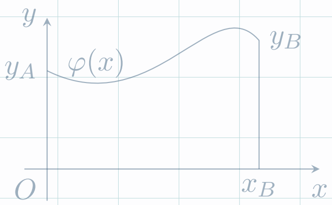


19/10/2024

Analysis

Complex Analysis

(First Edition)

Sherr1

$$
\begin{aligned}
i\hbar\partial_t\psi(\boldsymbol{r},t) &= H\psi(\boldsymbol{r},t) \\
&= \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\boldsymbol{r})\right]\psi(\boldsymbol{r},t)
\end{aligned}
$$

Nankai University

1 First Class(24.10.19)

1.1 全纯函数列

逐点收敛、一致收敛、紧一致收敛

Definition 1.1 一致收敛

在 D 上一致收敛：$\forall \epsilon > 0$，$\exists N, \forall n > N$，$\forall z \in D$，$|f_n(z) - f(z)| < \delta$，记作 $f_n(z) \rightrightarrows f(z)$.

Definition 1.2 紧一致收敛

在 D 上紧一致收敛：$\forall F \in D$，F' 紧集，都有 $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 D 上一致收敛.

Example 1.1 紧一致收敛但非一致收敛

考虑：$f_n(z) = z^n$，$D = \{z \,|\, |z| < 1\}$ 为**开集**，$\{f_n(z)\}$ 在 D 上不一致收敛.

$\epsilon_0 = \dfrac{1}{2}$，$\forall N \in \mathbb{Z}^+$，取一个 $|z| < 1$，$|z^n| \geq \epsilon_0$ 不一致收敛.

考虑任一紧集 $F \subseteq D$，$\exists r \in (0,1)$ 使 $\overline{B(0,r)} \supseteq F$

事实上 $f_n(z)$ 在 F 上一致收敛，$|z| \leq r < 1$，$\forall \epsilon > 0$，$\exists N \in \mathbb{Z}^+$，使 $r^n < \epsilon$，$|f_n(z)| = |z|^n \leq r^n < \epsilon$

$\Rightarrow \{f_n(z)\}$ 在 F 上一致收敛 $\Rightarrow \{f_n(z)\}$ 在 D 上紧一致收敛.

Theorem 1.1

$\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty} \in H(\Omega)$，$\{f_n(z)\}$ 紧一致收敛于 f，则 $f \in H(\Omega)$.

Proof Morera 定理：只需证明对任意闭路径 $\Gamma \in \Omega^o$ 都有 $\displaystyle\int_\Gamma f(z)dz = 0$

$\{f_n(z)\} \in H(\Omega) \Rightarrow \displaystyle\int_\Gamma f_k(z)dz = 0 (\forall k \in \mathbb{Z}^+)$

$f_n(z)$ 在 Γ 上紧一致收敛于 $f \Rightarrow 0 = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_\Gamma f_n(z)dz = \int_\Gamma f(z)dz \quad \left(\int_\Gamma |f_n(z) - f(z)|\, dz \to 0\right)$

$\Rightarrow f(z) \in H(\Omega)$. □

Theorem 1.2

在 $Theorem 1.1$ 条件下，$\left\{f_n^{(k)}(z)\right\}$ 也在 Ω 上紧一致收敛于 $f^{(k)}(z)$. $(k \in \mathbb{N})$

Analysis $\left|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)\right| \leftrightarrow |f_n(z) - f(z)|$

$F(z) = f_n(z) - f(z)$，在紧集上估计 $F^{(k)}(z)$，建立 $\displaystyle\sup_{z\in C}\left|f^{(k)}(z)\right|$ 与 $\displaystyle\sup_{z\in C}|f(z)|$ 之间的关系.

取 $C : \{z_0 \,|\, |z_0 - z| \leq \delta\}$(C:Compact subset of Ω) C 紧集，每个元素都离 $\partial\Omega$ 有距离. □

Proof 令 $F(z) = f_n(z) - f(z) \in H(\Omega)$

$$\left|F^{(k)}(z)\right| = \left|\frac{k!}{2\pi i}\int_C \frac{F(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}d\xi\right| \leq \frac{k!}{2\pi i}\frac{\sup_{z\in C}|F(z)|}{\delta^{k+1}} \cdot 2\pi\delta = \frac{k!}{\delta^k}\sup_{z\in C}|F(z)|$$

由 $f_n(z) \rightrightarrows f(z)$ 知 $n \to \infty$ 时，$\displaystyle\sup_{z\in C}|F(z)| \to 0 \Rightarrow f_n^{(k)}(z)$ 在 Ω 上紧一致收敛于 $f^{(k)}(z)$. □

Theorem 1.3 (按照积分定义全纯函数)

$f(z)=\int_0^1 F(z,s)ds$ ①固定 s，$F(z,s)$ 关于 z 全纯 ②$F(z,s)\in C(\Omega\times[0,1])$ 则有 $f\in H(\Omega)$.

Proof 法 1：由 Morera 定理，只需证明对 Ω 中的闭路径 Γ 有：$0=\int_\Gamma f(z)dz$

$0=\int_\Gamma\int_0^1 F(z,s)dsdz=\int_0^1(\int_\Gamma F(z,s)dz)ds \xlongequal[\text{Cauchy 定理}]{\text{由①}} 0$，故由 Morera 定理 $\Rightarrow f\in H(\Omega)$. □

Proof 法 2：$f_n(z)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}F(z,\frac{k}{n})\in H(\Omega)$(Riemann 逼近)

我们只需证明 $f_n(z)$ 在 Ω 上紧一致收敛于 $f(z)$，进而由 $Theorem1.1$ 可知 $f\in H(\Omega)$

对于 $\forall\Omega$ 上的紧集 C，$|f_n(z)-f(z)|=\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}F(z,\frac{k}{n})-\int_0^1 F(z,s)ds\right|$

$=\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}(F(z,\frac{k}{n})-F(z,s))ds\right|\le\sum_{k=1}^{n}\int_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left|F(z,\frac{k}{n})-F(z,s)\right|ds(\clubsuit)$

$F(z,s)$ 在紧集 C 上一致收敛，$\forall\epsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{Z}^+$，$\forall n>N$ 都有：

$d((z_1,s_1),(z_2,s_2))<\frac{1}{n}$ 时，$|F(z_1,s_1)-F(z_2,s_2)|<\epsilon$；代入 $(\clubsuit)$，则 $n>N$ 时：

$|f_n(z)-f(z)|\le\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\epsilon ds=\epsilon\Rightarrow f_n(z)$ 紧一致收敛于 $f(z)$，进而由 $Theorem1.1\Rightarrow f\in H(\Omega)$. □

1.2 幂级数 (初初步)

Theorem 1.4

任意幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n$，$\exists 0<R<+\infty$ 使：

$(i)\,|z|<R$ 时：$\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n$ 绝对收敛 $(ii)\,|z|>R$ 时：$\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n$ 发散

$\frac{1}{R}=\lim_{n\to+\infty}\sup\sqrt[n]{a_n}$

Theorem 1.5

$f\in H(\Omega),D:z_0$ 为中心的一个圆盘 $\bar{D}\in\Omega$,则 f 在 z_0 上展成幂级数 $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z-z_0)^n(z\in D)$

对 $\forall n\ge 0$ 有 $a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(C=\partial D)$

Proof 由柯西积分公式：$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{(\xi-z_0)-(z-z_0)}=\frac{1}{\xi-z_0}\frac{\xi-z_0}{(\xi-z_0)-(z-z_0)}=\frac{1}{\xi-z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\xi-z_0}}$$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\xi-z_0}}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^n d\xi$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left((\frac{1}{2\pi i})\int_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi\right)(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$ □

Theorem 1.6 零点孤立性

f 在连通开集Ω 上全纯，$z_0 \in \Omega$ 为 f 的零点，f 在 Ω 上不恒为 0，$\exists z_0$ 邻域 $U \subset \Omega$ 及 U 上非零函数 g 及唯一 $n \in \mathbb{Z}^+$ 使对 $\forall z \in U$，$f(z) = (z - z_0)^n g(z)(n:$ 零点的阶数$)$.

Proof Ω 连通，$\forall z_0$，$\exists z_0$ 的某个邻域 U，f 在 z_0 的邻域 U 上恒不为 0；

U 上 $\to f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \overset{\text{最小使}a_n\neq 0\text{的}n}{=\!=\!=\!=} (z - z_0)^n(a_n + a_{n-1}(z - z_0) + ...) := (z - z_0)^n g(z)$

z 离 z_0 充分近 $g(z) \neq 0$；若不唯一，则有 $f(z) = (z - z_0)^n g(z) = (z - z_0)^m h(z)$，不妨设 $m > n$，

则 $g(z) = (z - z_0)^{m-n} h(z)$，当 $z \to z_0$ 时：$g(z) \to 0$ 矛盾！ □

Exercise 1.1

设 $f \in H(\mathbb{C})$，$\forall z_0 \in \mathbb{C}$，$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$，系数 c_n 至少由一个为 0.

证明：f 为多项式.

Solution 若 $\exists n$，$f^{(n)}(z) \equiv 0$ 则 f 为多项式. $(c_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!})$

对 $\forall n$，$f^{(n)}(z) = 0$ 的根至多可数 (否则与零点孤立性矛盾！)(♣)

$S = \bigcup_{k=0}^{\infty} \left\{z \in C | f^{(k)}(z) = 0\right\}$ 至多可数；

由题意知，$\forall z \in \mathbb{C}$，$\exists n$ 使 $f^{(n)}(z) = 0 \Rightarrow C \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} \left\{z \in C | f^{(k)}(z) = 0\right\}$ 这与 S 的至多可数性矛盾！

$\Rightarrow f$ 为多项式. □

1.3 奇点

Definition 1.3 奇点

$$\begin{cases} \textbf{可去奇点：}\text{可以全纯延拓} \\ \textbf{极点：}\text{如 } f(z) = \dfrac{1}{z} \text{ 在 } z = 0 \text{ 处附近无界} \\ \textbf{本性奇点：}\text{有界，不能全纯延拓（振荡）} \end{cases}$$

1.3.1 可去奇点

Theorem 1.7 可去奇点的 Riemann 定理

f 在开集 Ω 上除 z_0 无定义以外都全纯，若 f 在 $\Omega \backslash \{z_0\}$ 有界，则 z_0 为 f 的可去奇点.

Proof $D : z_0$ 为圆心的圆盘，$C : \partial D$ 取正方向

由 $Theorem 1.3$ 只需证明 $\forall z \neq z_0$ 有 $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_C \dfrac{\xi}{\xi - z} dz (z \in D)$(♣)

由多联通域上的柯西积分定理有：$\displaystyle\int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \int_{\gamma_\epsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \int_{\gamma_{\epsilon'}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0$

由 Cauchy 积分公式 $f(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\epsilon'}}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$(方向相反)

估计 $\int_{\gamma_\epsilon}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi\le\frac{\sup\limits_{\xi\in\gamma_\epsilon}|f(\xi)|}{\inf\limits_{\xi\in\gamma_\epsilon}|\xi-z|}\cdot 2\pi\epsilon\to 0(\epsilon\to 0^+)\Rightarrow(\clubsuit)$ 成立，由 $Theorem 1.3\Rightarrow z_0$ 为可去极点 □

Remark 其中 γ_ϵ 和 γ'_ϵ 分别表示以 z 和 z_0 为中心，ϵ 为半径的两个小圆周，方向取负方向. □

1.3.2 极点 (看成 $\frac{1}{f}$ 的零点)

Corollary 1.1

z_0 为 f 极点 $\iff$ $z\to z_0$ 时：$|f(z)|\to\infty$

Proof "$\Rightarrow$"：z_0 为 $\frac{1}{f}$ 的零点，$z\to z_0$ 时，$|f(z)|\to+\infty$

"$\Leftarrow$"：若 $z\to z_0$ 时，$|f(z)|\to+\infty$，$\frac{1}{f}\to 0(z\to z_0)$，$\frac{1}{f}$ 在 0 附近有界 $\xrightarrow{Theorem 1.7}$ z_0 为 $\frac{1}{f}$ 的可去奇点 $\Rightarrow z_0$ 为极点 □

Theorem 1.8

z_0 为 f 的极点，在 $Theorem 1.6$ 条件下：$\frac{1}{f}=(z-z_0)^n g(z)\Rightarrow f(z)=(z-z_0)^{-n}G(z)\,(G(z)$ 全纯)

Theorem 1.9

$Theorem 1.8$ 中 $f(z)=(z-z_0)^{-n}(b_0+b_1(z-z_0)+...+b_{n-1}(z-z_0)^{n-1}+H(z)(z-z_0)^n)$

$$=\frac{b_0}{(z-z_0)^n}+\frac{b_1}{(z-z_0)^{n-1}}+...+\frac{b_n}{z-z_0}+H(z):=\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}+\frac{a_{-(n-1)}}{(z-z_0)^{n-1}}+...+\frac{a_1}{z-z_0}+H(z)$$

Theorem 1.10

包含 z_0 的闭路径 Γ，$\int_\Gamma f(z)dz=\int_\Gamma\left(\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}+\frac{a_{-(n-1)}}{(z-z_0)^{n-1}}+...+\frac{a_1}{z-z_0}+H(z)\right)dz=\int_\Gamma\frac{a_{-1}}{z-z_0}dz=2\pi i a_{-1}$，其中 a_{-1} 称为 f 在该极点的**留数**，记作 $Res(f,z_0)$.

Example 1.2 怎么求留数

$n=1$：$f(z)=\frac{a_{-1}}{z-z_0}+H(z)$，$a_{-1}=\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$

对于普遍的 n：$(z-z_0)^n f(z)=a_{-n}+a_{-(n-1)}(z-z_0)+...+a_{-1}(z-z_0)^{n-1}+(z-z_0)^nH(z)$

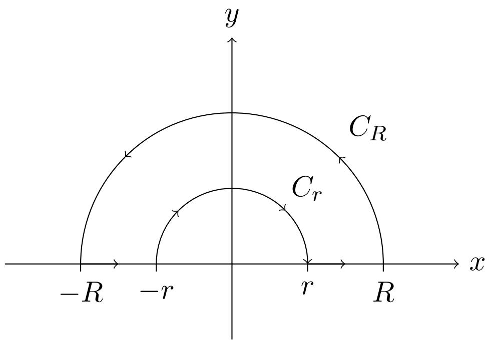
$$a_{-1}=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1}((z-z_0)^n f(z))$$

$f(z)=(z-z_0)^{-n}G(z)\Rightarrow(z-z_0)^n f(z)=g(z)\to holomophic.$

Exercise 1.2 用留数算积分的例子

求证：$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$

Solution (**围道积分法**)) 令 $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z}$，考虑如下的围道：



由柯西积分定理：$\displaystyle\int_{-R}^{-r}+\int_{r}^{R}+\int_{C_r}+\int_{C_R}=0(\clubsuit)$

$\displaystyle\int_{C_r}=-\int_0^{\pi}\frac{e^{ire^{i\theta}}}{re^{i\theta}}ire^{i\theta}d\theta=-i\int_0^{\pi}e^{ir\theta}d\theta\xrightarrow{r\to0^+}-\pi i$

$\displaystyle\left|\int_{C_R}\right|=\left|\int_0^{2\pi}\frac{e^{iRe^{i\theta}}}{Re^{i\theta}}iRe^{i\theta}d\theta\right|=\left|i\int_0^{2\pi}e^{iR\theta}d\theta\right|=\left|i\int_0^{2\pi}e^{R(\cos\theta+i\sin\theta)}d\theta\right|$

$\displaystyle\le\int_0^{2\pi}e^{-R\sin\theta}\left|e^{iR\cos\theta}\right|d\theta=\int_0^{2\pi}e^{-R\sin\theta}d\theta\to0(R\to+\infty)$

另一面，$\displaystyle\int_{-R}^{-r}\frac{e^{iz}}{z}+\int_{r}^{R}\frac{e^{iz}}{z}=\int_{-R}^{-r}\frac{\cos z+\sin z}{z}dz+\int_{r}^{R}\frac{\cos z+\sin z}{z}dz=2i\int_{r}^{R}\frac{\sin z}{z}dz$

令 $R\to+\infty$，$r\to0+$，结合 ($\clubsuit$) 可知，$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}=\frac{-(-\pi i)}{2i}=\frac{\pi}{2}$ □

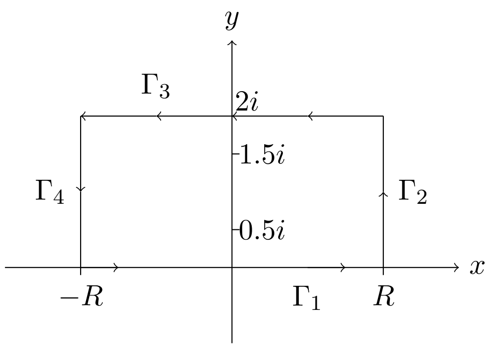
Remark 选择合适的周线 (圆 [挖孔]、矩形)! □

Exercise 1.3

求证：$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-2\pi ix\xi}}{\cosh\pi x}dx=\frac{1}{\cosh\pi\xi}(\cosh x\frac{e^x+e^{-x}}{2}).$

Solution 令 $f(z)=\dfrac{e^{-2\pi iz\xi}}{\cosh\pi z}$，$\cosh\pi x=0\Rightarrow e^{\pi x}+e^{-\pi x}=0\Rightarrow x=\dfrac{i}{2}\ or\ \dfrac{3i}{2}$

我们取分母周期为 $2i>\max\left\{\dfrac{i}{2},\dfrac{3i}{2}\right\}$，考虑如下的围道：



$\displaystyle\lim_{z\to\frac{i}{2}}(z-\frac{i}{2})f(z)=\lim_{z\to\frac{i}{2}}(z-\frac{i}{2})\frac{2e^{-2\pi iz\xi}}{e^{\pi z}+e^{-\pi z}}=e^{2\pi iz\xi}\frac{2(z-\frac{i}{2})}{e^{\pi z}+e^{-\pi z}}=\frac{e^{\pi\xi}}{\pi i}$

同理：$\displaystyle\lim_{z\to\frac{3i}{2}}(z-\frac{3i}{2})f(z)=-\frac{e^{3\pi\xi}}{\pi i}$

由留数定理可知：$\left(\int_{\Gamma_1}+\int_{\Gamma_2}+\int_{\Gamma_3}+\int_{\Gamma_4}\right)f(z)dz=2(e^{\pi\xi}-e^{3\pi\xi})\quad(\clubsuit)$，其中记我们想要的 $\int_{\Gamma_1}=I$

$\int_{\Gamma_1}=\int_{-R}^{R}\frac{e^{-2\pi ix\xi}}{\cosh\pi x}dx\to I(R\to+\infty)$

$\int_{\Gamma_3}=-\int_{-R}^{R}\frac{e^{-2\pi i(x+2i)\xi}}{\cosh\pi x}dx=e^{4\pi\xi}\int_{-R}^{R}\frac{e^{-2\pi ix\xi}}{\cosh\pi x}dx\to e^{4\pi\xi}I(R\to+\infty)$

$\left|\int_{\Gamma 2}\right|=\left|\int_0^2 i\frac{e^{-2\pi(ix+R)\xi}}{\cosh\pi(ix+R)}dx\right|\leq\int_0^2\left|\frac{2e^{-2\pi x\xi}}{e^{\pi ix}+e^{-\pi ix}}\right|dx$

$|cosh\pi x|=\frac{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}{2}\geq\frac{1}{2}\left|e^{\pi x}-e^{-\pi x}\right|\geq\frac{1}{2}(e^{\pi R}-e^{-\pi R})\to+\infty$

$\Rightarrow\left|\int_{\Gamma 2}\right|\to 0(R\to=\infty)$，同理 $\Rightarrow\left|\int_{\Gamma 4}\right|\to 0(R\to=\infty)$

令 $R\to+\infty$ 并结合 $(\clubsuit)$ 我们可得：

$(1-e^{4\pi\xi})I=-2e^{2\pi\xi}(e^{\pi\xi}-e^{-\pi\xi})\Rightarrow I=\frac{2(e^{\pi\xi}-e^{-\pi\xi})}{e^{\pi\xi}-e^{-\pi\xi}e^{\pi\xi}+e^{-\pi\xi}}=\frac{2}{e^{\pi\xi}+e^{-\pi\xi}}=\frac{1}{\cosh\pi\xi}$ $\square$

2 Appendix

Theorem .1

Theorem.

Definition .1

Definition.

Example .1

Example.

Lemma .1

Lemma

Proposition .1

Proposition

Corollary .1

Corollary.

Exercise .1

Exercise.

Proof Proof. □

Solution Solution. □

Remark Remark. □