Université des Sciences et de la technologie USTO-MB.
Faculté des Mathématiques-Informatique.
1ère Année Informatique

Examen final d'Analyse 1

Lundi 08/ 01/ 2024 Durée: 1h30min

Les calculatrices, téléphones portables sont interdits.

Exercice 1. (*3pts*)

I. Dire si les énoncés suivants sont vrais ou faux et justifier votre réponse.

1. Toute partie de $\mathbb{R}$ minorée admet une borne supérieure.
2. Si $(U_n)_n$ est suite réelle de Cauchy alors elle est bornée.
3. Soient f et g deux fonctions dérivables et $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ alors

Si $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ n'existe pas $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ n'existe pas.

II. Rappeler la caractérisation de la borne inférieure d'une partie A de $\mathbb{R}$, puis l'appliquer pour montrer que $\inf\left\{1+\frac{1}{4n^2}, n\in\mathbb{N}^*\right\} = 1$.

Exercice 2. (*6pts*)

1. Soit f la fonction définie par: $f(x) = e^x - 2$.

On définit la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par: $\varphi(x) = f(x) - x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ deux solutions α_1,α_2 avec $\alpha_1 < 0 < \alpha_2$.
(On ne cherche pas à calculer α_1 et α_2).

2. Soit $(u_n)_n$ la suite de nombres réels définie par:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}.$$

a) Calculer u_1 et montrer que la suite $(u_n)_n$ est décroissante.
b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, \alpha_1 \leq u_n \leq 0$.
c) Déduire la convergence de $(u_n)_n$ puis calculer sa limite.

Exercice 3. (*8pts*)

Considérons la fonction f définie par:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{e^x+1} & \text{si } x \leq 0 \\ 1-e^x & \text{si } x > 0 \end{cases},$$

1. Etudier la continuité de la fonction f sur son domaine de définition.
2. Etudier la dérivabilité de la fonction f sur le domaine de définition.

f est-elle de classe $C^1(\mathbb{R})$?

3. Donner l'expression de la dérivée de f sur le domaine de dérivabilité.
4. Etudier la convexité de la fonction f.
5. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.

Utiliser les réponses aux question précédentes pour démontrer que $\forall x > 0, e^x \geq ex$.

6. Donner le tableau de variations de f puis tracer son graphe G_f.

Exercice 4. (*3pts*)

1. Enoncer le théorème des accroissements finis.
2. Montrer que pour tout $x > 0$,

$$\frac{1}{1+x} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}.$$

3. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

Bon courage

Corrigé de l'examen final
d'Analyse I. 2023/2024

Exercice 1 :

I- 1. faux (0,25)

en effet, $A = [0, +\infty[$ minorée par 0 mais elle n'est pas majorée donc n'admet pas une borne supérieure. (0,25)

2. Vraie. (0,25)

en effet, (U_n) Cauchy réelle $\Rightarrow (U_n)$ convergente $\Rightarrow (U_n)$ bornée (0,25)

3. faux (0,25)

en effet, soit $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $g(x) = \sin x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x} = \nexists$$

mais $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{x}_{\to 0} \underbrace{\sin \frac{1}{x}}_{\text{bornée}} = 0$ existe. (0,25)

II. $\inf A = m \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, & x \geq m. \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in A \,/\, x_0 < m + \varepsilon. \end{cases}$

$\inf \left\{ 1 + \frac{1}{4n^2}, n \in \mathbb{N}^* \right\} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, \quad x \geq 1 \quad \dots (1) & (0,25) \\ \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* / 1 + \frac{1}{4n_0^2} < 1 + \varepsilon \dots (2) & (0,25) \end{cases}$

pour (1) : Soit $x \in A \Leftrightarrow x = 1 + \frac{1}{4n^2}, n \in \mathbb{N}^*$

$n \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} \leq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{4n^2} \leq \frac{1}{4}$ (0,5)

$\Rightarrow 1 < \underbrace{1 + \frac{1}{4n^2}}_{x}$

donc 1 est un minorant de A.

pour (2) Soit $\varepsilon > 0$ / $1 + \frac{1}{4n_0^2} < 1 + \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{4n_0^2} < \varepsilon$.

$\Rightarrow 4n_0^2 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n_0 > \frac{1}{\sqrt{4\varepsilon}}$. (0,5)

$\Rightarrow n_0 > \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}$

il suffit de prendre $n_0 = \left[\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \right] + 1$.

Exercice 2 : $f(x) = e^x - 2$

$\varphi(x) = f(x) - x$.

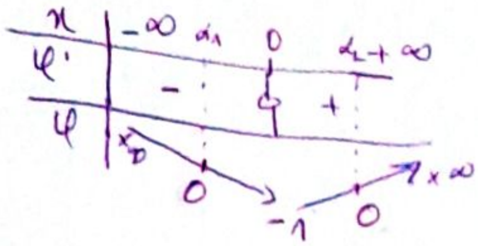
On a : φ est une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

et $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$

0,25

$\varphi'(x) = e^x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$



0,5

- Sur $]-\infty, 0]$, φ continue et $\varphi(0) = -1 < 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = +\infty$ et φ est strictement décroissante donc d'après le Théorème des valeurs intermédiaire $\exists!\, \alpha_1 \in]-\infty, 0[\,/\, \varphi(\alpha_1) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha_1) = \alpha_1$ 0,5
- Sur $[0, +\infty[$, φ continue et strictement croissante et $\varphi(0) = -1$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$ donc d'après le T.V.I, $\exists!\, \alpha_2 \in]0, +\infty[\,/\, \varphi(\alpha_2) = 0$

On a bien $\alpha_1 < 0 < \alpha_2$. 0,5

2. $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) $U_1 = f(U_0) = e^{U_0} - 2 = e^0 - 2 = -1$ 0,1

On a : $f(x) = e^x - 2$ est croissante car $f'(x) = e^x > 0$ 0,5

$\Rightarrow (U_n)$ est monotone et $U_1 - U_0 = -1 - 0 = -1 < 0$ 0,25

ce qui donne $(U_n)_n$ décroissante.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 \leq U_n \leq 0$. par recurrence

Pour $n = 0$: On $\alpha_1 \leq U_0 = 0 \leq 0$ Vraie. 0,25

Supposons que $\alpha_1 \leq U_n \leq 0$ et montrons que $\alpha_1 \leq U_{n+1} \leq 0$

On a : $\alpha_1 \leq U_n \leq 0 \xrightarrow{f \nearrow} \underbrace{f(\alpha_1)}_{=\alpha_1} \leq f(U_n) \leq f(0)$ (0,25)

$\Rightarrow \alpha_1 \leq U_{n+1} \leq -1 \leq 0.$ car $\varphi(\alpha_1)=0$, $f(\alpha_1)-\alpha_1=0$ (0,25)

d'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 \leq U_n \leq 0$.

c) Puisque $(U_n)_n$ est décroissante et minorée alors elle est convergente vers l finie. (0,5)

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1} = l$ (0,5)

donc $l = f(l) \Leftrightarrow \varphi(l) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} l = \alpha_1 < 0 \\ \text{ou} \\ l = \alpha_2 > 0 \text{ refusée} \end{cases}$ (0,25) (0,25)

mais $U_n \leq 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n \leq 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \alpha_1$ (0,5) (0,5)

Exercice 3 : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x-1}{e^x+1}, & x \leq 0 \\ 1-e^x, & x > 0 \end{cases}$

1- $D_f = \mathbb{R}$ (0,25)

- Continuité sur $\mathbb{R}$:
- Pour $x<0$: $f(x) = \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ continue sur $]-\infty,0[$ car quotient de fonctions continues sur $]-\infty,0[$. (0,25)
- Pour $x>0$: $f(x) = 1-e^x$ continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]0,+\infty[$. (0,25)
- Pour $x=0$: $f(0)=0$.

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \dfrac{e^x-1}{e^x+1} = 0 = f(0) \Rightarrow f$ continue à gauche de 0. (0,25)

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} 1-e^x = 0 = f(0) \Rightarrow f$ continue à droite de 0. (0,25)

f continue en 0 par suite continue sur $\mathbb{R}$.

Dérivabilité sur $\mathbb{R}$

- Pour $x<0$: $f(x) = \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ dérivable sur $]-\infty,0[$ car quotient de fonctions dérivables sur $]-\infty,0[$. (0,25)

• Pour $x > 0$: $f(x) = 1 - e^x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]0, +\infty[$. (0,2)

• Pour $x = 0$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{\frac{e^x - 1}{e^x + 1} - 0}{x} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{e^x - 1}{x(e^x+1)} = \frac{1}{2} = f'_g(0)$$ (0,5)

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1 - e^x}{x} = -1 = f'_d(0)$$ (0,2)

$f'_g(0) \neq f'_d(0) \Rightarrow f$ n'est pas dérivable en 0 par suite (0,5)

f n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f n'est pas de classe $C^1(\mathbb{R})$ (0,5)

3) f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}, & x < 0 \quad (0,5) \\ -e^x, & x > 0 \quad (0,5) \end{cases}$$

4) Convexité : calculons f'' ; f' est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{2e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}, & x < 0 \\ -e^x, & x > 0 \end{cases}$$ (0,5)

pour $x > 0$; $f''(x) = -e^x < 0 \Rightarrow f$ est concave sur $]0, +\infty[$ (0,25)

pour $x < 0$; $f''(x) = \frac{2e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3} > 0 \Rightarrow f$ est convexe sur $]-\infty, 0[$. (0,2)

5) (T) : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.

$y = -e(x-1) + 1 - e$ (0,5)

(T) : $y = -ex + 1$

d'après 4) $\forall x > 0$, f est concave alors le C_f est au dessous de toutes les tangentes en particulier au dessous de (T) alors (0,2)

$f(x) \leq y \iff 1-e^{x} \leq -ex+1$

$-e^{x} \leq -ex \iff e^{x} \geq ex$ (0,2)

d'où $\forall x>0,\ e^{x} \geq e.x$.

6)

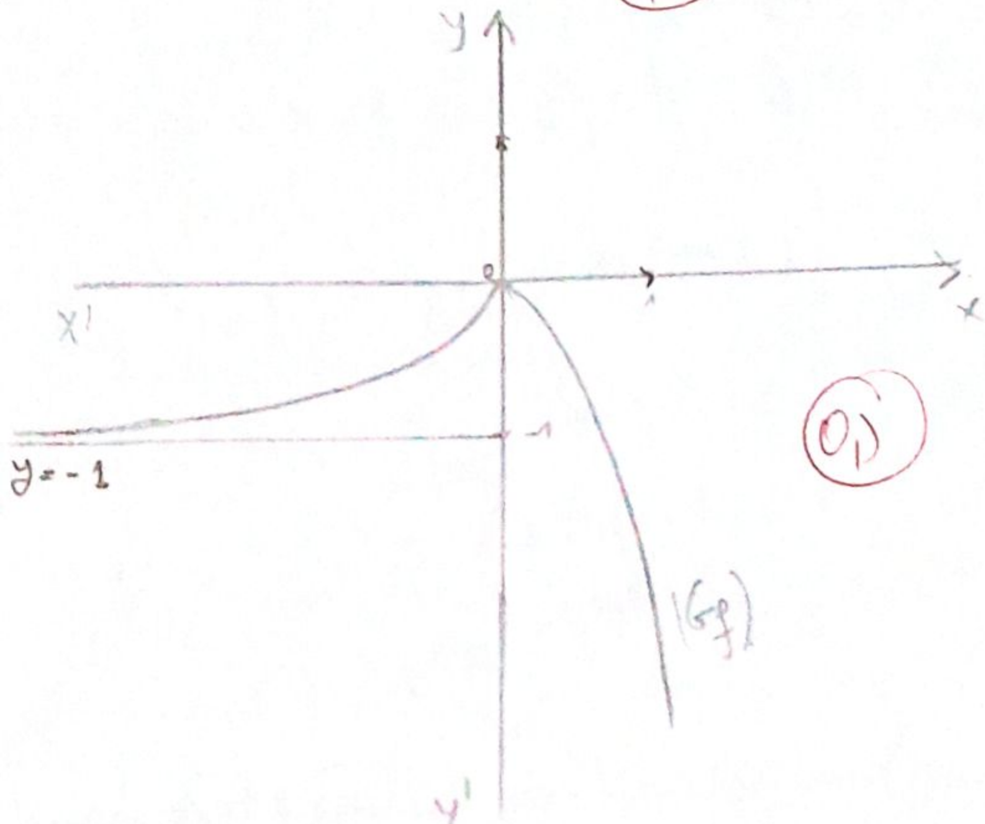
x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$+$	$\Vert$	$-$	
f	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

(0,2)

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1} = -1 \Rightarrow y=-1$ est une asymptote horizontale au $v(-\infty)$. (0,2)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 1-e^{x} = -\infty$ (0,2)

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-e^{x}}{x} = -\infty \Rightarrow$ branche au vois $(+\infty)$. (0,2)



(0,1)

Exercice 4 :

(1pt)

1. $\left.\begin{array}{l} f \text{ continue sur } [a,b] \\ f \text{ dérivable sur }]a,b[\end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in]a,b[\,/\, f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$

2. $\forall x>0, \quad \dfrac{1}{1+x} < \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) < \dfrac{1}{x}$.

$$\frac{1}{1+x} < \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$$

On pose : $f(t) = \ln(t)$, $\quad [a,b] = [x, x+1]$.

$\left.\begin{array}{l} \ln(t) \text{ continue sur } [x,x+1] \\ \ln t \text{ dérivable sur }]x,x+1[\end{array}\right\} \overset{T.A.F.}{\Longrightarrow} \exists c \in]x,x+1[\,/$

(1pt)

$$\ln(x+1) - \ln x = (x+1-x)\frac{1}{c}$$

$$\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{1}{c} \iff \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{c}.$$

On a : $x < c < x+1 \iff \dfrac{1}{x+1} < \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{x} \iff \dfrac{1}{x+1} < \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) < \dfrac{1}{x}$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} =$

d'après 2) On a : $\dfrac{1}{1+x} < \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) < \dfrac{1}{x}$

$$\frac{x}{1+x} < x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < 1$$

$$\underbrace{e^{\frac{x}{1+x}}}_{\to e} \; e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} < \underbrace{e}_{\to e}$$

(1pt)

d'après le théorème des trois fonctions (gendarmes)

$$\lim_{x\to+\infty} e^{x\ln(1+1/x)} = e \iff \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$