Corrigé de la fiche de TD3 d'Analyse 1

Université des Sciences et de la Technologie Mohamed Boudiaf
Faculté des Mathématiques et Informatique

Damerdji Bouharis A.

Table des matières

0.1 Enoncés des exercices.

Exercice 1 :

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1/ $f(x) = \frac{x+1}{1-e^{\frac{1}{x}}}$ **2**/ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$, **3**/ $f(x) = \sqrt{x^2-1}\left(e^{\frac{1}{1-x}}\right)$,

4/ $f(x) = (1+\ln x)^{\frac{1}{x}}$, **5**/ $f(x) = \frac{1}{[x]}$, **6**/ $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-2}\,, & x > 1 \\ \ln(x+2)\,, & x \leq 1 \end{cases}$

Exercice 2 :

Calculer les limites des fonctions suivantes :

1/ $l_1 = \lim\limits_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x}$, **2**/ $l_2 = \lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x}$, **3**/ $l_3 = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin(2x)}{x+\sin(3x)}$,

4/ $l_4 = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$, **5**/ $l_5 = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{1-tgx}$, **6**/ $l_6 = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x\ln x)}{x^2}$,

7/ $l_7 = \lim\limits_{x\overset{>}{\to} a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$, **8**/ $l_8 = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$,

9/ $l_9 = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$, **10**/ $l_{10} = \lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$.

Exercice 3 :

En utilisant la définition de la limite d'une fonction, montrer que :

1/ $\lim\limits_{x\to 4}(2x-1) = 7$, 2/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{2x+1} = \frac{3}{2}$,

3/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$, 4/ $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-3}\frac{4}{x+3} = +\infty$.

Exercice 4 :

En utilisant les fonctions équivalentes, calculer les limites suivantes :

1/ $l_1 = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x\ln x}{\sin(2x)}$, **2**/ $l_2 = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+(\sin x)^2\right)}{tg\frac{x}{2}}$,

3/ $l_3 = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} e^{\frac{1}{2x-\pi}(\ln(\sin x))}$, **4**/ $l_4 = \lim\limits_{x\overset{<}{\to} e}\ln(e-x)\ln(\ln(x))$,

5/ $l_5 = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$, **6**/ $l_6 = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x}$.

Exercice 5 :

On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & \text{si } x\neq 0\\ 0\ , & \text{si } x=0\end{cases} \quad \text{et } g(x)=\begin{cases} xe^{\frac{1}{x}}, & \text{si } x<0\\ 0\ , & \text{si } x=0\\ x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right), & \text{si } x>0\end{cases}$$

Etudier la continuité de f et de g sur leurs domaines de définition.

Exercice 6 :

Etudier le prolongement par continuité des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$:
1/ $f(x)=\cos\frac{1}{x}$, 2/ $f(x)=x.e^{\arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)}$, 3/ $f(x)=\frac{\sin\pi x}{1-x}$.

Exercice 7 :

Montrer que :
1/ $\forall x\in[-1,1]$: $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$.
2/ $\forall x\in[-1,1]$: $\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$.

Exercice 8 :

Résoudre les équations suivantes :
1/ $\arcsin x+\arcsin\left(x\sqrt{3}\right)=\frac{\pi}{2}$.
2/ $(\arctan x)(\arctan x+2)=3$.

Exercice 9 :

Simplifier les expressions suivantes :
1/ $ch(\arg shx)$,
2/ $th(\arg shx)$,
3/ $sh(2\arg shx)$.

Exercice 10 :

Déterminer le domaine de définition de la fonction f, puis la simplifier
$f(x)=\arg ch\left(\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right)$.

0.2 Corrigés

Exercice 1 :

1. $D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.
2. $D_f = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi, \pi + 2k\pi[$.
3. $D_f =]-\infty, -1] \cup]1, +\infty[$.
4. $f(x) = (1+\ln x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+\ln x)}$,
   alors $D_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x > 0 \wedge 1 + \ln x > 0\}$ d'où $D_f =]e^{-1}, +\infty[$.
5. $f(x) = \frac{1}{[x]}$, alors $D_f =]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[$, car $[x] = 0 \Leftrightarrow x \in [0, 1[$.
6. $D_f =]-2, 1] \cup [2, +\infty[$.

Exercice 2 :

1.
$$l_1 = \lim_{x\to 0} \quad x \sin\frac{1}{x} = 0,$$
car $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ et $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}^*$.

2.
$$l_2 = \lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1.$$

3.
$$l_3 = \lim_{x\to 0}\frac{x - \sin(2x)}{x + \sin(3x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\left[\frac{1}{2} - \frac{\sin(2x)}{2x}\right]}{3x\left[\frac{1}{3} + \frac{\sin(3x)}{3x}\right]} = \frac{-1}{4}.$$

4.
$$l_4 = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x} = 1.$$

5.
$$l_5 = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x - \cos x}{1 - \tan x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x\left[\tan x - 1\right]}{1 - \tan x} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

6.
$$l_6 = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x\ln x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x\ln x)}{(x\ln x)}\frac{\ln x}{x} = -\infty.$$

7.
$$l_7 = \lim_{x\overset{>}{\to}a}\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \lim_{x\overset{>}{\to}a}\frac{\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x-a}} + 1}{\sqrt{x+a}} = \lim_{x\overset{>}{\to}a}\frac{\frac{\sqrt{x-a}}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})} + 1}{\sqrt{x+a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

8.
$$l_8 = \lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$
et en faisant le changement de variables : $t = \frac{1}{x}$, on a
$$l_8 = \lim_{t\to 0} \quad e^{\frac{\ln(1+t)}{t}} = e.$$

9.

$$l_9 = \lim_{x\to+\infty} \left(\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} 2\sin\left(\tfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right)\cos\left(\tfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} 2\sin\left(\tfrac{1}{2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}\right)\cos\left(\tfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right) = 0.$$

10. $l_{10} = \lim\limits_{x\to1} (1-x)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

et en faisant le changement de variables : $t = x-1$, on a $x = t+1$ et

$$l_{10} = \lim_{t\to0}(-t).\tan\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{t\to0}\frac{t}{\tan\left(\frac{\pi t}{2}\right)} = \lim_{t\to0}\frac{1}{\frac{\pi}{2}.\frac{\tan\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\frac{\pi t}{2}}} = \frac{2}{\pi}.$$

car $\tan(\alpha+\frac{\pi}{2}) = \frac{-1}{\tan\alpha}$.

Exercice 3 :

1.

$$\left(\lim_{x\to4}(2x-1)=7\right) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0, \exists\alpha>0, \forall x\in\mathbb{R}\ ; |x-4|<\alpha \Rightarrow |2x-8|<\varepsilon)$$

$$|2x-8|<\varepsilon \Leftrightarrow 2|x-4|<\varepsilon \Leftrightarrow |x-4|<\frac{\varepsilon}{2},$$

alors il suffit de prendre $\alpha = \frac{\varepsilon}{2}$.

2.

$$\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{2x+1}=\frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow \left(\forall\varepsilon>0, \exists\alpha>0, \forall x\in\mathbb{R}\ ;\ x>\alpha \Rightarrow \left|\frac{3x-1}{2x+1}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon\right)$$

$$\left|\frac{3x-1}{2x+1}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{5}{4x+2}<\varepsilon \Leftrightarrow x>\frac{5-2\varepsilon}{4\varepsilon},$$

alors il suffit de prendre $\alpha = \left|\frac{5-2\varepsilon}{4\varepsilon}\right|$.

3.

$$\left(\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty\right) \Leftrightarrow (\forall A>0, \exists\alpha>0, \forall x\in\mathbb{R}\ ;\ x>\alpha \Rightarrow \ln x>A)$$

$$\ln x > A \Leftrightarrow x > e^A,$$

alors il suffit de prendre $\alpha = e^A$.

4.

$$\left(\lim_{x\overset{>}{\to}-3}\frac{4}{x+3}=+\infty\right) \Leftrightarrow \left(\forall A>0, \exists\alpha>0, \forall x\in\mathbb{R}\ ;\ -3<x<-3+\alpha \Rightarrow \frac{4}{x+3}>A\right)$$

$$\frac{4}{x+3}>A \Leftrightarrow x<\frac{4}{A}-3,$$

alors il suffit de prendre $\alpha = \frac{4}{A}$.

Exercice 4 :

1.
$$l_1 = \lim_{x \to 0} \frac{x \ln x}{\sin(2x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{2} = -\infty \text{ car } \sin 2x \underset{0}{\sim} 2x$$

2.
$$l_2 = \lim_{x \to 0} \frac{\ln\left(1 + (\sin x)^2\right)}{\tan \frac{x}{2}} = \lim_{x \to 0} 2x = 0,$$

car
$$\ln\left(1 + (\sin x)^2\right) \underset{0}{\sim} (\sin x)^2 \underset{0}{\sim} x^2 \text{ et } \tan \frac{x}{2} \underset{0}{\sim} \frac{x}{2}.$$

3. $l_3 = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} e^{\frac{1}{2x-\pi}(\ln(\sin x))}$

On se ramène au voisinage de 0 par le changement de variables :
$t = x - \frac{\pi}{2}$, et on a
$$l_3 = \lim_{t \to 0} \left[e^{\frac{1}{2t}\left(\ln\left(\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right)\right)}\right] = \lim_{t \to 0} \left[e^{\frac{1}{2t}(\ln(\cos t))}\right] = \lim_{t \to 0} \left[e^{\frac{1}{2t}(\ln(1+(-1+\cos t)))}\right]$$

or
$$\ln(1 + (-1 + \cos t)) \underset{0}{\sim} (-1 + \cos t) \underset{0}{\sim} -\frac{t^2}{2}$$

d'où
$$l_3 = \lim_{t \to 0} e^{\frac{-t}{4}} = 1.$$

4. $l_4 = \lim\limits_{x \lesssim e} \ln(e - x) \ln(\ln(x))$

On se ramène au voisinage de 0 par le changement de variables :
$t = x - e$, et on a
$$\begin{aligned} l_4 &= \lim_{t \lesssim 0} \ln(-t) \ln(\ln(t + e)) = \lim_{t \lesssim 0} \ln(-t) \ln\left(\ln e \left(\frac{t}{e} + 1\right)\right) \\ &= \lim_{t \lesssim 0} \ln(-t) \ln\left(1 + \ln\left(\frac{t}{e} + 1\right)\right) \end{aligned}$$

or
$$\ln\left(1 + \ln\left(\frac{t}{e} + 1\right)\right) \underset{0}{\sim} \ln\left(\frac{t}{e} + 1\right) \underset{0}{\sim} \frac{t}{e},$$

alors
$$l_4 = \lim_{t \lesssim 0} \frac{t}{e} \ln(-t) = 0.$$

5. $l_5 = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$

On se ramène au voisinage de 0 par le changement de variables :
$t = \frac{1}{x}$, et on a
$$l_5 = \lim_{t \to 0} \frac{(e^t - 1)}{t} = 1, \text{ car } \left(e^t - 1\right) \underset{0}{\sim} t.$$

6.

$$l_6=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x}=\lim_{x\to+\infty}e^{x\ln x\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}e^{x\ln x\ln\left(\frac{\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}\right)}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}e^{x\ln x\ln\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}e^{x\frac{1}{x}}=e,$$

car

$$\ln\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}\right)\underset{\infty}{\sim}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}\text{ et }\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\underset{\infty}{\sim}\frac{1}{x}.$$

Exercice 5 :

1. $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & \text{si } x\neq 0\\ 0\ , & \text{si } x=0\end{cases}$, $D_f=]-\infty,+\infty[$.

   f est continue sur $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ car c'est la composée, la somme et le rapport de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$.

$$\lim_{x\overset{<}{\to}0}f(x)=\lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0,\lim_{x\overset{>}{\to}0}f(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$$

   et $f(0)=0$, alors f est continue en 0 donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. $g(x)=\begin{cases}xe^{\frac{1}{x}}, & \text{si } x<0\\ 0\ , & \text{si } x=0\\ x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right), & \text{si } x>0\end{cases}$, $D_g=]-\infty,+\infty[$.

   g est continue sur $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ car c'est la composée, la somme, le rapport et le produit de fonctions continues sur $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$.

   $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}g(x)=\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}xe^{\frac{1}{x}}=0$,

   $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}g(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}x^2\left[\ln(x+1)-\ln x\right]$

   $=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}x^2\ln(x+1)-x^2\ln x=0.$

   et $g(0)=0$, alors g est continue en 0 donc g est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 :

1. $f(x)=\cos\frac{1}{x}$,

   $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\cos\frac{1}{x}$ qui est une limite qui n'existe pas, donc f n'admet pas un prolongement par continuité en $x=0$.

2. $f(x)=x.e^{\arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)}$,

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}x.e^{\arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)}=0,\text{ car }\lim_{x\to0}\arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

   Donc f admet le prolongement par continuité suivant

$$\widetilde{f}(x)=\begin{cases}x.e^{\arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)} & \text{si } x\neq0\\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x=0\end{cases}$$

3. $f(x) = \frac{\sin \pi x}{1-x}$.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\sin \pi x}{1-x}$$

en faisant le changement de variables : $t = x - 1$, on a

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{-\sin \pi (t+1)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{-\sin \pi (t+1)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin \pi t}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\pi t}{t} = \pi.$$

Donc f admet le prolongement par continuité suivant

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin \pi x}{1-x} & \text{si } x \neq 0 \\ \pi & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 7 :

1. On a d'une part :

$$\forall x \in [-1, 1] : -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq \frac{\pi}{2} - \arcsin x \leq \pi,$$

et

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right) = \sin(\arcsin x) = x,$$

d'une autre part on a

$$\arccos x \in [0, \pi] \text{ et } \cos(\arccos x) = x$$

donc

$$\frac{\pi}{2} - \arcsin x = \arccos x \Leftrightarrow \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

2. On a $\forall x \in [-1, 1]$:

$$\cos(\arccos x) = x \Rightarrow \sin^2(\arccos x) = 1 - \cos^2(\arccos x) = 1 - x^2$$

et comme $\sin(\arccos x) \geq 0$ alors

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Exercice 8 :

1.

$$\begin{aligned} \arcsin x + \arcsin\left(x\sqrt{3}\right) = \tfrac{\pi}{2} & \Leftrightarrow \arcsin\left(x\sqrt{3}\right) = \tfrac{\pi}{2} - \arcsin x \\ & \Leftrightarrow x\sqrt{3} = \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - \arcsin x\right) \\ & \Leftrightarrow x\sqrt{3} = \cos(\arcsin x) \\ & \Leftrightarrow x\sqrt{3} = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - x^2} \\ & \Leftrightarrow 4x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \tfrac{-1}{2} \text{ ou } x = \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Or l'équation n'est vérifiée que pour $x = \frac{1}{2}$.

2. $(\arctan x)(\arctan x + 2) = 3 \Leftrightarrow (\arctan x)^2 + 2(\arctan x) - 3 = 0$
En posant $t = \arctan x$, on a

$$t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow (t+3)(t-1) = 0 \Leftrightarrow t = -3 \text{ ou } t = 1$$

Or $\arctan x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, donc

$$t = \arctan x = 1 \Leftrightarrow x = \tan 1.$$

Exercice 9 :

1. $ch(\arg shx) = \sqrt{1 + sh^2(\arg shx)} = \sqrt{1+x^2}$.
2. $th(\arg shx) = \frac{sh(\arg shx)}{ch(\arg shx)} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
3. $sh(2\arg shx) = 2ch(\arg shx)\, sh(\arg shx) = 2x\sqrt{1+x^2}$.

Exercice 10 :

- $f(x) = \arg ch\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right)$
$D_f = \left\{x \in \mathbb{R}^*,\ \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 1\right\}$

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 1 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0 \Leftrightarrow x > 0 \Rightarrow D_f =]0, +\infty[\,.$$

- $\arg ch\alpha = \ln\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}\right)$
or $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right)^2 - 1} = \frac{\left|x^2-1\right|}{2x}$; donc

$$\begin{aligned} & f(x) = \ln\left[\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) + \frac{\left|x^2-1\right|}{2x}\right] \\ & \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si} \quad x \geq 1 \\ -\ln x & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases} \\ & \Rightarrow f(x) = |\ln x|\,, \forall x > 0. \end{aligned}$$