Tal 2
Corrigé modèle 1 (1)

<u>Exo1</u>: $f(x) = \arcsin\left(\frac{1-x}{4}\right)$

$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / -1 \leq \frac{1-x}{4} \leq 1\right\}$.

$-1 \leq \frac{1-x}{4} \leq 1 \Rightarrow -4 \leq 1-x \leq 4$

$\Rightarrow -3 \leq x \leq 5$

- $D_f = [-3, 5]$

<u>Exo2</u>:

$$f(x) = \begin{cases} x - a & , x \geq 0 \\ \frac{e^x - 1}{\sin x} & , -\pi < x < 0 \end{cases} , \quad a \in \mathbb{R}$$

1) $D_f =]-\pi, +\infty] =]-\pi, +\infty[$.

2) f continue sur $]-\pi, +\infty[\Leftrightarrow f$ continue pour $x > 0$, et pour $-\pi < x < 0$ et pour $x = 0$

- f est continue pour $x > 0$ car $f(x) = x - a$ est un polynôme
- f est continue pour $]-\pi, 0[$ car $f(x) = \frac{e^x - 1}{\sin x}$ est quotient de fonctions continues sur $]-\pi, 0[$.
- en $x = 0$; $f(0) = 0 - a = -a$.

f continue en $0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = f(0)$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = -a = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} \overset{H}{=} \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{e^x}{\cos x} = 1 = f(0) = -a$$

$\Rightarrow \boxed{a = -1}$

3) Pour $a = -1$: $f(x) = \begin{cases} x + 1 & , x \geq 0 \\ \frac{e^x - 1}{\sin x} & , -\pi < x < 0 \end{cases}$

<u>Dérivabilité en 0</u> : $f(0) = 1$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{x + 1 - 1}{x} = 1 = f'_d(0).$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{\frac{e^x - 1}{\sin x} - 1}{x} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{e^x - 1 - \sin x}{x \sin x}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{e^x - \cos x}{\sin x + x\cos x} \overset{H}{=} \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{e^x + \sin x}{\cos x + \cos x - x\sin x}$$

$$= \frac{1}{2} = f'_g(0)$$

On a : $f'_d(0) \neq f'_g(0) \Rightarrow f$ n'est pas dérivable en 0.

4) f est dérivable sur $]-\pi, 0[\cup]0, +\infty[$.

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ \frac{\sin x e^x - \cos x(e^x - 1)}{(\sin x)^2}, & -\pi < x < 0. \end{cases}$$

Exo3 : $\lim_{x \to 1} \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)}{x-1} \overset{H}{=} \lim_{x \to 1} \frac{\frac{\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)'}{1 + \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2}}{1}$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{4x}{2x^2+2} = 1.$$

Corrigé Test 2 Modèle 1 (2)

Exo 1 : $f(x) = (x-1)^{\frac{2x}{1-\sqrt{3-x^2}}}$

$= e^{\frac{2x}{1-\sqrt{3-x^2}} \ln(x-1)}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 1-\sqrt{3-x^2} \neq 0 \text{ et } 3-x^2 \geq 0 \text{ et } x-1 > 0\}$

$3-x^2 \geq 0 \iff x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

$x-1 > 0 \iff x > 1$

$1-\sqrt{3-x^2} \neq 0 \iff 1 \neq \sqrt{3-x^2} \iff 2-x^2 \neq 0 \iff x \neq \sqrt{2}, x \neq -\sqrt{2}$

$D_f =]1, \sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, \sqrt{3}]$

Exo 2 : $f(x) = \begin{cases} (x-2)\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x-2}\right) & , x \neq 2 \\ 0 & , x = 2 \end{cases}$

1) $D_f = \mathbb{R}$

2) Continuité sur $\mathbb{R}$.

- Pour $x \neq 2$, $f(x) = (x-2)\operatorname{arctg}\frac{1}{x-2}$ continue sur $\mathbb{R}-\{2\}$ car composition de fcts continues sur $\mathbb{R}-\{2\}$.
- Pour $x = 2$; $f(2) = 0$.

$\lim_{x \overset{>}{\to} 2} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 2} (x-2)\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x-2}\right) = 0 \cdot \frac{\pi}{2} = 0 = f(2)$.

(avec $\operatorname{arctg}(+\infty) = \pi/2$)

$\lim_{x \overset{<}{\to} 2} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 2} (x-2)\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x-2}\right) = 0 \cdot (-\pi/2) = 0 = f(2)$

$\lim_{x \overset{>}{\to} 2} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 2} f(x) = f(2) \Rightarrow f$ continue en 2.

Par suite, f continue sur $\mathbb{R}$

3.) Dérivabilité sur $\mathbb{R}$.

- Pour $x \neq 2$: $f(x) = (x-2)\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x-2}\right)$ dérivable sur $\mathbb{R}-\{2\}$ car composition de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}-\{2\}$.
- Pour $x = 2$.

$\lim_{x \overset{>}{\to} 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \overset{>}{\to} 2} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x-2}\right) = \pi/2 = f'_d(2)$.

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \overset{<}{\to} 2} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x-2}\right) = \operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2} = f'_g(2)$$

On a : $f'_d(2) \neq f'_g(2) \Rightarrow f$ n'est pas dérivable en 2.

4) f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{2\}$.

$$f'(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-2} + (x-2) \frac{\frac{-1}{(x-2)^2}}{1+\left(\frac{1}{x-2}\right)^2}$$

$$f'(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x-2}\right) - \frac{x-2}{x^2-4x+5}, \quad x \neq 2.$$

Exo3 :

$$\lim_{x \to 1} \frac{1+\cos \pi x}{x^2-2x+1} \overset{H}{=} \lim_{x \to 1} \frac{-\pi \sin \pi x}{2x-2}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x \to 1} \frac{-\pi^2 \cos \pi x}{2} = \frac{\pi^2}{2}.$$

Corrigé Test 2 Modèle 1 (3)

Exo 1 : $f(x) = \left(\frac{1}{\operatorname{arctg} x}\right)^{\arcsin x}$

$f(x) = e^{\arcsin x \ln\left(\frac{1}{\operatorname{arctg} x}\right)}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R},\ -1 \leq x \leq 1 \text{ et } \frac{1}{\operatorname{arctg} x} > 0 \text{ et } \operatorname{arctg} x \neq 0\}$.

$\frac{1}{\operatorname{arctg} x} > 0 \Leftrightarrow \operatorname{arctg} x > 0 \Rightarrow x > 0$

$\operatorname{arctg} x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$.

$D_f =]0, 1]$.

Exo 2 : $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{\pi - x}, & x \neq \pi \\ 1, & x = \pi \end{cases}$

1) $D_f = \mathbb{R}$.

2) Continuité sur $\mathbb{R}$.

- Pour $x \neq \pi$, $f(x) = \frac{\sin x}{\pi - x}$ continue sur $\mathbb{R} - \{\pi\}$ car quotient de fcts continues sur $\mathbb{R} - \{\pi\}$.
- Pour $x = \pi$; $f(\pi) = 1$

$\lim_{x \to \pi} f(x) = \lim_{x \to \pi} \frac{\sin x}{\pi - x} \overset{H}{=} \lim_{x \to \pi} \frac{\cos x}{-x} = 1 = f(\pi)$

f continue en π par suite, continue sur $\mathbb{R}$.

3) Dérivabilité sur $\mathbb{R}$

Pour $x \neq \pi$: f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{\pi\}$ car quotient de fct dérivables sur $\mathbb{R} - \{\pi\}$.

Pour $x = \pi$:

$\lim_{x \to \pi} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x \to \pi} \frac{\frac{\sin x}{\pi - x} - 1}{x - \pi} = \lim_{x \to \pi} \frac{\sin x - \pi + x}{(\pi - x)(x - \pi)}$

$= \lim_{x \to \pi} \frac{\sin x - \pi + x}{-(x-\pi)^2} \overset{H}{=} \lim_{x \to \pi} \frac{\cos x + 1}{-2(x - \pi)} \overset{H}{=} \lim \frac{-\sin x}{-2} = 0$

f est dérivable en π et $f'(\pi) = 0$ par suite f dérivable sur $\mathbb{R}$

4) $f'(x) = \begin{cases} \frac{\cos x(\pi - x) + \sin x}{(\pi - x)^2}, & x \neq \pi \\ 0, & x = \pi \end{cases}$

Exo3 : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(e^x-1)\,tg^2 x}{x(1-\cos x)}$

On a : $e^x - 1 \overset{0}{\sim} x$

$tg\,x \overset{0}{\sim} x \Rightarrow tg^2 x \overset{0}{\sim} x^2$.

$1-\cos x \overset{0}{\sim} x^2/2$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(e^x-1)\,tg^2 x}{x(1-\cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot x^2}{x(x^2/2)} = 2.$$

Corrigé test 2 modèle 1 ..(2)

Exo1 : $f(x) = \arcsin\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)$.

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / -1 \leq \frac{x^2}{x^2+1} \leq 1\}$.

On a : $\frac{x^2}{x^2+1} \geq 0 \geq -1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

et $x^2 \leq x^2+1 \Rightarrow \frac{x^2}{x^2+1} \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

$D_f = \mathbb{R}$.

Exo2 : $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 \sin 1/x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

1) $D_f = \mathbb{R}$.

2) Continuité sur $\mathbb{R}$:

Pour $x \neq 0$; $f(x) = 1 - x^2 \sin 1/x$ continue sur $\mathbb{R}^*$ car somme, produit et composition de fcts continues sur $\mathbb{R}^*$.

Pour $x = 0$: $f(0) = 1$

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} 1 - \underbrace{x^2}_{\to 0} \underbrace{\sin 1/x}_{\text{bornée}} = 1 = f(0) \Rightarrow f$ conti en 0

par suite, f continue sur $\mathbb{R}$.

3) Dérivabilité sur $\mathbb{R}$:

Pour $x \neq 0$: f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car somme, produit et composition de fcts dérivables sur $\mathbb{R}^*$.

Pour $x = 0$,

$\lim_{x \to 0} \frac{1 - x^2 \sin 1/x - 1}{x} = \lim -\underbrace{x}_{\to 0} \underbrace{\sin 1/x}_{\text{bornée}} = 0 = f'(0)$

f est dérivable en 0 par suite, dérivable sur $\mathbb{R}$.

4) $f'(x) = \begin{cases} -2x \sin 1/x + \cos 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Exo3 : $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{\ln(1+tg^2 x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{(\sqrt{\cos x}+1)\ln(1+tg^2 x)}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{-x^2/2}{(\sqrt{\cos x}+1)(x^2)} = -1/4 \quad \begin{cases} \cos x - 1 \overset{0}{\sim} -x^2/2 \\ \ln(1+tg^2 x) \overset{0}{\sim} tg^2 x \overset{0}{\sim} x^2 \end{cases}$