Analyse 2
Corrigé de la fiche de TD 2

Damerdji Bouharis A.
Université des Sciences et de la Technologie Mohamed Boudiaf
Faculté des Mathématiques et Informatique.

Corrigé de la fiche de TD 2

Exercice 1 :

1. Comme la subdivision d_n est régulière sur $[0,1]$ alors on a:

$$\begin{cases} x_i = \frac{i}{n} \\ x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n} \end{cases}$$

$S(f,d_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$ et $s(f,d_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$

où $M_i = \sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = f(x_i) = 3x_i^2 = 3\left(\frac{i}{n}\right)^2 ; \forall i = 1,..,n.$

et $m_i = \inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = f(x_{i-1}) = 3x_{i-1}^2 = 3\left(\frac{i-1}{n}\right)^2 ; \forall i = 1,..,n.$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} S(f,d_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n^3}\sum\limits_{i=1}^{n} i^2 = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{2n^2} = 1$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} s(f,d_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n^3}\sum\limits_{i=1}^{n} (i-1)^2 = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n^3}\sum\limits_{j=1}^{n-1} j^2$; (changement d'indice $j = i-1$)

or $\sum\limits_{j=1}^{n-1} j^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$; donc $\lim\limits_{n\to+\infty} s(f,d_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(n-1)(2n-1)}{2n^2} = 1.$

2. Comme la subdivision d_n est régulière donc son pas tend vers zéro et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} S(f,d_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} s(f,d_n) = 1$; alors f est intégrable sur $[0,1]$ et on a $\int\limits_0^1 f(x)\,dx = 1.$

Exercice 2 :

On pose $f(x) = e^x$, f est continue sur $[a,b]$ donc intégrable sur $[a,b]$, d'où en considérant une subdivision régulière de l'intervalle $[a,b]$, on a

$\int\limits_a^b e^x dx = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{i(b-a)}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} e^{a+\frac{i(b-a)}{n}}$

d'où $\int\limits_a^b e^x dx = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} e^a \sum\limits_{i=1}^{n} \left(e^{\frac{(b-a)}{n}}\right)^i$;

or $\sum\limits_{i=1}^{n} \left(e^{\frac{(b-a)}{n}}\right)^i = \frac{e^{\frac{b-a}{n}}\left(1-e^{b-a}\right)}{1-e^{\frac{b-a}{n}}}$; somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $e^{\frac{(b-a)}{n}}$, donc $\int\limits_a^b e^x dx = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} e^a e^{\frac{b-a}{n}} \frac{1-e^{b-a}}{1-e^{\frac{b-a}{n}}}$

alors $\int\limits_a^b e^x dx = \left(e^a - e^b\right) \lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{b-a}{n}} \frac{\frac{b-a}{n}}{1-e^{\frac{b-a}{n}}}$

comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{b-a}{n}}{1-e^{\frac{b-a}{n}}} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{1-e^{t}} = -1$; (C.V : $t = \frac{b-a}{n}$)
alors $\int\limits_a^b e^x dx = e^b - e^a$.

Exercice 3 :

1. On fait un changement de variables :
   C.V: $t = a+b-x \Leftrightarrow x = a+b-t \Rightarrow dx = -dt$ d'où
   $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(a+b-t)dt = \int\limits_a^b f(a+b-t)dt$,
   et comme la variable d'intégration est muette alors
   $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(a+b-x)dx$.

2. $I = \int\limits_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+cos^2 x}dx \underset{(1)}{=} \int\limits_0^{\pi} \frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+cos^2(\pi-x)}dx = \int\limits_0^{\pi} \frac{(\pi-x)\sin x}{1+cos^2 x}dx$;
   car $\sin(\pi-x) = \sin x$ et $\cos(\pi-x) = -\cos x$, d'où
   $I = \int\limits_0^{\pi} \frac{\pi\sin x}{1+cos^2 x}dx - I \Leftrightarrow I = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \frac{\pi\sin x}{1+cos^2 x}dx$.
   on fait un changement de variables
   C.V: $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x$, alors
   $I = \frac{-\pi}{2}\int\limits_1^{-1} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}\int\limits_{-1}^{1} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}\left[\arctan t\right]_{-1}^{1} = \frac{\pi^2}{4}$.

Exercice 4 :

Dans tout l'exercice on considère la subdivision régulière de l'intervalle $[a,b]$ d'où : $\begin{cases} x_i = a + \frac{i(b-a)}{n} \\ x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} \end{cases}$

1. $l_1 = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{1}{n\alpha+i} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left[\frac{1}{n\alpha} + \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{n\alpha+i}\right] = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha+\frac{i}{n}}$

   alors si on pose $x_i = \alpha + \frac{i}{n}$; on a : $\begin{cases} a = \alpha \text{ et } b = \alpha+1 \\ f(x_i) = \frac{1}{x_i}, \forall i = 1,...,n \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x}. \end{cases}$

   comme f est continue sur $[\alpha, \alpha+1]$ alors f est intégrable sur $[\alpha, \alpha+1]$, et on a $\int\limits_{\alpha}^{\alpha+1} f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha+\frac{i}{n}} = l_1$, donc

   $l_1 = \int\limits_{\alpha}^{\alpha+1} f(x)\,dx = \int\limits_{\alpha}^{\alpha+1} \frac{1}{x}dx = [\ln x]_{\alpha}^{\alpha+1} = \ln \frac{\alpha+1}{\alpha}.$

   Remarque : Il existe un deuxième choix : $x_i = \frac{i}{n}$, à faire en exercice.

2. $l_2 = \lim\limits_{n\to+\infty} \left[\frac{1^p+2^p+...+n^p}{n^{p+1}}\right] = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^p$

   on pose $x_i = \frac{i}{n}$ alors : $\begin{cases} a = 0 \text{ et } b = 1 \\ f(x_i) = (x_i)^p, \forall i = 1,...,n \Rightarrow f(x) = x^p. \end{cases}$

   comme f est continue sur $[0,1]$ alors f est intégrable sur $[0,1]$, et on a

   $\int\limits_{0}^{1} f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^p = l_2 \Rightarrow l_2 = \int\limits_{0}^{1} f(x)\,dx = \int\limits_{0}^{1} x^p dx = \frac{1}{p+1}.$

3. $l_3 = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\left[\frac{1}{\sqrt[n]{e}} + \frac{2}{\sqrt[n]{e^2}} + \frac{3}{\sqrt[n]{e^3}} + ... + \frac{n}{\sqrt[n]{e^n}}\right] = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{i}{n} e^{-\frac{i}{n}}$

   on pose $x_i = \frac{i}{n}$ alors : $\begin{cases} a = 0 \text{ et } b = 1 \\ f(x_i) = x_i e^{-x_i}, \forall i = 1,...,n \Rightarrow f(x) = xe^{-x}. \end{cases}$

   comme f est continue sur $[0,1]$ alors f est intégrable sur $[0,1]$, et on a

   $\int\limits_{0}^{1} f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{i}{n} e^{-\frac{i}{n}} = l_3 \Rightarrow l_3 = \int\limits_{0}^{1} xe^{-x}dx$

   IPP : $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{-x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$

   d'où $l_3 = \int\limits_{0}^{1} xe^{-x}dx = \left[-xe^{-x}\right]_0^1 + \int\limits_{0}^{1} e^{-x}dx = 1 - 2e^{-1}.$

4. $l_4 = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\pi}{3n} \sum\limits_{i=1}^{n} \tan\left(\frac{i\pi}{3n}\right)$

alors si on pose $x_i = \frac{i\pi}{3n}$ on a : $\begin{cases} a = 0 \text{ et } b = \frac{\pi}{3} \\ f(x_i) = tg(x_i), \forall i = 1, ..., n \Rightarrow f(x) = tgx. \end{cases}$

comme f est continue sur $[0,1]$ alors f est intégrable sur $[0,1]$, et on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{3n}\sum_{i=1}^{n} \tan\left(\frac{i\pi}{3n}\right) = l_4 \Rightarrow l_4 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} tgx.dx$$

d'où $l_4 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\left[\ln(\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \ln 2.$(C.V : $t = \cos x$)

Remarque : Il existe d'autres choix, à faire en exercice (voir le cours).

5. $l_5 = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\cos[\ln(i+n)-\ln(n)]}{i+n} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\cos\left[\ln\left(\frac{i+n}{n}\right)\right]}{i+n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\cos\left[\ln\left(\frac{i}{n}+1\right)\right]}{\frac{i}{n}+1}$

   alors si on pose $x_i = 1+\frac{i}{n}$, on a : $\begin{cases} a = 1 \text{ et } b = 2 \\ f(x_i) = \frac{\cos(\ln x_i)}{x_i}, \forall i = 1, .., n \Rightarrow f(x) = \frac{\cos(\ln x)}{x}. \end{cases}$

   comme f est continue sur $[1,2]$ alors f est intégrable sur $[1,2]$, et on a

   $$\int_1^2 f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\cos\left[\ln\left(\frac{i}{n}+1\right)\right]}{\frac{i}{n}+1} = l_5 \Rightarrow l_5 = \int_1^2 \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$$

   C.V : $t = \ln x$; d'où $l_5 = \int_0^{\ln 2} \cos t.dt = [\sin t]_0^{\ln 2} = \sin(\ln 2)$.

   Remarque : Il existe un deuxième choix : $x_i = \frac{i}{n}$, à faire en exercice.

6. $l_6 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left[\arctan\sqrt{\frac{1}{n}} + .. + \arctan\sqrt{\frac{n}{n}}\right] = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \arctan\sqrt{\frac{i}{n}}$

   on pose $x_i = \frac{i}{n}$ alors : $\begin{cases} a = 0 \text{ et } b = 1 \\ f(x_i) = \arctan\sqrt{x_i}, \forall i = 1, .., n \Rightarrow f(x) = \arctan\sqrt{x}. \end{cases}$

   comme f est continue sur $[0,1]$ alors f est intégrable sur $[0,1]$, et on a

   $$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \arctan\sqrt{\frac{i}{n}} = l_6 \Rightarrow l_6 = \int_0^1 \arctan\sqrt{x}.dx$$

   C.V: $t = \sqrt{x} \Leftrightarrow t^2 = x \Rightarrow dx = 2tdt \Rightarrow l_6 = \int_0^1 2t\arctan t.dt$

   IPP : $\begin{cases} u = \arctan t \\ dv = 2tdt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dt}{1+t^2} \\ v = t^2 \end{cases}$

   d'où :

   $$l_6 = \left[t^2\arctan t\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^2dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{(t^2+1)-1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 dt + \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2} - 1.$$

7. $l_7 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left[e^{\arcsin\frac{1}{n}} + e^{\arcsin\frac{2}{n}} + ... + e^{\arcsin\frac{n}{n}}\right] = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{\arcsin\frac{i}{n}}$

on pose $x_i = \frac{i}{n}$ alors : $\begin{cases} a = 0 \text{ et } b = 1 \\ f(x_i) = e^{\arcsin(x_i)}, \forall i = 1, ..., n \Rightarrow f(x) = e^{\arcsin x}. \end{cases}$

comme f est continue sur $[0,1]$ alors f est intégrable sur $[0,1]$, et on a

$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{\arcsin\frac{i}{n}} = l_7 \Rightarrow l_7 = \int_0^1 e^{\arcsin x} dx$

C.V : $t = \arcsin x \Leftrightarrow \sin t = x \Rightarrow dx = \cos t.dt$

d'où $l_7 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \cos t.dt$

1ère IPP : $\begin{cases} u = \cos t \\ dv = e^t dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\sin t.dt \\ v = e^t \end{cases}$

d'où $l_7 = \left[e^t \cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \sin t.dt = -1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \sin t.dt$

2ème IPP : $\begin{cases} u = \sin t \\ dv = e^t dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \cos t.dt \\ v = e^t \end{cases}$

d'où

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \sin t.dt = \left[e^t \sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - l_7 = e^{\frac{\pi}{2}} - l_7$

par suite; $l_7 = -1 + e^{\frac{\pi}{2}} - l_7 \Leftrightarrow l_7 = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right).$

8. $l_8 = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(i+n)\left[1+\ln(i+n)-(\ln n)\right]^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\left(\frac{i}{n}+1\right)\left[1+\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)\right]^2}$

   alors si on pose $x_i = 1+\frac{i}{n}$ on a : $\begin{cases} a = 1 \text{ et } b = 2 \\ f(x_i) = \frac{1}{x_i[1+\ln x_i]^2}, \forall i = 1, ..., n \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x[1+\ln x]^2}. \end{cases}$

   comme f est continue sur $[1,2]$ alors f est intégrable sur $[1,2]$, et on a

   $\int_1^2 f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\left(\frac{i}{n}+1\right)\left[1+\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)\right]^2} = l_8$

   donc $l_8 = \int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \frac{1}{x[1+\ln x]^2} dx$

   C.V : $t = 1 + \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x} \Rightarrow l_8 = \int_1^{1+\ln 2} \frac{dt}{t^2} = \left[\frac{-1}{t}\right]_1^{1+\ln 2} = \frac{\ln 2}{1+\ln 2}.$

   Remarque : Il existe un deuxième choix : $x_i = \frac{i}{n}$, à faire en exercice.

9. $l_9 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(n+i)} \Rightarrow \ln(l_9) = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{n}\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(n+i)}\right);$

car ln est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}
\ln\left(\tfrac{1}{n}\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(n+i)}\right) &= \ln\left[\tfrac{1}{n}\left(\prod_{i=1}^{n}(n+i)\right)^{\frac{1}{n}}\right] = \ln\left(\tfrac{1}{n}\right)+\tfrac{1}{n}\ln\left(\prod_{i=1}^{n}(n+i)\right)\\
\Rightarrow \ln\left(\tfrac{1}{n}\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(n+i)}\right) &= -\ln n+\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(n+i) = -\ln n+\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(n\left(1+\tfrac{i}{n}\right)\right)\\
\Rightarrow \ln\left(\tfrac{1}{n}\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(n+i)}\right) &= -\ln n+\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\ln n+\ln\left(1+\tfrac{i}{n}\right)\right]\\
\Rightarrow \ln\left(\tfrac{1}{n}\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(n+i)}\right) &= -\ln n+\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln n+\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\tfrac{i}{n}\right)\\
\Rightarrow \ln\left(\tfrac{1}{n}\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(n+i)}\right) &= -\ln n+\ln n+\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\tfrac{i}{n}\right) = \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\tfrac{i}{n}\right).
\end{aligned}$$

alors si on pose $x_i = 1+\frac{i}{n}$ on a : $\begin{cases} a=1 \text{ et } b=2\\ f(x_i)=\ln(x_i),\forall i=1,..,n \Rightarrow f(x)=\ln x.\end{cases}$

comme f est continue sur $[1,2]$ alors f est intégrable sur $[1,2]$, et on a

$\int_1^2 f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right) = \ln(l_9)$ d'où $\ln(l_9)=\int_1^2 \ln x.dx$

IPP : $\begin{cases} u=\ln x\\ dv=dx\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\frac{dx}{x}\\ v=x\end{cases}$

$\ln(l_9)=\int_1^2 \ln x.dx = [x\ln x]_1^2 - \int_1^2 dx = 2\ln 2-1 = \ln(4e^{-1})$

d'où $l_9 = 4e^{-1}$.

Remarque : Il existe un deuxième choix : $x_i=\frac{i}{n}$, à faire en exercice.

10. $l_{10} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\left[\sqrt{k}\right]$

On a pour tout $k=1,..,n$:

$\left[\sqrt{k}\right]\leq\sqrt{k}<\left[\sqrt{k}\right]+1 \Leftrightarrow \sqrt{k}-1<\left[\sqrt{k}\right]\leq\sqrt{k}$

d'où

$\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}-\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}1<\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\left[\sqrt{k}\right]\leq\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\leq\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\left[\sqrt{k}\right]\leq\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k},$

car $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}1=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0,$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\leq l_{10}\leq\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k},$

Par conséquent, $l_{10} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{k} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n}}$

on pose $x_k = \frac{k}{n}$ alors : $\begin{cases} a = 0 \text{ et } b = 1 \\ f(x_k) = \sqrt{\frac{k}{n}}, \forall k = 1, .., n \Rightarrow f(x) = \sqrt{x}. \end{cases}$

comme f est continue sur $[0,1]$ alors f est intégrable sur $[0,1]$, et on a

$\int\limits_0^1 f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n}} = l_{10} \Rightarrow l_{10} = \int\limits_0^1 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$

11. $l_{11} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+8in}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+8\frac{i}{n}}}$

alors si on pose $x_i = 1 + 8\frac{i}{n}$ on a $\begin{cases} a = 1 \text{ et } b = 9 \\ f(x_i) = \frac{1}{\sqrt{x_i}}, \forall i = 1, .., n \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}. \end{cases}$

comme f est continue sur $[1,9]$ alors f est intégrable sur $[1,9]$, et on a

$\int\limits_1^9 f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+8\frac{i}{n}}} = l_{11}$ d'où $l_{11} = \int\limits_1^9 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\left[\sqrt{x}\right]_1^9 = 4.$

Exercice 5:

1. $U_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i+n} = \frac{1}{n} + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i+n} \right) - \frac{1}{2n}$;

   alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i+n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\frac{i}{n}+1}$.

   Si on pose $x_i = 1 + \frac{i}{n}$ alors : $\begin{cases} a = 1 \text{ et } b = 2 \\ f(x_i) = \frac{1}{x_i}, \forall i = 1,..,n \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x}. \end{cases}$

   comme f est continue sur $[1,2]$ alors f est intégrable sur $[1,2]$, et on a

   $\int\limits_1^2 f(x)\,dx = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\frac{i}{n}+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

   d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \int\limits_1^2 \frac{1}{x}.dx = [\ln x]_1^2 = \ln 2$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*; V_n = \sum\limits_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1}$; on fait un changement d'indice:

   $i = k - n \Leftrightarrow k = i + n$, d'où $V_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(2i+1)+2n}$, on fait un autre changement d'indice: $p = 2i + 1$; alors $V_n = \sum\limits_{\substack{p=1 \\ p \text{ impair}}}^{2n-1} \frac{1}{p+2n}$.

   D'une autre part; on a $\frac{1}{2}U_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2i+2n}$, on fait un changement d'indice : $p = 2i$; on a $\frac{1}{2}U_n = \sum\limits_{\substack{p=0 \\ p \text{ pair}}}^{2n-2} \frac{1}{p+2n}$; par conséquent on obtient :

   $\frac{1}{2}U_n + V_n = \sum\limits_{\substack{p=0 \\ p \text{ pair}}}^{2n-2} \frac{1}{p+2n} + \sum\limits_{\substack{p=1 \\ p \text{ impair}}}^{2n-1} \frac{1}{p+2n} = \sum\limits_{p=0}^{2n-1} \frac{1}{p+2n} = U_{2n};\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

   donc $\frac{1}{2}U_n + V_n = U_{2n};\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

3. On a $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ V_n = U_{2n} - \frac{1}{2}U_n$; or la suite $(U_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite extraite de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ alors elle converge vers la même limite $\ln 2$, donc $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge aussi et on a :

   $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = \ln 2 - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}\ln 2$.

Exercice supplémentaire

$U_n = \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\sin x\ dx$

1. Pour $n=0$: $\cos 0 = 1$; vraie

   On suppose que $\cos(n\pi) = (-1)^n$ et on a

   $\cos((n+1)\pi) = \cos(n\pi+\pi) = -\cos(n\pi) = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$.

   Alors $\forall n \in \mathbb{N} : \cos(n\pi) = (-1)^n$.

2. En faisant une intégration par parties on a:

$$IPP1 : \begin{cases} u = e^{-x} \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -e^{-x}dx \\ v = -\cos x \end{cases},$$

   d'où

   $U_n = \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\sin x\ dx = -e^{-x}\cos x]_{n\pi}^{(n+1)\pi} - \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\cos x\ dx$

   alors $U_n = (-1)^n e^{-n\pi}(1+e^{-\pi}) - \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\cos x\ dx$

$$IPP2 : \begin{cases} u = e^{-x} \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -e^{-x}dx \\ v = \sin x \end{cases},$$

   d'où

   $\int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\cos x\ dx = e^{-x}\sin x]_{n\pi}^{(n+1)\pi} + \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\sin x\ dx = U_n$

   D'où : $U_n = (-1)^n e^{-n\pi}(1+e^{-\pi}) - U_n \Leftrightarrow U_n = \frac{(-1)^n}{2}e^{-n\pi}(1+e^{-\pi})$.

3. On a donc $U_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{2}e^{-(n+1)\pi}(1+e^{-\pi}) = -e^{-\pi}U_n$

   par suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $r = -e^{-\pi}$ et de premier terme $U_0 = \frac{1}{2}(1+e^{-\pi})$.

4. $S_n = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{U_k}{U_{k+1}}\right) = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n}(-e^{-\pi})^k = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k e^{-k\pi}$

   or $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k e^{-k\pi} = \frac{(-e^{-\pi})\left[1-(-e^{-\pi})^n\right]}{1+e^{-\pi}}$, d'où $S_n = \frac{1+(-1)^n e^{-(n+1)\pi}}{1+e^{-\pi}}$.

5. $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+(-1)^n e^{-(n+1)\pi}}{1+e^{-\pi}} = \frac{1}{1+e^{-\pi}}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n e^{-(n+1)\pi} = 0$.