1.4 连通性

段鑫

2018 年 10 月 6 日

定义 1 (连通). 设图 G 是非空的 (至少有一个顶点)。如果 G 中任意两个顶点有一条路连接，则称 G 是连通的 *(connected)*。

注：

- K^1 是连通的。
- $\forall u, v \in V(G), u \neq v, \exists$ 一条路 $P: u_1u_2u_3...u_ku_{k+1}$ 其中 $u_1 = u$, $u_{k+1} = v$ $u_i \sim u_{i+1}$ $\quad i = 1, 2...k$。

性质： 设 $G = (V, E)$ 是 n 个顶点 $(n \geq 2)$ 连通图,则存在 G 的一个序列 $v_1, v_2, ...v_n$, $V_G = \{v_1, v_2, ...v_n\}$, $G[v_1, v_2, ...v_i]$ 是连通的。$i = 1, 2...n$

证明：数学归纳法

$i=1$ $G[v_1]$ 只有一个顶点，是连通的。

假设 $G[v_1, v_2, ...v_i]$ 是连通的，其中 $i<|G|$ 存在 $v \in V(G) \backslash \{v_1, v_2, ...v_i\}$

由于 G 是连通的，存在从 v 到 v_1 的一条路 P，$P: v=u_1, u_2, ...u_{k+1}=v_1$

取 v_{i+1} 为 P 在 $G-G_i$ 中的最后一个顶点，则 $G[v_1, v_2, ...v_i, v_{i+1}]$ 是连通的。

$\forall v_s, v_t \in \{v_1, v_2, ...v_{i+1}\}$

case 1: $1 \leq s, t \geq i$ 由于 $G\{v_1, v_2, ...v_i\}$ 连通，所以存在从 v_s 到 v_t 的一条路。

case 2: $s=i+1$ or $t=i+1$ 不妨设 $s=i+1$ 因为在 $G[v_1, v_2, ...v_{i+1}$ 中有从 v_{i+1} 到 v_1 的一条路，在 $G[v_1, v_2, ...v_i]$ 中有从 v_i 到 v_t 的一条路，所以 $G[v_1, v_2, ...v_{i+1}]$ 是连通的。

由归纳原理可得性质成立。

定义 2 (连通分支)**.** *G 的极大连通子图称为 G 的一个连通分支*

对于 $G=(V(G), E(G))$,$H=(V(H), E(H))$ 是它的一个连通分支。则有：$V(H) \subseteq V(G)$，$E(H) \subseteq$

$E(G)$ 且 H 是连通的。

若有 H_1 是图 G 的另一个子图，且有 $V(H) \subseteq V(H_1) \subseteq V(G)$，$E(H) \subseteq E(H_1) \subseteq E(G)$，$H_1 \neq H$ 则 H_1 是不连通的。

定义 3 (A-B 路). 设 $A, B \subseteq V$, 称路 $P = x_0, x_1...x_k$ 为一条 $A–B$ 路,如果 $V(G) \cap A = x_0$,$V(G) \cap B = x_k$。当 $A = \{a\}$ 时，$A - B$ 路即为 $a - B$ 路。

定义 4 (独立). 两条（几条）路是独立（*independent*）如果这些路的内部顶点都不相同。(除非起点是终点)

$P = x_0x_1...x_m$,$Q = y_0y_1...y_n$,其中有 $\{x_0x_1...x_{m-1}\} \cap \{y_0y_1...y_{n-1}\} = \emptyset$，则 P,Q 这两条路独立。

定义 5 (H-路). 如果 P 是非平凡的（至少有两个顶点）,且 $V(G) \cap V(H) = \{x_0, x_k\}$, 其中 $P = x_0x_1...x_k$, 则 P 是一条 $H-$ 路。

定义 6 (分离). 设 $A, B \subseteq V$，$X \subseteq V \cup E$，使得每条 $A - B$ 路包含 X 中的一个元素，则称 X 分离 *(seperate)* G 中 A 与 B 集合。

注： $A \cap B \subseteq X$，且 $V \subseteq A \cap B$，则 V 是一条 $A - B$ 路。

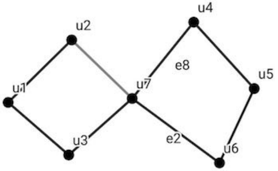

图 1: $A = \{u_1, u_2, u_3\}, B = \{u_5, u_6\}, x_1 = \{u_5, u_6\}, x_2 = \{e_8\}, x_3 = \{e_2, e_3\}, x_4 = \{u_4\}, x_5 = \{u_7\}$ 其中 x_1, x_4, x_5 分离 A 与 B 集合，而 x_2, x_3 没有分离 A 与 B 集合

定义 7 (分离集)**.** $X \subseteq V(G)$，如果 X 分离 $G - X$ 中两个顶点，则称 X 分离 G，且称 X 为 G 的一个分离集。

定义 8 (割点)**.** 一个顶点分离 G 的一个连通分支，

则称这个顶点为割点（ *cut vertex* ）。

定义 9 (割边)**.** 一条边分离 G 中的一个连通分支，则称这条边为割边（ *egde cut* ）。

定义 10 (k-连通)**.** 设 G 是一个图，若 $|G| > k$，并且对于 $X \subseteq V(G), |X| < k$，$G - X$ 是连通的，则称 G 为 k-连通的。

注：

- 对于 G 中任何两个顶点，能被小于 k 个顶点的集分离。
- 每个非空图是 0-连通的。
- 1-连通图恰好是非平凡的连通图。
- K^1 是 0-连通的。（但是 K^1 是连通的）

定义 11 (连通度)**.** 存在最大的非零整数 k 使得 G 是 k-连通的，则称 G 的连通度（ *connectivity* ）为 k，记作 $\mathcal{K}(G)$。

注：

- G 是 $k-$ 连通的，则 G 是 k-1 -连通的。
- $\mathcal{K}(G)=0 \Longleftrightarrow G=K^1$ 或者 G 是不连通的。
- $\mathcal{K}(G)=1 \Longleftrightarrow$ G 是至少两个顶点的连通图，且有割点。
- $\mathcal{K}(K^n)=n-1, n \geq 1$
- $G \neq K^n, n \geq 2$ 则有 $\mathcal{K}(G) = \leq n-2$

定义 12 (l - 边连通)**.** $|G|>1$, 对于 $\forall F \subseteq E, |F|<l$, $G-F$ 是连通的，则称 G 是 l - 边连通的。

定义 13 (边连通度)**.** *存在最大非负整数 l 使得 G 是 l - 连通的，则称 G 的边连通度 (edge connectivity) 为 $\lambda(G)=l$。*

定理 1. *设 G 是至少有两个顶点的简单图，则有: $\mathcal{K}(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$*

证明：

目录

1 勾股定理在古代

西方称勾股定理为毕达哥拉斯定理, 将勾股定理的发现归功于公元前 6 世纪的毕达哥拉斯学派 [?]。该学派得到了一个法则，可以求出可排成直角三角形三边的三元数组。毕达哥拉斯学派没有书面著作, 该定理的严格表述和证明则见于欧几里德[1]《几何原本》的命题 47 :"直角三角形斜边上的正方形等于两直角边上的两个正方形之和。"证明是用面积做的。

我国《周髀算经》载商高（约公元前 12 世纪）答周公问：

> 勾广三，股修四，径隅五。

又载陈子（约公元前 7–6 世纪）答荣方问：

> 若求邪至日者，以日下为勾，日高为股，勾股各自乘，并而开方除之，得邪至日。

都较古希腊更早。后者已经明确道出勾股定理的一般形式。图??是我国古代对勾股定理的一种证明 [?]。

[1]欧几里得，约公元前 330–275 年。

2 勾股定理的近代形式

勾股定理可以用现代语言表述如下：

定理 2 (勾股定理)**.** 直角三角形斜边的平方等于两腰的平方和。

可以用符号语言表述为：设直角三角形 ABC, 其中 $\angle C = 90^\circ$, 则有

$$AB^2 = BC^2 + AC^2. \tag{1}$$

满足式(??)的整数称为勾股数。第??节所说毕达哥拉斯学派得到的三元数组就是勾股数。下表列出一些较小的勾股数：

直角边 a	直角边 b	斜边 c
3	4	5
5	12	13

$(a^2 + b^2 = c^2)$