Chapitre 3
Equations différentielles
Partie 2

Damerdji Bouharis A.
Université des Sciences et de la Technologie Mohamed Boudiaf
Faculté des Mathématiques et Informatique.

3.2.4 Equations de Bernoulli

Définition 3.2.10 *Une équation de Bernoulli est une équation différentielle non linéaire d'ordre 1 de la forme*

$$y'(x) + a(x)\, y(x) + b(x)\, y^{\alpha}(x) = 0 \tag{3.14}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\alpha \neq 1$ *et* a, b *sont deux fonctions données, de classe* C^1 *sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$.

<u>Méthode de résolution</u>

Tout d'abord, on suppose que $y \neq 0$ car on cherche une solution non triviale.

La résolution consiste à diviser toute l'équation (3.14) par $y^{\alpha}(x)$, ce qui nous conduit après un changement de variables adéquat à une équation différentielle linéaire d'ordre 1 .

En effet, on a

$$\frac{y'(x)}{y^{\alpha}(x)} + \frac{a(x)}{y^{\alpha-1}(x)} + b(x) = 0 \tag{3.15}$$

on fait le CV : $z(x) = y^{1-\alpha}(x) = \frac{1}{y^{\alpha-1}(x)}$, puis on dérive

$$z'(x) = (1-\alpha)\, y^{-\alpha}(x)\, y'(x) = (1-\alpha)\frac{y'(x)}{y^{\alpha}(x)},$$

donc $\frac{y'(x)}{y^{\alpha}(x)} = \frac{1}{1-\alpha} z'(x)$, ensuite on remplace dans (3.15), d'où

$$\frac{1}{(1-\alpha)} z'(x) + a(x)\, z(x) + b(x) = 0$$

qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 qu'on sait résoudre.

Exemple 3.2.11 *Intégrer l'équation différentielle suivante :*

$$y' + xy = xy^2, \tag{3.16}$$

Solution :

C'est une équation de la forme (3.14) *avec* $\alpha = 2$.

On suppose que $y(x) \neq 0$ *et on divise* (3.16) *par* y^2

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{x}{y} = x \tag{3.17}$$

$$CV : z(x) = y^{-1}(x) = \frac{1}{y(x)}, \;\; d'où\; z'(x) = \frac{-y'(x)}{y^2(x)},$$

puis on remplace dans (3.17) *pour trouver*

$$-z' + xz = x \tag{3.18}$$

qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

On remarque qu'on peut résoudre cette équation par la méthode de séparation des variables ou par la méthode de la variation de la constante.

Méthode de la séparation des variables

$$-z' + xz = x \Leftrightarrow z' = x\left(z-1\right) \Leftrightarrow \frac{dz}{z-1} = xdx,$$

et en intégrant de chaque côté on a

$$\begin{aligned}
&\ln\left|z-1\right| = \tfrac{x^2}{2} + c, c \in \mathbb{R},\\
&\Rightarrow \left|z-1\right| = e^{\frac{x^2}{2}+c} \;= e^c.e^{\frac{x^2}{2}}, c \in \mathbb{R},\\
&\Rightarrow z-1 = ke^{\frac{x^2}{2}} \text{ avec } k = \pm e^c,
\end{aligned}$$

d'où

$$z_{gle}\left(x\right) = 1 + ke^{\frac{x^2}{2}}, \text{avec } k = \pm e^c \in \mathbb{R}.$$

et comme $y\left(x\right) = \frac{1}{z(x)}$, *alors*

$$y_{gle}\left(x\right) = \frac{1}{1+ke^{\frac{x^2}{2}}}, k \in \mathbb{R}.$$

Pour plus d'explications, on va calculer z une deuxième fois par la méthode de la variation de la constante

Méthode de la variation de la constante

On résoud d'abord l'équation homogène

$$-z' + xz = 0 \Leftrightarrow \frac{dz}{z} = x$$

d'où

$$\begin{aligned}
&\ln\left|z\right| = \tfrac{1}{2}x^2 + c_1,\;\; c_1 \in \mathbb{R}\\
&\Leftrightarrow \left|z\right| = e^{\frac{1}{2}x^2+c_1} = e^{c_1}.e^{\frac{1}{2}x^2}\\
&\Leftrightarrow z = \pm e^{c_1}.e^{\frac{1}{2}x^2} = ke^{\frac{1}{2}x^2} \text{ avec } k = \pm e^{c_1}.
\end{aligned}$$

alors

$$z_{\text{hom}} = ke^{\frac{1}{2}x^2}. \tag{3.19}$$

On fait varier la constante k , on a alors

$$z' = k'e^{\frac{1}{2}x^2} + kxe^{\frac{1}{2}x^2},$$

puis on remplace dans (3.18) *pour obtenir*

$$-k'e^{\frac{1}{2}x^2} - kxe^{\frac{1}{2}x^2} + kxe^{\frac{1}{2}x^2} = x$$

d'où

$$k' = -xe^{-\frac{1}{2}x^2} \Leftrightarrow dk = -xe^{-\frac{1}{2}x^2}dx$$

On intègre des deux côtés et on obtient

$$k\left(x\right) = e^{-\frac{1}{2}x^2} + K,\;\; K \in \mathbb{R},$$

puis on remplace dans (3.19)

$$z_{gle}\left(x\right) = \left(e^{-\frac{1}{2}x^2} + K\right)e^{\frac{1}{2}x^2}$$

et enfin on a la solution générale

$$z_{gle}\left(x\right) = 1 + Ke^{\frac{1}{2}x^2},\;\; K \in \mathbb{R}.$$

Exemple 3.2.12 *Intégrer l'équation différentielle suivante*

$$y' + \frac{2}{x} y = \frac{e^x}{\sqrt{y}}, \tag{3.20}$$

Solution

C'est une équation de la forme (3.14) *avec* $\alpha = -\frac{1}{2}$. *On suppose que* $y(x) \neq 0$ *et on divise* (3.20) *par* $y^{-\frac{1}{2}}$

$$y' \sqrt{y} + \frac{2}{x} y^{\frac{3}{2}} = e^x \tag{3.21}$$

$$CV : z(x) = y^{\frac{3}{2}}(x), \text{ d'où } z'(x) = \frac{3}{2} y'(x) y^{\frac{1}{2}}(x),$$

puis on remplace dans (3.21) *et on obtient*

$$\frac{2}{3} z' + \frac{2}{x} z = e^x \tag{3.22}$$

qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Equation homogène

$$\frac{2}{3} z' + \frac{2}{x} z = 0 \tag{3.23}$$

$$(3.23) \Leftrightarrow \frac{z'}{z} = -\frac{3}{x} \Leftrightarrow \frac{dz}{z} = -\frac{3}{x} dx,$$

en intégrant on obtient

$$\begin{aligned} &\ln|z| = -3\ln|x| + c_1, c_1 \in \mathbb{R}, \\ &\Leftrightarrow |z| = e^{-3\ln|x| + c_1} = e^{c_1} e^{-3\ln|x|} \\ &\Leftrightarrow |z| = \tfrac{e^{c_1}}{x^3} \end{aligned}$$

d'où la solution homogène

$$z_{\text{hom}}(x) = \frac{k}{x^3}, \text{ où } k = \pm e^{c_1} \in \mathbb{R}.$$

Variation de la constante

On fait varier la constante k, *alors*

$$z'(x) = \frac{k'(x)}{x^3} - 3\frac{k(x)}{x^4},$$

et on remplace dans l'équation (3.22) , *ce qui donne*

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}\left(\frac{k'(x)}{x^3} - 3\frac{k(x)}{x^4}\right) + \frac{2k(x)}{x^4} = e^x &\Leftrightarrow \frac{2}{3}\frac{k'(x)}{x^3} = e^x \\ &\Leftrightarrow dk = \frac{3}{2} x^3 e^x dx \Rightarrow k(x) = \frac{3}{2}\int x^3 e^x dx \end{aligned}$$

puis on intègre par parties 3 fois

IPP 1 : $\begin{cases} u = x^3 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 3x^2 dx \\ v = e^x \end{cases}$

d'où

$$k(x) = \frac{3}{2}\left[x^3 e^x - 3\int x^2 e^x dx\right]$$

IPP 2 : $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = e^x \end{cases}$

d'où

$$k(x) = \frac{3}{2}x^3 e^x - \frac{9}{2}\left[x^2 e^x - 2\int x e^x dx\right]$$

IPP 3 : $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$

d'où

$$\begin{aligned} k(x) &= \frac{3}{2}x^3 e^x - \frac{9}{2}\left[x^2 e^x - 2\left(x e^x - \int e^x dx\right)\right] \\ &= \frac{3}{2}x^3 e^x - \frac{9}{2}\left[x^2 e^x - 2\left(x e^x - e^x\right)\right] + c, \end{aligned}$$

d'où

$$k(x) = \frac{3}{2}e^x\left[x^3 - 3x^2 + 6(x-1)\right] + c, c \in \mathbb{R}.$$

En remplaçant dans la solution homogène z_{Hom}, *on obtient la solution générale de l'équation* (3.22)

$$z_{gle}(x) = \frac{1}{x^3}\left[\frac{3}{2}e^x\left[x^3 - 3x^2 + 6(x-1)\right] + c\right], c \in \mathbb{R}$$

et comme $y_{gle} = z^{\frac{2}{3}}$ *alors la solution générale de l'équation* (3.20) *est donnée par*

$$y_{gle}(x) = \left(\frac{1}{x^3}\left[\frac{3}{2}e^x\left[x^3 - 3x^2 + 6(x-1)\right] + c\right]\right)^{\frac{2}{3}}, c \in \mathbb{R}.$$

Exemple 3.2.13 *Intégrer l'équation différentielle suivante*

$$y' - \frac{1}{2x}y = 5x^2 y^5. \tag{3.24}$$

Solution

C'est une équation de la forme (3.14) *avec* $\alpha = 5$. *On suppose que* $y(x) \neq 0$ *et on divise* (3.24) *par* y^5

$$\frac{y'}{y^5} - \frac{1}{2xy^4} = 5x^2 \tag{3.25}$$

CV : $z(x) = y^{-4}(x)$, *d'où*

$$\begin{aligned} z'(x) &= -4y'(x)\, y^{-5}(x) \\ &\Rightarrow \frac{y'(x)}{y^5(x)} = -\frac{1}{4}z'(x), \end{aligned}$$

puis on remplace dans (3.25) *et on obtient*

$$-\frac{1}{4}z' - \frac{1}{2x}z = 5x^2 \tag{3.26}$$

qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Equation homogène

$$-\frac{1}{4}z' - \frac{1}{2x}z = 0 \tag{3.27}$$

$$(3.27) \Leftrightarrow \frac{z'}{z} = -\frac{2}{x} \Leftrightarrow \frac{dz}{z} = -\frac{2}{x}dx,$$

en intégrant on obtient

$$\begin{aligned} \ln|z| = -2\ln|x| + c_1, c_1 \in \mathbb{R}, \\ \Leftrightarrow |z| = e^{-2\ln|x|+c_1} = e^{c_1}e^{-2\ln|x|} = \tfrac{e^{c_1}}{x^2} \end{aligned}$$

d'où la solution homogène est donnée par

$$z_{\text{hom}}(x) = \frac{k}{x^2}, \text{ où } k = \pm e^{c_1} \in \mathbb{R}.$$

Variation de la constante

On fait varier la constante k. *Soit* $z(x) = \frac{k(x)}{x^2}$ *alors* $z' = \frac{k'}{x^2} - 2\frac{k}{x^3}$, *et on remplace dans l'équation* (3.26) *, ce qui donne*

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{4}\left(\tfrac{k'}{x^2} - 2\tfrac{k}{x^3}\right) - \tfrac{k}{2x^3} = 5x^2 \quad &\Leftrightarrow -\tfrac{k'}{4x^2} = 5x^2 \Leftrightarrow dk = -20x^4dx \\ &\Rightarrow k = -4x^5 + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

et en remplaçant dans la solution homogène z_{Hom}, *on obtient la solution générale de l'équation* (3.26)

$$z_{gle}(x) = \frac{1}{x^2}\left[-4x^5 + c\right], c \in \mathbb{R}$$

et comme $y_{gle} = z^{-\frac{1}{4}}$ *alors la solution générale de l'équation* (3.24) *est donnée par*

$$y_{gle}(x) = \left(\frac{1}{x^2}\left[-4x^5 + c\right]\right)^{-\frac{1}{4}} = \left(-4x^3 + cx^{-2}\right)^{-\frac{1}{4}}, c \in \mathbb{R}.$$

Exemple 3.2.14 *Intégrer l'équation différentielle suivante*

$$y' + y - y^2(\cos x - \sin x) = 0. \tag{3.28}$$

Solution

C'est une équation de la forme (3.14) *avec* $\alpha = 2$. *On suppose que* $y(x) \neq 0$ *et on divise* (3.28) *par* y^2

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{y} = \cos x - \sin x \tag{3.29}$$

CV : $z(x) = y^{-1}(x) = \frac{1}{y(x)}()$ *d'où*

$$z'(x) = -y'(x)\,y^{-2}(x) = -\frac{y'(x)}{y^2(x)} \Rightarrow \frac{y'(x)}{y^2(x)} = -z'(x),$$

puis on remplace dans (3.29) *et on obtient :*

$$-z' + z = \cos x - \sin x \tag{3.30}$$

qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

<u>Equation homogène</u>

$$-z' + z = 0 \tag{3.31}$$

$$(3.31) \Leftrightarrow \frac{z'}{z} = 1 \Leftrightarrow \frac{dz}{z} = dx,$$

en intégrant on obtient

$$\begin{gathered} \ln|z| = x + c_1, c_1 \in \mathbb{R}, \\ |z| = e^{x+c_1} = e^{c_1}e^x \end{gathered}$$

d'où la solution homogène est donnée par :

$$z_{\text{hom}}(x) = ke^x, \text{ où } k = \pm e^{c_1},$$

<u>Variation de la constante</u>

On fait varier la constante k, *alors* $z'(x) = k'(x)e^x + k(x)e^x$, *et on remplace dans l'équation* (3.30) , *ce qui donne*

$$-k'e^x - ke^x + ke^x = \cos x - \sin x \Leftrightarrow -k'e^x = \cos x - \sin x \Leftrightarrow dk = e^{-x}(\sin x - \cos x)\,dx$$

d'où

$$k(x) = \int e^{-x}(\sin x - \cos x)\,dx = \int e^{-x}\sin x dx - \int e^{-x}\cos x dx$$

On utilise l'intégration par parties

$$IPP : \begin{cases} u = \sin x \\ dv = e^{-x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \cos x dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int e^{-x}\sin x dx = -e^{-x}\sin x + \int e^{-x}\cos x dx$$

alors

$$k(x) = -e^{-x}\sin x + \int e^{-x}\cos x dx - \int e^{-x}\cos x dx = -e^{-x}\sin x + c, c \in \mathbb{R}$$

et en remplaçant dans la solution homogène z_{Hom}, *on obtient la solution générale, de l'équation* (3.30)

$$z_{gle}(x) = e^x\left(-e^{-x}\sin x + c\right) = ce^x - \sin x, c \in \mathbb{R},$$

et comme $y_{gle} = z^{-1}$ *alors la solution générale de l'équation* (3.28) *est donnée par*

$$y_{gle}(x) = (ce^x - \sin x)^{-1} = \frac{1}{ce^x - \sin x}, c \in \mathbb{R}.$$

avec $ce^x - \sin x \neq 0$.