MIMO系统检测算法分析

电子一班 刘佳豪 18309050

2020 年 1 月 17 日

目录

MMSE(最小均方误差)准则是使发送信号$\boldsymbol{s}$与经过滤波后得到的估计信号$\hat{\boldsymbol{s}}$尽可能的接近。也就是说，对于接收信号$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{s} + \boldsymbol{n}$,我们希望找到一个滤波矩阵$\boldsymbol{G}$,使得$\|\boldsymbol{G}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{s}\|^2$最小，即

$$\boldsymbol{G} = \underset{\boldsymbol{G}}{argmin}\,\|\boldsymbol{G}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{s}\|^2 \tag{1}$$

利用矩阵微积分的知识，我们可以得到(3)式的最优解为

$$\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{H}^H\boldsymbol{H} + \sigma_n^2 \boldsymbol{I}_{n_T})^{-1}\boldsymbol{H}^H \tag{2}$$

对上式进行数学变形,令:

$$\underline{\boldsymbol{H}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H} \\ \sigma_n \boldsymbol{I}_{n_T} \end{bmatrix} \qquad \text{和} \qquad \underline{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{0}_{n_T,1} \end{bmatrix} \text{ßΨ}\tilde{\boldsymbol{s}} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{x} = (\underline{\boldsymbol{H}}^H\underline{\boldsymbol{H}})^{-1}\underline{\boldsymbol{H}}^H\underline{\boldsymbol{x}} \tag{3}$$

然后利用QPSK解调星座图对$\tilde{\boldsymbol{s}}$进行判决,即可得到解调信号。

在基于QR分解的ZF算法中，第k个发送信号的信噪比满足

$$SNR_k \sim |r_{k,k}|^2 \tag{4}$$

根据此信息和干扰消除的原则，我们得到了排序的ZF-SQRD算法：逐步检出具有最大信噪比的信号。根据表达式

$$\tilde{y}_i = r_{ii}s_i + \sum_{j=i+1}^{n_T} r_{ij}s_j + \tilde{\eta}_i \tag{5}$$

$$\tilde{y}_i = r_{ii}s_i + \sum_{j=i+1}^{n_T} r_{ij}s_j + \tilde{\eta}_i \tag{6}$$

可知，第i层的信号中只有来自$i+1,...n_T$层的干扰，而由于这些层已经被判决出来，所以很容易被消除。由于对信道矩阵$\boldsymbol{H}$进行扩充得到$\underline{\boldsymbol{H}}$后MMSE的滤波矩阵形式上与ZF滤波矩阵一致，因此MMSE检测也有类似的QR分解。

Tab. 1 MMSE-SQRD ALGORITHM

(1) $\underline{\mathbf{R}} = \mathbf{0}$, $\underline{\mathbf{Q}} = \underline{\mathbf{H}}$, $\mathbf{p} = (1, \ldots, n_T)$

(2) for $i = 1, \ldots, n_T$

(3) $\quad \mathbf{norm}_i = \|\underline{\mathbf{q}}_i\|^2$

(4) end

(5) for $i = 1, \ldots, n_T$

(6) $\quad k_i = \arg\min_{\ell = i, \ldots, n_T} \mathbf{norm}_\ell$

(7) $\quad$ exchange columns i and k_i in $\underline{\mathbf{R}}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{norm}$ and in the first $n_R + i - 1$ rows of $\underline{\mathbf{Q}}$

(8) $\quad r_{i,i} = \sqrt{\mathbf{norm}_i}$

(9) $\quad \underline{\mathbf{q}}_i := \underline{\mathbf{q}}_i / \underline{r}_{i,i}$

(10) $\quad$ for $k = i + 1, \ldots, n_T$

(11) $\quad\quad r_{i,k} = \underline{\mathbf{q}}_i^H \cdot \underline{\mathbf{q}}_k$

(12) $\quad\quad \underline{\mathbf{q}}_k := \underline{\mathbf{q}}_k - \underline{r}_{i,k} \cdot \underline{\mathbf{q}}_i$

(13) $\quad\quad \mathbf{norm}_k := \mathbf{norm}_k - \underline{r}_{i,k}^2$

(14) $\quad$ end

(15) end

注意到虽然框图里第(6)步每次都是选择了使$r_{i,i}$最小的信号，但是由于第(13)步里面还要在进行值的变化，因此，SQRD算法并不能完全保证$\phi_1 > \phi_2 > ... > \phi_{n_T}$。比如对于第i层和第i+1层，算法无法保证

$$\sum_{j=i+1}^{n_T} r_{i,j}^2 > \sum_{j=i+2}^{n_T} r_{i+1,j}^2$$

这样，尽管第(6)步保证了$r_{i,i} < r_{i+1,i+1}$,但是当

$$\sum_{j=i+1}^{n_T} r_{i,j}^2 < \sum_{j=i+2}^{n_T} r_{i+1,j}^2$$

时，经过第13步后得到的最终的$r_{i,i}$与$r_{i+1,i+1}$有可能是$r_{i,i} > r_{i+1,i+1}$的关系。为了确保MMSE-SQRD的最优性能，我们可以在此基础上添加新的检测方法。

Tab. 2 POST-SORTING ALGORITHM

(1) $k_{\min} = n_T$
(2) for $i = n_T, \ldots, 2$
(3) for $\ell = 1, \ldots, i$
(4) $\mathbf{error}_\ell = \|\mathbf{Q}_2(\ell, 1:i)\|^2$
(5) end
(6) $k_i = \arg\min_{\ell=1,\ldots,i} \mathbf{error}_\ell$
(7) $k_{\min} = \min(k_{\min}, k_i)$
(8) if $k_i < i$
(9) exchange rows i and k_i in $\mathbf{Q}_2$ and col. i and k_i in $\mathbf{p}$
(10) end
(11) if $k_{\min} < i$
(12) calculate Householder reflector $\mathbf{\Theta}$ such that elements of $\mathbf{Q}_2(i, k_{\min} : i-1)$ become zero
(13) $\mathbf{Q}_2(1:i, k_{\min}:i) := \mathbf{Q}_2(1:i, k_{\min}:i)\mathbf{\Theta}$
(14) $\mathbf{Q}_1(:, k_{\min}:i) := \mathbf{Q}_1(:, k_{\min}:i)\mathbf{\Theta}$
(15) end
(16) end
(17) $\underline{\mathbf{R}} = 1/\sigma_n \mathbf{Q}_2^{-1}$

仿真结果

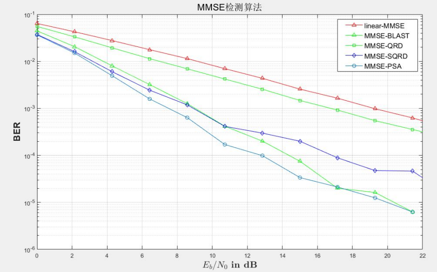


图: MMSE检测算法:$n_R = n_T = 4$,QPSK

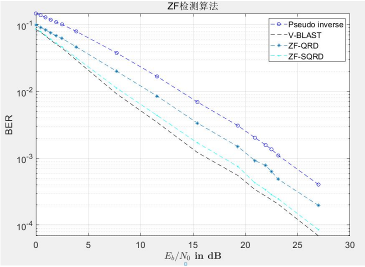
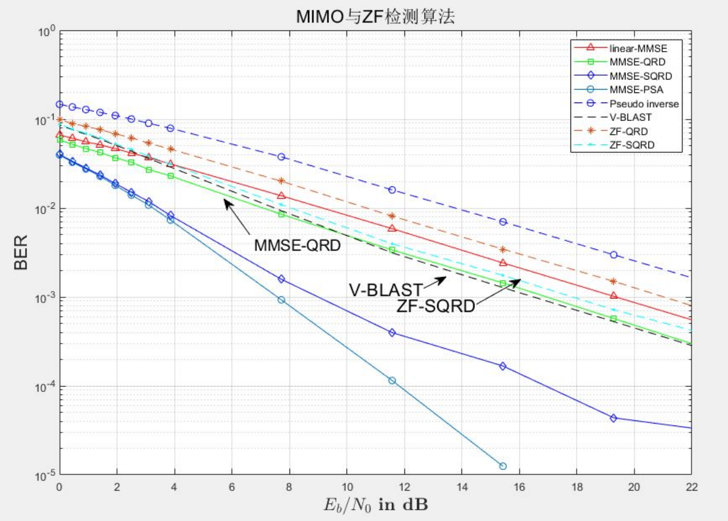


图: ZF检测算法:$n_R = n_T = 4$,QPSK

仿真结果



MIMO与ZF检测算法
BER
E_b/N_0 in dB
linear-MMSE
MMSE-QRD
MMSE-SQRD
MMSE-PSA
Pseudo inverse
V-BLAST
ZF-QRD
ZF-SQRD
MMSE-QRD
V-BLAST
ZF-SQRD

总结

1 对于ML似然估计，需要遍历整个可能的符号组合，设符号集的大小为q，则复杂度为$O(q^{n_T})$,随着天线数量的增加，复杂度过高而不适合计算使用。
2 对于ZF检测和MMSE检测，由于前者只考虑消除信道矩阵$\boldsymbol{H}$的影响，而后者综合考虑了信道矩阵$\boldsymbol{H}$和噪声二者的干扰，所以MMSE检测普遍优于ZF检测。这一结论从上图也可以看出。但是二者均是根据信道矩阵$\boldsymbol{H}$生成滤波矩阵$\boldsymbol{G}$,由于这个过程中之需要求解一次滤波矩阵，因此复杂度为$O(n_T^3)$。

总结

3基于SIC串行干扰消除的原则的BLAST算法由于需要求解n_T次滤波矩阵$\boldsymbol{G}$,故复杂度为$n_T O(n_T^3) = O(n_T^4)$。
4基于QR分解的检测方法避开了伪逆矩阵$\boldsymbol{G}$的求解。一般情况下QR分解的复杂度为$O(n_R n_T^2) = O(n_T^3)$。所以无排序QR分解以及排序QR分解复杂度均为$O(n_T^3)$。
5在MMSE-SQRD基础之上的PSA算法，文献[2]给出了它的上界复杂度:$O(n_T^3)$
。这是因为计算豪斯霍尔德矩阵以及利用豪斯霍尔德矩阵对Q_2进行操作的复杂度为$O(n_T^2)$,而且由于等式$\underline{\boldsymbol{R}}^{-1} = \frac{1}{\sigma_n}\boldsymbol{Q}_2$,我们可以用不超过$O(n_T^3)$的复杂度计算出结果。