Fonctions dérivables

OUIKENE Fethia

Department of Mathematics
University of Science and Technology of Oran, Algeria

January 25, 2024

Théorème de Rolle et théorème des accroissements finies

Théorème de Rolle:

$$\left\{\begin{array}{c} f \text{ continue sur } [a,b] \\ f \text{ dérivable sur }]a,b[\\ f(a)=f(b) \end{array}\right. \Rightarrow \exists c \in]a,b[\,/ f'(c)=0.$$

Théorème des accroissements finis:
Théorème:

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ continue sur } [a,b] \\ f \text{ dérivable sur }]a,b[\end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in]a,b[\,/\ f(b)-f(a)=(b-a)f'(c).$$

Autre formule du théorème des accroissements finis:
Si $c \in \left]a,b\right[\Rightarrow c = a + \theta\left(b-a\right)$, où $0 < \theta < 1$.

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ continue sur } [a,b] \\ f \text{ dérivable sur }]a,b[\end{array}\right\} \Rightarrow \exists\theta \in \left]0,1\right[/ $$
$$f\left(b\right) - f\left(a\right) = \left(b-a\right) f'\left(a+\theta\left(b-a\right)\right).$$

Si on pose $b - a = h$, on obtient

$$f\left(a+h\right) - f\left(a\right) = hf'\left(a+\theta h\right).$$

Application du théorème des accroissements finis:

1. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$\forall x > 0, \frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x.$$

On pose $f(t) = \ln(t+1)$, $t \in [a, b] = [0, x]$, appliquons le T.A.F. sur la fonction $f(t) = \ln(t+1)$ définie sur l'intervalle $[0, x]$.

$$\left.\begin{array}{r} \ln(t+1) \text{ continue sur } [0, x] \\ \ln(t+1) \text{ dérivable sur }]0, x[\end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in]0, x[\, /$$

$$f(x) - f(0) = (x-0) f'(c).$$

$$\exists c \in]0, x[\, / \; \ln(x+1) - \ln(0+1) = (x-0)\left(\frac{1}{c+1}\right)$$

$$\exists c \in]0, x[\, / \; \ln(x+1) = \frac{x}{c+1}.$$

Théorème des accroissements finis généralisés:
Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, si $g'(x) \neq 0$ alors

$$\exists c \in \,]a, b[\, / \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Règle de l'Hôpital:
On l'utilise pour enlever les formes indéterminées de la forme $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$.
Si f et g sont deux fonctions dérivables dans un voisinage de $x_0 \in I$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, alors $\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$ admet la même limite en x_0.
c.à.d.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

$$\text{Si } x \to x_0 \Rightarrow c \to x_0 \text{ et donc } \lim_{c \to x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Remarque:

1. La règle de l'Hôpital reste valable pour $x_0 = \infty$.

2. On peut appliquer la règle de l'Hôpital plusieurs fois, il suffit que les conditions soit vérifiées.

3. Si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \nexists \nRightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \nexists$, en effet Soient

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases} \quad \text{et } g(x) = \sin x.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x} \nexists,$$

par contre $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim\limits_{x \to 0} \underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{\to 1} \underbrace{x}_{\to 0} \underbrace{\sin \frac{1}{x}}_{\textit{bornée}} = 0.$

Formule de Taylors

La formule de Taylors concerne les fonctions n fois dérivables qui peuvent être approximées dans un voisinage de x_0 par des polynômes de degré n.
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f \in C^n(]a,b[)$ et $f^{(n)}$ dérivable sur $]a,b[$ et soit $x_0 \in [a,b]$. Alors $\forall x \in [a,b] / x \neq x_0$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x), \end{aligned}$$

l'erreur $R_n(x)$ est appelée reste d'ordre n.

$$
\begin{aligned}
R_n(x) &= \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)\,,\ \text{où } c \in \left]x_0, x\right[\rightarrow \text{reste de Lagrange.} \\
R_n(x) &= \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0+\theta h)\,,\ \text{où } h = x - x_0,\ 0<\theta<1 \\
&\rightarrow \text{reste de Cauchy.} \\
R_n(x) &= o\left((x-x_0)^n\right) \rightarrow \text{ reste de Young}
\end{aligned}
$$

Développement de Maclaurin:

Théorème: Soit $f \in C^n([0,x])$, $f^{(n+1)}$ existe sur $]0,x[$, alors $\exists\theta \in]0,1[$ tel que

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x).$$

C'est le développement de Taylors au voisinage de $x_0 = 0$ avec reste de Cauchy

Formule de Maclaurin-young:

Théorème: Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}, 0 \in [a,b]$. Supposons que $f^{(n)}(0)$ existe. Alors $\forall x \in [a,b]$;

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

Fonctions convexes et fonctions concaves

Définition:

Approche graphique: Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et G_f sa courbe représentative.

On dit que f est convexe sur I si sa courbe représentative G_f est au dessus de toutes ses tangente sur I.

ou bien si G_f est au dessous de toutes ses cordes (sécantes) sur I.

On dit que f est concave sur I si si sa courbe représentative G_f est au dessous de toutes ses tangente sur I.

ou bien si G_f est au dessus de toutes ses cordes (sécantes) sur I.

Approche analytique: Soit f une fonction définie sur un intervalle I

.

On dit que f est convexe sur I, si $\lambda \in [0, 1]$, $x, y \in I$, on a

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Lorsqu'on a l'inégalité dans l'autre sens, on dit que f est concave.

Remarque: f est concave si $-f$ est convexe.

Proposition:
Si f est une fonction dérivable sur I alors on a l'équivalence des assertions suivantes:
1. f est convexe sur I.
2. f' est croissante sur I.
3. f'' est positive sur I.
4. G_f est au dessus de toutes ses tangentes sur I.
5. G_f est au dessous de toutes ses cordes (sécantes) sur I.

Exemple:

1. $f(x) = e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$ car $f''(x) = e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
2. $f(x) = \ln x$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ car $f''(x) = \frac{-1}{x^2} < 0, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$.

Point d'inflexion:
Soient f une fonction dérivable sur I, G_f sa courbe représentative et $A(a, f(a)) \in G_f$.
On dit que A est un point d'inflexion de G_f si et seulement si la courbe G_f traverse sa tangente en ce point A.
Si A est un point d'inflexion d'abscisse a, f passe de concave à convexe ou de convexe à concave en a.
Théorème:
Soit f une fonction deux fois dérivable sur I, de courbe représentative G_f. le point A d'abscisse a est un point d'inflexion de G_f si et seulement si f'' s'annule et change de signe en a.

Les asymptotes d'une coube

Définition: Une droite asymptote à une courbe est une droite telle que lorsque l'abscisse ou l'ordonnée tend vers l'infini, la distance de la courbe à la droite tend vers 0.
Nous étudions 3 cas en particulier.
Asymptote verticale, asymptote horizontale, asymptote oblique.
Définition1. Soit f une fonction définie sur I sauf en a. La droite $x = a$ est une asymptote verticale de la coube $y = f(x)$ si $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} a} f(x) = \infty$ ou $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} a} f(x) = \infty$.
Méthode pour déterminer les asymptotes verticales:
Les asymptotes verticales sont à chercher parmi les valeurs interdites. On calculera donc la $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ pour tout $a \notin D_f$.
Si cette limite vaut ∞ alors la droite $x = a$ est une asymptote verticale de la courbe $y = f(x)$.

Asymptote horozontale

Définition2. Soit f une fonction définie sur I.
La droite $y = b_1$ est une asymptote horozontale à droite de la courbe $y = f(x)$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b_1$.
La droite $y = b_2$ est une asymptote horozontale à gauche de la courbe $y = f(x)$ si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b_2$.
Si $b_1 = b_2$, alors on dira simplement que cette droite est l'asymptote horizontale à la courbe $y = f(x)$.
Méthode pour déterminer les asymptotes horizontales
La courbe de la forme $y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ admet une asymptote horizontale si et seulement si le degré de $P(x) \leq$ degré de $Q(x)$.

Asymptote oblique

Définition3. La droite $y = ax + b$ est une asymptote oblique de la courbe $y = f(x)$ si

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (ax + b) = 0 \text{ ou } \lim_{x \to -\infty} f(x) - (ax + b) = 0.$$

Méthode pour déterminer les asymptotes obliques

$y = ax + b$.

a est donné par la formule $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ et b est donné par la formule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - ax = b$.

Position de la courbe par rapport à son asymptote oblique ou horizontale:

Soit $M = (x, f(x))$ un point du graphe de f. (Δ) : $y = ax + b$ son asymptote au voisinage de ∞.
M est au dessus de l'asymptote oblique si $f(x) > ax + b$.
M est au dessous de l'asymptote oblique si $f(x) < ax + b$.
M est un point de l'asymptote oblique si $f(x) = ax + b$.
M est au dessus de l'asymptote horizontale $y = b$ si $f(x) > b$.
M est au dessous de l'asymptote horizontale $y = b$ si $f(x) < b$.
M est un point de l'asymptote horizontale $y = b$ si $f(x) = b$.