Chap III : Equations différentielles

- Equation différentielle d'ordre 1 sans second membre :

$$\boxed{a(x)y' + b(x)y = 0 \quad \ldots \quad (E_0)}$$

Comment résoudre cette équation :

① On pose : $y' = \frac{dy}{dx}$

② Les termes avec y et dy d'un coté, les termes avec x et dx de l'autre coté.

③ "Introduire" l'intégral des deux cotés.

④ Ajouter `c` dans le coté des `x`.

⑤ On aura `Ln` de `|y|` (peut être avec quelque chose, mais faut s'en débarasser), et de l'autre coté on aura `Ln` d'une fonction avec x. et le c.

⑥ "Introduire" l'expo pour avoir $|y| = \ldots\ldots \times e^{c}$

⑦ Se débarasser de la valeur absolue en posant : $k = \pm e^{c}$

⑧ On a finalement trouver y !

Bonus! :

Si on écrit $y(a) = b$ $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$

① Il faut remplacer y et x pour trouver k.

② Remplacer k par sa valeur.

Equation différentielle d'ordre 1 avec second membre :

$$\boxed{a(x)y' + b(x)y = c(x) \quad \dots (E)}$$

Comment résoudre cette équation :

(*) 1^er^ méthode : Si on a la solution particulière y_1 de (E), alors la solution générale y de (E) est : $y = y_0 + y_1$

avec : y_0 : solution de l'équation : $a(x)y' + b(x)y = 0 \dots (E_0)$

y_1 : solution particulière de (E).

(*) 2^ème^ méthode : (Variation de la constante)

1. Résoudre l'équation : $a(x)y' + b(x)y = 0 \dots (E_0)$
2. La solution de (E_0) : $y_0 = k. \dots$, avec $k = \pm e^c$
3. Alors la solution de (E) : $y = k(x). \dots$ Nous devons chercher $k(x)$.
4. Calculons y' et la remplacer dans (E).
5. On aura $k'(x) = \dots$
6. "Introduire" l'intégral des deux cotés pour trouver $k(x)$.
7. Remplacer la valeur trouvé dans : $y = k(x). \dots$

• Equation différentielle de Bernoulli :

$$\boxed{a(x)\,y' + b(x)\,y = y^{k}\cdot c(x) \quad \ldots (E)}$$

$k \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$

Cas particulier :

⊛ $k = 0 \Rightarrow a(x)\,y' + b(x)\,y = c(x)$

↓

(Equation différientielle du 1er ordre avec second membre)

⊛ $k = 1 \Rightarrow a(x)\,y' + (b(x) - c(x))\,y = 0$

↓

(Equation différentielle du 1er ordre sans second membre)

Comment résoudre cette équation :

1. On divise par y^{k} des deux côtés.

2. On remonte les "y^{k}" qui sont en bas.

3. On pose : $z = y^{1-k} \Rightarrow z' = (1-k)\cdot y'\cdot y^{1-k-1}$

4. On aura une équation différentielle d'ordre 1 avec second membre avec z. (E_z)

5. On résout (E_{z_0}) i.e : l'équation différentielle d'ordre 1 sans second membre de (E_z)

   ⊛ Voir la page précédente 42.

6. On a trouvé z, on doit le remplacer dans $z = y^{1-k}$ pour trouver y.

Equation différentielle du $2^{ème}$ ordre :

$$\boxed{y'' + a.y' + b.y = f(x) \quad \dots (E)} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Comment résoudre cette équation :

① On résout : $y'' + a.y' + b.y = 0 \quad \dots (E_0)$

* Soit l'équation caractéristique : $r^2 + a.r + b = 0 \dots (E_c)$
* On calcule Δ de (E_c) :

- Si $\Delta > 0$: La solution générale de (E_0) : $y_0 = c_1.e^{r_1.x} + c_2.e^{r_2.x}$

  $r_1 = \dots \quad , r_2 = \dots$

r_0 - Si $\Delta = 0$: La solution générale de (E_0) : $y_0 = (c_1 + c_2.x).e^{r_0.x}$

  $z_1 = \alpha + i\beta \quad , z_2 = \alpha - i\beta$

- Si $\Delta < 0$: La solution générale de (E_0) : $y_0 = (c_1.\cos(\beta.x) + c_2.\sin(\beta.x)).e^{\alpha.x}$

② Déterminer la solution particulière de l'équation différente du $2^{ème}$ ordre :

$$y'' + a.y' + b.y = f(x) \dots (E)$$

* Si $f(x) = P_n(x).e^{\alpha x}$: La solution particulière de (E) : $y_p = x^k.Q_n(x).e^{\alpha x}$

$k = 0$ si α n'est pas une solution de (E_c).

$k = 1$ si α est l'une solution simple de (E_c). $\quad d°Q = d°P$

$k = 2$ si α est une solution double de (E_c).

* Si $f(x) = P_n(x).\sin(a.x).e^{b.x}$ ou $f(x) = P_n(x).\cos(a.x).e^{b.x}$

  ou $f(x) = [P_n(x)\sin(a.x) + Q_n(x).\cos(a.x)].e^{b.x}$

La solution particulière de (E) : $y_p = [S_n(x).\sin(a.x) + R_n(x).\cos(a.x)].x^k.e^{bx}$

$k = 0$ si $b + i.a$ n'est pas une solution de (E_c).

$k = 1$ si $b + i.a$ est une solution de (E_c).

③ On aura $y_p = \dots$ (avec des c), calculer y_p' et y_p'', et les remplacer dans (E). pour trouver les constantes 'c'. (Les c de y_1)

④ La solution générale de (E) : $y_G = y_0 + y_p$