# Cours d'Analyse 1

Damerdji Bouharis A.

Université des Sciences et de la Technologie Mohamed Boudiaf
Faculté des Mathématiques et Informatique.

# Table des matières

# Chapitre 1

# Le corps des nombres réels

## 1.1 Définition axiomatique

- L'ensemble des nombres réels est l'ensemble noté par $\mathbb{R}$; sur lequel sont définies deux lois de composition internes :
  l'addition
  $$\begin{array}{rcl} "+" : \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}$$
  et la multiplication
  $$\begin{array}{rcl} "\cdot" : \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x\cdot y \end{array}$$
  tel que $(\mathbb{R},+,\cdot)$ est un corps commutatif. En effet ;
  - $(\mathbb{R},+)$ est un groupe commutatif.
  - $(\mathbb{R}\setminus\{0\},.)$ est un groupe commutatif.
  - La multiplication "." est distributive par rapport à l'addition " + ".
- La relation " $\leq$ "est une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}$. En effet ;
  - La relation " $\leq$ "est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$, car
    - La relation " $\leq$ " est réflexive sur $\mathbb{R}$.
    - La relation " $\leq$ " est anti-symétrique sur $\mathbb{R}$.
    - La relation " $\leq$ " est transitive sur $\mathbb{R}$.
  - La relation " $\leq$ " est une relation d'ordre total car pour tout $x, y$ dans $\mathbb{R}$; on a
    $$(x\leq y)\vee(y\leq x).$$
- Les deux lois de composition internes ; définies sur $\mathbb{R}$ sont compatibles avec la relation d'ordre total " $\leq$ ", on a pour tout $a, b, c$ de $\mathbb{R}$ :
  - Si $0\leq a$ et $0\leq b$ alors $0\leq ab$
  - Si $0\leq a$ et $b\leq 0$ alors $ab\leq 0$
  - Si $a\leq 0$ et $b\leq 0$ alors $0\leq ab$

— Si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$

— Si $a \leq b$ et $0 \leq c$ alors $a.c \leq b.c$

— Si $a \leq b$ et $c \leq 0$ alors $b.c \leq a.c$, d'où Si $0 \leq a$ alors $-a \leq 0$

— $0 \leq a^2$.

- Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$; possède une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

## 1.2 La valeur absolue

**Définition 1.2.1** *La valeur absolue est une application de $\mathbb{R}$ dans l'ensemble des nombres réels positifs $\mathbb{R}^+$, notée par $|.|$ et définie par :*

$$\begin{array}{rccl} |.| : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ & x & \mapsto & |x| = \begin{cases} x \ si \ x \geq 0 \\ -x \ si \ x < 0 \end{cases} \end{array}$$

**Propriétés 1** *1.* $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

*2.* $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

*3.* $-|x| \leq x \leq |x|\,; \forall x \in \mathbb{R}$.

*4.* $\forall a \geq 0$; $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$.

*5.* $|x.y| = |x|\,.\,|y|\,,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

*6.* $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|},\ \forall\,(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

*7.* $|x + y| \leq |x| + |y|\,,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$, *( L'inégalité triangulaire).*

*8.* $||x| - |y|| \leq |x - y|\,,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$, *( La seconde inégalité triangulaire).*

## 1.3 Intervalles de $\mathbb{R}$

**Définition 1.3.1** *Une partie $I$ de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ si dès qu'elle contient deux réels $a$ et $b$ alors elle contient tous les réels compris entre eux.*

$\forall a, b \in I, \forall x \in \mathbb{R}$; $a \leq x \leq b \Rightarrow x \in I$.

**Exemples 1.3.2** *1.* $\mathbb{R}$ *et l'ensemble vide* $\emptyset$ *sont des intervalles.*

*2.* $\mathbb{R}^+$ *est un intervalle.*

*3.* $\mathbb{R}^*$ *et* $\mathbb{N}$ *ne sont pas des intervalles.*

**Remarques :**

1. Le complémentaire d'un intervalle ouvert est fermé.
2. Pour les notations, on a les intervalles de $\mathbb{R}$ :
   - bornés : ouverts $]a, b[$, fermés $[a, b]$ ou semi-ouverts $[a, b[\ ,\ ]a, b]$.
   - non bornés : ouverts $]-\infty, b[\ ,\ ]a, +\infty[$ ou fermés $[a, +\infty[\ ,\ ]-\infty, b]$.
   - Si $a = b$ alors $[a, a] = \{a\}\ ,\ \ ]a, b[ = [a, b[ = ]a, b] = \emptyset$.

**Remarque :** $\mathbb{R}$ et l'ensemble vide $\emptyset$ sont les seules parties ouvertes et fermées de $\mathbb{R}$.

En effet, $\mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[$ est un intervalle ouvert donc son complémentaire, l'ensemble vide $\emptyset$ est fermé, or l'ensemble vide $\emptyset$ peut s'écrire comme un intervalle ouvert $]\alpha, \alpha[$, $\alpha \in \mathbb{R}$, donc son complémentaire $\mathbb{R}$ est fermé.

**Remarques :**

1. L'intersection de deux intervalles est toujours un intervalle.
2. La réunion de deux intervalles ayant une intersection non vide est un intervalle.

**Définition 1.3.3** *Soient $a, b \in \mathbb{R}$, on appelle segment l'ensemble noté $[a, b]$ défini par $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x \leq b\}$. Si $a > b$ alors $[a, b] = \emptyset$.*

**Définition 1.3.4** *Soit $V$ une partie de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$, On dit que $V$ est un voisinage de $x_0$ s'il existe un intervalle ouvert $]a, b[$ de $\mathbb{R}$ contenant $x_0$ et inclu dans $V$, on note $V_{x_0}$ ou $V(x_0)$.*

**Exemples 1.3.5**

1. *Pour tout $\varepsilon > 0$; l'intervalle $V = ]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ est un voisinange de $x_0$; car il existe un intervalle ouvert $\left]x_0 - \frac{\varepsilon}{2}, x_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right[$ de $\mathbb{R}$ contenant $x_0$ et inclu dans $V$.*
2. *L'intervalle $[a, b]$ est voisinage de tous les points $x \in ]a, b[$.*
3. *Les ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ ne sont des voisinages d'aucun de leurs points.*

## 1.4 Minorants, majorants, borne inférieure, borne supérieure, maximum et minimum.

**Définition 1.4.1** *Etant donné un ensemble $E$ totalement ordonné par la relation d'ordre notée " $\leq$ " et soit $A \subset E$ une partie non vide de $E$.*

*- On dit que $M \in E$ est un majorant de $A$ si : $\forall x \in A$; $x \leq M$.*

*- On dit que $m \in E$ est un minorant de $A$ si : $\forall x \in A$; $m \leq x$.*

*- $A$ est dite majorée (resp. minorée) si elle possède au moins un majorant (resp. un minorant).*

**Remarque :** Si $A$ possède un majorant (resp. minorant), alors il n'est pas unique.

**Définition 1.4.2** - *Etant donnée une partie $A$ non vide et majorée de $E$, et soit $Maj(A) \subset E$ l'ensemble des majorants de $A$, on dit que $M \in E$ est la borne supérieure de $A$ si $M$ est le plus petit des majorants de $A$, on le note* $\sup A$.

- *Etant donnée une partie $A$ non vide et minorée de $E$, et soit $Min(A) \subset E$ l'ensemble des minorants de $A$, on dit que $m \in E$ est la borne inférieure de $A$ si $m$ est le plus grand des minorants de $A$, on le note* $\inf A$.

**Théorème 1.4.3** *Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de* $\mathbb{R}$, *possède une borne supérieure (resp. inférieure).*

**Remarques :**

1. Quand la borne supérieure (resp. la borne inférieure) existe alors elle est unique.
2. La borne supérieure $\sup A$ (resp. la borne inférieure $\inf A$) n'appartient pas nécessairement à l'ensemble $A$.

**Définition 1.4.4** - *On dit que $M$ est le plus grand élément de $A$ ou maximum de $A$ si $M$ est un majorant de $A$ qui appartient à $A$, on le note par* $\max A$.

- *On dit que $m$ est le plus petit élément de $A$ ou minimum de $A$ si $m$ est un minorant de $A$ qui appartient à $A$, on le note par* $\min A$.

**Remarques :**

1. Si le maximum $\max A$ (resp. le minimum $\min A$) existe alors $\sup A = \max A$ (resp. $\inf A = \min A$).
2. Si La borne supérieure $\sup A$ (resp. la borne inférieure $\inf A$ ) appartient à $A$ alors $\max A = \sup A$ (resp. $\min A = \inf A$ ).
3. Si La borne supérieure $\sup A$ (resp. la borne inférieure $\inf A$ ) n'appartient pas à $A$ alors le maximum $\max A$ (resp. le minimum $\min A$) n'existe pas.

**Remarque :** La borne supérieure d'un ensemble majoré $A$ (resp. la borne inférieure d'un ensemble minoré $A$ ) existe toujours mais peut ne pas appartenir à $A$, par contre le maximum d'un ensemble majoré (resp. le minimum d'un ensemble minoré) peut ne pas exister.

**Exemple 1.4.5** *Soit* $A = ]-5, 1]$ *; $A$ est une partie bornée de* $\mathbb{R}$.
*L'ensemble des majorants de $A$ est* $Maj(A) = [1, +\infty[$,
$\sup A = \max A = 1$.
*L'ensemble des minorants de $A$ est* $Min(A) = ]-\infty, -5]$,
$\inf A = -5$, $\min A$ *n'existe pas car* $-5 \notin A$.

**Proposition 1.4.6** *Soit $A$ une partie non vide de* $\mathbb{R}$, *les deux assertions suivantes sont équivalentes :*
$(i)$ $\exists \alpha > 0, \forall x \in A : |x| \leq \alpha$
$(ii)$ $\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall x \in A : m \leq x \leq M$.