Chap II : Les intégrales définies

• Sommes de Darboux :

Définition : Soit $f(x) = \dots$ et $[a,b]$ la subdivision d sur $[a,b]$ telle que : $d = \{\underset{\underset{a}{\shortparallel}}{x_0}, x_1, \dots, \underset{\underset{b}{\shortparallel}}{x_n}\}$

de f par rapport à d :

* **Somme supérieure :** $S(f,d) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) M_i$

avec $M_i = \text{Sup } f(x)$ $\quad x \in [x_{i-1}, x]$

* **Somme inferieure :** $s(f,d) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) m_i$

avec $m_i = \inf f(x)$ $\quad x \in [x_{i-1}, x]$

Théorème : (de Riemann)

si : $\lim\limits_{n \to +\infty} S(f,d) = \lim\limits_{n \to +\infty} s(f,d) = \boxed{K}$

alors f est intégrable sur $[a,b]$

et $\int_a^b f(x)\, dx = \boxed{K}$

Les étapes pour calculer la somme supérieure ou la somme inferieure

$$S(f,d)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1}).M_i$$

① Remplacer : $(x_i-x_{i-1})=\ldots$

② Chercher $M_i=\sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$:

- Calculer la dérivée $f'(x)$.
- Etudier la signe de la dérivée.
- Déduire si f est croissante ou décroissante $[a,b]$
- Si $f \nearrow \Rightarrow M_i=f(x_i)$.

  Si $f \searrow \Rightarrow M_i=f(x_{i-1})$.

③ Remplacer $M_i=\ldots$

④ Les termes sans i dehors !

⑤* Remplacer : $\sum_{i=1}^{n}\ldots$ = ça dépend

⑥ On aura quelque chose sans i et avec n.

⑦ On fait entrer $\lim\limits_{n\to+\infty}$.

$$s(f,d)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1}).m_i$$

① Remplacer : $(x_i-x_{i-1})=\ldots$ (depend de d)

② Chercher $m_i=\inf f(x)$:

- Calculer la dérivée $f'(x)$.
- Etudier la signe de la dérivée.
- Déduire si f est croissante ou décroissante. $[a,b]$
- Si $f \nearrow \Rightarrow m_i=f(x_{i-1})$.

  Si $f \searrow \Rightarrow m_i=f(x_i)$.

③ Remplacer $m_i=\ldots$

④ Les termes sans i dehors !

⑤ Remplacer : $\sum_{i=1}^{n}\ldots$ = ça dépend

⑥ On aura quelque chose sans i et avec n.

⑦ On fait entrer $\lim\limits_{n\to+\infty}$.

---

*⑤ $\Rightarrow$ $$\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Propositions :

- f est continue sur $[a,b]$ $\Rightarrow$ f est intégrable sur $[a,b]$
- f n'est pas intégrable sur $[a,b]$ $\Rightarrow$ f n'est pas continue sur $[a,b]$

Théorème : (Riemann)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a+i\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

Cas particulier : $[a,b]=[0,1]$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$$ ← il est préférable de travailler avec ça !

Les étapes de calcul : $\int_a^b f(x) =$

1. On aura $f(x)$, donc remplacer x par $a+i\left(\frac{b-a}{n}\right)$ ou $\frac{i}{n}$.
2. Les termes sans i dehors !
3. On aura une somme qu'on connait (suite géométrique, ...).
4. On remplace et on calcule la limite.

*Note : a et b sont des constantes.

Les étapes de calcul : contraire $\lim_{n\to+\infty} =$

1. Les valeurs qui changent sont des "i". Et écrire la somme.
2. Faire sortir $\frac{1}{n}$ en dehors de la somme.
3. On aura $f\left(\frac{i}{n}\right)$. Écrire la fonction avec x.
4. Calculer $\int_0^1 f(x)\,dx$:
   - Avoir l'intégralle de $f(x)$.
   - Remplacer x par "1" ①, puis x par "0" ②.
   - ① - ②.