Exercico (Les Nombres héels) Soient A et B deux ensembles non vides et bornes de R Montrer que si A C B, alors: sup A Sup B et inf B < inf A Montrer que AUB est borné dans IR, et. i) sup (AUB) = max (supt, supB) ic) inf (AVB) = min (infA, infB) Montrer que ANB est borné dans R, et si ANB est non vide, on a dors: (ADB) & min (sup A, sup B) ii) inf (A MB) > max (inf A, inf B) Solution; Comme A et B sont bornés, alors: sup1, infA, supB et infB existent On a: A = B, alors: \x \in A => \times Bdone; \times \sup B 1:0 YXEA: X SAMPB. Done sup Best un majorant de A et comme sup A est le p. p. des majorants A, alors: sup A (sup B. Ona: ACB, alors: txEA => xEB, done: infB(x Lie. YXEA: infB (X On a: iif B est les minorant de A et puisque iif A est le p.g. des minorants de A, alors: inf B \inf A Montions AUB set borne I inf A < x < sup A Ona: $\forall x \in AUB \Rightarrow) x \in A \Rightarrow$ ling B Sx SupB => min (infA, infB) (x (max (sup A, sup B)

i.R. $\forall x \in A \cup B$: min (iif A, iif B) $\langle x \rangle \langle max (sup A, sup B)$ Donc $A \cup B$ est borné $\Rightarrow sup(A \cup B)$ el iif (A $\cup B$) existent

i) Montrons: sup(AUB) = max(supA, supB)

i.e. | sup(AUB) | (max (supA, supB)

et max(supA, supB) | sup(AUB)

On a: YXEAUB: X (max (supA, supB)

Done max (sup A, sup B) est un marjorant de AVB et comme sup (AVB) est le P.P des majorants de AVB, alors:

sup (AUB) (max (sup A, sup B)

Done part: on a:) A C A UB =>) sup A & sup (A UB)

(B C A UB =>) sup B & sup (A UB)

⇒ max (sup A, sup B) (sup (AUB)

Anisi: sup (AVB) = max (sup A, sup B)

De la même manière, on montre l'autre relation ii) inf (AVB) = min (infA, infB)

1 Montrons: ANB est borné

Comme ANBCA et A est borné, alors: ANB est aussi borné. De plus si ANB est mon vide, alors sup (ANB) et inf (ANB) existent.



i) Howtons: sup(ANB) & min (supA, supB)

On a: ANB < A => ANB (ANB) & supA

et ANB < B = sup(ANB) & supB

=> sup(ANB) & min (supA, supB)

ii) Montrons: inf(ANB) >> max (infA, infB)

On a: $A \cap B \subset A \Rightarrow \text{ inf } A \leqslant \text{ inf } (A \cap B)$ $A \cap B \subset B \Rightarrow \text{ ret inf } B \leqslant \text{ inf } (A \cap B)$ $\Rightarrow \text{ max } (\text{ inf } A, \text{ inf } B) \leqslant \text{ inf } (A \cap B)$

