Chapitre 3
Equations différentielles
Partie 4

Damerdji Bouharis A.
Université des Sciences et de la Technologie Mohamed Boudiaf
Faculté des Mathématiques et Informatique.

3.3 Equations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

3.3.1 Equations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Définition 3.3.1 *On appelle équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, toute équation de la forme*

$$(E) : ay'' + by' + cy = f(x) \tag{3.46}$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ *et* f *est une fonction continue sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$.

Définition 3.3.2 *On appelle équation homogène ou sans second membre associée à* (E) *l'équation*

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Théorème 3.3.3 *La solution générale* y_{gle} *de l'équation différentielle non homogène est la somme d'une solution particulière* y_p *de cette équation non homogène et de la solution* y_{Hom} *de l'équation homogène*

$$y_{gle} = y_{Hom} + y_p.$$

Preuve :

On vérifie aisément que $y_{\text{hom}} + y_p$ est solution de l'équation (3.46), en effet

$$\begin{aligned}&a(y_{\text{hom}} + y_p)'' + b(y_{\text{hom}} + y_p)' + c(y_{\text{hom}} + y_p)\\ &= (ay''_{\text{hom}} + by'_{\text{hom}} + cy_{\text{hom}}) + \left(ay''_p + by'_p + cy_p\right)\\ &= f(x)\end{aligned}$$

Réciproquement, si y_p est une solution particulière de l'équation (3.46) et y est est une autre solution de l'équation (3.46), alors leur différence est solution de l'équation homogène, en effet

$$\begin{aligned}&a(y - y_p)'' + b(y - y_p)' + c(y - y_p)\\ &= (ay'' + by' + cy) - \left(ay''_p + by'_p + cy_p\right)\\ &= f(x) - f(x) = 0\end{aligned}$$

□

Remarques :

- La solution nulle $y = 0$ est une solution triviale de l'équation homogène.
- Si y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation homogène alors pour tout α, β dans $\mathbb{R}$, on a $\alpha y_1 + \beta y_2$ est solution de l'équation homogène aussi.

3.3.2 Méthode de résolution

Etape 1

On résoud d'abord l'équation homogène (sans second membre) :

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{3.47}$$

On pose $y = e^{rx}$, où r est une constante, d'où $y' = re^{rx}$ et $y'' = r^2e^{rx}$, puis on remplace dans (3.47) d'où

$$e^{rx}\left(ar^2 + br + c\right) = 0$$

ce qui est équivalent à

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{3.48}$$

L'équation (3.48) est appelée "équation caractéristique" de l'équation différentielle (3.47) , on résoud cette équation en calculant d'abord son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$, où on distingue 3 cas à savoir

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation caractéristique.

L'équation différentielle (E) : $ay'' + by' + cy = 0$

Cas 1 : Si $\Delta > 0$ alors l'équation (3.48) admet deux solutions réelles distinctes $r_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et dans ce cas la solution homogène de l'équation (3.47) est sous la forme

$$y_{\text{hom}}(x) = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x},\ A, B \in \mathbb{R}.$$

Cas 2 : Si $\Delta = 0$ alors l'équation (3.48) admet une solution double : $r = \frac{-b}{2a}$ et dans ce cas la solution homogène de l'équation (3.47) est sous la forme

$$y_{\text{hom}}(x) = e^{rx}(A + Bx),\ A, B \in \mathbb{R}.$$

Cas 3 : Si $\Delta < 0$ alors l'équation (3.48) admet deux solutions complexes conjuguées $r_1 = \beta + i\omega$ et $r_2 = \beta - i\omega$ et dans ce cas la solution homogène de l'équation (3.47) est sous la forme

$$y_{\text{hom}}(x) = e^{\beta x}(C\cos\omega x + D\sin\omega x),\ C, D \in \mathbb{R}.$$

Preuve :

- Si $\Delta \geq 0$ alors on suppose que r est une solution réelle de l'équation caractéristique (3.48) et on fait le changement de variable $y(x) = ae^{rx}z(x)$. On dérive deux fois et on remplace dans (3.47) , alors on obtient $e^{rx}\left[(2ar + b)z' + z''\right] = 0$, ce qui équivaut à

$$(2ar + b)z' + az'' = 0 \tag{3.49}$$

— Si r est une solution double de l'équation caractéristique alors

$$r = \frac{-b}{2a} \Leftrightarrow 2ar + b = 0$$

et dans ce cas

$$(3.49) \Leftrightarrow z'' = 0$$

d'où en intégrant deux fois on a

$$\begin{aligned} &z(x) = c_1 x + c_2, \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow y(x) = ae^{rx}(c_1 x + c_2) = e^{rx}(ac_1 x + ac_2) \end{aligned}$$

d'où en posant $ac_1 = A$ et $ac_2 = B$ $y(x) = e^{rx}(Ax + B)$, avec $A, B \in \mathbb{R}$.

— Si r est une solution simple de l'équation caractéristique (3.48) alors $2ar + b \neq 0$ et l'autre solution serait $r' = -\left(r + \frac{b}{a}\right)$ car leur somme est égale à $-\frac{b}{a}$ et dans ce cas

$$(3.49) \Leftrightarrow \frac{z''}{z'} = -\frac{(2ar + b)}{a} = -2r - \frac{b}{a}$$

d'où en intégrant deux fois on a

$$\begin{aligned} &\ln|z'| = -\left(2r + \tfrac{b}{a}\right)x + c_1, \text{ avec } c_1 \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow z' = k_1 e^{-\left(2r + \frac{b}{a}\right)x}, \text{ avec } k_1 = \pm e^{c_1} \\ &\Rightarrow z(x) = \tfrac{-k_1}{\left(2r + \frac{b}{a}\right)} e^{-\left(2r + \frac{b}{a}\right)x} + k_2, \text{ avec } k_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

ainsi

$$y(x) = \frac{-ak_1}{\left(2r + \frac{b}{a}\right)} e^{-\left(r + \frac{b}{a}\right)x} + k_2 e^{rx}$$

alors en posant $\frac{-ak_1}{\left(2r + \frac{b}{a}\right)} = A$ et $k_2 = B$, on a

$$y(x) = Ae^{r'x} + Be^{rx}, \ A, B \in \mathbb{R}.$$

- Si $\Delta < 0$ alors l'équation (3.48) admet deux solutions complexes conjuguées $r_1 = \beta + i\omega$ et $r_2 = \beta - i\omega$ et dans ce cas l'équation (3.47) admet deux solutions

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{(\beta + i\omega)x} = e^{\beta x}(\cos\omega x + i \sin\omega x) \\ y_2 &= e^{(\beta - i\omega)x} = e^{\beta x}(\cos\omega x - i \sin\omega x) \end{aligned}$$

ce qui donne pour former les solutions réelles

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{\beta x}\cos\omega x \\ Y_2 &= \frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = e^{\beta x}\sin\omega x \end{aligned}$$

et comme toute combinaison linéaire est aussi solution de l'équation homogène (3.47), alors

$$\begin{aligned} y(x) &= Ce^{\beta x}\cos\omega x + De^{\beta x}\sin\omega x \\ &= e^{\beta x}(C\cos\omega x + D\sin\omega x) \end{aligned}$$

avec $C, D \in \mathbb{R}$.

□

Forme du 2ème membre $f(x) =$	**Solution ou pas de l'équation caractéristique EC**	**Forme de la solution particulière y_p**
$P_n(x)$, où P_n polynôme de degré n.	Si 0 n'est pas solution de l'EC	$y_p = R_n(x)$; polynôme de degré n
	Si 0 est une solution de l'EC de multiplicité k	$y_p = x^k R_n(x)$; $R_n(x)$ polynôme de degré n
$P_n(x)e^{\beta x}$ où P_n polynome de degré n.	Si β n'est pas solution de l'EC	$y_p = R_n(x)e^{\beta x}$; $R_n(x)$ polynôme de degré n
	Si β est solution de l'EC de multiplicité k	$y_p = x^k R_n(x)e^{\beta x}$; $R_n(x)$ polynôme de degré n
$P_n(x)cos(\omega x) + Q_m(x)sin(\omega x)$ où P_n polynôme de degré n et Q_m polynôme de degré m.	Si $i\omega$ et $-i\omega$ ne sont pas solutions de l'EC	$y_p = R_j(x)cos(\omega x) + S_j(x)sin(\omega x)$ où R_j, S_j des polynômes de degré j et $j = max(n,m)$
	Si $i\omega$ et $-i\omega$ sont solutions de l'EC	$y_p = x[R_j(x)cos(\omega x) + S_j(x)sin(\omega x)]$
$[P_n(x)cos(\omega x) + Q_m(x)sin(\omega x)]e^{\beta x}$ où P_n polynôme de degré n et Q_m polynôme de degré m	Si $\beta + i\omega$ et $\beta - i\omega$ ne sont pas solutions de l'EC	$y_p = [R_j(x)cos(\omega x) + S_j(x)sin(\omega x)]e^{\beta x}$ où $j = max(n,m)$
	Si $\beta + i\omega$ et $\beta - i\omega$ sont solutions de l'EC	$y_p = x^k e^{\beta x}[R_j(x)cos(\omega x) + S_j(x)sin(\omega x)]$ où R_j, S_j des polynômes de degré j et $j = max(n,m)$

TABLE 3.1 – Forme de la solution particulière

Etape 2

Pour chercher une solution particulière de l'équation (3.46), on peut utiliser la table 3.1 (ci-dessous) qui dépend de la forme de la fonction $f(x)$.

Exemples 3.3.4 *Résoudre les équations différentielles suivantes*

1. $2y'' - y' = 3x^2 + 2x - 1,$
2. $y'' + y' + y = 5x + 1,$
3. $y'' - 6y' + 9y = -2e^{3x}.$

Solution

1.
$$2y'' - y' = 3x^2 + 2x - 1. \tag{3.50}$$

Equation homogène

$$2y'' - y' = 0$$

Equation caractéristique

$$2r^2 - r = 0. \tag{3.51}$$

On a $\Delta = 1 > 0$ *ou bien il suffit de remarquer directement que*

$$(3.51) \Leftrightarrow r(2r-1) = 0$$

alors l'équation (3.51) *admet deux solutions réelles distinctes :* $r_1 = 0$ *et* $r_2 = \frac{1}{2}$ *d'où la solution homogène*

$$y_{\text{hom}}(x) = A + Be^{\frac{1}{2}x}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Solution particulière y_p

Pour calculer la solution particulière de l'équation (3.50) *on remarque que le second membre* $f(x)$ *est un polynôme de degré 2, et que* 0 *est solution de l'équation caractéristique alors d'après la table 3.1, la solution particulière* y_p *de l'équation* (3.50) *aura la forme suivante*

$$y_p(x) = x\left(ax^2 + bx + c\right) = ax^3 + bx^2 + cx$$

où a, b, c *sont des constantes réelles à déterminer , alors on dérive deux fois* y_p *et on remplace dans l'équation* (3.50),

$$y_p' = 3ax^2 + 2bx + c,\ y_p'' = 6ax + 2b$$

$$(3.50) \Rightarrow -3ax^2 + x(12a - 2b) + 4b - c = 3x^2 + 2x - 1$$

en effectuant une identification entre les deux membres de l'équation, on obtient le système suivant

$$\begin{cases} -3a = 3 \\ 12a - 2b = 2 \\ 4b - c = -1 \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = -7 \\ c = -27 \end{cases}$$

par conséquent la solution particulière de l'équation (3.50) *est donnée par*

$$y_p(x) = x\left(-x^2 - 7x - 27\right)$$

et donc la solution générale est

$$y_{gle}(x) = \left(A + Be^{\frac{1}{2}x}\right) - x\left(x^2 + 7x + 27\right), A, B \in \mathbb{R}.$$

2.

$$y'' + y' + y = 5x + 1. \tag{3.52}$$

On a $\Delta = -3 < 0 \Rightarrow \Delta = \left(\sqrt{3}i\right)^2$ *alors l'équation* (3.52) *admet deux solutions complexes conjuguées* $r_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ *et* $r_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ *d'où la solution homogène est*

$$y_{\hom}(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left[A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right], \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Solution particulière y_p

Pour calculer la solution particulière de l'équation (3.52), *on remarque la forme du second membre, on a* $f(x) = 5x + 1$, *un polynôme de degré 1 et on remarque que* $r = 0$ *n'est pas solution de l'équation caractéristique alors la solution particulière aura la forme suivante*

$$y_p(x) = ax + b$$

où a *et* b *sont des constantes réelles à déterminer, alors on dérive deux fois* y_p *et on remplace dans l'équation* (3.52),

$$y_p' = a,\ y_p'' = 0$$

$$(3.52) \Rightarrow ax + (a + b) = 5x + 1$$

alors par identification on obtient le système $\begin{cases} a = 5 \\ a + b = 1 \end{cases}$

donc

$$\begin{cases} a = 5 \\ b = -4 \end{cases}$$

par conséquent la solution particulière de l'équation (3.52) *est*

$$y_p(x) = 5x - 4$$

et donc la solution générale est

$$y_{gle}(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left[A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right] + 5x - 4, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

3.

$$y'' - 6y' + 9y = -2e^{3x}. \tag{3.53}$$

Equation homogène

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

Equation caractéristique

$$r^2 - 6r + 9 = 0 \tag{3.54}$$

On a $\Delta = 0$ *ou bien il suffit de remarquer directement que*

$$(3.54) \Leftrightarrow (r-3)^2 = 0$$

alors l'équation (3.54) *admet une solution réelle double* $r_0 = 3$, *d'où la solution homogène est*

$$y_{\text{hom}}(x) = Ae^{3x} + Bxe^{3x} = e^{3x}(A + Bx), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Solution particulière y_p

Pour calculer la solution particulière de l'équation (3.53), *on remarque la forme du second membre* $f(x) = -2e^{3x}$, *et comme* $r = 3$ *est solution double donc de multiplicité* 2, *de l'équation caractéristique* (3.54) *alors la solution particulière aura la forme suivante*

$$y_p(x) = \alpha x^2 e^{3x}$$

où α *est une constante réelle (ou polynôme de degré* 0 *) qu'il faut déterminer. On dérive deux fois* y_p *et on remplace dans l'équation* (3.53),

$$y_p' = \alpha e^{3x}\left(3x^2 + 2x\right),\ y_p'' = \alpha e^{3x}\left(9x^2 + 12x + 2\right)$$

$$(3.53) \Rightarrow 2\alpha e^{3x} = -2e^{3x}$$

alors par identification on a

$$\alpha = -1,$$

par conséquent la solution particulière de l'équation (3.53) *est*

$$y_p(x) = -x^2 e^{3x}$$

et donc la solution générale est

$$y_{gle}(x) = e^{3x}(A + Bx) - x^2 e^{3x}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3.3.5 (Supplémentaire) *Résoudre les équations différentielles suivantes*

1. $y'' + 2y' + 5y = \sin(2x)$.
2. $y'' - 5y' + 6y = e^x(x \sin x + \cos x)$.

Solution

1.

$$y'' + 2y' + 5y = \sin(2x) \tag{3.55}$$

Equation homogène

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

Equation caractéristique

$$r^2 + 2r + 5 = 0. \tag{3.56}$$

On a $\Delta = -16 < 0 \Rightarrow \Delta = (4i)^2$ *alors l'équation* (3.56) *admet deux solutions complexes conjuguées*

$$r_1 = -1 - 2i \text{ et } r_2 = -1 + 2i$$

d'où la solution homogène est

$$y_{\text{hom}}(x) = e^{-x}\left[A\cos(2x) + B\sin(2x)\right], \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Solution particulière y_p

Pour calculer la solution particulière de (3.55), *on remarque le second membre* $f(x) = \sin(2x)$, *et que* $r = 2i$ *n'est pas solution de l'équation caractéristique alors la solution particulière prend la forme suivante :*

$$y_p(x) = a\cos(2x) + b\sin(2x)$$

où a *et* b *sont des constantes réelles à déterminer. On dérive deux fois* y_p

$$y_p' = 2(b\cos(2x) - a\sin(2x)), \; y_p'' = -4(a\cos(2x) + b\sin(2x))$$

et l'équation (3.55) *devient*

$$\begin{array}{l} (a+4b)\cos(2x) + (-4a+b)\sin(2x) = \sin(2x) \\ \Leftrightarrow (a+4b)\cos(2x) + (-4a+b-1)\sin(2x) = 0 \end{array}$$

alors on obtient le système

$$\begin{cases} a + 4b = 0 \\ -4a + b - 1 = 0 \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} a = -\frac{4}{17} \\ b = \frac{1}{17} \end{cases}$$

par conséquent la solution particulière de l'équation (3.55) *est*

$$y_p(x) = \frac{1}{17}(\sin(2x) - 4\cos(2x))$$

et donc la solution générale est

$$y_{gle}(x) = e^{-x}\left[A\cos(2x) + B\sin(2x)\right] + \frac{1}{17}(\sin(2x) - 4\cos(2x)), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

2.

$$y'' - 5y' + 6y = e^x (x \sin x + \cos x). \tag{3.57}$$

Equation homogène

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

Equation caractéristique

$$r^2 - 5r + 6 = 0. \tag{3.58}$$

On a $\Delta = 1 > 0$ *alors l'équation* (3.57) *admet deux solutions réelles distinctes* $r_1 = 2$ *et* $r_2 = 3$ *d'où la solution homogène*

$$y_{\text{hom}}(x) = Ae^{2x} + Be^{3x}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Solution particulière y_p

Pour calculer la solution particulière de l'équation (3.57), *on a la forme du second membre,* $f(x) = e^x (x \sin x + \cos x)$, *et on note que* $r = 1 + i$ *n'est pas solution de l'équation caractéristique, donc la solution particulière aura la forme suivante (voir la table 3.1 ci-dessus)*

$$y_p(x) = e^x [(ax + b) \sin x + (cx + d) \cos x]$$

où a, b, c *et* d *sont des constantes réelles à déterminer, alors on dérive deux fois* y_p

$$\begin{aligned} y_p' &= e^x [\sin x ((a - c) x + a + b - d) + \cos x ((a + c) x + b + c + d)], \\ y_p'' &= e^x [\sin x (-2cx + 2a + -2c - 2d) + \cos x (2ax + 2a + 2b + 2c)] \end{aligned}$$

et on remplace dans l'équation (3.57), *d'où*

$$\begin{aligned} [x (a + 3c) - 3a + b - 2c + 3d] \sin x + [x (-3a + c) + 2a - 3b - 3c + d] \cos x \\ = x \sin x + \cos x \end{aligned}$$

et on obtient le système suivant

$$\begin{cases} a + 3c = 1 \\ -3a + c = 0 \\ -3a + b - 2c + 3d = 0 \\ 2a - 3b - 3c + d = 1 \end{cases}$$

et après résolution du système on trouve

$$\begin{cases} a = \frac{1}{10}, \ b = -\frac{21}{50}, \\ c = \frac{3}{10}, \ d = \frac{11}{25}, \end{cases}$$

par conséquent la solution particulière de l'équation (3.57) *est*

$$y_p(x) = e^x \left[\left(\frac{1}{10} x - \frac{21}{50} \right) \sin x + \left(\frac{3}{10} x + \frac{11}{25} \right) \cos x \right]$$

et donc la solution générale est

$$y_{gle}(x) = Ae^{2x} + Be^{3x} + e^x \left[\left(\frac{1}{10} x - \frac{21}{50} \right) \sin x + \left(\frac{3}{10} x + \frac{11}{25} \right) \cos x \right], \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Remarque : En général, on peut chercher la solution particulière en utilisant la méthode de la variation des constantes, notemment si les coefficients de l'équation différentielle ne sont pas constants ou si le second membre $f(x)$ est différent des formes données dans la table 3.1.

En effet, en écrivant la solution homogène

$$y_{\text{hom}} = Ay_1 + By_2$$

où y_1 et y_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène (3.47), on cherche une solution générale de (3.46) sous la forme

$$y_{gle} = Ay_1 + By_2$$

en considérant A et B comme deux fonctions qui vérifient

$$A'y_1 + B'y_2 = 0$$

alors en dérivant deux fois y_p et en la remplaçant dans (3.46), on obtient

$$a\left(A'y_1' + B'y_2'\right) = f(x)$$

ce qui nous donne le système

$$\begin{cases} A'y_1 + B'y_2 = 0 \\ A'y_1' + B'y_2' = \frac{1}{a} f(x) \end{cases}$$

qu'on résoud pour avoir A' et B' puis par intégration A et B et enfin la solution générale y_{gle}.

Exemple 3.3.6 *Résoudre l'équation différentielle suivante en utilisnt la méthode de variation des constantes.*

$$y'' + y = \frac{1}{\sin^3 x} \tag{3.59}$$

Equation homogène

$$y'' + y = 0 \tag{3.60}$$

Equation caractéristique

$$r^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (r+i)(r-i) = 0 \tag{3.61}$$

alors l'équation (3.61) *admet deux solutions complexes* $r_1 = i$ *et* $r_2 = -i$ *d'où la solution homogène*

$$y_{\text{hom}}(x) = A\cos x + B\sin x, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Variation des constantes. On remarque que $y_1 = \cos x$ *et* $y_2 = \sin x$ *sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène* (3.60), *alors on cherche une solution générale de (3.59) sous la forme*

$$y = A\cos x + B\sin x$$

tel que A et B sont deux fonctions qui vérifient le système

$$\begin{cases} A'\cos x + B'\sin x = 0, \\ -A'\sin x + B'\cos x = \frac{1}{\sin^3 x}. \end{cases}$$

En multipliant la 1ère équation par $\sin x$ et la 2ème par $\cos x$, puis en faisant la somme, on a

$$B' = \frac{\cos x}{\sin^3 x} \Leftrightarrow dB = \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$$

on intégre des deux côtés, en faisant le changement de variables $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x\ dx$ alors on obtient

$$B = -\frac{1}{2\sin^2 x} + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R}$$

puis en remplaçant dans le système, on a

$$A' = -\frac{1}{\sin^2 x} \Leftrightarrow dA = -\frac{1}{\sin^2 x} dx$$

et après intégration on obtient

$$A = \cot x + c_2 = \frac{\cos x}{\sin x} + c_2,\ c_2 \in \mathbb{R}$$

par conséquent,

$$\begin{aligned} y_{gle} &= \frac{\cos^2 x}{\sin x} + c_2\cos x - \frac{1}{2\sin x} + c_1 \sin x \\ &= \frac{2\cos^2 x - 1}{2\sin x} + c_1\sin x + c_2\cos x = \frac{\cos 2x}{2\sin x} + c_1\sin x + c_2\cos x \end{aligned}$$

avec $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$.

Exemple 3.3.7 *Résoudre l'équation*

$$y'' - \frac{1}{x} y' = x. \tag{3.62}$$

Equation homogène

$$y'' - \frac{1}{x}y' = 0 \Leftrightarrow \frac{y''}{y'} = \frac{1}{x}$$

ce qui donne

$$\ln|y'| = \ln|x| + c_1, c_1 \in \mathbb{R}$$

d'où

$$y' = c_2 x,\ \text{avec } c_2 = \pm e^{c_1} \in \mathbb{R}$$

on intègre pour trouver

$$y_{\text{hom}} = Ax^2 + B,\ \text{avec } A, B \in \mathbb{R} \text{ et } A = \frac{c_2}{2}.$$

Variation des constantes

On pose

$$y_1 = x^2 \ \textit{et}\ y_2 = 1$$

telles que y_1 *et* y_2 *sont deux solutions linéairemnt indépendantes de l'équation homogène et on cherche une solution générale de (3.62) sous la forme*

$$y_p = Ay_1 + By_2$$

tel que A *et* B *sont deux fonctions qui vérifient*

$$\begin{cases} A'y_1 + B'y_2 = 0 \\ A'y_1' + B'y_2' = x \end{cases}$$

la résolution de ce système donne

$$A' = \frac{1}{2},\ B' = -\frac{x^2}{2},$$

ce qui donne après intégration

$$A = \frac{x}{2} + k_1,\ B = -\frac{x^3}{6} + k_2,\ \textit{avec}\ k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

D'où

$$\begin{aligned} y_{gle} &= \left(\frac{x}{2} + k_1\right) x^2 - \frac{x^3}{6} + k_2 \\ &= k_2 + k_1 x^2 + \frac{x^3}{3}\ \textit{avec}\ k_1, k_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Remarque Pour déterminer les constantes $k_1$et k_2, il suffit de donner deux conditions initiales , $y_1 = y(x_0)$ et $y_2 = y'(x_0)$.