

Exercice 1 : (6pts)

$$u_0 = 0, \quad u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}$$

1) $0 \leq u_n < 4, \quad \forall n \in \mathbb{N}$:

(i) pour $n=0$; $0 \leq u_0 < 4$, vraie

(ii) $0 \leq u_n < 4 \Rightarrow 0 \leq u_{n+1} < 4$

On a: $0 \leq u_n < 4 \Leftrightarrow 4u_n + 4 \leq 5u_n + 4 < 4u_n + 8$

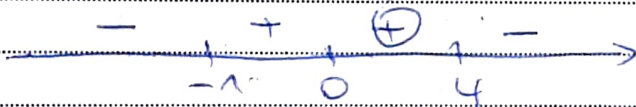
$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{4u_n + 4}{u_n + 2} \leq u_{n+1} < 4$$

$$\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} < 4$$

(i) Donc $\forall n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_n < 4$

2) $u_{n+1} - u_n = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2} - u_n = \frac{-u_n^2 + 3u_n + 4}{u_n + 2}$

$$= \frac{(u_n + 1)(4 - u_n)}{u_n + 2} > 0 \text{ car } 0 \leq u_n < 4$$



① (u_n) est croissante et majorée donc convergente vers sa borne supérieure.

2ème méthode pour la question 1:

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2} = \frac{(5u_n + 10) - 10 + 4}{u_n + 2}$$

$$= 5 - \frac{6}{u_n + 2}$$

On a: $0 \leq u_n < 4 \Leftrightarrow 2 \leq u_n + 2 < 6$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6} < \frac{1}{u_n + 2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq 2 \leq 5 - \frac{6}{u_n + 2} < 4$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq u_{n+1} < 4$$

Exercice 2 (6 pts)

$$f(x) = 1 - x \cdot \left[\frac{1}{x} \right]$$

Q1) 1) On a: $\forall t \in \mathbb{R}: \underset{(1)}{[t]} \leq t \leq \underset{(2)}{[t] + 1}$

Q2) (donc: $t - 1 \underset{(2)}{<} [t] \underset{(1)}{\leq} t$)

Q3) 2) On pose $t = \frac{1}{n} > 0$.

Q4) Q1) $\Rightarrow \frac{1}{n} - 1 < \left[\frac{1}{n} \right] \leq \frac{1}{n}$

Q5) $\Leftrightarrow -1 \leq -n \cdot \left[\frac{1}{n} \right] < n - 1$ (car $-x < 0$)

Q6) $\Leftrightarrow 0 \leq f(x) < x$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = ?$

Q7) Comme $0 \leq f(x) < x$; $\forall x > 0$,
dors en passant à la limite, on obtient:

Q8) $0 \leq \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \leq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

Q9) Donc f admet un prolongement par continuité en 0:
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Q10) 4) $\forall x > 1: 0 < \frac{1}{x} < 1 \Rightarrow \left[\frac{1}{x} \right] = 0$

Q11) $\Rightarrow f(x) = \boxed{1}$

Q12) 5) $f(1) = 1 - 1 = \boxed{0}$

① f est discontinue en $x = 1$ car $f(1) = 0$
et $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ (de la Q4).

Exercice 3: (08 pts)

1) $0 < a < b$

On pose $g(x) = \ln x$ sur $[a, b]$

(i) g est continue sur $[a, b]$; car g est continue sur \mathbb{R}_+^* .
 (ii) g est dérivable sur $]a, b[$; car g est dérivable sur \mathbb{R}_+^* .

$\Rightarrow \exists c \in]a, b[\mid g(b) - g(a) = g'(c) \cdot (b - a)$

$\Rightarrow \ln b - \ln a = \frac{b-a}{c}$

$\Leftrightarrow \frac{b-a}{\ln b - \ln a} = c$

et comme $c \in]a, b[$ alors $a < \frac{b-a}{\ln b - \ln a} < b$

(2) f est dérivable sur $[0, 1]$; car elle est bien définie sur $[0, 1]$ et que c'est la somme et la composée de fonctions dérivables sur $[0, 1]$.

$f'(t) = \frac{b-a}{(1-t)a+tb} + \ln a - \ln b; \forall t \in [0, 1]$

3) $f(0) = f(1) = 0$

f est continue sur $[0, 1]$ $\Rightarrow \exists t \in]0, 1[\mid f'(t) = 0$

f est dérivable sur $]0, 1[$ Rolle \Rightarrow

4) $f''(t) = -\frac{(b-a)^2}{((1-t)a+tb)^2} < 0; \forall t \in [0, 1]$

Donc f' est décroissante sur $[0, 1]$.

5) $\forall t \in [0, 1];$ on a: $t \leq t_0$ ou $t > t_0$

(i) Si $t \leq t_0 \Rightarrow f'(t) \geq f'(t_0)$

$\Rightarrow f'(t) \geq 0$

(ii) Si $t > t_0 \Rightarrow f'(t) \leq f'(t_0)$

$\Rightarrow f'(t) \leq 0$

(P4)

$$3) a) V_n = \frac{U_n - 4}{U_n + 1}$$

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1} - 4}{U_{n+1} + 1} = \frac{\frac{5U_n + 4}{U_n + 2} - 4}{\frac{5U_n + 4}{U_n + 2} + 1} = \frac{U_n - 4}{6(U_n + 1)}$$

$$\Rightarrow V_{n+1} = \frac{1}{6} V_n$$

alors $(V_n)_n$ est une suite géométrique de raison $r = \frac{1}{6}$

$$b) V_n = V_0 \cdot \frac{1}{6^n} = \frac{-4}{6^n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{et } V_n = \frac{U_n - 4}{U_n + 1} \Leftrightarrow U_n = \frac{4 + V_n}{1 - V_n}$$

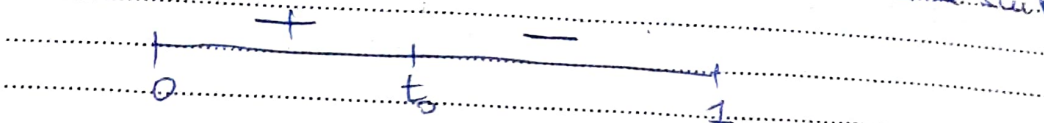
d'où

$$U_n = \frac{4 \cdot 6^n - 4}{6^n + 4}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4 \cdot 6^n - 4}{6^n + 4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6^n (4 - 4 \cdot 6^{-n})}{6^n (1 + 4 \cdot 6^{-n})} = 4$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 4$$

Alors le signe de f' est donné comme suit :



(.) Tableau de variations de f

t	0	t_0	1
$f'(t)$		+	-
$f(t)$	0	$f(t_0)$	0

(g) On remarque que : $\forall t \in [0, 1] : f(t) \geq 0$.

(h) $\ln[(1-t)a + tb] \geq (1-t)\ln a + t\ln b$