Corrigé de la fiche de TD 4 (2ème Partie)

Damerdji Bouharis A.
Université des Sciences et de la Technologie Mohamed Boudiaf
Faculté des Mathématiques et Informatique.

Fiche de TD 4 (2ème Partie)

Théorème de Rolle - Accroissements finis
Règle de l'Hôpital - Formule de Taylor - Etude de fonctions.

Enoncés des exercices

Exercice 5 : Soit g la fonction définie de l'intervalle $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivable sur $[0,1]$, on suppose que : $g(0) = g\left(\frac{1}{2}\right) = g(1) = 1$. Montrer en utilisant le théorème de Rolle que g'' s'annule au moins une fois sur $[0,1]$.

Exercice 6.

1. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :
$$\forall x > 0, \frac{x}{1+x^2} < arctgx < x.$$
2. Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et telle que sa dérivée f' est une fonction croissante. Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x < z < y$; montrer que
$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}.$$
3. Etant donné $ln(100) = 4,6052$, montrer qu'en écrivant

$\ln(101) = 4,6151$ on commet une erreur inférieur à 10^{-4}.

Exercice 7. Calculer les limites suivantes en utilisant la règle de l'Hôpital (quand c'est possible).

$$1.\ \lim_{x\to 1} \frac{Arctg\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)}{x-1}, \qquad 2.\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x - \sin x}{2x + \sin x},$$
$$3.\ \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}, \qquad 4.\ \lim_{x\to 5} (6-x)^{\frac{1}{x-5}}.$$

Exercice 8.

1. En utilisant la formule de Taylor-Mac-Laurin d'ordre n, montrer que
$$\forall x \geq 0, 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} \leq e^x$$
2. En utilisant la formule de Taylor-Mac-Laurin d'ordre 2, montrer que
$$\frac{8}{3} < e < 3.$$
3. En déduire que $\frac{1}{(n+1)!} < e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}\right) < \frac{3}{(n+1)!}$.

<u>Exercice 9.</u> (Examen 2020)
On considère la fonction f définie par $f(x) = \arcsin\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

1. Etudier les variations de la fonction $g(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$.
2. En déduire que la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.
4. Donner l'expression de la dérivée f' sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.
5. Etudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$, existe-t-il des points d'inflexion ?
6. Etudier les variations de f puis tracer son graphe (Γ).

<u>Exercice 10.</u> (Examen 2019)
Soient f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2e^{x-1} - x^2 - x$ et G_f sa courbe représentative.

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$, pour tout x dans $\mathbb{R}$.
2. Etudier la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f admet un point d'inflexion A et préciser ses coordonnées.
4. Quelle est l'équation de la tangente (T_A) à G_f au point A?

- En déduire que pour tout $x \geq 1 : e^{x-1} \geq \frac{1}{2}(x^2+1)$.

<u>Exercice supplémentaire 1</u>
Soit f la fonction définie et continue sur $[0,1]$ telle que $f(0) = 0, f(1) = 1$.
On suppose que f est dérivable sur $[0,1]$ et que $f'(0) = f'(1) = 0$.
On considère la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{f(x)}{x} - \frac{f(x)-1}{x-1} & \text{si } x \in]0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de g sur $[0,1]$.
2. Montrer qu'il existe $\alpha \in]0,1[\ / \ g(\alpha) = 0$. En déduire que $f(\alpha) = \alpha$.
3. Montrer qu'il existe $\beta \in]0,1[\ / \ f'(\beta) = 1$.

<u>Exercice supplémentaire 2</u> (Examen 2019)
On considère la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} xe^{\frac{1}{x}} & , \text{ si } x < 0. \\ 0 & , \text{ si } x = 0. \\ arctgx & , \text{ si } x > 0. \end{cases}$

1. Donner le domaine de définition D_f de la fonction f.
2. Etudier la continuité puis la dérivabilité de f sur D_f.
3. Montrer que la fonction f s'annule dans l'intervalle $]-1, 1[$.
4. Donner l'expression de la dérivée, puis étudier les variations de f

5. Donner l'expression de la dérivée seconde f'', puis en déduire l'étude de la convexité de f sur $\left]-\infty, 0\right[\cup \left]0, +\infty\right[$.
6. Déterminer les asymptotes du graphe (Γ) puis tracer (Γ).

Exercice supplémentaire 3.

On considère la fonction f définie par $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

1. Etudier les variations de la fonction $g(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.
2. En déduire que la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f est dérivable sur $\left]-\infty, -1\right[\cup \left]-1, 1\right[\cup \left]1, +\infty\right[$.
4. Donner l'expression de la dérivée f' sur $\left]-\infty, 0\right[\cup \left]0, +\infty\right[$.
5. Etudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$, existe-t-il des points d'inflexion ?
6. Etudier les variations de f puis tracer son graphe (Γ).

Corrigés

Exercice 5 :
Comme g est deux fois dérivable sur $[0,1]$ alors on a :

- g est continue sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, dérivable sur $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ et $g(0)=g\left(\frac{1}{2}\right)$, alors d'après le théorème de Rolle il existe un réel c_1 dans $\left]0,\frac{1}{2}\right[$, tel que $g'(c_1)=0$.
- g est continue sur $\left[\frac{1}{2},1\right]$, dérivable sur $\left]\frac{1}{2},1\right[$ et $g\left(\frac{1}{2}\right)=g(1)$, alors d'après le théorème de Rolle il existe un réel c_2 dans $\left]\frac{1}{2},1\right[$, tel que $g'(c_2)=0$.
- g' est dérivable sur $[0,1]$ donc g' est continue sur $[c_1,c_2]$, dérivable sur $]c_1,c_2[$ et on a $g'(c_1)=g'(c_2)$, alors d'après le théorème de Rolle il existe un réel c_3 dans $]c_1,c_2[$, tel que $g''(c_3)=0$, et on a

$$0<c_1<c_3<c_2<1$$

alors g'' s'annule au moins une fois sur $[0,1]$.

Exercice 6 :

1. On considère la fonction $f(x)=\arctan x$ pour $x>0$,

   f est continue sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$, alors d'après le théorème des accroissements finis :$\exists c\in\,]0,x[\quad/\quad \arctan x=\frac{x}{1+c^2}$

   et on a

$$0<c<x\Leftrightarrow 1<1+c^2<1+x^2\Leftrightarrow \frac{x}{1+x^2}<\frac{x}{1+c^2}<x,\ \text{car } x>0$$

   d'où

$$\forall x>0,\ \frac{x}{1+x^2}<\arctan x<x.$$

2. Soient $x,y,z\in\mathbb{R}$; tels que $x<z<y$, comme la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$; alors elle est dérivable et donc continue sur tout intervalle de $\mathbb{R}$, en particulier sur $[x,z]$ et $[z,y]$, alors d'après le théorème des accroissements finis ; on a

$$\exists c_1\in\,]x,z[\,,\ \frac{f(z)-f(x)}{(z-x)}=f'(c_1),$$

   et

$$\exists c_2\in\,]z,y[\,,\ \frac{f(y)-f(z)}{(y-z)}=f'(c_2),$$

   d'où

$$x<c_1<z<c_2<y\Rightarrow c_1<c_2\Rightarrow f'(c_1)<f'(c_2),$$

   car f' est une fontion croissante, par conséquent

$$\frac{f(z)-f(x)}{(z-x)}<\frac{f(y)-f(z)}{(y-z)}.$$

3. On considère la fonction $f(x) = \ln x$ sur l'intervalle $[100, 101]$,

   f est continue sur $[100, 101]$ et dérivable sur $]100, 101[$, alors d'après le théorème des accroissements finis : $\exists c \in \,]100, 101[\quad / \quad \ln 101 - \ln 100 = \frac{1}{c}$, or

$$\begin{aligned} 100 < c < 101 \Leftrightarrow \tfrac{1}{101} < \tfrac{1}{c} < \tfrac{1}{100} \quad &\Leftrightarrow \tfrac{1}{101} < \ln 101 - \ln 100 < \tfrac{1}{100} \\ &\Rightarrow \ln 101 < \tfrac{1}{100} + 4,6052 \\ &\Rightarrow \ln 101 - 4,6151 < 4,6152 - 4,6151 \\ &\Rightarrow \text{Erreur commise} < 10^{-4}. \end{aligned}$$

Exercice 7 :

1. $l_1 = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\arctan \frac{x^2-1}{x^2+1}}{x-1} \overset{RH}{=} \lim\limits_{x \to 1} \frac{2x}{x^4+1} = 1.$
2. $l_3 = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x - \sin x}{2x + \sin x}$

   Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1-\cos x}{2+\cos x}$ n'existe pas alors on ne peut pas utiliser la règle de l'Hôpital et donc on doit chercher une autre méthode pour calculer la limite

$$l_3 = \lim_{x \to +\infty} \frac{(1 - \frac{\sin x}{x})}{(2 + \frac{\sin x}{x})} = \frac{1}{2}.$$

3. $l_4 = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) \overset{RH1}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x\cos x - \sin x}{x \sin x}}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cos x - \sin x}{2x^2 \sin x}$$

   et

$$\lim_{x \to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{2x^2 \sin x} \overset{RH2}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{2(2\sin x + x\cos x)} \overset{RH3}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-\cos x}{2(3\cos x - x \sin x)} = \frac{-1}{6},$$

   d'où

$$l_4 = e^{\frac{-1}{6}}.$$

4. $l_2 = \lim\limits_{x \to 5} (6-x)^{\frac{1}{x-5}} = \lim\limits_{x \to 5} e^{\frac{1}{x-5} \ln(6-x)} = e^{-1}$

   car $\lim\limits_{x \to 5} \frac{1}{x-5} \ln(6-x) \overset{RH}{=} \lim\limits_{x \to 5} \frac{-1}{6-x} = -1.$

Exercice 8 :

1. En appliquant la formule de Taylor-Mac-Laurin d'ordre n à la fonction $f(x) = e^x$; on obtient :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}, \text{ avec } 0 < \theta < 1.$$

   or $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \geq 0, \forall x \geq 0$, donc$e^x \geq 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}$.

2. Pour $n = 2$: $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{6} e^{\theta x}$, avec $0 < \theta < 1$.
   d'où pour $x = 1$, on a :$e = \frac{5}{2} + \frac{1}{6} e^{\theta}$, avec $0 < \theta < 1$.
   et on a :
$$\begin{aligned} 0 < \theta < 1 \ &\Leftrightarrow \tfrac{5}{2} + \tfrac{1}{6} < \tfrac{5}{2} + \tfrac{1}{6} e^{\theta} < \tfrac{5}{2} + \tfrac{1}{6} e \\ &\Leftrightarrow \tfrac{8}{3} < e < \tfrac{5}{2} + \tfrac{1}{6} e \Rightarrow \tfrac{8}{3} < e < 3. \end{aligned}$$

3. Pour $x = 1$, on a :
$$\begin{aligned} e &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} e^{\theta}, \text{ avec } 0 < \theta < 1 \\ \Rightarrow e - \left[1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} \right] &= \frac{1}{(n+1)!} e^{\theta}, \end{aligned}$$
   et on a
$$0 < \theta < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)!} < \frac{1}{(n+1)!} e^{\theta} < \frac{1}{(n+1)!} e < \frac{3}{(n+1)!},$$
   car $e < 3$.

Exercice 9 :

1. $g(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$.
   $D_g =]-\infty, +\infty[$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) = -1$, $g'(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
   Tableau de variations

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	-1	$\nearrow$	$+1$	$\searrow$	-1

2. $D_f = \{x \in \mathbb{R} / \ x \in D_g \wedge g(x) \in [-1, 1]\}$, car la fonction arcsin est définie sur $[-1, 1]$.
   D'après le tableau de variations de la fonction g ; on a :
   $g(x) \in [-1, 1]$, $\forall x \in \mathbb{R}$ alors f est bien définie sur tout $\mathbb{R}$, d'où $D_f = \mathbb{R}$.
   La fonction $g : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ est continue car c'est le quotient (la division) de deux (polynômes) fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et la fonction arcsin : $[-1, 1] \to \mathbb{R}$ est continue (car c'est la fonction réciproque d'une fonction continue) alors leur fonction composée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue aussi.
3. La fonction g est dérivable sur tout $\mathbb{R}$, et la fonction arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$, alors la fonction f est dérivable sur l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} / \ g(x) \in]-1, 1[\}$ c'est à dire sur tout $\mathbb{R}$ sauf pour l'ensemble
$$\{x \in \mathbb{R} / \ g(x) = 1 \text{ ou } g(x) = -1\}$$
   or $g(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0$ et $g(x) \neq -1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ d'où f est dérivable sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

4.
$$f'(x) = \frac{g'(x)}{\sqrt{1-(g^2(x))}} = \frac{\frac{-4x}{(1+x^2)^2}}{\sqrt{\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} = \frac{-2x}{|x|(1+x^2)}$$

d'où
$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2} & \text{, si } x \in \left]-\infty, 0\right[\\ \frac{-2}{1+x^2} & \text{, si } x \in \left]0, +\infty\right[. \end{cases}$$

5. On déduit que
$$f''(x) = \begin{cases} \frac{-4x}{(1+x^2)^2} & \text{, si } x \in \left]-\infty, 0\right] \\ \frac{4x}{(1+x^2)^2} & \text{, si } x \in \left[0, +\infty\right[. \end{cases}$$

alors on a $f''(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ donc f est convexe sur tout $\mathbb{R}$.
On remarque que la deuxième dérivée f'' s'annule mais ne change pas de signe donc la fonction f ne change pas de convexité, par conséquent ; le graphe de f n'admet pas de points d'inflexion.

6. Tableau de variations de f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|$	$-$	
$f(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$+\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$

Le graphe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = -\frac{\pi}{2}$.
Ci-dessous (figure) le graphe de la fonction f.

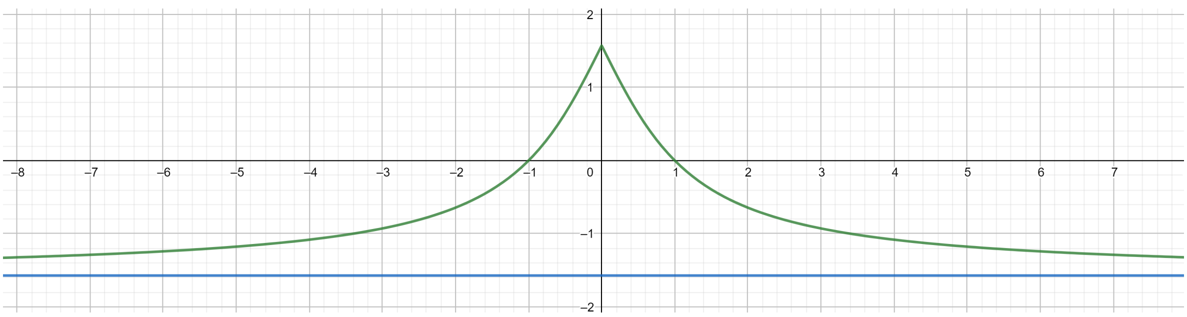

FIGURE 1 – Graphe de la fonction f

Exercice 10 :

$f(x) = 2e^{x-1} - x^2 - x$

1. $f'(x) = 2e^{x-1} - 2x - 1;\quad f''(x) = 2e^{x-1} - 2$, pour tout x dans $\mathbb{R}$.

2. $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
Convexité de f	*concave*		*convexe*

3. On remarque que f'' s'annule et change de convexité en $x_0 = 1$; par conséquent le point $A(1,0)$ est un point d'inflexion du graphe de f.
4. $(T_A) : y = f(1) + f'(1)(x-1)$, d'où $(T_A) : y = -x + 1$.
Dans l'intervalle $[1, +\infty[$; f est convexe donc son graphe G_f est au dessus de toutes ses tangentes ; en particulier (T_A) alors on a :
$\forall\ x \geq 1 : f(x) \geq y \Leftrightarrow 2e^{x-1} - x^2 - x \geq 1 - x \Leftrightarrow e^{x-1} \geq \frac{1}{2}(x^2+1)$.

Exercice supplémentaire 1.
On a $f(0) = 0$; $f(1) = 1$, f est dérivable sur $[0,1]$ et $f'(0) = f'(1) = 0$.

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{f(x)}{x} - \frac{f(x)-1}{x-1}, & \text{si } x \in]0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

1. La fonction g est continue sur $]0,1[$, car c'est la somme et le rapport de fonctions continues sur $]0,1[$.
$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x)}{x} - \frac{f(x)-1}{x-1}$
$\Rightarrow \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x)}{x} - \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x)-1}{x-1} = f'(0) - 1 = -1 = g(0)$
$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} g(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{f(x)}{x} - \frac{f(x)-1}{x-1}$
$\Rightarrow \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} g(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{f(x)}{x} - \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{f(x)-1}{x-1} = 1 - f'(1) = 1 = g(1)$
Donc g est continue sur $[0,1]$.
2. g est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$ et $g(0).g(1) < 0$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel α dans $]0,1[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

$$g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(\alpha)}{\alpha} - \frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha - f(\alpha)}{\alpha(\alpha-1)} = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = \alpha.$$

3. f est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$ alors d'après le théorème des accroissements finis on a :

$$\exists \beta \in]0,1[\ \ / f(1) - f(0) = f'(\beta) \Leftrightarrow \exists \beta \in]0,1[\ \ / \ \ f'(\beta) = 1.$$

Exercice supplémentaire 2.

1. $D_f = \left]-\infty, +\infty\right[$.

   - La fonction f est continue sur $]-\infty, 0[$ car c'est le produit, l'inverse et la composée de fonctions continues sur $]-\infty, 0[$.

     La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$ car c'est la fonction réciproque d'une fonction continue sur $]0, +\infty[$.

     La continuité de f en 0 :

     $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} x e^{\frac{1}{x}} = 0$

     $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} arctgx = 0$

     et $f(0) = 0$

     alors f est continue en 0.

     Par conséquent f est continue sur $\mathbb{R}$.

   - La fonction f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ car c'est le produit, l'inverse et la composée de fonctions dérivables sur $]-\infty, 0[$.

     La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ car c'est la fonction réciproque d'une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$.

     $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} e^{\frac{1}{x}} = 0$

     $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{arctgx}{x} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{x}{x} = 1$, car $arctgx \underset{0}{\sim} x$.

     alors f n'est pas dérivable en 0.

     Par conséquent f est dérivable sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

2. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $[-1, 1]$,et on remarque que $f(-1) = -e^{-1} < 0, f(1) = \frac{\pi}{4} > 0$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires :

   $$\exists c \in]-1, 1[\ / \ f(c) = 0.$$

   - Pour tout $x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$:

     $$f'(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x-1}{x}\right) & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{1}{1+x^2} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

   - Signe de la dérivée :

     Pour tout $x < 0$: $f'(x) > 0$, car $\frac{x-1}{x} > 0, \forall x < 0$.

     Pour tout $x > 0$: $f'(x) > 0$.

     Donc $f'(x) > 0$, $\forall x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

   - Tableau de variations :

     On a

     $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

3. Pour tout $x \in \left]-\infty, 0\right[\cup \left]0, +\infty\right[$:

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{-2x}{(1+x^2)^2} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

alors on remarque que :
$\forall x < 0,\ f''(x) < 0$ et $\forall x > 0,\ f''(x) < 0$, d'où
$f''(x) < 0,\ \forall x \in \left]-\infty, 0\right[\cup \left]0, +\infty\right[$, par conséquent :
f est concave sur $\left]-\infty, 0\right[\cup \left]0, +\infty\right[$.

- Au voisinage de $(-\infty)$; on a :
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ alors on calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$
et $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x \to -\infty} x \left[e^{\frac{1}{x}} - 1\right]$
C.V : $t = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{t}$ tel que $t \overset{<}{\to} 0$ quand $x \to -\infty$ d'où
$\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x \to -\infty} x \left[e^{\frac{1}{x}} - 1\right] = \lim\limits_{t \overset{<}{\to} 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1.$
D'où le graphe (Γ) admet au voisinage de $(-\infty)$ une asymptote oblique (Δ_1) d'équation :
$(\Delta_1) : y = x + 1.$
- Au voisinage de $(+\infty)$; on a :
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$, d'où le graphe (Γ) admet au voisinage de $(+\infty)$ une asymptote horizontale (Δ_2) d'équation : $(\Delta_2) : y = \frac{\pi}{2}$.
- Graphe :voir figure2

Exercice supplémentaire 3.

1. $g(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

$D_g = \left]-\infty, +\infty\right[$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) = 0$, $g'(x) = \frac{2\left(1-x^2\right)}{(1+x^2)^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

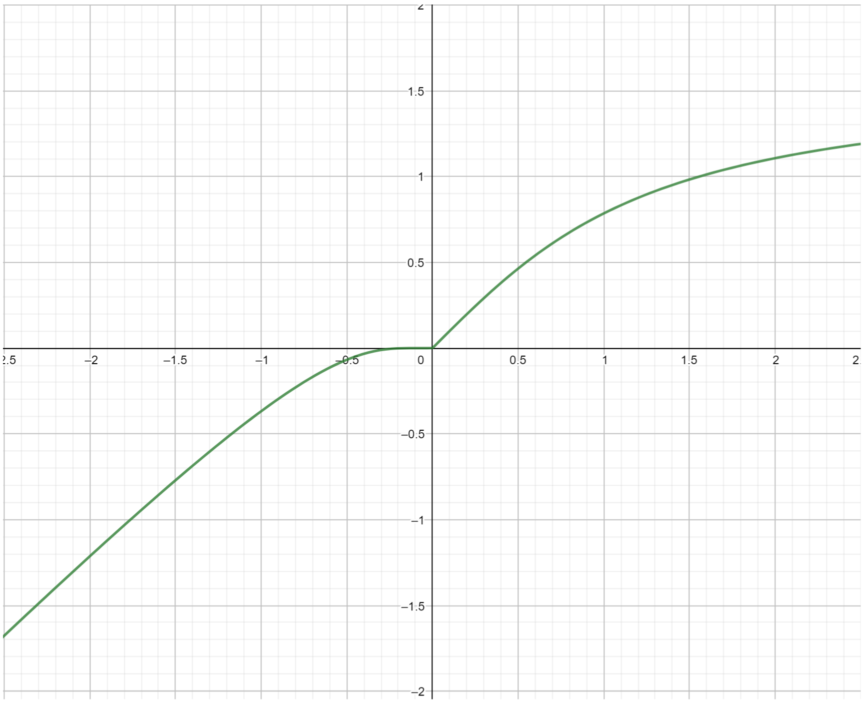

Figure 2 – Graphe de la fonction f

2. $D_f = \{x \in \mathbb{R}/\ x \in D_g \wedge g(x) \in [-1,1]\}$, car la fonction arcsin est définie sur $[-1,1]$.
   D'après le tableau de variations de la fonction g ; on a $g(x) \in [-1,1], \forall x \in \mathbb{R}$ alors f est bien définie sur tout $\mathbb{R}$, d'où $D_f = \mathbb{R}$.
   La fonction $g : \mathbb{R} \to [-1,1]$ est continue car c'est le quotient (la division) de deux (polynômes) fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et la fonction arcsin : $[-1,1] \to \mathbb{R}$ est continue (car c'est la fonction réciproque d'une fonction continue) alors leur fonction composée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue aussi.
3. La fonction g est dérivable sur tout $\mathbb{R}$, et la fonction arcsin est dérivable sur $]-1,1[$, alors la fonction f est dérivable sur l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}/\ g(x) \in]-1,1[\}$ c'est à dire sur tout $\mathbb{R}$ sauf pour l'ensemble
   $$A = \{x \in \mathbb{R}/\ g(x) = 1 \text{ ou } g(x) = -1\}$$
   or $g(x) = -1 \Leftrightarrow x = -1$ et $g(x) = 1 \Leftrightarrow x = 1$; donc $A = \{-1, 1\}$
   d'où f est dérivable sur $]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$.
4. $$f'(x) = \frac{g'(x)}{\sqrt{1 - (g^2(x))}} = \frac{2(1-x^2)}{|1-x^2|(1+x^2)}$$

d'où

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2} & \text{, si } x \in]-1, 1[\\ \frac{-2}{1+x^2} & \text{, si } x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\,. \end{cases}$$

5. On déduit que

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{-4x}{(1+x^2)^2} & \text{, si } x \in]-1, 1[\\ \frac{4x}{(1+x^2)^2} & \text{, si } x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\,. \end{cases}$$

On remarque que la deuxième dérivée f'' s'annule pour $x_0 = 0$ et change de signe et on a

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f''		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

d'où :
f est convexe sur $]-1, 0[\cup]1, +\infty[$ f est concave sur $]-\infty, -1[\cup]0, 1[$.
Par conséquent ; le graphe de f admet l'origine $(0, 0)$ comme point d'inflexion.

6. Tableau de variations de f

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	$\|\|$	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\frac{-\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{+\pi}{2}$	$\searrow$	0

Ci-dessous (figure 3) le graphe de la fonction f

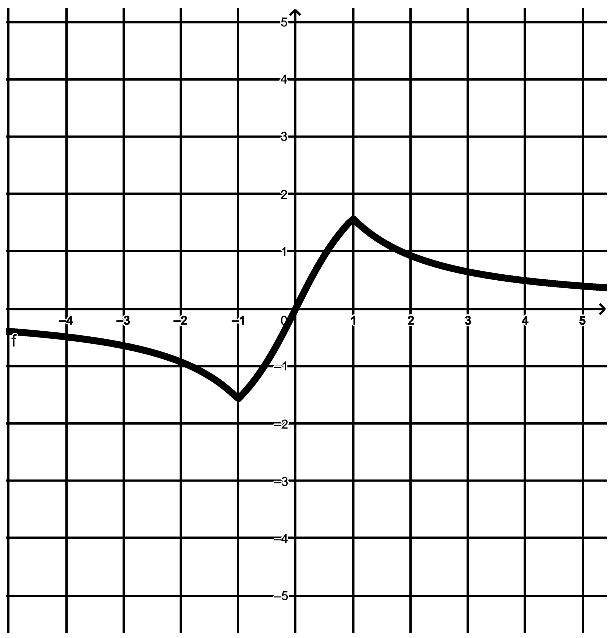

Figure 3 – Graphe de la fonction f