Université des Sciences et de la Technologie USTO - MB. 2021/2022
Faculté des Mathématiques et Informatique.
LMD - MI 1ère Année.
Analyse2.

Fiche de TD n°2
Intégrale définie

Exercice 1 :
On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par : $f(x) = 3x^2$ et la subdivision régulière d_n sur $[0,1]$ telle que $d_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{n}{n}\right\}$.

1. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S(f, d_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} s(f, d_n)$ (Indication$\sum\limits_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$)
2. Que peut-on conclure ?

Exercice 2 :
En utilisant les sommes de Riemann, calculer l'intégrale suivante:

$$\int_a^b e^x dx$$

Exercice 3 :

1. Montrer que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable, alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx.$$

2. En déduire l'intégrale suivante : $I = \int\limits_0^\pi \frac{x \sin x}{1+cos^2 x} dx$.

Exercice 4 :
En utilisant les sommes de Riemann d'une fonction à déterminer, calculer les limites suivantes:

1. $l_1 = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{1}{n\alpha+i}, (\alpha > 0)$,
2. $l_2 = \lim\limits_{n\to+\infty} \left[\frac{1^p+2^p+...+n^p}{n^{p+1}}\right], (p \in \mathbb{N})$
3. $l_3 = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \left[\frac{1}{\sqrt[n]{e}} + \frac{2}{\sqrt[n]{e^2}} + \frac{3}{\sqrt[n]{e^3}} + ... + \frac{n}{\sqrt[n]{e^n}}\right]$,
4. $l_4 = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\pi}{3n} \sum\limits_{i=1}^{n} \tan\left(\frac{i\pi}{3n}\right)$,
5. $l_5 = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\cos[\ln(i+n)-\ln n]}{i+n}$

6. $l_6 = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left[\arctan\sqrt{\frac{1}{n}} + \arctan\sqrt{\frac{2}{n}} + .. + \arctan\sqrt{\frac{n}{n}}\right]$,

7. $l_7 = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left[e^{\arcsin\frac{1}{n}} + e^{\arcsin\frac{2}{n}} + ... + e^{\arcsin\frac{n}{n}}\right]$,

8. $l_8 = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{(i+n)[1+\ln(i+n)-(\ln n)]^2}$,

9. $l_9 = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n}(n+i)}$,

10. $l_{10} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum\limits_{k=1}^{n} \left[\sqrt{k}\right]$,

11. $l_{11} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+8in}}$.

Exercice 5 :

On considère les suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$U_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i+n} \ , \quad V_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1}; \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

1. Calculer la limite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{2}U_n + V_n = U_{2n}$.
3. Montrer que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente vers $\frac{1}{2}\ln 2$.

Exercice supplémentaire :

On considère la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$; par $u_n = \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\sin x.dx$

1. Montrer en utilisant la récurrence que
$$\forall n \in \mathbb{N}; \ \cos(n\pi) = (-1)^n.$$
2. Montrer que
$$u_n = \frac{(-1)^n e^{-n\pi}}{2}\left(1 + e^{-\pi}\right).$$
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique, en précisant sa raison et son premier terme.
4. En déduire en fonction de n la somme S_n définie par
$$S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{u_k}{u_{k-1}}\right)^k$$
5. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.