Université des Sciences et de la technologie USTO-MB.
Faculté des Mathématiques-Informatique.
1ère Année LMD Informatique

Examen de rattrapage d'Analyse 1

Durée: 1h30min

Mercredi 12/ 06/ 2024
Les calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisées.

Exercice 1. (3*pts*)
On considère la partie A de $\mathbb{R}$ définie par

$$A = \left\{ \frac{1}{x-1}, \quad x \geq 2 \right\}.$$

1. Déterminer, si elles existent la borne supérieure et la borne inférieure de A. Justifier.
2. A possède-t-elle un maximum, un minimum? Justifier.

Exercice 2. (7*pts*)
Soit (U_n) la suite définie par

$$\begin{cases} 0 < U_0 \leq 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{2} + \frac{U_n^2}{4}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < U_n \leq 1$.
2. Etudier la monotonie de (U_n).
3. En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.
4. Déterminer $\sup E, \inf E$ où $E = \{U_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 3. (10*pts*)
Considérons la fonction f définie par:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^x & \text{si } x > 0 \end{cases},$$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f sur son domaine de définition.
2. Donner l'expression de la dérivée de f sur le domaine de dérivabilité.
3. En utilisant le théorème des accroissements finies montrer que

$$\forall x > 1, \quad 1 < \frac{1 - e^{x-1}}{1 - x} < e^{x-1}.$$

4. Etudier la convexité de la fonction f.
5. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1. Utiliser les réponses aux question précédentes pour démontrer que $\forall x > 0, e^x \geq ex$.
6. Donner le tableau de variations de f puis tracer son graphe G_f.

Bon courage

Corrigé du rattrapage d'Analyse 1
2023/2024.

Exo1 : (3pts)

$$A = \left\{ \frac{1}{x-1} \, , \, x \geq 2 \right\}.$$

1/ $\forall y \in A, \quad y = \frac{1}{x-1} \, , \, x \geq 2.$

On a : $x \geq 2 \Rightarrow x-1 \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{x-1} \leq 1$

et $x-1 \geq 1 > 0 \Rightarrow \frac{1}{x-1} > 0.$ (0,5)

d'où $0 < \frac{1}{x-1} \leq 1 \Leftrightarrow \forall y \in A \quad 0 < y \leq 1$

A est bornée $\Rightarrow$ sup A et inf A existent.

- A est majorée par 1 alors $\sup A \leq 1$.
d'autre part, $1 \in A$ (il suffit de remplacer par $x=2$).
donc $1 \leq \sup A$, ainsi $\sup A = 1$. (0,5)

- A est minorée par 0 car $x-1 > 0 \Rightarrow \frac{1}{x-1} > 0$.
Montrons que $\inf A = 0$ en utilisant la caractérisation de la borne inférieure.

i.e. $\begin{cases} \forall y \in A, \quad y \geq 0 & \text{vérifiée dans 1)} \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \geq 2 \ / \ 0 < \frac{1}{x-1} < 0 + \varepsilon \end{cases}$ (1)

$0 < \frac{1}{x-1} < \varepsilon \Rightarrow x-1 > 1/\varepsilon \Rightarrow x > 1/\varepsilon + 1$

Il suffit de prendre $x = 1/\varepsilon + 2 > 1/\varepsilon + 1$

2/ Remarquons que $1 \in A$ donc $\sup A = \max A = 1$ (0,5)
par contre, $0 \notin A$ donc min A n'existe pas (0,5)

Exo2 : 7pts

$$\begin{cases} 0 < U_0 \leq 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{2} + \dfrac{U_n^2}{4}, \; n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1/ $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < U_n \leq 1$ par recurrence.

- Pour $n = 0$, $0 < U_0 \leq 1$ vraie. 0,25
- Supposons que $0 < U_n \leq 1$ et montrons que $0 < U_{n+1} \leq 1$?

On a : $U_n > 0 \Rightarrow \dfrac{U_n}{2} > 0$ et $\dfrac{U_n^2}{4} > 0 \Rightarrow \dfrac{U_n}{2} + \dfrac{U_n^2}{4} > 0$.

$\Leftrightarrow U_{n+1} > 0$. 0,5

et $U_n \leq 1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{U_n}{2} \leq \dfrac{1}{2} \\ \text{et} \\ \dfrac{U_n^2}{4} \leq 1/4 \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{U_n}{2} + \dfrac{U_n^2}{4} \leq \dfrac{3}{4} \leq 1$

d'où $U_{n+1} \leq 1$ 0,5

ce qui donne : $0 < U_n \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2) Monotonie de (U_n) :

$$U_{n+1} - U_n = \frac{U_n}{2} + \frac{U_n^2}{4} - U_n = \frac{U_n^2}{4} - \frac{U_n}{2}$$

$$= U_n\left(\frac{U_n}{4} - \frac{1}{2}\right) = U_n\left(\frac{U_n - 2}{4}\right) \quad 0{,}25$$

$$= \underbrace{\frac{U_n}{4}}_{>0} \underbrace{(U_n - 2)}_{<0} \quad \text{car } 0 < U_n \leq 1 \Rightarrow -2 < U_n - 2 \leq -1$$

0,5

d'où $U_{n+1} - U_n < 0 \Rightarrow (U_n)$ décroissante 0,25 0,5

3) (U_n) est décroissante et minorée par 0 alors elle est convergente vers sa borne inférieure. 0,75

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} U_{n+1} = \ell$ 0,5

$$U_{n+1} = \frac{U_n}{2} + \frac{U_n^2}{2} \Leftrightarrow \ell = \frac{\ell}{2} + \frac{\ell^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ell^2}{4} - \frac{\ell}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\ell}{2}\left(\frac{\ell}{2} - 1\right) = 0$$ 0,5

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ell = 0 \\ \text{ou} \\ \ell = 2 \text{ refusée car } 0 \leq \ell \leq 1 \end{cases}$$ 0,5 0,25

donc $\ell = 0$ 0,25

4) $E = \{U_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

Puisque (U_n) est décroissante et convergente alors 0,5

$\sup E = U_0$ 0,5

$\inf E = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell = 0$ 0,5

Exo3 :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{e^x + 1}, & x \leq 0 \\ 1 - e^x, & x > 0 \end{cases}$$

1) $D_f = \mathbb{R}$. 0,5

. Continuité sur $\mathbb{R}$:

Pour $x < 0$, $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ continue sur $]-\infty, 0[$ car quotient de fonctions continues sur $]-\infty, 0[$. 0,25

Pour $x > 0$: $f(x) = 1 - e^x$ continue sur $]0, +\infty[$ car somme de fonctions continues sur $]0, +\infty[$. 0,25

Pour $x = 0$: $f(0) = \frac{e^0 - 1}{e^0 + 1} = 0$.

0,25

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = 0 = f(0) \Rightarrow f$ continue à gauche de 0

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} 1 - e^x = 0 = f(0) \Rightarrow f$ continue à droite de 0 0,25

d'où f est continue sur $\mathbb{R}$.

Dérivabilité sur $\mathbb{R}$:

- Pour $x<0$: $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$ dérivable sur $]-\infty,0[$ car quotient de fonctions dérivables sur $]-\infty,0[$. 0,5
- Pour $x>0$: $f(x)=1-e^x$ dérivable sur $]0,+\infty[$ car somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$. 0,5
- Pour $x=0$:

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{\frac{e^x-1}{e^x+1}-0}{x-0} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \underbrace{\frac{e^x-1}{x}}_{\to 1} \cdot \frac{1}{e^x+1}$$ 0,5

$$= 1/2 = f'_g(0).$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1-e^x}{x} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} -\left(\frac{e^x-1}{x}\right) = -1 = f'_d(0)$$ 0,5

$f'_g(0) \neq f'_d(0) \Rightarrow f$ n'est pas dérivable en 0 par 0,5

suite n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}, & x<0. \\ -e^x, & x>0. \end{cases}$$ 0,5

3) $\forall x>1, \quad 1 < \frac{1-e^{x-1}}{1-x} < e^{x-1}$

Appliquons le T.A.F. sur la fonction $f(x)=1-e^x$ dans l'intervalle $[1,x]$.

f est continue sur $[1,x]$
f est dérivable sur $]1,x[$ $\Big\}$ $\overset{T.A.F.}{\Longrightarrow} \exists\, c \in]1,x[\ /$

$$f(x)-f(1)=(x-1)f'(c).$$ 0,5

$$1-e^x-(1-e^1)=(x-1)(-e^c).$$

$$-e^x + e = (x-1)e^c \quad , \quad 1 < c < x$$

$$1 < c < x \Rightarrow e < e^c < e^x.$$

$$\Rightarrow (x-1)e < (x-1)e^c < (x-1)e^x$$

$$(x-1)e < -e^x + e < (x-1)e^x$$

$$(x-1)\cancel{e} < \cancel{e}(1-e^{x-1}) < (x-1)\cancel{e}(e^{x-1})$$

$$1 < \frac{1-e^{x-1}}{x-1} < e^{x-1} \quad , \forall x > 1.$$

0,5

4) <u>Convexité</u>: Calculons f''; f' est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{2e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3} & , x < 0 \\ -e^x & , x > 0 . \end{cases}$$

0,5 0,25

- Pour $x > 0$; $f''(x) < 0 \Rightarrow f$ est concave sur $]0,+\infty[$.
- Pour $x < 0$; $f''(x) = \dfrac{2e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3} > 0 \Rightarrow f$ est convexe sur $]-\infty,0[$.

0,25

5/ (T): $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$$y = -e^1(x-1) + (1-e^1)$$

$$y = -e(x-1) + 1 - e = -ex + 1$$

(T): $y = -ex + 1$.

D'après 4) $\forall x > 0$, f est concave alors le G_f est au dessous de toutes les tangentes en particulier au dessous de (T): i.e. $f(x) \leq y \iff 1 - e^x \leq -ex + 1$

$$\iff -e^x \leq -ex \iff e^x \geq e \cdot x, \forall x > 0.$$

0,25 0,5

6)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$+$	$\|\|$	$-$	
f	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

0,5

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = -1 \Rightarrow y = -1$$ est une asymptote horizontale au vois $(-\infty)$. (0,2)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 1 - e^x = -\infty$$ (0,2)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - e^x}{x} = -\infty \Rightarrow$$ branche au vois $(+\infty)$ (0,2)