Chapitre 3
Equations différentielles
Partie 5

Damerdji Bouharis A.
Université des Sciences et de la Technologie Mohamed Boudiaf
Faculté des Mathématiques et Informatique.

3.3.3 Principe de superposition

Théorème 3.3.8 *Etant donnée l'équation différentielle linéaire d'ordre 2*

$$ay'' + by' + cy = f_1(x) + f_2(x) \tag{3.63}$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et f_1, f_2 sont deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. La solution particulière y_p de (3.63) peut être exprimée par la somme des deux solutions particulières y_{p_1} et y_{p_2} des équations différentielles respectives :

$$ay'' + by' + cy = f_1(x)$$

et

$$ay'' + by' + cy = f_2(x)$$

telles que

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2}.$$

Preuve :
On peut vérifier aisément que $y_{p_1} + y_{p_2}$ est solution de l'équation différentielle (3.63), en effet à cause de la linéarité de l'équation, on a

$$\begin{aligned} a(y_{p_1} + y_{p_2})'' + b(y_{p_1} + y_{p_2})' + c(y_{p_1} + y_{p_2}) &= \left(ay''_{p_1} + by'_{p_1} + cy_{p_1}\right) + \left(ay''_{p_2} + by'_{p_2} + cy_{p_2}\right) \\ &= f_1(x) + f_2(x). \end{aligned}$$

□

Remarque Pour la solution générale y_{gle} de l'équation différentielle (3.63), il suffit d'écrire l'équation homogène puis la résoudre pour avoir la solution homogène y_{hom} et on obtient

$$y_{gle} = y_{\text{hom}} + y_{p_1} + y_{p_2}.$$

Exemple 3.3.9 *Résoudre les équations différentielles suivantes*

1. $y'' - 3y' = (x+2)e^{2x} + (3\sin x + 2\cos x)$.
2. $y'' + 2y' + 2y = 2x - \sin x$.
3. $y'' - 4y' + 3y = 3x + 2 + 4e^x + 5e^{-x}$.

Solution

1. *On a*

$$y'' - 3y' = (x+2)e^{2x} + 3\sin x + 2\cos x. \tag{3.64}$$

Equation homogène :

$$y'' - 3y' = 0.$$

Equation caractéristique :

$$r^2 - 3r = 0. \tag{3.65}$$

On a $\Delta = 9 > 0$ alors l'équation (3.65) admet deux solutions réelles distinctes $r_1 = 0$ et $r_2 = 3$ d'où la solution homogène

$$y_{\text{hom}}(x) = A + Be^{3x}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Solution particulière y_p

Pour calculer la solution particulière y_p *de l'équation* (3.65) *on remarque le second membre* $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, *où* $f_1(x) = (x+2)e^{2x}$ *et* $f_2(x) = 3\sin x + 2\cos x$, *alors on va utiliser le principe de superposition tel que*

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2}.$$

où y_{p_1} *et* y_{p_2} *sont les solutions particulières des équations différentielles respectives*

$$y'' - 3y' = (x+2)e^{2x}$$

et

$$y'' - 3y' = 3\sin x + 2\cos x.$$

Calcul de y_{p_1}. *On a*

$$y'' - 3y' = (x+2)e^{2x}. \tag{3.66}$$

On remarque que $r = 2$ *n'est pas solution de l'équation caractéristique* (3.65) *alors la solution particulière de l'équation* (3.66) *aura la forme suivante (voir la table 3.1)*

$$y_{p_1}(x) = e^{2x}(ax+b)$$

où a, b *sont des constantes réelles à déterminer. On dérive deux fois* y_{p_1}

$$\begin{aligned} y'_{p_1} &= e^{2x}[2ax + a + 2b], \\ y''_{p_1} &= e^{2x}[4ax + 4a + 4b], \end{aligned}$$

et on remplace dans l'équation (3.66), *d'où*

$$\begin{aligned} &e^{2x}[-2ax + (a-2b)] = e^{2x}(x+2) \\ &\Leftrightarrow e^{2x}[x(-2a-1) + (a-2b-2)] = 0 \end{aligned}$$

alors on obtient le système suivant

$$\begin{cases} -2a - 1 = 0 \\ a - 2b - 2 = 0 \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{2}, \\ b = -\frac{5}{4}, \end{cases}$$

par conséquent la solution particulière de l'équation (3.66) *est*

$$y_{p_1}(x) = -\frac{1}{4}e^{2x}(2x+5).$$

Calcul de y_{p_2}. *On a*

$$y'' - 3y' = 3\sin x + 2\cos x. \tag{3.67}$$

On remarque que $r = i$ *n'est pas solution de l'équation caractéristique* (3.65) *alors la solution particulière de l'équation* (3.67) *aura la forme suivante (voir la table 3.1)*

$$y_{p_2}(x) = \alpha\cos x + \beta\sin x$$

où α, β *sont des constantes réelles à déterminer. On dérive deux fois* y_{p_2}

$$y'_{p_2} = -\alpha \sin x + \beta \cos x,$$
$$y''_{p_2} = -\alpha \cos x - \beta \sin x,$$

et on remplace dans l'équation (3.67), *d'où*

$$(3\alpha - \beta) \sin x + (-\alpha - 3\beta) \cos x = 3 \sin x + 2 \cos x$$

alors par identification on obtient le système suivant

$$\begin{cases} 3\alpha - \beta = 3 \\ -\alpha - 3\beta = 2 \end{cases}$$

et après résolution du système on trouve :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{7}{10}, \\ \beta = -\frac{9}{10}. \end{cases}$$

par conséquent la solution particulière de l'équation (3.67) *est*

$$y_{p_2}(x) = \frac{7}{10} \cos x - \frac{9}{10} \sin x.$$

D'où la solution particulière de l'équation (3.64) *est*

$$y_p(x) = -\frac{1}{4} e^{2x} (2x + 5) + \left(\frac{7}{10} \cos x - \frac{9}{10} \sin x \right).$$

et donc la solution générale de l'équation (3.64) *est*

$$y_{gle}(x) = A + Be^{3x} - \frac{1}{4} e^{2x} (2x + 5) + \left(\frac{7}{10} \cos x - \frac{9}{10} \sin x \right), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

2. On a

$$y'' + 2y' + 2y = 2x - \sin x. \tag{3.68}$$

Equation homogène

$$y'' + 2y' + 2y = 0.$$

Equation caractéristique

$$r^2 + 2r + 2 = 0. \tag{3.69}$$

On a $\Delta = -4 < 0$ *alors l'équation* (3.69) *admet deux solutions complexes*

$$r_1 = -1 - i \text{ et } r_2 = -1 + i$$

d'où la solution homogène est

$$y_{\text{hom}}(x) = e^{-x} (A \cos x + B \sin x), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Solution particulière y_p

Pour calculer la solution particulière y_p *de l'équation* (3.68), *on remarque le second membre* $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, *où* $f_1(x) = 2x$ *et* $f_2(x) = -\sin x$, *alors on peut utiliser le principe de superposition*

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2},$$

où y_{p_1} *et* y_{p_2} *sont les solutions particulières des équations différentielles respectives*

$$y'' + 2y' + 2y = 2x$$

et

$$y'' + 2y' + 2y = -\sin x.$$

Calcul de y_{p_1}. *On a*

$$y'' + 2y' + 2y = 2x. \tag{3.70}$$

On remarque que $r = 0$ *n'est pas solution de l'équation caractéristique* (3.69) *alors la solution particulière de l'équation* (3.68) *aura la forme suivante (voir la table 3.1)*

$$y_{p_1}(x) = ax + b$$

où a, b *sont des constantes réelles à déterminer. On dérive deux fois* y_{p_1}

$$y'_{p_1} = a,$$
$$y''_{p_1} = 0,$$

et on substitue dans l'équation (3.70). *D'où*

$$ax + a + b = x$$

alors on obtient le système suivant

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \end{cases}$$

d'où

$$a = 1 \text{ et } b = -1.$$

par conséquent la solution particulière de l'équation (3.70) *est*

$$y_{p_1}(x) = x - 1$$

Calcul de y_{p_2}. *On a*

$$y'' + 2y' + 2y = -\sin x. \tag{3.71}$$

On remarque que $r = i$ *n'est pas solution de l'équation caractéristique* (3.69) *alors la solution particulière de l'équation* (3.71) *aura la forme suivante (voir la table 3.1)*

$$y_{p_2}(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x$$

où α, β *sont des constantes réelles à déterminer. On dérive deux fois* y_{p_2}

$$y'_{p_2} = -\alpha \sin x + \beta \cos x,$$
$$y''_{p_2} = -\alpha \cos x - \beta \sin x,$$

et on remplace dans l'équation (3.71), *d'où*

$$(\alpha+2\beta)\cos x+(-2\alpha+\beta)\sin x=-\sin x$$

alors par identification on obtient le système suivant

$$\begin{cases}\alpha+2\beta=0\\ -2\alpha+\beta=-1\end{cases}$$

d'où

$$\alpha=\frac{2}{5}\ \text{et}\ \beta=-\frac{1}{5}.$$

Ainsi la solution particulière de l'équation (3.71) *est*

$$y_{p_2}(x)=\frac{2}{5}\cos x-\frac{1}{5}\sin x.$$

D'où la solution particulière de l'équation (3.68) *est*

$$y_p(x)=(x-1)+\left(\frac{2}{5}\cos x-\frac{1}{5}\sin x\right).$$

et donc la solution générale de l'équation (3.68) *s'écrit*

$$y_{gle}(x)=e^{-x}(A\cos x+B\sin x)+(x-1)+\left(\frac{2}{5}\cos x-\frac{1}{5}\sin x\right),A,B\in\mathbb{R}.$$

3. *On a*

$$y''-4y'+3y=(3x+2)+4e^{x}+5e^{-x}. \tag{3.72}$$

Equation homogène

$$y''-4y'+3y=0.$$

Equation caractéristique

$$r^2-4r+3=0. \tag{3.73}$$

On a $\Delta=4>0$ *alors l'équation* (3.73) *admet deux solutions réelles distinctes* $r_1=1$ *et* $r_2=3$ *d'où la solution homogène*

$$y_{\text{hom}}(x)=Ae^{x}+Be^{3x},\quad A,B\in\mathbb{R}.$$

Solution particulière y_p

Pour calculer la solution particulière y_p *de l'équation* (3.72), *on remarque le second membre,* $f(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)$, *où* $f_1(x)=3x+2$, $f_2(x)=4e^{x}$ *et* $f_3(x)=5e^{-x}$ *alors on va utiliser le principe de superposition, tel que*

$$y_p=y_{p_1}+y_{p_2}+y_{p_3},$$

où y_{p_1}, y_{p_2} *et* y_{p_3} *sont les solutions particulières des équations différentielles respectives*

$$y''-4y'+3y=3x+2,$$

$$y''-4y'+3y=4e^{x},$$

et

$$y'' - 4y' + 3y = 5e^{-x}.$$

<u>*Calcul de* y_{p_1}</u>. *On a*

$$y'' - 4y' + 3y = 3x + 2. \tag{3.74}$$

On remarque que $r = 0$ *n'est pas solution de l'équation caractéristique* (3.73) *alors la solution particulière de l'équation* (3.74) *aura la forme suivante (voir la table 3.1)*

$$y_{p_1}(x) = ax + b$$

où a, b *sont des constantes réelles à déterminer. On dérive deux fois* y_{p_1}

$$\begin{aligned} y'_{p_1} &= a, \\ y''_{p_1} &= 0, \end{aligned}$$

et on remplace dans l'équation (3.74) *, pour ttouver*

$$3ax - 4a + 3b = 3x + 2$$

et l'identification conduit au système suivant

$$\begin{cases} 3a = 3 \\ -4a + 3b = 2 \end{cases}$$

d'où

$$a = 1 \text{ et } b = 2$$

par conséquent la solution particulière de l'équation (3.74) *s'écrit*

$$y_{p_1}(x) = x + 2.$$

<u>*Calcul de* y_{p_2}</u>. *On a*

$$y'' - 4y' + 3y = 4e^{x}. \tag{3.75}$$

On remarque que $r = 1$ *est solution de l'équation caractéristique* (3.73) *. Donc la solution particulière de l'équation* (3.75) *s'écrit*

$$y_{p_2}(x) = \alpha x e^{x}$$

où α *est une constante réelle à déterminer. On dérive deux fois* y_{p_2}

$$\begin{aligned} y'_{p_2} &= \alpha (1 + x) e^{x}, \\ y''_{p_2} &= \alpha (2 + x) e^{x}, \end{aligned}$$

et on remplace dans l'équation (3.75) *, d'où*

$$\alpha = -2$$

par conséquent la solution particulière de l'équation (3.75) *s'écrit*

$$y_{p_2}(x) = -2xe^{x}.$$

Calcul de y_{p_3}. On a

$$y'' - 4y' + 3y = 5e^{-x}. \tag{3.76}$$

On remarque que $r = -1$ n'est pas solution de l'équation caractéristique (3.73) *alors la solution particulière de l'équation* (3.76) *aura la forme (voir la table 3.1)*

$$y_{p_3}(x) = \alpha e^{-x}$$

où α est une constante réelle à déterminer. On dérive deux fois y_{p_2}

$$\begin{aligned} y'_{p_3} &= -\alpha e^{-x}, \\ y''_{p_3} &= \alpha e^{x}, \end{aligned}$$

et on remplace dans l'équation (3.76) *, d'où*

$$\alpha = \frac{5}{8}$$

par conséquent la solution particulière de l'équation (3.76) *s'écrit*

$$y_{p_3}(x) = \frac{5}{8} e^{-x}.$$

D'où la solution particulière de l'équation (3.72)

$$y_p(x) = (x+2) - 2xe^{x} + \frac{5}{8} e^{-x},$$

et donc la solution générale de l'équation (3.72) *est*

$$y_{gle}(x) = Ae^{x} + Be^{3x} + (x+2) - 2xe^{x} + \frac{5}{8} e^{-x}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$