Université des Sciences et de la Technologie d'Oran. 2023-2024
Faculté des Mathématiques − Informatique − LMD − Informatique - 1ère Année.
Analyse1

Fiche de TD3
Suites de nombres réels

Exercice 1:
I. Déterminer la limite des suites numériques suivantes

$$1.U_n = \sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n},\ 2.\ U_n = \frac{n\sin n}{n^2+1},\ 3.\ U_n = \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n},\ 4.\ U_n = n^2 a^{-\sqrt{n}}, a \in \mathbb{R}_+^*$$
$$5.\ U_n = \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n},\ 6.\ U_n = (n+1)^{\frac{1}{\ln n}},\ 7.\ U_n = \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

II. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{3n-1} = \frac{2}{3}, \lim_{n\to+\infty} e^n = +\infty$$

Exercice 2:
I. Soit (U_n) une suite définie par
$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{3U_n}{1+2U_n}, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < U_n < 1$.
2. Etudier la monotonie de (U_n).
3. Déduire la convergence de (U_n) et calculer sa limite.
4. Déterminer $\sup E, \inf E$ où $E = \{U_n, n \in \mathbb{N}\}$.

II. Soit (U_n) une suite définie par
$$\begin{cases} 0 < U_1 < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ U_{n+1} = U_n - 2U_n^3, n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < U_n < \frac{1}{\sqrt{2}}$.
2. Etudier la monotonie de (U_n).
3. Déduire la convergence de (U_n) et calculer sa limite.
4. Déterminer $\sup E, \inf E$ où $E = \{U_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 3.
1. Soient $a, b > 0$. Montrer que $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.
2. Montrer les inégalités suivantes
$$a \leq \frac{a+b}{2} \leq b, a \leq \sqrt{ab} \leq b.$$

3. Soient U_0 et V_0 des réels strictement positifs avec $U_0 < V_0$. On définit deux suites (U_n) et (V_n) de la façon suivantes:
$$U_{n+1} = \sqrt{U_n V_n}, V_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2}.$$

a) Montrer que $U_n \leq V_n, \forall n \in \mathbb{N}$.
b) Montrer que (U_n) est croissante et (V_n) est décroissante.
c) En déduire que les suites (U_n) et (V_n) sont convergentes vers la même limite.

Exercice 4.
1. Montrer que la suite $(k^n)_{n\in\mathbb{N}}, 0 < k < 1$ est une suite de Cauchy.
2. Montrer que la suite $(\ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, n'est pas une suite de Cauchy.