Corrigé Test 2 Analyse I
2023 / 2024

Exo1 : $f(x) = \arccos\left(\frac{1+x}{x}\right)$

$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq 0 \text{ et } \frac{1+x}{x} \in [-1,1] \right\}$ ... 0,5

$$\underbrace{-1 \leq \frac{1+x}{x}}_{②} \underbrace{\leq 1}_{①}$$

① $\Leftrightarrow \frac{1+x}{x} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1+x}{x} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \leq 0 \Leftrightarrow x < 0$. 0,5

② $\Leftrightarrow \frac{1+x}{x} \geq -1 \Leftrightarrow \frac{1+x}{x} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1+2x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left]0, +\infty\right[$ 0,5

① et ② $\Leftrightarrow D_f = \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ 0,5

Exo2 : $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) &, x \neq 0 \\ \alpha &, x = 0 . \end{cases}$

1) $D_f = \mathbb{R}$ 0,5

2) Valeur de α / f continue sur $\mathbb{R}$.

Pour $x \neq 0$; $f(x) = x^2 \sin\frac{\pi}{x}$ continue sur $\mathbb{R}^*$ car produit et composition de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$. 0,5

Pour $x = 0$: $f(0) = \alpha$.

f continue en 0 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$ 0,5

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \underbrace{x^2}_{\downarrow 0} \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}_{\text{bornée}} = 0 = \alpha$$ 0,5

$\boxed{\alpha = 0}$

3) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{\pi}{x} &, x \neq 0 \\ 0 &, x = 0 . \end{cases}$

Dérivabilité sur $\mathbb{R}$:

Pour $x \neq 0$: $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car produit et composition de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$. 0,5

Pour $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^{\cancel{2}} \sin(\pi/x)}{\cancel{x}} = \lim_{x \to 0} \underbrace{x}_{\downarrow 0} \underbrace{\sin\frac{\pi}{x}}_{\text{bornée}} = 0 = f'(0)$$ 0,5

f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

par suite f dérivable sur $\mathbb{R}$.

4) $$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) - x^2 \frac{\pi}{x^2} \cos\left(\frac{\pi}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) - \pi \cos\frac{\pi}{x}, & x \neq 0. \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$ 1

Exo3 : $$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^x - 1}{\ln(x+1)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{x \ln x} - 1}{\ln(x+1)}$$ 0,5

On a:

$\ln(x+1) \underset{0}{\sim} x$ 0,5

$x \ln x \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0 \iff e^{x \ln x} - 1 \underset{0}{\sim} x \ln x.$ 0,5

d'où $$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^x - 1}{\ln(x+1)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{x \ln x} - 1}{\ln(x+1)}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\cancel{x} \ln x}{\cancel{x}}$$ 0,5

$$= -\infty.$$

Université des Sciences et de la Technologie d'Oran. 2023-2024
Faculté des Mathématiques – Informatique – LMD –Informatique - 1ère Année.
Analyse1

Test2 Analyse1 Durée 45mn

Exercice 1:
Donner le domaine de définition de la fonction suivante:

$$f(x) = \arccos\left(\frac{1+x}{x}\right).$$

Exercice 2:
On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right), & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases},$$

1. Donner le domaine de définition de la fonction f.
2. Pour quelle valeur de α, f est elle continue sur son domaine de définition. .
3. Pour cette valeur de α, étudier la dérivabilité de la fonction f sur le domaine de définition .
4. Donner l'expression de la dérivée de la fonction f sur le domaine de dérivation.

Exercice 3:
Calculer la limite suivante:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^x - 1}{\ln(x+1)}.$$

Corrigé Test 2 Analyse I

2023/2024.

Exo 1: $f(x) = \arcsin\left(\frac{1+x}{x^2}\right)$.

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / \ x^2 \neq 0 \text{ et } -1 \leq \frac{1+x}{x^2} \leq 1\}$. 0,5

$x^2 \neq 0 \iff x \neq 0$.

$-1 \leq \frac{1+x}{x^2} \leq 1 \iff \underbrace{-x^2 \leq 1+x}_{②} \underbrace{\leq x^2}_{①}$

① $\iff 1+x-x^2 \leq 0$; $\Delta = 5$, $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 0,5

$\iff x \in]-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty[$

② $\iff x^2+x+1 \geq 0$, $\Delta = -3 < 0$ 0,5

$\iff x \in \mathbb{R}$.

① et ② $\iff x \in]-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty[$.

$D_f =]-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty[$. 0,5

Exo 2 : $f(x) = \begin{cases} e^{1/x}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x\ln x - x, & x > 0 \end{cases}$

1) $D_f = \mathbb{R}$. 0,5

2) Continuité sur $\mathbb{R}$:

Pour $x < 0$: $f(x) = e^{1/x}$ continue sur $]-\infty, 0[$ car composition de fonctions continues sur $]-\infty, 0[$. 0,25

Pour $x > 0$: $f(x) = x\ln x - x$ continue sur $]0, +\infty[$ car somme et produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$. 0,25

Pour $x = 0$: $f(0) = 0$

$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} e^{1/x} = 0 = f(0)$

$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} x\ln x - x = 0 = f(0)$ 0,5

f continue en 0, par suite, continue sur $\mathbb{R}$.

3) Dérivabilité sur $\mathbb{R}$:

Pour $x<0$: $f(x) = e^{1/x}$ dérivable sur $]-\infty,0[$ car composition de fonctions dérivables sur $]-\infty,0[$. 0,25

Pour $x>0$: $f(x) = x\ln x - x$ dérivable sur $]0,+\infty[$ car somme et produit de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$. 0,25

Pour $x=0$:

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{e^{1/x}}{x} = 0 = f'_g(0) \quad 0{,}5 \quad \left(\lim_{X\to-\infty} Xe^X = 0\right)$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{x\ln x - x}{x} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \ln x - 1 = -\infty \quad 0{,}5$$

f n'est pas dérivable à droite de 0.

4) f dérivable sur $\mathbb{R}^*$

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2} e^{1/x}, & x<0. \\ \ln x, & x>0. \end{cases} \quad 1$$

Ex03 : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\ln(1+e^{-x})\right)^{1/x} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}\ln(\ln(1+e^{-x}))}$ 0,5

0,5

On a : $x \to +\infty \Rightarrow e^{-x} \to 0^+ \Rightarrow \ln(1+e^{-x}) \underset{0}{\sim} e^{-x}$ 0,5

donc : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\ln(1+e^{-x})\right)^{1/x} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}\ln(\ln(1+e^{-x}))}$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}\ln(e^{-x})}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}(-x)} \quad 0{,}5$$

$$= e^{-1}.$$

Université des Sciences et de la Technologie d'Oran. 2023-2024
Faculté des Mathématiques – Informatique – LMD –Informatique - 1ère Année.
Analyse1

Test2 Analyse1 Durée 45mn

Exercice 1:
Donner le domaine de définition de la fonction suivante:

$$f(x) = arctg\left(\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right).$$

Exercice 2:
On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x(e^x-1)}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases},$$

1. Donner le domaine de définition de la fonction f.
2. Etudier la continuité de la fonction f sur son domaine de définition .
3. Etudier la dérivabilité de la fonction f sur le domaine de définition .
4. Donner l'expression de la dérivée de la fonction f sur le domaine de dérivation.

Exercice 3:
Calculer la limite suivante:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-3}\right)^x.$$

Corrigé du Test 2 Analyse I
2023 / 2024

Exo1 : $f(x) = \arctan\left(\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right)$.

$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x+1 \neq 0 \text{ et } \frac{x-1}{x+1} > 0\right\}$. 0,5

$x+1 \neq 0 \iff x \neq -1$. 0,5

$\frac{x-1}{x+1} > 0 \iff x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$. 0,5

$D_f =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$. 0,5

Exo2 : $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x(e^x-1)}, & x \neq 0 \\ 1/2, & x = 0. \end{cases}$

1) $D_f = \mathbb{R}$. 0,5

2) Continuité sur $\mathbb{R}$.

Pour $x \neq 0$: $f(x) = \frac{1-\cos x}{x(e^x-1)}$ continue sur $\mathbb{R}^*$ car produit et quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$. 0,5

Pour $x = 0$: $f(0) = \frac{1}{2}$.

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x(e^x-1)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2/2}{x \cdot x} = \frac{1}{2} = f(0)$ $\left(\text{car } 1-\cos x \overset{0}{\sim} \frac{x^2}{2},\ e^x-1 \overset{0}{\sim} x\right)$ 0,5

f continue en 0 par suite continue sur $\mathbb{R}$.

3) Dérivabilité sur $\mathbb{R}$:

Pour $x \neq 0$: $f(x) = \frac{1-\cos x}{x(e^x-1)}$ dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car produit et quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$. 0,5

Pour $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{(1-\cos x)}{x(e^x-1)} - \frac{1}{2}}{x}$$ 0,5

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2(1-\cos x) - x(e^x-1)}{2x^2(e^x-1)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-\cos x}{x(e^x-1)} - \frac{1}{2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2(1-\cos x) - x(e^x-1)}{2x^2(e^x-1)}$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x - (e^x-1) - xe^x}{4x(e^x-1) + 2x^2e^x} \quad 0,25$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x - e^x - e^x - xe^x}{4(e^x-1) + 4xe^x + 2x^2e^x + 4xe^x} \stackrel{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin x - e^x - e^x - e^x \ldots}{4e^x + 4e^x + 4xe^x + 4x\ldots + 2xe^x + 4e^x + 4xe^x} \quad 0,25$$

$$= \frac{-3}{12} = -\frac{1}{4}$$

f est dérivable en 0.

4) f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x\,(x(e^x-1)) - (1-\cos x)\left[(e^x-1) + xe^x\right]}{x^2(e^x-1)^2}, & x \neq 0 \\ -1/4, & x = 0 \end{cases} \quad 1$$

$$= \begin{cases} \dfrac{x\sin x\,(e^x-1) - xe^x(1-\cos x) - (1-\cos x)(e^x-1)}{x^2(e^x-1)^2}, & x \neq 0 \\ -1/4, & x = 0 \end{cases}$$

Ex 03 : $$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x+1}{x-3}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(\frac{x+1}{x-3}\right)} \quad 0,5$$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{4}{x-3}\right)} \quad 0,25$$

On a : $\frac{4}{x-3} \to 0$ qd $x \to +\infty$ $\quad 0,25$

alors $\ln\left(1+\frac{4}{x-3}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{4}{x-3}$ $\quad 0,5$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+1}{x-3}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{4}{x-3}\right)} = \lim_{x\to+\infty} e^{x\left(\frac{4}{x-3}\right)}$$

$$= e^4. \quad 0,5$$

Université des Sciences et de la Technologie d'Oran. 2023-2024
Faculté des Mathématiques – Informatique – LMD –Informatique - 1ère Année
Analyse1

Test2 Analyse1 Durée 45mn

Exercice 1:

Donner le domaine de définition de la fonction suivante:

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{x-1}{x+3}\right).$$

Exercice 2:

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x < 0 \\ x^2 + 1, & x \geq 0 \end{cases},$$

1. Donner le domaine de définition de la fonction f.
2. Etudier la continuité de la fonction f sur son domaine de définition. .
3. Etudier la dérivabilité de la fonction f sur le domaine de définition .
4. Donner l'expression de la dérivée de la fonction f sur le domaine de dérivation.

Exercice 3:

Calculer la limite suivante:

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}.$$

Corrigé du Test 2 Analyse I
2023 / 2024

<u>Exo1</u> : $f(x) = \arcsin\left(\frac{x-1}{x+3}\right)$.

$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} \;/\; x+3 \neq 0 \text{ et } -1 \leq \frac{x-1}{x+3} \leq 1\right\}$. 0,5

$x+3 \neq 0 \iff x \neq -3$.

$$\underbrace{-1 \leq \frac{x-1}{x+3}}_{②} \underbrace{\leq 1}_{①}$$

① $\iff \frac{x-1}{x+3} \leq 1 \iff \frac{x-1}{x+3} - 1 \leq 0 \iff \frac{x-1-x-3}{x+3} \leq 0$ 0,5

$\iff \frac{-4}{x+3} \leq 0 \iff x+3 > 0 \iff x > -3$.

② $\iff \frac{x-1}{x+3} \geq -1 \iff \frac{x-1}{x+3} + 1 \geq 0 \iff \frac{2x+2}{x+3} \geq 0$ 0,5

$\iff x \in \,]-\infty, -3[\, \cup [-1, +\infty[$

① et ② $\iff x \in [-1, +\infty[$

$D_f = [-1, +\infty[$. 0,5

<u>Exo2</u> : $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x < 0 \\ x^2+1, & x \geq 0. \end{cases}$

1) $D_f = \mathbb{R}$. 0,5

2) <u>Continuité sur $\mathbb{R}$</u> :

<u>Pour $x < 0$</u> : $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ continue sur $]-\infty, 0[$ car quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$. 0,25

<u>Pour $x > 0$</u> : $f(x) = x^2+1$ continue sur $]0, +\infty[$ car c'est un polynôme. 0,25

<u>Pour $x = 0$</u> : $f(0) = 0^2+1 = 1$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x^2+1 = 1 = f(0) \Rightarrow f$ continue à droite de 0 0,5

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0) \Rightarrow f$ continue à gauche de 0. 0,5

f est continue en 0 par suite continue sur $\mathbb{R}$.

3) Dérivabilité sur $\mathbb{R}$:

Pour $x<0$: $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ dérivable sur $]-\infty,0[$ car quotient de fonctions dérivables sur $]-\infty,0[$. 0,25

Pour $x>0$: $f(x)=x^2+1$ dérivable sur $]0,+\infty[$ car c'est un polynôme. 0,25

Pour $x=0$:

$$\lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{\sin x-x}{x^2}=\lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{\cos x-1}{2x}=\lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{\frac{-x^2}{2}}{2x}=0=f'_g(0)$$ 0,5

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{x^2+1-1}{x}=0=f'_d(0)$$

f est dérivable en 0 et $f'(0)=f'_g(0)=f'_d(0)=0$ 0,25

4) f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}, & x<0\\ 0, & x=0\\ 2x, & x>0.\end{cases}$$ 1

Exo 3 : $\lim_{x\to0^+}x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}=\lim_{x\to0^+}e^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}\ln x}$. 0,5

On a : $e^x-1\underset{0}{\sim}x$. 0,5

$$\lim_{x\to0^+}x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}=\lim_{x\to0^+}e^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}\ln x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}e^{\frac{1}{\cancel{\ln x}}\cdot\cancel{\ln x}}=e.$$ 1

Corrigé du Test 2 Analyse I
2023 / 2024

Exo1 : $f(x) = \operatorname{arctg}\left(e^{\arcsin(\ln x)}\right)$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x > 0 \text{ et } (\ln x) \in [-1, 1]\}$. 0,5

$-1 \leq \ln x \leq 1 \iff e^{-1} \leq x \leq e$ (fct e^x est croissante) 1

$D_f = [e^{-1}, 0[\cup]0, e]$. 0,5

Exo2 : $f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-x^2}, & |x| \leq 1, \ -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{e}, & |x| > 1. \ x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\end{cases}$

1) $D_f = \mathbb{R}$ 0,5

2) Continuité sur $\mathbb{R}$:

Pour $|x| < 1$: $f(x) = x^2 e^{-x^2}$ continue pour $|x| < 1$ car produit et composition de fonctions continues sur $]-1, 1[$. 0,25

Pour $|x| \geq 1$: $f(x) = 1/e$ continue pour $|x| > 1$ car elle est constante. 0,25

Pour $x = 1$: $f(1) = 1^2 e^{-1^2} = e^{-1} = \frac{1}{e}$,

$\lim_{x \to 1} f(x) \stackrel{?}{=} f(1)$.

$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{1}{e} = f(1) \Rightarrow f$ continue à droite de 1. 0,25

$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} x^2 e^{-x^2} = e^{-1} = \frac{1}{e} \Rightarrow f$ continue à gauche de 1. 0,25

Pour $x = -1$: $f(-1) = (-1)^2 e^{-(-1)^2} = e^{-1} = 1/e$.

$\lim_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} -1} x^2 e^{-x^2} = e^{-1} = \frac{1}{e} = f(-1) \Rightarrow f$ continue à droite de (-1) 0,25

$\lim_{x \overset{<}{\to} -1} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} -1} \frac{1}{e} = \frac{1}{e} = f(-1) \Rightarrow f$ continue à gauche de (-1). 0,25

Par suite f continue sur $\mathbb{R}$.

3) Dérivabilité sur $\mathbb{R}$:

Pour $|x| < 1$: $f(x) = x^2 e^{-x^2}$ dérivable pour $|x| < 1$ car produit et composition de fonctions dérivables sur $]-1, 1[$. 0,25

Pour $|x| \geq 1$: $f(x) = \frac{1}{e}$ dérivable pour $|x| > 1$ car c'est une constante. 0,25

Pour $x = 1$:

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{x^2 e^{-x^2} - \frac{1}{e}}{x-1} \overset{H}{=} \lim_{x \overset{<}{\to} 1} 2x e^{-x^2} - 2x^3 e^{-x^2} = 0 = f'_g(1).$$ 0,25

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{1/e - \frac{1}{e}}{x-1} = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{0}{x-1} = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} 0 = f'_d(1)$$ 0,25

$$f'_g(1) = f'_d(1) \Rightarrow f \text{ dérivable en } 1 \text{ et } f'(1) = 0$$

Pour $x = -1$:

$$\lim_{x \overset{<}{\to} -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x \overset{<}{\to} -1} \frac{1/e - 1/e}{x+1} = \lim_{x \overset{<}{\to} -1} \frac{0}{x+1} = \lim_{x \overset{<}{\to} -1} 0 = 0 = f'_g(-1)$$ 0,25

$$\lim_{x \overset{>}{\to} -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x \overset{>}{\to} -1} \frac{x^2 e^{-x^2} - 1/e}{x+1} = \lim_{x \overset{>}{\to} -1} 2x e^{-x^2} - 2x^3 e^{-x^2} = 0 = f'_d(-1)$$ 0,25

$$f'_g(-1) = f'_d(-1) = f'(-1) \Rightarrow f \text{ dérivable en } 1.$$

par suite f dérivable sur $\mathbb{R}$.

4) $$f'(x) = \begin{cases} 2x e^{-x^2} - 2x^3 e^{-x^2} & , |x| < 1 \\ 0 & , x = 1 \\ 0 & , x = -1 \\ 0 & , |x| > 1 \end{cases}$$ 0,5

Exo3 : $$\lim_{x \to 0^+} (\ln(1+x))^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{\ln x} \ln(\ln(1+x))}$$ 0,5

On a : $\ln(1+x) \overset{0}{\sim} x$ 0,5

donc :

$$\lim_{x \to 0^+} (\ln(1+x))^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{\ln x}(\ln x)} = e.$$ 1

Corrigé du Test 2 Analyse I
2023/2024

Exo1 : $f(x) = e^{\frac{1}{arctg(\ln x)}}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, arctg(\ln x) \neq 0 \text{ et } x > 0\}$. 0,5

$arctg(\ln x) \neq 0 \Leftrightarrow \ln x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq e$. 1

$D_f =]0, e[\cup]e, +\infty[$. 0,5

Exo2 : $f(x) = \begin{cases} (x-1)e^{1/x}, & x < 0 \\ 3e^x - \alpha, & x \geq 0. \end{cases}$

1) $D_f = \mathbb{R}$. 0,5

2) Valeur de α / f continue sur $\mathbb{R}$.

Pour $x < 0$: $f(x) = (x-1)e^{1/x}$ continue pour $x<0$ car produit et composition de fonctions continues sur $]-\infty, 0[$. 0,25

Pour $x > 0$: $f(x) = 3e^x - \alpha$ continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]0, +\infty[$. 0,25

Pour $x = 0$: $f(0) = 3 - \alpha$.

f continue en $0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = f(0)$ 0,5

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} (x-1)e^{1/x} = 0\, e^{-\infty} = 0$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} 3e^x - \alpha = 3 - \alpha$

On a : $3 - \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 3$. 0,5

3) $f(x) = \begin{cases} (x-1)e^{1/x}, & x < 0 \\ 3e^x - 3, & x \geq 0 \end{cases}$.

Dérivabilité sur $\mathbb{R}$:

Pour $x < 0$: $f(x) = (x-1)e^{1/x}$ dérivable pour $x<0$ car produit et composition de fonctions dérivables sur $]-\infty, 0[$. 0,5

Pour $x > 0$: $f(x) = 3e^x - 3$ dérivable pour $x > 0$.

Pour $x = 0$: $f(0) = 0$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{(x-1)e^{1/x} - 0}{x} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{1/x} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} e^{1/x} - \frac{1}{x} e^{1/x} = 0 = f'_g(0)$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{3e^x - 3 - 0}{x} \overset{H}{=} \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{3e^x}{1} = 3 = f'_d(0)$. On a : $f'_g(0) \neq f'_d(0) \Rightarrow$ f n'est pas dérivable en 0. 0,5

f n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.

4) f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

$$f'(x) = \begin{cases} e^{1/x} - \frac{(x-1)}{x^2} e^{1/x} & , x < 0 \\ 3e^x & , x > 0 \end{cases}$$ 1

Exo3 : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x(x^x - 1)}{\ln(x+1)} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x(e^{x\ln x} - 1)}{\ln(x+1)}$ 0,5

On a : $\ln(x+1) \underset{0}{\sim} x$. 0,5

et $x \ln x \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow e^{x \ln x} - 1 \underset{0}{\sim} x \ln x$. 0,5

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x(x^x - 1)}{\ln(x+1)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\cancel{x}(x \ln x)}{\cancel{x}} = 0$$ 0,5