Exercices d'Analyse I

Exercice 1: Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifier

1] si A une partie de $\mathbb{R}$ minorée, alors $\min A$ existe

2] Soient A, B deux parties bornée de $\mathbb{R}$:
si $A \subset B$, alors: $\inf B \leq \sup A$

3] Soient $A = \{x \in \mathbb{R} : |1-3x| < 2\}$ et $B = \{1 + \frac{5}{n-2} ; n \in \mathbb{N}, n \geq 3\}$
alors: $\inf(A \cup B) = -\frac{1}{3}$

4] Soient A et B deux parties non vide de $\mathbb{R}$ non bornées.
alors $A \cap B$ est non bornée

5] Soit (U_n) une suite. si $\lim U_n = l$ et $U_n > 0$, alors: $l > 0$

6] Soit (U_n) une suite qui converge vers 0, alors (U_n) est monotone

Exercice 2: Soit l'ensemble $A = \left\{ \frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} ; n \in \mathbb{N}^* \right\}$

1) Montrer que A est non vide et bornée.

2) Montrer que $\sup A = 1$ et $\inf A = 0$

3) Déterminer $\max A$ et $\min A$ s'ils existent.

4) En déduire le sup et l'inf des ensembles suivants:
$B = \left\{ \frac{n-1}{n+1} + 2 ; n \in \mathbb{N}^* \right\}$; $C = \left\{ 1 - \frac{2}{n+1}, \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) / n \in \mathbb{N}^* \right\}$

Exercice 3: Soit (U_n) une suite définie par: $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n^2}{1+U_n^2} ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 0$

2) Etudier la monotonie de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$

3) En déduire que la suite (U_n) est bornée.

4) Montrer que la suite (U_n) est C.V et calculer sa limite.

5) Soit la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par: $V_n = (\sqrt{n} - \sqrt{n+1}) U_n$; $n \in \mathbb{N}$
Montrer que: (U_n) et (V_n) sont adjacentes.