Chapitre 3
Equations différentielles
Partie 1

Damerdji Bouharis A.
Université des Sciences et de la Technologie Mohamed Boudiaf
Faculté des Mathématiques et Informatique.

CHAPITRE 1

Equations différentielles

Introduction

Dans ce chapitre, on présente les méthodes de calcul classiques, concernant la résolution des équations différentielles programmées pour ce semestre à savoir les équations différentielles de premier ordre, d'abord linéaires puis celles de Bernoulli et de Riccati ensuite celles du second ordre avec coefficients constants. Il y aura les outils de base avec plus de pratique que de théorie pour permettre à l'étudiant d'assimiler ces notions dont il aura certainement besoin quelque soit son orientation scientifique.

1.1 Définitions et notations

Définition 1.1.1 *On appelle équation différentielle toute équation dans laquelle figurent l'inconnue qui est une fonction y de classe C^n d'une variable x et ses fonctions dérivées de différents ordres $y', y'', ..., y^{(n)}$,*

$$F\left(y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$$

sachant que la dérivée y' de y par rapport à x est telle que $y' = \frac{dy}{dx}$.

Définition 1.1.2 *On appelle ordre d'une équation différentielle, l'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ de la dérivée la plus élevée figurant dans l'équation différentielle.*

Définition 1.1.3 *On appelle solution ou intégrale d'une équation différentielle d'ordre n sur un certain intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, toute fonction y définie sur cet intervalle,*

$$\begin{array}{rccc} y: & I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y(x) \end{array}$$

telle que y est $n-$fois dérivable en tout point de I et vérifie cette équation différentielle.

Définition 1.1.4 *Une équation différentielle d'ordre n est dite linéaire s'il n'y a pas d'exposant ni pour la fonction inconnue y ni pour ses dérivées successives $y', y'', ..., y^{(n)}$, elle est de la forme*

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + ... + a_n(x)\, y = f(x), \tag{1.1}$$

où f et a_i sont des fonctions continues pour $i = 0, ..., n$ et $a_0 \neq 0$.

Définition 1.1.5 *Si y est fonction d'une seule variable, l'équation est appelée équation différentielle ordinaire (EDO).*

Exemples 1.1.6 .

1. $y' \ln x + x^2 y + \cos x = 0$ *équation différentielle linéaire d'ordre* 1, *car elle est de la forme* (1.1) .
2. $8y'' + y' - 3y = xe^x \sin x$ *équation différentielle linéaire d'ordre* 2, *car elle est de la forme* (1.1) .
3. $y'' + (y')^2 = -1$ *équation différentielle d'ordre* 2, *non linéaire car sa première dérivée est à la puissance* 2.
4. $y^{(4)} + 5yy'' + y = 3$ *équation différentielle d'ordre* 4, *non linéaire.*

1.2 Equations différentielles d'ordre 1

1.2.1 Equations différentielles linéaires d'ordre 1 à variables séparables

Définition 1.2.1 *On appelle équation différentielle linéaire d'ordre* 1 *à variables séparables, toute équation de la forme*

$$y' = f(x)\, h(y) \tag{1.2}$$

où f et h sont des fonctions de classe C^1 sur intervalle I de $\mathbb{R}$.

Résolution

On peut ramener cette équation à une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dite à variables séparées de la forme

$$f(x)\, dx = g(y)\, dy$$

où $g(y) = \frac{1}{h(y)}$, $\forall y \in I$, tel que $h(y) \neq 0$, puis on intègre les deux cotés chacun par rapport à sa variable.

Exemple 1.2.2 *Résoudre (intégrer) les équations différentielles suivantes*

1. $y' - x^2 y = x^2$
2. $y'(x^2 - 3) - 2xy = 0.$
3. $y'(x^2 + 1) = \sqrt{1 - y^2}.$

Solution

1.
$$y' - x^2 y = x^2 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = (1 + y)\, x^2$$

en séparant les variables et en supposant que $y \neq -1$, on a

$$\frac{dy}{1 + y} = x^2 dx,$$

d'où en intégrant le côté gauche par rapport à y et le côté droit par rapport à x, on obtient

$$\begin{aligned} \ln|1+y| &= \frac{1}{3}x^3 + c, c \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow |1+y| = e^{\frac{1}{3}x^3+c} \\ &\Rightarrow y = e^{\frac{1}{3}x^3+c} - 1, \end{aligned}$$

alors en posant $k = \pm e^c$ on a

$$y(x) = ke^{\frac{1}{3}x^3} - 1,\ k \in \mathbb{R}.$$

2.

$$y'\left(x^2-3\right) - 2xy = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}\left(x^2-3\right) = 2xy$$

en supposant que $x \neq -\sqrt{3}$ et $x \neq \sqrt{3}$, on a

$$\frac{dy}{y} = \frac{2x}{x^2-3}dx,$$

d'où

$$\ln|y| = \ln\left|x^2-3\right| + c, c \in \mathbb{R},$$

alors en posant $k = \pm e^c$ on a

$$y(x) = k\left(x^2-3\right), k \in \mathbb{R}.$$

3.

$$y'\left(x^2+1\right) = \sqrt{1-y^2} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}\left(x^2+1\right) = \sqrt{1-y^2}$$

en supposant que $y \neq -1$ et $y \neq 1$, on a

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{dx}{x^2+1}$$

d'où

$$\arcsin y = \arctan x + k, k \in \mathbb{R},$$

par suite

$$y(x) = \sin(\arctan x + k), k \in \mathbb{R}.$$

Remarque Pour déterminer la constante k il suffit de donner une condition initiale , $y_0 = y(x_0)$.

1.2.2 Equations différentielles linéaires d'ordre 1 homogènes

Définition 1.2.3 *On appelle équation différentielle linéaire d'ordre* 1 *homogène ou sans second membre, toute équation différentielle de la forme*

$$y'(x) + a(x)\,y(x) = 0 \tag{1.3}$$

où a *est une fonction continue sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$.

La résolution de l'équation (1.3), consiste à séparer les variables tel que

$$\frac{dy}{dx} + a(x)\,y = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -a(x)\,dx,$$

d'où en intégrant

$$\ln|y| = -\int a(x)\,dx + c, c \in \mathbb{R}$$

par suite la solution de (1.3) est dite solution homogène et elle est donnée par

$$y_{\text{hom}}(x) = ke^{-\int a(x)dx}, \text{ où } k = e^c.$$

Définition 1.2.4 *Pour une équation homogène, la solution triviale* $y = 0$ *est une solution.*

Remarque : La solution ici n'est pas unique, mais si on a de plus une solution particulière y_p pour la condition initiale $x_0 \in I$, telle que $y_p = y(x_0)$, alors on pourra calculer la constante k et dans ce cas, l'équation (1.3) possèdera une solution unique.

Exemple 1.2.5 *Résoudre l'équation différentielle homogène* $3y' + e^x y = 0$.

$$3y' + e^x y = 0 \Leftrightarrow 3\frac{dy}{dx} = -e^x y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{1}{3}e^x dx,$$

d'où en intégrant les deux membres

$$\ln|y| = -\frac{1}{3}\int e^x dx + c, c \in \mathbb{R}$$

par suite

$$\ln|y| = -\frac{1}{3}e^x + c,$$

donc la solution homogène est donnée par

$$y_{\text{hom}}(x) = ke^{-\frac{1}{3}e^x}, \text{ où } k = \pm e^c$$

telle que $y = 0$ *est une solution triviale.*

1.2.3 Equations différentielles linéaires d'ordre 1 avec second membre

Définition 1.2.6 *On appelle équation différentielle linéaire d'ordre* 1 *avec second membre ou non homogène, toute équation différentielle de la forme*

$$a(x)\,y'(x) + b(x)\,y(x) = f(x) \tag{1.4}$$

où a, b *et* f *sont des fonctions données, continues sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$, *avec* a *non identiquement nulle sur* I.

Méthode de résolution

Etape 1 Tout d'abord on résoud l'équation homogène Eq. Hom associée à l'équation (1.4) ,

$$\text{Eq. Hom} : a(x)\,y'(x) + b(x)\,y(x) = 0, \tag{1.5}$$

qui est une équation à variables séparables

$$a(x)\,y' + b(x)\,y = 0 \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{a(x)}{b(x)} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{a(x)}{b(x)}dx,$$

d'où en intégrant on a

$$\ln|y| = -\int \frac{a(x)}{b(x)}dx + c, c \in \mathbb{R}$$

par suite la solution homogène de (1.4) est donnée par

$$\begin{aligned} &|y_{\text{hom}}(x)| = e^{-\int \frac{a(x)}{b(x)}dx + c} \\ &\Leftrightarrow y_{\text{hom}}(x) = ke^{-\int \frac{a(x)}{b(x)}dx}, \text{où } k = \pm e^c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Etape 2 Pour avoir la solution générale de l'équation différentielle (1.4), on distingue deux cas :

Cas 1 *Si on connait une solution particulière y_p de l'équation* (1.4)*, alors on donne la solution générale de* (1.4) *par la formule*

$$y_{gle} = y_{\text{hom}} + y_p \tag{1.6}$$

Cas 2 *Si on ne connait pas de solution particulière de l'équation* (1.4)*, alors on procède par la méthode de la variation de la constante, c'est à dire remplacer la solution homogène y_{Hom} dans l'équation* (1.4) *en considérant la constante k comme une fonction de la variable x.*

Preuve de la formule (1.6) **:**
Soit y_p une solution particulière de l'équation (1.4), et y_{gle} une solution générale de l'équation (1.4), alors $y_{gle} - y_p$ est une solution de l'équation homogène (1.5) , en effet,

y_p vérifie (1.4) alors

$$a(x)\,y_p'(x) + b(x)\,y_p(x) = f(x)$$

et y_{gle} vérifie aussi (1.4) alors

$$a(x)\,y_{gle}'(x) + b(x)\,y_{gle}(x) = f(x),$$

et en calculant la différence on a

$$a(x)\,(y_{gle}(x) - y_p(x))' + b(x)\,(y_{gle}(x) - y_p(x)) = 0$$

d'où $y_{gle} - y_p$ vérifie l'équation homogène (1.5), ainsi

$$y_{gle} - y_p = y_{\hom} \Leftrightarrow y_{gle} = y_{\hom} + y_p.$$

$\square$

Exemple 1.2.7 *Résoudre l'équation différentielle suivante*

$$y' \cos x + y \sin x = 1. \tag{1.7}$$

Solution

Equation homogène : On commence par écrire l'équation homogène de l'équation (1.7) *sous la forme*

$$\text{Eq. Hom : } y' \cos x + y \sin x = 0. \tag{1.8}$$

C'est une équation à variables séparables

$$(1.8) \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow \frac{1}{y} dy = -\frac{\sin x}{\cos x} dx,$$

d'où en intégrant on a

$$\ln |y| = -\int \frac{\sin x}{\cos x} dx + c, c \in \mathbb{R} \Rightarrow \ln |y| = \ln |\cos x| + c \Rightarrow y = k \cos x, \text{ où } k = \pm e^c.$$

Par conséquent, la solution homogène de (1.7) *est donnée par*

$$y_{\hom}(x) = k \cos x, \text{ où } k \in \mathbb{R}. \tag{1.9}$$

On remarque ensuite que cette équation différentielle admet comme solution particulière évidente la fonction $y_p = \sin x$, *en effet* $y' = \cos x$ *d'où* y_p *vérifie l'équation* (1.7), *donc on peut utiliser le cas 1 et on a*

$$y_{gle}(x) = k \cos x + \sin x, \ k \in \mathbb{R}.$$

Remarque *Si on ne remarque pas que l'équation* (1.7) *admet une solution particulière on peut toujours utiliser la méthode de la variation de la constante* k *dans la solution homogène* $y_{Hom}(x) = k \cos x$. *En effet,*

$$y_{\hom}(x) = k(x) \cos x \Rightarrow y'(x) = k' \cos x - k \sin x$$

alors en remplaçant dans (1.7), *on obtient*

$$k' \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow dk = \frac{dx}{\cos^2 x}$$

et en intégrant on a

$$k(x) = \tan x + c, \ c \in \mathbb{R}.$$

Puis on remplace dans (1.9) *et on récupère la solution générale directement*

$$y_{gle}(x) = (\tan x + c) \cos x$$
$$\text{d'où } y_{gle}(x) = \sin x + c \cos x, \ c \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1.2.8 *Résoudre l'équation différentielle*

$$y' + y = e^{-x}, \tag{1.10}$$

avec la solution particulière $y(0) = 1$.

Solution

$$Eq.\ Hom : y' + y = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -dx$$

alors en intégrant des deux cotés on obtient

$$\ln|y| = -x + c_1, c_1 \in \mathbb{R}$$

d'où en posant $k = \pm e^{c_1}$

$$y_{\text{hom}}(x) = ke^{-x}, \text{ où } k \in \mathbb{R}.$$

La variation de la constante

On fait varier la constante k *, on a alors*

$$y'(x) = k'e^{-x} - ke^{-x},$$

puis on remplace dans (1.10) *pour obtenir*

$$k' = 1 \Leftrightarrow dk = dx$$

d'où en intégrant on a

$$k(x) = x + c, c \in \mathbb{R}$$

par conséquent

$$y_{gle}(x) = (x + c)e^{-x}, c \in \mathbb{R} \tag{1.11}$$

comme $y(0) = 1$ *alors on remplace dans* (1.11) *pour avoir* $c = 1$ *donc*

$$y(x) = (x + 1)e^{-x}.$$

Exemple 1.2.9 *Résoudre l'équation différentielle suivante*

$$\left(1 + x^2\right) y' - \frac{y}{\arctan x} = \arctan x \tag{1.12}$$

$$Eq.\ Hom : \left(1 + x^2\right) y' - \frac{y}{\arctan x} = 0,$$

$$\left(1 + x^2\right) y' - \frac{y}{\arctan x} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{(1 + x^2)\arctan x}.$$

En intègrant des deux côtés , on obtient

$$\ln|y| = \int \frac{1}{(1 + x^2)\arctan x} dx + c_1, c_1 \in \mathbb{R}$$

$$CV : t = \arctan x \Rightarrow dt = \frac{dx}{1 + x^2}$$

d'où

$$\ln|y| = \int \frac{dt}{t} + c_1 = \ln|t| + c_1, c_1 \in \mathbb{R},$$

alors

$$\ln|y| = \ln|\arctan x| + c_1, c_1 \in \mathbb{R},$$

donc en posant $k = \pm e^{c_1}$

$$y_{\text{hom}}(x) = k \arctan x, \textit{ où } k \in \mathbb{R}. \tag{1.13}$$

La variation de la constante

On fait varier la constante k *, on a alors*

$$y'(x) = k' \arctan x + \frac{k}{1+x^2},$$

puis on remplace dans (1.12) *pour obtenir*

$$\left(1+x^2\right)\left[k' \arctan x + \frac{k}{1+x^2}\right] - k = \arctan x.$$

d'où

$$k'\left(1+x^2\right) = 1 \Leftrightarrow k' = \frac{1}{1+x^2} \Leftrightarrow dk = \frac{dx}{1+x^2}$$

Par intégration, on obtient

$$k(x) = \arctan x + c, \ \ c \in \mathbb{R},$$

puis on remplace dans (1.13)

$$y_{\text{hom}}(x) = (\arctan x + c) \arctan x$$

et enfin on a la solution générale

$$y_{gle}(x) = \arctan^2 x + c \arctan x, \ \ c \in \mathbb{R}.$$