Corrigé du TD 3 Suites numériques
2023/2024

Exercice1.

I. Calcule de limites.

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}-\frac{\sqrt{n}}{n}\right)=+\infty.$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n\sin n}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\underbrace{\frac{n}{n^2+1}}_{\to 0}\underbrace{\sin n}_{bornée}=0.$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)}{n\left(1-\frac{(-1)^n}{n}\right)}=1$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}\underbrace{(-1)^n}_{bornée}=0.$

4. $\lim\limits_{n\to+\infty}n^2a^{-\sqrt{n}}, a>0.$

Pour $a=1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}n^2a^{-\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}n^2=+\infty.$

Pour $a\neq 1$.

On calcule d'abord $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(n^2a^{-\sqrt{n}}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}2\ln n+-\sqrt{n}\ln a=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}\left(2\underbrace{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}}_{\to 0}+\ln a\right)=\left\{\begin{array}{c}+\infty,\ \text{si } 0<a<1\\ -\infty,\ \text{si } a>1\end{array}\right..$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty}n^2a^{-\sqrt{n}}=\left\{\begin{array}{c}+\infty,\ \text{si } 0<a\leq 1\\ 0,\ \text{si } a>1\end{array}\right..$

5. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3^{n+1}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right)}{3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right)}=\lim\limits_{n\to+\infty}3\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}=3,$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}=0,\left(0<\frac{2}{3}<1\right).$

6. $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)^{\frac{1}{\ln n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{\ln\left((n+1)^{\frac{1}{\ln n}}\right)}=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{\frac{1}{\ln n}\ln(n+1)}=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{\frac{1}{\ln n}\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{\frac{1}{\ln n}\left(\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{1+\underbrace{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}}_{\to 0}}=e.$

7. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}$. On utilise le théorème des trois suites.

On a $n^2\leq k\leq(n+1)^2\Rightarrow n\leq\sqrt{k}\leq n+1\Rightarrow\frac{1}{n+1}\leq\frac{1}{\sqrt{k}}\leq\frac{1}{n},\forall k, n^2\leq k\leq(n+1)^2$

D'où $\sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{n+1}\leq\sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}\leq\sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{n}\Leftrightarrow\left(\underbrace{(n+1)^2-n^2+1}_{nombre\ de\ termes}\right)\frac{1}{n+1}\leq\sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}\leq\left(\underbrace{(n+1)^2-n^2+1}_{nombre\ de\ termes}\right)\frac{1}{n}$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{2n+2}{n+1}}_{\to 2} \leq \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \underbrace{\frac{2n+2}{n}}_{2}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}} = 2.$$

II. Montrons que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{3n-1} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{3n-1} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \quad \left(n > N_\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{2n+1}{3n-1} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon\right).$$

Soit $\varepsilon > 0$,

$\left|\frac{2n+1}{3n-1} - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{6n+3-(6n-2)}{3(3n-1)}\right| = \left|\frac{5}{3(3n-1)}\right| = \frac{5}{3(3n-1)} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{3}\left(\frac{5}{3\varepsilon}+1\right).$

Il suffit de prendre $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{3}\left(\frac{5}{3\varepsilon}+1\right)\right] + 1.$

Montrons que

$$\lim_{n\to+\infty} e^n = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} e^n = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists N_A \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > N_A \Rightarrow e^n > A$$

Soit $A > 0, e^n > A \Leftrightarrow n > \ln A.$

Il suffit de prendre $N_A = [|\ln A|] + 1.$

Exercice 2.

$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{3U_n}{1+2U_n}, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < U_n < 1$. Montrons par recurrence.

Pour $n = 0, U_0 = \frac{1}{2}$ et $0 < U_0 < 1$.

Supposons que $0 < U_n < 1$ et montrons que $0 < U_{n+1} < 1$.

On a $U_{n+1} = \frac{3U_n}{1+2U_n} = \frac{3}{2} + \frac{-\frac{3}{2}}{1+2U_n}$.

$0 < U_n < 1 \Leftrightarrow 0 < 2U_n < 2 \Leftrightarrow 1 < 1+2U_n < 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{1+2U_n} < 1 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < \frac{-\frac{3}{2}}{1+2U_n} < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < \frac{3}{2} + \frac{-\frac{3}{2}}{1+2U_n} < 1.$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < U_n < 1.$

2. La monotonie de (U_n).

$1^{ère}$ méthode:

$U_{n+1} - U_n = \frac{3U_n}{1+2U_n} - U_n = \frac{3Un - U_n - 2U_n^2}{1+2U_n} = \frac{2U_n(1-U_n)}{1+2U_n} > 0$ car $0 < U_n < 1$, ce qui donne (U_n) est croissante.

$2^{ème}$ méthode:

Posons $f(x) = \frac{3x}{1+2x} = \frac{3}{2} + \frac{-\frac{3}{2}}{1+2x}, 0 < x < 1.$

$f\prime(x) = \frac{3}{(1+2x)^2} > 0 \Rightarrow (U_n)$ monotone.

$U_1 - U_0 = \frac{3\left(\frac{1}{2}\right)}{1+2\left(\frac{1}{2}\right)} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} > 0 \Leftrightarrow (U_n)$ croissante.

3. Déduire que (U_n) est convergente.

Puisque (U_n) est croissante et majorée alors elle est convergente vers la borne supérieure.

Calculons la limite: (U_n) est convergente vers l, alors

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1} = l \Leftrightarrow l = \frac{3l}{1+2l} \Leftrightarrow l+2l^2 = 3l \Leftrightarrow 2l^2-2l = 0 \Leftrightarrow$

$$2l\left(l-1\right) = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} l = 0 \text{ refusée car } (U_n) \text{ est croissante(converge vers la borne supérieure).} \\ \text{ou} \\ l = 1 \end{array}\right. .$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 1.$$

4. $E = \{U_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Puisque (U_n) est convergente et croissante alors

$$\begin{aligned} \sup E &= \lim_{n\to+\infty} U_n = 1. \\ \inf E &= U_0 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Remarque 1 est un minorant pour E mais $\frac{1}{2}$ est le plus gand des minorants de E.

II.

$$\left\{\begin{array}{c} 0 < U_1 < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ U_{n+1} = U_n - 2U_n^3, n \in \mathbb{N}^*. \end{array}\right.$$

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < U_n < \frac{1}{\sqrt{2}}$, montrons par recurrence.

Pour $n = 1, 0 < U_1 < \frac{1}{\sqrt{2}}$ vraie.

Supposons que $0 < U_n < \frac{1}{\sqrt{2}}$ et montrons que $0 < U_{n+1} < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

On a $U_{n+1} = U_n - 2U_n^3 = U_n\left(1 - 2U_n^2\right)$ et

$$0 < U_n < \tfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 0 < U_n^2 < \tfrac{1}{2} \Rightarrow -1 < -2U_n^2 < 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} 0 < 1 - 2U_n^2 < 1 \\ \text{et} \\ 0 < U_n < \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$0 < U_n\left(1 - 2U_n^2\right) < \frac{1}{\sqrt{2}}.1 \Rightarrow 0 < U_{n+1} < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < U_n < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

2. La monotonie de (U_n).

$1^{ère}$ méthode:

$U_{n+1} - U_n = U_n - 2U_n^3 - U_n = -2U_n^3 < 0$ (car $U_n > 0$) $\Rightarrow (U_n)$ est décroissante.

3. Déduire que (U_n) est convergente.

Puisque (U_n) est décroissante et minorée alors elle est convergente vers la borne inférieure.

Calculons la limite: (U_n) est convergente vers l, alors

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1} = l \Leftrightarrow l = l - 2l^3 \Rightarrow l = 0.$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 0.$$

4. $E = \{U_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Puisque (U_n) est convergente et décroissante alors

$$\begin{aligned}\inf E &= \lim_{n\to+\infty} U_n = 0. \\ \sup E &= U_1/0 < U_1 < \frac{1}{\sqrt{2}}.0\end{aligned}$$

Exercice 3. $a, b > 0$.

On veut démontrer que $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

On a $(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2+b^2-2ab \geq 0 \Leftrightarrow a^2+b^2-2ab+4ab \geq 4ab \Leftrightarrow a^2+b^2+2ab \geq 4ab \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow \frac{(a+b)^2}{4} \geq ab \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$.

2. $a \leq \frac{a+b}{2} \leq b, a \leq \sqrt{ab} \leq b$?

$a, b \in \mathbb{R}, \mathbb{R}$ est totalement ordonné alors soit $a \leq b$ ou $a \geq b$.

Supposons que $a \leq b$.

On a $\left.\begin{array}{l}\frac{a}{2} \leq \frac{a}{2} \leq \frac{b}{2} \\ \frac{a}{2} \leq \frac{b}{2} \leq \frac{b}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow a \leq \frac{a+b}{2} \leq b.$

De même $\left.\begin{array}{l}0 < \sqrt{a} \leq \sqrt{a} \leq \sqrt{b} \\ 0 < \sqrt{a} \leq \sqrt{b} \leq \sqrt{b}\end{array}\right\} \Rightarrow a \leq \sqrt{ab} \leq b.$

3. U_0, V_0 avec $U_0 < V_0, U_{n+1} = \sqrt{U_n V_n}, V_{n+1} = \frac{U_n+V_n}{2}$.

a) $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq V_n$. Montrons par recurrence.

Pour $n = 0, U_0 < V_0$ vraie.

On remarque que $U_n > 0$ et $V_n > 0$. (on peut la démontrer par recurrence).

Supposons que $U_n \leq V_n$ et montrons que $U_{n+1} \leq V_{n+1}$.

$$U_{n+1} = \underbrace{\sqrt{U_n V_n} \leq \frac{U_n + V_n}{2}}_{D'aprés\ 1.} = V_{n+1},$$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq V_n$.

b) Monotonie

$U_{n+1} - U_n = \sqrt{U_n V_n} - U_n \geq 0$ d'aprés 2. $a = U_n, b = V_n \left(U_n \leq \sqrt{U_n V_n} \leq V_n\right)$. Ce qui donne que (U_n) est croissante.

$V_{n+1} - V_n = \frac{U_n+V_n}{2} - V_n \leq 0$ d'aprés 2. $a = U_n, b = V_n \left(U_n \leq \frac{U_n+V_n}{2} \leq V_n\right)$. Ce qui donne que (V_n) est décroissante.

c) (U_n) est croissante et (V_n) est décroissante alors

$$U_0 \leq U_1 \leq ... \leq U_{n-1} \leq U_n \leq V_n \leq V_{n-1} \leq ... \leq V_1 \leq V_0$$

On a (U_n) est croissante et majorée$\Rightarrow$convergente vers l.

(V_n) est décroissante et minorée$\Rightarrow$convergente vers l'.

et $\left\{\begin{array}{l}U_{n+1} = \sqrt{U_n V_n} \Rightarrow l = \sqrt{ll'} \\ V_{n+1} = \frac{U_n+V_n}{2} \Rightarrow l' = \frac{l+l'}{2}\end{array}\right. . \Rightarrow \left\{\begin{array}{c}l^2 = ll' \\ 2l' = l + l'\end{array}\right. \Rightarrow l = l'.$

Exercice 4.

1. $(k^n)_{n\in\mathbb{N}}, 0 < k < 1$ est une suite de Cauchy$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N}; (p > q \geq N_\varepsilon \Rightarrow |U_p - U_q| < \varepsilon)$.

Soit $\varepsilon > 0$,

$$|U_p - U_q| = |k^p - k^q| = \left|k^q\left(k^{p-q} - 1\right)\right| < k^q\left|k^{p-q} - 1\right|$$

On a $0 < k < 1, p - q > 0 \Rightarrow 0 < k^{p-q} < 1 \Rightarrow - - 1 < k^{p-q} - 1 < 0 \Rightarrow |k^{p-q} - 1| < 1$,

donc

$$|U_p - U_q| = \left|k^q\left(k^{p-q} - 1\right)\right| < k^q < \varepsilon \Rightarrow q\underbrace{\ln k}_{<0} < \ln\varepsilon \Rightarrow q > \frac{\ln\varepsilon}{\ln k}.$$

Il suffit de prendre $N_\varepsilon = \left[\left|\frac{\ln\varepsilon}{\ln k}\right|\right] + 1$.

2. $(\ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, n'est pas une suite de Cauchy$\Leftrightarrow \exists\varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists p, q \in \mathbb{N}; \left(p > q \geq N \text{ et } |U_p - U_q| \geq \varepsilon\right)$.

Posons $p = 2N, q = N$.

$$|U_{2N} - U_N| = |\ln 2N - \ln N| = |\ln 2 + \ln N - \ln N| = |\ln 2| = \ln 2 = \varepsilon$$

Il suffit de prendre $\varepsilon = \ln 2$.