Rappels :
« Fonctions d'une variable réelle »

Définitions :

1] $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f :$
$|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

2] $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists B > 0, \forall x \in D_f :$
$x > B \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$

] $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists B > 0, \forall x \in D_f :$
$x < -B \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$

] $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \iff \forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f :$
$|x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) > A$

] $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in D_f :$
$x > B \Rightarrow f(x) > A.$

Définition 2 : Soit $f : E \longrightarrow F$

1) f est majorée par $M \iff \forall x \in E : f(x) \leq M$

] f est minorée par $m \iff \forall x \in E : m \leq f(x)$

Définitions 3 :

f est continue en $x_0 \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Définition : " Prolongement par continuité "

On dit que f admet un prolongement par continuité en x_0, si

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ (avec l existe et finie)

et on le prolongement par continuité

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & , x \neq x_0 \\ l & ; x = x_0 \end{cases}$$

Définition 4 :

f est dérivable en $x_0 \iff$

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l$ (l existe et finie ;
avec $l = f'(x_0)$

proposition :

1] f est dérivable en $x_0 \Rightarrow f$ est continue en x_0

2] f n'est pas continue en $x_0 \Rightarrow f$ n'est pas dérivable en x_0

Définition :

1] $\text{Arcsin} = (\sin)^{-1}$ est définie sur $[-1, 1]$

2] $\text{Arccos} = (\cos)^{-1}$ est définie sur $[-1, 1]$

3] $\text{Arctg} = (tg)^{-1}$ est définie sur $\mathbb{R}$

propriétés :

1) $\left(\text{Arc}\sin(U(x))\right)' = \frac{U'(x)}{\sqrt{1 - U^2(x)}}$ $\left([\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \right)$

2] $\left[\text{Arccos}\,(U(x))\right]' = \frac{-U'(x)}{\sqrt{1 - U^2(x)}}$ $\left([\arccos x]' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} \right)$

3] $\left[\text{Arctg}\,(U(x))\right]' = \frac{U'(x)}{1 + U^2(x)}$ $\left([\text{arctg}\, x]' = \frac{1}{1 + x^2} \right)$

Théorème Rolle :

1) f est continue sur $[a, b]$
2) f est dérivable sur $]a, b[$
3) $f(a) = f(b)$

__Alors :__ $\exists c \in]a, b[$; $f'(c) = 0$

Théorème des accroissements finis

1) f est continue sur $[a, b]$
2) f est dérivable sur $]a, b[$

__Alors :__ $\exists c \in]a, b[$:

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$$

Fiche de TD (02) « Analyse I »

Exercice 1. Montrer en utilisant la définition que :

$$\lim_{x \to 2} (3x-5) = 1, \quad \lim_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{5x-3}{2x+1} = \frac{5}{2}, \quad \lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty$$

Exercice 2. A l'aide du théorème de L'hopital, calculer les limites.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{x^4}, \quad \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} \text{ et } \lim_{x \to 1} \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}.$$

Exercice 3. Etudier la dérivabilité et la continuité des fonctions

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & , x \leq 0 \\ \sin \pi x & 0 < x \leq 1 \\ -\pi \cos x & x > 1 \end{cases} ; \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x} & , x \in]0, \pi[\\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) & , x < 0 \\ \sin \pi x & , 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{\log x}{x-1} & , 1 < x \end{cases} ; \quad f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & , x \leq 0 \\ \sin \pi x & , 0 < x \leq 1 \\ -\pi \log x & , 1 < x \end{cases}$$

Exercice 4. Soit la fonction $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f.
2) Déterminer la dérivé de f.
3) Montrer que la dérivé de f est continue.
4) Montrer qu'il existe un constant m, tel que : la fonction $g(x) = f(x) - mx$ est paire.

Exercice 05. Soit la fonction $f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$

1) Donner le domaine de définition de f.
2) supposons $|x| < 1$, trouver la dérivé de f

Exercice 06. Peut-on prolonger par continuité les fonctions suivantes

1) $f(x) = \dfrac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$, $x_0 = 1$; 2) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$, $x_0 = 0$

3) $f(x) = (x-3)\sin\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$, $x_0 = 3$, 4) $f(x) = \exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $x_0 = 0$

Exercice 07. Peut-on appliquer le théorème de Rolle à des fonctions :

1] $f(x) = \begin{cases} 1-x & , x \in]0,1] \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$, $I = [0,1]$; 2] $f(x) = |x-1|$, $I = [-2,2]$

3] $f(x) = \dfrac{x^2-1}{3}$, $I = [0,2]$; 4] $f(x) = (x-1)(x-2)$, $I = [1,2]$

Exercice 08. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer les inégalités suivantes :

1] $\forall x \geq 0$, $\sin x \leq x$; 2] $\forall x > 0$, $e^x > 1 + x$;

3] $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$; $\operatorname{tg} x > x + \dfrac{x^3}{3}$.

Exercice 09. Soit la fonction f définit par :

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases} , n \in \mathbb{N}$$

1) Etudier suivant des valeurs n, la continuité et la dérivabilité de f.

2) Etudier la continuité de la dérivé de f.

Exercice 10. I] Soit $x > 0$

1) Montrer que : $\dfrac{1}{x+1} < \log(x+1) - \log(x) < \dfrac{1}{x}$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire que :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < \log(n) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}$$

II] Soit la suite (U_n) telle que :

$$U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n)$$

a] Etudier la monotonité de (U_n).

b] Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $U_n > 0$

c] En déduire que (U_n) est convergente.