Chapter 1

1

Chapter 2

2

Chapter 3

Les suites de nombres réels

3.1 Définitions

On appelle suite réelle d'éléments de $\mathbb{R}$, toute application U de $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rccc} U: & \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & U(n). \end{array}$$

On note l'image de n par U_n au lieu de $U(n)$, il est appelé terme général de la suite U.

U_0 est appelé premier terme.

On note la suite U par $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(U_n)_n$ .n

On appelle l'ensemble $\{U_n, n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des valeurs de la suite $(U_n)_n$.

Exemple:

1. $U_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*, U_1 = 1$ est le premier terme.

2. $U_n = \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}, U_0 = 1$ est le premier terme.

3. La suite récurrente définie par: $U_1 = 1, U_n = 1 + \frac{1}{U_{n-1}}$,$U_2 = 1 + \frac{1}{U_1} = 2, U_3 =$

$1 + \frac{1}{U_2} = \frac{3}{2}, ...$

4. On dit que $(U_n)_n$ est une suite arithmétique s'il existe $r \in \mathbb{R}; U_{n+1} - U_n = r, \forall n \in \mathbb{N}$, dans ce cas $U_n = U_0 + nr$, et

$S = U_0 + U_1 + ... + U_n = \frac{(n+1)(U_0+U_n)}{2} = \frac{\text{(nombre de terme)(premierterme+dernier terme)}}{2}$.

5. On dit que $(U_n)_n$ est une suite géométrique s'il existe $q \in \mathbb{R}; \frac{U_{n+1}}{U_n} = q, \forall n \in \mathbb{N}$, dans ce cas $U_n = U_0 q^n$, et

$S = U_0 + U_1 + ... + U_n = U_0 \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$ =premier terme$\left(\frac{1-Raison^{\text{nombre de termes}}}{1-raison}\right)$.

3.2 Suites bornées

Soit $(U_n)_n$ une suite réelle, on dit que:

1. $(U_n)_n$ est une suite majorée si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}; U_n \leq M$.

2. $(U_n)_n$ est une suite minorée si $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}; U_n \geq m$.

3. $(U_n)_n$ est une suite bornée si $\exists M \in \mathbb{R}, \exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}; m \leq U_n \leq M$.

ou bien $\exists \alpha > 0, \forall n \in \mathbb{N}; |U_n| \leq \alpha$.

Exemple:

1. $U_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$.

On a $n \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} \leq 1 \Rightarrow (U_n)$ est bornée (majorée par 1 et minorée par 0).

2. $U_n = \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}$.

On a $n \geq 0 \Rightarrow 2^n \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{2^n} \leq 1 \Rightarrow (U_n)$ est bornée (majorée par 1 et minorée par 0).

3. $U_n = \sin n, n \in \mathbb{N}$.

On a $-1 \leq \sin n \leq 1 \Leftrightarrow |\sin n| \leq 1 \Rightarrow (U_n)$ est bornée (majorée par 1 et minorée par -1).

4. $U_n = n+1, n \in \mathbb{N}$.

On a $n+1 \geq 1 \Rightarrow (U_n)$ n'est pas bornée car elle n'est pas majorée mais elle est minorée par 1.

5. $U_n = -(n!), n \in \mathbb{N}$.

On a $n \geq 0 \Rightarrow n! \geq 1 \Rightarrow -(n!) \leq -1 \Rightarrow (U_n)$ n'est pas bornée car elle n'est pas minorée mais elle majorée est par -1.

3.3 Suites monotones

Soit (U_n) une suite réelle, on dit que

1. (U_n) est croissante si $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} \geq U_n$.
2. (U_n) est strictement croissante si $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} > U_n$.
3. (U_n) est décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} \leq U_n$.
4. (U_n) est strictement décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} < U_n$.
5. (U_n) est monotone si elle est croissante ou décroissante.

Remarque:

1. Pour étudier la monotonie d'une suite, on étudie le signe de $U_{n+1} - U_n$.

2. Pour étudier la monotonie d'une suite à termes positifs on compare le signe de $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ à 1.

Si $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1 \Leftrightarrow (U_n)$ est décroissante.n

Si $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1 \Leftrightarrow (U_n)$ est croissante.

Exemple:

1. $U_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$.

$U_{n+1} - U_n = \frac{-1}{n(n+1)} < 0 \Leftrightarrow (U_n)$ est décroissante.

ou bien on remarque que $U_n > 0$ alors $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{n}{n+1} < 1 \Leftrightarrow (U_n)$ est décroissante.

2. $U_n = \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}$.

$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2_n}\left(\frac{1}{2} - 1\right) < 0 \Leftrightarrow (U_n)$ est décroissante.

ou bien on remarque que $U_n > 0$ alors $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} < 1 \Leftrightarrow (U_n)$ est décroissante.

3. $U_n = 1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$.

$U_{n+1} - U_n = 1 - \frac{1}{n+1} - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} > 0 \Leftrightarrow (U_n)$ est croissante.

3.4 Sous suites (suites extraites)

Définition: Soit (U_n) une suite réelle, on appelle suite extraite ou sous suite de (U_n), toute suite de la forme $\left(U_{\varphi(n)}\right)$ telle que φ est une application croissante de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$.

Exemple:

1. (U_{2n}) et (U_{2n+1}) sont des sous suites de (U_n).

2. $U_n = 2^{(-1)^n}, U_{2n} = 2, U_{2n+1} = \frac{1}{2}$.

3. (U_{n+1}) est une suite extraite de (U_n).

3.5 Nature d'une suite (convergence, divergence)

Suite convergente

Définition: Soit (U_n) une suite réelle, on dit qu'elle est convergente et admet pour limite le nombre l si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}\ (n > N_\varepsilon \Rightarrow |U_n - l| < \varepsilon).$$

On note $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$.

C'est à dire

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}\ \ (n > N_\varepsilon \Rightarrow |U_n - l| < \varepsilon).$$

Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} U_n &= +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists N_A \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}\ \ (n > N_A \Rightarrow U_n > A \\ \lim_{n\to+\infty} U_n &= -\infty \Leftrightarrow \forall B < 0, \exists N_B \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}\ \ (n > N_B \Rightarrow U_n < B\end{aligned}$$

Exemple:

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-2n+1}{n+1} = -2 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}\ \ (n > N_\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{-2n+1}{n+1} - (-2)\right| < \varepsilon)$.

$\left|\frac{-2n+1}{n+1} - (-2)\right| = \left|\frac{-2n+1}{n+1} + 2\right| = \frac{3}{n+1} < \varepsilon \Rightarrow \frac{n+1}{3} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{3}{\varepsilon} - 1.$

Il suffit de prendre $N_\varepsilon = \left[\left|\frac{3}{\varepsilon} - 1\right|\right] + 1$.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}\ \ (n > N_\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{2^n}\right| < \varepsilon)$.

$\left|\frac{1}{2^n}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow 2^n > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n \ln 2 > \ln \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}.$

Il suffit de prendre $N_\varepsilon = \left[\left|\frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}\right|\right] + 1$.

Théorème 1: Si (U_n) converge vers une limite l alors l est unique.

Preuve

Supposons que (U_n) admet deux limites $l \neq l'$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}\ \ (n > N_1 \Rightarrow |U_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}).$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = l' \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \;\; (n > N_2 \Rightarrow |U_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2}).$$

Choisissons $N_3 = \max(N_1, N_2)$

$$\begin{aligned}
|l - l'| &= |l - l' + U_n - U_n| = |(l - U_n) + (U_n - l')| \\
&\leq |(l - U_n)| + |U_n - l'| \\
&\leq |U_n - l| + |U_n - l'| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \forall\varepsilon > 0
\end{aligned}$$

d'où $l = l'$ contradiction, alors l est unique.

Théorème 2: Toute suite convergente est bornée.

Preuve

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \;\; (n > N_\varepsilon \Rightarrow |U_n - l| < \varepsilon).$$

Pour $n > N_\varepsilon, -\varepsilon < U_n - l < \varepsilon \Leftrightarrow l - \varepsilon < U_n < l + \varepsilon \Leftrightarrow (U_n)$ bornée pour $n > N_\varepsilon$ donc bornée $\forall n \in \mathbb{N}$.

Remarque: Toute suite bornée n'est pas convergente.

En effet, la suite $U_n = (-1)^n$ bornée non convergente (elle admet deux limites 1 et -1)

$$(U_n) \text{ convergente } \Rightarrow (U_n) \text{ bornée}$$

$$(U_n) \text{ bornée } \nRightarrow (U_n) \text{ convergente.}$$

Proposition: Toute sous suite d'une suite convergente est convergente et a la même limite. La reciproque n'est pas vraie. Une suite divergente peut admettre des sous suites convergentes

Exemple: $U_n = 2^{(-1)^n}$ divergente car elle admet deux limites 2 et $\frac{1}{2}$, mais sa sous suite $U_{2n} = 2$ est convergente.

Remarque: par contraposé, il suffit qu'une sous suite soit divergente pour que la suite soit divergente, ou bien deux sous suites n'ont pas la même limite pour que la suite soit divergente.

Exemple: $U_n = \cos n\pi$ est divergente car elle admet des sous suites qui n'ont pas la même limite.

les sous suites sont $\begin{cases} U_{2n} = \cos 2n\pi = 1 \text{ convergente} \\ U_{2n+1} = \cos(2n+1) = -1 \text{ convergente} \end{cases}$ mais $\lim\limits_{n\to+\infty} U_{2n} = 1 \neq \lim\limits_{n\to+\infty} U_{2n+1} = -1$.

3.6 Opérations sur les suites convergentes

Soient $(U_n), (V_n)$ deux suites convergentes vers l et l' et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors les suites $(U_n + V_n), (U_n V_n), \left(\frac{U_n}{V_n}\right)$ et (αU_n) sont convergentes et on a:

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} (U_n + V_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n + \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = l + l'$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} (U_n V_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n . \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = l.l'$.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{U_n}{V_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n}{\lim\limits_{n\to+\infty} V_n} = \frac{l}{l'}, l' \neq 0$.
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} (\alpha U_n) = \alpha \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \alpha l$.
5. $\lim\limits_{n\to+\infty} |U_n| = \left|\lim\limits_{n\to+\infty} U_n\right| = |l|$.

Remarque:

1. Si $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq V_n$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$.

2. Si U_n est bornée et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n V_n = \infty$.

3. Si $U_n > 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n \geq 0$.

4. Si $U_n < V_n, \forall n > n_0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.

3.7 Théorème des trois suites

Théorème: Si deux suites (U_n) et (V_n) convergent vers le même nombre réel l et si à partir d'un certain rang, la suite (W_n) vérifie l'inégalité

$$U_n \leq W_n \leq V_n$$

alors la suite (W_n) converge vers l.

Preuve

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \ \ (n > N_\varepsilon \Rightarrow |U_n - l| < \varepsilon).$$

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N'_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \ \ (n > N'_\varepsilon \Rightarrow |V_n - l| < \varepsilon).$$

donc $\forall n > N_\varepsilon, |U_n - l| < \varepsilon \Leftrightarrow l - \varepsilon < U_n < l + \varepsilon$.

$\forall n > N'_\varepsilon, |V_n - l| < \varepsilon \Leftrightarrow l - \varepsilon < V_n < l + \varepsilon$.

mais $\forall n > n_0, U_n \leq W_n \leq V_n$,

alors $\forall n > \max(N_\varepsilon, N'_\varepsilon, n_0), l - \varepsilon < U_n < W_n < V_n < l + \varepsilon \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N''_\varepsilon = \max(N_\varepsilon, N'_\varepsilon, n_0), \forall n \in \mathbb{N} \ (n > N''_\varepsilon \Rightarrow |W_n - l| < \varepsilon).$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} W_n = l$$

Exemple: 1. $W_n = \frac{\cos n}{n}$,

On a $-1 \leq \cos n \leq 1 \Rightarrow \frac{-1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\cos n}{n} = 0$.

2. $W_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + ... + \frac{n}{n^2+n}$

On a

$$\begin{aligned}
1 &\leq k \leq n \\
n^2+1 &\leq n^2+k \leq n^2+n \\
\frac{1}{n^2+n} &\leq \frac{1}{n^2+k} \leq \frac{1}{n^2+1} \\
\frac{n}{n^2+n} &\leq \frac{n}{n^2+k} \leq \frac{n}{n^2+1} \\
n\left(\frac{n}{n^2+n}\right) &\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} \leq n\left(\frac{n}{n^2+1}\right)
\end{aligned}$$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} = 1$.

Théorème: Soient (U_n) et (V_n) deux suites réelles telles que:

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0 \\ \text{et} \\ (V_n) \text{ est bornée} \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n V_n = 0.$$

Preuve

$$(V_n) \text{ bornée} \Leftrightarrow \exists \alpha > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |V_n| \leq \alpha$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \ \ (n > N_\varepsilon \Rightarrow |U_n - 0| < \frac{\varepsilon}{\alpha}).$$

alors $\forall n > N_\varepsilon \Rightarrow |U_n| \ |V_n| < \frac{\varepsilon}{\alpha}.\alpha = \varepsilon$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n V_n = 0$.

Exemple:

1. $U_n = \frac{\sin n!}{n+1}$.

Posons $V_n = \sin n!$ bornée car $|\sin n!| \leq 1$, et $W_n = \frac{1}{n+1} \to 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin n!.\frac{1}{n+1} =$ 0.

2. $U_n = \frac{(-1)^n}{n} = \underbrace{(-1)^n}_{\text{bornée}} \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \to 0.$

3.8 Théorème de convergence sur les suites monotones

Théorème: Soient (U_n) une suite réelle et

$$A = \{U_n, n \in \mathbb{N}\}$$

alors

1. Si (U_n) est **croissante** et **majorée** alors (U_n) est **convergente** vers $l = \sup A$.

2. Si (U_n) est **décroissante** et **minorée** alors (U_n) est **convergente** vers $l = \inf A$.

Preuve

Soit (U_n) une suite **croissante** et **majorée,** donc l'ensemble $A = \{U_n, n \in \mathbb{N}\}$ est majorée par conséquent A admet une borne supérieure l.

$$\sup A = l \Leftrightarrow \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq l \\ \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, l - \varepsilon < U_{N_\varepsilon} \end{cases},$$

donc

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon &> 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n > N_\varepsilon \Rightarrow l - \varepsilon < \underbrace{U_{N_\varepsilon} < U_n}_{U_n \text{ croissante}} \leq l < l + \varepsilon \\ \forall \varepsilon &> 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n > N_\varepsilon \Rightarrow |U_n - l| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = l = \sup A. \end{aligned}$$

Exemple: $U_n = \frac{2}{n!}, n \in \mathbb{N}$. $A = \left\{\frac{2}{n!}, n \in \mathbb{N}\right\}$.

$U_{n+1} - U_n = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{2}{n!} = \frac{2}{n!}\left(\frac{1}{n+1} - 1\right) = \frac{2}{n!}\left(\frac{-n}{n+1}\right) \leq 0$, donc (U_n) est décroissante.

$\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 0 \Rightarrow (U_n)$ est minorée.

(U_n) est **décroissante** et **minorée** alors (U_n) est **convergente** vers $0 = \inf A$.

3.9 Suites adjacentes

Définition:

On dit que les deux suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes si l'une d'elle est croissante et l'autre est décroissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n - V_n) = 0$.

Théorème: Deux suites adjacentes sont convergentes et admettent le même limite.

Preuve

On pose $W_n = U_n - V_n$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n = \lim\limits_{n \to +\infty} (U_n - V_n) = 0$.

On suppose que (U_n) est croissante et (V_n) est décroissante. Etudions la monotonie de W_n.

$W_{n+1} - W_n = U_{n+1} - V_{n+1} - (U_n - V_n) = \underbrace{(U_{n+1} - U_n)}_{\geq 0} - \underbrace{(V_{n+1} - V_n)}_{\leq 0} \geq 0$.

Alors (W_n) est une suite croissante et convergente vers 0 donc (W_n) est majorée par $0 \Rightarrow W_n \leq 0 \Rightarrow U_n \leq V_n$.

$U_0 \leq U_1 \leq U_2 \leq ...U_{n-1} \leq U_n \leq V_n \leq V_{n-1} \leq ... \leq V_2 \leq V_1 \leq V_0$.

On obtient (U_n) est croissante et majorée par $V_0 \Rightarrow$ convergente vers l.

(V_n) est décroissante et minorée par $U_0 \Rightarrow$ convergente vers l'.

Mais $\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n - V_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n - \lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 0 \Leftrightarrow l - l' = 0 \Leftrightarrow l = l'$.

Exemple: $\begin{cases} U_n = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + ... + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \\ V_n = U_n + \frac{1}{n+1} \end{cases}, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + ... + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\ &\quad - \left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + ... + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \right) \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} > 0 \Rightarrow (U_n) \text{ est croissante.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{n+1} - V_n &= U_{n+1} + \frac{1}{n+2} - \left(U_n + \frac{1}{n+1} \right) = U_{n+1} - U_n + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{-1}{(n+2)(n+1)} \\ &= \frac{-n-2}{(n+1)(n+2)(n+3)} \leq 0 \Rightarrow (V_n) \text{ est décroissante.} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \to +\infty} (U_n - V_n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Donc (U_n) et (V_n) sont adjacentes et convergentes vers la même limite.

3.10 Suite récurrentes

Définition: Soit $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $f(D) \subset D$. On appelle suite récurrente une suite (U_n) définie par la donnée du premier terme $U_0 \in D$ et la relation

$$U_{n+1} = f(U_n), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Monotonie: On a $U_{n+1} - U_n = f(U_n) - f(U_{n-1})$.

Donc l'étude de la monotonie de la suite (U_n) revient à celle de la fonction f.

Si f est croissante alors (U_n) est monotone, elle est croissante si $U_1 - U_0 \geq 0$, et décroissante si $U_1 - U_0 \leq 0$.

Si f est décroissante alors (U_n) n'est pas monotone car $U_{n+1} - U_n$ est alternativement positif et négatif.

Convergence:

Supposons que f est continue sur D et croissante, si la suite (U_n) converge vers $l \in D$, cette limite vérifie $l = f(l)$.

Exemple:

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n + 6}, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n < 3$.

2. Etudier la monotonie de(U_n).

3. Déduire la convergence de (U_n) et déterminer sa limite.

4. Donner $\sup E$ et $\inf E$ où $E = \{U_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Solution: 1. Montrons par recurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n < 3$.

Pour $n = 0, 0 \leq U_0 = 0 < 3$.

Supposons que $0 \leq U_n < 3$ et montrons $0 \leq U_{n+1} < 3$.

On a $0 \leq U_n < 3 \Rightarrow 6 \leq U_n + 6 < 9 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{6} \leq \sqrt{U_n + 6} < 3$. d'où $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n < 3$.

2. Monotonie de (U_n) :

On pose $f(x) = \sqrt{x+6}, 0 \leq x < 3 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+6}} > 0 \Rightarrow f$ est croissante ce qui donne que (U_n) est monotone.

$U_1 - U_0 = \sqrt{6} - 0 = \sqrt{6} > 0$ alors (U_n) est croissante.

3. On a (U_n) est **croissante** et **majorée** alors elle est convergente vers l donc

$0 \leq l \leq 3$ et l vérifie $l = f(l)$

$$l = f(l) \Leftrightarrow l = \sqrt{l+6} \Leftrightarrow l^2 = l+6 \Leftrightarrow l^2 - l - 6 = 0, \Delta = 25 \Rightarrow \begin{cases} l_1 = \frac{1+5}{2} = 3 \\ l_2 = \frac{1-5}{2} = -2 < 0 \text{ refusé car } l \geq 0. \end{cases}$$

donc $\lim_{n\to+\infty} U_n = 3.$

4. $E = \{U_n, n \in \mathbb{N}\}.$

(U_n) est convergente et croissante alors

$$\begin{cases} \sup E = \lim_{n\to+\infty} U_n = 3 \\ \inf E = U_0 = 0. \end{cases}$$

3.11 Suites de Cauchy

Définition: On dit que la suite (U_n) est une suite de Cauchy si elle vérifie

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N}, (p > q \geq N_\varepsilon \Rightarrow |U_p - U_q| < \varepsilon)$$

Proposition: Toute suite convergente est de Cauchy .

Preuve Soit

$$l = \lim_{n\to+\infty} U_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n > N_\varepsilon \Rightarrow |U_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soient p et q tels que $p > q \geq N_\varepsilon$,

$$\begin{aligned} |U_p - U_q| &= |U_p - l + l - U_q| \\ &\leq |U_p - l| + |l - U_q| \\ &\leq |U_p - l| + |U_q - l| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

d'où (U_n) est de Cauchy.

Théorème: (critère de Cauchy)

Toute suite de Cauchy de nombres réels est convergente vers un nombre réel. On dit que $\mathbb{R}$ est complet.

Remarque: Le critère de Cauchy est un critère de convergence permettant de reconnaître qu'une suite réelle est convergente sans avoir besoin de connaître sa limite.

Théorème:

$$(U_n) \text{ converge dans } \mathbb{R} \Leftrightarrow (U_n) \text{ de Cauchy.}$$

Remarque: Pour démontrer qu'une suite est divergente, il suffit de démontrer qu'elle n'est pas de Cauchy.

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists p, q \in \mathbb{N}, (p > q \geq N \wedge |U_p - U_q| \geq \varepsilon).$$

Exemple:

1. $U_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\cos n}{3^k} = \frac{\cos n}{3^0} + \frac{\cos n}{3^1} + ... + \frac{\cos n}{3^n}, n \in \mathbb{N}$

Montrons que (U_n) est de Cauchy.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N}, (p > q \geq N_\varepsilon \Rightarrow |U_p - U_q| < \varepsilon)$$

Soit $\varepsilon > 0$, et $p > q$

$$\begin{aligned}
|U_p - U_q| &= \left|\sum_{k=0}^{p} \frac{\cos n}{3^k} - \sum_{k=0}^{q} \frac{\cos n}{3^k}\right| \\
&= \left|\frac{\cos n}{3^0} + \frac{\cos n}{3^1} + ... + \frac{\cos n}{3^q} + \frac{\cos n}{3^{q+1}} + ... + \frac{\cos n}{3^p} - \left(\frac{\cos n}{3^0} + \frac{\cos n}{3^1} + ... + \frac{\cos n}{3^q}\right)\right| \\
&= \left|\frac{\cos n}{3^{q+1}} + \frac{\cos n}{3^{q+2}} + ... + \frac{\cos n}{3^p}\right| \\
&\leq \left|\frac{\cos n}{3^{q+1}}\right| + \left|\frac{\cos n}{3^{q+2}}\right| + ... + \left|\frac{\cos n}{3^p}\right| \\
&\leq \frac{1}{3^{q+1}} + \frac{1}{3^{q+2}} + ... + \frac{1}{3^p}, \text{ car } |\cos n| \leq 1. \\
&\leq \frac{1}{3^q} \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{3^{p-q}}\right)}_{\text{somme d'une suite géométrique}} \\
&\leq \frac{1}{3^q}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{p-q}}{1-\frac{1}{3}}\right)\right) \\
&\leq \frac{1}{3^{q+1}} \frac{3}{2} \underbrace{\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{p-q}\right)}_{<1} \\
&\leq \frac{1}{3^q.2},
\end{aligned}$$

$\frac{1}{3^q.2} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{3^q} < 2\varepsilon \Rightarrow 3^q > \frac{1}{2\varepsilon} \Rightarrow q \ln 3 > \ln\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right) \Rightarrow q > \frac{\ln\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)}{\ln 3}$.

Il suffit de prendre $N_\varepsilon = \left[\left|\frac{\ln\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)}{\ln 3}\right|\right] + 1$.

2. $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$.

Montrons que (U_n) n'est pas de Cauchy

$$\exists ?\varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists p, q \in \mathbb{N}, (p > q \geq N \wedge |U_p - U_q| \geq \varepsilon).$$

Soit $N \in \mathbb{N}, \exists p = 2N, q = N,$

$$\begin{aligned}
|U_p - U_q| &= |U_{2N} - U_N| \\
&= \left|1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + ... + \frac{1}{2N} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{N}\right)\right| \\
&= \left|\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + ... + \frac{1}{2N}\right| \\
&\geq \underbrace{\frac{1}{2N} + \frac{1}{2N} + ... + \frac{1}{2N}}_{N \text{ fois}} \text{ car } N+1 \leq 2N, N+2 \leq 2N, ..., 2N \leq 2N \\
&\geq \frac{N}{2N} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Il suffit de prendre $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Théorème de Bolzano Weierstrass

Théorème: Toute suite bornée de nombres réels admet une sous suite convergente.

3.12 Limite supérieure et limite inférieure

D'aprés le théorème de Bolzano Weierstrass, toute suite bornée admet des sous suites convergentes vers des limite finies. Notons L l'ensemble de ces limites, alors

Définition: On appelle limite supérieure (resp. limite inférieure) de (U_n) la borne supérieure (resp. la borne inférieure) de L. On notera

$$\overline{\lim} U_n = \lim_{n \to +\infty} \sup (U_n) = \sup L \text{ (resp. } \underline{\lim} U_n = \lim_{n \to +\infty} \inf (U_n) = \inf L.$$

Remarque: Pour que $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ existe il faut et il suffit que

$$\overline{\lim} U_n = \underline{\lim} U_n = \lim_{n \to +\infty} U_n$$

Exemple: $U_n = (-1)^n$ divergente car elle admet deux limites différentes, mais elle est bornée, $|U_n| \leq 1$.

Les sous suites $\begin{cases} U_{2n} = 1 \to 1 \\ U_{2n+1} = -1 \to -1 \end{cases}$, $L = \{1, -1\}$ alors

$$\begin{aligned} \overline{\lim} U_n &= \sup L = 1 \\ \underline{\lim} U_n &= \inf L = -1. \end{aligned}$$

Exercice: Soit la suite définie par

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{5U_n - 4}{U_n}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 < U_n < 4$.
2. Etudier la monotonie de(U_n).
3. Déduire la convergence de (U_n) et déterminer sa limite.
4. Donner $\sup E$ et $\inf E$ où $E = \{U_n, n \in \mathbb{N}\}$.