Fonctions dérivables

OUIKENE Fethia

Department of Mathematics
University of Science and Technology of Oran, Algeria

January 24, 2024

Dérivée d'une fonction en un point:

Définition: Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. On dit que f est dérivable au point x_0 si la limite suivante existe et finie

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Cette limite est unique, elle est appelée dérivée de f en x_0 et notée $f'(x_0)$.(on notera aussi $Df(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$.
Si on pose $h = x - x_0$, on obtient

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

Dérivée à droite, dérivée à gauche:

Définition: On dit que f est dérivable à droite (resp. à gauche) du point x_0, si le rapport $\frac{f(x)f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie à droite (resp. à gauche), elle est appelée dérivée à droite (resp.à gauche) de f au point x_0,
elle est notée $f'_d(x_0)$ ou $f'(x_0+0)$ (resp. $f'_g(x_0)$ ou $f'(x_0-0)$.

f est dérivable au point $x_0 \Leftrightarrow f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$ existent et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$

Alors on a

$$f'_d(x_0) = f'_g(x_0) = f'(x_0).$$

Dérivabilité et continuité

Proposition: Si une fonction est dérivable en un point, elle est continue en ce point.

Remarque:

1. L'inverse de la proposition est faux.

$$\begin{aligned} f \text{ est dérivable en } x_0 &\Rightarrow f \text{ est continue en } x_0 \\ f \text{ est continue en } x_0 &\nRightarrow f \text{ est dérivable en } x_0. \end{aligned}$$

2. Contraposé de (f est dérivable en $x_0 \Rightarrow f$ est continue en x_0) est

$$f \text{ n'est pas continue en } x_0 \Rightarrow f \text{ n'est pas dérivable en } x_0.$$

Opérations sur les fonctions dérivables:

Théorème: Soient f et g deux fonctions dérivables en x_0, alors

1. $f+g$ est dérivable en x_0 et $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.
2. αf est dérivable en x_0 et $(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$.
3. $f.g$ est dérivable en x_0 et $(f.g)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$.
4. $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et

$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-g'(x_0)f(x_0)}{(g(x_0))^2} / g(x_0) \neq 0.$

Dérivée d'une fonction composée:

Proposition: Soit $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et on a:

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0)\, g'(f(x_0)).$$

Exemple:

1. $\left(e^{f}\right)'(x) = f'(x)\, e^{f(x)}$.
2. $(\ln f)'(x) = f'(x)\,(\ln)'(f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}$.
3. $(\sin f)'(x) = f'(x)\,(\sin)'(f(x)) = f'(x)\cos(f(x))$.
4. $\left(\sqrt{f}\right)'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$.

Dérivée d'une fonction inverse:

Théorème: Soit f une application bijective et continue de $I \to J$, dérivable en $x_0 \in I$ telle que $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0) \in J$ et on a:

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Dérivée de fonctions trigonométriques inverses:

1. Fonction $\arcsin \mathbf{x}$:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, -1 < x < 1.$$

En général,

$$(\arcsin f)' = \frac{1}{\sqrt{1 - f^2}}, -1 < f(x) < 1.$$

2. Fonction $\arccos \mathbf{x}$:

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, -1 < x < 1.$$

En général,

$$(\arccos f)' = \frac{-1}{\sqrt{1-f^2}}, -1 < f(x) < 1.$$

2. Fonction arctgx :

$$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

En général,

$$(arctgf)' = \frac{1}{1+f^2}.$$

Dérivée de fonctions thyperboliques inverses:

1. Fonction argchx :

$$(\arg chx)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, x > 1.$$

En général,

$$(\arg chf)' = \frac{f'}{\sqrt{f^2 - 1}}, f(x) > 1.$$

2. Fonction $\arg$ **shx** :

$$(\arg shx)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, x \in \mathbb{R}.$$

En général,

$$(\arg shf)' = \frac{f'}{\sqrt{1+f^2}}.$$

1. Fonction arg **thx** :

$$(\arg thx)' = \frac{1}{1-x^2}, -1 < x < 1.$$

En général,

$$(\arg thf)' = \frac{f'}{1-f^2}, -1 < f(x) < 1.$$

Dérivées successives:

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I, alors la fonction f' est appelée dérivée première de f ou dérivée d'ordre 1 de f et si la fonction $f' : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I, alors la fonction $(f')'$ est appelée dérivée deuxième de f ou dérivée d'ordre 2 de f , et on note f'' ou $f^{(2)}$. En général, pour tout $n \in \mathbb{N}, f^{(n)} : I \to \mathbb{R}$ est la fonction vérifiante:

1. $f^{(0)} = f$.
2. $f^{(p+1)} = \left(f^{(p)}\right)', 0 \leq p \leq n$.

$f^{(n)}$ est la dérivée $n^{ième}$ de f ou dérivée d'ordre n de f.

Fonction de classe C^n :
On dit que f est de classe C^n $(f \in C^n(I))$ si f admet des dérivées continues jusqu'à l'ordre n.
C'est à dire

$$f \in C^n(I) \Leftrightarrow f \text{ continue et } f', f'', ..., f^{(n)} \text{ existent et continues.}$$

Définition:

$$f \text{ est dite de classe } C^\infty(I) \Leftrightarrow f \in C^n(I), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Formule de Leibeniz:

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}, x \in I$, si $f^{(n)}(x)$ et $g^{(n)}(x)$ existent, $\forall n \in \mathbb{N}$, alors $(f.g)$ admet une dérivée $n^{ième}$ au point x définie par

$$(f.g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(x)\, g^{(k)}(x) \,/\, C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Extremum

Définition: On dit que f admet un maximum (resp. minimum) local en x_0 s'il existe un intervalle ouvert I contenant x_0 tel que

$$\forall x \in I, f(x) \leq f(x_0) \,(\text{ resp. } f(x) \geq f(x_0)).$$

Un maximum local en x_0 ou un minimum local en x_0 est dit extremum local en x_0.

Théorème de Fermat: (condition necessaire d'extremum)

Soit f une fonction dérivable sur $]a, b[$ telle que f admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.

autrement dit: si f dérivable sur $]a, b[$

$$f \text{ admet un extremum local en } x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0.$$

Condition suffisante d'extremum:
f, f', f'' étant continues sur $[a,b]$, si $x_0 \in]a,b[$,$f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) \neq 0$, la fonction f admet un extremum local en x_0. Il sagit d'un maximum si $f''(x_0) < 0$ et d'un monimum local si $f''(x_0) > 0$. Autrement dit

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= 0 \text{ et } f''(x_0) \neq 0 \Rightarrow f \text{ admet un extremum en } x_0, \\ & \left\{ \begin{array}{l} \text{un maximum si } f''(x_0) < 0 \\ \text{un minimum si } f''(x_0) > 0 \end{array} \right. . \end{aligned}$$