Ch.3 "Fonctions Réelles d'une Variable Réelles" (Analyse I)

Théorème (Définition) Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in U$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ n'existe pas si : $\exists (U_n)$ une suite : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = x_0$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} f(U_n) = \begin{cases} \ell_1 \\ \ell_2 \end{cases}$ avec : $\ell_1 \neq \ell_2$

(ou bien : $\exists (U_n), (v_n)$ deux suites : $\lim U_n = \lim V_n = x_0$

et : $\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} f(U_n) = \ell_1 \\ \text{et } \lim\limits_{n \to +\infty} f(v_n) = \ell_2 \\ \text{et } \ell_1 \neq \ell_2 \end{cases}$)

Exemples : Montrer que :

1] $\lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$ n'existe pas

$\exists U_n = \dfrac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2}}$: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} f(U_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} \sin\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\right] = \lim\limits_{n \to +\infty} (-1)^n = \begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases}$

2] $\lim\limits_{x \to 0} \cos \frac{1}{x}$ n'existe pas

$\exists U_n = \dfrac{1}{n\pi}$: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$ et

$\lim\limits_{n \to +\infty} f(U_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} \cos(n\pi) = \lim\limits_{n \to +\infty} (-1)^n = \begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases}$

3] $\lim\limits_{x \to +\infty} x - [x]$ n'existe pas

$\exists U_n = n$; $\exists v_n = n + \frac{1}{2}$: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

et $\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} f(U_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} n - [n] = \lim\limits_{n \to +\infty} n - n = \lim\limits_{n \to +\infty} 0 = 0 \\ \text{et } \lim\limits_{n \to +\infty} f(v_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} n + \frac{1}{2} - \left[n + \frac{1}{2}\right] = \lim\limits_{n \to +\infty} \cancel{n} + \frac{1}{2} - \cancel{n} = \frac{1}{2} \end{cases}$ $\neq$

Mr. EL AZIRI

Propriétés :

Supposons : $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = l'$. Alors :

1) $\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = l + l'$

2) $\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = l \cdot l'$

3) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$: $\lim_{x \to x_0} (\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot l$

4) $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{l'}$ (avec $l' \neq 0$)

5) $\begin{cases} f \text{ est bornée } (\underline{\text{i.e}}\ \exists\, m, M \in \mathbb{R}, \forall x \in U : m \leqslant f(x) \leqslant M \\ \text{et } \lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = 0$

6) Soient $f : U \longrightarrow U'$ et $g : U' \longrightarrow \mathbb{R}$

alors : $g \circ f : U \xrightarrow{f} U' \xrightarrow{g} \mathbb{R}$

$x \rightsquigarrow f(x) \rightsquigarrow g(f(x))$

<u>i.e</u> $g \circ f : U \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x))$

<u>Si</u> : $\begin{cases} \lim_{x \to x_0} f(x) = l \\ \text{et } \lim_{x \to l} g(x) = l' \end{cases}$; alors : $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \boxed{l'}$

Exemple : Soit $H(x) = \sqrt{\dfrac{2x+1}{1+x}}$; $\lim_{x \to +\infty} H(x) = ?$

On pose : $H(x) = (U \circ V)(x)$ avec : $U(x) = \sqrt{x}$

et $V(x) = \dfrac{2x+1}{1+x}$

On a : $\lim_{x \to +\infty} V(x) = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{2x+1}{1+x} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{x} = 2$

et $\lim_{x \to 2} U(x) = \lim_{x \to 2} \sqrt{x} = \sqrt{2}$; donc : $\lim_{x \to +\infty} H(x) = \boxed{\sqrt{2}}$

Fonctions Continues :

Définition : Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in U$.

On dit que f est continue en x_0 si : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Remarque : f est continue sur U si f est continue en x_0 ; $\forall x_0 \in U$

Propriété : Soient f et g deux fonctions continues en x_0, alors : $f+g$; $f \cdot g$; $|f|$; $\alpha \cdot f$ (avec : $\alpha \in \mathbb{R}$) et $\dfrac{f}{g}$ sont continues en x_0

Continuité à droite et à gauche

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$

- On dit que f est continue à droite en x_0 si : $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = f(x_0)$
- On dit que f est continue à gauche en x_0 si : $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = f(x_0)$

Proposition : Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in U$

f est continue en x_0 ssi f est continue à droite et à gauche en x_0

(i.e. $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = f(x_0)$)

Exemples Soit
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & ; \ x < 0 \\ \sin x & ; \ 0 \leq x \leq \pi \\ 2 + \cos x & ; \ x > \pi \end{cases}$$

Etudier la continuité de f

Solution : On a : $D_f = \mathbb{R}$

On a : f est toujours continue sur $\mathbb{R} - \{0, \pi\}$, il suffit d'étudier la continuité de f en 0 et π

* Continuité de f en $x_0 = 0$? i.e. $\lim_{x \to 0} f(x) \stackrel{?}{=} f(0)$

On a: $f(0) = \sin(0) = \boxed{0}$

et $\lim_{x \to 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \sin x = \boxed{0} \\ \lim_{x \overset{<}{\to} 0} x^2 + x = \boxed{0} \end{cases}$

Donc f est continue en $x_0 = 0$

* Continuité de f en $x_0 = \pi$? $\lim_{x \to \pi} f(x) \stackrel{?}{=} f(\pi)$

On a: $f(\pi) = \sin \pi = \boxed{0}$

et $\lim_{x \to \pi} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \overset{>}{\to} \pi} 2 + \cos x = \boxed{1} \\ \lim_{x \overset{<}{\to} \pi} \sin x = \boxed{0} \end{cases}$

Donc f n'est pas continue en $x_0 = \pi$

Ainsi f est continues sur $\mathbb{R} - \{\pi\}$.

Exemple 2 Etudier la continue de la fonction:

$$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

Solution: On a: f est continue sur $\mathbb{R}^*$

il suffit d'étudier la continuité de f en 0

i.e $\lim_{x \to 0} f(x) \stackrel{?}{=} f(0)$

On a: $f(0) = \boxed{0}$

et $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \cos \frac{1}{x}$ n'existe pas

Car: $\exists U_n = \frac{1}{n\pi}$: $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} f(U_n) = \lim_{n \to +\infty} \cos(n\pi) = \begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases}$

Donc f n'est pas continue en 0;

i.e. f est continue sur $\mathbb{R}^*$

Prolongement par continuité : Soit $f : U \to \mathbb{R}$

Si : $\begin{cases} x_0 \notin U \\ \text{et } \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \ (\ell : \text{existe et finie}) \end{cases}$

alors : f admet un prolongement par continuité en x_0

notons par : $\tilde{f} : U \cup \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longrightarrow \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & ; \ x \in U \\ \ell & : \ x = x_0 \end{cases}$$

Exemple 1 :

Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightsquigarrow f(x) = \frac{\sin x}{|x|}$$

f admet-elle un prolongement par continuité ?

on a : ⊛ $x_0 = 0 \notin \mathbb{R}^*$

⊛ Calculons : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{|x|} = \begin{cases} \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{\sin x}{-x} = -1 \end{cases}$

i.e. $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$: n'existe pas

Donc f n'admet pas un P.C en $x_0 = 0$.

Exemple 2 : Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow f(x) = x^3 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

On a : ⊛ $x_0 = 0 \notin \mathbb{R}^*$

⊛ Calculons $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \underbrace{x^3}_{\to 0} \underbrace{\cos(1/x)}_{\to \text{bornée}} = \boxed{0}$

Donc f admet un P. C en $x_0 = 0$

Notons : $\tilde{f} : \mathbb{R}^* \cup \{0\} = \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longrightarrow \tilde{f}(x) = \begin{cases} x^3 \cos(1/x) & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

Théorème (bijection) :

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$.

si f est continue et strictement monotone sur U,

alors f est bijective de U sur $f(U)$

i.e. $f : U \longrightarrow f(U)$ est bijective et

sa réciproque $f^{-1} : f(U) \longrightarrow U$ est continue.