car somme de fonctions continues sur $]a,b[$.

$\varphi(a) = 0, \varphi(b) = 0.$

D'aprés le théorème de Rolle

$$\exists c \in]a,b[/ \ \varphi'(c) = 0.$$

On a

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a},$$

$$\varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = 0 \Leftrightarrow f(b) - f(a) = (b-a) f'(c).$$

Corollaire: Soit $f : I \to \mathbb{R}$, dérivable sur I, alors $\forall x_1, x_2 \in I$, on a

$$\exists c \in]x_1, x_2[/ \ f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(c).$$

Autre formule du théorème des accroissements finis:

Si $c \in]a,b[\Rightarrow c = a + \theta(b-a)$, où $0 < \theta < 1$.

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ continue sur } [a,b] \\ \\ f \text{ dérivable sur }]a,b[\end{array}\right\} \Rightarrow \exists \theta \in]0,1[/ \ f(b) - f(a) = (b-a) f'(a + \theta(b-a)).$$

Si on pose $b-a=h$, on obtient

$$f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta h).$$

Application du théorème des accroissements finis:

1. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$\forall x>0, \frac{x}{x+1}<\ln(x+1)<x.$$

On pose $f(t)=\ln(t+1), t\in[a,b]=[0,x]$, appliquons le T.A.F. sur la fonction $f(t)=\ln(t+1)$ définie sur l'intervalle $[0,x]$.

$$\left.\begin{array}{l} \ln(t+1) \text{ continue sur } [0,x] \\ \\ \ln(t+1) \text{ dérivable sur }]0,x[\end{array}\right\} \Rightarrow \exists c\in\,]0,x[\,/\; f(x)-f(0)=(x-0)f'(c).$$

$$\exists c\in\,]0,x[\,/\;\ln(x+1)-\ln(0+1)=(x-0)\left(\frac{1}{c+1}\right)$$

$$\exists c\in\,]0,x[\,/\;\ln(x+1)=\frac{x}{c+1}.$$

On a

$$\begin{aligned} 0 &< c<x\Rightarrow 1<c+1<x+1 \\ &\Rightarrow \frac{1}{x+1}<\frac{1}{c+1}<1 \\ &\Rightarrow \frac{x}{x+1}<\frac{x}{c+1}<x, \forall x>0. \end{aligned}$$

Mais $\ln(x+1)=\frac{x}{c+1}$ d'où

$$\forall x>0, \frac{x}{x+1}<\ln(x+1)<x.$$

2. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$\forall x \in \left]0,1\right[, x < \arcsin x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

On pose $f(t) = \arcsin t, 0 < t < x$, appliquons le T.A.F. pour f sur $\left]0,x\right[$.

$$\left.\begin{array}{r} \arcsin t \text{ continue sur } [0,x] \\ \\ \arcsin t \text{ dérivable sur } \left]0,x\right[\end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in \left]0,x\right[/ \ f(x) - f(0) = (x-0) f'(c).$$

$$\begin{aligned} c &\in \left]0,x\right[/ \ \arcsin x - \arcsin 0 = (x-0)\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}. \\ \arcsin x &= \frac{x}{\sqrt{1-c^2}}, 0 < c < x. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} 0 &< c < x \Rightarrow 0 < c^2 < x^2 \Rightarrow -x^2 < -c^2 < 0 \Rightarrow 0 < 1-x^2 < 1-c^2 < 1 \\ \sqrt{1-x^2} &< \sqrt{1-c^2} < 1 \Rightarrow 1 < \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow x < \frac{x}{\sqrt{1-c^2}} < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ \text{d'où } x &< \arcsin x = \frac{x}{\sqrt{1-c^2}} < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \forall x \in \left]0,1\right[. \end{aligned}$$

Corollaire: Si f est une fonction continue et dérivable sur I, alors

1. f est croissante sur $I \Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in I$.

2. f est décroissante sur $I \Leftrightarrow f'(x) \leq 0, \forall x \in I$.

3. f est constante sur $I \Leftrightarrow f'(x) = 0, \forall x \in I$.

Théorème des accroissements finis généralisés:

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$, dérivable sur $\left]a,b\right[$, si $g'(x) \neq 0$ alors

$$\exists c \in \left]a,b\right[/ \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Preuve

On pose $F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.g(x)$.

F est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ car f et g le sont.

$F(a) = \frac{f(a)g(b)-f(a)g(a)}{g(b)-g(a)} = F(b)$, d'aprés le théorème de Rolle , $c \in]a,b[/ F'(c) = 0$.

$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(x)$.

$F'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Règle de l'Hôpital:

On l'utilise pour enlever les formes indéterminées de la forme $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$.

Si f et g sont deux fonctions dérivables dans un voisinage de $x_0 \in I$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, alors $\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}$ admet la même limite en x_0.

c.à.d.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Preuve

T.A.F.G. sur $[x_0, x]$ donne

$$\exists c \in]x_0, x[/ \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$\text{Si } x \to x_0 \Rightarrow c \to x_0 \text{ et donc } \lim_{c \to x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Remarque:

1. La règle de l'Hôpital reste valable pour $x_0 = \infty$.

2. On peut appliquer la règle de l'Hôpital plusieurs fois, il suffit que les conditions soit vérifiées.

3. Si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \nexists \not\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \nexists$, en effet Soient $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$ et $g(x) = \sin x$.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}\nexists$,

par contre $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\underbrace{x}_{\to 0}\underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{bornée}=0.$

Exemple:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{cox-1}=\frac{0}{0}$, on a $e^{x^2}-1$ et $cox-1$ sont dérivables, alors $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}}{-\sin x}=$ $\lim\limits_{x\to 0}-2\frac{x}{\sin x}e^{x^2}=-2.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\infty-\infty$,

on a $\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}=\frac{x-\sin x}{x\sin x}$, $x-\sin x$ et $x\sin x$ sont dérivables.

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x-\sin x}{x\sin x}\right)\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\frac{0}{0}$, $1-\cos x$ et $\sin x+x\cos x$ sont dérivables.

$$\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=0.$$

Pour trouver le résultat, on a utiliser la règle de l'Hôpital deux fois.

3. $\lim\limits_{\substack{>\\x\to 0}}x^{\alpha}\ln x,\alpha>0$

$\lim\limits_{\substack{>\\x\to 0}}x^{\alpha}\ln x=\lim\limits_{\substack{>\\x\to 0}}\frac{\ln x}{x^{-\alpha}}\overset{H}{=}\lim\limits_{\substack{>\\x\to 0}}\frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}}=\lim\limits_{\substack{>\\x\to 0}}\frac{1}{-\alpha x^{-\alpha}}=0.$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^4}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\sin x^2}{4x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}.$

5.3 Formule de Taylors

Une fonction f continue sur $[a,b]$ et dérivable en $x_0\in\,]a,b[$ peut s'écrire au voisinage de x_0 sous la forme

$$f(x)=f(x_0)+f'(x)(x-x_0)+R(x),$$

où $R(x)=(x-x_0)\,\varepsilon(x)$ et $\lim\limits_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0.$

Cela revient à dire que f peut être approximée par le polynôme de degré 1 :

$P(x) = f(x_0) + f'(x)(x - x_0)$ et l'erreur commise par cette aproximation tend vers zéro quand $x \to x_0$.

La formule de Taylors généralise ce résultat pour des fonctions n fois dérivables qui peuvent être approximées dans un voisinage de x_0 par des polynômes de degré n.

i.e.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

l'erreur $R_n(x)$ est appelée reste d'ordre n. On peut en donner divers évaluations ce qui entraine divers formes de la formule de Taylors.

Formule de Taylors avec reste de Lagrange:

Théorème: Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f \in C^n(]a, b[)$ et $f^{(n)}$ dérivable sur $]a, b[$ et soit $x_0 \in [a, b]$. Alors $\forall x \in [a, b] / x \neq x_0$, on a:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c),$$

où $c \in]x_0, x[$, le terme

$$\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

est appelé reste de Lagrange.

Remarque:

1.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).$$

2. On pose $h = x - x_0 \Rightarrow x = x_0 + h$ et $c \in]x_0, x_0 + h[\Rightarrow c = x_0 + \theta h / 0 < \theta < 1$ et on a:

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0 + \theta h),$$

Le reste

$$R_n(x) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta h), 0 < \theta < 1$$

est appelé reste de Cauchy.

Développement de Maclaurin:

Théorème: Soit $f \in C^n([0,x])$, $f^{(n+1)}$ existe sur $]0,x[$, alors $\exists \theta \in]0,1[$ tel que

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x).$$

C'est le développement de Taylors au voisinage de $x_0 = 0$ avec reste de Cauchy.

Exemple:

1. $f(x) = e^x, f \in C^\infty, x_0 = 0$ et $f^{(n)}(x) = e^x, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}, 0 < \theta < 1.$$

2. $f(x) = \sin x \in C^\infty, x_0 = 0$ et $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \sin(\theta x).$$

3. $f(x) = \cos x \in C^\infty, x_0 = 0$ et $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + .. + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sin(\theta x).$$

Formule de Taylors avec reste de Young:

Théorème: Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}, x_0 \in [a,b]$. Supposons que $f^{(n)}$ existe. Alors $\forall x \in [a,b]$;

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \underbrace{(x-x_0)^n \varepsilon(x - x_0)}_{=o((x-x_0)^n)} / \lim_{x \to x}$$

ou bien

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o\left((x-x_0)^n\right).$$

Formule de Maclaurin-young:

Théorème: Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}, 0\in[a,b]$. Supposons que $f^{(n)}(0)$ existe. Alors $\forall x\in[a,b]$;

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

ou bien

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(x^n).$$

Exemple:

1. $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ sur $]-1,+\infty[, \alpha\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f^{(k)}(x) &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-(k-1))\,x^{\alpha-k}\\
f^{(k)}(0) &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-(k-1))\\
f^{(k)}(0) &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-k+1).
\end{aligned}$$

D'où

$$(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n).$$

Si $\alpha=-1, f(x)=(1+x)^{-1}=\frac{1}{1+x}$, alors le développement de Maclaurin-Young de f est

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+...+(-1)^n x^n+o(x^n).$$

Si $\alpha = \frac{1}{2}$, $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x}$, alors le développement de Maclaurin-Young de f est

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3 + ... + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)...\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}x^n + o\left(x^n\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + ... + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)...\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}x^n + o\left(x^n\right).\end{aligned}$$

5.4 Fonctions convexes et fonctions concaves

Définition:

Approche graphique: Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et G_f sa courbe représentative.

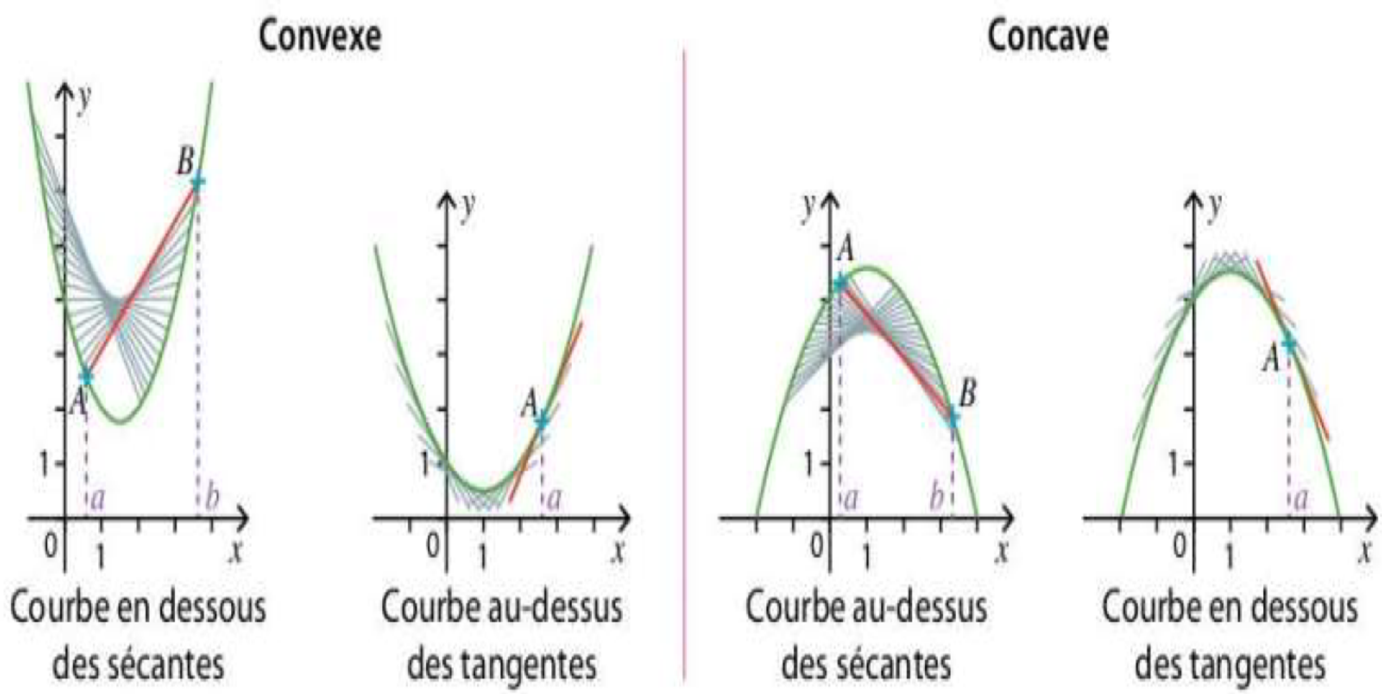
On dit que f est convexe sur I si sa courbe représentative G_f est au dessus de toutes ses tangente sur I.

ou bien si G_f est au dessous de toutes ses cordes (sécantes) sur I.

On dit que f est concave sur I si si sa courbe représentative G_f est au dessous de toutes ses tangente sur I.

ou bien si G_f est au dessus de toutes ses cordes (sécantes) sur I.

Illustration de la remarque :



Approche analytique: Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

On dit que f est convexe sur I, si $\lambda \in [0,1], x, y \in I$, on a

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

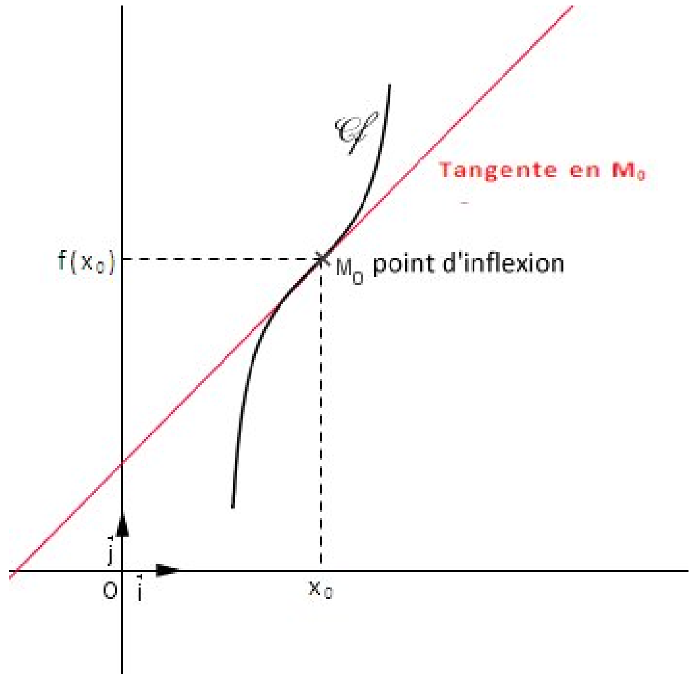
Lorsqu'on a l'inégalité dans l'autre sens, on dit que f est concave.

Remarque: f est concave si $-f$ est convexe.

Proposition:

Si f est une fonction dérivable sur I alors on a l'équivalence des assertions suivantes:

1. f est convexe sur I.
2. f' est croissante sur I.



3. f'' est positive sur I.

4. G_f est au dessus de toutes ses tangentes sur I.

5. G_f est au dessous de toutes ses cordes (sécantes) sur I.

Exemple:

1. $f(x) = e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$ car $f''(x) = e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

2. $f(x) = \ln x$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ car $f''(x) = \frac{-1}{x^2} < 0, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$.

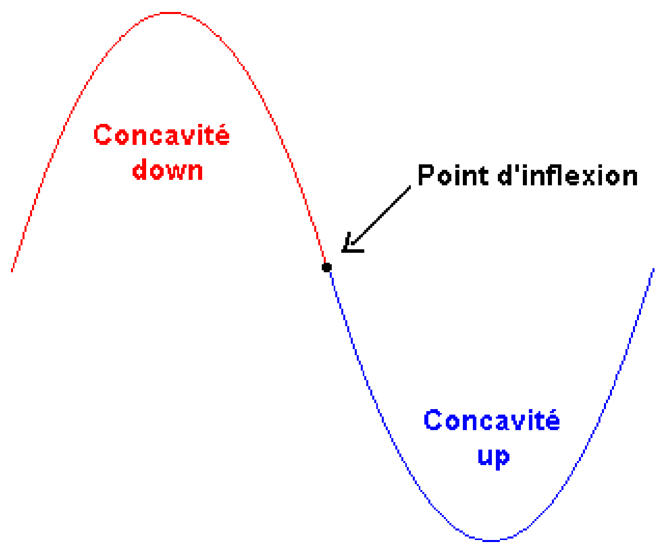
Point d'inflexion:

Soient f une fonction dérivable sur I, G_f sa courbe représentative et $A(a, f(a)) \in G_f$.

On dit que A est un point d'inflexion de G_f si et seulement si la courbe G_f traverse sa tangente en ce point A.

Propriété:

Si A est un point d'inflexion d'abscisse a, f passe de concave à convexe ou de



convexe à concave en a.

Théorème:

Soit f une fonction deux fois dérivable sur I, de courbe représentative G_f. le point A d'abscisse a est un point d'inflexion de G_f si et seulement si f'' s'annule et change de signe en a.

Exemple: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$

$$f'(x) = x^2 - 2x$$

$$f''(x) = 2x - 2.$$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ et $f''(x) \geq 0$ si $x \geq 1$ et $f''(x) \leq 0$ si $x \leq 1$, donc f'' change de signe en 1. Donc le point A d'abscisse 1 d'ordonnée $f(1) = \frac{1}{3}$ est un point d'inflexion.

Exercice: Soient f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2e^{x-1} - x^2 - x,$$

et G_f sa courbe représentative.

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

2. Etudier la convexité de la fonction f.

3. Montrer que f admet un point d'inflexion A et préciser les coordonnées de A.

4. Qu'elle est l'équation de la tangente à G_f au point A? En déduire que pour tout $x \geq 1 : e^{x-1} \geq \frac{1}{2}(x^2+1)$.

Solution:

1. $f'(x) = 2e^{x-1} - 2x - 1, f'$est dérivable et on a

$f''(x) = 2e^{x-1} - 2$.

2. f est convexe si $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2e^{x-1} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Donc f est convexe sur $[1, +\infty[$ et elle est concave sur $]-\infty, 0]$.

3. Le point d'inflexion corespond au passage de convexe à concave ou de concave àconvexe. D'aprés la question précédente, le point d'inflexion d'abscisse 1 et d'ordonnée $f(1) = 2e^{1-1} - 21^2 - 1 = 0$.

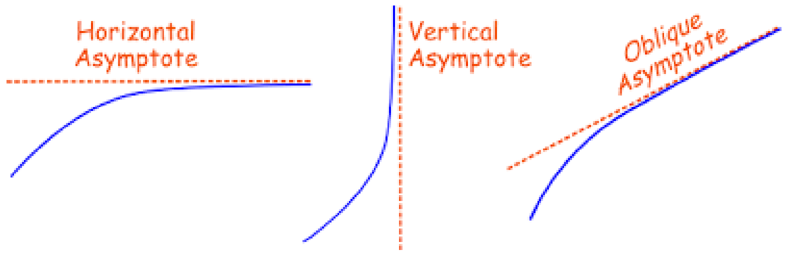
Le point d'inflexion $A = (1, 0)$.

4. La tangente en A.

$(T) : y = f'(1)(x-1) + f(1) = -(x-1) = 1 - x$. Alors l'équation de la tangente au point $(1, 0)$ est:

$$(T) : y = 1 - x.$$

On a $\forall x \geq 1, f$ est convexe alors f est au dessus de toutes ses tangentes en particulier au dessus de (T),



C'est à dire

$$\begin{aligned} f(x) &\geq 1-x \Leftrightarrow 2e^{x-1}-x^2-x \geq 1-x \\ &\Leftrightarrow 2e^{x-1} \geq x^2+1 \\ &\Leftrightarrow e^{x-1}\frac{1}{2}\left(x^2+1\right). \end{aligned}$$

5.5 Les asymptotes d'une coube

Définition: Une droite asymptote à une courbe est une droite telle que lorsque l'abscisse ou l'ordonnée tend vers l'infini, la distance de la courbe à la droite tend vers 0.

Nous étudions 3 cas en particulier.

Asymptote verticale, asymptote horizontale, asymptote oblique.

Définition1. Soit f une fonction définie sur I sauf en a. La droite $x=a$ est une asymptote verticale de la coube $y=f(x)$ si $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} a} f(x)=\infty$ ou $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} a} f(x)=\infty$.

Méthode pour déterminer les asymptotes verticales:

Les asymptotes verticales sont à chercher parmi les valeurs interdites. On calculera donc la $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ pour tout $a \notin D_f$.

Si cette limite vaut ∞ alors la droite $x=a$ est une asymptote verticale de la courbe $y = f(x)$.

Exemple: $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-6}, D_f = \mathbb{R} - \{2, -3\}$.

$\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 2}} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{< \\ x \to 2}} f(x) = -\infty \Leftrightarrow x = 2$ est une asymptote verticale de $y = f(x)$.

$\lim\limits_{\substack{> \\ x \to -3}} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{< \\ x \to -3}} f(x) = -\infty \Leftrightarrow x = -3$ est une asymptote verticale de $y = f(x)$.

Définition2. Soit f une fonction définie sur I.

La droite $y = b_1$ est une asymptote horozontale à droite de la courbe $y = f(x)$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b_1$.

La droite $y = b_2$ est une asymptote horozontale à gauche de la courbe $y = f(x)$ si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b_2$.

Si $b_1 = b_2$, alors on dira simplement que cette droite est l'asymptote horizontale à la courbe $y = f(x)$.

Méthode pour déterminer les asymptotes horizontales

La courbe de la forme $y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ admet une asymptote horizontale si et seulement si le degré de $P(x) \leq$ degré de $Q(x)$.

Exemple: $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+2}, D_f = \mathbb{R}$.

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1$ est une asymptote horizontale à la courbe $y = f(x)$.

Définition3. La droite $y = ax + b$ est une asymptote oblique de la courbe $y = f(x)$ si

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (ax + b) = 0 \text{ ou } \lim_{x \to -\infty} f(x) - (ax + b) = 0.$$

Méthode pour déterminer les asymptotes obliques

$y = ax + b$.

a est donné par la formule $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ et b est donné par la formule $\lim_{x \to +\infty} f(x) - ax = b$.

Remarque:

1. L'asymptote oblique ou horizontale n'est pas forcement la même vers $+\infty$ ou $-\infty$. Il faut étudier les deux cas.

2. Pour déterminer l'équation d'une asymptote oblique, il faut commencer par calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty$, puis calculer $a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Si $a = \infty$, il n'y a pas d'asymptote, la courbe a une branche parabolique.

Si $a = 0$, on dit que f admet une asymptote horizontale $y = b$, si b existe.

Si $a \neq 0$ et b existe, la droite $y = ax + b$ est une asymptote oblique.

Exemple: $f(x) = \frac{3x^2 - x + 1}{x - 1}$.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) - 3x = 2$.

Alors $y = 3x + 2$ est une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 3 \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} f(x) - 3x = 2$.

Alors $y = 3x + 2$ est une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$.

Position de la courbe par rapport à son asymptote oblique ou horizontale:

Soit $M = (x, f(x))$ un point du graphe de f. $(\Delta) : y = ax + b$ son asymptote au voisinage de ∞.

M est au dessus de l'asymptote oblique si $f(x) > ax + b$.

M est au dessous de l'asymptote oblique si $f(x) < ax + b$.

M est un point de l'asymptote oblique si $f(x) = ax + b$.

M est au dessus de l'asymptote horizontale $y = b$ si $f(x) > b$.

M est au dessous de l'asymptote horizontale $y = b$ si $f(x) < b$.

M est un point de l'asymptote horizontale $y = b$ si $f(x) = b$.

Exemple:

1. $f(x) = \frac{2x^2-x+1}{x-1}, D_f =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$.

$\lim\limits_{x \to \to \infty} f(x) = \infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \Rightarrow \lim\limits_{x \to \to \infty} f(x) - 2x = 1$, alors la droite $y = 2x + 1$ est une asymptote oblique de la courbe $y = f(x)$ au voisinage de ∞.

$\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 1}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{< \\ x \to 1}} f(x) = -\infty, x = 1$ est une asymptote verticale.

Position du graphe par rapport à $(\Delta) : y = 2x + 1$.

Cherchons le signe de $f(x) - y$.

$f(x) - y = \frac{2x^2-x+1}{x-1} - (2x + 1) = \frac{2}{x-1}$ est de signe $x - 1$.

G_f est au dessus de (Δ) si $x > 1$.

G_f est au dessous de (Δ) si $x < 1$.