

А.Г. Калимов

Физические основы сверхпроводимости

Санкт-Петербург, 2007

Оглавление

1. Физические свойства материалов при низких температурах.	4
1.1. Общие сведения о сверхпроводниках.	4
1.2. Свойство газов при низких температурах.	4
1.3. Открытие сверхпроводимости.	8
1.5. Развитие теории сверхпроводимости.	11
1.6. Применение сверхпроводников.	12
1.6.1. Ускорительные магниты.	13
1.6.2. ЯМР – томографы.	14
1.6.3. Применение низкотемпературных сверхпроводников в энергетике.	15
1.6.4. Применение высокотемпературных сверхпроводников.	15
2. Классическая электродинамика сверхпроводников.	17
2.1. Сопротивление сверхпроводников.	17
2.2. Эффект Мейснера.	18
2.3. Глубина проникновения магнитного поля в сверхпроводник.	19
2.4. Классическая электродинамика сверхпроводников. Теория Лондонов.	21
2.4.1. Двухжидкостная модель сверхпроводников.	21
2.4.2. Уравнение Лондонов.	21
2.4.3. Уравнение Лондонов для векторного потенциала.	23
2.4.4. Проникновения магнитного поля в сверхпроводник.	25
2.4.5. Полная система уравнений сверхпроводника.	27
2.5. Кинетическая индуктивность.	27
2.6. Квантование магнитного потока в сверхпроводниках.	28
2.6.1. Обобщенный импульс заряженной частицы в магнитном поле.	28
2.6.2. Квант магнитного потока.	30
3. Классическая термодинамика сверхпроводников.	33
3.1. Основные принципы термодинамики.	33
3.2. Термодинамика перехода в сверхпроводящее состояние.	35
3.3. Связь между магнитными и тепловыми свойствами сверхпроводника.	36
3.4. Теплоемкость и теплопроводность сверхпроводника.	39
4. Нелокальная электродинамика Пиппарда. Поверхностная энергия сверхпроводников.	
Сверхпроводники 1-го рода.	42
4.1. Длина когерентности сверхпроводников, параметр Гинзбурга - Ландау.	42
4.2. Поверхностная энергия сверхпроводников.	44
4.3. Сверхпроводники 1-го и 2-го рода.	47
4.4. Промежуточное состояние в сверхпроводниках 1-го рода.	47
4.5. Промежуточное состояние цилиндрического сверхпроводника с током.	50
4.6. Намагничивание сверхпроводников 1-го рода.	54

5. Сверхпроводники 2-го рода.....	56
5.1. Общие свойства сверхпроводников 2-го рода	56
5.2. Магнитное поле одиночного вихря	57
5.3. Смешанное состояние сверхпроводников 2-го рода.....	59
5.3.1 Проникновение вихрей в сверхпроводник.	59
5.3.2. Сила взаимодействия между вихрями.	61
5.4. Первое критическое поле.	63
5.5. Второе критическое поле	64
5.6. Поверхностная сверхпроводимость.....	65
5.7. Намагничивание сверхпроводников 2-го рода.....	65
6. Теория сверхпроводимости Гинзбурга-Ландау	69
7. Микроскопическая теория сверхпроводимости.	75
7.1 Общие свойства квантовых жидкостей.	75
7.2 Квантовые свойства электронов проводимости в металле.	77
7.3. Квантовые свойства ионной решетки металлов.....	80
7.4. Экспериментальные данные, важные для построения микроскопической теории сверхпроводимости.	82
7.4.1. Кристаллографические эксперименты.	82
7.4.2 Изотопический эффект.	82
7.4.3. Коэффициент отражения электромагнитного излучения от поверхности сверхпроводника.	84
7.5. Электрон – фононное взаимодействие.	84
7.6. Куперовские пары.	87
7.7. Свойства основного состояния сверхпроводника. Энергетическая щель.....	89
7.8. Незатухающий ток в сверхпроводниках.	90
8. Сверхпроводники 2-го рода в токовом состоянии.....	93
8.1. Силы, действующая на вихревую нить	93
8.2. Течение потока.	96
8.3. Пиннинг.	99
8.3.1. Энергия вихря в сверхпроводящей пластине с током.....	99
8.3.1. Взаимодействие вихря с нормальным включением.	100
8.4. Теория критического состояния Кима - Андерсона.....	101
8.4.1 Модель критического состояния Бина – Лондона	102
8.4.2. Модель критического состояния Кима.	103

1. Физические свойства материалов при низких температурах.

1.1. Общие сведения о сверхпроводниках.

Сверхпроводимостью называют необычное сочетание свойств некоторых материалов, проявляющихся при низких температурах. Главным из этих свойств является практически полное исчезновение электрического сопротивления у многих металлов и сплавов, при их охлаждении до температуры ниже некоторого уровня, называемого критическим. Благодаря этому обстоятельству особое внимание к изучению свойств сверхпроводящих материалов проявляют разработчики самых разнообразных электротехнических устройств, которые находят применение в технике физического эксперимента, в медицине, энергетике, транспорте, в других отраслях науки и техники. Отсутствие электрического сопротивления и соответственно отсутствие потерь энергии при протекании электрического тока по сверхпроводникам позволяет достичь уникальных технико-экономических характеристик устройств, которые являются абсолютно недостижимыми при использовании проводников, традиционно применяемых в электротехнике – меди, алюминия.

Главным ограничителем на пути более широкого и более быстрого распространения применения сверхпроводников является необходимость их охлаждения до низких температур. На сегодняшний день принято разделять все сверхпроводящие материалы на две большие группы. Первая из них – низкотемпературные сверхпроводники, обладающие свойством сверхпроводимости при температурах в диапазоне от долей градуса Кельвина до приблизительно 20°K . У сверхпроводников второй группы, называемых высокотемпературными, электрическое сопротивление отсутствует вплоть до температур порядка 100°K . Сверхпроводники этих групп обладают различающимися свойствами и имеют свои области применения. Но в обоих случаях требуется применение особых мер для поддержания низкой температуры.

1.2. Свойство газов при низких температурах.

Обычно длительное функционирование в условиях низких температур обеспечивается за счет того, что сверхпроводящее устройство погружается в сжиженный газ. Температуры кипения некоторых газов а также плотность сжиженных газов приведены в таблице Таб. 1.

Криогенные газы	Т кип, °K	ρ , г/см ³
Жидкий азот	77.3	0,81
Неон	27.1	0.21
Водород	20.4	0,071
Гелий	4,2	0,125

Таб.1.1. Свойства некоторых газов при низких температурах

Очевидно, что для охлаждения сверхпроводников первой, низкотемпературной группы, может применяться только жидкий гелий (He^4), обладающий температурой кипения при нормальном давлении в 4.2 °К. До настоящего времени именно этот газ наиболее часто применяется на практике в качестве криогенного хладагента. Известно, что впервые гелий был открыт на Солнце по характерным линиям в спектре поглощения. И только после этого он был обнаружен в атмосфере, где его концентрация составляет величину порядка 0.001%. Гелий – очень летучий газ, он не удерживается полем тяготения Земли и непрерывно диффундирует из атмосферы в околоземное пространство. Одновременно с этим гелий непрерывно образуется в земной коре в результате альфа - распада ядер урана и некоторых других радиоактивных элементов. После образования гелий вместе с различными попутными газами поднимается на поверхность земли. Поэтому его основным промышленным источником является природный газ, где содержание гелия колеблется от долей процента до нескольких процентов.

Жидкий гелий – это прозрачная бесцветная жидкость с плотностью $\rho = 0.125 \text{ г/см}^3$ при температуре 4.2 °К. . Впервые в жидком состоянии этот элемент был получен в 1908 году в университете голландского города Лейден, в лаборатории низких температур которой руководил ее основатель, известный физик Гайке Камерлинг-Оннес. За это достижение он был удостоен Нобелевской премии по физике за 1913 год. Для получения жидких газов Камерлинг-Оннес использовал многоступенчатую систему охлаждения, принцип работы которого до сих пор используется, в частности, в обычных бытовых холодильниках. В каждой ступени производится накопление жидкого газа за счет последовательности операций:

- а) компрессор сжимает рабочий газ, в результате чего он разогревается;
- б) разогретый газ охлаждается до температуры окружающей среды в теплообменнике;
- в) охлажденный газ подвергается расширению в детандере и при этом дополнительно охлаждается.

Режимы сжатия и расширения подбираются таким образом, чтобы за один цикл температура газа опустилась бы ниже температуры кипения. При постоянной работе холодильника таким образом можно накопить необходимое количество сжиженного газа. В дальнейшем этот сжиженный газ может быть использован для охлаждения следующей ступени холодильника, в которой используется газ с более низкой температурой кипения. По такой схеме Камерлинг-Оннес получил жидкий азот, используя в качестве промежуточных хладагентов воду, аммиак, ацетилен, метан. Для получения жидкого водорода и затем жидкого гелия пришлось использовать более сложные схемы охлаждения, на которых использовалось так называемое дросселирование – пропускание газа через тонкие капилляры, при котором происходит понижение температура газа за счет специфического эффекта Джоуля – Томпсона. При дросселировании сжатый газ перетекает из одного замкнутого объема в другой без расширения, и соответственно, без совершения работы. Для идеального газа такой процесс не приводит к изменению температуры. Однако в реальном газе между молекулами газа существуют силы взаимодействия, известные как силы Ван-дер-Ваальса. На больших расстояниях эти силы имеют характер притяжения, а на маленьких – отталкивания. Соответственно, потенциальная энергия взаимодействия между молекулами газа будет минимальной и отрицательной по величине при некотором характерном расстоянии между молекулами

r_0 (рис. 1.1). Если сжать газ таким образом, чтобы среднее расстояние между молекулами равнялось бы этому значению, то при последующем расширении молекулы газа будут расходиться, преодолевая силы притяжения. Это будет приводить к понижению температуры. Интересно отметить, что газ изначально был сжат чересчур сильно, так, что энергия взаимодействия между молекулами будет положительной, то последующее расширение приведет к разогреву газа.

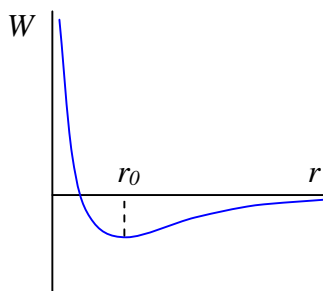


Рис. 1.1. Зависимость потенциальной энергии взаимодействия между молекулами газа в зависимости от расстояния между ними.

Капилляры в этой схеме охлаждения необходимы для того, чтобы замедлить перетекание газа из одного объема в другой и дать возможность для его предварительного охлаждения в теплообменнике. Дросселирование имеет и еще одно важное техническое преимущество по сравнению с детандерной схемой охлаждения. Оно заключается в отсутствии подвижных элементов конструкции, которые являются необходимым элементом в детандере. При очень низких температурах создание поршней, их уплотнение является непростой технической задачей.

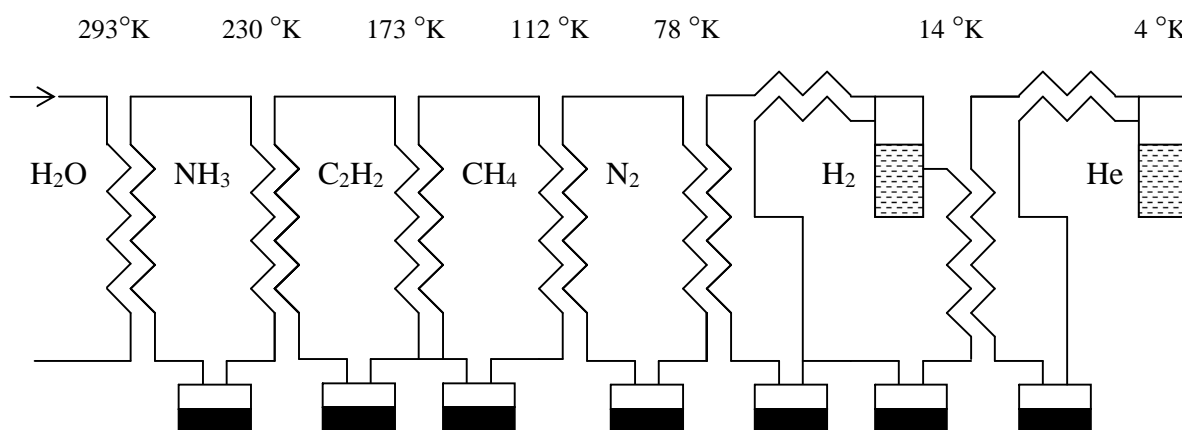


Рис.1.2. Схема холодильника, использованного Камерлинг–Онсом для получения жидкого гелия.

Интересно отметить, что современные установки по производству жидкого гелия в принципе устроены по аналогичным схемам, однако в них используется только две

охлаждающие жидкости – вода и жидкий азот, что достигается за счет более эффективного охлаждения на каждой из ступеней.

Очевидно, что для обеспечения продолжительной работы низкотемпературных устройств необходимо не только получить жидкий газ, но и создать условия для его транспортировки и хранения. Для этой цели используются специальные сосуды – криостаты. По своей конструкции они напоминают обычные бытовые термосы. Криостаты имеют двойные стенки, пространство между которыми откачивается для уменьшения теплопритоков из внешней среды к жидкости, находящейся внутри сосуда. Для уменьшения теплообмена между стенками за счет излучения внутренние поверхности стенок криостата покрывают тонкой полированной пленкой алюминия или меди, поскольку эти металлы имеют очень высокие коэффициенты отражения (и соответственно низкие коэффициенты излучения) в инфракрасном диапазоне электромагнитных волн. Впервые подобная конструкция была предложена в конце XIX века англичанином Джеймсом Дьюаром, по имени которого до сих пор такие криостаты часто называют дьюарами. Для хранения жидкого гелия обычно используют комбинированный дьюар (рис. 1.3), в котором в качестве промежуточного теплового экрана выступает слой жидкого азота.

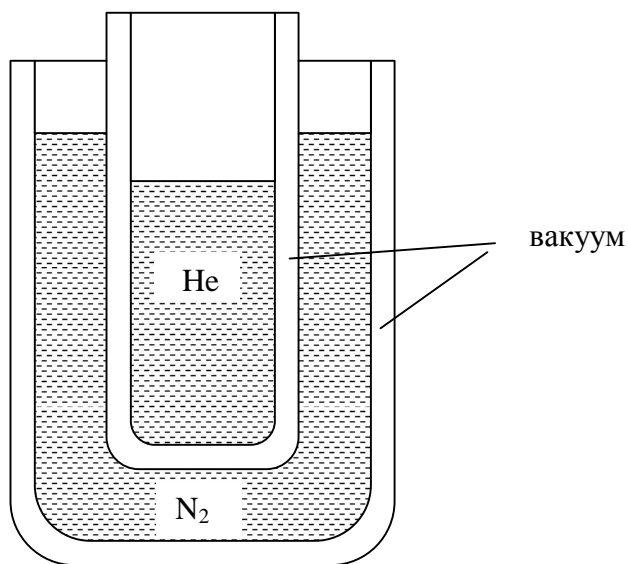


Рис.1.3. Сосуд Дьюара для хранения жидкого гелия.

В последнее десятилетие для поддержания сверхнизких температур в относительно небольших объемах, до нескольких десятков, а в последнее время – до сотен, литров, разработаны специальные устройства – криогенераторы, функционирование которых основана на тех же принципах, что и работа ожижительных машин. Они представляют собой компактные охлаждающие устройства, которые, однако не накапливают сжиженный газ, а создают в замкнутом контуре постоянный поток газа (обычно водорода или гелия), охлажденного до требуемой температуры. С помощью криогенераторов

удается обеспечивать длительное охлаждение низкотемпературных установок вплоть до температур порядка 4 - 5 °К, хотя значительно чаще на практике используются криогенераторы с более высокой рабочей температурой порядка 10 – 100 °К.

1.3. Открытие сверхпроводимости.

В период бурного развития физики на рубеже 19-20 веков большое внимание ученых было приковано к исследованию свойств металлов. Особый интерес представлял вопрос о температурной зависимости удельного сопротивления металлов. Существующие на тот момент экспериментальные сведения свидетельствовали в пользу гипотезы о том, что эта величина приблизительно пропорциональна температуре и, следовательно, должна стремиться к нулю с приближением температуры к абсолютному минимуму. Однако существовавшие на тот момент представления об электронном характере проводимости металла приводили ученых к другим выводам: поскольку при нулевой температуре электроны должны потерять свободу перемещения и связаться с атомами металла, то удельное сопротивление при уменьшении температуры должно стремиться к бесконечности. Существовала и третья точка зрения – сопротивление металлов при малых температурах стремится к некоторому ненулевому значению. До опытов Камерлинг-Оннеса не существовало надежной информации, которая позволила бы сделать выбор между этими тремя гипотезами. И первая серия экспериментов, которые были проведены в Лейденской лаборатории после получения жидкого гелия были направлены на исследование именно этой проблемы. Для получения надежных экспериментальных данных исследователям был необходим очень чистый металл, поскольку малейшие примеси могли сильно исказить наблюдаемые результаты. Единственным на тот момент доступным чистым металлом была ртуть, поскольку она могла быть очищена путем многократной дистилляции. Именно ртуть и стала тем металлом, с которым проводил свои первые эксперименты Камерлинг-Оннес. Однако произошло это только в 1911 году. К этому времени в Лейденской лаборатории была построена новая ожижительная установка, с помощью которой удалось накопить достаточное для работы количество жидкого гелия. Камерлинг-Оннес залил ртуть в стеклянную трубку, заморозил ее, получил таким образом ртутную проволоку и стал измерять ее свойства в зависимости от температуры. Результаты эксперимента поразили исследователей – сопротивление проволоки плавно уменьшалось вплоть до температуры в 4 градуса Кельвина, а затем скачком приняло нулевое значение. Стало ясно, что исследуемый образец перешел в какое-то новое, ранее неизвестное состояние. Камерлинг-Оннес назвал это состояние сверхпроводимостью. В дальнейшем оказалось, что в это состояние могут перейти многие металлы и сплавы. И совершенно не обязательно, чтобы металл был чистым.

Поскольку в начале 20-го века Камерлинг-Оннес обладал “монополией” на проведение экспериментов при сверхнизких температурах, то не удивительно, что именно он и его сотрудники стали авторами открытия сверхпроводимости в других металлах, в частности в свинце, олове и других. Им же принадлежит авторство в открытии многих необычных свойств сверхпроводников. В частности в одном из проведенных экспериментов Камерлинг-Оннес обнаружил, что сверхпроводящее состояние разрушается не только при повышении температуры, но и при помещении сверхпроводника в достаточно сильное

магнитное поле. По существу Камерлинг-Оннес сформировал представления о важнейших характеристиках сверхпроводника – критической температуре и критическом магнитном поле.

Пожалуй самым интригующим с момента открытия сверхпроводимости был вопрос о величине наблюдаемого удельного сопротивления. Что в действительности наблюдали экспериментаторы – значительное уменьшение сопротивления или его полное исчезновение? Пытаясь ответить на этот вопрос, Камерлинг-Оннес провел следующий эксперимент. Он пропустил ток по кольцу, сделанному из сверхпроводящего материала и затем в течение длительного времени наблюдал за магнитным полем, создаваемым протекающим током. Если бы кольцо обладало сопротивлением, то ток с течением времени должен был бы затухать по экспоненциальному закону. Однако никакого изменения в уровне магнитного поля замечено не было. Во время проведения этого эксперимента Камерлинг-Оннес перевозил кольцо с током из голландского Лейдена в английский Кембридж, где демонстрировал свои достижения.

За 75 лет, прошедших после открытия Камерлинг-Оннеса (до 1986 года) сверхпроводимость была обнаружена у 40 чистых металлов, критические температуры которых лежат в пределах от 0.012 °K у вольфрама до 11.3 °K у технеция. Также к сверхпроводникам относили несколько сотен соединений и сплавов. Среди этих соединений наибольшей критической температурой обладает интерметаллическое соединение Nb₃Ge 23.2 °K. Очевидно, что для охлаждения этих сверхпроводников может быть использован только жидкий гелий. Чисто теоретически в некоторых случаях мог бы использоваться и жидкий водород, однако его применение резко ограничено тем, что водород взрывоопасен. Мечтой исследователей было создание сверхпроводящих соединений с такой критической температурой, которая допускала бы использовать для охлаждения очень дешевый и безопасный в обращении жидкий азот (температура кипения 77 °K). И в 1986 году такие материалы были найдены. Сначала швейцарские ученые Беднорц и Мюллер объявили об обнаружении сверхпроводимости в керамике, представляющей собой соединение окислов лантана, бария и меди. Температура перехода для этой керамики составляло “всего” 35 °K. Однако уже в тот момент стало ясно, что открыт новый тип сверхпроводников. В исследование различных керамик включилась вся мировая научная общественность. Уже на следующий год была обнаружена сверхпроводимость в керамике Y-Ba-Cu-O с температурой перехода 92 °K. Тем самым был преодолен азотный барьер. В дальнейшем температура перехода была поднята до величины порядка 140 °K в ртутных керамиках. Появлялись сообщения об открытии сверхпроводников с более высокими критическими температурами, однако в дальнейшем они не подтвердились. Новый тип сверхпроводников получил название высокотемпературных (ВТСП).

Элемент	T_c , °K	B_c , Тл при $T = 4$ °K
Hg	4,15	0,041
Pb	7,2	0,080
Nb	9,25	0.206
NbTi	9.5-10.5	12
Nb ₃ Sn	18.1-18.5	22
Nb ₃ Al	18.9	30
Nb ₃ Ge	23.2	37
MgB ₂	~40	15 33 (+C) 50 (пленка)
YBa ₂ Cu ₃ O ₇	92.4	60, 18 (77°)
Bi ₂ Sr ₂ Ca ₂ Cu ₃ O ₁₀	111	~ 500
HgBa ₂ Ca ₂ Cu ₃ O ₈	133	> 1000

Таб.1.2. Свойства некоторых сверхпроводников.

Причины возникновения сверхпроводящего состояния в ВТСП до конца не понятны до настоящего времени.

Особняком стоит открытие сверхпроводимости в соединении MgB₂, которое было сделано в 2001 году. Критическая температура этого соединения оказалась равной 40 °K. Казалось бы в сравнении с критическими температурами, характерными для ВТСП, это небольшая величина. Однако диборид магния - вещество очень простое и в отличие высокотемпературных сверхпроводников, хорошо описывается классической теорией сверхпроводимости, которая устанавливает практический предел для критической температуры на уровне около 30 °K. Вопреки ожиданиям, за последующие годы сверхпроводников, подобных MgB₂ обнаружено не было и само это соединение фактически представляет собой самостоятельный, третий тип сверхпроводников наряду с НТСП и ВТСП.

Интересно проследить за тем, как в течение ста лет, прошедших со дня открытия сверхпроводимости, изменялась максимальная критическая температура известных на тот момент сверхпроводников.

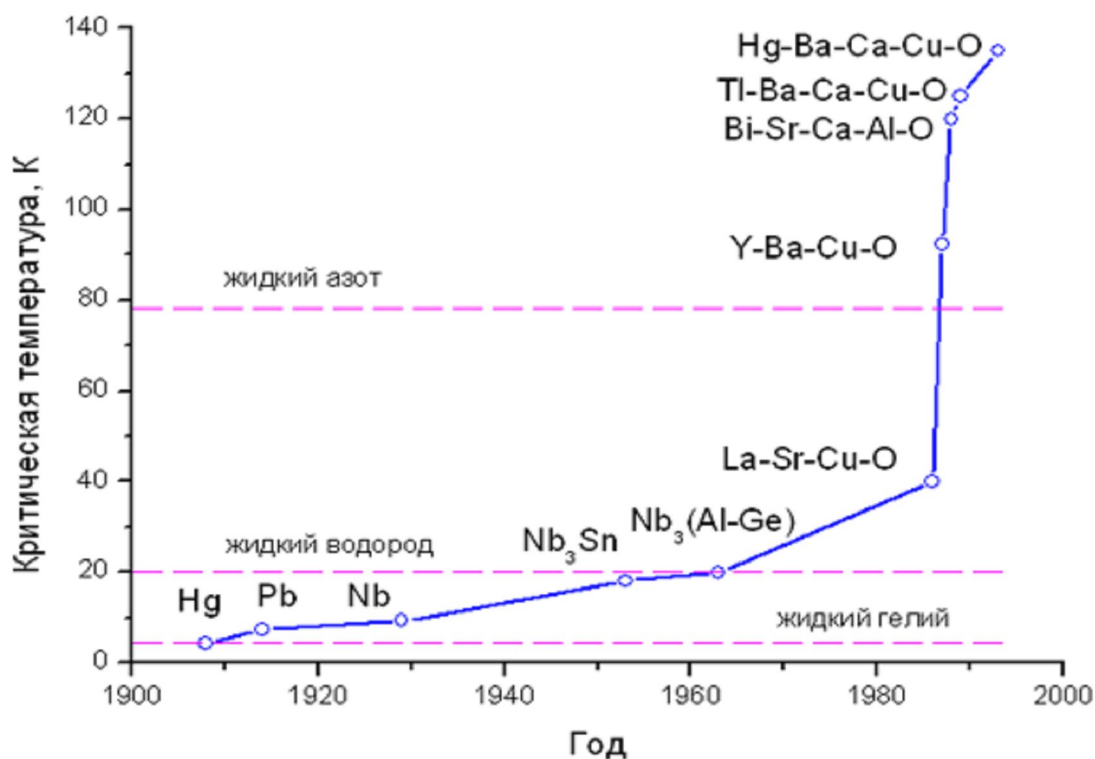


Рис. 1.4. График, иллюстрирующий историю открытий сверхпроводников. Горизонтальные штриховые линии показывают температуры кипения некоторых жидких газов при нормальном давлении.

Любопытно отметить, что в первые 50 – 60 лет максимальная достигнутая критическая температура сверхпроводников росла со скоростью приблизительно 0.3 °K/год. Если бы этот плавный рост продолжался бы и в будущем, то “азотный барьер” был бы преодолен только через полторы сотни лет. Однако наука редко развивается равномерно - открытие нового типа сверхпроводников – высокотемпературных керамик - позволило резко увеличить максимальную критическую температуру в 1986 – 1990 годах и после этого новых открытий, заметно поднявших бы потолок критических температур совершенно не было.

1.5. Развитие теории сверхпроводимости.

Сверхпроводимость представляет собой одно из тех физических явлений, в исследовании которых эксперимент постоянно и существенно опережает теорию. Первые попытки создания феноменологической теории сверхпроводимости были предприняты в середине 30-х годов немецкими физиками братьями Лондонами, через 20 с лишним лет после ее открытия. Предложенные ими уравнения сверхпроводника позволили описать поведение сверхпроводника с током в магнитном поле. Братьями Лондонами было введено одно из фундаментальных понятий о глубине проникновения магнитного поля в сверхпроводник, имеющей очень важное значение для характеристики свойств сверхпроводника. Однако в

этой теории отсутствовал ответ на главный вопрос – о причинах возникновения сверхпроводимости.

Значительный шаг в понимании природы сверхпроводимости сделал А. Пиппард, который ввел в 1950 году понятие о характерном расстоянии, на котором могут происходить существенные изменения в характеристиках сверхпроводящего состояния.

Существенный вклад в развитие теории внесли В.Л.Гинзбург и Л.Д. Ландау, применившие для описания состояния сверхпроводимости методы квантовой механики. В 1957 году на основе этой теории А.А. Абрикосов создал теорию так называемых сверхпроводников второго рода, которые, в основном, применяются в технике. До сих пор эта теория служит основным инструментом для расчета эксплуатационных характеристик реальных сверхпроводящих проводов и устройств. Однако и эти теории оставались феноменологическими.

Говоря о развитии теории сверхпроводимости, нельзя не отметить и работ Л.Д. Ландау, в которых он описал свойства близкого по многим проявлениям физического эффекта – сверхтекучести жидкого гелия. Эта теория была построена в 30-х годах прошлого столетия и на первый взгляд могла быть автоматически использована для объяснения сверхпроводимости. Но сумели это сделать только в конце 50-х годов американские теоретики Дж. Бардин, Л. Купер и Дж. Шриффер. Только после появления их работ стал понятен механизм сверхпроводимости. В них впервые было показано, что сверхпроводящий ток переносится электронными парами, которые образуют связанные квазичастицы внутри сверхпроводника за счет обмена фононами.

После открытия высокотемпературной сверхпроводимости ведущие физики-теоретики прикладывают огромные усилия для создания теории, способной объяснить это явление. Все эти модели предполагают, что, как и в классических сверхпроводниках, в ВТСП электроны объединяются в пары. Однако до сих пор так и не предложен механизм, который смог бы убедительно объяснить причины возникновения сил притяжения между электронами при столь высоких температурах.

1.6. Применение сверхпроводников.

Сверхпроводящие материалы уже в течение нескольких десятилетий применяются в различных отраслях науки и техники. Наиболее широкое применение нашли магниты постоянного тока со сверхпроводящими обмотками, которые находят применение в физике высоких энергий при создании ускорителей заряженных частиц, а также в медицине в ЯМР – томографии. Есть две основные причины, по которым в некоторых случаях они вытесняют обычные, “теплые” магниты. Во-первых обычные технические сверхпроводники позволяют создать магнитное поле с индукцией до 10 – 15 Т, в то время, как максимальное поле обычных магнитов фактически ограничено полем насыщения железа, равное приблизительно 2 Т. В многих случаях именно это обстоятельство является решающим при выборе типа магнита. Второй причиной является то, что затраты мощности на питание обычного электромагнита значительно больше, чем затраты электроэнергии на эксплуатацию магнита со сверхпроводящей обмоткой. В этом случае выбор типа магнита обуславливают чисто экономические причины.

1.6.1. Ускорительные магниты.

Дипольные магниты являются наиболее существенным элементом большинства крупных ускорителей заряженных частиц (исключение составляют относительно немногочисленные линейные ускорители). В этих ускорителях заряженные частицы движется по кольцевой траектории и постепенно ускоряется до высоких энергий. Для того, чтобы обеспечить движение частиц по замкнутой траектории применяют дипольные магниты, создающие однородное поле в области прохождения пучка. Здесь используется то обстоятельство, что заряженная частица в магнитном поле движется по круговой линии, причем радиус этого круга обратно пропорционален индукции магнитного поля и прямо пропорционален импульсу частицы. Очевидно, что увеличивая магнитное поле, можно уменьшить размеры ускорителя или увеличить энергию (импульс) ускоряемых частиц в уже существующей системе. С этой точки зрения чрезвычайно выгодным является использование магнитов со сверхпроводящими обмотками, в которых возможно создание сравнительно сильных магнитных полей. Первый серьезный успешный проект по созданию ускорителя со сверхпроводящими магнитами был реализован в США, где в 1983 году в национальной лаборатории имени Ферми в Чикаго был запущен кольцевой ускоритель протонов и антипротонов с максимальной энергией в 900 ГэВ (гигаэлектрон-вольт). Всего на ускорителе было установлено 774 дипольных магнита длиной 7 м каждый. Кроме того в кольце, длина которого составляет 6.3 км, было установлено несколько сотен вспомогательных сверхпроводниковых магнитов меньших размеров. Максимальное магнитное поле в рабочей области магнитов достигало уровня в 4 Т. В последующие годы были созданы еще несколько крупных ускорителей, эксплуатирующих сверхпроводящие магниты. Один из них был построен в России, в Дубне. В отличие от других ускорителей главной целью применения сверхпроводниковых обмоток в этом случае было сокращение эксплуатационных расходов на электроэнергию.

В настоящее время заканчивается строительство крупнейшего протон – антипротонного ускорителя в ЦЕРНЕ, в Швейцарии – Франции. Основные дипольные магниты этого ускорителя имеют уникальные характеристики. Максимальное поле в рабочей зоне составляет 8.3 Т, длина каждого магнита равна 14.3 м.

Как уже отмечалось, в принципе современные сверхпроводники выдерживают магнитные поля с индукцией до 15 – 20 Т. Казалось бы, по сравнению с этими значениями поле с индукцией 8 Т не является. Однако создать дипольные магниты с таким уровнем поля оказывается крайне сложно. Главным препятствием являются механические напряжения, возникающие вследствие силового воздействия магнитного поля на провода с током. В состоянии на 2004 году в Брукхейвенской национальной лаборатории в США был построен небольшой дипольный магнит с индукцией магнитного поля в центральной области равной 15.2 Т. Пока (по состоянию на 2007 год) это является рекордным значением. Большие по величине поля удастся создать только в сверхпроводящих магнитах соленоидального типа, где проблемы с механическими напряжениями решаются намного проще.



Рис.1.5. Сверхпроводниковые дипольные магниты в криостатах. (Ускоритель Брукхейвенской национальной лаборатории, США).

1.6.2. ЯМР – томографы.

Наиболее широкое практическое применение на сегодняшний день сверхпроводники нашли в физическом эксперименте. Здесь достаточно сложно говорить об экономической эффективности от их использования, поскольку фундаментальная наука, к числу которых безусловно относится физика высоких энергий, сама по себе является затратной и не может принести прибыль в краткосрочной или среднесрочной перспективе. В то же время уже сейчас существуют примеры коммерчески выгодного применения сверхпроводников. Наиболее ярким из них является производство медицинских ЯМР – томографов.

Ядерным магнитным резонансом (ЯМР) называется избирательное поглощение электромагнитных волн веществом (в частности телом человека), находящимся в магнитном поле, что возможно благодаря наличию ядер с ненулевым магнитным моментом. Во внешнем магнитном поле протоны и нейтроны этих ядер как маленькие магниты ориентируются строго определенным образом и меняют по этой причине свое энергетическое состояние. Расстояние между этими уровнями энергии столь мало, что переходы между ними способны вызвать даже радиоизлучение. Энергия радиоволн в миллиарды раз меньше, чем у рентгеновского излучения, поэтому они не могут вызвать какие-либо повреждения молекул и соответственно абсолютно безопасны для человека. Итак, сначала происходит поглощение радиоволн. Затем происходит испускание радиоволн ядрами и переход их на более низкие энергетические уровни. И тот, и другой процесс можно зафиксировать, изучая спектры поглощения и излучения ядер. Эти спектры зависят от множества факторов и прежде всего – от величины магнитного поля. Компьютерная обработка этих спектров позволяет создать пространственную картину распределения различных химических соединений в теле человека. Очень важным при

разработке томографа является создание стабильного во времени магнитного поля порядка 1 Т в объеме порядка десятых долей кубометра. В принципе такие характеристики могут быть получены и с помощью резистивных катушек, однако и сама установка оказывается дорогой, а эксплуатация сопряжена не только с высокими затратами на электроэнергию, но и с необходимостью подведения к клинике специальных мощных линий электропередачи. По этим причинам сверхпроводниковые ЯМР – томографы в значительной степени вытеснили резистивные установки. В настоящее время ежегодно выпускается более 1000 сверхпроводниковых томографов, а объем их ежегодных продаж составляет более 2 миллиардов долларов.

1.6.3. Применение низкотемпературных сверхпроводников в энергетике

В конце прошлого столетия усилия многих исследователей были направлены на разработку различного рода электротехнических устройств с использованием сверхпроводников. В частности в Советском Союзе и США проводились работы по созданию электрических генераторов со сверхпроводящими обмотками возбуждения. В 80-х годах в Ленинграде в научно-исследовательском институте ВНИИЭлектромаш был создан криотурбогенератор мощностью 20 МВт и на некоторое время он даже был включен в энергосистему. Однако реальные низкие технико-экономические характеристики этого генератора и сложности с обеспечением условий для его нормального функционирования, в частности к криогенному, привели к его быстрому выводу из системы. В США аналогичные работы были прекращены на стадии проектирования генератора из-за негативных оценок перспективности разработки.

На стадии проектно-конструкторских работ фактически остановились и многие другие работы, направленные на применение низкотемпературных сверхпроводников в энергетике. Это относится к разработке сверхпроводниковых трансформаторов, мощных кабельных линий, накопителей энергии. Особо стоит отметить разработку мощных сверхпроводниковых магнитных систем для преобразователей электромагнитной энергии, использующих реакцию термоядерного синтеза. Эти работы идут медленнее, чем это прогнозировалось в недалеком прошлом, но тем не менее альтернативы сверхпроводникам в этих устройствах, которые предположительно будут основой энергетики будущего, нет.

1.6.4. Применение высокотемпературных сверхпроводников.

Еще несколько лет тому назад практическое, экономически выгодное применение ВТСП казалось делом отдаленного будущего. Во-первых отсутствовала технология изготовления проводов из крайне хрупких сверхпроводящих керамик. Во-вторых, несмотря на перевод керамических образцов в сверхпроводящее состояние, пропустить через них значительные токи не удавалось. Однако за несколько последних лет произошел прорыв в технологии, благодаря которому сразу несколько компаний в России, США и Японии освоили промышленное производство проводов с высокой плотностью критического тока. Следствием этого явилось появление первых промышленных сверхпроводниковых устройств, сделанных с применением ВТСП. Наиболее впечатляющие результаты были

достигнуты в создании сверхпроводящих кабельных линий. Первые такие линии были проложены в США, в городах Детройт и Олбани в 2005 – 2006 годах. В обоих случаях их длина составила чуть большее 300 м, а пропускная способность в 3-5 раз превысила мощность стандартного кабеля. Очень важно то, что прокладка сверхпроводящего кабеля в этих случаях оказалась намного дешевле, чем прокладка обычного, и это многократно компенсировало дополнительные расходы и усилия, связанные с необходимостью эксплуатации криогенного оборудования.

Еще одним примером успешного развития ВТСП является начало серийного производства судовых электродвигателей со сверхпроводящими обмотками, которые разработала японская компания “Сумитомо”, один из лидеров в разработке технологии производства сверхпроводящих проводников. Главной особенностью этих двигателей является то что при мощности в 5 МВт их объем в 10 раз меньше, чем объем обычного электродвигателя. Это обстоятельство позволяет существенно улучшить ходовые характеристики судов (двигатель с гребным винтом располагается в воде). Этими двигателями предполагается оснастить быстроходные катера береговой охраны Японии. Очень важным свойством двигателей является необычная простота их эксплуатации, практически не требующая какого-либо вмешательства квалифицированного обслуживающего персонала.

Одним из существенных ограничителей в использовании ВТСП в настоящее время является относительно высокая стоимость проводов. Связано это в значительной степени с тем, что по ряду причин технологического характера в сверхпроводящие провода приходится добавлять до 50 – 70 % серебра, которое намного дороже, чем сама сверхпроводящая керамика. Если каким-то образом удастся поменять технологию изготовления ВТСП проводов и заменить серебро на более дешевый наполнитель (матрицу), к примеру медь, то перспективы применения ВТСП значительно расширятся.



Рис.1.6. Сверхпроводниковые устройства, выполненные с использованием низкотемпературных сверхпроводников - 3-фазный кабель и судовой двигатель.

2. Классическая электродинамика сверхпроводников.

Развитие теоретических представлений о природе и свойствах сверхпроводников прошло несколько стадий. На первых из них были сформулированы феноменологические теории, которые помогали понять свойства сверхпроводимости, но не давали ответа на главный вопрос – почему при низких температурах создаются условия для протекания незатухающих токов? Наиболее известными из этих теорий являются теория братьев Лондонов и теория Гинзбурга – Ландау. Несмотря на то, что к настоящему времени теоретические представления о сверхпроводниках получили значительное развитие, математический аппарат, разработанный в рамках этих теорий, до наших дней интенсивно используется на практике при разработке и анализе свойств различных сверхпроводящих устройств.

Основы классической электродинамики сверхпроводников были разработаны в 30-х – 40-х годах прошлого века. Эта первая теория сверхпроводимости постулировала известные на тот момент экспериментально наблюдаемые свойства сверхпроводников. Наиболее важными, фундаментальными свойствами сверхпроводников, характеризующими их электродинамику можно считать:

- Отсутствие электрического сопротивления;
- Вытеснение магнитного поля из объема, занятого сверхпроводником.

2.1. Сопротивление сверхпроводников.

Первым и наиболее существенным свойством сверхпроводников, которое было обнаружено экспериментально является исчезновение электрического сопротивления при понижении температуры образца ниже некоторого уровня, называемого критическим. Типичная зависимость удельного сопротивления сверхпроводника от температуры приведена на Рис. 2.1.

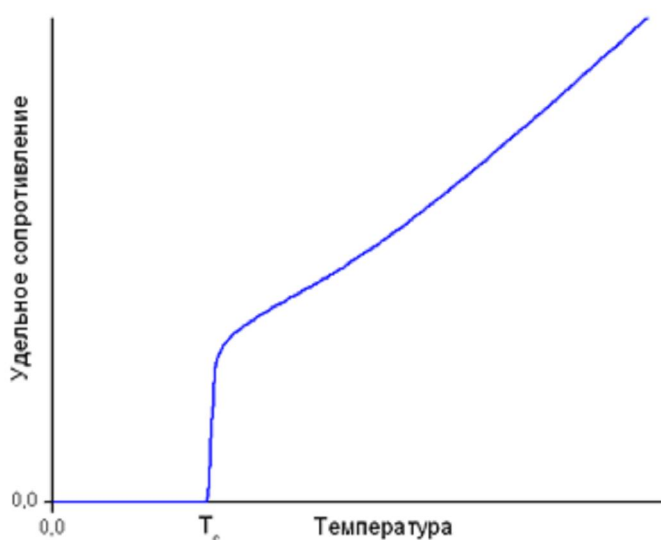


Рис.2.1. Зависимость удельного сопротивления сверхпроводников от температуры.

Обращает на себя то обстоятельство, что переход к нулевой температуре происходит быстро, но не мгновенно – существует некоторый температурный диапазон, в котором удельное сопротивление снижается до нулевого уровня. Величина этого диапазона зависит от многих обстоятельств, в частности от типа материала, наличия примесей, кристаллической структуры, и других. Для очень чистых образцов переход может быть очень резким. В частности, для образца из галлия высокой очистки зарегистрирован переход в сверхпроводящее состояние в диапазоне 10^{-5} градуса. В то же время для не очень тщательно подготовленных образцов из керамических высокотемпературных сверхпроводников ширина зоны перехода может составлять десятки градусов.

При экспериментальном определении удельного сопротивления материала невозможно гарантировать равенство нулю этой величины. Можно говорить лишь о том, что это сопротивление ниже уровня чувствительности измерительного оборудования. Первые эксперименты, проведенные еще Камерлинг-Оннесом, показали, что удельное сопротивление при переходе в сверхпроводящее состояние уменьшается по крайней мере в 10^{12} раз. Современные данные показывают, что удельное сопротивление сверхпроводников по крайней мере не превышает величину в 10^{-26} Ом·м, что в 10^{18} раз меньше, чем сопротивление меди при комнатной температуре.

2.2. Эффект Мейснера.

В 1933г. немецкие физики Мейснер и Оксенфельд решили экспериментально проверить, как именно распределяется магнитное поле вокруг сверхпроводника. Результат оказался неожиданным. Независимо от условий проведения эксперимента магнитное поле внутрь проводника не проникало. Поразительный факт заключался в том, что сверхпроводник, охлажденный ниже критической температуры в постоянном магнитном поле, самопроизвольно выталкивает это поле из своего объема, переходя в состояние, при котором магнитная индукция $B=0$, т.е. состояние идеального диамагнетизма. Это явление получило название эффекта Мейснера. Эффект Мейснера показывает, что сверхпроводимость - гораздо более сложное явление, чем просто потеря электрического сопротивления. Ведь в идеальном проводнике, который помещен во внешнее магнитное поле и сопротивление которого стало равно нулю, магнитное поле должно сохраняться. (Рис. 2.2). Более того, это "замороженное" поле должно остаться и после выключения поля внешнего - его станут поддерживать токи сверхпроводимости, индуцированные полем на поверхности сверхпроводника. Опыт, однако, показывает, что этого не происходит.

Многие считают, что эффект Мейснера, является наиболее фундаментальным свойством сверхпроводников. Действительно, существование нулевого сопротивления неизбежно следует из этого эффекта. Ведь поверхностные экранирующие токи постоянны во времени и не затухают в не измеряющемся магнитном поле. В тонком поверхностном слое сверхпроводника эти токи создают свое магнитное поле, строго равное и противоположное внешнему полю. В сверхпроводнике эти два встречных магнитных поля складываются так, что суммарное магнитное поле становится равным нулю, хотя слагаемые поля существуют совместно, поэтому и говорят об эффекте «выталкивание» внешнего магнитного поля из сверхпроводника.

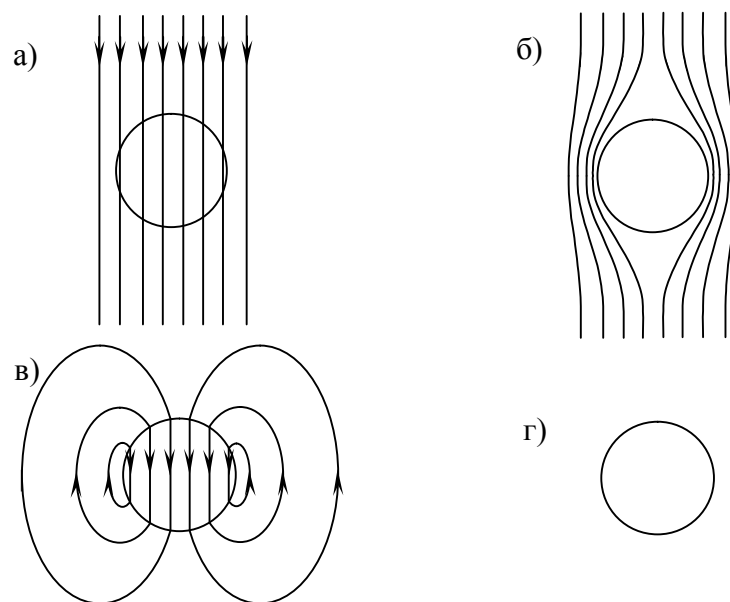


Рис. 2.2. Проникновение магнитного поля в идеальный проводник и сверхпроводник:

- а) сверхпроводник во внешнем магнитном поле до перехода в сверхпроводящее состояние; таким же будет состояние идеального проводника после перехода к состоянию с нулевым сопротивлением
- б) сверхпроводник во внешнем магнитном поле после перехода в сверхпроводящее состояние;
- в) идеальный проводник после выключения внешнего магнитного поля;
- г) сверхпроводник после выключения внешнего магнитного поля.

Следует отметить, что в своем классическом проявлении эффект Мейснера не выполняется в некоторых сверхпроводниках, так называемых сверхпроводниках 2-го рода, если магнитное поле в них, превышает некоторый уровень, называемый первым критическим магнитным полем. Тем не менее удельное сопротивление сверхпроводников в этих условиях может сохранять практически нулевое значение. Более подробно свойства таких сверхпроводников и причины невыполнения эффекта Мейснера будут рассматриваться в дальнейшем.

2.3. Глубина проникновения магнитного поля в сверхпроводник.

Очевидно, что толщина приповерхностного слоя, в котором протекают экранирующие токи не может быть нулевой. Однако толщина эта очень маленькая и определить ее экспериментально оказывается очень не просто. В первых экспериментах для определения этого параметра использовались сверхпроводящие образцы, объем которых сравним с объемом, занимаемым приповерхностным слоем. Очевидно, что такие объекты должны быть чрезвычайно малы. В 1940-м году англичанин Давид Шенберг измерил магнитную восприимчивость коллоидной ртути, состоящей из частиц размером от 10 до 100 нм, при различных температурах. По величине восприимчивости можно было

определить соотношение между количеством материала, лежащего внутри поверхностного слоя и за его пределами. А информация о размере микрочастиц позволила сделать заключение об абсолютной величине глубины проникновения магнитного поля в сверхпроводник, в данном случае – ртуть. Эта величина оказалась равной приблизительно 40 нм. В дальнейшем были проведены более точные измерения глубины проникновения магнитного поля в различные сверхпроводники. В этой связи хотелось бы отметить изящные опыты, проведенные в 1959 году американскими физиками Артуром Шавловым и Джозефом Девлиным. На стержень из чистого сверхпроводника плотно наматывался соленоид. Полученная таким образом катушка индуктивности включалась в электрическую цепь последовательно с конденсатором. Затем измерениям подвергалась частота собственных колебаний в получившемся резонансном контуре. Эта частота зависела от индуктивности катушки, а та, в свою очередь, от величины магнитного потока, проходящего внутри соленоида. Поскольку магнитное поле в сверхпроводнике проходит только внутри приповерхностного слоя, то по измерениям резонансной частоты можно непосредственно определить величину потока в катушке и, следовательно, толщину слоя, в котором проходит магнитное поле и протекают экранирующие токи. Исследования показали, что толщина этого слоя обычно составляет десятки нанометров и зависит как от типа сверхпроводника, так и от его температуры.

Сверхпроводник	Глубина проникновения, нм
Свинец	39
Алюминий	50
Индий	64
Олово	51
Кадмий	130
Ртуть	38 ÷ 45
Nb₃Sn	29

Таблица 2.1. Глубина проникновения магнитного поля при нулевой температуре для некоторых сверхпроводников.

2.4. Классическая электродинамика сверхпроводников. Теория Лондонов.

2.4.1. Двухжидкостная модель сверхпроводников.

Многие свойства сверхпроводников можно объяснить, используя представления об одновременном существовании в их объеме двух типов электронов. Одна часть из них может перемещаться по сверхпроводнику без взаимодействия с окружающей кристаллической решеткой. Соответственно направленное перемещение таких электронов порождает ток, протекание которого не вызывает потерь мощности. Эти электроны мы будем называть сверхпроводящими. Другая часть электронов, которые мы будем называть нормальными, подчиняется обычным законам классической теории металлов и ток, вызванный перемещением нормальных электронов, вызывает падение напряжения в соответствии с законом Ома и потери мощности в соответствии с законом Джоуля - Ленца. Поскольку при температуре, равной критической, сверхпроводимость исчезает, можно предположить, что концентрация сверхпроводящих электронов n_s обращается в ноль. При понижении температуры эта концентрация увеличивается и достигает своего максимума при температуре абсолютного нуля.

В общем случае ток в сверхпроводнике будет переноситься как сверхпроводящими, так и нормальными электронами. Протекание нормальной компоненты тока сопровождается появлением электрического поля. Поскольку поле является общим для всех заряженных частиц, то и сверхпроводящие электроны придут в движение. Однако, в отличие от нормальных они будут не просто перемещаться в этом поле, но они будут двигаться в нем с ускорением. Это означает, что в сверхпроводнике протекает меняющийся во времени ток. И только в особом случае – при постоянном токе, он будет переноситься только сверхпроводящими электронами. В этой ситуации электрическое поле внутри сверхпроводника будет отсутствовать, и нормальные электроны будут оставаться неподвижными. Представления об одновременном существовании двух типов электронов называют *двухжидкостной моделью* сверхпроводника. Сверхпроводник оказывается как бы пропитанным двумя жидкостями, состоящими из нормальных и сверхпроводящих электронов. Эта модель была предложена в работах К. Гортера – Х. Казимера в 1934 году и была положена в основу первой феноменологической теории сверхпроводимости, разработанной немецкими физиками - теоретиками братьями Фрицем и Хайнцем Лондонами в 1935 году. Основы этой теории рассмотрены ниже.

2.4.2. Уравнение Лондонов.

Рассмотрим поведение сверхпроводящих электронов при воздействии внешнего электрического поля. Поскольку эти электроны движутся без какого-либо сопротивления со стороны окружающей среды, то единственной силой, которая на них будет действовать, создается электрическим полем. В соответствии со вторым законом Ньютона заряженная частица начинает двигаться с ускорением, определяемым формулой:

$$m\vec{a} = e\vec{E}, \quad (2.1)$$

где e и m - соответственно заряд и масса электрона, \vec{E} - напряженность электрического поля. В результате направленного движения электронов в проводнике возникает электрический ток с плотностью:

$$\vec{J} = e \cdot n \cdot \vec{V},$$

где \vec{V} - скорость направленного движения заряженных частиц. Выполним последовательно ряд преобразований с последним соотношением. Прежде всего продифференцируем левую и правую части равенства по времени.

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = e \cdot n \cdot \frac{d\vec{V}}{dt}$$

Учитывая, что производная от скорости по времени, это ускорение, а также принимая во внимание соотношение (2.1), перепишем последнее равенство в виде:

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{n_s e^2}{m} \vec{E}. \quad (2.2)$$

Это уравнение иногда называют первым уравнением Лондонов. Оно показывает, что напряженность электрического тока в сверхпроводнике вызывает меняющийся во времени электрический ток. И наоборот, при протекании стационарных токов в сверхпроводнике напряженность электрического поля равна нулю. Далее, применим операцию rot к обеим частям последнего равенства (2.2). В результате мы получим соотношение:

$$\frac{d}{dt} (rot \vec{J}) = \frac{n_s \cdot e^2}{m} \cdot rot \vec{E}$$

Одно из уравнений Максвелла, $rot \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$, позволяет исключить из рассматриваемого соотношения напряженность электрического поля:

$$\frac{d}{dt} (rot \vec{J}) = -\frac{e^2 \cdot n}{m} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt}. \quad (2.3)$$

Полученное соотношение определяет связь между плотностью тока и индукцией магнитного поля в так называемом идеальном проводнике, то есть проводнике, обладающем нулевым сопротивлением. В отличие от идеального проводника сверхпроводник обладает дополнительным свойством – магнитное поле в объеме сверхпроводящего образца равно нулю. Последнее обстоятельство было использовано братьями Лондонами для дальнейшей трансформации приведенного выше соотношения. Если левую и правую часть этого равенства проинтегрировать по времени, то, строго

говоря, в соотношении появляется дополнительное слагаемое – неопределенная константа интегрирования, не зависящая от времени:

$$\text{rot}(\vec{J}) = -\frac{e^2 \cdot n}{m} \cdot \vec{B} + \vec{B}_0.$$

Но как известно из эффекта Мейснера, магнитное поле внутри проводника отсутствует. Отсюда следует вывод о том, что неопределенная константа \vec{B}_0 равна нулю. Эти рассуждения позволили сформировать соотношение, известное, как второе уравнение Лондонов:

$$\text{rot}(\vec{J}) = -\frac{e^2 \cdot n}{m} \cdot \vec{B}.$$

В отличие от первого уравнения (2.2), которое выполняется как в сверхпроводниках, так и в идеальных проводниках, последнее справедливо только для сверхпроводников. Обычно это уравнение записывают в несколько иной форме:

$$\text{rot}(\vec{J}) = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2} \cdot \vec{B}. \quad (2.4)$$

Здесь введено обозначение

$$\lambda = \sqrt{\frac{m}{e^2 n \mu_0}}. \quad (2.5)$$

Нетрудно убедиться, что определенная таким образом константа имеет размерность длины.

2.4.3. Уравнение Лондонов для векторного потенциала.

Часто уравнение Лондонов представляют в несколько преобразованном виде. Как известно, для описания интенсивности магнитного поля наряду с индукцией и напряженностью вводят различные потенциальные характеристики, к которым относится, в частности, векторный магнитный потенциал, определяемый как:

$$\text{rot} \vec{A} = \vec{B}$$

Подставляя это соотношение в (3), мы получим:

$$\text{rot}(\vec{J}) = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2} \cdot \text{rot}(\vec{A})$$

Если роторы двух векторов равны, то, с некоторыми оговорками, равны и сами вектора:

$$\vec{J} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2} \cdot \vec{A}. \quad (2.6)$$

Для выполнения этого равенства необходимо наложить некоторые дополнительные условия на возможный выбор векторного потенциала, называемые калибровочными. Поскольку векторный потенциал связан с индукцией магнитного поля соотношением $\vec{B} = \text{rot}(\vec{A})$, то добавка к векторному потенциалу слагаемого, равного градиенту произвольной функции $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \text{grad}(\chi)$ не меняет распределения магнитного поля, так как имеет место тождественное равенство $\text{rot}(\text{grad}(\chi)) \equiv 0$. Для того, чтобы вектор \vec{A} был определен однозначно, необходимо дополнительно каким-то образом задать функцию χ или наложить условия, которые позволяют однозначно определить эту функцию. Одна из таких возможностей заключается в том, чтобы зафиксировать $\text{div}(\vec{A})$ и нормальной компоненты вектора \vec{A} на границе рассматриваемой области. Действительно, зададим эти условия

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{A}) &= \rho; \\ A_n &= \eta, \end{aligned} \quad (2.7)$$

и рассмотрим новую функцию $\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad}(\chi)$, которая, как уже отмечалось, не изменяет значений индукции магнитного поля. Найдем дивергенцию этой функции:

$$\text{div}(\vec{A}') = \text{div}(\vec{A}) + \text{div}(\text{grad}(\chi)).$$

Поскольку мы наложили дополнительные ограничения на возможные выражения для векторного потенциала, то и $\text{div}(\vec{A}') = \rho$. Отсюда автоматически следует, что

$$\text{div}(\text{grad}(\chi)) = 0.$$

Кроме того точно также мы можем получить граничные условия для функции χ :

$$\frac{d\chi}{dn} = 0$$

Последние два равенства представляют собой уравнение Лапласа с нулевыми граничными условиями. Как известно, эта задача имеет единственное (с точностью до константы) решение. Легко убедиться, что таким решением является функция

$$\chi = 0$$

Это означает, что калибровочные соотношения (6) действительно позволяют однозначно определить векторный потенциал. Теперь вернемся к уравнению Лондонов в форме (2.6). Поскольку дивергенция плотности тока всегда равна нулю (следствие закона сохранения заряда), то и дивергенция векторного потенциала тоже должны обращаться в ноль:

$$\text{div}(\vec{A}) = 0.$$

Кроме того, ток через поверхность сверхпроводника отсутствует, поэтому и нормальная к поверхности компонента вектора \vec{A} должна быть равна нулю:

$$A_n = 0$$

Именно последние два условия должны быть выбраны в качестве калибровочных при задании векторного потенциала для использования формы (2.6) уравнения Лондонов. Необходимо, также отметить, что это уравнение справедливо только для односвязных областей, в то время, как уравнение Лондонов (2.4) выполняется для сверхпроводников любой формы. Любопытно, что сами братья Лондоны, разрабатывая электродинамику сверхпроводников, именно уравнение (2.6) считали базовым. Обращает на себя внимание и еще одна особенность этого равенства. По форме записи оно напоминает закон Ома, в котором устанавливается пропорциональная зависимость между плотностью тока и напряженностью магнитного поля. Здесь же плотность тока пропорциональна векторному потенциалу, а аналогом проводимости проводника является константа $-\frac{1}{\mu_0 \lambda^2}$, величина которой через параметр λ зависит от свойств материала сверхпроводника.

2.4.4. Проникновения магнитного поля в сверхпроводник.

Уравнение Лондонов позволяет определить распределение магнитного поля и плотности тока по объему сверхпроводника. Для выяснения характера этих распределений воспользуемся одним из уравнений Максвелла:

$$\text{rot}(\vec{H}) = \vec{J}.$$

Подставляя это равенство в (2.3) и учитывая, что в немагнитных средах, к которым относятся все сверхпроводники, $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, получим дифференциальное уравнение второго порядка для вектора напряженности магнитного поля внутри объема сверхпроводника:

$$\text{rot} \text{rot} \vec{H} + \frac{1}{\lambda^2} \vec{H} = 0. \quad (2.8)$$

Одна из формул векторной алгебры $\text{rot} \text{rot} \vec{H} = \text{grad} \text{div} \vec{H} - \nabla^2 \vec{H}$ позволяет переписать последнее соотношение в другом виде:

$$\nabla^2 \vec{H} - \frac{1}{\lambda^2} \vec{H} = 0.$$

Здесь учитывается то обстоятельство, что в среде с постоянной магнитной проницаемостью μ_0

$$\text{div} \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \text{div} \vec{B} = 0.$$

Рассмотрим распределение напряженности магнитного поля вблизи границы сверхпроводника. Для этого рассмотрим сверхпроводящий объект в магнитном поле, параллельном поверхности и сориентируем координатную систему таким образом, чтобы ось x была направлена вглубь сверхпроводника. В этом случае напряженность магнитного поля будет зависеть только от одной координаты и будет удовлетворять уравнению:

$$\frac{d^2 H}{dx^2} - \frac{1}{\lambda^2} H = 0. \quad (2.9)$$

На границе сверхпроводника напряженность магнитного поля определяется уровнем внешнего поля и равно H_0 . На большом удалении от границы магнитное поле в соответствии с эффектом Мейснера должно стремиться к нулю. При таких граничных условиях дифференциальное уравнение (2.9) имеет решение

$$H = H_0 e^{-\frac{x}{\lambda}}.$$

Как следует из приведенного решения, напряженность магнитного поля затухает по мере продвижения вглубь проводника. Толщина слоя, в пределах которого происходит это затухание определяется величиной λ . Благодаря этому обстоятельству параметр λ получил название **глубины проникновения магнитного поля** в сверхпроводник. Эта величина является одной из фундаментальных характеристик сверхпроводника. Проведем оценку ее величины. Для этого воспользуемся выражением (2.5), полученным при выводе уравнения Лондонов.

$$\lambda = \sqrt{\frac{m}{e^2 n_s \mu_0}} \approx \sqrt{\frac{9.1 \cdot 10^{-31}}{(1.6 \cdot 10^{-19})^2 \cdot 3 \cdot 10^{28} \cdot 1.256 \cdot 10^{-6}}} \approx 3.1 \cdot 10^{-8} \text{ м} = 310 \text{ А}.$$

Концентрация сверхпроводящих электронов n_s здесь принята равной $3 \cdot 10^{28}$, что соответствует количеству атомов в единице объема у свинца. Если предположить, что каждому атому соответствует один свободный электрон в зоне проводимости, и что все свободные электроны – сверхпроводящие, что соответствует свойствам материала при очень низких температурах, то концентрация электронов будет равна концентрации атомов. Как показала наша оценка, глубина проникновения магнитного поля в сверхпроводник составляет десятки нанометров (10^{-9} м) или сотни ангстрем ($1 \text{ А} = 10^{-10}$ м). Последняя единица особенно часто используется в атомной физике. Как показали экспериментальные исследования реальные значения глубины проникновения магнитного поля не сильно отличаются от проведенной нами оценки. В частности для свинца $\lambda = 3.9 \cdot 10^{-8}$ м. Ниже в таблице приведены значения параметра λ для различных сверхпроводников.

Как следует из формулы (2.5), глубина проникновения магнитного поля обратно пропорциональна концентрации сверхпроводящих электронов. Поскольку при критической температуре эта концентрация равна нулю, то можно ожидать, что $\lambda \rightarrow \infty$ при $T \rightarrow T_c$. Действительно, экспериментально полученные данные позволяют аппроксимировать зависимость $\lambda(T)$ эмпирической формулой:

$$\lambda(T) = \frac{\lambda(0)}{\sqrt{1 - (T/T_c)^4}}$$

2.4.5. Полная система уравнений сверхпроводника.

В соответствии с двухжидкостной моделью ток в сверхпроводнике состоит из двух компонент – нормальной и сверхпроводящей - \vec{J}_n и \vec{J}_s :

$$\vec{J} = \vec{J}_n + \vec{J}_s$$

Нормальный ток подчиняется закону Ома:

$$\vec{J}_n = \gamma \vec{E},$$

где γ - электрическая проводимость сверхпроводника для нормальных электронов. Сверхпроводящая компонента тока связана с напряженностью электрического поля уравнением (2.2). Таким образом полная система уравнений, описывающих электродинамику сверхпроводника, состоит из четырех уравнений:

$$\begin{aligned}\vec{J} &= \vec{J}_n + \vec{J}_s \\ \vec{J}_n &= \gamma \vec{E} \\ \frac{d\vec{J}_s}{dt} &= \frac{1}{\mu_0 \lambda^2} \vec{E} \\ \text{rot}(\vec{J}_s) &= -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2} \cdot \vec{B}\end{aligned}$$

Из этих уравнений в принципе можно получить распределение плотности тока и напряженности магнитного поля в объеме сверхпроводников, находящихся в различных условиях.

2.5. Кинетическая индуктивность.

Индуктивность какого-либо участка электрической цепи часто определяется по энергии магнитного поля, созданного протекающим по этому участку током,

$$W_m = \frac{Li^2}{2}.$$

При этом предполагается, что именно эту энергию необходимо затратить на то, чтобы изменить ток от нуля до уровня i . Однако, строго говоря, это не совсем так. Дело в том, что электроны, перемещающиеся по проводнику, обладают кинетической энергией, и эта энергия не учитывается в стандартном определении индуктивности. В обычных электрических цепях энергия магнитного поля обычно существенно превышает

кинетическую энергию электронов, поэтому последней можно пренебречь. Однако в цепях, включающих сверхпроводниковые элементы, это не всегда справедливо. В связи с этим вводится понятие о **кинетической индуктивности**, которая учитывает кинетическую энергию электронов. По общим правилам мы можем выразить эту энергию в следующем виде:

$$W_{\kappa} = \int n \frac{mV^2}{2} dv = \frac{L_{\kappa} i^2}{2},$$

интегрирование ведется по объему проводника. Учитывая, что плотность тока равна $J = neV$, а также принимая во внимание (2.5), получаем выражение для кинетической индуктивности:

$$L_{\kappa} = \lambda^2 \mu_0 \frac{\int J^2 dv}{i^2}. \quad (2.11)$$

В качестве примера рассмотрим кинетическую индуктивность проводника круглого сечения длины l и радиуса R . Будем считать, что радиус провода значительно превышает глубину проникновения магнитного поля $R \gg \lambda$. В этом случае можно считать, что ток течет по поверхности провода, причем плотность тока равна $J = J_0 e^{-\frac{x}{\lambda}}$, где J_0 - плотность тока на поверхности, а x - расстояние до поверхности проводника $x = R - r$. Полный ток может быть получен интегрированием плотности тока:

$$i = 2\pi R \lambda J_0.$$

Полученные соотношения позволяют нам найти кинетическую индуктивность цилиндрического провода по формуле:

$$L_{\kappa} = \frac{l \lambda \mu_0}{R}.$$

Полученный результат показывает, что кинетическая индуктивность может оказаться значительной по величине для тонких проводов, у которых поперечные размеры не очень сильно превосходят глубину проникновения магнитного поля.

2.6. Квантование магнитного потока в сверхпроводниках

2.6.1. Обобщенный импульс заряженной частицы в магнитном поле.

В нерелятивистской механике влияние магнитного поля на движение заряженных частиц удобно описывать с помощью замены классического импульса частицы $\vec{p} = m\vec{V}$ на выражение, называемое обобщенным импульсом частицы

$$\vec{P} = m\vec{V} + q \cdot \vec{A}. \quad (2.12)$$

Это выражение не является очевидным, однако его смысл можно прояснить путем относительно простых рассуждений. Рассмотрим полную энергию заряженной частицы, движущейся по круговой линии с радиусом r . В общем случае эта энергия будет складываться из двух частей. Первая из них – классическая кинетическая энергия, равная

$$E_{кин} = \frac{mV^2}{2}.$$

Вторая часть определяется энергией магнитного поля, которое создается движущейся заряженной частицей. Двигаясь по кругу, она фактически создает электрический ток, равный

$$i = \frac{qV}{2\pi r}.$$

Энергия, запасенная магнитным полем, в соответствии с общими принципами теории электрических цепей может быть представлена как:

$$E_m = \frac{Li^2}{2},$$

где L - индуктивность контура. Объединяя две последние формулы, мы получим очень важное выражение для запасенной энергии магнитного поля:

$$E_m = \frac{1}{2} L \left(\frac{q}{2\pi r} \right)^2 \cdot V^2.$$

Обращает на себя внимание то обстоятельство, что эта компонента полной энергии частицы пропорционально квадрату скорости, то есть по существу она может рассматриваться как составная часть кинетической энергии. Таким образом полную энергию частицы можно характеризовать величиной, называемой обобщенной кинетической энергией:

$$E = \frac{1}{2} \left(m + \frac{Lq^2}{4\pi^2 r^2} \right) \cdot V^2.$$

Учитывая общее соотношение между импульсом и кинетической энергией нерелятивистских частиц $p = \frac{2E_{кин}}{V}$, мы получаем выражение для обобщенного импульса заряженной частицы в виде:

$$P = \left(m + \frac{Lq^2}{4\pi^2 r^2} \right) \cdot V,$$

причем выражение в скобках играет роль параметра, имеющего физический смысл некоторой обобщенной массы частицы. Индуктивность контура является константой, равной отношению магнитного потока, проходящего внутри контура к величине тока:

$$L = \frac{\Phi}{i} = \frac{\Phi}{Vq} 2\pi r.$$

Магнитный поток представляет собой интеграл от индукции магнитного поля по площади контура:

$$\Phi = \int_s \vec{B} d\vec{s} = \int_s \text{rot} \vec{A} d\vec{s}.$$

Здесь использована известная связь между индукцией магнитного поля и векторным магнитным потенциалом $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$. Применив к последнему выражению теорему Стокса, получим:

$$\Phi = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}.$$

Поскольку рассматриваемая нами задача имеет цилиндрическую симметрию, то абсолютная величина вектора \vec{A} будет иметь одинаковое значение во всех точках контура, его направление будет всюду касательным к контуру, а сама процедура интегрирования сведется к умножению этого значения на длину контура:

$$\Phi = A \cdot 2\pi r.$$

Подставим полученное соотношение для магнитного потока в выражение для индуктивности:

$$L = \frac{4\pi^2 r^2}{Vq} \cdot A.$$

Теперь мы получаем возможность для получения окончательного выражения для обобщенного импульса заряженной частицы:

$$P = m \cdot V + qA.$$

Поскольку вектор скорости и векторного потенциала имеют одно и то же направление (касательное к окружности, по которой движется частица), то последнее соотношение справедливо и в векторном виде (2.12).

2.6.2. Квант магнитного потока.

Одним из наиболее показательных свойств сверхпроводимости является квантование магнитного потока, связанного с незатухающими токами в сверхпроводнике. Для того, чтобы проиллюстрировать это явление, рассмотрим сверхпроводящее кольцо с протекающим по нему током i . Будем считать, что создающий ток заряженные частицы

движутся по круговой линии радиуса r со средней скоростью V . Каждая частица обладает импульсом, который, с учетом влияния магнитного поля, равен (2.12):

$$\vec{P} = m\vec{V} + q\vec{A}$$

Произведение импульса частицы на радиус ее вращения вокруг центра представляет собой момент импульса этой частицы. Как известно из атомной физики, эта величина не может принимать произвольные значения. Она подчиняется правилу квантования Бора – Зоммерфельда:

$$P \cdot r = \hbar \cdot N,$$

где \hbar - ‘перечеркнутая’ постоянная Планка, связанная с ‘обычной’ постоянной Планка соотношением $\hbar = 2\pi\hbar$, N - произвольное целое число. Именно правило квантования Бора – Зоммерфельда объясняет устойчивость атомов, в которых электроны вращаются вокруг ядер. Таким образом для сверхпроводящего кольца с током мы можем записать

$$\frac{mV \cdot 2\pi r}{q} + A \cdot 2\pi r = \frac{Nh}{q}.$$

Второе слагаемое в левой части последнего выражения представляет собой магнитный поток, проходящий сквозь кольцо (см. п. 2.5). Первое слагаемое может быть преобразовано с учетом выведенного ранее выражения для глубины проникновения магнитного поля (2.5), а также выражения для плотности электрического тока $J = neV$. В результате мы получим правило квантования момента импульса заряженных частиц в виде:

$$2\pi r \cdot \mu_0 \lambda^2 \cdot J + \Phi = \frac{Nh}{q} \quad (2.13)$$

Отношение постоянной Планка к заряду частицы называется квантом магнитного потока или **флюксоидом** и обозначается:

$$\Phi_0 = \frac{h}{q}.$$

Первым слагаемым в (2.13) во многих случаях можно пренебречь. Физически это означает, что энергия магнитного поля как правило значительно превышает кинетическую энергию заряженных частиц. Для иллюстрации этого обстоятельства рассмотрим ток в тонкостенном цилиндре. Напряженность магнитного поля внутри достаточно длинного цилиндра приблизительно равна линейной плотности тока

$$H = \frac{i}{l}$$

А плотность тока в стенке равна полному току, деленному на площадь поперечного сечения цилиндра:

$$J = \frac{i}{l \cdot d} = \frac{H}{d}.$$

Подставив это соотношение, а также очевидное выражение для магнитного потока внутри цилиндра $\Phi = \mu_0 H \cdot \pi r^2$ в условие квантования (2.13), получаем:

$$\Phi = N \cdot \Phi_0 \left(1 + \frac{2\lambda^2}{rd} \right)^{-1}.$$

Как видно, величина магнитного потока, запертого в цилиндре, меньше, чем целое число квантов потока. Однако за исключением случаев, когда размеры цилиндра – толщина и средний радиус – сравнимы с глубиной проникновения магнитного поля в сверхпроводник, эта разница очень мала и приближенно можно считать, что выполняется правило квантования для магнитного потока в виде

$$\Phi = N \cdot \Phi_0$$

Отсюда автоматически следует вывод о том, что существует некоторое минимальное значение магнитного потока, которое может быть получено подстановкой $N=1$. Квантование магнитного потока было теоретически предсказано Фрицем Лондоном в 1950 году. При определении величины этого кванта Φ . Лондон исходил из предположения о том, что электрический ток в сверхпроводниках переносится электронами и соответственно получил значение, равное

$$\Phi_0 = \frac{h}{e},$$

где e - заряд электрона. Факт квантования магнитного потока в дальнейшем был подтвержден экспериментально исследовательскими группами в США (Б. Дивер, В. Фербенк) и ФРГ (Р. Долл, М. Небауэр). Однако в отличие от предсказаний Ф. Лондона, квант магнитного потока оказался равным

$$\Phi_0 = \frac{h}{2e}. \quad (2.14)$$

Эти результаты явным образом указывали на то, что сверхпроводящий ток переносится частицами с зарядом $2e$. Это обстоятельство послужило одним из первых подтверждений развивавшейся в то время микроскопической теории сверхпроводимости, в рамках которой переносчиком сверхпроводящего тока рассматривались связанные электронные пары.

3. Классическая термодинамика сверхпроводников.

3.1. Основные принципы термодинамики.

Для понимания явлений, происходящих в сверхпроводниках необходимо представлять о внутренних процессах, которые подчиняются законам классической термодинамики. Основные законы термодинамики обычно формулируются в виде трех базовых принципов, называемых 1-м, 2-м и 3-м началами термодинамики. Первый из этих принципов фактически представляет собой закон сохранения энергии и в общем случае выражается соотношением:

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta A.$$

Здесь ΔQ - количество тепловой энергии, переданной некоторому объекту, ΔU - изменение его внутренней энергии, а ΔA - работа, совершаемая этим объектом. В дальнейшем мы будем в основном рассматривать системы, в которых термодинамические процессы происходят без совершения работы, поэтому 1-е начало будет иметь более простую форму записи:

$$\Delta Q = \Delta U. \quad (3.1)$$

Второе начало термодинамики оперирует более сложными понятиями, прежде всего таким, как энтропия термодинамической системы, которую мы будем обозначать S . В современном понимании эта величина характеризует собой вероятность системы занимать то или иное состояние. Чем больше вероятность, тем выше энтропия. В классической термодинамике энтропия однозначно связана с общим количеством состояний W , которые может занимать рассматриваемая система:

$$S = k \ln W, \quad (3.2)$$

где k - постоянная Больцмана, равная $k = 1.381 \cdot 10^{-23}$ Дж/°К. Одновременно энтропия характеризует упорядоченность той же самой системы - меньшее значение энтропии соответствует большей упорядоченности. Наглядно эту связь можно объяснить на простом примере. Предположим, что у нас есть коробка с одинаковым количеством белых и черных шаров. Мы вслепую вытаскиваем из этой коробки половину из них. Какова вероятность того, что все оставшиеся шары будут одного цвета? Если общее количество шаров достаточно велико, то вероятность такого события очень мала, зато мы можем констатировать, что такая система будет в высшей степени упорядоченной. На языке термодинамики энтропия этой системы очень маленькая. Скорее всего в коробке останется приблизительно одинаковое число шаров обоих цветов. Эта система останется такой же неупорядоченной, какой она была в самом начале. В этом случае энтропия системы будет максимальной.

Второе начало термодинамики фактически утверждает, что если некоторой системе предоставить возможность эволюционировать без вмешательства извне, то она будет

стремиться к состоянию, которое является для нее наиболее вероятным и, что то же самое, менее упорядоченным – более хаотичным. Если же в систему вносится некоторая энергия или некоторое организующее начало (аналог энтропии) из внешних источников, то ее энтропия может как увеличиваться, так и уменьшаться, однако ее возможное уменьшение ограничено величиной вносимой энергии. Этот общий принцип эволюции системы, выражается соотношением, известным как неравенство Клаузиуса или 2-е начало термодинамики:

$$\Delta S \geq \frac{\Delta Q}{T}. \quad (3.3)$$

В некоторых термодинамических процессах в последнем соотношении выполняется строгое равенство:

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}. \quad (3.4)$$

Эти процессы относятся к классу обратимых. В качестве примера можно привести процесс таяния льда и последующего замерзания воды при постоянной, нулевой температуре. В конечном итоге мы получаем систему в состоянии, в котором она находилась в самом начале – в виде льда. Это означает, что, во-первых, полное количество затраченной на превращения энергии равно нулю, во-вторых, полное изменение энтропии системы также равно нулю, поскольку сама система в конечном итоге не изменилась. Однако в процессе таяния и замерзания обе величины - ΔS и ΔQ изменялись, будучи связанными соотношением (3.4).

Первые исследования перехода металла в сверхпроводящее состояние и обратно показали, что эти процессы представляют собой обратимый фазовый переход. Учитывая, что во время этих переходов объем сверхпроводника не меняется, отсутствует и производимая им работа (при изменении объема необходимо преодолевать силы атмосферного давления). Соответственно 2-е начало термодинамики совместно с соотношением (3.1) позволяет записать:

$$\Delta U - T\Delta S \leq 0,$$

причем знак равенства имеет место для обратимого процесса. Если температура объекта во время перехода сохраняется постоянной, то последнее соотношение можно трактовать следующим образом – любые изменения величины, определяемой разностью $U - TS$ уменьшается со временем для произвольной системы и равны нулю при обратимом процессе или, очевидно, если система находится в равновесии и ее состояние не изменяется со временем. Эта разность имеет большое значение в классической термодинамике, она носит название свободной энергией Гиббса или просто свободной энергией:

$$G = U - TS. \quad (3.5)$$

Последнее утверждение эквивалентно принципу, который мы часто будем использовать в дальнейшем: *если термодинамическая система находится в равновесии, то свободная энергия Гиббса этой системы стремится к своему минимуму.*

Для более полной характеристики основ термодинамики следует отметить еще одно важное свойство любой системы, известное как 3-е начало термодинамики или теорема Нернста. Это свойство заключается в том, что при температуре абсолютного нуля энтропия любой системы равна нулю. Это обстоятельство является особенно существенным, если принять во внимание, что все остальные принципы термодинамики позволяют судить только об изменении энтропии, но не о ее абсолютной величине. Нужно отметить, что справедливость теоремы Нернста вытекает (с некоторыми оговорками) из определения энтропии (3.1). Действительно, при температуре абсолютного нуля все частицы любой физической системы должны находиться в самом низком энергетическом состоянии, поскольку это состояние – единственное, то общее количество состояний $W = 1$ и, следовательно, $S = k \ln(W) = 0$.

3.2. Термодинамика перехода в сверхпроводящее состояние.

Рассмотрим сверхпроводящий объект во внешнем магнитном поле с напряженностью H . Объемная плотность энергии Гиббса для этого объекта будет складываться из двух составляющих. Во-первых это гиббсовская энергия G_s , характеризующая внутреннюю энергию и энтропию самого материала, находящегося в сверхпроводящем состоянии. Во-вторых, в результате вытеснения внешнего магнитного поля в сверхпроводнике возникают поверхностные токи, которые создают собственное магнитное поле с напряженностью равной по абсолютной величине напряженности внешнего поля и противоположной по направлению. Таким образом размагничивающие токи создают магнитное поле с объемной плотностью энергии $U_m = \frac{\mu_0 H^2}{2}$. Эта плотность энергии вносит вклад в полную энергию Гиббса сверхпроводника, находящегося во внешнем магнитном поле:

$$G_{sH} = G_s + \frac{\mu_0 H^2}{2}.$$

Как показывает опыт, при увеличении внешнего магнитного поля до некоторого предельного уровня с напряженностью H_c , сверхпроводник переходит в нормальное состояние. В соответствии с рассмотренными выше принципами термодинамики можно заключить, что при таком переходе свободная энергия нормального состояния G_n будет равна энергии Гиббса сверхпроводника в магнитном поле G_{sH} :

$$G_n = G_s + \frac{\mu_0 H_c^2}{2}.$$

Последнее соотношение показывает, что критическое магнитное поле H_c характеризует выигрыш в свободной энергии, который соответствует переходу объекта из нормального состояния в сверхпроводящее

$$G_n - G_s = \frac{\mu_0 H_c^2}{2}, \quad (3.6)$$

Само поле с напряженностью H_c называют **термодинамическим критическим магнитным полем**.

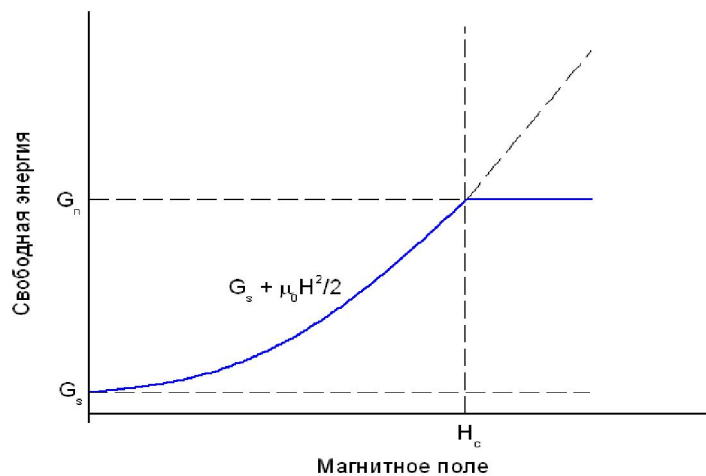


Рис.3.1. Зависимость свободной энергии сверхпроводящего объекта от уровня магнитного поля. В диапазоне полей $0 < H < H_c$ свободная энергия Гиббса сверхпроводника увеличивается от уровня свободной энергии сверхпроводящего состояния G_s до свободной энергии нормального состояния G_n , после чего объект переходит в нормальное состояние и его свободная энергия остается постоянной.

3.3 Связь между магнитными и тепловыми свойствами сверхпроводника.

Если обратиться к двухжидкостной модели сверхпроводника, то разницу в энергии Гиббса нормального и сверхпроводящего состояния можно объяснить тем, что переход электронов из нормального состояния в сверхпроводящее сопровождается выделением

энергии. Такой переход часто называют конденсацией по аналогии с превращением пара в жидкость. Поскольку с понижением температуры сверхпроводника все большее число электронов конденсируется в сверхпроводящее состояние, то и полный выигрыш в энергии должен увеличиваться с уменьшением температуры, а вместе с этим должно увеличиваться термодинамическое критическое магнитное поле. Опытным путем было установлено, что такая зависимость носит приблизительно параболический характер. Характер этих зависимостей иллюстрируется экспериментальными результатами для некоторых металлов, приведенными на рис. 3.1

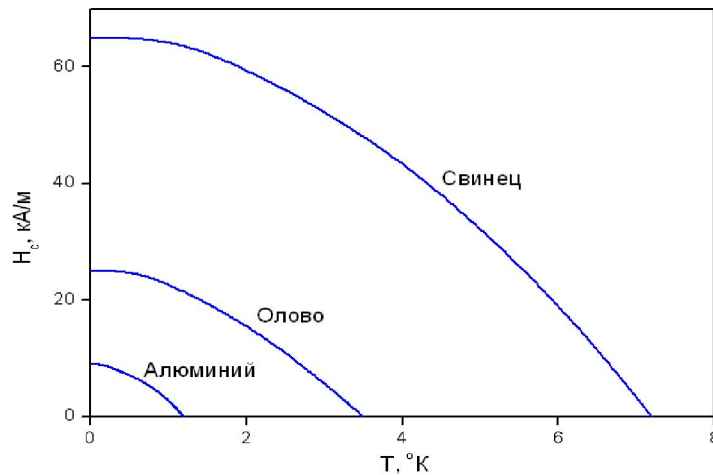


Рис. 3.2. Экспериментальные зависимости термодинамического критического магнитного поля от температуры для некоторых сверхпроводников.

Эти температурные зависимости напряженности критического магнитного поля довольно хорошо аппроксимируются формулой:

$$H_c(T) = H_c(0) \cdot \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right]. \quad (3.7)$$

Каждый сверхпроводник характеризуется своими значениями критической температуры и критического магнитного поля. Параметры некоторых сверхпроводников были приведены в таблице Таб.1.2. Следует особо отметить, что формула (3.7) представляет собой лишь относительно удачную аппроксимацию экспериментальных данных, в то время как микроскопическая теория сверхпроводимости дает более сложную форму взаимной зависимости параметров H_c и T_c .

Рассмотрим теперь вопрос об энтропии сверхпроводника. Из определения свободной энергии Гиббса (3.4) очевидным образом следует выражение для бесконечно малого приращения этой величины:

$$dG = dU - TdS - SdT$$

Как было указано выше (3.3), при обратимом переходе сверхпроводника в нормальное состояние и обратно выполняется условие $dQ = TdS$. Кроме того из (3.1) следует, что $dQ = dU$. В результате мы получаем выражение для энтропии в виде:

$$S = -\frac{dG}{dT}.$$

С помощью этой формулы, а также учитывая ранее полученное соотношение (3.7), можно вычислить разность энтропий между нормальным и сверхпроводящим состояниями:

$$S_s - S_n = \mu_0 H_c \frac{dH_c}{dT} \quad (3.8)$$

Эта формула позволяет сделать ряд важных выводов о свойствах сверхпроводников.

1. В соответствии с 3-им началом термодинамики энтропия любой системы при нулевой температуре равна нулю. Отсюда следует, что кривая зависимости $H_c(T)$ имеет нулевую производную при $T = 0$. Это полностью соответствует экспериментальным данным.

2. Экспериментальные зависимости $H_c(T)$ (см. рис. 3.2) показывают, что эта функция монотонно спадает при увеличении температуры, и, соответственно, производная $\frac{dH_c}{dT}$ всегда отрицательна. Отсюда автоматически следует, что разность $S_s - S_n$ также отрицательна, и энтропия у сверхпроводящего состояния ниже, чем у нормального. Последнее обстоятельство означает, что сверхпроводящее состояние является более упорядоченным, чем нормальное при той же температуре, и с позиций термодинамики оно является менее выгодным. Сам факт существования сверхпроводящего состояния свидетельствует о том, что ему должна соответствовать более низкая внутренняя энергия в сравнении с нормальной фазой.

3. Сверхпроводящий переход при температуре $T = T_c$ происходит без выделения и поглощения тепла: изменение энтропии $\Delta S = 0$, а соответственно равно нулю и выделение тепловой энергии вследствие выполнения равенства (3.4) для обратимых термодинамических процессов. Такие фазовые переходы называются фазовыми переходами второго рода.

4. При температуре ниже критической, $0 < T < T_c$, переход из нормального состояния в сверхпроводящее сопровождается выделением тепла, обратный переход - поглощением тепла, поскольку ни критическое поле, ни его производная по температуре не равны нулю. Такие переходы называются фазовыми переходами второго рода. Примером такого перехода является, например таяние льда при постоянной температуре, сопровождающееся поглощением тепловой энергии. Это свойство сверхпроводников поглощать тепловую энергию из окружающей среды при переходе в нормальное состояние за счет наложения высокого магнитного поля может использоваться для достижения сверхнизких температур.

3.4. Теплоемкость и теплопроводность сверхпроводника.

Рассмотрим вопрос о поведении теплоемкости сверхпроводника. Как известно из общей физики, теплоемкость представляет собой коэффициент пропорциональности между приращением температуры и затраченной на это изменение тепловой энергии:

$$\Delta Q = C \Delta T.$$

Учитывая условие, которому удовлетворяют обратимые процессы (3.4) и переходя от произвольных приращений рассматриваемых величин к бесконечно малым (дифференциалам), мы получим следующее представление для теплоемкости:

$$C = T \cdot \frac{dS}{dT}.$$

Разность между теплоемкостями сверхпроводящей и нормальными состояниями может быть найдена с учетом ранее полученного соотношения (3.7):

$$C_s - C_n = T \cdot \left(\frac{dH_c}{dT} \right)^2 + H_c \frac{d^2 H_c}{dT^2}. \quad (3.9)$$

При $T = T_c$ критическое магнитное поле обращается в ноль, поэтому:

$$C_s(T_c) - C_n(T_c) = T_c \cdot \left(\frac{dH_c}{dT} \right)_{T_c}^2.$$

Эта формула, известная как формула Рутгерца, показывает, что при переходе из нормального состояния в сверхпроводящее теплоемкость будет изменяться скачком.

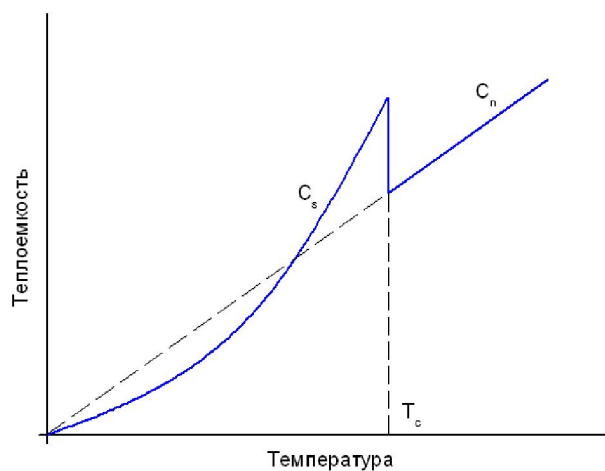


Рис.3.3. Зависимость теплоемкости сверхпроводника от температуры.

Типичная температурная зависимость теплоемкости показана на рис. 3.4. При очень низких температурах теплоемкость нормального состояния выше, чем у сверхпроводящего. Это объясняется тем, второе слагаемое правой части (3.9) отрицательно:

$$H_c \frac{d^2 H_c}{dT^2} = -2H_c \frac{H_c(0)}{T_c^2} < 0 ,$$

а первое стремится к нулю при малых температурах. В какой-то точке теплоемкости двух состояний оказываются равными, а при приближении к критической температуре уже теплоемкость сверхпроводящего состояния оказывается выше.

Теплопроводность сверхпроводников существенно отличается от теплопроводности нормальных металлов. Рассмотрим основные причины и характер этого отличия. Перенос тепла в металлах осуществляется как за счет перемещения электронов проводимости, так и за счет колебаний ионной решетки. Обычно электронная компонента теплопроводности в металлах существенно превышает ионную. В результате и электропроводность и теплопроводность обеспечиваются электронами проводимости, обладающими высокой подвижностью. Это, в частности, объясняет то обстоятельство, что теплопроводность металлов существенно выше, чем у изоляторов, в которых свободные электроны отсутствуют. В сверхпроводниках ситуация складывается иначе. Электропроводность в них обеспечивается сверхпроводящими электронами, однако в переносе тепла эти электроны участвовать не могут, поскольку они абсолютно не взаимодействуют с ионной решеткой и, следовательно, не реагируют на тепловые колебания решетки. По мере снижения температуры все большее количество электронов конденсируются в сверхпроводящее состояние и все меньше остается нормальных электронов, способных переносить тепловую энергию. При очень низких температурах теплопроводность сверхпроводников сравнивается с теплопроводностью изоляторов. Разница между теплопроводностью нормального и сверхпроводящего состояний может достигать 3-х - 4-х порядков. Это обстоятельство используется на практике для создания **сверхпроводящего теплового ключа** – устройства, способного разрывать тепловой контакт между источником холода и охлаждаемым объектом. На практике тепловой ключ представляет собой отрезок тонкой сверхпроводниковой проволоки. На эту проволоку наматывается катушка, по которой пропускается ток, достаточный для создания магнитного поля, превышающего критический уровень.

Сверхпроводящие тепловые ключи часто применяются в так называемых **системах магнитного охлаждения** для достижения сверхнизких температур порядка десятых долей °K и ниже. Принципиальная схема подобного устройства включает в себя два основных элемента. Первый из них обладает возможностью поддерживать фиксированную температуру, это может быть, например, сосуд с кипящим жидким гелием. Второй элемент, непосредственно соединенный с охлаждаемым объектом, способен поглощать тепловую энергию при изменении приложенного к нему магнитного поля. Такими свойствами обладает, например, сверхпроводник при температуре ниже критической. Как отмечалось выше, его переход в нормальное состояние при повышении магнитного поля сопровождается поглощением энергии из окружающей среды. Аналогичными свойствами обладают и некоторые другие вещества, в частности, соли

редкоземельных элементов. Однако, в отличие от случая сверхпроводников, проявляются они не при повышении, а при понижении магнитного поля. Оба элемента охлаждающего устройства соединяются сверхпроводящим тепловым ключом. На первой стадии процесса охлаждения температуры обоих элементов выравниваются через открытый тепловой ключ. Затем включается (в устройствах с солями редкоземельных элементов – выключается) внешнее магнитное поле, в результате чего сверхпроводник поглощает тепловую энергию из окружающей среды и температура охлаждаемого объекта понижается. Одновременно с этим тепловой ключ размыкается, в результате чего создаются условия для длительного поддержания пониженной температуры в необходимом объеме.

4. Нелокальная электродинамика Пиппарда. Поверхностная энергия сверхпроводников. Сверхпроводники 1-го рода.

4.1. Длина когерентности сверхпроводников, параметр Гинзбурга - Ландау

Одним из существенных шагов в развитии электродинамики сверхпроводников было предложенные Пиппардом в 1953 году представления о нелокальном характере связи между электрическим током в сверхпроводнике и связанным с ним магнитным полем. (Эта связь в классической электродинамике определяется уравнением Лондонов.) Для того, чтобы лучше понять смысл предложения Пиппарда, рассмотрим поведение электронов в обычном проводнике - металле. Как известно из общих курсов физики, плотность тока и напряженность электрического поля связаны между собой законом Ома который для изотропного материала выглядит следующим образом:

$$\vec{J}(x, y, z) = \gamma \cdot \vec{E}(x, y, z) . \quad (4.1)$$

Такая связь между двумя функциями выполняется в каждой точке пространства, и называется локальной. Однако детальный анализ поведения электронов в металле показывает, что плотность тока и напряженность поля связывает более сложная зависимость. Рассмотрим движение электрона внутри ионной решетки металла, находящегося во внешнем электрическом поле (рис. 1). В точке с координатами (x, y, z) напряженность электрического поля равна $\vec{E}(x, y, z)$. Если в этой точке окажется электрон, то под влиянием этого поля он начнет ускорение и в конечном итоге приобретает дополнительную компоненту скорости в направлении, задаваемым вектором напряженности электрического поля. Эта дополнительная скорость в конечном итоге приведет к появлению упорядоченного движения электронов и, следовательно, электрического тока. Однако, необходимо принять во внимание, что в момент воздействия электрического поля на заряженную частицу она уже имела некоторую ненулевую скорость, вызванную тепловым движением. Поэтому дополнительный ток, связанный с направленным перемещением этой частицы возникнет в точке с координатами (x', y', z') , которая не совпадает с точкой приложения электрического поля (x, y, z) . В первом приближении можно считать, что эти две точки разделяет расстояние, равное длине свободного пробега электрона в металле. Таким образом оказывается, что закон Ома в виде (4.1), строго говоря, не выполняется и для точного описания связи между напряженностью электрического поля и плотностью тока необходимо учитывать некоторую пространственную неопределенность в положении и скорости электронов проводимости. В этом случае говорят, что связь между напряженностью электрического поля и плотностью тока является *нелокальной*. Однако подобные нарушения в законе Ома могут быть заметными только на очень маленьких расстояниях, сравнимыми с длиной свободного пробега электрона в проводнике, которое обычно измеряется десятками

нанометров. При размерах проводника, существенно превышающих эти значения, происходит усреднение движения электронов и традиционный закон Ома выполняется с высокой точностью.

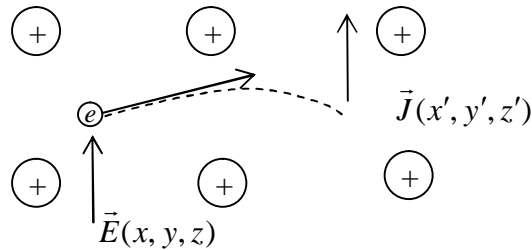


Рис. 4.1. Перемещение электрона в металле, находящегося во внешнем электрическом поле. Направление тока и направление движения электрона противоположны из-за знака заряда последнего.

Американский исследователь Пиппард обратил внимание на то, что подобные эффекты должны иметь место и в сверхпроводниках, в которых плотность электрического поля зависит от характеристик магнитного поля (в соответствии с теорией Лондонов она пропорциональна векторному магнитному потенциалу). Для количественного описания характерного расстояния, на котором сверхпроводящий электрон реагирует на изменения внешнего поля, Пиппард ввел новую характеристику, которую называют **параметром порядка** или **длиной когерентности** сверхпроводника. Эту величину, имеющую размерность длины, мы будем обозначать буквой греческого алфавита ξ (кси). Длина когерентности показывает, насколько быстро может меняться в пространстве концентрация сверхпроводящих электронов. В дальнейшем мы будем обсуждать микроскопическую теорию сверхпроводников, и тогда понятие о длине когерентности приобретет новый смысл – мы увидим, что она характеризует эффективный размер заряженных частиц, переносящих ток в сверхпроводниках.

При описании свойств сверхпроводника мы использовали еще одну величину, имеющую размерность длины – это глубина проникновения магнитного поля в сверхпроводник λ . Отношение этих двух характеристик - ξ и λ имеет очень большое значение в теории сверхпроводимости, она называется **параметром Гинзбурга – Ландау** и обозначается греческой буквой κ (каппа):

$$\kappa = \frac{\lambda}{\xi} . \quad (4.2)$$

Важным свойством длины когерентности и, как следствие, параметра Гинзбурга – Ландау, является их зависимость от чистоты металла. Для очень чистых материалов длина когерентности может достигать величины порядка нескольких микрон. Но при наличии примесей, а также для интерметаллических соединений и сплавов эта величина существенно снижается и измеряется единицами нанометров. Для высокотемпературных сверхпроводников типичная длина когерентности еще меньше и составляет десятки доли

нанометра. Соответственно параметр Гинзбурга – Ландау для чистых металлов обычно значительно меньше единицы (исключение составляет ниобий, для которого $\kappa = 1.16$). Для загрязненных металлов и сплавов параметр Гинзбурга – Ландау достигает нескольких десятков, а для высокотемпературных сверхпроводников – нескольких сотен и даже тысяч.

Сверхпроводник	Длина когерентности ξ , нм	Параметр Гинзбурга – Ландау $\kappa = \lambda / \xi$
Свинец	87	0.46
Алюминий	1600	0.031
Олово	230	0.22
Кадмий	760	0.14
Ниобий	38	1.16
NbTi	4	75
Nb ₃ Sn	3	21.7
YBa ₂ Cu ₃ O ₇	0.4	450

Таблица 4.1. Длина когерентности и параметр Гинзбурга – Ландау для некоторых сверхпроводников при нулевой температуре.

4.2. Поверхностная энергия сверхпроводников.

Рассмотрим сверхпроводящую пластину во внешнем магнитном поле. Будем считать, что величина магнитного поля достаточно велика, чтобы часть пластины перешла в нормальное состояние. В таком случае в рассматриваемой пластине образуется граница раздела между нормальной и сверхпроводящей фазами. Магнитное поле в соответствии с эффектом Мейснера вытесняется из сверхпроводящей области. Однако в тонком приповерхностном слое толщиной порядка глубины проникновения λ магнитное поле не равно нулю и в сверхпроводящей части пластины. Внешнее магнитное поле компенсируется собственным полем сверхпроводника. На создание этого поля затрачивается энергия, объемная плотность которой равна

$$W_m = \frac{\mu_0 H^2}{2}.$$

Теперь рассмотрим концентрацию сверхпроводящих электронов вблизи границы. В нормальной части пластины они полностью отсутствуют, а в сверхпроводящей части их концентрация плавно нарастает по мере удаления от границы и выходит на максимальный, установившийся уровень на расстоянии порядка длины когерентности ξ .

При переходе электрона из нормального состояния в сверхпроводящее происходит уменьшение его свободной энергии. В целом выигрыш в объемной энергии рассматриваемой пластины можно считать пропорциональным концентрации сверхпроводящих электронов. Поскольку мы рассматриваем состояние сверхпроводника, близкое к равновесному, при котором происходит его частичный переход в нормальное состояние, свободные энергии обоих состояний в объеме сверхпроводника должны быть одинаковы. Однако вблизи от границы это равенство будет нарушаться из-за того, что скорость изменения концентрации сверхпроводящих электронов и скорость изменения магнитного поля различны. Возможны две ситуации. В одной из них (рис. 4.2) длина когерентности превышает глубину проникновения магнитного поля. В этом случае возникает тонкий поверхностный слой, в котором полная свободная энергия положительна.

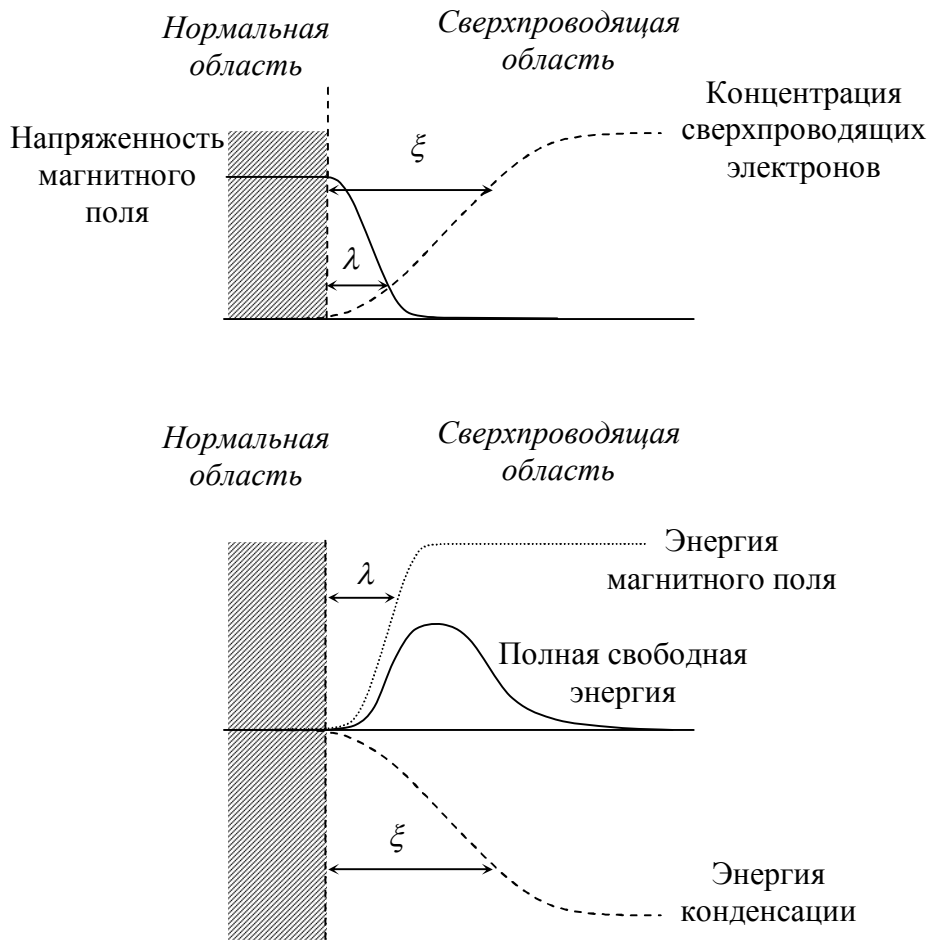


Рис. 4.2. Граница сверхпроводящей и нормальной областей для случая $\kappa \ll 1$.

- а)* проникновение магнитного поля и распределение сверхпроводящих электронов;
б) вклад энергии магнитного поля и энергии конденсации в полную свободную энергию Гиббса; полная свободная энергия.

В случае обратного соотношения между глубиной проникновения и длиной когерентности, $\lambda < \xi$, свободная энергия в поверхностном слое будет отрицательна (рис. 4.3).

В зависимости от знака поверхностной энергии все сверхпроводники подразделяются на два типа, обладающие различными свойствами. Сверхпроводники 1-го рода обладают положительной поверхностной энергией, 2-го рода – отрицательной.

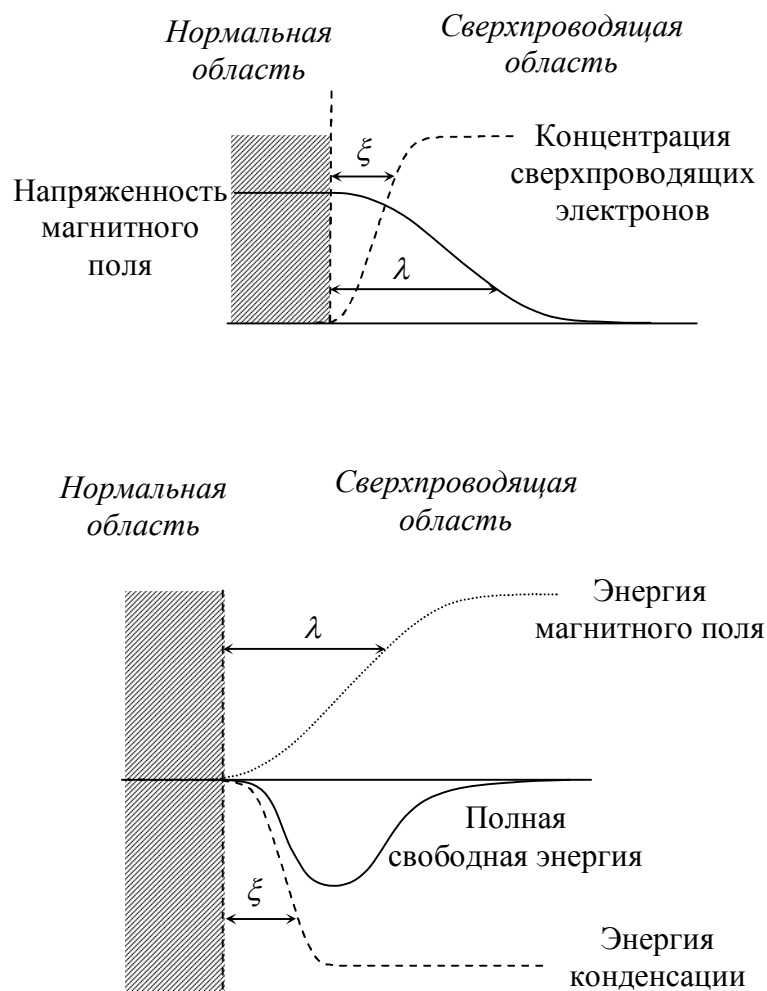


Рис. 4.3. Граница сверхпроводящей и нормальной областей для случая $\kappa \ll 1$.

- а) проникновение магнитного поля и распределение сверхпроводящих электронов;
 б) вклад энергии магнитного поля и энергии конденсации в полную свободную энергию Гиббса; полная свободная энергия

4.3. Сверхпроводники 1-го и 2-го рода.

Рассмотрим несколько более подробно свойства сверхпроводников 1-го рода. В соответствии с принципом минимума свободной энергии такие сверхпроводники стремятся к состоянию, в котором граница раздела нормальной и сверхпроводящей фаз минимальна по своей протяженности (площади поверхности). В целом это означает, что в объеме сверхпроводника 1-го рода должны отсутствовать внутренние границы раздела зон. Если учесть, что незатухающие токи протекают только вблизи таких границ, то очевидно, что проводники 1-го рода не могут быть эффективно использоваться в электротехнике. Свойства сверхпроводников этого типа полностью соответствуют классическим представлениям, которые мы рассматривали ранее, включая проявления эффекта Мейснера.

Совсем по-другому ведут себя сверхпроводники 2-го рода. Поскольку существование границы раздела между фазами в них энергетически выгодно, то сверхпроводящий массив во внешнем магнитном поле начинает дробиться на отдельные чередующиеся нормальные и сверхпроводящие зоны. Чем больше таких зон, тем длиннее граница между ними, и тем больше выигрыш в свободной энергии. В принципе такое дробление могло бы привести к появлению бесконечно малых по площади (объему) зон. Однако этому препятствуют ряд обстоятельств. Во-первых, концентрация сверхпроводящих электронов может существенно меняться только на расстояниях, порядка или превышающих длину когерентности ξ . Поэтому и линейный размер нормальной зоны, обтекаемой поверхностными сверхпроводящими токами не может иметь размеры меньше чем ξ . Вторым важным обстоятельством, ограничивающим дробление сверхпроводника, является свойство квантования магнитного потока – он не может быть меньше, чем некоторая предельная величина. Соответственно внешнее магнитное поле, вытесняемое из объема сверхпроводника, будет, тем не менее, проходить сквозь него через нормальные ‘островки’. Благодаря указанным свойствам незатухающие токи могут протекать по всему объему сверхпроводников 2-го рода, так как границы раздела между фазами могут заполнять весь объем сверхпроводника. Эффект Мейснера в таких сверхпроводниках на макроскопическом уровне по существу не выполняется и магнитное поле частично проникает в сверхпроводник, начиная с малых, хотя и ненулевых, значений. При создании сильноточных электротехнических устройств находят применение именно сверхпроводники 2-го рода.

4.4. Промежуточное состояние в сверхпроводниках 1-го рода.

Рассмотрим более подробно переход сверхпроводников 1-го рода в нормальное состояние под влиянием магнитного поля. Раньше мы уже отмечали, что условия для такого перехода создаются, если напряженность магнитного поля превышает критический уровень $H = H_c$. Однако на практике важно учитывать еще один фактор – форму сверхпроводящего образца и конфигурацию внешнего магнитного поля. Для иллюстрации этого влияния рассмотрим два крайних случая. В первом из них тонкая сверхпроводящая пластина располагается в однородном магнитном поле, параллельном плоскости пластины. (Рис. 4.4). Как видно, экранирующие токи в пластине практически не искажают внешнее магнитное поле и напряженность внешнего магнитного поля приблизительно

равна напряженности полного поля на поверхности пластины. Как только напряженность внешнего поля достигнет уровня H_c , пластина полностью перейдет в нормальное состояние. При этом экранирующие токи исчезнут, однако это не приведет к заметному изменению поля, и условия для перехода пластины в нормальное состояние сохранятся.

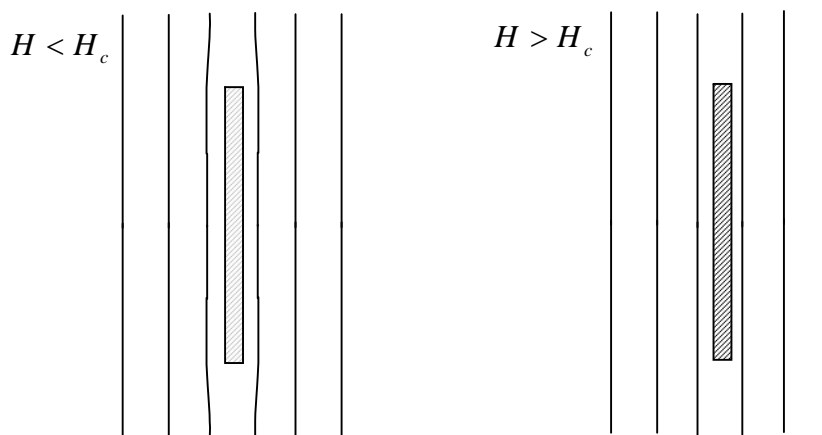


Рис.4.4 Сверхпроводящая пластина в продольном магнитном поле.

Совершенно иначе будет происходить переход в нормальное состояние сверхпроводящей пластины, находящейся в поперечном магнитном поле (Рис 4.5).

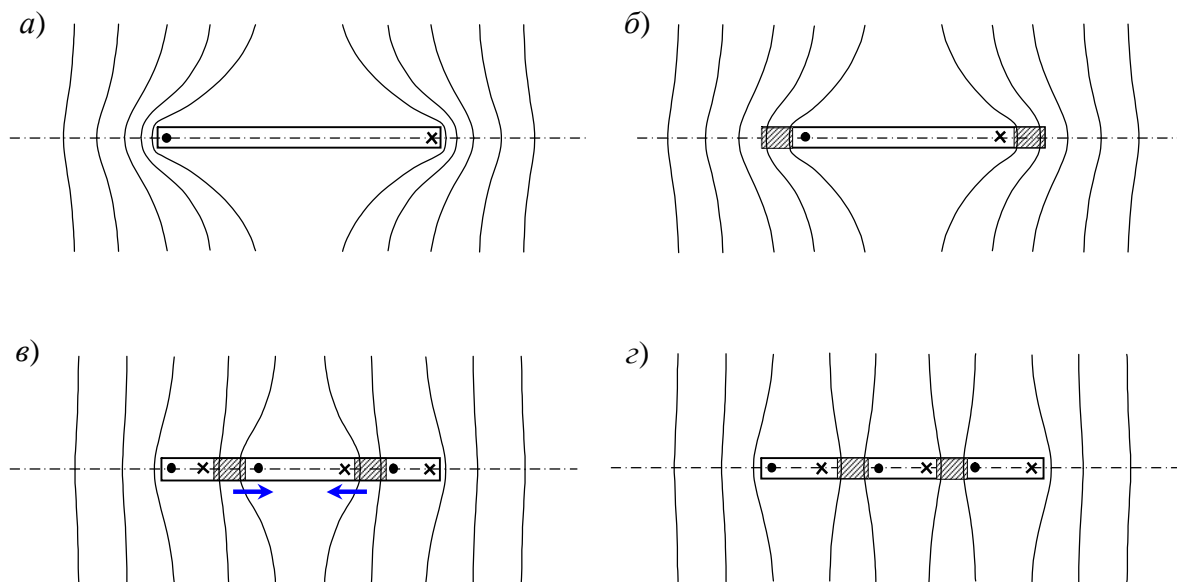


Рис. 4.5. Сверхпроводящая пластина в поперечном магнитном поле.

- а) Магнитное поле на краю пластины ниже критического.
- б) Зарождение нормальных зон на краях пластины.
- в) Перемещения нормальных зон по сверхпроводящей пластине. Стрелками показано направление перемещения.
- г) Равновесное положение нормальных и сверхпроводящих зон.

При включении магнитного поля оно вытесняется из объема сверхпроводника в соответствии с эффектом Мейснера (Рис. 4.5 а). В пластине возникают незатухающие токи, которые сильно искажают приложенное поле. В результате напряженность магнитного поля на краях пластины многократно усиливается. Поэтому именно в этих областях создаются условия для перехода в нормальное состояние задолго до того, как внешнее поле достигнет критического уровня. В этих условиях магнитное поле начинает проникать в краевые зоны. Для лучшего понимания последствий перехода в нормальное состояние краевых областей пластины необходимо более детально рассмотреть распределение магнитного поля вблизи границы раздела нормальной и сверхпроводящих областей. Экранирующие токи распределены по поверхности сверхпроводника таким образом, что они полностью компенсируют внешнее магнитное поле внутри пластины. В то же время за пределами сверхпроводника (речь идет о центральной плоскости пластины) поле, индуцируемое этими токами складывается с внешним и усиливает его. Очень важно отметить одно очевидное обстоятельство – по мере удаления от границы раздела нормальной и сверхпроводящих областей, поле, создаваемое протекающими по ней экранирующими токами ослабевает. Соответственно уменьшается и напряженность суммарного магнитного поля. При малых полях граница между зонами совпадает с границей самой пластины. При увеличении магнитного поля эта граница смещается внутрь пластины, но отмеченное выше свойство распределения магнитного поля сохраняется. Возникает парадоксальная ситуация – внутри пластины, на некотором удалении от ее края, магнитное поле превышает критический уровень, в результате чего образовывается нормальная зона. Но по мере приближения к краю полное магнитное поле уменьшается и, следовательно, эта область снова переходит в сверхпроводящее состояние. В результате внутри пластины образуется нормальный “остров”, который начинает перемещаться к центру пластины (Рис. 4.5 в). Причины такого перемещения связаны с тем, что возникшая нормальная зона захватывает некоторый магнитный поток. Этот поток постоянно удерживается в ней вследствие того, что линии магнитного поля выталкиваются из окружающего сверхпроводящего пространства. Возникший таким образом нормальный ‘островок’ с захваченным потоком может свободно перемещаться по пластине, поэтому он будет стремиться занять положение с минимально возможной свободной энергией. Эта энергия пропорциональна квадрату напряженности магнитного поля, создаваемого экранирующими токами, поэтому нормальная зона будет стремиться к некоторому равновесному состоянию, при котором экранирующие токи и, как следствие, искажения внешнего магнитного поля минимальны. Подобная ситуация показана на рис. 4.5 г.

После того, как нормальная зона, зародившаяся на краю пластины, займет равновесное положение, полное магнитное поле на краю уменьшится до уровня ниже критического. При дальнейшем увеличении внешнего поля в некоторый момент на краю пластины снова возникнут условия для зарождения новой нормальной зоны и весь описанный выше процесс повторится. Причем образующиеся нормальные зоны не будут сливаться в одну из-за того, что между ними действуют силы отталкивания. Природа этих сил становится понятной, если обратить внимание на направления экранирующих токов в соседних зонах. Как известно, проводники с противоположно направленными токами отталкиваются, поэтому при перемещении двух нормальных ‘островков’ неизбежно возникают силы, препятствующие их сближению. В результате сверхпроводящая пластина оказывается разбитой на чередующиеся нормальные и сверхпроводящие зоны. При повышении

внешнего магнитного поля все нормальные зоны перекрываются и вся пластина переходит в нормальное состояние. Необходимо отметить, что несмотря на большое количество чередующихся зон, все они имеют относительно большие размеры (порядка миллиметров).

На практике чередование нормальных и сверхпроводящих зон носит менее регулярный характер, чем это показано на рис. 4.5 *з*, но, тем не менее, общие принципы их формирования остаются такими же. Экспериментально картина промежуточного состояния была исследована во многих работах. Но первые результаты были получены в 1947 - 1949 годах советскими физиками Мешковским и Шальниковым. Они исследовали магнитное поле в узком зазоре между двумя оловянными полусферами диаметром 4 см с помощью микроскопического датчика магнитного поля. Поскольку магнитное поле проникает только в нормальные зоны и вытесняется из сверхпроводящих, эти измерения позволяли построить картину промежуточного состояния. Результаты их исследований показаны на рис. 4.7

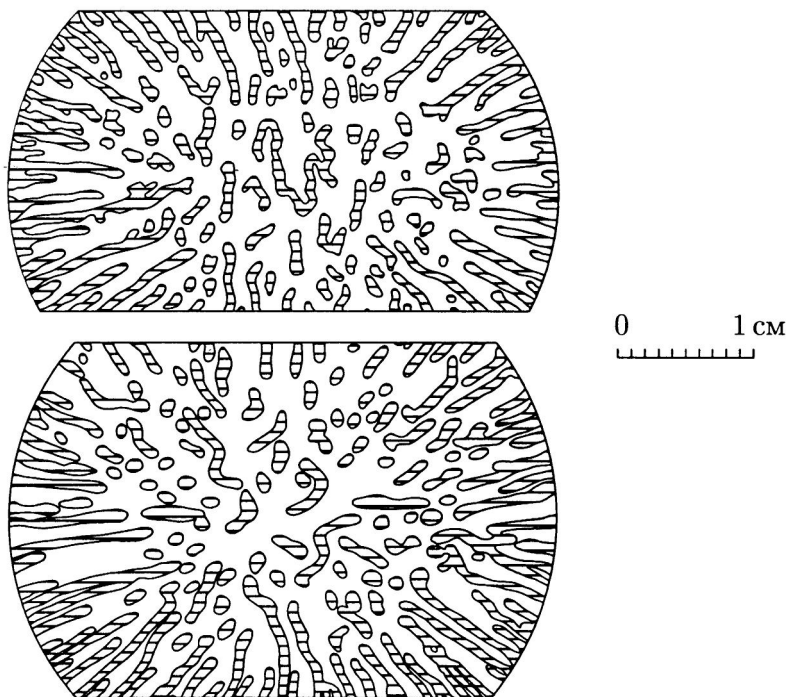


Рис. 4.7 Структура промежуточного состояния на поверхности оловянной полусферы ($T=2.85\text{ }^{\circ}\text{K}$, $H=0.7\text{ }H_c$). Заштрихованы нормальные области.

4.5 Промежуточное состояние цилиндрического сверхпроводника с током

Необычно выглядит картина промежуточного состояния в цилиндрическом сверхпроводящем цилиндре (проводе), по которому течет электрический ток. При относительно небольшом значении тока вся проволока находится в сверхпроводящем состоянии и весь ток сосредоточен в тонком приповерхностном слое толщиной порядка

глубины проникновения магнитного поля λ . Как известно, напряженность магнитного поля на поверхности цилиндра радиуса R равняется

$$H = \frac{i}{2\pi R}. \quad (4.3)$$

С увеличением полного тока магнитное поле будет нарастать и в конце концов достигнет уровня термодинамического критического поля и создадутся условия для перехода сверхпроводящего цилиндра в нормальное состояние. Соответствующее значение электрического тока мы будем обозначать i_c и называть критическим. А само правило, в соответствии с которым критическим током является электрический ток, создающий критическое магнитное поле на поверхности сверхпроводника, называют **правилом Сильсби**.

При дальнейшем увеличении тока в проволоке возникает парадоксальная ситуация. С одной стороны, напряженность магнитного поля, вычисленное по (4.3) на поверхности цилиндра превышает критическое. Следовательно внешний слой цилиндра должен перейти в нормальное состояние, а ток сосредоточится в тонком слое вблизи границы раздела нормальной и сверхпроводящей зон. Но поскольку эта граница переместилась вглубь цилиндра, то ее радиус меньше R , а, следовательно, напряженность магнитного поля будет еще выше, чем на поверхности. Таким образом фактически создаются условия для дальнейшего перемещения границы внутрь сверхпроводника и, в конечном итоге, для перехода всего цилиндра в нормальное состояние. Однако, если вся проволока будет находиться в нормальном состоянии, то ток будет равномерно распределяться по ее сечению и напряженность магнитного поля будет линейно нарастать от нуля до максимального значения на поверхности цилиндра. Соответственно центральная часть цилиндра будет находиться в магнитном поле с напряженностью ниже критической и должна перейти в сверхпроводящее состояние. Возникающее противоречие впервые было разрешено Ф.Лондоном, который в 1937 году показал, что в рассматриваемом случае возникает промежуточное состояние с чередующимися нормальными и сверхпроводящими зонами, как это показано на рис. 4.8.

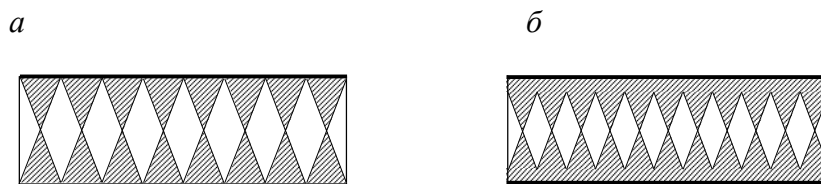


Рис.4.8. Картина промежуточного состояния в продольном сечении сверхпроводниковой проволоки с током. Заштрихованы нормальные области.

- а) ток равен критическому;
- б) ток больше критического.

Причины формирования такой структуры промежуточного состояния могут быть понятны из следующих рассуждений. Рассмотрим состояние сверхпроводящего цилиндра при протекании по току, превышающего критический уровень на очень малую величину. Поскольку магнитное поле в некоторой, даже бесконечно малой, части цилиндра превышает критический уровень, то устойчивое состояние невозможно без того, что часть этого цилиндра перейдет в нормальное состояние и часть электрического тока будет протекать по появившимся нормальным зонам. Прохождение тока по нормальной зоне неизбежно приводит к появлению падения напряжения, а это возможно только в случае возникновения разрывов в единой сверхпроводящей области. Таким образом на пути электрического тока должны возникнуть чередующиеся нормальные и сверхпроводящие зоны. Для того, чтобы определить форму таких зон, необходимо принять во внимание основной термодинамический принцип, сопровождающий переход сверхпроводника в нормальное состояние. Поскольку мы рассматриваем обратимый переход сверхпроводящего цилиндра в смешанное состояние при критическом значении тока, то свободные энергии этих двух состояний должны быть равными. Это условие выполняется только в том случае, если напряженность магнитного поля во всех точках нормальной зоны в точности равна критическому значению:

$$H(r) = H_c$$

Мы можем связать величину напряженности магнитного поля в точке с радиусом r и ток, пересекающий плоскость круга с этим радиусом $i(r) = \int_0^r J(r) \cdot 2\pi r \cdot dr$, воспользовавшись законом полного тока:

$$\int_0^r J(r) \cdot 2\pi r \cdot dr = H_c \cdot 2\pi r.$$

Продифференцировав последнее выражение по радиусу, мы получим приближенные зависимости плотности тока и напряженности электрического поля в нормальной зоне от радиуса:

$$J(r) = \frac{H_c}{r}, \quad E(r) = \gamma \frac{H_c}{r} \quad (4.4)$$

Приближенными они являются потому, что, строго говоря, обе эти характеристики зависят не только от радиуса, но и от аксиальной координаты, но в первом приближении этой зависимостью можно пренебречь. Поскольку сверхпроводящие зоны обладают нулевым электрическим сопротивлением, то потенциал во всех точкой каждой из них постоянен. Соответственно напряженность электрического поля в нормальной зоне, зажатой с двух сторон сверхпроводящими, может быть представлена как:

$$E(r) = \frac{\Delta U}{l(r)},$$

где $l(r)$ - ширина нормальной зоны в зависимости от радиуса, а ΔU - разность потенциалов между двумя соседними сверхпроводящими зонами. Сравнивая последнее выражение с (4.4), замечаем, что ширина нормальной зоны пропорциональна радиусу:

$$l(r) = \frac{\Delta U}{\gamma H_c} \cdot r.$$

Легко понять, что такая зависимость ширины плоской фигуры от радиуса соответствует именно треугольнику. Все проведенные выше рассуждения справедливы только для критического значения тока в цилиндре. При его дальнейшем увеличении на поверхности цилиндра образуется нормальный слой, а в центральной части сохраняются чередующиеся нормальные и сверхпроводящие зоны приблизительно треугольной формы (Рис. 4.8 б). Детальные исследования лондоновской модели промежуточного состояния позволили получить оптимальное соотношение между периодом доменной структуры и радиусом провода. Оно оказалось равным приблизительно 1.4.

Найдем сопротивление цилиндра при критическом значении тока \Re_c . Полный ток в проводнике напрямую связан с критическим полем $i = 2\pi R \cdot H_c$, а напряжение на участке цилиндра длиной $l(R)$ равно $\Delta U = \frac{l(R) \cdot \gamma H_c}{R}$. Поделив напряжение на ток, получим

$$\Re_c = \frac{l(R)}{2\pi R^2 \gamma}$$

Если теперь мы рассмотрим сопротивление того же цилиндра при условии, что он полностью находится в нормальном состоянии, то получим значение, вдвое превышающее критическое:

$$\Re_n = \frac{l(R)}{\pi R^2 \gamma}.$$

Таким образом при повышении тока до критического значение сопротивление проволоки скачком меняется с нулевого уровня до половины нормального сопротивления и при дальнейшем увеличении тока плавно стремится к своему максимальному уровню \Re_n .

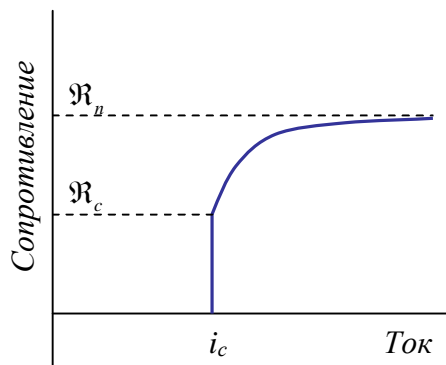


Рис.4.9. Зависимость сопротивление сверхпроводящего цилиндра от протекающего по нему тока.

Экспериментальные данные находятся в хорошем качественном согласии с теоретической зависимостью, полученной на основе модели Лондона. Но существуют некоторые количественные расхождения. В частности скачок сопротивления при критическом токе обычно больше половины от нормального и составляет приблизительно $\Re_c \approx (0.7 \div 0.8)\Re_n$.

Характеризуя в целом описанную выше модель смешанного состояния, нужно отметить, что она является статической. Приблизительно через 20 лет после того, как она была предложена Ф.Лондоном, была выдвинута идея о том, что смешанное состояние в сверхпроводящем цилиндре с током является динамической и характеризуется тем, что на поверхности проволоки постоянно возникают цилиндрические нормальные слои, которые перемещаются к оси проводника со скоростью порядка $10^{-3} - 10^{-2}$ см/с, где впоследствии исчезают. Анализ этой модели существенно осложняется тем обстоятельством, что рассматриваемое состояние не является равновесным и к нему невозможно напрямую применить рассмотренные ранее принципы термодинамики. В то же время опыт показывает, что на практике чаще реализуется именно динамическая модель смешанного состояния.

4.6. Намагничивание сверхпроводников 1-го рода.

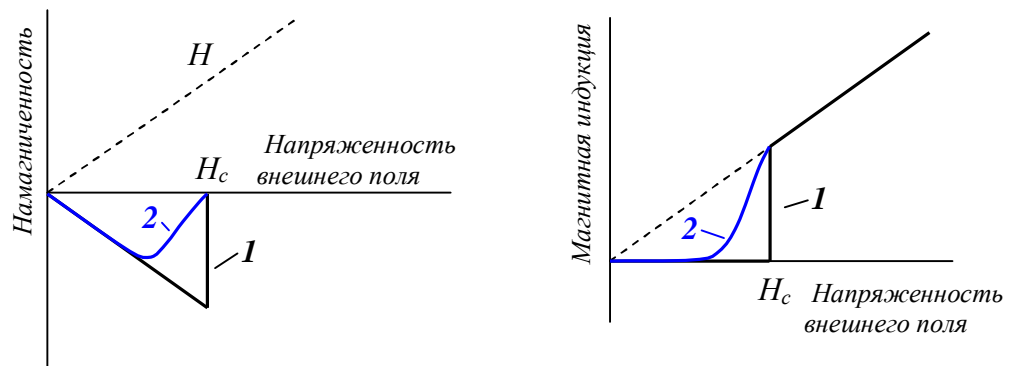
Способность сверхпроводников вытеснять магнитное поле из своего объема можно трактовать как проявление специфических магнитных свойств сверхпроводниковых материалов – способность намагничиваться. В соответствии с общими принципами классической электродинамики индукция магнитного поля внутри намагничивающегося материала можно представить в виде двух слагаемых:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M},$$

где \vec{H} - напряженность магнитного поля, а \vec{M} - вектор намагниченности. При условии полного вытеснения магнитного поля ($B = 0$) намагниченность сверхпроводника по абсолютной величине равна напряженности внешнего магнитного поля и противоположна ей по знаку.

$$\vec{M} = -\vec{H}$$

Поскольку между напряженностью поля и индукцией существует связь $\vec{B} = \mu \vec{H}$, то отсутствие магнитного поля внутри сверхпроводника можно трактовать и как равенство нулю магнитной проницаемости материала сверхпроводника. Однако при использовании изложенных выше представлений нельзя забывать о том, что в действительности характер проникновения магнитного поля в сверхпроводник 1-го рода зависит не только от внутренних свойств сверхпроводящего материала, но и от формы самого сверхпроводящего образца. Поэтому зависимости намагниченности и магнитной проницаемости могут меняться в зависимости от свойств рассматриваемой системы.



1 – сверхпроводящая пластина в продольном магнитном поле
2 – сверхпроводящая пластина в поперечном магнитном поле

Рис.4.10. Намагничивание сверхпроводников 1-го рода.

- а) зависимость намагниченности от напряженности внешнего магнитного поля
- б) зависимость напряженности полного магнитного поля от напряженности внешнего магнитного поля.

В качестве возможных вариантов на рис. 4.10 приведены зависимости намагниченности и индукции магнитного поля для сверхпроводящей пластины, расположенной в продольном и поперечном магнитных полях. В первом случае во всем диапазоне изменения внешнего магнитного поля, $0 < H < H_c$, полностью выполняется эффект Мейснера, а при больших напряженностях внешнего поля пластина скачком переходит в нормальное состояние. Во втором случае полное вытеснение магнитного поля имеет место только при относительно малых значениях напряженности, затем поле постепенно начинает проникать в пластину и усредненная намагниченность сверхпроводника плавно стремится к нулю.

Нужно отметить, что второй вариант значительно чаще встречается на практике, изменяется лишь диапазон напряженности магнитного поля, внутри которого происходит плавное изменение намагниченности. При этом понятие намагниченности понимается как некоторая усредненная по сверхпроводнику величина. Здесь необходимо помнить о том, что объект в промежуточном состоянии состоит из чередующихся нормальных и сверхпроводящих макроскопических областей и каждая сверхпроводящая область полностью вытесняет магнитное поле.

5. Сверхпроводники 2-го рода.

5.1. Общие свойства сверхпроводников 2-го рода

Как отмечалось раньше все сверхпроводники 2-го рода объединяет общее свойство – граница раздела между нормальной и сверхпроводящей в них обладает отрицательной свободной энергией. Качественный анализ физических явлений, происходящих вблизи от этой границы позволил нам установить, что это условие заведомо выполняется, если глубина проникновения магнитного поля существенно превышает длину когерентности. Более точное соотношение этими параметрами позволяет установить микроскопическая теория сверхпроводимости. Она показывает, что в сверхпроводниках 2-го рода длина когерентности ξ и глубина проникновения магнитного поля λ удовлетворяют неравенству

$$\xi < \sqrt{2}\lambda \text{ или } \kappa = \frac{\lambda}{\xi} > \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (5.1)$$

В этих условиях магнитное поле проникает в сверхпроводник таким образом, чтобы граница раздела между нормальной и сверхпроводящей фазами была бы максимально длинной. Возникающий при этом выигрыш свободной энергии оказывается настолько существенным, что сверхпроводящее состояние оказывается выгодным даже если приложенное магнитное поле превышает, иногда значительно, термодинамическое критическое магнитное поле. Проникновение магнитного поля в сверхпроводники 2-го рода сопровождается образованием микроскопических нормальных зон с минимально возможным радиусом порядка длины когерентности ξ . Эта нормальная зона обтекается незатухающими вихревыми токами, которые занимают область с радиусом порядка глубины проникновения магнитного поля λ . Поскольку в типичных сверхпроводниках 2-го рода $\lambda \gg \xi$, то размеры этой области обычно значительно превышают размеры нормального ядра. Полный магнитный поток, проникающий сквозь это образование, принимает минимально возможное значение, равное кванту магнитного потока Φ_0 . Таким образом магнитное поле, проникая в сверхпроводник 2-го рода, образует в нем устойчивые образования, каждое из которых включает нормальную зону, обтекаемую вихревыми токами.

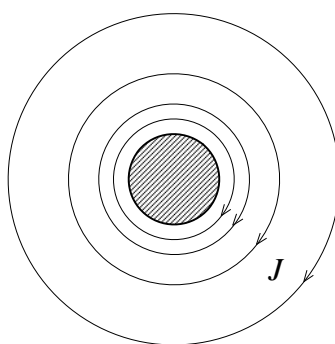


Рис.5.1. Нормальное ядро вихря, обтекаемое незатухающими токами.

Это образование называется **вихревой нитью** или просто **вихрем**. Каждый вихрь пропускает через себя один квант магнитного потока.

5.2. Магнитное поле одиночного вихря

Рассмотрим подробнее структуру уединенного вихря. В его центральной части располагается нормальная зона. На расстояниях порядка ξ концентрация сверхпроводящих электронов нарастает с нулевого до уровня, близкого к установившемуся. Приблизительно таким же можно считать и радиус самого нормального ядра. Хотя нужно отдавать себе отчет в том, что этот размер является условным, поскольку сама граница между нормальной и сверхпроводящей фазами по существу размыта в пределах слоя толщиной ξ . Магнитное поле вихря достигает своего максимума в центре вихря и спадает по мере удаления от него. Характерное расстояние, на котором оно существенно изменяется равно глубине проникновения магнитного поля λ .

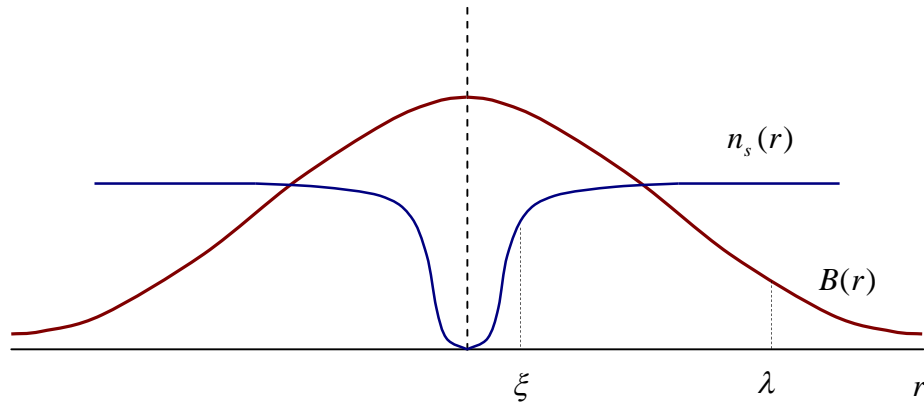


Рис. 5.2. Зависимости концентрации сверхпроводящих электронов и индукции магнитного поля от расстояния до центра вихревой нити.

Для того, чтобы определить характер изменения магнитного поля в области вихревой нити воспользуемся уравнением для напряженности магнитного поля в сверхпроводнике (2.8), полученного в теории Лондонов:

$$H(r) + \lambda^2 \text{rot rot} H(r) = 0$$

Это уравнение справедливо всюду, за исключением, естественно, центральной части вихря, где располагается нормальное ядро. Следовательно в центре вихря правая часть этого уравнения будет отлична от нуля:

$$H(r) + \lambda^2 \text{rot rot} H(r) = \begin{cases} 0, & r > \xi \\ f(r), & r < \xi \end{cases} \quad (5.2)$$

Для простоты мы будем рассматривать сверхпроводники 2-го рода, в которых $\kappa \gg 1$. Соответственно площадь, занятая нормальным ядром будет пренебрежимо мала по сравнению с площадью всего вихря, а уравнение Для определения свойств решения записанного выше уравнения проведем интегрирование этого уравнения по площади круга с радиусом, много большим λ :

$$\int_s H(r) dS + \lambda^2 \int_s \text{rot} \text{rot} H(r) dS = F, \quad (5.3)$$

где $F = \int_s f(r) ds$.

Преобразуем интеграл (5.3), учитывая следующие обстоятельства:

- Интеграл по площади от ротора произвольной функции удовлетворяет теореме Стокса $\int_s \text{rot}(\vec{A}) d\vec{S} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}$;
- В соответствии с одним из уравнений Максвелла $\text{rot} \vec{H} = \vec{J}$;
- Интеграл от индукции магнитного поля по поверхности выбранного круга равен полному магнитному потоку вихря Φ_0 , поскольку диаметр круга многократно превышает расстояние λ , в пределах которого происходит затухание магнитного поля и поддерживающих его вихревых токов.

В результате мы получим:

$$\Phi_0 + \lambda^2 \mu_0 \oint J dl = \mu_0 F$$

Поскольку мы выбрали круг с радиусом, намного превышающем λ , можно считать, что на границе этой области токи экранирующие токи полностью отсутствуют и второе слагаемое в последнем равенстве равно нулю, то есть:

$$\Phi_0 = \mu_0 F$$

Теперь проведем аналогичное интегрирование уравнения (5.2) по площади круга, радиус которого лишь незначительно превышает длину когерентности ξ . В результате мы снова получим равенство (5.3). После его преобразования мы получим:

$$H(0) \cdot \pi \xi^2 + \lambda^2 \mu_0 \oint \text{rot} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \Phi_0.$$

Здесь учитывалось то обстоятельство, что напряженность магнитного поля слабо меняется в пределах нормальной зоны, поэтому соответствующий интеграл можно заменить на произведение площади круга на напряженность магнитного поля в центре вихря. Поскольку мы рассматриваем случай $\xi \ll \lambda$, то первым слагаемым в последнем соотношении можно пренебречь. Тогда мы можем записать выражение для плотности тока, которое справедливо для $r \ll \lambda$:

$$|rot\vec{H}(r)| = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2\mu_0 r}$$

После интегрирования по радиусу получим:

$$H(r) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2\mu_0} \ln\left(\frac{\lambda}{r}\right). \quad (5.4)$$

Нормировочная константа здесь выбрана таким образом, чтобы магнитное поле стремилось к нулю при $r \rightarrow \lambda$. Таким образом решение рассматриваемого уравнения расходится при приближении радиуса к нулю и напряженность магнитного поля логарифмически стремится к бесконечности. Здесь, однако, необходимо помнить о том, что само уравнение (5.2) справедливо только за пределами нормальной зоны. Поэтому напряженность магнитного поля вихря на границе этой зоны прекращает свой рост и может считаться приблизительно постоянным, равным $H(0)$, внутри самой этой области:

$$H(0) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2\mu_0} \ln(\kappa).$$

При большом удалении от центра вихря ($r \gg \lambda$) магнитное поле затухает по экспоненциальному закону:

$$H \sim \sqrt{\frac{\lambda}{r}} \cdot e^{-\frac{r}{\lambda}}. \quad (5.5)$$

В этом легко убедиться, если подставить эту функцию в исходное уравнение (5.2) и пренебречь слагаемыми, удельный вес которых уменьшается с увеличением радиуса.

5.3. Смешанное состояние сверхпроводников 2-го рода.

5.3.1 Проникновение вихрей в сверхпроводник.

Как уже отмечалось, проникновение магнитного поля в сверхпроводник 2-го рода сопровождается возникновением микроскопических нормальных островков, обтекаемых токами – вихревых нитей. Однако происходит это только в том случае, если магнитное поле превышает некоторый предельный уровень, называемый **первым критическим полем**. Напряженность этого поля мы будем обозначать H_{c1} . При меньшей напряженности сверхпроводник 2-го рода полностью выталкивает из своего объема магнитное поле. После проникновения первого кванта магнитного потока в сверхпроводник, за ним устремляются и другие. Возникающее в итоге состояние называют **смешанным состоянием** сверхпроводника 2-го рода. Распределение вихрей по объему сверхпроводника определяется несколькими факторами. С одной стороны, их концентрация пропорциональна усредненной индукции магнитного поля, поэтому их

распределение стремится повторить распределение внешнего магнитного поля. С другой стороны, между отдельными вихрями существуют силы отталкивания, которая возрастает по мере их сближения. Причину их возникновения можно понять, если посмотреть на направления токов, обтекающих нормальные ядра соседних вихрей. В пространстве между центрами вихрей эти токи направлены в противоположные стороны, что, как известно, и приводит к возникновению сил отталкивания.

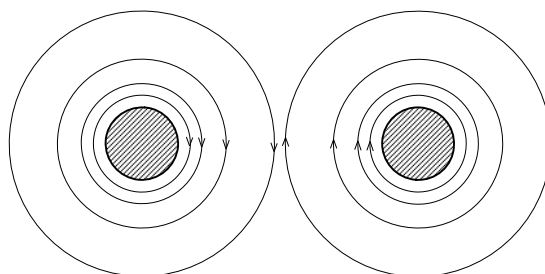


Рис. 5.3. Взаимодействие двух вихрей.

В результате действия указанных причин вихри выстраиваются в правильную решетку. Как было показано в теоретических работах А.А. Абрикосова, эта решетка имеет правильную треугольную структуру. Предсказанная Абрикосовым структура смешанного состояния была затем проверена экспериментально, в частности, в опытах по напылению ферромагнитных порошков на поверхность сверхпроводника. Порошок втягивался в область максимального магнитного поля и, таким образом, концентрировался в центрах вихрей.

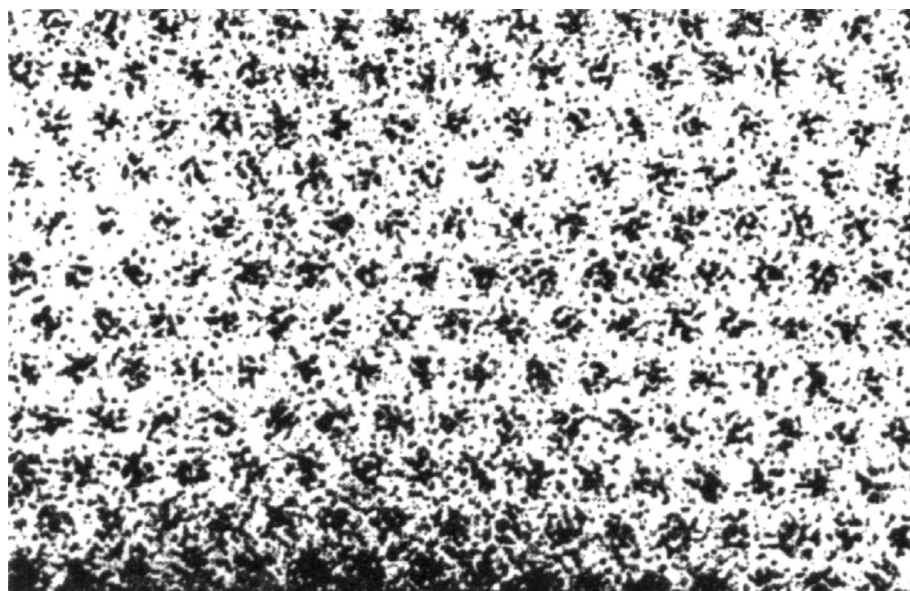


Рис. 5.4. Вихревая структура смешанного состояния на поверхности сверхпроводящей фольги из сплава свинца с индием. Расстояние между центрами соседних вихрей составляет приблизительно 500 нм.

5.3.2. Сила взаимодействия между вихрями.

Для того, чтобы количественно оценить эти силы, рассмотрим зависимость энергии двух вихрей от расстояния между ними. Эта энергия состоит из двух частей – энергии магнитного поля и кинетической энергии движущихся электронов. Первая компонента энергии может быть найдена интегрированием плотности энергии магнитного поля по объему, внутри которого расположены вихревые нити:

$$W_m = \int \frac{\mu_0 H^2}{2} dv.$$

Кинетическая энергия электронов будет равна:

$$W_{кин} = \int \frac{n_s m V^2}{2} dv$$

Скорость перемещения электронов V , их концентрация n_s и заряд e связаны с плотностью электрического тока в сверхпроводнике:

$$J = en_s V.$$

Учитывая это соотношение, а также выражение для глубины проникновения магнитного поля в сверхпроводник (2.5) $\lambda^2 = \frac{m}{n_s \mu_0 e^2}$ и уравнение Максвелла $rot \vec{H} = \vec{J}$, получим выражение для кинетической энергии в виде:

$$W_{кин} = \int \frac{\lambda^2 (rot \vec{H})^2}{2} dv.$$

Таким образом, полная энергия вихрей будет равна:

$$W = \frac{\mu_0}{2} \int [H^2 + \lambda^2 (rot \vec{H})^2] dv. \quad (5.6)$$

Это выражение можно преобразовать, воспользовавшись формулой тождественного преобразования, известной из векторной алгебры:

$$\vec{a} \cdot rot(\vec{b}) = \vec{b} \cdot rot(\vec{a}) - div[\vec{a} \times \vec{b}].$$

Выберем в качестве векторов \vec{a} и \vec{b} :

$$\vec{a} = rot(\vec{H}); \quad \vec{b} = \vec{H}.$$

Тогда

$$(\text{rot}\vec{H})^2 = \vec{H} \cdot \text{rotrot}(\vec{H}) - \text{div}[\text{rot}(\vec{H}) \times \vec{H}]$$

Подставим полученное соотношение в выражение для энергии вихрей и воспользуемся теоремой Гаусса для дивергенции произвольного вектора:

$$W = \frac{\mu_0}{2} \int [H^2 + \vec{H} \cdot \lambda^2 \text{rotrot}\vec{H}] dv - \oint \vec{J} \times \vec{H} ds.$$

Если выбрать границу области интегрирования достаточно далеко от центров вихрей, то плотность тока и напряженность магнитного поля на ней будут очень маленькими по величине, поэтому последним слагаемым в полученном выражении можно пренебречь:

$$W = \frac{\mu_0}{2} \int \vec{H} \cdot (H + \lambda^2 \text{rotrot}\vec{H}) dv.$$

Как было отмечено ранее (5.2), выражение находящееся в круглых скобках, равно нулю всюду внутри сверхпроводящей области, и только внутри нормального ядра отлично от него. Поскольку это ядро занимает очень малое пространство, мы можем считать магнитное поле внутри него приблизительно постоянным, тогда полная энергия двух вихрей, приходящаяся на единицу их длины, может быть представлена в виде:

$$W = [H(0) + H(r)] \cdot \Phi_0,$$

где r - расстояние между центрами вихрей. Если это расстояние очень велико, то $H(r) \approx 0$ и мы получаем формулу для энергии одного уединенного вихря:

$$W = \frac{H(0)\Phi_0}{2} = \frac{\Phi_0^2}{4\pi\lambda^2\mu_0} \ln \kappa \quad (5.7)$$

Для определения силы взаимодействия между вихрями на единицу длины необходимо продифференцировать выражения для полной энергии системы по координате r :

$$f = -\frac{dW}{dr} = -\Phi_0 \frac{dH(r)}{dr}.$$

Если расстояние между центрами вихрей меньше глубины проникновения магнитного поля, можно воспользоваться выражением для напряженности магнитного поля вихря (5.4). Тогда сила взаимодействия может быть представлена в виде:

$$f = \frac{\Phi_0^2}{2\pi\lambda^2\mu_0 r}.$$

Мы видим, что сила взаимодействия положительна, что соответствует отталкиванию, и увеличивается с уменьшением расстояния между центрами вихрей пропорционально $1/r$.

5.4. Первое критическое поле.

Проведем оценку величины первого критического поля. Для этого необходимо определить условия, при которых первый вихрь проникнет внутрь сверхпроводника. С этой целью прежде всего проведем оценку энергии одного вихря. Поскольку полный магнитный поток вихря равен Φ_0 , а его площадь приблизительно равна $s = \pi\lambda^2$, то средняя индукция магнитного поля может быть приблизительно представлена как:

$$B = \frac{\Phi_0}{\pi\lambda^2}$$

Соответственно энергия одного вихря на единицу его длины будет приблизительно равна:

$$W_0 \approx \frac{B \cdot H}{2} \pi\lambda^2 = \frac{\Phi_0^2}{\mu_0 \cdot 2\pi\lambda^2}$$

Поскольку эта энергия положительна, то существование вихря внутри сверхпроводника в отсутствии внешнего магнитного поля энергетически невыгодно. Однако если сверхпроводник поместить во внешнее поле, то в условиях полного вытеснения магнитного поля свободная энергия сверхпроводника внутри того же объема увеличивается на величину энергии вытесняемого магнитного поля

$$W_m = \frac{\mu_0 H^2}{2} \pi\lambda^2.$$

До тех пор, пока эта энергия меньше, чем энергия вихря, сверхпроводник будет находиться в мейснеровской фазе. Но как только W_m превысит W_0 , рождение вихря становится энергетически выгодным. Приравняв две эти энергии, мы получаем оценку напряженности 1-го критического поля:

$$\frac{\mu_0 H_{c1}^2}{2} \pi\lambda^2 = \frac{\Phi_0^2}{\mu_0 \cdot 2\pi\lambda^2} \quad \Rightarrow \quad H_{c1} = \frac{\Phi_0}{\mu_0 \cdot \pi\lambda^2} \quad (5.8)$$

При выводе этой формулы мы фактически сделали предположение о том, что магнитное поле внутри уединенного вихря однородно в пределах круга с радиусом λ . В действительности оно имеет более сложную зависимость от расстояния до центра вихря (5.4). Учет этого вида распределения позволяет получить более точную формулу для величины энергии уединенного вихря (5.7) и напряженности 1-го критического поля:

$$H_{c1} = \frac{\Phi_0}{\mu_0 \cdot \pi\lambda^2} \cdot \left(\frac{\ln(\kappa)}{2} + 0.25 \right).$$

Последнее выражение учитывает, также, небольшое увеличение свободной энергии за счет перехода электронов в нормальное состояние в центральной части вихря.

Для большинства реальных сверхпроводников 2-го рода выражение в скобках не очень сильно отличается от единицы. Например для основных технических сверхпроводников - сплава $NbTi$ ($\kappa = 75$) оно равно 2.4, для Nb_3Sn ($\kappa = 21.7$) – 1.8 и т.д. Поэтому проведенная нами оценка на практике дает вполне реалистичные результаты.

5.5. Второе критическое поле

Когда магнитное поле достигает уровня H_{c1} , первый вихрь проникает в сверхпроводник. При дальнейшем увеличении поля вихри начинают уплотняться. Взаимное расположение вихрей определяется силами отталкивания между ними. Если внешнее магнитное поле мало, то среднее расстояние между вихрями превышает их характерный размер и взаимодействие практически отсутствует. При большом уровне поля среднее расстояние между нормальными ядрами вихрей становится меньшим, чем глубина проникновения магнитного поля. В этих условиях вихри выстраиваются в правильную треугольную решетку. Когда расстояние между центрами вихрей становится равным диаметру нормальной сердцевинки, они сливаются в одну макроскопическую нормальную область и сверхпроводимость исчезает. Магнитное поле, при котором это происходит, называют **вторым критическим полем**. Оценить его можно, предположив, что нормальные ядра вихрей полностью заполняют пространство, занятое сверхпроводником. В этих условиях на каждый квант магнитного потока будет приходиться площадь, равная площади поперечного сечения нормального ядра. Поскольку его радиус приблизительно равен длине когерентности ξ , мы можем записать:

$$H_{c2} = \frac{\Phi_0}{\mu_0 \pi \xi^2}$$

Более точный анализ показывает, что в действительности второе критическое поле вдвое меньше, чем та оценка, которую мы получали:

$$H_{c2} = \frac{\Phi_0}{\mu_0 \cdot 2\pi \xi^2} \quad (5.9)$$

Сравнивая оценки первого и второго критических полей мы можем заметить, что между ними существует соотношение:

$$H_{c2} = H_{c1} \cdot \kappa^2$$

Поскольку параметр Гинзбурга – Ландау κ для типичных сверхпроводников 2-го рода может достигать сотен, то, очевидно, 2-е критическое поле может превышать H_{c1} в тысячи и даже десятки тысяч раз.

5.6. Поверхностная сверхпроводимость

Как уже отмечалось, при помещении сверхпроводника 2-го рода в магнитное поле, превышающее 2-ой критический уровень, он переходит в нормальное состояние. Однако оказывается, что даже в этом случае могут сохраняться сверхпроводящие области. В 1963 году Сан-Жам и Де Жен показали, что на границе сверхпроводник – изолятор в параллельном магнитном поле может существовать сверхпроводящий слой толщиной порядка длины когерентности ξ вплоть до напряженности H_{c3} , которая в 1.695 раз превышает напряженность второго критического поля. Магнитное поле с напряженностью H_{c3} называют **3-м критическим полем**. Интересно отметить, что поверхностная сверхпроводимость отсутствует, если сверхпроводник граничит не с изолятором, а с металлом.

В принципе 3-е критическое поле существует и у некоторых сверхпроводников 1-го рода, однако обнаружить его экспериментально можно только в том случае, если оно превышает термодинамическое критическое поле. Поскольку $H_{c2} = \sqrt{2}kH_c$, то для появления поверхностной сверхпроводимости фактически необходимо выполнение условия :

$$H < 1.695 \cdot \sqrt{2}kH_c.$$

Если параметр Гинзбурга – Ландау удовлетворяет неравенству $\kappa > \frac{1}{1.695 \cdot \sqrt{2}} \approx 0.42$, максимальное магнитное поле, при котором сохраняется поверхностная сверхпроводимость, превышает термодинамическое критическое и может быть наблюдаемым в эксперименте. Здесь необходимо помнить, что для сверхпроводников 1-го рода существует принципиальное ограничение на максимально возможное значения параметра κ : $\kappa < \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.71$.

5.7. Намагничивание сверхпроводников 2-го рода.

В относительно слабых магнитных полях ($H < H_{c1}$) сверхпроводники 2-го рода полностью вытесняют поле из своего объема. Их намагничивание в этих условиях ведет себя также, как и в сверхпроводниках 1-го рода. Когда напряженность магнитного поля достигает 1-го критического уровня H_{c1} , кванты магнитного поля начинают проникать внутрь сверхпроводника и распределяться по его объему. При этом намагниченность сверхпроводника резко уменьшается. С точки зрения минимизации свободной энергии было бы выгодно, чтобы внешнее магнитное поле полностью проникло бы в сверхпроводник и его намагниченность обратилась бы в ноль. Этому, однако, препятствует то обстоятельство, что отдельно взятые вихри отталкиваются друг от друга и увеличение их концентрации (сближение) требует дополнительных затрат на изменение свободной энергии сверхпроводника.

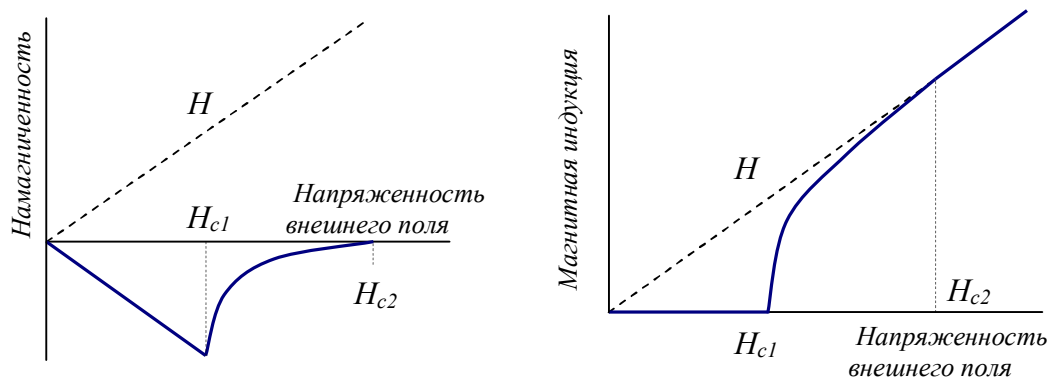


Рис.5.9. Намагничивание сверхпроводников 2-го рода.

При дальнейшем увеличении внешнего магнитного поля намагниченность сверхпроводника 2-го рода постепенно уменьшается и обращается в ноль при достижении уровня, соответствующего 2-му критическому полю H_{c2} .

Можно показать, что площадь под кривой $M(H)$ равняется разности свободных энергий нормального и сверхпроводящего состояний, то есть:

$$\mu_0 \int_0^{H_{c2}} M(H) dH = G_n - G_s = \frac{\mu_0 H_c^2}{2}.$$

Для доказательства рассмотрим сверхпроводящий цилиндр высотой h и с площадью основания s . Разместим на поверхности цилиндра обмотку и будем увеличивать ток в этой обмотке от нуля до некоторого максимального значения, при котором сверхпроводник полностью перейдет в нормальное состояние. Это произойдет при достижении магнитного поля в цилиндре уровня H_{c2} . В процессе изменения тока в обмотке внешние источники будут развивать мощность, равную $p = i \cdot u$ и за полный период процесса изменения поля совершат работу

$$A_{\text{ист}} = \int_0^T i(t) \cdot u(t) dt \quad (5.10)$$

Если полное число витков в катушке равно n , то напряжение на ней будет равно

$$u = \frac{d\Psi}{dt} = n \cdot s \cdot \frac{dB}{dt}$$

Здесь мы предполагаем, что собственное активное сопротивление катушки равно нулю. Если рассматриваемый цилиндр достаточно длинный, то напряженность магнитного поля внутри него может быть найдена как

$$H = \frac{n \cdot i}{h}$$

Соответственно ток будет равен $i = \frac{h \cdot H}{n}$. Подставляя полученные выражения для тока и напряжения в 5.10, получаем:

$$A_{uct} = s \cdot h \cdot \int_0^{B_{c2}} H \cdot dB$$

Учитывая, что $B = \mu_0 H + \mu_0 M$, получаем:

$$A_{uct} = sh \cdot \mu_0 \int_0^{H_{c2}} H \cdot dH + sh \cdot \mu_0 \int_0^{H_{c2}} H \cdot dM = sh \cdot \frac{\mu_0 H_{c2}^2}{2} + sh \cdot \mu_0 \int_0^{H_{c2}} H \cdot dM.$$

Первое слагаемое в правой части этого выражения соответствует той части работы, которая была затрачена на создание магнитного поля в пространстве, занятым цилиндром. Эта работа должна быть произведена независимо от присутствия или отсутствия самого цилиндра. И лишь второе слагаемое соответствует той работе, которая затрачена на изменение энергетического состояния самого рассматриваемого объекта. В дальнейшем мы будем рассматривать работу, производимую не внешними источниками над сверхпроводящим объектом, а наоборот – работу, которую производит сам сверхпроводящий цилиндр. Очевидно, что две эти величины равны по абсолютной величине и противоположны по знаку. Кроме того, будем рассматривать все энергетические характеристики, отнесенные к единице объема. Тогда работа может быть записана как:

$$A = -\mu_0 \int_0^{H_{c2}} H \cdot dM.$$

Проведем еще одно преобразование последней формулы. Для этого рассмотрим полное изменение величины $H \cdot M$ при изменении магнитного поля от нуля до H_{c2} :

$$\int_0^{H_{c2}} d(M \cdot H) = \int_0^{H_{c2}} H \cdot dM + \int_0^{H_{c2}} M \cdot dH = M \cdot H \Big|_0^{H_{c2}}$$

Поскольку намагниченность сверхпроводника равна нулю при нулевом поле и при втором критическом поле, то рассматриваемый интеграл равен нулю и

$$\int_0^{H_{c2}} H \cdot dM = - \int_0^{H_{c2}} M \cdot dH.$$

Таким образом мы получаем выражение для объемной плотности работы, совершенной сверхпроводящим цилиндром:

$$A = \mu_0 \int_0^{H_{c2}} M \cdot dH .$$

В соответствии с первым началом термодинамики эта работа связана с изменением внутренней энергии объекта и количеством тепловой энергии, переданной рассматриваемому объекту соотношением:

$$dQ = dU + dA$$

В свою очередь для обратимых переходов, к которым относится и переход из сверхпроводящего состояния в нормальное, передаваемая объекту тепловая энергия при постоянной температуре связана с изменением энтропии (3.4):

$$dQ = TdS .$$

Объединяя две последние формулы, мы получим:

$$dU - TdS = -dA .$$

В дальнейшем будем предполагать, что переход сверхпроводящего цилиндра в нормальное состояние осуществляется при постоянной температуре. Тогда левая часть последнего выражения фактически представляет собой бесконечно малое приращение свободной энергии Гиббса $dG = dU - TdS$. Проинтегрировав это выражение мы получим:

$$G(H_{c2}) - G(0) = -\mu_0 \int_0^{H_{c2}} M \cdot dH .$$

Учитывая, что при отсутствии внешнего поля цилиндр находится в сверхпроводящем состоянии, а при $H = H_{c2}$ - в нормальном, мы можем окончательно записать:

$$G_n - G_s = \frac{\mu_0 H_c^2}{2} = -\mu_0 \int_0^{H_{c2}} M \cdot dH .$$

В последнем выражении использована связь между термодинамическим критическим полем H_c и приращением энергии Гиббса при переходе из сверхпроводящего состояния в нормальное (3.6). Интересно отметить, что при достижении термодинамического критического поля в сверхпроводниках 2-го рода каких-либо изменений в состоянии объекта не происходит. И судить о величине этого поля можно только по косвенным экспериментальным данным, в частности по величине интеграла $\int_0^{H_{c2}} M \cdot dH$.

6. Теория сверхпроводимости Гинзбурга-Ландау

Как уже отмечалось, первой феноменологической теорией сверхпроводимости была теория Лондонов. Ее существенным недостатком было то, что в ней никак не учитывались квантовые эффекты, хотя уже во время создания этой теории было понятно, что именно они лежат в основе явления сверхпроводимости. Первой успешной теорией сверхпроводимости, в которой был использован математический аппарат квантовой механики, была теория Гинзбурга – Ландау, основы которой были сформулированы советскими физиками в начале 50-х годов прошлого века. В то же время необходимо отметить, что теория Гинзбурга – Ландау оставалась феноменологической – она не дала ответ на вопрос о природе сверхпроводимости, хотя и позволила описать, качественно и количественно, многие физические эффекты, сопровождающие это явление.

Для лучшего понимания основных положений теории Гинзбурга – Ландау необходимо вспомнить о том, что в квантовой механике для описания движения частиц используются представления о волновой функции (вообще говоря комплексной) частицы $\Psi(\vec{r}, t)$, характеризующей ее положение в пространстве и времени. Физический смысл имеет только квадрат модуля этой функции, который задает вероятность обнаружить частицу в заданной точке в заданный момент времени. В том случае, если волновая функция используется для описания состояния большого коллектива частиц, то эта же величина определяет концентрацию частиц в пространстве. В дальнейшем мы будем использовать квантово-механические представления для описания состояния «сверхпроводящих» электронов в металле, поэтому квадрат модуля волновой функции будем считать равным концентрации этих электронов.

$$|\Psi(\vec{r}, t)|^2 = n_s(\vec{r}, t)$$

Строго говоря, функция $\Psi(\vec{r}, t)$, используемая в теории сверхпроводимости Гинзбурга – Ландау не является полным аналогом волновой функции, используемой в квантовой механике, поэтому она получила иное название – *параметр порядка*, который мы и будем использовать в дальнейшем.

Для определения характеристик стабильного состояния сверхпроводника воспользуемся сформулированными ранее термодинамическими принципами. Рассмотрим свободную энергию коллектива электронов в сверхпроводнике. В нормальном состоянии эта энергия равна W_n , в сверхпроводящем – W_s . Обозначим разницу между этими энергиями как ΔW , тогда:

$$W_s = W_n + \Delta W.$$

Поскольку сверхпроводящее состояние осуществляется в реальности, то очевидно, что $W_s < W_n$, а для электронов проводимости «сверхпроводящее» состояние энергетически является более выгодным, чем «нормальное». Поэтому можно в первом приближении

представить выигрыш в энергии при переходе из нормального состояния в сверхпроводящее как:

$$\Delta W = W_s - W_n = -\alpha \cdot n_s \quad (6.1)$$

Здесь α - коэффициент пропорциональности, по смыслу и по абсолютной величине равный энергетическому выигрышу при переходе одного электрона в «сверхпроводящее» состояние. Очевидно, что $\Delta W < 0$, а знак «-» в правой части последнего выражения выбран для удобства последующих преобразований. Основные принципы термодинамики утверждают, что свободная энергия устойчивой системы стремится к минимально возможному значению. Для свободной энергии, записанной в виде (6.1), это означает, что концентрация «сверхпроводящих» электронов стремится к бесконечности. Однако все факты говорят о том, что в сверхпроводнике (по крайней мере при ненулевой температуре) существуют как «сверхпроводящие», так и «нормальные» электроны. Это обстоятельство никак не согласовывалось с упрощенными представлениями, изложенными выше. Решение было найдено за счет предположения о том, что выражение для выигрыша в энергии при переходе электрона в «сверхпроводящее» состояние является более сложным. Гинзбургом было предложено представить выражение для свободной энергии в виде сумму двух слагаемых:

$$\Delta W = -\alpha \cdot n_s + \frac{\beta}{2} \cdot n_s^2. \quad (6.2)$$

Интересно отметить, что в качестве обоснования такого выражения для энергии главным и по существу единственным аргументом было то, что функция (6.2) имеет минимум. Тем не менее это, на первый взгляд простое, предположение позволило получить серьезные теоретические результаты.

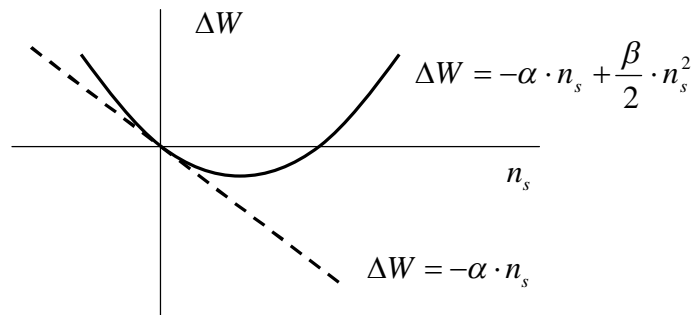


Рис. 6.1 Зависимость свободной энергии сверхпроводника от концентрации «сверхпроводящих» электронов.

Коэффициенты α и β в последнем выражении являются неизвестными параметрами модели. Соотношение между ними может быть получено, если воспользоваться принципом минимума свободной энергии системы, находящейся в устойчивом состоянии:

$$\frac{d(\Delta W)}{dn_s} = -\alpha + \beta \cdot n_s = 0.$$

Отсюда следует: $\beta = \frac{\alpha}{n_s}$, а величина выигрыша энергии в устойчивом состоянии, которую мы будем обозначать ΔW_∞ , составляет:

$$\Delta W_\infty = -\alpha \cdot n_s + \frac{\beta}{2} n_s^2 = -\frac{\alpha}{2} n_s.$$

Символ « ∞ » здесь означает, что мы рассматриваем сверхпроводящий материал в объеме, бесконечно далеко от границы раздела сверхпроводящей и нормальной фаз. Как мы видели, в действительности такие границы могут играть очень большую роль в формировании свойств сверхпроводника, и в некоторых случаях пренебрежение их влиянием приводит к серьезному искажению предсказаний теории. Тем не менее именно «объемные» свойства сверхпроводников являются ключевыми для понимания физики сверхпроводимости.

Одним из базовых понятий «объемной» сверхпроводимости понятие о **термодинамическом критическом магнитном поле**. Рассмотрим, как ведет себя сверхпроводник во внешнем магнитном поле. В соответствии с эффектом Мейснера, это поле при относительно небольших значениях напряженности выталкивается из объема сверхпроводника. Вытеснение происходит за счет того, что незатухающие поверхностные токи создают собственное поле сверхпроводника, для чего требуется дополнительная энергия, объемная плотность которой равна:

$$\Delta W_m = \frac{\mu_0 H^2}{2}.$$

Эта энергия, очевидно, положительна. При некотором уровне напряженности внешнего магнитного поля $H = H_c$ эта энергия сравнивается по абсолютной величине с ΔW_∞ . В этом случае нормальное и сверхпроводящее состояния становятся энергетически одинаково выгодными. При дальнейшем же увеличении магнитного поля, то есть при $H > H_c$, сверхпроводящее состояние разрушается магнитным полем. Это предельное магнитное поле, напряженность которого равна H_c , и которое разрушает объемную сверхпроводимость, называется термодинамическим критическим магнитным полем. В соответствии с данным определением, мы можем записать выражение:

$$\frac{\mu_0 H_c^2}{2} = \frac{\alpha}{2} n_s.$$

Раньше, при выводе уравнения Лондонов, было получено выражение для концентрации «сверхпроводящих» электронов:

$$n_s = \frac{m}{\lambda^2 e^2 \mu_0},$$

Два последних равенства позволяют выразить второй неопределенный параметр модели Гинзбурга – Ландау α через физические характеристики сверхпроводника:

$$\alpha = \frac{e^2 \lambda^2 \mu_0^2 H_c^2}{m}.$$

Следующим шагом в развитии теории Гинзбурга – Ландау является переход от концентрации «сверхпроводящих» электронов к параметру порядка, который связан с концентрацией n_s соотношением (6.2). В квантовой механике волновая функция Ψ удовлетворяет уравнению Шредингера, которое является аналогом уравнений Ньютона в классической механике. В своей классической форме уравнение Шредингера выражает закон сохранения энергии:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} [\nabla \Psi(\vec{r}, t)]^2 + U(\vec{r}) = E.$$

Первое слагаемое в левой части уравнения выполняет роль кинетической энергии частицы, $U(\vec{r})$ – потенциальная энергия, а E – полная энергия частицы. Константа \hbar называется «перечеркнутой» постоянной Планка и связана с постоянной Планка h , которую мы использовали раньше равенством $2\pi \cdot \hbar = h$. Учитывая связь между импульсом и кинетической энергией частицы $E_K = \frac{p^2}{2m}$, мы можем, также, записать квантовомеханическое выражение для импульса:

$$\vec{p} = i\hbar \vec{\nabla} \Psi,$$

где i – мнимая единица.

При построении теории Гинзбурга – Ландау был использован аналог уравнения Шредингера для «сверхпроводящих» электронов. Введем некоторые упрощения. Во-первых, ограничимся решением стационарного, не зависящего от времени уравнения. Во-вторых, будем считать, что параметр порядка $\Psi(\vec{r})$ зависит только от одной координаты – x . Это предположение означает, что мы исследуем распределение «сверхпроводящих» электронов вблизи одной границы, перпендикулярной оси x . Учитывая, что существенные изменения в концентрации электронов происходит на расстояниях порядка длины когерентности ξ , которая на практике составляет доли микрона, это вполне оправдано. Потенциальная энергия в нашей задаче характеризует конденсацию «нормальных» электронов в сверхпроводящее состояние и определяется выражением (6.2). С учетом сделанных замечаний, а также после замены концентрации электронов на квадрат параметра порядка, уравнение для функции $\Psi(x)$ приобретает вид:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} [\nabla \Psi(x)]^2 - \alpha \Psi^2(x) + \frac{\beta}{2} \Psi^4(x) = E$$

Снова воспользуемся принципом минимума свободной энергии системы и найдем такую функцию $\Psi(x)$, которая соответствует минимально возможной полной энергии E :

$$\frac{dE}{d\Psi} = 0 \quad \text{или}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot 2\bar{\nabla}\Psi(x) \cdot \frac{d[\bar{\nabla}\Psi(x)]}{d\Psi} - 2\alpha\Psi(x) + 2\beta\Psi^3(x) = 0$$

Рассмотрим отдельно производную $\frac{d[\bar{\nabla}\Psi(x)]}{d\Psi}$. Оператор $\bar{\nabla}$ в одномерной системе координат превращается в производную по координате x . Воспользуемся правилом дифференцирования функций по промежуточному аргументу, взяв в качестве такого аргумента переменную x :

$$\frac{d\left[\frac{d\Psi(x)}{dx}\right]}{d\Psi} = \frac{d\left[\frac{d\Psi(x)}{dx}\right]}{dx} \cdot \frac{dx}{d\Psi} = \frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} \cdot \frac{dx}{d\Psi}.$$

Учитывая, что выражение для производной обратной функции $\frac{dx}{d\Psi} = \frac{1}{\frac{d\Psi}{dx}}$, получим

уравнение, которому удовлетворяет параметр порядка:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} - \alpha\Psi(x) + \beta\Psi^3(x) = 0.$$

Это уравнение носит название уравнения Гинзбурга – Ландау. В отличие от обычных уравнений квантовой механики оно нелинейно. Найти аналитическое решение такого уравнения не представляется возможным. Поэтому проведем оценку характера решения для точек, удаленных от границы. Введем промежуточную переменную

$$f = \frac{\Psi(x)}{\Psi_\infty},$$

где Ψ_∞ - значение параметра порядка в точке, бесконечно удаленной от границы, $\Psi_\infty^2 = n_s$. Выразив параметр порядка через новую безразмерную переменную, а также учитывая связь между параметрами α и β мы получим:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{d^2 f(x)}{dx^2} - \alpha \cdot f(x) + \alpha \cdot f^3(x) = 0$$

Вдали от границы $f(x) \rightarrow 1$, поэтому удобно ввести еще одну переменную $g(x) = 1 - f(x) \rightarrow 0$. Заменим $f(x)$ на $g(x)$ в последнем уравнении и примем во внимание, что при малых значениях последней переменной $(1 - g(x))^3 \approx 1 - 3g(x)$:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{d^2 g(x)}{dx^2} - 2\alpha \cdot g(x) = 0.$$

Решением этого дифференциального уравнения является экспоненциальная функция

$$g(x) \sim e^{-x/\xi}, \text{ где } \xi = \frac{\hbar}{2\sqrt{\alpha \cdot m}}.$$

Полученное решение показывает, что волновая функция может значительно меняться на расстояниях порядка ξ . Такое характерное расстояние мы раньше определили, как длина когерентности в сверхпроводнике. Воспользуемся ранее полученным выражением для параметра α и запишем соотношение для длины когерентности:

$$\xi = \frac{\hbar}{2\mu_0 e \lambda H_c}.$$

Отсюда следует важное соотношение, позволяющее определить величину термодинамического критического поля ($\hbar = \hbar/(2\pi)$):

$$H_c = \frac{\hbar}{2e} \cdot \frac{1}{2\pi\mu_0 \lambda \xi} = \frac{\Phi_0}{2\pi\mu_0 \lambda \xi}$$

Интересно сравнить величину термодинамического критического магнитного поля с полученными ранее оценками для 1-го и 2-го критических полей сверхпроводников 2-го рода:

$$H_{c1} = \frac{\Phi_0}{\pi \lambda^2 \mu_0}; \quad H_{c2} = \frac{\Phi_0}{2\pi \xi^2 \mu_0}$$

Учитывая, что для классических сверхпроводников 2-го рода параметр Гинзбурга – Ландау $\kappa = \frac{\lambda}{\xi} \gg 1$, мы можем найти взаимные соотношения между различными критическими полями:

$$H_{c1} \ll H_c \ll H_{c2}.$$

Таким образом оказывается, что сверхпроводники 2-го рода не переходят в нормальное состояние даже тогда, когда внешнее магнитное поле существенно превышает термодинамическое критическое поле. Это становится возможным из-за того, что при превышении уровня H_{c1} магнитное поле начинает проникать в объем таких сверхпроводников и условия, при которых выводилось уравнение Гинзбурга – Ландау, частично нарушаются.

7. Микроскопическая теория сверхпроводимости.

7.1 Общие свойства квантовых жидкостей.

Термином «квантовые жидкости» обычно называют жидкости, поведение которых в значительной степени определяется законами квантовой механики. Типичным представителем такой жидкости является, например, жидкий гелий при низких температурах. В этих условиях жидкий гелий переходит в так называемое сверхтекучее состояние и многие его свойства изменяются коренным образом. Для понимания явления сверхпроводимости представления о свойствах квантовых жидкостей являются очень полезными, поскольку поведение электронов проводимости в металле при сверхнизких температурах аналогично поведению молекул квантовой жидкости.

Для лучшего понимания законов, характеризующих поведение квантовых жидкостей необходимо рассмотреть два принципиально различных класса микроскопических частиц. К первому из них относятся частицы, обладающие полуцелым спином, то есть частицы, спин которых равен $s = \frac{\hbar}{2}, \frac{3\hbar}{2}, \dots$, где \hbar - постоянная Планка ($\hbar = 1.054589 \cdot 10^{-34}$ Дж·с).

Такие частицы называются фермионами. К ним относятся многие элементарные частицы, такие, как электроны, протоны, нейтроны, а также многие атомы, в частности He^3 , дейтерий H^2 , изотоп лития Li^6 и многие другие. Поведение таких частиц описывается теорией, которую обычно называют «статистикой Ферми» по имени итальянского физика Энрико Ферми, заложившего ее основы. Базовым принципом статистики Ферми является принцип запрета Паули, который постулирует, что в одном квантовом состоянии может находиться только один фермион. Благодаря этому принципу, например, электроны в атоме вращаются вокруг ядра на разных орбитах и имеют различные энергии, несмотря на то, что общие принципы классической термодинамики требуют, чтобы каждая частица занимала наиболее низкое энергетическое состояние. Вся классическая теория строения атомов построена именно на принципах статистики Ферми.

Ко второму классу частиц относятся частицы с целым спином, то есть спином, кратным постоянной Планка \hbar : $s = 0, \hbar, 2\hbar, \dots$. Поведение таких частиц, обычно называемых «бозонами», подчиняется теории, известной как «статистика Бозе – Эйнштейна». К таким частицам относятся некоторые элементарные частицы (π^0 – мезон, K^0 – мезон), фотоны, атомы водорода, гелия-4, дейтроны (ядра дейтерия), и многие другие. Основной особенностью поведения бозонов является то, что они не подчиняются принципу Паули, и в одном квантовом состоянии может находиться сколь угодно большое количество частиц. Ярким примером основного принципа поведения коллектива бозонов является работа лазеров. В активном элементе лазера один первичный фотон порождает лавину частиц, каждая из которых по всем своим свойствам (квантовым характеристикам) абсолютно идентична первичному фотону. В результате возникновения этой лавины рождается очень короткий, очень мощный монохроматический световой импульс.

Наиболее типичным представителем квантовых жидкостей является жидкий гелий-4. В ядре атома этого изотопа гелия находятся два протона и два нейтрона. Кроме того, электронная оболочка атома состоит из двух электронов. Таким образом, независимо от взаимной ориентации спинов составляющих частиц, полный спин атома He^4 - целый (а в действительности он равен нулю). При понижении температуры жидкости молекулы стремятся занять наиболее низкий энергетический уровень. Наконец, если температура достигает достаточно низкого уровня, энергия теплового возбуждения атомов оказывается меньше, чем расстояния между двумя соседними энергетическими уровнями. В этой ситуации, в соответствии с базовыми принципами классической термодинамики, все молекулы жидкости переходят на один, наиболее низкий энергетический уровень. Такой переход называют Бозе – конденсацией, а саму образующуюся жидкость – Бозе – конденсатом. Находясь в наиболее низком энергетическом состоянии, атомы квантовой жидкости перестают взаимодействовать между собой, так как любое взаимодействие между двумя частицами неизбежно сопровождается изменением их энергий. Если энергии меняются, то одна из взаимодействующих частиц свою энергию увеличивает, а другая, в силу закона сохранения энергии – уменьшает. Но поскольку все частицы находятся на самом низком энергетическом уровне, то уменьшение энергии частицы невозможно, а следовательно, невозможным оказывается и само взаимодействие. В этих обстоятельствах возникает новое состояние жидкости, называемое состоянием сверхтекучести. В этом состоянии практически отсутствует внутреннее трение при движении жидкости и она свободно, без сопротивления протекает через сколь угодно малые отверстия. Более того, оказывается, что сверхпроводящая жидкость, налитая в стакан, практически мгновенно вытекает из него, поднимаясь по внутренним, а затем опускаясь по внешним стенкам стакана. Происходит это за счет образования мономолекулярного слоя жидкости на поверхности стенок стакана, который, несмотря на крайне малое поперечное сечение, способен пропустить большие потоки жидкости. В состоянии сверхтекучести жидкость обладает аномально высокой теплопроводностью, сравнимой с теплопроводностью металлов и многими другими необычными свойствами. Явление сверхтекучести было открыто в 1938 году выдающимся советским физиком Петром Леонидовичем Капицей, за что он получил Нобелевскую премию по физике в 1987 году. Одним из важных свойств сверхтекучих жидкостей является то, что переход из нормального в сверхтекучее состояние и обратно происходит при некотором пороговом значении температуры (критической температуре), которое для He^4 составляет величину $T_{\text{кр}} = 2.176 \text{ }^\circ\text{K}$.

Удивительными свойствами обладает другая квантовая жидкость, образованная изотопом гелия He^3 . Ядро этого изотопа содержит только три нуклона, в результате чего суммарный спин атома равен $\frac{\hbar}{2}$, то есть атом He^3 является фермионом и жидкая фаза этого вещества не может быть сверхтекучей. Первоначально экспериментальные исследования подтверждали, это обстоятельство. Однако в 1976 году американские физики Д.Ли, Д.Ошерофф, Р.Ричардсон обнаружили, что при понижении температуры до сверхнизкого уровня в $0.002 \text{ }^\circ\text{K}$ жидкий He^3 также переходит в сверхтекучее состояние. Наблюдавшееся явление получило свое объяснение – оказалось, что при сверхнизких температурах атомы He^3 объединяются в молекулы He_2^3 , которые обладают нулевым суммарным спином и, таким образом, могут образовывать сверхтекучую жидкость. Открытие и исследование этого явления было отмечено Нобелевской премией по физике за 1996 год.

Термин «квантовая жидкость» применяется не только к жидкостям, но и к другим коллективам частиц, обладающими свойствами, характерными для Бозе – конденсата. В частности, в 1995 году явление сверхтекучести было обнаружено в разряженных газах, состоящих из атомов щелочных металлов (Rb^{87} , Na^{23} , Li^6), а также в водороде при предельно низких температурах порядка 10^{-7} °К. А в 2004 году появились первые сообщения об открытии состояния сверхтекучести в твердом (!) гелии при температуре 0.25 °К и давлении порядка 25 атмосфер. Правда следует заметить, что эти сообщения (по состоянию на конец 2006 года) не получили однозначной интерпретации и надежного экспериментального подтверждения, хотя и находятся в полном согласии с предсказаниями теории.

В качестве квантовой жидкости можно рассматривать и электронный газ в металле при низких температурах. В принципе это обстоятельство могло бы объяснить причины возникновения сверхпроводимости. Однако здесь необходимо отдавать себе отчет в том, что электроны сами по себе, обладая полужелым спином, являются фермионами и, таким образом, не могут образовывать сверхтекучий Бозе - конденсат. Именно по этой причине явление сверхпроводимости получило свое объяснение значительно позже создания теории сверхтекучести несмотря на очевидную схожесть этих двух явлений.

7.2 Квантовые свойства электронов проводимости в металле.

Для описания многих важных физических свойств металлов применяется модель свободных электронов. В рамках этой модели предполагается, что электроны проводимости металла слабо взаимодействуют как друг с другом, так и с узлами кристаллической решетки. В целом поведение совокупности электронов проводимости предполагается аналогичным поведению молекул газа. Взаимодействие между ними сводится к относительно редким столкновениям, в результате которых может изменяться скорость и энергия частиц. В промежутке между столкновениями электроны движутся с постоянной скоростью, как свободная частица. Последнее обстоятельство выглядит удивительным, поскольку это движение проходит внутри плотно упакованной ионной решетки. Однако детальный анализ показывает, что такое допущение оправдано благодаря следующим обстоятельствам: во-первых, масса ионов значительно превосходит массу электронов, а следовательно при рассеянии электронов на узлах кристаллической решетки может измениться только направление скорости электрона, но не ее абсолютная величина и, соответственно, энергия; во-вторых, благодаря строгой периодичности кристаллической решетки оказывается, что электроны могут перемещаться вдоль некоторых выделенных направлений, как по туннелям, практически не встречая сопротивления со стороны ионов, расположенных в узлах решетки.

Рассмотрим возможные энергетические состояния электронов проводимости в металле. Для этой цели нам необходимо будет воспользоваться аппаратом квантовой механики, которая описывает поведение частиц с помощью представлений о волновом характере их движения. Положение частицы в пространстве в квантовой механике описывается с помощью волновой функции Ψ , зависящей, вообще говоря, от координат частицы и от времени. Физический смысл имеет только квадрат модуля этой функции, который равен плотности вероятности, с которой частица может быть обнаружена в заданной точке пространства. Волновая функция частицы удовлетворяет уравнению Шредингера, которое

в квантовой механике является аналогом уравнений движения Ньютона. Стационарное, не зависящее от времени уравнение Шредингера имеет вид:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\vec{r}) + (U(\vec{r}) - E) \Psi(\vec{r}) = 0 \quad (7.1)$$

В этом уравнении функция $U(\vec{r})$ задает потенциальную энергию частицы в пространстве, E - это полная энергия частицы. Дифференциальный оператор $-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\vec{r})$ определяет кинетическую энергии, а оператор $i\hbar \vec{\nabla} \Psi(\vec{r})$ - импульс частицы. Воспользуемся уравнением Шредингера для определения возможных значений энергии свободного электрона. Для простоты будем считать, что проводник, внутри которого может перемещаться электрон, имеет форму куба со стороной равной $2L$. Поскольку мы считаем, что электрон не взаимодействует с решеткой, то его потенциальная энергия внутри проводника всюду равна нулю. Учитывая, что лапласиан ∇^2 в декартовой системе координат представляет собой сумму вторых производных по координатам, мы можем переписать уравнение Шредингера (7.1) в виде:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \cdot \Psi = 0 \quad (7.2)$$

Электрон проводимости не может выйти за пределы проводника, это означает, что вероятность обнаружить электрон стремится к нулю при его приближении к границе проводника:

$$\Psi(x = \pm L) = \Psi(y = \pm L) = \Psi(z = \pm L) = 0.$$

При таких условиях решением уравнения Шредингера (7.2) будет волновая функция:

$$\Psi(x, y, z) = A \cdot \sin(k_x \cdot x) \cdot \sin(k_y \cdot y) \cdot \sin(k_z \cdot z),$$

причем параметры k_x , k_y , k_z могут принимать только дискретные значения:

$$k_x = 0, \frac{2\pi}{L}, \frac{4\pi}{L}, \dots; \quad k_y = 0, \frac{2\pi}{L}, \frac{4\pi}{L}, \dots; \quad k_z = 0, \frac{2\pi}{L}, \frac{4\pi}{L}, \dots$$

Соответственно, только дискретные значения может принимать и энергия электронов:

$$E = \frac{\pi \hbar^2}{mL} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2), \quad n_x, n_y, n_z = 1, 2, 3, \dots$$

В рассмотренном случае полная энергия электронов полностью совпадает с их кинетической энергией. Поскольку величина L в полученной формуле характеризует макроскопические размеры проводника, то разница между энергиями соседних квантовых

уровней, характеризующееся величиной $\Delta E \sim \frac{\pi \hbar^2}{mL}$, будет очень маленькой, и сам спектр может рассматриваться как практически непрерывный, хотя количество квантовых состояний в любом фиксированном энергетическом диапазоне при этом остается конечным. Электроны проводимости в металле являются фермионами, поэтому на каждом квантовом уровне может находиться только один электрон. В результате при нулевой температуре оказываются заполненными все состояния с наиболее низкими энергиями вплоть до некоторого максимального уровня. Эта верхняя граница энергетического спектра электронов называется энергией Ферми и обозначается E_F . При нулевой температуре все квантовые состояния ниже E_F заполнены, а все квантовые состояния выше E_F пусты. При температуре выше нулевой резкая граница в энергетическом спектре размывается (Рис. 7.1). Ширина переходной зоны зависит от температуры и приблизительно может быть оценена как $\Delta E \approx kT$, где k – постоянная Больцмана.

Каждому значению энергии электрона соответствует импульс, по абсолютной величине равный $P = \sqrt{2Em}$ и направленный произвольно. Для характеристики импульсов электронов часто используют трехмерную диаграмму в импульсном пространстве. При нулевой температуре все электроны на такой диаграмме будут расположены внутри сферы, радиус которой соответствует импульсу электронов с максимально возможной энергией E_F . Этот радиус в импульсном пространстве называется импульсом Ферми и обозначается P_F . При ненулевой температуре резко выраженная граница импульсной сферы размывается и часть электронов выходят за ее пределы.

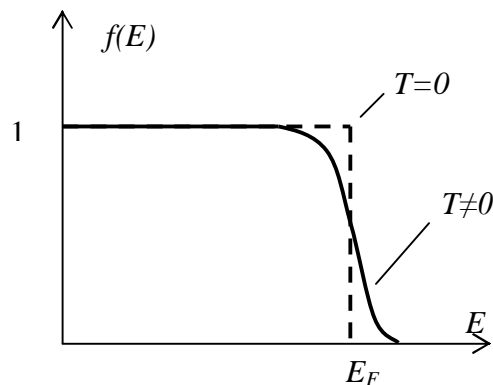


Рис. 7.1. Вероятность заполнения энергетических уровней при нулевой и ненулевой температурах.

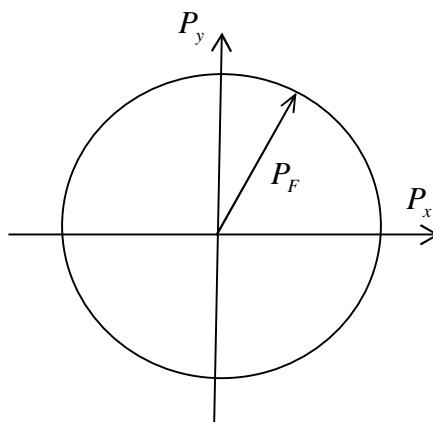


Рис. 7.2. Импульсная сфера Ферми.

Оценки показывают, что типичное значение энергии Ферми в металлах имеет величину порядка 10^{-18} Дж, что соответствует температуре около 50 000 °К. Из этой оценки становится понятным, что при температурах металла порядка нескольких градусов Кельвина происходит лишь очень незначительное размытие границ в распределениях, показанных на рисунках Рис.7.1 и Рис.7.2. И лишь очень малая часть электронов проводимости выходит за пределы уровней Ферми. Типичная скорость электронов, энергия которых равна энергии Ферми E_F составляет величину порядка $V_F \approx 10^6$ м/с.

7.3. Квантовые свойства ионной решетки металлов.

Важную роль в понимании сверхпроводимости играют физические явления, происходящие в кристаллической решетке сверхпроводника. Классическая теория твердого тела рассматривает кристалл как периодическую решетку, в узлах которой расположены либо нейтральные атомы либо положительно заряженные ионы, причем второй тип решетки характерен для металлов. Основными силами взаимодействия между ионами являются силы кулоновского отталкивания. В целом кристалл оказывается электронейтральным за счет электронного газа, в который погружена кристаллическая решетка. Типичная концентрация свободных электронов (а соответственно и ионов) в кристалле металлов имеет порядок $N = 10^{28} \div 10^{29}$ 1/м³.

Каждый ион совершает тепловые колебания вокруг положения равновесия. Из-за сильного взаимодействия между соседними ионами колебания являются коллективными. Происходят они даже при нулевой температуре, в этом случае энергия, соответствующая колебаниям является минимально возможной. При возникновении возмущения в кристаллической решетки оно начинает распространяться по кристаллу со скоростью звука. Возникающие волны описываются в квантовой механике с помощью представлений о фононах – квазичастицах, которые переносят энергию и импульс из одной точки кристалла в другую. Эти квазичастицы могут рождаться кристаллической решеткой, поглощаться ей, рассеиваться с изменением энергии и импульса, то есть ведут себя как реальные частицы. Стандартные правила квантовой механики позволяют связать

энергию фонона с частотой колебаний, а также определить длину волны, соответствующую фонону:

$$E_{\phi} = \hbar \cdot \omega_{\phi}; \quad \lambda = \frac{2\pi}{\omega} \cdot V_{\text{зв}}$$

Очевидно, что длина волны фонона имеет ограничение снизу – она, в частности, не может быть меньше, чем расстояние между ионами кристаллической решетки. Это, в свою очередь означает, что существует максимально возможная энергия фононов в кристалле. Эта максимальная энергия называется энергией Дебая, она имеет очень важное значение при построении теории сверхпроводимости. Температура, которая соответствует энергии Дебая называется обозначается ϑ_D и называется температурой Дебая. Для большинства металлов эта температура находится в пределах $200 < \vartheta_D < 500$ °К. Физический смысл температуры Дебая заключается в том, что при температуре ниже ϑ_D физические эффекты в кристаллической решетке описываются преимущественно законами квантовой механики.

Представляет интерес определить зависимость энергии Дебая от массы ионов. Простую оценку этой зависимости дает классическая теория гармонического осциллятора. При смещении иона из положения равновесия возникает сила, стремящаяся вернуть его обратно. В первом приближении (и при малых смещениях) эта сила пропорциональна смещению x :

$$f = -K \cdot x, \quad (7.3)$$

где K - коэффициент пропорциональности, аналогичный коэффициенту упругости. Под влиянием возникающей силы возникают упругие колебания иона, которые описываются дифференциальным уравнением, которое получается из предыдущего равенства путем подстановки выражения для силы из закона Ньютона $f = M \frac{d^2 x}{dt^2}$:

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + K \cdot x = 0 \text{ или}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot x = 0 \quad (7.4)$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}}$.

Решением этого уравнения является гармоническая функция

$$x = X_m \sin(\omega_0 \cdot t).$$

Важным следствием полученного решения является то, что характерные частоты колебаний решетки обратно пропорциональны квадратному корню из массы иона. А

поскольку энергия Дебая пропорциональна максимально возможной частоте колебаний в кристаллической решетке, то и эта температура зависит от массы ионов по тому же закону:

$$\vartheta_D \sim 1/\sqrt{M}$$

7.4. Экспериментальные данные, важные для построения микроскопической теории сверхпроводимости.

При создании и развитии микроскопической теории сверхпроводимости большую роль сыграла экспериментальная информация о самых разнообразных свойствах металлов при низких температурах. Особенно следует выделить исследования:

- структуры кристаллической решетки сверхпроводников;
- изотопического эффекта;
- коэффициента отражения электромагнитного излучения от поверхности сверхпроводника.

Именно эти исследования дали результаты, определившие в значительной мере понимание микроскопических процессов в сверхпроводниках.

7.4.1. Кристаллографические эксперименты.

Исследование кристаллической структуры сверхпроводников с помощью рентгеноскопического анализа показали, что никакой перестройки кристаллической решетки при переходе металлического образца из нормального состояния в сверхпроводящее и обратно не происходит. Этот “отрицательный” результат показал, что природу сверхпроводимости нужно искать не в изменении свойств кристаллической решетки, а в изменении поведения электронного газа в металлах при низких температурах.

7.4.2 Изотопический эффект.

Большое значение для понимания природы сверхпроводимости сыграло открытие в 1950 г. Максвеллом и независимо от него Рейнольдсом, Серинем, Райтом и Незбиттом изотопического эффекта. Они обнаружили, что образцы, изготовленные из различных изотопов ртути обладают слегка различающимися температурами перехода в сверхпроводящее состояние. При этом оказалось, что эта критическая температура обратно пропорциональна корню квадратному из массы изотопа:

$$T_{\text{крит}} \sim \frac{1}{\sqrt{M}} \quad M - \text{масса элемента} \quad (7.5)$$

Обнаруженная зависимость критической температуры сверхпроводника от массы изотопа получила название **изотопического эффекта**. Характер полученной зависимости наводит на мысли о том, что свойства сверхпроводников все же сильно зависят от свойств ионной решетки и, в первую очередь, от максимальной энергии распространяющихся в ней фононов. Как отмечалось выше (п.7.3) именно эта энергия имеет зависимость, характерную для изотопического эффекта (7.5).

Средний атомный вес	199.7	200.7	202.2	203.4
Температура перехода, °K	4.161	4.150	4.143	4.126

Таб. 7.1. Экспериментальная зависимость критической температуры ртути от массы ее изотопов.

В дальнейшем был исследован изотопический эффект и для других металлов. Оказалось, что зависимость вида (7.5) характерна далеко не для всех сверхпроводников. Если изотопический эффект характеризовать зависимостью

$$T_{\text{крит}} \sim \frac{1}{M^{\beta}},$$

то показатель степени β приблизительно равен 0.5 для ртути, титана, свинца, некоторых других металлов. В то же время для осмия, например, он равен 0.2. Для рутения оказалось, что критическая температура вообще не зависит от массы изотопа, а в случае урана эта температура не уменьшается с ростом массы, а увеличивается.

Элемент	Hg	Sn	Pb	Cd	Ti	Mo	Os	Ru	U
β	0.50	0.47	0.48	0.50	0.50	0.33	0.20	0.0	-2.2

Таб. 7.1. Экспериментальные зависимости критической температуры некоторых

сверхпроводников от массы их изотопов. $\left(T_{\text{крит}} \sim \frac{1}{M^{\beta}} \right)$.

Несмотря на существенные различия в поведении критической температуры у различных сверхпроводников, именно изотопический эффект для ртути послужил толчком для улучшения понимания влияния кристаллической решетки на возникновение сверхпроводимости.

7.4.3. Коэффициент отражения электромагнитного излучения от поверхности сверхпроводника.

Поскольку сверхпроводник обладает нулевым электрическим сопротивлением, то логично ожидать, что электромагнитная волна будет полностью отражаться от его поверхности. И действительно, экспериментальные исследования коэффициента отражения низкочастотного излучения от поверхности металлов показали, что он заметно увеличивается при переходе материала из нормального состояния в сверхпроводящее. В то же время эксперименты показывали, что обычное видимое излучение – свет – никак не реагирует на такой переход. Более подробные исследования, проведенные в области микроволнового и далекого инфракрасного излучения показали, что в спектре частот существует резкая граница, ниже которой коэффициент отражения сильно отличается для нормального и сверхпроводящего состояний, а выше имеет одинаковые значения для обоих состояний. Типичное значение этой границы составляет $1 \cdot 10^{11} \div 5 \cdot 10^{11}$ Герц. Для сравнения – частота наиболее низкочастотного, красного, видимого излучения составляет $4 \cdot 10^{14}$ Герц, то есть в тысячу раз больше. Типичная зависимость коэффициента отражения от частоты излучения показана на рис. 7.3.

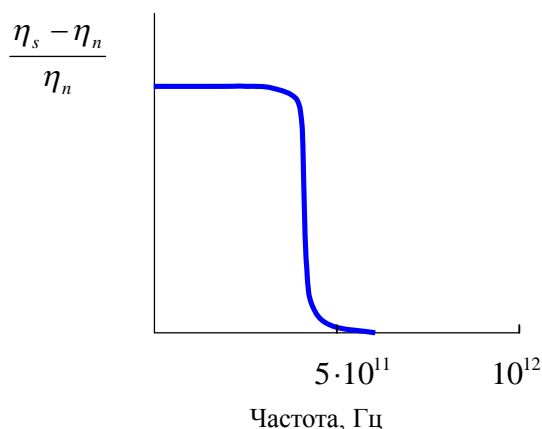


Рис. 7.3. Зависимость коэффициента отражения электромагнитной волны от поверхности сверхпроводника (индия при температуре 1.3 °К) от частоты. (Ричардс, Тинкхам).

Наличие резкой границе в спектре отражение электромагнитной волны прямо указывало на то, что существует некоторая минимальная энергия, которая переводит сверхпроводящие носители тока в нормальные. Это означает, что в энергетическом спектре электронов в сверхпроводнике существует “энергетическая щель”, которая разделяет “нормальные” и “сверхпроводящие” электроны.

7.5. Электрон – фононное взаимодействие.

Анализ экспериментальных результатов прямо указывал на то, существенную роль в возникновении сверхпроводимости играет взаимодействие электронов с ионами

кристаллической решетки металла. В 1950 году английский физик Герберт Фрелих впервые указал на то, что при низких температурах это взаимодействие может привести к возникновению сил притяжения между двумя электронами несмотря на их одинаковый электрический заряд. Это открытие позволило существенно приблизиться к пониманию причин возникновения сверхпроводимости. Причины возникновения притяжения между электронами можно качественно описать следующим образом. Рассмотрим металл при нулевой температуре, в котором перемещается свободный электрон с импульсом \vec{p}_1 . В некоторый момент времени этот электрон наталкивается на узел ионной решетки, в результате чего он меняет свою энергию и импульс. В этот же момент времени в решетке возникают упругие колебания с некоторой частотой ω_0 (см. п.3). Возникновение этих колебаний эквивалентно рождению фонона с энергией $E_\phi = \hbar \cdot \omega_0$ и некоторым импульсом \vec{q} . В соответствии с законом сохранения импульса электрон также изменит свой импульс на величину $\Delta\vec{p} = -\vec{q}$:

$$\vec{p}'_1 = \vec{p}_1 + \Delta\vec{p},$$

где \vec{p}'_1 - импульс электрона после взаимодействия. Поскольку электрон в металле рассматривается как свободный, его полная энергия равна кинетической. Соответственно мы можем записать величину изменения энергии как

$$\Delta E_1 = E'_1 - E_1 = \frac{p'^2_1}{2m} - \frac{p^2_1}{2m}.$$

Возникший в результате рассеяния первого электрона фонон, может быть впоследствии поглощен другим свободным электроном, который в результате также изменит свой импульс и свою энергию. Таким образом фактически возникает взаимодействие между двумя электронами за счет обмена фононом. В конечном итоге подобное взаимодействие между двумя электронами удовлетворяет законам сохранения импульса и энергии, то есть

$$\vec{p}'_2 = \vec{p}_2 - \Delta\vec{p}, \quad \Delta E_2 = E'_2 - E_2 = -\Delta E_1.$$

Наглядно причины возникновения такой силы может быть проиллюстрировано следующим образом. Представим себе, что два человека стоят повернувшись лицом друг к другу и перебрасываются мячом. При каждом броске возникает сила реакции, которая стремится увеличить расстояние между участниками обмена. Эта сила эквивалентна силе отталкивания, и возникает она несмотря на то, что сами по себе два человека непосредственно никак не взаимодействуют между собой. Теперь усложним наш мысленный эксперимент. Представим себе, что те же два человека раскачивают гигантский маятник, закрепленный в некоторой средней точке между ними. Когда груз маятника, двигаясь из центральной точки, пролетает мимо каждого из участников эксперимента, тот подталкивает этот груз по направлению его движения. В результате возникает сила реакции, направленная в противоположную сторону, то есть к центру системы. В результате возникает эффективная сила, которая может интерпретироваться как сила притяжения между двумя экспериментаторами, хотя в действительности она представляет собой особым образом скоррелированное взаимодействие каждого человека

в отдельности с окружающей средой. Интересно отметить, что в последнем эксперименте легко изменить характер действия эффективной силы с притяжения на отталкивание. Для этого достаточно, например, чтобы каждый из участников эксперимента подталкивал маятник в тот же самый момент времени в противоположном направлении. Это различие в условиях эксперимента можно трактовать таким образом, что в первом случае периодическое силовое воздействие на маятник совпадает по фазе с его собственными колебаниями, а во втором случае это же воздействие находится в противофазе.

Рассмотрим теперь более подробно явления, возникающие в процессе электрон – фононного взаимодействия. По общим правилам квантовой механики любое изменение кинетической энергии частицы порождает колебания ее плотности в соответствии со знаменитой формулой Планка

$$\Delta E_1 = \hbar \cdot \omega$$

Очень важно отметить, что частота колебаний электронной плотности ω не обязательно совпадает с частотой колебаний решетки ω_0 , хотя это и влечет за собой несоблюдение закона сохранения энергии при рождении фонона. Однако общие принципы квантовой механики допускают, что в пределах короткого промежутка времени Δt закон сохранения энергии может нарушаться в соответствии с соотношением, известным как принцип неопределенности Гейзенберга:

$$\Delta E \cdot \Delta t \approx \hbar$$

В рассматриваемой ситуации Δt соответствует времени жизни фонона от его рождения при рассеянии первого электрона до его поглощения вторым.

Колебания плотности ионов, как это было показано выше, описывается уравнением упругости. Однако если эти колебания возникают в результате рассеяния электрона, характер движения ионов изменится. Как отмечалось выше, изменение энергии электрона на величину ΔE сопровождается локальным гармоническим изменением плотности электронного газа во времени с частотой $\omega = \Delta E / \hbar$. В результате рождающийся фонон находится во внешнем силовом поле, изменяющемся по закону

$$f = f_m \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Соответственно уравнение движения ионов видоизменяется по сравнению с уравнением, описывающим свободные колебания решетки (3):

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot x = \frac{f}{m} \sin(\omega \cdot t)$$

Легко убедиться, что установившимся решением этого уравнения является гармоническая функция

$$x(t) = \frac{f / m}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega \cdot t). \quad (7.6)$$

Важным свойством полученного выражения является то обстоятельство, что при $\omega_0 < \omega$ коэффициент перед синусоидальной функцией в правой части (7.6) будет отрицательным, то есть колебания электронной плотности и плотности ионов будет происходить в противофазе - положительный заряд, а следом за ним и область, к которой притягивается второй электрон, по существу выталкивается из области избыточного заряда, созданного первым электроном. В такой ситуации итоговое взаимодействие между электронами носит характер отталкивания. И наоборот, если $\omega_0 > \omega$, колебания ионов будут происходить в фазе с колебаниями электронной плотности, то в конечном итоге эффективная сила взаимодействия между двумя электронами будет носить характер силы притяжения. В этом отношении взаимодействие электронов с ионной решеткой имеет сходные свойства с рассмотренным выше примером раскачивания маятника. Таким образом, притяжение между двумя электронами становится возможным только в том случае если передаваемая при взаимодействии энергия меньше энергии фонона, которым обмениваются электроны. Поскольку максимальная энергия фонона ограничена предельным значением – энергией Дебая, то и электрон при рассеянии не может изменить свою энергию на большую величину. Поскольку эта энергия значительно меньше уровня Ферми, то все притягивающиеся электроны могут располагаться только внутри тонкого слоя вблизи этого уровня. Для электронов, энергия которых находящихся внутри самой сферы, на глубине превышающей E_d , всякие взаимодействия с фононами оказываются невозможными из-за действия принципа Паули – свободные, незанятые электронами состояния при низких температурах существуют только за пределами и в тонком поверхностном слое сферы Ферми.

Понять физические причины возникающего притяжения между электронами в металле можно путем простых рассуждений: первый электрон создает в некоторой области металла, в целом электрически нейтральной, избыточный отрицательный электрический заряд. Под действием кулоновского притяжения к этой области начинают смещаться положительно заряженные ионы. В некоторый момент времени эти ионы полностью компенсируют возникшую первоначально флуктуацию электрического заряда. Однако благодаря большой массе и, соответственно, инерционности, ионы в течение некоторого времени продолжают свое движение в сторону первого электрона и в результате в этой области начинает формироваться избыток уже положительного заряда. В свою очередь к области с избыточным положительным зарядом начинает притягиваться второй электрон. В результате создаются условия, при которых между электронами фактически возникают силы взаимодействия, которые могут иметь характер, как сил притяжения, так и отталкивания.

7.6. Куперовские пары.

Возникновение силы притяжения между двумя электронами может привести к возникновению связанного состояния между ними. Впервые на это обстоятельство указал один из авторов микроскопической теории сверхпроводимости Л. Купер в 1956 году. А сами связанные состояния двух электронов получили название *куперовских пар*.

Поскольку каждый электрон обладает полуцелым спином, то куперовская пара будет обладать целым (а в действительности нулевым) спином. Это означает, что совокупность электронных пар в сверхпроводнике образует квантовую жидкость, подчиняющуюся принципам статистики Бозе. В частности, при достаточно низкой температуре эта жидкость может перейти в сверхтекучее состояние и свободно, без каких-либо потерь и взаимодействия с кристаллической решеткой перемещаться внутри сверхпроводника. Поскольку эта квантовая жидкость образована заряженными частицами, то ее перемещение будет сопровождаться возникновением незатухающего электрического тока. Таким образом явление сверхпроводимости получает свое объяснение в рамках микроскопической теории, известной как *теория Бардина – Купера – Шрифера* (теория БКШ).

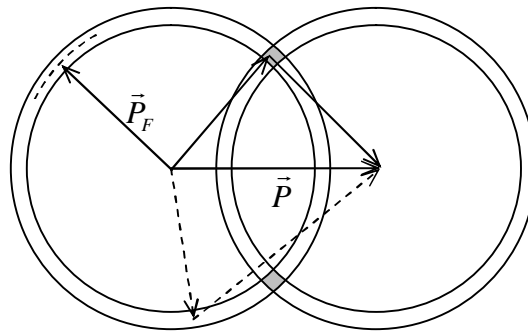


Рис.7.4 . Суммарный импульс куперовской пары. Диаметр импульсной сферы Ферми равен P_F , а толщина слоя, в котором находятся электроны, входящие в куперовские пары Равна удвоенному дебаевскому импульсу $2\Delta p$.

Предположим, что суммарный импульс электронов куперовской пары равен $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{P}$. Как отмечалось выше, длина каждого из векторов \vec{p}_1 и \vec{p}_2 определяется тонким слоем на внешней поверхности импульсной сферы Ферми. Это обстоятельство иллюстрируется на Рис. 7.4. Два сферических слоя с центрами в точках, совпадающих с началом и концом вектора \vec{P} показывают возможные сочетания значений импульсов электронов куперовской пары. Так, сочетание \vec{p}_1 и \vec{p}_2 допустимо, так как длина каждого из этих векторов удовлетворяет условию

$$P_F - \Delta p < p < P_F + \Delta p.$$

В то же время сочетание \vec{p}'_1 и \vec{p}'_2 (вектора отмечены пунктирной линией) недопустимо, так как величина импульса второго электрона в этом сочетании существенно отличается от уровня Ферми P_F и этот электрон, соответственно не может принимать участия в создании куперовской пары. Таким образом точка, в которой сходятся вектора \vec{p}_1 и \vec{p}_2 в течение времени жизни куперовской пары должна оставаться внутри области пересечения двух тонких сферических слоев. Из общих соображений понятно, что вероятность

выполнения этого условия при рассеянии электронов, пропорциональна объему этой области. Этот объем резко увеличивается если центры двух сферических слоев совпадут и оба сферических слоя полностью перекрываются. Именно такое сочетание импульсов соответствует устойчивому состоянию куперовской пары и это означает, что суммарный импульс пары равен нулю:

$$P = 0.$$

Как будет показано в дальнейшем, при пропускании электрического тока по сверхпроводнику этот импульс в принципе может принимать ненулевые значения, однако, во-первых, импульс куперовской пары и в этом случае остается очень малым по величине, и, во-вторых, это состояние, называемое токовым, является метастабильным, то есть оно не является наиболее выгодным с точки зрения минимизации свободной энергии системы.

7.7. Свойства основного состояния сверхпроводника. Энергетическая щель.

Рассмотрим свойства электронов проводимости сверхпроводника, имеющих энергию вблизи уровня Ферми. Для простоты будем предполагать, что температура сверхпроводника равна нулю. В этом случае все электроны, лежащие на поверхности импульсной сферы Ферми, связываются в пары. В этой ситуации для определения их полной энергии необходимо учитывать не только кинетическую, но и потенциальную энергию связи. Обозначим энергию связи двух электронов в куперовской паре 2Δ .

Образование куперовских пар приводит к тому, что полная энергия входящих в них электронов понижается за счет вклада отрицательной потенциальной энергии.

Рассмотрим электрон, кинетическая энергия которого превышает энергию Ферми на величину ε . Такой электрон испытывает силу притяжения со стороны другого электрона, имеющего противоположный по знаку импульс и, следовательно, точно такую же кинетическую энергию ($E_k = \frac{p^2}{2m}$). Суммарная кинетическая энергия такой пары равна

$E_k = 2E_F + 2\varepsilon$. В результате взаимодействия между электронами образуется куперовская пара и полная энергия этой пары понижается на величину 2Δ и становится равной $E = 2E_F + 2\varepsilon - 2\Delta$. Теперь предположим, что по каким-то причинам пара разрушается. В этом случае образуются два электрона с энергиями, равными $E_{1/2} = E_F + \varepsilon - \Delta$, если при распаде энергия поделилась пополам. Если энергия поделилась на неравные части, то у одного из них она будет меньше, чем $E_{1/2}$. Рассмотрим 2 возможных случая:

1. Кинетическая энергия электронов превышает по абсолютной величине энергию связи куперовской пары - $\varepsilon > \Delta$. При таком соотношении энергий после распада пары электроны обладают энергиями, превышающими уровень Ферми. Практически все состояния в этой области энергетического спектра свободны, а значит распаду куперовской пары ничто не препятствует.
2. Кинетическая энергия электронов меньше по абсолютной величине потенциальной энергии связи куперовской пары - $\varepsilon < \Delta$. В этом случае при распаде пары

образуются электроны, энергия по крайней мере одного из которых ниже уровня Ферми. Но практически все квантовые состояния под этим уровнем при низких температурах заняты другими электронами, и, следовательно, сам распад произойти не может – куперовская пара оказывается стабильной.

Таким образом все электроны, имеющие энергию ниже уровня $E_F + \Delta$ связываются в пары, а электроны, имеющие большие энергии, остаются свободными. Поскольку образование пары приводит к автоматическому понижению энергии электрона на величину Δ , то в энергетическом спектре электронов в сверхпроводнике образуется запрещенная зона, в которой они могут находиться только в течение очень короткого промежутка времени, необходимого на образование новой пары.



Рис. 7.5 Схема энергетических уровней электронов в сверхпроводнике.

7.8. Незатухающий ток в сверхпроводниках.

Одним из наиболее важных вопросов теории сверхпроводимости является вопрос о существовании незатухающих токов – почему они возможны и какова их предельная величина. Для ответа на него рассмотрим сначала поведение электронов проводимости в обычном металле. Если в металле отсутствует внешнее электрическое поле, то все электроны находятся в наиболее выгодном энергетическом состоянии – внутри импульсной сферы Ферми. Средняя скорость электронов в этом случае равна нулю. Теперь приложим к проводнику электрическое поле параллельное оси p_x . Под его воздействием электроны начинают равномерно ускоряться и их скорость начинает линейно изменяться во времени:

$$v_e = v_0 + \frac{Ee}{m} t,$$

где E - напряженность электрического поля, e и m - заряд и масса электрона. В импульсном пространстве такой процесс будет сопровождаться равномерным перемещением сферы Ферми вдоль горизонтальной оси. Через некоторое время, равное

Δt , все электроны приобретут дополнительный импульс $\Delta P = \Delta v \cdot m = Ee \cdot \Delta t$ и по прошествии этого времени они будут располагаться внутри импульсной сферы, изображенной на рис. 7.6 пунктирной линией. Такое распределение электронов является энергетически невыгодным, поскольку внутри сферы Ферми, изображенной сплошной линией, появились вакансии и при первой возможности эти вакансии будут заняты электронами, расположенными на фронте перемещающейся вправо импульсной сферы. Именно эти электроны обладают наибольшей избыточной энергией. Условно такой переход из состояния 1 в состояние 1' показан на Рис. 7.6 пунктирной линией. Однако такой переход не может произойти мгновенно. Для того, чтобы электрон поменял свой импульс и энергию, необходимо, чтобы он как минимум один раз рассеялся бы на кристаллической решетке металла. Введем понятие о среднем времени свободного пробега электрона τ , которое проходит между двумя последовательными столкновениями электрона с окружающими ионами. За это время электрон, расположенный на «фронте» сферы Ферми, приобретает дополнительный импульс $\Delta P = eE \cdot \tau$, после чего он рассеивается на ионной решетке и возвращается внутрь сферы. И этот процесс повторяется постоянно - все новые и новые электроны ускоряются и выходят за пределы сферы Ферми, а затем, после рассеяния, возвращаются обратно. Возникает установившееся состояние, при котором реальное импульсное распределение электронов смещено по отношению к сфере Ферми на величину ΔP . Такое смещение означает, что все электроны приобрели среднюю скорость $\Delta v = \frac{e\tau}{m} E$, и, как следствие, возник электрический ток с плотностью

$$J = \frac{e^2 n \tau}{m} E,$$

где n - концентрация электронов проводимости. Нетрудно понять, что мы получили соотношение, характеризующее закон Ома, в котором проводимость металла выражается через микроскопические характеристики вещества:

$$\gamma = \frac{e^2 n \tau}{m}.$$

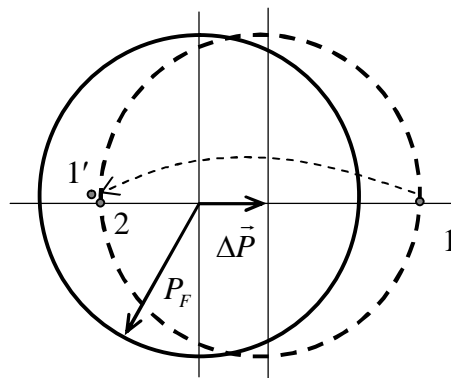


Рис. 7.6. Смещение сферы Ферми в импульсном пространстве при протекании электрического тока в проводнике.

Рассмотрим теперь последствия приложения электрического поля к объему сверхпроводника. Первоначально так же, как и в предыдущем случае, импульсная сфера начнет свое равномерное движение вдоль горизонтальной оси. Однако, в отличие от обычного проводника, переход электрона из состояния 1 в состояние 1' не обязательно является энергетически выгодным. Связано это с тем, что все электроны на поверхности сферы Ферми входят в куперовские пары. В частности, электрон 1 образует пару с электроном 2 (взаимное положение двух электронов пары определяется равенством нулю их общего импульса). Переход же $1 \rightarrow 1'$, сам по себе энергетически выгодный, неизбежно приводит к разрыву куперовской пары, на что необходимо в свою очередь уже затратить энергию, равную 2Δ . Таким образом оказывается возможной ситуация, при которой все электроны приобретут ненулевой импульс, однако образовавшиеся под сферой Ферми вакантные состояния заполняться не будут и по сверхпроводнику потечет незатухающий ток. Определим условия, при которых может существовать такой ток. Для этого приравняем выигрыш в энергии, соответствующий переходу электрона из состояния 1 в состояние 1' энергии, которую необходимо затратить на разрыв куперовской пары:

$$\frac{(P_F + \Delta P)^2}{2m} - \frac{(P_F - \Delta P)^2}{2m} = 2\Delta,$$

откуда следует выражение для максимально возможного (критического) импульса куперовских пар:

$$P_c = 2 \cdot \Delta P = \frac{2m \cdot \Delta}{P_F}$$

Этом импульсу соответствует максимально возможная плотность электрического тока в проводнике:

$$J_c = V_c \cdot 2e \cdot \frac{n}{2} = \frac{P_c \cdot n \cdot e}{2m} = \frac{ne\Delta}{mV_F}$$

Оценим порядок величины критической плотности тока. Для этого подставим в полученное выражение типичные значения входящих в него величин: $n \approx 10^{28} \frac{1}{\text{м}^3}$,

$$\Delta \approx 10^{-4} \text{ эВ} = 1.602 \cdot 10^{-23} \text{ Дж}, V_F \approx 10^6 \frac{\text{м}}{\text{с}}, e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}, m = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}:$$

$$J_c \approx 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{А}}{\text{м}^2}$$

Этот, предельно возможный ток, который может переносить сверхпроводник, называется **током распаривания**. Как видно, плотность тока в сверхпроводниках в принципе может достигать десятков килоампер на квадратный миллиметр, что приблизительно на 4 порядка превышает типичную предельную плотность тока в обычных медных проводниках. Правда, на практике критическая плотность тока в сверхпроводниках обычно значительно ниже плотности тока распаривания, а сверхпроводимость разрушается за счет других физических эффектов.

8. Сверхпроводники 2-го рода в токовом состоянии

8.1. Силы, действующая на вихревую нить

Рассмотрим сверхпроводящую пластину, расположенную во внешнем однородном магнитном поле. Если величина магнитного поля существенно превышает первый критический уровень, то магнитное поле проникает вглубь пластины и образует правильную вихревую решетку подобную той, что приведена на рис. 1. В действительности кванты магнитного потока образуют не квадратную, а треугольную решетку, однако для понимания эффектов, происходящих в сверхпроводнике иногда удобно проигнорировать это обстоятельство, не имеющее в рассматриваемом случае существенного значения.

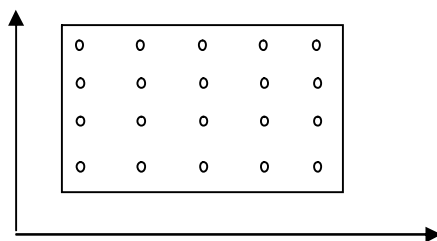


Рис. 8.1. Структура вихревой решетки в идеальном сверхпроводнике 2-го рода без транспортного тока.

Каждый вихрь в решетке можно рассматривать как магнит, расположенный перпендикулярно сверхпроводящей пластине. Очевидно, что такие магниты должны расталкиваться, так как их одноименные полюса ориентированы одинаково. Если мы посмотрим на вихрь, расположенный в середине пластины, то увидим, что все силы, действующие на него со стороны соседей, компенсируют друг друга. Сами вихревые нити в сложившейся ситуации остаются неподвижными, так как отсутствуют причины (силы), которые могли бы инициировать их движение.

Если же по сверхпроводящей пластине пропустить электрический ток в направлении оси y с плотностью J_y , то структура вихревой решетки изменится. Учитывая, что напряженность магнитного поля подчиняется уравнению Максвелла

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J},$$

мы можем сделать определенные заключения о характере деформации решетки. Поскольку вектор плотности электрического тока имеет единственную пространственную компоненту J_y , а магнитное поле не зависит от координаты z , приведенное выше уравнение приобретает простой вид:

$$\frac{dH_z}{dx} = J_y$$

Полученная формула отражает простой факт – напряженность (и индукция) магнитного поля линейно нарастает вдоль оси x . Поскольку индукция магнитного поля может быть представлена как плотность квантов магнитного потока, то очевидно, что плотность вихрей также возрастает вдоль оси x .

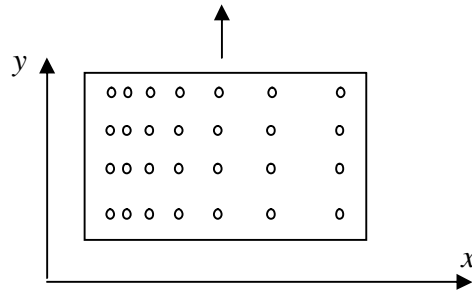


Рис. 8.2. Структура вихревой решетки в идеальном сверхпроводнике 2-го рода с транспортным током.

В образовавшейся решетке силы, действующие на вихревую нить со стороны соседей уже не компенсируются и возникает результирующая сила, направленная в сторону с меньшим по величине магнитным полем. Величину этой силы можно вычислить на основе следующих рассуждений. Полное поле может быть представлено в виде суммы двух составляющих. Первая представляет собой магнитное поле, созданное уединенной вихревой нитью. Это магнитное поле достигает своего максимума в центре вихревой нити и спадает практически до нуля на расстоянии порядка глубины проникновения магнитного поля в сверхпроводник λ . Вторая составляющая соответствует суммарному магнитному полю всех остальных нитей. При достаточно большом уровне внешнего поля расстояние между соседними нитями по порядку величины сравнимо с длиной когерентности ξ , которая у типичных сверхпроводников 2-го рода значительно меньше глубины проникновения λ . В результате поля вихревых нитей многократно перекрываются и создают единое магнитное поле, которое, во-первых существенно превосходит по величине поле уединенной нити, и, во-вторых, изменяется в плоскости сверхпроводящей пластины с той же скоростью, что и внешнее.

Для этого запишем выражение для полной энергии магнитного поля, пронизывающего сверхпроводящую пластину:

$$W_m = \int_V \frac{B^2}{2\mu_0} dV = \int_V \frac{(B + B_0)^2}{2\mu_0} dV = \int_V \frac{B^2}{2\mu_0} dV + \int_V \frac{B_0^2}{2\mu_0} dV + \int_V \frac{B \cdot B_0}{\mu_0} dV.$$

Первые два слагаемые в последнем выражении соответствуют энергии внешнего магнитного поля, проникшего в пластину и полной энергии магнитного поля уединенной вихревой нити. Последнее слагаемое характеризует энергию взаимодействия полного

магнитного поля с одной нитью. Воспользуемся стандартной процедурой определения силы, действующей на выбранный объект, и продифференцируем полученное выражение для энергии по координате, жестко связанной с центром рассматриваемой нити. Первые два слагаемых не зависят от этой координаты и не дадут вклада в выражение для силы. Поэтому мы получим:

:

$$F = -\frac{dW_m}{dx} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{d}{dx} \left(\int_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_0 dV \right).$$

Как уже отмечалось, индукция внешнего магнитного поля \mathbf{B} меняется значительно медленнее, чем поле вихревой нити \mathbf{B}_0 и поэтому при интегрировании его можно в первом приближении считать постоянной величиной:

$$F = -\frac{1}{\mu_0} \frac{d}{dx} \mathbf{B} \cdot \int_V \mathbf{B}_0 dV.$$

Интеграл по объему от индукции магнитного поля, созданного уединенной вихревой нитью можно представить как произведение полного потока этой нити Φ_0 и толщины пластины d :

$$\int_V \mathbf{B}_0 dV = \Phi_0 \cdot d$$

Примем также во внимание, что напряженность полного магнитного поля подчиняется уравнению Максвелла

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J}.$$

Поскольку вектор плотности тока \vec{J} имеет только одну составляющую J_y , а внешнее магнитное поле направлено по оси z , получаем

$$\frac{dH_z}{dx} = -J_y$$

В конечном итоге мы получаем следующее простое выражение для силы, действующей на единицу длины вихревой нити:

$$F_x = \Phi_0 \cdot J_y. \quad (8.1)$$

В векторной форме это соотношение примет вид:

$$\vec{F}' = k \Phi_0 \times \vec{J},$$

где \vec{k} - направление индукции магнитного поля, перпендикулярного плоскости пластины. Домножив последнее выражение на поверхностную плотность вихревых нитей n , мы получаем известное выражение для силы Лоренца, которая характеризует силу, действующую на проводник с током со стороны внешнего магнитного поля. В нашем случае эта же сила

$$\vec{F} = n\vec{F}' = \vec{B} \times \vec{J} \quad (8.2)$$

На первый взгляд может показаться, что в полученном выражении неправильным получается направление действия силы. Ведь мы искали силу, действующую на нити магнитного поля со стороны проводника с током, а по 3-ему закону Ньютона эта сила должна быть противоположна по направлению силе, действующей на проводник со стороны магнитного поля. Однако более подробный анализ показывает, что мы все-таки оказались правы со знаком силы. Рассмотрим более внимательно, что происходит с вихревой нитью. Под действием электромагнитных сил она придет в движение в направлении действия силы. Вследствие целого ряда физических процессов, некоторые из которых мы рассмотрим ниже, такое движение будет сопровождаться трением и, как следствие, диссипацией энергии. Скорость перемещения нити достигнет некоторого постоянного значения лишь тогда, когда сила трения сравняется с электромагнитной силой (а это – следствие 1-го закона Ньютона). В результате оказывается, что через посредство силы трения рассматриваемая нами электромагнитная сила передается на проводник с током и направлена в ту же сторону!

8.2. Течение потока.

Рассмотрим теперь возможные механизмы диссипации энергии, возникающей при движении вихревой нити. Существует целый ряд возможных механизмов. Рассматривая их, предположим для простоты, что вихревая нить образует в сверхпроводнике нормальное ядро цилиндрической формы с радиусом, порядка длины когерентности $r_{эфф} = \sqrt{2}\xi$ (в действительности сама граница такого ядра размыта на расстоянии порядка ξ). Основной причиной, по которой в нормальном ядре возникают потери энергии, является возникновение в ней электрических токов, наведенных движущимся магнитным полем. В соответствии с законом электромагнитной индукции при движении магнитного поля возникает электрическое поле с напряженностью $\vec{E} = \vec{V} \times \vec{B}$. В нормальном ядре вихря это поле порождает электрические токи $\vec{J}_n = \gamma_n \vec{E}$ и соответствующие потери энергии. Существуют и другие механизмы диссипации энергии при движении вихря. В частности, при перемещении нормального ядра на его переднем фронте сверхпроводящие электроны переходят в нормальное состояние, а на заднем фронте, наоборот, нормальные электроны превращаются в сверхпроводящие. Первый из этих двух переходов сопровождается поглощением энергии, причем источником энергии частично выступает сила трения. Второй переход сопровождается разогревом материала сверхпроводника и выделяющаяся энергия безвозвратно теряется, распределяясь по окружающему пространству. Существуют и другие механизмы, приводящие к торможению вихревых нитей, однако не все из них достаточно понятны вплоть до настоящего времени.

Диссипация энергии, возникающая при перемещении вихревых нитей приводит к тому, что у сверхпроводящей пластины появляется электрическое сопротивление, которое называется *сопротивлением течения потока* и обозначается ρ_f . Для оценки величины этого сопротивления рассмотрим потери энергии внутри ядра вихревой нити. Будем считать, что нормальное ядро “наезжает” на линии тока, протекающего в сверхпроводнике и во время прохождения ядра эти линии не успевают перестроиться. Это предположение является вполне допустимым, поскольку каждый элемент с током обладает запасенной энергией за счет наводимого магнитного поля и, отчасти, за счет кинетической энергии электронов. Соответственно токовые линии обладают инерцией и для их изменения необходимо время, которого оказывается недостаточно при типичных скоростях движения вихревых нитей. В таком случае в ядре вихревой нити постоянно выделяется тепловая энергия с удельной мощностью

$$P = \pi \cdot r_{\phi\phi}^2 \cdot n \cdot J^2 \cdot \rho_0.$$

С другой стороны, та же самая удельная мощность может быть вычислена через общие электротехнические характеристики:

$$P = J \cdot E$$

Приравнявая эти два соотношения мы получаем выражение для усредненной напряженности электрического поля в сверхпроводнике:

$$E = 2\pi\xi^2 J\rho_n,$$

где ρ_n - удельное сопротивления материала пластины в нормальном состоянии. Принимая во внимание полученное ранее выражение для величины 2-го критического поля $H_{c2} = \frac{\Phi_0}{2\pi\mu_0\xi^2}$, окончательно получаем:

$$E = \frac{\Phi_0 n}{\mu_0 H_{c2}} J\rho_n = \frac{H}{H_{c2}} \rho_n J. \quad (8.3)$$

Полученное соотношение имеет вид закона Ома в дифференциальной форме. Коэффициент пропорциональности между плотностью тока и напряженностью электрического поля по размерности и смыслу является удельным сопротивлением сверхпроводника в режиме течения потока:

$$\rho_f = \frac{H}{H_{c2}} \rho_n.$$

Таким образом мы получили важное свойство идеальных сверхпроводников 2-го рода: в режиме течения потока они обладают удельным сопротивлением, сравнимым с сопротивлением материала в нормальном состоянии. Учитывая, что типичные

сверхпроводники в нормальном состоянии являются плохими проводниками, в режиме течения потока практическое использование сверхпроводников не имеет смысла.

Интересно отметить, что экспериментальные характеристики реальных сверхпроводников 2-го рода, как правило, не соответствуют приведенным здесь выводам. Обычно реальные сверхпроводящие образцы в токовом состоянии обладают нулевым сопротивлением несмотря на предсказания приведенной здесь теории. Впервые же зависимость удельного сопротивления от внешнего поля, по виду аналогичная полученной нами, наблюдалась в экспериментах Кима, Хэмпстеда, Стрэнда, проведенных в 1965 году на особо чистых образцах соединения Nb-Ta. Причины различия между теоретическими и обычно наблюдаемыми экспериментальными результатами будут рассмотрены далее.

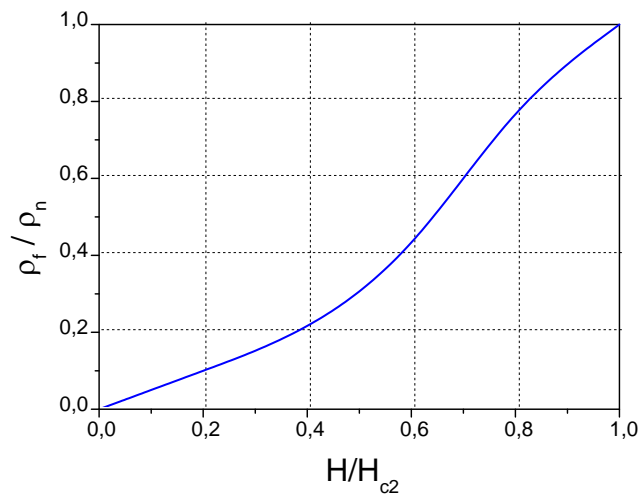


Рис. 8.3. Зависимость удельного сопротивления в особо чистых образцах Nb-Ta от величины магнитного поля. (Ким, Хэмпстед, Стрэнд, 1965 г.)

Интересно оценить величину скорости перемещения вихревых нитей. Для этого воспользуемся формулой для силы, действующей на вихревую нить (8.1). Если эта нить равномерно перемещается со скоростью v на расстояние Δx , то при своем движении она совершает работу, равную $A' = F' \cdot \Delta x$, выделяемая мощность будет равна $P' = F' \cdot v$. Для того, чтобы найти мощность, выделяемую всеми вихревыми нитями в единице объема, необходимо домножить последнее выражение на концентрацию нитей n :

$$P = F' \cdot v \cdot n = F \cdot v$$

Учитывая выражение для плотности силы (8.2), получим:

$$E \cdot J = B \cdot J \cdot v$$

Принимая во внимание связь между плотностью тока и напряженностью электрического поля в сверхпроводнике (8.3), найдем соотношение, позволяющее оценить максимальные скорости движения вихревых нитей:

$$v = \frac{\rho_0 J}{B_{c2}}$$

Для наиболее часто используемого в технике сверхпроводящего сплава Nb-Ti с процентным соотношением 50% - 50% удельное сопротивление и индукция критического магнитного поля при температуре $T = 4.2^\circ \text{ К}$ соответственно равны: $\rho_0 = 7 \cdot 10^{-5} \text{ Ом} \cdot \text{м}$, $B_{c2} = 12 \text{ Т}$. Соответственно при характерной плотности тока $J = 100 \cdot 10^6 \text{ А/м}^2$ скорость движения нити составит $v \approx 600 \text{ м/с}$. Следует отметить, что на практике резистивное состояние сверхпроводника в такой ситуации поддерживать крайне сложно, так как оно будет сопровождаться тепловыделениями огромной мощности (порядка $P = B \cdot J \cdot v \approx 10 \div 100 \text{ Вт/мм}^3$). Поэтому на практике режим течения потока осуществляется, как правило, при относительно небольших значениях плотности тока и индукции магнитного поля. Соответственно скорость перемещения вихревых нитей обычно намного меньше полученной выше оценки максимального значения.

8.3. Пиннинг.

8.3.1. Энергия вихря в сверхпроводящей пластине с током.

Если изобразить график зависимости энергии уединенного вихря W в сверхпроводящей пластине с током от координаты, то мы увидим монотонно спадающую наклонную линию (пунктирная кривая на рис. 8.4). Сила Лоренца, действующая на вихрь и приводящая его в движение, будет равняться тангенсу угла наклона этой зависимости.

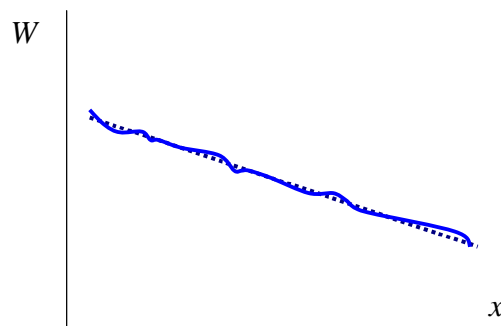


Рис. 8.4. Энергия вихря в сверхпроводящей пластине с током.

- а) идеальный сверхпроводник
- б) сверхпроводник с внутренними дефектами

Однако такой характер будет иметь эта зависимость только для идеального сверхпроводника. На практике в любом сверхпроводящем образце существуют различные микроскопические неоднородности. Такими неоднородностями, в частности, являются границы микрокристаллов, посторонние примеси, дислокации кристаллической решетки и

т.д. Как следствие, плавная зависимость энергии вихря от координаты на графике будет искажаться, причем эти искажения будут носить хаотический, случайный характер. В результате на этой линии появятся локальные максимумы и минимумы. Каждый локальный минимум превращается в центр притяжения вихря. Такие центры называются **центрами пиннинга** (от английского слова pinning - прищипливание, прикрепление). Любой вихрь в процессе своего перемещения по сверхпроводнику рано или поздно захватывается центром пиннинга и останавливается. Таким образом, в неидеальном сверхпроводнике обычно отсутствуют условия для свободного перемещения вихрей. Именно этим обстоятельством объясняется сложность экспериментального наблюдения явления течения потока, описанного выше. А сами сверхпроводники с большим количеством центров пиннинга обычно называют **жесткими сверхпроводниками 2-го рода**, иногда – сверхпроводниками 3-го рода.

8.3.1. Взаимодействие вихря с нормальным включением.

Внутри реального сверхпроводника всегда существуют микроскопические аномалии в структуре материала. К таким аномалиям, в частности, относятся примеси посторонних материалов, в том числе диэлектриков, разрывы, возникшие в результате механической обработки и тому подобное. Такие дефекты порождают микроскопические нормальные зоны внутри сверхпроводника и являются сильными центрами пиннинга. Рассмотрим, как будет взаимодействовать вихрь с таким образованием. Для простоты будем считать, что нормальное включение имеет цилиндрическую форму и расположено параллельно вихрю. Пусть диаметр нормальной зоны d существенно превышает длину когерентности, то есть $d \gg \xi$. Если вихрь расположен вдали от рассматриваемого дефекта, то в его центральной части с радиусом порядка $\sqrt{2}\xi$, находящейся в нормальном состоянии, сосредоточена

положительная свободная энергия, равная $\Delta G = \frac{\mu_0 H_c^2}{2} \cdot 2\pi\xi^2$ на единицу длины вихря

(см. 3.6). Появление этой положительной энергии объясняется тем, что сверхпроводящее состояние энергетически более выгодно по сравнению с нормальным. Если же вихрь проходит через нормальное включение, то эта энергия равна нулю, так как в этой области сверхпроводящее состояние само по себе не существует. Таким образом оказывается, что состояние с вихрем внутри нормального микроскопического включения обладает более низкой свободной энергией, а значит вихрь будет притягиваться к этому дефекту. Оценка силы взаимодействия между ними (на единицу длины) может быть легко найдена, если предположить, что энергия ΔG меняется от максимального уровня до нуля на расстоянии, равном диаметру вихря, то есть:

$$f_l \approx \frac{\mu_0 H_c^2 \xi}{\sqrt{2}}. \quad (8.4)$$

Если цилиндрическая нормальная зона имеет длину h , то полная сила притяжения вихря к нормальному включению равна

$$f \approx \frac{\mu_0 H_c^2 \xi h}{\sqrt{2}}.$$

Для того, чтобы оценить величину этой силы, найдем величину тока, который нужно пропустить через сверхпроводник, для того, чтобы преодолеть эту силу. Сила Лоренца, действующая на единицу длины вихря, равна

$$F = J \cdot \Phi_0$$

Приравнивая ее силе пиннинга (8.4), получим

$$J = \frac{\mu_0 H_c^2 \xi}{\sqrt{2} \Phi_0}.$$

Учитывая, что $H_c = \frac{\Phi_0}{2\pi\mu_0\lambda\xi}$, получаем:

$$J = \frac{H_c}{2\sqrt{2}\pi\lambda}.$$

Возьмем в качестве примера характеристики типичного сверхпроводника 2-го рода NbTi, $H_c \approx 1.3 \cdot 10^5$ А.м, $\lambda \approx 300$ нм, то получим плотность тока порядка $J \approx 50$ кА/мм². Эта величина по порядку величины совпадает с найденной ранее плотностью тока распаривания, который является максимально возможной плотностью тока в сверхпроводнике. Таким образом дефекты в сверхпроводниках могут удерживать вихри настолько сильно, что для их срыва необходимо пропускать предельные токи.

8.4. Теория критического состояния Кима - Андерсона.

Электромагнитные свойства жестких сверхпроводников 2-го рода в значительной степени определяются способностью центров пиннинга удерживать отдельные флюксоиды и целые связки магнитного потока. Рассмотрим процесс проникновения внешнего магнитного поля в сверхпроводящую пластину. До тех пор, пока максимальная напряженность магнитного поля не превышает первого критического значения H_{c1} , оно полностью выталкивается из объема сверхпроводника. Как только напряженность магнитного поля превысит уровень H_{c1} , первые кванты магнитного потока устремятся вглубь пластины. Однако из-за наличия большого количества центров пиннинга они будут захвачены и остановлены в непосредственной близости от границы объекта. Поскольку в приграничном слое магнитное поле меняется от некоторого максимального значения до нуля, то автоматически возникают экранирующие токи, плотность которых подчиняется уравнению Максвелла:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J} \quad (\text{или} \quad \frac{dH_z}{dx} = -J_y \text{ для пластины.})$$

При дальнейшем увеличении магнитного поля могут создаться условия для срыва флюксоидов с центров пиннинга и их дальнейшего продвижения вглубь пластины. Это

произойдет, как только электромагнитная сила, действующая на магнитные вихри, превысит силу, удерживающую их на центрах пиннинга. Плотность тока, при которой происходит срыв флюксоидов, равна критической. Отсюда следует, что любое изменение распределений магнитного поля и плотности тока происходит только при равенстве плотности тока критическому значению, а, следовательно, плотность тока в жестких сверхпроводниках 2-го рода может принимать только три значения – 0 и $\pm J_c$.

Если усредненную объемную плотность сил пиннинга обозначить F_p , то уравнение равновесия, при котором отсутствует течение магнитного потока, и при котором, соответственно, сопротивление у сверхпроводника отсутствует, будет иметь вид:

$$J_c \cdot B = F_p$$

Это уравнение носит название **уравнения критического состояния** для жестких сверхпроводников 2-го рода. Как видно, оно устанавливает связь между величиной магнитного поля и критическим током. Следует, однако, иметь в виду, что величина объемной силы пиннинга F_p в свою очередь может зависеть от уровня магнитного поля.

8.4.1 Модель критического состояния Бина – Лондона

Существуют различные физические модели, которые описывают эту зависимость. Наиболее простой из них является **модель Бина – Лондона**. В ее рамках предполагается, что объемная сила пиннинга пропорциональна индукции магнитного поля.

$$F_p = J_0 \cdot B$$

В этих условиях критический ток оказывается постоянным, не зависящим от величины магнитного поля.

$$J_c = J_0$$

Конечно, это является существенным упрощением реальной картины. Тем не менее, эта модель очень часто используется на практике. Это объясняется следующими обстоятельствами. Во-первых модель Бина – Лондона относительно проста и зачастую позволяет получить адекватное описание процессов, происходящих в жестких сверхпроводниках 2-го рода, без привлечения сложного и громоздкого аппарата вычислительной математики. Во-вторых для многих, хотя и не для всех, жестких сверхпроводников зависимость критического тока от индукции магнитного поля действительно может считаться приближенно постоянной (рис.8.5). Как видно из приведенных на этом рисунке зависимостей, в области маленьких магнитных полей критический ток уменьшается с увеличением магнитного поля. Это довольно естественное поведение критического тока объясняется тем, что для поддержания высокого тока необходимо присутствие большого числа сильных центров пиннинга. А в соответствии с законами статистики, количество таких центров уменьшается с увеличением их способности притягивать вихри. Однако при достижении магнитного поля, сравнимого со вторым критическим, скорость снижения критической плотности тока замедляется, а в некоторых случаях даже наблюдается ее рост. Это явление получило

название **пик-эффекта**. Объясняется оно тем, что при высоких уровнях магнитного поля вихри объединяются в единую жесткую треугольную решетку. В этих условиях немногочисленные сильные центры пиннинга способны удержать большое количество вихрей даже в том случае, если в его окрестности оказался только один флюксоид.

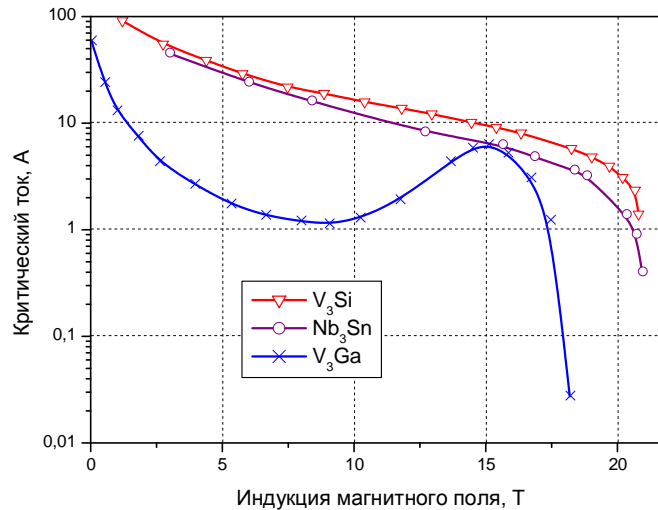


Рис. 8.5. Критические токи некоторых жестких сверхпроводников. Из приведенных данных видно, что при индукциях в диапазоне $B = 1 \div 10$ Т сила пиннинга для них действительно может считаться приблизительно постоянной. Данные приведены для цилиндрических образцов диаметром 0,5 мм.

Типичные значения плотности критического тока в модели Бина – Лондона обычно находятся вблизи уровня $J_0 \sim 10^3$ А/мм² и иногда существенно зависят от типа используемого сверхпроводника.

8.4.2. Модель критического состояния Кима.

Еще одна модель критического состояния сверхпроводников 2-го рода носит название **модели критического состояния Кима**. В ней связь между объемной силой пиннинга и индукцией магнитного поля представляется в виде более сложной зависимости:

$$F_p = \frac{\alpha B}{B + B_0}$$

где α и B_0 - эмпирические коэффициенты. Соответственно критический ток в этой модели зависит от индукции магнитного поля:

$$J_c = \frac{\alpha}{B + B_0}$$

и при типичных значениях параметра $B_0 \ll B_{c2}$ практически обратно пропорционален индукции магнитного поля во всем диапазоне изменения магнитных полей за исключением малых полей $B \approx B_0$ или $B < B_0$. Очевидно, что Модель Кима не описывает свойства сверхпроводников, в которых наблюдается пик-эффект. Тем не менее, она, наряду с моделью Бина – Лондона, также используется в практических расчетах и, как правило, позволяет получить точнее характеризовать свойства сверхпроводников.

Типичные значения параметров модели Кима можно оценить на примере одного из наиболее часто используемых в технике жестких сверхпроводников – Nb_3Sn . Для этого материала были получены такие данные:

$$\begin{aligned}\alpha &= 1.4 \cdot 10^3 \text{ А/мм}^2 \cdot \text{Т}, \\ B_0 &= 0.06 \text{ Т}.\end{aligned}$$

Понятно, что в диапазоне магнитных полей порядка $1 \div 10 \text{ Т}$, где обычно применяются сверхпроводники, параметром модели B_0 можно пренебречь, и практически модель Кима задает обратно-пропорциональную зависимость между критическим током и индукцией магнитного поля.

$$J_c \approx \frac{\alpha}{B}.$$