Corrigé du test1 modèle 2

Exercice1:

$$A = \left\{ \frac{2n}{n-1}; n \geq 2 \right\}$$

1. Montrons que $\sup A = 4$ et $\inf A = 2$.
Montrons d'abord que A est bornée.
On a $\forall x \in A$, $x = \frac{2n}{n-1} = 2 + \frac{2}{n-1}, \forall n \geq 2$.
$n \geq 2 \Rightarrow n-1 \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n-1} \leq 1 \Rightarrow 2 < 2 + \frac{2}{n-1} \leq 4 \Rightarrow A$ est bornée.$(*)$
Montrons que $\sup A = 4$.
On a $4 \in A$ car $4 = \frac{2.1}{2-1}$ et 4 est un majorant d'où $\max A = 4 = \sup A$.
Montrons que $\inf A = 2$, en utilisant la caractérisation de la borne inférieure.

$$\inf A = 2 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \forall x \in A, x \geq 2, \text{ vérifiée d'prés } (*) \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A / x_\varepsilon < 2 + \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in A / 2 + \frac{2}{n_\varepsilon - 1} < 2 + \varepsilon \end{array} \right.$$

Soit $\varepsilon > 0, 2 + \frac{2}{n_\varepsilon - 1} < 2 + \varepsilon \Rightarrow \frac{2}{n_\varepsilon - 1} < \varepsilon \Rightarrow n_\varepsilon > \frac{2}{\varepsilon} + 1$. Il suffit de prendre $n_\varepsilon = \left[\frac{2}{\varepsilon} + 1\right] + 1$.

Exercice 2:

$$\left\{ \begin{array}{c} U_0 = 13 \\ U_{n+1} = \frac{1}{5} U_n + \frac{4}{5}, n \in \mathbb{N} \end{array} \right.$$

1. Montrons que $U_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}$ par recurrence.
Pour $n = 0, U_0 = 13 > 1$ vraie.
Supposons que $U_n > 1$ et montrons que $U_{n+1} > 1$.
On a $U_n > 1 \Rightarrow \frac{1}{5} U_n > \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{5} U_n + \frac{4}{5} > 1 \Leftrightarrow U_{n+1} > 1$ donc $U_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}$.
Monotonie de (U_n).
$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{5} U_n + \frac{4}{5} - U_n = -\frac{4}{5} U_n + \frac{4}{5} < 0 \Rightarrow (U_n)$ est décroissante.
2. Puisque (U_n) est décroissante et minorée, alors elle est convergente vers sa borne inférieure.
$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = l \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} U_{n+1} = l$.
$l = \frac{1}{5} l + \frac{4}{5} \Leftrightarrow l = 1$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1$.
3. $E = \{U_n, n \in \mathbb{N}\}$
Puisque (U_n) est convergente et décroissante alors

$$\begin{aligned} \sup E &= U_0 = 13 \\ \inf E &= \lim_{n \to +\infty} U_n = 1. \end{aligned}$$

Exercice 3:

$$z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{6}, z_B = \overline{z_A}.$$

1. $z_A = |z_A| e^{i \arg z_A}$.
$|z_A| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
$$\left\{ \begin{array}{c} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$
D'où

$$z_A = 2\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

2. $z_A = 2\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{3}}, z_B = 2\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$$\begin{aligned} \left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2019} + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{2019} &= \left(\frac{2\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{3}}}{2\sqrt{2}}\right)^{2019} + \left(\frac{2\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2\sqrt{2}}\right)^{2019} \\ &= e^{i\frac{2019}{3}\pi} + e^{-\frac{2019}{3}\pi} \\ &= e^{i673\pi} + e^{-i673} \\ &= e^{i\pi} + e^{-i\pi} = -2. \end{aligned}$$