Chap IV et V : Les fonctions

- La définition de la limite :

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f :$
$|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \iff \forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f :$
$|x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) > A$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty \iff \forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f :$
$|x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) < -A$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists B > 0, \forall x \in D_f :$
$x > B \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in D_f :$
$x > B \Rightarrow f(x) > A$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \iff \forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in D_f :$
$x > B \Rightarrow f(x) < -A$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists B > 0, \forall x \in D_f :$
$x < -B \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \iff \forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in D_f :$
$x < -B \Rightarrow f(x) > A$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \iff \forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in D_f :$
$x < -B \Rightarrow f(x) < -A$

- Fonction équivalences : au voisinage 0

* $\sin U \sim U$
* $\cos U \sim 1 - \frac{U^2}{2}$
* $\tan U \sim U$
* $\ln(1+U) \sim U$
* $e^U \sim 1 + U$

- Continuité & Prolongement par continuité :

Définition de continuité : Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in U$

On dit que f est continue en x_0 si :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

ou bien : $\lim_{x \geq x_0} f(x) = \lim_{x \leq x_0} f(x) = f(x_0)$

Définition de prolongement par continuité : Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$

On dit que f admet un prolongement par continuité en x_0 si :

* $x_0 \notin U$
* $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ (existe et finie)

Alors le prolongement par continuité est noté par :

$$\tilde{f} : U \cup \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & : x \in U \\ \ell & : x = x_0 \end{cases}$$

- Quelques fonctions :

1) arc Sin U :

- Domaine de définition : $-1 \leq U \leq 1$
- La dérivée : $[\arcsin U]' = \frac{U'}{\sqrt{1-U^2}}$

2) arc Cos U :

- Domaine de définition : $-1 \leq U \leq 1$
- La dérivée : $[\arccos U]' = \frac{-U'}{\sqrt{1-U^2}}$

3) arc tan U / arc tg U :

- Domaine de définition : il dépend de U (U = ?)
- La dérivée : $[\arctan U]' = \frac{U'}{1+U^2}$

Remarque : $-\pi/2 < \arctan U < \pi/2$

Remarque : arc tan U est bornée.

4) Ch U / Sh U :

$\operatorname{Ch} U = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; $\operatorname{Sh} U = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$[\operatorname{ch} U]' = \operatorname{sh} U$; $[\operatorname{Sh} U]' = \operatorname{Ch} U$

$$\operatorname{Ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

$\operatorname{th} U = \frac{\operatorname{Ch} U}{\operatorname{Sh} U}$

- Quelques formules :

I] Formule de Taylor + Young :

Définition : Soit f une fonction

La formule de Taylor-Mac-Laurien d'ordre n au voisinage de 0 :

$$f(x) = f(0) + f'(0).x + \frac{f''(0)}{2!}.x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.x^n + \boxed{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\theta.x)}$$

Le reste de Young

(avec $\theta \in]0, 1[$)

I] Formule de Leibutz :

$$(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k . f^{(k)} . g^{(n-k)}$$

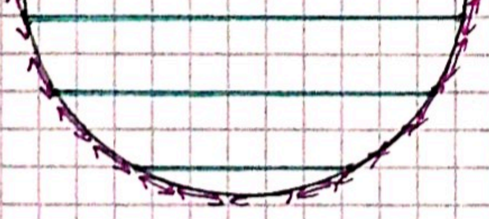
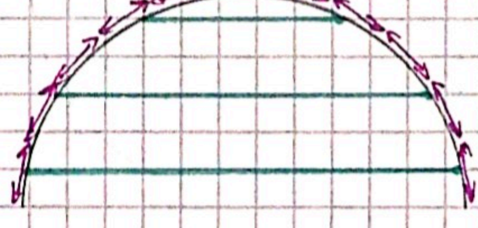
- Fonctions convexes et fonctions concaves :

Définition : Soit f une fonction

- f est convexe en x_0 $\Longleftrightarrow$ $f''(x_0) > 0$
- f est concave en x_0 $\Longleftrightarrow$ $f''(x_0) < 0$

(Signe $f''(x)$)

En dessin :

Fonction convexe	Fonction concave
	
en dessus des tg	en dessous des tg
en dessous des cordes	en dessus des cordes

- Théorème des Valeurs Intermédiaires : نظرية القيم المتوسطة

Question : Montrer que $f(x) = k$ ($k \in \mathbb{R}$) admet au moins (une unique) une solution α sur $[a, b]$

Réponse :

- f est définie et continue (et monotone) sur $[a, b]$
- k compris en $f(a)$ et $f(b)$, i.e : $f(a) < k < f(b)$ ou $f(b) < k < f(a)$

Cas particulier : Si $k = 0 \Rightarrow f(a) \cdot f(b) < 0$

- Théorème des Accroissements Finles (T.A.F) :

- f est continue sur $[a, b]$
- f est dérivable sur $]a, b[$

Alors : $\exists c \in]a, b[: f(b) - f(a) = (b-a) \cdot f'(c)$

Remarque :

- f est une fonction simple et basique qu'on connait.
- $x > 0 \Rightarrow [a, b] = [0, x]$

  $x < 0 \Rightarrow [a, b] = [x, 0]$

si $x \geqslant 0$ ou $x \leqslant 0$, on traite 2 cas :

- 1^er cas : $x = 0$: on remplace x par 0.
- 2^ème cas : $x > 0$ ou $x < 0$: on applique T.A.F.

- Théorème de Rolle :

- f est continue sur $[a, b]$
- f est dérivable sur $]a, b[$
- $f(a) = f(b)$

Alors : $\exists c \in]a, b[: f'(c) = 0$