Suite extraites ou sous-suites : (Analyse I)

Soit (U_n) une suite.

Une suite extraite ou sous-suite de (U_n) est une suite de la forme $(U_{\varphi(n)})$ où $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante (i.e. : $\forall n \in \mathbb{N} : \varphi'(n) > 0$)

Exemple : Soit (U_n) une suite alors : (U_{n+1}) et (U_{2n}) et (U_{2n+1}) sont des suites extraites de (U_n)

proposition : Soit (U_n) une suite

$\boxed{1}$ Si (U_n) C.V vers ℓ, alors toute sous-suite de (U_n) est C.V vers la même limite

i.e. $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell \Longrightarrow \forall (U_{\varphi(n)})$ sous-suite de (U_n) :

$$\lim_{n \to +\infty} U_{\varphi(n)} = \ell$$

Remarque : la reciproque est fausse

Contre exemple : Trouvons une sous-suite $(U_{\varphi(n)})$ de (U_n) C.V vers ℓ, mais (U_n) n'est pas C.V vers ℓ

⊛ $U_n = (-1)^n$ et $U_{2n} = 1$ sous suite (avec $\varphi(n) = 2n \nearrow$)

On a : $\lim U_{2n} = \lim 1 = 1$; mais $\lim U_n = \pm 1$

2) Si $(U_{\varphi(n)})$ une sous-suite de (U_n) est divergente, alors (U_n) est divergente.

3) Si (U_n) admet deux sous-suites de (U_n) C.V vers deux limites différentes, alors (U_n) est divergente

Suites réccurentes :

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Une suite réccurente est définie par : $\begin{cases} \text{le premier terme} \\ \text{et} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

Exemple :

Soit (U_n) une suite définit par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 1 + \sqrt{U_n} \end{cases} \quad \text{avec : } f(x) = 1 + \sqrt{x}$$

Théorème 1 : Soit f une fonction croissante et (U_n) une suite réccurente telle que : $\begin{cases} U_0 \\ \text{et } U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

Alors : (U_n) est monotone i.e.

$$\begin{cases} \text{si } U_0 \leqslant U_1 \Longrightarrow (U_n) \text{ est croissante} \\ \text{si } U_0 \geqslant U_1 \Longrightarrow (U_n) \text{ est décroissante} \end{cases}$$

Exemple Soit (U_n) une suite : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n + 1}{U_n + 2} \end{cases}$

(U_n) est-elle monotone ?

Solution : Soit $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$

Calculons $f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2} > 0 \Rightarrow f$ est croissante

Ainsi (d'après Th.) : (U_n) est monotone.

On a : $U_1 = \frac{U_0+1}{U_0+2} = \frac{1}{2}$, donc : $U_1 - U_0 = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow (U_n)$ est croissante

Théorème 2 :

1) $(U_n) \nearrow$ et majorée par $M \Longrightarrow (U_n)$ C.V

2) $(U_n) \searrow$ et minorée par $m \Longrightarrow (U_n)$ C.V

Remarque : pour calculer $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

On résoudre l'équation $\ell = f(\ell)$

Exercice : Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par

$f(x) = \frac{x^2}{2-x^2}$. On considère (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_0 \in [0,1[\\ \text{et } U_{n+1} = \frac{U_n^2}{2-U_n^2} \end{cases}$$

1) Montrer que : $\forall x \in [0,1[\ : \ 0 \leq f(x) < 1$

2) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} : \ 0 \leq U_n < 1$

3) Montrer que (U_n) est décroissante.

4) (U_n) est-elle une limite et si oui laquelle ?

proposition :

* $x \in [a,b] \xrightarrow{f \nearrow \text{ sur } [a,b]} f(x) \in [f(a), f(b)]$

* $x \in [a,b] \xrightarrow{f \searrow \text{ sur } [a,b]} f(x) \in [f(b), f(a)]$

Solution :

1) Calculons :

$$f'(x) = \frac{4x}{(2-x^2)^2} \geqslant 0 \text{ sur } [0,1[$$

donc : f est $\nearrow$ sur $[0,1[$

$$x \in [0,1[\implies f(x) \in [f(0); f(1)[$$
$$\implies f(x) \in [0,1[$$
$$\implies 0 \leqslant f(x) < 1$$

2) On utilise la démonstration par réccurence.

On pose : $P(n) : 0 \leqslant U_n < 1$

* pour : $P(0) : 0 \leqslant U_0 < 1$ (vraie car $U_0 \in [0,1[$)

* On suppose $P(n) : 0 \leqslant U_n < 1$ est vraie et on démontre $P(n+1) : 0 \leqslant U_{n+1} < 1$

i.e. $P(n+1) : 0 \leqslant f(U_n) < 1$

On a : $\forall x \in [0,1[: f(x) \in [0,1[$

On remplace x par U_n, donc $f(U_n) \in [0,1[$ i.e. $0 \leqslant f(U_n) < 1$ (vraie)

i.e. $P(n+1)$ est vraie

Donc $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leqslant U_n < 1$

3) Montrons que (U_n) est $\searrow$

On a : $U_{n+1} = f(U_n)$ et f est $\nearrow$ alors d'après le th. (U_n) est monotone.

Calculons :

$$U_1 - U_0 = f(U_0) - U_0 = \frac{U_0^2}{2-U_0^2} - U_0$$
$$= \frac{U_0(U_0^2+U_0-2)}{2-U_0^2}$$

U_n	$-\infty$		-2		$-\sqrt{2}$		0		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$U_0^2+U_0-2$		+	0	−		−		−	0	+		+	
U_0		−		−		−	0	+		+		+	
$2-U_0^2$		−		−	0	+		+		+	0	−	
U_1-U_0		+	0	−	‖	+	0	−	0	+	‖	−	

Comme $U_n \in [0,1[$,

alors : $U_1 - U_0 \leqslant 0 \Rightarrow (U_n) \searrow$

4) On a : $(U_n) \searrow$ et minorée par 0 alors : (U_n) est C.V

Calculons : $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

On résoudre : $\ell = f(\ell)$

i.e. $\ell = \frac{\ell^2}{2-\ell^2} \implies \ell(-\ell^2 - \ell + 2) = 0$

$$\begin{cases} \ell = \boxed{0} \text{ car } U_n \in [0,1[\\ \ell = 1 \ \times \\ \ell = 2 \ \times \end{cases}$$