Cours et exercices d'Analyse

Damerdji Bouharis A.
Université des Sciences et de la Technologie Mohamed Boudiaf
Faculté des Mathématiques et Informatique.

Table des matières

Chapitre 1

Intégrales indéfinies (suite)

1.1 Intégration des fractions rationnelles

Définition 1.1.1 *Soient P et Q deux polynômes à coefficients réels, la fonction f définie par $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ s'appelle fonction ou fraction rationnelle ; elle est définie en tout point x de $\mathbb{R}$ tel que $Q(x) \neq 0$.*

Pour l'intégration des fonctions rationnelles ; on a besoin tout d'abord de procéder à la décomposition en éléments simples de ces fractions.

Décomposition en éléments simples

On peut décomposer la fonction f en éléments simples suivant la forme du dénominateur $Q(x)$ après l'avoir factorisé ; comme suit :

- Si
$$Q(x) = (x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n);$$
où $a_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, .., n$ alors
$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \dots + \frac{A_n}{x - a_n}.$$
où A_i sont des constantes réelles à déterminer pour $i = 1, .., n$.
- Si
$$Q(x) = (x - a_1)^{m_1}(x - a_2)^{m_2}\dots(x - a_n)^{m_n};$$
où $a_i \in \mathbb{R}$, $m_i \in \mathbb{N}^*, \forall i = 1, .., n$ alors :
$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = {} & \left[\frac{A_1^1}{x-a_1} + \frac{A_1^2}{(x-a_1)^2} + .. + \frac{A_1^{m_1}}{(x-a_1)^{m_1}}\right] + \left[\frac{A_2^1}{x-a_2} + \frac{A_2^2}{(x-a_2)^2} + .. + \frac{A_2^{m_2}}{(x-a_2)^{m_2}}\right] + \\ & \dots + \left[\frac{A_n^1}{x-a_n} + \frac{A_n^2}{(x-a_n)^2} + .. + \frac{A_n^{m_n}}{(x-a_n)^{m_n}}\right].\end{aligned}$$
où A_i^j sont des constantes réelles à déterminer pour $i = 1, .., n$ et $j = 1, .., m_i$.
- Si
$$Q(x) = \left(x^2 + b_1 x + c_1\right)\left(x^2 + b_2 x + c_2\right)\dots\left(x^2 + b_n x + c_n\right);$$

où $b_i, c_i \in \mathbb{R}$ et $b_i^2 - 4c_i < 0, \forall i = 1, .., n$ alors :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1x+B_1}{x^2+b_1x+c_1} + \frac{A_2x+B_2}{x^2+b_2x+c_2} + .. + \frac{A_nx+B_n}{x^2+b_nx+c_n}$$

où A_i, B_i sont des constantes réelles à déterminer pour $i = 1, .., n$.

- Si

$$Q(x) = \left(x^2 + b_1x + c_1\right)^{m_1} \left(x^2 + b_2x + c_2\right)^{m_2} ... \left(x^2 + b_nx + c_n\right)^{m_n}$$

où $b_i, c_i \in \mathbb{R}$ et $b_i^2 - 4c_i < 0, m_i \in \mathbb{N}^*, \forall i = 1, .., n$
alors :

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = & \left[\frac{A_1^1x+B_1^1}{x^2+b_1x+c_1} + \frac{A_1^2x+B_1^2}{(x^2+b_1x+c_1)^2} + .. + \frac{A_1^{m_1}x+B_1^{m_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{m_1}}\right] \\ & + \left[\frac{A_2^1x+B_2^1}{x^2+b_2x+c_2} + \frac{A_2^2x+B_2^2}{(x^2+b_2x+c_2)^2} + .. + \frac{A_2^{m_2}x+B_2^{m_2}}{(x^2+b_2x+c_2)^{m_2}}\right] + \\ & ... + \left[\frac{A_n^1x+B_n^1}{x^2+b_nx+c_n} + \frac{A_n^2x+B_n^2}{(x^2+b_nx+c_n)^2} + .. + \frac{A_n^{m_n}x+B_n^{m_n}}{(x^2+b_nx+c_n)^{m_n}}\right].\end{aligned}$$

où A_i^j sont des constantes réelles à déterminer pour $i = 1, .., n$ et $j = 1, .., m_i$.

Remarque : Les fractions du type $\frac{A}{(x-a)^l}$ et $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^s}$ avec $l, s \in \mathbb{N}^*$, $A, B, C \in \mathbb{R}$ et $p^2 - 4q < 0$; sont appelées éléments simples respectivement de première et seconde espèce.

Exemples 1.1.2 *Décomposer les fractions suivantes en éléments simples*

1. $f(x) = \frac{x+3}{x^2-3x+2}$
Tout d'abord on factorise le dénominateur $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ *; puis on décompose la fraction* f *en éléments simples :*

$$f(x) = \frac{x+3}{(x-2)(x-1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1}$$

où A *et* B *sont deux constantes réelles à déterminer, donc on a*

$$\frac{x+3}{(x-2)(x-1)} = \frac{x(A+B) - A - 2B}{(x-2)(x-1)}$$

d'où par identification on récupère le système suivant :

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -A - 2B = 3 \end{cases} \tag{1.1}$$

puis on résoud ce système et on a

$$\begin{aligned}(1.1) \Leftrightarrow & \begin{cases} A + B = 1 \\ -B = 4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} A = 5 \\ B = -4 \end{cases},\end{aligned}$$

ainsi on a la décomposition

$$\frac{x+3}{(x-2)(x-1)} = \frac{5}{x-2} - \frac{4}{x-1}.$$

2. $f(x) = \frac{5-x}{(x^2-4x+4)(x+1)}$
On remarque que $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$; *alors on a*

$$f(x) = \frac{5-x}{(x-2)^2(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x+1}$$

où A, B *et* C *sont des constantes réelles à déterminer, donc on a*

$$\frac{5-x}{(x-2)^2(x+1)} = \frac{x^2(A+C) + x(-A+B-4C) - 2A + B + 4C}{(x-2)^2(x+1)}$$

d'où par identification on récupère le système suivant :

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ -A + B - 4C = -1 \\ -2A + B + 4C = 5 \end{cases} \tag{1.2}$$

puis on résoud ce système et on a

$$(1.2) \Leftrightarrow \begin{cases} A + C = 0 \\ -A + B - 4C = -1 \\ -2A + B + 4C = 5 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -A = C \\ B - 3C = -1 \\ B + 6C = 5 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{2}{3} \\ B = 1 \\ C = \frac{2}{3} \end{cases}$$

ainsi on a la décomposition

$$\frac{5-x}{(x-2)^2(x+1)} = \frac{-2}{3(x-2)} + \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{2}{3(x+1)}.$$

3. $f(x) = \frac{x^2}{(x^2+x+1)(x-1)}$
On remarque que le polynôme $x^2 + x + 1$ *ne peut pas être factorisé car son discriminant* Δ *est négatif alors on a*

$$f(x) = \frac{x^2}{(x^2+x+1)(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

où A, B *et* C *sont des constantes réelles à déterminer, donc on a*

$$\frac{x^2}{(x^2+x+1)(x-1)} = \frac{x^2(A+B) + x(A-B+C) + A - C}{(x^2+x+1)(x-1)}$$

d'où par identification on récupère le système suivant :

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ A - B + C = 0 \\ A - C = 0 \end{cases}$$

puis on résoud ce système et on trouve

$$\begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = \frac{2}{3} \\ C = \frac{1}{3} \end{cases},$$

ainsi on a la décomposition

$$\frac{x^2}{(x^2+x+1)(x-1)} = \frac{1}{3(x-1)} + \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}.$$

Intégration

Pour l'intégration des fonctions rationnelles $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, on distingue deux cas :
1^{er} Cas :

Si $d^\circ P \geq d^\circ Q$ (où d° désigne le degré) alors on effectue une division Euclidienne comme suit :

$$P(x) = Q(x).S(x) + R(x);$$

où $S(x)$ et $R(x)$ sont deux polynômes tels que $d^\circ R < d^\circ Q$, par conséquent

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

2$^{\text{ème}}$ Cas :

Si $d^\circ P < d^\circ Q$ alors on utilise la décomposition de $\frac{P}{Q}$ en éléments simples, comme on l'a expliqué ci-dessus , puis on intégre les éléments simples de $1^{\text{ère}}$ et $2^{\text{ème}}$ espèce.

Intégration des éléments simples de 1$^{\text{ère}}$ espèce :$\frac{A}{(x-a)^l}$; $l \in \mathbb{N}^*$

- Si $l = 1$ alors $\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + c$; $c \in \mathbb{R}$.
- Si $l > 1$ alors $\int \frac{A}{(x-a)^l}dx = \int A(x-a)^{-l}dx = \frac{A(x-a)^{-l+1}}{1-l} + c$; $c \in \mathbb{R}$.

Intégration des éléments simples de 2$^{\text{ème}}$ espèce : $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$; $k \in \mathbb{N}^*$ **avec** $p^2 - 4q < 0$

On décompose le polynôme x^2+px+q sous la forme de la somme de deux carrés car $p^2-4q < 0$, et on a :

$$\begin{aligned} x^2+px+q &= \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q \\ &= \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q-p^2}{4} \end{aligned}$$

on pose $\frac{p}{2} = -\alpha$ et $\frac{4q-p^2}{4} = \beta^2$; d'où

$$x^2+px+q = (x-\alpha)^2 + \beta^2$$

puis on remplace

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} = \frac{Mx+N}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^k} = \frac{Mx+N}{\beta^{2k}\left[\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2+1\right]^k}$$

et on fait le changement de variables suivant :

$$C.V : t = \frac{x-\alpha}{\beta} \Leftrightarrow x = \beta t + \alpha \Rightarrow dx = \beta dt,$$

d'où

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx = \frac{1}{\beta^{2k-1}}\int \frac{M(\beta t+\alpha)+N}{\left[t^2+1\right]^k}dt = \frac{M}{\beta^{2k-2}}\int \frac{t}{\left[t^2+1\right]^k}dt + \frac{M\alpha+N}{\beta^{2k-1}}\int \frac{1}{\left[t^2+1\right]^k}dt$$

par conséquent l'intégration des éléments simples de $2^{ème}$ espèce : $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$ se ramène par le changement de variables $x=\beta t+\alpha$ au calcul des deux primitivesqu'on note :

$$I_k = \int \frac{t}{\left[t^2+1\right]^k}dt \text{ et } J_k = \int \frac{1}{\left[t^2+1\right]^k}dt$$

Calcul de I_k :

- Si $k=1$ alors $I_1 = \int \frac{t}{t^2+1}dt = \frac{1}{2}\ln(t^2+1)+c\,;\, c\in\mathbb{R}$.
- Si $k>1$ alors on fait un deuxième changement de variables $u^2 = t^2+1 \Rightarrow 2udu = 2tdt$ et on a

  $$I_k = \int \frac{t}{\left[t^2+1\right]^k}dt = \int \frac{u}{u^{2k}}du = \int u^{1-2k}du = \frac{u^{2-2k}}{2-2k}+c;\; c\in\mathbb{R}.$$

  d'où

  $$I_k = \frac{1}{2(1-k)u^{2k-2}}+c = \frac{1}{2(1-k)(t^2+1)^{k-1}}+c;\; c\in\mathbb{R}.$$

Calcul de J_k :

- Si $k=1$ alors $J_1 = \int \frac{1}{t^2+1}dt = \arctan t + c\,;\, c\in\mathbb{R}$.
- Si $k>1$ alors on fait une intégration par parties et on a

$$IPP : \begin{cases} u = \frac{1}{\left[t^2+1\right]^k} \\ dv = dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -2kt\left[t^2+1\right]^{-k-1}dt \\ v = t \end{cases}$$

d'où

$$J_k = \frac{t}{\left[t^2+1\right]^k} + 2k\int \frac{t^2+1-1}{\left[t^2+1\right]^{k+1}}dt$$
$$J_k = \frac{t}{\left[t^2+1\right]^k} + 2k\left[\int \frac{1}{\left[t^2+1\right]^k}dt - \int \frac{1}{\left[t^2+1\right]^{k+1}}dt\right]$$
$$J_k = \frac{t}{\left[t^2+1\right]^k} + 2kJ_k - 2kJ_{k+1}$$

d'où on déduit la formule de récurrence suivante

$$J_{k+1} = \frac{1}{2k}\left[\frac{t}{\left[t^2+1\right]^k} + (2k-1)\,J_k\right] \tag{1.3}$$

Exemples 1.1.3 *Calculer les primitives suivantes en utilisant la décomposition en éléments simples :*

1. $I_1 = \int \frac{x^2}{x^3-1}dx$
   Tout d'abord on remarque que le degré du numérateur est inférieur strictement à celui du dénominateur ; alors on factorise le dénominateur en remarquant que $x_0 = 1$ est une racine du polynôme x^3-1 , alors on effectue la division Euclidienne du polynôme x^3-1 par le polynôme $x-1$ ou on utilise la méthode d'identification ; où on récupère

$$x^3-1 = (x-1)\left(x^2+x+1\right)$$

d'où

$$I_1 = \int \frac{x^2}{x^3-1}dx = \int \frac{x^2}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}dx$$

on a alors la décomposition en éléments simples suivante

$$I_1 = \int \left[\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}\right]dx$$

où A, B et C sont des constantes réelles à déterminer, on a

$$\frac{x^2}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

ici on va utiliser l'exemple précédant où on a calculé la décomposition en éléments simples de cette fraction ; on a alors

$$I_1 = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{3}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$$
$$I_1 = \frac{1}{3}\left[\ln|x-1| + \ln(x^2+x+1)\right] + c;\ \ c \in \mathbb{R}.$$
$$I_1 = \frac{1}{3}\ln\left|x^3-1\right| + c;\ \ c \in \mathbb{R}.$$

2. $I_2 = \int \frac{x^3}{(x+1)(x^2+4)^2} dx$
On a la décomposition en éléments simples suivante

$$I_2 = \int \left[\frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+4} + \frac{Dx+E}{(x^2+4)^2} \right] dx$$

où A, B, C, D et E sont des constantes réelles à déterminer, on a

$$\frac{x^3}{(x+1)(x^2+4)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+4} + \frac{Dx+E}{(x^2+4)^2}$$

alors en développant le second terme puis par identification on récupère le système suivant :

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ B + C = 1 \\ 8A + 4B + C + D = 0 \\ 4B + 4C + D + E = 0 \\ 16A + 4C + E = 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

ensuite on résoud ce système et on trouve

$$A = \frac{-1}{25}; B = \frac{1}{25}; C = \frac{24}{25}; D = \frac{-4}{5}; E = \frac{-16}{5}$$

d'où

$$I_2 = \frac{-1}{25} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{25} \int \frac{x+24}{x^2+4} dx - \frac{4}{5} \int \frac{x+4}{(x^2+4)^2} dx$$

et là on intègre chaque primitive à part :

$$\begin{aligned} \int \frac{x+24}{x^2+4} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+4} dx + 24 \int \frac{1}{x^2+4} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln\left(x^2+4\right) + 12 \int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln\left(x^2+4\right) + 12 \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + c_1;\ c_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int \frac{x+4}{(x^2+4)^2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{(x^2+4)^2} dx + 4 \int \frac{1}{(x^2+4)^2} dx \\ &= \frac{1}{2} K + 4L \end{aligned}$$

où

$$K = \int \frac{2x}{(x^2+4)^2} dx = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + c_2;\ c_1 \in \mathbb{R}.$$

donc

$$K = -\frac{1}{x^2+4} + c_2;\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

et

$$L=\int\frac{1}{\left(x^2+4\right)^2}dx=\frac{1}{16}\int\frac{1}{\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2+1\right)^2}dx$$
$$=\frac{1}{8}\int\frac{1}{\left[t^2+1\right]^2}dt=\frac{1}{8}J_2;\ c_2\in\mathbb{R};\ \textit{avec le } C.V: t=\frac{x}{2}$$

or d'après la formule (1.3) *on a*

$$J_2=\frac{1}{2}\left[\frac{t}{t^2+1}+J_1\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{t}{t^2+1}+\arctan t\right]+c_3;\ c_3\in\mathbb{R}.$$

d'où

$$L=\frac{1}{16}\left[\frac{t}{t^2+1}+\arctan t\right]+c_3;\ c_3\in\mathbb{R}.$$

donc

$$L=\frac{1}{16}\left[\frac{2x}{x^2+4}+\arctan\frac{x}{2}\right]+c_3;\ c_3\in\mathbb{R}.$$

par conséquent ;

$$\int\frac{x+4}{\left(x^2+4\right)^2}dx=-\frac{1}{2\left(x^2+4\right)}+\frac{1}{4}\left[\frac{2x}{x^2+4}+\arctan\frac{x}{2}\right]+c_3;\ c_3\in\mathbb{R}.$$

et enfin on a

$$I_2=\frac{-1}{25}\ln|x+1|+\frac{1}{50}\ln\left(x^2+4\right)+\frac{7}{25}\arctan\frac{x}{2}+\frac{2\left(1-x\right)}{5\left(x^2+4\right)}+c;\ c\in\mathbb{R}.$$

1.2 Intégration des fonctions irrationnelles

1.2.1 Primitives du type $\int R\left(x,x^{\frac{k}{l}},x^{\frac{m}{n}},...,x^{\frac{r}{s}}\right)dx$

Pour calculer ce type de primitives ; on calcule d'abord α le dénominateur commun des fractions $\frac{k}{l},\frac{m}{n},....,\frac{r}{s}$, c'est à dire : $\alpha=PPCM\left(l,n,...,s\right)$; puis on fait le changement de variables

$$\text{C.V}: x=t^{\alpha}\Rightarrow dx=\alpha t^{\alpha-1}dt$$

Exemple 1.2.1 *Calculer la primitive suivante :* $I=\int\frac{\sqrt{x}}{x^{\frac{3}{4}}+1}dx=\int\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}+1}dx$

On a $\alpha=PPCM\left(2,4\right)=4$

$$C.V: x=t^4\Rightarrow dx=4t^3dt$$

d'où

$$I=4\int\frac{t^5}{t^3+1}dt$$

qui est une fraction rationnelle telle que le degré du numérateur est supèrieur à celui du dénominateur alors on fait une division Euclidienne et on a :

$$I = 4\int \left[t^2 - \frac{t^2}{t^3+1}\right] dt = \frac{4}{3}\left[t^3 - \ln\left|t^3+1\right|\right] + c;\ c \in \mathbb{R}.$$

donc

$$I = \frac{4}{3}\left[x^{\frac{3}{4}} - \ln\left|x^{\frac{3}{4}}+1\right|\right] + c;\ c \in \mathbb{R}.$$

1.2.2 Primitives du type $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{k}{l}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right) dx$

Pour calculer ce type de primitives ; on calcule d'abord α le dénominateur commun des fractions $\frac{k}{l}, \frac{m}{n}, .., \frac{r}{s}$, c'est à dire :
$\alpha = PPCM\,(l, n, ..., s)$; puis on fait le changement de variables

$$\text{C.V} : \frac{ax+b}{cx+d} = t^\alpha$$

Exemple 1.2.2 *Calculer la primitive suivante :* $I = \int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx = \int \frac{(x+4)^{\frac{1}{2}}}{x}dx$
On a $\alpha = 2$

$$C.V : x+4 = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt$$

d'où

$$I = \int \frac{(x+4)^{\frac{1}{2}}}{x}dx = 2\int \frac{(t^2-4)+4}{t^2-4}dt = 2\left[\int dt + 4\int \frac{dt}{t^2-4}\right]$$
$$I = 2\left[t + \ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|\right] + c;\ c \in \mathbb{R}.$$

alors

$$I = 2\left[\sqrt{x+4} + \ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right|\right] + c;\ c \in \mathbb{R}.$$

1.2.3 Primitives du type $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx;\ a \neq 0.$

Pour ce type de primitives on peut utiliser les Substitutions d'Euler, où on distingue deux cas

1^{er} Cas :

Si $a > 0$ alors on fait un changement de variables où on pose :

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t \tag{1.5}$$

en faisant un choix quelconque du signe avant la racine. Supposons qu'on choisit le signe + pour la suite des calculs ; alors on met les deux membres de l'équation (1.5) au carré ; d'où

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + t^2 + 2\sqrt{a}xt$$

ce qui est équivalent à

$$x = \frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a}t}.$$

Exemple 1.2.3 $I = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}} dx$

On a $a = 1 > 0$ alors on pose

$$\sqrt{x^2 + 9} = x + t$$

d'où

$$x^2 + 9 = x^2 + 2xt + t^2 \Leftrightarrow x = \frac{9 - t^2}{2t}$$

alors

$$dx = \frac{-9 - t^2}{2t^2} dt \text{ et } \sqrt{x^2 + 9} = \frac{9 + t^2}{2t}$$

on remplace le tout dans la primitive I et on obtient

$$\begin{aligned}
I &= -\frac{1}{4} \int \frac{\left(9 - t^2\right)^2}{t^3} dt = -\frac{1}{4} \int \frac{81 - 18t^2 + t^4}{t^3} dt \\
I &= -\frac{1}{4} \left[81 \int \frac{dt}{t^3} - 18 \int \frac{dt}{t} + \int t dt \right] \\
I &= -\frac{1}{4} \left[\frac{-81}{2t^2} - 18 \ln |t| + \frac{t^2}{2} \right] + c;\ c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

donc

$$I = -\frac{1}{4} \left[\frac{-81}{2\left(2x^2 + 9 - 2x\sqrt{x^2 + 9}\right)} - 18 \ln \left| \sqrt{x^2 + 9} - x \right| + x^2 + \frac{9}{2} - x\sqrt{x^2 + 9} \right] + c;\ c \in \mathbb{R}.$$

2ème Cas :

Si $a < 0$ alors le discriminant Δ du trinôme $ax^2 + bx + c$ est forcément positif, donc le polynôme $ax^2 + bx + c$ admet deux racines réelles α et β; telles que

$$ax^2 + bx + c = a\left(x - \alpha\right)\left(x - \beta\right) \tag{1.6}$$

et dans ce cas ; on fait un autre changement de variables où on pose :

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \left(x - \alpha\right) t \tag{1.7}$$

ici on peut choisir l'une des deux racines trouvées soit α soit β, puis on met les deux membres de l'équation (1.7) au carré ; tout en remplaçant le trinôme par sa forme factorisée (1.6) d'où

$$a\left(x - \alpha\right)\left(x - \beta\right) = \left(x - \alpha\right)^2 t^2$$

ce qui est équivalent à

$$a\left(x - \beta\right) = \left(x - \alpha\right) t^2 \Leftrightarrow x = \frac{a\beta - \alpha t^2}{a - t^2}.$$

Exemple 1.2.4 $I = \int \sqrt{2x - x^2}dx$

$a = -1 < 0 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow 2x - x^2 = x\,(2 - x)$ *ici* $\alpha = 0$ *et* $\beta = 2$

$\overset{C.V}{\Rightarrow} \sqrt{2x - x^2} = xt \Leftrightarrow x\,(2 - x) = x^2t^2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{t^2+1}$

alors

$$dx = \frac{-4t}{\left(t^2 + 1\right)^2}dt \text{ et } \sqrt{2x - x^2} = \frac{2t}{t^2 + 1},$$

d'où

$$\begin{aligned} I &= -8\int \frac{t^2}{\left(t^2 + 1\right)^3}dt = -8\int \frac{t^2 + 1 - 1}{\left(t^2 + 1\right)^3}dt \\ I &= -8\int \frac{dt}{\left(t^2 + 1\right)^2} + 8\int \frac{dt}{\left(t^2 + 1\right)^3} \\ I &= -8J_2 + 8J_3 \end{aligned}$$

où J_2 *et* J_3 *sont données par la formule* (1.3) *; on a*

$$J_3 = \frac{1}{4}\left(\frac{t}{\left(t^2 + 1\right)^2} + 3J_2\right) = \frac{t}{4\left(t^2 + 1\right)^2} + \frac{3}{4}J_2$$

d'où

$$I = -8J_2 + 8J_3 = \frac{2t}{\left(t^2 + 1\right)^2} - 2J_2 + c, c \in \mathbb{R}.$$

donc

$$\begin{aligned} I &= \frac{2t}{\left(t^2 + 1\right)^2} - 2J_2 + c, c \in \mathbb{R}. \\ I &= \frac{2t}{\left(t^2 + 1\right)^2} - \frac{t}{t^2 + 1} - \arctan t + c, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

où $t = \frac{\sqrt{2x - x^2}}{x}$ *; par conséquent*

$$I = \frac{\sqrt{2x - x^2}}{2}\,(x - 1) - \arctan\frac{\sqrt{2x - x^2}}{x} + c, c \in \mathbb{R}.$$

Remarque : Il existe une troisième substitution d'Euler si $c > 0$ où on fait le changement de variables suivant :

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c} \tag{1.8}$$

là aussi le signe avant la racine reste au choix, puis on met les deux membres de l'équation (1.8) au carré ; d'où

$$ax^2 + bx + c = t^2x^2 + c + 2\sqrt{c}xt$$

ce qui est équivalent à

$$x = \frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a}t}.$$

Exemple 1.2.5 $I = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}}$

$$c = 1 > 0 \overset{C.V}{\Rightarrow} \sqrt{x^2-x+1} = xt+1$$
$$\Rightarrow x^2 - x + 1 = (xt+1)^2 = x^2t^2 + 2xt + 1$$
$$\Rightarrow x = \frac{2t+1}{1-t^2} \Rightarrow dx = \frac{2\left(t^2+t+1\right)}{\left(1-t^2\right)^2}dt$$

$$et \ \sqrt{x^2-x+1} = \frac{t^2+t+1}{1-t^2}$$

d'où

$$I = \int \frac{dt}{2t+1} = \frac{1}{2}\ln|2t+1| + c \ ; c \in \mathbb{R}.$$
$$I = \frac{1}{2}\ln|2t+1| + c \ ; c \in \mathbb{R}.$$

par conséquent

$$I = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2\sqrt{x^2-x+1}+x-1}{x}\right| + c \ ; c \in \mathbb{R}.$$

1.3 Intégration des fonctions trigonométriques

1.3.1 Primitives du type $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$

Dans ce genre de primitives on distingue plusieurs cas :
Primitives du type $\int R(\cos x)\sin x dx$
Ici on fait le changement de variables $t = \cos x$, d'où $dt = -\sin x dx$
Primitives du type $\int R(\sin x)\cos x dx$
Ici on fait le changement de variables $t = \sin x$, d'où $dt = \cos x dx$

Exemple 1.3.1 $I = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$
C.V : $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x \ dx,$ *d'où*

$$I = \int \frac{1-t^2}{t^4}dt = \int \frac{dt}{t^4} - \int \frac{dt}{t^2}$$
$$I = -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t} + c\,;\, c \in \mathbb{R}.$$

donc

$$I = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + c\,;\, c \in \mathbb{R}.$$

Primitives du type $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$
Ici on fait le changement de variables $t = \tan\frac{x}{2}$, d'où :

$$x = 2\arctan t \text{ alors } dx = \frac{2}{1+t^2}dt \text{ et on a :}$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = 2\frac{\tan\frac{x}{2}}{\tan^2\frac{x}{2}+1}$$

d'où

$$\sin x = \frac{2t}{t^2+1}$$

et

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2}\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

d'où

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Exemple 1.3.2 $I = \int \frac{dx}{\sin x}$

C.V : $t = \tan\frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 2\arctan t \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}dt$ et on a : $\sin x = \frac{2t}{t^2+1}$ d'où

$$I = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c; c \in \mathbb{R}.$$

$$I = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c; c \in \mathbb{R}.$$

Primitives du type $\int R(\tan x)\, dx$

Si la fonction à intégrer ne dépend que de la tangente alors on fait le changement de variables $t = \tan x$, d'où $x = \arctan t$ et donc $dx = \frac{1}{1+t^2}dt$

1.3.2 Primitives du type $\int R\left(\sin^n x, \cos^k x\right) dx$

Si n et k sont deux entiers naturels pairs

Dans ce cas on effectue la linéarisation comme suit :

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

En effet ; car $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$.

Exemple 1.3.3 $I = \int \sin^4 x dx$

On a $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$; alors

$$I = \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)^2\, dx = \frac{1}{4}\int \left[1 - 2\cos 2x + (\cos 2x)^2\right] dx$$

$$I = \frac{1}{4}\left[x - \sin 2x + \int (\cos 2x)^2\, dx\right]$$

or $(\cos 2x)^2 = \frac{1}{2}(1+\cos 4x)$; donc

$$\int (\cos 2x)^2\, dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 4x)\, dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right) + c; c \in \mathbb{R}.$$

d'où

$$I = \frac{1}{4}\left[x - \sin 2x + \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right)\right] + c; c \in \mathbb{R}.$$

par conséquent ;

$$I = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c; c \in \mathbb{R}.$$

Si n et k sont deux entiers relatifs pairs

Dans ce cas on fait le changement de variables $t = \tan x$, d'où $x = \arctan t$ et donc $dx = \frac{1}{1+t^2}dt$ et on a

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+t^2}$$

et

$$\sin^2 x = \cos^2 x . \tan^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$$

Exemple 1.3.4 $I = \int \frac{dx}{\cos^4 x}$

C.V : $t = \tan x \Leftrightarrow x = \arctan t \Rightarrow dx = \frac{1}{1+t^2}dt$ *et on a* $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$ *, d'où*

$$I = \int \left(1+t^2\right) dt = t + \frac{t^3}{3} + c; c \in \mathbb{R}. \tag{1.9}$$

donc

$$I = \tan x + \frac{(\tan x)^3}{3} + c; c \in \mathbb{R}.$$

1.3.3 Primitives $\int \cos kx \cos nx dx$, $\int \sin kx \cos nx dx$, $\int \sin kx \sin nx dx$

Pour ce genre de primitives ; on utilise les formules trigonométriques

$$\begin{aligned}
\cos kx . \cos nx &= \frac{1}{2}\left[\cos(k+n)x + \cos(k-n)x\right] \\
\sin kx . \cos nx &= \frac{1}{2}\left[\sin(k+n)x + \sin(k-n)x\right] \\
\sin kx . \sin nx &= \frac{1}{2}\left[-\cos(k+n)x + \cos(k-n)x\right]
\end{aligned}$$

Exemple 1.3.5 $I = \int \sin 5x . \sin 3x dx$.

On applique la formule

$$\sin 5x . \sin 3x = \frac{1}{2}\left[-\cos 8x + \cos 2x\right]$$

d'où

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\int \left[-\cos 8x + \cos 2x\right] dx \\
I &= \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{4}\sin 8x + \sin 2x\right] + c; c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

1.4 Intégration de certaines fonctions irrationnelles à l'aide de transformations trigonométriques

On considère les primitives du type $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$, avec $a \neq 0$ et $\Delta \neq 0$.

On commence par effectuer la décomposition canonique (**??**) ;

$$ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right],$$

puis on fait le changement de variables $t = x + \frac{b}{2a}$, donc $dt = dx$ et de là on se ramène à l'une des trois forme suivantes :

- $\int R\left(t, \sqrt{n^2t^2+k^2}\right) dt$ où on fait le changement de variables $t = \frac{k}{n}\tan z$.
- $\int R\left(t, \sqrt{n^2t^2-k^2}\right) dt$ où on fait le changement de variables $t = \frac{k}{n\sin z}$.
- $\int R\left(t, \sqrt{k^2-n^2t^2}\right) dt$ où on fait le changement de variables $t = \frac{k}{n}\sin z$.

Exemple 1.4.1 $I = \int \frac{dx}{\sqrt{(-x^2-2x)^3}}$

On a

$$-x^2-2x = -\left[(x+1)^2-1\right] = 1-(x+1)^2$$

on fait le changement de variables $t = x+1$, *donc* $dt = dx$ *et de là on se ramène à*

$$I = \int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)^3}}$$

on fait alors un deuxième changement de variables $t = \sin z \Rightarrow dt = \cos z dz$, *d'où*

$$I = \int \frac{dz}{\cos^2 z} = \tan z + c; \;\; c \in \mathbb{R}.$$

or

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$$

donc

$$I = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} + c; \;\; c \in \mathbb{R}.$$

par conséquent

$$I = \frac{x+1}{\sqrt{-x^2-2x}} + c; \;\; c \in \mathbb{R}.$$