

MIMO通信系统检测仿真实现

电子信息类 18309050 刘佳豪

2020 年 1 月 17 日

摘要:在写期中project的时候, 我们已经简要了解过MIMO通信系统的原理, 并实现了基于ZF(迫零)准则的几种检测算法。在这篇报告里我们将介绍基于MMSE准则的几种检测算法: 线性MMSE检测以及基于QR分解的MMSE检测算法。还会对基于ZF与MMSE两种准则的算法做简单的比较。

关键字: MIMO通信系统 ZF准则 MMSE准则

1 背景介绍

随着移动通信的发展, 世界范围内的无线通信的容量需求在快速增长。但是, 可以利用的无线频谱是有限的, 这就需要我们提高通信频谱的利用率。MIMO(multiple-input multiple-output 多输入多输出)系统正是通过增加发射端和接收端的天线数量来提高频谱利用率。为了描述这一系统, 令 $\mathbf{s} = [s_1 \dots s_{n_T}]^T$ 表示 $n_T \times 1$ 发送信号向量, 则相应的 $n_R \times 1$ 接收信号向量可以被表示成

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{n} \quad (1)$$

在(1)式中, $\mathbf{n} = [n_1 \dots n_{n_R}]^T$ 是一个复高斯向量, 代表着方差为 σ_n^2 的高斯白噪声。 $n_R \times n_T$ 矩阵 \mathbf{H} 为瑞利衰落信道矩阵, 及对于矩阵任意元素 $h_{ij} = x_{ij} + jy_{ij}$, 满足

$$x_{ij} \sim N(0, 1) \quad y_{ij} \sim N(0, 1)$$

即 x_{ij}, y_{ij} 满足高斯分布。因而 $|h_{ij}|$ 满足瑞利分布。假定 \mathbf{H} 已知。由概率知识可知[5], 在已知接收信号 \mathbf{x} 时, 发射信号 \mathbf{s} 的最大似然估计为

$$\hat{\mathbf{s}} = \underset{\mathbf{s} \in Q^n}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{x} - \mathbf{H}\mathbf{s}\|^2$$

其中 Q^n 为符号集，取决于调制方式。这是一个最小二乘问题，其时间复杂度随符号集的个数的增加以指数形式增长，因此，ML估计一般不适用于大规模的信号传输。为了从接收向量 \mathbf{x} 中解调出 \mathbf{s} 同时降低复杂度，人们从不同角度给出了很多方法。这些方法大致可以分为两大类：线性的和非线性的。线性的是指接收信号直接乘以一个滤波矩阵得到一个估计矢量，然后进行判决，根据采用的准则不同可以分为迫零检测(ZF)和最小均方检测(MMSE)；非线性方法是消除了各信号之间的干扰进行检测，例如基于ZF和MMSE的QR分解检测。

我的期中Project是基于BPSK调制进行的，但其实真正的通信系统中QPSK调制方式使用更为广泛，在期末Project中我尝试着使用QPSK来完成。文章接下来的内容如下。在第二部分，简要介绍IQ调制，并在此基础上阐明QPSK调制方法。在第三部分，由于在其中Project中我们已经对ZF算法有了一定的了解，因此我们将重点放在MMSE检测和它的几种改进算法，ZF算法穿插其中进行比较。为了更好地比较MMSE检测和ZF检测，第四部分给出了MMSE检测和ZF检测算法的仿真结果，并定性地给出了相应的复杂度分析。相应的结论在第五部分给出。

2 数字调制技术简介

数字调制技术简而言之就是用数字信号去调制模拟载波信号。调制就是将数字信号转换成模拟信号，解调或检测的过程就是将模拟信号再转换成数字信号。这个转换过程也叫做比特映射。[1]其基本方法有三种：①调幅，幅频键控(ASK)；②调相，相移键控(PSK)；③调频，频移键控，(FSK)。本篇报告所使用的QPSK就是相移键控：给定一个载波信号，如果数字信号为1，那么载波初始相位不变；如果数字信号为0，那么载波相位向前移动180，这样我们就获得了一个BPSK调制信号。如图1所示。

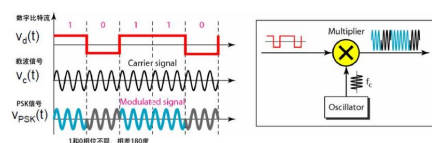


图 1: BPSK调制

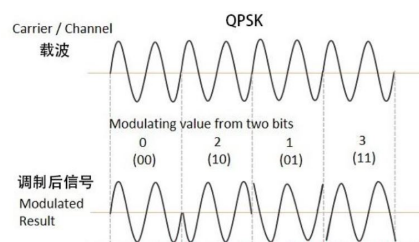


图 2: QPSK调制.

为了说明QPSK调制，我们首先要明确通信系统在发送信息时是将时域信号转换成频域上的信号，即实数信号转变成复数信号。这样，我们可以同时在复数的实部和虚部传输信号，这就是IQ调制。

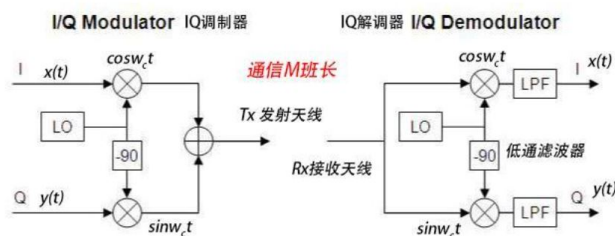


图 3: IQ调制原理图

如图3所示，I,Q分别表示两路发送信号。通过乘法运算后得到的复信号为:

$$s(t) = I(t)\cos(\omega t) - Q(t)\sin(\omega t) \quad (2)$$

如果我们在IQ调制器的输入端分别输入

$$\left(+\frac{1}{\sqrt{2}}, +\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, +\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(+\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

经过三角变换以后，我们可以得到如下对应关系

输入信号	IQ信号	输出信号
00	$+\frac{1}{\sqrt{2}}, +\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\pi}{4}$
01	$-\frac{1}{\sqrt{2}}, +\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{3\pi}{4}$
11	$-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{5\pi}{4}$
10	$+\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{7\pi}{4}$

图 4: 映射关系

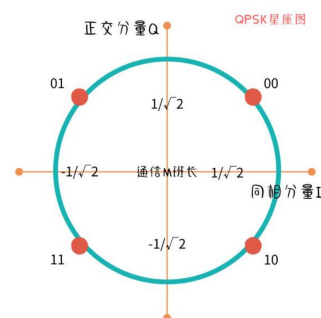


图 5: 星座图

将四路信号与对应的比特流形成一一映射关系，对应在复平面上可得所谓的“星座图”。由于有噪声和其他干扰，我们得到的解调信号会分布在这四个点附近，这时候可根据实部虚部的正负进行信号判决，以得到正确的解调信号。这就是QPSK的解调原理。下面将重点阐述解调算法。

3 MMSE检测

3.1 MMSE估计器

MMSE(最小均方误差)准则是使发送信号 \mathbf{s} 与经过滤波后得到的估计信号 $\hat{\mathbf{s}}$ 尽可能的接近。也就是说,对于接收信号 $\mathbf{x} = \mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{n}$,我们希望找到一个滤波矩阵 \mathbf{G} ,使得 $\|\mathbf{G}\mathbf{x} - \mathbf{s}\|^2$ 最小,即

$$\mathbf{G} = \underset{\mathbf{G}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{G}\mathbf{x} - \mathbf{s}\|^2 \quad (3)$$

利用矩阵微积分的知识,我们可以得到(3)式的最优解为

$$\mathbf{G} = (\mathbf{H}^H \mathbf{H} + \sigma_n^2 \mathbf{I}_{n_T})^{-1} \mathbf{H}^H \quad (4)$$

对上式进行数学变形,令:

$$\underline{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \sigma_n \mathbf{I}_{n_T} \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad \underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{0}_{n_T,1} \end{bmatrix}$$

则有

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{G}\mathbf{x} = (\underline{\mathbf{H}}^H \underline{\mathbf{H}})^{-1} \underline{\mathbf{H}}^H \underline{\mathbf{x}} \quad (5)$$

然后利用第二部分讲述的QPSK解调星座图对 $\hat{\mathbf{s}}$ 进行判决,即可得到解调信号。与ZF检测算法相比较而言,注意到二者的协方差矩阵的表达式

$$\Phi_{ZF} = \sigma_n^2 (\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \quad (6)$$

$$\Phi_{MMSE} = \sigma_n^2 (\underline{\mathbf{H}}^H \underline{\mathbf{H}})^{-1} \quad (7)$$

ZF算法设计的滤波矩阵只是简单粗暴地让 \mathbf{H} 矩阵引起的干扰强制为0,而没有考虑消去噪声的干扰,甚至当 $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$ 的特征值很小时,还会放大噪声。而MMSE设计的滤波矩阵综合考虑了噪声幅度和 \mathbf{H} 矩阵引起的干扰,因而效果更佳。[2]

3.2 基于QR分解的MMSE检测

在基于QR分解的ZF算法中,第 k 个发送信号的信噪比满足

$$SNR_k \sim |r_{k,k}|^2 \quad (8)$$

根据此信息和干扰消除的原则，我们得到了排序的ZF-SQRD算法：逐步检出具有最大信噪比的信号。根据表达式

$$\tilde{y}_i = r_{ii}s_i + \sum_{j=i+1}^{n_T} r_{ij}s_j + \tilde{\eta}_i \quad (9)$$

可知，第*i*层的信号中只有来自*i* + 1, ...*n_T*层的干扰，而由于这些层已经被判决出来，所以很容易被消除。由于对信道矩阵 \mathbf{H} 进行扩充得到 $\underline{\mathbf{H}}$ 后MMSE的滤波矩阵形式上与ZF滤波矩阵一致，因此MMSE检测也有类似的QR分解。容易得到公式如下

$$\underline{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \sigma_n \mathbf{I}_{n_T} \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{Q}} \underline{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} \mathbf{R} \quad (10)$$

$(n_T + n_R) \times n_T$ 的矩阵 $\underline{\mathbf{Q}}$ 由 $n_R \times n_T$ 的矩阵 \mathbf{Q}_1 和 $n_T \times n_T$ 的矩阵 \mathbf{Q}_2 组成。显然，

$$\underline{\mathbf{Q}}^H \underline{\mathbf{H}} = \mathbf{Q}_1^H + \sigma_n \mathbf{Q}_2^H = \underline{\mathbf{R}} \quad (11)$$

$$\underline{\mathbf{R}}^{-1} = \frac{1}{\sigma_n} \mathbf{Q}_2 \quad (12)$$

因此，我们可以得到估计信号的表达式为

$$\tilde{\mathbf{s}} = \underline{\mathbf{Q}}^H \mathbf{x} = \underline{\mathbf{R}} \mathbf{s} - \sigma_n \mathbf{Q}_2^H \mathbf{s} + \mathbf{Q}_1^H \mathbf{n} = \underline{\mathbf{R}} \mathbf{s} + \tilde{\boldsymbol{\eta}} \quad (13)$$

这里新的干扰项为

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{Q}_1^H \mathbf{n} - \sigma_n \mathbf{Q}_2^H \mathbf{s} \quad (14)$$

而基于ZF准则的QR算法中干扰项为

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}}_{ZF} = \mathbf{Q}_1^H \mathbf{n} \quad (15)$$

由此可见，MMSE准则是在抑制噪声幅度和抑制发送信号之间的互相干扰二者之间作出了折中。此时，估计误差的协方差矩阵的表达式为

$$\Phi = \sigma_n^2 (\underline{\mathbf{H}}^H \underline{\mathbf{H}})^{-1} = \sigma_n^2 \underline{\mathbf{R}}^{-1} \underline{\mathbf{R}}^{-H} \Rightarrow \phi_{k,k} = \frac{\sigma_n^2}{|r_{k,k}|^2} \quad (16)$$

根据式(9),在判决第*i*层时，要消除来自*i* + 1, ...*n_T*层的干扰，如果第*i* + 1, ...*n_T*层判决出现错误，则这种错误将会连带影响第1, ...*i*层的判决，为了尽可能降低错误率，我们每次应该选取使 $\phi_{k,k}$ 最小的信号优先解调，注意到QR分解是用后项带入法求解线性方程组的，因此，每次挑选信号时，要选出

使 $r_{i,i}$ 最小的信号。由此产生了带排序的QR分解算法。完整的MMSE-SQRD检测算法详见附件。

Tab. 1 MMSE-SQRD ALGORITHM

```

(1)  $\underline{\mathbf{R}} = \mathbf{0}, \underline{\mathbf{Q}} = \underline{\mathbf{H}}, \mathbf{p} = (1, \dots, n_T)$ 
(2) for  $i = 1, \dots, n_T$ 
(3)    $\mathbf{norm}_i = \|\underline{\mathbf{q}}_i\|^2$ 
(4) end
(5) for  $i = 1, \dots, n_T$ 
(6)    $k_i = \arg \min_{\ell=i, \dots, n_T} \mathbf{norm}_\ell$ 
(7)   exchange columns  $i$  and  $k_i$  in  $\underline{\mathbf{R}}, \mathbf{p}, \mathbf{norm}$  and in the first
       $n_R + i - 1$  rows of  $\underline{\mathbf{Q}}$ 
(8)    $r_{i,i} = \sqrt{\mathbf{norm}_i}$ 
(9)    $\underline{\mathbf{q}}_i := \underline{\mathbf{q}}_i / r_{i,i}$ 
(10)  for  $k = i + 1, \dots, n_T$ 
(11)     $r_{i,k} = \underline{\mathbf{q}}_i^H \cdot \underline{\mathbf{q}}_k$ 
(12)     $\underline{\mathbf{q}}_k := \underline{\mathbf{q}}_k - r_{i,k} \cdot \underline{\mathbf{q}}_i$ 
(13)     $\mathbf{norm}_k := \mathbf{norm}_k - r_{i,k}^2$ 
(14)  end
(15) end

```

注意到虽然框图里第(6)步每次都是选择了使 $r_{i,i}$ 最小的信号，但是由于第(13)步里面还要在进行值的变化，因此，SQRD算法并不能完全保证 $\phi_1 > \phi_2 > \dots > \phi_{n_T}$ 。比如对于第 i 层和第 $i+1$ 层，算法无法保证

$$\sum_{j=i+1}^{n_T} r_{i,j}^2 > \sum_{j=i+2}^{n_T} r_{i+1,j}^2$$

这样，尽管第(6)步保证了 $r_{i,i} < r_{i+1,i+1}$ ，但是当 $\sum_{j=i+1}^{n_T} r_{i,j}^2 < \sum_{j=i+2}^{n_T} r_{i+1,j}^2$ 时，经过第13步后得到的最终的 $r_{i,i}$ 与 $r_{i+1,i+1}$ 有可能是 $r_{i,i} > r_{i+1,i+1}$ 的关系。为了确保MMSE-SQRD的最优性能，我们可以在此基础上添加新的检测方法。

3.3 MMSE-SQRD算法的改进：PSA检测

利用关系 $\underline{\mathbf{R}}^{-1} = \frac{1}{\sigma_n} \underline{\mathbf{Q}}_2$ ，我们可以将式(16)写成如下形式

$$\Phi = \sigma_n^2 \underline{\mathbf{Q}}_2 \underline{\mathbf{Q}}_2^H \quad (17)$$

由于 $\underline{\mathbf{R}}$ 的逆矩阵仍然为上三角形矩阵，因此 $n_T \times n_T$ 的 $\underline{\mathbf{Q}}_2$ 矩阵也是上三角形矩阵。由此可得

$$\phi_{k,k} = \|\mathbf{q}^{(k)}\| \quad (18)$$

其中 $\mathbf{q}^{(k)}$ 表示矩阵 \mathbf{Q}_2 的第 k 行。理想的SQRD条件下, $\phi_1 > \phi_2 > \dots > \phi_{n_T}$, 因此,

$$\|\mathbf{q}^{(1)}\| > \dots > \|\mathbf{q}^{(n_T)}\| \quad (19)$$

我们可以通过检测式(19)的关系是否成立从而判断MMSE-SQRD是否达到最优性能。当式(19)的关系不成立时, 我们可以在Signal Detection信号判决之前改变 \mathbf{Q}_2 的行顺序从而使得式(19)成立。为了避免引入复杂的还原过程以及改变 $\phi_{k,k}$ 最终的值, 我们可以利用豪斯霍尔德变换(只起旋转作用而不改变向量模值)达到这一目的。当顺序调整完毕后, 只需要利用关系 $\mathbf{R}^{-1} = \frac{1}{\sigma_n} \mathbf{Q}_2$, 便可得到最终的QR分解矩阵。然后再进行信号判决。整个PSA检测代码如下

Tab. 2 POST-SORTING ALGORITHM

```

(1)   $k_{\min} = n_T$ 
(2)  for  $i = n_T, \dots, 2$ 
(3)    for  $\ell = 1, \dots, i$ 
(4)       $\mathbf{error}_\ell = \|\mathbf{Q}_2(\ell, 1:i)\|^2$ 
(5)    end
(6)     $k_i = \arg \min_{\ell=1, \dots, i} \mathbf{error}_\ell$ 
(7)     $k_{\min} = \min(k_{\min}, k_i)$ 
(8)    if  $k_i < i$ 
(9)      exchange rows  $i$  and  $k_i$  in  $\mathbf{Q}_2$  and col.  $i$  and  $k_i$  in  $\mathbf{p}$ 
(10)   end
(11)   if  $k_{\min} < i$ 
(12)     calculate Householder reflector  $\Theta$  such that elements
           of  $\mathbf{Q}_2(i, k_{\min} : i-1)$  become zero
(13)      $\mathbf{Q}_2(1:i, k_{\min} : i) := \mathbf{Q}_2(1:i, k_{\min} : i)\Theta$ 
(14)      $\mathbf{Q}_1(:, k_{\min} : i) := \mathbf{Q}_1(:, k_{\min} : i)\Theta$ 
(15)   end
(16) end
(17)  $\mathbf{R} = 1/\sigma_n \mathbf{Q}_2^{-1}$ 

```

4 MMSE与ZF算法的仿真结果及比对

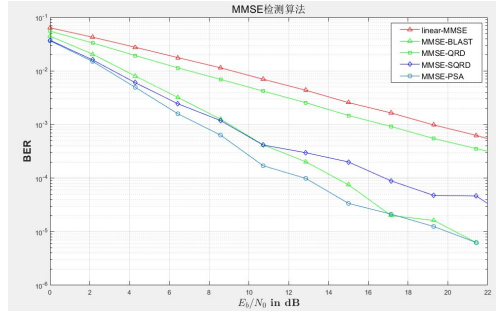


图 6: MMSE检测算法: $n_R = n_T = 4$, QPSK

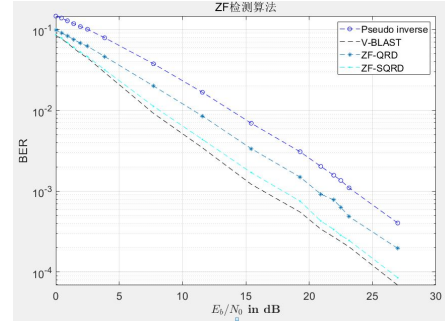
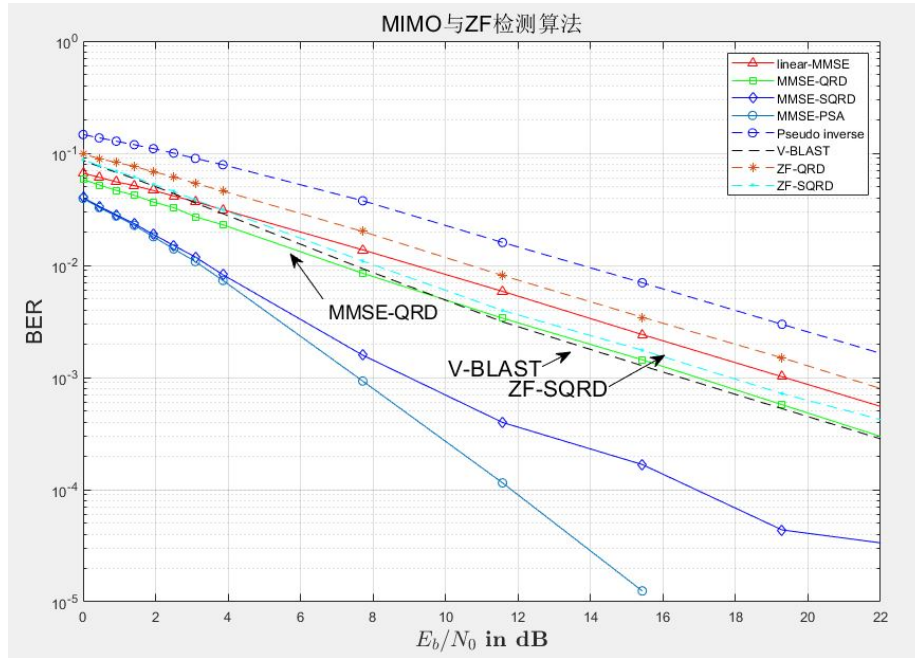


图 7: ZF检测算法: $n_R = n_T = 4$, QPSK

从仿真结果来看,MMSE线性估计, MMSE无排序QR, MMSE-SQRD以及MMSE-SQRD+PSA检测算法性能越来越好, 这符合理论预期; 简单的ZF迫零检测, 无排序的ZF-QR, 排序ZF-SQRD以及基于SIC串行干扰抵消的V-BLAST算法性能越来越好。下面再给出两种准则的算法比较



复杂度简析(假定 $n_T = n_R$)

- 1 对于ML似然估计, 需要遍历整个可能的符号组合, 设符号集的大小为 q , 则复杂度为 $O(q^{n_T})$, 随着天线数量的增加, 复杂度过高而不适合计算使用。
- 2 对于ZF检测和MMSE检测, 由于前者只考虑消除信道矩阵 \mathbf{H} 的影响, 而后者综合考虑了信道矩阵 \mathbf{H} 和噪声二者的干扰, 所以MMSE检测普遍优于ZF检测。这一结论从上图也可以看出。但是二者均是根据信道矩阵 \mathbf{H} 生成滤波矩阵 \mathbf{G} , 由于这个过程之需要求解一次滤波矩阵, 因此复杂度为 $O(n_T^3)$ 。
- 3 基于SIC串行干扰消除的原则的BLAST算法由于需要求解 n_T 次滤波矩阵 \mathbf{G} , 故复杂度为 $n_T O(n_T^3) = O(n_T^4)$ 。
- 4 基于QR分解的检测方法避开了伪逆矩阵 \mathbf{G} 的求解。一般情况下QR分解的复杂度为 $O(n_R n_T^2) = O(n_T^3)$ 。所以无排序QR分解以及排序QR分解复杂度均为 $O(n_T^3)$ 。
- 5 在MMSE-SQRD基础之上的PSA算法, 文献[2]给出了它的上界复杂度: $O(n_T^3)$ 。这是因为计算豪斯霍尔德矩阵以及利用豪斯霍尔德矩阵对 \mathbf{Q}_2 进行操作的复杂度为 $O(n_T^2)$, 而且由于等式 $\mathbf{R}^{-1} = \frac{1}{\sigma_n} \mathbf{Q}_2$, 我们可以用不超过 $O(n_T^3)$ 的复杂度计算出结果。

5 结论

从仿真结果和复杂度来看, MIMO检测算法中检测性能与时间复杂度二者不可兼得。复杂度较低的算法在性能上不是最优, 性能较好的算法复杂度较高。另外, 在查阅其他资料的过程中, 我发现其实还有很多其他性能很好的方法, 比如FCSD(限定复杂度球形译码)和LR(格缩减技术)[5]等。此外, MIMO系统检测的结果还受到很多其他因素的干扰, 而我只是简单的选取了 4×4 信道矩阵以及QPSK调制方式进行测试, 显然结果不具有普遍性。希望在以后的学习中能有机会更加深入地研究MIMO通信系统。

参考资料

- [1] 默默的点滴. 无线通信中的IQ调制, BPSK调制, QPSK调制, 16QAM调制的理解[EB/OL]. <https://www.mobibrw.com/2018/12118>
- [2] Wubben, D., Bohnke, R., Kuhn, V., Kammeyer, K.-D.. MMSE extension of V-BLAST based on sorted QR decomposition[P]. Vehicular Technology Conference, 2003. VTC 2003-Fall. 2003 IEEE 58th, 2003.
- [3] Bohnke, R., Wubben, D., Kuhn, V., Kammeyer, K.-D.. Reduced complexity MMSE detection for BLAST architectures[P]. Global Telecommunications Conference, 2003. GLOBECOM '03. IEEE, 2003.
- [4] D. Wubben, J. Rinas, R. Bohnke, V. Kuhn and K.D. Kammeyer. Efficient Algorithm for Detecting Layered Space-Time Codes
- [5] Erik G. Larsson “MIMO Detection Methods: How They Work”, IEEE signal processing magazine pp 91-95, May. 2009.