

数分问题

杨锐 2313878

1 级数问题

Exercise 1.1

设 $\alpha > 0$, 讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \sqrt{n}}{n^{\alpha}}$$

的收敛性 (若收敛, 精确到条件收敛和绝对收敛)

Solution

① $\alpha > 1$ 时,

$$\left| \frac{\cos \sqrt{n}}{n^{\alpha}} \right|$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ 收敛, 又

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos \sqrt{n}}{n^{\alpha}} \right| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \sqrt{n}}{n^{\alpha}}$ 绝对收敛

② $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ 时, 对充分大的 $k \in \mathbb{N}^+, \exists$

□