Université des Sciences et de la Technologie d'Oran. 2023-2024
Faculté des Mathématiques − Informatique − LMD − Informatique - 1ère Année.
Analyse1

Fiche de TD4
Fonctions réelles à variable réelle
Limites et continuité

Exercice1.
I. Donner le domaine de définition des fonctions suivantes:

$$1. f(x) = \frac{5x+4}{x^2+3x+2}, 2. f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}, 3. f(x) = \sqrt{4-3x^2},$$

$$4. f(x) = tg(2x), 5. f(x) = \frac{x \sin \frac{1}{x}}{\sqrt{1-x^2}}, 6. f(x) = \begin{cases} \ln x, & \text{si } x \geq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{1-x}}, & \text{si } x < 1 \end{cases}.$$

II. Déterminer , $f \circ f, g \circ g, f \circ g, g \circ f$ dans les cas suivants:

$$\begin{aligned} 1. f(x) &= 1 - x^3, g(x) = \frac{1}{x}. \\ 2. f(x) &= \sqrt{2x+3}, g(x) = x^2 + 2. \end{aligned}$$

Exercice2. I. Calculer les limites suivantes:

$$1. \lim_{\substack{> \\ x \to -3}} \frac{1}{-2x-6}, 2. \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}+2-3x}{x}, 3. \lim_{x \to -\infty} \frac{2x+5}{\sqrt{-x}}, 4. \lim_{\substack{> \\ x \to 2}} \frac{x^2-4}{\sqrt{2}-\sqrt{x}},$$

$$5. \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x, a > 0, 6. \lim_{x \to 0} e^{\frac{|x|}{x}}, 7. \lim_{x \to 1} |x-1| \cos\left(\frac{1}{x-1}\right),$$

$$8. \lim_{x \to 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{x}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, 9. \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}.$$

II. En utilisant la définition de la limite d'une fonction, montrer que:

$$1. \lim_{x \to 4} (2x-1) = 7, 2. \lim_{x \to +\infty} \frac{3x-1}{2x+1} = \frac{3}{2}, 3. \lim_{x \to +\infty} \ln(\ln x) = +\infty.$$

Exercice3. En utilisant les fonctions équivalentes, calculer les limites suivantes:

$$1. \lim_{x \to 0} \frac{(1-\cos x)(1+2x)}{x^2 - x^4}, 2. \lim_{x \to 0} \frac{e^{\cos x} - e}{\cos x - 1}, 3. \lim_{x \to 0} x(3+x) \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x} \sin \sqrt{x}},$$

$$4. \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{tg(6x)}, 5. \lim_{x \to 0} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x - \sin x}}, 6. \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x, a > 1, b > 1.$$

Exercice4. Etudier la continuité des fonctions suivantes sur le domaine de définition et possibilité de prolongement par continuité.

$$1.f_1(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}, 2.f_2(x)=x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right), 3.f_3(x)=\frac{\sin(\pi x)}{|x-1|}.$$

$$4.f_4(x)=\left\{\begin{array}{c} e^x, x\geq 0 \\ \cos x, x<0 \end{array}\right., 5.f_5(x)=\left\{\begin{array}{c} x^2\cos\frac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{array}\right.,$$

$$6.f_6(x)=\left\{\begin{array}{c} x+1, x\leq -1 \\ \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right), x>-1 \end{array}\right., 7.f_7(x)=\left\{\begin{array}{c} x^2 arctg\frac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{array}\right..$$

Exercice5. Soit la fonction définie par:

$$f(x)=\left\{\begin{array}{c} \frac{\sin x}{x-\pi}, x\neq\pi \\ \alpha, x=\pi \end{array}\right.$$

Déterminer $\alpha\in\mathbb{R}$ pour que f soit continue sur son domaine de définition.

Exercice6.

1. Montrer que $xe^x=1$ admet au moins une solution dans $]0,1[$.
2. Montrer que l'équation $4x^3-3x+\frac{1}{2}=0$ admet exactement trois solutions dans $]-1,1[$.

Exercice7.

1. Montrer que $\forall x\in[-1,1], \sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$.
2. Résoudre l'équation suivante:

$$\arcsin x+\arcsin\left(\sqrt{3}x\right)=\frac{\pi}{2}.$$

3. Déterminer le domaine de définition de la fonction f puis la simplifier

$$f(x)=\arg ch\left(\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right).$$