Chap I : Les intégrales indéfinies

- **Primitives :**

Définition ① : Soit f et F deux fonctions définies sur I

On dit : F est une primitive de f sur I
ou
f admet une primitive F sur I

si :

$$\forall x \in I : F'(x) = f(x)$$

Proposition : Si F et G sont deux primitive de f sur I,
Alors :
$$F - G = c \quad ; \quad c \in \mathbb{R}$$

Définition ② : L'ensemble de toutes les primitives de f sur I est appelé intégrale indéfinie de f ; noté $\int f(x)\,dx$

- Si F est une primitive de f sur I, alors :
$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

- $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ ← intégrale définie

Remarque : Si F est une primitive de f alors $F + c$ est aussi une primitive de f. $c \in \mathbb{R}$

Propriétés : Si f et g admettent des primitives sur I, on a :

① $\int (f \pm g)(x)\,dx = \int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

② $\int (\alpha . f)(x)\,dx = \int \alpha . f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx$

③ $\left[\int f(x)\,dx\right]' = f(x)$

④ $\int f'(x)\,dx = f(x) + c \quad ; \quad c \in \mathbb{R}$

Remarque : Une fonction f admettant une primitive sur I n'est pas forcément continue sur I.

Quelques propriétés des intégrales définies :

On suppose que $[a,b]$ est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, f et g sont des fonctions intégrables sur $[a,b]$

① Quand les bornes d'intégration sont confondues : $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

② La relation de Chasles : $\forall c \in [a,b]$; $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

③ Quand on permute les bornes d'intégration : $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

④ Quand le graphe d'une des fonctions est toujours au dessus de l'autre :

Si $f \leq g$ sur $[a,b]$ alors $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$

⑤ Comparaison de la valeur absolue de l'intégrale et de l'intégrale de la v.a :

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Primitives usuelles :

Fonction f : $f(x) =$	Primitive de f : $\int f(x)\,dx =$	L'intervalle I
$k \; ; \; k \in \mathbb{R}$	$kx + c$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2} \cdot x^2 + c$	$\mathbb{R}$
$x^\alpha \; ; \; \alpha \neq -1$	$\frac{1}{\alpha+1} \cdot x^{\alpha+1} + c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + c$	$]0, +\infty[$ ou $]-\infty, 0[$
$\frac{1}{x^\alpha}$	$\frac{-1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} + c$	$]0, +\infty[$ ou $]-\infty, 0[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$	$]0, +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\mathrm{Ln}\lvert x \rvert + c$	$\mathbb{R}^*$
e^x	$e^x + c$	$\mathbb{R}$
e^{ax+b}	$\frac{1}{a} \cdot e^{ax+b} + c$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x + c$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$-\mathrm{Ln}\lvert \cos x \rvert + c$	$]k.\pi - \frac{\pi}{2} ; k.\pi + \frac{\pi}{2}[, k\in$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + c$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k.\pi \; ; k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\mathrm{cotan}\, x + c$	$\mathbb{R} \setminus \{k.\pi \; ; k \in \mathbb{Z}\}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + c$ ou $-\arccos x + c$	$]-1, 1[$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2} \cdot \mathrm{Ln}\left\lvert \frac{1+x}{1-x} \right\rvert + c$	$\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

Fonction f $f(x)=$	Primitive de f $\int f(x)\,dx=$	L'intervalle I
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x + c$	$]-1, 1[$
$\operatorname{Ch} x$	$\operatorname{Sh} x + c$	
$\operatorname{Sh} x$	$\operatorname{Ch} x + c$	
$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{argSh} x + c$ ou $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + c$	
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{argCh} x + c$	$]-1, 1[$
a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a} + c$	
$\ln x$	$x.\ln x - x + c$	$\mathbb{R}_+^*$

Soit U une fonction

U	Primitive de U	
$\frac{U'}{U}$	$\ln\lvert U\rvert + c$	
$\frac{U'}{U^\alpha}$	$\frac{-1}{(\alpha-1).U^{\alpha-1}} + c$	
$\frac{U'}{\sqrt{U}}$	$2.\sqrt{U} + c$	$U > 0$
$U'.U^\alpha$ $(\alpha \neq 1)$	$\frac{U^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$	
$U'.e^U$	$e^U + c$	
$U'.\cos U$	$\sin U + c$	
$U'.\sin U$	$-\cos U + c$	
$\frac{U'}{\cos^2 U}$	$\tan U + c$	
$\frac{U'}{\sqrt{1-U^2}}$	$\arcsin U + c$	
$\frac{-U'}{\sqrt{1-U^2}}$	$\arccos U + c$	
$\frac{U'}{1+U^2}$	$\arctan U + c$	
$\frac{1}{U^2}$	$\frac{-1}{U}$	U ne s'annule pas sur I

- Méthode de calcul des primitives :

I] Intégration par partie - I.P.P- :

Soient f et g deux fonctions continues et dérivables sur I, alors :

$$\int f' \cdot g \, dx = f \cdot g - \int f \cdot g' \, dx$$

$$\begin{cases} f' = ? \\ g = ? \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f = ? \\ g' = ? \end{cases}$$

A . L . P . E . S

- A → arc, arg
- L → Ln
- P → polynôme
- E → e
- S → Sin, Cos

1. arc - arg
2. Ln
3. polynôme
4. e
5. Sin - Cos

$$\begin{cases} g = ① \\ f' = ② \end{cases}$$

Remarque :

- Dans certains cas, il faut appliquer cette méthode plusieurs fois pour avoir le résultat.
- $f(x) \cdot g(x) = \int [f(x) \cdot g(x)]' \, dx = \int f'(x) \cdot g(x) \, dx + \int f(x) \cdot g'(x) \, dx$

I] Changement de variables :

Soit l'intégrale à calculer $\int f(x)\,dx$

Changement de variable (C.V) : on pose : $x = \ell(t) \Rightarrow dx = \ell'(t)\,dt$

Donc on obtient : $\int f(x)\,dx = \int f(\ell(t)).\ell'(t)\,dt$

Remarque : Il faut s'assurer que ℓ est une bijection, (et de classe $C^1(I)$) généralement en considérant ses propriétés de monotonie.

Dans le cas échéant, il faut découper l'intervalle d'intégration en des sous-intervalles sur lesquels ℓ est monotone.

(*) . f une fonction continue.

. ℓ une fonction dérivable, de dérivée intégrable et pas forcément injective.

III] Intégration de certaines expressions contenant le trinôme ax^2+bx+c :

Type I :

$$I = \int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx$$

Calculons $\Delta = b^2 - 4a.c$:

1^er cas : $\Delta > 0$

(*) 1^ère méthode :

$$\Delta > 0 \begin{cases} x_1 = \\ x_2 = \end{cases}$$

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$$

Donc : $$\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a(x-x_1)(x-x_2)}$$
$$= \frac{1}{a}\cdot\left[\frac{\alpha}{(x-x_1)} + \frac{\beta}{(x-x_2)}\right]$$

$\alpha = ?$

$\beta = ?$

(*) 2^ème méthode : $\Delta > 0$

$$ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Donc :
$$\frac{1}{a}\int \frac{1}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}}\,dx$$

On pose : $t = x + \frac{b}{a2}$, $k^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$

$$\frac{1}{a}\int \frac{1}{t^2-k^2}\,dt = \frac{1}{a.2k}\cdot \ln\left|\frac{t-k}{t+k}\right|$$

- $2^{ème}$ cas : $\Delta = 0$

$1^{ère}$ méthode :

$\Delta = 0 \rightarrow x_0 = \dots$

$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$

Donc :

$$\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a(x-x_0)^2}$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \left[\frac{\alpha}{x-x_0} + \frac{\beta}{(x-x_0)^2} \right]$$

$\alpha = ?$

$\beta = ?$

$2^{ème}$ méthode : $\Delta = 0$

$$ax^2 + bx + b = a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \right]$$

On pose : $t = x + \frac{b}{2a}$

$$\frac{1}{a} \cdot \int \frac{1}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} \, dx$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{a} \cdot \int \frac{1}{t^2} \, dt = \frac{-1}{t} \cdot \frac{1}{a}$$

- $3^{ème}$ cas : $\Delta < 0$

$$ax^2 + bx + c = a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

Donc : $\displaystyle \frac{1}{a} \cdot \int \frac{1}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}} \, dx$

On pose : $t = x + \frac{b}{2a}$, $k^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$

$$\frac{1}{a} \int \frac{1}{t^2 + k^2} \, dt = \frac{1}{a.k} \cdot \arctan\left[\frac{t}{k}\right]$$

Type II :

$$I = \int \frac{\alpha . x + \beta}{ax^2 + bx + c}$$

① $\int \frac{du}{u} = \ln |u|$

② $\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} \, dx$

Les faire apparaître dans

$$\boxed{\text{Toujours : } \ln(...) + \text{Type I}}$$

Remarque :

$$I = \int \frac{P(x)}{Q(x)} \, dx \; ; \text{ avec } d^\circ P \geqslant d^\circ Q$$

On utilise la division Euclédienne :

$$\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline R & S \end{array}$$

donc : $\frac{P}{Q} = S + \frac{R}{Q}$

$$I = \int \frac{P(x)}{Q(x)} \, dx = \int S + \frac{R}{Q} \, dx$$

$$= \int S \, dx + \int \frac{R}{Q} \, dx$$

$$\boxed{d^\circ R < d^\circ Q}$$

Type III :

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

On a : $ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$

$$I = \int \frac{1}{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]}\,dx$$ *le a sort et ça dépend de son signe*

On pose : $t = x + \frac{b}{2a}$, $k^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+k^2}} = \operatorname{argSh}\left(\frac{t}{k}\right) \\ \displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-k^2}} = \operatorname{argCh}\left[\frac{t}{k}\right] \\ \displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{k^2-t^2}} = \operatorname{arcSin}\left(\frac{t}{k}\right) \end{cases}$$

Type IV :

$$I = \int \frac{\alpha . x + \beta}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

① $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2 . \sqrt{u}$

② $\int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \, dx$

Les faire apparaître dans

IV] Intégration des fractions irrationnelles :

Type ① :

$$\int f\left(x, x^{\frac{p_1}{q_1}}, x^{\frac{p_2}{q_2}}, \ldots, x^{\frac{p_n}{q_n}}\right) dx$$

avec $p_i, q_i \in \mathbb{N}$

f : fraction

On pose : $x = t^k$

avec $k = \text{PPCM}(q_1, q_2, \ldots, q_n)$

Type ② :

$$\int f\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+c}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}\right) dx$$

f : fraction

On pose : $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$

avec $k = \text{PPCM}(q_1, q_2, \ldots, q_n)$

Type ③ :

$$\int f\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$$

f : fraction

- $a > 0 \Rightarrow \sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,.\,x + t$

نخرّج $x = \ldots t$ بدلالة

- $a < 0 \Rightarrow ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$

Donc : $\sqrt{ax^2+bx+c} = a(x-x_1)t$

ou $a(x-x_2)t$

V]

① Avec $\cos x$ seulement :

$$\int f(\cos x) \cdot \sin x \, dx$$

On pose : $t = \cos x$

$dt = -\sin x \, dx$

② Avec $\sin x$ seulement :

$$\int f(\sin x) \cdot \cos x \, dx$$

On pose : $t = \sin x$

$dt = \cos x \, dx$

③ Avec $\cos x$ ET $\sin x$:

$$\int f(\cos x, \sin x) \, dx$$

On pose : $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2} \, dt$$