Cours d'Analyse 1

Damerdji Bouharis A.

Université des Sciences et de la Technologie Mohamed Boudiaf
Faculté des Mathématiques et Informatique.

Table des matières

Chapitre 5

Fonctions dérivables

5.1 Fonctions dérivables

Définition 5.1.1 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, x_0 un point de I et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. On dit que f est dérivable en x_0 si la limite suivante existe, est finie et unique.*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda \in \mathbb{R}$$

Cette limite est appelée dérivée de f au point x_0 et on la note par $f'(x_0)$.

- On peut avoir la définition analogue suivante :

$$(f \text{ est dérivable en } x) \Leftrightarrow \left(\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) \in \mathbb{R} \right).$$

Définition 5.1.2 - *On dit que f est dérivable à gauche (repectivement à droite) en x_0 si le rapport $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie à gauche (repectivement à droite) en x_0 et cette limite est appelée dérivée à gauche (repectivement à droite) de f au point x_0.*

- Pour que f soit dérivable en x_0; il faut et il suffit que f soit dérivable à gauche et à droite de x_0 et que les deux limites soient égales.

ie. $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.

- Une fonction définie d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dite dérivable sur I; si elle est dérivable en tout point de I.

Exemples 5.1.3 - *Toute fonction polynôme de degré n est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est un polynôme de degré $n-1$.*

- Toute fonction rationnelle (quotient de deux polynômes) est dérivable sur son domaine de définition, et sa dérivée est une fonction rationnelle.

- La fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x}$ est dérivable en $x_0 = 2$; en effet

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = f'(2).$$

- *La fonction* f *définie par* $f(x) = |x|$ *; n'est pas pas dérivable au point* $x_0 = 0$ *car les limites à gauche et à droite en* 0 *sont différentes ; en effet*

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{-x}{x} = -1$$
$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{x}{x} = 1$$

- *La fonction* $\exp$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et on a*

$$(\exp x)' = (e^x)' = \exp x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

- *La fonction* $\ln$ *est dérivable sur* $]0, +\infty[$ *et on a*

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \forall x \in \left]0, +\infty\right[.$$

- *La fonction* $\log_a$ *est dérivable sur* $]0, +\infty[$ *et on a*

$$\log_a'(x) = \frac{1}{x \ln a}, \forall x \in \left]0, +\infty\right[.$$

- *La fonction puissance est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et on a*

$$(a^x)' = (\ln a)\, a^x \ , \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

5.1.1 Interprétation géométrique

Soit f une fonction définie d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et soit (Γ) son graphe, soient M_0 un point de (Γ) tel que $M_0(x_0, f(x_0))$, et M un autre point de (Γ) tel que $M(x, f(x))$.

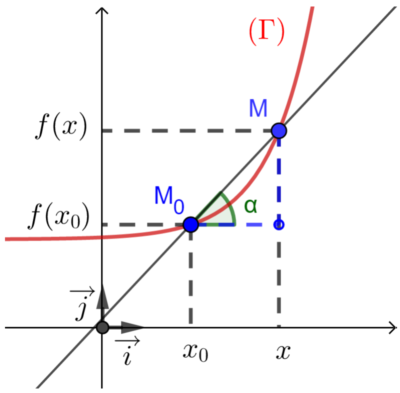

FIGURE 5.1 – Interprétation géométrique

Si f est dérivable en x_0 alors le graphe (Γ) admet en x_0 une tangente (T) d'équation $(T) : y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, en effet ;

En calculant la pente de (M_0M), c'est à dire la tangente de l'angle que fait l'axe des abscisses avec la droite (M_0M)

$$\tan \alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0};$$

on remarque que quand x tend vers x_0 alors la pente de (T) est égale à

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

d'où

$$(T) : y = (f'(x_0).x) + b, \text{ tel que } b \in \mathbb{R}$$

or

$$M_0(x_0, f(x_0)) \in (T) \Rightarrow b = f(x_0) - f'(x_0).x_0,$$

d'où

$$(T) : y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Remarques :

1. Si la fonction f admet en x_0 une dérivée à gauche l_g et une dérivée à droite l_d telles que $l_g \neq l_d$; alors le graphe (Γ_f) de f admet en $M_0(x_0, f(x_0))$ deux demi tangentes et on dit que M_0 est un point anguleux de (Γ_f).
2. Si l'une des deux limites est infinie alors on dit que le graphe (Γ_f) admet au point $M_0(x_0, f(x_0))$; une tangente verticale d'équation $x = x_0$ et on dit que M_0 est un point de rebroussement de (Γ_f).

Proposition 5.1.4 *Si f est une fonction dérivable en $x = a$ alors f est continue en $x = a$.*

Preuve :
On a

$$\lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] = \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right][x - a]$$

et comme f est dérivable en $x = a$; alors

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] &= \lim_{x \to a} \left[\tfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\right] \lim_{x \to a} [x - a] \\ &= f'(a).0 = 0 \end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

□

Théorème 5.1.5 *Soient f et g deux fonctions dérivables en x_0 et soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors les fonctions $f + g$, fg, $\alpha f + \beta g$ et $\frac{f}{g}$ (si $g(x_0) \neq 0$) sont dérivables aussi* *en x_0 et l'on a :*

$$
\begin{aligned}
&1)\ (f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0),\\
&2)\ (f.g)'(x_0) = f'(x_0).g(x_0) + f(x_0).g'(x_0),\\
&3)\ (\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha.f'(x_0) + \beta.g'(x_0),\\
&4)\ \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.
\end{aligned}
$$

Preuve :
1) et 3) sont évidentes.
2) On a

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \frac{[f(x) - f(x_0)]}{x - x_0} g(x) + f(x_0)\frac{[g(x) - g(x_0)]}{x - x_0}$$

alors par passage à la limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{[f(x) - f(x_0)]}{x - x_0} g(x) + \lim_{x \to x_0} f(x_0)\frac{[g(x) - g(x_0)]}{x - x_0}$$

d'où

$$(f.g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

4) Pour montrer que $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$; il suffit de montrer que

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

On a

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{-(g(x) - g(x_0))}{(x - x_0)} \frac{1}{(g(x_0).g(x))}$$

alors par passage à la limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

□

Proposition 5.1.6 *Soient f et g deux fonctions, telles que :*
$f : I_1 \to I_2$, $g : I_2 \to \mathbb{R}$; I_1, I_2 étant deux intervalles de $\mathbb{R}$.
Si f est dérivable en $x_0 \in I_1$ et g est dérivable en $y_0 = f(x_0) \in I_2$, alors :
$g \circ f : I_1 \to \mathbb{R}$ est dérivable en x_0 et on a :

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

Preuve :
On a
$$\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0)}{x-x_0}=\frac{g\left(f\left(x\right)\right)-g\left(f\left(x_0\right)\right)}{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}\frac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}$$
alors par passage à la limite comme f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $y_0=f(x_0)$; on a
$$\lim_{x\,\to\,x_0}\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0)}{x-x_0}=g'(f(x_0))f'(x_0)$$
d'où
$$(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))f'(x_0)$$
□

Exemple 5.1.7 $(\ln(\cos(e^x)))'=\frac{-e^x\sin(e^x)}{\cos(e^x)}$.

5.1.2 Dérivée d'une fonction réciproque

Théorème 5.1.8 *Soit f une fonction bijective et continue d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J de $\mathbb{R}$. Si f est dérivable en $x_0\in I$, telle que $f'(x_0)\neq 0$, alors la fonction réciproque f^{-1}est dérivable au point $f(x_0)=y_0$, et on a :*
$$\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\frac{1}{f'\left(x_0\right)}.$$

Preuve :
Montrons que
$$\lim_{y\,\to\,y_0}\frac{f^{-1}\left(y\right)-f^{-1}\left(y_0\right)}{y-y_0}=\frac{1}{f'\left(x_0\right)}$$
On a
$$\lim_{y\,\to\,y_0}\frac{f^{-1}\left(y\right)-f^{-1}\left(y_0\right)}{y-y_0}=\lim_{x\,\to\,x_0}\frac{f^{-1}\left(f\left(x\right)\right)-f^{-1}\left(f\left(x_0\right)\right)}{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}$$
car f^{-1} est continue, donc
$$\lim_{y\,\to\,y_0}\frac{f^{-1}\left(y\right)-f^{-1}\left(y_0\right)}{y-y_0}=\lim_{x\,\to\,x_0}\frac{x-x_0}{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}=\lim_{x\,\to\,x_0}\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}},$$
comme f est dérivable en x_0 et d'après le théorème de l'inverse de limite ; on a
$$\lim_{y\,\to\,y_0}\frac{f^{-1}\left(y\right)-f^{-1}\left(y_0\right)}{y-y_0}=\frac{1}{\lim\limits_{x\,\to\,x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}=\frac{1}{f'\left(x_0\right)}$$

d'où
$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$
□

Dérivées des fonctions réciproques des fonctions trigonométriques

1. $f^{-1}(x) = \arcsin x$
$$\begin{pmatrix} \arcsin x = y \\ -1 \leq x \leq 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sin y = x \\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin y)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \forall x \in \left]-1, 1\right[.$$
d'où
$$(\arcsin g(x))' = \frac{g'(x)}{\sqrt{1-(g(x))^2}}, \text{ pour } g(x) \in \left]-1, 1\right[.$$
2. $f^{-1}(x) = \arccos x$
$$\begin{pmatrix} \arccos x = y \\ -1 \leq x \leq 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos y = x \\ 0 \leq y \leq \pi \end{pmatrix}$$
$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{-1}{\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-(\cos y)^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \forall x \in \left]-1, 1\right[.$$
d'où
$$(\arccos g(x))' = \frac{-g'(x)}{\sqrt{1-(g(x))^2}}, \text{ pour } g(x) \in \left]-1, 1\right[.$$
3. $f^{-1}(x) = \arctan x$
$$\begin{pmatrix} \arctan x = y \\ x \in \mathbb{R} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \tan y = x \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$
$$(\arctan x)' = \frac{1}{(\tan y)'} = (\cos y)^2 = \frac{1}{1+(\tan y)^2} = \frac{1}{1+x^2}, \forall x \in \mathbb{R}.$$
d'où
$$(\arctan(g(x)))' = \frac{g'(x)}{1+(g(x))^2}.$$
4. $f^{-1}(x) = \operatorname{arccot} x$
$$\begin{pmatrix} \operatorname{arccot} x = y \\ x \in \mathbb{R} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \cot y = x \\ 0 < y < \pi \end{pmatrix}$$
$$(\operatorname{arccot} x)' = \frac{1}{(\cot y)'} = -(\sin y)^2 = \frac{-1}{1+(\cot gy)^2} = \frac{-1}{1+x^2}, \forall x \in \mathbb{R}.$$
d'où
$$(\operatorname{arccot}(g(x)))' = \frac{-g'(x)}{1+(g(x))^2}.$$

Dérivées des fonctions réciproques des fonctions hyperboliques

1. $f^{-1}(x) = \arg shx$

$$(\arg shx)' = \frac{1}{(shy)'} = \frac{1}{chy} = \frac{1}{\sqrt{1+(shy)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

d'où

$$(\arg shg(x))' = \frac{g'(x)}{\sqrt{1+(g(x))^2}}.$$

2. $f^{-1}(x) = \arg chx$

$$(\arg chx)' = \frac{1}{(chy)'} = \frac{1}{shy} = \frac{1}{\sqrt{(chy)^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \forall x \geq 1.$$

d'où

$$(\arg chg(x))' = \frac{g'(x)}{\sqrt{(g(x))^2-1}}, \text{ pour } g(x) \geq 1.$$

3. $f^{-1}(x) = \arg thx$

$$(\arg thx)' = \frac{1}{(thy)'} = ch^2y = \frac{1}{1-th^2y} = \frac{1}{1-x^2}, \forall x \in \left]-1,1\right[.$$

d'où

$$(\arg thg(x))' = \frac{g'(x)}{1-(g(x))^2}, \text{ pour } g(x) \in \left]-1,1\right[.$$

4. $f^{-1}(x) = \arg\coth x$

$$(\arg\coth x)' = \frac{1}{(\coth y)'} = -sh^2y = \frac{1}{1-\coth^2 y} = \frac{1}{1-x^2}, \forall x \in \left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[.$$

d'où

$$(\arg\coth g(x))' = \frac{g'(x)}{1-(g(x))^2}, \text{ pour } g(x) \in \left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[.$$

5.2 Dérivée n-ième d'une fonction

5.2.1 Dérivée n-ième d'une fonction

Définition 5.2.1 *Soit f une fonction réelle, dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, f est dite $n-fois$ dérivable sur I si toutes ses dérivées successives $f', f'', f''', f^{(4)}, ..., f^{(n)}$ existent sur I.*

$f^{(n)}$ est appelée dérivée $n-$ième de f.

Si de plus $f^{(n)}$ est continue sur I; alors f est dite de classe C^n sur I (toutes ses dérivées successives existent et sont continues) et on note $f \in C^n(I)$.

f est dite de classe $C^0(I)$ si elle est continue sur I.

f est dite de classe $C^\infty(I)$ si $f^{(n)}$ existe et est continue sur I; pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Propriétés 1 *1.* $f^{(0)} = f,\ f^{(1)} = f', ...$

2. $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)' = (f')^{(n-1)}$

Exemples 5.2.2 *A vérifier par récurrence que :*

1. *Si* $f(x) = e^x$, *alors* $f^{(n)}(x) = e^x, \forall n \in \mathbb{N}$.
2. *Si* $f(x) = e^{ax}$, *alors* $f^{(n)}(x) = a^n e^{ax}, \forall n \in \mathbb{N}$.
3. *Si* $f(x) = (1+x)^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$,
   alors $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)..(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
4. *Si* $f(x) = \sin x$ *alors* $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \forall n \in \mathbb{N}$.
5. *Si* $f(x) = \cos x$ *alors* $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \forall n \in \mathbb{N}$.

5.2.2 Dérivée n-ième d'un produit de fonctions (Formule de Leibnitz).

Théorème 5.2.3 *Si f et g sont deux fonctions réelles admettant des dérivées n-ième au point x_0 alors la fonction produit $f.g$ admet une dérivée $n-$ième au point x_0 et on a :*

$$(f.g)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(x_0)\, g^{(k)}(x_0)$$

Exemple 5.2.4 *La dérivée $n-$ième de la fonction $f(x) = (x^2 - 3x + 1)e^{2x}$ est calculée comme suit :*

$$(f)^{(n)}(x) = (h.g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k h^{(n-k)}(x)\, g^{(k)}(x),$$

où

$h(x) = e^{2x}$ *et* $g(x) = (x^2 - 3x + 1)$ *donc :*

$$h^{(n)}(x) = 2^n e^{2x}, \forall n \in \mathbb{N}$$

et

$$g'(x) = 2x - 3,\ g''(x) = 2 \text{ et } g^{(n)}(x) = 0, \forall n \geq 3.$$

d'où

$$(f)^{(n)}(x) = e^{2x} 2^n \left[\left(x^2 - 3x + 1\right) + \frac{n}{2}(2x-3) + \frac{n(n-1)}{4}\right], \forall n \in \mathbb{N}.$$