ClasePractica1

Sherlyn Ballestero Cruz

September 24, 2023

1. Dq el conjunto de todos los números primos es infinto.
Supongamos que el conjunto $P = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ que contiene todos los números primos es finito.
Se conoce que todo úmero tiene al menso un divisor ptimo, por teoría de números.
Sea el número $p_1p_2...p_n + 1$, el resto de dividir este número por cualquiera de los n primos comprendidos en P es 1,por tanto existe un primo no contenido en P que divide a este número. Contradicción!!!!
2. Dq un número es divisible por 3 si y solo si la suma de sus dígitos es divisible por 3. Tengamos en cuenta que:
$10 \equiv 1(3)$
$10^i \equiv 1(3)$
$a^i \equiv 1(3)$
$10^i a^i \equiv a^i(3)$
Dado que todo número se puede escribir como: $d_n 10^n ... d_1 = \sum_{i=0}^{n} d_i 10^i$ y que $\sum_{i=0}^{n} d_i 10^i \equiv \sum_{i=0}^{n} d_i(3)$ por el analisis inicial, queda demostrado que todo número deja resto con tres lo mismo que deja la suma de sus dígitos.
3. Sea S un conjunto finito de enteros positivos. Asumiendo que hay exactamente 2023 pares ordenados (x, y) en $S \times S$ tal que el producto xy es un cuadrado perfecto. Pruebe que es posible encontrar al menos 4 elementos distintos en S tales que ninguno de sus productos dos a dos sea un cuadrado perfecto.
Sea P el conjunto de los pares $< x, y >$ tal que $xy = a^2$ para algún a y $x, y \in S$
Tengamos en cuenta que:
$< x, x > \in P, \forall x \in S$pues $xx = x^2 \Rightarrow P$ es reflexivo. Notese también que $< x, y > \in P$ si $xy = a^2$ y $xy = yx = a^2 \Rightarrow < y, x > \in P$. Por tanto se cumple la simetría.
Además Si $< x, y \in P$ y $< x, z \in P \Rightarrow$
$xy = a^2$
$xz = b^2$
$xy^2z = a^2b^2$
$xy^2z = a^2b^2$
$xz = \frac{a^2b^2}{y^2}$
Luego $< x, y > \in P$ por tanto se cumple la transitividad.
Nos encontramos ante una relación de equivalencia.Luego si establecemos A/R se puede observar que: en cada clase de equivalencia encontraremos los elementos que estaran rlacionados unos conotro en la relación y si tomo dos elementos de clases distintas cuando los multiplique no habrá manera que este de a^2 para algún a, de pasar esto entonces el par perteneciese a la misma clase. Basta probar que se deben formar al menso cuatro clases de

equivalencia.
Demostremos que en S/R tiene al menos 4 clases de equivalencia.
Observemos que como $|P| = 2023$ y que dado cada clase de equivalencia con x cantidad de elementos, como todos estan relacionados con todos esos x elementos representan x^2 de los 2023 pares, si solo hubiese una clase de equivalencia, pudiesemos observar una clara contradicción dada por que 2023 no es un cuadrado.
Suponiendo que hay dos clases de equivalencias entonces se podría decir que: $i^2 + j^2 = 2023$, siendo i y j las cardinalidades de ambas clases. Pero si analizamos la congruencia con 4 de los cuadrados , se obtiene que estos dejan resto 1 o 0 y que 2023 deja resto 3 los que nos muestra que es imposible obtener 2023 a opartir de sumar dos cuadrados.
Supongamos que existen tres clases de equivalencia, aqui veremos la contradicción a partir de los restos que dejan con 8 dichos cuadrados, 2023 deja resto 7, y los cuadrados dejan resto, 1,4 o 0 , no existe manera con estos tres númerosa obtener la suma de 7 por lo que es imposible que hayan exactamente 3 clases de equivalencia.
Veamos que existe al menos una combinación de 4 cuadrados que me darán como resulktado 2023, los que fueron posible encontrar después de una exaustiva busquedad: $42^[2] + 15^2 + 5^2 + 3^2 = 2023$.
4. Dq de un conjunto de premisas lógicas donde existe una contradicción se puede deducir cualquier proposición. $TA\curlywedge \neg A$
$T \vdash 0$
$T \vdash 0 \curlyvee q$
$T \vdash 1 \Rightarrow q$
$T \vdash q$

5. Dq, dado que M contiene a todos los conjuntos que no se contienen a si mismos, M no es un conjunto.
Sea M el conjunto que contiene a todos los conjuntos que no se contienen a si mismos.
Si M no se contiene a si mismo ⇒M $\in M$ (Contradicción) Si M se contiene $\Rightarrow porladefinicióndeMsecumpleque$M $\in M$ (Contradicción) Luego por reducción al absurdo se puede concluir con que M no es un conjunto.

6. Dq, dado un grafo G, si existe un camino de u a v entonces existe un camino simple de u a v. Sea C el conjunto que contiene las distancias de los caminos de u a v.
Existe camino de u a v por datos.
Luego C no está vacio y las distancias representan son enteros no negativos,por ley del buen ordenamiento existe elemento minimo m.

Sea $u, ...v$ un camino de longitud m de u a v en el grafo. Sup[ongamos que existe un ciclo, si eliminamos los elementos del ciclo aun podremos llegar de u a v y este nuevo camino tiene longitud inferior a m (contradicción).
Se puede deducir que existe camino simple de u a v.

7. Se quiere dar un vuelto de una cantidad de dinero $x, x > 8$. Dq es posible realizarlo usando sĺo denominaciones de billetes de 3 y 5 pesos. Demostremos por inducción.
Caso Base: $x = 9 = 3y + 5z$
$y = 3yz = 0$
Supongamos que se cumple para x=n
Para $z \neq 0$:
$n = 3y + 5Z$ $n + 1 = 3y + 5z + 1$
de donde:
$5z - 2 = 3 + 5(z - 1)$
luego: como 0=2-2
$n + 1 = 3y + 5z + 1 + 0$
$n + 1 = 3y + 5z + 1 + 2 - 2$
$n + 1 = 3y + (5z - 2) + 1 + 2$
$n + 1 = 3y + 3 + 5(z - 1) + 3$
$n + 1 = 3(y + 2) + 5(z - 1)$
$\Rightarrow$ Se cumple para todo n.
Veamos para z=0
$n = 3j, n >= 8, j >= 3$
$n + 1 = 5 * 2 + 3(j - 3)$
$\Rightarrow$ Se cumple para todo n.

8. Dq, dado un grafo G, y un camino P de a a b y un camino Q de a a b, con $P \neq Q$, entonces existe un ciclo en G. Demostremos por Inducción.
Caso Base:Para tres nodos se cumple, verificable
Supongamos que se cumple $\forall m, 3 =< m < n$
Supongamos que hay una arista común para ambos caminos, si retiramos dicha arista entonces caemos en uno de los casos hipótesis.
Si la arista no es común entonces, sean los caminos: $a, p_1...b$ y $a, p_2...b$, como existe camino de p_1aa por teorema demosttrado anteriormente se tiene que existe camino simple, y con la arista $< a, p_1 >$ se completa el ciclo.

Ejercicios de razonamiento lógico

3. Demuestre que el algoritmo de ordenación por mínimos sucesivos siempre produce un array ordenado.
Supongamos que luego de aplicar el algoritmo a determinado array este no queda ordenado, donde dados dos elementos $a_k > a_{k+1}$ obtenemos que queda primero el elemento a_k, ubicandonos en el algorimo en el momento en que

se analiza el elemneto correspondiente a la posición donde se encuentra el elemento a_k, es hora de decidir el elemento correspondiente y este debe seleccionar el mínimo de todos los elementos que aun no se han insertado, pero como $a_k > a_{k+1}$ y a_{k+1} no se ha insertado entonces en dicho momento a_k no será el elemento mínimo.

4.Demuestre que el principio de inducción y el principio de buen ordenamiento son equivalentes. $PIM \Rightarrow PBO$
En un conjunto de enteros positivos diferente del vacío, con un elemento el ínimo existe y es precisamente ese elemento.
Supongamos que en todo conjunto de enteros no negativos, de cardinalidad n tiene elemento mínimo.
Sea un conjunto arbitrario de cardinalidad n+1, tomamos un elemento al azar,. ahora se tiene un conjunto de cardinalidad n y este tiene elemento mínimo, lo comparamos con el que se tomó y nos quedamos con el menor, luego tambieén en n+1 existe el mínimo.
$PBO \Rightarrow PIM$
Sea *Avacio*, el conjunto de todos los elementos que no cumplen determinada propiedad, y además se sabe que se cumple $P(1)$ y $P(n) \Rightarrow P(n+1), \forall n >= 1$
Existe el mínimo por POB, sea m,luego:
$m >= 1$
$m > 2$
$m - 1 > 1 \Rightarrow P(m-1)$
Por tanto como $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ se tiene $P(m)$, Contradicción