对MIMO通信系统中的三种译码算法的分析

刘佳豪

摘要

参照文献[1],先在C++上实现V-BLAST算法，SQRD算法以及QRD算法,然后在C++上利用Monte Carlo仿真产生满足列向量元素独立同分布的信道传输矩阵$\mathbf{H}$,信息向量$\mathbf{c}$以及高斯白噪声$\boldsymbol{\upsilon}$计算在噪声方差σ^2不同情况下三种方法各自的误码率BER。最后利用Matlab画出$BER-\frac{E_b}{N_0}$曲线,比较可得各种算法性能上的优劣程度。

关键词： V-BLAST　SQRD　QRD　Monte Carlo Simulation

1　问题描述

在文献[1]中，作者提出了一种新的基于QR分解的信息挑选算法：有序QR分解算法。让$\mathbf{c}=(\mathbf{c_1},\mathbf{c_2}...\mathbf{c_{n_T}})^\mathbf{T}$表示BPSK已调信息，那么相应的接收信息向量$\mathbf{x}=(\mathbf{x_1},\mathbf{x_2}...\mathbf{x_{n_R}})^\mathbf{T}$可以表示如下：

$$\mathbf{x}=\mathbf{H}\cdot\mathbf{c}+\boldsymbol{\upsilon} \tag{1}$$

其中向量$\boldsymbol{\upsilon}=[\upsilon_1,\upsilon_2...\upsilon_{n_R}]^T$描述了噪声对于$n_R$个接收天线的干扰，假设噪声为高斯白噪声。由于调制信号已经被归一化，所以平均每比特所接收到的能量为1。而对于$n_R\times n_T$矩阵H($n_R\geq n_T$):

$$\begin{pmatrix} h_{11} & ... & h_{1n_T} \\ . & ... & . \\ h_{n_R1} & ... & h_{n_Rn_T} \end{pmatrix}$$

表征信息在传输过程中的衰减程度。元素h_{ji}描述了接收天线j所接收到的来自发送天线i的信息的百分比。矩阵$\mathbf{H}$中的第i列元素$\mathbf{h_i}$可以看成是单输入(单一发射天线i)多输出(接收天线j=1,...n_R)的通信系统。理想情况下，我们都

希望不同信道之间互不干扰，换言之，我们希望已知的信道传输矩阵可以表示成

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{O} \end{pmatrix}$$

其中$\mathbf{R}$为对角阵。在这种情况下，向量$\mathbf{x}$与向量$\mathbf{c}$之间满足如下关系：

$$\begin{cases} x_1 = h_{11}c_1 \\ \quad ... \\ x_{n_T} = h_{n_T n_T} c_{n_T} \\ \quad ... \\ x_{n_R} = 0 \end{cases}$$

这样的话，我们可以非常方便的解调出发送信号。实际上，SQRD分解正是基于这种原理来解调出发送信号的。我们将在第二部分详细分析论文[1]的SQRD算法。

2 算法理论分析

2.1 V-BLAST算法

上一部分我们已经说明实际应用场景中传输信号之间存在相互干扰，因而在实际得到的解向量$\mathbf{x}$中的每个元素都含有其他天线所发送的信息。论文[1]采用了迫零算法(Zero-forcing)来抵消这些干扰：通过构造矩阵$\mathbf{H}$的伪逆矩阵

$$\mathbf{G} = \mathbf{H}^{+} = (\mathbf{H^H H})^{-\mathbf{1}}\mathbf{H^H} \tag{2}$$

通过数学上的分析我们可以知道矩阵$\mathbf{G}$中的行向量$\mathbf{g_i}$满足条件

$$(\mathbf{g^i})^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{h_l} = \begin{cases} 1 & l = i \\ 0 & l \neq i \end{cases} \tag{3}$$

在$\mathbf{x} = \mathbf{Hc} + \boldsymbol{v}$两边同时乘以矩阵$\mathbf{G}$,我们可以得到

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c} + \widetilde{\boldsymbol{v}} \tag{4}$$

这里$\widetilde{v_i} = \mathbf{g^i} \cdot \boldsymbol{v}$用以表示实际的噪声误差。这样一来，只要想办法去掉噪声干扰，我们就可以得到c_i与y_i的一一映射关系。下一步就是通过所谓的量化函数Q来对噪声进行量化。于是信号i可以由下式进行估计

$$\hat{c}_i = Q[y_i] = \begin{cases} 1 & y_i > 0 \\ -1 & y_i \leq 0 \end{cases} \tag{5}$$

求出信号i后,还要将其对其他信号所造成的干扰从接收到的向量x中去除掉:

$$\mathbf{x_{i+1}} = \mathbf{x_i} - \mathbf{h_i} \cdot \hat{\mathbf{c}}_\mathbf{i} \tag{6}$$

接下来再继续求解其他天线发出的信息时，由于已经解调出的信号i对其他信号已经没有干扰，因此，我们可以将$\mathbf{h_i}$置零。使用文献[2]中所引用的标号$\mathbf{H_{i+1}} = \mathbf{H_i^{\bar{i}}}$来表示一个等效的具有$n_T - i$根发射天线,$n_R$根接收天线的MIMO系统。这样，就可以根据新的信道矩阵$\boldsymbol{H_{i+1}}$来求解其他信号。

为了使算法更加有效，减小求解出错概率。文献[1]采用优先挑选出信噪比SNR最大的信号。这是因为这类信号最易提取而且它对于其他信号的干扰最大。通过文献[2]可以知道，SNR与$\mathbf{g^i}$的二范数的平方成反比，因此，解调出的信号其对应列向量g^i的二范数依次递增。这里在求解矩阵$\mathbf{G} = [\mathbf{g_1}, \mathbf{g_2}, ...\mathbf{g_{n_R}}]$时，注意到

$$(\mathbf{H^H H}) \cdot [\mathbf{g_1}, \mathbf{g_2}, ...\mathbf{g_{n_R}}] = \mathbf{H^H} \tag{7}$$

因此，我们可以利用高斯消元法通过求解n_R次线性方程组$(\mathbf{H^H H}) \cdot \mathbf{g_i} = \mathbf{H^H}$来得到矩阵$\mathbf{G}$。用C++代码实现的V-BLAST算法请参见附录。

2.2 无排序QR分解算法

V-BLAST算法的局限之处在于算法复杂度较高，因为需要求解$\mathbf{H}$的伪逆矩阵。而即使使用高斯消元，仍然会有$O(n^3)$的算法复杂度。而对于一个$m \times n$的矩阵，利用QR分解的计算复杂度是为$O(mn^2)$,一定程度地降低了算法复杂度。而且由于矩阵$\mathbf{Q}$为正交矩阵，所以满足$\mathbf{Q^H} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{I}$,因此，我们又可以构造$\mathbf{y}$与$\mathbf{c}$之间的一个线性关系

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{\eta} \tag{8}$$

尽管此时的系数矩阵$\mathbf{R}$只是上三角形矩阵而不是对角阵，但是在求解$\mathbf{c}$时仍然较为方便。矩阵$\mathbf{R}$中的元素r_{ij}表征了信号i和信号j之间的相关性。因此,

$$d_k = \sum_{i=k+1}^{n_T} r_{ki} \cdot c_i \tag{9}$$

表征了其他信号对于信号k的总干扰程度。从y_k中剔除掉d_k,我们可以得到

$$y_k = r_{kk} \cdot c_k + \eta_k \tag{10}$$

这样的话，利用量化函数Q进行量化可以得到信号n_T的估计值为:

$$c_{n_T} = \hat{Q}[\frac{y_{n_T}}{r_{n_T n_T}}] \tag{11}$$

同理，为了使算法更加稳定，每次选出来的信号同样满足信噪比SNR最大的原则。根据文献[1]的分析，SNR最大等价于在修正的施密特正交化QR分解方法的基础上找到使$\|\mathbf{q_l}\|^2$最大的l。但是，如果每解调一次信号寻就进行一次排序的话，需要的算法复杂度为$O(n_T^3)$。为了降低计算复杂度，下面分析有排序的QR算法。

2.3 有排序的QR算法

这种算法的创新之处在于每次对矩阵$\mathbf{H}$进行QR分解之前，首先选出使$\|\mathbf{q_l}\|^2$最小的l，并将其放在Q矩阵的左列。也就是说，当矩阵$\mathbf{H}$完成QR分解的时候，所得到的$\mathbf{R}$矩阵具有如下特点：

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & \dots & r_{1n} \\ \cdot & r_{22}\dots & r_{2n} \\ r_{n1} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix}$$

其中$r_{nn} > r_{n-1n-1} > \cdots > r_{11}$。采用后项代入法，每次解出来的信号k所对应的$r_{kk}$都大于待解调信号所对应的$r_{ii}(1 \leq ii \leq k-1)$。换言之，我们达到了使每次解调出来的信号的SNR最大的目的。而这有助于提高译码的稳定性。

3 算法验证

64.jpg

图 1: $n_T = 8, n_R = 12$根天线,BPSK调制,$E_b = 1$条件下的仿真

128.jpg

图 2: $n_T = 4, n_R = 6$根天线,BPSK调制,$E_b = 1$条件下的仿真

在图1和图2我们可以看到，随着噪声比的增加，QRD算法明显不如SQRD和V-BLAST算法，而SQRD却仍然与V-BLAST算法在误码率上相差不大，由于SQRD在计算过程中使用了QR分解，相较于V-BLAST算法求伪逆，虽然牺牲了部分精度，但在计算复杂度上有所减小。

4 参考文献

[**1**]D. Wubben,J.Rinas,R.Bohnke,V.Kuhn and K.D. Kammeyer, "Efficient Algorithm for Detecting Layered Space-Time Codes"

[**2**]P. W. Wolniansky, G. J. Foschini, G. D. Golden, and R. A. Valenzuela, "V-BLAST: An Architecture for Realizing Very High Data Rates Over the Rich-Scattering Wireless Channel," in IEEE Proceedings of ISSSE-98, Pisa, Italy, 29. September 1998.

5 附录

1.jpg

2.jpg

5.jpg

6.jpg

9.jpg

10.jpg

13.jpg

14.jpg