(LMD) Corrigé de l'examen de rattrapage
1ère Année Analyse 1
22/23

Exercice 1 (6,5)

1) On pose $f(x) = \sin x$ sur $[0, x]$, $\forall x > 0$.
f est continue sur $[0, x]$
f est dérivable sur $]0, x[$
+ AF
$\Longrightarrow \exists c \in]0, x[\,/\, \sin x = x \cos c$

(0,5pt)

on a : $-1 < \cos c < 1$
$\Leftrightarrow -x < x \cos c < x$, $\forall x > 0$
$\Longrightarrow \sin x < x$; $\forall x > 0$

(0,5)

2) a) On pose : $x = -t \,/\, t > 0$ car $x < 0$
$\sin(x) = \sin(-t) = -\sin t$
et d'après Q1) : $\sin t < t$; car $t > 0$
$\Leftrightarrow -\sin t > -t$
$\Leftrightarrow \sin x > x$; $\forall x < 0$

(1pt)

b) $\sin x = x \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \leq x \\ \wedge \\ \sin x \geq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \wedge \\ x \leq 0 \end{cases}$

$\Longrightarrow \boxed{x = 0}$

(1pt)

3) $\begin{cases} u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[\\ u_{n+1} = \sin u_n \; ; \; \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

a) $0 < u_n < 1$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
par récurrence

(0,25) (∘) $0 < u_0 < \frac{\pi}{2} \Longrightarrow 0 < \sin u_0 < 1$ vraie
car sin est croissante ($\nearrow$) sur $]0, \frac{\pi}{2}[$

(0,75) (∘) On suppose que $0 < u_n < 1 < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < u_n < \pi/2$
sur $]0, \pi/2[$
et comme sin est strictement croissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ alors :
car la fonction $\cos x > 0$ $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.
$0 < \underbrace{\sin u_n}_{u_{n+1}} < 1$

(∘) Donc $0 < u_n < 1$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$ (P1)

0,5 b) $u_{n+1} - u_n = \sin u_n - u_n < 0$ car $u_n > 0$.
(d'après Q.1)
donc $(u_n)_n$ est décroissante.

1pt c) $(u_n)_n$ est décroissante et minorée alors elle est convergente vers sa borne inférieure.

0,25 On pose $l = \lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} u_{n+1}$

$l = \sin l \implies \boxed{l = 0}$
(d'après Q 2-b)

0,25 d) $\inf A = l = 0$.

0,5 $\sup A = u_0$; car u_0 est un majorant de A.

car : $(u_n)_n$ est décroissante : $u_0 \geq u_1 \geq u_2 \geq \dots$

et $u_0 \in A$. donc $\max A = u_0 = \sup A$.

Exercice 2 : (8 pts)

$$f(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$$

1pt

1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / \ 1-x^2 \geq 0 \ \wedge -1 \leq 2x\sqrt{1-x^2} \leq 1\}$

On a $1-x^2 = (1-x)(1+x) \geq 0 \ \forall x \in [-1,1]$.

$\forall x \in [-1,1]$: On a : $2x\sqrt{1-x^2} + 1 = (x+\sqrt{1-x^2})^2 \geq 0$

et $2x\sqrt{1-x^2} - 1 = -(x-\sqrt{1-x^2})^2 \leq 0$

Donc

$$D_f = [-1, 1]$$

0,5

2) f est continue sur D_f car c'est la composée, et le produit de fonctions continues sur D_f.

3) Dérivabilité de f :

0,5

$g(x) = \sqrt{1-x^2}$ n'est pas dérivable en $x = \pm 1$

et $\arcsin t$ n'est pas dérivable en $t = \pm 1$

1pt

donc on cherche les $x \in]-1,1[$ tels que :

$2x\sqrt{1-x^2} = 1 \iff 4x^2(1-x^2) - 1 = 0$

$\iff -4x^4 + 4x^2 - 1 = 0$

$\iff -(2x^2-1)^2 = 0$

$\iff x^2 = \frac{1}{2}$

$\iff x = \frac{1}{\sqrt{2}} \vee x = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

et $2x\sqrt{1-x^2} \neq -1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

D'où

0,5

f est dérivable sur $I =]-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}[\cup]-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}[\cup]\frac{1}{\sqrt{2}}, 1[$

car c'est la composée et le produit de fonctions dérivables sur cet intervalle I.

1pt

4) $f'(x) = \dfrac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}\,|1-2x^2|} = \begin{cases} \dfrac{-2}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in \underbrace{]-1,-\frac{1}{\sqrt{2}}[\cup]\frac{1}{\sqrt{2}},1[}_{I_1} \\ \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in \underbrace{]-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}[}_{I_2} \end{cases}$

$\forall x \in I$.

1pt

5) $f''(x) = \begin{cases} \dfrac{-2x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in I_1 \\ \dfrac{2x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in I_2 \end{cases}$

signe de f'' :

1pt

x	-1		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1
f''		$+$		$-$		$+$		$-$	

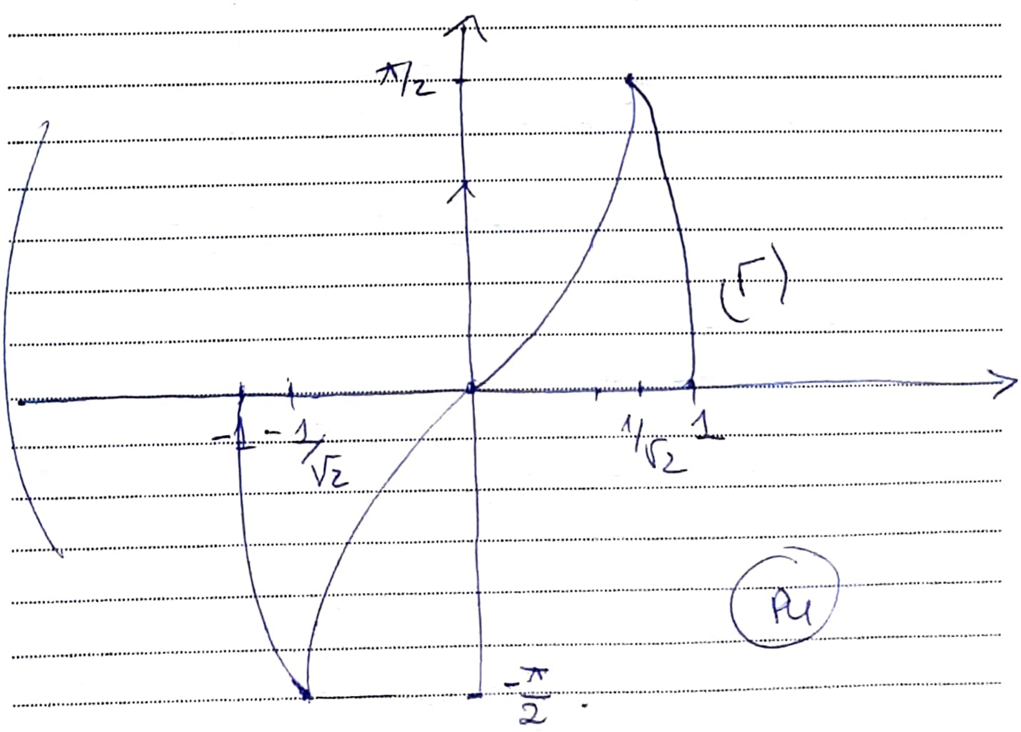
Concavité de f : convexe concave convexe concave.

6) Tableau de variations :

1pt

x	-1		$-1/\sqrt{2}$		0		$1/\sqrt{2}$		1
$f'(x)$	‖	$-$	‖		$+$		‖	$-$	‖
$f(x)$	0	↘	$-\frac{\pi}{2}$	↗		↗	$\frac{\pi}{2}$	↘	0

0,5



P4

Exercice 3 : (3,5pts)

1) f est 2-fois dérivable sur $[a, b]$
alors f est continue sur $[a, b]$
(1) et f est dérivable sur $]a, b[$
et on a $f(a) = f(b)$.
th Rolle
$\Longrightarrow \exists c \in]a, b[\ / \ f'(c) = 0$

(0,5) 2) $f''(x) \leq 0$, $\forall x \in]a, b[$ alors f' est décroissante sur $]a, b[$

On a :

$a < c < b$

donc pour le signe de f' on a :

(0,5) $\forall x \in]a, c]$: $a < x \leq c \Rightarrow f'(c) \leq f'(x)$

$\Rightarrow 0 \leq f'(x)$

(0,5) $\forall x \in [c, b[$: $c \leq x < b \Rightarrow f'(x) \leq f'(c)$

$\Rightarrow f'(x) \leq 0$

3) On déduit le tableau de variations de f sur $[a, b]$

(1pt)

x	a		c		b
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(c)$	$\searrow$	0

On déduit que $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$

Ou bien (2ème méthode)

$\forall x \in [a, c]$: $a \leq x \leq c \Rightarrow \underset{0}{f(a)} \leq f(x) \leq f(c)$

$\Rightarrow f(x) \geq 0$

et $\forall x \in [c, b]$: $c \leq x \leq b \Rightarrow f(b) \leq f(x) \leq f(c)$

(0,5) $\Rightarrow \underset{}{0} \leq f(x)$

Exercice 4 : (2pts)

On pose $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[100, 101]$

0,25 (•) f est continue sur $[100, 101]$ car elle est continue sur $[0, +\infty[$

0,25 (•) f est dérivable sur $]100, 101[$ " " " dérivable sur $]0, +\infty[$

0,5 T.A.F $\Longrightarrow \exists c \in]100, 101[\; / \; \sqrt{101} - \sqrt{100} = \dfrac{1}{2\sqrt{c}}$

d'où $\sqrt{101} = \dfrac{1}{2\sqrt{c}} + 10$

1pt On a : $100 < c < 101 < 121$

$\Rightarrow \sqrt{100} < \sqrt{c} < \sqrt{121} \Rightarrow \dfrac{1}{22} < \dfrac{1}{2\sqrt{c}} < \dfrac{1}{20}$.

$\Rightarrow \dfrac{1}{22} + 10 < \sqrt{101} < \dfrac{1}{20} + 10$