Fonctions continues

OUIKENE Fethia

Department of Mathematics
University of Science and Technology of Oran, Algeria

January 24, 2024

Fonctions continues

1. **Continuité en un point:**

Définitions:

1. Soit f une fonction définie sur $I \subset \mathbb{R}$. On dit que f est continue en $x_0 \in I$ si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

2. On dit que la fonction f est continue à droite en x_0 si

$$\lim_{\substack{> \\ x \to x_0}} f(x) = f(x_0).$$

3. De même, on dira que la fonction f est continue à gauche en x_0 si

$$\lim_{\substack{< \\ x \to x_0}} f(x) = f(x_0).$$

4. f est continue en x_0 si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en x_0.
C'est à dire

$$\lim_{\substack{> \\ x \to x_0}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x \to x_0}} f(x) = f(x_0).$$

5. f est cotinue en
$x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \forall (x_n) \subset I / x_n \underset{n \to +\infty}{\to} x_0 \Rightarrow f(x_n) \underset{n \to +\infty}{\to} f(x_0).$

Continuité sur un intervalle:
On dit que f est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout point de I.
Notation: On note l'ensemble des fonctions continues par $C(I)$.

Théorèmes fondamentales sur les fonctions continues:

Théorème 1. Toute fonction f continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ est une fonction bornée sur $[a, b]$.

Théorème 2. Toute fonction f continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ atteint au moins une fois ses bornes, autrement dit $\exists x_1, x_2 \in [a, b] / f(x_1) = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x), f(x_2) = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$.

Théorème 3: (théorème des valeurs intermédiaires)

$$\left\{ \begin{array}{c} f \text{ continue sur } [a, b] \\ f(a).f(b) < 0 \end{array} \right. \Rightarrow \exists c \in [a, b] \text{ telque } f(c) = 0.$$

Prolongement par continuité:

Soit f une fonction définie sur un intervalle I sauf peut être en $x_0 \in I$. Supposons que f ait une limite finie l au point x_0, la fonction $\widetilde{f}$ définie par

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), \text{ si } x \in I \setminus \{x_0\} \\ l, \text{ si } x = x_0 \end{cases}.$$

coïncide avec f sur $I \setminus \{x_0\}$ et continue en x_0. On dira que $\widetilde{f}$ est un prolongement par continuité de f au point x_0.

Contnuité uniformed’une fonction sur un intervalle

Définition: Une fonction f définie sur un intervalle I est dite uniformement continue sur I si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x', x'' \in I \left(\left| x' - x'' \right| < \eta \Rightarrow \left| f\left(x'\right) - f\left(x''\right) \right| < \varepsilon \right).$$

η ne dépend que de ε seulement.

Remarque:

1. Toute fonction uniformement continue sur I est une fonction continue sur I. L’inverse est faux.
2. La continuité uniforme est la continuité sur tout l’intervalle, alors que la continuité sur l’intervalle I est la continuité en tout point de l’intervalle (η dépend de ε et x_0).

Théorème de Heine:

Soit f une fonction définie sur un intervalle fermé bornée $[a, b]$ alors

$$f \text{ est continue sur } [a, b] \Leftrightarrow f \text{ est uniformement continue sur } [a, b].$$

Fonctions Lipschitzienne:

Définition 1: Soit $f : I \to \mathbb{R}$ est dite Lipschitzienne, si

$$\exists k \geq 0, \forall x', x'' \in I; \left|f\left(x'\right) - f\left(x''\right)\right| \leq k\left|x' - x''\right|.$$

Définition 2: Soit $f : I \to \mathbb{R}$ est dite contractante si elle est Lipschitzienne avec $0 \leq k < 1$.

Théorème: Toute fonction Lipschitzienne est uniformement continue.

Théorème du point fixe:

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et prend ses valeurs dans $[a, b]$ $(f : [a, b] \to [a, b])$, alors il existe au moins un point $x_0 \in [a, b]$ tel que $\in f(x_0) = x_0$.

c'est à dire la droite $y = x$ rencontre le graphe de f.

Théorème 1: Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction contractante, alors f admet un point fixe et un seule.

Fonctions inverses des fonctions continues monotones sur I

Théorème des fonctions inverses:

Si la fonction f est continue et strictement monotone sue I alors l'application $f : I \to f(i)$ est bijective et $f^{-1} : f(I) \to I$ est continue et monotone sur $f(I)$ (la même monotonie que f)

Fonctions trigonométriques inverses:

1. Fonction $x \mapsto \arcsin x$:

Soit

$$\begin{array}{cccc} f: & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \to & [-1, 1] \\ & x & \mapsto & f(x) = \sin x \end{array}$$

f est continue sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc elle admet un inverse défini par

$$\begin{array}{cccc} f^{-1} & [-1, 1] & \to & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ & y & \mapsto & f^{-1}(y) = \arcsin y \end{array}$$

D'où on a

$$\left(\begin{array}{c} y = \sin x \\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} x = \arcsin y \\ y \in [-1, 1] \end{array}\right)$$

On a $\arcsin 0 = 0, \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}, \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}, \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

2. Fonction $x \mapsto \arccos x$: Soit

$$\begin{array}{rccc} f: & [0,\pi] & \to & [-1,1] \\ & x & \mapsto & f(x) = \cos x \end{array}$$

f est continue sur $[0,\pi]$ et strictement décroissante sur $]0,\pi[$ donc elle admet un inverse défini par

$$\begin{array}{rccc} f^{-1} & [-1,1] & \to & [0,\pi] \\ & y & \mapsto & f^{-1}(y) = \arccos y \end{array}$$

D'où on a

$$\left(\begin{array}{c} y = \cos x \\ x \in [0,\pi] \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} x = \arccos y \\ y \in [-1,1] \end{array}\right)$$

On a $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, $\arccos 1 = 0$, $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

3. Fonction $x \mapsto arctgx$:
Soit

$$\begin{array}{rccc} f: & \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = \cos x \end{array}$$

f est continue sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc elle admet un inverse défini par

$$\begin{array}{rccc} f^{-1} & \mathbb{R} & \rightarrow & \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ & y & \mapsto & f^{-1}(y) = arctgy \end{array}$$

D'où on a

$$\left(\begin{array}{c} y = tgx \\ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} x = arctgy \\ y \in \mathbb{R} \end{array} \right)$$

On a $arctg0 = 0$, $arctg1 = \frac{\pi}{4}$, $arctg(+\infty) = \frac{\pi}{2}, = arctg(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$.

Fonctions hyperboliques et leur inverses:

1. Fonction *sh* **et** *ch* :

Définition: On appelle sinus hyperbolique (resp. cosinus hyperbolique) la fonction notée

$$shx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ (resp. } chx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{).}$$

Variation:

ch étant paire et *sh* étant impaire, on peut se borner à les étudier dans l'intervalle $[0, +\infty[$.

La fonction *ch* est toujours positive.

La fonction *sh* est positive si $x > 0$ car $shx = \frac{e^x}{2}\left(1 - e^{-2x}\right) > 0$ si $x > 0$.

$(chx)' = shx$ et $(shx)' = chx$.

La fonction *chx* est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et la fonction *shx* est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

2. Fonction tangente hyperbolique:
On appelle fonction tangente hyperbolique (resp. cotangente hyperbolique) la fonction définie et notée par

$$thx = \frac{shx}{chx}, x \in \mathbb{R}(\text{ resp. } cothx = \frac{chx}{shx}, x \in \mathbb{R}^*).$$

Variation:
$(thx)' = \frac{1}{(chx)^2} > 0, (\coth x)' = \frac{1}{(shx)^2} > 0.$
$\lim\limits_{x \to +\infty} thx = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \cot hx = 1.$

Fonctions hyperboliques inverses:

1. Fonction $\arg chx$:

La fonction chx est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$ donc elle admet une fonction inverse continue et strictement croissante appelée argument cosinus hyperbolique notée $\arg chx$.

On a $x = chy \Leftrightarrow y = \arg chx, y \geq 0$.

Expression au moyen de logarithme

$y = \arg chx \Leftrightarrow x = chy$ et $shy = \sqrt{ch^2 x - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$,

or $chy + shy = e^y$ i.e. $x + \sqrt{x^2 - 1} = e^y \Leftrightarrow y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$.

d'où

$$\arg chx = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$$

2. Fonction $\arg shx$:
La fonction shx est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty]$ donc elle admet une fonction inverse continue et strictement croissante appelée argument sinus hyperbolique notée $\arg shx$.
On a $x = shy \Leftrightarrow y = \arg shx, y \geq 0$.

Expression au moyen de logarithme

$y = \arg shx \Leftrightarrow x = shy$ et $chy = \sqrt{sh^2x + 1} = \sqrt{x^2 + 1}$,
or $chy + shy = e^y$ i.e. $\sqrt{x^2+1} + x = e^y \Leftrightarrow y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.
d'où

$$\arg shx = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

3. Fonction $\arg thx$:
La fonction thx est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc elle admet une fonction inverse continue et strictement croissante sur $]-1,1[$ appelée argument tangente hyperbolique notée $\arg thx$.
On a $x = thy \Leftrightarrow y = \arg thx, x \in]-1,1[$.
Expression au moyen de logarithme
$y = \arg thx \Leftrightarrow x = thy$ $y = \arg thx \Leftrightarrow x = thy = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \Leftrightarrow x = \frac{1-e^{-2y}}{1+e^{-2y}} \Leftrightarrow x\left(1 + e^{-2y}\right) = 1 - e^{-2y}$
$$\Leftrightarrow (x+1)\, e^{-2y} = 1 - x \Leftrightarrow e^{-2y} = \frac{1-x}{1+x} \Leftrightarrow e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$$
$$\Leftrightarrow 2y = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), |x| < 1.$$
d'où
$$\arg thx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), |x| < 1.$$