Université des Sciences et de la Technologie d'Oran. 2023-2024
Faculté des Mathématiques – Informatique – LMD – Informatique - 1ère Année.
Analyse1

Fiche de TD5
Fonctions réelles à variable réelle
Dérivabilité

Exercice1. Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes sur le domaine de définition

$$1.f_1(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}, 2.f_2(x) = \begin{cases} x+1, x \leq -1 \\ \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right), x > -1 \end{cases}, 3.f_3(x) = \begin{cases} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}, x \in]0, \pi[\\ 0, x = 0 \end{cases}.$$

$$4.f_4(x) = \begin{cases} x^2 + x, x \leq 0 \\ \sin x, 0 < x \leq \pi \\ 1 + \cos x, x > \pi \end{cases}, 5.f_5(x) = \begin{cases} e^x - 1, x \leq 0 \\ \sin \pi x, 0 < x \leq 1 \\ -\pi \ln x, x > 1 \end{cases}.$$

Donner la dérivée de chaque fonction sur son domaine de dérivation.

Exercice2. Calculer la dérivée des fonctions suivantes:

1) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$, 2) $f(x) = tg\left(\dfrac{1-e^x}{1+e^x}\right)$, 3) $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)$,

4) $f(x) = arctg\left(\dfrac{1}{x}\right)$, 5) $f(x) = e^{arctgx^2}$, 6) $f(x) = \arg sh\left(\dfrac{x}{1+x}\right)$,

7. $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$, 8. $f(x) = (chx)^{shx}$.

Exercice 3.

I. Soit f la fonction définie de l'intervalle $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivable sur $[0,1]$, on suppose que:

$$f(0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) = 1.$$

Montrer en utilisant le théorème de Rolle que f'' s'annule au moins une fois sur l'intervalle $[0,1]$.

II. a) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que:

$$1)\forall x > 0, \frac{x}{1+x^2} < arctgx < x.$$

b) Etant donné $ln(100) = 4,6052$, en appliquant le théorème des accroissements finis, montrer qu'en écrivant: $\ln(101) = 4,6151$ on commet une erreur inférieur à 10^{-4}.

Exercice 4.
En utilisant la règle de l'Hopital, calculer les limites:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\cos x}-e}{\cos x-1}$, 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x-\sin x}$, 3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)-1}{(x-1)^2}$,
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arc\sin x}{x}$, 5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(shx)^2-1}{3x}$.

Exercice 5. En utilisant la formule de Taylor-Mac-Laurin d'ordre n, montrer que

$$\forall x>0, 1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}<e^x$$

En utilisant la formule de Taylor-Mac-Laurin d'ordre 2, montrer que $\frac{8}{3}<e<3$.

En déduire que

$$\frac{1}{(n+1)!}<e-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}\right)<\frac{3}{(n+1)!}.$$

Exercice 6. Soit la fonction $g(x)=e^{2x}-2$.
1. Etudier la convexité de la fonction g.
2. Donner l'équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 0.
3. En déduire que $\forall x\in\mathbb{R}$, $\frac{1}{2}\left(e^{2x}-1\right)\geq x$.

Exercice supplémentaire. (Rattrapge 2021)
I- On considère la fonction définie par

$$f(x)=\begin{cases} e^x-1, & x<0 \\ arctg\frac{x}{1+x}, & x\geq 0\end{cases}$$

1. Donner le domaine de définition de la fonction f.
2. Etudier la continuité de la fonction f sur son domaine de définition.
3. Etudier la dérivabilité de la fonction f sur son domaine de définition.
4. Donner la dérivée de la fonction f sur son domaine de dérivation.

II- Soit la fonction $\ln(x+1)$ définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$.
1. Appliquer le théorème des accroissements finies pour cette fonction sur $[0,x]$.
2. Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$$g(x)=\frac{x}{1+x}-\ln(1+x).$$

En déduire que $\forall x\in[0,+\infty[: g(x)\leq 0$.