ANALYSE 1

Semestre1

Unité d'enseignement: Fondamentale

Crédits: 6

Coefficient: 4

Programme:

Chapitre 1: Le Corps des Réels

Chapitre 2: Le Corps des Nombres Complexes

Chapitre 3: Suites de Nombres réels

Chapitre 4: Fonctions réelles d'une variable réelle

Chapitre 5: Fonctions dérivables

Chapitre 6: Fonctions élémentaires

Chapitre 1

Le Corps des réels

1 Introduction

La théorie des ensembles permet de construire l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ muni d'une loi opération $+$(addition) associative, commutative et possédant un élément neutre 0. Toutefois il ne s'agit pas d'une loi de groupe: étant donné deux entiers naturels a et b, il n'existe pas toujours un élément x de $\mathbb{N}$ tel que $a+x = b$, Pour celà, on a construit l'ensemble des entiers relatifs muni de l'addition est un groupe commutatif.

En construisant $\mathbb{Z}$, on a défini une autre opération, c'est la multiplication, dans ce cas il est apparu in problème pour résoudre l'équation: $a.x = b, a \neq 0, a, b \in \mathbb{Z}$ qui admet des solutions seulement si a divise b, pour celà, on a construit l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}$. Dans cet ensemble, est apparu un problème, par exemple considérons un triangle ABC rectangle en A. Le théorème de Pytagore dit qu'on a la relation $a^2 = b^2 + c^2$, et si $b = c = 1$, on obtient $a^2 = 2$ alors $a = \sqrt{2}$ mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$($\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel). Dans ce cas, on est amené à construire un ensemble plus vaste, l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

On a les inclusions $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

2 Définition axiomatique des nombres réels

Le corps des nombres réels est un ensemble $\mathbb{R}$ dans lequel sont définies deux lois $\begin{array}{rccc} +: & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array}$ l'addition, $\begin{array}{rccc} .: & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x.y \end{array}$ multiplication, et une relation d'ordre notée $(\leq)$, satisfaisant les axiomes suivantes:

$A)$ $\mathbb{R}$ est un corps commutatif:

(A_1) : $x+y=y+x$ (commutativité de l'addition).

(A_2) : $(x+y)+z = x+(y+z)$ (l'associativité de l'addition).

(A_3) : Il existe un élément neutre $0 \in \mathbb{R}/\forall x \in \mathbb{R}, x+0=x$.

(A_4) : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un élément symetrique $(-x) \in \mathbb{R}/x + (-x) = 0$.

(A_5) : $x.y = y.x$ (commutativité de la multiplication).

(A_6) : $(x.y).z = x.(y.z)$ (l'associativité de la multiplication).

(A_7) : Il existe un élément neutre $1 \in \mathbb{R}/\forall x \in \mathbb{R}, x.1 = x$.

(A_8) : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un élément symetrique $(-x) \in \mathbb{R}/x + (-x) = 0$.

(A_9) : $x.(y + z) = x.y + x.z$ (distributivité de la multiplication par rapport à l'addition).

$B)$ $\mathbb{R}$ est totalement ordonné:

(A_{10}) : $x \leq y$ et $y \leq z$ alors $x \leq z$.

(A_{11}) : $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $x = y$.

(A_{12}) : Pour deux éléments quelconque $x, y \in \mathbb{R}$, on a ou bien $x \leq y$ ou $y \leq x$. Dans ce cas on dit que $\mathbb{R}$ est totalement ordonné.

(A_{13}) : $x \leq y$ alors $x + z \leq y + z, \forall z \in \mathbb{R}$.

(A_{14}) : $0 \leq x, 0 \leq y$ alors $0 \leq x.y$.

C) Axiome de la borne supérieure:

(A_{15}) : Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

3 Valeur absolue

Définition: On définit la valeur absolue sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, par l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ et on note $|.|$ par

$$\begin{array}{cccc} |.| & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x & \longmapsto & |x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases} \end{array}$$

Propriétés de la valeur absolue:

1. $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0, -|x| \leq x \leq |x|$.

2. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

3. $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x.y| = |x| . |y|$.

4. $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x + y| \leq |x| + |y|$ (inégalité triangulaire).

5. Soit $a \in \mathbb{R}_+$; $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$.

6. $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

7. $||x| - |y|| \leq |x + y|$.

8. $\max(x, -x) = |x|$.

Preuve:

1. $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0$ évidente par définition.

$|x| = x$ si $x \geq 0$, alors $-|x| = -x \leq x \leq x = |x|$.

$|x| = -x$ si $x < 0$, alors $-|x| = x \leq -x = |x|$.

4. On a 4 cas:

1) $x \geq 0, y \geq 0, x + y \geq 0 \Rightarrow |x+y| = x + y = |x| + |y|$

2) $x \leq 0, y \leq 0, x + y \leq 0 \Rightarrow |x+y| = -(x+y) = (-x) + (-y) = |x| + |y|$

3) $x \geq 0, y \leq 0, x + y \begin{cases} \geq 0, & \text{si } x \geq -y \\ \leq 0, & \text{si } x \leq -y \end{cases}$

Si $x \geq -y, |x+y| = x+y = |x| - |y| \leq |x| \leq |x| + |y|$.

Si $x \leq -y, |x+y| = -(x+y) = (-x)+(-y) = -|x| + |y| \leq |y| \leq |x| + |y|$.

4) $x \leq 0, y \geq 0$, même raisonnement que le cas 3.

5. $|x| \leq a \Rightarrow -a \leq -|x|$ d'aprés la propriété 1. $-a \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq a$.

6. D'aprés 5. $\left|\underbrace{|x| - |y|}_{X}\right| \leq \underbrace{|x-y|}_{a} \Leftrightarrow -a \leq |X| \leq a \Leftrightarrow -|x-y| \leq |x| - |y| \leq |x-y|$?

On a $|x| = |x-y+y| = |(x-y)+y| \leq |x-y| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \leq |x-y| \ldots (1)$ d'autre part

$|y| = |y-x+x| = |(y-x)+x| \leq |y-x| + |x| \Rightarrow |x| - |y| \geq -|y-x| = -|-(x-y)| = -|x-y| \ldots (2)$

de (1) et (2) on obtient $-|x-y| \leq |x|-|y| \leq |x-y| \Leftrightarrow$ $||x|-|y|| \leq |x-y|$.

8. $\max(x,-x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases} = |x|$.

La fonction partie entière:

Définition: La partie entière d'un nombre réel x est le plus grand entier inférieur ou égal à x, elle est notée par $[x]$ ou $E(x)$.

et on a $[x] \leq x \leq [x]+1, [x] \in \mathbb{Z}$.

Exemple

$[2.83] = 2, \left[\frac{3}{2}\right] = 1$ et $\left[-\frac{3}{2}\right] = -2, [-3.5] = -4$

$[x] = 3 \Rightarrow x \in [3, 4[$

Proposition: Tout nombre réel s'écrit d'une façon unique sous la forme

$$x = [x] + \alpha, \text{ où } \alpha \in [0, 1[\,.$$

Propriétés:

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \Rightarrow [x] \leq [y]\,.$

2. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{Z}, [x + a] = [x] + a,$

Axiome d'Archimed

$1^{ère}$ formule: Soit $x \in \mathbb{R}$, alors il existe un entier naturel n tel que $n > x$.

$2^{ème}$ formule: Soit $y \in \mathbb{R}$ et $x > 0$, alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $nx > y$.