

М. ТИНКХАМ

ВВЕДЕНИЕ
В СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ



АТОМИЗДАТ

INTERNATIONAL SERIES IN
PURE AND APPLIED PHYSICS

INTRODUCTION TO SUPERCONDUCTIVITY

MICHAEL TINKHAM

*Gordon McKay Professor of Applied Physics
and Professor of Physics
Harvard University*

McGRAW-HILL
BOOK COMPANY
1975

{ 1980 }

М. ТИНҚХАМ

ВВЕДЕНИЕ В СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ

Перевод с английского
В. К. Корнева,
Л. С. Кузьмина
М. Ю. Куприянова,
Л. А. Масловой,
Р. А. Ченцова
Под редакцией
доктора физико-математических наук
К. К. Лихарева

Москва
Атомиздат
1980

УДК 537.312.62

УДК 537.312.62

Тинкхам М. Введение в сверхпроводимость: Пер. с англ. — М.: Атомиздат, 1980. — Пер. изд.: США, 1975. 310 с.

Книга известного американского специалиста М. Тинкхама является лучшим в настоящее время учебником по физическим основам фундаментальной и прикладной сверхпроводимости. Последовательно рассмотрены свойства сверхпроводников, начиная с таких традиционных вопросов, как теория Бардина—Купера—Шриффера, теория Гинзбурга—Ландау, сверхпроводники I и II рода, и кончая такими современными проблемами, как эффект Джозефсона и его применение и флуктуационные эффекты.

Для студентов физических, радиоэлектронных и электротехнических специальностей, а также аспирантов, инженеров и научных работников, имеющих отношение к явлению сверхпроводимости.

Ил. 68. Библиогр. 378.

T 20403—055
034(01)—80 55—80·1704060000

© McGraw-Hill, 1975
© Перевод на русский язык,
Атомиздат, 1980

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Несмотря на то, что на русском языке издано значительное число книг по общей теории сверхпроводимости, до сих пор среди них не было такой, которая могла бы играть роль учебника по основам этой важной области науки. Пожалуй, первой такой книгой является предлагаемая вниманию читателя книга известного американского специалиста профессора Гарвардского университета Майкла Тинкхама. Автор широко известен своими научными работами в области сверхпроводимости и монографиями «Сверхпроводимость» и «Теория групп и квантовая механика».

Научные интересы проф. М. Тинкхама лежат в основном в области электродинамических свойств сверхпроводников. В конце 50-х — начале 60-х годов именно эксперименты по поглощению инфракрасного излучения сверхпроводящими тонкими пленками, проведенные М. Тинкхамом и сотрудниками, явились одним из основных подтверждений только что созданной микроскопической теории БКШ. В середине 60-х годов он первым обращает внимание на важность явления релаксации параметра порядка, в том числе при вязком течении вихрей. В конце 60-х годов возглавляемая автором книги группа активно подключается к исследованию эффекта Джозефсона и созданию на его основе уникальных по чувствительности низкочастотных измерительных приборов — сквидов. В 1972 г. М. Тинкхам публикует совместно с проф. Дж. Кларком ряд статей, положивших основу изучению нового эффекта — разбаланса населенности квазичастичной и квазидырочной ветвей спектра возбуждений. Как оказалось впоследствии, такой разбаланс возникает чуть ли не при любых неравновесных и нелинейных нестационарных процессах в сверхпроводниках. В последние годы группа проф. Тинкхама ведет активные исследования в наиболее горячих точках современной науки о сверхпроводимости, в основном в актуальной области неравновесной сверхпроводимости и нестационарного эффекта Джозефсона.

Указанный выше спектр научных интересов автора настоящей книги не мог не отразиться на ее содержании. В результате электродинамические свойства сверхпроводников, их когерентные свойства, макроскопические квантовые эффекты и флуктуационные явления рассмотрены в ней даже подробнее, чем в известных монографиях, переведенных на русский язык.

Разумеется, в такой пристрастности автора скрывается причина и ряда недостатков книги. Слишком подробно, например, изла-

гается в гл. 3 теория проникновения магнитного поля в массивные сверхпроводники, а также ряд других разделов, которые представляют в настоящее время в основном исторический интерес. Вместе с тем недостаточно последовательно излагаются основы микроскопической теории; впрочем, последний недостаток частично компенсируется наличием на русском языке таких книг, как сборник статей «Теория сверхпроводимости», монографии Дж. Шриффера под тем же названием, а также недавно вышедшего тома Е. М. Лифшица и Л. П. Питаевского из курса теоретической физики Ландау—Лифшица. Кроме этого, изложение основ использования сверхпроводников в сильных магнитах (гл. 5) далеко от современного уровня знаний в этой своеобразной области техники. Не упоминается в книге и о сути основных проблем, возникающих при применении сверхпроводников в линиях электропередачи, электрических машинах и транспортных системах с магнитной подвеской.

Следует, однако, отметить, что автор сумел во многом преодолеть указанную выше творческую пристрастность и организовать книгу достаточно логичным и последовательным образом. Именно это делает ее вполне пригодной в качестве первого чтения по теории сверхпроводимости для всех, кто начинает работу или хотя бы соприкасается с исследованиями в этой увлекательной области.

Книгу переводил коллектив в составе В. К. Корнева (гл. 3), Л. С. Кузьмина (гл. 6), М. Ю. Куприянова (гл. 2, 5), Л. А. Масловой (гл. 1, 4, 8) и Р. А. Ченцова (гл. 7). Перевод не был легким как из-за отсутствия установившейся русской терминологии в ряде новых разделов, так и из-за своеобразного стиля автора, более близкого к лекционному, чем к используемому в научных статьях и монографиях. Мы не сочли возможным радикально менять этот стиль и ограничились чисто литературными поправками и исправлением фактических опечаток (список некоторых из них был любезно прислан нам автором книги). Кроме этого, в перевод внесен ряд примечаний. Они относятся в основном к тем частям книги, которые содержат наиболее свежий материал (гл. 6—8); эти замечания отражают успехи, которые были достигнуты в данных областях уже после выхода в свет английского издания. Этой же цели служит добавление при переводе ссылок на новые оригинальные работы; добавлены также некоторые важные статьи советских авторов более ранних лет.

К. К. Лихарев

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Для меня было приятным сюрпризом известие о том, что по инициативе моего коллеги и друга К. К. Лихарева был выполнен перевод этого учебника на русский язык и что этот перевод будет опубликован, так что книга станет доступной широкому кругу советских читателей. К. К. Лихарев и его сотрудники провели обширные исследования, используя тот же подход, что и я сам, т. е. применение теории Гинзбурга — Ландау к различным конкретным экспериментальным ситуациям. Поэтому я уверен, что их перевод отражает тот дух, в котором была написана книга.

Я надеюсь, что этот перевод будет полезен студентам в Советском Союзе, а также что он в какой-то степени будет способствовать знакомству и улучшению взаимного понимания двух больших групп исследователей явления сверхпроводимости, публикующих свои работы на русском и английском языках.

М. Тинкхам
20 июня 1979 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ К АНГЛИЙСКОМУ ИЗДАНИЮ

Эта книга возникла на основе записей лекций, первоначально написанных для аспирантов Гарвардского университета в течение осеннего семестра 1969 г. Позднее они были переписаны во время моей работы в Кавендишской лаборатории в 1971—1972 гг. и во время повторного чтения курса лекций в Гарварде в 1973 г.

Цель лекций и этой книги — дать на современном уровне введение в увлекательное физическое явление — сверхпроводимость, а также в некоторые из ее возможных применений. Главное внимание уделяется описанию большого числа разнообразных физических явлений и их объяснению возможно более простым способом. Поэтому мы избегали применения термодинамических функций Грина, несмотря на моду на них и несомненную пользу в руках квалифицированных теоретиков. Вместо этого в книге подчеркивается способность феноменологической теории давать ясное понимание физических явлений, в то время как микроскопическая теория часто используется лишь для вычисления коэффициентов в феноменологических уравнениях.

Надеюсь, что упор на феноменологическую теорию сделает изложение более доступным для экспериментаторов, а также дополнит более общее изложение формальных теоретических аспектов сверхпроводимости, сделанное в большинстве книг, вышедших к настоящему времени. Автором руководила надежда, что применение возможно более простых теоретических методов сделает книгу более ценной для студентов старших курсов и инженеров-технологов, имеющих недостаточную подготовку в области теоретической физики.

Книга в некотором смысле представляет собой более современный и значительно расширенный вариант лекций автора, написанных в 1961 г. Однако за прошедшие годы произошло такое бурное развитие излагаемого предмета, что эти заметки к лекциям в действительности были переписаны дважды от начала до конца. В процессе работы автор часто обращался к прекрасной книге Де Жена «Сверхпроводимость металлов и сплавов» и к двухтомному сборнику статей «Сверхпроводимость», вышедшему под редакцией Паркса. Почти все в этой книге в той или иной форме было опубликовано раньше, но некоторые излагаемые проблемы, в особенности флуктуационные эффекты, были разработаны совсем недавно и они поэтому не могли появиться в ранее изданных книгах.

Не было попытки дать исчерпывающую и законченную картину излагаемого предмета: такой подход потребовал в свое время двух томов сборника Паркса, упомянутого выше. Вместо этого автор предпочел познакомить читателя лишь с избранными разделами сверхпроводимости, которые отражают его собственное внимание к электродинамическим свойствам сверхпроводников. В конце концов именно эти свойства придают этой области неповторимый колорит. Ограниченностъ времени при чтении курса лекций наложила жесткие требования на отбор тем и глубину изложения материала.

Книга начинается с вводного обзора, в котором излагается суть явлений, рассматриваемых в книге, и приводятся некоторые факты из истории сверхпроводимости. Мы советуем читателю рассматривать эту главу только как беглое описание, предназначеннное для ознакомления с общими понятиями и языком изложения; более подробные объяснения даются в последующих главах книги. Понятно, что читатель не должен утруждать себя попытками сразу уяснить все результаты, которые в этом разделе излагаются лишь поверхностно.

Вторая глава посвящена теории БКШ — микроскопической теории, созданной Бардиным, Купером и Шриффером для объяснения сверхпроводящего состояния. Изложение этой теории приводится в начале книги, поскольку без привлечения понятий этой теории никакое серьезное обсуждение явления сверхпроводимости невозможно. К сожалению, эта глава имеет наиболее непривлекательный вид для чтения по сравнению с любой другой частью книги из-за теоретического формализма изложения, но это не

должно обескураживать читателя. В последующих главах эти математические подробности используются мало, поэтому ее можно лишь бегло просмотреть для понимания основных идей (которые обобщаются в заключительном разделе главы) и обращаться к ней, только если потребуется более детальное понимание отдельных положений.

С третьей главы мы переходим к феноменологическому уровню изложения, который характерен для остальной части книги. Сначала исследуется влияние нелокальной электродинамики на определение эффективной глубины проникновения магнитного поля в массивный сверхпроводник и тонкую сверхпроводящую пленку; тщательное обсуждение последней темы отражает исторический интерес к ней автора. Затем приводится упрощенная трактовка промежуточного состояния, в котором в присутствии магнитного поля сосуществуют сверхпроводящая и нормальная фазы материала.

В главе 4 излагается теория Гинзбурга — Ландау с тех же феноменологических позиций, как это было сделано самими авторами. Эта теория затем применяется к широкому кругу классических проблем, таких как энергия границы домена, плотность критического тока, квантование флюксоида, критические поля пленок и фольг, верхнее критическое поле H_{c2} , абрикосовское вихревое состояние и поля образования поверхностных зародышей H_{c3} . Идеи, излагаемые в этой главе, лежат в основе трактовки явлений, обсуждаемых в следующих главах, что дополнительно иллюстрирует возможности метода Гинзбурга — Ландау.

В главе 5 более подробно рассматриваются магнитные свойства сверхпроводников II рода. После того как будет рассмотрено равномерное распределение потока, мы сосредоточим свое внимание на обсуждении «крипа» и течения потока под влиянием проходящих («транспортных») токов. Таким образом, мы проникаем в суть явлений, ограничивающих применение сверхпроводников II рода в сильных магнитах. Глава завершается обсуждением факторов, которые следует учитывать при конструировании сверхпроводящих магнитов для создания переменных во времени полей, включая использование для уменьшения потерь скрученных многожильных композитных проводников, с одновременным обеспечением термической устойчивости.

Глава 6 посвящена эффекту Джозефсона и макроскопическим квантовым явлениям. Эти явления представляют собой одни из самых отчетливых и наиболее фундаментальных характеристик сверхпроводимости и, кроме того, лежат в основе работы чувствительных приборов, совершивших переворот в области электромагнитных измерений. В нашем изложении отражены обе эти стороны; в частности, здесь впервые дается подробное описание магнитометров — сквидов.

Хотя много лет считалось, что термодинамические флуктуации в сверхпроводниках являются малыми и поэтому ненаблюдаемыми, появление упомянутых сверхпроводящих приборов сделало

возможным наблюдение таких эффектов при температурах как выше, так и ниже критической. В главе 7 дается обзор этих явлений как для электрической проводимости, так и для диамагнетизма. Например, показано, как флуктуационные эффекты накладывают предел (хотя и огромный по величине) на время существования незатухающих токов при температуре ниже T_c , а также что эти эффекты вызывают появление «предвестников» сверхпроводимости при температуре выше T_c . Поскольку этот раздел сверхпроводимости в основном развился после появления книги Паркса, то наша книга является первой, которая содержит подробное обсуждение этой интересной и новой стороны явления сверхпроводимости.

Заключительная глава посвящена вводному обсуждению трех тем: метода Боголюбова, бесщелевой сверхпроводимости и нестационарного обобщения теории Гинзбурга — Ландау. Эти темы выходят за рамки элементарного феноменологического подхода Гинзбурга — Ландау и в большей степени требуют микроскопического подхода. Тем не менее основные идеи и выводы, касающиеся этих явлений, пришлось изложить при обсуждении проблем, рассмотренных ранее; более того, эти темы составляют основу современных исследований проблемы сверхпроводимости. Именно поэтому нам казалось целесообразным завершить эту книгу кратким обзором таких направлений, где последнее слово еще отнюдь не сказано.

В заключение автор считает приятным долгом поблагодарить рецензентов рукописи за конструктивные замечания; особенно ценным явилось чтение рукописи доктором Ричардом Харрисом. Весьма полезными также оказались замечания студентов, которые пользовались конспектами лекций. При подготовке окончательного варианта рукописи очень ценным для непрерывного продвижения в работе явилось быстрое и тщательное печатание г-жой Патрицией Маккарти. Автор хотел бы поблагодарить также своих многочисленных студентов, коллег и сотрудников, особенно в Беркли, Орсэ, Гарварде и Кембридже, за создание обстановки, в которой его исследования сверхпроводимости явились таким приятным занятием. Хотя невозможно перечислить всех, я не могу окончить это предисловие без высокой оценки многочисленных плодотворных дискуссий на протяжении ряда лет с М. Р. Бизли, Дж. Кларком, П. Де Женом, Р. А. Феррелом и Р. Е. Гловером. Если эта книга поможет получить другим такое же удовольствие от занятия сверхпроводимостью, какое получил я, то ее назначение будет выполнено.

Майкл Тинкхам

МЭРИ,
ДЖЕФРИ
И КРИСТОФЕРУ

Глава 1

ВВОДНЫЙ ОБЗОР

Сверхпроводимость была открыта в 1911 г. в Лейдене Камерлинг-Оннесом уже через три года после того, как он впервые получил жидкый гелий, необходимый для достижения температуры в несколько кельвин. В течение нескольких десятилетий ученым, работающим в этой области, не удавалось достигнуть фундаментального понимания явления сверхпроводимости, но в последние годы выявились его весьма полная физическая картина. Цель этой книги — познакомить читателя с такой картиной.

Начнем эту главу с обзора основных наблюдаемых электродинамических явлений и их первоначального феноменологического описания. Затем вкратце обрисуем развитие более поздних концепций, которые являются основными в современном понимании сверхпроводимости. Такой, хотя и краткий, квазисторический обзор развития проблемы будет полезным для ориентировки читателя в тексте последующих глав, в которых дается более подробное изложение.

1.1. Основные факты

Явление, которое наблюдал Камерлинг-Оннес [1], заключалось в следующем. Электрическое сопротивление различных металлов, таких, как ртуть, свинец и олово, полностью резко исчезало при некоторой критической температуре T_c , своей для каждого металла. Полное исчезновение сопротивления проявляется наиболее наглядно в экспериментах с незатухающими токами в сверхпроводящих кольцах, схема которых показана на рис. 1.1. Okazaloсь, что такие токи протекают без измеримого уменьшения в течение года после их начального возбуждения. С использованием для обнаружения уменьшения магнитного поля, образованного циркулирующим током, ядерного резонанса была установлена нижняя граница характерного времени спадания тока. Она оказалась равной 10^5 годам. Фактически же при некоторых обстоятельствах можно ожидать абсолютного отсутствия изменений тока и магнитного поля за время не менее 10^{10} лет! Такая *идеальная проводимость* традиционно считается первым характерным свойством сверхпроводимости. Это свойство является также необходимым условием для большинства возможных применений сверхпроводимости, например в сильноточных линиях передачи или в мощных магнитах.

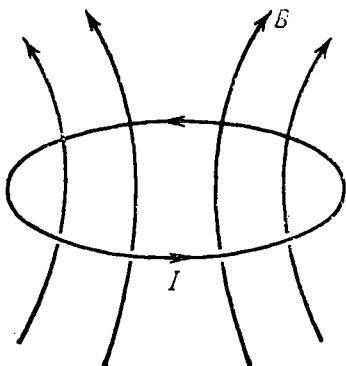


Рис. 1.1. Схематическое изображение эксперимента с неизатухающим током

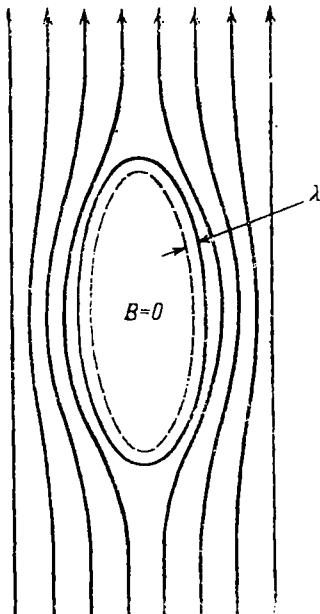


Рис. 1.2. Схематическое изображение выталкивания магнитного потока из внутренней области массивного сверхпроводника. Глубина проникновения λ обычно равна 500 Å

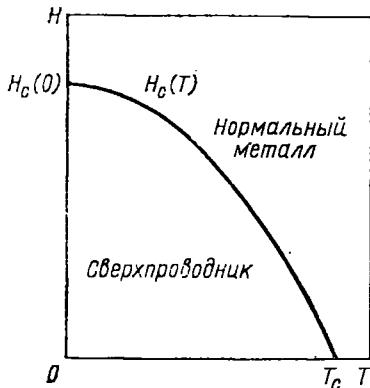
Другим характерным свойством сверхпроводимости является *идеальный диамagnetизм*, открытый в 1933 г. Мейсснером и Окセンфельдом [2]. Они обнаружили не только отсутствие проникновения магнитного поля в сверхпроводник (рис. 1.2), что, как могло показаться, объясняется идеальной проводимостью, но и «выталкивание» поля из первоначально нормального образца (при условии его высокого качества), когда он охлаждается ниже температуры T_c . Это явление, конечно, не могло быть объяснено идеальной проводимостью, которая лишь *удерживала* бы начальный поток внутри образца. Существование обратимого эффекта *Мейсснера* означает, что сверхпроводимость должна разрушаться критическим магнитным полем H_c , которое термодинамически связано с разностью свободных энергий нормального и сверхпроводящего состояний при нулевом поле или с так называемой энергией конденсации сверхпроводящего состояния. Точнее, H_c определяется приравниванием энергии единичного объема $H_c^2/8\pi$, связанной с выталкиванием поля, к энергии конденсации. Таким образом,

$$\frac{H_c^2}{8\pi} = f_n(T) - f_s(T), \quad (1.1)$$

где f_n и f_s — свободные энергии Гельмгольца на единицу объема для двух фаз. Эмпирически было установлено, что зависимость $H_c(T)$ достаточно хорошо аппроксимируется параболическим законом (рис. 1.3):

$$H_c(T) \approx H_c(0) \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right]. \quad (1.2)$$

Рис. 1.3. Температурная зависимость критического поля H_c от температуры T



В то время как переход при T_c для нулевого поля является фазовым переходом второго рода, фазовый переход в присутствии поля представляет собой переход первого рода, при котором происходит изменение термодинамического состояния системы и связанной с этим скрытой теплоты. В действительности диамагнетизм идеален только для массивных образцов, так как поле всегда проникает на конечную глубину λ , равную обычно $\sim 500 \text{ \AA}$.

1.2. Уравнения Лондонов

Указанные два основных электродинамических свойства, которые делают сверхпроводимость таким уникальным явлением, были удачно описаны в 1935 г. братьями Ф. и Х. Лондонами [3] с помощью двух уравнений, определяющих электрическое и магнитное поля:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\Lambda \mathbf{J}_s), \quad (1.3)$$

$$\mathbf{h} = -c \operatorname{rot} (\Lambda \mathbf{J}_s), \quad (1.4)$$

где величина

$$\Lambda = 4\pi \lambda_L^2 / c^2 = n_i / n_s e^2 \quad (1.5)$$

является феноменологическим параметром. Предполагалось, что «удельная плотность сверхпроводящих электронов» n_s изменяется непрерывно от нуля при T_c до предельного значения порядка n при $T \ll T_c$, где n — плотность электронов проводимости. В формуле (1.4) мы использовали удобное обозначение магнитной индукции в микроскопическом масштабе буквой \mathbf{h} , оставив букву \mathbf{B} для обозначения усредненного значения макроскопического поля. Для симметрии обозначений следовало бы использовать таким же образом букву \mathbf{e} для обозначения микроскопического локального

поля E , однако будем делать так только в некоторых необходимых случаях *, для того чтобы не смешивать это обозначение с зарядом электрона e . Условные обозначения обсуждаются в Приложении.

Первое из этих уравнений описывает идеальную проводимость, так как любое электрическое поле ускоряет сверхпроводящие электроны, а не просто поддерживает их скорость при наличии сопротивления, как это происходит в нормальном проводнике. Второе уравнение Лондонов при соединении с уравнением Максвелла

$$\operatorname{rot} h = 4\pi J/c \quad (1.6)$$

приводит к уравнению

$$\nabla^2 h = h/\lambda_L^2. \quad (1.7)$$

Это означает, что магнитное поле экспоненциально уменьшается внутри образца с глубиной проникновения λ_L , т. е. уравнение (1.7) описывает эффект Мейсснера. Таким образом, параметр λ_L в формуле (1.5) может быть определен экспериментально как глубина проникновения поля.

Уравнение (1.3) можно просто, хотя и не строго, вывести, рассматривая воздействие однородного электрического поля на идеальный нормальный проводник, т. е. на газ свободных электронов со средней длиной свободного пробега $l=\infty$. В этом случае $d(mv)/dt = eE$ и $J = nev$, откуда следует формула (1.3). Этот вывод, однако, несправедлив для полей, пространственно неоднородных в области проникновения, для которых пригодны уравнения (1.3) и (1.4). Недостаток вывода заключается в том, что воздействие электрических полей на электронный газ является нелокальным, так что ток в точке определяется электрическим полем, усредненным по области с радиусом $\sim l$ около этой точки. Следовательно, только поля, однородные в области указанного размера, оказывают такое полное воздействие; в частности, проводимость становится бесконечной при $l \rightarrow \infty$ только при полях, заполняющих все пространство. Так как здесь мы имеем дело с границей между областью с наличием поля и без него, то становится ясно, что даже при $l=\infty$ эффективная проводимость остается конечной. Для случая переменного тока это хорошо знакомо

* Фундаментальной причиной асимметрии наших обозначений для E и B являются уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} h = 4\pi J/c, \quad \operatorname{rot} e = -h/c.$$

Сверхпроводники в состоянии равновесия могут иметь ненулевое значение J_s , которое описывается уравнениями Лондонов и приводит к изменению h в масштабе λ . Но в равновесии или хотя бы в стационарном состоянии $h=0$, так что e равно нулю или, по крайней мере, постоянно. Таким образом, использование обоих обозначений e и E не дает преимущества. Различие e и E ценно только при рассмотрении явлений, зависящих от времени, таких, как движение вихрей, переносящих поток, в сверхпроводниках II рода.

мый предельно аномальный скин-эффект, при котором существует конечное поверхностное сопротивление даже при $I \rightarrow \infty$. Если вместо этого рассматривать неустановившийся случай, когда магнитное поле внезапно прикладывается к нормальному металлу с $I = \infty$, то поле будет проникать на глубину, которая увеличивается со временем по закону $t^{1/3}$. Таким образом, нормальная проводимость даже с бесконечной средней длиной свободного пробега электронов не может объяснить непрерывного выталкивания потока. Более того, невозможно объяснить существование незатухающих токов в кольце, если только не предполагать, что рассеяние электронов на поверхности является полностью зеркальным.

Намного более глубоким является квантовое обоснование уравнений Лондонов, данное самим Ф. Лондоном [4] и придающее особое значение использованию вектора-потенциала А. Замечая, что канонический момент p равен $p = mv + eA/c$, и считая, что в отсутствие приложенного поля основное состояние должно обладать (как следует из теоремы* Блоха) нулевым общим моментом, получаем выражение для локальной средней скорости в присутствии поля

$$\langle v_s \rangle = -eA/mc.$$

Это выражение должно быть справедливо, если постулировать, что по некоторой причине волновая функция сверхпроводящих электронов является «жесткой» и сохраняет ту форму, которую она имеет для основного состояния, так что $\langle p \rangle = 0$. Обозначая удельную плотность электронов, участвующих в этом жестком основном состоянии, через n_s , получаем

$$J_s = n_s e \langle v_s \rangle = -n_s e^2 A / mc = -A / \Lambda c. \quad (1.8)$$

Продифференцировав по времени обе части равенства, придем к уравнению (1.3), а взяв ∂t , получим равенство (1.4). Таким образом, формула (1.8) содержит оба уравнения Лондонов в компактной и удобной форме. Соотношение (1.8), очевидно, не является градиентно-инвариантным, поэтому оно будет верно только при специальном выборе калибровки. Эта калибровка, известная как лондоновская, производится так, чтобы выполнялись условия: $\operatorname{div} A = 0$ (или $\operatorname{div} J = 0$); нормальная компонента А на поверхности должна быть связана со сверхтоком через поверхность соотношением (1.8) и $A \rightarrow 0$ внутри массивных образцов.

Приведенные выше рассуждения Лондона оставляют открытым вопрос о действительном значении n_s , но естественный верхний предел для n_s равен полной плотности электронов проводимости n . Если ввести этот предел в формулу (1.5), получим

$$\lambda_L(0) = (mc^2/4\pi ne^2)^{1/2}. \quad (1.9)$$

Выбранное обозначение указывает, что выражение (1.9) является

* Эта знаменитая теорема, по-видимому, так и не была опубликована автором (см. [4, с. 143]).

пределенным значением для λ при $T \rightarrow 0$, так как ожидается, что n_s должно плавно падать до нуля при $T \rightarrow T_c$. Тщательные измерения глубины проникновения для нормальных и сверхпроводящих образцов, выполненные на радиочастотах, показали, что в случае сверхпроводников глубина проникновения λ всегда больше, чем $\lambda_L(0)$, даже при экстраполяции данных к $T=0$. Эту избыточную глубину проникновения можно качественно объяснить в рамках теории Лондона как показатель неполной жесткости волновой функции, так что $n_s < n$; количественное же объяснение требует введения такого дополнительного понятия, как длина когерентности ξ_0 .

1.3. Нелокальная электродинамика Пиппарда

Пиппард ввел [5] понятие длины когерентности, предложив нелокальное обобщение уравнения Лондона (1.8). Это было сделано по аналогии со сделанным Чемберсом * нелокальным обобщением закона Ома при переходе от простой формулы $J(r) = \sigma E(r)$ к более полной:

$$J(r) = \frac{3\sigma}{4\pi} \int \frac{\mathbf{R}[\mathbf{R} \cdot \mathbf{E}(r')] \exp(-R/l)}{R^4} dr',$$

где $\mathbf{R}=r-r'$. Эта формула учитывает тот факт, что ток в точке r зависит от значений $E(r')$ во всех точках с расстояниями $\leq l$ около точки r . Пиппард указал, что сверхпроводящая волновая функция должна иметь подобный характерный размер ξ_0 , который можно оценить, исходя из принципа неопределенности. Так, в явлении, происходящем при $T \leq T_c$, главную роль могут играть только электроны с энергиями $\sim kT_c$, отсчитанными от поверхности Ферми, а эти электроны имеют диапазон значений импульса, равный $\Delta p \approx kT_c/v_F$, где v_F — скорость Ферми. Таким образом, $\Delta x \geq \hbar/\Delta p \approx \hbar v_F/kT_c$, что приводит к характерной длине

$$\xi_0 = a\hbar v_F/kT_c, \quad (1.10)$$

где a — подлежащая определению численная константа порядка единицы. Для типичных материалов, используемых в качестве сверхпроводников, таких, как олово и алюминий, $\xi_0 \gg \lambda_L(0)$. Если ξ_0 представляет собой минимальный размер волновых пакетов, которые могут образовывать сверхпроводящие носители заряда, то со стороны поля $\mathbf{A}(r)$, которое не сохраняет своего максимального значения внутри объема радиуса $\sim \xi_0$ около точки наблюдения, следует ожидать уменьшенного воздействия на сверхток. Таким образом, ξ_0 играет роль, аналогичную средней длине св-

* Этот подход Чемберса обсуждается, например, в книге Дж. Займана «Принципы теории твердого тела» (М., Мир, 1974).

бодного пробега в нелокальной электродинамике нормальных металлов. Конечно, если обычная средняя длина свободного пробега еще меньше ξ_0 , можно ожидать еще меньшего воздействия со стороны приложенного поля.

Облекая эти идеи в конкретную форму, Пиппард предложил заменить выражение (1.8) на выражение вида

$$\mathbf{J}_s(\mathbf{r}) = -\frac{3}{4\pi\xi_0\Lambda c} \int \frac{\mathbf{R}[\mathbf{R} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}')]\exp(-R/\xi)}{R^4} d\mathbf{r}', \quad (1.11)$$

где снова $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, а длина когерентности ξ при наличии рассеяния связана с длиной когерентности для чистого материала выражением вида

$$1/\xi = 1/\xi_0 + 1/l. \quad (1.12)$$

Используя формулу (1.11), Пиппард вычислил глубину проникновения для различных значений ξ_0 и λ_L и сравнил результаты с экспериментальными данными. Он обнаружил [6], что можно согласовать формулу (1.10) с экспериментальными результатами как для алюминия, так и для олова при одном и том же значении параметра a , равном 0,15. Позже мы увидим, что микроскопическая теория Бардина, Купера и Шриффера (теория БКШ) [7] подтверждает полученное Пиппардом выражение, причем численная константа равна 0,18. Для обоих металлов λ значительно больше, чем λ_L , потому что $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ резко уменьшается на расстоянии $\lambda \ll \xi_0$, его воздействие на сверхток ослабляется, и, следовательно, глубина проникновения поля увеличивается. Кроме того, увеличение λ с уменьшением средней длины свободного пробега, предсказанное уравнениями (1.11) и (1.12), согласуется с данными по сплавам олова с индием при различной средней длине свободного пробега. Таким образом, не считая крайне незначительных количественных поправок, уравнение нелокальной электродинамики Пиппарда (1.11) не только соответствует данным эксперимента с достигаемой в них точностью, но и полностью предвосхищает электродинамическое описание, которое было получено на несколько лет позже из микроскопической теории.

1.4. Энергетическая щель и теория БКШ

Следующим важным шагом в развитии понимания сверхпроводников явилось установление существования энергетической щели между основным состоянием и квазичастичным возбуждением системы. Эта идея была выдвинута уже давно Даунтом и Мендельсоном [8] для объяснения отсутствия термоэлектрических эффектов и теоретически постулировалась различными авторами. Однако первое количественное экспериментальное подтверждение этого факта появилось после точных измерений удельной электронной теплоемкости сверхпроводников, выполненных Кораком

и др. [9]. Эти измерения показали, что электронная теплоемкость при температуре, значительно меньшей T_c , подчиняется экспоненциальному закону, так что

$$C_{es} \approx \gamma T_c a \exp(-bT_c/T), \quad (1.13)$$

где удельная электронная теплоемкость нормального состояния $C_{en} = \gamma T$ и $a = 10$, $b = 1,5$ — численные константы. Такая экспоненциальная зависимость означает, что существует минимум энергии возбуждения на одну частицу, приблизительно равный $1,5 kT_c$.

Примерно в то же время впервые были проведены измерения поглощения электромагнитных волн в области частот $\hbar\nu \sim kT_c$. При использовании СВЧ-техники миллиметрового диапазона [10] оказалось возможным достичь указанной области частот для алюминия, который имеет низкую критическую температуру $T_c \approx 1,2$ К и, следовательно, узкую щель, но выполнить измерения при температуре, намного меньшей критической, не удалось. Работая в дальней инфракрасной области, а также в области СВЧ, Гловер и Тинкхам [11] выполнили более полное исследование тонких свинцовых пленок при значениях температуры, намного меньших $T_c \approx 7,2$ К.

Указанные измерения, а также подобные эксперименты с пленками из олова можно вполне убедительно истолковать, если использовать представление об энергетической щели шириной в $(3 \div 4) kT_c$. Этот результат согласовывался бы с результатами измерений теплоемкости, если бы возбуждения всегда происходили парами, как можно было ожидать при их подчинении статистике Ферми. Спектроскопические измерения дают значение E_g минимальной полной энергии, необходимой для создания пары возбуждений, а измерения теплоемкости дают значение такой энергии $E_g/2$ для статистически независимой частицы.

К этому моменту Бардин, Купер и Шриффер [7] создали свою теорию электронных пар, составившую целую эпоху в изучении сверхпроводимости; мы рассмотрим ее в следующей главе. Как показано в теории БКШ, даже слабое взаимодействие типа притяжения между электронами, которое возникает во втором порядке теории возмущений из-за электрон-фононного взаимодействия, вызывает неустойчивость основного ферми-состояния электронного газа. При этом образуются связанные пары электронов, занимающие уровни с равными и противоположно направленными моментами и спинами. Эти так называемые куперовские пары имеют пространственную протяженность порядка ξ_0 и, грубо говоря, представляют собой сверхпроводящие носители заряда, существование которых постулировалось в феноменологических теориях.

Одним из главных результатов теории БКШ было предсказание минимальной энергии $E_g = 2\Delta(T)$, которая требуется для разрушения пары и создания при этом двух квазичастичных возбуждений. Было предсказано, что $\Delta(T)$ увеличивается от нуля при T_c до предельного значения

$$E_g(0) = 2\Delta(0) = 3,528kT_c \quad (1.14)$$

при $T \ll T_c$. Этот результат согласуется с измеренными значениями ширины щели; более того, предсказанная в теории БКШ форма края поглощения для частоты выше $h\nu = E_g$ также находится в количественном согласии с данными Гловера и Тинкхама. Это согласие явилось одним из самых убедительных ранних подтверждений микроскопической теории.

1.5. Теория Гинзбурга — Ландау

После появления теории БКШ была проведена значительная работа с целью подтвердить предсказания теории в таких явлениях, как ядерная релаксация и поглощение ультразвука, где энергетическая щель и спектр возбуждений играют ключевую роль. Но наиболее волнующие события в эти годы произошли на другом направлении. Стержнем этого направления явилась теория сверхпроводимости Гинзбурга — Ландау (ГЛ), которая в основном рассматривала сверхпроводящие электроны, а не возбуждения. Уже в 1950 г., за семь лет до появления теории БКШ, Гинзбург и Ландау [12] ввели комплексную псевдоволновую функцию Ψ как параметр порядка для сверхпроводящих электронов, так что локальная плотность сверхпроводящих электронов (определенная в уравнениях Лондонов) имела вид

$$n_s = |\Psi(x)|^2. \quad (1.15)$$

Затем, используя вариационный принцип и исходя из предложенного ими разложения свободной энергии по степеням Ψ и $\nabla\Psi$, они вывели дифференциальное уравнение для Ψ

$$\frac{1}{2m^*} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e^*}{c} \mathbf{A} \right)^2 \Psi + \beta |\Psi|^2 \Psi = -\alpha(T) \Psi, \quad (1.16)$$

которое весьма близко к уравнению Шредингера для свободной частицы, но только с нелинейным членом. Соответствующее уравнение для сверхтока

$$\mathbf{J}_s = \frac{e^* \hbar}{i 2m^*} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) - \frac{e^{*2}}{m^* c} |\Psi|^2 \mathbf{A} \quad (1.17)$$

было также подобно обычному уравнению квантовой механики для частиц с зарядом e^* и массой m^* . Используя этот формализм, удалось объяснить два факта, которые не были объяснены в теории Лондонов, а именно:

1. Нелинейные эффекты в полях, достаточно сильных, чтобы изменять n_s (или $|\Psi|^2$).

2. Пространственные изменения n_s .

Главным успехом теории в первые годы явилась трактовка так называемого промежуточного состояния сверхпроводников, при котором в присутствии поля $H \approx H_c$ существуют одновременно

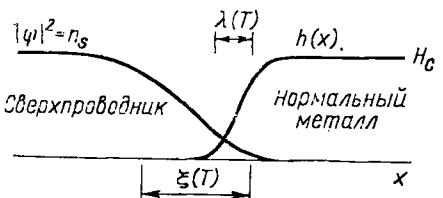


Рис. 1.4. Граница между сверхпроводящим и нормальным доменами в промежуточном состоянии сверхпроводника

сверхпроводящие и нормальные области. Граница между двумя такими областями схематически показана на рис. 1.4.

Первоначально теория ГЛ казалась полностью феноменологической и ее важность не была оценена в полной мере, особенно в западной литературе. Однако в 1959 г. Горькову удалось показать [13], что теория ГЛ фактически является предельным случаем микроскопической теории БКШ (соответственно обобщенной для учета пространственно неоднородных случаев), справедливым вблизи T_c , где ψ прямо пропорциональна параметру энергетической щели Δ . С другой стороны, ψ можно считать волновой функцией движения центра масс куперовских пар. Теория ГЛ ныне всемирно признана как блестящее достижение физической интуиции; она в самой простой форме выражает макроскопическую квантово-механическую природу сверхпроводящего состояния и имеет решающее значение для понимания уникальных электродинамических свойств этого состояния.

В теории Гинзбурга — Ландау вводится понятие характерной длины, ныне называемой температурно-зависимой длиной когерентности

$$\xi(T) = \hbar / [2m^* \alpha(T)]^{1/2}; \quad (1.18)$$

она характеризует расстояние, на котором функция $\psi(r)$ может изменяться без существенного увеличения энергии. В чистом сверхпроводнике вдали от T_c $\xi(T) \approx \xi_0$, где ξ_0 — длина когерентности Пиппарда; вблизи T_c , однако, $\xi(T)$ изменяется как $(T_c - T)^{-1/2}$, так как α стремится к нулю как $(T - T_c)$. Таким образом, эти две длины когерентности связаны между собой, но все же отличаются друг от друга.

Отношение двух характерных длин определяет параметр теории ГЛ

$$x = \lambda / \xi; \quad (1.19)$$

так как величины λ и ξ вблизи T_c одинаково зависят от температуры, то это безразмерное отношение почти не зависит от T . Для типичных чистых сверхпроводников $\lambda \approx 500 \text{ \AA}$ и $\xi \approx 3000 \text{ \AA}$, так что $x \ll 1$. В этом случае, как можно увидеть, существует положительная поверхностная энергия, связанная с границей раздела нормальной и сверхпроводящей областей (доменов) для случая промежуточного состояния. Качественное объяснение состоит просто в том, что «энергетическая цена» изменения ψ от ее сверхпро-

водящего значения до нуля равна примерно $\xi H_c^2/8\pi$, в то время как уменьшение диамагнитной энергии происходит только на величину $\lambda H_c^2/8\pi$ (см. рис. 1.4). Эта положительная поверхностная энергия делает устойчивой доменную структуру с размерами, промежуточными между микроскопической длиной ξ и макроскопическим размером образца.

1.6. Сверхпроводники II рода

В 1957 г., т. е. одновременно с появлением теории БКШ, Абрикосов [14] опубликовал в высшей степени важную работу, в то время почти пропущенную научной общественностью, в которой он рассмотрел вопрос о том, что произойдет в теории ГЛ, если λ будет не малым, а большим, т. е. если $\xi < \lambda$, а не наоборот. Возвращаясь к аргументации, использованной выше, мы видим, что это должно привести к отрицательной поверхностной энергии, так что процесс деления на домены будет происходить до тех пор, пока он не ограничится микроскопической длиной ξ . Подобное поведение сверхпроводников сильно отличается от описанного выше классического, и Абрикосов назвал их «сверхпроводниками II рода» для того, чтобы отличить их от прежнего множества «сверхпроводников I рода». Он показал, что переход от одного типа к другому происходит точно при $\lambda = 1/\sqrt{2}$.

Как было обнаружено Абрикосовым, для материалов с $\lambda > 1/\sqrt{2}$ вместо скачкообразного разрушения сверхпроводимости в фазовом переходе первого рода при H_c происходит плавное увеличение проникновения потока, начинающееся при первом критическом поле H_{c1} и доходящее до $B = H$ при втором критическом поле H_{c2} , как показано схематически на рис. 1.5. Из-за частичного проникновения потока диамагнитная энергия вытеснения поля становится меньшей, так что поле H_{c2} (которое оказывается равным $\sqrt{2}\lambda H_c$) может быть намного большим, чем термодинамическое критическое поле H_c . Это свойство сделало возможным появление сверхпроводящих соленоидов для создания сильных магнитных полей.

Другим результатом анализа Абрикосова явилось то, что в так называемом смешанном состоянии (или «шубниковской фазе») между H_{c1} и H_{c2} поток проникает в образец не в форме слоистых доменов, а в виде регулярной структуры трубок потока, каждая из которых несет квант потока

$$\Phi_0 = \hbar c / 2e = 2,07 \cdot 10^{-7} \text{ Гс} \cdot \text{см}^2. \quad (1.20)$$

Внутри каждой отдельной ячейки структуры существует вихрь сверхтока, сжимающий магнитный поток, локализованный в его центральной области. Абрикосов предсказал существование квадратной решетки таких вихрей; позднее было показано, что он допустил численную ошибку, и меньшую свободную энергию должна иметь треугольная структура. Существование такой вихревой структуры было продемонстрировано экспериментально при по-

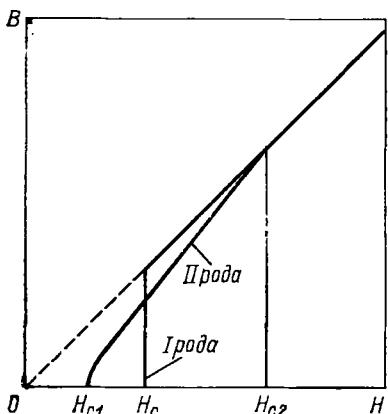


Рис. 1.5. Сравнение проникновения магнитного поля в сверхпроводники I и II рода, имеющих одно и то же термодинамическое критическое поле. Отношение B/H_{c2} из этого графика также приближенно показывает изменение R/R_N , где R — электрическое сопротивление в случае пренебрежимо малого пиннинга, R_N — сопротивление в нормальном состоянии

мощи метода магнитного декорирования в соединении с электронной микроскопией [15]. Конечно, случайные неоднородности в кристалле приводят к «пришилившему» (пиннингу)* вихрей в энергетически выгодных местах, так что в некоторых случаях наблюдается жидкобразная структура вихревых нитей.

Как уже было замечено, сверхпроводники II рода не являются идеальными диамагнетиками, и поскольку в центрах вихрей $|\psi|^2$ стремится к нулю, то не удивительно, что в этих центрах отсутствует энергетическая щель. Теперь мы, естественно, приходим к вопросу: не исчезает ли при этом и другой отличительный признак сверхпроводимости — идеальная проводимость. Ответ является не вполне однозначным. В присутствии проходящего («транспортного») тока на вихревые нити потока действует сила Лоренца $J \times \Phi_0/c$ (аналогичная макроскопической плотности силы $J \times B/c$), которая стремится протолкнуть их попереk тока. Если это происходит, в образце наводится препятствующее такому движению продольное напряжение. В идеальном однородном материале движению потока препятствует только вязкое трение, и сверхпроводник II рода проявляет сопротивление, сравнимое с сопротивлением в нормальном состоянии, но уменьшенное примерно в B/H_{c2} раз. В реальных материалах, однако, всегда присутствуют какие-либо неоднородности, на которых происходит пиннинг потока. Здесь сопротивление отсутствует до тех пор, пока не достигнется конечный ток, такой, что сила Лоренца окажется способной преодолеть силу пиннинга. В материалах, используемых в сверхпроводящих магнитах, пиннинг достаточно велик, что приводит к большим критическим токам. В действительности даже при наличии пиннинга сопротивление не точно равно нулю, хотя и может быть исключительно мало, поскольку тепловые флуктуации могут превосходить силу пиннинга, что приводит к появлению малого сопротивления, вызванного «сползанием» (крипом) ** потока.

* От английского «to rip» — пришиливать, например булавкой. — Прим. ред. пер.

** От английского «to creep» — ползти. — Прим. ред. пер.

1.7. Фаза, джозефсоновское туннелирование, квантование флюкса и незатухающие токи — сущность сверхпроводимости

Столкнувшись с исчезновением в сверхпроводнике II рода отличительных признаков сверхпроводимости, мы вправе спросить, что же в действительности является наиболее существенной и универсальной характеристикой сверхпроводящего состояния. Ответ таков — существование волновой функции $\psi(r)$ многочастичного конденсата, которая имеет амплитуду и фазу и которая сохраняет фазовую когерентность на макроскопических расстояниях. Этот конденсат аналогичен, но не идентичен известному конденсату Бозе—Эйнштейна, причем куперовские пары занимают место одиночных бозонов, конденсирующихся, например, в сверхтекучем гелии.

Так как фаза и число частиц — сопряженные переменные, дополнительные друг к другу в дуализме волна — частица, то существует соотношение неопределенности

$$\Delta N \Delta \phi \geq 1, \quad (1.21)$$

ограничивающее точность, с которой могут быть определены одновременно N и ϕ . Однако так как $N \sim 10^{22}$, то величины N и ϕ могут быть известны с малой неопределенностью каждая и фазу можно считать полуклассической переменной.

Физическое значение фазовой степени свободы было впервые подчеркнуто в работе Джозефсона [16], который предсказал, что пары могут туннелировать через энергетический барьер в туннельном переходе между двумя сверхпроводниками даже при нулевой разности потенциалов между ними, образуя сверхток с плотностью

$$J = J_0 \sin(\phi_1 - \phi_2), \quad (1.22)$$

где J_0 — постоянная величина, а ϕ_i — фаза волновой функции ψ в i -м сверхпроводнике. Хотя это предсказание первоначально было встречено с некоторым скептицизмом, впоследствии оно было подтверждено с большой точностью. Позднее джозефсоновские переходы удалось использовать в сверхчувствительных вольтметрах и магнитометрах, а также при выполнении наиболее точных из доступных ныне измерений отношения фундаментальных постоянных h/e .

Возможно, однако, что главное подтверждение существования фазового множителя в волновой функции $\psi(r) = |\psi(r)| e^{i\phi(r)}$ заключается в свойствах простого сверхпроводящего кольца. В этом случае однозначность ϕ требует, чтобы $\psi(r)$ изменялась на 2π при одном обходе вокруг кольца. Так же как соответствующее условие в атоме ведет к квантованию орбитального углового момента в единицах \hbar , в данном случае это условие требует, чтобы

флуксоид Φ' принимал только значения, удовлетворяющие условию $n\Phi_0 = nhc/2e$. Флуксоид, величину, введенную Ф. Лондоном, можно определить равенством

$$\Phi' = \Phi + \frac{m^* c}{e^{**2}} \oint \frac{\mathbf{J}_s \cdot d\mathbf{s}}{|\Psi|^2}, \quad (1.23)$$

где $\Phi = \phi \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$ — обычный магнитный поток через контур интегрирования. Если кольцо имеет толщину, много большую λ , то контур интегрирования может быть взят глубже поверхностного слоя, т. е. по области, где $J_s \rightarrow 0$; тогда равенство (1.23) просто означает, что $\Phi' = \Phi$ и квантованные значения $n\Phi_0$ принимает сам магнитный поток Φ . Это свойство (квантование потока) было продемонстрировано экспериментально в 1961 г. [17, 18]. Если ток J_s не является малым, как это имеет место в вихрях для сверхпроводника II рода, то в выражении (1.23) могут быть одинаково важны оба члена. При этом значения самого потока не фиксированы, в то время как непосредственно связанный с фазой волновой функции флуксоид всегда имеет точные квантовые значения.

Эта концепция дает основу для понимания квантовой природы незатухающих токов в кольце. Ток может изменяться не на бесконечно малые значения, а лишь квантованными скачками, при которых квантовое число флуксоида изменяется на одну или несколько единиц.

В сверхпроводнике такой квантовый скачок требует коллективного перехода всех вовлеченных в ток пар. Чрезвычайно длительное существование незатухающих токов (несмотря на то что они в принципе являются метастабильными) объясняется крайне малой вероятностью такого одновременного квантового скачка почти 10^{20} частиц. До тех же пор, пока такой квантовый скачок не случится, никакого уменьшения незатухающего тока произойти не может.

1.8. Флуктуационные эффекты

Предыдущие замечания относительно незатухающих токов показывают важность термодинамических флуктуаций, вызывающих конечное, хотя и астрономически малое, сопротивление при температуре ниже T_c . С другой стороны, флуктуации служат причиной того, что и при температуре выше T_c сохраняются некоторые признаки сверхпроводимости. Впервые это явление наблюдалось Гловером [19], который обнаружил, что проводимость сверхпроводников из аморфных пленок изменяется как $(T - T_c)^{-1}$ при приближении к T_c со стороны более высоких температур. Такой «юриевейсовский» вид температурной зависимости был предсказан также теоретически примерно в то же время. Несколько позже соответствующий эффект также наблюдался [20] для магнитной восприимчивости чистых магнитных образцов. В этом случае расходимость происходит как $(T - T_c)^{-1/2}$.

Эти измерения и соответствующая теория показывают, что эффекты сверхпроводящего взаимодействия продолжают существовать, вообще говоря, до произвольно высоких температур, в то время как их практически полное исчезновение происходит при температуре $\sim 2T_c$. Таким образом, хотя резкий переход из сверхпроводящего состояния в нормальное, обнаруженный Камерлинг-Онессом, является достаточно хорошим рабочим приближением для большинства целей, существует не только некоторое сопротивление при температуре ниже T_c , но также и следы сверхпроводимости при температуре выше T_c . Стоит заметить, что сверхпроводящий переход является, в общем, намного более резким, чем другие фазовые переходы второго рода (такие, как переходы в магнитных материалах), поскольку длина когерентности ξ_0 намного больше, чем межатомное расстояние. Из-за этого в сверхпроводниках каждый электрон взаимодействует со многими другими, в то время как в магнитных материалах сильно связаны только несколько соседних электронов, ближайших друг к другу, что приводит к большему проявлению флуктуационных эффектов.

Закончив этот краткий обзор, перейдем к более подробному изложению, с тем чтобы конкретизировать упомянутые выше результаты.

ТЕОРИЯ БКШ

В этой книге будет уделено большее внимание феноменологической, а не микроскопической теории сверхпроводимости. Тем не менее оказывается удобным начать систематическое изложение с разбора основ теории БКШ, поскольку эта теория [1], созданная в 1957 г., полностью изменила наши представления о сверхпроводимости. Более того, теория БКШ дала основу как для вычисления параметров, так и для теоретического обоснования существования, формы и пределов применимости феноменологической теории.

Начиная с обзора теории БКШ, мы, возможно, создаем некоторые неудобства для чтения, так как эта глава — одна из наиболее трудных в книге, главным образом вследствие использования в ней аппарата вторичного квантования. Однако читателя, сомневающегося относительно своей подготовки в этой области, можно заверить, что разбор теории БКШ будет проведен максимально просто и используемые методы будут объяснены достаточно подробно, чтобы новичок смог следить за изложением. Стоит также отметить, что феноменологическая теория, изложению которой главным образом посвящены остальные главы, была предложена для объяснения экспериментальных результатов независимо и задолго до их «вывода» из микроскопической теории. Феноменологическая теория может быть изучена, понята и применена на практике и при ограниченном понимании микроскопической теории. Поэтому, хотя и переставлен порядок, и для логической стройности изложения вначале дается микроскопическая теория, читатель не должен позволить себе «увязнуть» в этой главе. Если это произошло, то он должен тут же перейти к заключению в конце главы и при дальнейшем чтении возвращаться к ней, если возникнет необходимость в выяснении отдельных положений.

2.1. Куперовские пары

Основополагающая идея о том, что даже сколь угодно слабое притяжение между двумя электронами может привести к образованию связанного состояния, была высказана Купером [2] в 1956 г. Им было показано, что если взаимодействие между электронами носит характер притяжения, то ферми-распределение электронов оказывается неустойчивым по отношению к образова-

нию по крайней мере одной связанный пары, как бы слабо это взаимодействие ни было. Этот результат является следствием статистики Ферми, так как хорошо известно, что в трехмерной задаче двух тел связанные состояния возникают лишь при превышении потенциалом взаимодействия конечной пороговой величины.

Чтобы понять, каким образом возникают связанные состояния, рассмотрим простую модель, в которой два электрона добавлены к ферми-совокупности электронов при $T=0$ с условием, что эти избыточные электроны взаимодействуют друг с другом, а взаимодействие с остальными электронами сводится лишь к выполнению принципа Паули. При этом ищется волновая функция лишь этих двух частиц. Из общих соображений, высказанных Блохом, следует, что в состоянии с наименьшим значением энергии суммарный волновой вектор должен быть равен нулю, поэтому исследуемые электроны должны обладать равными и противоположными по направлению волновыми векторами. Это позволяет рассмотреть орбитальную волновую функцию типа

$$\Psi_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_2).$$

С учетом антисимметрии полной волновой функции по отношению к перестановке этих двух электронов выражение для Ψ_0 преобразуется или в сумму членов $\cos \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$, умноженных на антисимметрические синглетные спиновые функции $(\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2)$, или в сумму членов $\sin \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$, умноженных на одну из симметрических триплетных спиновых функций $(\alpha_1 \alpha_2, \alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2, \beta_1 \beta_2)$. В этих выражениях символом α_i обозначено состояние первой частицы со спином, направленным вверх, а β_i — со спином вниз. Из-за того что взаимодействие имеет характер притяжения, следует ожидать, что синглетные связанные состояния должны обладать меньшей энергией, так как косинусоидальная зависимость орбитальной функции этого состояния от $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ приводит к большей амplitude вероятности для электронов находиться вблизи друг друга. Поэтому рассмотрим двухэлектронную синглетную волновую функцию вида

$$\Psi_0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \left[\sum_{\mathbf{k} > \mathbf{k}_F} g_{\mathbf{k}} \cos \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \right] (\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2). \quad (2.1)$$

Подставляя волновую функцию (2.1) в уравнение Шредингера нашей задачи, можно показать, что весовые коэффициенты $g_{\mathbf{k}}$ и собственные значения энергии E определяются из решения уравнения

$$(E - 2\varepsilon_{\mathbf{k}}) g_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}' > \mathbf{k}_F} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} g_{\mathbf{k}'} . \quad (2.2)$$

Здесь $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ — невозмущенные значения энергии плоской де-Броильевой волны, а $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ — матричный элемент потенциала взаимодействия:

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \Omega^{-1} \int V(\mathbf{r}) \exp[i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}] d\mathbf{r}, \quad (2.3)$$

r — расстояние между двумя электронами; Ω — нормировочный объем. Величина $V_{kk'}$ характеризует потенциал рассеяния пары электронов из состояния с волновыми векторами $(k', -k')$ в состояние с волновыми векторами $(k, -k)$. Связанное состояние пары существует, если может быть найден набор g_k удовлетворяющий уравнению (2.2) и отвечающий собственному значению энергии $E < 2E_F$.

Анализ этой ситуации при произвольном значении $V_{kk'}$ привести затруднительно, поэтому Купер ввел весьма полезное приближение. Согласно этому приближению все матричные элементы $V_{kk'}$ равны $(-V)$ для состояний с энергиями, меньшими некоторой энергии обрезания $\hbar\omega_c$, отсчитываемой от E_F , а для остальных состояний $V_{kk'}$ равны нулю. В этом случае правая часть уравнения (2.2) является не зависящей от k постоянной, и для g_k получаем

$$g_k = V \frac{\sum g_{k'}}{2e_k - E}. \quad (2.4)$$

Суммируя по k обе части этого уравнения и сокращая на $\sum g_k$, получаем

$$\frac{1}{V} = \sum_{k>k_F} (2e_k - E)^{-1}. \quad (2.5)$$

Заменяя сумму на интеграл и обозначая через $N(0)$ плотность состояний с одним спином на поверхности Ферми, преобразуем выражение (2.5) к виду

$$\frac{1}{V} = N(0) \int_{E_F}^{E_F + \hbar\omega_c} \frac{d\varepsilon}{2\varepsilon - E} = \frac{1}{2} N(0) \ln \frac{2E_F - E + 2\hbar\omega_c}{2E_F - E}.$$

В обычном приближении слабой связи, когда $N(0)V \ll 1$, энергия E может быть представлена в виде

$$E \approx 2E_F - 2\hbar\omega_c \exp\{-2/N(0)V\}. \quad (2.6)$$

Таким образом, на самом деле имеется связанное состояние с отрицательной относительно поверхности Ферми энергией, полностью образованное из электронов с $k > k_F$, т. е. обладающих кинетической энергией, превышающей E_F . Энергия взаимодействия перевешивает эту избыточную кинетическую энергию, приводя к образованию пар при сколь угодно малой величине V . Отметим, что выражение для энергии связи не аналитично при $V=0$, т. е. не может быть разложено в ряд по степеням V и вследствие этого не может быть получено по теории возмущений. Этот факт в значительной степени отсрочил появление микроскопической теории.

Возвращаясь к волновой функции, видим, что ее зависимость от относительной координаты $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ пропорциональна величине

$$\sum_{\mathbf{k} > \mathbf{k}_F} \frac{\cos \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}{2\varepsilon_{\mathbf{k}} + E'}.$$

В этом выражении отсчет ведется от энергии Ферми, т. е.

$$\xi_{\mathbf{k}} = \varepsilon_{\mathbf{k}} - E_F, \quad E' = 2E_F - E > 0, \quad (2.7)$$

причем вследствие изменения знака в знаменателе под E' теперь понимается энергия связи относительно величины $2E_F$. Так как $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ зависит только от $\xi_{\mathbf{k}}$, это решение обладает сферической симметрией, следовательно, эта волновая функция описывает синглетное S-состояние. Отметим, что весовой множитель $(2\xi_{\mathbf{k}} + E')^{-1}$ принимает максимальное значение $1/E'$ при $\xi_{\mathbf{k}} = 0$, т. е. для электронов, находящихся на уровне Ферми, и что он уменьшается с увеличением $\xi_{\mathbf{k}}$. Таким образом, наиболее сильно вовлечены в процесс образования связанных состояний электроны, лежащие в интервале энергий порядка E' вблизи E_F . Так как при $N(0) V < 1$ $E' \ll \hbar\omega_c$, детали поведения матричного элемента $V_{kk'}$ вне интервала энергий $\hbar\omega_c$ не должны существенно влиять на полученный результат. Это до некоторой степени оправдывает введенную выше грубую аппроксимацию для $V_{kk'}$. Вторым следствием узости диапазона энергий рассматриваемых состояний является вывод о том, что согласно проведенным выше рассуждениям Пиппарда, опирающимся на принцип неопределенности, размер связанный пары не может быть меньше, чем $\sim \hbar v_F / E'$. Так как kT_c оказывается порядка E' , то размер куперовской пары примерно равен $\xi_0 = -a\hbar v_F / kT_c$, что значительно превышает расстояние между частицами. Таким образом, в координатном пространстве пары сильно перекрываются друг с другом.

2.2. Природа притяжения

Обратимся теперь к изучению происхождения отрицательных $V_{kk'}$, необходимых для существования сверхпроводимости. Если мы возьмем чисто кулоновское взаимодействие $V(\mathbf{r}) = e^2/r$ и вычислим величину $V(\mathbf{q})$

$$V(\mathbf{q}) = V(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = V_{kk'} = \Omega^{-1} \int V(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{r},$$

то получим

$$V(\mathbf{q}) = \frac{4\pi e^2}{\Omega q^2} = \frac{4\pi e^2}{q^2}, \quad (2.8)$$

где последнее равенство справедливо для единичного нормировочного объема. Очевидно, что в данном случае $V(\mathbf{q})$ всегда положительно.

Если теперь учсть диэлектрическую проницаемость среды, то $V(\mathbf{q})$ уменьшится в $\epsilon^{-1}(\mathbf{q}, \omega)$ раз. Наиболее очевидная составная часть $\epsilon(\mathbf{q}, \omega)$ определяется эффектом экранирования электронов проводимости (см., например, работу [3]). В приближении Фер-

ми — Томаса $\varepsilon = 1 + k_s^2/q^2$, где $1/k_s \approx 1\text{ \AA}^{-1}$ — радиус экранирования. Используя это выражение, получаем

$$V(\mathbf{q}) = 4\pi e^2/(q^2 + k_s^2). \quad (2.9)$$

Таким образом, учет эффекта экранирования электронов позволяет избежать расходности при $\mathbf{q}=0$, но оставляет без изменения знак $V_{kk''}$. Следовательно, в этой модели сверхпроводимость не должна возникнуть.

Отрицательные слагаемые появятся лишь при учете движения ионных остовов. Физически это связано с тем, что первый электрон поляризует среду, притягивая положительные ионы. Этот избыток положительных ионов в свою очередь притягивает второй электрон, приводя тем самым к образованию эффективного притяжения между электронами. Если притяжение достаточно велико для того, чтобы пересилить отталкивающее экранированное кулоновское взаимодействие, то это приведет к суммарному потенциалу, соответствующему притяжению, и появлению сверхпроводимости. Исторически идея о важности взаимодействия электронов с решеткой для объяснения сверхпроводимости была впервые высказана Фрёлихом [4] в 1950 г. Это предположение было проверено экспериментально открытием [5, 6] «изотопического эффекта», т. е. пропорциональности T_c и H_c величине $M^{-1/2}$ для изотопов одного и того же элемента.

Так как деформации решетки ограничиваются той же самой жесткостью, которая определяет упругость твердых тел, ясно, что существенную роль должны играть колебательные (фоновые) частоты*. Из закона сохранения импульса следует, что если электрон рассеялся из состояния \mathbf{k} в состояние \mathbf{k}' , то образовавшийся фонон должен обладать волновым вектором $\mathbf{q}=\mathbf{k}-\mathbf{k}'$, а характерная частота должна равняться частоте фонона ω_q . Поэтому кажется правдоподобным, что фоновый вклад в функцию экранирования будет пропорционален $(\omega^2 - \omega_q^2)^{-1}$. Очевидно, что этот резонансный знаменатель приведет к *отрицательному* знаку при $\omega < \omega_q$, что соответствует высказанным выше физическим соображениям; для более высоких частот, т. е. для разности энергий электронов, превышающей $\hbar\omega_q$, притяжение меняется на отталкивание. Таким образом, энергия обрезания $\hbar\omega_c$ куперовских матричных элементов $-V$, отвечающих притяжению, должна быть порядка энергии Дебая $\hbar\omega_D=k\Theta_D$, которая характеризует обрезание фонового спектра.

Тщательный анализ наилучшего способа изучения связанный системы электронов и фононов был дан в работах Фрёлиха [7] и Бардина и Пайнса [8], однако детальные расчеты, относящиеся к конкретным материалам, еще только начинают давать количественные результаты. Первой попыткой проверки «теоретического

* Для экранированного кулоновского взаимодействия характерной частотой является плазменная частота электронов в металле, которая столь высока, что соответствующий отклик можно считать мгновенным.

критерия» сверхпроводимости явились вычисления Пайнса [9], систематически исследовавшего элементы периодической системы. Им была использована модель «желе», в которой твердое тело аппроксимировано электронной жидкостью и точечными ионами в пренебрежении кристаллической структурой, зонами Бриллюена и конечными размерами ионных остовов. Как показано, например, в книге Де Жена [10], при определенных предположениях в модели «желе» можно получить следующий результат:

$$V(q, \omega) = \frac{4\pi e^2}{q^2 + k_s^2} + \frac{4\pi e^2}{q^2 + k_s^2} \frac{\omega_q^2}{\omega^2 - \omega_q^2}. \quad (2.10)$$

Первое слагаемое отвечает экранированному кулоновскому взаимодействию, в то время как второе описывает взаимодействие электронов через фононы среды, приводящее к их взаимному притяжению при $\omega < \omega_q$. К сожалению, выражение (2.10) из-за своей упрощенности не может быть использовано в качестве критерия сверхпроводимости, поскольку $V(q, \omega)$ стремится к нулю при $\omega \rightarrow 0$ и всегда отрицательно при $\omega < \omega_q$ независимо от параметров материалов. Однако это выражение показывает, что фононное взаимодействие имеет тот же порядок величины, что и прямое взаимодействие между электронами; следовательно, на этом пути может оказаться возможным получение отрицательного суммарного матричного элемента взаимодействия.

2.3. Основное состояние в теории БКШ

Как мы видим, ферми-совокупность электронов нестабильна по отношению к образованию связанных куперовских пар, если результирующее взаимодействие между электронами носит характер притяжения. Поэтому в данном случае пары должны конденсироваться до тех пор, пока не будет достигнуто положение равновесия. Это произойдет, когда состояние системы будет столь существенно отличаться от фермиевского (из-за большого числа связанных пар), что энергия связи еще одной добавленной пары будет равна нулю. Очевидно, что рассматривать такое сложное состояние трудно, если не найти простую математическую форму его описания. Такой формой является волновая функция теории БКШ.

При написании волновой функции более чем двух электронов схема учета антисимметрии, используемая выше для одиночной куперовской пары, становится очень громоздкой и для описания N электронных антисимметризованных произведений функций удобнее использовать детерминанты Слэттера размером $N \times N$. Эти детерминанты, в свою очередь, наиболее компактно можно записать на языке операторов вторичного квантования*, в котором

* Описание аппарата вторичного квантования можно найти, например, в книгах [51*, 52*]. — Причеч. ред. пер.

занятые состояния (включая спиновый индекс) отмечают с помощью «операторов рождения» $c_{\mathbf{k}\downarrow}$, рождающих электрон с волновым вектором \mathbf{k} и спином, направленным вверх. Необходимо также ввести оператор уничтожения $c_{\mathbf{k}\downarrow}^*$, уничтожающий соответствующее состояние. В этих обозначениях синглетную волновую функцию, обсуждавшуюся выше, записывают в следующем виде:

$$|\Psi_0\rangle = \sum_{\mathbf{k} > \mathbf{k}_F} g_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\downarrow}^* c_{-\mathbf{k}\downarrow}^* |F\rangle. \quad (2.11)$$

Здесь знаком $|F\rangle$ обозначена ферми-совокупность электронов, в которой заняты все состояния вплоть до \mathbf{k}_F . Из этого выражения видно, что пары обращенных во времени состояний всегда заняты одновременно. Андерсоном [11] было показано, что эта особенность сохраняется и в случае «грязных» сверхпроводников, для описания спаривания в которых необходима более общая схема, так как \mathbf{k} не является более хорошим квантовым числом. Эквивалентность выражения (2.11) и волновой функции, полученной ранее для синглетного спаривания, можно проверить путем суммирования двух детерминантов Слэттера размером 2×2 с равными коэффициентами $g_{\mathbf{k}}$ и $g_{-\mathbf{k}}$.

Поскольку электроны подчиняются статистике Ферми, введенные выше операторы рождения и уничтожения должны удовлетворять антисимметрическим соотношениям для фермионных операторов:

$$\begin{aligned} [c_{\mathbf{k}\sigma}, c_{\mathbf{k}'\sigma'}^*]_+ &\equiv c_{\mathbf{k}\sigma} c_{\mathbf{k}'\sigma'}^* + c_{\mathbf{k}'\sigma'}^* c_{\mathbf{k}\sigma} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\sigma\sigma'}, \\ [c_{\mathbf{k}\sigma}, c_{\mathbf{k}'\sigma'}]_+ &= [c_{\mathbf{k}\sigma}^*, c_{\mathbf{k}'\sigma'}^*]_+ = 0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где знаком σ обозначен спиновый индекс. Оператор числа частиц $n_{\mathbf{k}\sigma}$ определяется как

$$n_{\mathbf{k}\sigma} = c_{\mathbf{k}\sigma}^* c_{\mathbf{k}\sigma} \quad (2.13)$$

и имеет собственное значение, равное единице при действии на занятое состояние и равное нулю при действии на свободное.

Применение этого формализма для наших целей требует выполнения лишь элементарных операций, использующих выписаные правила. Этот аппарат используется для более компактной записи многоэлектронных волновых функций и действующих на них операторов.

Для получения волновой функции БКШ заметим, что наиболее общая N -электронная волновая функция, выраженная через собственные функции оператора импульса и учитывающая куперовское спаривание, имеет следующий вид:

$$|\Psi_N\rangle = \sum g(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_N) c_{\mathbf{k}_1\downarrow}^* c_{-\mathbf{k}_1\downarrow}^* \dots c_{\mathbf{k}_N\downarrow}^* c_{-\mathbf{k}_N\downarrow}^* |\Phi_0\rangle.$$

Здесь $|\Phi_0\rangle$ — вакуумное состояние, не содержащее частиц; \mathbf{k}_i и \mathbf{k}_i — начало и конец той области M волновых векторов \mathbf{k} , которая заполнена занятыми состояниями для данного слагаемого в сумме. Коэффициенты g характеризуют вес, с которым входит в эту сум-

му произведение из набора $N/2$ пар операторов рождения. Так как имеется

$$M!/[M - (N/2)]! (N/2)! \approx 10^{(10^{20})}$$

способов выбора состояния, занятого $N/2$ парами, в сумме должно быть столько же слагаемых, а значит, и определению подлежит такое же число коэффициентов $g(k, \dots)$. Такая задача явно безнадежна. Авторы теории БКШ доказали, что при столь большом числе рассматриваемых частиц хорошим приближением является метод Хартри — Фока самосогласованного или среднего поля, согласно которому вероятность заполнения каждого состояния с волновым вектором k считается зависящей только от *среднего* числа заполнения других состояний. В своей простейшей форме метод требует выполнения закона сохранения полного числа частиц N , поскольку степень занятости состояний описывается статистически. Однако, так как число частиц очень велико, мы не сделаем существенных ошибок, если перейдем к системе, в которой фиксировано только среднее число частиц \bar{N} . По существу, в этом случае мы работаем с большим каноническим ансамблем.

В теории БКШ постулируется следующий вид волновой функции основного состояния:

$$|\Psi_G\rangle = \prod_{k=k_1, \dots, k_M} (u_k + v_k c_{k\downarrow}^* c_{-k\downarrow}^*) |\Phi_0\rangle, \quad (2.14)$$

где $|u_k|^2 + |v_k|^2 = 1$. Как следует из этого выражения, вероятность того, что состояние $(k_\downarrow, -k_\downarrow)$ занято, равна $|v_k|^2$, а вероятность того, что оно свободно, равна $|u_k|^2 = 1 - |v_k|^2$ ^{*}. Очевидно, что $|\Psi_G\rangle$ можно выразить в виде суммы

$$|\Psi_G\rangle = \sum_N \lambda_N |\Psi_N\rangle, \quad (2.15)$$

в которой каждое слагаемое представляет собой ту часть разложения произведения (2.14), которая описывает $N/2$ пар. Величина $|\Psi_N\rangle$ является частным случаем введенного выше общего выражения (2.11), в котором $g(k, \dots)$ равно $\prod_k u_k \prod_{k'} v_{k'}$, причем индексы k и k' пробегают соответственно по $(M-N/2)$ незанятым и по $N/2$ занятым состояниям. Если все u_k и v_k конечны, то имеется конечная вероятность того, что число частиц N принимает любое значение от 0 до $2M$. Однако величины $|\lambda_N|^2$ имеют резкий максимум при значении $N \approx \bar{N}$, где

$$\bar{N} = \sum_k 2|v_k|^2. \quad (2.16)$$

Хотя справедливость выражения (2.16) следует из физического смысла величины v_k , все же посмотрим в качестве примера применения аппарата вторичного квантования, каким образом получается это выражение для среднего

* Для простоты можно считать, что величины u_k и v_k действительны; в дальнейшем будет полезно допустить, что они различаются на фазовый множитель $\exp\{i\phi\}$, где ϕ — фаза волновой функции макроскопического конденсата.

числа частиц \bar{N} . Электроны в парах всегда имеют противоположно направленные спины, поэтому можно написать:

$$\begin{aligned}\bar{N} = \langle N_{\text{оп}} \rangle &= \left\langle \sum_{\mathbf{k}, \sigma} n_{\mathbf{k}\sigma} \right\rangle = \left\langle \Psi_G \left| \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\uparrow}^* c_{\mathbf{k}\uparrow} + c_{\mathbf{k}\downarrow}^* c_{\mathbf{k}\downarrow} \right| \Psi_G \right\rangle = \\ &= 2 \sum_{\mathbf{k}} \langle \Psi_G | c_{\mathbf{k}\uparrow}^* c_{\mathbf{k}\uparrow} | \Psi_G \rangle.\end{aligned}$$

Подставляя в полученное соотношение выражение для $|\Psi_G\rangle$, получаем

$$\begin{aligned}\bar{N} = 2 \sum_{\mathbf{k}} &\left\langle \Phi_0 \left| (u_{\mathbf{k}}^* + v_{\mathbf{k}}^* c_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{\mathbf{k}\uparrow}) c_{\mathbf{k}\uparrow}^* c_{\mathbf{k}\uparrow} (u_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\uparrow}^* c_{-\mathbf{k}\downarrow}^*) \times \right. \right. \\ &\times \left. \left. \prod_{\mathbf{l} \neq \mathbf{k}} (u_{\mathbf{l}}^* + v_{\mathbf{l}}^* c_{-\mathbf{l}\downarrow} c_{\mathbf{l}\uparrow}) (u_{\mathbf{l}} + v_{\mathbf{l}} c_{\mathbf{l}\uparrow}^* c_{-\mathbf{l}\downarrow}^*) \right| \Phi_0 \right\rangle.\end{aligned}$$

При выводе этого равенства было использовано свойство эрмитовости операторов $\langle A\phi|\psi\rangle = \langle\phi|A^+|\psi\rangle$, а также тот факт, что операция сопряжения произведения двух операторов равносильна произведению операторов, сопряженных данным и переставленных местами.

Теперь можно переставить порядок сомножителей в произведениях и сгруппировать те из них, которые имеют отношение к заданному парному состоянию \mathbf{k} или \mathbf{l} , так как, согласно формуле (2.12), перестановка четного числа неидентичных ферми-операторов не приводит к изменению знака. Переходя к вычислению этого выражения, можем считать $|\Phi_0\rangle$ произведением вакуумных состояний для каждого из волновых векторов \mathbf{k} . Это позволяет определять независимо коэффициенты для каждой из пар. Выделяя коэффициент для оператора с $\mathbf{l}=\mathbf{k}$, получаем

$$|u_{\mathbf{k}}|^2 + u_{\mathbf{k}}^* v_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\uparrow}^* c_{-\mathbf{k}\downarrow} + v_{\mathbf{k}}^* u_{\mathbf{k}} c_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{\mathbf{k}\uparrow} + |v_{\mathbf{k}}|^2 c_{-\mathbf{k}\downarrow}^* c_{\mathbf{k}\uparrow}^* c_{\mathbf{k}\uparrow}^* c_{-\mathbf{k}\downarrow}.$$

При вычислении матричного элемента $\langle\Phi_0|\Phi_0\rangle$ два стоящих в середине слагаемых дадут нуль, так как оба они меняют степень заполненности 1-й пары. Последнее слагаемое создает и затем уничтожает пару, приводя к множителю, равному единице. Более строго, операторы в последнем слагаемом можно преобразовать, используя последовательные парные перестановки и соотношения (2.12), к выражениям

$$-c_{\mathbf{k}\uparrow} c_{-\mathbf{k}\downarrow}^* c_{\mathbf{k}\uparrow}^* c_{-\mathbf{k}\downarrow}^*, \quad (c_{\mathbf{k}\uparrow}^* c_{\mathbf{k}\uparrow}) (c_{-\mathbf{k}\downarrow}^* c_{-\mathbf{k}\downarrow}) \text{ и } + (1 - c_{\mathbf{k}\uparrow}^* c_{\mathbf{k}\uparrow}) (1 - c_{-\mathbf{k}\downarrow}^* c_{-\mathbf{k}\downarrow}).$$

Действие каждого из них на состояние $|\Phi_0\rangle$ приводит к появлению множителя, равного единице. Таким образом, каждый из коэффициентов при $\mathbf{l} \neq \mathbf{k}$ легко приводится к $|u_{\mathbf{k}}|^2 + |v_{\mathbf{k}}|^2 = 1$. Если мы проделаем ту же процедуру при $\mathbf{l} = \mathbf{k}$, то перекрестные слагаемые, содержащие $u_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}$, также выпадут, так как дополнительный оператор $c_{\mathbf{k}\uparrow}^* c_{\mathbf{k}\uparrow}$ не изменяет число частиц. Более того, так как $c_{\mathbf{k}\uparrow} |\Phi_0\rangle$ равно нулю, слагаемое с $|u_{\mathbf{k}}|^2$ тоже выпадает, так что остается лишь $|v_{\mathbf{k}}|^2$. В результате, как и ожидалось, получаем равенство (2.16).

Для оценки ширины пика вблизи \bar{N} необходимо определить дисперсию

$$\langle (N - \bar{N})^2 \rangle = \langle N^2 - 2N\bar{N} + \bar{N}^2 \rangle = \langle N^2 \rangle - \bar{N}^2.$$

Проводя вычисления, аналогичные проделанным выше, имеем

$$\langle (N - \bar{N})^2 \rangle = 4 \sum_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}^2 v_{\mathbf{k}}^2.$$

Отметим, что полученное выражение отлично от нуля, лишь если изменение $v_{\mathbf{k}}$ от 1 до 0, а $u_{\mathbf{k}}$ от 0 до 1 происходит не резким

скачком, а относительно плавно. Кроме того, если сравнить системы с одинаковой плотностью частиц, но с разными объемами, то как \bar{N} , так и $\langle (N - \bar{N})^2 \rangle$ будут пропорциональны объему, что следует из пропорциональности объему числа состояний k , относящихся к заданному интервалу энергии. Следовательно,

$$\delta N_{\text{cp}} = \langle (N - \bar{N})^2 \rangle^{1/2} \approx \bar{N}^{1/2} \approx 10^{10}, \quad (2.17a)$$

а относительная погрешность в \bar{N} составляет

$$(\delta N_{\text{cp}}/\bar{N}) = \bar{N}^{-1/2} \approx 10^{-10}. \quad (2.17b)$$

Таким образом, возникает ситуация, типичная для многочастичных задач статистической физики: при $N \rightarrow \infty$ абсолютные значения флуктуаций возрастают, а относительные — стремятся к нулю.

Хотя при практических расчетах обычно можно не учитывать точно закон сохранения числа частиц, интересно отметить, что при необходимости можно выделить часть $|\Psi_G\rangle$, соответствующую N частицам, применяя весьма простой метод, предложенный П. Андерсоном:

$$|\Psi_N\rangle = \int_0^{2\pi} d\phi e^{-iN\phi/2} \prod_k (|u_k| + |v_k| e^{i\phi} c_{k\uparrow}^* c_{k\downarrow}^*) |\phi_0\rangle. \quad (2.18)$$

Здесь используется то обстоятельство, что в невозмущенном сверхпроводнике разность фаз между состояниями с числами частиц N , отличающимися на два, произвольна. Интегрируя по всем значениям ϕ , т. е. делая фазу ϕ полностью неопределенной, можно добиться точного определения числа N^* . С другой стороны, как мы уже видели при фиксированном ϕ , равном, например, нулю, $\delta N_{\text{cp}} \approx 10^{10}$. Полученные результаты иллюстрируют соотношение неопределенностей

$$\Delta N \Delta \phi \geq 1. \quad (2.19)$$

Можно провести поучительную аналогию с электромагнитным полем. Чтобы получить квазиклассическое электрическое поле E с хорошо определенной амплитудой и фазой, необходимо иметь достаточно большое число фотонов (как в лазере) для того, чтобы можно было допустить суперпозицию состояний, в которых имеются различные числа заполнения.

2.4. Вариационный метод

Мы довольно тщательно изучили структуру Ψ_G и выявили ее некоторые интересные особенности. Теперь необходимо установить ее полностью, определив правильные значения для u_k и v_k . Вначале, следуя оригинальной работе БКШ, проведем вариационные вычисления. Позднее мы обсудим другой метод, который приводит к тем же результатам, но в несколько более современной форме.

* Интегрирование по ϕ дает нуль, за исключением тех членов в ряде произведений (2.18), в которых точно имеется $N/2$ сомножителей вида $\exp\{i\phi\}$, каждое из которых связано с рождением пары.

2.4.1. Определение коэффициентов

Проведем вычисления, используя так называемый «гамильтониан спаривания», или «укороченный гамильтониан»:

$$\mathcal{H} = \sum_{k\sigma} \epsilon_k n_{k\sigma} + \sum_{kl} V_{kl} c_{k\uparrow}^* c_{-k\downarrow}^* c_{-l\downarrow} c_{l\uparrow}, \quad (2.20)$$

считая, что он включает члены, ответственные за сверхпроводимость, хотя и опускает много других слагаемых, которые описывают электроны, не спаренные в состояниях $(k\uparrow, -k\downarrow)$. Эти слагаемые не дают вклада в волновую функцию основного состояния БКШ, но могут быть важны в других случаях. Для упорядочения среднего числа частиц \bar{N} включим слагаемые $-\mu N_{\text{оп}}$, где μ — химический потенциал (или энергия Ферми), а $N_{\text{оп}}$ — оператор числа частиц. Теперь минимизируем среднее значение суммы, требуя, чтобы

$$\delta \langle \Psi_G | \mathcal{H} - \mu N_{\text{оп}} | \Psi_G \rangle = 0.$$

Включение оператора $-\mu N_{\text{оп}}$ математически эквивалентно отсчету кинетической энергии от μ (или E_F). Итак, более подробно:

$$\delta \langle \Psi_G | \sum_{k\sigma} \xi_k n_{k\sigma} + \sum_{kl} V_{kl} c_{k\uparrow}^* c_{-k\downarrow}^* c_{-l\downarrow} c_{l\uparrow} | \Psi_G \rangle = 0,$$

где, как и раньше, $\xi_k = \epsilon_k - \mu$ — энергия на одну частицу, отсчитываемая от энергии Ферми. Используя тот же метод вычислений, что и при определении \bar{N} , для первого слагаемого сразу имеем

$$\langle KE - \mu N \rangle = 2 \sum_k \xi_k |v_k|^2. \quad (2.21)$$

Аналогично для слагаемого, отвечающего взаимодействию, непосредственными вычислениями можно получить

$$\langle V \rangle = \sum_{kl} V_{kl} u_{k\uparrow}^* u_{l\downarrow}^* v_l. \quad (2.22)$$

С другой стороны, это выражение следует из такого факта, что слагаемое с V_{kl} описывает рассеяние из состояния $(l\uparrow, -l\downarrow)$ в состояние $(k\uparrow, -k\downarrow)$. Для того чтобы рассеяние имело место, необходимо, чтобы в начальном состоянии имелась пара электронов в состоянии l , а состояние k было свободно, а в конечном состоянии — наоборот. Амплитуда вероятности такого начального положения равна $u_{k\uparrow} v_l$, а конечного — $v_k^* u_l^*$, что и приводит к полученному выше результату.

Следует также отметить, что матричный элемент энергии взаимодействия V_{kl} не вносит вклада в энергию нормального состояния. Это очевидно при $T=0$, так как в этом случае состояния со 100%-ной вероятностью заняты или свободны и, следовательно, произведение вероятности занятого состояния на вероятность свободного равно нулю. При $T>0$ распределение Ферми не имеет резкой границы и можно предположить, что возможен и ненулевой вклад. Однако в нормальном состоянии различные детерми-

нанты Слэттера, представляющие определенные числа заполнения электронов, складываются с произвольной относительной фазой, так что усреднение произведений амплитуд вероятностей (соответствующих $u_k v_k^* u_l^* v_l$ в упорядоченном БКШ-состоянии) даст нуль. Следовательно, описывающий это рассеяние член не дает вклада в среднюю энергию нормального состояния.

Полагая для простоты величины u_k и v_k действительными, из соотношений (2.21) и (2.22) получаем выражение

$$\langle \Psi_G | \mathcal{H} - \mu N_{\text{оп}} | \Psi_G \rangle = 2 \sum_k \xi_k v_k^2 + \sum_{kl} V_{kl} u_k v_k u_l v_l, \quad (2.23)$$

которое должно быть минимизировано при условии $u_k^2 + v_k^2 = 1$. Это условие удовлетворяется, если положить

$$u_k = \sin \theta_k \text{ и } v_k = \cos \theta_k. \quad (2.24)$$

Используя элементарные тригонометрические тождества, правую часть (2.23) можно переписать в следующем виде:

$$\sum_k \xi_k (1 + \cos 2\theta_k) + \frac{1}{4} \sum_{kl} V_{kl} \sin 2\theta_k \sin 2\theta_l,$$

и, следовательно,

$$0 = \frac{\partial}{\partial \theta_k} \langle \Psi_G | \mathcal{H} - \mu N_{\text{оп}} | \Psi_G \rangle = -2\xi_k \sin 2\theta_k + \sum_l V_{kl} \cos 2\theta_k \sin 2\theta_l. \quad (2.25)$$

Дополнительный множитель 2 появляется во второй сумме в связи с тем, что оба индекса k и l пробегают все возможные значения. Таким образом,

$$\operatorname{tg} 2\theta_k = -\frac{1}{2\xi_k} \sum_l V_{kl} \sin 2\theta_l. \quad (2.26)$$

Теперь введем величины

$$\Delta_k = -\sum_l V_{kl} u_l v_l = -\frac{1}{2} \sum_l V_{kl} \sin 2\theta_l \quad (2.27)$$

и

$$E_k = (\Delta_k^2 + \xi_k^2)^{1/2}. \quad (2.28)$$

Скоро будет видно, что они имеют ясный физический смысл, как соответственно параметр энергетической щели и энергия квазичастичных возбуждений. Теперь уравнение (2.26) приобретает вид

$$\operatorname{tg} 2\theta_k = -\Delta_k / \xi_k, \quad (2.29a)$$

так что

$$2u_k v_k = \sin 2\theta_k = \Delta_k / E_k, \quad (2.29b)$$

$$v_k^2 - u_k^2 = \cos 2\theta_k = -\xi_k / E_k. \quad (2.29c)$$

Лишь указанный выбор знаков перед синусом и косинусом (соотношением (2.29а) фиксируется только их относительный знак) приводит к вероятности заполнения $v_{\mathbf{k}}^2 \rightarrow 0$ при $\xi_{\mathbf{k}} \rightarrow \infty$, что и требуется от физически разумного решения.

Для определения Δ_1 подставим выражение (2.29б) в формулу (2.27) и получим условие самосогласования:

$$\Delta_{\mathbf{k}} = -\frac{1}{2} \sum_l \frac{\Delta_1}{E_l} V_{\mathbf{k}l} = -\frac{1}{2} \sum_l \frac{\Delta_1}{(\Delta^2 + \xi_l^2)^{1/2}} V_{\mathbf{k}l}. \quad (2.30)$$

Отметим сначала наличие тривиального решения $\Delta_{\mathbf{k}} = 0$, приводящего к результату: $v_{\mathbf{k}} = 1$ для $\xi_{\mathbf{k}} < 0$ и $v_{\mathbf{k}} = 0$ для $\xi_{\mathbf{k}} > 0$. Соответствующая волновая функция $|\psi\rangle$ есть просто детерминант Слэттера со всеми занятymi вплоть до \mathbf{k}_F состояниями и описывает нормальную ферми-совокупность электронов при $T = 0$. Но можно также ожидать, что если $V_{\mathbf{k}l}$ отрицательно, то уравнение (2.30) может иметь и нетривиальное решение с меньшей энергией. Возвратимся к используемой Купером в теории БКШ модели взаимодействия

$$V_{\mathbf{k}l} = \begin{cases} -V, & \text{если } |\xi_{\mathbf{k}}|, |\xi_l| \leq \hbar\omega_c, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (2.31)$$

где V — положительная константа. Как было показано выше, матричный элемент $V_{\mathbf{k}l}$ связан с энергией $|\xi_{\mathbf{k}} - \xi_l|$, но для получения простого решения необходимо более строгое ограничение, состоящее в том, что каждая из энергий $|\xi_{\mathbf{k}}|$ и $|\xi_l|$ должна быть меньше $\hbar\omega_c$. Подставляя выражение для $V_{\mathbf{k}l}$ в уравнение (2.30), получаем, что ему удовлетворяет решение

$$\Delta_{\mathbf{k}} = \begin{cases} \Delta & \text{для } |\xi_{\mathbf{k}}| < \hbar\omega_c, \\ 0 & \text{для } |\xi_{\mathbf{k}}| > \hbar\omega_c. \end{cases} \quad (2.32)$$

В этой модели $\Delta_{\mathbf{k}} = \Delta$ не зависит от \mathbf{k} , поэтому можно уравнение (2.30) сократить на эту величину и записать условие самосогласования в виде

$$1 = \frac{V}{2} \sum_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}}^{-1}. \quad (2.33)$$

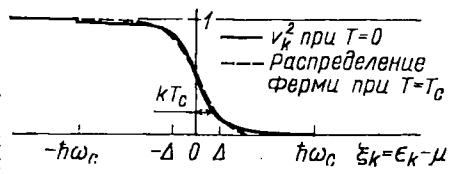
После замены суммирования на интегрирование от $-\hbar\omega_c$ до $\hbar\omega_c$ с учетом симметрии выражения относительно $\pm\xi$ из условия (2.33) получим

$$\frac{1}{N(0)V} = \int_0^{\hbar\omega_c} \frac{d\xi}{(\Delta^2 + \xi^2)^{1/2}} = \arcsin \frac{\hbar\omega_c}{\Delta}. \quad (2.33a)$$

Таким образом,

$$\Delta = \frac{\hbar\omega_c}{\sin [1/N(0)V]} \approx 2\hbar\omega_c \exp \{-1/N(0)V\}, \quad (2.34)$$

Рис. 2.1. Зависимость чисел заполнения v_k^2 в теории БКШ от энергии электронов, отсчитываемой от химического потенциала (энергии Ферми). Для того чтобы сделать заметным обрезание при энергиях, равных $\pm \hbar\omega_c$, зависимость вычислена для сверхпроводника с сильной связью $N(0)V=0,43$. Для сравнения в том же масштабе изображено распределение Ферми для нормального металла при $T=T_c$, причем использовано соотношение $\Delta(0)=1,76 kT_c$.



причем последнее равенство справедливо в пределе слабой связи $N(0)V \ll 1$. Так как оказывается, что в типичном случае величина $N(0)V$ примерно равна 0,3 и меньше 0,5 для всех известных сверхпроводников, приближенное равенство в выражении (2.34) справедливо, как правило, с точностью до 1%.

Зная Δ , можно просто определить коэффициенты u_k и v_k , которые дают волновую функцию БКШ. Удобно исходить при этом из соотношения (2.29в) и условия нормировки $u_k^2 + v_k^2 = 1$. Таким образом, для относительного числа заполнений v_k^2 найдем

$$v_k^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_k}{E_k} \right) = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\xi_k}{(\Delta^2 + \xi_k^2)^{1/2}} \right], \quad (2.35)$$

а

$$u_k^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi_k}{E_k} \right) = 1 - v_k^2.$$

Как видно из графика v_k^2 (рис. 2.1), эта величина приближается к единице при энергиях, значительно меньших энергии Ферми, и стремится к нулю при больших энергиях, что напоминает поведение распределения Ферми в нормальном металле при конечной температуре. Действительно, имеется поразительное сходство между распределением v_k^2 для основного состояния БКШ при $T=0$ и распределением Ферми для нормального металла при $T=T_c$, которое для сравнения также представлено на рис. 2.1. Из этого сравнения видно, что в отличие от ранних идей Фрёлиха, Бардина и других изменения в металле при охлаждении от T_c до $T=0$ нельзя описать через изменение чисел заполнения одноэлектронных состояний. В частности, в k -пространстве не образуется щель. На самом деле неупорядоченное частичное заполнение этих состояний с произвольными фазами заменяется на *единое* квантовое состояние системы. Здесь многочастичные состояния с более или менее теми же одноэлектронными числами заполнения теперь находятся друг с другом в фиксированных фазовых соотношениях.

Отметим теперь, что при $\xi_k \gg \Delta$ величина v_k^2 уменьшается как ξ_k^{-2} . Такая же зависимость была получена ранее для g_k^2 в нашем простом рассмотрении одиночной куперовской пары. В действи-

тельности, за исключением асимметрии, связанной с искусственным предположением об отсутствии изменения большинства ферми-состояний, это рассмотрение дает вполне разумное представление о том, как образуется коррелированное парное состояние с меньшей энергией. Наконец, отметим, что, как видно из формул (2.35), Δ является характерной энергией, определяющей диапазон волновых векторов \mathbf{k} , вовлеченных в процесс образования куперовских пар. Далее мы увидим, что при $T=0$ $\Delta=1,76 kT_c$. Это подтверждает правильность наших оценок характерного размера пары $\xi_0 \sim \hbar v_F / \Delta \sim \hbar v_F / kT_c$.

2.4.2. Нахождение энергии основного состояния

Зная волновую функцию основного состояния $|\psi_G\rangle$, вычислим его энергию и покажем, что она в самом деле меньше энергии ферми-распределения. Из формулы (2.23) с использованием выражений (2.27) и (2.35) имеем

$$\langle \psi_G | \mathcal{H} - \mu N_{\text{оп}} | \psi_G \rangle = \sum_{\mathbf{k}} \left(\xi_{\mathbf{k}} - \frac{\xi_{\mathbf{k}}^2}{E_{\mathbf{k}}} \right) - \frac{\Delta^2}{V}.$$

Как было отмечено выше, нормальное состояние при $T=0$ соответствует состоянию БКШ с $\Delta=0$, т. е. с $E_{\mathbf{k}}=|\xi_{\mathbf{k}}|$. Следовательно,

$$\langle \psi_n | \mathcal{H} - \mu N_{\text{оп}} | \psi_n \rangle = \sum_{|\mathbf{k}| < k_F} 2\xi_{\mathbf{k}}.$$

Слагаемые с $|\mathbf{k}| > k_F$ дадут нуль, так как $E_{\mathbf{k}}=\xi_{\mathbf{k}}$. Таким образом, с учетом симметрии относительно энергии Ферми, для разности энергий основных состояний сверхпроводника и ферми-распределения получаем

$$\begin{aligned} \langle E \rangle_s - \langle E \rangle_n &= \sum_{|\mathbf{k}| > k_F} \left(\xi_{\mathbf{k}} - \frac{\xi_{\mathbf{k}}^2}{E_{\mathbf{k}}} \right) + \\ &+ \sum_{|\mathbf{k}| < k_F} \left(-\xi_{\mathbf{k}} - \frac{\xi_{\mathbf{k}}^2}{E_{\mathbf{k}}^2} \right) - \frac{\Delta^2}{V} = 2 \sum_{|\mathbf{k}| > k_F} \left(\xi_{\mathbf{k}} - \frac{\xi_{\mathbf{k}}^2}{E_{\mathbf{k}}} \right) - \frac{\Delta^2}{V}. \end{aligned}$$

Заменяя суммирование интегрированием и производя его, в пределе слабой связи находим

$$\langle E \rangle_s - \langle E \rangle_n = \left[\frac{\Delta^2}{V} - \frac{1}{2} N(0) \Delta^2 \right] - \frac{\Delta^2}{V}.$$

Слагаемое, соответствующее разности кинетических энергий, оставлено внутри скобок, чтобы продемонстрировать точное сокращение его основной части с членом, описывающим потенциальную

энергию притяжения. Таким образом, оказалось, что суммарное понижение энергии на множитель $N(0) V/2 \approx 0,1$ меньше, чем взятое в отдельности увеличение кинетической энергии или чем взятое в отдельности уменьшение потенциальной энергии. Вводя термодинамическое обозначение $U(T)$ для внутренней энергии системы и учитывая, что $\Delta(T)$ зависит от температуры, окончательно получаем

$$U_s(0) - U_n(0) = -\frac{1}{2} N(0) \Delta^2(0). \quad (2.36)$$

Это выражение дает энергию конденсации при $T=0$, которая, по определению, равна $H_c^2(0)/8\pi$, где $H_c(T)$ — термодинамическое критическое поле.

Изотопический эффект. Как видно из формулы (2.34), параметр Δ пропорционален $\hbar \omega_c$, а частота ω_c должна быть пропорциональна $M^{-1/2}$. Поэтому из соотношения (2.36) должен следовать изотопический эффект ($H_c \propto M^{-1/2}$), если значения $N(0)$ и V одинаковы для разных изотопов. Это предположение справедливо для величины $N(0)$, зависящей от чисто электронных свойств. Но параметр V определяется как электронами, так и фононами, и его независимость от M менее очевидна. Действительно, хотя в наблюдаемом изотопическом сдвиге показатель степени и равен с большой точностью $(-1/2)$ для нескольких классических сверхпроводников, таких, как, например, свинец, эксперименты с другими материалами показали, что он может принимать любые значения, превышающие $(-1/2)$, и даже изменять знак. Теоретически было показано [12, 13], что наблюдаемые отклонения объяснимы в рамках более детальной теории взаимодействия электронов с решеткой. Однако проведение желаемых априорных расчетов таких свойств, которые зависят от параметров конкретного материала, обычно наталкивается на значительные трудности. Возможно, более полезно решение обратной задачи: рассматривать измеряемый изотопический эффект как средство получения информации о детальной природе взаимодействия, как это было сделано Макмилланом [14].

2.5. Решение с помощью канонического преобразования

Используемый в оригинальной работе БКШ вариационный метод, который мы только что рассмотрели, непосредственно применим к вычислению энергии основного сверхпроводящего состояния относительно энергии нормального состояния. Вместе с тем он оказывается довольно громоздким, хотя и пригодным, для анализа возбужденных состояний. В этом разделе будет описан другой подход, близкий к более сложным современным методам и весьма удобный при анализе возбуждений. Этот дополнитель-

ный метод также является разновидностью метода самосогласованного поля, но не требует обращения к вариационным вычислениям.

Заметим, что гамильтониан БКШ, описывающий характерное парное взаимодействие, приводит к основному состоянию, которое представляет собой фазо-когерентную суперпозицию многочастичных состояний, образованных из пар блоховских состояний ($\mathbf{k}\uparrow, -\mathbf{k}\downarrow$), занятых или свободных с вероятностью единица. Вследствие когерентности такие операторы, как $c_{-\mathbf{k}\downarrow}c_{\mathbf{k}\uparrow}$, могут иметь в этом состоянии ненулевые собственные значения $b_{\mathbf{k}}$ в отличие от нормального металла, где фазовые соотношения случайны и операция усреднения приводит к $b_{\mathbf{k}}=0$. Более того, из-за большого числа частиц флуктуации вблизи этих собственных значений должны быть малы. Отсюда следует, что весьма полезно представить такое произведение операторов следующим формальным образом:

$$c_{-\mathbf{k}\downarrow}c_{\mathbf{k}\uparrow} = b_{\mathbf{k}} + (c_{-\mathbf{k}\downarrow}c_{\mathbf{k}\uparrow} - b_{\mathbf{k}}) \quad (2.37)$$

и затем пренебречь билинейными величинами в малом флуктуационном слагаемом, заключенном в круглых скобках. Если проделать эту процедуру в нашем гамильтониане спаривания (2.20), то получится так называемый модельный гамильтониан

$$\mathcal{H}_M = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \xi_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\sigma}^* c_{\mathbf{k}\sigma} + \sum_{\mathbf{k}\mathbf{l}} V_{\mathbf{k}\mathbf{l}} (c_{\mathbf{k}\uparrow}^* c_{-\mathbf{k}\downarrow} b_1 + b_{\mathbf{k}} c_{-\mathbf{l}\downarrow}^* c_{\mathbf{l}\uparrow} - b_{\mathbf{k}}^* b_1), \quad (2.38)$$

в котором величина $b_{\mathbf{k}}$ должна быть определена самосогласованно:

$$b_{\mathbf{k}} = \langle c_{-\mathbf{k}\downarrow}c_{\mathbf{k}\uparrow} \rangle_{cp}. \quad (2.39)$$

Отметим, что, производя упрощения, связанные с исключением квадратичных членов по $c_{\mathbf{k}}$ из гамильтониана, получаем его приближенный вид, который не удовлетворяет закону сохранения числа частиц. Точнее, в нем содержатся теперь слагаемые, которые рождают или уничтожают пары частиц. Это полностью аналогично обсуждавшейся выше ситуации, в которой волновая функция БКШ, записанная в виде простого произведения с фиксированной фазой, содержала много функций, соответствующих различному количеству частиц. Точнее, число частиц можно было зафиксировать только интегрированием по фазе ϕ . Возникшая здесь ситуация связана с тем, что величине $b_{\mathbf{k}}$ приписана определенная фаза. Во всяком случае, как и раньше, можно обойти этот момент, вводя химический потенциал μ так, чтобы фиксировать \bar{N} на любом заданном уровне.

Теперь, приступая к решению, определим параметр $\Delta_{\mathbf{k}}$:

$$\Delta_{\mathbf{k}} = - \sum_{\mathbf{l}} V_{\mathbf{k}\mathbf{l}} b_{\mathbf{l}} = - \sum_{\mathbf{l}} V_{\mathbf{k}\mathbf{l}} \langle c_{-\mathbf{l}\downarrow}c_{\mathbf{l}\uparrow} \rangle. \quad (2.40)$$

Очевидно, что это определение весьма близко к приведенному в выражении (2.27) и, как окажется, этот параметр будет определять щель в энергетическом спектре. В терминах $\Delta_{\mathbf{k}}$ для модель-

ного гамильтониана (после переобозначения некоторых индексов) получим следующее выражение:

$$\mathcal{H}_M = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \xi_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\sigma}^* c_{\mathbf{k}\sigma} - \sum_{\mathbf{k}} (\Delta_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\uparrow}^* c_{-\mathbf{k}\downarrow} + \Delta_{\mathbf{k}}^* c_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{\mathbf{k}\uparrow} - \Delta_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^*). \quad (2.41)$$

Оно представляет собой сумму слагаемых, билинейных по паре операторов, соответствующих состояниям — партнерам по куперовской паре. Такой гамильтониан можно привести к диагональному виду простым линейным преобразованием. Как было показано независимо Боголюбовым [15] и Валатиным [16], нужное преобразование имеет вид

$$c_{\mathbf{k}\uparrow} = u_{\mathbf{k}}^* \gamma_{\mathbf{k}0} + v_{\mathbf{k}} \gamma_{\mathbf{k}1}^*, \\ c_{-\mathbf{k}\downarrow}^* = -v_{\mathbf{k}}^* \gamma_{\mathbf{k}0} + u_{\mathbf{k}} \gamma_{\mathbf{k}1}. \quad (2.42)$$

Здесь численные коэффициенты $u_{\mathbf{k}}$ и $v_{\mathbf{k}}$ удовлетворяют условию $|u_{\mathbf{k}}|^2 + |v_{\mathbf{k}}|^2 = 1$, а $\gamma_{\mathbf{k}}$ — новые ферми-операторы. Видно, что оператор $\gamma_{\mathbf{k}0}$ участвует в уничтожении электрона в состоянии $\mathbf{k}\uparrow$ и рождении электрона в состоянии $-\mathbf{k}\downarrow$. В обоих случаях суммарный эффект состоит в уменьшении импульса системы на \mathbf{k} , а проекции спина (S_z) — на $\hbar/2$. Оператор $\gamma_{\mathbf{k}1}$ обладает сходными свойствами, т. е. уменьшает импульс системы на $(-\mathbf{k})$ (или увеличивает на \mathbf{k}) и переворачивает спин из состояния вниз в состояние вверх.

Подставляя эти новые операторы (2.42) в модельный гамильтониан (2.38), раскрывая до конца умножение операторов и учитывая их некоммутативность, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_M = & \sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}} [(|u_{\mathbf{k}}|^2 - |v_{\mathbf{k}}|^2) (\gamma_{\mathbf{k}0}^* \gamma_{\mathbf{k}0} + \gamma_{\mathbf{k}1}^* \gamma_{\mathbf{k}1}) + 2|v_{\mathbf{k}}|^2 + \\ & + 2u_{\mathbf{k}}^* v_{\mathbf{k}} \gamma_{\mathbf{k}1} \gamma_{\mathbf{k}0} + 2u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^* \gamma_{\mathbf{k}0}^* \gamma_{\mathbf{k}1}^*] + \\ & + \sum_{\mathbf{k}} [(\Delta_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^* + \Delta_{\mathbf{k}}^* u_{\mathbf{k}}^* v_{\mathbf{k}}) (\gamma_{\mathbf{k}0}^* \gamma_{\mathbf{k}0} + \gamma_{\mathbf{k}1}^* \gamma_{\mathbf{k}1} - 1) + \\ & + (\Delta_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}^{*2} - \Delta_{\mathbf{k}}^* u_{\mathbf{k}}^{*2}) \gamma_{\mathbf{k}1} \gamma_{\mathbf{k}0} + (\Delta_{\mathbf{k}}^* v_{\mathbf{k}}^2 - \Delta_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^2) \gamma_{\mathbf{k}0}^* \gamma_{\mathbf{k}1}^* + \Delta_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^*]. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Теперь, если выбрать $u_{\mathbf{k}}$ и $v_{\mathbf{k}}$ таким образом, чтобы коэффициенты перед $\gamma_{\mathbf{k}1} \gamma_{\mathbf{k}0}$ и $\gamma_{\mathbf{k}0}^* \gamma_{\mathbf{k}1}^*$ обратились в нуль, то гамильтониан приведется к диагональному виду, т. е. к виду, в котором он содержит только константы и слагаемые, пропорциональные числу заполнений $\gamma_{\mathbf{k}} \gamma_{\mathbf{k}}$. Коэффициенты перед обоями нежелательными слагаемыми равны нулю, если

$$2\xi_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} + \Delta_{\mathbf{k}}^* v_{\mathbf{k}}^2 - \Delta_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}^2 = 0.$$

После умножения на $\Delta_{\mathbf{k}}/u_{\mathbf{k}}^2$, решения квадратного уравнения и использования введенного выше определения $E_{\mathbf{k}}$ это условие можно записать в виде

$$\frac{\Delta_{\mathbf{k}}^* v_{\mathbf{k}}}{u_{\mathbf{k}}} = (\xi_{\mathbf{k}}^2 + |\Delta_{\mathbf{k}}|^2)^{1/2} - \xi_{\mathbf{k}} \equiv E_{\mathbf{k}} - \xi_{\mathbf{k}}. \quad (2.44)$$

Положительный знак перед квадратным корнем соответствует устойчивому решению, отвечающему минимуму, а не максимуму энергии. Имея условие нормировки $|u_k|^2 + |v_k|^2 = 1$ и зная из условия (2.44), что $|v_k/u_k| = (E_k - \xi_k)/|\Delta_k|$, можно найти выражения для коэффициентов

$$|v_k|^2 = 1 - |u_k|^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_k}{E_k} \right), \quad (2.35')$$

которое точно согласуется с результатом (2.35), полученным вариационным методом.

Хотя фазы u_k , v_k и Δ_k сами по себе произвольны, они связаны соотношением (2.44), согласно которому величина $\Delta_k^* v_k / u_k$ действительна. Это означает, что фаза v_k относительно u_k должна быть равна фазе Δ_k . Без ограничения общности можно выбрать коэффициент u_k действительным и положительным. В этом случае v_k и Δ_k должны иметь одинаковые фазы.

2.5.1. Энергия возбуждений и энергетическая щель

Если u_k и v_k выбраны из соображений диагонализации модельного гамильтонiana (2.43), то в нем остаются следующие члены:

$$\mathcal{H}_M = \sum_k (\xi_k - E_k + \Delta_k b_k^*) + \sum_k E_k (\gamma_{k0}^* \gamma_{k0} + \gamma_{kl}^* \gamma_{kl}). \quad (2.45)$$

Первая сумма постоянна и отличается от соответствующей суммы в нормальном состоянии при $T=0$ ($E_k = |\xi_k|$, $\Delta_k = 0$) точно на величину определенной ранее энергии конденсации [см. формулу (2.36)]. Вторая сумма описывает увеличение энергии относительно основного состояния, выраженное через операторы $\gamma_k^* \gamma_k$ для γ_k -фермионов. Операторы γ_k описывают элементарные квазичастичные возбуждения (которые часто называют *боголюбовскими*) в сверхпроводящей системе. Очевидно, что энергия этих возбуждений равна

$$E_k = (\xi_k^2 + |\Delta_k|^2)^{1/2}. \quad (2.46)$$

Таким образом, как и предвидели, Δ_k играет роль *энергетической щели*, или минимальной энергии возбуждений, так как даже на сфере Ферми (где $\xi_k = 0$) $E_k = |\Delta_k| > 0$. Более того, обозначение E_k получает теперь свое оправдание, т. е. обозначает энергию элементарного возбуждения с импульсом $\hbar k$.

Как и в прежних вариационных вычислениях, условие самосогласования будет удовлетворено, если найденное из полученного решения среднее $\langle c_{-1\downarrow} c_{1\uparrow} \rangle$ подставить в формулу (2.40). Выражая операторы c_k через γ_k и опуская недиагональные члены в квазичастичных операторах $\gamma_{k0}^* \gamma_{kl}$ и $\gamma_{kl}^* \gamma_{k0}$ (так как они не дают вклада в среднее значение), получаем

$$\Delta_{\mathbf{k}} = - \sum_{\mathbf{l}} V_{\mathbf{kl}} \langle c_{-\mathbf{l}\downarrow} c_{\mathbf{l}\uparrow} \rangle = - \sum_{\mathbf{l}} V_{\mathbf{kl}} u_{\mathbf{l}}^* v_{\mathbf{l}} \langle 1 - \gamma_{\mathbf{l}0}^* \gamma_{\mathbf{l}0} - \gamma_{\mathbf{l}1}^* \gamma_{\mathbf{l}1} \rangle. \quad (2.47)$$

При $T=0$, когда квазичастичные возбуждения отсутствуют, это выражение сводится к равенству (2.27). Следовательно, метод канонического преобразования приводит к той же зависимости $\Delta(0)$ от $\hbar\omega_c$ и $N(0)V$, что и вариационный. Однако он оказывается гораздо более удобным при обобщении вычислений на случай $T>0$.

2.6. Конечные температуры

Так как величина $E_{\mathbf{k}}$ отождествлена с энергией возбуждения ферми-квазичастиц, то вероятность таких возбуждений в положении термодинамического равновесия определяется функцией Ферми

$$f(E_{\mathbf{k}}) = (\exp \{\beta E_{\mathbf{k}}\} + 1)^{-1}, \quad (2.48)$$

где $\beta = 1/kT$. Поэтому

$$\langle 1 - \gamma_{\mathbf{k}0}^* \gamma_{\mathbf{k}0} - \gamma_{\mathbf{k}1}^* \gamma_{\mathbf{k}1} \rangle = 1 - 2f(E_{\mathbf{k}}),$$

и в общем случае для $\Delta_{\mathbf{k}}$ из выражения (2.47) имеем

$$\Delta_{\mathbf{k}} = - \sum_{\mathbf{l}} V_{\mathbf{kl}} u_{\mathbf{l}}^* v_{\mathbf{l}} [1 - 2f(E_{\mathbf{l}})] = - \sum_{\mathbf{l}} V_{\mathbf{kl}} \frac{\Delta_{\mathbf{l}}}{2E_{\mathbf{l}}} \operatorname{th} \frac{\beta E_{\mathbf{l}}}{2}. \quad (2.49)$$

Используя приближение БКШ $V_{\mathbf{kl}} = -V$, получаем что $\Delta_{\mathbf{k}} = \Delta_1 = \Delta$, а уравнение самосогласования преобразуется к виду

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\operatorname{th}(\beta E_{\mathbf{k}}/2)}{E_{\mathbf{k}}}. \quad (2.50)$$

Здесь, как и обычно, $E_{\mathbf{k}} = (\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta_{\mathbf{k}}^2)^{1/2}$. Уравнение (2.50) определяет зависимость энергетической щели от температуры $\Delta(T)$.

2.6.1. Определение T_c

Критической называется такая температура T_c , при которой $\Delta(T) \rightarrow 0$. В этом случае $E_{\mathbf{k}} \rightarrow |\xi_{\mathbf{k}}|$ и спектр возбуждений становится таким же, как в нормальном состоянии. Таким образом, T_c можно определить, заменяя в формуле (2.50) $E_{\mathbf{k}}$ на $|\xi_{\mathbf{k}}|$ и решая полученное уравнение. После замены суммирования интегрированием, учета симметрии $|\xi_{\mathbf{k}}|$ относительно уровня Ферми и перехода к безразмерной переменной интегрирования уравнение для определения T_c принимает вид

$$\frac{1}{N(0)V} = \int_0^{\beta_c \hbar \omega_c / 2} \frac{\operatorname{th} x}{x} dx.$$

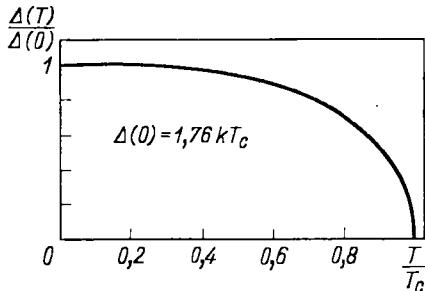


Рис. 2.2. Температурная зависимость энергетической щели в теории БКШ. Эта универсальная зависимость строго справедлива в пределе слабой связи, однако она является весьма хорошим приближением и в большинстве других случаев

Этот интеграл равен $\ln(A\beta_c\hbar\omega_c)$, где $A=2\exp\{\gamma\}/\pi\approx 1,13$, γ — постоянная Эйлера. Следовательно,

$$kT_c = \beta_c^{-1} = 1,13\hbar\omega_c \exp\{-1/N(0)V\}. \quad (2.51)$$

Сравнивая полученное выражение с выражением (2.34), видим, что

$$\frac{\Delta(0)}{kT_c} = \frac{2}{1,13} = 1,764. \quad (2.52)$$

Итак, энергетическая щель при $T=0$ действительно сравнима с kT_c . Численный множитель 1,76 был проверен в многочисленных экспериментах. Оказалось, что экспериментальные значения величины 2Δ для различных материалов и различных направлений в k -пространстве обычно попадают в интервал от 3,0 до 4,5 kT_c , что очень близко к найденному из БКШ значению 3,5 kT_c .

2.6.2. Температурная зависимость щели

Имея уравнение (2.50) или его интегральный эквивалент

$$\frac{1}{N(0)V} = \int_0^{\infty} \frac{\frac{1}{2}\beta(\xi^2 + \Delta^2)^{1/2}}{(\xi^2 + \Delta^2)^{1/2}} d\xi, \quad (2.53)$$

можно численно рассчитать зависимость $\Delta(T)$. Для сверхпроводников со слабой связью, в которых $\hbar\omega_c/kT_c \gg 1$, $\Delta(T)/\Delta(0)$ является универсальной функцией от T/T_c , монотонно убывающей от единицы при $T=0$ до нуля при $T=T_c$ (рис. 2.2). В окрестности $T=0$ температурные изменения экспоненциально малы, потому что $\exp\{-\Delta/kT\} \approx 0$, гиперболический тангенс очень близок к единице и не чувствителен к изменению T . Физически это означает, что Δ примерно постоянна до тех пор, пока за счет конечности температуры не возбудится достаточное число квазичастиц. С другой стороны, вблизи T_c зависимость $\Delta(T)$ стремится к нулю с вертикальной касательной:

$$\Delta(T)/\Delta(0) \approx 1,74 [1 - (T/T_c)]^{1/2}, \quad T \approx T_c. \quad (2.54)$$

Пропорциональность параметра порядка $(T_c - T)^{1/2}$ характерна для всех теорий самосогласованного поля. Например, аналогичную зависимость имеет функция $M(T)$ в теории ферромагнетизма (приближение молекулярного поля).

2.6.3. Термодинамические величины

Определив $\Delta(T)$, мы нашли и зависящую от температуры совокупность энергий возбуждений фермионов $E_k = [\xi_k^2 + \Delta^2(T)]^{1/2}$. Эти энергии определяют числа заполнения квазичастиц $f_k = (1 + \exp\{\beta E_k\})^{-1}$, которые, в свою очередь, позволяют обычным для газа фермионов образом найти электронную энтропию:

$$S_{es} = -2k \sum_k [(1 - f_k) \ln(1 - f_k) + f_k \ln f_k]. \quad (2.55)$$

По известной функции $S_{es}(T)$ можно найти удельную теплоемкость

$$C_{es} = T \frac{dS_{es}}{dT} = -\beta \frac{dS_{es}}{d\beta}.$$

Используя выражение (2.55), получаем

$$\begin{aligned} C_{es} &= 2\beta k \sum_k \frac{\partial f_k}{\partial \beta} \ln \frac{f_k}{1 - f_k} = -2\beta^2 k \sum_k E_k \frac{\partial f_k}{\partial \beta} = \\ &= -2\beta^2 k \sum_k E_k \frac{df_k}{d(\beta E_k)} \left(E_k + \beta \frac{dE_k}{d\beta} \right) = \\ &= 2\beta k \sum_k -\frac{\partial f_k}{\partial E_k} \left(E_k^2 + \frac{\beta}{2} \frac{d\Delta^2}{d\beta} \right). \quad (2.56) \end{aligned}$$

Первое слагаемое имеет тот же вид, что и в нормальном металле, и определяется перераспределением квазичастиц по различным энергетическим состояниям при изменении температуры. Второе слагаемое более необычно и описывает влияние зависящей от температуры щели на изменение самих энергетических уровней.

Очевидно, что оба слагаемых экспоненциально малы при $T \ll T_c$, когда минимальная энергия возбуждений значительно превосходит kT . Этим объясняется отмеченная выше экспоненциальная зависимость (1.13). Другой интересный предельный случай — окрестность T_c . В этом случае в формуле (2.56) можно заменить E_k на $|\xi_k|$, так как $\Delta(T) \rightarrow 0$. Первое слагаемое при этом перейдет в обычное выражение для электронной теплоемкости нормального состояния

$$C_{en} = \gamma T = (2\pi^2/3) N(0) k^2 T, \quad (2.57)$$

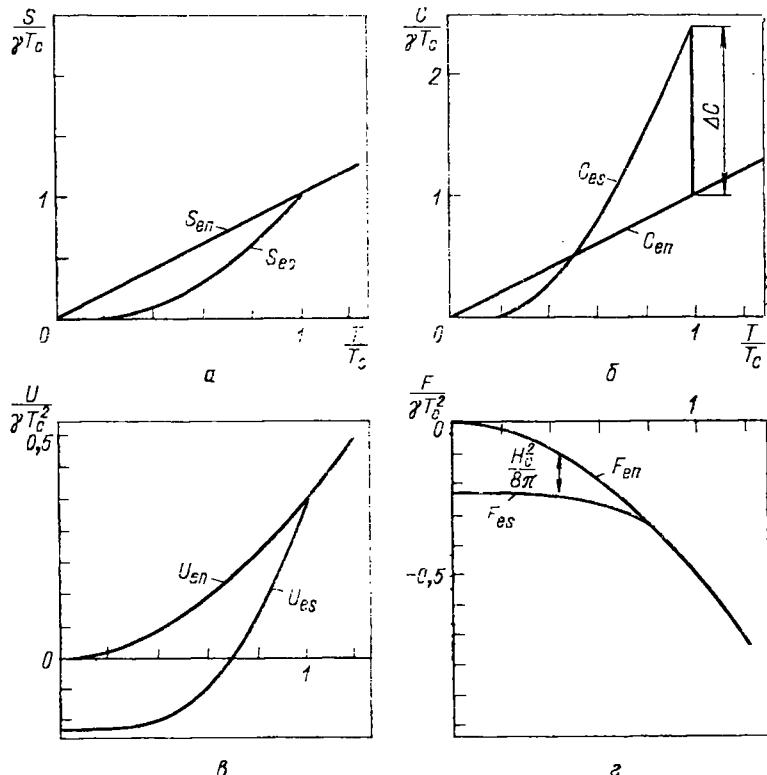


Рис. 2.3. Сравнение термодинамических величин в сверхпроводящем и нормальном состояниях. Энергия $U_{en}(0)$ выбрана равной нулю [графики (в) и (г)]. Поскольку переход из сверхпроводящего в нормальное состояния является фазовым переходом второго рода, величины S , U и F при $T=T_c$ непрерывны. Более того, поскольку $\partial F/\partial T = -S$, при $T=T_c$ совпадают и наклоны зависимостей F_{es} и F_{en} от T

непрерывное при $T=T_c$. Второе слагаемое конечно при температурах ниже T_c , где велика производная $d\Delta^2/dT$, и равно нулю при температурах выше T_c . Это приводит к скачку электронной теплоемкости ΔC при $T=T_c$. Величину скачка легко определить, если заменить суммирование интегрированием

$$\begin{aligned} \Delta C_t = (C_{es} - C_{en})|_{T_c} &= N(0) k \beta^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{-\partial f}{\partial |\xi|} \right) d\xi = \\ &= N(0) \left(-\frac{d\Delta^2}{dT} \right)|_{T_c} \quad (2.58) \end{aligned}$$

и учесть тот факт, что $\partial f/\partial |\xi| = \partial f/\partial \xi$, так как $\partial f/\partial \xi$ — четная функция ξ . Используя для $\Delta(T)$ приближенное выражение (2.54) с $\Delta(0) = 1,76 kT_c$, получим: $\Delta C \approx 9,4 N(0) k^2 T_c$. Сравнивая полу-

ченное выражение с формулой (2.57), находим относительную величину скачка

$$\frac{\Delta C}{C_{en}} = \frac{9,4}{2\pi^2/3} = 1,43. \quad (2.59)$$

Поведение теплоемкости при произвольных температурах схематически изображено на рис. 2.3, б.

Определив зависимость $C_{es}(T)$ численно по формуле (2.56), можно проинтегрировать ее и найти изменение внутренней энергии $U(T)$ при удалении температуры от T_c . При $T=T_c$ величина $U(T)$ совпадает со своим выражением в нормальном состоянии $U_{en}(0) + \gamma T_c^2/2$, так как удельная теплоемкость в этой точке конечна. Таким образом,

$$U_{es}(T) = U_{en}(0) + \frac{1}{2} \gamma T_c^2 - \int_T^{T_c} C_{es} dT. \quad (2.60)$$

Из полученного выражения (2.60) и выражения для энтропии (2.55) можно определить свободную энергию:

$$F_{es}(T) = U_{es}(T) - TS_{es}(T). \quad (2.61)$$

Предполагая, что воздействием сверхпроводящего перехода на свободную энергию решетки можно пренебречь, термодинамическое критическое поле определяем из соотношения

$$\frac{H_c^2(T)}{8\pi} = F_{en}(T) - F_{es}(T), \quad (2.62)$$

в котором $F_{en}(T) = U_{en}(0) - \gamma T^2/2$. Зависимости различных термодинамических величин от температуры изображены на рис. 2.3. Полезные численные таблицы приведены в работе Мюльшлегеля [17].

Так как критическое поле $H_c(T)$ может быть измерено с большей точностью, чем типичные термодинамические величины, важно отметить, что любую из них можно получить из другой строгим термодинамическим расчетом, исходя из формулы (2.62).

Например, параболическая температурная зависимость H_c (1.2) не согласуется с экспоненциальным изменением в C_{es} (1.13). Точные измерения отклонения зависимости $H_c(T)$ от параболической аппроксимации были проделаны Мапотером [18], проверявшим предсказания теории БКШ для термодинамических свойств.

2.7. Функция состояния и плотность состояний

Обращая равенства (2.42), выразим операторы γ_k^* через операторы рождения электронов c_k^* :

$$\begin{aligned} \gamma_{k0}^* &= u_k^* c_{k\uparrow}^* - v_k^* c_{-k\downarrow}, \\ \gamma_{k1}^* &= u_k^* c_{-k\downarrow}^* + v_k^* c_{k\uparrow}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Операторы γ_k рождают, при действии на основное состояние сверхпроводника, квазичастичные возбуждения с двумя спиновыми ориентациями. Основное состояние сверхпроводника $|\Psi_G\rangle$ есть вакуумное состояние для γ -частиц, т. е. определяется соотношениями

$$\gamma_{k0} |\Psi_G\rangle = \gamma_{k1} |\Psi_G\rangle = 0. \quad (2.64)$$

Структура $|\Psi_G\rangle$ в терминах γ -частиц не представляет интереса. Однако интересно показать, что выраженное через c_k равенство (2.64) справедливо для волновой функции БКШ, представленной в виде произведения (2.14). Это можно проверить, например, рассматривая выражение

$$\gamma_{k0} |\Psi_G\rangle = (u_k c_{k\uparrow} - v_k c_{-k\downarrow}^*) \prod_{l \neq k} (u_l + v_l c_{l\uparrow}^* c_{-l\downarrow}^*) |\Phi_0\rangle.$$

Выделяя множитель, включающий k -ю пару, получаем

$$u_k^2 c_{k\uparrow} + u_k v_k c_{k\uparrow} c_{-k\downarrow}^* - v_k u_k c_{-k\downarrow}^* - v_k^2 c_{-k\downarrow}^* c_{k\uparrow}^* c_{-k\downarrow}^*.$$

Все эти слагаемые дают нуль при действии на $|\Phi_0\rangle$ по следующим причинам. Первое равно нулю, так как оператор уничтожения действует на вакуум, следующие два сокращаются друг с другом, потому что действие оператора $c_{k\uparrow} c_{-k\uparrow}^*$ на вакуумное состояние дает единицу, а последнее слагаемое выпадает, так как оно дважды содержит один и тот же оператор рождения без промежуточного оператора уничтожения. Аналогичным образом определяется результат действия на $|\Psi_G\rangle$ оператора γ_{k1} . Таким образом, соотношение (2.64) проверено и выражение для основного состояния в теории БКШ точно совпадает с основным состоянием в методе канонических преобразований.

Обратимся теперь к изучению возбужденных состояний. В качестве примера рассмотрим действие оператора γ_{k0}^* на $|\Psi_G\rangle$:

$$\begin{aligned} \gamma_{k0}^* |\Psi_G\rangle &= (|u_k|^2 c_{k\uparrow}^* + u_k^* v_k c_{k\uparrow}^* c_{-k\uparrow}^* c_{-k\downarrow}^* - v_k^* u_k c_{-k\downarrow}^* - \\ &- |v_k|^2 c_{-k\downarrow}^* c_{k\uparrow}^* c_{-k\downarrow}^*) \prod_{l \neq k} (u_l + v_l c_{l\uparrow}^* c_{-l\downarrow}^*) |\Phi_0\rangle. \end{aligned}$$

Два средних слагаемых дают нуль по причинам, отмеченным выше. Последнее слагаемое может быть преобразовано с использованием антикоммутационных соотношений для ферми-операторов к выражению $|v_k|^2 c_{k\uparrow}^* c_{-k\downarrow} c_{-k\downarrow}^*$, в котором произведение $c_{-k\downarrow} c_{-k\downarrow}^*$ можно опустить, так как при действии на $|\Phi_0\rangle$ оно дает множитель, равный единице. Объединяя оставшееся выражение с первым слагаемым, имеем

$$\gamma_{k0}^* |\Psi_G\rangle = c_{k\uparrow}^* \prod_{l \neq k} (u_l + v_l c_{l\uparrow}^* c_{-l\downarrow}^*) |\Phi_0\rangle. \quad (2.65a)$$

Аналогично

$$\gamma_{k1}^* |\Psi_G\rangle = c_{-k\downarrow}^* \prod_{l \neq k} (u_l + v_l c_{l\uparrow}^* c_{-l\downarrow}^*) |\Phi_0\rangle. \quad (2.65b)$$

Это как раз те возбужденные состояния, которые в оригинальной работе БКШ были названы «одночастичными». Они соответствуют помещению с вероятностью, равной единице, одного из электронов в какое-либо состояние пары $(\mathbf{k}\uparrow, -\mathbf{k}\downarrow)$ при одновременном оставлении другого состояния пары свободным с той же вероятностью, что приводит к выключению этого состояния из многочастичной волновой функции и соответствующему увеличению энергии системы.

Операторы $\gamma_{\mathbf{k}}^*$ изменяют среднее значение числа частиц на величину $(u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2)$, которая пробегает значения от -1 до $+1$ при изменении $\xi_{\mathbf{k}}$ от минус до плюс бесконечности. Это суммарное изменение следует из изменения вероятностей $u_{\mathbf{k}}^2$ и $v_{\mathbf{k}}^2$ соответственно на $+1$ и -1 . Такое поведение должно быть несовместимо с выполнением закона сохранения числа частиц в изолированной системе. Возникшее противоречие разрешается, если вспомнить, что операторы $\gamma_{\mathbf{k}}^*$ определены только по отношению к основному состоянию, имеющему определенную фазу параметра $\Delta_{\mathbf{k}}$ и, следовательно, большую неопределенность в N . Если все же необходимо рассмотреть возбужденные состояния в изолированной системе с числом пар частиц в основном состоянии, точно равным $N/2$, то можно использовать операцию типа (2.18), позволяющую выделить N -частичное слагаемое после действия $\gamma_{\mathbf{k}}^*$ на $|\Psi_G\rangle$. Отметим, что $\gamma_{\mathbf{k}}^* |\Psi_G\rangle$ не имеет компоненты с четным числом частиц и, следовательно, не имеет проекции на N -частичное подпространство. Вообще, из закона сохранения электронов следует, что возбуждения должны рождаться или уничтожаться парами, как это и ожидается для фермионов (именно по этой причине «спектроскопическая» щель равна 2Δ , а не Δ). Рассматривая, например, выражение $\gamma_{\mathbf{k}0}^* \gamma_{\mathbf{k}'0}^* |\Psi_G\rangle$ и используя результат (2.65а), видим, что результирующее состояние имеет вполне определенную N -частичную проекцию

$$c_{\mathbf{k}\uparrow}^* c_{\mathbf{k}'\uparrow}^* \int_0^{2\pi} d\varphi \exp\{-i(N-2)\varphi/2\} \prod_{l \neq \mathbf{k}, \mathbf{k}'} (|u_l| + |v_l| \exp(i\varphi) c_{l\uparrow}^* c_{-l\downarrow}^*) |\Phi_0\rangle. \quad (2.66)$$

Предвосхищая обсуждение туннельных экспериментов, в которых возбужденные состояния рождаются благодаря реальному удалению или добавлению электрона, отметим, что состояние, возникающее при действии оператора $\gamma_{\mathbf{k}0}^*$ на N -электронную систему, описывается выражением

$$c_{\mathbf{k}\uparrow}^* \int d\varphi \exp\{-iN'\varphi/2\} \prod_{l \neq \mathbf{k}} (|u_l| + |v_l| \exp(i\varphi) c_{l\uparrow}^* c_{-l\uparrow}^*) |\Phi_0\rangle, \quad (2.67)$$

в котором $N' = N$, если электрон добавляется, и $N' = N - 2$, если электрон удаляется. Таким образом, всегда можно выписать точные выражения для различных возбужденных состояний, содержащих точно определенное число частиц, хотя это и редко

бывает нужно. Важный качественный момент состоит в том, что для сохранения полного числа частиц можно добавлять к конденсату или удалять из него пары электронов; для сохранения энергии такие электроны должны находиться на уровне химического потенциала μ .

Чтобы избежать необходимости работы с точной волновой функцией типа (2.66) или (2.67), вслед за Джозефсоном [19] введем операторы S и S^* , которые соответственно уничтожают или рождают куперовскую пару. Позднее, при изучении эффекта Джозефсона, станет ясно, что собственное значение оператора S в состоянии БКШ с фазой Δ (или u^*v), равной ϕ , равно $\exp\{i\phi\}$. Оператор p , эквивалентный S , был также введен Бардиным [20]. Теперь можно определить набор модифицированных квазичастичных операторов, которые с вероятностью, равной единице, рождают или электрон, или дырку, т. е. либо увеличивают, либо уменьшают число частиц на одну. Для этого вместо операторов двух типов (2.63) вводятся операторы четырех типов:

$$\begin{aligned}\gamma_{ek0}^* &= u_k^* c_{k\uparrow}^* - v_k^* S^* c_{-k\downarrow}, \\ \gamma_{hk0}^* &= u_k^* S c_{k\uparrow}^* - v_k^* c_{-k\downarrow}, \\ \gamma_{ek1}^* &= u_k^* c_{-k\downarrow}^* + v_k^* S^* c_{k\uparrow}, \\ \gamma_{hk1}^* &= u_k^* S c_{-k\downarrow}^* + v_k^* c_{k\uparrow}.\end{aligned}\quad (2.68)$$

Отметим, что операторы для электронов и дырок связаны соотношением

$$\gamma_{hk}^* = S \gamma_{ek}^*, \quad (2.69)$$

отражающим тот факт, что рождение дырочного возбуждения эквивалентно уничтожению пары и рождению электроноподобного возбуждения. Следовательно, это не независимые возбуждения, а одно и то же возбуждение при различном числе сконденсированных пар.

При исследовании туннельных процессов, в которых электроны перемещаются из одной системы в другую, полезно переопределить химический потенциал более точно, так, чтобы он отличался в проводниках, имеющих разные электрические потенциалы. Так как во всех вычислениях энергия системы отсчитывалась от химического потенциала μ , благодаря вычитанию члена $\mu N_{\text{оп}}$, снова прибавим его и получим следующее выражение:

$$\mathcal{H} = \mu N_{\text{оп}} + E_G + \sum_k E_k \gamma_k^* \gamma_k. \quad (2.70)$$

Здесь E_G — энергия основного состояния, а суммирование ведется по всем возбуждениям. Из выражения (2.70) видно, что энергия, необходимая для создания электроноподобного возбуждения, равна $E_{ek} = (E_k + \mu)$, в то время как для создания дырки требуется $E_{hk} = (E_k - \mu)$. В изолированном сверхпроводнике простейшее возбуждение, сохраняющее число частиц, состоит из дырки и

Электрона и имеет энергию

$$(E_k + \mu) + (E_{k'} - \mu) = E_k + E_{k'} \geq 2\Delta. \quad (2.71)$$

С другой стороны, в туннельных процессах при переходе электрона из металла 1 в металл 2 закон сохранения энергии приводит к выражению

$$(E_{k1} - \mu_1) + (E_{k'2} + \mu_2) = 0,$$

т. е.

$$E_{k1} + E_{k'2} = (\mu_1 - \mu_2) = eV_{12}. \quad (2.72)$$

С исторической точки зрения интересно отметить, что в первоначальной форме теории БКШ было необходимо специальным образом рассматривать «возбужденные пары», так как возбужденное состояние, образуемое из состояния (2.66) заменой ($-k\downarrow$) на $k'\uparrow$, не ортогонально основному состоянию. Однако если возбужденные состояния описываются операторами γ_k^* , то уже не требуется привлечения специальных дополнительных математических процедур и соответствующее ортогональное состояние строится автоматически как $\gamma_{k1}\gamma_{k'2}^* |\Psi_G\rangle$.

2.7.1. Плотность состояний

После того как мы убедились, что квазичастичные возбуждения могут быть просто описаны операторами рождения фермионов γ_k^* , которые однозначно связаны с операторами c_k^* в нормальном металле, можно получить выражение для плотности состояний $N_s(E)$ из равенства *

$$N_s(E) dE = N_n(\xi) d\xi.$$

Так как в данном разделе рассматривается один сверхпроводник, удобнее положить $\mu=0$. Нам главным образом интересен диапазон энергий ξ всего лишь в несколько миллиэлектронвольт вблизи поверхности Ферми, поэтому мы можем считать величину $N_n(\xi)$ постоянной и равной $N(0)$. Это непосредственно приводит к следующему простому результату:

$$\frac{N_s(E)}{N(0)} = \frac{d\xi}{dE} = \begin{cases} \frac{E}{(E^2 - \Delta^2)^{1/2}} & (E > \Delta), \\ 0 & (E < \Delta), \end{cases} \quad (2.73)$$

так как $E_k^2 = \Delta^2 + \xi_k^2$. Возбуждения со всеми суммарными волновыми векторами \vec{k} , даже такие, у которых ξ_k попадают в область щели, обладают энергиями, превышающими Δ . Более того, при $E=\Delta$ имеет место расходимость в плотности состояний (рис. 2.4). Конечно, полное число состояний сохраняется, что следует из однозначного соответствия между операторами γ_k и c_k . Такое соответствие иллюстрируется рис. 2.5, на котором показано соотноше-

* Оно следует из равенства в нормальном и сверхпроводящем веществе чисел электронных состояний в импульсном пространстве. — Прим. ред. пер.

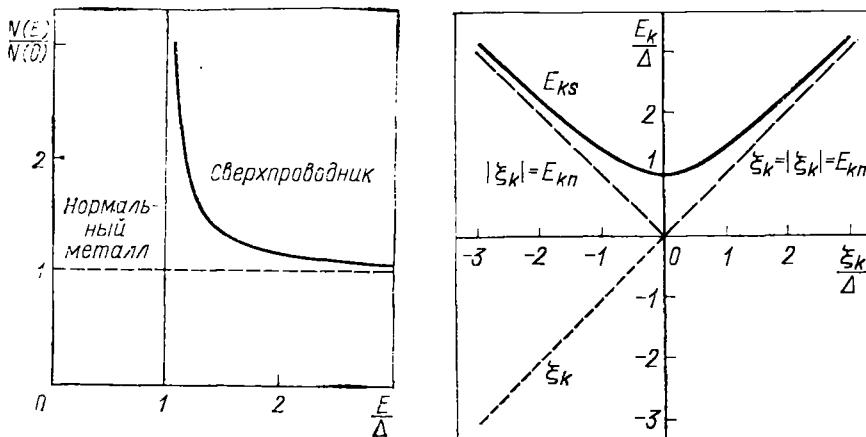


Рис. 2.4. Сравнение плотности состояний сверхпроводника и нормального металла. Все состояния с волновыми векторами \mathbf{k} , энергия которых в нормальном металле попадает в область щели, в сверхпроводнике располагаются в области энергий несколько выше щели

Рис. 2.5. Зависимость от ξ_k энергии элементарных возбуждений для нормального и сверхпроводящего состояний; ξ_k представляет собой кинетическую энергию независимых частиц, отсчитываемую от энергии Ферми

ние между энергиями возбуждений в нормальном и сверхпроводящем состояниях.

Если следовать буквально модели БКШ, то в плотности состояний должен присутствовать узкий пик на энергии обрезания $\hbar\omega_c$, так как при энергиях, больших этой величины, $\Delta=0$ и $E_k=-\xi_k$. В результате этого $N(0)\Delta^2/2\hbar\omega_c$ избыточных состояний попадут в область энергий ширины $\Delta^2/2\hbar\omega_c$, что приведет к удвоению $N(E)$ в этой области. Конечно, этот факт является следствием выбранной модели и не должен приниматься всерьез, так как зависит от способа заведомо грубой процедуры обрезания. Как будет показано в следующем разделе, более строгий учет взаимодействия электронов через фононы «размазывает» это возрастание на весь диапазон энергий $\hbar\omega_c$, так что действительные отклонения от выражения (2.73) оказываются порядка $(\Delta/\hbar\omega_c)^2$ или $(T_c/\Theta_D)^2$, хотя и дают примерно такой же интегральный вклад.

2.8. Туннелирование электронов

К настоящему времени наиболее детальную информацию о плотности состояний дают эксперименты по туннелированию электронов. Техника таких экспериментов была впервые описана Гьевером [21], который использовал ее для проверки выражения для плотности состояний и температурной зависимости энергетической щели, предсказываемых БКШ. Основная идея этих экспе-

риментов базируется на том, что существует отличная от нуля вероятность переноса заряда при квантовомеханическом туннелировании электронов через тонкий изолирующий барьер между двумя проводниками. Эта вероятность убывает экспоненциально с толщиной барьера и зависит от характеристики изолирующего материала. Однако все эти характеристики могут быть включены в феноменологический матричный элемент T_{kq} добавлением к гамильтониану слагаемого вида

$$\mathcal{H}_T = \sum_{\sigma k q} T_{kq} c_{k\sigma}^* c_{q\sigma} + \text{эрм. сопр.} \quad (2.74)$$

В нем индекс k относится к одному металлу, а индекс q — к другому. Так как в задаче отсутствуют магнитные возмущения, предположим, что при туннелировании не происходит переворота спина. Слагаемое, выписанное под знаком суммы в выражении (2.74) явно, описывает переход электрона из металла q в металл k , а сопряженный член — обратный переход. До тех пор пока не учитываются когерентные процессы джозефсоновского туннелирования, вероятность туннелирования (и, следовательно, ток) пропорциональна, как обычно, квадрату матричного элемента.

Если будем рассматривать, например, электрон, протуннелировавший [согласно выражению (2.74)] в сверхпроводник в состояние $k\uparrow$, то нужно будет, используя формулу (2.68), выразить это электронное состояние через соответствующие сверхпроводнику возбуждения ψ_k , что даст

$$c_{k\uparrow}^* = u_k \gamma_{ek0}^* + v_k^* \gamma_{ek1}. \quad (2.75)$$

Если сверхпроводник находится в основном состоянии, то второе слагаемое даст нуль и вклад туннелирования в ток будет пропорционален $|u_k|^2 |T_{kq}|^2$. Физический смысл множителя $|u_k|^2$ состоит в вероятности того, что состояние k в волновой функции БКШ свободно и, следовательно, способно принять входящий электрон. Итак, на первый взгляд кажется, что туннельный ток должен зависеть как от природы основного сверхпроводящего состояния, так и от плотности имеющихся возбужденных состояний; однако оказывается, что это не так. Из рис. 2.5 ясно видно, что имеется еще одно состояние с точно такой же энергией $E_{k'} = E_k$, но с $\xi_{k'} = -\xi_k$. Заменяя в выражении (2.75) k на k' , видим, что, так как $|u(-\xi)| = |v(\xi)|$, туннелирование в состояние k' дает вклад в ток, пропорциональный $|u_{k'}|^2 |T_{k'q}|^2 = |v_k|^2 |T_{k'q}|^2$. Так как оба вектора k и k' лежат вблизи одной и той же точки поверхности Ферми, разумно предположить, что матричные элементы T_{kq} и $T_{k'q}$ приблизительно равны друг другу. Поэтому полный ток, учитывающий эти два канала, пропорционален $(|u_k|^2 + |v_k|^2) |T_{kq}|^2 = |T_{kq}|^2$. Таким образом, множители u_k и v_k , характеризующие когерентность волновой функции, выпали. Если провести обобщение на случай конечных температур, при которых числа заполнений квазичастичных состояний f_k отличны от нуля, то оба слагаемых в выражении (2.75) дадут вклад, пропорциональный соответственно величинам $(1 - f_k)$, f_k . Если сно-

ва учесть вклад прямого и обратного туннелирования, то ток окажется пропорциональным просто $|T_{kq}|^2$.

2.8.1. Полупроводниковая модель

Такое отсутствие факторов когерентности u_k и v_k в выражении для туннельного тока делает возможным и удобным его вычисление в рамках модели, часто называемой «полупроводниковой». В этом методе нормальный металл описывают известным простым способом: как непрерывное распределение независимых электронных состояний с плотностью $N(0)$, включая энэргии, лежащие как выше, так и ниже уровня Ферми. Сверхпроводник представляется как обычный полупроводник с плотностью состояний независимых частиц, определяемой из рис. 2.4, который следует дополнить зеркальным отображением представленной кривой в область отрицательных относительно химического потенциала энергий, с тем чтобы при $\Delta \rightarrow 0$ она нужным образом переходила в плотность состояний нормального металла. При $T=0$ заполнены все состояния до μ , при $T>0$ числа заполнения определяются распределением Ферми. В том, что f_k изменяется теперь от 0 до 1, в то время как в предыдущих обозначениях f_k изменялось от 0 до 1/2, что определялось положительным знаком E_k , не содержится противоречия. Указанное отличие отражает тот факт, что в данной модели величина f_k является мерой отклонения от вакуума, в то время как в прежнем «представлении возбуждений» она характеризовала отклонения от основного состояния системы.

В этой модели все туннельные переходы «горизонтальны», т. е. они происходят при постоянной энергии после установления относительного уровня μ двух металлов, учитывающего приложенную разность потенциалов eV . Это свойство модели позволяет элементарным образом проводить суммирование всех вкладов в ток, благодаря тому что упомянутые выше различные параллельные каналы не приходится каждый раз рассматривать заново. Так как эта схема существенно упрощает вычисления, используем именно ее для расчета туннельных характеристик переходов различного типа; более детальные теории можно найти в опубликованной литературе*. Однако необходимо помнить, что эта техника в некоторой степени *слишком* проста. Она вполне пригодна для нормального металла, но менее надежна при изучении сверхпроводников, так как не учитывает перемешивания электронных и дырочных состояний, которое имеет место в сверхпроводниках даже при $T=0$. Хотя приведенные выше аргументы в пользу простого суммирования токов двух независимых каналов обычно справедливы, может иметь место эффект интерференции между этими токами, приводящий к осцилляционной зависимости туннельного тока от напряжения или толщины образца, известный

* Тщательное обсуждение вкладов различных каналов было проведено в работе [22]; более ранние исследования и обзоры см. в работах [23—25].

как эффект Томаша [26]. Это говорит о необходимости осторожного использования полупроводниковой модели. Конечно, эта модель неприменима также для описания процессов, в которых участвуют конденсированные пары, потому что на диаграмме энергетических уровней основное состояние отсутствует.

В приближении независимых частиц туннельный ток из металла 1 в металл 2 может быть представлен в виде

$$I_{1 \rightarrow 2} = A \int_{-\infty}^{\infty} |T|^2 N_1(E) f(E) N_2(E + eV) [1 - f(E + eV)] dE.$$

Здесь V — приложенное напряжение, eV — возникающая на контакте разность химических потенциалов, а $N(E)$ — нормальная или сверхпроводящая плотность состояний. Множители $N_1 f$ и $N_2(1-f)$ показывают соответственно числа занятых начальных и имеющихся (т. е. свободных) конечных состояний в единичном энергетическом интервале. Туннельный матричный элемент T считается в этом выражении постоянным; A — некоторая постоянная. Учитывая обратный ток, для суммарного тока имеем

$$I = A |T|^2 \int_{-\infty}^{\infty} N_1(E) N_2(E + eV) [f(E) - f(E + eV)] dE. \quad (2.76)$$

Используем это выражение для анализа ряда важных случаев.

2.8.2. Туннелирование между нормальными металлами

Если оба металла нормальные, то выражение (2.76) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} I_{nn} &= A |T|^2 N_1(0) N_2(0) \int_{-\infty}^{\infty} [f(E) - f(E + eV)] dE = \\ &= A |T|^2 N_1(0) N_2(0) eV \equiv G_{nn} V. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Видно, что переход оказывается «комическим», т. е. имеет не зависящую от V проводимость G_{nn} . Отметим, что эта проводимость также не зависит и от температуры.

Чтобы продемонстрировать соотношение полупроводниковой модели (модели независимых частиц) с описанием поведения сверхпроводника на языке элементарных возбуждений, посмотрим, каким образом этот простой случай может быть проанализирован другим способом. Во-первых, при $T=0$ все $f_k=0$ и возбуждения отсутствуют. Оба металла находятся в своем основном ферми-состоянии. Поэтому любой процесс туннелирования должен приводить к рождению двух возбуждений: дырки в одном металле и электрона в другом. Сумма энергий этих двух возбуждений равна, как следует из выражения (2.72), eV , а результирующий ток

$$I = A |T|^2 \int_0^{eV} N_1(E) N_2(E - eV) dE = A |T|^2 N_1(0) N_2(0) eV$$

в точности равен полученному ранее в выражении (2.77). При $T > 0$ ток, связанный с этим процессом, уменьшается, так как всегда присутствуют возбуждения, блокирующие конечные состояния. Этот эффект, однако, полностью компенсируется избыточным током, связанным с туннелированием возбуждений, что и приводит к результату, не зависящему от температуры.

2.8.3. Туннелирование между нормальным металлом и сверхпроводником

Более интересный случай возникает, если один из металлов является сверхпроводником. Тогда из формулы (2.76) имеем

$$\begin{aligned} I_{ns} &= A |T|^2 N_2(0) \int_{-\infty}^{\infty} N_{1s}(E) [f(E) - f(E + eV)] dE = \\ &= \frac{G_{nn}}{e} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_{1s}(E)}{N_1(0)} [f(E) - f(E + eV)] dE. \quad (2.78) \end{aligned}$$

В общем случае вычисление этого тока для плотности состояний БКШ, позволяющее провести количественное сравнение с экспериментом, требует применения численных методов, но его качественное поведение можно представить достаточно легко. Как показано на рис. 2.6, а, при $T = 0$ туннельный ток отсутствует до тех пор, пока не выполнится неравенство $e|V| \geq \Delta$. Это связано с тем, что разность химических потенциалов должна быть достаточной для рождения возбуждения в сверхпроводнике. Величина тока не зависит от знака V , так как дырочное и электронное возбуждения имеют равные энергии. При $T > 0$ всегда существуют возбуждения с энергией, позволяющей им туннелировать при меньших напряжениях, что приводит к экспоненциально меняющемуся току в областях напряжений, меньших $V = \Delta/e$.

Более точное сравнение теории с экспериментом делает возможным изучение зависимости дифференциальной проводимости dI/dV от V . Из формулы (2.78) получаем

$$G_{ns} = \frac{dI_{ns}}{dV} = G_{nn} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_{1s}(E)}{N_1(0)} \left[-\frac{\partial f(E + eV)}{\partial(eV)} \right] dE. \quad (2.79)$$

Весовая функция $-\partial f(E + eV)/\partial(eV)$ имеет форму колокола с максимумом при $E = -eV$, шириной $\sim kT$ и единичной площадью под кривой. Поэтому при $kT \rightarrow 0$ выражение (2.79) переходит в следующее:

$$G_{ns} \Big|_{T=0} = \frac{dI_{ns}}{dV} \Big|_{T=0} = G_{nn} \frac{N_{1s}(e|V|)}{N_1(0)}. \quad (2.80)$$

Таким образом, в пределе низких температур дифференциальная проводимость непосредственно соответствует плотности состоя-

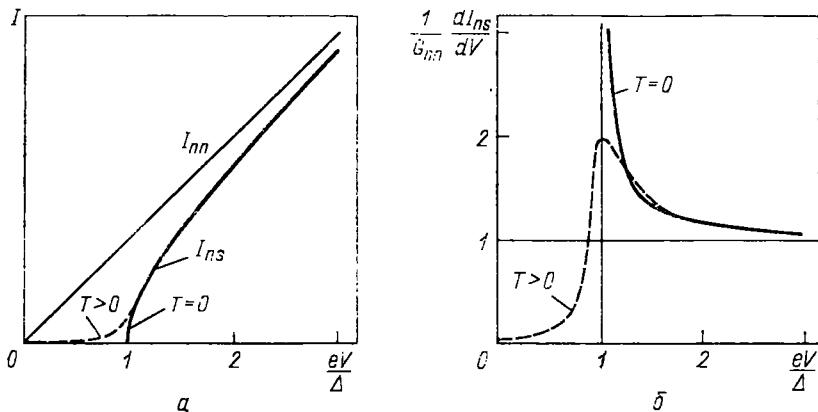


Рис. 2.6. Характеристики туннельного перехода между нормальным металлом и сверхпроводником:

а — вольт-амперная характеристика; *б* — дифференциальная проводимость. Сплошной линией показаны зависимости при $T=0$, пунктирной — при некоторой конечной температуре

ний. При конечных температурах, как показано на рис. 2.6, *б*, дифференциальная проводимость соответствует плотности состояний, размытой благодаря конечной ширине весовой функции по энергии на величину порядка kT . Так как эта функция имеет экспоненциально спадающие «крылья», оказывается, что дифференциальная проводимость при $V=0$ экспоненциально зависит от ширины щели: в пределе $kT \ll \Delta$ из выражения (2.79) следует

$$\frac{G_{ns}}{G_{nn}} \Big|_{V=0} = \left(\frac{2\pi\Delta}{kT} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{\Delta}{kT} \right). \quad (2.81)$$

2.8.4. Туннелирование между двумя сверхпроводниками

Если оба металла являются сверхпроводниками, то выражение для тока (2.76) становится равным

$$I_{ss} = \frac{G_{nn}}{e} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_{s1}(E)}{N_1(0)} \frac{N_{s2}(E+eV)}{N_2(0)} [f(E) - f(E+eV)] dE = \\ = \frac{G_{nn}}{e} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|E|}{[E^2 - \Delta_1^2]^{1/2}} \frac{|E+eV|}{[(E+eV)^2 - \Delta_2^2]^{1/2}} [f(E) - f(E+eV)] dE. \quad (2.82)$$

Во второй форме записи выражения для тока считается, что из области интегрирования исключены значения энергии $|E| < |\Delta_1|$ и $|E+eV| < |\Delta_2|$. Для вычисления всей вольт-амперной характеристики (ВАХ) снова требуется применение численных методов, а ее качественные особенности представлены на рис. 2.7. При $T=0$ ток будет отсутствовать до тех пор, пока не выполнится равенство

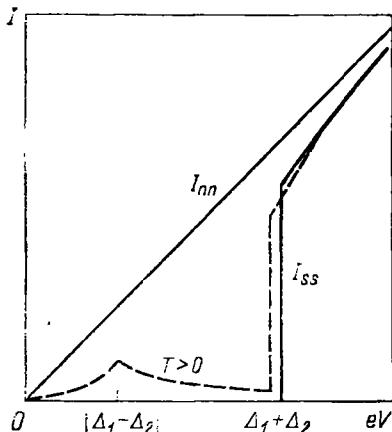


Рис. 2.7. Туннельная характеристика перехода между двумя сверхпроводниками. При $T>0$ на ней имеются особенности, соответствующие как сумме, так и разности значений двух энергетических щелей. В отсутствие анизотропии щели и уширения уровней за счет эффектов, связанных с конечными временами жизни, зависимость $I(eV)$ имеет особенность логарифмического характера при $eV=|\Delta_1-\Delta_2|$

$eV=\Delta_1+\Delta_2$. В этой точке разность потенциалов оказывается достаточной для рождения дырки в одном сверхпроводнике и электрона в другом. Оказывается, что вследствие расходимости плотности состояний в области энергий вблизи щели, даже при конечных температурах, имеется резкий скачок тока при $eV=\Delta_1+\Delta_2$. В случае $T>0$ из-за конечной вероятности теплового возбуждения квазичастиц ток будет протекать и при меньших напряжениях. Он будет резко нарастать, достигая максимума при $eV=|\Delta_1-\Delta_2|$. Это напряжение точно соответствует энергии, при которой возможно туннелирование возбужденных тепловыми процессами квазичастиц из области пика в плотности состояний в окрестности Δ_1 в область с максимальной плотностью свободных состояний в окрестности Δ_2 . Существование максимума тока приводит к образованию на ВАХ «участка с отрицательным сопротивлением» $[(dI/dV)<0]$ в области напряжений $|\Delta_1-\Delta_2|\leq eV\leq\Delta_1+\Delta_2$. Этот участок не может быть обнаружен в обычном режиме задания тока, так как при заданном токе I возможны три значения напряжения V и одно из них с $dI/dV<0$ неустойчиво; для обеспечения его устойчивости необходимо использовать источник напряжения *. Существование на кривых туннелирования особенностей при $|\Delta_1-\Delta_2|$ и $\Delta_1+\Delta_2$ весьма удобно для определения величин $\Delta_1(T)$ и $\Delta_2(T)$. Таким образом, определение $\Delta(T)$ методом $s-s$ туннелирования имеет преимущество по сравнению с методом $s-n$ туннелирования, так как существование очень резких максимумов в плотностях состояний в окрестности щели обоих материалов помогает избавиться от эффектов, связанных с тепловым уширением.

* Даже в этом случае участок с отрицательным сопротивлением может давать неустойчивости, приводящие к возбуждению нелинейных колебаний и в результате к отклонению наблюдаемой характеристики от истинной. — Прим. ред. пер.

2.8.5. Фононная структура:

При исследовании кривых туннелирования в материалах с сильным электрон-фононным взаимодействием можно довольно легко наблюдать особенности, не совпадающие с описанными выше. Они были впервые обнаружены в свинце Гевером и др. [27], которые заметили, что эти особенности появляются в области энергий, характерных для фононной структуры. С тех пор такие наблюдения, а также их теоретическая обработка были значительно усовершенствованы. Ключевым моментом явилась работа Шриффера, Скалапино и Вилкинса [28], в которой было показано, что наблюдаемая плотность состояний должна быть равна

$$N_s(E) = N(0) \operatorname{Re} \frac{E}{[E^2 - \Delta^2(E)]^{1/2}}, \quad (2.83)$$

где знаком Re обозначена реальная часть последующего выражения. Этот результат сводится к полученному ранее выражению (2.73), если Δ действительна и постоянна, как в простой модели БКШ. Однако в теории сильной связи Δ оказывается комплексной и зависящей от энергии. Получающаяся в результате вычислений фаза $\Delta(E)$ зависит от энергии, имеет вполне определенный физический смысл и не связана с простой произвольно выбранной фазой в приближении БКШ. Мнимая часть Δ соответствует затуханию квазичастичных возбуждений в результате их распада с генерацией реального фонона, поэтому она возрастает при $E \approx \hbar\omega_{ph}$; соответствующее резонансное изменение претерпевает и величина $\operatorname{Re}\Delta$.

Естественно, этот факт вряд ли может вызвать удивление, так как в нашей модели взаимодействие, приводящее к сверхпроводимости, обусловлено фононной средой. Простое приближение БКШ не учитывает этих деталей, обусловленных запаздывающей природой взаимодействия, за исключением их грубого проявления, заключающегося в появлении узкого пика в окрестности $\hbar\omega_c$ (см. конец разд. 2.7). Однако оказалось, что более точная теория Элиашберга [29] позволяет провести количественный учет наблюдаемых явлений. Совпадение результатов этой теории и экспериментальных данных для таких материалов, как свинец и ртуть, развеяло все сомнения относительно применимости электрон-фононного механизма для объяснения сверхпроводимости этих материалов.

Макмилланом и Роузлом [25, 30, 31] был предложен удачный метод, позволяющий из туннельных измерений определять произведение $a^2 F$ двух зависящих от энергии сомножителей, которые представляют собой постоянную электрон-фононного взаимодействия и плотность фононных состояний. Их результаты достаточно хорошо совпали с величинами $a^2 F$, определенными из экспериментов по рассеянию нейтронов на фононах. Туннельные измерения позволяют с большой точностью определить такие особенности, как местонахождение сингулярности Ван-Ховена в фонон-

ной плотности состояний, которая проявляется в виде пика на экспериментально снимаемой записи второй производной туннельного тока по напряжению.

2.9. Вероятности прохождения и эффекты когерентности

Эффект воздействия внешнего возмущения на электроны в металле может быть описан добавлением к гамильтониану слагаемого, описывающего это взаимодействие:

$$\mathcal{H}_1 = \sum_{\mathbf{k}\sigma, \mathbf{k}'\sigma'} B_{\mathbf{k}'\sigma', \mathbf{k}\sigma} c_{\mathbf{k}'\sigma'}^* c_{\mathbf{k}\sigma}. \quad (2.84)$$

Здесь $B_{\mathbf{k}'\sigma', \mathbf{k}\sigma}$ — матричный элемент оператора возмущения, вычисленный по обычным одноэлектронным состояниям нормального металла. В нормальном состоянии каждое из слагаемых этой суммы независимо и квадрат каждого из коэффициентов $B_{\mathbf{k}'\sigma', \mathbf{k}\sigma}$ пропорционален соответствующей вероятности перехода. В сверхпроводящем состоянии, которое является фазо-когерентной суперпозицией занятых одноэлектронных состояний, такой пропорциональности уже нет. Это приводит к появлению интерференционных слагаемых, отсутствующих в нормальном состоянии.

Их появление можно проследить, если выразить слагаемые в выражении (2.84) через операторы γ , после чего станет ясно, что слагаемые $c_{\mathbf{k}'\sigma}^* c_{\mathbf{k}\sigma}$ и $c_{-\mathbf{k}-\sigma}^* c_{-\mathbf{k}'-\sigma'}$ связаны с одинаковыми квазичастичными состояниями. Например,

$$c_{\mathbf{k}'\uparrow}^* c_{\mathbf{k}\uparrow} = u_{\mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}}^* \gamma_{\mathbf{k}'0}^* \gamma_{\mathbf{k}0} - v_{\mathbf{k}'}^* v_{\mathbf{k}} \gamma_{\mathbf{k}1}^* \gamma_{\mathbf{k}'1} + \\ + u_{\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}} \gamma_{\mathbf{k}'0}^* \gamma_{\mathbf{k}1}^* + v_{\mathbf{k}'}^* u_{\mathbf{k}}^* \gamma_{\mathbf{k}'1} \gamma_{\mathbf{k}0} \quad (2.85a)$$

и

$$c_{-\mathbf{k}\downarrow}^* c_{-\mathbf{k}'\downarrow} = -v_{\mathbf{k}}^* v_{\mathbf{k}'} \gamma_{\mathbf{k}'0}^* \gamma_{\mathbf{k}0} + u_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}'}^* \gamma_{\mathbf{k}1} \gamma_{\mathbf{k}'1} + \\ + u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}'} \gamma_{\mathbf{k}'0}^* \gamma_{\mathbf{k}1}^* + v_{\mathbf{k}}^* u_{\mathbf{k}'}^* \gamma_{\mathbf{k}'1} \gamma_{\mathbf{k}0}. \quad (2.85b)$$

Ясно, что матричные элементы этих двух слагаемых в выражении (2.84) необходимо сложить до возвведения в квадрат, так как при определении интенсивности перехода они складываются когерентно.

Это сложение можно провести достаточно просто, если предположить, что коэффициенты $B_{\mathbf{k}'\sigma', \mathbf{k}\sigma}$ и $B_{-\mathbf{k}-\sigma, -\mathbf{k}'-\sigma'}$ могут отличаться лишь знаком, в связи с тем что каждый из них соответствует процессу, в котором волновой вектор электрона изменяется на $\mathbf{k}'-\mathbf{k}$, а его спин на $\sigma'-\sigma$. Поэтому эти слагаемые можно объединить следующим образом:

$$B_{\mathbf{k}'\sigma', \mathbf{k}\sigma} (c_{\mathbf{k}'\sigma'}^* c_{\mathbf{k}\sigma} \pm c_{-\mathbf{k}-\sigma}^* c_{-\mathbf{k}'-\sigma'}), \quad (2.86)$$

где выбор знака зависит от природы \mathcal{H}_1 .

В работе БКШ было показано, что имеют место два случая. Случай I типичен для электрон-фононного взаимодействия, опре-

деляющего, например, затухание ультразвука. Являясь результатом взаимодействия электрона с простым скалярным потенциалом деформаций, это затухание зависит только от изменения волнового вектора и не зависит от значения вектора \mathbf{k} или проекции спина σ . При этом два матричных элемента имеют одинаковые знаки и складываются когерентно. Случай II типичен для взаимодействия электрона с электромагнитным полем, описываемым произведением $\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}$. Так как это произведение меняет знак при замене \mathbf{k} на $-\mathbf{k}$, в выражении (2.86) следует поставить знак минус.

Ни одно из перечисленных выше взаимодействий не влияет на спин; поэтому $\sigma = \sigma'$. Если изменение направления спина имеет место, например из-за слагаемого вида $I_+ S_-$, описывающего сверхтонкое взаимодействие электрона с ядром, то знаки формально меняются на обратные. Следуя БКШ, учтем такую возможность, введя множитель $\Theta_{\sigma\sigma'}$, равный ± 1 при $\sigma' = \pm \sigma$. Таким образом, после приведения подобных членов и выбора u_k , v_k и Λ действительными выражение (2.86) приобретает вид

$$B_{k'\sigma', k\sigma} [(u_{k'} u_k \pm v_{k'} v_k) (\gamma_{k'\sigma'}^* \gamma_{k\sigma} \pm \Theta_{\sigma\sigma'} \gamma_{-k-\sigma}^* \gamma_{-k'-\sigma'}) + \\ + (v_{k'} u_k \pm u_{k'} v_k) (\gamma_{k'\sigma'}^* \gamma_{-k-\sigma}^* \pm \Theta_{\sigma\sigma'} \gamma_{-k'-\sigma} \gamma_{k\sigma})]. \quad (2.87)$$

Для упрощения записи этого выражения при произвольной ориентации спина были использованы несколько модифицированные обозначения, согласно которым $\gamma_{k\sigma} = \gamma_{k0}$ при $\sigma = \uparrow$ и $\gamma_{k\sigma} = \gamma_{-k1}$ при $\sigma = \downarrow$. Из выражения (2.87) видно, что множитель $\Theta_{\sigma\sigma'}$ в действительности не влияет на вероятность перехода, а лишь воздействует на фазу недиагональных матричных элементов, связывающих различные состояния.

Основной вопрос состоит в том, к какому случаю (I или II) принадлежит взаимодействие, т. е. верхний или нижний знак брать в факторах когерентности при комбинациях u_k и v_k в выражении (2.87). Например, одно из слагаемых, описывающих сверхтонкое взаимодействие ($I_z S_z$), не приводит к перевороту спина и, следовательно, дает $\Theta_{\sigma\sigma'} = 1$, а не -1 , как для приведенного выше члена $I_+ S_-$. Тем не менее обе эти ситуации следует отнести к случаю II, так как эти слагаемые нечетны по отношению к операции переворота спина. Обобщая приведенные примеры, можно сделать следующий вывод. Возмущения относятся к случаям I или II, если они соответственно четны или нечетны по отношению в временемому обращению электронных состояний, которое меняет местами партнеров в куперовской схеме спаривания.

Из выражения (2.87) видно, что при вычислении вероятностей перехода квадрат матричного элемента будет умножаться на так называемые *факторы когерентности*, а именно на $(uu' \mp vv')^2$ при рассеянии квазичастиц и на $(vv' \pm uu')^2$ при рождении или уничтожении двух квазичастиц (при написании этих выражений было проведено очевидное сокращение обозначений). Воспользовавшись для u и v выражениями (2.35), можно получить явную зависимость этих факторов от энергии. Например,

$$\begin{aligned}
(uu' \mp vv')^2 &= \frac{1}{4} \left\{ \left[\left(1 + \frac{\xi}{E} \right) \left(1 + \frac{\xi'}{E'} \right) \right]^{1/2} \mp \left[\left(1 - \frac{\xi}{E} \right) \times \right. \right. \\
&\quad \times \left. \left(1 - \frac{\xi'}{E'} \right) \right]^{1/2} \right\}^2 = \frac{1}{4} \left\{ \left(1 + \frac{\xi}{E} + \frac{\xi'}{E'} + \frac{\xi\xi'}{EE'} \right) + \right. \\
&+ \left(1 - \frac{\xi}{E} - \frac{\xi'}{E'} + \frac{\xi\xi'}{EE'} \right) \mp 2 \left[\left(1 - \frac{\xi^2}{E^2} \right) \left(1 - \frac{\xi'^2}{E'^2} \right) \right]^{1/2} = \\
&= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi\xi'}{EE'} \mp \frac{\Delta^2}{EE'} \right).
\end{aligned}$$

E — четная функция ξ , и, следовательно, слагаемые, входящие в пары, такие, как нечетные по ξ и ξ' , сокращаются при суммировании по ξ_k . Поэтому действительный фактор когерентности для *рассеяния* равен

$$(uu' \mp vv') = \frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{\Delta^2}{EE'} \right). \quad (2.88a)$$

Аналогичным образом для фактора когерентности, отвечающего *рождению* или *уничтожению* пары квазичастиц, имеем

$$(vu' \pm uv') = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\Delta^2}{EE'} \right). \quad (2.88b)$$

Уместно напомнить, что в «полупроводниковой» модели имеется договоренность о знаке, согласно которой одной из каждой пары рожденных или уничтоженных квазичастиц приписывается отрицательная энергия, поэтому факторы когерентности как для рассеяния, так и для рождения пары имеют одинаковый вид:

$$F(\Delta, E, E') = \frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{\Delta^2}{EE'} \right). \quad (2.89)$$

Верхний знак соответствует случаю I, нижний — случаю II.

Очевидно, что факторы когерентности сильнее всего сказываются при энергиях E и E' , локализованных вблизи края щели Δ , где, в зависимости от знака, выражение (2.89) приближительно равно либо 0, либо 1. Если рассматривать процессы рассеяния при малых энергиях $\hbar\omega \ll \Delta$, то рождения квазичастиц не происходит и E и E' имеют одинаковые знаки. Тогда для процессов, относящихся к случаю I (таких, как затухание ультразвука), $F \ll 1$, в то время как для процессов, относящихся к случаю II (например, ядерной релаксации), $F \approx 1$. Ситуация меняется на противоположную для высокозенергетических процессов с $\hbar\omega \geq 2\Delta$, при которых происходит рождение квазичастиц. Тогда $F \approx 1$ для процессов, относящихся к случаю I, и $F \ll 1$ для процессов, относящихся к случаю II. Если E и $E' \gg \Delta$, то, конечно, различие между двумя случаями будет незначительно и сверхпроводящая когерентность несущественна.

Эти общие рассуждения делаются более понятными, если рассмотреть примеры вычислений интенсивности перехода. Проводя те же рассуждения, что и при выводе выражения для туннельного

тока (2.76), получим, что суммарная интенсивность перехода между уровнями с энергиями E и $E = E + \hbar\omega$ пропорциональна

$$\alpha_s = \int |M|^2 F(\Delta, E, E + \hbar\omega) N_s(E) N_s(E + \hbar\omega) \times \\ \times [f(E) - f(E + \hbar\omega)] dE, \quad (2.90)$$

где M — величина соответствующего одноэлектронного матричного элемента. Так как в дальнейшем нас будет интересовать лишь отношение α_s к соответствующей величине в нормальном состоянии, нам не понадобится информация о величине M . После подстановки точных выражений для N_s и F и последующих упрощений из выражения (2.90) получим

$$\alpha_s = |M|^2 N^2(0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|E(E + \hbar\omega) \mp \Delta^2| [f(E) - f(E + \hbar\omega)]}{(E^2 - \Delta^2)^{1/2} [(E + \hbar\omega)^2 - \Delta^2]^{1/2}} dE.$$

В этом выражении считается, что интервалы энергий $|E| < \Delta$ и $|E + \hbar\omega| < \Delta$ исключены из области интегрирования. В нормальном состоянии $\Delta = 0$ и полученное выражение сводится к $\alpha_s = |M|^2 N^2(0) \hbar\omega$. Таким образом, искомое отношение равно

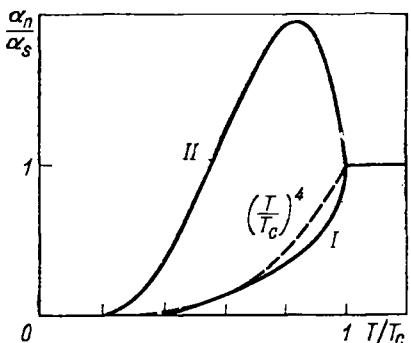
$$\frac{\alpha_s}{\alpha_n} = \frac{1}{\hbar\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|E(E + \hbar\omega) \mp \Delta^2| [f(E) - f(E + \hbar\omega)]}{(E^2 - \Delta^2)^{1/2} [(E + \hbar\omega)^2 - \Delta^2]^{1/2}} dE, \quad (2.91)$$

где верхний знак соответствует процессам, относящимся к случаю I, нижний — к случаю II. Используем теперь это общее выражение для изучения некоторых важных частных задач.

2.9.1. Затухание ультразвука

Как было отмечено выше, матричные элементы, характеризующие процесс затухания продольных звуковых волн, обладают факторами когерентности, относящимися к случаю I, т. е. в выражении (2.91) следует брать верхний знак. Ограничимся рассмотрением только продольных волн для того, чтобы избежать трудностей, возникающих при изучении поперечных волн. В последнем случае генерируются токи, которые, в свою очередь, приводят к электромагнитному экранированию, в результате чего возникает сложная смесь различных эффектов. Далее заметим, что в типичных экспериментах с ультразвуком его частота не превышает 10^9 Гц, следовательно, $\hbar\omega \leq 10^{-2}\Delta(0)$ и, кроме того, $\hbar\omega \ll kT$. Эти неравенства позволяют нам рассмотреть только простой случай низкой частоты. Переходя в выражении (2.91) к пределу $\hbar\omega \rightarrow 0$, видим, что большинство множителей сокращается:

$$\frac{\alpha_s}{\alpha_n} = \lim_{\hbar\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\hbar\omega} \int [f(E) - f(E + \hbar\omega)] dE = - \int \frac{\partial f}{\partial E} dE.$$



ней. Представленная на рисунке кривая соответствует уширению, приблизительно равному $0,02 \Delta(0)$

Здесь интегрирование ведется от $-\infty$ до $-\Delta$ и от Δ до ∞ . Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_s}{\alpha_n} &= f(-\infty) - f(-\Delta) + f(\Delta) - f(\infty) = \\ &= 2f(\Delta) = \frac{2}{1 + \exp\{\Delta/kT\}}. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Этот очень простой результат в сочетании с предыдущими вычислениями $\Delta(T)$ предсказывает температурную зависимость затухания, показанную на рис. 2.8. В частности, бесконечно большая производная $\Delta(T)$ при $T=T_c$ приводит к тому, что отношение α_s/α_n уменьшается с бесконечной производной при понижении T от T_c . С другой стороны, при $T \ll T_c$ превышение величины α_s/α_n над остаточным значением этого отношения, определяющимся неэлектронными механизмами, становится экспоненциально малым, так как число термически возбужденных квазичастиц, способных поглощать энергию, стремится к нулю.

Если возможно провести эксперимент при достаточно низких значениях температуры T/T_c и весьма точно определить остаточный уровень затухания, то по данным о затухании звука, используя формулу (2.92), можно сделать заключение о зависимости $\Delta(T)$. Действительно, пропуская звук в монокристаллах в различных направлениях, Морс и др. [32] одними из первых смогли получить некоторые данные об анизотропии щели Δ_k относительно кристаллических осей. Этот метод имеет определенный недостаток: при распространении звука в заданном направлении \hat{k}_s измеряется среднее значение Δ_k в плоскости, перпендикулярной этому направлению. Причина состоит в том, что для эффективной передачи энергии от звуковой волны к электронам составляющая скорости квазичастиц, параллельная \hat{k}_s , должна быть равна скорости звука. Так как $v_{\text{звук}} \ll v_{\text{электрона}}$, то наиболее эффективным оказывается затухание на электронах, движущихся почти перпендикулярно \hat{k}_s . Тем не менее из экспериментов такого типа (см., например, [33])

Рис. 2.8. Сравнение температурных зависимостей коэффициентов поглощения на низких частотах для процессов с факторами когерентности, соответствующими случаям I или II (сплошные линии), с зависимостью $(T/T_c)^4$, предсказываемой для всех процессов в двухжидкостной модели (пунктир). Зависимость для случая I (например, поглощение ультразвука) имеет хорошо определенный низкочастотный предел. Зависимость для случая II (ядерная релаксация или поглощение электромагнитных волн) не имеет определенного низкочастотного предела без учета анизотропии щели или уширения уровней.

было получено, что для олова величина $2\Delta(0)$ заключена в интервале от $3,3 kT_c$ до $3,9 kT_c$. Позднее Филипс [34] тщательно проанализировал детали картины упругого рассеяния в анизотропных сверхпроводниках и сделал вывод о том, что некоторые из более ранних представлений были слишком упрощенными.

Упомянутую выше экранировку электромагнитного поля при прохождении поперечных звуковых волн можно использовать для измерения глубины проникновения при температуре, очень близкой к T_c , т. е. там, где $\lambda_L(T)$ стремится к бесконечности. Дело в том, что экранирование становится полным, когда $\lambda_L(T)$ оказывается меньше длины ультразвуковой волны. Поэтому электродинамическое затухание становится пренебрежимо малым для более низких температур, что приводит к резкому падению затухания при отходе от T_c менее чем на 1%. Используя этот эффект, Фосхейм [35] из измерений отношения a_s/a_n получил, должно быть, наиболее достоверные среди имеющихся данные о величине λ_L для индия в области нескольких миллиградусов ниже T_c .

Другое осложнение, которое может возникнуть при измерениях затухания ультразвука, связано с электронным механизмом затухания движения дислокаций, вызванного взаимодействием со звуковыми волнами [36]. Этот процесс благодаря пиннингу дислокаций приводит к появлению нелинейного отклика, что весьма затрудняет определение отношения a_s/a_n , если только измерения не проводятся на очень малом уровне сигнала. Мэсон [37] показал, что с учетом этих эффектов можно объяснить аномальные экспериментальные данные, полученные для свинца (38), предположив значение щели $2\Delta(0) = 4,1 kT_c$, что находится в согласии с результатами, полученными другими способами.

2.9.2. Ядерная релаксация

Матричные элементы для релаксации ядерного спина из-за взаимодействия с квазичастицами имеют фактор когерентности, относящийся к случаю II, что соответствует «суммарному» характеру интерференции в рассматриваемых низкоэнергетических процессах рассеяния. Эта интерференция приводит к некоторому увеличению скорости релаксации $1/T_1$ по сравнению с этой величиной в нормальном состоянии при охлаждении ниже T_c , прежде чем она при дальнейшем уменьшении T экспоненциально устремится к нулю из-за «вымораживания» квазичастиц с энергиями выше щели. Такое поведение (см. рис. 2.8), подтвержденное экспериментально Хебелом и Слихтером [39, 40], резко отличается от уменьшения с вертикальной производной, полученного для затухания ультразвука. Теория спаривания БКШ, используя факторы когерентности, естественным образом объяснила это различие, что явилось одним из решающих достижений, подтвердивших правильность этой теории. В противоположность этому любая простая «двухжидкостная» модель, которая приписывает затухание ультразвука и ядер-

ную релаксацию определенной доле «нормальных электронов», должна привести к одинаковой температурной зависимости для всех подобных эффектов. Например, в модели, в которой эмпирическая температурная зависимость глубины проникновения $\lambda^{-2} \sim \sim [1 - (T/T_c)^4]$ связывается с температурным поведением отношения n_s/n в теории Лондонов, следует ожидать, что $n_s/n = (T/T_c)^4$. Как показано пунктирной кривой на рис. 2.8, эта зависимость качественно согласуется с результатом, полученным для затухания ультразвука. Однако она не может объяснить превышения $1/T_{1s}$ над $1/T_{1n}$, так как для этого потребовалось бы количество нормальных электронов, превышающее их общее число, не считая еще и «сверхпроводящие электроны».

Изучим вопрос о релаксации более подробно. Так же как и раньше, рассмотрим предельный случай, когда частоты $\hbar\omega = \hbar\gamma H$ много меньше Δ и kT . Однако в связи с тем, что факторы когерентности относятся к случаю II и $\alpha_s/\alpha_n \rightarrow \infty$ при $\omega \rightarrow 0$, нельзя получить результат так же просто, как раньше. Тем не менее все же возможно перейти от разности функций Ферми к производной по энергии:

$$\frac{\alpha_s}{\alpha_n} = 2 \int_{-\Delta}^{\infty} \frac{E(E + \hbar\omega) + \Delta^2}{(E^2 - \Delta^2)^{1/2} [(E + \hbar\omega)^2 - \Delta^2]^{1/2}} \left(-\frac{\partial f}{\partial E} \right) dE, \quad (2.93)$$

где коэффициент 2 учитывает тот факт, что интегрирование по отрицательной области энергий $E + \hbar\omega \leq -\Delta$ дает точно такой вклад, что и интегрирование по положительным энергиям $E \geq \Delta$. Если теперь положить $\omega = 0$, то получим выражение

$$\frac{\alpha_s}{\alpha_n} = 2 \int_{\Delta}^{\infty} \frac{E^2 + \Delta^2}{E^2 - \Delta^2} \left(-\frac{\partial f}{\partial E} \right) dE,$$

которое, как легко видеть, логарифмически расходится на нижнем пределе. Если ω остается конечной, то расходимость заменяется множителем типа $\ln(\Delta/\hbar\omega)$, приблизительно равным десяти для типичных значений параметров. Это все еще значительно больше, чем экспериментально наблюдаемое увеличение $1/T_1$, приблизительно равное лишь двум. Для объяснения этого количественного расхождения необходимо привлечь другие соображения. Причина появления расходимости в α_s может быть прослежена из формулы (2.93), содержащей произведение двух членов с резкими расходимостями, отражающими особенность в плотности состояний сверхпроводника. Опуская сомножители, не содержащие особенностей, при $\hbar\omega \ll \Delta$ имеем

$$\alpha \propto \int N(E) N(E + \hbar\omega) dE \approx \int N^2(E) dE.$$

Вследствие того, что значение интеграла $\int N(E) dE$ при переходе в сверхпроводящее состояние сохраняется, резкая особенность в $N_s(E)$ должна приводить к превышению $\int N_s^2(E) dE$ над

$\int N_n^2(E) dE$. Если переоценить реальную остроту пика в плотности состояний, используя слишком простую форму БКШ, то получается слишком большое значение a .

Были предложены два объяснения причин, приводящих к уширению пика в плотности состояний. Согласно первому из них, анизотропия энергетической щели в реальных кристаллах приводит к изменениям Δ на поверхности Ферми. Поэтому особенность в $N_s(E)$ размыта по относительному интервалу энергий, типичное значение которого равно 10%. Справедливость такого объяснения была подтверждена экспериментами Масуда [41], изучавшего свойства алюминия, содержащего различное количество примесей. Он обнаружил большее возрастание величины $1/T_1$ в более грязных образцах. Это согласуется с теорией Андерсона для грязных сверхпроводников, в которой показано, что щель должна становиться примерно одинаковой для всех электронов, если в быстро протекающих процессах рассеяния волновой вектор электрона \mathbf{k} неоднократно меняется в течение временного интервала \hbar/Δ .

Другое объяснение, предложенное Фибичем [42], состоит в том, что острота пика ограничивается из-за связанной с принципом неопределенности конечности времени жизни квазичастичных состояний по отношению к распаду на фононы*. Этот механизм не должен зависеть от концентрации примесей, но более важен для сверхпроводников с сильной связью. Некоторые экспериментальные данные, полученные для индия, подтверждают это предположение, и, таким образом, возможно, что каждый из этих механизмов существен при соответствующих условиях.

2.9.3. Поглощение электромагнитных волн

Так как здесь гамильтониан взаимодействия $\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}$ также приводит к факторам когерентности, относящимся к случаю II, для описания поглощения низкочастотного электромагнитного излучения мы можем использовать без какой-либо модификации результаты по ядерной релаксации, полученные в предыдущем разделе. Так как при заданной напряженности поля E поглощаемая в единице объема электромагнитная энергия равна $\sigma_1 E^2$, вместо отношения a_s/a_n находим теперь σ_{1s}/σ_n , где σ_{1s} — действительная часть комплексной проводимости $\sigma_1(\omega) = i\sigma_2(\omega)$. Поэтому в пределе $\hbar\omega \ll \Delta$ в области температур $T \leq T_c$ следует ожидать возрастания отношения σ_{1s}/σ_n до значений, превышающих единицу, и последующего экспоненциального спадания до нуля при дальнейшем уменьшении температуры. Как уже отмечалось выше, подобное поведение качественно несовместимо с простой двухжидкостной моделью, в которой $n_s \ll n$.

Однако в отличие от случая ядерной релаксации теперь можно использовать достаточно большие частоты облучения, при кото-

* Точнее, по отношению к релаксации по энергиям и дальнейшей рекомбинации в пары с испусканием фононов. — Прим. ред. пер.

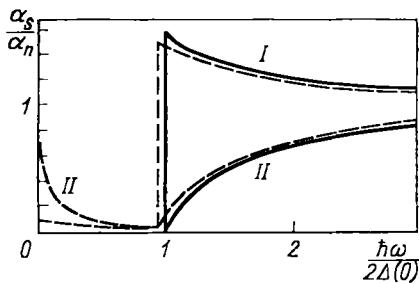


Рис. 2.9. Частотная зависимость коэффициентов поглощения в процессах с факторами когерентности, относящимися к случаям I и II. Сплошные кривые соответствуют $T=0$, пунктирные — $T \approx T_c/2$

рых возможно рождение пар квазичастиц. Процессы рождения происходят при $\hbar\omega \geqslant 2\Delta$ и протекают параллельно рассмотренным ранее процессам рассеяния. Действительно, при $T=0$ отсутствуют термически возбужденные квазичастицы и единственным процессом, приводящим к поглощению энергии, является рождение пар. Согласно использованному нами в «полупроводниковой» модели правилу знаков, энергия начального состояния $E \leqslant -\Delta$, а конечного состояния $E + \hbar\omega \geqslant \Delta$. Поэтому $\sigma_1(\omega) = 0$ при $\hbar\omega < 2\Delta$. Как показано на рис. 2.9, частота $\omega = 2\Delta/\hbar$ определяет край области поглощения. Полагая функции Ферми равными 0 или 1, из выражения (2.91) для поглощения при $T=0$ можно получить

$$\frac{\sigma_{1s}}{\sigma_n} \Big|_{T=0} = \frac{1}{\hbar\omega} \int_{\Delta-\hbar\omega}^{-\Delta} \frac{|E(E + \hbar\omega) + \Delta^2|}{(E^2 - \Delta^2)^{1/2} [(E + \hbar\omega)^2 - \Delta^2]^{1/2}} dE. \quad (2.94)$$

Маттис и Бардин [43] показали, что этот интеграл может быть выражен через полные эллиптические интегралы E и K следующим образом:

$$\frac{\sigma_{1s}}{\sigma_n} \Big|_{T=0} = \left(1 + \frac{2\Delta}{\hbar\omega}\right) E(k) - \frac{4\Delta}{\hbar\omega} K(k), \quad \hbar\omega \geqslant 2\Delta, \quad (2.95)$$

где

$$k = (\hbar\omega - 2\Delta)/(\hbar\omega + 2\Delta). \quad (2.95a)$$

Как видно из рис. 2.9, отношение σ_{1s}/σ_n возрастает с конечной производной от нуля при $\hbar\omega = 2\Delta$ и медленно приближается к единице при $\hbar\omega \gg 2\Delta$. При конечных температурах $\Delta(T) < \Delta(0)$ в области $\hbar\omega < 2\Delta(T)$ также имеется поглощение энергии из-за присутствия термически возбужденных квазичастиц. Для точного описания этого поглощения требуются численные расчеты; качественное его поведение при $T > 0$ показано пунктирной линией. Логарифмическое возрастание отношения проводимостей при $\hbar\omega \rightarrow 0$ имеет ту же природу, что и обсужденное ранее увеличение $1/T_1$.

Первые спектроскопические измерения, которые ясно показали наличие и конечную ширину энергетической щели в сверхпроводниках при температурах, значительно меньших T_c , были проделаны Гловером и Тинкхамом [44], проводившими эксперименты с излучением в далекой инфракрасной области вблизи края поглоще-

ния. Эти первые измерения несколько опередили появление теории БКШ, и вскоре было обнаружено, что они также прекрасно соглашаются с формулой (2.95). С последующим улучшением техники эксперимента [45, 46] высокое качество полученных данных позволило установить, что обнаруженные в экспериментах с тонкими свинцовыми пленками небольшие отклонения от простой зависимости БКШ, как и наблюдавшую в туннельных экспериментах фононную структуру, можно объяснить, учитывая эффекты сильной связи.

Стоит отметить, что если фактор когерентности соответствует случаю I, то при $\hbar\omega=2\Delta$ a_s/a_n возрастает скачком до значений, превышающих единицу, а затем убывает (см. рис. 2.9). Можно убедиться, что с появлением щели площадь под этой кривой сохраняется, в то время как площадь под кривой, относящейся к случаю II, уменьшается. Однако из правила сумм для силы осциллятора (см., например, [47])

$$\int_0^\infty \sigma_1(\omega) d\omega = \pi n e^2 / 2m$$

следует, что площадь под кривой $\sigma_1(\omega)$ должна иметь одно и то же значение как в сверхпроводящем, так и в нормальном состоянии. Тинкхам и Феррелл [48] смогли доказать, что «недостающая» в области конечных частот площадь A появляется в виде δ -функции при $\omega=0$. Физически наличие δ -функции связано с поглощением от источника постоянного электрического поля энергии, необходимой для сообщения кинетической энергии ускоряемому сверхтоку. Доказательство основывается на дисперсионных соотношениях Крамерса—Кронига *, связывающих действительную и мнимую части любой причинной функции линейного отклика. Записанные для комплексной проводимости при временной зависимости $\exp\{i\omega t\}$, эти соотношения имеют вид

$$\sigma_1(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\omega' \sigma_2(\omega') d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2} + \text{const}, \quad (2.96a)$$

$$\sigma_2(\omega) = - \frac{2\omega}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sigma_1(\omega') d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2}. \quad (2.96b)$$

Из формулы (2.96b) видно, что зависимость $\sigma_1=A\delta(\omega)$ приводит к $\sigma_2=2A/\pi\omega$. Сравним этот результат с уравнением Лондонов (1.3), которое эквивалентно равенству $\sigma_2=1/\Lambda\omega=n_s e^2/m\omega=c^2/4\pi\lambda^2\omega$. Видно, что глубина проникновения связана с недостающей площадью A соотношением $\lambda^{-2}=8A/c^2$. Следовательно, принципиально возможно определение свойств сверхпроводников на постоянном токе по данным высокочастотного спектра поглощения. Грубо

* Подробное обсуждение применения правила сумм и методов Крамерса—Кронига в электродинамике сверхпроводников можно найти в написанной автором этой книги главе, посвященной сверхпроводимости, в сборнике [49].

говоря, к сверхпроводимости приводит наличие щели в спектре возбуждений, однако, точнее, более важным является наличие этой недостающей площади под кривой поглощения. Рассмотренный выше пример фактора когерентности, относящегося к случаю I, показывает, что недостающая площадь не является необходимым следствием существования энергетической щели. Таким образом, факторы когерентности являются более существенной чертой сверхпроводимости, чем щель в спектре. Это утверждение станет еще более ясным, если вспомнить, что полупроводники обладают щелью, но не являются сверхпроводниками постольку, поскольку не имеют недостающей площади. С другой стороны, было показано, что когда сверхпроводники благодаря магнитным примесям становятся бесщелевыми, они сохраняют сверхпроводящие свойства до тех пор, пока существует недостающая площадь под кривой $\sigma_1(\omega)$ *.

2.10. Электродинамика

Только что проведенное простое рассмотрение поглощения электромагнитного поля не дает прямого описания загадочных свойств сверхтока, так как при этом изучались только диссипативные процессы. Вместо того чтобы провести рассмотрение отклика сверхпроводника на произвольное электромагнитное поле, что было бы сложной задачей, ограничимся изучением отклика на постоянное магнитное поле. Этот отклик должен быть недиссипативным, и его анализ будет дополнять проведенное выше рассмотрение. Так как эффект Мейсснера и связанный с ним отклик сверхтекучей компоненты почти не зависят от частоты, до тех пор пока она не достигает значений порядка щели, такое рассмотрение на самом деле применимо к большому числу ситуаций.

В интересующем нас случае магнитное поле может быть описано классическим поперечным вектором-потенциалом $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, причем $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$. Это полное поле, учитывающее эффекты экранирования сверхтоком, который должен вводиться самосогласованным образом. Хорошо известно, что как в классической, так и в квантовой механике в присутствии вектора-потенциала обычный кинетический импульс следует заменить на канонический импульс $\mathbf{p} = m\mathbf{v} + e\mathbf{A}/c$, где e — заряд электрона. При этом выражение для потенциальной энергии остается неизменным, а для кинетической вместо $m\mathbf{v}^2/2$ получаем $(\mathbf{p} - e\mathbf{A}/c)^2/2m$. Нас интересует вычисление только линейного отклика на слабое поле, поэтому можно разложить выражение для кинетической энергии в ряд и сохранить в нем только члены, пропорциональные \mathbf{A} . Заменяя импульс \mathbf{p}_i на оператор импульса $(-i\hbar\nabla_i)$, для входящего в гамильтониан оператора возмущения получаем выражение

* Такое представление «недостающей площади» под кривой поглощения в качестве первопричины сверхпроводимости представляется не совсем удачным; правильнее было бы сказать, что ее наличие является признаком этого эффекта. — Прим. ред. пер.

$$\mathcal{H}_1 = \frac{ie\hbar}{2mc} \sum_i (\nabla_i \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla_i),$$

в котором суммирование ведется по всем частицам. Если разложить вектор-потенциал в ряд Фурье по пространственным компонентам

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{q}} \mathbf{a}(\mathbf{q}) \exp\{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}\},$$

то, так как для поперечного поля, по определению, $\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{q}) = 0$, можно написать

$$\mathcal{H}_1 = -\frac{e\hbar}{mc} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} \mathbf{k} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{q}) c_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \sigma}^* c_{\mathbf{k}, \sigma}. \quad (2.97)$$

Спиновый индекс остается без изменения поскольку взаимодействие поля с орбитальным движением электронов доминирует. Точное выражение для входящих в формулу (2.84) матричных элементов $B_{\mathbf{k}'\sigma'}$, $\mathbf{k}\sigma$ может быть восстановлено из соотношения (2.97). Из пропорциональности этих матричных элементов величине \mathbf{k} следует, как уже отмечалось ранее, что они относятся к случаю II. Согласно формуле (2.87), полное выражение для гамильтонiana взаимодействия можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 = & -\frac{e\hbar}{mc} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} \mathbf{k} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{q}) [(u_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + v_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}+\mathbf{q}})(\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, 0}^* \gamma_{\mathbf{k}0} - \\ & - \gamma_{\mathbf{k}1}^* \gamma_{\mathbf{k}+1, 0}) + (v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}+\mathbf{q}})(\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, 0}^* \gamma_{\mathbf{k}1} - \gamma_{\mathbf{k}+1, 0}^* \gamma_{\mathbf{k}0})]. \end{aligned} \quad (2.98)$$

В предыдущем разделе мы имели дело с поглощением энергии, обусловленным этим оператором. Теперь рассмотрим индуцированный этим возмущением ток. При наличии отличного от нуля вектор-потенциала ток состоит из двух компонент J_1 и J_2 , что соответствует наличию двух слагаемых в выражении $\mathbf{v} = (\mathbf{p}/m) - (e\mathbf{A}/mc)$. Последнее из них приводит к простому результату:

$$J_2 = -\frac{ne^2}{mc} \mathbf{A}, \quad (2.99)$$

который точно соответствовал бы уравнению Лондонов (1.8), если бы n можно было интерпретировать как число «сверхпроводящих электронов» n_s . Однако в действительности n всегда равно полному числу электронов, а выписанное для J_2 выражение сохраняет свой вид и в нормальном состоянии. Поэтому решающую роль должно играть первое слагаемое в выражении для тока J_1 , которое часто называют «парамагнитным», так как оно стремится скомпенсировать диамагнитный ток J_2 . Нетрудно видеть, что \mathbf{q} -ю фурье-компоненту тока можно выразить с помощью оператора

$$J_1(\mathbf{q}) = \frac{e\hbar}{m} \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} c_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^* c_{\mathbf{k}}. \quad (2.100)$$

Этот оператор, в свою очередь, можно представить в форме, аналогичной выражению (2.98), через операторы γ .

Прежде чем переходить к конкретным вычислениям, удобно для описания отклика тока на различные компоненты векторного потенциала ввести стандартное обозначение

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = - (c/4\pi) \mathbf{K}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{q}). \quad (2.101)$$

Например, в теории Лондонов

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = - \frac{1}{c\Lambda} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = - \frac{c}{4\pi\lambda_L^2} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (2.102)$$

отклик не зависит от \mathbf{q} и

$$K_L(\mathbf{q}) = K_L(0) = \lambda_L^{-2}. \quad (2.103)$$

Используя определение $\lambda_L^2(0) = mc^2/4\pi ne^2$ и выражение (2.99), можно записать функцию отклика, учитывающую как J_1 , так и J_2 , в следующем виде:

$$K(\mathbf{q}, T) = \lambda_L^{-2}(0) [1 + \lambda_L^2(0) K_1(\mathbf{q}, T)]. \quad (2.104)$$

Согласно приведенным выше аргументам, следует ожидать, что слагаемое, содержащее K_1 , должно иметь отрицательный знак. Ограничивааясь рассмотрением изотропных систем и поперечных полей, можем считать, что $K(q)$ является функцией лишь $|\mathbf{q}|_L$ и в дальнейшем записывать ее просто в виде $K(q)$.

Полезно также рассмотреть в общем случае соотношение между функцией $K(q)$ и соответствующим нелокальным откликом в координатном пространстве, описываемом ядром $F(R)$ в выражении

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = C \int \frac{\mathbf{R}[\mathbf{R} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}')] }{R^4} F(R) d\mathbf{r}', \quad (2.105)$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Подставляя в формулу (2.105) $\mathbf{A}(\mathbf{r}') \sim \exp\{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'\}$, можно показать, что функции $K(q)$ и $F(R)$ связаны равенством

$$K(q) = \frac{16\pi^2 C}{3c} \int_0^\infty \left[\frac{3}{qR} j_1(qR) \right] F(R) dR. \quad (2.106)$$

Здесь $j_1(x) = x^{-2} \sin x - x^{-1} \cos x$ — сферическая функция Бесселя, обладающая тем свойством, что выражение $[3x^{-1} j_1(x)]$ представляет собой затухающую осциллирующую функцию, равную единице при $x=0$. Поэтому величина

$$K(0) = \frac{16\pi^2 C}{3c} \int_0^\infty F(R) dR \quad (2.106a)$$

зависит от интеграла от $F(R)$, в то время как при $q \rightarrow \infty$ $K(q)$ стремится к выражению

$$K(q) \xrightarrow[q \rightarrow \infty]{} \frac{16\pi^2 C}{3c} \frac{F(0)}{q} \int_0^\infty \frac{3}{x} j_1(x) dx = \frac{4\pi^3 C F(0)}{cq}, \quad (2.106b)$$

которое зависит только от значения $F(R)$ в нуле. Найдем отношение этих двух величин:

$$\frac{K(q)}{K(0)} \xrightarrow[q \rightarrow \infty]{} \frac{3\pi}{4qL}, \quad (2.106\text{в})$$

Здесь величина $L = F^{-1}(0) \int F(R) dR$ определяет характерный размер ядра $F(R)$. Полученные соотношения являются весьма общими; они применимы к связи между \mathbf{J} и \mathbf{E} в нормальном состоянии при $L = l$ и к соотношению между \mathbf{J} и \mathbf{A} в сверхпроводящем состоянии с длиной L , приблизительно равной, в чем скоро убедимся, размеру пары ξ_0 .

2.10.1. Вычисление $K(0, T)$ или $\lambda_L(T)$

Теперь перейдем к определению температурной зависимости функции $K(q, T)$ в простом предельном случае $q=0$, соответствующем бесконечной длине волны. Для полей, медленно меняющихся в пространстве, нелокальная теория переходит в локальную теорию Лондонов, поэтому тем самым мы найдем температурную зависимость параметра $\lambda_L(T)$, который определяется равенством

$$K(0, T) \equiv \lambda_L^{-2}(T). \quad (2.107)$$

Другими словами, температурная зависимость $K(0, T)$ совпадает с температурной зависимостью параметра n_s в теории Лондонов. Очевидно, что при $q=0$ фактор когерентности во втором слагаемом в формуле (2.98) равен нулю, а в первом — единице. Более того, при $q=0$ оператор $\gamma_{k+q, 0}^* \gamma_{k0}$ переходит в оператор числа частиц $\gamma_{k0}^* \gamma_{k0}$, поэтому действие гамильтонiana возмущения (2.98) просто сводится к сдвигу энергий квазичастичных возбуждений:

$$\begin{aligned} E_{k0} &\rightarrow E_{k0} - (e\hbar/mc) \mathbf{k} \cdot \mathbf{a}(0), \\ E_{k1} &\rightarrow E_{k1} + (e\hbar/mc) \mathbf{k} \cdot \mathbf{a}(0). \end{aligned} \quad (2.108)$$

Аналогично упрощается и разложение оператора тока $\mathbf{J}_1(0)$ по квазичастичным операторам

$$\mathbf{J}_1(0) = \frac{e\hbar}{m} \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} (\gamma_{k0}^* \gamma_{k0} - \gamma_{k1}^* \gamma_{k1}) = \frac{e\hbar}{m} \sum_{\mathbf{k}} (f_{k0} - f_{k1}). \quad (2.109)$$

Во второй строке операторы заменены на их собственные значения f_{k0} и f_{k1} — функции Ферми, соответствующие смещенным энергиям, описываемым формулами (2.108). В пределе малых $\mathbf{a}(0)$, $f_{k0} \approx f_{k1}$; поэтому, разлагая f_{k1} в ряд Тейлора, для входящей в выражение (2.109) разности имеем

$$f_{k0} - f_{k1} \approx - \left(\frac{\partial f}{\partial E_{\mathbf{k}}} \right) \frac{2e\hbar}{mc} \mathbf{k} \cdot \mathbf{a}(0).$$

Подставляя полученное выражение в формулу (2.109), для тока получаем

$$\mathbf{J}_1(0) = \frac{2e^2 \hbar^2}{m^2 c} \sum_{\mathbf{k}} [\mathbf{a}(0) \cdot \mathbf{k}] \mathbf{k} \left(- \frac{\partial f}{\partial E_{\mathbf{k}}} \right). \quad (2.110)$$

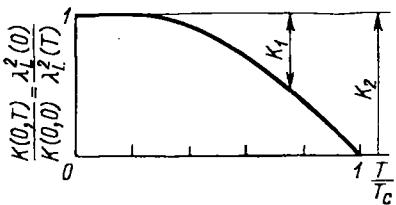


Рис. 2.10. Температурная зависимость отношения $K(0, T)/K(0, 0) = \lambda_L^2(0)/\lambda_L^2(T) = n_s(T)/n$, получаемая в теории БКШ. Отметим, что $K(0, T)$ есть результат частичной компенсации постоянного диамагнитного слагаемого K_2 зависящим от температуры парамагнитным членом K_1 .

Из симметрии этого выражения следует, что $\mathbf{J}_1(0)$ параллельно $\mathbf{a}(0)$, а усреднение квадрата проекции \mathbf{k} на направление \mathbf{J}_1 (или \mathbf{a}) дает $k_F^2/3$, так как среднее значение $\cos^2\theta$ по полному телесному углу равно $1/3$. Поэтому величину K_1 , соответствующую выражению (2.110), можно представить в виде

$$K_1(0, T) = -\frac{4\pi J_1(0)}{ca(0)} = -\left(\frac{4\pi ne^2}{mc^2}\right)\left(\frac{4E_F}{3n}\right) \sum_{\mathbf{k}} \left(-\frac{\partial f}{\partial E_{\mathbf{k}}}\right).$$

Так как $N(0) = 3n/4E_F$, полученное соотношение можно переписать в другой форме:

$$K_1(0, T) = -\lambda_L^{-2}(0) \int_{-\infty}^{\infty} -\left(\frac{\partial f}{\partial E}\right) d\xi.$$

Подставляя это выражение в формулу (2.104), для полного отклика, учитывающего J_1 и J_2 , имеем

$$K(0, T) = \lambda_L^{-2}(T) = \lambda_L^{-2}(0) \left[1 - 2 \int_{\Delta}^{\infty} \left(-\frac{\partial f}{\partial E}\right) \frac{E}{(E^2 - \Delta^2)^{1/2}} dE \right]. \quad (2.111)$$

Вначале отметим, что если $\Delta=0$ (нормальное состояние, $T>T_c$), то интеграл равен $f(0)=0.5$ и $K(0, T \geq T_c) = 0$. Это соответствует отсутствию эффекта Мейсснера в нормальном состоянии из-за сокращения парамагнитной J_1 и диамагнитной J_2 составляющих тока. Однако, как только выполняется неравенство $\Delta>0$, интеграл уже не компенсирует точно первое слагаемое, и мы имеем конечное значение параметра $\lambda_L(T)$, приводящее к эффекту Мейсснера в образце с достаточно большими размерами. С уменьшением T отношение Δ/kT увеличивается, величина интеграла становится все меньше и в пределе $\Delta/kT \gg 1$ оказывается экспоненциально малой. Таким образом, параметр $\lambda_L(T)$, определяемый соотношением (2.111), при $T \rightarrow 0$ совпадает с выражением (1.9) для $\lambda_L(0)$, что оправдывает использование обозначения. Общая картина зависимости $K_1(0, T)$ представлена на рис. 2.10. Физическая причина существования K_1 состоит в том, что возбужденные состояния, соответствующие хвосту смещенного распределения по импульсам в \mathbf{k} -пространстве, обладают пониженными энергиями и, следовательно, заселены большим числом квазичастиц. Поэтому возбужденные квазичастицы переносят суммарный ток в обратном на-

правлении, который частично компенсирует ток J_2 . Важно осознавать, что сверхток есть *полный* отклик, включающий в себя отрицательный вклад квазичастиц. Квазичастичный вклад в ток не равен нулю, так как он отвечает распределению, минимизирующему свободную энергию.

При рассмотрении рис. 2.10 необходимо помнить, что рассчитанная зависимость $\lambda_L(T)$ согласуется с экспериментально наблюдаемой температурной зависимостью глубины проникновения, лишь если величина отклика на самосогласованный векторный потенциал достаточно точно аппроксимируется откликом на составляющую с $q=0$. Чтобы уточнить это утверждение, перейдем к обсуждению зависимости $K(q, T)$ от q .

2.10.2. Расчет зависимости $K(q, 0)$

Для простоты изучим зависимость $K(q, T)$ от q только при $T=0$, хотя эти вычисления легко обобщаются с использованием соответствующих методов статистической физики. При $T=0$ электроны должны находиться в основном состоянии БКШ $|\psi_G\rangle$. В этом случае в первом приближении теории возмущений по \mathcal{H}_1 для возмущенного состояния $|\psi\rangle$ получим

$$|\psi\rangle = |\psi_G\rangle - \sum_n \frac{\langle \psi_n | \mathcal{H}_1 | \psi_G \rangle}{E_n} |\psi_n\rangle,$$

где суммирование ведется по различным возбужденным состояниям с энергией E_n . Вычисляя среднее значение оператора $J_1(\mathbf{q})$ в состоянии $|\psi\rangle$, имеем

$$\begin{aligned} \langle \psi | J_1(\mathbf{q}) | \psi \rangle &= \langle \psi_G | J_1(\mathbf{q}) | \psi_G \rangle - \\ &- 2\text{Re} \sum_n \frac{\langle \psi_G | J_1(\mathbf{q}) | \psi_n \rangle \langle \psi_n | \mathcal{H}_1 | \psi_n \rangle}{E_n}. \end{aligned}$$

Первое слагаемое равно нулю, так как все электроны в основном состоянии имеют равные и противоположные волновые векторы. Единственный отличный от нуля вклад во втором слагаемом дает состояние $|\psi_n\rangle$, содержащее две квазичастицы, рожденные операторным слагаемым $v_{\mathbf{k}+\mathbf{q},0}^* v_{\mathbf{k}}^*$ в выражении (2.98). Вследствие того что матричные элементы операторов $J_1(\mathbf{q})$ и \mathcal{H}_1 содержат одинаковые факторы когерентности, получаем

$$\langle \psi | J_1(\mathbf{q}) | \psi \rangle = \frac{2e^2 \hbar^2}{m^2 c} \sum_n \frac{(v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}+\mathbf{q}})^2}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}} [\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{q})] \mathbf{k}. \quad (2.112)$$

Очевидно, что эта сумма определяет ток, параллельный \mathbf{A} , который, даже при $T=0$, частично компенсирует диамагнитный ток J_2 . Величина этой компенсации зависит от q и, как было отмечено выше, стремится к нулю при $q=0$.

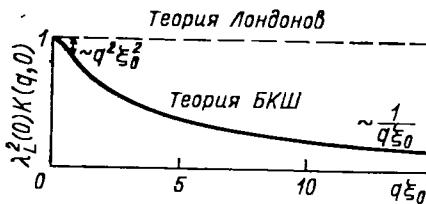


Рис. 2.11. Сравнение зависящего от q отклика в нелокальной теории БКШ с не зависящим от q откликом в локальной теории Лондонов. В обоих случаях приведены кривые для чистых металлов с бесконечной длиной свободного пробега электронов

Используя те же рассуждения, что и при получении выражения (2.111), для функции отклика K из формулы (2.112) получаем

$$K(q, 0) = \lambda_L^{-2}(0) \left\{ 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(v_k u_{k+q} - u_k v_{k+q})^2}{E_k + E_{k+q}} d\xi \right\}. \quad (2.113)$$

Даже без подробного анализа из полученного выражения видно, что при малом отклонении q от нуля $K(q, 0)$ уменьшается на величину, пропорциональную $q^2 \xi_0^2$, где, согласно теории БКШ, ξ_0 определяется выражением

$$\xi_0 = (\hbar v_F)/(\pi \Delta(0)). \quad (2.114)$$

Это следует из того факта, что для малых q фактор когерентности в числителе выражения (2.113) представим в виде $(\xi_{k+q} - \xi_k) \partial(u_k - v_k)/\partial\xi_k$. В области, дающей основной вклад при интегрировании, первый множитель имеет порядок $\hbar v_F q$, а второй — $1/\Delta(0)$. С другой стороны, в первом приближении по $(q\xi_0)^{-1} \ll 1$ интеграл в (2.113) сокращается с первым слагаемым, и для $K(q, 0)$ получаем выражение

$$K(q, 0) = K(0, 0) (3\pi/4q\xi_0), \quad q\xi_0 \gg 1, \quad (2.115)$$

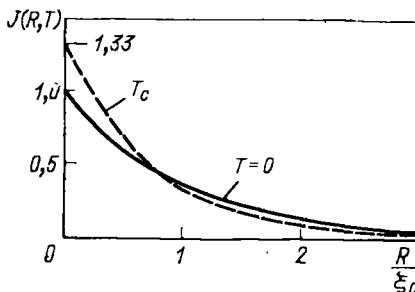
согласующееся с формулой (2.106в). Поведение $K(q, 0)$ при произвольных значениях q показано на рис. 2.11. Отметим, что отклик в нормальном состоянии при $T=0$ может быть получен с помощью перехода к пределу $\Delta(0) \rightarrow 0$. В этом случае $\xi_0 \rightarrow \infty$, так что $K(q, 0) = 0$ при всех q .

2.10.3. Нелокальная электродинамика в координатном пространстве

Зная $K(q, T)$ и используя преобразование Фурье, обратное представленному в формуле (2.106), можно найти соответствующее этой функции ядро в обычном пространстве. Получившийся для этого ядра результат, обозначаемый в теории БКШ $J(R, T)$, представлен графически на рис. 2.12. Зависимость $J(R, T)$ очень схожа с экспоненциальной формой $\exp\{-R/\xi_0\}$, предложенной Пиппардом [50]. Действительно, функция $J(R, T)$ нормирована в теории БКШ таким образом, что

$$\int_0^\infty J(R, T) dR = \xi_0 = \int_0^\infty \exp\{-R/\xi_0\} dR, \quad (2.116)$$

Рис. 2.12. Схематическое сравнение поведения ядра $J(R, T)$ в теории БКШ при двух температурах: $T=0$ и $T \approx T_c$. Видно, что при изменении температуры от $T=0$ до $T \approx T_c$ радиус нелокальности уменьшается на коэффициент, приблизительно равный 0,75



где ξ_0 определяется выражением (2.114). При $R=0$ значение J плавно меняется от 1 при $T=0$ до 1,33 при $T=T_c$, в то время как экспоненциальное ядро в приближении Пиппарда при $R=0$ равно единице для всех температур. За исключением этого небольшого различия, $J(R, T)$ и ядро Пиппарда практически одинаковы.

Используя условие нормировки (2.115) и определение (2.107), находим из формулы (2.106а) постоянную C , и для нелокального соотношения между током и вектор-потенциалом в теории БКШ (2.105) получаем следующее выражение:

$$J(r) = -\frac{3c}{16\pi^2\xi_0\lambda_L^2(T)} \int \frac{R[R \cdot A(r')]}{R^4} J(R, T) dr', \quad (2.117)$$

где $R=r-r'$. Оно отличается от формулы Пиппарда (1.11) лишь заменой величины $\exp\{-R/\xi_0\}$ на $J(R, T)$. Если величина $A(r')$ постоянна в области изменения $J(R, T)$, то выражение (2.117) переходит в уравнение Лондонов:

$$J(r) = -\frac{c}{4\pi\lambda_L^2(T)} A(r). \quad (2.118)$$

Однако, если $A(r)$ значительно меняется на расстоянии порядка ξ_0 , подобное упрощение несправедливо и необходимо учитывать нелокальность электродинамики.

2.10.4. Влияние примесей

До сих пор полученные нами результаты были справедливы для чистого металла, в котором k является хорошим квантовым числом. Это позволяет простым образом сформулировать теорию спаривания БКШ, что и было сделано. Используя технику функций Грина, можно построить обобщение микроскопической теории на случай существенного рассеяния на примесях, но мы вместо этого воспользуемся более феноменологическим подходом. По аналогии с соответствующим выражением Чамберса для нелокального отклика нормальных электронов на электрическое поле следует ожидать, что искомое обобщение состоит в умножении ядра $J(R, T)$ на $\exp\{-R/l\}$, где l — длина свободного пробега электронов. Это делает электродинамический отклик более локальным, и, если l

достаточно мало по сравнению с характерным масштабом изменения A , мы получаем локальное уравнение Лондонов (2.118), но с модифицированным (уменьшенным) коэффициентом $\lambda_{\text{аф}} (> \lambda_L)$. Соответствующее значение $\lambda_{\text{аф}}$ определяется выражением

$$\frac{\lambda_L^2(T)}{\lambda_{\text{аф}}^2(l, T)} = \frac{J(0, T, l)}{J(0, T, \infty)} = \frac{1}{\xi_0} \int_0^\infty J(R, T) \exp\left\{-\frac{R}{l}\right\} dR, \quad (2.119)$$

при выводе которого были использованы соотношения (2.106а) и (2.116). Заметим, что обозначение $\lambda_L(T)$ используется нами только для описания отклика в чистых металлах при $q=0$.

Во избежание вычисления отношения (2.119), рассмотрим вначале так называемый «грязный предел» $l \ll \xi_0$, в котором интеграл в числителе сводится просто к $J(0, T)l$. Тогда

$$\lambda_{\text{аф}}(l, T) = \lambda_L(T) (\xi_0/l)^{1/2} [J(0, T)]^{-1/2}. \quad (2.120)$$

Так как $J(0, T)$ изменяется от 1 при $T=0$ лишь до 1,33 при $T=T_c$, последний сомножитель вносит весьма небольшую поправку.

Другим удобным приближением является использование вместо $J(R, T)$ экспоненты Пиппарда $\exp\{-R/\xi_0\}$. В этом случае интеграл в выражении (2.119) равен ξ , где

$$\xi^{-1} = \xi_0^{-1} + l^{-1}, \quad (2.121)$$

и, следовательно,

$$\lambda_{\text{аф}}(l, T) = \lambda_L(T) (\xi_0/\xi)^{1/2} = \lambda_L(T) (1 + \xi_0/l)^{1/2}. \quad (2.122)$$

Это приближение полезно даже при не очень малых значениях l , так как в чистом пределе выражение для $\lambda_{\text{аф}}$ переходит в λ_L . Полученный для $\lambda_{\text{аф}}$ результат довольно часто используется, однако он является приближенным, потому что не учитывает следующего из микроскопической теории в грязном пределе множителя $[J(0, T)]^{-1/2}$.

Отмеченный недостаток легко устраним. Для этого сохраним экспоненциальную аппроксимацию $J(R, T)$, но вместо $\exp\{-R/\xi_0\}$ используем экспоненциальную зависимость $J(0, T) \exp\{-[J(0, T)/R - \xi_0]\}$. Такое выражение согласуется как со следующим из микроскопической теории значением ядра $J(R, T)$ при $R=0$, так и со значением интеграла по R . В новой аппроксимации выражение (2.122) заменяется на равенство

$$\lambda_{\text{аф}}(l, T) = \lambda_L(T) \left(\frac{\xi'_0}{\xi'} \right)^{1/2} = \lambda_L(T) \left(1 + \frac{\xi'_0}{l} \right)^{1/2}. \quad (2.123)$$

В нем модифицированные длины когерентности Пиппарда ξ' и ξ'_0 определяются соотношением

$$\frac{1}{\xi'} = \frac{1}{\xi'_0} + \frac{1}{l} \equiv \frac{J(0, T)}{\xi_0} + \frac{1}{l}. \quad (2.123a)$$

Ясно, что при $l \ll \xi_0$ выражение (2.123) должным образом переходит в выражение (2.120), однако оно вполне пригодно и при не

столь малых l . Таким образом, формулы (3.123) дают очень хорошее приближение для отклика при $q \approx 0$ во всем диапазоне изменения входящих в него параметров l и T . При $\xi \ll \lambda_{\text{эфф}}$, где ξ определяется по формуле (2.121), это приближение также дает практически правильный результат для глубины проникновения. Отметим, что при $T=0$ формула (2.123) переходит в выражение (2.122), а при $T \approx T_c$ — в формулу

$$\lambda_{\text{эфф}}(l, T) = \lambda_L(T) [1 + 0,75 (\xi_0/l)]^{1/4}, \quad T \approx T_c. \quad (2.1236)$$

Последнее выражение часто используется в теории Гинзбурга — Ландау, справедливой в окрестности T_c .

2.10.5. Комплексная проводимость.

В разделе, посвященном вероятностям перехода и поглощению, мы вывели зависимость отношения действительной части комплексной проводимости в сверхпроводящем состоянии к проводимости в нормальном состоянии от частоты (формула (2.91) с верхним знаком). Теперь, после того как будет получено выражение для низкочастотного бездиссипативного отклика на вектор-потенциал, можно будет выяснить роль полученного ранее результата для проводимости в более общей картине.

Для периодического электромагнитного поля справедливы равенства

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{i\omega \mathbf{A}}{c},$$

позволяющие установить связь между комплексной проводимостью и функцией $K(q, \omega, T)$. Приравнивая друг другу два выражения для тока

$$\mathbf{J}(q, \omega, T) = \sigma(q, \omega, T) \mathbf{E}(q, \omega) = -\frac{c}{4\pi} K(q, \omega, T) \mathbf{A}(q, \omega),$$

получаем

$$\sigma(q, \omega, T) = \frac{ic^2}{4\pi\omega} K(q, \omega, T). \quad (2.124)$$

Конечно, детальное исследование поведения функций $K(q, \omega, T)$ или $\sigma(q, \omega, T)$ будет проведено только в нескольких специальных случаях, однако они в значительной степени позволяют судить и о полной картине. В низкочастотном пределе можно получить простое аналитическое выражение для отношения σ_2/σ_n при произвольных значениях температуры

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_n} = \frac{\pi\Delta}{\hbar\omega} \operatorname{th} \frac{\Delta}{2kT}, \quad \hbar\omega \ll \Delta, \quad (2.125)$$

которое в предельных случаях переходит в следующие:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_n} \rightarrow \begin{cases} \frac{\pi\Delta}{\hbar\omega}, & T \ll T_c, \\ \frac{\pi}{2} \frac{\Delta^2}{kT\hbar\omega}, & T \approx T_c. \end{cases} \quad (2.125a)$$

$$\\ \quad (2.125b)$$

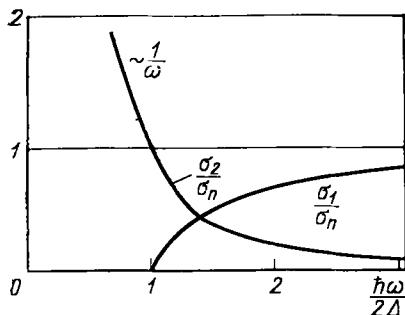


Рис. 2.13. Комплексная проводимость сверхпроводников в предельно аномальном случае (или грязном пределе) при $T=0$. Пропорциональное ω^{-1} возрастание мнимой части проводимости σ_2 в области частот, меньших щели, описывает эффект ускорения сверхтока. Коэффициент при этой зависимости пропорционален «недостающей площади» под кривой σ_1/ω (см. конец раздела 2.9.3)

Сравнивая эти выражения с теорией Лондонов, в которой

$$\sigma_{2L} = \frac{n_s e^2}{m\omega}, \quad (2.126)$$

видим, что они приводят к $n_s \sim \Delta$ при $T \ll T_c$ и $n_s \sim \Delta^2$ при $T \approx T_c$. В связи с тем что, как было показано Горьковым, вблизи T_c феноменологическая ψ -функция теории Гинзбурга—Ландау пропорциональна параметру щели Δ теории БКШ, последний результат приводит к важному соотношению: $n_s \sim |\psi|^2$.

Теперь зададимся вопросом: какова область применимости выражения для σ_{1s}/σ_n , определяемого равенством (2.91) или (2.95), в рамках более полной картины нелокального (зависящего от q) отклика. Оказывается, что эти выражения справедливы для ядра, описывающего нелокальную электродинамику, в точке $R=0$. Например, это имеет место в грязном пределе, когда сомножитель $\exp\{-R/l\}$ обрезает интеграл раньше, чем $J(R, \omega, T)$ успевает значительно измениться. Это справедливо также и в «предельно аномальном случае» $q\xi_0 \gg 1$, так как здесь соответствующее преобразование Фурье (2.106б) дает основной вес в области с размерами порядка π/q в окрестности начала координат. В обоих пределах σ_n действительно и $\sigma_n = \sigma_{1n}$. В грязном пределе как σ_s , так и σ_n пропорциональны l ; в предельно аномальном случае обе эти величины пропорциональны q^{-1} . Таким образом, в обоих пределах отношение σ_s/σ_n зависит только от ω и T , что позволяет опустить индексы q и l в обозначениях, пока справедливо одно из неравенств: $q\xi_0 \gg 1$ или $l \ll \xi_0$.

Можно получить точное выражение для σ_2 при $T=0$, аналогичное соотношению (2.95) для σ_1 :

$$\frac{\sigma_{2s}}{\sigma_n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2\Delta}{\hbar\omega} \right) E(k') - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2\Delta}{\hbar\omega} \right) K(k'). \quad (2.127)$$

Здесь $k' = (1 - k^2)^{1/2}$, а $k = |(2\Delta - \hbar\omega)/(2\Delta + \hbar\omega)|$. Зависимость этой функции от частоты представлена на рис. 2.13. Особую важность имеет пропорциональность σ_2 величине ω^{-1} в пределе $\hbar\omega \ll \ll 2\Delta$. Эта пропорциональность соответствует тому, что $K(q, \omega)$ в данном случае практически не зависит от частоты, что и требуется для отсутствия частотной зависимости глубины проникнове-

ния. Проще говоря, такая зависимость является следствием равномерного ускорения зарядов, описываемого уравнением Лондонов $E = \partial(\Delta J_s)/\partial t$. При $\hbar\omega \geq 2\Delta$ σ_2 стремится к нулю быстрее, чем ω^{-1} ; однако при $\hbar\omega = 2\Delta$ $K(q, \omega)$ меньше своего значения на постоянном токе лишь на коэффициент $2/\pi$. Таким образом, отклик «сверхпроводящей жидкости» не зависит существенно от частоты вплоть до СВЧ-диапазона.

В выражение для отклика сверхпроводящей системы на зависящее от времени электромагнитное поле входят как действительная, так и мнимая части σ . Например, легко показать, что в упомянутых выше в разд. 2.9 экспериментах по прохождению излучения через очень тонкие пленки относительная прозрачность равна

$$T = \left[\left(1 + \frac{\sigma_1 d Z_0}{n+1} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_2 d Z_0}{n+1} \right)^2 \right]^{-1}. \quad (2.128)$$

Здесь n — коэффициент преломления подложки, Z_0 — импеданс свободного пространства (377 Ом на квадрат в практической системе единиц), а d — толщина пленки. Из формулы (2.128) видно, что $\sigma_{2s} \sim \omega^{-1} \rightarrow \infty$ при $\omega \rightarrow 0$, что приводит к полному отражению излучения. С другой стороны, при $\hbar\omega \gg 2\Delta$ $\sigma_{2s} \rightarrow 0$, а $\sigma_{1s} \rightarrow \sigma_n$ и, следовательно, $T_s \rightarrow T_n$. Как видно из рис. 2.13, в промежуточном случае $\hbar\omega \approx 2\Delta$ как σ_{1s} , так и σ_{2s} меньше σ_n , что приводит к появлению пика коэффициента прохождения, при котором $T_s > T_n$. Экспериментальное наблюдение этих характерных особенностей в свое время внесло существенный вклад в подтверждение существования энергетической щели в сверхпроводниках, и в частности количественно подтвердило правильность теории БКШ.

2.11. Заключение

В этой главе мы изложили основные выводы теории БКШ: куперовское спаривание, существующее благодаря слабому, обусловленному фононами взаимодействию между электронами, природу основного состояния сверхпроводника и его энергию конденсации из нормального состояния, возбужденные квазичастичные состояния над энергетической щелью, а также температурные зависимости щели и термодинамических величин. Затем было показано, каким образом эксперименты по туннелированию электронов позволяют детально проверить выражение для плотности возбужденных состояний над щелью и даже доказать количественную правильность учета электрон-фононного механизма для описания сверхпроводящего состояния в целом ряде металлов. Анализ вероятностей переходов для квазичастичных возбуждений и их рассеяния дал дальнейшие подтверждения правильности теории БКШ, так как в рамках именно этой теории были предсказаны и обнаружены сильно отличающиеся температурные зависимости процессов затухания ультразвука и ядерной релаксации;

в то же время простые двухжидкостные модели приводят к одинаковым температурным зависимостям для этих двух процессов, ибо не содержат следующих из теории БКШ факторов когерентности.

Наконец, мы рассмотрели электродинамику сверхпроводников, вычислив сначала поглощение, возникающее благодаря квазичастичным процессам, и затем определив бездиссипативный отклик сверхпроводящего тока на вектор-потенциал. Вычисление отклика подтвердило правильность, с точностью до незначительных количественных поправок, пиппардовского обобщения электродинамики Лондонов.

Убедившись в том, что теория БКШ дает микроскопическое обоснование более простой полумикроскопической (или феноменологической) теории сверхпроводимости, мы теперь готовы к тому, чтобы оставить микроскопическую теорию и для рассмотрения многочисленных особенностей сверхпроводников использовать указанный более простой подход. Такое рассмотрение составляет содержание большинства последующих глав.

МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА СВЕРХПРОВОДНИКОВ I РОДА

В предыдущей главе было показано, что микроскопическая теория БКШ дает описание нелокальной электродинамики, очень близкое к предложенному феноменологически Пиппардом. В настоящей главе мы выведем несколько важных следствий из этих основных электродинамических свойств. Первый шаг будет заключаться в нахождении закона проникновения магнитного поля в глубь сверхпроводника, который нужно использовать вместо простой лондоновской экспоненциальной аппроксимации. Затем мы рассмотрим интересный случай тонких пленок. И наконец, мы разберем так называемое промежуточное состояние, в котором в сверхпроводнике произвольной формы в присутствии магнитного поля существуют сверхпроводящие и нормальные области.

Так как в этой главе нам будет необходимо четко разграничивать разные величины, описывающие магнитное поле, следует обратить внимание на то, что, следуя Де Жену (и многим другим авторам), мы используем символ \mathbf{h} для обозначения входящего в уравнение Лондонов локального микроскопического магнитного поля. Это позволяет нам сохранить символ \mathbf{B} для обозначения макроскопически усредненного значения $\mathbf{h}(\mathbf{r})$.

3.1. Глубина проникновения

3.1.1. Калибровка вектор-потенциала

Выше вектор-势能 был введен более или менее произвольным образом, чтобы упростить два уравнения Лондонов

$$\begin{aligned}\mathbf{h} &= -\frac{4\pi}{c} \operatorname{rot} (\lambda_L^2 \mathbf{J}_S), \\ \mathbf{E} &= \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial (\lambda_L^2 \mathbf{J}_S)}{\partial t},\end{aligned}\quad (3.1)$$

заменив их одним уравнением

$$\mathbf{J}_S(\mathbf{r}) = -\frac{c}{4\pi\lambda_L^2} \mathbf{A}(\mathbf{r}), \quad (3.2)$$

которое затем было обобщено в нелокальное соотношение типа БКШ — Пиппарда. Однако, как хорошо известно, вектор-势能 определяется не однозначно, а с точностью до градиента про-

извольной функции. Иными словами, если перейти от $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ к $\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla\chi(\mathbf{r})$, то магнитное поле $\mathbf{h} = \text{rot}(\mathbf{A})$ не изменится, так как ротор от градиента всегда равен нулю. Однако это не изменит выражения (3.2) для тока. Таким образом, если мы собираемся использовать такие выражения, как (3.2), которое *затемно не инвариантно* по отношению к калибровке \mathbf{A} , мы, очевидно, должны выбрать только одну определенную калибровку вектор-потенциала.

Если оставаться для простоты в рамках лондоновской аппроксимации, требование непрерывности тока ($\text{div } \mathbf{J}_s = 0$) означает, что при любой удовлетворительной калибровке

$$\text{div } \mathbf{A} = 0, \quad (3.3)$$

так как \mathbf{J} пропорционален \mathbf{A} . Это ограничивает возможные изменения калибровки \mathbf{A} только теми, которые даются функциями $\chi(\mathbf{r})$, для которых $\nabla \cdot \nabla \chi = \nabla^2 \chi = 0$, т. е. $\chi(\mathbf{r})$ должна удовлетворять уравнению Лапласа. Кроме того, условие непрерывности тока на границе определяет нормальную компоненту \mathbf{A} на поверхности, и, следовательно, производная функция χ по нормали должна обращаться на поверхности в нуль. Единственное решение этой краевой задачи есть $\chi = \text{const}$, для которой $\nabla \chi = 0$, так что выражение (3.3) и граничное условие определяют \mathbf{A} единственным образом. Такая калибровка векторного потенциала называется лондоновской. Полезно отметить, что в этой калибровке \mathbf{A} обращается в нуль внутри массивного сверхпроводника, где нет никаких токов.

В рамках нелокальной электродинамики справедливы те же самые качественные рассуждения, хотя математические детали здесь менее четки. Однако в простейшем случае плоской поверхности в параллельном магнитном поле (случай, который мы будем рассматривать при определении глубины проникновения поля) будет ясно, что только выбор вектора \mathbf{A} параллельным поверхности, но перпендикулярным к \mathbf{h} и обращающимся в нуль в глубине сверхпроводника будет удовлетворять приведенным соображениям и граничным условиям.

В случае тонкого сверхпроводящего образца требование равенства нулю вектор-потенциала \mathbf{A} внутри образца должно быть заменено на другое, зависящее от конкретных условий. Например, если одно и то же поле приложено параллельно к обеим сторонам тонкой плоской пластины, симметрия требует, чтобы \mathbf{A} обращался в нуль в середине пластиинки*. В менее симметричных ситуациях для определения вида \mathbf{A} можно использовать вариационное исчисление, исходя из минимума энергии. Вместо этого, как мы увидим позднее, можно преобразовать теорию к виду, инвариантному по отношению к калибровке вектор-потенциала. Дело в том, что величина $J_s/n_s e = \langle v_s \rangle = \langle p \rangle / m$ —

* В случае противоположных направлений поля по разные стороны пластины. — Прим. ред. пер.

— $e\mathbf{A}/mc$ инвариантна по отношению к калибровке; следовательно, изменение калибровки для \mathbf{A} должно сопровождаться компенсирующим изменением $\langle \mathbf{p} \rangle$. Наш подход сейчас заключается в нахождении такой частной калибровки, которая соответствует равенству $\langle \mathbf{p} \rangle = 0$, т. е. волновой функции, сформированной парами с нулевыми импульсами, даже в присутствии \mathbf{A} . В случае простой геометрии такой выбор обычно является наиболее простым, но в дальнейшем встретятся случаи, для которых могут быть указаны и другие виды калибровки.

3.1.2. Предварительная оценка λ

Прежде чем перейти к получению точного решения для глубины проникновения исходя из нелокальной электродинамики, проведем сначала элементарное рассуждение, которое позволит получить оценку результата для «пиппардовских сверхпроводников», для которых $\xi_0 \gg \lambda_L$.

Даже в нелокальной электродинамике ожидается примерно экспоненциальный закон проникновения магнитного поля, но, возможно, с некоторой измененной глубиной проникновения λ , которую и нужно определить. Если

$$h_y \approx B_0 \exp(-z/\lambda),$$

тогда при выбранной калибровке вектор-потенциал внутри материала ($z > 0$) будет равен

$$A_x = \lambda B_0 \exp(-z/\lambda),$$

что можно грубо аппроксимировать постоянной величиной $\bar{A} = -\lambda B_0$ внутри некоторого слоя толщиной λ . Используя при вычислении результирующей средней плотности тока нелокальное соотношение (2.117), получаем для \mathbf{A} среднее значение, отличающееся от лондоновского на коэффициент $\sim \lambda/\xi_0$, который представляет собой ту часть полного объема интегрирования ($\sim \xi_0^3$), в которой существует \mathbf{A} ($\sim \xi_0^2 \lambda$). Таким образом, с одной стороны,

$$\bar{J} \approx -\frac{c\lambda}{4\pi \lambda_L^2 \xi_0} \bar{A} = -\frac{c\lambda^2 B_0}{4\pi \lambda_L^2 \xi_0}.$$

С другой стороны, применяя уравнение Максвелла, находим

$$B_0/\lambda \approx |\overline{\text{rot } \mathbf{h}}| = 4\pi \bar{J}/c = \frac{\lambda^2 B_0}{\lambda_L^2 \xi_0}.$$

Сравнивая эти равенства, получаем

$$\lambda \approx (\lambda_L^2 \xi_0)^{1/3}. \quad (3.4)$$

Таким образом, когда нелокальность важна, т. е. когда $\xi_0 > \lambda_L$, действительная глубина проникновения будет превышать λ_L на множитель порядка $(\xi_0/\lambda_L)^{1/3}$. Конечно, если $\xi_0 < \lambda_L$, приведен-

ные рассуждения неприменимы, так как отклик локален, и $\lambda \approx \lambda_L$.

Заметим, что выражение (3.4) дает представление о температурной зависимости λ . Вблизи T_c все сверхпроводники становятся локальными, так как $\lambda(T) > \xi_0$, отсюда $\lambda(T) \approx \lambda_L(T)$. При низких температурах, когда $\lambda_L(T) < \xi_0$, получаем $\lambda(T) \approx [\lambda_L^2(T)\xi_0]^{1/3}$. Таким образом, при той температуре, когда $\lambda_L(T) \approx \xi_0$, будет наблюдаться небольшое изменение хода температурной зависимости λ . Так как для различных сверхпроводников из-за различия отношений $\lambda_L(0)/\xi_0$ это происходит при различных значениях отношения T/T_c , то ясно, что универсальной температурной зависимости $\lambda(T)$ не существует.

Отсюда следует, что нельзя ожидать одинаково хорошей применимости ко всем материалам известной эмпирической аппроксимации $\lambda(T) = \lambda(0)[1 - (T/T_c)^4]^{-1/2}$.

3.1.3. Точное решение с помощью фурье-анализа

Удобным способом для получения точного решения является применение фурье-анализа к J и A и использование равенства (2.101) для получения самосогласованного решения. В случае проникновения магнитного поля B_y , параллельного плоской поверхности, J_x и A_x зависят только от z , поэтому требуется лишь одномерное разложение Фурье. Однако, так как наши выражения для $K(q)$ справедливы только для бесконечной среды, требуется осторожность в обращении с поверхностью. Эта проблема устраняется с помощью математического искусственного приема, который состоит в том, что для изображения поля, приложенного к поверхности, вводится ток внутри бесконечной среды от внешнего источника.

Рассмотрим, например, случай, в котором предполагается, что электроны зеркально отражаются от поверхности. Если ввести лист тока *

$$(J_x)_{\text{внешн.}} = -\frac{c}{4\pi} B_0 \delta(z), \quad (3.5)$$

то это приводит к скачкообразному изменению h_y на $2B_0$. Разрыв может быть взят симметричным относительно нуля, чтобы поле h_y испытывало скачок от $-B_0$ до $+B_0$. Теперь, когда введена сверхпроводящая среда, ее диамагнитные токи будут экранировать эти поля на глубине λ (которую требуется определить). Заметим, что электроны, прошедшие через эту поверхность $z=0$ без рассеяния, имеют прежнюю ориентацию траектории от-

* Т. е. бесконечно тонкий слой, в котором протекает ток постоянной линейной плотности J . Одновременно с введением токового листа в плоскости $z=0$ сверхпроводящее полупространство исходной задачи заменяется на полное сверхпроводящее пространство. — Прим. ред. пер.

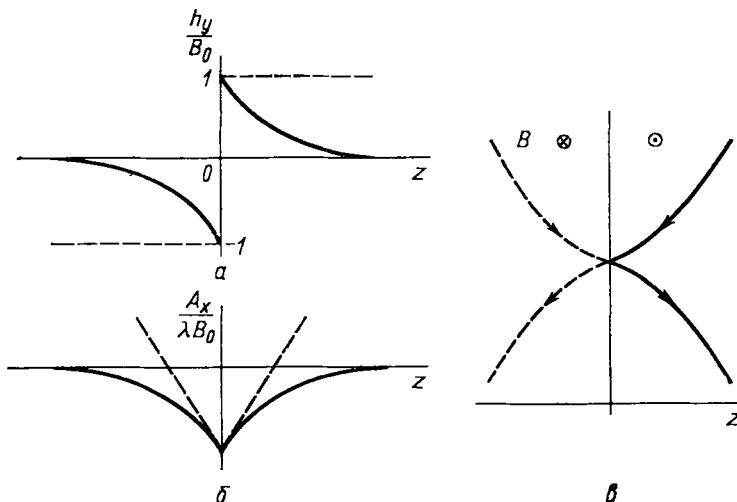


Рис. 3.1. Замена зеркально рассеивающей поверхности токовым листом:

a — магнитное поле в нормальном (пунктир) и сверхпроводящем (сплошная линия) состояниях; *b* — векторный потенциал в нормальном (пунктир) и сверхпроводящем (сплошная линия) состояниях (в сверхпроводящем состоянии использована лондоновская калибровка); *в* — электронные траектории. Сплошной линией показана траектория в случае зеркального отражения; штриховой частью показано продолжение траектории для другой половины пространства при введении токового листа

носительно направления векторного потенциала, в точности такую же, как и зеркально отраженные от поверхности электроны в действительном случае, поскольку $\mathbf{A}(-z) = \mathbf{A}(z)$ (рис. 3.1). Таким образом, возбуждаемый сверхток должен быть тем же самым, что свидетельствует об эффективности этого искусственного приема.

Заменяя поверхность токовым листом в бесконечной среде, можно перейти к использованию функции отклика $K(q)$, выведенной как раз для такой геометрии. Сначала заметим, что

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = -\operatorname{rot} \mathbf{h} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_{\text{полн}} = \\ = -\frac{4\pi}{c} (\mathbf{J}_{\text{внешн}} + \mathbf{J}_{\text{среды}}).$$

Для фурье-компоненты с волновым числом q это дает

$$q^2 \mathbf{a}(q) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_{\text{внешн}}(q) - K(q) \mathbf{a}(q).$$

Выражая отсюда $\mathbf{a}(q)$, получаем общий результат:

$$\mathbf{a}(q) = \frac{(4\pi/c) \mathbf{J}_{\text{внешн}}(q)}{K(q) + q^2}. \quad (3.6)$$

Для токового листа (3.5) $\mathbf{J}_{\text{внешн}}(q) = -cB_0/4\pi^2$, поэтому

$$\mathbf{a}(q) = -\frac{B_0/\pi}{K(q) + q^2}.$$

Нас больше интересует величина $\mathbf{h} = \text{rot } \mathbf{A}$, для которой $h_y(q) = iq a(q)$. Интегрируя по всем фурье-компонентам, получаем

$$h(z) = \frac{B_0}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{qe^{iqz}}{K(q) + q^2} dq = \frac{2B_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{q \sin(qz)}{K(q) + q^2} dq. \quad (3.7)$$

Для данного $K(q)$ уравнение (3.7) дает явную зависимость h от z , которая не будет строго экспоненциальной, как в теории Лондонов, если $K(q)$ не равно константе. Например, $h(z)$, вычисленное для $K(q)$ по теории Пиппарда или БКШ, в действительности меняет свой знак (глубоко внутри, где $|h(z)| \ll B_0$).

Для получения глубины проникновения, определенной обычным образом, проинтегрируем равенство (3.7):

$$\lambda = B_0^{-1} \int_0^z h(z) dz = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{q \sin(qz)}{K(q) + q^2} dq dz.$$

При выполнении интегрирования по z можно заменить $\int_0^z q \sin(qz) dz = 1 - \cos(qz)$ средним значением, равным единице, так как при $z \rightarrow \infty$ осциллирующая часть даст в среднем нуль при последующем интегрировании по q , так что

$$\lambda_{\text{зерк}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dq}{K(q) + q^2}. \quad (3.8)$$

Соотношение (3.8) позволяет рассчитать $\lambda_{\text{зерк}}$ для любой модели сверхпроводника, определяющей $K(q)$. Так, например, в лондонской теории $K(q) = 1/\lambda_L^2$ и

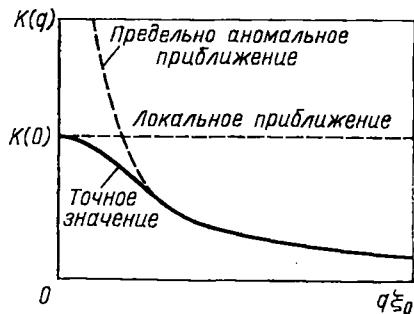
$$\lambda_{L, \text{зерк}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dq}{\lambda_L^{-2} + q^2} = \lambda_L. \quad (3.9)$$

В теории Пиппарда

$$K_{\text{Пип}}(q) = \frac{1}{\lambda_L^2} \frac{\xi}{\xi_0} \left\{ \frac{3}{2(q\xi)^3} [(1 + q^2 \xi^2) \operatorname{tg}^{-1}(q\xi) - q\xi] \right\}. \quad (3.10)$$

Это выражение получено из формулы (2.117) при $J_{\text{Пип}}(R, T) = \exp(-R/\xi)$ с использованием общего соотношения (2.106). Если вместо этого аппроксимировать БКШ-ядро более точно: $J(R, T) \approx J(0, T) \exp\{-J(0, T)R/\xi\}$, то, как указывалось при получении формулы (2.123), результат заключается просто в замене ξ_0 на $\xi_0/J(0, T)$ в равенстве (3.10) и в определении ξ (2.121). Как отмечалось в предыдущей главе, это удобное обобщенное выражение Пиппарда обеспечивает достаточно хорошее приближение для точных численных результатов, получаемых по теории БКШ, и мы будем его часто использовать. Однако,

Рис. 3.2. Схематическое сравнение локального и предельно аномального приближений (пунктир) с точной нелокальной функцией (сплошная линия) отклика $K(q)$



чтобы рассчитать глубину проникновения с помощью формулы (3.8) даже с аналитическим выражением (3.10) для $K(q)$, требуется численное интегрирование. Детальные численные расчеты глубины проникновения в чистых и грязных сверхпроводниках с использованием точных результатов теории БКШ были проведены Миллером [1].

Для того чтобы избежать численных расчетов, обратим внимание на два предельных случая, в которых могут быть получены аналитические результаты, хотя истинная ситуация, как правило, заключена между ними.

При локальной аппроксимации $K(q)$ заменяется для всех q на константу $K(0)$, приводя, таким образом, задачу к лондоновскому виду, но в общем случае с измененной глубиной проникновения. Используя обобщенную аппроксимацию Пиппарда

$$K(0, T) = \lambda_L^{-2} \left[1 + \frac{\xi_0}{J(0, T) l} \right]^{-1}, \quad (3.11)$$

находим, как и ожидали [см. выражение (2.123)], что

$$\lambda(T) = \lambda_L(T) \left[1 + \frac{\xi_0}{J(0, T) l} \right]^{1/2}. \quad (3.12)$$

Это приближение хорошо оправдывается в грязных сверхпроводниках (при $l < \lambda(T)$) и даже в чистых сверхпроводниках при значениях T , очень близких к T_c , когда $\xi_0 < \lambda(T)$.

Другой аппроксимацией является *предельно аномальный случай*, в котором $K(q)$ для всех значений q заменяется на свою асимптотическую (при $q \rightarrow \infty$) форму $K(q) \sim 1/q$. Это приближение хорошо оправдывается в случае $\lambda_L \gg \xi_0$, так как при этом основной вклад в интеграл (3.8) дают те значения q , для которых справедливо указанное приближение для K . Две различные аппроксимации $K(q)$ показаны на рис. 3.2. Так как обе аппроксимации ни при каких q не ниже точного значения $K(q)$, обе они будут давать нижние границы для истинного значения λ .

Выполним теперь вычисления для предельно аномального случая. Для общности запишем

$$K(q) = a/q,$$

где $a = 3\pi/(4\lambda_L^2 \xi_0)$ в теории Пиппарда. В теории БКШ и в

обобщенной теории Пиппарда ξ_0 заменяется на ξ'_0 , и, таким образом, a будет больше на множитель $J(0, T)$. Вводя общепринятое обозначение λ_∞ для значения λ в этом пределе, из (3.8) получаем

$$\lambda_{\infty, \text{зерк}} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{dq}{(a/q) + q^2}.$$

Вводя новую переменную $x = q^3/a$, находим

$$\lambda_{\infty, \text{зерк}} = \frac{2}{3\pi a^{1/3}} \int_0^\infty \frac{x^{-1/3} dx}{1+x} = \frac{4}{3\sqrt[3]{a^{1/3}}}.$$

Подставляя значение a , приходим к выражению

$$\lambda_{\infty, \text{зерк}} = \frac{8}{9} \frac{3^{1/3}}{(2\pi)^{1/3}} (\lambda_{L\xi_0}^2 \xi'_0)^{1/3} = 0,58 (\lambda_{L\xi_0}^2 \xi'_0)^{1/3}, \quad (3.13)$$

форма которого была предсказана раньше [см. выражение (3.4)] с помощью элементарных рассуждений. Вытекающий из теории БКШ поправочный множитель $(\xi_0/\xi'_0)^{1/3} = [J(0, T)]^{-1/3}$ к простому пиппардовскому выражению играет довольно малую роль, поскольку его значение плавно меняется в пределах от 1 при $T=0$ до 0,91 при T_c .

Если рассеяние на поверхности считать не зеркальным, а диффузным, то получаются выражения, которые лишь немного отличаются от приведенных выше формул. При этом специфика вычислений при данной поверхности сводится только к обрезанию области интегрирования по q' в координатно-пространственном выражении (2.117) для функции отклика. Физическая причина этого состоит в том, что электроны, пришедшие в точку g от поверхности, не помнят предыдущих воздействий на них со стороны поля. Записывая это условие на языке преобразования Фурье, вместо выражения (3.8) получаем следующую формулу:

$$\lambda_{\text{диф}} = \frac{\pi}{\int_0^\infty \ln [1 + K(q)/q^2] dq}. \quad (3.14)$$

Несмотря на внешнее отличие этого выражения от (3.8), из него следует тот же самый результат (3.12) для локальной аппроксимации, а для λ_∞ получается выражение, отличающееся от (3.13) только отсутствием множителя $8/9$. Таким образом, эти два предельно различных предположения относительно поверхностного рассеяния приводят к очень близким результатам. Это является удачным обстоятельством, так как реальный характер рассеяния различен, и, по всей вероятности, в действительности не выполняется ни один из этих предельных случаев.

Применительно к реальным металлам полученные результаты могут быть полезны при обсуждении численных значений пара-

метров различных чистых материалов при температуре значительно ниже критической. Свойства алюминия хорошо аппроксимируются величиной λ_∞ , так как $\lambda_L \approx 160 \text{ \AA}$, в то время как $\xi_0 \approx 15\,000 \text{ \AA}$, так что $\xi_0/\lambda_L \approx 100$. Однако для олова $\lambda_L \approx 350 \text{ \AA}$ и $\xi_0 = 3000 \text{ \AA}$, так что λ_∞ может служить лишь разумным приближением. Для свинца $\lambda_L \approx \xi_0/2$, и поэтому лондоновская локальная аппроксимация в действительности лучше, чем λ_∞ . Таким образом, для чистых металлов, чтобы получить правильные количественные результаты, почти всегда необходимо прибегать к численному интегрированию выражений (3.8) или (3.14). Для сплавов очень хорошим приближением часто служит локальный предел.

3.1.4. Температурная зависимость λ

Как указывалось выше, в теории БКШ не существует универсальной температурной зависимости $\lambda(T/T_c)/\lambda(0)$ для различных металлов из-за различия отношения $\xi_0/\lambda_L(0)$, и, вообще говоря, в каждом случае требуется численный расчет. Однако эти различия не настолько велики, чтобы не согласовываться с почти универсальной температурной зависимостью, наблюдаемой экспериментально, особенно если принять во внимание, что измерения не являются абсолютно точными и не могут быть проделаны до $T=0$. В случае чистых металлов представляются очевидными два предельных случая: $\xi_0/\lambda_L(0)=0$ и $\xi_0/\lambda_L(0)\rightarrow\infty$, соответствующие обсуждавшимся выше локальному пределу и предельно аномальному случаю. В случае локального предела температурная зависимость сводится просто к зависимости $\lambda_L(T)$, даваемой выражением (2.111). В предельно аномальном случае из формулы (3.13) получаем следующее соотношение:

$$\frac{\lambda_\infty(T)}{\lambda_\infty(0)} = \left[\frac{\lambda_L^2(T)}{\lambda_L^2(0) J(0, T)} \right]^{1/2} = \left\{ \frac{\Delta(T)}{\Delta(0)} \operatorname{th} \left[\frac{1}{2} \beta \Delta(T) \right] \right\}^{-1/2}. \quad (3.15)$$

Последнее равенство использует формулу (2.125) и позволяет выразить $J(0, T)$ через $\lambda_L(T)$ и $\Delta(T)$ — величины, уже определенные формулами (2.111) и (2.53), включенные в таблицу Мюльшлегеля [2]. Наконец, в грязном ($l \ll \xi_0$) локальном пределе выражение (3.12) упрощается и принимает вид

$$\lambda_{\text{эфф}}(T) = \lambda_L(T) \left[\frac{\xi_0}{J(0, T) l} \right]^{1/2}, \quad (3.16)$$

предсказанный выше [см. выражение (2.120)], так что ожидаемая температурная зависимость будет иметь вид

$$\frac{\lambda_{\text{эфф}}(T)}{\lambda_{\text{эфф}}(0)} = \frac{\lambda_L(T)}{\lambda_L(0) J^{1/2}(0, T)} = \left[\frac{\lambda_\infty(T)}{\lambda_\infty(0)} \right]^{1/2}. \quad (3.17)$$

На рис. 3.3 дано сравнение этих различных температурных за-

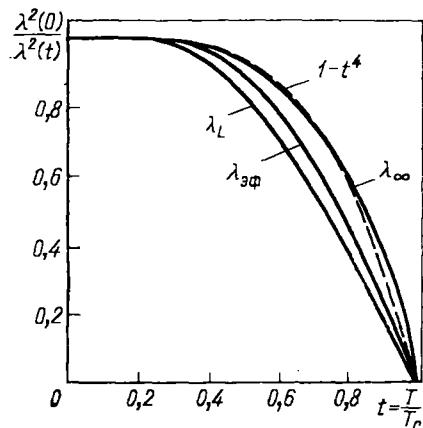


Рис. 3.3. Сравнение температурных зависимостей величины $1/\lambda^2$, предсказываемых теорией КБШ для различных предельных случаев. Пунктиром показана эмпирическая зависимость (3.18)

вимостей с эмпирической формулой «двуихжидкостной модели»:

$$\frac{\lambda(T)}{\lambda(0)} = [1 - (T/T_c)^4]^{-1/2} \equiv y(T/T_c). \quad (3.18)$$

Видно, что из всех теоретических формул в наибольшем согласии с формулой (3.18) находится температурная зависимость λ_∞ . Этого и следовало ожидать, поскольку большинство достоверных измерений было выполнено для олова, являющегося типичным представителем чистых сверхпроводников, для которых наиболее подходящей аппроксимацией должна быть λ_∞ . Напомним, что аппроксимация λ_∞ непригодна вблизи T_c , где $\lambda(T)$ превышает ξ_0 . В частности, при точных вычислениях бесконечную крутизну λ_∞^{-2} при T_c нужно заменить конечным наклоном λ_L^{-2} . Заметим при этом, что из-за различных нормировок λ_L и λ_∞ на рис. 3.3 перед сравнением λ_L^{-2} с λ_∞^{-2} наклон λ_L^{-2} вблизи T_c необходимо увеличить на коэффициент $\sim 0,4 [\xi_0/\lambda_L(0)]^{2/3}$. При типичном значении $\xi_0/\lambda_L(0) = 10$ этот коэффициент увеличивает наклон почти вдвое и делает его близким к наклону эмпирической кривой. Таким образом, полная микроскопическая теория дает температурную зависимость, которая значительно ближе к эмпирическому закону, чем λ_∞ .

3.2. Глубина проникновения в тонких пленках

Теория глубины проникновения магнитного поля в тонкие пленки нелокальных сверхпроводников интересна по нескольким причинам. Во-первых, многие ранние измерения $\lambda(T)$ были сделаны на пленках толщиной $d \sim \lambda$, чтобы при изменении T наблюдалось заметное изменение магнитного момента. При этом возникает вопрос, насколько измеренные таким образом значения λ соответствуют массивным образцам. Во-вторых, поскольку многие эксперименты по сверхпроводникам в магнитных полях вы-

полняются на тонких пленках, то желательно как можно глубже понять механизм взаимодействия магнитного поля с пленкой. На конец, анализ поведения тонких пленок иллюстрирует дальнейшие следствия из нелокальной электродинамики, которые не так очевидны при классическом рассмотрении поля в глубь массивного сверхпроводника.

Для простоты ограничимся рассмотрением пленок настолько тонких, что самосогласованное значение векторного потенциала можно заменить векторным потенциалом невозмущенного приложенного поля. Рассмотрим два случая: случай, когда поле параллельно поверхности, и случай, когда поле перпендикулярно к поверхности. Ось x в обоих случаях выберем перпендикулярной к плоскости пленки и пересекающей ее поверхности в точках $x = \pm d/2$. Пусть в параллельном случае поле будет направлено вдоль оси z (в перпендикулярном — конечно, вдоль оси x). Тогда в параллельном случае * векторный потенциал, как указывалось выше, выбирается из условия симметрии следующим образом:

$$A_y = Hx, \quad H \parallel \text{Плёнке}. \quad (3.19)$$

Так как потенциал меняет знак при проходе через пленку, ясно, что вычисление нелокального отклика тока, который имеет тенденцию усреднять значения $\mathbf{A}(r')$ по объему, требует особой осторожности. Выбор векторного потенциала в перпендикулярном случае менее очевиден и требует дальнейшего изучения общего отклика пленки на перпендикулярное поле. Однако поскольку в этом случае изменения \mathbf{A} вдоль оси x не влияют на поле в этом направлении, а толщина пленки взята нами очень малой, то имеет смысл считать \mathbf{A} не зависящим от x . Мы предполагаем также, что векторный потенциал изменяется в плоскости yz очень медленно, с характерной длиной ξ , так что можно просто положить**

$$A_y = |\mathbf{A}| = \text{const}, \quad \mathbf{H} \perp \text{Плёнке}. \quad (3.20)$$

Распределения токов для двух различных ориентаций пленки относительно поля показаны на рис. 3.4. В лондоновской, или локальной, аппроксимации $J_y(x)$ пропорционален $A_y(x)$, как это показано штриховыми линиями. Однако в нелокальной теории эта зависимость, обозначенная сплошными линиями, имеет более сложный вид, к выводу которого мы сейчас и переходим.

3.2.1. Диффузное рассеяние поверхностью

Используя координатно-пространственную форму нелокального отклика (2.117), можно свести вычисление $J_y(x)$ к одномерному

* Имеется в виду случай, когда магнитное поле направлено одинаково и равно по величине с обеих сторон пленки. — Прим. ред. пер.

** В вихревом состоянии \mathbf{A} изменяется с характерной длиной Гинзбурга—Ландау $\xi(T)$, но вблизи T_c она еще много больше, чем пиппардовская длина ξ .

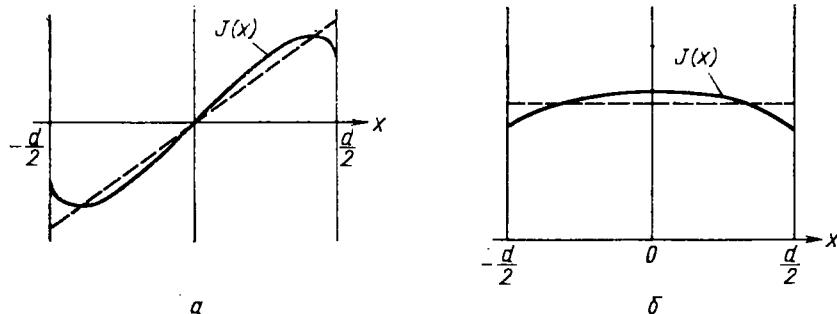


Рис. 3.4. Распределение плотности тока по толщине пленки, находящейся в магнитном поле:

сплошная линия соответствует нелокальной теории с $\xi \gg d$; пунктирная линия относится к локальному сверхпроводнику (когда $J \sim A$) с тем же самым $\lambda_{\text{оф}}$; а — случай магнитного поля, параллельного пленке; б — случай поля, перпендикулярного к пленке

интегралу, выполнив для этого интегрирование по плоскости yz . Ограничим интегрирование по x пределами $\pm d/2$, что соответствует диффузному рассеянию поверхностью [см. обсуждение, предшествовавшее формуле (3.14)], будем иметь

$$J_y(x) = - \int_{-d/2}^{d/2} K(|x - x'|) A_y(x') dx', \\ K(X) = \frac{3c}{16\pi\xi_0^2 \lambda_L^2} \iint \frac{Y^2 J(R, T)}{R^4} dY dZ. \quad (3.21)$$

После выполнения элементарного интегрирования по углу в цилиндрических координатах с $\rho^2 = Y^2 + Z^2 = R^2 - X^2$, обозначая R через βX , $K(X)$ можно записать

$$K(X) = \frac{3c}{16\pi\xi_0^2 \lambda_L^2} (\beta^{-1} - \beta^{-3}) J(\beta X, T) d\beta. \quad (3.22)$$

Если теперь использовать обобщенную пиппардовскую аппроксимацию [см. рассуждения, приведшие к формуле (2.123)],

$$J(R, T)(\xi_0/\xi') \exp(-R/\xi'), \quad (3.23)$$

то соотношение (3.22) можно выразить через интегральную показательную функцию E_1 :

$$K(X) = \frac{3c}{16\pi\xi_0^2 \lambda_L^2} [E_1(X/\xi') - E_3(X/\xi')]. \quad (3.24)$$

Подставляя вместо интегральных функций их асимптотические выражения, получаем

$$K(X) \rightarrow \frac{3c}{16\pi\xi_0^2 \lambda_L^2} [\ln(\xi'/X) - 1,077 + 2X/\xi' + \dots], \quad X/\xi' \rightarrow 0, \quad (3.24a)$$

$$K(X) \rightarrow \frac{3c}{8\pi\xi_0^2\lambda_L^2} \frac{\xi'^2}{X^2} \exp(-X/\xi'), \quad X/\xi' \rightarrow \infty. \quad (3.246)$$

Таким образом, $K(X)$ имеет логарифмическую особенность в точке $X=0$, а при больших X экспоненциально убывает.

Сведя задачу к выражению (3.21) и вычислив $K(X)$, можно теперь рассчитать $J(x)$ для любого заданного $A(x')$. Вообще говоря, так как $J(x)$ будет, в свою очередь, видоизменять $A(x')$, в общем случае для J и A нужно искать самосогласованное решение. Однако, как говорилось выше, в рассматриваемом случае очень тонкой пленки можно считать, что векторный потенциал $A(x)$ зависит только от приложенного поля. На рис. 3.4 показаны распределения токов, вычисленные с учетом этого для предельного случая $d \ll \xi'$. Заметим, что в этом случае $X \leq d \ll \xi'$, так что предельное выражение (3.24а) всегда является хорошим приближением для $K(X)$.

Теперь, когда найдены распределения токов, ответим на вопрос: насколько хорошо можно характеризовать этот отклик посредством лишь одного параметра, играющего роль глубины проникновения. Выберем в качестве такого параметра эффективную лондоновскую (или локальную) глубину проникновения $\lambda_{\text{эфф}}$, дающую распределение тока с той же самой энергией, которая является фундаментальной величиной в теориях типа Гинзбурга — Ландау. Если задача линейная, т. е. $\mathbf{J} \sim \mathbf{A}$, то, с одной стороны, работа, совершаемая при установлении распределения тока, равна

$$\begin{aligned} W &= \iint \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) dt d\mathbf{r} = \\ &= -\frac{1}{c} \iint \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dt d\mathbf{r} = -\frac{1}{2c} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}) \mathbf{A}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Тогда для нелокального случая энергия, приходящаяся на единицу площади пленки, равна

$$W = \frac{1}{2c} \iint A(x) A(x') K(|x-x'|) dx dx'. \quad (3.26)$$

С другой же стороны, для энергетически эквивалентного лондоновского сверхпроводника

$$J(x) = -\frac{c}{4\pi\lambda_{\text{эфф}}^2} A(x), \quad (3.27)$$

так что из формулы (3.25) получаем следующее выражение для энергии, приходящейся на единицу площади пленки:

$$W = (8\pi\lambda_{\text{эфф}}^2)^{-1} \int A^2(x) dx. \quad (3.28)$$

Приравнивая выражения (3.28) и (3.26), получаем

$$\frac{1}{\lambda_{\text{эфф}}^2} = \frac{4\pi}{c} \frac{\iint A(x) A(x') K(|x-x'|) dx dx'}{\int A^2(x) dx}. \quad (3.29)$$

При аппроксимации K формулой (3.24а) это выражение приобретает вид

$$\frac{\lambda_L^2}{\lambda_{\text{эфф}}^2} = \frac{3}{4\xi'_0} \frac{\iint A(x) A(x') \ln(\xi'/|x-x'|) dx' dx}{\int A^2(x) dx}. \quad (3.30)$$

Поскольку подынтегральные выражения в одномерном и двумерном интегралах одного порядка, то отношение интегралов имеет порядок области интегрирования d . Таким образом, можно ожидать результата

$$\lambda_{\text{эфф}} \sim \lambda_L (\xi'_0/d)^{1/2}, \quad (3.31)$$

напоминающего выражение (3.16) для грязного сверхпроводника со средней длиной свободного пробега $l \sim d$.

Проделаем более точные вычисления выражения (3.30) для случая перпендикулярного поля, когда $A(x)$ является константой и просто выносится из-под знака интеграла. После выполнения интегрирования отношение интегралов даст $d \ln(\xi'/d)$, откуда *

$$\lambda_{\text{эфф}, \perp} = \lambda_L \{4\xi'_0/[3d \ln(\xi'/d)]\}^{1/2}, \quad d \ll \xi'. \quad (3.32a)$$

Если теперь выполнить интегрирование в выражении (3.30) для случая параллельного поля, когда $A(x) = Hx$, то получаем

$$\lambda_{\text{эфф}, \parallel} = (4\lambda_L/3) (\xi'_0/d)^{1/2}, \quad d \ll \xi'. \quad (3.32b)$$

Это выражение отличается от (3.32a) на коэффициент

$$\frac{\lambda_{\parallel}}{\lambda_{\perp}} = \left[\frac{4}{3} \ln(\xi'/d) \right]^{1/2}, \quad (3.33)$$

который в рассматриваемом случае $d \ll \xi'$ всегда превышает единицу.

Конкретное практическое значение полученных результатов невелико, так как они были получены с помощью выражений, справедливых только в предельном случае очень тонких пленок; более того, они предполагают идеальную геометрию со строго плоскопараллельной диффузионно рассеивающей поверхностью, что совсем нереально для таких тонких пленок. Однако наша задача при разборе этого примера как раз и заключалась в том,

* Эта формула для наиболее реального случая постоянного по толщине поля особенно важна для приложений. Если, как это обычно бывает на практике, материал не слишком чистый, то в ней можно также принять $\xi' = l$. При этом выражение для $\lambda_{\text{эфф}}$ можно [32*] переписать в очень удобном виде:

$$\lambda_{\text{эфф}}^2 = (\hbar c^2 k T_c / 2\pi^2 \Delta^2) d R_{\square},$$

где R_{\square} — нормальное сопротивление пленки на квадрат. Таким образом, подставляя постоянные и выражение для Δ при $T \approx T_c$, получаем для важной величины $\lambda_{\perp} = 2\lambda_{\text{эфф}}^2/d$ простое выражение [33*]:

$$\lambda_{\perp} [\text{мкм}] \approx 0,83 R_{\square} [\text{Ом}] / (T_c - T) [\text{К}],$$

применимое и при $d < l$. — Прим. ред. пер.

чтобы с помощью всех этих деталей проиллюстрировать невозможность в рамках нелокальной электродинамики точно характеризовать отклик одним-единственным параметром $\lambda_{\text{эф}}$. Конечно, можно было бы произвольно определить $\lambda_{\text{эф}}$ через энергию, но дело в том, что этот результат зависит от конфигурации поля, а не только от природы сверхпроводящего образца. Несмотря на невозможность какого-либо точного описания через $\lambda_{\text{эф}}$, практически все-таки можно использовать соотношения типа (3.31), чтобы вполне удовлетворительно описывать упрощенный электродинамический отклик тонкой пленки нелокального сверхпроводника, поскольку выражения (3.32а) и (3.32б) реально отличаются не очень сильно друг от друга. Более того, можно ожидать, что эти различия должны быть значительно меньше для реальных пленок, в которых объемное рассеяние на примесях и зернистая граница не позволяют получить большого превышения ξ' над d и в которых неоднородности поверхности ограничивают длину свободного пробега в плоскости пленки. Следовательно, логарифмический фактор (3.33) должен быть меньше, чем в идеальной задаче.

3.2.2. Зеркальное рассеяние поверхностью

Для полноты картины рассмотрим вкратце противоположный подход, который надлежит использовать, если рассеяние на поверхности ближе к зеркальному, чем к диффузному. Здесь, как и в нашем рассмотрении глубины проникновения поля внутрь массивного образца, нужно заменить исходную задачу эквивалентной ей задачей, в которой в бесконечную среду введены надлежащие токовые листы. В случае параллельного поля требуется бесконечная последовательность токовых листов переменного направления, разнесенных друг от друга на расстояние d , которые в отсутствие сверхпроводящего экранирования дают зависимость $h(x)$ в виде последовательности прямоугольных импульсов и, следовательно, пилообразную форму $A(x)$. Поскольку поле периодическое, интеграл Фурье переходит в ряд Фурье, который можно достаточно хорошо аппроксимировать первым членом, соответствующим $q = \pi/d$. Тогда отклик в предельно аномальном случае теории БКШ определяется значением $K(\pi/d) = \lambda_L^{-2} [3d/(4\xi_0')]$, т. е. обобщенным пиппардовским выражением. Приравнивая это значение величине $\lambda_{\text{эф}}^{-2}$, получаем соотношение

$$\lambda_{\text{эф}, \text{зерк. I}} = \lambda_L \left(\frac{4\xi_0'}{3d} \right)^{1/2}, \quad (3.34a)$$

которое отличается от соответствующего результата для диффузного рассеяния (см. выражение (3.32б)) на множитель $(3/4)^{1/2}$, очень близкий к коэффициенту $8/9$ для массивного образца.

В случае перпендикулярного поля ситуация меняется коренным образом. Так как в этом случае \mathbf{A} параллельно пленке и постоянно по всей ее толщине, переход к эквивалентной задаче,

не содержащей границ, дает \mathbf{A} , постоянное во всем пространстве. Отсюда $\mathbf{q} = 0$, и в случае чистого материала получаем

$$\lambda_{\text{эфф., зерк.}, \perp} = \lambda_L; \quad (3.34b)$$

в более общем случае λ определяется выражением (3.12). Этот результат для сверхпроводящей пленки соответствует тому, что зеркальное рассеяние на границе в нормальных пленках не дает вклада даже в обычное электрическое сопротивление. Экспериментальные данные свидетельствуют о том, что зеркальное отражение редко играет важную роль в пленках, как в нормальному, так и в сверхпроводящем состояниях. Таким образом, наши предыдущие результаты [см. выражения (3.32)] для диффузного рассеяния дают более правильное представление об истинном положении дел.

3.3. Измерения λ .

Прежде чем закончить обсуждение глубины проникновения, рассмотрим очень кратко некоторые из экспериментальных методов, используемых для измерения этой величины.

В самых ранних работах (например, [3, 4]) использовались в основном или большое число коллоидных частиц, или тонкие пленки с очень малым размером d , сравнимым с λ . Изменяя температуру [а следовательно, и $\lambda(T)$], измеряли возникающие изменения вещественной части магнитной восприимчивости. В той степени, в которой было известно распределение частиц в образце по размерам, эти измерения позволяли сделать выводы относительно $\lambda(d, T)$, но ясно, что при этом имели место количественные неточности.

Еще в 1940 г. Казимирам было показано [5], что измерения восприимчивости, выполненные на переменном токе, достаточно чувствительны к изменениям глубины проникновения поля $\lambda(T) - \lambda(T \approx 0)$ внутрь уединенного массивного образца. Этот эксперимент был впервые успешно выполнен Лорманом и Шенбергом [6, 7], использовавшими для измерения индуктивный мост, работающий на частоте 70 Гц. Несмотря на то, что полученная чувствительность была недостаточной, чтобы проследить за изменениями $\lambda(T)$ намного ниже T_c , в основном их результаты удовлетворяли эмпирической зависимости (3.18), которая уже была получена в более ранних экспериментах с малыми частицами. Пиппардом, использовавшим СВЧ-технику для измерения температурной зависимости резонансной частоты объемного резонатора и тем самым увеличившим частоту до $10^9 - 10^{10}$ Гц, было получено [8, 9] десятикратное увеличение чувствительности (позволившее регистрировать изменения λ на 2 Å). Это дало ему возможность проследить за температурным изменением λ вплоть до очень низкой температуры, но при этом потребовалось введение поправки на влияние нормальных электронов, которое становится все более существенным с увеличением частоты.

Сопоставляя результаты с толщиной скин-слоя в нормальном состоянии (которая была достаточно хорошо известна из других данных), Пиппард смог измерить не только изменение $\lambda(T)$, но и абсолютное значение λ , правда с несколько меньшей точностью.

После появления теории БКШ Шавлов и Девлин выполнили повторные измерения температурной зависимости λ для олова [10], работая на частоте $\sim 10^5$ Гц, где частотная поправка в измерениях пренебрежимо мала, а чувствительность (при использовании частотомера для измерения малых температурных изменений собственной частоты резонансного контура) была все так же велика, как в СВЧ-измерениях Пиппарда. Хотя их результаты в основном соответствовали эмпирическому соотношению $\lambda \sim y$, где $y = (1 - t^4)^{-1/2}$, $t = T/T_c$, график зависимости $d\lambda/dy$ от y давал ниже $y \approx 1,5$ довольно быстрый рост этой величины. Именно такое поведение и было предсказано теорией БКШ вследствие экспоненциального выключения термических возбуждений из-за влияния энергетической щели. Неполное количественное совпадение между теорией и экспериментом, вероятно, обусловлено тем, что теория рассматривает идеально изотропный металл, в то время как реальный металл имеет сложную поверхность Ферми с анизотропией щели и глубины проникновения. Подробный обзор результатов различных высокочастотных измерений глубины проникновения и поверхностного сопротивления дан Уолдрамом [11].

Важно отметить, что большинство точных методов фиксируют только изменения $\lambda(T)$ с температурой. Оказалось очень трудным создать метод, позволяющий сравнительно точно измерять абсолютное значение $\lambda(T)$. Поэтому, когда проводят сравнение теории с экспериментом, обычно сравнивают не $\lambda(T)$, а разность $[\lambda(T) - \lambda(0)]$. В результате этого более четверти «экспериментальных» значений $\lambda(0)$ в действительности являются значениями, найденными из условия соответствия экспериментальных данных теоретической зависимости $\lambda(T)$. Говоря проще, это есть коэффициент в старом эмпирическом соотношении $\lambda(T) = \lambda(0) \cdot y(t)$ с y , определенным как указывалось выше. Сравнительно недавно были сделаны попытки определения $\lambda(0)$ путем подгонки экспериментальных данных к кривой, вычисляемой с помощью теории БКШ. Однако такой путь не столь прост, так как связан с численным расчетом функции, имеющей *два* подгоночных параметра $\lambda(0)$ и ξ_0 даже в простом изотропном приближении.

Заметим, наконец, что появление сверхпроводящих квантовых интерферометров, которые будут обсуждаться ниже, увеличило чувствительность измерения магнитного потока на постоянном токе, что позволяет осуществить измерение $\Delta\lambda(T)$ на постоянном токе с такой же точностью, как и с использованием СВЧ-техники. Сейчас оба эти способа измерения используют для расширения ограниченного числа известных данных по анизотропии

глубины проникновения относительно кристаллографических осей. Такие исследования необходимы для дальнейшей проверки теории сверхпроводимости, обобщенной на реальные анизотропные металлы.

3.4. Сверхпроводники в сильных магнитных полях: промежуточное состояние

Рассмотрим теперь действие достаточно сильных полей, которые способны разрушить сверхпроводимость, в отличие от слабых полей, просто индуцирующих экранирующие токи, не позволяющие полю проникнуть внутрь образца. Действие таких сильных полей зависит от *формы* образца. Простейшим случаем является длинный тонкий цилиндр, поверхность которого параллельна полю, поскольку в этом случае поле везде вдоль поверхности в точности равно приложенному полю H_0 . Для образца другой геометрии, когда размагничивающий фактор отличен от нуля, поле, как это показано на рис. 3.5, над частью поверхности будет превышать приложенное поле H_0 , вызывая появление некоторых нормальных областей, даже когда величина H_0 все еще меньше критического значения H_c .

Рассмотрим подробно соответствующие этим случаям значения свободной энергии, ограничиваясь сначала простым случаем нулевого размагничивающего фактора. Когда образец (объемом V) нормален, полная свободная энергия Гельмгольца дается выражением

$$F_N = Vf_{N,0} + V \frac{H_0^2}{8\pi} + V_{\text{внеш}} \frac{H_0^2}{8\pi}, \quad (3.35)$$

где $f_{N,0}$ — плотность свободной энергии в нормальном состоянии при отсутствии поля, а члены с H_0^2 описывают энергию поля соответственно внутри и вне образца. Когда образец сверхпроводящий, то в силу эффекта Мейсснера поле в нем отсутствует и в этом случае

$$F_S = Vf_{S,0} + V_{\text{внеш}} H_0^2 / 8\pi, \quad (3.36)$$

где $f_{S,0}$ — плотность свободной энергии в сверхпроводящем состоянии. (Размеры образца предполагаем макроскопическими, что позволяет пренебречь эффектом проникновения поля и токами в поверхностном слое глубиной λ .) Взяв разность, получаем

$$F_N - F_S = V(f_{N,0} - f_{S,0}) + VH_0^2 / 8\pi = V(H_c^2 / 8\pi) + V(H_0^2 / 8\pi). \quad (3.37)$$

В последнем равенстве использовано термодинамическое определение критического поля H_c :

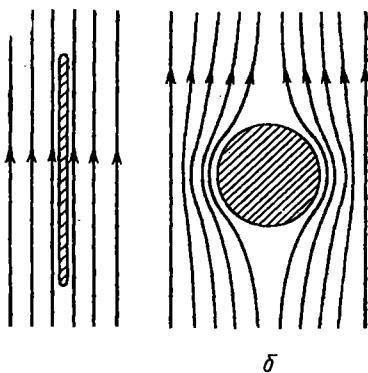
$$f_{N,0} - f_{S,0} = H_c^2 / 8\pi. \quad (3.38)$$

В частности, когда $H_0 = H_c$, из формулы (3.37) получаем

$$F_N - F_S|_{H_c} = V(H_c^2 / 4\pi). \quad (3.39)$$

Рис. 3.5. Магнитное поле вокруг сверхпроводящих образцов различной формы:

a — размагничивающий фактор близок к нулю; *b* — размагничивающий фактор равен $1/3$ (шар). В случае показанного здесь полного эффекта Мейсснера для шара (*b*) поле на экваторе равно $3/2$ от приложенного поля



b

Таким образом, при переходе из сверхпроводящего в нормальное состояние приходящаяся на единицу объема свободная энергия F увеличивается на величину $H_c^2/4\pi$. Откуда же берется эта энергия? С помощью элементарных вычислений можно показать, что эту энергию вкладывает источник постоянного поля, совершающий при проникновении поля в образец работу против э. д. с. индукции.

Использование свободной энергии Гельмгольца создает определенные неудобства, связанные с необходимостью учета энергии источника поля. Эта свободная энергия является пригодным термодинамическим потенциалом в том случае, когда постоянным поддерживается \mathbf{B} , а не \mathbf{H} , поскольку при постоянном значении \mathbf{B} отсутствует э. д. с. индукции и энергия от генератора тока не потребляется.

При постоянном \mathbf{H} правильным термодинамическим потенциалом является свободная энергия Гиббса G . Она отличается от F на величину $-V(BH/4\pi)$, автоматически учитывающую работу, совершаемую генератором. Таким образом, будем рассматривать плотность свободной энергии

$$g = f - hH/4\pi. \quad (3.40)$$

Тогда в нормальном состоянии

$$G_N = Vf_{N,0} - VH_0^2/8\pi - V_{\text{внеш}}H_0^2/8\pi, \quad (3.41)$$

так как $\mathbf{h} = \mathbf{B} = \mathbf{H}$ как внутри, так и вне образца. В сверхпроводящем состоянии внутри образца $\mathbf{h} = \mathbf{B} = 0$, отсюда

$$G_S = Vf_{S,0} - V_{\text{внеш}}H_0^2/8\pi. \quad (3.42)$$

Взяв разность, получаем

$$G_N - G_S = V(f_{N,0} - f_{S,0}) - VH_0^2/8\pi. \quad (3.43)$$

Поскольку требование равновесия фазовых состояний заключается в равенстве соответствующих им значений термодинамического потенциала, которым в случае фиксированного \mathbf{H} является

G , то из соотношения (3.43) и формулы (3.38), определяющей H_c , следует, что условием существования в равновесии сверхпроводящей и нормальной фаз является $H_0 = H_c$.

3.4.1. Ненулевой размагничивающий фактор

Конечно, предыдущее обсуждение было некоторой идеализацией, введенной ради простоты. Любой реальный образец имеет ненулевой размагничивающий фактор, в результате чего поле у поверхности отличается от приложенного поля H_0 , однородного на больших расстояниях от образца. В качестве конкретного примера рассмотрим сферический сверхпроводящий образец радиусом R . Внутри сверхпроводника в макроскопическом масштабе все еще имеем $\mathbf{B} = 0$, по крайней мере для $H_0 \ll H_c$. Снаружи поле удовлетворяет уравнению

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{B} = \nabla^2 \mathbf{B} = 0 \quad (3.44a)$$

с граничными условиями

$$\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{H}_0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty, \quad (3.44b)$$

$$\mathbf{B}_n = 0 \quad \text{при } r = R, \quad (3.44b)$$

где B_n — нормальная компонента вектора \mathbf{B} . Это стандартная краевая задача с решением во внешней области

$$\mathbf{B} = \mathbf{H}_0 + \frac{H_0 R^3}{2} \nabla \left(\frac{\cos \Theta}{r^2} \right), \quad (3.45)$$

где Θ — полярный угол, измеряемый от H_0 . В том, что решение (3.45) удовлетворяет всем условиям (3.44), включая и $B_n = 0$, можно убедиться непосредственной подстановкой. Формула (3.45) дает для тангенциальной компоненты \mathbf{B} на поверхности сферы значение

$$(B_\theta)_R = \frac{3}{2} H_0 \sin \Theta. \quad (3.46)$$

Отметим, что это значение превышает H_0 внутри некоторой экваториально расположенной области, соответствующей изменению угла Θ от 42° до 138° . Для экватора $B_\theta = 3H_0/2$, так что поле на экваторе достигнет значения H_c , когда внешнее поле H_0 будет равно $2H_c/3$. Поэтому даже для полей H_0 чуть выше этого значения определенные области сферы должны быть нормальными. Однако при этом весь объем шара не может быть нормальным, так как в последнем случае полностью исчез бы диамагнетизм образца и поле стало бы иметь везде одинаковое значение $H = H_0 \approx 2H_c/3$, недостаточное, чтобы предотвратить появление сверхпроводимости вновь. Таким образом, для полей в диапазоне

$$2H_c/3 < H_0 < H_c$$

сверхпроводящие и нормальные области должны существовать; такое состояние исторически получило название *промежуточного*.

Обобщая рассуждения на образец формы произвольного эллипсоида (только для которого хорошо известен размагничивающий фактор), можно ожидать существования промежуточного состояния для значений приложенного поля, лежащих в интервале

$$1 - \eta < H_0/H_c < 1. \quad (3.47)$$

Размагничивающий фактор η изменяется от нуля в предельном случае длинного тонкого цилиндра или тонкой пластинки в параллельном поле до $1/3$ для шара, $1/2$ для цилиндра в поперечном поле и, наконец, до 1 для бесконечного плоскопараллельного слоя в перпендикулярном поле. Так как такой слой в перпендикулярном поле всегда обнаруживает промежуточное состояние, рассмотрим данный предельный случай более подробно. Как раз для такой геометрии промежуточное состояние наиболее изучено экспериментально.

3.4.2. Структура промежуточного состояния в плоскопараллельной пластине

Рассмотрим бесконечную плоскопараллельную пластину толщиной $d \gg \lambda$ в перпендикулярном поле. Впервые такая задача была разобрана в классической работе Ландау [12]. В этом случае можно считать, что средний поток через единицу площади поверхности пластины равен B_0 и соответствует значению внешнего поля на достаточном удалении от пластины, где любые вызванные пластиной неоднородности сглажены (рис. 3.6). Так как в сверхпроводящих областях $h=0$, то относительная часть плотности нормального металла должна быть связана с плотностью потока в нем h_N следующим образом:

$$\rho_N = B_0/h_N. \quad (3.48)$$

Пренебрегая влиянием поверхностной энергии, получаем $h_N = H_c$, как и ожидалось из выражения (3.43); позже мы найдем поправки к этому значению.

Для нахождения размера и формы сверхпроводящих и нормальных областей необходимо в энергетическом балансе учесть поверхностные энергии. Сгруппируем их в два члена: F_1 , соответствующий границе раздела между сверхпроводящими и нормальными доменами внутри пластины, и F_2 , зависящий главным образом от процессов вблизи границы раздела между образцом и внешней средой.

Поскольку, как это было до сих пор, теория БКШ ограничивается рассмотрением только постоянной плотности сверхпроводящих пар в пространстве, придется здесь предвосхитить дальнейшее рассмотрение теории Гинзбурга — Ландау (допускающей пространственные градиенты) введением феноменологического выражения для поверхностной энергии, связанной с границей раз-

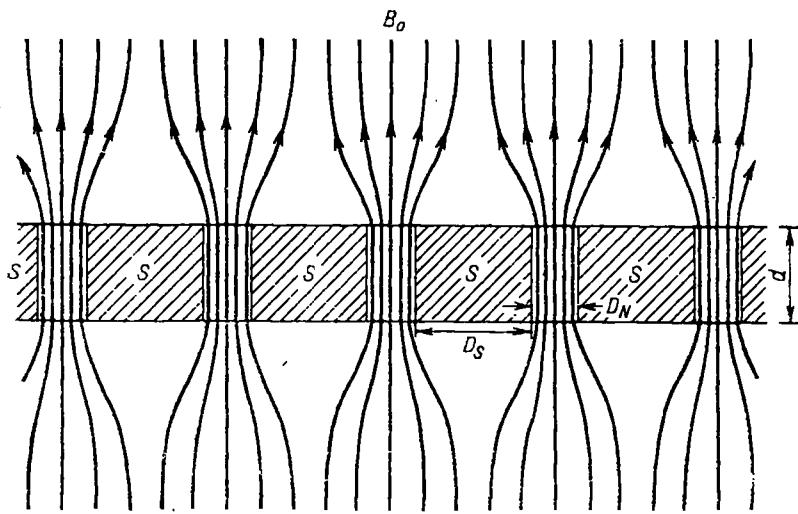


Рис. 3.6. Схематическое изображение магнитного потока, проникающего через нормальные слои пластины, находящейся в промежуточном состоянии. Магнитное поле на большом удалении от образца равно B_0 , а в чередующихся сверхпроводящих и нормальных областях пластины равно соответственно или нулю, или h_n ($\approx H_c$)

дела $N-S$. Это выражение обычно дается в величинах длины, которую будем обозначать * $\delta(T)$, так что дополнительная энергия, приходящаяся на единицу площади поверхности границы раздела, будет

$$\gamma = H_c^2 \delta / 8\pi. \quad (3.49)$$

Как в дальнейшем будет показано, $\delta \approx \xi - \lambda$, т. е. δ положительно и для типичных чистых сверхпроводников имеет порядок 10^{-5} — 10^{-4} см. Физически δ представляет собой толщину граничной области, которая не является ни полностью нормальной, ни полностью сверхпроводящей. Разумеется, если бы поверхностная энергия была отрицательной, то между макроскопическими объемами этих двух фаз не могло бы быть устойчивого равновесия. Напротив, граница раздела стала бы перемещаться в сторону возрастания отрицательной поверхностной энергии до предела, определяемого толщиной стенок доменов. С подобной ситуацией мы столкнемся в сверхпроводниках II рода, сейчас же будем полагать величину γ положительной.

При данной положительной поверхностной энергии γ стени доменов принимают такую форму, чтобы площадь поверхности была минимальной при прочих равных условиях. В частности, если задана форма нормальных областей на поверхности пластины (что определяет упоминавшуюся выше энергию F_2), то

* Другим общепринятым обозначением является $\Delta(T)$; однако не будем употреблять его, чтобы избежать путаницы с энергетической щелью.

стенки доменов с достаточно хорошей точностью устанавливаются перпендикулярно к поверхности пластины по всей ее толщине, поскольку любое другое их расположение дало бы увеличение F_1 . Менее ясно, какова должна быть двумерная форма доменов, так как для ее нахождения необходима оптимизация соотношения между поверхностной энергией внутри образца (F_1) и энергией поля непосредственно у наружной поверхности слоя (F_2). Общее строгое решение здесь не найдено: сравнивались лишь различные модели. Подобные исследования (см., например, [13, 14]) показали, что различие в свободной энергии мало даже для существенно разных конфигураций нормальных областей (например, таких, как слои и трубки), если только оптимизирован масштаб структуры. Это свидетельствует о том, что в зависимости от конкретных экспериментальных условий и качества образца могут реализовываться самые различные конфигурации, что было подтверждено экспериментально.

Сконцентрируем внимание на анализе слоистой модели промежуточного состояния, поскольку она обладает аналитической простотой и дает те же результаты, что и действительно наблюдаемые структуры. В этой модели, как показано на рис. 3.6, имеется одномерный ряд чередующихся N и S доменов толщиной D_N и D_S с периодом $D = D_N + D_S$. Тогда поверхностная энергия F_1 , приходящаяся на единицу площади пластины, будет

$$F_1 = 2d\gamma/D = \frac{2d\delta}{D} H_c^2/8\pi. \quad (3.50)$$

Само по себе это выражение соответствует очень крупномасштабным структурам, но, как сейчас увидим, внешний вклад F_2 оказывает противоположное воздействие.

Ландау и сотрудниками был проведен численный расчет F_2 , однако удовлетворимся здесь простым физическим рассмотрением, дающим весьма близкие результаты. Основной вклад в F_2 дает излишек энергии неоднородного внешнего магнитного поля снаружи доменной структуры промежуточного состояния относительно однородного поля в нормальном состоянии или в случае бесконечно тонких доменных областей. Так как относительная часть ρ_N объема имеет поле h_N , то средняя плотность энергии поля у поверхности

$$\rho_N h_N^2/8\pi,$$

в то время как из формулы (3.48) следует, что плотность энергии однородного поля

$$B_0^2/8\pi = \rho_N^2 h_N^2/8\pi.$$

Таким образом, средний излишек плотности энергии у поверхности, обусловленный доменной структурой, равен

$$(\rho_N - \rho_N^2) h_N^2/8\pi = \rho_N \rho_s h_N^2/8\pi, \quad (3.51)$$

где $\rho_s = 1 - \rho_N$ — доля сверхпроводящей фазы. Над поверхностью

неоднородность поля, дающая излишек энергии, будет существенно уменьшаться на «длине сглаживания» L , которая порядка меньшей из величин D_S и D_N . Удобной математической формой записи этого соотношения является следующая:

$$L = (D_N^{-1} + D_S^{-1})^{-1} = D / (\rho_N^{-1} + \rho_S^{-1}) = D \rho_S \rho_N.$$

Аппроксимируя F_2 излишком плотности энергии (3.51) на длине L по обе стороны от пластины, получаем

$$F_2 = 2\rho_m^2 \rho_S^2 D h_N^2 / 8\pi. \quad (3.52)$$

Теперь, минимизируя сумму F_1 и F_2 , находим период доменной структуры:

$$D = (d\delta)^{1/2} H_c / (\rho_N \rho_S h_N) \approx (d\delta)^{1/2} / (\rho_N \rho_S). \quad (3.53)$$

Заметим, что порядок величины этого периода D определяется средним геометрическим из макроскопического и микроскопического размеров: толщины d образца и толщины δ доменной стенки. Для типичных значений этих величин $D \approx 10^{-2}$ см. Другой характерной чертой является то, что число доменов становится малым (D становится большим), когда малы или ρ_N , или ρ_S , т. е. вблизи $B_0=0$ и $B=H_c$.

Экспериментально такая доменная структура наблюдалась (см. обзор [15]) с помощью различных методов, например: (1) перемещение по поверхности образца миниатюрного зонда с датчиком на основе магниторезистивного эффекта или эффекта Холла; (2) получение порошковой структуры с помощью осаждения ферромагнитных или сверхпроводящих (диамагнитных) порошков, которые очерчивают области, несущие магнитный поток; (3) использование магнито-оптического эффекта Фарадея в магнитных стеклах, находящихся в контакте с поверхностью образца. Когда магнитное поле приложено под некоторым углом к нормали, возникает упорядоченная слоистая структура со слоями, направленными вдоль поля, так что площадь доменных стенок, а следовательно и поверхностная энергия являются наименьшими. Измерения, выполненные для таких структур, дают значения параметра δ поверхностной энергии, находящиеся в удовлетворительном соответствии с предсказаниями теории Гинзбурга—Ландау. Исторически эти измерения сыграли важную роль в выдвижении их теории на первое место среди феноменологических теорий.

Поверхностная энергия, определяя масштаб доменной структуры, понижает критическое поле для промежуточного состояния до величины H_{c1} , которая несколько меньше H_c , являющегося критическим значением поля в случае нулевого размагничивающего фактора. Можно оценить этот эффект, вычисляя поверхностную энергию при оптимизированном значении (3.53) периода D доменной структуры и добавляя ее к объемной энергии, соответствующей размерам областей ρ_N и ρ_S . Результирующее среднее

значение свободной энергии, приходящейся на единицу объема образца, будет

$$\begin{aligned} f_1 &= \rho_S f_{S,0} + \rho_N (f_{S,0} + H_c^2/8\pi + h_N^2/8\pi) + (F_1 + F_2)/d = \\ &= f_{S,0} + \rho_N H_c^2/8\pi + B_0^2/(\rho_N 8\pi) + 4(1 - \rho_N)(\delta/d)^{1/2} H_c B_0/8\pi. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Сначала отметим, что если в этом выражении пренебречь членом, описывающим поверхностную энергию, то, как и следовало ожидать, f_1 будет иметь минимум при $\rho_N = B_0/H_c$, т. е. при $h_N = H_c$. Когда же учитывается и поверхностная энергия, существует минимум f при

$$\rho_N = (B_0/H_c) [1 - 4(\delta/d)^{1/2} (B_0/H_c)]^{-1/2}. \quad (3.55)$$

В слабых полях эта зависимость ведет себя как (B_0/H_c) , но при больших полях поправки начинают играть существенную роль. Поскольку H_{c1} определено как значение H_0 , для которого $\rho_S \rightarrow 0$, т. е. $\rho_N \rightarrow 1$, то, решая квадратное уравнение, получаем

$$\begin{aligned} H_{c1} &= H_c [(1 + 4\delta/d)^{1/2} - 2(\delta/d)^{1/2}] \approx \\ &\approx H_c [1 - 2(\delta/d)^{1/2}], \quad d \gg \delta. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Численное значение коэффициента при поправке к полю зависит от особенностей конкретной модели со всеми ее приближениями, но основная форма результата должна быть справедливой для самых различных моделей.

В заключение обсуждения этой очень упрощенной модели отметим, что плотность потока h_N в нормальной области дается соотношением B_0/ρ_N . Рассматривая выражение (3.55), видим, что h_N уменьшается от H_c до H_{c1} по мере того, как приложенное поле увеличивается от нуля до критического значения. Таким образом, поле в нормальных областях в основном всегда меньше, чем H_c . Хотя этот результат может показаться парадоксальным, он просто отражает роль поверхностной энергии, которой мы пренебрегали, когда в нулевом приближении рассматривали только величины, пропорциональные объему.

Уточнения. Предыдущее обсуждение упрощенной модели, давая, конечно, полукачественное предсказание размера доменов и величины H_{c1} , тем не менее обрисовывает наиболее важные особенности промежуточного состояния. Однако при этом мы не коснулись одной качественно важной особенности, а именно «растекания» потока непосредственно перед выходом из образца. В простейшем случае это растекание выражается в веерообразном расположении нормальных доменов вблизи поверхности образца; в более сложном случае происходит ветвление или гофрирование доменов. Все эти изменения увеличивают поверхностную энергию раздела фаз, одновременно значительно уменьшая энергию поля.

Ландау в рамках своей первоначальной слоистой модели учил увал веерообразное расширение доменов у поверхности образца. Его численные расчеты заключались в замене знаменателя

$\rho_N \rho_s h_N / H_c = \rho_s B_0 / H_c$ в выражении (3.53) некоторой функцией $\Phi(B_0/H_c)$, имеющей качественно близкую зависимость от приложенного поля. Поэтому это уточнение мало влияет на размер доменов. Из-за неоднородного расширения доменов вблизи поверхности образца плотность потока у поверхности нормальной области меньше, чем внутри ее, как это можно ожидать из нашей модели, где $h_N < H_c$. Можно также оценить понижение H_{ci} ниже H_c путем рассмотрения устойчивости уединенного изолированного сверхпроводящего домена (последнего, как говорят в этом случае), учитывая, что поверхностное натяжение искривленной границы с окружающим нормальным материалом эффективно помогает магнитному полю разрушить последние остатки сверхпроводимости.

Любопытно, что Ландау был вроде бы неуверен в устойчивости такой поверхности и предложил другую модель [16, 17], в которой нормальные домены разветвлялись на два, а если требовалось, то ветвились повторно, для того чтобы поток у поверхности образца расширялся без падения плотности потока в нормальных областях ниже H_c . Последующее изучение показало, что для образцов разумной толщины даже единственное ветвление дало бы возрастание свободной энергии по сравнению со свободной энергией в модели без ветвления, поскольку уменьшение энергии поля меньше, чем увеличение поверхностной энергии. Однако позднее для свинца, имеющего особенно низкое значение параметра поверхностной энергии, Соломоном и Харрисом [18] были обнаружены особенности, сходные с ветвящейся структурой Ландау.

Обширные экспериментальные наблюдения, выполненные Фабером [19], показали, что сложная лабиринтная структура гофрированных доменов наблюдается довольно часто. По-видимому, тонкие нормальные слои, плоские внутри образца, по мере приближения к поверхности начинают гофрироваться со все возрастающей амплитудой. Это дает эффективное рассеяние выходящего потока в пределах полосы, ширина которой равна амплитуде гофрирования, дающего большую экономию поверхностной энергии, чем в ветвящейся модели Ландау. Ясно, что подобное гофрирование затрудняет интерпретацию наблюдаемых размеров доменов в терминах параметра поверхностной энергии.

Необходимо отметить также, что при определенных условиях вместо слоев можно наблюдать пятна или трубки потока поля. Например, Ландау указывал, что при низких плотностях потока были бы выгодны нормальные трубки, в то время как вблизи H_c более выгодны сверхпроводящие трубки. Трёбл и Эсман [20] в своих экспериментах наблюдали для свинцовой фольги в перпендикулярном поле регулярный ряд пятен потока поля, в то время как Киргнер [21] в подобных образцах наблюдал и пятна, и извилистые слои, близкие к ламинарной структуре. Картины движения, снятые различными исследовательскими группами (см., например, [22]) с использованием магнито-оптического ме-

тода, особенно ясно демонстрируют эволюцию распределения потока в образце по мере увеличения поля: от трубок потока до гофрирования, затем ветвления и, наконец, до сверхпроводящих трубок при сильных полях. Очевидно, что многообразие наблюдаемых в промежуточном состоянии явлений делает почти невозможным создание законченной теории. Дополнительные сложности возникают в динамическом промежуточном состоянии, где вся картина зависит от времени; мы не будем здесь разбирать эти вопросы.

3.4.3. Структура промежуточного состояния шара

Чтобы продемонстрировать применимость наших результатов к образцам с более сложной геометрией, возвратимся к случаю шара. Как было найдено выше, промежуточное состояние существует при $2/3 < H_0/H_c < 1$. В этом диапазоне объем шара разделен на S - и N -слои, которые веерообразно расширяются у поверхности и могут разветвляться или становиться гофрированными, но в данном обсуждении будем игнорировать эти детали. Более того, будем полагать радиус шара достаточно большим по сравнению с толщиной δ стенок доменов, чтобы можно было пренебречь различием между H_{c1} и H_c . Тогда плотность потока в N -слоях всегда в точности равна H_c , а доля нормальной фазы ρ_N есть B/H_c , где B — среднее значение $h(r)$ в слоистой структуре. Именно это среднее значение входит в макроскопические уравнения Максвелла в качестве величины B везде внутри сферы. С другой стороны, величина максвелловского поля H в сфере повсюду равна H_c . Это следует из того, что в нормальных слоях $H = h = H_c$, а тангенциальная компонента H должна быть непрерывна на поверхности раздела со средой, находящейся в термодинамическом равновесии. Таким образом, как и в более привычных физических случаях, поля внутри шара однородны, в то время как снаружи поля являются суммой приложенного поля и дополнительного поля:

$$B = H = H_0 + \frac{H_1 R^3}{2} \nabla \left(\frac{\cos \Theta}{r^2} \right). \quad (3.57)$$

Эта формула имеет такой же вид, как и выражение (3.45), которое получено для линейного режима ниже $2H_c/3$, причем параметр H_1 был выбран в том случае равным H_0 из условия $B_n = 0$ при $r = R$; в промежуточном состоянии $B_n \neq 0$. Определим H_1 из условий равенства внутренних и внешних значений B_n и H_t :

$$B_n = B \cos \theta = H_0 \cos \theta - H_1 \cos \theta, \quad (3.58)$$

$$H_t = H \sin \theta = H_0 \sin \theta + \frac{1}{2} H_1 \sin \theta. \quad (3.59)$$

Решая их, находим $H_1 = 2(H_c - B)/3$, откуда

$$B = 3H_0 - 2H_c, \quad 2/3 < H_0/H_c < 1. \quad (3.60)$$

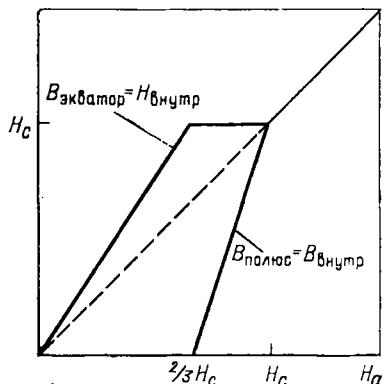


Рис. 3.7. Значение B и H внутри сверхпроводящего шара в приложенном поле H_0 . Эти величины могут быть измерены снаружи шара путем измерения поля соответственно на полюсе и экваторе. Шар находится в промежуточном состоянии при $2H_c/3 < H_0 < H_c$

Таким образом, магнитная индукция шара линейно возрастает от нуля до H_c при увеличении приложенного поля H_0 от $2H_c/3$ до H_c , как это показано на рис. 3.7.

Поскольку B_n непрерывна, B можно измерить снаружи шара, измеряя B на полюсе ($\theta=0$). Аналогично, непрерывность H_t означает, что внутреннее значение H может быть получено путем измерения поля на наружной экваториальной поверхности: $B_{экв} = H_{экв}$. Предсказываемая зависимость этой величины также показана на рис. 3.7. Экспериментальные данные по чистым образцам достаточно хорошо соответствуют этим предсказаниям.

3.5. Критический ток сверхпроводящего провода

В качестве последнего примера электродинамики сверхпроводников I рода обсудим появление сопротивления в сверхпроводящем проводе с током выше критического. Рассмотрим круглый провод радиусом a , по которому течет ток I . Согласно уравнениям Максвелла, магнитное поле у поверхности провода равно $2I/ca$. Когда это поле станет равным H_c , провод не сможет быть полностью сверхпроводящим. Согласно правилу Сильсби, по которому критический ток не может превышать* ток, создающий критическое поле около сверхпроводника, получаем следующее выражение для критического тока:

$$I_c = H_c ca/2. \quad (3.61)$$

Если $I > I_c$, то поле у поверхности превысит H_c и, по крайней мере, поверхность должна стать нормальной.

Однако если поверхностный слой станет нормальным, оставляя сердечник провода полностью сверхпроводящим, то весь ток будет протекать через этот сердечник, обусловливая у его поверхности еще большее значение поля, которое будет тем более больше H_c . Таким образом, устойчивой конфигурации со сплош-

* Критический ток реально может быть много меньше, чем определяемый из этого критерия, особенно если толщина сверхпроводника много меньше λ .

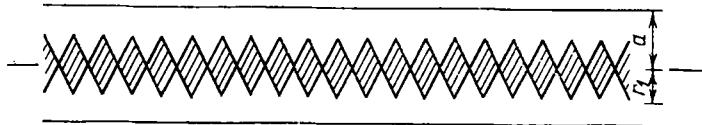


Рис. 3.8. Структура промежуточного состояния в проводе с током выше I_c . Заштрихованы сверхпроводящие области. Радиус сердечника r_1 равен a при $I \rightarrow \infty$ в идеализированном случае стремится к нулю только асимптотически

ным сверхпроводящим сердечником, окруженным нормальным материалом, существовать не может. Тогда, может быть, образец будет полностью нормальным? В этом случае плотность тока J стала бы однородной по сечению, давая

$$H(r) = 2Ir/ca^2.$$

Поскольку при $r \rightarrow 0$ это выражение будет меньше H_c , то сердечник не может быть и нормальным.

Эти рассуждения наводят на мысль, что центральная часть (радиусом $r_1 < a$) должна быть в промежуточном состоянии, а по окружающему ее нормальному слою тоже должен протекать ток. Последнее условие требует наличия продольного электрического поля, которое совместимо со структурой промежуточного состояния, если только его слои ориентированы поперек оси.

Характер структуры промежуточного состояния диктуется требованием, чтобы в пренебрежении поверхностью энергией $H(r)$ было равно H_c для $r \leq r_1$. Так как $H(r) = 2I(r)/cr$, где $I(r)$ — полный ток внутри радиуса r , нам нужно, чтобы $I(r) = crH_c/2$. Это, в свою очередь, требует плотности тока, равной

$$J(r) = \frac{1}{2\pi r} \cdot \frac{dI}{dr} = \frac{cH_c}{4\pi r}. \quad (3.62)$$

Однако продольное электрическое поле E не зависит от r , поскольку $\text{rot } E = -(1/c)\partial \mathbf{B}/\partial t = 0$, если только мы полагаем структуру статической. Примирить эти требования можно с помощью примерно такой конфигурации, как показанная на рис. 3.8, впервые предложенной Лондоном [23, 24]. В этой структуре относительная длина участка из нормального материала (параллельно оси провода) равна r/r_1 . Если ρ — удельное сопротивление в нормальном состоянии, тогда для $r < r_1$ получаем

$$J(r) = Er_1/\rho r.$$

Комбинируя это выражение с формулой (3.62), находим, что

$$r_1 = \rho c H_c / 4\pi E. \quad (3.63)$$

Так как ток I_1 внутри сердечника должен давать на его поверхности поле H_c , то

$$I_1 = \frac{cr_1 H_c}{2} = \frac{c^2 H_c^2 \rho}{8\pi E}.$$

Ток во внешнем нормальном слое будет

$$I_2 = \frac{E}{\rho} \pi (a^2 - r_1^2) = \frac{\pi a^2 E}{\rho} - \frac{c^2 H_c^2 \rho}{16 \pi E}.$$

Добавляя это значение к I_1 , получаем полный ток в проводе

$$I = \frac{\pi a^2 E}{\rho} + \frac{c^2 H_c^2 \rho}{16 \pi E}. \quad (3.64)$$

Решая теперь квадратное относительно $E(I)$ уравнение и используя соотношение (3.61), находим

$$E = \frac{\rho I}{2 \pi a^2} \{1 \pm [1 - (I_c/I)^2]^{1/2}\}. \quad (3.65)$$

Здесь необходимо выбрать знак плюс, поскольку E должно возрастать при увеличении I , как этого требует устойчивость. В нормальном состоянии согласно обычному закону Ома $E = \rho I / \pi a^2$. Поэтому можно записать результат в виде наблюдаемого частичного сопротивления:

$$\frac{R}{R_N} = \begin{cases} 0, & \text{если } I < I_c, \\ \frac{1}{2} \{1 + [1 - (I_c/I)^2]^{1/2}\}, & \text{если } I > I_c. \end{cases} \quad (3.66)$$

Отсюда видно, что половина сопротивления появляется скачкообразно при I_c , когда весь провод сразу заполняется структурой возникающего промежуточного состояния. При дальнейшем увеличении тока сопротивление непрерывно возрастает, а область промежуточного состояния сужается во все более и более тонкий сердечник, асимптотическое выражение для радиуса которого имеет вид $r_1/a = I_c/2I$. В принципе некоторая часть сверхпроводящего материала должна существовать в середине провода при всех конечных значениях тока. Однако на практике джоулево нагревание при токах выше I_c делает трудным проведение эксперимента в изотермических условиях для подтверждения этого свойства.

Экспериментальные данные находятся в хорошем качественном соответствии с теоретической зависимостью (3.66), изображенной на рис. 3.9, но существуют определенные количественные расхождения. В частности, типичная величина скачка сопротивления лежит ближе к $(0,7 \div 0,8) R_N$, чем к $\frac{1}{2} R_N$, предсказанной с помощью упрощенной теории [25, 26]. Это привело к многочисленным перепроверкам лондоновской модели. Например, Гортер рассматривал динамическую модель [27] с непрерывным движением фазовых границ. Байдром и Мухерти было выполнено детальное численное исследование статической модели, близкой к лондоновской. Авторам удалось найти оптимальное отношение периода доменной структуры к диаметру провода ($\sim 0,7$), а так-

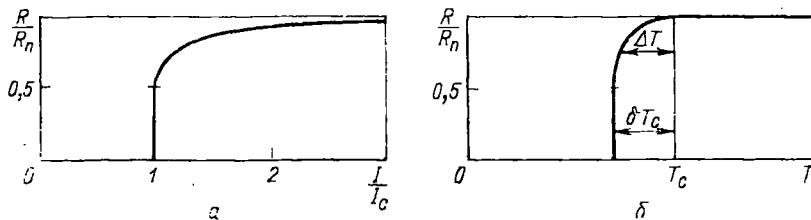


Рис. 3.9. Сопротивление провода R в промежуточном состоянии.

(а) — Зависимость R от тока при постоянной температуре. (б) — Зависимость R от температуры при постоянном токе, показывающая уширение перехода и понижение кажущейся температуры перехода. Параметр δT_c равен $I(dI_c/dT)^{-1}$

же удалось найти искривленный профиль доменных стенок, на котором $H = H_c$ и в котором лучше, чем в лондоновской модели, удовлетворяется условие для $H = H_c$ всюду, а не только в среднем по доменной структуре. В рамках этой улучшенной статической модели они действительно объяснили больший скачок R/R_N (до 0,69) при I_c , а также улучшили соответствие с экспериментом в целом при более высоких токах. Комбинируя эти идеи, Андреев и Шарвин [28, 29] осуществили третий подход, в котором рассматривается широкий класс движущихся структур. Такой подход также дал увеличение скачка R/R_N при I_c до примерно правильного значения, причем это получено за счет других параметров, отличных от параметров упоминавшейся выше статической теории. Таким образом, хотя теоретические позиции все еще недостаточно определены, ясно, что лондоновская теория промежуточного состояния провода с током является чрезмерно упрощенной. Тем не менее она дает полезную полу количественную трактовку этой задачи.

Данная теория может быть также применена для предсказания температурной зависимости сопротивления сверхпроводящего провода вблизи T_c . В этой температурной области $I_c \sim H_c \sim (T_c - T)$, поэтому можно написать

$$I_c = \frac{dI_c}{dT} \Big|_{T_c} \Delta T \approx c a H_c(0) \frac{\Delta T}{T_c},$$

Совместно с лондоновской аппроксимацией (3.66) это дает

$$\frac{R}{R_N} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left[1 - \left(\frac{\Delta T}{\delta T_c} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}, \quad (3.67)$$

где $\Delta T = T_c - T$ и $\delta T_c = I(dI_c/dT)^{-1}$. Так, например, если по тонкому проводу диаметром 1 мм протекает ток в 1 А, то первое появление сопротивления должно происходить на 0,03 К ниже T_c . Таким образом, при измерении критической температуры нужно поддерживать ток настолько малым, чтобы сделать δT_c пренебрежимо малым по сравнению с внутренней шириной перехода, обусловливаемой неоднородностью образца. Форма резистивного перехода при фиксированном конечном значении тока показана на рис. 3.9, б.

Ток может вызывать появление промежуточного состояния и в тонкопленочных сверхпроводниках. Хотя теоретический анализ в этом случае затрудняется наличием краевых эффектов, такая геометрия образца благоприятствует экспериментальному изучению структуры промежуточного состояния с помощью магнито-оптических методов. Недавно выполненные эксперименты [30, 31] показали, что сопротивление возрастает отдельными скачками, причем каждый скачок сопротивления связан с появлением дополнительного канала для движения трубок магнитного потока поперек полоски образца. Тот факт, что структура потока движется, можно продемонстрировать, наблюдая напряжение, индуцируемое в соседней сверхпроводящей пленке, которая образует с первой пленкой структуру типа сандвич. Эти эксперименты дают на основании измерения шумового спектра времена прохождения трубы потока поперек образца порядка 10^{-3} с. В других экспериментах, таких, как эксперименты Риндерера [22], были сняты картины движения доменной структуры в условиях, когда скорости были намного меньше. Результаты этих недавних экспериментов показывают, что за резистивные режимы в сверхпроводниках ответственны скорее всего динамические структуры определенного типа. К этому вопросу мы еще вернемся в гл. 5 в связи с диссипативными эффектами в сверхпроводниках II рода.

ТЕОРИЯ ГИНЗБУРГА — ЛАНДАУ

Микроскопическая теория БКШ, изложенная в гл. 2, дает отличное объяснение известных фактов в тех случаях, когда она применима, а именно когда энергетическая щель Δ постоянна в пространстве. Однако во многих случаях принципиальное значение имеет пространственная неоднородность. Например, при обсуждении промежуточного состояния сверхпроводников I рода нужно учитывать границу между сверхпроводящей и нормальной фазами. Этот тип пространственной неоднородности становится преобладающим для смешанного состояния сверхпроводников II рода. В этих случаях применение только микроскопической теории становится затруднительным и в большей степени следует полагаться на «более макроскопическую» теорию Гинзбурга—Ландау (ГЛ) [1].

Эта теория в том виде, в каком она была впервые предложена, явилась триумфом физической интуиции. В ней вводилась псевдоволновая функция $\psi(\mathbf{r})$ как комплексный «параметр порядка», причем квадрат модуля этой функции $|\psi(\mathbf{r})|^2$ должен был представлять локальную плотность сверхпроводящих электронов, $n_s(\mathbf{r})$. Теория была развита на основе применения вариационного метода к предложенному разложению плотности свободной энергии по степеням $|\psi|^2$ и $|\nabla\psi|^2$, что приводит к двум связанным дифференциальным уравнениям для $\psi(\mathbf{r})$ и вектор-потенциала $\mathbf{A}(\mathbf{r})$. В результате появилось обобщение теории Лондонов на случаи, когда n_s изменяется в пространстве, а также на случаи нелинейного поведения в полях, достаточно сильных для того, чтобы изменять плотность сверхпроводящих электронов n_s . Однако в ней сохраняется локальное приближение электродинамики Лондонов. Несмотря на вполне успешное объяснение явлений промежуточного состояния, где необходимость теории, учитывающей пространственную неоднородность сверхпроводимости, была очевидной, теория Гинзбурга—Ландау в общем не привлекла широкого внимания в западной литературе из-за своего феноменологического характера.

Положение изменилось в 1959 г., когда Горьков [2] показал, что теория ГЛ получается в строгом виде как предельный случай микроскопической теории, сформулированной соответствующим образом на языке функций Грина, что позволяет учсть пространственную неоднородность. Было показано, что условиями применимости теории ГЛ являются достаточная близость темпе-

ратуры к критической температуре T_c и требование, чтобы пространственные изменения функций ψ и \mathbf{A} были не слишком быстрыми. В такой трактовке теории ГЛ функция $\psi(\mathbf{r})$ оказывается пропорциональной параметру щели $\Delta(\mathbf{r})$, причем обе функции являются, вообще говоря, комплексными. Вначале предполагалось, что величина $|\Delta(\mathbf{r})|$, найденная из решения заново интерпретированных уравнений ГЛ, является просто щелью из теории БКШ, которая может изменяться как в пространстве, так и под воздействием приложенных магнитных полей. Это привело к тому, что в течение некоторого времени экспериментальные данные трактовались подобным переупрощенным образом. Однако сейчас становится ясно, что решение уравнений ГЛ для данной проблемы является лишь полезным первым шагом для понимания спектра плотности возбуждений. Оказывается, что поле, токи и градиенты действуют как «разрушители пар», не только уменьшая величину Δ , но и размывая резкую границу щели БКШ. Подробное обсуждение этих эффектов будет отложено до гл. 8.

Наибольшая ценность теории заключается в объяснении макроскопического поведения сверхпроводников, при котором общая свободная энергия важнее деталей спектра возбуждений. Например, она вполне подходит для предсказания критических полей и пространственной структуры $\psi(\mathbf{r})$ в неоднородных ситуациях. Теория также обеспечивает качественную основу для понимания необычного поведения сверхтока как следствия проявления квантовых свойств в макроскопическом масштабе.

Хотя в принципе сейчас и можно было бы дать вывод теории ГЛ, следуя Гор'кову, но это потребовало бы математического аппарата, превышающего уровень нашего изложения. Вместо этого будем сначала следовать Гинзбургу и Ландау, феноменологически постулируя теорию на интуитивной основе, а затем используем результаты микроскопической теории (или экспериментов) для нескольких простых случаев, чтобы определить значения параметров, входящих в теорию ГЛ.

4.1. Свободная энергия в теории Гинзбурга — Ландау

Основным постулатом теории ГЛ является следующий: если значения функции ψ малы и она медленно меняется в пространстве, то плотность свободной энергии f может быть разложена в ряд вида

$$f = f_{n0} + \alpha |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e^*}{c} \mathbf{A} \right) \psi \right|^2 + \frac{\hbar^2}{8\pi}. \quad (4.1)$$

Очевидно, что при $\psi=0$ это выражение сводится к свободной энергии нормального состояния $f_{n0} + \hbar^2/8\pi$, где $f_{n0}(T) = f_{n0}(0) - \frac{1}{2} \gamma T^2$.

Рассмотрим теперь три оставшихся члена ряда, описывающих сверхпроводящие эффекты.

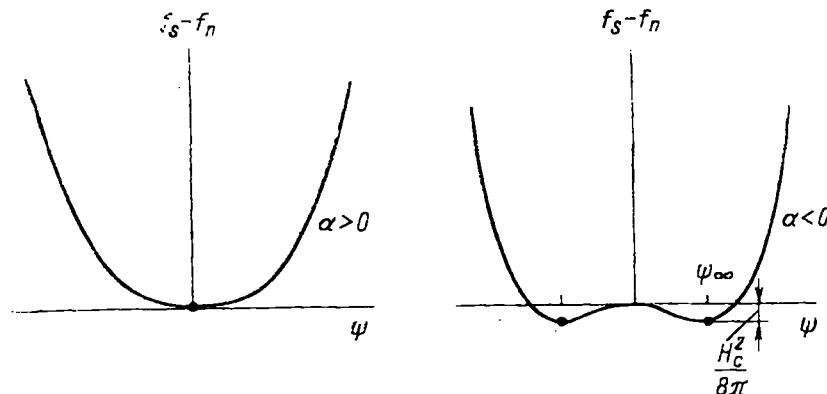


Рис. 4.1. Свободная энергия Гинзбурга—Ландау для $T > T_c$ ($\alpha > 0$) и для $T < T_c$ ($\alpha < 0$). Жирные точки указывают положения равновесия. Для простоты величина ψ взята действительной

В отсутствие полей и градиентов имеем выражение

$$f_s - f_n = \alpha |\psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi|^4, \quad (4.2)$$

которое можно рассматривать как разложение в ряд по степеням $|\psi|^2$ или n_s и в котором оставлены только первые два члена [1]. Этих двух членов достаточно, пока мы остаемся вблизи фазового перехода второго рода при температуре T_c , когда квадрат параметра порядка $|\psi|^2$ стремится к нулю. Анализ выражения (4.1) показывает, что для пригодности теории необходимо, чтобы величина β была положительной, в противном случае свободная энергия принимала бы минимальное значение при бесконечно больших значениях $|\psi|^2$, когда разложение в ряд, конечно, несправедливо.

В зависимости от того, является ли α положительным или отрицательным, возможны два случая, показанные на рис. 4.1. Если α положительно, то свободная энергия имеет минимум при $|\psi|^2=0$, что соответствует нормальному состоянию. Однако, если $\alpha < 0$, при

$$|\psi|^2 = |\psi_\infty|^2 \equiv -\alpha/\beta \quad (4.3)$$

возникает минимум свободной энергии.

Обозначение ψ_∞ является общепринятым, поскольку функция ψ достигает этого значения бесконечно глубоко внутри сверхпроводника, где происходит экранирование от любых поверхностных полей или токов. Если это значение ψ подставить снова в выражение (4.2), используя определение термодинамического критического поля, получаем

$$f_s - f_n = -H_c^2/8\pi = -\alpha^2/2\beta. \quad (4.4)$$

Очевидно, что функция $\alpha(T)$ должна меняться с положительной на отрицательную при температуре T_c , так как, по определению,

T_c — максимальная температура, при которой для $|\psi|^2 \neq 0$ получается более низкое значение свободной энергии, чем для $|\psi|^2 = 0$. Производя разложение функции $\alpha(T)$ в ряд Тейлора около значения T_c и оставляя только основной член, находим

$$\alpha(t) = \alpha'(t - 1), \quad \alpha' > 0, \quad (4.5)$$

где $t = T/T_c$. Заметим, принимая во внимание соотношение (4.4), что это допущение согласуется с линейным изменением H_c по закону $(1-t)$, если β примерно постоянно вблизи T_c .

Подставляя эти температурные изменения α и β в выражение (4.3), получаем, что вблизи T_c

$$|\psi|^2 \sim (1-t). \quad (4.6)$$

Это согласуется со связью $|\psi|^2$ с плотностью n_s сверхпроводящих электронов в теории Лондонов, так как вблизи T_c $n_s \sim \lambda^{-2} \sim (1-t)$.

Для того чтобы перейти к количественным соотношениям, рассмотрим оставшийся в ряду (4.1) член, зависящий от полей и градиентов. Если записать ψ в виде $|\psi|e^{i\Phi}$, этот член примет физически более понятный вид:

$$\frac{1}{2m^*} \left[\hbar^2 (\nabla |\psi|)^2 + \left(\hbar \nabla \Phi - \frac{e^* \mathbf{A}}{c} \right)^2 |\psi| \right]. \quad (4.7)$$

Первый член дает избыточную энергию, связанную с градиентами модуля параметра порядка, как, например, в стенке домена, второй член дает кинетическую энергию, связанную со сверхтоком, в калибровочно-инвариантной форме. В лондоновской калиброте Φ постоянно и этот член просто равен величине $e^* A^2 |\psi|^2 / 2m^* c^2$.

Приравнивая это значение к плотности энергии $A^2 / 8\pi\lambda_{\text{эфф}}^2$ для лондоновского сверхпроводника (3.28), получаем

$$\lambda_{\text{эфф}}^2 = \frac{m^* c^2}{4\pi |\psi|^2 e^{*2}}. \quad (4.8)$$

При отождествлении n_s и $|\psi|^2$ это выражение согласуется с обычным определением лондоновской глубины проникновения, за исключением присутствия обозначенных звездочкой эффективных значений массы и заряда. Член, описывающий плотность кинетической энергии, можно затем переписать в виде $n_s \frac{1}{2} m^* v_s^2$, где скорость сверхтока дается выражением

$$m^* \mathbf{v}_s = \mathbf{p}_s - \frac{e^* \mathbf{A}}{c} = \hbar \nabla \Phi - \frac{e^* \mathbf{A}}{c}. \quad (4.9)$$

Следует отметить, что, определяя энергию, связанную с вектором-потенциалом, в простой форме (4.7), мы тем самым ограничиваем теорию приближением локальной электродинамики. Соответственно для описания нелокального сверхпроводника потребовалось бы выражение вида (3.26).

Теперь обратимся к феноменологическим параметрам, отмеченным звездочками. В первоначальной формулировке теории предполагалось, что e^* и m^* имеют обычные значения заряда и массы электрона. Однако оказалось, что экспериментальным данным лучше соответствует $e^* = 2e$. Микроскопическая теория спаривания же определенно утверждает, что заряд e^* точно равен $2e$ — заряду пары электронов. Далее, в приближении свободных электронов* естественно положить $m^* = 2m$ и $n_s^* = \frac{1}{2} n_s$,

где n_s — число одиночных электронов в конденсате. При этих допущениях $n_s^* e^{*2}/m^* = n_s e^2/m$, так что лондоновская глубина проникновения при спаривании не изменяется. В реальных металлах ситуация более сложная. Зонная структура и фононные эффекты «кодевания» частиц приводят к тому, что эффективная масса для одиночного электрона в нормальном состоянии отличается от массы свободного электрона; обычно различие доходит до 50%. Кроме того, наиболее важной областью применения теории ГЛ являются грязные сверхпроводники, в которых $\lambda_{\text{эфф}} \approx \lambda_L^2 (\xi_0/l) \gg \lambda_L^2$. Такое возрастание глубины проникновения может быть формально приписано либо увеличению массы m^* , либо уменьшению n_s . Может показаться, что независимое определение массы можно провести в эксперименте [3], в котором сверхпроводник вращается с угловой скоростью ω , а измеряется получающийся магнитный момент. Однако, используя аргументы общего характера, основанные на теореме Лармора, Олбен показал [4], что магнитный момент должен быть таким же, как момент, вызванный благодаря магнитному полю $H_L = (2mc/e)\omega$, где отношение e/m есть отношение e/m для свободного электрона. Такое равенство было на самом деле обнаружено Брикманом [3]. Другими словами, эксперименты по вращению не добавляют ничего к имеющейся информации, получаемой из чисто магнитных измерений.

Из-за невозможности измерения m^* можно приписать ей произвольное значение, и, вероятно, наиболее разумно выбрать ее равной удвоенной массе свободного электрона (эта произвольность подчеркивалась Де Женом, который говорил, что она с таким же успехом может быть взята равной массе Солнца!). При фиксированной величине $m^* = 2m$ все изменения λ , вызванные температурой, зонной структурой, фононами, примесями или даже нелокальной электродинамикой, учитываются в соответствующей величине $|\psi_\infty| = n_s^* = \frac{1}{2} n_s$. Даже при $T=0$ это число уже не будет соответствовать суммарному числу электронов на атом. Вместо этого n_s с данной точки зрения есть просто мера той части силы осциллятора в правиле сумм**

* Имеется в виду отсутствие не спаривания, а ферми-жидкостных эффектов. — Прим. ред. пер.

** О правиле сумм см. конец разд. 2.9. — Прим. ред. пер.

$$\int_0^\infty \sigma_1(\omega) d\omega = \frac{\pi n e^2}{2m}, \quad (4.10)$$

которая локализована при $\omega=0$ в виде члена $(\pi n_s e^2 / 2m) \delta(\omega)$ и описывает диамагнитный отклик сверхтекущей жидкости.

Верхняя граница n_s даже при низких температурах определяется силой осциллятора для электронов в нормальном состоянии, которая распространяется на частоты до скоростей столкновений $1/\tau$ для $q=0$ и до qv_F для $q \neq 0$, даже если $\tau \rightarrow \infty$. В частности, в пространственно-однородных полях можно ожидать для σ_1 обычной частотной зависимости Друде:

$$\sigma_1(\omega, 0) = \frac{ne^2\tau/m}{1 + \omega^2\tau^2}, \quad (4.10a)$$

в то время как при $\tau \rightarrow \infty$ получается результат Линхарда [5]:

$$\sigma_1(\omega, q) = \frac{3\pi n e^3}{4\pi v_F^2 q} \left(1 - \frac{\omega^2}{v_F^2 q^2} \right) \quad (4.10b)$$

для $\omega \ll qv_F$ и равенство $\sigma_1 = 0$ для $\omega \gg qv_F$. Естественно, оба эти выражения удовлетворяют правилу сумм (4.10). Качественно часть силы осциллятора, в нормальном состоянии локализованная на частотах ниже частоты энергетической щели $\omega_g = 2\Delta/\hbar$, при переходе в сверхпроводящее состояние переходит в n_s , в то время как для частот выше энергетической щели она практически не должна измениться. Если рассмотреть сверхпроводник с локальной электродинамикой, когда можно использовать аппроксимацию $q=0$, то из формулы (4.10a) видно, что почти вся сила осциллятора должна проявляться как n_s в чистом металле, где $\omega_g\tau > 1$; в этом случае $n_s \approx n$, а $\lambda \approx \lambda_L$. Однако, если металл настолько грязный, что выполняется условие $\omega_g\tau < 1$, отношение n_s/n должно уменьшаться до величины порядка $\omega_g\tau \approx l/\xi_0$. В результате в грязных сверхпроводниках $\lambda/\lambda_L = (n/n_s)^{1/2} \approx (\xi_0/l)^{1/2}$ — результат, полученный выше более строго (2.123). Если, наоборот, рассмотреть чистый нелокальный сверхпроводник, то равенство (4.10b) означает, что $n_s(q)/n \approx \omega_g/qv_F \approx 1/q\xi_0$. Эта, зависящая от q , часть сверхтекущего отклика является отражением спадания $K(q)$ как $1/q$, которое показано на рис. 3.2. Взяв типичное значение $q \approx 1/\lambda$ для токов на глубине проникновения магнитного поля, получим, что $\lambda_L^2/\lambda^2 = n_s/n \approx \lambda/\xi_0$ или $\lambda \approx (\lambda_L^2 \xi_0)^{1/2}$, как было получено выше [см. выражение (3.13)] более строго. Для применения теории ГЛ, которая является локальной, нужно взять такое n_s , чтобы его среднее значение соответствовало действительной глубине проникновения, а не λ_L . Проведено выше обсуждение напоминает нам о силе применения правила сумм с учетом энергетической щели при проведении простых физических оценок эффективной плотности сверхпроводящей жидкости в различных ситуациях.

Замечая, что $e^* = 2e$, и считая условно, что $m^* = 2m$, можно теперь найти параметры теории ГЛ путем решения системы уравнений (4.3), (4.4) и (4.8). При этом получаются следующие результаты:

$$|\Psi_\infty|^2 \equiv n_s^* \equiv \frac{\lambda_3}{2} = \frac{m^* c^4}{4 \pi e^* k_{\text{Ф}}^2} = \frac{mc^2}{8 \pi e^* k_{\text{Ф}}^2}, \quad (4.11a)$$

$$\alpha(T) = -\frac{e^{*3}}{m^* c^2} H_c^2(T) \lambda_{\text{Ф}}^2(T) = -\frac{2e^2}{mc^2} H_c^2(T) \lambda_{\text{Ф}}^2(T), \quad (4.11b)$$

$$\beta(T) = \frac{4 \pi e^{*4}}{m^* c^4} H_c^2(T) \lambda_{\text{Ф}}^4(T) = \frac{16 \pi e^4}{m^* c^4} H_c^2(T) \lambda_{\text{Ф}}^4(T), \quad (4.11c)$$

где e и m — заряд и масса обычного свободного электрона, а $\lambda_{\text{Ф}}$ и H_c либо берутся из эксперимента, либо вычисляются из микроскопической теории.

Поскольку истинная электродинамика сверхпроводников является нелокальной, ясно, что такое описание в терминах эффективной лондоновской глубины λ справедливо либо достаточно близко к T_c , где $\lambda_L(T) > \lambda_{\text{Ф}}$, либо в достаточно грязных образцах, в которых $\xi \approx l < \lambda(T)$, т. е. там, где нелокальность несущественна. Только при этих условиях теория ГЛ является действительно точной. К счастью, оказывается, что качественные выводы теории имеют широкую область применимости: полу количественные результаты обычно можно применять даже тогда, когда нелокальность является значительной. При этом нужно использовать эффективные значения $\lambda_{\text{Ф}}$, которые мы рассчитывали для тонких щеленок [см. формулы (3.29) или (3.31)]. Для чистых массивных образцов, как отмечалось выше, вероятно, наиболее разумно брать для $\lambda_{\text{Ф}}$ экспериментальное значение. Если при этом попытаться применить теорию при температурах много ниже T_c , то из-за нелокальности электродинамики получим $\lambda_{\text{исп}} > \lambda_L$.

Следует отметить, что, если подставить эмпирическое выражение $H_c = (1 - t^2)$ и $\lambda^{-2} = (1 - t^2)$ в формулу (4.11), можно получить следующие температурные зависимости:

$$|\Psi_\infty|^2 \sim 1 - t^4 \approx 4(1 - t),$$

$$\alpha \sim \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \approx 1 - t, \quad (4.12)$$

$$\beta \sim \frac{t}{(1 + t^2)^2} \approx \text{const.}$$

Поскольку теория является строго справедливой только вблизи T_c , принято оговаривать лишь основную зависимость от температуры. Поэтому обычно считают, что $|\Psi|^2$ и α меняются как $(1 - t)$, а β берут за константе, как предполагалось в нашем предварительном обсуждении. Однако более полные выражения (4.7) приводят к мысли о том, что теорию можно обобщить на более широкую область температур, и ряд экспериментов подтверждает этот вывод.

Замечая, что $e^*=2e$, и считая условно, что $m^*=2m$, можно теперь найти параметры теории ГЛ путем решения системы уравнений (4.3), (4.4) и (4.8). При этом получаются следующие результаты:

$$|\psi_\infty|^2 \equiv n_s^* = \frac{n_s}{2} = \frac{m^* c^2}{4\pi e^* \lambda_{\text{эфф}}^2} = \frac{mc^2}{8\pi e^* \lambda_{\text{эфф}}^2}, \quad (4.11a)$$

$$\alpha(T) = -\frac{e^{*2}}{m^* c^2} H_c^2(T) \lambda_{\text{эфф}}^2(T) = -\frac{2e^2}{mc^2} H_c^2(T) \lambda_{\text{эфф}}^2(T), \quad (4.11b)$$

$$\beta(T) = \frac{4\pi e^{*4}}{m^* c^4} H_c^2(T) \lambda_{\text{эфф}}^4(T) = \frac{16\pi e^4}{m^* c^4} H_c^2(T) \lambda_{\text{эфф}}^4(T), \quad (4.11b)$$

где e и m — заряд и масса обычного свободного электрона, а $\lambda_{\text{эфф}}$ и H_c либо берутся из эксперимента, либо вычисляются из микроскопической теории.

Поскольку истинная электродинамика сверхпроводников является нелокальной, ясно, что такое описание в терминах эффективной лондоновской глубины λ справедливо либо достаточно близко к T_c , где $\lambda_L(T) > \xi_0$, либо в достаточно грязных образцах, в которых $\xi \approx l < \lambda(T)$, т. е. там, где нелокальность несущественна. Только при этих условиях теория ГЛ является действительно точной. К счастью, оказывается, что качественные выводы теории имеют широкую область применимости: полу количественные результаты обычно можно применять даже тогда, когда нелокальность является значительной. При этом нужно использовать эффективные значения $\lambda_{\text{эфф}}$, которые мы рассчитывали для тонких пленок [см. формулы (3.29) или (3.31)]. Для чистых массивных образцов, как отмечалось выше, вероятно, наиболее разумно брать для $\lambda_{\text{эфф}}$ экспериментальное значение. Если при этом попытаться применить теорию при температурах много ниже T_c , то из-за нелокальности электродинамики получим $\lambda_{\text{эксп}} > \lambda_L$.

Следует отметить, что, если подставить эмпирическое выражение $H_c \sim (1-t^2)$ и $\lambda^{-2} \sim (1-t^4)$ в формулу (4.11), можно получить следующие температурные зависимости:

$$|\psi_\infty|^2 \sim 1 - t^4 \approx 4(1-t),$$

$$\alpha \sim \frac{1-t^2}{1+t^2} \approx 1-t, \quad (4.12)$$

$$\beta \sim \frac{1}{(1+t^2)^2} \approx \text{const.}$$

Поскольку теория является строго справедливой только вблизи T_c , принято оставлять лишь основную зависимость от температуры. Поэтому обычно считают, что $|\psi|^2$ и α меняются как $(1-t)$, а β берут равным константе, как предполагалось в нашем предварительном обсуждении. Однако более полные выражения (4.7) приводят к мысли о том, что теорию можно обобщить на более широкую область температур, и ряд экспериментов подтверждает этот вывод.

$$\left(\frac{\hbar}{e} \mathbf{V} - \frac{e^2}{c} \mathbf{A} \right) \psi|_a = 0. \quad (4.15)$$

Эти граничные условия использовались Гинзбургом и Ландау и соответствуют границе с изолированной поверхностью. Используя микроскопическую теорию, Де Жен [6] показал, что для границы металла — сверхпроводник в отсутствие тока через нее выражение (4.15) нужно обобщить следующим образом:

$$\left(\frac{\hbar}{e} \mathbf{V} - \frac{e^2}{c} \mathbf{A} \right) \psi|_a = \frac{1}{b} \psi, \quad (4.15a)$$

где b — действительная постоянная. Если положить $A_a = 0$, легко видеть, что $\hbar b$ имеет смысл расстояния до точки с наружной стороны границы, в которой линейная экстраполяция хода ψ на границе раздела пересечет нулевой уровень. Величина b должна зависеть от природы материала, с которым осуществляется контакт, она равна нулю для магнитного материала и бесконечности для изолатора. Для нормальных металлов величина b имеет промежуточное значение.

4.2.1. Длина когерентности Гинзбурга — Ландау

Для лучшего понимания дифференциального уравнения (4.13) рассмотрим вначале упрощенный случай, когда поля отсутствуют. Тогда $\mathbf{A}=0$ и можно считать величину ψ действительной, поскольку у дифференциального уравнения все коэффициенты действительны. Если ввести нормализованную волновую функцию $f = \psi/\Psi_\infty$, где $\Psi_\infty^2 = -\alpha/b > 0$, то уравнение в одномерном случае примет вид

$$\frac{\hbar^2}{2m^*|\alpha|} \frac{d^2f}{dx^2} + f - f^2 = 0. \quad (4.16)$$

Отсюда следует естественное определение характерной длины изменения ψ :

$$\xi^2(T) = \frac{\hbar^2}{2m^*|\alpha(T)|} \approx \frac{1}{1-t}. \quad (4.17)$$

Заметим, что длина $\xi(T)$ в формуле (4.17), конечно, не является шварцлевской длиной ξ , которой мы пользовались при обсуждении нелокальной электродинамики, поскольку $\xi(T)$ расходится при T_c , в то время как электродинамическая длина ξ является постоянной. Фактически на первый взгляд даже не ясно, связаны ли они между собой. Оставим это традиционное обозначение, несмотря на известную возможность путаницы, поскольку оказывается, что для чистых материалов при температуре, достаточно далекой от T_c , действительно $\xi(T) = \xi_0$. При использовании определения $\xi(T)$ уравнение (4.16) принимает вид

$$\xi^2(T) \frac{d^2f}{dx^2} - f + f^2 = 0. \quad (4.18)$$

Смысл $\xi(T)$ как характерной длины изменения ψ (или f) становится еще более очевидным при линеаризации выражения (4.18), при которой полагаем $f(x) = 1 + g(x)$, где $g(x) \ll 1$. Тогда получаем с точностью до первого порядка по g

$$\xi^2 g''(x) + (1 + g) - (1 + 3g + \dots) = 0$$

или

$$g'' = (2/\xi^2) g,$$

так что

$$g(x) \sim \exp [\pm \sqrt{2} x/\xi(T)]. \quad (4.19)$$

Последнее выражение показывает, что малое отклонение ψ от ψ_∞ будет действительно спадать на характерной длине порядка $\xi(T)$.

Итак, поскольку теперь понятен смысл длины $\xi(T)$, посмотрим, каково ее значение. Подставив выражение для a (4.11б) в определение $\xi(T)$ (4.17), получим

$$\xi(T) = \frac{\Phi_0}{2\sqrt{2}\pi H_c(T)\lambda_{\text{эфф}}(T)}, \quad (4.20)$$

где

$$\Phi_0 = \frac{hc}{e^*} = \frac{hc}{2e}, \quad (4.21)$$

Φ_0 — так называемый квант магнитного потока, который будет играть важную роль в дальнейшем изложении. Утверждение, что длина $\xi(T)$ связана с пиппардовской длиной ξ_0 и теорией БКШ, следует из существования соотношения

$$\Phi_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} \pi^2 \xi_0 \lambda_L(0) H_c(0), \quad (4.22)$$

которое вытекает из полученных ранее результатов теории БКШ: $\xi_0 = \hbar v_F / \pi \Delta(0)$ и $H_c^2(0)/8\pi = \frac{1}{2} N(0) \Delta^2(0)$, если допустить, что

связь между $N(0)$ и n такая же, как для свободных электронов.

Объединяя формулы (4.20) и (4.22), можно записать

$$\frac{\xi(T)}{\xi_0} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{H_c(0)}{H_c(T)} \cdot \frac{\lambda_L(0)}{\lambda_{\text{эфф}}(T)}. \quad (4.23)$$

Отсюда следует, что вблизи T_c

$$\xi(T) = 0,74\xi_0/(1-t)^{1/2} \quad \text{для чистых сверхпроводников; (4.24a)}$$

$$\xi(T) = 0,855(\xi_0 t)^{1/2}/(1-t)^{1/2} \quad \text{для грязных сверхпроводников. (4.24b)}$$

Точные коэффициенты здесь получены из точных результатов теории БКШ в пределе $T \approx T_c$, а именно

$$H_c(t) = 1,73H_c(0)(1-t), \quad (4.25)$$

$$\lambda_L(t) = \frac{\lambda_L(0)}{[2(1-t)]^{1/2}}, \quad (4.26a)$$

$$\lambda_{\text{эфф}}(t) |_{\text{грязный предел}} = \lambda_L(t) \left(\frac{\xi_0}{1,33l} \right)^{1/2}. \quad (4.266)$$

Выражение (4.24а), определяющее $\xi(T)$ для чистых сверхпроводников, справедливо только в очень узком температурном интервале вблизи T_c , для которого справедлива локальная электродинамика; вне этого интервала соответствующее эффективное значение ξ будет зависеть от конфигурации образца. Уравнение (4.24б) для грязных сверхпроводников остается справедливым для гораздо более широкого интервала температур, поскольку в этом случае локальная аппроксимация справедлива всегда.

Полезно также ввести знаменитый безразмерный параметр Гинзбурга—Ландау κ , который определяется как отношение двух характерных длин:

$$\kappa = \frac{\lambda_{\text{эфф}}(T)}{\xi(T)} = \frac{2\sqrt{2}\pi H_c(T)\lambda_{\text{эфф}}^2(T)}{\Phi_0}. \quad (4.27)$$

Используя эмпирические приближения $H_c \sim (1-t^2)$ и $\lambda^{-2} \sim (1-t^4)$, видно, что κ должно изменяться как $(1+t^2)^{-1}$. Конечно, это только грубая аппроксимация, но с уверенностью можно сделать вывод, что величина κ непрерывна при T_c и хотя изменяется с температурой, но медленно. Используя численные результаты, полученные выше, получаем для κ следующие значения для чистого и грязного пределов вблизи T_c :

$$\kappa = 0,96\lambda_L(1)/\xi_0 — чистый предел; \quad (4.27a)$$

$$\kappa = 0,715\lambda_L(0)/l — грязный предел. \quad (4.27b)$$

В типичных чистых сверхпроводниках $\kappa \ll 1$, но в грязных сверхпроводниках κ может быть намного больше единицы. Как будет подробно показано позже, значение $\kappa = 1/\sqrt{2}$ разделяет сверхпроводники I и II рода.

4.3. Вычисление параметра энергии в области границы

Теперь мы имеем все необходимое для вычисления параметра поверхностной энергии $\gamma = H_c^2 \delta / 8\pi$, который был использован при обсуждении промежуточного состояния в гл. 3. Одномерные изменения $\psi(x)$ и $h(x)$ в области границы схематически показаны на рис. 4.2, где сопоставлены противоположные случаи $\kappa \ll 1$ и $\kappa \gg 1$. Качественно видно, что при $\kappa \ll 1$ поверхностная энергия положительна, поскольку существует область толщины $\sim (\xi - \lambda)$, из которой магнитное поле выталкивается, давая вклад в положительную диамагнитную энергию и не давая вклада в полную энергию конденсации, связанную с ψ_∞ .

Для случая $\kappa \gg 1$ происходит обратное и возникает отрицательная поверхностная энергия. Теперь перейдем к количественному рассмотрению, используя теорию ГЛ. Будем искать решения

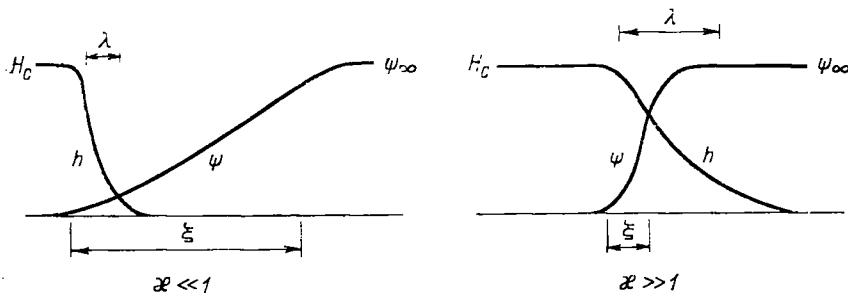


Рис. 4.2. Схематическая диаграмма изменения h и ψ на границе доменов. Случай $x \ll 1$ относится к сверхпроводнику I рода (положительная энергия границы); случай $x \gg 1$ относится к сверхпроводнику II рода (отрицательная энергия границы)

дифференциальных уравнений (4.13) и (4.14) с граничными условиями

$$\begin{aligned} \psi &= 0 \text{ и } h = H_c \text{ при } x \rightarrow -\infty, \\ \psi &= \psi_\infty \text{ и } h = 0 \text{ при } x \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Поскольку задача одномерная, можно считать функцию ψ действительной. Это упрощает уравнения, так как исключаются перекрестные члены ∇ и \mathbf{A} , и, кроме того, второе уравнение приводится к простой форме $J \sim |\psi(x)|^2 \mathbf{A}$. Тем не менее полные решения могут быть получены только численно. Начнем с формального упрощения выражения для поверхностной энергии.

Во-первых, нужно осознать, что подходящей энергетической величиной является свободная энергия Гиббса, поскольку в задаче фиксировано значение H (равное H_c), в то время как величина B зависит от местоположения границы (домена). Как указывалось при обсуждении, которое привело к формуле (3.43), плотность свободной энергии Гиббса при H_c имеет одно и то же значение в сверхпроводящем и нормальном материале, а именно f_{s0} , значение свободной энергии Гельмгольца для сверхпроводника в отсутствие полей и токов. Таким образом, поверхностная энергия, которую мы ищем, есть превышение G над той свободной энергией Гиббса, которая была бы, если бы ее плотность была равна f_{s0} везде, т. е.

$$\begin{aligned} \gamma &= \int_{-\infty}^{\infty} (g_{sH} - f_{s0}) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(f_{sH} - \frac{hH_c}{4\pi} - f_{s0} \right) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\alpha |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| \left(\frac{\hbar \nabla}{i} - \frac{e^* \mathbf{A}}{c} \right) \psi \right|^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(h - H_c)^2}{8\pi} \right] dx. \quad (4.28) \end{aligned}$$

Использован тот факт, что $f_{n0} - f_{s0} = H_c^2/8\pi$. Это выражение можно еще упростить, так как при умножении дифференциального уравнения ГЛ (4.13) на ψ^* и интегрировании его по частям получается тождество

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\alpha |\psi|^2 + \beta |\psi|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| \left(\frac{\hbar \nabla}{i} - \frac{e^* \mathbf{A}}{c} \right) \psi \right|^2 \right] dx.$$

Вычитая его из (4.28), получаем выражение (4.28) в более краткой форме

$$\gamma = \int_{-\infty}^{\infty} \left[-\frac{\beta}{2} |\psi|^4 + \frac{(h - H_c)^2}{8\pi} \right] dx, \quad (4.29)$$

причем γ должно быть равно $(H_c^2/8\pi)\delta$. Используя равенства (4.11), записываем в окончательном виде

$$\delta = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{h}{H_c} \right)^2 - \left(\frac{\psi}{\Psi_\infty} \right)^4 \right] dx. \quad (4.30)$$

Это выражение ясно показывает, что, как уже указывалось выше, величина δ определяется балансом между положительной диамагнитной энергией и отрицательной энергией конденсации, обусловленной сверхпроводимостью.

Для оценки величины (4.30) приходится находить численные решения для $h(x)$ и $\psi(x)$, за исключением предельных случаев. Для этих случаев были получены следующие точные результаты:

$$\delta = \frac{4\sqrt{2}\xi}{3} = 1,89\xi, \quad \kappa \ll 1; \quad (4.31a)$$

$$\delta = \frac{-8(\sqrt{2}-1)\lambda}{3} = -1,104\lambda, \quad \kappa \gg 1. \quad (4.31b)$$

Эти результаты подтверждают наш качественный вывод, что величина δ должна быть порядка $(\xi - \lambda)$.

Чтобы показать, что переход от положительной поверхности энергии к отрицательной происходит точно при $\kappa = 1/\sqrt{2}$, необходимо специальное рассмотрение. Оно было проведено Гинзбургом и Ландау в их оригинальной статье, причем они заранее предвидели, что обычное слоистое промежуточное состояние должно появиться только при малых значениях κ . Но до появления статьи Абрикосова [7], имевшей кардинальное значение, никто не ожидал столь существенно отличного поведения сверхпроводников, которое возникает из-за отрицательной поверхностной энергии при больших κ . Его статья положила начало учению о сверхпроводниках II рода, — такое название Абрикосов дал материалам с $\kappa > 1/\sqrt{2}$. Поскольку они подробно рассмотрены в следующей главе, здесь лишь отметим, что отрицательная поверхностная

энергия вызывает деление несущих магнитное поле (нормальных) областей до тех пор, пока не достигается квантовый предел, при котором каждый квант потока, $\Phi_0 = hc/2e$, пронизывает образец в виде отдельной трубки потока. Эти трубки потока образуют регулярную решетку, причем $\psi = 0$ на оси каждой из трубок. В отличие от промежуточного состояния сверхпроводников I рода, это так называемое «смешанное» состояние сверхпроводников II рода имеет место в значительном диапазоне полей, даже если размагничивающий фактор образца равен нулю.

4.4. Критический ток тонкого провода или пленки

Кратко рассмотрев вычисление граничной энергии, для которого, как сразу видно, требуются численные методы, вернемся назад и рассмотрим ряд важных более простых примеров, для которых возможны точные аналитические решения. Но прежде получше познакомимся с теорией Гинзбурга—Ландау, а затем перейдем к более сложным проблемам.

Наиболее простыми случаями являются те, при которых возмущающие поля и токи так слабы, что везде $|\psi| = \psi_\infty$ и теория ГЛ переходит в теорию Лондонов.

Более интересным классом примеров является тот, в котором сильные поля или токи отклоняют значение $|\psi|$ от $|\psi_\infty|$, но при этом $|\psi|$ имеет одно и то же значение во всех точках. Это происходит в случае, когда образец представляет собой тонкую проволоку или пленку, так ориентированную по отношению к внешнему полю, что любое изменение $|\psi|$ должно было бы происходить на расстояниях порядка толщины $d \ll \xi(T)$. В этом случае член в выражении для свободной энергии, пропорциональный $(\nabla |\psi|)^2$, давал бы чрезмерно большой вклад при любых заметных изменениях ψ . Поэтому таких изменений не происходит и можно взять функцию $\psi(r)$ в виде $|\psi| \exp(i\phi)$, где $|\psi|$ — постоянная величина. В этом случае выражение для плотности тока и свободной энергии принимает простой вид:

$$\mathbf{J}_s = \frac{2e}{m^*} |\psi|^2 \left(\hbar \nabla \Phi - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right) = 2e |\psi|^2 \mathbf{v}_s; \quad (4.32)$$

$$f = f_{no} + \alpha |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4 + |\psi|^2 \frac{1}{2} m^* v_s^2 + \frac{\hbar^2}{8\pi}. \quad (4.33)$$

Хотя обычно принято считать $m^* = 2m$, оставим более общее обозначение, которое позволяет, если требуется, использовать другие нормировки ψ , а также как напоминание об условной природе параметра m^* .

Применим теперь эти уравнения к случаю тока с постоянной плотностью, текущего через тонкую пленку или тонкий провод. Поскольку энергия из-за полевого члена $\hbar^2/8\pi$ меньше, чем кинетическая энергия тока, на множитель порядка отношения поперечного сечения проводника к λ^2 , то в достаточно тонком сверхпро-

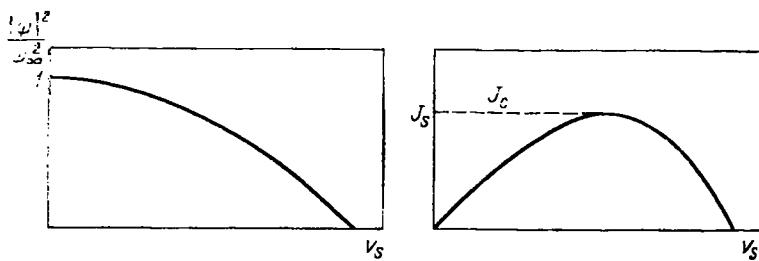


Рис. 4.3. Зависимость величин $|\psi|^2$ и J_s от скорости сверхтекущей компоненты v_s .

воднике можно этим членом пренебречь. Теперь для данного значения v_s минимизируем выражение (4.33), чтобы найти оптимальное значение $|\psi|^2$. В результате получаем

$$|\psi|^2 = \psi_\infty^2 \left(1 - \frac{m^* v_s^2}{2 |\alpha|} \right) = \psi_\infty^2 \left[1 - \left(\frac{\xi m^* v_s}{\hbar} \right)^2 \right], \quad (4.34)$$

где вторая часть равенства определена через величины ξ и $m^* v_s$, которые не изменяются при изменении обозначений. Соответствующий ток равен

$$J_s = 2e\psi_\infty^2 \left(1 + \frac{m^* v_s^2}{2 |\alpha|} \right) v_s. \quad (4.35)$$

Как показано на рис. 4.3, J_s имеет максимальное значение, когда $dJ_s/dv_s = 0$, а именно когда $m^* v_s^2 / 2 = |\alpha| / 3$ и $|\psi|^2 / \psi_\infty^2 = 2/3$. Отождествим этот максимум тока с критическим током. Таким образом,

$$J_c = 2e\psi_\infty^2 \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} - \frac{|\alpha|}{m^*} \right)^{1/2} = \frac{cH_c(T)}{3\sqrt{6}\pi\lambda(T)} \propto (1-t)^{3/2}, \quad (4.36)$$

где снова вторая часть равенства полностью записана через основные используемые параметры. Отсюда следует указанная пропорциональность J_c вблизи T_c величине $(1-t)^{3/2}$. Соответствующий критический импульс равен

$$p_c = m^* v_s = \frac{\hbar}{\sqrt{3\xi(T)}}. \quad (4.37)$$

Критическая скорость сама по себе является условно определяемой величиной, поскольку она зависит от условного выбора m^* .

Можно заметить, что в качестве независимой переменной выбрана v_s , а не $J_s \propto |\psi|^2 v_s$. Это не было случайным выбором, это даже необходимо, так как здесь используется свободная энергия Гельмгольца. Выбор такого потенциала оправдан лишь в том случае, если отсутствуют наведенные э. д. с., вызывающие энергетический обмен с источником тока. Это соответствует фиксации величины v_s , поскольку необходима конечная э. д. с., чтобы изме-

нить эту скорость. Если хотим использовать в качестве независимой переменной ток, то необходимо произвести над свободной энергией преобразование Лежандра, как было сделано в формуле (3.40) при рассмотрении магнитной энергии. При вычитании соответствующего члена нужно учесть, что в настоящем случае работа, совершаемая генератором, есть $m^*v_s \cdot J_s/2e$, поэтому получаем плотность потенциала Гиббса:

$$g = f - \frac{m^*v_s J_s}{2e}, \quad (4.38a)$$

или

$$g = f_{n0} + \alpha |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4 - \frac{m^*J_s}{8e^2 |\psi|^2} + \frac{h^2}{8\pi}, \quad (4.38b)$$

где, для того чтобы исключить v_s , использована формула (4.32). Минимизация этого выражения по отношению к $|\psi|^2$ для данной плотности тока J_s приводит к кубическому уравнению для $|\psi|^2$. Решение его совпадает с тем, которое найдено выше, хотя его и труднее получить алгебраически. Это решение можно записать, например, в виде

$$\frac{m^*J_s^2}{8e^2} = -\alpha |\psi|^4 - \beta |\psi|^6; \quad (4.39)$$

максимальное значение тока достигается при $|\psi|^2 = -\frac{2}{3}(\alpha/\beta) = -\frac{2}{3}\Psi_\infty^2$, при этом J_s имеет критическое значение J_c , найденное выше [см. соотношение (4.36)].

Интересно сравнить этот критический ток ГЛ с критическим током теории Лондона, который найдем, приравнивая плотность кинетической энергии плотности энергии конденсации:

$$\frac{1}{2} n_s m v_s^2 = \frac{2\pi}{c^2} \lambda^2 J_s^2 = \frac{H_c^2}{8\pi}, \quad (4.40)$$

откуда $J_c = cH_c/4\pi\lambda$.

Это превышает более точный результат теории ГЛ (4.36) на множитель $(3\sqrt{6}/4) = 1,84$, потому что в нем не учитывается уменьшение $|\psi|^2$ с ростом тока, следующее из нелинейной теории.

Представляет интерес также сравнить выводы теории ГЛ с выводами микроскопической теории, для чего, конечно, необходимо провести численные расчеты, за исключением ряда частных случаев. Бардин [8] дал очень полезный обзор таких расчетов. Вблизи T_c результаты теории ГЛ, как и ожидалось, совпадают с результатами микроскопической теории, однако в пределе нулевой температуры ситуация совершенно иная. При наличии однородной скорости v_s уровни энергии квазичастиц сдвигаются на $\hbar k \cdot v_s$. Это можно видеть из формулы (2.108), замечая, что скорость $ea(0)/mc$ вызывается постоянным вектором-потен-

циалом $a(0)$. Таким образом, для некоторых состояний ширина щели достигает нуля, когда

$$v_s = \frac{\Delta(0)}{\hbar k_F} = \frac{\hbar}{\pi m \xi_0}. \quad (4.41)$$

Ниже этой «скорости распаривания» вклад в сверхток дают все электроны и плотность тока J_s строго пропорциональна v_s . Выше этой скорости распаривания появляются отдельные возбуждения, ширина щели резко уменьшается, и максимально возможный ток лишь на 2% больше, чем ток при скорости, когда начинается распаривание. Результирующая кривая $J_s(v_s)$ при $T=0$ поэтому идет из начала координат линейно, а затем круто спадает, что заметно отличается от результата теории ГЛ, который показан на рис. 4.3 и справедлив вблизи T_c^* .

Наиболее прямое экспериментальное подтверждение этих результатов возможно, если оба поперечных размера проводника могут быть сделаны малыми по сравнению как с λ , так и с ξ . В этом случае можно без опасения считать как J_s , так и $|\psi|^2$ постоянными вдоль поперечного сечения проводника, как это предполагается в теории. Одними из первых тщательных экспериментов на образцах такого типа были эксперименты Ханта [9], который работал с очень узкими полосками тонкой напыленной пленки. Недавно несколько групп ученых проводили эксперименты с нитевидными монокристаллами олова («вискерами») диаметром ~ 1 мкм, обычно имеющими гладкую поверхность, которая является почти идеальной для нашей цели. Поскольку внимание авторов этих экспериментов концентрировалось на флюктуационных эффектах, вызывающих электросопротивление даже при токах ниже J_c , вычисленного выше, отложим обсуждение их результатов до последней главы.

Из-за экспериментальных трудностей многие другие измерения критических токов проводились на тонких пленках, которые не являются узкими по сравнению с λ или ξ . В этом случае измеренный критический ток J_c обычно много меньше, чем ток, вычисленный по формуле (4.36), по многим причинам. Во-первых, довольно трудно изготовить пленки однородными по толщине и структуре. Во-вторых, более серьезной причиной является концентрация сверхтока на краях пленки. Эта концентрация следует из уравнений электродинамики, поскольку плотность внешнего магнитного потока выше там, где линии потока ближе всего подходят к полоске. Этот эффект приводит к неоднородной плотности тока, а также придает особое значение свойствам краев, где пленка обычно тоньше и менее совершенна, чем в середине полоски**. Эту трудность можно частично преодолеть тремя способами.

* Квазилинейная зависимость $J_s(v_s)$ при $T=0$ имеет место лишь в чистых сверхпроводниках. Для грязных образцов, к которым относится большинство тонких пленок, даже при $T \rightarrow 0$ зависимость $J_s(v_s)$ близка к даваемой теорией ГЛ. — Прим. ред. пер.

** См. книгу Бремера (общий список литературы). — Прим. ред. пер.

1. Можно сделать полоску достаточно узкой, так чтобы произведение толщины d и ширины w было меньше, чем λ^2 , в этом случае плотность тока J_s будет почти однородной, даже если $w > \lambda$ [33*].

2. Можно использовать систему со сверхпроводящим экраном, когда изучаемая пленка напыляется на более толстый проводник с тонким изолирующим слоем. При такой геометрии нижний сверхпроводящий слой действует на магнитное поле, так что силовые линии этого поля становятся параллельными пленке, что, в свою очередь, приводит к однородному распределению тока.

3. Можно использовать цилиндрические пленки, у которых нет краев и симметрия гарантирует однородную плотность тока при условии, что обратный ток также идет по соосному концентрическому проводнику.

Любой из этих способов, если он достаточно тщательно реализован, позволяет достичь критических токов, отклоняющихся от теоретических значений не больше чем на 10% *.

Более «микроскопическую» проверку теории можно провести путем туннельных измерений, которые позволяют определить величину щели Δ как функцию J при $J < J_c$. Согласно формуле (4.34), $|\psi|$, а следовательно Δ , будет сначала уменьшаться как J^2 , переходя при больших токах к более сложной зависимости.

Свидетельство этого уменьшения $|\psi|$, основанное на росте дифференциальной проводимости при нулевом напряжении, было впервые обнаружено Левиным [10]; намного более определенные результаты, основанные на измерении полной спектральной плотности состояний, были впоследствии получены Митеску [11].

4.5. Квантование флюксоида и эксперимент Литтла и Паркса

Литтлом и Парксом [12] был проведен остроумный эксперимент, в котором внешними условиями фиксируется не ток, а величина m^*v_s и который ясно демонстрирует, что квантуется именно флюксоид, а не поток. Эксперимент заключается в измерении перехода по сопротивлению тонкостенного сверхпроводящего цилиндра в аксиальном магнитном поле. Из этого можно сделать вывод о смещении $\Delta T_c(H)$ критической температуры, зависящем от магнитного потока, окружающего цилиндр. В этом разделе проведем анализ [13] этого эксперимента в рамках теории Гинзбурга — Ландау.

4.5.1. Флюксоид

Анализируя состояние многосвязанного сверхпроводника в присутствии магнитного поля, Ф. Лондон ввел понятие флюксоида Φ' , связанного с каждым отверстием (или нормальной областью), проходящим через сверхпроводник.

* См., например, описание экспериментов в работе [34*]. — Прим. ред. пер.

Он определил флюкоид следующим образом:

$$\Phi' = \Phi + \left(\frac{4\pi}{c} \right) \oint \lambda^2 J_s \cdot d\mathbf{s} = \Phi + \left(\frac{m^* c}{e^*} \right) \oint v_s \cdot d\mathbf{s}, \quad (4.42)$$

где $\Phi = \int \bar{\mathbf{h}} \cdot d\mathbf{S} = \phi \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$ — обычный магнитный поток через контур интегрирования.

Легко видеть, что $\Phi' = 0$ для любого пути, который не окружает отверстия и внутри которого заключен только сверхпроводник, для которого справедливо первое из уравнений Лондонов (3.1). Отсюда следует, что Φ' имеет одно и то же значение для любого пути вокруг данного отверстия. Аналогично, если существует временное изменение поля \bar{h} , то изменение тока J_s , вызванное согласно второму уравнению Лондонов, как раз достаточно, чтобы сохранить величину Φ' постоянной (если, конечно, это изменение не является таким сильным, чтобы перевести сверхпроводник в нормальное состояние). Эти два закона сохранения означают, что флюкоид Φ' имеет единственное постоянное значение для всех контуров, окружающих любое данное отверстие. Действительно, Лондон указал [14], что значения флюкоида Φ' должны быть ограничены рядом дискретных значений, равных целому числу, умноженному на квант потока hc/e^* . Это легко показать, применив квантовое условие Бора — Зоммерфельда к уравнению (4.42), откуда следует

$$\Phi' = \frac{c}{e^*} \oint \left(m^* v_s + \frac{e^* \mathbf{A}}{c} \right) \cdot d\mathbf{s} = \frac{c}{e^*} \oint \mathbf{p} \cdot d\mathbf{s} = n \frac{hc}{e^*} = n\Phi_0, \quad (4.43)$$

Не зная, что в теории сверхпроводимости будут фигурировать пары электронов, Лондон предположил, что e^* равно e . Теперь известно, что $e^* = 2e$, так что квант потока имеет значение

$$\Phi_0 = \frac{hc}{2e} = 2,07^{-7} \text{ Гс} \cdot \text{см}^2. \quad (4.44)$$

Экспериментально это было показано [15, 16] путем измерений потока, заключенного в полых цилиндрах с достаточно толстыми стенками, в которых полный поток и флюкоид неразличимы, поскольку в выражении (4.42) v_s стремится к нулю во всех точках под поверхностным слоем.

Не следует думать, что строгость концепции кванта потока ограничивается приведенными выше рассуждениями, в которых используются полуклассический язык Бора — Зоммерфельда и неточные уравнения Лондонов. С точки зрения теории ГЛ эта концепция основана на существовании однозначного комплексного сверхпроводящего параметра порядка ψ . Однозначность требует, чтобы фаза ψ изменялась на целое число, умноженное на 2π при полном обходе по замкнутому контуру, так что

$$\oint \nabla \psi \cdot d\mathbf{s} = 2\pi n, \quad (4.45)$$

вместе с выражением (4.9) это приводит к результатам, найденным выше. Таким образом, квантование флюкоида является мак-

роскопическим аналогом квантования углового момента в атомной системе. Поэтому не удивительно, что представление о квантах потока является мощным инструментом для анализа многих проблем, когда сверхпроводники пронизываются магнитным полем.

4.5.2. Эксперимент Литтла — Паркса

Применим теперь концепцию флуксоида для анализа эксперимента Литтла — Паркса. Пусть R — радиус тонкостенного цилиндра, H — приложенное магнитное поле. Можно не делать различия между приложенным полем и полем внутри цилиндра, поскольку ищем зависимость $T_c(H)$; при $T \approx T_c$ $|\psi|^2 \rightarrow 0$, так что и поля являются одинаковыми. Теперь, используя определение (4.42) с $\Phi = \pi R^2 H$ и $\Phi' = n\Phi_0$, найдем скорость сверхтона:

$$v_s = \frac{\hbar}{m^* R} \left(n - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right). \quad (4.46)$$

Для потока, фиксированного данным полем H , энергия токов в цилиндре будет наименьшей при таком целом n , при котором v_s минимальна; соответственно этот выбор и позволяет системе оставаться сверхпроводящей при наиболее высокой температуре. С выбранным таким образом n скорость v_s будет периодической функцией отношения Φ/Φ_0 , как показано на рис. 4.4. Если скорость v_s найдена, можно использовать формулу (4.34) для нахождения изменения функции $|\psi|^2$. В частности, переход происходит, когда $|\psi|^2 = 0$, т. е. когда

$$\frac{1}{\xi^2} = \left(\frac{m^* v_s^2}{\hbar} \right)^2 = \frac{1}{R^2} \left(n - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2.$$

Используя соотношение (4.24) для коэффициента пропорциональности между ξ^{-2} и $(1-t)$, найдем, что относительное понижение температуры T_c определяется выражением

$$\frac{\Delta T_c(H)}{T_c} = \begin{cases} 0,55 \frac{\xi_0^2}{R^2} \left(n - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 & \text{для чистого сверхпроводника;} \\ 0,73 \frac{\xi_0 l}{R^2} \left(n - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 & \text{для грязного сверхпроводника.} \end{cases} \quad (4.47)$$

Максимальное уменьшение критической температуры T_c происходит, когда $n - \Phi/\Phi_0 = 1/2$. В этой точке отношение $\Delta T/T_c$ достигает значений, равных $0,14 \xi_0^2 R^2$ и $0,18 \xi_0 l/R^2$ соответственно для случаев чистого и грязного сверхпроводников. Используемые в эксперименте образцы обычно являются грязными оловянными пленками, напыленными на органические нити диаметром ~ 1 мкм. Беря типичные значения $R = 7 \cdot 10^{-5}$ см, $\xi_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ см,

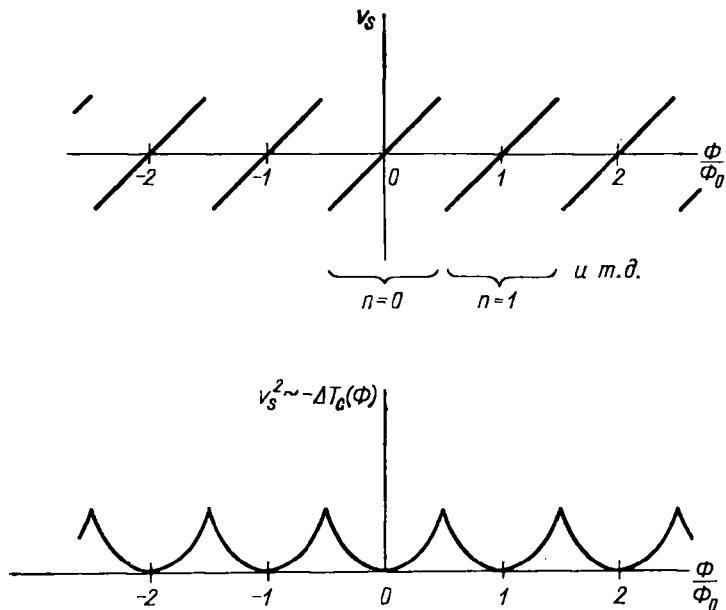


Рис. 4.4. Зависимость величин v_s и v_s^2 от потока, пронизывающего отверстие цилиндра, в эксперименте Литтла — Паркса. Падение T_c и, следовательно, увеличение сопротивления в реальном эксперименте пропорционально v_s^2 и, таким образом, имеет гребенчатую форму нижней кривой

$l = 10^{-6}$ см, находим, что $\Delta T_c|_{\max} \approx 0.8 \cdot 10^{-3} \approx 3 \cdot 10^{-3}$ К, что легко проверить непосредственным измерением. Для такого диаметра период равен $\Phi_0/\pi R^2 = 14$ Гс.

Мы несколько идеализировали задачу, считая, что измеряется зависимость $T_c(H)$. В реальном эксперименте измеряется периодическое изменение сопротивления пленки при изменении поля H . Этот метод использует для упрощения измерений конечную ширину перехода по сопротивлению. Величину $\Delta R(H)$ можно пересчитать в $\Delta T_c(H)$, используя измеренное значение производной dR/dT в области перехода. Однако эти измерения нельзя считать вполне количественными, поскольку, как оказывается, форма перехода изменяется с изменением поля H . Поэтому полученная зависимость $\Delta T_c(H)$ до некоторой степени зависит от выбора уровня сопротивления внутри области перехода. Другая сложность состоит в апериодическом квадратичном смещении критической температуры T_c как функции поля H , которое иногда наблюдается и может быть вызвано наличием непараллельности поля оси образца. Тем не менее недавнее усовершенствование экспериментов и их анализ [17] устранили большинство этих проблем и привели к достаточно удовлетворительному согласию с теорией.

4.6. Параллельное критическое поле тонких пленок

Если сначала сосредоточить внимание на нахождении критического поля и предположить, что тонкие пленки имеют фазовые переходы второго рода, при которых $|\psi|^2 \rightarrow 0$ и $\lambda_{\text{эфф}}(H) \rightarrow \infty$, то можно пренебречь экранированием и записать:

$$A_y = \int_0^x h(x') dx' \approx Hx, \quad (4.48)$$

где H — приложенное поле. Последнее выражение является также хорошей аппроксимацией, даже вдали от фазового перехода для пленок толщиной $d < \lambda$. Нужно заметить, что здесь использована та же лондоновская калибровка, которую мы использовали ранее (3.19) при вычислении значения $\lambda_{\text{эфф}}$ для слабого поля в пленках с нелокальной электродинамикой. При такой калибровке фаза ϕ , так же как и амплитуда $|\psi|$, является постоянной. Таким образом, из соотношения (4.9) получаем

$$\mathbf{v}_s = -2e\mathbf{A}/m^*c,$$

так что потенциал Гиббса на единицу площади пленки есть

$$\begin{aligned} G = \int_{-d/2}^{d/2} \left(f - \frac{hH}{4\pi} \right) dx &= \int_{-d/2}^{d/2} \left[f_{n0} + \alpha |\psi|^2 \frac{\beta}{2} |\psi|^4 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} m^* \left(\frac{2eHx}{m^*c} \right)^2 |\psi|^2 + \frac{(h-H)^2}{8\pi} - \frac{H^2}{8\pi} \right] dx = \\ &= d \left[f_{n0} + \alpha |\psi|^2 \frac{\beta}{2} |\psi|^4 - \frac{H^2}{8\pi} \right] + \frac{e^2 d^3 H^2}{6m^*c^2} |\psi|^2 + \\ &\quad + \int_{-d/2}^{d/2} \frac{(h-H)^2}{8\pi} dx. \quad (4.49) \end{aligned}$$

Теперь, как уже говорилось, в тонкой пленке можно аппроксимировать H с помощью H (как это сделано в равенстве $A_y = Hx$), так что последний член можно опустить*. Минимизируя оставшееся выражение для G относительно $|\psi|^2$ и используя формулы (4.11), находим

$$|\psi|^2 = \psi_\infty^2 \left(1 - \frac{d^2 H^2}{24\lambda^2 H_c^2} \right), \quad (4.50)$$

где λ теперь обозначает соответствующее значение $\lambda_{\text{эфф}}$ для малого поля. Таким образом, пленка становится нормальной, т. е. $|\psi|^2 \rightarrow 0$, когда $H = H_{c\parallel}$, где

$$H_{c\parallel} = 2\sqrt{6} H_c \lambda / d. \quad (4.51)$$

Это параллельное критическое поле может превышать термодина-

* Легко показать, что отброшенный член меньше члена, пропорционального d^3 , который мы оставляем, на множитель порядка $d^2 e^2 |\psi|^2 / mc^2 \ll 1$.

мическое критическое поле во много раз, если величина d/λ достаточно мала. Физическая причина заключается в том, что тонкая пленка с большой глубиной проникновения поля имеет малую диамагнитную энергию в фиксированном приложенном поле по сравнению с равным объемом массивного сверхпроводника.

Переписывая формулу (4.50) через поле $H_{c\parallel}$, получаем

$$|\psi|^2/\psi_\infty^2 = 1 - (H^2/H_{c\parallel}^2), \quad (4.52)$$

Вспоминая о пропорциональности ψ и Δ , из выражения (4.52) видно, что энергетическая щель в тонкой пленке будет непрерывно уменьшаться до нуля при возрастании параллельного магнитного поля до величины $H_{c\parallel}$. Такое поведение качественно подтверждалось в экспериментах по электронному туннелированию [18]. Однако позже было показано [19, 20], что спектр возбуждений БКШ постепенно подавляется полем до тех пор, пока при $H \approx 0,95 H_{c\parallel}$ он не станет бесщелевым, хотя пленка остается сверхпроводящей, если судить по ее сопротивлению. Такая «бесщелевая» сверхпроводимость, впервые рассмотренная Абрикосовым и Горьковым [21], оказывается вообще характерной для сверхпроводников, подвергнутых воздействиям (обычно магнитным), неинвариантным по отношению к обращению времени. Детальное обсуждение этого вопроса проведено в разд. 8.2.

4.6.1. Относительно толстые пленки

Что будет, если пленка окажется не очень тонкой? Пока она является достаточно тонкой, чтобы в ней наблюдался фазовый переход второго рода, выражение (4.51) остается *точным**, потому что при $H_{c\parallel} |\psi|^2 \rightarrow 0$ и, следовательно, $\lambda_{\text{эфф}}(H) \rightarrow \infty$ и $d/\lambda_{\text{эфф}}(H) \rightarrow 0$. Таким образом, вопрос заключается в том, насколько тонкой должна быть пленка, чтобы в ней при $H_{c\parallel}$ наблюдался фазовый переход второго рода. Для того чтобы ответить на этот вопрос, нужно рассмотреть полное выражение для свободной энергии, учитывая и то, что экранирующие токи будут приводить внутри пленки к соотношению $h < H$.

Пока $d \ll \xi$, можно сохранить приближение, при котором величина $|\psi|$ является постоянной в пленке. Тогда h подчиняется простым уравнениям Лондонов с величиной $\lambda_{\text{эфф}}$, зависящей от поля:

$$\lambda_{\text{эфф}}^2(H) = 16\pi e^2 |\psi|^2 / m^* c^2. \quad (4.53)$$

* Конечно, если отношение d/ξ не очень мало, то должны быть маленькие поправки, поскольку в этом случае величина $|\psi|$ не всегда постоянна по толщине пленки, как это предполагалось выше. Вариационные вычисления показывают, что эта поправка превышает значение $H_{c\parallel}$, даваемое формулой (4.51), на относительную величину порядка $d^2/100\xi^2$. Эта поправка не превышает 3% до тех пор, пока пленка обладает достаточной толщиной ($d \approx 1,8\xi(T)$), чтобы допускать совершенно другое решение, при котором $|\psi|$ имеет максимум около поверхности. Этот случай будет рассмотрен в разд. 4.10.2.

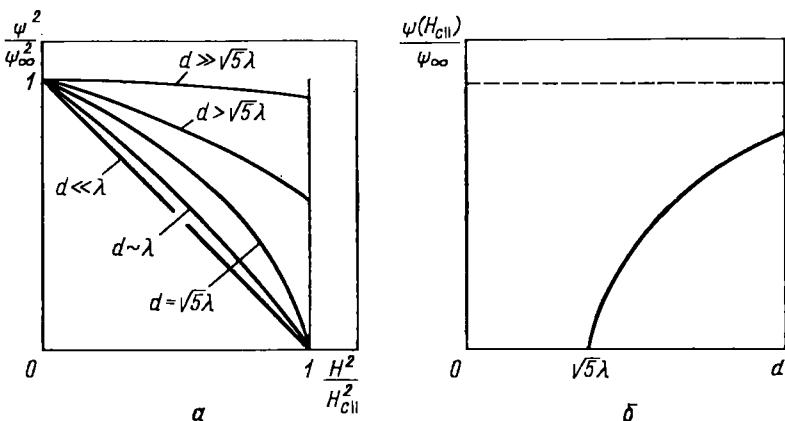


Рис. 4.5. Зависимость величины ψ от магнитного поля для пленок различной толщины (а) и величина скачка ψ при переходе первого рода для толщины $d > \sqrt{5}\lambda$ (б). Предполагается, что повсюду $d \ll \xi(T)$

В результате получаем обычную симметричную комбинацию экспоненциальных решений, удовлетворяющую граничным условиям $h = H$ на обеих поверхностях, так что

$$h = H \frac{\operatorname{ch} x/\lambda_{\text{ЭФ}}(H)}{\operatorname{ch} d/2\lambda_{\text{ЭФ}}(H)}. \quad (4.54a)$$

Соответствующий вектор-потенциал равен

$$A_y = H \lambda_{\text{ЭФ}}(H) \frac{\operatorname{sh} x/\lambda_{\text{ЭФ}}(H)}{\operatorname{ch} d/2\lambda_{\text{ЭФ}}(H)}. \quad (4.54b)$$

После подстановки этой формулы в выражение для G и определения условия минимума получается несколько неудобное для решения трансцендентное уравнение. После небольших преобразований* выясняется, что максимальная толщина, при которой имеет место переход второго рода, равна

$$d_{\max} = \sqrt{5}\lambda, \quad (4.55)$$

где λ — значение $\lambda_{\text{ЭФ}}(H)$ в нулевом поле. При толщине, меньшей $\sqrt{5}\lambda$, величина $H_{c\parallel}$ строго определяется выражением (4.51), но уменьшение $|\psi|^2$ до нуля при приближении H к $H_{c\parallel}$ не является, вообще говоря, таким простым, как показывает формула (4.52). При $d > \sqrt{5}\lambda$ переход становится переходом первого рода, со скачкообразным падением $|\psi|^2$ до нуля, как при переходе массивного образца в магнитном поле. Однако, если d немного превышает $\sqrt{5}\lambda$, $|\psi|^2$ существенно уменьшается еще до того, как происходит переход. Эти результаты схематически показаны на рис. 4.5.

* Более подробно см., например, работу [6]. Эти результаты впервые были получены в оригинальной статье Гинзбурга и Ландау.

4.7. Линеаризованные уравнения Гинзбурга — Ландау

Рассматривая приведенные выше примеры, мы ограничивались тонкими пленками или проволоками толщиной $d \ll \xi(T)$, так что величина $|\psi|$ заметно не изменялась. Ясно, что такое ограничение не позволяет рассмотреть большинство интересных случаев, например массивные образцы, а также пленки в полях, не параллельных их поверхности. Теперь рассмотрим эти случаи, но, чтобы избежать немедленного столкновения с полными сложностями решениями двух связанных нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, сначала изучим решения линеаризованных уравнений ГЛ. Такие уравнения получаются при опускании члена $\beta|\psi|^2\psi$ в уравнении (4.13), что соответствует опусканию члена $\frac{1}{2}\beta|\psi|^4$ в формуле (4.1). Это допущение будет оправданным только в том случае, если $|\psi|^2 \ll \psi_\infty^2 = -\alpha/\beta$, потому что, когда $\psi \approx \psi_\infty$, член, содержащий β , имеет тот же порядок величины, что и член, содержащий α , который мы оставляем. Таким образом, линеаризованная теория пригодна, только когда магнитное поле уменьшает ψ до значений, много меньших, чем ψ_∞ . Используя определение (4.17), связывающее α с ξ , можно записать линеаризованную форму дифференциального уравнения (4.13) в виде

$$\left(\frac{\nabla}{i} - \frac{2\pi A}{\Phi_0}\right)^2 \psi = -\frac{2m^*\alpha}{\hbar^2} \psi \equiv \frac{\psi}{\xi^2(T)}. \quad (4.56)$$

Дальнейшее существенное упрощение связано с тем фактом, что в формуле (4.56) можно считать $A = A_{\text{внешн}}$, поскольку все экранирующие эффекты, обусловленные сверхтоками, пропорциональны $|\psi|^2$ и, следовательно, приводят к членам более высокого порядка, опускаемым в линейном приближении. Таким образом, в этом приближении второе уравнение ГЛ (4.14), дающее выражение для тока, становится независимым от первого, которое определяет ψ ; это приводит к значительным математическим упрощениям.

Заметим теперь, что уравнение (4.56) аналогично уравнению Шредингера для свободной частицы с массой m^* и зарядом $e^* = 2e$ в магнитном поле $\mathbf{h} = \text{rot } \mathbf{A}$, причем величина $-\alpha = |\alpha|$ играет роль собственного значения энергии. Это свойство позволяет использовать различные решения и методы, хорошо известные из квантовой механики, непосредственно в теории сверхпроводимости. В частности, можно определить поля, при которых существуют решения линеаризованных уравнений ГЛ, а следовательно решения полных нелинейных уравнений ГЛ, имеющие бесконечно малую амплитуду, просто приравнивая величину $1/\xi^2(T)$ к зависящему от поля собственному значению оператора в левой части уравнения (4.56). Значения поля, определенные таким образом, соответствуют критическим полям фазового перехода второго рода или, если переход является переходом первого рода,

соответствуют полю образования зародышей, которое устанавливает предел степени переохлаждения. Теперь рассмотрим несколько важных примеров применения этого метода.

4.8. Образование зародышей в массивных образцах; поле H_{c2}

Сначала решим проблему образования сверхпроводящих зародышей в массивном сверхпроводнике в присутствии поля H , направленного вдоль оси z . Удобно выбрать калибровку в виде

$$A_y = Hx.$$

Положение начала координат несущественно, поскольку рассматривается бесконечный образец. Возводя в квадрат левую часть уравнения (4.56), получаем

$$\left[-\nabla^2 + \frac{4\pi i}{\Phi_0} Hx \frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{2\pi H}{\Phi_0} \right)^2 x^2 \right] \psi = \frac{1}{\xi^2} \psi. \quad (4.57)$$

Поскольку эффективный потенциал зависит только от x , то разумно искать решение в виде

$$\psi = e^{ik_y y} e^{ik_z z} f(x). \quad (4.58)$$

Подставляя это выражение в уравнение (4.57) и группируя члены, получаем

$$-f''(x) + \left(\frac{2\pi H}{\Phi_0} \right)^2 (x - x_0)^2 f = \left(\frac{1}{\xi^2} - k_z^2 \right) f, \quad (4.59)$$

где

$$x_0 = k_y \Phi_0 / 2\pi H. \quad (4.59a)$$

Таким образом, введение множителя $e^{ik_y y}$ только смещает местоположение минимума эффективного потенциала. Это несущественно для решаемой задачи, но становится важным, когда мы будем иметь дело со сверхпроводимостью вблизи поверхностей ограниченных образцов, а также когда будем искать решения, нелокализованные во всем пространстве.

Решения уравнения (4.59) можно получить сразу, замечая, что оно после умножения на $\hbar^2/2m^*$ переходит в уравнение Шредингера для гармонического осциллятора массы m^* с упругостью $(2\pi H/\Phi_0)^2/m^*$. Таким образом, эта задача формально совпадает с задачей нахождения квантовых состояний обычной заряженной частицы в магнитном поле, которая приводит к так называемым уровням Ландау, разделенным циклотронной энергией $\hbar\omega_c$. В результате собственные значения гармонического осциллятора получаются равными

$$\epsilon_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_c = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \left(\frac{2eH}{m^* c} \right).$$

Учитывая уравнение (4.59), их нужно приравнять величине $(\hbar^2/2m^*) (\xi^{-2} - k_z^2)$. Таким образом,

$$H = \frac{\Phi_0}{2\pi(2n+1)} \left(\frac{1}{\xi^2} - k_z^2 \right). \quad (4.60)$$

Очевидно, что H имеет максимальное значение при $k_z=0$ и $n=0$. Это значение, обозначаемое H_{c2} , равно

$$H_{c2} = \Phi_0 / 2\pi\xi^2(T).$$

Оно является максимальным полем, при котором могут образовываться зародыши сверхпроводимости внутри большого образца при уменьшении внешнего поля. Соответствующая волновая функция будет

$$f(x) = \exp \left[-\frac{(x-x_0)^2}{2\xi^2} \right], \quad (4.61)$$

что можно проверить подстановкой ее в уравнение (4.59).

Связь величины H_{c2} с термодинамическим критическим полем H_c становится ясной, если выразить H_{c2} через H_c , используя выражения (4.20) и (4.27). В результате получаются три эквивалентных выражения для H_{c2} :

$$H_{c2} = \frac{\Phi_0}{2\pi\xi^3} = \frac{4\pi\lambda^2 H_c^2}{\Phi_0} = \sqrt{2} \kappa H_c. \quad (4.62)$$

Из последнего выражения для H_{c2} видно, что значение $\kappa=1/\sqrt{2}$ действительно разделяет материалы, для которых $H_{c2}>H_c$ (сверхпроводники II рода), и материалы, для которых $H_{c2}<H_c$ (сверхпроводники I рода). Поскольку зародыши сверхпроводящей фазы образуются при поле H_{c2} , эти неравенства означают, что при уменьшении поля сверхпроводники II рода переходят в сверхпроводящее состояние при $H_{c2}>H_c$; при этом имеет место фазовый переход второго рода, т. е. $|\psi|^2$ нарастает непрерывно от нуля. Напротив, сверхпроводники I рода могут переохлаждаться, т. е. оставаться в нормальном состоянии даже ниже H_c , в идеальном случае до тех пор, пока не будет достигнуто поле $H_{c2}<H_c$. В этом случае происходит образование зародышей, сопровождающееся необратимым, резким скачком величины $|\psi|^2$ до значения ψ_∞^2 . Эти свойства сверхпроводников I и II рода иллюстрирует рис. 4.6. Практически образование зародышей на дефектах обычно ограничивает степень переохлаждения, которая реально наблюдается в сверхпроводниках I рода, меньшими значениями, чем теоретические значения, определяемые по H_{c2} . Тем не менее почти идеальные по структуре образцы малых размеров могут оставаться нормальными до теоретического предела*. Например, Федер и Маклахлан [22] нашли значение $\kappa=0,062$ для индия, наблюдая его переохлаждение до поля $H_{c2} \approx 0,09 H$.

* Чтобы избежать образования зародышей на поверхности при $H_{c3}>H_{c2}$, рассмотренного в следующем разделе, поверхность образца должна быть покрыта нормальным металлом.

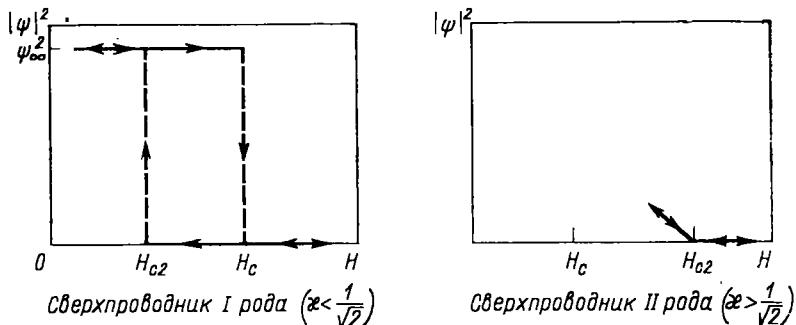


Рис. 4.6. Различие в поведении параметра порядка вблизи поля H_{c2} в сверхпроводниках I и II рода. Заметьте гистерезисное поведение сверхпроводника I рода и обратимое поведение сверхпроводника II рода

4.9. Образование зародышей у поверхности; поле H_{c3}

Поскольку реальные сверхпроводники имеют конечные размеры, нужно рассмотреть ситуацию вблизи поверхности. Действительно, Сан-Жам и Де Жен [23] показали, что сверхпроводимость может образовываться на границе металл — изолятор в параллельном поле H_{c3} , которое в 1,695 раза больше, чем H_{c2} . В интервале от H_{c2} до H_{c3} существует сверхпроводящий поверхностный слой толщиной $\sim \xi(T)$, в то время как внутри образца $\psi=0$. Посмотрим, как это происходит.

Границные условия для ψ на границе с диэлектриком имеют вид

$$\left(\frac{\nabla}{i} - \frac{2\pi\mathbf{A}}{\Phi_0} \right) \psi \Big|_n = 0. \quad (4.63)$$

В случае $\mathbf{H} \parallel \mathbf{z}$, где \mathbf{z} — нормаль к поверхности, этому условию удовлетворяет выбор ψ в виде (4.58) со значением $k_z=0$ (тем самым, которое давало H_{c2}), поскольку при нашем выборе калибровки вектор \mathbf{A} направлен вдоль оси \mathbf{y} , которая находится в плоскости поверхности. Таким образом, значение H_{c2} , найденное выше, точно определяет поле образования зародышей около поверхности, *нормальной* к полю.

Теперь рассмотрим поверхность, *параллельную* полю, например плоскость yz . В выбранной нами калибровке $A_x=A_n=0$, так что граничное условие приобретает простой вид:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{\text{на поверхности}} = \frac{df}{dx} \Big|_{\text{на поверхности}} = 0. \quad (4.64)$$

Собственная функция (4.61) удовлетворяет этому условию, если величина x_0 равна 0 или ∞ ; в обоих случаях собственные значения соответствуют H_{c2} . Однако теперь можно получить и собственную функцию с меньшим собственным значением, все еще удов-

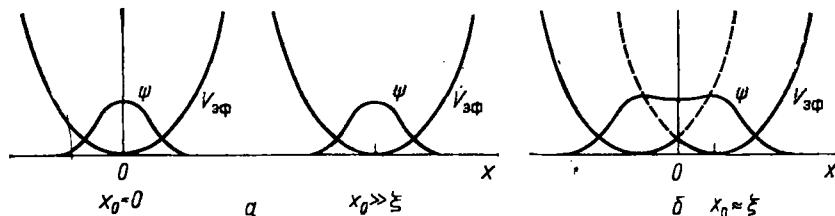


Рис. 4.7. Образование поверхностных и внутренних зародышей при H_{c2} (а) и поверхностных зародышей при H_{c3} (б)

летворяющую условию (4.64), если k_z выбрать так, чтобы поместить x_0 (положение минимума эффективного потенциала), на расстояние порядка ξ от поверхности. К этому приводят следующие качественные соображения. Представим, что потенциальная яма с центром в точке x_0 дополнена своим зеркальным изображением снаружи поверхности (рис. 4.7, б), образуя, таким образом, потенциал, симметричный относительно поверхности. Теперь собственная функция с низшей энергией симметричного потенциала сама является симметричной, и, следовательно, на поверхности $ds/dx=0$, так что граничное условие (4.64) выполняется. Конечно, половина функции $f(x)$, находящаяся вне поверхности образца, не имеет физического смысла и должна в конце решения быть отброшена. Из рассмотрения ясно, что эта новая «поверхностная» собственная функция должна иметь меньшее собственное значение, чем «внутренняя» собственная функция, потому что она появляется в более низкой и широкой потенциальной яме, чем простая парабола с центром в x_0 . Точное решение показывает, что это собственное значение меньше на множитель, равный 0,59, что дает

$$H_{c3} = \frac{1}{0,59} H_{c2} = 1,695 H_{c2} = 1,695 (\sqrt{2} \times H_c). \quad (4.65)$$

Этот точный результат был получен с помощью табулированных функций Вебера. Однако простое вариационное приближение (предложенное Ч. Киттелем) дает уже вполне хорошее приближение; оно иллюстрирует полезность вариационных методов при работе с теорией. Наметим основной ход этих вычислений, не останавливаясь на деталях. Основываясь на выражении (4.61), выберем пробную функцию равной

$$\psi = f(x) \exp(ik_y y) = \exp(-ax^2) \exp(ik_y y). \quad (4.66)$$

Если координата x отсчитывается от поверхности образца, эта функция автоматически удовлетворяет граничному условию (4.64). Параметры a и k_y определим вариационным методом из условия минимума потенциала Гиббса на единицу площади поверхности. В линейном по ψ^2 приближении потенциал можно записать

$$G = G_n = \frac{\hbar^2}{2m^2} \int_0^\infty \left[-\frac{1}{\xi^2} |\psi|^2 + \left| \left(\frac{\nabla}{i} - \frac{2\pi A}{\Phi_0} \right) \psi \right|^2 \right] dx. \quad (4.67)$$

Подставляя выражение (4.66) в это уравнение и дифференцируя выражение под знаком интеграла, получаем

$$x_0 = \frac{k_B \Phi_0}{2\pi H} = (2\pi a)^{-1/2}. \quad (4.68)$$

После подстановки этого значения x_0 величина $G - G_n$ становится функцией a , H и $\xi(T)$. Минимизируя эту функцию a , получаем значение a как функцию H для данного ξ . Однако линейная теория справедлива только для точки перехода, когда $G = G_n$. Это дает второе условие, позволяющее определить критическое поле, а также оптимальное значение a при этом поле. Окончательные результаты имеют вид

$$a = \frac{1}{2\xi^2}, \quad x_0 = \frac{\xi}{\sqrt{\pi}}.$$

$$H_{c3} \approx \left(\frac{\pi}{\pi - 2} \right)^{1/2} \frac{\Phi_0}{2\pi\xi^2} = 1,66 H_{c2}. \quad (4.69)$$

Это значение H_{c3} только на 2% меньше точного результата (4.65). Двухенная вариационная функция вида $f(x) = (1 + cx^2) \exp(-ax^2)$ привела бы практически к полному согласию с точным результатом.

Итак, в магнитном поле, параллельном поверхности, зародыши сверхпроводимости образуются в поверхностном слое толщиной $\sim \xi$, если поле на 70% больше значения, при котором образуются зародыши в объеме материала. Это означает, что образец может нести поверхностный сверток в широком диапазоне полей, при которых отсутствует объемная сверхпроводимость, измеряемая, например, по кривой намагничивания. Теоретическое открытие поверхностной сверхпроводимости Сан-Жамом и Де Женом дало разумное объяснение большому числу экспериментальных данных о сохранении сверхпроводимости в сильных полях, которые раньше объяснялись существованием неоднородностей в образце.

Интересным следствием этих результатов является то, что именно величина H_{c3} , а не H_{c2} должна ограничивать диапазон переохлаждения сверхпроводника I рода, так как слой поверхностной сверхпроводимости будет инициировать переход во внутренних областях.

В экспериментах Федера и Маклахлана [22], упомянутых выше, величины H_{c3} и H_{c2} измерялись как поля переохлаждения, для чего некоторые образцы покрывали слоем нормального металла. Покрытые образцы переохлаждаются до H_{c2} , потому что нормальное покрытие изменяет граничные условия для ψ , так что условие (4.64) заменяется условием $d\psi/dx = -\psi/b$, которое менее благоприятно для образования зародышей. Покрытие нормальным

металлом препятствует поверхностной сверхпроводимости из-за того, что электронная пара, образованная на поверхности, имеет тенденцию перейти в нормальный металл, где она разрушается. Другими словами, контакт с нормальным металлом служит механизмом разрушения пар, который таким образом локально усиливает действие магнитного поля, подавляя поверхностную сверхпроводимость.

Для материалов с κ , равной от $1/1,695\sqrt{2}$ до $1/\sqrt{2}$, т. е. в области $0,42 < \kappa < 0,707$, справедливо неравенство $H_{c2} < H_c < H_{c3}$. Сверхпроводники I рода со значениями κ в этой области не должны проявлять переохлаждения при H_c , несмотря на тот факт, что в объеме образца происходит при этом поле переход первого рода. Такие сверхпроводники называют иногда «сверхпроводниками $\frac{1}{2}$ -рода». Такая классификация весьма условна, поскольку ситуация зависит от природы граничных условий на поверхности образца, а не от внутренних свойств объема материала.

4.10. Образование зародышей в пленках и фольгах

При обсуждении поля образования зародышей поверхностной сверхпроводимости H_{c3} молчаливо предполагалось, что среда полубесконечная; это позволило пренебречь всеми поверхностями, кроме одной. Теперь рассмотрим образование сверхпроводимости в пленке, где нужно рассматривать обе поверхности. Обсудим, во-первых, угловую зависимость критического поля достаточно тонкой пленки ($d \ll \xi(T)$), в которой величину $|\psi|$ можно считать постоянной по толщине. Затем рассмотрим пленку промежуточной толщины $d \approx \xi$ (не только из-за самостоятельного интереса этой задачи, но потому, что она дает простое введение к проблеме вихревого состояния массивных образцов).

4.10.1. Угловая зависимость критического поля тонких пленок

Выше было отмечено, что критическим полем образования зародышей сверхпроводимости около поверхности, нормальной к магнитному полю, должно быть H_{c2} , так как соответствующая собственная функция имеет везде $d\psi/dz = 0$, следовательно, автоматически удовлетворяет граничному условию нулевой нормальной производной. По этой же причине H_{c2} будет также давать значение поля $H_{c\perp}$ — перпендикулярного критического поля толстой пленки. Для этого только необходимо подставить в уравнение (4.62) соответствующее эффективное значение κ , которое будет зависеть от толщины d , если пленка очень тонкая. Однако часто удобнее рассматривать зависимость $\lambda_{\text{эф}}$ от толщины, проанализированную в разд. 3.2, и использовать промежуточное выражение в формуле (4.62).

Другой предельный случай — параллельное критическое поле — рассматривался для тонких пленок в разд. 4.6. Эти два случая для тонких пленок сильно отличаются, поскольку $H_{c\parallel}$ значительно больше, чем $H_{c\perp}$. Поэтому интересно найти угловую зависимость, которая связывает эти два предельных случая. Впервые исследуя эту проблему, Тинкхам [13] использовал простые физические соображения, основанные на квантовании флукаусона, и получил, что $H_c(\theta)$ неявно определяется из соотношения

$$\left| \frac{H_c(\theta) \sin \theta}{H_{c\perp}} \right| + \left(\frac{H_c(\theta) \cos \theta}{H_{c\parallel}} \right)^2 = 1. \quad (4.70)$$

Заметим, что $H_c(\theta)$ имеет острый пик при $\theta=0$, так как

$$\left| \frac{dH_c}{d\theta} \right|_{\theta=0} = \frac{H_{c\parallel}^2}{2H_{c\perp}} > 0. \quad (4.70a)$$

Эти результаты впоследствии [24] подтвердились при использовании для тонких пленок линеаризованных уравнений ГЛ. Проделем в общих чертах эти вычисления.

Выберем систему координат с центром в середине пленки, причем пусть ось x направлена по нормали к пленке. Магнитное поле выбирается таким образом, чтобы оно лежало в плоскости xz и составляло с плоскостью пленки угол θ . Вектор-потенциал для удобства выбирают так, чтобы он имел только одну компоненту y , т. е.

$$A_y = H(x \cos \theta - z \sin \theta). \quad (4.71)$$

Тогда, подставляя это выражение в уравнение (4.56), получаем дифференциальное уравнение в частных производных, решить которое с соответствующими граничными условиями (4.63) трудно, потому что в этих координатах оно не разделяется. Однако можно смело полагать, что ϕ не зависит от y , поскольку y не входит в дифференциальное уравнение. Кроме того, если $d \ll \xi$, то можно считать функцию ϕ независимой от x , как это сделано в разд. 4.6; при этом автоматически удовлетворяется граничное условие для нормальной производной к поверхности. Таким образом, в пределе $d \rightarrow 0$ будем искать функцию одной переменной $\psi(z)$. Эта задача может быть решена вариационным методом при использовании выражения (4.67) с соответственно измененными пределами интегрирования.

Варьируя полученное выражение, приходим к обычному дифференциальному уравнению:

$$-\frac{d^2\psi}{dz^2} + \left(\frac{2\pi H \sin \theta}{\Phi_0} \right)^2 z^2 \psi = \left[\frac{1}{\xi^3} - \left(\frac{\pi H d \cos \theta}{\sqrt{3} \Phi_0} \right)^2 \right] \psi. \quad (4.72)$$

Это уравнение можно было получить непосредственно из общей формы уравнения (4.56) с вектор-потенциалом \mathbf{A} , определяемым уравнением (4.71), если положить $\partial\psi/\partial x = \partial\psi/\partial y = 0$ и сделать естественную замену x и x^2 на их средние значения $\langle x \rangle = 0$ и $\langle x^2 \rangle = d^2/12$.

Так как уравнение (4.72) имеет ту же структуру, что и уравнение (4.59), можно использовать найденное выше решение. Таким образом, собственная функция имеет вид

$$\psi \sim \exp \left[-\frac{\pi H^2 \sin \theta}{\Phi_0} \right]. \quad (4.73)$$

Приравнивая теперь соответствующее собственное значение оператора в левой части уравнения (4.72) к коэффициенту при ψ в правой части этого уравнения, получаем уравнение (4.70). Таким образом, в пределе очень тонкой пленки уравнение (4.70) является точным. Точность этого приближения можно проверить, рассматривая более общую вариационную пробную функцию, допускающую вариацию в направлении оси x . Как показывают оценки, поправки к полю $H_{c\parallel}$ имеют порядок $d^2/100\xi^2$, тогда как поправки к $|dH_c(\theta)/d\theta|_{\theta=0}$ имеют порядок $d^2/5\xi^2$. Следовательно, пока $d/\xi \ll 1$, простые результаты для крайних значений $(H_{c\parallel}, H_{c\perp})$ и для угловой зависимости должны быть вполне точными. Несколько более точное выражение для случая, когда d/ξ не слишком мало, было дано в работе [25]. Сан-Жам [26] нашел точные численные решения для начального наклона угловой зависимости при $\theta=0$. Его результаты достаточно хорошо совпадают с простой аппроксимацией (4.70a) для $d < \xi$, но выявляют особенности изменения в поведении при критической толщине $d_c \approx 1,8\xi$, при которой предпочтительнее становятся решения приповерхностного типа. Приступим к рассмотрению образования зародышей в таких пленках промежуточной толщины. Для простоты ограничимся случаем пленки в параллельном магнитном поле.

4.10.2. Образование зародышей в пленках промежуточной толщины

Начнем с толщины $d \ll \xi$ и рассмотрим, что происходит, когда d увеличивается.

Во-первых, нужно теперь ослабить требование независимости ψ от x . Как отмечалось выше, одним из способов сделать это является вариационный метод. Например, можно взять эту зависимость от x в виде

$$1 + c \cos(2\pi x/d),$$

которая удовлетворяет граничному условию $d\psi/dx = 0$ при $x = \pm d/2$, и выбрать коэффициент c таким, чтобы минимизировать свободную энергию. В результате получим, что $c > 0$, т. е. значение ψ уменьшается вблизи поверхностей пленки, где величина $1/2 m^* v_s^{1/2}$ велика, что ясно и из качественных рассуждений. Как отмечалось выше, такое улучшенное приближение для ψ приводит к несколько более высокому значению критического поля, а именно

$$H_{c\parallel} = \frac{2\sqrt{6} H_c \lambda}{d} \left(1 + \frac{9d^2}{\pi^2 \xi^2} \right). \quad (4.74)$$

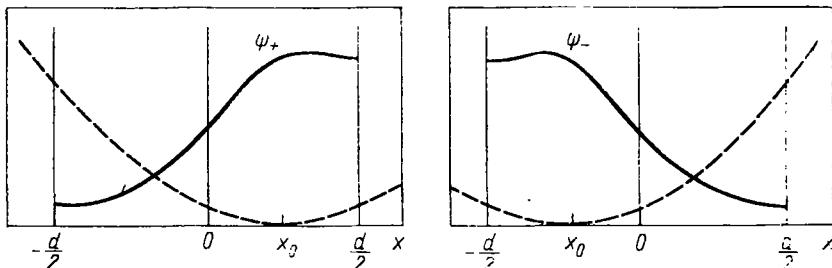


Рис. 4.8. Два эквивалентных асимметричных решения для зародышей в пленке промежуточной толщины. Пунктирные линии с центром в точке $\pm X_0$ показывают эффективный потенциал, возникающий благодаря магнитному полю

Значение поправочного члена никогда не превышает 3%, так как при $d > d_c \approx 1,8 \xi$ это симметричное решение заменяется на приповерхностное решение Сан-Жама и Де Жена, соответственно видоизмененное из-за присутствия двух близких поверхностей. Посмотрим теперь, как это происходит.

При анализе образования зародышей на одиночной поверхности было найдено, что оптимальным выбором k_y (или x_0) является такой, при котором минимум эффективного потенциала располагается на расстоянии $\sim \xi$ от поверхности. Ясно, что качественное изменение типа решений на двух поверхностях должно произойти, когда эти поверхности приближаются друг к другу настолько, что оба минимума энергий подходят друг к другу, т. е. при некоторой критической толщине $d_c \sim 2\xi$. При $d < d_c$ самое низкое собственное значение (соответствующее наивысшему критическому полю) получается для $k_y = x_0 = 0$, так что минимум эффективного потенциала находится в середине плоскости пленки. Собственными функциями при этом являются симметричные решения, полученные в предыдущем разделе. Однако для $d > d_c$ оптимальное положение x_0 смещается из центра, поскольку оптимальным становится расстояние у одной из поверхностей. Трудно предсказать детали перемещения x_0 при d_c без численного решения. Результаты таких вычислений [26–28] заключаются в том, что ниже $d_c = 1,81\xi$, $x_0 = k = 0$, а выше d_c эти величины отходят от нуля с бесконечной начальной производной.

Очевидно, что, когда $x_0 \neq 0$, должно быть два эквивалентных положения минимума при $x = \pm |x_0|$, с $k_y = \pm |k_y|$, причем оба они имеют собственные функции линеаризованного уравнения ГЛ с точно одинаковыми собственными значениями. Эти функции схематически показаны на рис. 4.8. Любое из них можно использовать для вычисления критического поля, как это было сделано Сан-Жамом и Де Женом для произвольных значений d/ξ . Однако, как только поле становится немного ниже, чем поле образования зародышей H_{cs} , величина ψ становится конечной и тогда начинает играть роль нелинейный член в полных уравнениях ГЛ. Это приводит к снятию вырождения и образованию связанных решений.

поскольку член $\beta|\psi|^4$ делает невыгодными волновые функции с резкими максимумами в малом объеме.

Таким образом, нужно ожидать, что решением является линейная комбинация двух асимметричных решений с одинаковым весом, т. е.

$$\begin{aligned}\psi = \psi_+ + \psi_- &= \exp(i k_y y) f(x) + \\ &+ \exp(-i k_y y) f(-x) = \\ &= \cos k_y y [f(x) + f(-x)] + \\ &+ i \sin k_y y [f(x) - f(-x)].\end{aligned}\quad (4.75)$$

Вследствие «интерференции» двух решений вдоль плоскости ($x=0$) имеются узловые точки, в которых $\cos k_y y = 0$. Эти точки разделены интервалами

$$\Delta y = \frac{\pi}{k_y} = \frac{\Phi_0}{2x_0 H} \approx \frac{\Phi_0}{H(d-d_c)}, \quad (4.76)$$

Здесь приближенное равенство выполняется, если x_0 определяется как $d/2 - d_c/2$, так что при $d > d_c$ минимумы потенциальной энергии остаются на постоянном расстоянии от поверхностей, как это примерно и происходит в действительности. Если вычислить фазу выражения (4.75), окажется, что она изменяется на 2π вдоль окружности около каждого из этих узлов, образуя вихри тока, показанные на рис. 4.9. Таким образом, благодаря суперпозиции двух существенно одномерных решений найдено двумерное решение с током, циркулирующим вокруг узлов величиной $|\psi|$.

Когда пленка становится толще, два поверхностных решения расходятся и расстояние между вихрями Δy уменьшается. Согласно численным решениям, после того как достигается определенная точка, форма вихрей становится более сложной. Однако одновременно уменьшается перекрытие волновых функций ψ_{\pm} . Наконец, энергетическая связь двух поверхностных решений становится незначительной по сравнению с kT и каждое из них переходит в независимое, рассмотренное выше.

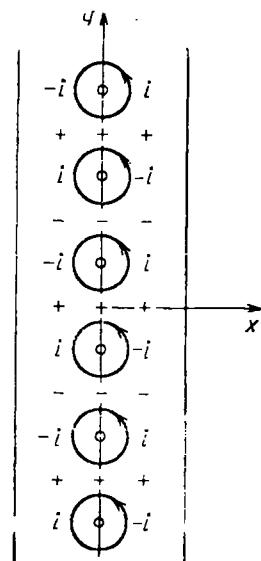


Рис. 4.9. Вихревая структура в сверхпроводящей пленке промежуточной толщины, полученная суперпозицией двух асимметричных решений, показанных на рис. 4.8. Знаки $\pm, \pm i$ соответствуют фазовому множителю $\exp(i\phi)$ для ψ . Стрелки указывают направления вектора $\nabla\psi$, которому пропорционален ток J .

4.11. Абрикосовские вихри при H_{c2}

Точно так же как для достаточно тонкой пленки существуют два вырожденных поверхностных решения линеаризованного уравнения ГЛ при H_{c3} , в одномерном сверхпроводнике при H_{c2} имеется бесконечное число внутренних решений. Эти решения имеют вид

$$\psi_k = \exp(iky) f(x) = \exp(iky) \exp\left[-\frac{(x-x_k)^2}{2\varepsilon^2}\right], \quad (4.77)$$

где k обозначает k_y , а

$$x_k = k\Phi_0/2\pi H. \quad (4.77a)$$

Каждое из решений описывает сверхпроводящий слой в плоскости $x=x_0$, в котором $|\psi|$ распределено по функции Гаусса. Все ψ_k являются ортогональными из-за различных факторов $\exp(iky)$. Каждое из этих решений в равной степени точно справедливо при H_{c2} , и все они дают одно и то же значение H_{c2} . Однако, так же как в случае тонкой пленки, когда H становится меньше H_{c2} на любую конечную величину, решение нелинейных уравнений, соответствующее минимуму свободной энергии, должно быть таким, чтобы заполнять всю область образца и при этом минимизировать не только члены, соответствующие магнитной и кинетической энергией, но и величину $\beta|\psi|^4$.

В случае пленки два решения автоматически обеспечивали периодичность в направлении y . Поскольку в данном объемном решении мы ожидаем, что энергетически выгодной будет также правильная решетка вихрей, а не случайное их распределение, в него нужно тоже заложить периодичность. Ввести периодичность легко, ограничивая уровня k в формуле (4.77) дискретным набором

$$k_n = nq. \quad (4.78)$$

В этом случае решение имеет период

$$\Delta y = 2\pi/q. \quad (4.79)$$

Это ограничение также автоматически обеспечивает периодичность поля по x , так как, согласно формуле (4.77a), решения с гауссовым профилем имеют центры при

$$x_n = \frac{k_n\Phi_0}{2\pi H} = \frac{nq\Phi_0}{2\pi H}. \quad (4.80)$$

Поэтому, если все ψ_n входят с равными весами, период в направлении x равен

$$\Delta x = \frac{q\Phi_0}{2\pi H} = \frac{\Phi_0}{H\Delta y}. \quad (4.81)$$

Из формулы (4.81) видно, что

$$H\Delta x\Delta y = \Phi_0, \quad (4.82)$$

так что каждая ячейка периодической решетки несет один квант потока. Хотя это равенство выведено для случая $H=H_{c2}$, оно будет верно также для $H < H_{c2}$, если заменить H на B . Это следует из условия квантования флуクсоида, так как благодаря симметрии ток J_s на границе между двумя одинаковыми ячейками вихревой структуры равен нулю.

В более общем случае можно рассмотреть функцию

$$\psi_L = \sum_n C_n \psi_n = \sum_n C_n \exp(i n q y) \exp[-(x - x_n)^2/2\xi^2]. \quad (4.83)$$

Она является общим решением для линеаризованных уравнений ГЛ при H_{c2} и благодаря своей форме периодична по y . Она также будет периодична по x , если C_n является периодической функцией n , так что для некоторого ν $C_{n+\nu} = C_n$. Например, если все C_n равны, т. е. $\nu=1$, получается квадратная решетка Абрикосова. Этот случай был рассмотрен выше количественно; он приводит к формуле (4.81). Если $\nu=2$, а $C_1=iC_0$, то получается треугольная решетка.

При H_{c2} возможны все решения типа (4.83). Для того чтобы определить, какое из них будет наблюдаться в действительности, необходимо учесть нелинейные члены и провести некоторые численные расчеты. Как заметил Абрикосов, параметр, определяющий сравнительное преимущество различных возможных решений, есть

$$\beta_A \equiv \langle \psi_L^4 \rangle / \langle \psi_L^2 \rangle^2. \quad (4.84)$$

Этот параметр, очевидно, не зависит от нормировки ψ . Он равен единице, если ψ постоянно, и становится все большим для функций, которые являются более резкими и локализованными. Например, если ψ приблизительно постоянно в относительной части f объема и приблизительно равно нулю в остальной части, то $\beta_A \approx \sqrt{f^{-1}} \gg 1$.

Объяснение, почему важна именно эта величина, можно получить следующим образом. Во-первых, представим, что величина ψ изменяется в пространстве для того, чтобы удовлетворять внешним условиям, но что эти изменения так медленны, что градиентными и токовыми членами выражений для энергии можно пренебречь. Тогда свободная энергия может быть аппроксимирована двумя членами (4.2). Чтобы сделать возможной раздельную подгонку формы и амплитуды ψ , запишем $\psi(r) = c\chi(r)$. Подставляя это выражение в формулу (4.2) и минимизируя по отношению к c^2 , находим, что $c^2 = -(\alpha/\beta) \langle \chi^2 \rangle / \langle \chi^4 \rangle$. Подставляя это выражение снова в формулу (4.2), получаем

$$\langle f_s - f_n \rangle = -\frac{\alpha^2 \langle \chi^2 \rangle^2}{2\beta \langle \chi^4 \rangle} = -\frac{\alpha^2}{2\beta} \beta_A^{-1}. \quad (4.85)$$

Если χ — постоянная величина, то $\beta_A = 1$ и все сводится к обычному выражению для энергии конденсации (4.4). Если χ не постоянна, то $\beta_A > 1$, и, чем более β_A увеличивается, тем менее выгодной становится энергия.

Снова возьмем крайний случай решения, локализованного только в части f объема образца, где $\beta_A \approx f^{-1}$, и увидим, что энергия конденсации составляет лишь часть f от того

значения, которое было бы получено в случае решения, заполняющего все пространство, и для которого $\beta_A \approx 1$. Этот результат очень физичен и показывает, что если в свободной энергии принимается в рассмотрение член с $|\psi|$ в четвертой степени, то любое решение линеаризованного уравнения, распределенное в пространстве, будет несомненно предпочтительнее локализованного решения.

Более реалистичный вариант формулы (4.85) можно получить, включая в свободную энергию тот член в выражении (4.7), который связан с градиентом $|\psi|$, но по-прежнему исключая члены с токами и вектор-потенциалами, которые требуют более сложных самосогласованных решений. Если проделать это и повторить вычисления, указанные выше, возникнет дополнительный множитель, в результате чего формула (4.85) заменится следующей:

$$\langle f_s - f_n \rangle = - \left(\frac{\alpha^2}{2\beta} \right) \beta_A^{-1} \left[1 - \xi^2 \frac{\langle |\nabla \chi|^2 \rangle}{\langle \chi^2 \rangle} \right]^2. \quad (4.86)$$

Этот дополнительный множитель стремится к нулю в точке фазового перехода второго рода, где χ удовлетворяет линеаризованному уравнению ГЛ. Таким образом, величина β_A^{-1} опять является мерой эффективности волновой функции к понижению вклада нелинейных членов, и энергия конденсации по-прежнему увеличивается по квадратному закону с температурой ниже точки фазового перехода второго рода. Этот переход, однако, смешен из точки T_c (где $\alpha \rightarrow 0$) к более низкой температуре, при которой образование зародышей может возникать в присутствии градиентов. Эту температуру можно определить, приравнивая к нулю последний множитель в формуле (4.86), т. е. из выражения

$$\xi^2(T) = \frac{\langle \chi^2 \rangle}{\langle |\nabla \chi^2| \rangle}. \quad (4.87)$$

Хотя это здесь и не доказано, качественные особенности формулы (4.86) сохраняются и в тех важных для нас случаях, когда существенную роль играют члены в выражении для энергии, обусловленные магнитным полем и током.

Возвращаясь теперь к оптимизации выражения (4.83), видим, что она эквивалентна нахождению набора значений C_n , для которого минимальной является величина β_A , так как последний множитель в выражении (4.86) одинаков для любой линейной комбинации решений с тем же H_{c2} . Численные расчеты показывают, что для квадратной решетки Абрикосова $\beta_A = 1,18$, в то время как для треугольной решетки, упомянутой выше (с iC_{2n+1})

* Чтобы прочувствовать эти числа, заметим, что они соответствовали бы ячейкам, в которых «нормальные» ядра с $\psi=0$ занимали бы $\sim 15\%$ площади ячейки, а области с $\psi=\text{const}$ — остальную часть. В действительности ψ стремится к нулю в центре каждого вихря плавно.

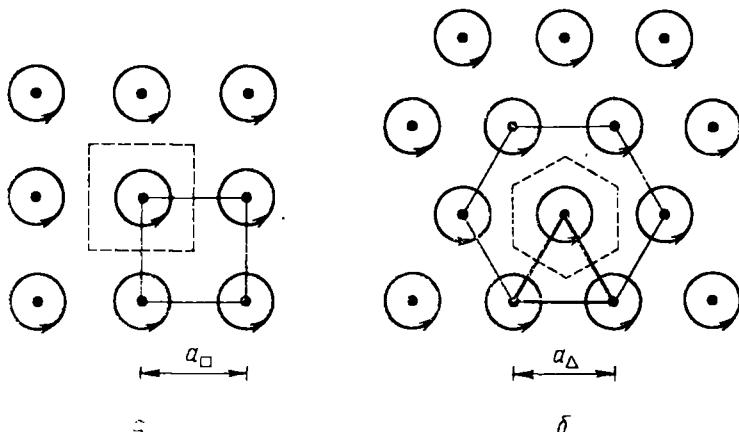


Рис. 4.10. Схематическое изображение квадратной и треугольной решеток. Пунктиром выделены единичные базисные ячейки

$= C_{2n} = \text{const}$) $\beta_A = 1,16^*$. С учетом такой небольшой разницы становится понятным, почему небольшая ошибка при вычислениях смогла первоначально привести Абрикосова к заключению, что квадратная решетка является более устойчивой. В более поздней работе [29] эта ошибка была исправлена и было показано, что в действительности из всех возможных периодических решений наиболее выгодное значение β_A имеет треугольная решетка.

Интересно, что результат согласуется с результатом, полученным из простых рассуждений, основанных на факте, что треугольная решетка, в которой каждый вихрь окружен гексагональной структурой других вихрей (рис. 4.10), является наиболее тесно упакованной. При таком размещении расстояние между соседями равно

$$a_\Delta = \left(\frac{4}{3}\right)^{1/4} (\Phi_0/B)^{1/4} = 1,075 (\Phi_0/B)^{1/4}, \quad (4.88a)$$

тогда как в квадратной решетке (при наличии четырех соседей).

$$a_\square = (\Phi_0/B)^{1/2}. \quad (4.88b)$$

Таким образом, для данной плотности потока $a_\Delta > a_\square$. Принимая во внимание взаимное отталкивание вихрей, разумно считать, что предпочтительной будет структура с максимальным разделением ближайших соседей.

Эксперименты [30—32], в общем, подтверждают наличие треугольной решетки, хотя в некоторых материалах, как оказывается, взаимодействие с основной кристаллической структурой иной симметрии преобладает над малым энергетическим различием между такой решеткой и случайным расположением вихрей. Это может приводить к наблюдению квадратной или даже прямоугольной

решетки. Кроме того, дефекты, достаточные для полного разрушения правильной решетки, могут давать и неоднородности материала образца, что приводит к наблюдению «жидкообразной», а не кристаллической решетки вихрей.

Так как детали структуры вихревой решетки не важны для большинства применений, не будем обсуждать детали решения Абрикосова. Вместо этого в следующей главе рассмотрим основные результаты, полученные им, и обсудим их физические следствия, в значительной степени используя то упрощение, что единичная ячейка вихревой решетки может быть аппроксимирована круглой с той же площадью. Это упрощение аналогично замене действительной ячейки Вигнера — Зейца на сферическую того же объема при вычислении энергетических зон электронов в твердых телах. Типичные численные значения таких величин, как β_A в модели круглой ячейки, отличаются от значений в гексагональной ячейке, примерно настолько же, насколько гексагональная ячейка отличается от квадратной, т. е. на несколько процентов [35*]. Конечно, для любого решения линеаризованного уравнения ГЛ внутри бесконечной среды величина H_{cz} должна быть одной и той же.

МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА СВЕРХПРОВОДНИКОВ II РОДА

В предыдущей главе было установлено, что при $\kappa > 1/\sqrt{2}$, т. е. в сверхпроводниках II рода, уравнения ГЛ имеют решения с $|\psi| > 0$ до тех пор, пока магнитное поле $H < H_{c2}$. Например, решение Абрикосова (4.83) соответствует правильной решетке вихрей тока вокруг узлов ψ . Каждая элементарная ячейка решетки содержит суммарный магнитный поток $\Phi_0 = hc/2e$.

Целью данной главы является исследование поведения сверхпроводников II рода во всем интервале изменения магнитных полей от нуля до H_{c2} . Это позволит определить H_{c1} — поле, при достижении которого происходит проникновение вихрей в бесконечно длинный тонкий образец с нулевым размагничивающим фактором, а также всю кривую намагничивания, которая описывает увеличение B от нуля при H_{c1} до B при H_{c2} . Затем будет рассмотрено действие силы Лоренца, возникающей благодаря транспортному току, на поток в сверхпроводнике II рода и показано, как это может привести к электрическому сопротивлению, связанному с ползучестью («крипом») и с течением вихрей. В заключение рассмотрим противоречия технического характера между термической стабильностью и малостью потерь на переменном электрическом токе в практических использующихся магнитах.

5.1. Поведение в окрестности H_{c1} : структура изолированного вихря

Когда поток начинает входить в сверхпроводник II рода, то он вносится туда решеткой вихрей, сильно разнесенных в материале. Пока расстояние между вихрями значительно превосходит λ , их перекрытие и взаимодействие между ними будет пренебрежимо малым, так что каждый из вихрей может быть рассмотрен отдельно. С учетом аксиальной симметрии такой ситуации задача сводится к нахождению самосогласованного решения уравнений ГЛ для $\psi(r)$ и $h(r)$. Зная их, можно вычислить избыточную свободную энергию на единицу длины вихревой линии ϵ_1 и отсюда найти H_{c1} . Действительно, по определению, при $H = H_{c1}$ свободная энергия Гиббса должна иметь одно и то же значение независимо от того, есть ли первый вихрь в образце или нет. Таким образом, при $H = H_{c1}$

$$G_s |_{\text{без вихрей}} = G_s |_{\text{один вихрь}}$$

или, так как $G = F - (H/4\pi) \int h d\Gamma$,

$$F_s = F_s + \epsilon_1 L - \frac{H_{c1}}{4\pi} \int h d\Gamma = F_s + \epsilon_1 L - \frac{H_{c1}\Phi_0 L}{4\pi},$$

где L — длина вихревой линии в образце. Следовательно,

$$H_{c1} = (4\pi\epsilon_1)/\Phi_0. \quad (5.1)$$

К сожалению, вычисление ψ , h и ϵ_1 для произвольных значений κ требует численного решения уравнений ГЛ. Поэтому значительное внимание обычно уделяется экстремальным сверхпроводникам II рода, в которых $\kappa = \lambda/\xi \gg 1$, так как в этом случае можно получить полезные аналитические результаты. Упрощение возникает вследствие того, что ψ возрастает от нуля до предельного значения (равного ψ_∞ , если мы имеем дело с изолированным вихрем) в области сердцевины («керна») радиуса порядка ξ . Поэтому в большей части вихря (радиуса порядка $\lambda \gg \xi$) материал будет себя вести как обычный лондоновский сверхпроводник.

Однако, прежде чем сделать это упрощающее предположение, посмотрим, насколько можно приблизиться к общему решению уравнений (4.13) и (4.14). Удобно ввести волновую функцию вихря

$$\Psi = \Psi_\infty f(r) \exp\{i\theta\}, \quad (5.2)$$

которая является аксиально симметричной и удовлетворяет следующему требованию: изменение фазы ψ при обходе полной окружности равно 2π , что соответствует наличию одиночного кванта магнитного потока, связанного с вихрем. Такой выбор фазы ψ фиксирует калибровку \mathbf{A}^* :

$$\mathbf{A} = A(r)\hat{\theta}, \quad (5.3)$$

причем

$$A(r) = \frac{1}{r} \int_0^r r' h(r') dr'. \quad (5.3a)$$

Вблизи центра вихря это дает:

$$A(r) = (h(0)r)/2, \quad (5.3b)$$

в то время как на больших расстояниях от центра изолированного вихря

$$A_\infty = \Phi_0/2\pi r, \quad (5.3b)$$

* Отметим, что такая калибровка существенно отличается от лондоновской, в которой Ψ — действительная функция, $\mathbf{J} \sim \mathbf{A}$ и \mathbf{A} убывает экспоненциально с увеличением расстояния от вихря. В лондоновской калибровке $A(r)$ должно заменяться на $A'(r) = A(r) - A_\infty = A(r) - \Phi_0/2\pi r$. Поскольку $\text{rot}(\theta/r) = 0$ (за исключением линии $r=0$), то A и A' дают одинаковые значения для $h(r)$, $J(r)$ и $|\psi(r)|$. Здесь лучше использовать $A(r)$, поскольку эта величина не имеет особенностей, хотя эквивалентные результаты могут быть получены при любом выборе калибровки.

поскольку общий магнитный поток, заключенный в вихре, равен $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi r A_\infty = \Phi_0$.

Подставляя волновую функцию (5.2) в уравнении ГЛ (4.13), после упрощений получаем, что f удовлетворяет уравнению

$$f - f^3 - \xi^2 \left[\left(\frac{1}{r} - \frac{2\pi A}{\Phi_0} \right)^2 f - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) \right] = 0. \quad (5.4)$$

Ток имеет только компоненту в направлении θ , и из соотношения (4.14) для него получаем

$$\begin{aligned} J &= -\frac{c}{4\pi} \cdot \frac{dh(r)}{dr} = -\frac{c}{4\pi} \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rA) \right] = \\ &= \frac{e^* h}{m^*} \Psi_\infty^2 f^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{2\pi A}{\Phi_0} \right). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Задача теперь сводится к решению системы двух нелинейных дифференциальных уравнений относительно $f(r)$ и $A(r)$. Поскольку это, вообще говоря, требует численных методов, сначала проанализируем предельные случаи, которые можно исследовать аналитически.

Вначале посмотрим на центр вихря ($r \rightarrow 0$). Используя выражение (5.3б), перепишем уравнение (5.4) в виде

$$f - f^3 - \xi^2 \left[\left(\frac{1}{r} - \frac{\pi h(0)r}{\Phi_0} \right)^2 f - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) \right] = 0. \quad (5.6)$$

Предположим, что при $r \approx 0$ решение ведет себя как

$$f \approx cr^n, \quad n > 0.$$

Тогда уравнение (5.6) преобразуется к виду

$$cr^n - c^3 r^{3n} - \xi^2 \left[\left(\frac{1}{r} - \frac{\pi h(0)r}{\Phi_0} \right)^2 cr^n - n^2 cr^{n-2} \right] = 0.$$

При $r \rightarrow 0$ главный член пропорционален $(1 - n^2)r^{n-2}$. Из равенства его нулю получаем, что $n=1$, т. е. f в окрестности начала координат пропорционально r^* . Из структуры выражения (5.6) видно, что в разложение f входят только нечетные степени r . Вычисляя коэффициент перед следующим членом разложения, для $f(r)$ получаем выражение

$$f \approx cr \left\{ 1 - \frac{r^2}{8\xi^2} \left[1 + \frac{h(0)}{H_{ca}} \right] \right\}, \quad (5.7)$$

которое показывает, что, как и следовало ожидать, $f(r)$ выходит на постоянное значение при $r \approx 2\xi$. Для определения нормировочной постоянной c необходимо включить в рассмотрение член f^3 , который не играл роли при учете членов порядка f . Однако ясно, что для того, чтобы линейное разложение (5.7) сшивалось с дальним решением $f \rightarrow 1$, постоянная c для изолированного вихря дол-

* Легко показать, что если вихрь содержит m квантов магнитного потока, то $\Psi \sim \exp\{im\theta\}$ и $f(r) \sim r^m$ при $r \rightarrow 0$.

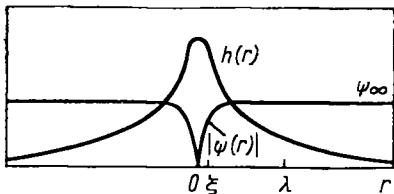


Рис. 5.1. Структура изолированного абрикосовского вихря в сверхпроводнике с $\kappa=8$. Максимальное значение $h(r)$ приблизительно равно $2H_{c1}$

жна быть порядка $1/2\xi$. Разумная аппроксимация для f во всем диапазоне изменения r такова:

$$f = \text{th}(vr/\xi), \quad (5.8)$$

где v — константа порядка единицы. Эта зависимость изображена на рис. 5.1.

5.1.1. Приближение больших κ

Поскольку f увеличивается почти до единицы на расстоянии порядка ξ , при $\lambda \gg \xi$ (т. е. $\kappa \gg 1$) можно построить очень удобное приближение. Везде, за исключением области керна вихря радиуса ξ , можно рассматривать f как постоянную, близкую к единице, при этом для полей и токов справедливы уравнения Лондонов. Таким образом, вне керна

$$(4\pi\lambda^2/c) \operatorname{rot} \mathbf{J}_s + \mathbf{h} = 0. \quad (5.9)$$

Если бы это соотношение было справедливо везде, то флуксоид для любого пути интегрирования по замкнутому контуру был бы равен нулю. Исправим это обстоятельство введением в уравнение (5.9) члена, учитывающего присутствие керна:

$$(4\pi\lambda^2/c) \operatorname{rot} \mathbf{J}_s + \mathbf{h} = \widehat{\mathbf{z}}\Phi_0\delta_2(\mathbf{r}). \quad (5.10)$$

Здесь $\widehat{\mathbf{z}}$ — единичный вектор вдоль оси вихря; $\delta_2(\mathbf{r})$ — двумерная дельта-функция от точки локализации керна. Заметим, что уравнение (5.10) может быть получено непосредственным вычислением ротора от выражения (5.5). Используя уравнение Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{h} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \quad (5.11)$$

из соотношения (5.10) получаем

$$\lambda^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{h} + \mathbf{h} = \widehat{\mathbf{z}}\Phi_0\delta_2(\mathbf{r}). \quad (5.12)$$

Поскольку $\operatorname{div} \mathbf{h} = 0$, полученное уравнение можно записать в виде

$$\nabla^2 \mathbf{h} - \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{h} = -\frac{1}{\lambda^2} \Phi_0 \widehat{\mathbf{z}}\delta_2(\mathbf{r}). \quad (5.13)$$

Это уравнение имеет точное решение

$$h(r) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} K_0\left(\frac{r}{\lambda}\right), \quad (5.14)$$

где K_0 — функция Ханкеля нулевого порядка от мнимого аргумента

мента *. Функция $K_0(r/\lambda)$ убывает как $\exp\{-r/\lambda\}$ на больших расстояниях и расходится как $\ln(\lambda/r)$ при $r \rightarrow 0$. Конечно, эта расходимость на самом деле обрезается при $r \approx \xi$, где $|\psi|^2$ начинает уменьшаться до нуля. Следовательно, $h(r)$ действительно является регулярной функцией в центре вихря (см. рис. 5.1). Более точно известны два предельных выражения для (5.14):

$$h(r) \rightarrow \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \left(\frac{\pi}{2} \frac{\lambda}{r} \right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{r}{\lambda}\right\}, \quad r \rightarrow \infty, \quad (5.14a)$$

$$h(r) \approx \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \left[\ln \frac{\lambda}{r} + 0,12 \right], \quad \xi \ll r \ll \lambda. \quad (5.14b)$$

Эти выражения могут быть проверены непосредственно решением задачи в соответствующих пределах. Например, логарифмическое поведение (5.14b) является результатом соотношения $J \propto v_s = \hbar m^* r$, которое следует из квантования флюкоида при $r \ll \lambda$, когда магнитный поток, заключенный в кольце радиуса r , много меньше Φ_0 .

5.1.2. Энергия вихревой линии

Теперь найдем линейное натяжение нити, т. е. свободную энергию e_1 на единицу ее длины. Пренебрегая керном, получим только вклад от энергии поля и кинетической энергии тока:

$$e_1 = \frac{1}{8\pi} \int (h^2 + \lambda^2 |\operatorname{rot} h|^2) dS. \quad (5.15)$$

Это выражение можно преобразовать с помощью векторных тождеств к виду

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{h} + \lambda^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{h}) \cdot \mathbf{h} dS + \frac{\lambda^2}{8\pi} \oint [\mathbf{h} \times \operatorname{rot} \mathbf{h}] \cdot d\mathbf{s} = \\ &= \frac{1}{8\pi} \int |h| \Phi_0 \delta_2(r) dS + \frac{\lambda^2}{8\pi} \oint [\mathbf{h} \times \operatorname{rot} \mathbf{h}] \cdot d\mathbf{s}, \end{aligned} \quad (5.15a)$$

где контурные интегралы берутся по внутреннему и внешнему периметру области интегрирования. Поскольку интегрирование исключает область керна, первое слагаемое не дает в них вклада. Второе слагаемое стремится к нулю на бесконечности, но дает конечный вклад при обходе керна:

$$e_1 = \frac{\lambda^2}{8\pi} \left[h \frac{dh}{dr} 2\pi r \right]_{\xi}.$$

Используя соотношение (5.14b), получаем $dh/dr = \Phi_0/2\pi\lambda^2 r$, так что выражение для e_1 сводится к формуле

* В отечественной литературе функция K_0 чаще называется функцией Макдональда или модифицированной функцией Бесселя второго рода. — Прим. ред. пер.

$$\varepsilon_1 = (\Phi_0/8\pi) h(\xi) \approx (\Phi_0/8\pi) h(0), \quad (5.16)$$

где $h(\xi) \approx h(0)$, так как в керне вихря * $f \rightarrow 0$ и, следовательно, $J_s \rightarrow 0$. Вновь используя формулу (5.14б), но опуская коэффициент 0,12 как незначительную поправку ввиду приближенного характера процедуры обрезания при $r \approx \xi$, получаем

$$\varepsilon_1 = (\Phi_0/4\pi\lambda^2) \ln \kappa. \quad (5.17)$$

Так как ε_1 зависит от размера керна только логарифмически, полученный результат должен быть достаточно надежным, несмотря на грубый учет керна.

Используя соотношение (4.20), а именно $\Phi_0 = 2\sqrt{2}\pi\lambda\xi H_c$, полученный результат можно переписать в более физических обозначениях:

$$\varepsilon_1 = \frac{H_c^2}{8\pi} 4\pi\xi^2 \ln \kappa. \quad (5.17a)$$

Это выражение показывает, что энергия нити того же порядка, что и энергия конденсации в керне вихря, но больше ее на коэффициент, примерно равный $4 \ln \kappa$. Таким образом, для $\kappa \gg 1$ по-грешности, связанные с грубым учетом керна, должны быть незначительны. Однако видно, что ε_1 имеет порядок полной энергии поля $h^2/8\pi$, проинтегрированной по области порядка $\pi\lambda^2$. Так как $h \approx \Phi_0/\pi\lambda^2$, получающаяся при интегрировании величина $\Phi_0/8\pi^2\lambda^2$ отличается от ε_1 (5.17) только отсутствием коэффициента $(1/2) \ln \kappa \approx 1$.

Теперь, после определения линейного напряжения ε_1 , можно подставить его значение в формулу (5.1) и получить поле вхождения первого вихря:

$$H_{c1} = \frac{4\pi}{\Phi_0} \varepsilon_1 \approx \frac{1}{2} h(0) \approx \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2} \ln \kappa = \frac{H_c}{\sqrt{2}\kappa} \ln \kappa. \quad (5.18)$$

Таким образом, если не обращать внимания на коэффициент $\ln \kappa \approx 1$, получаем $H_c/H_{c1} = H_{c2}/H_c = \sqrt{2}\kappa$. Следовательно, H_c приблизительно равно среднему геометрическому полей H_{c1} и H_{c2} .

5.2. Взаимодействие между вихревыми линиями

Если продолжать считать, что $\kappa \gg 1$, можно легко определить энергию взаимодействия между двумя вихрями, так как в этом приближении среда линейна и можно использовать принцип суперпозиции. Так, магнитное поле равно

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}) = \mathbf{h}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{h}_2(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{z}} [h(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|) + h(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|)], \quad (5.19)$$

где векторы \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 задают положение кернов двух вихревых линий,

* Интересно отметить, что если керн не исключать из области интегрирования, то соотношение (5.16) все равно должно появиться, но уже из первого слагаемого выражения (5.15а).

а $h(r)$ определяется выражением (5.14). Энергия может быть вычислена подстановкой выражения для поля (5.19) в соотношение (5.15). Используя те же векторные преобразования, что и при выводе формулы (5.16), для суммарного увеличения свободной энергии на единицу длины получаем

$$\Delta F = (\Phi_0/8\pi)[h_1(\mathbf{r}_1) + h_1(\mathbf{r}_2) + h_2(\mathbf{r}_1) + h_2(\mathbf{r}_2)] = \\ = 2(\Phi_0/8\pi)h_1(\mathbf{r}_1) + (\Phi_0/4\pi)h_1(\mathbf{r}_2).$$

Первое слагаемое равно сумме собственных энергий вихревых линий, второе — определяемая нами энергия их взаимодействия:

$$F_{12} = \frac{\Phi_0 h_1(\mathbf{r}_2)}{4\pi} = \frac{\Phi_0^2}{8\pi^2\lambda^2} K_0\left(\frac{r_{12}}{\lambda}\right), \quad (5.20)$$

Как отмечалось выше, на больших расстояниях эта величина убывает как $r_{12}^{-1/2} \exp\{-r_{12}/\lambda\}$, а на малых расстояниях логарифмически растет. В обычном случае, когда направление магнитного потока в обоих вихрях совпадает, взаимодействие носит характер *отталкивания*.

Можно определить силу этого взаимодействия, вычисляя производную от F_{12} . Например, сила, действующая на второй вихрь в направлении x , равна

$$f_{2x} = -\frac{\partial F_{12}}{\partial x_2} = -\frac{\Phi_0}{4\pi} \frac{\partial h_1(\mathbf{r}_2)}{\partial x_2} = \frac{\Phi_0}{c} \mathbf{J}_{1y}(\mathbf{r}_2), \quad (5.21)$$

так как, согласно уравнениям Максвелла, $\text{rot } \mathbf{h} = (4\pi/c)\mathbf{J}$.

Записывая выражение для силы, действующей на второй вихрь, в векторной форме, получаем

$$\mathbf{f}_2 = (\mathbf{J}_1(\mathbf{r}_2) \times \Phi_0)/c, \quad (5.22)$$

где направление Φ_0 параллельно направлению вектора плотности магнитного потока. Делая очевидное обобщение на случай произвольной решетки вихрей, находим следующее выражение для действующей на вихрь силы:

$$\mathbf{f} = (\mathbf{J}_s \times \Phi_0)/c, \quad (5.23)$$

где \mathbf{J}_s уже равно суммарной плотности тока от всех других вихрей (и даже включает в себя плотность некоторого суммарного «транспортного тока») в точке расположения керна рассматриваемого вихря.

Из выражения (5.23) следует, что вихревая линия может находиться в статическом равновесии в любом заданном положении, лишь если сумма сверхпроводящих скоростей от всех других источников равна нулю в каждой его точке. Это условие может выполняться, если каждый из вихрей будет окружен симметричной вихревой решеткой, как, например, в случае рассмотренных выше квадратной и треугольной решеток. Однако необходимо отметить, что квадратная решетка отвечает неустойчивому равновесию, так что малые смещения вихрей в такой решетке имеют

тенденцию к нарастанию, в то время как треугольная решетка является устойчивой [1] и вполне реальной, поскольку она обладает наименьшей энергией. Далее, результат (5.23) показывает, что даже на треугольную решетку будет действовать некоторая сила со стороны любого транспортного тока, в результате чего она будет двигаться, если только вихри не «залипнут» в местах неоднородности среды. Так как вихревое движение приводит к диссипации энергии и появлению продольного электрического поля, этот момент является решающим при определении полезности использования сверхпроводников II рода при конструировании сверхпроводящих соленоидов, в которых неизбежно должны существовать сильные поля и токи. Но вернемся к обсуждению этого вопроса несколько позже.

5.3. Кривые намагничивания

Теперь, после того как определена энергия одиночного вихря и энергия взаимодействия между двумя вихрями, можно найти кривую намагничивания от поля вхождения первого вихря до окрестности H_{c2} . Между критическими магнитными полями H_{c1} и H_{c2} можно выделить три характерные области.

1. Поля, очень близкие к H_{c1} . Здесь $\Phi_0/B \gg \lambda^2$, вихри расположены друг от друга на расстояниях, превышающих λ . В этом случае важно учесть влияние на вихрь лишь нескольких соседей.

2. При промежуточных значениях B , таких, что $\xi^2 \ll \Phi_0/B \ll \lambda^2$, в области взаимодействия с выделенным вихрем находится много соседних и для вычислений требуется более сложная процедура суммирования. Однако пренебрежение деталями кернов все еще является достаточно хорошим приближением.

3. В полях, приблизительно равных H_{c2} , $\Phi_0/B \approx \xi^2$, т. е. керны вихрей почти перекрываются. Этот случай требует более детального рассмотрения керна. Здесь уже нельзя использовать простой принцип суперпозиции, однако хорошим приближением является решение Абрикосова (4.83) для линеаризованных уравнений ГЛ вблизи H_{c2} .

В первых двух областях магнитных полей приращение энергии Гиббса на единицу объема можно записать в следующем виде:

$$G - G_{s0} = \frac{B}{\Phi_0} \epsilon_1 + \sum_{i>j} F_{ij} - \frac{BH}{4\pi}. \quad (5.24)$$

Здесь использован тот факт, что отношение B/Φ_0 равно числу вихрей на единицу поверхности, перпендикулярной к направлению поля. При фиксированном H величина B должна принимать значение, минимизирующее G . Поскольку $\sum_{i>j} F_{ij}$ положительна и воз-

растает с увеличением B , очевидно, что при $H < H_{c1} = 4\pi\epsilon_1/\Phi_0$ минимум G достигается при $B=0$, что согласуется с предыдущими выводами. Если H слегка превышает H_{c1} , то вихри будут входить до тех пор, пока увеличение энергии взаимодействия между ними

не ограничит этот процесс. Формально приравнивая нулю производную $\partial G/\partial B$,

$$\frac{\partial G}{\partial B} = 0 = \frac{\varepsilon_1}{\Phi_0} - \frac{H}{4\pi} + \frac{\partial}{\partial B} \sum_{i>j} F_{ij},$$

получаем следующее уравнение для определения B :

$$\frac{\partial}{\partial B} \sum_{i>j} F_{ij} = \frac{1}{4\pi} (H - H_{c1}). \quad (5.25)$$

5.3.1. Малая плотность вихрей

Вначале рассмотрим первую область магнитных полей. Представим себе упорядоченную вихревую решетку, в которой каждый вихрь имеет z ближайших соседей, расположенных друг от друга на расстоянии $a = c(\Phi_0/B)^{1/2}$. Коэффициент c определяется из выражения (4.88) и, например, для квадратной ($z=4$) и треугольной ($z=6$) решеток соответственно равен: $c_{\square} = 1$, $c_{\Delta} = 1,075$.

Учитывая экспоненциальное падение F_{ij} с расстоянием, пренебрежем вкладами в сумму от всех вихрей, за исключением ближайших соседей. Тогда, используя соотношение (5.20), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i>j} F_{ij} &= \frac{B}{\Phi_0} \frac{z}{2} \frac{\Phi_0^2}{8\pi^2\lambda^2} K_0\left(\frac{a}{\lambda}\right) \approx \frac{Bz\Phi_0}{16\pi^2\lambda^2} \left(\frac{\pi\lambda}{2a}\right)^{1/z} \times \\ &\times \exp\left\{-\frac{a}{\lambda}\right\}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Вследствие того что эта сумма меняется экспоненциально с изменением a и линейно с изменением z , можно убедиться в том, что треугольная вихревая решетка будет несомненно обладать меньшей энергией при достаточно больших a (т. е. если B достаточно мало).

Используя выражение для суммы (5.26), можно сразу вычислить ее производную по B (учитывая также и зависимость $a(B)$) и, подставив результат в уравнение (5.25), определить зависимость $B(H)$. Принимая во внимание преимущественно экспоненциальную зависимость F_{ij} от $a/\lambda = c(\Phi_0/B)^{1/2}/\lambda$, можно ожидать, что разность $H - H_{c1}$ будет меняться примерно как $\exp\{-a/\lambda\}$, так что B должно быть пропорционально квадрату логарифма от $H - H_{c1}$. В рассматриваемом случае эти качественные соображения оказываются справедливыми, и основной вклад в величину B при $H \geq H_{c1}$ определяется следующим выражением:

$$B = \frac{2\Phi_0}{\sqrt[3]{\lambda^2}} \left\{ \ln \left[\frac{3\Phi_0}{4\pi\lambda^2 (H - H_{c1})} \right] \right\}^{-1}. \quad (5.27)$$

Заметим, что величина B как функция H непрерывна при H_{c1} , что соответствует фазовому переходу второго рода, но возрастает в этой точке с бесконечной начальной производной. Физическая

причина этого быстрого роста следующая: как только H становится больше H_{c1} , так что возможно вхождение первого вихря, ничего не сдерживает вхождения и большего числа вихрей до тех пор, пока расстояние между ними не станет порядка λ . Поскольку $H_{c1} \approx (\Phi_0/4\pi\lambda^2) \ln \kappa$, взаимное отталкивание не будет существенным, пока B не возрастает от нуля до некоторой значительной части H_{c1} . В действительности экспериментальные данные [2, 3] показывают, что в некоторых системах B увеличивается скачком на конечную величину точно при $H=H_{c1}$, что соответствует фазовому переходу первого рода.

Так как наличие фазового перехода первого рода находится в противоречии с предсказаниями обычной теории ГЛ, этот переход стал предметом интенсивного изучения. Основное качественное условие существования такого перехода заключается в том, чтобы вихри при некоторых конечных расстояниях между ними обладали бы меньшей энергией, чем при бесконечно далеком удалении друг от друга, несмотря на их отталкивание на малых расстояниях. Кажется вполне вероятным, что подобная ситуация может возникнуть при возможных изменениях поля, которые сопровождают экранирование в нелокальной электродинамике, справедливой для сверхпроводников с не очень большими значениями κ [см. обсуждение перед формулой (3.8)]. Из теории ГЛ, в которой используется локальная электродинамика, этот эффект полностью исключен. В действительности детальные вычисления Эйленбергера и Бютнера [4], проведенные в рамках микроскопической теории, показали наличие осцилляционно затухающей компоненты в изменениях $\Delta(r)$ и $A(r)$ при $\kappa \leq 1.7$. Хотя такое поведение можно предположить в качестве объяснения локального потенциала притяжения, эти вычисления подверглись критике со стороны Клири [5]. Весьма подробный анализ был недавно проведен Джакобсом [6], использовавшим несколько отличную технику вычислений. Из результатов этих работ следует, что с использованием общих микроскопических теорий будет возможно определить условия на κ , температуру и длину свободного пробега электронов, для которых при $H=H_{c1}$ наблюдается скачкообразное вхождение вихрей с конечной плотностью. Поскольку эти вопросы остаются открытыми на момент написания данной книги, не будем более углубляться в изучение данной проблемы *.

5.3.2. Промежуточные плотности потока

Если плотность потока заключена в интервале $\Phi_0/\lambda^2 \leq B \ll H_{c2}$, что соответствует $H_{c1} \leq B \ll H_{c2}$, можно продолжать использовать для описания электродинамики модифицированное уравнение Лондонов, но необходимо внимательно учсть взаимодействие с большим числом соседей. Наиболее удобно использовать для этого

* См. обзор [41*]. — Прим. ред. пер.

фурье-анализ. Так как вихревая решетка периодична, локальную плотность вихрей в плоскости, перпендикулярной к полю, можно представить в виде ряда

$$h_z(r) = \sum_{\mathbf{Q}} h_{\mathbf{Q}} \exp \{i\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}\}. \quad (5.28)$$

Здесь вектор \mathbf{Q} пробегает значения двумерных векторов обратной вихревой решетки. Например, для квадратной решетки значения \mathbf{Q} равны

$$\mathbf{Q}_{mn} = \frac{2\pi}{a_{\Delta}} (m\hat{\mathbf{x}} + n\hat{\mathbf{y}}). \quad (5.29)$$

В треугольной решетке единичные векторы трансляции не ортогональны и ситуация является несколько более сложной. Если выбрать вектора трансляции в координатном пространстве равными

$$\mathbf{a}_1 = a_{\Delta} \hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{a}_2 = \frac{1}{2} a_{\Delta} (\hat{\mathbf{x}} + \sqrt{3} \hat{\mathbf{y}}), \quad (5.30)$$

то \mathbf{Q} будет линейной комбинацией целых чисел, умноженных на величины

$$\mathbf{Q}_1 = \frac{2\pi}{a_{\Delta}} \left(\hat{\mathbf{x}} - \frac{\hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{3}} \right), \quad \mathbf{Q}_2 = \frac{2\pi}{a_{\Delta}} \frac{2}{\sqrt{3}} \hat{\mathbf{y}}, \quad (5.31)$$

которые определяются из условия выполнения необходимого равенства $a_i \cdot \mathbf{Q}_j = 2\pi\delta_{ij}$. Однако пока сохраним общность наших рассуждений, пригодных для любой периодической решетки.

Определим коэффициенты $h_{\mathbf{Q}}$, потребовав, чтобы $h(x, y)$ удовлетворяло модифицированному уравнению Лондона (5.12)

$$\mathbf{h} + \lambda^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{h} = \Phi_0 z \sum_i \delta_2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad (5.32)$$

в котором суммирование ведется по радиус-векторам вихрей. После подстановки в уравнение (5.32) ряда (5.28) получаем

$$\sum_{\mathbf{Q}} (h_{\mathbf{Q}} + \lambda^2 Q^2 h_{\mathbf{Q}}) \exp \{i\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}\} = B \sum_{\mathbf{Q}} \exp \{i\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}\}. \quad (5.33)$$

При получении правой части равенства начало координат было выбрано в центре одного из вихрей, и кроме того, использован тот факт, что площадь элементарной ячейки равна Φ_0/B . Разрешая уравнение (5.33) относительно $h_{\mathbf{Q}}$, находим

$$h_{\mathbf{Q}} = B / (1 + \lambda^2 Q^2), \quad (5.34)$$

так что

$$h_z(r) = B \sum_{\mathbf{Q}} \frac{\exp \{i\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}\}}{1 + \lambda^2 Q^2}. \quad (5.35)$$

Зная $h(r)$, можно определить увеличение свободной энергии на единицу длины (по-прежнему пренебрегая структурой кернов):

$$F = F_{\infty} = \frac{1}{8\pi} \int [h^2 + \lambda^2 |\operatorname{rot} \mathbf{h}|^2] dS.$$

Используя те же векторные преобразования, что и при выводе выражений для энергии (5.16) и (5.20), полученное соотношение можно преобразовать к более простому виду:

$$F - F_{s0} = (\Phi_0/8\pi) \sum_i h(\mathbf{r}_i).$$

Здесь $h(\mathbf{r}_i)$ — суммарное магнитное поле в керне вихря, т. е. сумма собственного поля и поля, созданного в этой точке другими вихрями. Так как все $h(\mathbf{r}_i) = h(0)$ и плотность вихрей на единицу поверхности равна B/Φ_0 , можно, воспользовавшись выражением (5.35), переписать увеличение F на единицу объема следующим образом:

$$F - F_{s0} = \frac{Bh(0)}{8\pi} = \frac{B^2}{8\pi} \sum_{\mathbf{Q}} \frac{1}{1 + \lambda^2 Q^2}. \quad (5.36)$$

Как видно, эта сумма расходится, так как число векторов \mathbf{Q} изменяется как $Q\delta Q$ при изменении Q на δQ . Следовательно, требуется провести обрезание суммы при больших значениях Q . Это разумно сделать, вводя $Q_{\max} \approx 1/\xi$, поскольку фурье-компоненты с номерами, превышающими $1/\xi$, преимущественно определяются из ложной логарифмической расходимости $h(r)$ при $r \rightarrow 0$, которая следует из уравнения (5.32) в области керна, где $|\psi|^2$ стремится к нулю.

Не проводя точного вычисления зависящей от структуры вихревой решетки суммы в выражении (5.36), используем ее для формального определения свободной энергии Гиббса $G = F - B\mathcal{H}/4\pi$. В рассматриваемом случае равновесное значение B находится из условия $\partial G / \partial B = 0$. Это приводит к общему соотношению

$$H = \frac{1}{2} \left[h(0) + B \frac{dh(0)}{dB} \right]. \quad (5.37)$$

Если $B=0$, то полученная сумма сводится к значению $(1/2)h(0)$, совпадающему с полем H_{cl} . Сравнивая полученный результат с выражением (5.18), нетрудно убедиться, что такое совпадение действительно имеет место. При произвольных значениях B существенны оба слагаемых, и их нужно определять, суммируя соответствующие ряды. Поскольку слагаемое с $\mathbf{Q}=0$ является основным в том случае, когда вихри сильно перекрываются и поле почти однородно, полезно выделить его точно. После выполнения этой процедуры равенство (5.37) можно переписать в следующем виде:

$$H = B \left\{ 1 + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{Q}}' [(1 + \lambda^2 Q^2)^{-1} + (1 + \lambda^2 Q^2)^{-2}] \right\}. \quad (5.38)$$

Суммирование в полученном выражении ведется по $\mathbf{Q} > 0$. Если $B \gg H_{cl}$, то вихри сильно перекрыты, второе слагаемое под знаком суммы оказывается пренебрежимо малым по сравнению с первым и может быть опущено. В этом же приближении можно аппроксимировать первую сумму интегралом от Q_{\min} до Q_{\max} с весом

$(\Phi_0/2\pi B) |\mathbf{Q}| d|\mathbf{Q}|$. Для учета выделенного слагаемого с $Q=0$ положим $Q_{\min}^2 \approx 4\pi B/\Phi_0$, а $Q_{\max} \approx 1/\xi$. Тогда соотношение (5.38) с точностью до численного множителя можно аппроксимировать выражением

$$H \approx B + H_{c1} [\ln(H_{c2}/B)]/\ln \kappa, \quad (5.39)$$

которое разумно согласуется с экспериментальными данными для полей, значительно превышающих H_{c1} .

5.3.3. Окрестность H_{c2}

Вблизи H_{c2} вихри расположены так тесно, что их керны занимают большую часть объема. Поэтому необходимо отказаться от простого приближения модифицированной теории Лондонов и вернуться к анализу полных уравнений ГЛ. К счастью, малость величины ψ/ψ_∞ в окрестности H_{c2} позволяет использовать схему разложения, основанную на решении Абрикосова для линеаризованной задачи (4.83). Оказывается, что для получения хорошего приближения можно использовать решение линеаризованного уравнения, взяв лишь периодичность решетки, соответствующую не H_{c2} , а $B(H)$. В этом случае $\psi(\mathbf{r})$ можно описывать каким-либо простым амплитудным параметром, например $\langle \psi \rangle$. Не будем воспроизводить здесь вычисления, с помощью которых Абрикосов показал, что плотность вихрей меньше приложенного поля на величину, пропорциональную $|\psi|^2$; в результате намагниченность $M = (B - H)/4\pi$ оказывается пропорциональной $\langle \psi^2(\mathbf{r}) \rangle$. Поскольку при фазовом переходе второго рода вблизи H_{c2} $\langle \psi^2(\mathbf{r}) \rangle$ уменьшается до нуля линейно с $(H_{c2} - H)$, то намагниченность M должна вести себя так же. Точным результатом является следующий:

$$B = H + 4\pi M = H - (H_{c2} - H)/[(2\kappa^2 - 1)\beta_A], \quad (5.40)$$

где $\beta_A = \langle \psi^4 \rangle / \langle \psi^2 \rangle^2$ — параметр, введенный выше [см. соотношение (4.84)] для описания непостоянства ψ в пространстве. Как уже отмечалось, параметр β_A не зависит от амплитуды ψ и определяется только конфигурацией используемого частного решения линеаризованных уравнений ГЛ. Для наиболее важного случая треугольной решетки $\beta_A \approx 1,16$, для квадратной $\beta_A \approx 1,18$. Заметим, что полученное приближенное выражение (5.39) в пределе $B \approx H \approx H_{c2}$ согласуется с точным результатом (5.40), если $2\kappa^2 \gg 1$ и если учесть, что $\beta_A \approx 1$.

Из термодинамического соотношения

$$\left(\frac{\partial G}{\partial H} \right)_T \approx -\frac{B}{4\pi} \quad (5.41)$$

следует, что решетка с наименьшим значением β_A является более устойчивой. Убедиться в этом можно, интегрируя соотношение (5.41) от значения магнитного поля, равного H_{c2} , при котором сверхпроводник переходит в нормальное состояние и $G_s(H_{c2})$

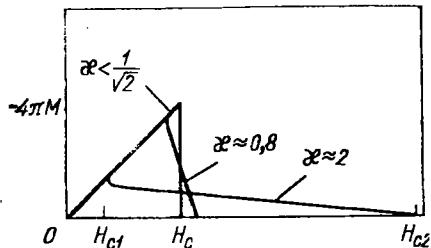


Рис. 5.2. Сравнение кривых намагничивания трех сверхпроводников с одинаковым значением критического термодинамического поля, но с разными величинами κ . При $\kappa < 1/\sqrt{2}$ имеем сверхпроводник I рода, который испытывает при H_c фазовый переход первого рода, а при $\kappa > 1/\sqrt{2}$ — сверхпроводник II рода, который испытывает фазовый переход второго рода в полях H_{c1} и H_{c2} (отмеченные значения этих полей относятся к случаю большего κ). Площадь под кривой во всех случаях равна $H_c^2/8\pi$.

всегда равно $G_n(H_{c2})$, до некоторого меньшего значения поля. В результате получаем

$$G_s(H) = G_n(H_{c2}) + \frac{1}{4\pi} \int_H^{H_{c2}} B(H) dH = G_n(H_{c2}) + \\ + \frac{1}{8\pi} (H_{c2}^2 - H^2) - \frac{1}{8\pi} \frac{(H_{c2} - H)^2}{(2\kappa^2 - 1) \beta_A}. \quad (5.42)$$

Из полученного выражения видно, что, чем меньше величина β_A , тем меньшее значение принимает $G_s(H < H_{c2})$, что и было предсказано ранее [см. формулу (4.86)]. Таким образом, треугольная решетка более устойчива, чем квадратная, как вблизи H_{c2} , так и вблизи H_{c1} .

Важной особенностью выражения (5.40) является присутствие фактора $(2\kappa^2 - 1)$ в знаменателе. Этот фактор стремится к нулю при значении $\kappa = 1/\sqrt{2}$, которое служит критерием для разделения сверхпроводящих материалов на сверхпроводники I и II рода. Это вполне естественно, поскольку при $H = H_c$ сверхпроводники I рода испытывают фазовый переход первого рода, при котором $4\pi|M|$ возрастает скачком от 0 до H_c . Изменение формы кривой намагничивания с изменением κ схематически показано на рис. 5.2. Однако, несмотря на это изменение формы, площадь под кривой во всех случаях равна энергии конденсации $H_c^2/8\pi$. Это можно доказать интегрированием выражения (5.41) с учетом того, что $F = G$ при $H = 0$ и $G_s = G_n$ при $H = H_{c2}$. Поэтому, независимо от величины κ , можно записать

$$-\int M dH = F_n(0) - F_s(0) = H_c^2/8\pi. \quad (5.43)$$

Различные соотношения, выведенные или просто приведенные выше, позволяют определить величину κ по экспериментальной кривой намагничивания несколькими способами. Очень близко к T_c , где простые уравнения ГЛ можно строго вывести из микроскопической теории, можно ожидать, что все эти определения будут согласовываться, но при низких температурах между ними могут быть небольшие расхождения. Маки [7] первым теоретически

исследовал эти отклонения с микроскопической точки зрения; он ввел обозначения κ_1 , κ_2 и κ_3 для величин, определяемых из экспериментальных данных по трем соотношениям:

$$H_{c2} = \sqrt{2} \kappa_1 H_c, \quad (5.44a)$$

$$4\pi \frac{dM}{dH} \Big|_{H_{c2}} = (2\kappa_2^2 - 1)^{-1} \beta_A^{-1}, \quad (5.44b)$$

$$H_{c1} = H_c (\ln \kappa_3) / (\sqrt{2} \kappa_3). \quad (5.44b)$$

При более строгом рассмотрении равенство (5.44b) должно быть заменено на точное численное соотношение между H_{c1}/H_c и κ , впервые полученное Харденом и Арпом [8], которое переходит в выражение (5.44b) при больших κ . Эта пионерская работа Маки была значительно расширена Эйленбергером [9], который показал, что разное температурное поведение величин κ_i должно зависеть не только от отношения l/ξ_0 , но и от степени анизотропии рассеяния на примесях. Грубо говоря, это различие в κ_i отражает разную степень чувствительности разных магнитных свойств сверхпроводника по отношению к степени нелокальности электродинамики. Только при $T \rightarrow T_c$ истинная электродинамика становится полностью локальной и тогда все κ_i стремятся к общей предельной величине, обычно обозначаемой просто κ без индекса. Несмотря на все эти усложнения, полученные результаты для простой постоянной величины κ остаются справедливыми в полу количественном смысле, поскольку в сверхпроводниках II рода разные κ_i отличаются от κ менее чем на 20%.

5.4. Пиннинг, крип и течение потока

В настоящее время наиболее полезным с практической точки зрения применением сверхпроводников II рода является создание сверхпроводящих соленоидов, которые могут благодаря незатухающему постоянному электрическому току поддерживать стационарное магнитное поле порядка 100 000 Гс. Получение полей такого порядка в охлаждаемых водой медных соленоидах сопровождалось бы постоянными потерями энергии 2 МВт, что приводит к проблемам, связанным с охлаждением. Кроме того, такие соленоиды не обладали бы практически бесконечной стабильностью сверхпроводящих магнитов.

Изготовление сверхпроводящих магнитов — нелегкая задача. Сверхпроводящий материал должен не только обладать критическим полем, значительно превышающим создаваемое, но и быть способным проводить в этом поле большой ток без сопротивления. Первое требование хорошо выполняется во многих грязных сверхпроводниках, так как

$$H_{c2} = \frac{\Phi_0}{2\pi\xi_0^2 l} \approx \frac{\Phi_0}{2\pi\xi_0 l} \approx \frac{3cx}{e} \frac{T_c}{v_F l} \approx 3 \cdot 10^4 \frac{T_c}{v_F l}. \quad (5.45)$$

При большой T_c и небольшой скорости Ферми v_F малость длины свободного пробега в таких хрупких материалах, как V_3Si и Nb_3Sn , может привести к величине H_{c2} , превышающей 250 000 Э. Много материалов с гораздо более хорошими механическими свойствами обладают H_{c2} порядка 100 000 Э.

Практически задача состоит в нахождении материала, способного нести сильный ток в присутствии такого сильного проникающего поля без рассеяния энергии. Любая заметная диссипация приводит к нагреванию, которое, в свою очередь, еще больше снижает критические параметры, что ведет к катастрофическим скачкам потока. Причиной диссипации является сила Лоренца

$$\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}/c, \quad (5.46)$$

действующая со стороны тока на двигающийся через сверхпроводник магнитный поток. Это выражение для силы было получено ранее [см. формулу (5.23)], но было записано в форме

$$\mathbf{f} = \mathbf{J} \times \Phi_0/c,$$

учитывающей ее действие на одиночный вихрь. Сила Лоренца вызывает движение вихрей в направлении, перпендикулярном к току. Если они движутся, например, со скоростью v , то при этом немедленно индуцируется электрическое поле

$$\mathbf{E} = \mathbf{B} \times \mathbf{v}/c, \quad (5.47)$$

параллельное \mathbf{J} . Оно действует как омическое напряжение и связано с рассеянием энергии.

Исследуя этот вопрос более тщательно, можно записать уравнение Максвелла, связывающее плотность тока с ротором магнитного поля в двух формах. Классическая форма имеет вид

$$\text{rot } \mathbf{H} = (4\pi/c) \mathbf{J}_{\text{внеш}}, \quad (5.48a)$$

где $\mathbf{J}_{\text{внеш}}$ представляет собой только *вводимые извне* токи и не включает токи, возникающие в результате равновесного отклика среды. Например, выше было показано, что в сверхпроводнике I рода, находящемся в статическом промежуточном состоянии, магнитное поле везде равно H_c и $\mathbf{J}_{\text{внеш}}=0$. Кроме того, уравнения Максвелла можно записать в микроскопической форме, рассматривая среду так же, как вакуум:

$$\text{rot } \mathbf{h} = (4\pi/c) \mathbf{J}. \quad (5.48b)$$

Здесь \mathbf{J} теперь уже *полный* ток, включающий равновесный отклик среды. В случае промежуточного состояния это уравнение описывает изменения \mathbf{h} в пределах от \mathbf{h}_n до 0 как результат действия микроскопических экранирующих токов, текущих в слоях толщиной порядка лондоновской глубины проникновения в каждом из сверхпроводящих доменов. В конечном счете \mathbf{B} оказывается равной среднему от \mathbf{h} по ламинарной (или другой) структуре.

Если теперь обратиться к случаю идеального сверхпроводника II рода, находящегося в смешанном (т. е. вихревом) состоянии

без заданного транспортного тока, то H вновь везде равно приложеному полю, поскольку $J_{\text{внеш}}=0$, в то время как $B=\bar{h}$ уменьшается от H до $B_{\text{равн}}(H)$ в поверхностном слое глубиной порядка λ , в котором имеется микроскопический поверхностный ток J .

Поскольку рассматриваемая ситуация является по определению равновесной, ясно, что суммарная сила, действующая на любой вихрь и даже на тот, который подвержен воздействию со стороны этого поверхностного тока, равна нулю. Из этого примера следует, что плотность тока, которая определяет суммарную, вызывающую движение вихря силу, можно считать равной не полной плотности тока J , а только ее неравновесной части. Договоримся обозначать эту часть $J_{\text{внеш}}$, хотя в некоторых случаях она может отражать только неравновесное состояние изолированной системы. Таким образом, плотность силы, вызывающей движение вихрей, равна

$$\alpha = [J_{\text{внеш}} \times B]/c = [(\text{rot } H) \times B]/4\pi. \quad (5.49)$$

Эта эффективная плотность силы α отличается от определенной выражением (5.46) отсутствием в ней существующих в среде равновесных сил, которые не приводят к смещению вихревой линии относительно этой среды. Хотя с принципиальной точки зрения и важно делать такое тщательное различие между B и H и между J и $J_{\text{внеш}}$, необходимо сознавать, что в большинстве применений сверхпроводников II рода с большими κ справедливо равенство $B \approx H$. Можно сказать, что микроскопические экранирующие токи, связанные с равновесной намагниченностью $4\pi M$, оказываются гораздо меньше полезных транспортных токов. Поэтому в последующих рассуждениях будем для простоты пренебрегать различием между B и H и между J и $J_{\text{внеш}}$.

Приведенные соображения удобно иллюстрировать примером полого сверхпроводящего цилиндра, содержащего захваченный магнитный поток, который поддерживается циркулирующим в его стенках током (рис. 5.3). Эта модельная задача может быть рассмотрена как идеализация сверхпроводящего соленоида, работающего в режиме постоянного тока, т. е. с контактами, замкнутыми сверхпроводящим шунтом. Если толщина стенок цилиндра d мала по сравнению с его радиусом R , то, пренебрегая кривизной стенок, можно свести задачу к одномерной. В этом случае уравнение Максвелла (5.48а) может быть записано в следующем виде:

$$\frac{dH}{dx} = -\frac{4\pi}{c} J_{\text{внеш}}.$$

Здесь H и $J_{\text{внеш}}$ направлены соответственно вдоль осей z и y . В соответствии с этим, на единицу длины каждого вихря действует внешняя сила, равная $f = (\Phi_0/4\pi) |dH/dx|$. После суммирования по положениям всех вихрей это выражение приводит к следующему значению объемной плотности силы:

$$\alpha = \frac{B}{4\pi} \left| \frac{dH}{dx} \right|. \quad (5.50)$$

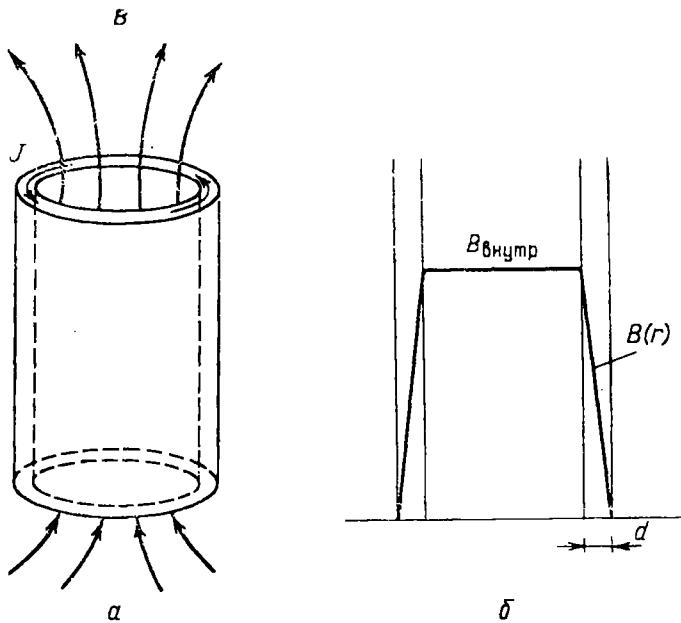


Рис. 5.3. Магнитный поток, захваченный в полном цилиндре из сверхпроводника II рода:
а — геометрия образца; б — профиль плотности магнитного потока

В приближении $B \approx H$ величина α равна градиенту магнитного давления $B^2/8\pi$ (отклонение от этого приближения связано с той частью магнитного давления, которая действует на идеальную среду, а не на запиннингованные на дефектах материала вихри). До тех пор пока сила α не скомпенсируется какими-либо другими силами, следует ожидать движения сквозь стенку вихрей, каждый из которых несет с собой один квант магнитного потока. Это движение сопровождается уменьшением захваченного внутри цилиндра магнитного потока и соответствующим уменьшением J . Изменение потока приводит к индуцированию в кольце э. д. с., совпадающей по направлению с током и равной

$$\mathcal{E} = 2\pi RE = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{c} 2\pi RBv. \quad (5.51)$$

Здесь E — локальное электрическое поле; v — направленная наружу скорость движения плотности магнитного потока B . Очевидно, что этот результат эквивалентен (5.47). Его также можно получить применяя преобразования Лоренца для перехода от системы координат, движущейся с вихрем, к лабораторной системе.

Несмотря на то что соотношение (5.51) было выведено в результате применения закона электромагнитной индукции к нестационарной ситуации, оно верно и в случае движения с постоянной

скоростью, когда B и J поддерживаются неизменными в микроскопическом масштабе внешними источниками энергии, а вихри движутся через среду с постоянной скоростью*. В обоих случаях генерация электрического поля сопровождается рассеянием энергии с мощностью, равной $E \cdot J$. Это приводит либо к уменьшению магнитной энергии, запасенной в полом цилиндре, либо, в случае движения с постоянной скоростью, к постоянному отбору энергии от внешних источников.

Выражение (5.51) для э. д. с. \mathcal{E} может быть переписано в более полезной и интересной форме, если выразить магнитный поток Φ в единицах кванта потока: $\Phi = n\Phi_0$. Тогда

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\Phi_0}{c} \frac{dn}{dt} = \frac{\hbar\omega}{2e}, \quad (5.52)$$

где $\omega/2\pi$ — частота, с которой вихри вытекают наружу, или, что эквивалентно, скорость, с которой уменьшается число флюксOIDов в цепи. Поскольку интегральное изменение фазы волновой функции $|\psi| \exp\{i\phi\}$ при обходе замкнутого контура равно $\Delta\phi = \oint \nabla\phi \times ds = 2\pi n$, где n — число флюксOIDов, можно переписать соотношение (5.52) в следующей форме:

$$2e\mathcal{E} = e^*\mathcal{E} = \hbar \frac{d\Delta\phi}{dt} = \hbar\omega. \quad (5.52a)$$

Это так называемое джозефсоновское частотное соотношение, которое будет обсуждаться более подробно в следующей главе.

Из приведенных рассуждений можно заключить, что (в полях, превышающих H_{ci}) сверхпроводник II рода будет обладать сопротивлением и не будет способен поддерживать незатухающий ток, если отсутствуют какие-либо механизмы, препятствующие движению вихрей под действием силы Лоренца. Такой механизм называют пиннингом**, поскольку благодаря ему вихри «пришипливаются» в фиксированных точках материала. Пиннинг возникает в результате любой пространственной неоднородности материала. Действительно, локальные изменения ξ , λ или H_c из-за примесей, границ зерен, полостей и т. д. приводят к локальным изменениям свободной энергии на единицу длины линии потока магнитного поля ϵ_l , в результате чего некоторые места локализации вихря предпочтительнее других. Наиболее эффективны неоднородности с размерами порядка λ или ξ , т. е. 10^{-8} — 10^{-5} см, а не с размерами порядка межатомных расстояний. В последнем случае их действие сводится к рассеянию электронов, т. е. ограничению длины их свободного пробега l . Если пиннинг достаточно силен, то движение вихрей может быть настолько мало, что сверхпроводник с большой степенью точности будет вести себя как идеальный проводник. Однако всегда будет присутствовать термически активированный

* Интересный анализ схожей ситуации, возникающей при движении нормальных доменов в промежуточном состоянии, был дан в работе [10].

** См. примечание на с. 22. — Прим. ред. пер.

крил потока, при котором вихри «прыгают» с одного пиннингующего центра на другой, причем в некоторых случаях этот процесс может идти с заметной интенсивностью. Если сила пиннинга мала по сравнению с силой, вызывающей движение, то вихри движутся почти равномерно со скоростью, ограниченной вязким трением. Этот так называемый режим «течения» потока обычно приводит к «сопротивлению из-за течения потока» ρ_f , сравнимому с сопротивлением материала в нормальном состоянии ρ_n . Таким образом, для практических применений необходимо полностью исключить движение потока, а интенсивность крипа по возможности свести к минимуму.

5.5. Идеальное течение потока

Вначале рассмотрим идеальный случай отсутствия пиннинга и определим, какие свойства следует ожидать в случае идеального движения потока, при котором движение вихрей тормозится только вязким трением. Можно начать с феноменологического описания, предположив существование коэффициента вязкого трения η , такого, что плотность вязкой силы на единицу длины движущегося со скоростью v_L вихря равняется $-\eta v_L$. Приравнивая ее силе Лоренца (5.46а), получаем следующее соотношение между током и скоростью:

$$J \frac{\Phi_0}{c} = \eta v_L.$$

Объединяя это равенство с соотношением (5.47), получаем связь пространственно-усредненных полей:

$$\rho_f = \frac{E}{J} = B \frac{\Phi_0}{\eta c^2}. \quad (5.53)$$

Таким образом, в случае η , не зависящего в B , ρ_f должно быть пропорционально B .

Подобный анализ сводит проблему к определению коэффициента вязкости η , который может быть выражен в энергетических единицах, если учесть, что рассеиваемая на единице длины вихря мощность равна

$$W = -F \cdot v_L = \eta v_L^2. \quad (5.54)$$

Однако необходимо разобраться, как в действительности происходит диссипация энергии в движущемся вихре. К этой проблеме есть два общих подхода: относительно простая модель, впервые предложенная Бардином и Стефеном [11], и более строгий анализ, проведенный несколько позднее Шмидом [12], Кароли и Маки [13], Томпсоном и Хью [14] на основе временного обобщения уравнений ГЛ*. Вначале ограничимся изучением первой модели, так как она дает ясную картину механизма диссипации. Более сложный подход в общих чертах излагается в гл. 8.

* См. примечание на с. 290. — Прим. ред. пер.

5.5.1. Модель Бардина — Стефена

Эта модель справедлива для сверхпроводников с локальной электродинамикой. В ней предполагается, что в вихре имеется конечный керн из нормального материала радиуса порядка ξ и что диссипация происходит благодаря обычным резистивным процессам в этом керне. Так как предположение о нормальном керне лежит в основе этой модели, а не является просто упрощающим предположением, важно тщательно изучить, насколько хорошо она оправдывается.

Основой для концепции нормального керна послужило вычисление спектра квазичастичных возбуждений в содержащих вихри чистых сверхпроводниках, проведенное Кароли, Де Женом и Матриконом [15, 16] в рамках микроскопической теории. Ими было показано, что хотя $\psi(r) \rightarrow 0$ только при $r=0$, возрастая в области керна примерно как $\psi_\infty(r/\xi)$, в вихре существует конечная плотность низколежащих возбуждений, которая имеет примерно такой же вид, как у цилиндра из нормального металла с радиусом, приблизительно равным ξ . Это говорит о том, что если Ψ резко изменяется в пространстве, то параметр $\Delta(r) \propto \psi(r)$ уже не должен соответствовать действительной локальной энергетической щели. В гл. 8 этот вопрос будет обсуждаться еще раз.

Аналогичную оценку размера нормального керна можно получить в рамках теории ГЛ. Для этого определим радиус, при котором скорость движения конденсата в вихре $v_s = \hbar/m^*r$ достаточна для обращения $|\psi|$ в нуль. Из соотношения (4.34)

$$\frac{|\psi|^2}{\psi_\infty^2} = 1 - \frac{m^*\xi^2 v_s^2}{\hbar^2} = 1 - \left(\frac{\xi}{r}\right)^2.$$

Таким образом, в этой модели $r_{\text{керна}} = \xi$. Однако необходимо подчеркнуть, что такое использование соотношения (4.34) неправомерно, так как оно справедливо лишь в случае однородного распределения скорости в сверхпроводнике. Как уже было отмечено раньше, точное решение уравнений ГЛ для одиночного вихря показывает, что вопреки полученному выше соотношению величина ψ отлична от нуля везде за исключением начала координат $r=0$.

Подходя к вопросу с еще одной точки зрения, вспомним о сдвиге в спектре элементарных возбуждений (на $v_s \cdot p_F$), использованном при выводе формулы (4.41) (этот сдвиг будет еще обсуждаться в разд. 8.1). Опять-таки эта формула справедлива только для однородного случая, но если качественно применить ее к конкретной точке и взять $\Delta/\Delta_\infty \approx \text{th}(r/\xi)$, $v_s = \hbar/m^*r$, то получается, что внутри области размером порядка ξ возможны бесщелевые возбуждения.

Наконец, отметим, что так как $H_{c2} = \Phi_0/2\pi\xi^2$, то при $H = H_{c2}$ нормальные керны радиусом ξ занимали бы примерно половину объема образца. Итак, вновь получается качественно разумная

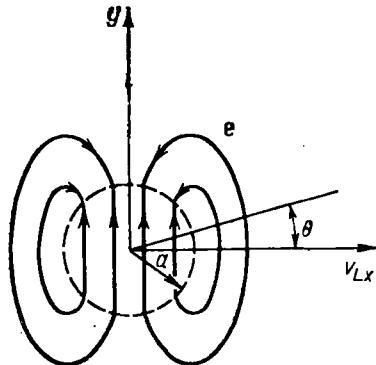


Рис. 5.4. Схематическое изображение электрического поля в окрестности движущегося вихря. Пунктирной окружностью радиуса a обозначен периметр керна. Скачок нормальной компоненты e при $r=a$ приводит к образованию на границе керна конечной плотности поверхностного заряда. В более точной модели скачок должен размываться

ситуация, так как при $H=H_{c2}$ имеет место фазовый переход второго рода в полностью нормальное состояние.

Учитывая все эти оценки, можно сделать следующий вывод: приближение квазинормального керна должно приводить к разумным результатам, особенно при расчете спектра возбуждений, несмотря на то что такой керн на самом деле не существует. Для определенности и простоты выберем сильно упрощенную модель, в которой при $a \approx \xi$ имеется резкая граница между полностью нормальным керном и сверхпроводящим материалом. При этом условии рассмотрим движение вихря, используя закон Ома внутри керна и уравнения Лондонов вне его.

Из первого уравнения Лондонов можно определить микроскопическое электрическое поле e вне керна:

$$\begin{aligned} e &= \frac{\partial}{\partial t} (\Lambda J_s) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{m^* v_s}{e^*} \right) = \\ &= -v_L \cdot \nabla \left(\frac{m^* v_s}{e^*} \right) = -v_L \cdot \nabla \left(\frac{\hbar \theta}{2er} \right). \quad (5.55) \end{aligned}$$

Например, если v_L направлено вдоль оси x и угол θ отсчитывается от того же направления, то из уравнения (5.55) получаем

$$e = - \left(\frac{v_{Lx} \Phi_0}{2\pi c} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\hat{\theta}}{r} \right) = \left(\frac{v_{Lx} \Phi_0}{2\pi c r^2} \right) (\cos \theta \hat{\theta} - \sin \theta \hat{r}). \quad (5.55a)$$

Это поле, конфигурация которого показана на рис. 5.4, совпадает с полем линейной цепочки электрических диполей и в области своего существования $r > a$ имеет нулевое среднее значение. Поэтому полное среднее электрическое поле должно даваться лишь кернами вихрей. Из требования равенства тангенциальных компонент e вне керна (5.55a) и внутри его следует, что электрическое поле в керне однородно:

$$e_{\text{внутр}} = \frac{v_{Lx} \Phi_0}{2\pi a^2 c} \hat{y}. \quad (5.56)$$

Зная $e_{\text{внутр}}$, для мощности, рассеиваемой на единице длины керна, получаем

$$W_{\text{внутр}} = \pi a^2 \sigma_n e^2_{\text{внутр}} = \frac{v_L^2 \Phi_0^2}{4\pi a^2 c^2 \rho_n}. \quad (5.57)$$

Согласно теории Бардина и Стефена, имеется дополнительный, равный полученному, вклад в диссипацию, связанный с протеканием нормальных токов по переходной области вне керна. Наиболее просто это можно проверить в окрестности T_c . Действительно, интегрирование e^2 по внешней области с использованием формулы (5.55а) дает

$$\int_a^\infty \int_0^{2\pi} e^2(r) r dr d\theta = \frac{v_L^2 \Phi_0^2}{4\pi a^2 c^2}.$$

Таким образом, если $\sigma_{1s} \approx \sigma_n$, что справедливо при $T \approx T_c$, то энергии, рассеиваемые внутри керна и вне его, точно равны друг другу.

Были предложены и другие механизмы диссипации. Так, например, еще до появления теории Бардина и Стефена, Тинкхамом [17] было показано, что диссипацию, сравнимую с наблюдаемой, можно было бы объяснить, сделав предположение о существовании конечного времени релаксации τ волновой функции в теории ГЛ, в течение которого она подстраивается к меняющейся во времени конфигурации поля движущегося вихря. При $T=0$ $\tau^{-1} \approx \Delta(0)/\hbar$, а при стремлении T к T_c τ^{-1} уменьшается пропорционально $(1-t)$. Эти качественные соображения были подтверждены последующими работами [12, 13], в которых временно обобщение уравнений ГЛ выводится из микроскопической теории. В настоящее время это представляется наиболее строгим подходом к рассматриваемой задаче. Другой механизм диссипации был предложен Клемом [18]. Им было показано, что диссипация возникает из-за необратимого потока энтропии, текущего от заднего края вихря к его переднему краю. Этот поток обусловлен увеличением энтропии на переднем краю вихря, где сверхпроводящий материал переходит в нормальный, и обратным процессом на заднем краю. На данный момент еще не ясно, до какой степени все эти механизмы аддитивны, а до какой степени они просто дают независимые способы изучения одного и того же процесса*.

Сохраняя простоту подхода, будем следовать результату Бардина и Стефена, которые учитывают основные качественные черты процесса, хотя при этом необходимо помнить, что это весьма упрощенная модель. Поэтому добавим в формулу (5.57) множитель, равный двум, с тем, чтобы учесть диссипацию вне керна, и, приравняв полученный результат выражению (5.54), получим:

$$\eta = \frac{\Phi_0^2}{2\pi a^2 c^2 \rho_n} \approx \frac{\Phi_0 H_{c2}}{\rho_n c^2}. \quad (5.58)$$

* К настоящему времени создана количественная теория вязкого движения вихрей в сверхпроводниках II рода; см. примечание на с. 290. — Прим. ред. пер.

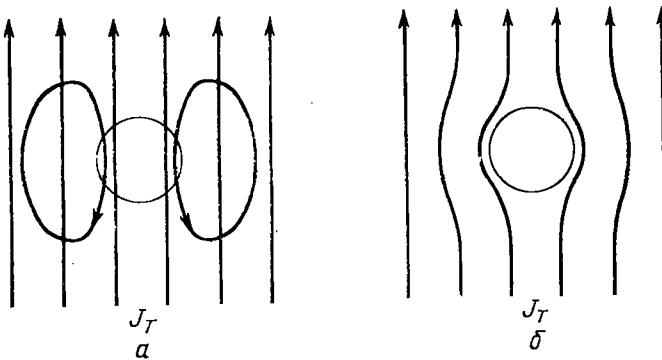


Рис. 5.5. Противотоковая компонента электрического тока в окрестности запиннингованного вихря:

a — однородный транспортный ток J_T и противоток представлены отдельно друг от друга;
б — распределение суммарного тока; полный ток в керне вихря равен нулю

Подставляя величину η в уравнение (5.53), для сопротивления движущегося вихря находим

$$\frac{\rho_f}{\rho_n} = \frac{2\pi a^2 B}{\Phi_0} = \left(\frac{a}{\xi}\right)^2 \frac{B}{H_{c2}} \approx \frac{B}{H_{c2}}. \quad (5.59)$$

При написании последних приближенных равенств в соотношениях (5.58) и (5.59) использован тот факт, что по оценкам радиус керна a должен быть приблизительно равен ξ . Если просто положить $a=\xi$, то ρ_f плавно сливается с ρ_n при $H=H_{c2}$, что разумно, поскольку при этом значении H происходит фазовый переход второго рода. И на самом деле, экспериментальные данные для температур $T \ll T_c$ хорошо согласуются с полученным простым результатом (5.59) во всем диапазоне магнитных полей.

Отметим, что эта простая формула не справедлива при статическом распределении нормальных кернов, хотя в образце имеется относительная доля нормального металла, равная B/H_{c2} . В статическом случае ток просто обтекал бы нормальные керны и тек бы только по сверхпроводящим участкам. Существенным является движение вихрей. При таком движении [с η , определяемым выражением (5.58)] оказывается, что плотность (нормального) тока в керне точно равна плотности приложенного транспортного тока, вызвавшего движение. Следовательно, транспортный ток течет прямо через движущиеся керны, приводя к диссиpации. Если скорость вихря не совсем та, которая нужна, например вследствие других, упомянутых выше вкладов в η или сил пиннинга, то эти две плотности токов не равны друг другу. Это приводит к появлению «противотоковой» компоненты в токе, складывающейся с однородным транспортным током, как показано на рис. 5.5. Физический смысл этой циркуляционной компоненты заключается в уменьшении плотности тока в керне по сравнению с плотностью

транспортного тока J_T . Очевидно, это приведет к меньшей диссипации в керне, т. е. к меньшему электрическому сопротивлению. В пределе стационарного керна сопротивление вообще отсутствует.

5.5.2. Возникновение сопротивления провода

В качестве иллюстрации применим эти идеи к не имеющей большой практической значимости, но весьма наглядной задаче о протекании по изолированному проводу из сверхпроводника II рода тока, достаточного для достижения на поверхности провода поля, превышающего H_{c1} . При $H > H_{c1}$ на поверхности будут зарождаться, стягиваться и аннигилировать в центре провода круговые вихревые кольца, приводя к появлению электрического сопротивления. Посмотрим, насколько наблюдаемое явление должно отличаться от поведения сверхпроводника I рода, рассмотренного в разд. 3.5 в рамках лондоновской модели статического промежуточного состояния.

Критический ток появления сопротивления будет равен

$$I_{c1} = \frac{1}{2} H_{c1} c a, \quad (5.60)$$

где теперь a — радиус провода. Этот ток I_{c1} , вообще говоря, довольно мал, поскольку $H_{c1} < H_c$. Если одиночный кольцевой вихрь зародился на поверхности, то как он будет стягиваться? Приравнивая скорость изменения энергии кольцевого вихря рассеиваемой мощности, получаем

$$\frac{d}{dt} (2\pi r \epsilon_1) = (2\pi r \eta) \left(\frac{dr}{dt} \right)^2, \quad r \frac{dr}{dt} = \frac{\epsilon_1}{\eta}. \quad (5.61)$$

Таким образом, каждый кольцевой вихрь стягивается до аннигиляции за время

$$T = \frac{\eta a^2}{2\epsilon_1} = \frac{H_{c2}}{H_{c1}} \frac{a^2}{\rho_n c^3}. \quad (5.62)$$

При получении формулы (5.62) были использованы определения критических магнитных полей H_{c1} , H_{c2} и коэффициента вязкости η . Для типичных значений, входящих в соотношение (5.62) величин, $T \approx 10^{-5}$ с. Одним из следствий уравнения (5.61) является то, что $dr/dt \propto r^{-1}$, и поэтому время, затраченное на прохождение любого заданного приращения δr , пропорционально dt/dr или r . Следовательно, так же как и в случае теории Лондонов для статического промежуточного состояния, $B(r) \propto r$.

Проведенное выше рассмотрение справедливо только в непосредственной близости к I_{c1} , где можно пренебречь взаимодействием между кольцевыми вихрями в проволоке, поскольку $B \approx 0$. Для вывода более общих соотношений приравняем силу, вызывающую движение, силе вязкого трения:

$$J\Phi_0/c = \eta v,$$

Направленная внутрь радиальная скорость кольцевого вихря v

может быть заменена на cE/B , где E — индуцированное продольное электрическое поле, а $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, как обычно, локальное значение величины $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ после усреднения по вихревой решетке. Затем, так же как и при выводе выражения (5.49), можно заменить \mathbf{J} на $c/4\pi\mu_0 H$. После этих преобразований получаем

$$\frac{B}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH) = \frac{4\pi\mu_0 c E^2}{\Phi_0}. \quad (5.63)$$

Здесь B и H направлены по окружности, а E — вдоль провода.

Рассматривая вначале случай $I \approx I_{c1}$, можно положить $H \approx H_{c1}$ во всем объеме провода. Это значение магнитного поля не находится в противоречии с малой плотностью вихрей, поскольку $dB/dH \rightarrow \infty$ при $H = H_{c1}$. Тогда $\partial(rH)/\partial r$ будет просто равно H_{c1} , и соотношение (5.63) может быть переписано в следующем виде:

$$B(r) = 4\pi\mu_0 c Er / \Phi_0 H_{c1}, \quad (5.64)$$

т. е., как и было отмечено выше, B пропорционально r . Для определения E и, следовательно, сопротивления приравняем значение величины B на поверхности величине $B(H_s)$, где $H_s = 2I/ca$ — значение поля H на поверхности. Зависимость $B(H_s)$ была получена в разд. 5.3. Если воспользоваться также выражением (5.58) для η , то можно окончательно выразить E в единицах этой величины в нормальном состоянии:

$$\frac{E}{E_n} = \frac{R}{R_n} = \frac{B(H_s)}{2H_{c2}}, \quad I \approx I_{c1}. \quad (5.65)$$

При токе, равном I_{c1} , отношение R/R_n возрастает с бесконечной производной, что определяется формой зависимости $B(H)$ при $H = H_{c1}$.

Другой простой предельный случай достигается при значительно больших токах (вблизи I_{c2}), где вполне разумно при всех значениях радиуса положить $B = H$. Тогда уравнение (5.63) может быть проинтегрировано (после умножения обеих частей на r^2), что дает

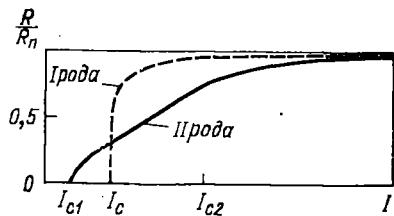
$$H^2 = B^2 = 8\pi\mu_0 c Er / 3\Phi_0. \quad (5.66)$$

Заметим, что теперь B и H пропорциональны $r^{1/2}$, в то время как в окрестности I_{c1} H постоянно, а B изменяется как r . В обоих случаях произведение BH пропорционально r с очень близкими друг к другу коэффициентами. Как и раньше, относя электрическое поле к значению поля в нормальном состоянии при том же токе, находим

$$\frac{E}{E_n} = \frac{R}{R_n} = \frac{3}{4} \frac{H_s}{H_{c2}} = \frac{3}{4} \frac{I}{I_{c2}}. \quad (5.67)$$

И наконец, если $I > I_{c2}$, $H_s > H_{c2}$, то внешняя оболочка проводника должна быть полностью нормальной, а внутренняя, согласно соотношению (5.67), должна обладать эффективным сопротивлением $(3/4)\rho_n$. Объединяя эти две проводимости параллельно, для эффективной средней проводимости получаем $(1 + r_1^2/3a^2)\rho_n^{-1}$, где

Рис. 5.6. Возникновение сопротивления провода из идеального сверхпроводника II рода в отсутствие пиннинга (сплошная кривая). Для сравнения пунктиром показан тот же график для провода из сверхпроводника I рода с тем же значением H_c



r_1 — радиус внутренней области. Требуя выполнения равенства $H(r_1) = H_{c2}$, находим следующее выражение:

$$\frac{r_1}{a} = \frac{2I}{I_{c2}} \left[1 - \left(1 - \frac{3I_{c2}^2}{4I^2} \right)^{1/2} \right] \rightarrow (3I_{c2}/4I), \quad I \gg I_{c2}. \quad (5.68)$$

Используя его, можно легко определить зависимость сопротивления от тока при $I > I_{c2}$. В пределе больших токов

$$\frac{R}{R_n} = 1 - \frac{3}{16} \left(\frac{I_{c2}}{I} \right)^2, \quad I \gg I_{c2}. \quad (5.69)$$

Следовательно, точно так же как в сверхпроводнике I рода, рассмотренном в разд. 3.5, частично сверхпроводящее ядро при пренебрежении тепловыми эффектами исчезает только при $I \rightarrow \infty$.

На рис. 5.6 полученные результаты объединены графически и сравняны с зависимостью R/R_n от тока I для провода из сверхпроводника I рода с тем же значением H_c . С практической точки зрения важно лишь отметить, что R становится порядка R_n , как только ток I незначительно превышает критический ток I_{c1} , который, как правило, значительно меньше I_c сверхпроводников I рода. Следовательно, сверхпроводник II рода с идеальными характеристиками вихревого движения не представляет большого интереса, как не имеющий потерь проводник тока. Для переноса большого сверхтока необходим пиннинг.

5.5.3. Экспериментальные исследования течения потока

Для проверки рассмотренных выше идей были проведены многочисленные эксперименты. Основополагающим был эксперимент Кима с соавторами [19], в котором измерялось сопротивление полоски сверхпроводника в перпендикулярном к ее поверхности магнитном поле. Именно эти экспериментальные результаты стимулировали развитие теории вихревого движения. Однако из-за обманчиво простой формы результата $\rho/\rho_n \approx B/H_{c2}$ не исключалось, что разумное совпадение с экспериментом могло быть случайным и что можно предложить иное их объяснение (не затрагивающее модели движения магнитного потока). Исходя из этих соображений и несмотря на то что визуальное изучение движения доменов в сверхпроводниках I рода, находящихся в промежуточном состоянии, делало весьма вероятной гипотезу о движении отдельных вихрей в сверхпроводниках II рода, для более точной

проверки идеи движения потока были проделаны другие острые эксперименты. Остановимся лишь на двух из них *.

Первым был трансформатор постоянного тока, предложенный Гьевером [21]. Он состоит из двух сверхпроводящих пленок, разделенных тонким слоем диэлектрика. Гьевер обнаружил, что при пропускании через одну «первичную» пленку тока, достаточного для возникновения напряжения, связанного с движением потока, точно такое же напряжение появляется на «вторичной» пленке даже в случае отсутствия в ней тока. Именно такой результат следует из картины течения потока, поскольку движущееся в первичной пленке пятно потока должно тянуть за собой аналогичное пятно во вторичной, приводя тем самым к появлению напряжения. Трансформатор перестает действовать, если происходит проскальзывание между двумя решетками вихрей **, связанное или с большим расстоянием между пленками, или со слабой модуляцией потока в пространстве. Никаких разумных объяснений такого поведения трансформатора постоянного тока с привлечением только стационарной резистивной структуры в первичной пленке дать нельзя.

Другим классом экспериментов является изучение частотного спектра шума, сопутствующего в сверхпроводниках постоянному напряжению на постоянном токе. Начало таких экспериментов было положено работой Van Ойджена и Van Гурпа [23], которые заметили, что если вихри двигаются через сверхпроводник шириной W со скоростью $v_L = cE/B$, то в действительности напряжение должно представлять собой сумму большого числа квазипрямоугольных импульсов длительностью $\tau \approx W/v_L$. Если это так, то должен существовать спектр «дробовых» шумов с частотой обрезания ω порядка τ^{-1} и амплитудой, которая является мерой числа вихрей, движущихся как независимые дискретные образования. Эксперименты подтвердили существование такого шума со спектром, хорошо совпадающим с ожидаемым. Однако, кроме того, в них обнаружилось, что при больших полях или токах движущиеся образования несут поток больший, чем один квант Φ_0 ; как правило, ~ 1000 таких квантов движутся как единое целое. Вероятно, этот результат объясняется наличием пиннинга, который вынуждает поток двигаться «связками» вихрей, чтобы суммарная сила, действующая на связку, была достаточной для преодоления сил пиннинга. Эти эксперименты позволяют также сделать вывод о том, что часть вихрей остается запиннигованной, в то время как остальные должны двигаться несколько быстрее, чем они двигались бы в случае общего движения. Таким образом, концепция движения потока является в общих чертах правильной, хотя дефекты в реальных образцах существенно усложняют описанную выше идеализированную картину.

* Более полный обзор см., например, в работе [20].

** Недавно в печати появилась особенно тщательная работа по этому вопросу [22].

5.5.4. Заключительные замечания о движении потока

В проведенном выше обсуждении неявно предполагалось, что вихри под действием силы Лоренца двигаются строго в перпендикулярном току направлении. Это противоречит поведению вихрей в жидкости, где в первом приближении они дрейфуют вдоль направления тока. Если несущий магнитный поток вихрь движется с конечной компонентой скорости вдоль J_L , то это приведет к эффекту Холла, т. е. к возникновению поперечного напряжения, определяемого тем же произведением $\mathbf{B} \times \mathbf{v}_L/c$, которое было получено ранее (5.47). Выше мы пренебрегли такой возможностью, так как большинство экспериментальных данных свидетельствует о малости угла Холла. В действительности модель Бардина — Стефена дает эффект Холла точно такой же, как в нормальном металле, помещенном в магнитное поле, совпадающее с полем в керне вихря. Однако, так как большинство исследуемых сверхпроводников II рода являются или сплавами, или интерметаллическими соединениями с довольно малой длиной свободного пробега электронов, то угол Холла оказывается мал и его довольно трудно достоверно измерить.

Так, например, любая структурная асимметрия, остающаяся после изготовления образцов (такая, как направление прокатки), будет приводить к движению вихрей вдоль определенного направления. Такое «направленное движение» приведет к мнимому углу Холла, не имеющему принципиального значения.

Другой проблемой, связанной с качеством образца, является пиннинг, который присутствует во всех реальных образцах. Наличие пиннинга приводит к необходимости задания конечных (иногда больших) токов, прежде чем будет иметь место какое-либо течение потока. Поэтому реально невозможно измерить линейную зависимость электрического сопротивления от магнитного поля, полученную в идеализированной теории. Делались попытки уменьшить пиннинг тщательным отжигом. Кроме того, оказалось, что эффекты пиннинга могут быть уменьшены наложением на постоянный ток переменного [24]. Однако до сих пор нет полной уверенности в том, насколько аккуратно измерялись фундаментальные свойства материала. Тем не менее заметные успехи сделали возможным сравнение с теорией. Так, например, оказалось, что угол Холла в сплавах (см., например, [25]) превышает эту величину в нормальном состоянии при H_{c2} , что противоречит теории Бардина — Стефена. Маки [26] показал, что объяснение этого эффекта может быть получено в рамках временного обобщения теории Гинзбурга — Ландау.

Другим аспектом движения потока является перенос движущимися вихрями вместе с магнитным потоком также и энтропии. Грубую оценку этой перенесенной энтропии для одиночного вихря можно получить простым учетом избытка энтропии нормального керна по сравнению с тем же объемом сверхпроводящего материала, хотя вблизи H_{c2} , где вихри сильно перекрыты, конечно,

требуются более строгие оценки. Существование переноса энтропии приводит к существованию термоэлектрических эффектов, таких, как эффект Эттинггаузена. Другими словами, в равновесном состоянии термически изолированного проводника должен возникнуть поперечный температурный градиент, параллельный направлению движения вихрей и приводящий к обратному потоку энтропии, равному переносимому вихрями. Эти дефекты изучались особенно тщательно Соломоном и Оттером [27, 28] и позднее Видалом [29]. По всей видимости, уже достигнуто разумное теоретическое объяснение количественных результатов таких экспериментов.

В качестве последнего замечания отметим, что близкие к идеальным данные по сопротивлению движения потока можно получить в присутствии сил пиннинга по измерениям в сантиметровой области частот. Дело в том, что сила пиннинга ($-k\delta x$) пропорциональна амплитуде смещения вихря из положения равновесия, в то время как сила вязкого трения равна $\eta v = \eta\omega\delta x$. Следовательно, на частотах выше характерной частоты $\omega_0 = k/\eta$ сила пиннинга становится пренебрежимо малой. Джитльман и Розенблум [30] смогли обнаружить этот переход от режима пиннинга с сопротивлением, равным нулю, к режиму движения потока с хорошо определенным ρ_f . В их экспериментах переход происходит на частотах $\sim 10^7$ Гц. Следовательно, измерения поверхностного сопротивления сверхпроводников II рода на СВЧ-частотах ($\sim 10^{10}$ Гц) не осложняются эффектами пиннинга *.

5.6. Модель критического состояния

Перейдем теперь к другому предельному случаю, в котором пиннинг достаточно велик для того, чтобы предотвратить любое заметное движение вихрей и появление связанного с ним электрического сопротивления. Хотя силы пиннинга и силы, вызывающие движение, действуют на индивидуальные вихри, удобно развить более макроскопический подход, поскольку движение индивидуальных вихрей сильно затрудняется их взаимным отталкиванием, которое, как мы видели, стремится навязать массиву вихрей правильную структуру. Поэтому в том случае, когда плотность вызывающей движение силы превзойдет имеющиеся в том же объеме силы пиннинга, следует ожидать движения «связок» потока. Это находится в согласии с упомянутыми выше экспериментами Ван Ойджена и Ван Гурпа по измерению шумов. Поскольку объемная плотность силы

$$\alpha = J_{\text{внеш}} \times B/c, \quad (5.70)$$

условием отсутствия диссипации является требование, чтобы величина α ни в одной точке не превосходила критической плотности силы пиннинга α_c .

* Но, как отмечал сам автор (см. разд. 3.3), осложняются возникновением потерь в сверхпроводящих областях между вихрями. — Прим. ред. пер.

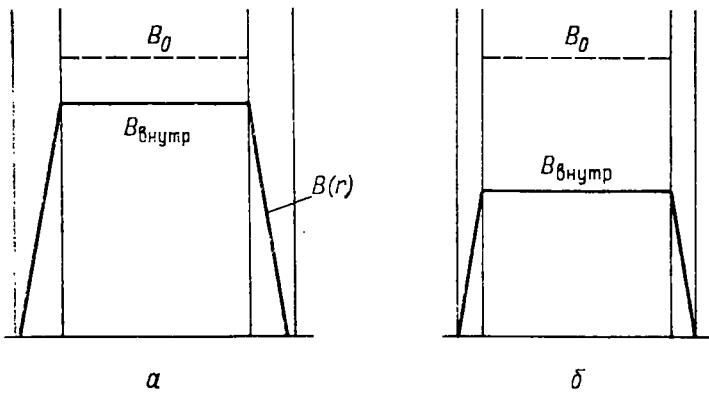


Рис. 5.7. Критическое состояние в полом сверхпроводящем цилиндре. В случае (а) толщина стенок достаточна для захвата всего начального потока. В случае (б) стенки слишком тонки для такого захвата. Для простоты показаны профили поля, следующие из модели Бина, в которой величина $J_c \propto dB/dr$ постоянна. Величина J_c взята одинаковой в обоих случаях

Значение этого утверждения станет понятным, если вернуться к обсуждению процессов в полном сверхпроводящем цилиндре, рассмотренном выше (см. разд. 5.4). Предположим, что в начальный момент внутри цилиндра задано большое поле B_0 (например, с помощью помещенного в отверстие соленоида магнита, который затем выключается). Если $B_0 > H_{c1}$, переносящие магнитный поток вихри начнут немедленно проникать в стенку и уменьшение потока, покинувшего отверстие, приведет к индуцированию в ней тока. Поскольку эта плотность тока равна $J_\theta = (c/4\pi)dH/dr$, то в месте резкого скачка $H(r)$ от значения B_0 до 0 на границе цилиндра эти токи будут очень сильны. Подстановка в формулу (5.70) комбинации больших магнитных полей и больших токов должна привести к $\alpha > \alpha_c$. В этом случае вихри будут продолжать проникать далее в стенку, стремясь уменьшить в ней градиент H . Этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока везде не выполнится условие

$$\alpha \equiv |\alpha| = \frac{J_{\text{внеш}} B}{c} = \frac{1}{4\pi} B \frac{dH}{dr} \approx \frac{d}{dr} \left(\frac{B^2}{8\pi} \right) \leq \alpha_c. \quad (5.71)$$

Такое положение называется критическим состоянием.

В зависимости от соотношения между B_0 и толщиной стенки критическое состояние, как показано на рис. 5.7, может быть достигнуто одним из двух способов: а) α падает до значений, меньших α_c , прежде чем поток проникнет через всю стенку наружу так, что весь внутренний поток остается в отверстии и в стенке; б) если толщина стенки недостаточна для сохранения полного внутреннего потока, то поток выходит через стенку до тех пор, пока условие $\alpha \leq \alpha_c$ не выполнится для оставшегося потока в каждой точке. Очевидно, максимальное значение B , которое мо-

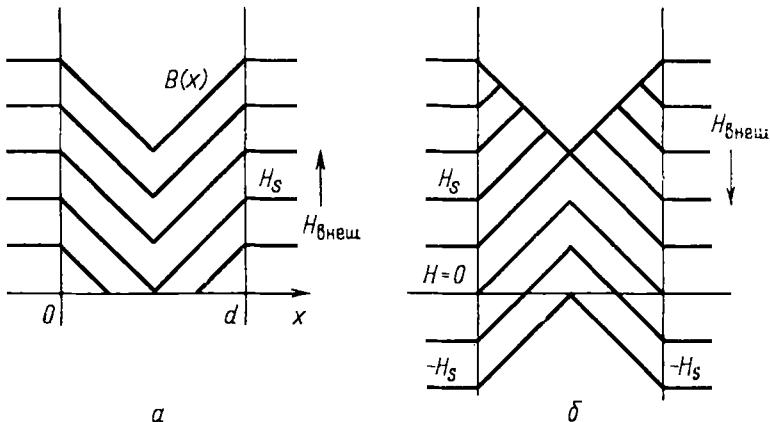


Рис. 5.8. Профили плотности магнитного потока внутри пластины, помещенной в нарастающее (а) и уменьшающееся (б) внешнее магнитное поле. H_s — максимальное магнитное поле, от которого может быть экранирована середина пластины. Заметьте наличие противоположно направленных магнитных полей при $H_{\text{внеш}} = -H_s/2$

может быть поддержано внутри (при $B=0$ снаружи), определяется интегрированием приближенного выражения (5.71):

$$\frac{B_{\max}^2}{8\pi} = \frac{R_{\text{внеш}}}{R_{\text{внутр}}} \int_{R_{\text{внутр}}}^{R_{\text{внеш}}} \alpha_c [B(r)] dr, \quad (5.72)$$

в котором учтена возможная зависимость α_c от локального значения плотности потока (так же как и от температуры и т. д.).

Если предположить, что α_c равно константе, то из формулы (5.72) видно, что максимальное значение магнитной индукции B , которое удерживается в полом цилиндре, возрастает пропорционально квадратному корню из толщины стенок. Учет этого факта важен при конструировании сверхпроводящих соленоидов: толщина намотки должна увеличиваться примерно как квадрат поля в отверстии*. Так как толщина намотки, как правило, превышает радиус внутреннего отверстия, масса необходимого сверхпроводящего материала растет примерно как квадрат толщины стенки, или как B^4 (при постоянной длине). Поэтому даже в полях, меньших H_{c2} (в этом поле α_c уменьшается до нуля), размеры, а следовательно, и стоимость сверхпроводящих соленоидов должны расти очень быстро с ростом возможных значений поля в отверстии. Это действительно так. Например, коммерческие магниты одной серии, рассчитанные на 110, 125 и 130 кГс, имеют массу, соответст-

* Поскольку в выражении (5.72) предполагается оптимальное распределение плотности тока по координате r , действительные характеристики соленоида будут, вообще говоря, хуже оценки (5.72), даже если применить многожильные обмотки, что обеспечивает улучшенное распределение $J(r)$.

венно равную 48, 110, 130 фунтам (1 фунт \approx 0,45 кг), что близко к полученной выше зависимости B^4 .

Очевидно, что при уменьшении B до 0 величина a_c не может оставаться постоянной, так как это привело бы к бесконечному значению критического тока при нулевом поле. Отмеченное затруднение не возникает при использовании другой простой модели, предложенной Бином [31] несколько раньше более полной работы Кима и др. В этой модели $J_c = \text{const}$ или $a_c \propto 1/B$, и профили плотности магнитного потока есть просто прямые линии с тангенсом угла наклона, равным $4\pi J_c/c$, что упрощает качественное рассмотрение. Например, на рис. 5.8, а показаны профили потока, проникающего в толстую пластину толщиной d с увеличением внешнего магнитного поля H . Из рисунка видно, что поле

$$H_s = 2\pi J_c d/c \quad (5.73)$$

является максимальным внешним полем, от которого может быть экранирована середина пластины. С уменьшением приложенного поля вплоть до смены его направления происходит последовательное изменение профилей поля, представленное на рис. 5.8, б. Видно, что после уменьшения поля до нуля в пластине может оставаться захваченным довольно значительный магнитный поток. Можно даже реализовать ситуацию, в которой во внутреннем объеме образца происходит смена направления магнитного потока. В этом случае можно было бы ожидать некоторой анигиляции вихрей противоположной полярности. Однако при достаточно сильном пиннинге такой процесс протекает лишь в узком слое, в котором происходит смена направления B . Как очевидно из представленной картины, при магнитном перецикливании подобных «жестких» сверхпроводников наблюдается большой гистерезис и связанный с ним необратимость перемагничивания. Например, если внешнее поле периодически меняется во времени с амплитудой $H_m < H_s$, то видно, что площадь петли гистерезиса $\oint BdH$ и, следовательно, рассеиваемая за период энергия Q будут возрастать как H_m^3 . Кроме того, если $H_m \gg H_s$, то $Q \propto H_m$. Эти гистерезисные потери ограничивают ценность сверхпроводников II рода для применений на переменном токе, к этому вопросу вернемся еще в разд. 5.8.

5.7. Термически активированный крип потока

При конечных температурах тепловое движение может привести к скачкам линий потока с одного центра пиннинга на другой под действием сил, вызванных градиентом плотности магнитного потока. Результирующий крип* потока проявляется двояко: (1) он приводит к медленным изменениям захваченного магнитного поля и (2) к измеримому сопротивлению при протекании

* См. примечание на с. 23. — Прим. ред. пер.

тока. Прежде чем углубляться в детали, кратко сравним между собой эти два следствия крипа.

Если магнитный поток захвачен в полом сверхпроводящем цилиндре или в сверхпроводящем соленоиде, работающем в режиме незатухающих токов, то с течением времени он может заметно уменьшиться. В этом состоит отличие этих систем от макроскопических образцов из сверхпроводников I рода, в которых подобных изменений обнаружено не было. В действительности, даже в сверхпроводниках II рода крип потока происходит очень медленно и не поддается обнаружению, пока градиент плотности потока не очень близок к критическому значению. Так как наличие крипа будет приводить к уменьшению градиента, этот процесс будет идти все медленней и медленней. Действительно, как будет показано, его временная зависимость является логарифмической. Это означает, что величина крипа за промежуток времени от 1 до 10 с. будет точно такой же, как за период от 1 до 10 лет! При обычных условиях работы сверхпроводящего соленоида в режиме незатухающих токов градиент плотности магнитного потока достаточно далек от критического, что гарантирует пренебрежимо малую интенсивность крипа*.

Если крип потока происходит через проводник, несущий ток, т. е. под действием силы, вызванной этим током, то появляется продольное электрическое сопротивление, пропорциональное средней скорости крипа. За исключением значительно меньшей скорости движения, это явление аналогично рассмотренному выше сопротивлению течения потока.

Интересно сравнить минимально наблюдаемую скорость крипа в двух случаях. В магнитных измерениях с помощью незатухающих токов в сверхпроводниках** можно легко обнаружить движение, в результате которого поток за день проходит расстояние, равное ширине проводника (0,1 мм), следовательно, $v_{\min} \approx 10^{-7}$ см/с. При измерениях сопротивлений с помощью обычной (т. е. не сверхпроводниковой) аппаратуры минимальное измеримое напряжение обычно 10^{-7} В/см. При $B \approx 10^4$ Гс это напряжение соответствует минимально обнаружимой скорости порядка 10^{-3} см/с. Поэтому, вообще говоря, измерения с использованием незатухающих токов обладают большей чувствительностью.

5.7.1. Теория Андерсона и Кима для крипа потока

В теории Андерсона и Кима [32, 33] предполагается, что крип потока происходит в виде скачков связок линий потока между соседними центрами пиннинга. Считается, что при скачках связки движутся как единое целое, так как радиус отталкивающего взаи-

* В некоторых сверхпроводящих соленоидах конечная скорость затухания тока обусловлена сопротивлением в соединениях между отдельными проводами.

** Имеются в виду сквиды (см. гл. 6). — Прим. ред. пер.

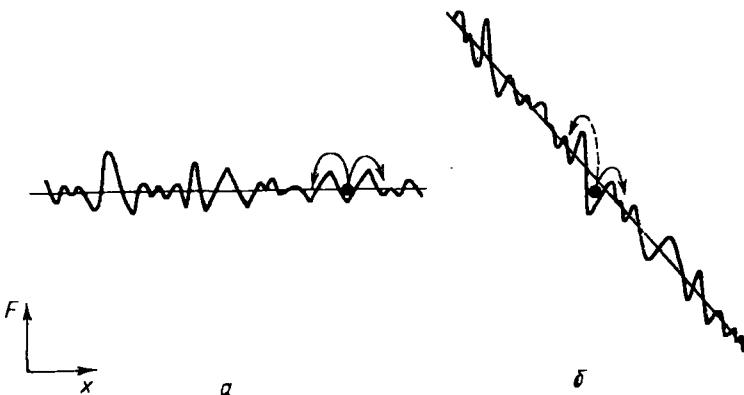


Рис. 5.9. Схематическое представление перескоков связок вихрей через барьеры в соседние центры пиннинга (по ординате отложена относительная величина полной свободной энергии как функция положения центра связки вихрей): а — средняя сила равна нулю; б — средняя сила, возникающая благодаря току (или dB/dx), делает более предпочтительными скачки в направлении «вниз с горки»

модействия между вихрями, примерно равный λ , как правило, пре-
восходит расстояние между вихревыми линиями. Для частоты
скаков предполагается справедливым обычное выражение

$$R = \omega_0 \exp\{-F_0/kT\}, \quad (5.75)$$

в котором ω_0 — некоторая характерная частота колебаний линии потока, не известная точно, но предположительно заключенная в интервале частот от 10^5 до 10^{11} с⁻¹. Величина F_0 есть активационная свободная энергия, или высота барьера, т. е. увеличение свободной энергии системы при нахождении связки в неустойчивой точке между двумя устойчивыми положениями, в которых эта энергия имеет локальные минимумы. При отсутствии градиента плотности потока скачки с равной вероятностью происходят во всех направлениях и средняя скорость крипа равна нулю.

Так как различные длины, такие, как λ , ξ_0 , l , расстояние между пиннинг-центрами, ширина пиннинг-центров и т. д. входят в теорию в комбинациях, которые точно неизвестны и зависят от деталей модели, для всех этих длин введем единый микроскопический масштаб $L \approx 10^{-5}$ см *. Такой подход упрощает обсуждение пространственных зависимостей и дает возможность сделать правильные оценки по порядку величины, тем самым позволяя построить максимально простую теорию.

Теперь введем градиент плотности потока, который, как это схематически показано на рис. 5.9, перекаивает пространственную зависимость энергии, облегчая скачки в направлении уменьшения градиента плотности потока по сравнению с противополож-

* Детальный теоретический анализ экспериментальных данных по крипу потока, который позволяет провести более точную, чем используемая здесь, классификацию всех этих параметров, был выполнен в работе [34].

ным направлением. Изменение высоты барьера определяется работой, совершенной движущей силой по его преодолению. Поскольку плотность силы равна a , то сила, действующая на связку потока поперечным сечением L^2 и длиной L , равна aL^3 , поэтому работа по ее перемещению на расстояние L равна $\Delta F = aL^4$.

Для суммарной частоты скачков в направлении действия силы a это приводит к выражению

$$R = R_+ - R_- = \omega_0 \exp\left\{-\frac{F_0}{kT}\right\} \left(\exp\left\{\frac{\Delta F}{kT}\right\} - \exp\left\{-\frac{\Delta F}{kT}\right\} \right), \quad (5.76)$$

что равносильно суммарной скорости крипа, равной

$$v = 2v_0 \exp\left\{-\frac{F_0}{kT}\right\} \operatorname{sh} \frac{aL^4}{kT}. \quad (5.77)$$

Величина $v_0 = \omega_0 L \approx 10^{3 \pm 3}$ см/с равна скорости крипа, которая имела бы место при отсутствии барьера.

Теперь необходимо, хотя бы грубо, оценить высоту барьера F_0 . Выражение для F_0 полезно представить в следующем виде:

$$F_0 = pL^3 (H_c^2 / 8\pi). \quad (5.78)$$

Коэффициент p учитывает относительную модуляцию энергии конденсации в объеме L^3 за счет пиннинга. Коэффициент p мал, поскольку любые сильные пиннинг-центры (такие, как пустоты), как правило, занимают только малую часть объема, а любые протяженные центры пиннинга (например, области внутренних напряжений) вызывают только относительно небольшие изменения сверхпроводящих свойств. Для оценки порядка величины положим $p \approx 10^{-3}$ и $H_c \approx 2000$ Э, тогда $F_0/k \approx 1200$ К, поэтому F_0 гораздо больше kT . Взяв эти оценки, получаем

$$V_0 = v_0 \exp\left\{-\frac{F_0}{kT}\right\} \approx 10^{3 \pm 3} \exp\left\{-\frac{1200}{T}\right\} \approx 10^{3 \pm 3 - 500/T}. \quad (5.79)$$

Из этого выражения видно, что даже большая неопределенность в $v_0 = \omega_0 L$ полностью затушевывается небольшими изменениями энергии пиннинга и можно, по существу, забыть обо всех множителях, за исключением экспоненциального $\exp\{-F/kT\}$. Проведенные выше оценки показывают, что в интересующем нас температурном интервале от 1 до 10 К V_0 может изменяться от $\sim 10^{-500}$ до 10^{-50} см/с. Поэтому суммарная скорость крипа $v = 2V_0 \operatorname{sh}(aL^4/kT)$ является практически ненаблюдаемой, если только сомножитель $\operatorname{sh}(aL^4/kT)$ не слишком велик. Если же он велик, то $2\operatorname{sh}(aL^4/kT) \approx \exp\{aL^4/kT\}$ и для v просто находим

$$v = V_0(T) \exp\left\{\frac{aL^4}{kT}\right\} = v_0 \exp\left\{\frac{-F_0 + aL^4}{kT}\right\}. \quad (5.80)$$

Если не выполнено неравенство $aL^4 \geq F_0$, то из уравнения (5.80) следует, что при $T=0$ скорость крипа $v=0$. Следовательно, плотность критической силы при $T=0$ равна

$$\alpha_c(0) = F_0(0)/L^4. \quad (5.81)$$

Этот параметр был уже использован нами ранее при обсуждении критического состояния. Воспользуемся полученным равенством и исключим L^4 из уравнения (5.80):

$$v = v_0 \exp \left\{ - \frac{F_0(T) - F_0(0) [\alpha/\alpha_c(0)]}{kT} \right\}. \quad (5.82)$$

Так как для обнаружения крипа требуется наличие некоторой минимальной скорости v_{\min} , можно определить эффективное значение $\alpha_c(T)$ как такую величину α , которая приводит к появлению этой минимально обнаружимой скорости крипа. Из полученных выше выражений видно, что

$$\frac{\alpha_c(T)}{\alpha_c(0)} = \frac{F_0(T)}{F_0(0)} - \frac{kT}{F_0(0)} \ln \frac{v_0}{v_{\min}}. \quad (5.83)$$

Теперь, так как H_c и характерные длины стремятся к постоянным значениям при $T \rightarrow 0$, при $T \ll T_c$ можно записать $F_0(T) \approx F_0(0)(1 - \beta t^2)$, где $t = T/T_c$ и β порядка единицы. Поэтому выражение (5.83) можно представить в виде

$$[\alpha_c(T)/\alpha_c(0)] \approx 1 - \beta t^2 - \gamma t, \quad t \ll 1, \quad (5.84)$$

где $\gamma = [kT_c/F_0(0)] \ln(v_0/v_{\min}) \approx 0.1$ для выбранных нами типичных значений величин. Из этого выражения видно, что при достаточно низких температурах $t \leq \gamma/\beta \approx 0.1$ в выражении (5.84) преобладает линейное по t слагаемое. Эта линейная температурная зависимость $\alpha_c(T)$ возникает из-за множителя kT в экспоненте, описывающей термическую активацию. Как выяснили Ким и Андерсон, предложенный механизм является практически единственным, способным объяснить большие вариации α_c при очень низких температурах, где H_c , ξ и λ выходят на постоянные значения. Более того, порядок производной $d\alpha/dT$, полученной таким способом, находится в разумном согласии с экспериментальными результатами Кима и др. [35]. Однако если наши численные оценки приближенно справедливы, то из формулы (5.84) ясно, что везде, за исключением низких температур (обычно меньших 1 K), температурная зависимость α_c должна определяться изменением силы пиннинга (отраженным членом βt^2), а не изменением скорости крипа (характеризуемым слагаемым γt). Это находится в согласии с выводами, полученными Кэмбеллом и др. [36] из сравнения температурных зависимостей J_c с обратимой кривой намагничивания различных материалов.

Теперь рассмотрим временную зависимость крипа. Из-за математической сложности полного рассмотрения для начала простым способом докажем, что следует ожидать логарифмической зависимости α_c от времени. Основная идея доказательства состоит в том, что движущая сила примерно пропорциональна индукции B , еще захваченной в отверстии рассматриваемого нами полого цилиндра. Поэтому, принимая во внимание экспоненциальную зависимость скорости крипа от движущей силы, можно ожидать, что

$$\frac{dB}{dt} \approx -C \exp\left(-\frac{B}{B_0}\right), \quad (5.85)$$

где t теперь обозначает время. Это уравнение действительно имеет логарифмическое решение:

$$B = \text{const} - B_0 \ln t. \quad (5.86)$$

Теперь проведем более строгое рассмотрение. Опять будем пренебречь различием между B и H , обозначая их локальную величину через B . Для простоты рассмотрим одномерную задачу:

В направлено вдоль \hat{z} ; ∇B_z и скорость движения линии потока **v** — вдоль \hat{x} . Закон сохранения числа линий магнитного потока теперь принимает вид

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial (Bv)}{\partial x}. \quad (5.87)$$

Скорость v связана с параметром плотности силы α соотношением (5.83), которое удобно переписать в другом виде:

$$v = V_0 \exp\{\alpha/\alpha_1\}, \quad (5.88)$$

где, как и в формуле (5.71),

$$\alpha = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B^2}{8\pi} \right), \quad (5.89)$$

а α_1 , согласно выражению (5.83) и предыдущим оценкам величины $F_0/k = 1200$ К, примерно равно

$$\alpha_1 = \frac{kT\alpha_c(0)}{F_0(0)} \approx \frac{\alpha_c(0)}{300}. \quad (5.90)$$

Дифференцируя по времени соотношение (5.89) и переставляя порядок дифференцирования по времени и координате, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \frac{B^2}{4\pi} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{B}{4\pi} \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{B}{4\pi} \frac{\partial (Bv)}{\partial x} \approx \\ &\approx \frac{B^2}{4\pi} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{B^2}{4\pi} V_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \exp\left\{\frac{\alpha}{\alpha_1}\right\}. \end{aligned} \quad (5.91)$$

Пренебрежение пространственной производной от B по сравнению с производной от v оправдывается тем обстоятельством, что зависимость результата от пространственных производных B примерно в $\alpha_c(0)/\alpha_1 \approx 300$ раз слабее, чем явная зависимость от B . По тем же причинам можно считать величину $B^2 V_0 / 4\pi$ постоянной C . Возникающее при этом уравнение удовлетворяется простым решением

$$C \exp\{\alpha/\alpha_1\} = (ax^2 + bx + c) g(t). \quad (5.92)$$

Оно удовлетворяет дифференциальному уравнению (5.91), если $g(t)$ является решением уравнения

$$\frac{dg}{dt} = \frac{2ag^2}{\alpha_1}.$$

Интегрируя, находим

$$g(t) = -\alpha_1/2at.$$

Чтобы не вводить постоянную интегрирования, отсчитываем время от начального момента, при котором $g=\infty$ и который соответствует бесконечно быстрому начальному крипу. Подставляя полученное значение $g(t)$ в выражение (5.92) и логарифмируя, находим

$$\alpha = F(x) - \alpha_1 \ln t, \quad (5.93)$$

где $F(x)$ не зависит от t . В действительности, так как крип бесконечно медлен, пока α не очень близко к α_c , в рассматриваемой области пространства $F(x)$ должно примерно равняться α_c . Поэтому выражение (5.93) можно приближенно заменить на следующее:

$$\alpha = \alpha_c - \alpha_1 \ln t. \quad (5.93a)$$

Применяя это выражение к задаче о магнитном потоке, захваченном в полом сверхпроводящем цилиндре с толщиной стенок d , в котором $\alpha \approx B_{\text{внутр}}^2/8\pi d$, видно, что

$$B_{\text{внутр}} \approx B_c \left(1 - \frac{\alpha_1}{2\alpha_c} \ln t \right), \quad (5.94)$$

где B_c приблизительно равно $B_{\text{внутр}}$, приводящему к критическому состоянию. По оценкам (5.90), $\alpha_1/\alpha_c \approx 1/300$. При использовании выражения (5.94) необходимо помнить, что бесконечная расходимость при $t=0$ появилась из-за специального выбора начала отсчета времени и что это простое выражение справедливо только для относительно малых пространственных изменений B . Поэтому не надо придавать значения тому факту, что выражение (5.94) меняет знак по прошествии достаточного периода времени.

Полученный результат и необычная логарифмическая зависимость от времени были хорошо подтверждены экспериментально. Например, в первых экспериментах Кима, Хемпстеда и Стрнада [37] с магнитным потоком, замороженным в трубках из NbZr, наблюдалось логарифмическое спадание потока на отрезке времени от 10 до 5000 с после резкого изменения внешнего магнитного поля. В типичном случае, показанном на рис. 5.10, наблюдалось падение захваченного поля $B_{\text{внутр}} \approx 400$ Гс со скоростью порядка 5 Гс за каждую временную декаду. Сопоставляя эту величину с оценкой (5.94), видим, что она соответствует $\alpha_1/\alpha_c = -(400 \ln 10)^{-1} \approx 1/900$. С учетом сделанных выше сильных приближений и грубых оценок совпадение по порядку величины с полученным значением $1/300$ является удовлетворительным.

Интересно экстраполировать логарифмическую зависимость захваченного поля от времени и посмотреть, насколько долго возможно существование незатухающих токов. Подставляя в выражение (5.93a) значение $\alpha = B_{\text{внутр}}^2/8\pi d$, видим, что перемена знака произошла бы при $t = \exp\{\alpha_c/\alpha_1\} \approx \exp\{900\} \approx 10^{400}$ с $\approx 10^{390}$ лет.

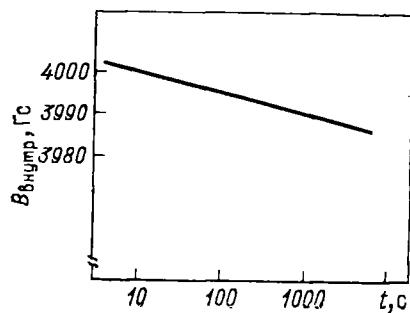


Рис. 5.10. Затухание «незатухающего» тока в полом цилиндре из сверхпроводника II рода (по данным работы [37])

Конечно логарифмическая зависимость не является точной при столь большом изменении B . Например, когда B станет меньше H_{c1} , утечка магнитного потока должна прекратиться, поскольку в этом случае линии потока не могут стационарно находиться в объеме сверхпроводника. Тем не менее проведенная оценка дает представление о временных масштабах явления. Таким образом, с практической точки зрения циркулирующие токи являются незатухающими, хотя в принципе они где-то в будущем и должны затухнуть.

На практике сверхпроводящие магниты работают в режиме незатухающих токов при достаточно малых a . Это необходимо для того, чтобы затухание тока было совершенно незаметно в течение нескольких дней. При этом состояние сверхпроводника эквивалентно такому, которое было бы при начальном значении $\alpha = \alpha_c$, но по прошествии очень большого промежутка времени после начального момента, так что «следующая временная декада» представляет собой исключительно большой период времени.

5.7.2. Термальная неустойчивость

Диссипация энергии, связанная с крипом потока, может привести к катастрофическим последствиям, если она выходит из под теплового контроля, в результате чего материал быстро нагревается и вся запасенная в магните энергия внезапно переходит в тепловую. Для предотвращения этого эффекта необходимо, чтобы система обладала тепловой устойчивостью, т. е. если в некотором объеме образца произошло увеличение температуры на δT , то это приращение в дальнейшем должно спадать до нуля, а не продолжать нарастать. Условие устойчивости состоит в следующем: для заданного δT отток тепла в окружающий материал должен пре-восходить рост диссипации, связанной с ускорением крипа.

Начнем с изучения эффекта воздействия увеличения температуры δT на рассеиваемую в единице объема мощность P . Так как величина α есть объемная плотность силы, то умножение ее на скорость движения вихрей определит интенсивность совершающейся работы. В результате диссипативных процессов в кернах ли-

ний потока эта работа полностью идет на нагревание системы. Поэтому для P можно написать следующее простое равенство:

$$P = \alpha v = \alpha v_0 \exp\{-(F_0 - \alpha L^4)/kT\}. \quad (5.95)$$

Из этого выражения при типичных значениях величин, использованных ранее, получим следующую оценку:

$$\frac{T}{P} \frac{\partial P}{\partial T} = \frac{F_0}{kT} - \frac{\alpha L^4}{kT} - \frac{\partial F_0}{\partial (kT)} = -\ln \frac{v}{v_0} - \frac{\partial F_0}{\partial (kT)} \approx 100. \quad (5.96)$$

Таким образом, малое увеличение температуры приведет к значительному большему увеличению нагрева, и если охлаждение не очень эффективно, то возникнет неустойчивость.

Для исследования теплового баланса используем уравнение теплопроводности:

$$C \frac{\partial T}{\partial t} = K \nabla^2 T + P, \quad (5.97)$$

в котором C — удельная теплоемкость, K — коэффициент теплопроводности, а P — подводимая к единице объема мощность. В стационарном состоянии $T(r)$ является решением уравнения $K \nabla^2 T + P = 0$. Теперь предположим, что в небольшом объеме существует флукутация температуры $\delta T > 0$. Вопрос заключается в следующем: будет ли слагаемое $K \nabla^2(\delta T)$ достаточно отрицательным для того, чтобы с избытком превзойти по абсолютной величине $(\partial P / \partial T) \delta T$ и обеспечить тем самым отрицательный знак у $\partial(\delta T) / \partial t$, а значит и устойчивость. Для флукутации, локализованной в объеме r , слагаемое $K \nabla^2(\delta T)$ по порядку величины будет равно $-(K/r^2)\delta T$. Объединяя эту оценку с оценкой (5.96), получаем

$$C \frac{\partial(\delta T)}{\partial t} = \left(-\frac{K}{r^2} + \frac{100P}{T} \right) \delta T. \quad (5.98)$$

Таким образом, условие устойчивости имеет вид

$$K/r^2 > 100P/T. \quad (5.99)$$

Из этого условия видно, что требования являются наиболее жесткими, когда r принимает максимально возможное значение, т. е. когда в отсутствие внутреннего охлаждения оно порядка размера всего магнита. Полезный способ оценки величины P/T следует из рассмотрения стационарного превышения температуры ΔT над температурой термостата. Из уравнения $K \nabla^2 T + P = 0$ получаем, что $-K(\Delta T)/r^2 + P = 0$. Используя это соотношение для упрощения условия (5.99), находим

$$\Delta T/T \leq 10^{-2}. \quad (5.100)$$

Итак, для предотвращения теплового выхода из-под контроля магнит должен всегда работать в таких условиях, когда стационарное рассеяние энергии из-за крипа потока настолько мало, что результирующее изменение температуры не превышает 1%.

В действительности магниты обычно работают в условиях, в которых термически активированный крип потока пренебрежимо мал и пределы на их характеристики определяются из других соображений, обсуждение которых будет проведено в следующем разделе.

Проведенный анализ показывает, что в правильной конструкции должна быть предусмотрена хорошая теплопроводность и хороший контакт с гелиевым резервуаром. Материалы с большим H_{c2} , использующиеся в магнитах, обычно имеют малую длину свободного пробега электронов и, следовательно, низкую теплопроводность, что делает их потенциально неустойчивыми. На практике эта тенденция к неустойчивости почти всегда устраняется в результате покрытия сверхпроводника металлом типа меди. Такой слой меди по сравнению со сверхпроводником является диэлектриком, но обеспечивает прекрасный теплоотвод за счет уменьшения объема, приходящегося на провод.

5.8. Сверхпроводящие магниты для переменных полей

Кроме обеспечения тепловой устойчивости, наличие медного покрытия будет также приводить к демпфированию изменений магнитного поля вихревыми токами Фуко. Это улучшает стабильность магнита по отношению к флуктуациям, но зато ограничивает скорость, с которой могут происходить требуемые изменения поля без чрезмерного рассеяния энергии. Ввиду потенциальной важности сверхпроводящих магнитов для создания импульсных (в ускорителях частиц) и переменных (на промышленных частотах) полей значительные усилия были направлены на нахождение способов производства магнитов, обладающих устойчивостью и в то же время допускающих быстрые изменения поля. В настоящее время наиболее перспективно использование композитных проводников, состоящих из тонких сверхпроводящих нитей — как правило, ~ 30 мкм в диаметре, — внедренных в матрицу из нормального металла. Подробный анализ такой системы был проведен в работе [38]. В этом разделе будет дано краткое изложение такого анализа.

Фундаментально важным оказывается соотношение между скоростями движения тепла и магнитного потока в материале магнита. Из уравнения теплопроводности (5.97) можно определить коэффициент тепловой диффузии:

$$D_T = K/C. \quad (5.101)$$

Физический смысл этого параметра состоит в том, что он определяет время, необходимое для диффузии тепла на расстояние L , приводящей к выравниванию температурного градиента:

$$\tau_T = L^2/D_T. \quad (5.101a)$$

Из уравнений Максвелла можно вывести аналогичное соотноше-

ние, описывающее диффузию магнитного поля, с коэффициентом диффузии, равным

$$D_M = c^2 \rho / 4\pi = 10^9 \rho / 4\pi, \quad (5.102)$$

где оба приведенных выражения эквивалентны, если ρ измеряется соответственно в единицах СГС или в омах на сантиметр. Тогда время, необходимое для диффузии потока на расстояние L , оказывается порядка

$$\tau_M = L^2 / D_M. \quad (5.102a)$$

В чистых металлах при температуре 4 К типичные численные значения этих коэффициентов таковы: $D_T = 10^3 \text{ см}^2/\text{с}$, $D_M = 1 \text{ см}^2/\text{с}$, т. е. тепло движется гораздо быстрее магнитного потока. Однако в сплавах (таких, как сверхпроводящие материалы в нормальном состоянии или нормальные металлические сплавы) эти численные значения, грубо говоря, меняются местами: магнитный поток движется гораздо быстрее, чем тепло. Отметим, что в композитных нитевидных проводниках $D_M(\text{Cu}) \approx D_T$ сердцевины $\approx 1 \text{ см}^2/\text{с}$. Учитывая множитель L^2 в соответствующих оценках времен, видим, что это приводит к тому, что тепло может уходить от нитевидных сердцевин быстрее, чем магнитный поток успевает дифундировать через матрицу из чистой меди от одной нити к другой. Такое эффективное локальное охлаждение нитей способствует высокой стабильности композитных материалов.

5.8.1. Скачки потока

Теперь, заменив анализ крипа потока, проведенный в предыдущих разделах, более простым, изучим стабилизацию скачков потока*. При этом для описания свойств сверхпроводника используем модель критического состояния Бина с плотностью критического тока J_c , ниже которой сопротивление отсутствует, а выше которой материал является нормальным. Поскольку крип важен в небольших интервалах температур и полей, в практических важных случаях такое упрощение является оправданным.

Для простоты вычислений рассмотрим одномерную модель, в которой сверхпроводящие слои толщиной d расположены параллельно полю. Координату x будем отсчитывать по оси, нормальной к поверхности слоев, от середины одного из проводников. Ограничимся обычным случаем достаточно тонкого проводника, в который магнитное поле проникает полностью, т. е. предположим, что $H > H_s = 2\pi J_c d / c$, где H_s — экранирующее поле, определяемое выражением (5.73). В этом случае для магнитной индукции B получаем

$$B(x) = H - (4\pi/c) J_c \left(\frac{1}{2} d - |x| \right). \quad (5.103)$$

* См. также обзор [41*]. — Прим. ред. пер.

При написании этого симметричного выражения с одинаковым значением H на обеих поверхностях считалось, что полем транспортных токов, текущих по исследуемому проводнику, можно пренебречь.

Теперь предположим, что произошло небольшое флуктуационное увеличение температуры на δT , приводящее к уменьшению критического тока на $\delta J_c = (dJ_c/dT)\delta T$. Уменьшение тока вызывает изменение $B(x)$, что приводит к появлению электрического поля E . Как было показано многими авторами, рассеиваемая мощность Q , связанная с такой неравновесностью тока, может быть представлена в виде произведения J_c на возникшее электрическое поле. Усредняя по единичному объему, для выделившего тепла получаем

$$\delta Q = (\pi/3c^2) d^2 J_c \delta J_c. \quad (5.104)$$

Результирующее увеличение температуры равно $\delta T' = \delta Q/C$, где C — удельная теплоемкость. Если $\delta T' < \delta T$, то процесс приводит к конечному значению δT , меньшему первоначального, и система оказывается устойчивой относительно таких флуктуаций. Из приведенных выше соображений следует, что такая ситуация реализуется в случае

$$d^2 < \frac{3c^2 C}{\pi J_c} \left(\frac{-dJ_c}{dT} \right)^{-1}. \quad (5.105)$$

Поскольку считалось, что в процессе развития флуктуации тепло не покидает рассматриваемый объем, выражение (5.105) является условием *адиабатической* устойчивости. Таким образом, оно является достаточным критерием устойчивости, так как отвод тепла в медную матрицу будет способствовать уменьшению флуктуации. Для типичных значений параметров нитей из NbTi критерий стабильности приводит к следующему ограничению их диаметра: $d \leq 0,01$ см.

Экспериментальные результаты находятся в согласии с этим заключением. На практике для уменьшения потерь в импульсных полях диаметр нитей d выбирают даже еще меньшим, чем требует критерий устойчивости, что гарантирует безопасность работы.

Интересно найти полное количество выделившегося тепла при уменьшении тока J_c до нуля, т. е. при полном скачке потока. Интегрируя соотношение (5.104), получаем

$$Q = (\pi/6c^2) d^2 J_c^2. \quad (5.106)$$

Предполагая удельную теплоемкость C постоянной, при типичных значениях параметров для увеличения температуры получаем $\Delta T = Q/C \approx 3 \times 10^4 d^2 (K)$. Для любого достаточно большого диаметра нити d , не удовлетворяющего критерию стабильности (5.105), ΔT будет сравнимо с температурой T . При столь большом увеличении температуры $C(\propto T^3)$ будет значительно увеличиваться, приводя к возможности выполнения критерия (5.105), и

рост флюктуаций прекратится прежде, чем J_c уменьшится до нуля. Такие «частичные скачки потока» приводят к некоторому изменению внутренних экранирующих токов без прерывания транспортного тока.

Динамический критерий стабильности можно вывести таким же общим способом, но с учетом характерного времени изменения магнитного потока, а также скорости диффузии тепла в медь. Результат такого расчета совпадает с формулой (5.105) с точностью до множителя, по порядку величины равного отношению коэффициентов диффузии D_T (сердцевины)/ D_M (Cu), который, как было отмечено выше, обычно порядка единицы. При получении этого результата предполагалось, что температура меди не возрастает. Такое предположение несправедливо для магнитов, охлаждаемых с торцов, так как тепло должно распространяться на значительное расстояние, прежде чем достигнет гелиевой ванны. Как было отмечено Вильсоном и др. [38], в этом случае в критерий стабильности войдут другие параметры системы.

5.8.2. Скрученные композитные проводники

Проведенные выше рассуждения показали, что композитные проводники, состоящие из большого числа сверхпроводящих нитей, заключенных в медной матрице, должны обладать прекрасной стабильностью относительно скачков потока. Теперь обратимся к случаю переменных во времени полей, когда через медную матрицу наряду с тепловым потоком будет протекать и электрический ток. В этом случае возможны два механизма потерь: потери, связанные с вихревыми токами в меди, которые зависят от скорости изменения поля, и гистерезисные потери в сверхпроводнике, которые, естественно, не зависят от этой скорости. Как было детально показано, использование тонкой проволоки с изолированными друг от друга витками позволяет снизить потери, связанные с нормальными вихревыми токами. Поэтому гистерезисные потери, как правило, преобладают. Оценим их величину.

Возвращаясь к модели с тонкими сверхпроводящими слоями, внутри которых поле определяется выражением (5.103), видим, что $B(x)=H$, и, следовательно, величина индуцированного электрического поля, согласно закону Фарадея, равна $E_y=\dot{H}x/c$. Прививая, как и раньше, локальную мощность диссипации энергии в единице объема P величине J_cE и усредняя по толщине сверхпроводящего слоя, для единицы объема получаем

$$P = \dot{Q} = J_c \dot{H}d/4c. \quad (5.107)$$

Таким образом, тепло, выделяющееся при любом заданном изменении ΔH , как и следовало ожидать для гистерезисных потерь, не зависит от скорости этого изменения. Для диссипации энергии за полный цикл, в результате которого поле изменилось на $\pm\Delta H$

относительно рабочей точки, можно написать выражение $Q = -J_c d \Delta H / c$. Из этого результата следует, что если использовать достаточно тонкие сверхпроводящие нити, то эти потери можно значительно уменьшить.

При выводе соотношения (5.107) предполагалось, что переменное поле полностью проникает в нить. Это предположение справедливо в тех случаях, когда магнитное поле изменяется в широком диапазоне, например когда в магните поле H меняется от нуля до H_{\max} . Однако оно не выполняется при работе в режиме постоянного поля с одновременным наложением на него переменного поля малой амплитуды $\Delta H < H_s$. В этом случае необходимо учитывать пространственную неоднородность распределения переменного магнитного поля. В результате получается более точное выражение для потерь при перецикливании на величину $\pm \Delta H$ относительно рабочей точки:

$$Q = \frac{J_c d \Delta H}{c} - \frac{4\pi J_c^2 d^2}{3c^2}, \quad \Delta H > H_s = \frac{2\pi d J_c}{c}, \quad (5.108a)$$

$$Q = \frac{(\Delta H)^3 c}{12\pi^2 d J_c}, \quad \Delta H < H_s. \quad (5.108b)$$

Принятое ранее приближение (5.107) эквивалентно сохранению лишь первого слагаемого в выражении (5.108a). При $\Delta H = H_s$, т. е. при наименьшем значении переменного поля, при котором еще происходит его полное проникновение в сверхпроводник, поправочный член в формуле (5.108a) уменьшает первое слагаемое в три раза. При этом значении переменного поля аналогичный результат следует из выражения (5.108b), в дальнейшем потери уменьшаются как $(\Delta H)^3$. Таким образом, истинные потери энергии могут быть гораздо меньше, чем оцененные по формуле (5.107).

Далее замечаем, что, как следует из выражения (5.108), $Q \rightarrow 0$ как при $d \rightarrow 0$, так и при $d \rightarrow \infty$, т. е. диссипация максимальна при промежуточных значениях d . Это можно объяснить, вводя безразмерную толщину

$$\beta = 2\pi J_c d / c \Delta H = d/d_s = H_s / \Delta H,$$

которая является отношением d к такой толщине пластины d_s , при которой еще происходит проникновение в нее изменения поля ΔH . Используя введенное обозначение, перепишем формулы (5.108) в следующем виде:

$$Q = (\Delta H)^2 (3\beta - 2\beta^2) / 6\pi, \quad \beta < 1, \quad (5.109a)$$

$$Q = (\Delta H)^2 / 6\pi\beta, \quad \beta > 1. \quad (5.109b)$$

Эти выражения имеют максимальное значение $Q = 3(\Delta H)^2 / 16\pi$ при $\beta = 3/4$ и стремятся к нулю как при $\beta \rightarrow 0$, так и при $\beta \rightarrow \infty$. Таким образом, есть две стратегии уменьшения Q : делать β либо достаточно малым, либо достаточно большим. При типичных параметрах материалов для обеспечения термической устойчивости

диаметр нитей не должен превышать 200 мкм, а сделать их тоньше ~ 10 мкм весьма трудно. Оказывается, что для типичных значений плотностей критического тока и указанного диапазона изменения d в полях $\Delta H < 500$ Э более толстые нити дают меньшие потери, в то время как нити небольшого диаметра предпочтительнее для создания переменных полей большой амплитуды, например в импульсных магнитах.

То, что нити должны действовать одновременно и независимо друг от друга, накладывает важное ограничение на применимость выражения (5.108). Предположение об их независимости выполняется, если каждая нить электрически изолирована от своих соседей. Однако медная матрица обеспечивает хороший электрический контакт между всеми нитями в одном проводнике. Это приводит к существенному изменению распределения тока при больших скоростях изменения поля, так как возникающие разности потенциалов могут привести к протеканию тока через медь от одной нити к другой. В этом случае говорят, что нити «связаны», а эффективный диаметр не равен больше диаметру одной нити. Напротив, он может возрасти до размеров всего массива большого числа (от 10 до 100) нитей проводника, и эффективность множественности тонких нитей теряется. Эта деградация рабочих характеристик при больших скоростях изменения поля, как было впервые отмечено П. Ф. Смитом, может быть существенно уменьшена скручиванием проводников с шагом, меньшим некоторой характерной длины l_c , который зависит от скорости изменения поля и других параметров. Обратимся к анализу упрощенной модели, которая позволяет продемонстрировать наличие таких свойств у скрученных проводников и определить характерную длину.

Рассмотрим два тонких сверхпроводящих слоя толщиной d , шириной W и конечной длиной $2l$, разделенных прослойкой толщиной d' из нормального металла с удельным электрическим сопротивлением ρ , причем для простоты вычислений предположим, что $l \gg d' \gg d$. Такая конфигурация представлена на рис. 5.11. Далее предположим, что параллельно ширине пленок W приложено магнитное поле H , изменяющееся с постоянной скоростью \dot{H} . Теперь применим закон Фарадея к различным замкнутым контурам и определим индуцированную э. д. с. и результирующие токи.

Вначале определим потери, связанные с вихревыми токами в нормальном металле, в отсутствие сверхпроводников. Если отсчитывать координату x от середины слоя нормального металла, то $E_y \approx Hx/c$ и $E_x \ll E_y$. Локальное значение рассеиваемой мощности в этом случае равно $P = JE = E^2/\rho$. Усредняя по координате x , для среднего значения рассеиваемой в единице объема мощности получаем

$$P = \dot{H}^2 d'^2 / 12\rho c^2. \quad (5.110)$$

Если положить величину d' равной полному диаметру композитного проводника, то можно оценить потери, обусловленные вих-

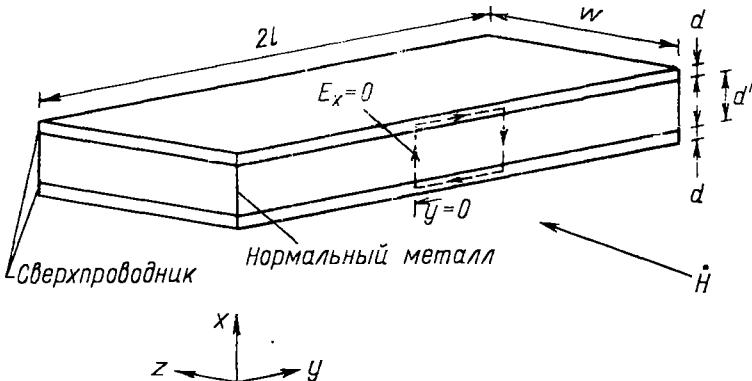


Рис. 5.11. Ламинарная модель композитного проводника, состоящего из большого числа нитей. Как показано в тексте, применение закона Фарадея к замкнутым цепям, одна из которых представлена на рисунке пунктиром, позволяет приблизительно определить токи и конфигурации э. д. с. в различных случаях

ревыми токами, в отсутствие сверхпроводников. Чтобы получить представление о величине этих потерь, рассмотрим в качестве примера магнит с намоткой из провода диаметром 0,05 см и удельным сопротивлением $\rho = 0,01 \text{ p}_{\text{cu}}$ (300 К). В этом случае $P \approx 10^{-12} \dot{H}^2$, где под \dot{H}^2 следует понимать среднее значение этой величины по объему катушек магнита. Даже при таких больших скоростях изменения, как 10^3 Гс/с, для магнита с объемом катушек 10^3 см^3 эти потери составят всего 10^{-3} Вт. Однако при работе на переменном токе, когда $\dot{H} = \omega H_{\text{max}}$, эти потери на технических частотах могут стать весьма значительными. Например, на частоте 60 Гц и при $H_{\text{max}} = 10^4$ Гс для магнита с объемом катушек 10^3 см^3 P равно 10^4 Вт, что является недопустимо большой величиной при охлаждении до 4 К. Для уменьшения этой величины до разумных значений нужно использовать более тонкий провод и заменить медную матрицу сплавом с более высоким удельным сопротивлением при низких температурах. Однако снизить таким образом потери более чем в 10^3 раз трудно. Из приведенных рассуждений можно сделать следующее заключение. Потери, связанные с наличием вихревых токов в нормальном металле, можно уменьшить до пренебрежимо малых значений в диапазоне сравнительно небольших скоростей изменения поля, но при скоростях порядка 10^4 Гс/с они будут настолько значительны, что справиться с ними будет трудно *.

* Может показаться странным, почему такие потери не порождают проблему отвода тепла в обычных трансформаторах. Основное отличие заключается в том, что даже для полей в железном сердечнике $B \approx 10^4$ Гс поля в катушках из медных проводов составляют 10 Гс, поэтому потери на вихревые токи происходят в основном в сердечнике. Их уменьшают разбиением сердечника на слои толщиной 0,04 см; кроме того, ρ кремнистой стали примерно в 500 раз превы-

Теперь учтем наличие сверхпроводящих слоев. Применим закон Фарадея к замкнутому контуру, проходящему, как показано на рис. 5.11, через оба сверхпроводящих слоя. До тех пор пока плотность тока в сверхпроводящих слоях меньше критической плотности J_c , все индуцированное напряжение падает на участке, проходящем через нормальный металл, приводя к плотности тока между слоями, равной $J_x = \dot{H}y/c\rho$. Интегрируя по координате y , получаем, что полный ток, текущий на длине $\Delta y = l_c$ с одного слоя на другой, становится равным критическому току этого слоя при

$$l_c^2 = 2cJ_c d\rho / \dot{H}. \quad (5.111)$$

Таким образом, если $l < l_c$, то предположение об отсутствии падения напряжения в сверхпроводнике оказывается самосогласованным и циркулирующие токи не приводят к рассеянию энергии в сверхпроводнике. Однако потери на вихревые токи в нормальном металле сильно возрастают, так как э. д. с. самоиндукции падает на значительно более коротких расстояниях. Вследствие этого множитель d'^2 в выражении (5.110) надо заменить на $(2l)^2$.

Однако при $l > l_c$ плотность тока в центре сверхпроводника должна была бы превзойти J_c , что указывает на то, что сделанное предположение об отсутствии диссипации уже не является самосогласованным. Реальная физическая ситуация состоит в том, что в центральной части слоев, т. е. на расстояниях, больших l_c от краев, плотность сверхтока постоянна и равна J_c . Поэтому ток не будет вытекать из сверхпроводника в нормальный металл, и, следовательно, падение напряжения в нем будет отсутствовать. Таким образом, вся э. д. с. будет приложена к центральной части сверхпроводника, приводя к появлению в ней напряженности электрического поля, равной $\dot{H}d'/2c$. Возникающая при этом плотность рассеиваемой энергии равна $J_c \dot{H}d'/2c$, т. е. точно тому же значению, которое получилось, если бы прослойка из нормального металла была заменена массивным сверхпроводником. Если усреднить возросшие потери в меди на участках длиной l_c вблизи каждого из концов структуры, в которых компонента плотности тока J_x в нормальном металле изменяется как $(H/c\rho)[y - (l - l_c)]$, то окажется, что плотность потерь равна $2/3$ плотности энергии, рассеиваемой в центральной части сверхпроводника. Таким образом, при $l > l_c$ теряется весь выигрыш от использования сверхпроводящих слоев.

При скоростях изменения магнитного поля от 10 до 10^4 Гс/с длина l_c заключена, как правило, в диапазоне от 10 до 100 см. Ясно, что в работающих магнитах длина намотки значительно пре- восходит l_c . Однако, как было отмечено Смитом, можно нарушить

шает ρ меди при 4 К. Все это уменьшает плотность рассеиваемой энергии примерно в 1000 раз, т. е. настолько, что становится возможным теплоотвод при комнатной температуре.

связь между нитями, если скрутить провод с шагом, значительно меньшим l_c . При этом каждый раз, когда нити меняются местами в пространстве, происходит смена знака индуцируемой э. д. с., что позволяет поддерживать индуцированные в сверхпроводнике токи на уровне ниже J_c . В этом случае диссиляция определяется потерями, обусловленными вихревыми токами в нормальном металле.

Чтобы прямо применить полученные выше для двух плоских слоев результаты к проводу, содержащему большое число слоев из нитей, потребовались бы специальные предположения о геометрии провода. Тем не менее можно оценить эффективную длину l_c' , приравнивая полный индуцированный вихревой ток полному критическому току нитей, расположенных по одну сторону от центра провода. Если под d' понимать теперь диаметр связки нитей в проводе и предполагать, что фактор заполнения равен $1/2$, можно получить следующее обобщение выражения (5.111):

$$l_c'^2 = c J_c d' \rho / 2 \dot{H} = d' l_c^2 / 4d. \quad (5.112)$$

Таким образом, следует ожидать уменьшения избыточных потерь в $l^2/l_c'^2$ раза по сравнению с потерями в массивном сверхпроводнике диаметром d' . Отметим, что при таком определении l_c и l_c' шаг «скрутки» на 2π обозначен $4l$.

Если теперь сложить дополнительные потери, обусловленные связью между нитями, с потерями для полностью изолированных нитей, определяемыми выражением (5.107), то выражение для полной энергии, рассеиваемой в единице объема, можно переписать в удобной форме:

$$P = J_c \dot{H} d_{\text{зф}} / 4c, \quad (5.113)$$

где

$$d_{\text{зф}} \approx d', \quad l > l_c', \quad (5.113a)$$

$$d_{\text{зф}} \approx d \left(1 + \frac{4l^2}{l_c^2} \right) = d + \frac{2l^2 \dot{H}}{J_c \rho c}, \quad l < l_c'. \quad (5.113b)$$

Отметим, что при получении результата (5.113) учитывалось лишь основное слагаемое в выражении (5.108a), что справедливо при малых d и больших ΔH . Как и следовало ожидать, P пропорционально $\dot{H}d$ при малых значениях \dot{H} , когда нити не связаны друг с другом, и пропорционально $\dot{H}d'$ при больших \dot{H} , когда нити полностью связаны. В промежуточной области между этими двумя случаями P растет как \dot{H}^2 , так как $l_c^{-2} \propto \dot{H}$. Величина P квадратично зависит от \dot{H} и в том случае, когда преобладают потери, определяемые выражением (5.110) и связанные с вихревыми токами в нормальном металле. Это произойдет, когда $\dot{H} \geq \rho c J_c / d' \geq 10^7$ Гс/с. Следовательно, в практически используемом в на-

стоящее время диапазоне значений H потери в основном определяются выражением (5.113).

Для типичных значений параметров значение этой рассеиваемой мощности заключено в интервале от 10^{-6} до $10^{-5} H$ Вт/см³ в зависимости от размеров нити и степени их связи. Отмечая, что сверхпроводником заполнена только часть объема и что среднее значение H по намотке, как правило, не превышает половины своего значения во внутреннем отверстии, видим, что потери могут быть малыми — порядка $10^{-7} H$ Вт/см³. Эта оценка получена для полного объема намотки; H — поле в отверстии. Такой уровень уже достигнут [39].

Как итоговый показатель качества магнитов определим отношение энергии, запасенной в магнитном поле, к энергии, рассеиваемой в процессе включения и выключения поля. Для простоты рассмотрим соленоид длиной L , радиусом R , с толщиной обмотки D при $D \ll R \ll L$. Тогда запасенная энергия равна $E \approx \approx \pi R^2 L (H^2/8\pi)$. Считая нити независимыми, воспользуемся для оценки рассеиваемой энергии выражением (5.107). Сокращая фактор 2, связанный с включением и выключением поля, с фактором $1/2$, дающим отношение среднего поля по обмотке к полю в отверстии, для полной рассеиваемой за цикл энергии находим $\Delta E = = 2\pi RLD (J_c H d/4c)$. Беря нужное отношение и замечая, что $H = = 4\pi JD/c$, получаем

$$E/\Delta E = (J/J_c)(R/d). \quad (5.114)$$

Таким образом, при $J \approx J_c$ для доступных в настоящее время материалов при $R \approx 2$ см искомое отношение порядка 1000. И действительно, уже в ранних экспериментах [40] были достигнуты отношения $E/\Delta E < 100$ даже при работе ниже J_c . Для сравнения то же отношение для магнита с катушками из нормального металла, обладающего конечным сопротивлением, дается следующим выражением:

$$E/\Delta E \approx \tau/\Delta t, \quad (5.115)$$

где $\tau = L/R$ — постоянная времени магнита, а Δt — длительность импульса. Замечая, что величина τ примерно равна $2\pi DR/c^2\rho$ (это дает ~ 10 с для типичных размеров и значений сопротивления чистых металлов при низких температурах), видим, что сверхпроводящие катушки должны быть более эффективными, чем охлаждаемые катушки из нормального металла, при длительностях импульсов, превышающих $0,01$ — $0,1$ с. Именно по этой причине в настоящее время разрабатывают сверхпроводящие катушки для генерации интенсивных импульсных полей, требуемых в ускорителях частиц. Возможно, что эти разработки откроют путь и к другим применениям сверхпроводящих магнитов для создания сильных переменных полей.

ЭФФЕКТ ДЖОЗЕФСОНА И МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ КВАНТОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ

В 1962 г. Джозефсон* [1] высказал смелую гипотезу, что туннельный переход должен пропускать не только обычный туннельный ток квазичастиц, который впервые наблюдал Гьевер (см. разд. 2.8), но и сверхток при нулевом напряжении из-за туннелирования сконденсированных пар. Далее он предсказал, что если на переходе поддерживать постоянную разность потенциалов V , то ток будет переменным с частотой $v=2eV/h$.

Хотя к этим предсказаниям первоначально отнеслись скептически**, они получили полное экспериментальное подтверждение. Сейчас стационарный эффект Джозефсона уже используется в очень чувствительных гальванометрах и магнитометрах, а на нестационарном эффекте основаны точные измерения отношения h/e . Более того, сейчас ясно, что фундаментальные идеи Джозефсона применимы к любой достаточно точно локализованной «слабой связи» в сверхпроводящей цепи, а не только к туннельному переходу с изолирующим барьером, который рассматривался первоначально. Например, слабой связью может служить короткое сужение в поперечном сечении сверхпроводника, точечный контакт между сверхпроводниками или тонкий слой нормального металла, а не диэлектрика, как в туннельном переходе.

6.1. Джозефсоновские соотношения между током и фазой

Из-за общности явлений не будем давать строгий микроскопический вывод для какого-нибудь частного случая, например для туннельного перехода. Вместо этого будем следовать феноменологическому подходу, который был использован при выводе теории Гинзбурга—Ландау, обращаясь к микроскопической теории в ос-

* В качестве прекрасного более позднего обзора можно рекомендовать обзорную статью Джозефсона [2]; описание истории открытия дано в его Нобелевской лекции [3].

** Казалось, что если амплитуда вероятности туннелирования для одного электрона равна $\exp\{-ad\} \ll 1$, так что вероятность туннелирования равна $\exp\{-2ad\}$, то вероятность туннелирования для двух электронов должна составлять $\exp\{-4ad\} \ll \exp\{-2ad\}$, в результате чего туннелирование пар должно быть пренебрежимо малым. В таком рассуждении не принята во внимание когерентность процесса туннелирования пар, из-за которой ток пар оказывается пропорциональным первой степени амплитуды вероятности туннелирования пары $\exp\{-2ad\}$, т. е. тому же самому фактору, что для некогерентного одночастичного туннелирования.

новном лишь для нахождения значений параметров. На феноменологическом уровне джозефсоновский переход заменяется «черным ящиком», через который протекает ток с плотностью, определяемой теми значениями функций массивных сверхпроводников по обе стороны перехода ψ , которые они имеют на переходе: $J = f(\psi_1, \psi_2)$. Определим функциональную зависимость f .

Для начала рассмотрим переход как предел обыкновенного сверхпроводящего слоя толщиной d при одновременном стремлении d и $|\psi|^2$ к нулю таким образом, чтобы получить конечные результаты. Следуя уравнению (4.32) и принимая x за направление тока через слабую связь, получаем

$$J_x = \frac{2e\hbar}{m^*} |\psi|^2 \left(\frac{d\phi}{dx} - \frac{2\pi A_x}{\Phi_0} \right), \quad (6.1)$$

где ϕ есть фаза функции $\psi(x) = |\psi| \exp\{i\phi(x)\}$. Предполагая, что величина $|\psi|^2$, так же как J_x , сохраняется постоянной по толщине d , можно переписать это выражение в виде

$$J_x = J_0 \gamma, \quad (6.2)$$

где J_0 является постоянной, характеризующей переход (в нашем случае $2e\hbar |\psi|^2/m^*d$), а

$$\gamma = \Phi_2 - \Phi_1 - \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_1^2 A_x dx \quad (6.3)$$

является «калибровочно-инвариантной разностью фаз» между точками 1 и 2 на противоположных сторонах перехода. Заметим, что член с вектор-потенциалом стремится к нулю при $d \rightarrow 0$, если только A при выбранной калибровке не обращается в бесконечность на переходе. Выражение (6.2) было бы справедливо для длинного проводника, в котором фазу $\phi(x)$ можно рассматривать как величину непрерывную вдоль проводника, однако оно явно неудовлетворительно для локализованной слабой связи, в которой определена только полная разность фаз γ , так как разность фаз между двумя точками определена с точностью до 2π . Этому условию удовлетворяет не соотношение (6.2), а формула типа

$$J_x = J_0 \sin \gamma, \quad (6.4)$$

которая согласуется с соотношением (6.2) для малых значений π , но в которой J_x является периодической, что соответствует условию неотличимости $\gamma + 2\pi$ от γ . Именно в форме (6.4) это выражение было получено Джозефсоном для случая слабосвязанного туннельного перехода; в более общем случае возможен произвольный ряд Фурье из синусов $k\gamma$. Действительно, для некоторых видов слабых связей наблюдались малые отклонения от закона (6.4) [4]*.

* Для слабой связи (т. е. джозефсоновой структуры с непосредственной проводимостью) формула (6.4) была получена из уравнений ГЛ Асламазовым и Ларкиным [57*]; см. также обзор [58*]. — Прим. ред. пер.

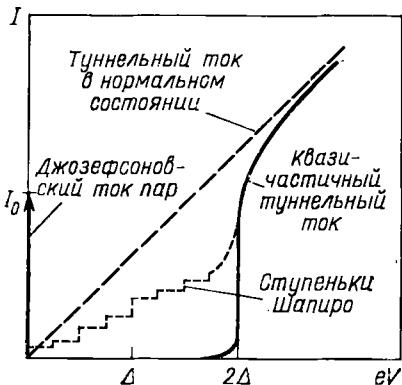


Рис. 6.1. Сравнение максимального джозефсоновского туннельного тока пар при нулевом напряжении с квазичастичным туннельным током, когда оба сверхпроводника находятся в нормальном состоянии. Пунктирная кривая показывает ступеньки Шапиро, которые возникают при воздействии СВЧ-поля (см. разд. 6.4). Интервал между ступеньками составляет $\Delta V = \hbar\nu/2e$

Для случая туннельного перехода при $T=0$ Андерсон [5] нашел, что $J_0 = \pi\Delta/2eR_n$, где R_n — сопротивление туннелирования через единицу площади перехода в случае, когда оба металла находятся в нормальном состоянии*. Этот результат был обобщен Амбераокаром и Баратофом на произвольные температуры [6]. Для двух идентичных сверхпроводников для J_0 получаем

$$J_0 = \frac{\pi\Delta(T)}{2eR_n} \operatorname{th} \frac{\Delta(T)}{2kT}, \quad (6.5)$$

причем, как оказалось, температурная зависимость J_0 имеет такой же вид, как для σ_2/σ_n в однородном сверхпроводнике (2.125). Заметим, что для $T \ll T_c$ максимальный сверхток, допускаемый соотношением (6.4), должен быть всего в $\pi/4$ раза меньше квазичастичного тока при напряжении $eV=2\Delta$, соответствующем энергетической щели. Это предсказание очень хорошо подтверждается экспериментально (рис. 6.1), причем отклонение максимального значения сверхтока от теоретического значения часто составляет всего несколько процентов. Для типичных переходов максимальной сверхток порядка 1 мА.

Если вместо туннельного перехода рассматривается слабая связь, сформированная короткой узкой перемычкой, коэффициент перед $\sin\psi$ обычно сравним по величине с критическим током $I_c = J_c A$, где J_c — критическая плотность тока, A — площадь поперечного сечения слабой связи. В очень коротких мостиках** близость концов мостика к массивным сверхпроводникам может увеличивать I_c . Однако тепловые эффекты при конечных значениях напряжения могут вызывать значительное уменьшение эффективного значения I_0 по сравнению с током, необходимым первоначально для достижения резистивного состояния [8]. Таким обра-

* Такой же результат был получен в оригинальной работе Джозефсона, но с численной ошибкой в коэффициенте.

** Обсуждение зависимости тока от фазы в коротких слабых связях можно найти в работе [7].

зом, указанная формула для значения I_0 является точной лишь в случае туннельного перехода.

До сих пор обсуждалось поведение сверхтока слабой связи. Однако при конечном напряжении V на переходе появится также диссипативный «нормальный» ток, переносимый квазичастицами, который обозначим G_0V . Около T_c величина G_0 близка к проводимости в нормальном состоянии G_n , которую переход имеет при температурах несколько выше T_c . Для туннельного перехода эта проводимость падает по мере уменьшения T , как обсуждалось в разд. 2.8 в связи с туннелированием Гьевера; в других слабых связях проводимость G может изменяться иначе.

Джозефсон отметил, что кроме этой простой квазичастичной проводимости имеется другой член, зависящий от фазы, который может быть записан как $(G_{\text{инт}} \cos \gamma) V$; он отражает интерференцию между парным и квазичастичным токами. Итак, для $V \neq 0$ и для произвольного типа слабой связи формулу (6.4) можно обобщить:

$$I = I_0 \sin \gamma + (G_0 + G_{\text{инт}} \cos \gamma) V, \quad (6.4a)$$

где G_0 и $G_{\text{инт}}$, в свою очередь, могут быть функциями V . Эксперименты Педерсена и др. [9] по туннельным переходам, Фалко и др. [10] по тонкопленочным слабым связям и Винсента и Дивера [11] по точечным контактам продемонстрировали существование этого парноквазичастичного интерференционного члена, и все эксперименты показали, что $G_{\text{инт}}/G_0 \approx -1$. В последнее время этот результат привлек большое внимание, так как оказывается, что микроскопическая теория [12–13] дает положительный знак для этого соотношения. Однако можно привести простые аргументы, основанные на соотношениях Крамерса—Кронига*, которые показы-

* М. Тинкхам и М. Р. Бизли (не опубликовано) рассмотрели предельный случай низкого напряжения, в котором задача может быть линеаризована. В случае, когда на переходе задано малое переменное напряжение $V(\omega) \cos \omega t$ и нулевое постоянное напряжение, разность γ , как показано ниже [см. выражение (6.27б)], лишь незначительно отклоняется от рабочей точки γ_0 . Тогда член $I_0 \sin \gamma$ будет иметь вид $I(\omega) = (2eI_0/\hbar\omega) \cdot \cos \gamma_0 V(\omega) \sin \omega t$. Этот сверхток может быть представлен мнимой проводимостью $Y_2^0 = (2eI_0/\hbar\omega) \cos \gamma_0$, по виду напоминающей $\sigma_2/\sigma_n \sim 1/\omega$ (2.125). Более того, уже отмечалось в связи с соотношением (6.5), что температурная зависимость коэффициента I_0 такая же, как σ_2/σ_n . Сопряженной величиной для Y_2^0 по Крамерсу—Кронигу (см. формулу (2.96) и ее обсуждение) является член $Y_1^0 = (\pi e I_0/\hbar) \cos \gamma_0 \delta(\omega)$, который описывает поглощениес энергии, идущей на создание кинетической энергии джозефсоновского сверхтока. Если теперь постулировать, что отклик сверхжидкости срезается при $\hbar\omega > 2\Delta$, как это происходит с σ_2/σ_n , соотношения Крамерса—Кронига (2.96) показывают, что между $\omega=0$ и $2\Delta/\hbar$ должен быть отрицательный вклад в Y_1 , такой, чтобы его интеграл по частоте скомпенсировал Y_1^0 . Это правильно объясняет наблюдаемый отрицательный знак и порядок величины интерференциального члена $G_{\text{инт}} \cos \gamma$ в формуле (6.4а).

Как этот результат может быть согласован с микроскопическим теоретическим предсказанием положительного знака? Если бы перед уменьшением

зывают не только необходимость существования члена с $\cos \varphi$, но и дают правильный знак и порядок величины. Таким образом, эта ситуация пока является весьма неясной и необходимы дальнейшие исследования, чтобы решить спорные вопросы. В дальнейшем будем обычно пренебречь этим членом, так как его влияние заметно лишь при детальном анализе отдельных экспериментов. Даже простой член G_0V не играет роли в равновесных свойствах при нулевом напряжении, которые включают стационарный эффект Джозефсона.

6.2. Воздействие магнитного поля

Когда сверхпроводящее туннелирование наблюдалось впервые, его ошибочно объясняли возникновением в изолирующем слое сверхпроводящих закороток малых размеров. Ошибка такого объяснения была выявлена после наблюдения очень сильного подавления максимального сверхтока даже слабыми магнитными полями в противоположность тому, что можно было бы ожидать для сверхпроводящих закороток. Рассчитаем на основе соотношения (6.4) зависимость тока от магнитного поля.

Рассмотрим туннельный переход, нормальный к оси x с размерами в плане \hat{Y} и Z , в магнитном поле H , параллельном оси z . Положим, что толщина изолирующего барьера равна d , а толщины двух сверхпроводящих электродов много больше λ . Далее предположим, что туннельные токи пренебрежимо малы по сравнению с диамагнитными экранирующими токами. Выберем калибровку для \mathbf{A} такую, что $\mathbf{A} = A_y(x)\hat{\mathbf{y}}$, и $h_z = dA_y/dx$. При этом выборе калибровки φ является функцией только y , так как величина

$$\nabla\Phi = \frac{m^*v_s}{\hbar} + \frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{A} \quad (6.6)$$

имеет только компоненту по оси $\hat{\mathbf{y}}$, и как вектор \mathbf{A} , так и вектор v_s для экранирующих токов, дающих эффект Мейсснера в двух сверхпроводниках, направлены по оси $\hat{\mathbf{y}}$. Зависимость этих величин только на более высоких частотах Y_2 имела положительную особенность на частоте щели, как было предсказано в работах Риделя [14] и Верхамера [15], то соотношения Крамерса—Кронига давали бы положительный знак. Но пока не ясно, должен ли риделевский пик существовать в зависимости Y_2 от частоты при частоте приложенного сигнала $\hbar\omega = 2\Delta$; на самом деле особенность наблюдается при приложенном напряжении $eV = 2\Delta$, а в этих экспериментах постоянное напряжение равно нулю, а переменное — очень мало. Поэтому теоретический анализ в данном случае неприменим, так как он рассчитан для условий, которые существенно отличны от условий эксперимента.

(В настоящее время этот вопрос выяснен — см. работу [59*]. Оказывается, что обычная теория эффекта Джозефсона дает положительный знак члена с $\cos \varphi$ и что следующие из нее результаты находятся в согласии с дисперсионными соотношениями Крамерса — Кронига [60*]. Однако учет даже малых отклонений от стандартной теории приводит к изменению знака этой компоненты одновременно с соответствующим изменением компоненты, сопряженной с ней по Крамерсу — Кронигу. — Прим. ред. пер.)

чин от x приведена на рис. 6.2. Так как $\phi(y)$ не зависит от x , можно определить его при любых x . Это удобно сделать на такой глубине в сверхпроводниках, где $v_s=0$, $h_z=0$, $A_y=A(\infty)$. Тогда из формулы (6.6) получаем, что $d\phi/dy = (2\pi/\Phi_0)A_y$, откуда

$$\Phi(y) = \Phi(0) + (2\pi/\Phi_0)A(\infty)y. \quad (6.7)$$

Соответственно, разность фаз* на переходе

$$\begin{aligned} \gamma(y) &= \varphi_2(y) - \varphi_1(y) = \\ &= \gamma(0) + (2\pi/\Phi_0)[A_2(\infty) - \\ &\quad - A_1(\infty)]y. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Удобно переписать это выражение в ясной калибровочно-инвариантной форме. Это удается сделать, используя тот факт, что $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$ представляет собой поток, заключенный внутри пути интегрирования, следовательно, $[A_2(\infty) - A_1(\infty)]y = \Phi(y)$ есть поток, заключенный между 0 и y в барьере и в областях проникновения поля в сверхпроводники. Итак, формулу (6.8) можно преобразовать к виду

$$\gamma(y) - \gamma(0) = \frac{2\pi\Phi(y)}{\Phi_0} = \frac{2\pi H(2\lambda + d)y}{\Phi_0}. \quad (6.9)$$

Это выражение содержит только калибровочно-инвариантные величины.

Как пример калибровочной инвариантности полученных результатов, покажем, как ψ вычислялось бы в лондоновской калибровке, при которой $A_y(x)$ спадает до нуля на границе сверхпроводников и везде является действительным, в результате чего $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. При произвольном преобразовании калибровки от \mathbf{A}_k

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi \quad (6.10a)$$

ψ преобразуется к

$$\psi' = \psi \exp(i2\pi\chi/\Phi_0). \quad (6.10b)$$

* Заметим, что в выбранной калибровке интеграл от $A_x dx$ в формуле (6.3) равен нулю, так как $A_x = 0$. При этом получаем $\psi = \varphi_2 - \varphi_1$, что и используется в формуле (6.8).

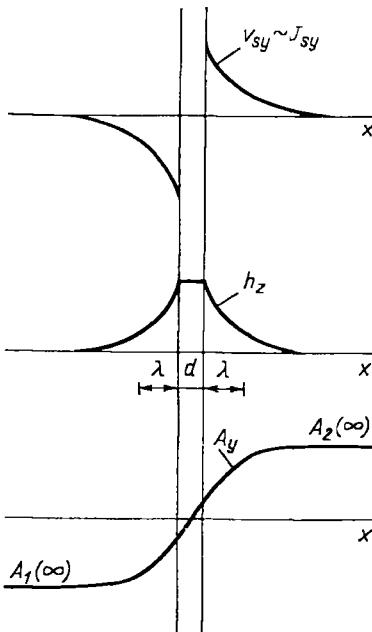


Рис. 6.2. Пространственная зависимость плотности сверхтока, магнитного поля и вектор-потенциала в барьере и прилегающих областях двух сверхпроводников, образующих джозефсоновский переход

Так, если хотим, чтобы ψ' было действительным, в то время как ψ допускает изменение фазы (6.7), необходимо выбрать

$$\chi_i = -A_i(\infty)y - \frac{\Phi_0\varphi_i(0)}{2\pi}, \quad (6.11a)$$

где $i=1,2$, так что в любом сверхпроводнике

$$\mathbf{A}'_i = \mathbf{A}_i - A_i(\infty)\hat{\mathbf{y}}. \quad (6.11b)$$

Заметим, что в отличие от A_y величина A'_x изменяется почти скачком на величину $A_2(\infty) - A_1(\infty)$ на барьере толщиной d . Но, для того, чтобы вычислить γ (6.3), необходимо знать величину A'_x на барьере. В первоначальной калибровке A_x везде равнялось нулю. Из выражения (6.10a) следует, что $A_x = d\chi/dx$. Согласно формуле (6.11a), величина A_x равна нулю в обоих сверхпроводниках, но в барьере она должна быть достаточно большой, так что

$$\begin{aligned} \int_1^2 A'_x dx &= \int_1^2 \frac{d\chi}{dx} dx = \chi_2 - \chi_1 = [A_1(\infty) - A_2(\infty)]y + \\ &\quad + (\Phi_0/2\pi)[\varphi_1(0) - \varphi_2(0)]. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Подставляя это выражение в (6.3) и учитывая, что $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, получаем то же самое значение γ , которое приведено в формуле (6.8). Этот пример показывает, что γ действительно является калибровочно-инвариантной величиной, как и указывалось ранее.

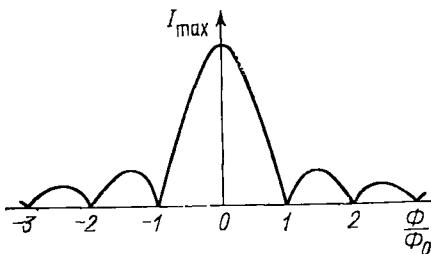
Проанализируем теперь следствия, которые вытекают из выражения (6.9) для пространственного изменения относительной фазы γ . Так как γ изменяется линейно по оси y , а плотность тока (6.4) является периодической функцией γ , очевидно, что токи в различных частях площади перехода могут взаимно уничтожаться, создавая нечто вроде дифракционной картины. Точнее, полный ток через переход равен

$$\begin{aligned} I = Z \int_{-Y/2}^{Y/2} J(y) dy &= ZJ_0 \int_{-Y/2}^{Y/2} \sin[(2\pi H/\Phi_0)(2\lambda + d)y + \\ &\quad + \gamma(0)] dy = YZJ_0 \sin \gamma(0) \frac{\sin(\pi\Phi/\Phi_0)}{\pi\Phi/\Phi_0}, \end{aligned} \quad (6.13)$$

где VZ — площадь перехода, а $\Phi = HY(2\lambda + d)$ — полный поток, заключенный в переходе. При заданном Φ ток I зависит от разности фаз $\gamma(0)$ в центре перехода. Эта разность фаз устанавливается таким образом, чтобы ток в переходе был равен току, заданному внешним источником, так же как в сверхпроводящем проводе градиент фазы устанавливается в соответствии с заданным током. Но, так как значения \sin по модулю не могут превышать единицы, выражение (6.13) показывает, что максимальный сверхток через переход в зависимости от приложенного поля равен

$$I_{\max} = YZJ_0 \left| \frac{\sin(\pi\Phi/\Phi_0)}{\pi\Phi/\Phi_0} \right|. \quad (6.14)$$

Рис. 6.3. Зависимость максимального сверхтока через джозефсоновский переход от потока в переходе. Очевидно сходство с оптической однозначевой дифракционной картиной (дифракция Фраунгофера)



Эта предсказанная «дифракционная картина», показанная на рис. 6.3, была тщательно экспериментально проверена, что убедительно доказало правильность теории этого эффекта. В каждой узловой точке Φ равняется целому числу квантов потока Φ_0 , и относительная фаза γ изменяется от одного конца перехода до другого на $2\pi n$, где n — целое, вызывая исчезновение полного тока.

Если не считать туннельный ток пренебрежимо малым, то можно обнаружить новые особенности джозефсоновских переходов. Оказывается, джозефсоновский ток стремится экранировать магнитное поле снаружи от перехода, проявляя слабый эффект Мейсснера. На средней линии перехода экранирование поля описывается соотношением

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{4\pi}{c} J_x = \frac{4\pi}{c} J_0 \sin \gamma. \quad (6.15)$$

Замечая, что $\Phi(y)$ в уравнении (6.9) определяется выражением $(2\lambda + d) \int_0^y h(y') dy'$, где $h(y)$ уже нельзя брать равным приложенному полю H , получаем

$$\frac{d\gamma}{dy} = \frac{2\pi}{\Phi_0} (2\lambda + d) h.$$

Дифференцируя это соотношение и используя формулу (6.15), находим

$$\frac{d^2\gamma}{dy^2} = \frac{1}{\lambda_J^2} \sin \gamma, \quad (6.16)$$

где

$$\lambda_J = [c\Phi_0/8\pi^2 J_0 (2\lambda + d)]^{1/2}. \quad (6.17)$$

Величина λ_J для типичных значений параметров порядка 1 мм. Очевидно, что, если $\gamma \ll 1$, она играет роль глубины проникновения, так как в этом случае уравнение (6.16) принимает вид

$$\frac{d^2\gamma}{dy^2} = \frac{\gamma}{\lambda_J^2} \quad (6.18)$$

и имеет экспоненциальные решения вида $\gamma \sim \exp\{\pm y/\lambda_J\}$. Такие экспоненциальные решения, когда γ , h и J_x экспоненциально

уменьшаются до нуля при удалении в глубь перехода, возможны только в случае, когда внешнее поле на конце перехода много меньше $4\pi J_0 \lambda_J/c$. Когда величина γ не ограничена малыми значениями, то природу получаемых решений легче понять, если заметить, что уравнение (6.16) имеет ту же форму, что и дифференциальное уравнение для маятника, с точностью до замен $y \rightarrow t$, $\gamma \rightarrow \theta$ и $\lambda_J^{-2} \rightarrow \omega_0^2 = g/L$, где θ — угол отклонения маятника от верхнего положения равновесия и ω_0 — его собственная частота. При такой замене решение (6.9) для γ , полученное в пренебрежении влиянием джозефсоновского тока на магнитное поле, соответствует движению маятника, вращающегося с такой большой кинетической энергией, что гравитационное ускорение является несущественным. В уравнении (6.16), это соответствует $\lambda_J \rightarrow \infty$, следовательно, $d^2\gamma/dy^2 = 0$, величина $d\gamma/dy$ постоянна и ток вдоль оси y изменяется по синусоиде. Учет конечной ширины перехода Y означает, что решение аналогично такому решению для маятника, при котором за конечное время T маятник совершает столько оборотов, сколько осцилляций делает функция $\gamma(y)$.

Если теперь рассмотреть маятник, двигающийся с энергией, меньшей, чем в предыдущем случае, но еще недостаточной, чтобы иметь ненулевую кинетическую энергию в верхнем положении равновесия, движение $\theta(t)$, и следовательно изменение $\gamma(y)$ будут периодическими, но не гармоническими. Это приводит к несинусоидальному периодически меняющему знак распределению тока $J(y)$.

Наконец, предел эффекта Мейсснера соответствует маятнику, двигающемуся с энергией, едва достаточной, чтобы проходить через верхнюю точку, так что, начиная движение с начальной угловой скоростью $(d\theta/dt)_0$ при начальном угле θ_0 , он замедляется почти экспоненциально по мере подъема, очень медленно проходит через верхнюю точку, где θ мал, и затем экспоненциально ускоряется вниз по другую ее сторону, восстанавливая начальную угловую скорость при угле $-\theta_0$. Если угловая скорость в верхней точке пренебрежимо мала по сравнению с начальным значением, то величины θ_0 и $(d\theta/dt)_0$ связаны законом сохранения энергии и не являются независимыми. Возвращаясь к задаче о джозефсоновском переходе, соответствующие начальные условия можно представить

$$\left(\frac{2\pi H}{\Phi_0}\right)^2 (2\lambda + d)^2 = \left(\frac{d\gamma}{dy}\right)_0^2 = \frac{2}{\lambda_J^2} (1 - \cos \gamma_0).$$

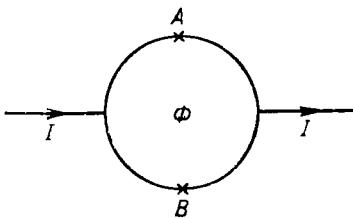
Отсюда получаем

$$\cos \gamma_0 = 1 - (cH/4\pi J_0 \lambda_J)^2/2. \quad (6.19)$$

Таким образом, для слабых полей величина γ_0 (значение $|\gamma|$ на краях перехода) определяется равенством

$$\gamma_0 = cH/4\pi J_0 \lambda_J.$$

Рис. 6.4. Схематическое изображение сверхпроводящего квантового интерферометра. Крестики А и В показывают две слабые связи, например точечные контакты. Остальная часть схемы образуется массивными сверхпроводниками. Максимальный сверхток I через две параллельные ветви является периодической функцией потока Φ в кольце



Для самых сильных полей, которые могут быть экранированы, величина γ_0 оказывается равной π , а поле определяется величиной

$$H_1 = 8\pi J_0 \lambda_J / c, \quad (6.20)$$

которая обычно ~ 1 Э. Это поле H_1 приблизительно* соответствует величине H_1 в сверхпроводнике II рода, так как для любого большего поля мейсснеровское состояние уже невозможно.

Продолжая аналогию с массивными сверхпроводниками, отметим, что максимальный сверхток, который может пропускать широкий переход, ограничивается как раз величиной J_0 в поверхностном слое толщиной $\sim \lambda_J$ по периметру перехода. Любой больший ток будет приводить к магнитным полям, большим H_1 , и, следовательно, к установлению периодического «вихревого» состояния, которое в присутствии транспортного тока становится диссипативным. Дальнейшее обсуждение ситуации будет проведено ниже.

6.3. Сверхпроводящие квантовые интерферометры

Увеличением площади, на которой поток эффективно вызывает фазовые изменения, можно получить интерференционную картину, дающую лучшее разрешение по магнитному полю, чем даваемое формулой (6.14). Это можно легко сделать, используя два отдельных джозефсоновских перехода, включенных в сверхпроводящее кольцо [16—18], как показано на рис. 6.4.

Такое же улучшение разрешения может быть получено при использовании одиночного перехода в сверхпроводящем кольце, но тогда интерференционную картину можно обнаружить, только измеряя импеданс кольца на переменном токе, так как на постоянном токе кольцо с переходом всегда представляет собой короткозамкнутую цепь. Для простоты будем рассматривать вначале лишь двухконтактный интерферометр постоянного тока, обсуждение высокочастотного случая отложим до разд. 6.6.

Так как обычно в эксперименте используются точечные контакты, упростим анализ, сделав предположение, что магнитный

* Точнее, экранирование при H_1 является лишь метастабильным. Как было показано Джозефсоном путем расчета полной свободной энергии, максимальное значение H_1 , для которого экранирование будет термодинамически устойчивым, разно $H_{c1} = 2H_1/\pi$.

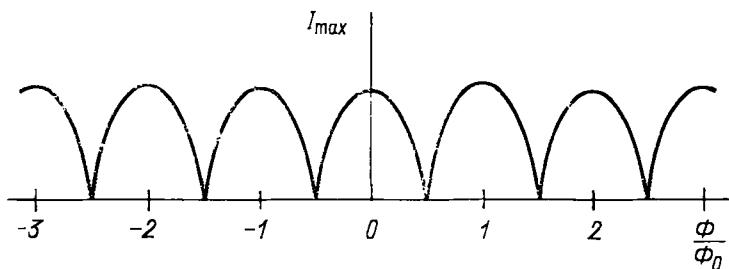


Рис. 6.5. Зависимость максимального сверхтока через симметричный двухконтактный сверхпроводящий интерферометр (сквид), показанный схематически на рис. 6.4 (от потока Φ в кольце интерферометра.—Прим. ред. пер.).

поток через каждый переход пренебрежимо мал*. Если сделать еще одно упрощение, предполагая, что оба перехода имеют одинаковое значение I_0 , то можно записать полный ток через параллельную цепь в виде

$$I = I_0 (\sin \gamma_A + \sin \gamma_B). \quad (6.21)$$

Используя те же аргументы, что и при выводе уравнения (6.9), можно получить, что γ_A и γ_B не являются независимыми разностями фаз, а связаны соотношением

$$\gamma_A - \gamma_B = 2\pi\Phi/\Phi_0, \quad (6.22)$$

где теперь Φ — полный поток через кольцо. Находя максимальное значение тока I , получаем

$$I_{\max} = 2I_0 |\cos(\pi\Phi/\Phi_0)| \quad (6.23)$$

при разности фаз на двух переходах $\frac{1}{2}\pi \pm \pi\Phi/\Phi_0$.

Как показано на рис. 6.5, максимальный ток I_{\max} имеет наибольшее значение, когда в кольце находится целое число квантов потока, и равен просто сумме критических токов двух переходов. Когда в кольце находится полуцелевое число квантов, значение I_{\max} уменьшается до нуля. В общем случае, если переходы имеют различные значения I_0 , при полуцелых значениях Φ/Φ_0 величина I_{\max} уменьшается до ненулевого минимального значения $|I_{0A} - I_{0B}|$. Если площадь петли магнитометра равна $\sim 1 \text{ см}^2$, период интерференционной картины соответствует изменению поля примерно на 10^{-7} Гс . При площадях $0,1 \text{ см}^2$ (которые наиболее типичны на практике) возможно наблюдение интерференционной картины с таким высоким отношением сигнал—шум, что разрешение будет порядка 0,001 периода. Другими словами, можно измерять изменение потока $\sim 10^{-10}/\text{Гс}\cdot\text{см}^2$, соответствующее изменению поля $\sim 10^{-9} \text{ Гс}$. В связи с очевидными потенциальными

* Если это не так, то на резкую интерференционную картину от двух переходов наложится плавная одноЗелевая дифракционная картина от каждого одиночного перехода.

возможностями для применений сверхпроводящие интерферометры подробно описаны в литературе, причем для интерферометра обычно используется название «сквид»*.

Зиммерман и Мерсеро [19] впервые применили сквид в качестве магнитометра, чтобы обнаружить вхождение отдельных вихрей Абрикосова в тонкий ниобиевый провод. Позднее сквид был использован Бизли и др. [20] для наблюдения характерной временной зависимости крипа потока в жестких сверхпроводниках, обсуждавшейся в разд. 5.7. Одним из недавних применений сквигда в сверхпроводимости, использующих его полную чувствительность, было измерение Голлубом и др. [21] увеличения диамagnetизма нормального состояния при температуре выше T_c из-за термодинамических флуктуаций (к этой теме вернемся в следующей главе).**

В дополнение к практическому использованию для чувствительных измерений, успешная работа этих сверхпроводящих интерферометров дает наиболее непосредственное и убедительное доказательство того, что квантовая фазовая когерентность функции Ψ распространяется на макроскопические расстояния, или, используя обратное выражение Казимира, «на многие мили грязного свинцового провода».

6.4. Нестационарный эффект Джозефсона

Если два сверхпроводящих электрода находятся под различным электрическим потенциалом, то переход пары электронов с одной стороны на другую сопровождается изменением энергии на $2eV$. Если этот процесс является действительно сверхтекучим процессом, свободным от диссиляции, указанная энергия должна выделиться где-нибудь в другом месте как элементарная порция (так что процесс должен быть в принципе микроскопически обратимым). Фактически она должна появляться в виде фотона энергии

$$\hbar v = 2eV. \quad (6.24)$$

Другой путь получения этого результата состоит в том, чтобы заметить факт изменения фазы квантового состояния во времени по закону $\exp\{-iEt/\hbar\}$. Туннельный ток возникает при переходе между состоянием, в котором пара находится с одной стороны, и состоянием, в котором она находится с другой стороны. Таким образом, как и при внутриатомных переходах, относительная фаза двух состояний будет вызывать колебания на частоте биений,

* От английского SQUID — Superconducting Quantum Interference Device. — Прим. ред. пер.

** В настоящее время сквиды используются гораздо шире, чем об этом говорит автор; обзоры этих применений можно найти в сборниках [61*] и [62*]. Основы теории сквидов и других устройств, основанных на эффекте Джозефсона, см. в монографии [63*]. — Прим. ред. пер.

соответствующей разности энергий (6.24), давая ток, осциллирующий на той же частоте.

Нестационарный эффект Джозефсона был впервые обнаружен Шапиро*, который отметил, что при облучении СВЧ-сигналом на вольт-амперной характеристике джозефсоновского туннельного перехода появились «ступеньки» тока. Эти ступеньки, схематически показанные на рис. 6.1, появляются точно при напряжениях, которые равны целому числу $h\nu/2e$. Через два года эффект Джозефсона также смогли наблюдать по излучению из джозефсоновского перехода [24—25], однако обнаружить очень слабый излучаемый сигнал довольно трудно из-за плохого согласования импеданса перехода с импедансом свободного пространства. При наблюдении ступенек эту трудность можно преодолеть, подавая достаточно сильный СВЧ-сигнал.

Перед дальнейшим обсуждением этой темы необходимо более точно сформулировать, что означает разность потенциалов V в формуле (6.24), так как эта формула лежит в основе очень точных измерений** отношения h/e с помощью джозефсоновского туннелирования. Грубо говоря, это, конечно, просто разность электростатических потенциалов двух сверхпроводников: $U_1 - U_2$. Однако такая разность не является градиентно-инвариантной. Чтобы получить градиентно-инвариантную величину, рассмотрим выражение

$$V' \equiv \int_1^2 \mathbf{E} ds = U_1 - U_2 - \frac{1}{c} \int_1^2 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} ds,$$

для которого путь интегрирования проходит по направлению туннельного тока. Но даже такая модификация не является вполне корректной, так как учитывает работу, проделанную над электроном только электрическими силами. Хорошо известно, что равновесие может быть поддержано равновесием электрических и других сил, таких, как сила тяжести или сила градиента концентрации с сопутствующей диффузией. Все эти силы будут учтены, если заменить U на μ/e , где μ — электрохимический потенциал. Другими словами, если $dA/dt = 0$, то именно равенство значений μ , а не U в обеих точках обеспечивает отсутствие движения электронов из одной точки в другую и именно разность значений μ между точками определяет полное изменение энергии при перемещении электрона. Так как все обычные вольтметры (за исключением электростатических) имеют электрические контакты, допускающие перемещение электронов, они реально измеряют разность значений μ , а не U . Таким образом, можно сделать вывод, что величина V в формуле (6.24) означает

* См. последние работы [22, 23] и приводимые там ссылки.

** См., например, [26].

$$V \equiv \frac{\mu_1 - \mu_2}{e} - \frac{1}{c} \int_1^2 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} ds. \quad (6.25)$$

В заключение следует предостеречь от следующего. В равенстве (6.25) предполагалось, что μ в каждом сверхпроводнике является однозначно определенной величиной. Однако это несправедливо в тех областях, в которых нормальный ток преобразуется в сверхпроводящий ток [27—30], как, например, в точках, где токовые выводы из нормального металла присоединяются к сверхпроводящим. В такой неравновесной ситуации пары и квазичастицы эффективно имеют слегка различные значения μ . Так как джозефсоновская частота определяется разностью электрохимических потенциалов спаренных электронов μ_p , в то время как вольтметр с нормальными выводами измеряет разность потенциалов квазичастиц μ_{qp} , это различие является потенциальным источником погрешностей. Однако, так как потенциал μ_p имеет постоянное значение внутри каждого сверхпроводника, а потенциал μ_{qp} релаксирует к этому значению на расстоянии нескольких микронов, эта погрешность химического потенциала получается чрезвычайно малой, даже если присоединять выводы для измерения напряжения в окрестности самого тунNELьного перехода.

6.4.1. Основные уравнения

Теперь получим основные дифференциальные уравнения для изменения полей и токов в переходе. В отличие от стационарного случая, рассмотренного ранее, ток теперь изменяется как во времени, так и в пространстве. Как и раньше, пусть переход расположен в плоскости yz , статическое магнитное поле направлено вдоль оси z , а изменение фазы происходит по оси y (рис. 6.6). Тогда, в дополнение к уравнениям Максвелла, основное уравнение будет

$$J_x(y, t) = J_0 \sin \gamma(y, t), \quad (6.26)$$

где разность фаз γ [как следует из формулы (6.9)] удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \gamma}{\partial y} = \frac{2\pi}{\Phi_0} (2\lambda + d) h, \quad (6.27a)$$

а также уравнению

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \omega(t) = \frac{2eV}{\hbar}, \quad (6.27b)$$

которое представляет собой просто обобщенное уравнение (6.24) на случай частоты, меняющейся во времени.

В первом приближении, как и в стационарном случае, пренебрегаем вкладом джозефсоновского тока в магнитные поля. Тогда

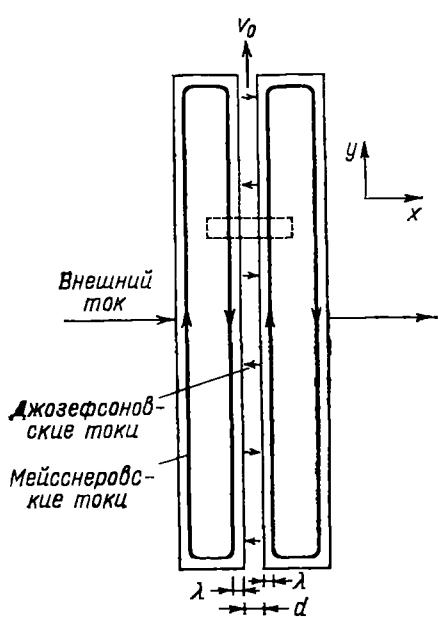


Рис. 6.6. Схема длинного джозефсоновского перехода. При наличии напряжения на переходе волна осцилирующего джозефсоновского тока движется со скоростью v_0 в направлении y . Мейсснеровские токи экранируют внутреннюю часть сверхпроводников от приложенного поля. Контур, показанный пунктиром, используется при получении уравнения (6.31а) из закона электромагнитной индукции

Пусть e^0 и h^0 означают локальные значения e и h в барьере; h проникает в сверхпроводники на расстояние λ , а e отлично от нуля только в барьере. Тогда, интегрируя уравнение Максвелла $\text{rot } e = -(1/c) \partial h / \partial t$ по узкой площади, показанной пунктирной линией на рис. 6.6, получаем

$$\frac{\partial e_x^0}{\partial y} = \frac{1}{c} \frac{2\lambda + d}{d} \frac{\partial h_z^0}{\partial t}. \quad (6.31a)$$

Кроме того, в нашем случае проекция уравнения Максвелла для ротора h на ось x имеет вид

$$\frac{\partial h_z^0}{\partial y} = \frac{4\pi}{c} J_x + \frac{e}{c} \frac{\partial e_x^0}{\partial t}, \quad (6.31b)$$

где J_x — джозефсоновский ток (6.26) и ϵ — диэлектрическая постоянная барьера. Используя производную по времени от уравне-

во всех точках $h=H$ и $V=V_0$ и решением выписанных выше уравнений является функция

$$\gamma(y, t) = \gamma_0 + \omega_0 t + k_0 y, \quad (6.28)$$

где

$$\omega_0 = 2eV_0/\hbar$$

$$\text{и } k_0 = 2\pi(2\lambda + d)H/\Phi_0. \quad (6.29)$$

Такое выражение для γ обуславливает периодическое распределение тока точно такой же формы, как в стационарном случае, за исключением того, что оно двигается в направлении y с фазовой скоростью

$$v_0 = \omega_0/k_0 = cV_0/(2\lambda + d)H. \quad (6.30)$$

Таким образом, вихри, образованные периодическими токами через барьер, двигаются через переход с этой скоростью. Аналогия с режимом течения потока в сверхпроводнике II рода очевидна.

Теперь давайте установим, как распределение джозефсоновских токов связано с электромагнитными полями в переходе.

ния (6.31б) и пространственную производную от уравнения (6.31а), получаем

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) V = \frac{4\pi}{c^2} (2\lambda + d) \frac{\partial J_x}{\partial t}, \quad (6.32)$$

где $V = e_x^0 d$ — напряжение на переходе, и

$$\bar{c}^2 = \frac{c^2}{\epsilon} \left(1 + \frac{2\lambda}{d} \right)^{-1} \ll c^2. \quad (6.33)$$

Так как $\lambda \approx 500 \text{ \AA}$, в то время как $d \approx 10 \text{ \AA}$, очевидно, что для типичного значения $\epsilon = 4$, $\bar{c} \approx c/20$. Итак, в области перехода могут распространяться очень медленные электромагнитные волны. Например, электромагнитные волны частотой $v \sim 10^{10} \text{ Гц}$, которые имеют в свободном пространстве длину волны 3 см, имели бы в переходе длину волны только 1 мм. Именно это несоответствие делает таким трудным вывод электромагнитной энергии из перехода.

Удобно преобразовать уравнение (6.32) к такой форме, в которой в качестве переменной фигурирует лишь фаза γ . Это можно сделать, используя уравнения (6.26) и (6.27б), чтобы исключить J_x и V , и затем проводя интегрирование по времени. Полученное уравнение имеет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{\bar{c}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \gamma = \frac{\sin \gamma}{\lambda_J^2}. \quad (6.34)$$

6.4.2. Примеры

Вначале заметим, что если джозефсоновская связь очень слаба, так что $\lambda_J \rightarrow \infty$, то решение уравнения (6.34) представляет собой просто плоские волны с фазовой скоростью \bar{c} . Эти электромагнитные волны будут сильно связаны с джозефсоновскими токами, если их скорость соответствует скорости движения вихревой картины (6.30). Учитывая сохранение энергии, результирующее увеличение поглощения энергии должно проявиться в виде пика в зависимости постоянного тока, потребляемого переходом, от приложенного напряжения V_0 ; этот пик возникает, когда $v_0 = \bar{c}$, т. е. когда

$$V_0^2 = d(2\lambda + d) H^2 / \epsilon. \quad (6.35)$$

Именно такой пик наблюдали Эк и др. [31]; он стал одной из первых демонстраций нестационарного эффекта Джозефсона без приложения внешних полей*. Близким эффектом являются ступеньки Фиске на вольт-амперной характеристике [32—33]. Эти ступеньки появляются, когда частота джозефсоновских токов совпадает с частотами различных мод в электромагнитном резонаторе, образованном переходом.

* Имеется в виду высокочастотное электромагнитное поле. — Прим. ред. пер.

Другой простой частный случай уравнения (6.34) получается при рассмотрении решений, в которых фаза γ однородна по переходу. Тогда это уравнение вновь по форме становится аналогичным уравнению движения маятника:

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} + \omega_J^2 \sin \gamma = 0, \quad (6.36)$$

где ω_J определяется равенством

$$\omega_J^2 = \bar{c}^2/\lambda_J^2 = 8\pi edJ_0/e\hbar. \quad (6.37)$$

Отметим, что если подставить $J_0=2e\hbar|\psi|^2/m^*d$, как предполагалось при эвристическом выводе формулы (6.1), то получим, что частота $\omega_J^2=4\pi(2e)^2|\psi|^2/et^*$ является плазменной частотой заряженного газа частиц с зарядом $2e$, массой m^* и плотностью частиц $|\psi|^2$. Так как ток J_0 мал по сравнению с J_c для массивных сверхпроводников, то величина $|\psi|^2$ мала по сравнению с плотностью электронов в металле. Следовательно, эта «джозефсоновская плазменная частота» ω_J много меньше обычной плазменной частоты для металлов, лежащей в ультрафиолетовой области. Реально, плазменная частота ω_J обычно находится в СВЧ-диапазоне; колебания такой частоты наблюдались экспериментально Дамом и др. [34].

В этих экспериментах использовался тот факт, что если γ не мало, то резонансная частота, определенная уравнением (6.36), может быть «отстроена» от значения ω_J . Например, аналогия с маятником показывает, что если фаза γ испытывает большие колебания около нуля, то ее временная зависимость будет негармонической и собственная частота изменится. Более удобным тестом для проверки уравнения (6.36) является зависимость резонансной частоты от заданного значения постоянного тока. При плотности постоянного тока J_a значение γ должно быть равно $\gamma_0=\arcsin(J_a/J_0)$, если рассматривать только переходы, малые по сравнению с λ_J , так что можно пренебречь эффектом Мейсснера в переходе, из-за которого фаза γ_0 может меняться в пространстве. После линеаризации около этой рабочей точки уравнение (6.36) принимает вид

$$\frac{\partial^2(\delta\gamma)}{\partial t^2} + \omega_J^2 \cos \gamma_0 (\delta\gamma) = 0, \quad (6.38)$$

так что плазменная частота управляетя током в соответствии с уравнением

$$\omega^2 = \omega_J^2 \cos [\arcsin (J_a/J_0)] = \omega_J^2 [1 - (J_a/J_0)^2]^{\frac{1}{2}}. \quad (6.39)$$

Из этого соотношения видно, что величина ω^2 должна уменьшаться линейно с J_a^2 . Это свойство было использовано Дамом и др., чтобы окончательно идентифицировать наблюдаемые ими сигналы с джозефсонским плазменным резонансом.

Теперь рассмотрим решения уравнения (6.34), линеаризованные около точки $\gamma=0$, но изменяющиеся как в пространстве, так и во времени по закону $\exp\{i(\omega t - kx)\}$. Такие решения существуют, если $(-\vec{k}^2 + \omega^2/c^2) = \lambda_J^{-2}$. Это дисперсионное соотношение можно переписать в виде

$$(\omega/\omega_J)^2 = 1 + \lambda_J^2 k^2. \quad (6.40)$$

Таким образом, джозефсоновская плазменная частота ω_J представляет нижний предел частот, которые могут распространяться в плоскости перехода. В качестве любопытного замечания отметим, что для $\omega=0$ соотношение (6.40) преобразуется к равенству $k = \pm i/\lambda_J$. Это приводит к экспоненциальным решениям, дающим эффект Мейсснера, который рассматривался ранее (6.18).

6.5. Основные соотношения между фазой, числом частиц, энергией и током

После ознакомления с эффектом Джозефсона на феноменологическом уровне кратко рассмотрим его в более общем виде. Это сделает более ясными некоторые фундаментальные взаимосвязи между фазой и числом частиц и между энергией и током.

При выводе волновой функции (2.14) теории БКШ было отмечено, что фаза величины v_k относительно фазы u_k была произвольной, если только она такая же, как фаза Δ_k ($=\Delta$), чтобы удовлетворить соотношению (2.44). Поэтому можно записать волновую функцию БКШ, в которой эта фаза имеет фиксированное значение ϕ , в следующем виде:

$$|\Psi_\phi\rangle = \prod_k (|u_k| + |v_k| e^{i\phi c_{k\uparrow}^* c_{-k\downarrow}^*}) |\Phi_0\rangle. \quad (6.41)$$

Как отмечалось в разд. 2.3, эта волновая функция дает большую неопределенность в числе электронов N , хотя подходящим выбором химического потенциала μ можно установить нужное среднее значение \bar{N} . Далее, было отмечено, что можно было бы установить состояние с точным числом частиц N , образуя суперпозицию

$$|\Psi_N\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \exp(-iN\phi/2) |\Psi_\phi\rangle. \quad (6.42)$$

Преобразование, обратное к (6.42), имеет вид

$$|\Psi_\phi\rangle = \sum_{N=0}^{\infty} \exp(iN\phi/2) |\Psi_N\rangle. \quad (6.43)$$

Поэтому состояния с определенными значениями N и ϕ связаны фурье-преобразованием того же вида, что связывает собственные функции сопряженных операторов, таких, как импульс и коорди-

ната в квантовой механике. Следовательно, выполняется соотношение неопределенностей:

$$\Delta N \Delta \phi \geq 1, \quad (6.44)$$

которое ограничивает точность, с которой N и ϕ могут быть определены одновременно. Однако, так как типичное значение \bar{N} равно $\sim 10^{20}$, это неравенство может быть выполнено, даже если $\Delta N / \bar{N}$ и $\Delta \phi$ порядка $N^{-1/2} \sim 10^{-10}$. Например, это возможно при подстановке в интеграл весовой функции Гаусса $\exp\{-[(\phi - \bar{\phi})^2 / (\Delta \phi)^2]\}$. Итак, дано обоснование полуклассической точки зрения, в которой N и ϕ определяются с точностью 10^{-10} .

Рассмотренная выше фаза ϕ представляет собой разность фаз амплитуд вероятности для состояний, которые отличаются на одну пару электронов. Из формулы (2.44) следует, что она является тогда и фазой Δ . Является ли она также фазой волновой функции ψ в теории ГЛ? Так как выше не был проведен формальный вывод теории ГЛ из микроскопической теории, здесь нельзя привести строго доказательства ответа. Отметим лишь, что в этом выводе, как оказывается, волновая функция $\psi(r)$ входит в виде $\langle \psi_{\text{оп}\uparrow}(r) \psi_{\text{оп}\downarrow}(r) \rangle$, т. е. представляет локальное среднее значение пары операторов уничтожения. Следовательно, ее фаза будет разностью фаз амплитуд состояний двух частиц, которая точно равна величине, названной нами ϕ .

Так как $\hbar\phi$ и $N^* = N/2$ (т. е. число пар) — полуклассические канонически сопряженные переменные, можно записать для них уравнения движения Гамильтона:

$$\hbar \frac{d\phi}{dt} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial N^*} = - 2 \frac{\partial F}{\partial N} = - 2\mu \quad (6.45a)$$

и

$$\frac{\partial N^*}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\hbar\phi)} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial F}{\partial \phi}. \quad (6.45b)$$

Здесь гамильтониан \mathcal{H} заменен свободной энергией F , а не средним значением энергии E , так как работа, совершенная над системой в изотермическом процессе, есть dF , а не dE . Следовательно, именно F представляет собой нужную «энергетическую функцию» для механики статистической системы*. Из формулы (6.45a) следует, что фаза изолированного сверхпроводника изменяется во времени как $\exp\{-i2\mu t/\hbar\}$, что само по себе физически не прояв-

* Для пояснения этого утверждения рассмотрим пример изотермического сжатия 1 моля идеального газа от объема V_1 до V_2 . Так как внутренняя энергия U зависит только от T , то $\Delta U=0$. Работа, совершенная над газом, равна $\Delta W = - \int P dV = RT \ln(V_1/V_2)$, но эта энергия уходит из газа (к тепловому резервуару с температурой T) в виде тепла, понижая энтропию газа. Это увеличивает его свободную энергию $F=U-TS$ на величину $\Delta F=-T\Delta S=\Delta W$. Таким образом, если нужно провести энергетическое рассмотрение для изотермической системы без учета теплового резервуара, то в качестве энергии рассматриваемой системы необходимо использовать F , а не U .

ляется. Аналогично для изолированного сверхпроводника из формулы (6.45б) не вытекает никаких следствий, так как $N=\text{const}$, а $\partial F/\partial\phi=0$.

Для того, чтобы получить наблюдаемые следствия движения фазы, необходимо привести один сверхпроводник в достаточно близкий контакт с другим, чтобы появилась энергетическая связь F_{12} . Так как общий сдвиг фазы не должен влиять на энергию, F_{12} может зависеть только от относительной фазы $\gamma=\phi_2-\phi_1$. Тогда уравнение (6.45а) дает джозефсоновское частотное соотношение, т. е.

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t} = \frac{\partial\phi_2}{\partial t} - \frac{\partial\phi_1}{\partial t} = \frac{2}{\hbar} (\mu_1 - \mu_2). \quad (6.46)$$

Аналогично, как следует из уравнения (6.45б), ток между двумя сверхпроводниками равен

$$\frac{I_{12}}{2e} = -\frac{\partial N_1^*}{\partial t} = \frac{\partial N_2^*}{\partial t} = -\frac{1}{\hbar} \frac{\partial F_{12}}{\partial\phi_1} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial F_{12}}{\partial\phi_2} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial F_{12}}{\partial\gamma}. \quad (6.47)$$

Это выражение делает ясным эквивалентность существования джозефсоновского соотношения тока и фазы наличию энергии связи $F_{12}(\gamma)$, зависящей от фазы. Когда F_{12} имеет минимум, $\partial F_{12}/\partial\gamma=0$ и ток отсутствует. Это точно соответствует ситуации в массивном сверхпроводнике, в котором самое низкое по энергии — это состояние без тока.

Формулу (6.47) можно использовать для того, чтобы вывести джозефсоновское соотношение между током и фазой, замечая, что энергия $F_{12}(\gamma)$ должна быть периодической четной функцией γ : периодической, так как γ определяется с точностью до 2π , и четной, так как энергия должна быть неизменной при замене ϕ на ϕ^* . Итак, можно разложить F_{12} в ряд Фурье по косинусам γ . Когда берется производная по γ , входящая в формулу (6.47), получается ряд синусов, в котором основным членом является (6.4).

Возможно, более целесообразно обратить эту процедуру и использовать соотношение для измеряемого тока (6.4), чтобы получить энергию связи, а именно

$$F_{12}(\gamma) = \text{const} - (\hbar I_0/2e) \cos \gamma. \quad (6.48)$$

Полезно выразить эту энергию связи через температуру T_0 , которая определяется из равенства $kT_0=\hbar I_0/2e$. Если это сделать, найдем

$$T_0/I_0 = \hbar/2ek = 2,4 \cdot 10^7 \text{ K/A.} \quad (6.49)$$

Итак, при работе в области температуры жидкого гелия необходимо, чтобы T_0 было больше $\sim 10^{-7}$ А, для того, чтобы связь была достаточно сильной и способной поддерживать фазовую когерентность через переход в присутствии теплового шума. Если I_0 меньше этого значения, эффект Джозефсона будет размываться случайными флуктуациями фазы γ и переход будет казаться

«нормальным». Аналогично фазовую когерентность в переходе могут нарушать любые шумовые сигналы, попадающие на переход из внешних цепей, находящихся при более высокой температуре, или в результате электрических наводок.

6.6. Магнитометры на сквидеах

В ходе обсуждения эффектов Джозефсона уже было указано на два наиболее известных его применения: магнитометры на сквидеах и точное определение отношения h/e (или, наоборот, точный стандарт вольта). При этом обсуждался только сверхток через джозефсоновские переходы. Однако, так как почти все практические применения эффекта Джозефсона предполагают конечное напряжение на переходе для сопряжения с внешней электроникой, в переходах всегда будут происходить также диссипативные процессы. В этом разделе проводится более подробное обсуждение действия джозефсоновских магнитометров, принимая во внимание диссипацию.

6.6.1. Типичные значения параметров

Диссипативные процессы могут быть вызваны нормальными электронами в металлической слабой связи или квазичастичным туннелированием в туннельном переходе; они могут также возникать из непосредственного излучения фотонов или фононов джозефсоновским током. Чтобы не иметь дела с этими частными случаями в отдельности, аппроксимируем их, включая в сопротивление R , параллельное сверхтоку. Почти во всех случаях R будет иметь тот же порядок величины, что и сопротивление слабой связи при температуре выше T_c , обычно ~ 1 Ом. Это шунтирующее сопротивление соответствует члену G_0V в формуле (6.4а) с $G_0=1/R$. Для простоты не будем рассматривать член $G_{\text{инт}} \cos \gamma$, так как он не меняет главных выводов.

Для анализа действия джозефсоновских приборов часто удобно описывать отклик сверхтока его эквивалентной индуктивностью L_J . Если определить L_J дифференциальным соотношением $V=L_J dI/dt$, где $I=I_0 \sin \gamma$ и $d\gamma/dt=2eV/\hbar$, то

$$L_J = \hbar/2eI_0 \cos \gamma. \quad (6.50)$$

Если вместо этого определить L_J приравниванием полного увеличения энергии перехода к $L_J I^2/2$, то $\cos \gamma$ следует заменить на $\cos^2(\gamma/2)$. Хотя индуктивность L_J зависит от фазы γ , ее порядок величины дается величиной $\hbar/2eI_0$ — значением L_J при $\gamma \approx 0$. В единицах СИ $L_J I_0 \cos \gamma = \hbar/2e = \Phi_0/2\pi = 3,3 \cdot 10^{-16}$ Вб. Поэтому для $I_0 \approx 10^{-6}$ А индуктивность равна $L_J \approx 3 \cdot 10^{-10}$ Гн.

Если взять соотношение между I_0 и R_n для туннельного перехода, то найдем, что отклик сверхтока, который описывается L_J ,

преобладает для таких частот или напряжений, что $2eV = \hbar\omega \ll \Delta$; для $2eV = \hbar\omega \gg \Delta$ переход ведет себя как активный элемент*, что можно было бы ожидать из общих соображений. Однако на практике в точечных контактах значение I_0 обычно (хотя не всегда) ниже на один или два порядка теоретического значения для туннельного перехода с тем же нормальным сопротивлением.

Теперь давайте сравним джозефсоновскую индуктивность L_J с индуктивностью кольца, в которое включен переход. Если кольцо радиусом r сделано из провода радиусом a , то его индуктивность равна (опять в системе СИ)

$$L \approx 4\pi \cdot 10^{-7} r \ln(r/a). \quad (6.51)$$

Для диаметра кольца 3 мм индуктивность имеет порядок $3 \cdot 10^{-9}$ Гн; это обычно несколько больше, чем L_J . Чтобы сохранить квантовый режим работы прибора, значение этой индуктивности должно быть относительно низким. Для объяснения этого отметим, что можно применить теорему о равном распределении энергии флюктуаций по степеням свободы к потоку, содержащемуся в кольце. Согласно этой теореме, среднее квадратичное значение флюктуаций определяется соотношением

$$(\delta\Phi)^2/2L = kT/2.$$

Если амплитуда этих флюктуаций превышает $\Phi_0/2$, квантовая периодичность приложенного потока будет размываться случайным потоком тепловых токов. Это приводит к условию

$$L \leq \Phi_0^2/4kT, \quad (6.52)$$

так что при рабочей температуре 4К индуктивность L должна быть меньше, чем 2×10^{-8} Гн. Так как эффективная шумовая температура может быть на порядок больше, чтобы обеспечить надежную работу, индуктивность L обычно выбирают еще меньше (10^{-9} Гн).

Итоговой величиной, представляющей интерес, является отношение $L I_0 / \Phi_0$. Если оно больше единицы, сверхток через слабую связь может экранировать весь квант потока в кольце перед своим разрушением, при котором возникает резистивное состояние перехода и становится возможным скачок потока. Это может привести к гистерезису и усложнить использование прибора при некоторых применениях. Кроме того, так как в переходе может происходить диссиляция, разумно предположить, что ток, циркулирующий в кольце, принимает из ряда разрешенных квантовых значений именно то, которое минимизирует энергию. Поэтому гистерезис в правильно сконструированных устройствах не приводит к неопределенности рабочих характеристик. Фактически ток I_0 всегда должен быть выбран достаточно большим, чтобы удовле-

* В действительности на высоких частотах в импедансе туннельных переходов преобладает емкость между двумя сверхпроводниками. Так как в случае точечных контактов емкость не оказывается, не будем дальше ее рассматривать.

творить требованиям, вытекающим из формулы (5.49) для сохранения фазовой когерентности на переходе*:

$$I_0 \geqslant 2\pi kT/\Phi_0, \quad (6.53)$$

так что при рабочей температуре 4К ток I_0 должен превышать $2 \cdot 10^{-7}$ А. Учитывая более высокие шумовые температуры, I_0 опять обычно выбирается равным, по крайней мере, 10^{-6} А. Из практических соображений приборы обычно работают с $L/I_0/\Phi_0 \approx 1$. В этом случае неравенство (6.53) переходит в условие (6.52).

6.6.2. Двухконтактный сквид постоянного тока

В качестве первого примера расскажем о роли, которую играет шунтирующее сопротивление, и проведем более детальный анализ работы двухконтактного сквида постоянного тока, описанного в разд. 6.3. Ранее было показано, что критический ток устройства является периодической функцией потока, заключенного в кольце. Более удобно, однако, работать с устройством на постоянном токе в резистивном состоянии, при котором периодической функцией Φ/Φ_0 является напряжение на приборе. Давайте проанализируем это состояние.

Полный сверхток через контакт по-прежнему подчиняется соотношениям (6.21) и (6.22). Однако в резистивном состоянии задаваемый постоянный ток I превышает этот сверхток. Поэтому излишний ток должен переноситься нормальной проводимостью двух переходов, в результате чего получаем

$$I = I_s + 2V/R$$

или

$$V = R[I - I_0(\sin \gamma_A + \sin \gamma_B)]/2.$$

Используя тригонометрическое тождество, вспоминая соотношение (6.22) для разности фаз $\gamma_A - \gamma_B = 2\pi\Phi/\Phi_0$ и определяя $\bar{\gamma} = (\gamma_A + \gamma_B)/2$, записываем

$$V = R\left[I/2 - I_0 \cos\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right) \sin \bar{\gamma}\right]. \quad (6.54)$$

Для $I < 2I_0$ это уравнение определяет значение $\bar{\gamma}$, дающее чисто сверхпроводящее решение с $V=0$, рассмотренное в разд. 6.3. Однако для больших токов такое решение невозможно, и $V>0$. В этом случае γ изменяется во времени в соответствии с джозефсоновским соотношением $\dot{\bar{\gamma}} = 2eV(t)/\hbar$. На первый взгляд кажется,

* Когда переход замкнут кольцом, такой критерий является слишком строгим, так как в этом случае флуктуации разности фаз возбуждают ток не только через переход (характеризуемый джозефсоновской индуктивностью), но и через индуктивность кольца. В результате знаменатель формулы (6.53) нужно заменить выражением типа $(\Phi_0 + 2\pi L I_0)$. Для всех значений L , которые достаточно малы, чтобы удовлетворить неравенству (6.52), простая формула (6.53) не более чем в два раза отличается от более точных условий.

что сверхток будет просто усредняться до нуля по периоду переменного тока. Но при более внимательном рассмотрении видно, что усредненное по времени значение $\sin \bar{\gamma}$ не равно нулю, так как γ изменяется медленнее, когда V мало, придавая большее значение этой части периода. Количественно это выражается соотношением

$$\bar{V} = \frac{\hbar}{2e} \frac{1}{T} \oint \frac{d\bar{\gamma}}{dt} dt = \frac{\hbar}{2e} \frac{2\pi}{T}, \quad (6.55a)$$

в котором период негармонического цикла T определяется как

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{d\bar{\gamma}}{d\bar{\gamma}/dt} = \frac{\hbar}{2e} \int_0^{2\pi} \frac{d\bar{\gamma}}{V(\bar{\gamma})}. \quad (6.55b)$$

Интегрируя*, находим

$$\bar{V} = R [(I/2)^2 - I_0^2 \cos^2(\pi\Phi/\Phi_0)]^{1/2}. \quad (6.56)$$

Так как $\cos^2(\pi\Phi/\Phi_0) = [1 + \cos(2\pi\Phi/\Phi_0)]/2$, ясно видно, что \bar{V} периодично по Φ с периодом Φ_0 .

Из формулы (6.56) следует, что \bar{V} имеет максимальное значение $I_0 R/2$ в случае полуцелого числа квантов потока. Если $I < 2I_0$, то минимальное значение \bar{V} равно нулю, а если $I > 2I_0$, то минимум, очевидно, равен $I_0 R [1 - (2I_0/I)^2]^{1/2}/2$ и достигается при целом числе квантов потока. Итак, периодическое изменение \bar{V} по Φ имеет максимальную амплитуду при $I = 2I_0$, когда $\Delta\bar{V} = \bar{V}_{\max} - \bar{V}_{\min} = I_0 R$. Для туннельных переходов эта величина должна быть порядка напряжения щели $\Delta/e \approx 10^{-3}$ В. Для точечных контактов обычно наблюдаются значения порядка 10^{-5} В. Когда $I \gg 2I_0$, $\Delta\bar{V} = I_0^2 R/I$, так что $\Delta\bar{V}$ падает довольно медленно, даже когда ток смещения настолько велик, что устройство всегда находится в резистивном состоянии.

6.6.3. Влияние экранирования

В приведенном выше выводе было сделано упрощающее предположение, что можно пренебречь как самоиндукционным потоком, вызванным экранирующим током I_s , циркулирующим по кольцу, так и потоком, обусловленным током смещения I . Для простоты анализа предположим, что токовые выводы присоединены симметрично к кольцу, так что взаимная индуктивность между цепью задания тока и кольцом равна нулю. В этом случае второй эффект отсутствует**: Однако пренебрежение экранирую-

* Систематическое рассмотрение этого и многих других примеров приведено в работе [35].

** Если это утверждение несправедливо, то в периодическом отклике появится асимметрия, которая может быть использована для увеличения чувствительности прибора [36].

щим влиянием циркулирующего тока если и оправдывается, то только в крайних случаях. Тем не менее качественные результаты остаются в основном теми же.

Это становится очевидным из следующего рассмотрения. Уравнения (6.54) и (6.55) справедливы в общем случае, если Φ включает не только подаваемый извне поток Φ_x , но и экранирующий поток Φ_s , т. е. в добавление к формуле (6.54) запишем соотношение

$$\Phi = \Phi_x + \Phi_s \quad (6.57)$$

и

$$\Phi_s = LI_s = LI_0(\sin \gamma_B - \sin \gamma_A)/2 = -LI_0 \sin(\pi\Phi/\Phi_0) \cos \bar{\gamma}. \quad (6.58)$$

Уравнение (6.58) означает, что поток Φ_s может оставаться тем же самым*, если Φ_x изменяется на целое число квантов потока. Тогда множитель $\cos(\Phi\pi/\Phi_0) \equiv \cos[\pi(\Phi_x + \Phi_s)/\Phi_0]$ в формуле (6.54) также не изменится при таком изменении Φ_x и V останется периодическим по Φ_x с неизменным периодом, несмотря на учет Φ_s . Влияние учета Φ_s состоит только в усложнении формы зависимости $V(\gamma)$, поэтому для интегрирования выражения (6.55б) необходимо применить численные или графические методы. Так, выражение (6.56) становится несправедливым и заменяется на качественно аналогичную зависимость с тем же периодом.

Хотя в данном случае нет необходимости в точном решении связанных трансцендентных уравнений, определяющих соотношения между Φ и Φ_x , полезно найти некоторые характеристики режима с нулевым напряжением, когда течет только сверхток. Подставляя в формулу (6.54) $V=0$, получаем

$$\sin \bar{\gamma} = I/2I_0 \cos(\pi\Phi/\Phi_0).$$

Подставляя это выражение в формулу (6.58) и используя соотношение (6.57), чтобы исключить Φ_s , приходим к уравнению

$$\Phi_x - \Phi = \pm LI'_0 \sin(\pi\Phi/\Phi_0), \quad (6.59)$$

где

$$I'_0 = I_0 \left[1 - \frac{I^2}{4I_0^2 \cos^2(\pi\Phi/\Phi_0)} \right]^{1/2} \leq I_0. \quad (6.59a)$$

При заданных значениях I и Φ_x эти соотношения определяют ряд возможных значений Φ . Можно выделить важный особый случай, когда Φ достаточно близко к $n\Phi_0$. В этом случае можно заменить $\sin(\pi\Phi/\Phi_0)$ на $\pm(\pi/\Phi_0)(\Phi - n\Phi_0)$, тогда выражение (6.59) можно преобразовать к виду

$$\Phi - n\Phi_0 = \frac{\Phi_x - n\Phi_0}{1 + \pi L I'_0 / \Phi_0}; \quad \Phi - n\Phi_0 \leq \Phi_0/2. \quad (6.60)$$

В случае слабого экранирования ($\pi L I'_0 / \Phi_0 \ll 1$) единственным

* Если $L I_0 / \Phi_0 \geq 1$, то, как это видно из формулы (6.58), поток Φ_s много-значен. Однако в рассматриваемом здесь резистивном состоянии перехода предполагали, что Φ_s всегда принимает значение, дающее наименьшую энергию, т. е. значение, для которого $|I_s|$ или $|\Phi_s|$ минимальны.

решением уравнения (6.60) является $\Phi \approx \Phi_x$, а n — ближайшее целое число к Φ_x/Φ_0 . Если, однако, имеется сильное экранирование, то приблизительно LI'_0/Φ_0 значений n с обеих сторон Φ_x/Φ_0 будут все еще давать $\Phi - n\Phi_0 \leq \Phi_0/2$, образуя тем самым самосогласованные решения. Все эти решения метастабильны, кроме решения с ближайшим к Φ_x/Φ_0 значением n .

Максимальный сверхток через устройство всегда определяется этим наиболее стабильным решением, так как измерение I_c требует, по крайней мере, кратковременного перехода кольца в нормальное состояние, что разрушает любое метастабильное состояние, позволяя сформироваться более стабильному. Таким образом, когда измеряется критический ток, Φ никогда не отличается от квантового значения на величину большую, чем $\Phi_0/2(1 + \pi LI'_0/\Phi_0)$. Это означает, что в присутствии сильного экранирования глубина периодической модуляции I_c в этом устройстве равна не $2I_0$, как было бы в пренебрежении экранированием [см. (6.23)], а намного меньше. Вычисление этой уменьшенной глубины модуляции требует в общем случае численных методов, но оно существенно упрощается в пределе сильного экранирования, когда можно допустить, что Φ всегда неотличимо от квантового значения. Тогда максимальный экранированный поток равен $\Phi_0/2$. Этому потоку соответствует ток $\Phi_0/2L$, так что для заданного тока токи двух переходов должны равняться $I/2 \pm \Phi_0/2L$. Так как ни через один переход ток не может превышать I_0 , максимальный полный ток равен $2I_0 - \Phi_0/L$, что следует сравнить с величиной $2I_0$, когда $\Phi = n\Phi_0$. Итак, в этом пределе сильного экранирования глубина модуляции составляет $\Delta I_0 \leq \Phi_0/L \sim 10^{-6}$ А, независимо от величины тока I_0 .

Так как детальный анализ резистивного состояния, учитывающего экранирование, значительно сложнее анализа, приводящего к выражению (6.56), ограничимся здесь замечанием, что периодическая по потоку модуляция напряжения на критическом токе будет порядка $R\Delta I_c/2$. Для случая слабого экранирования эта модуляция приближенно равна I_0R в соответствии с нашим анализом на основе формулы (6.56). Для случая сильного экранирования она будет меньше на множитель порядка $\Phi_0/2I_0L$. Таким образом, обычно целесообразно работать с I_0 , не намного большим $\Phi_0/2L$, чтобы оптимизировать амплитуду сигнала.

6.6.4. Использование трансформатора потока

В реальных применениях сквида для физических измерений обычно желательно использовать сверхпроводящий трансформатор* (или «передатчик потока»), чтобы связать представляющие

* Такой трансформатор представляет собой первичную катушку (обычно одиночную петлю) индуктивности L_1 , помещенную в измеряемое поле и соединенную со вторичной катушкой L_2 (обычно содержащей большое число витков), помещенной внутрь кольца сквида. Вся цепь делается из сверхпроводника. — Прим. ред. пер.

интерес изменения потока с кольцом сквида. Преимущества этого устройства заключаются в следующем [37].

1. Это устройство позволяет сквиду работать при подходящей постоянной температуре и низком окружающем магнитном поле вне зависимости от условий на другом конце трансформатора потока, где находится исследуемый образец. В такой конструкции сквид был использован с образцами, на которые подавались магнитные поля до нескольких килогауссов, и с температурой намного большей T_c для ниобия, из которого сделан сквид.

2. Трансформатор потока позволяет так располагать сквид, чтобы облегчить регулировку слабых связей.

3. Чувствительность сквида может быть легко уменьшена на один или два порядка величины вставлением в сверхпроводящую цепь трансформатора потока «понижающей индуктивности». Это позволяет исследовать явления, в которых величины, представляющие интерес, меняются на несколько порядков величины, как, например, вблизи фазового перехода.

4. Облегчается введение отрицательной обратной связи, посредством которой магнитометр на сквиде преобразуется в прибор типа нуль-детектора. Преимущество такого включения состоит в том, что работа прибора становится независимой от точной формы периодической зависимости $V(\Phi_x)$, так как рабочая точка «привязывается» к резкому участку этой зависимости, погашая любые дальнейшие изменения измеряемого потока равным и противоположным изменением в цепи обратной связи.

5. Появляется свобода в выборе площади и числа витков во входной катушке трансформатора потока, что облегчает оптимизацию всей конструкции.

Основной принцип, определяющий работу трансформатора, состоит в том, что поток через полный контур трансформатора остается постоянным, как этого требует квантование магнитного потока. Так, если приложенное магнитное поле в первичной катушке изменяется на ΔB_1 , то связанное с ним изменение потока предотвращается установлением в цепи трансформатора тока ΔI , величина которого определяется из равенства

$$N_1 A_1 \Delta B_1 + L_1 \Delta I + L_2 \Delta I = 0.$$

Тогда изменение поля во вторичной катушке равно

$$\Delta B_2 = \frac{L_2 \Delta I}{N_2 A_2} = -\frac{L_2 N_1 A_1}{N_2 A_2 (L_1 + L_2)} \Delta B_1.$$

Для данных размеров катушки $L_i = C_i N_i^2$, где с хорошей степенью точности $C_i \propto r_i^2 / (r_i + l_i)$; здесь r_i — радиус, а l_i — длина i -й катушки. Отсюда следует, что для данных размеров катушки величина ΔB_2 максимальна, если отношение числа витков N_1/N_2 выбрано так, чтобы $L_1 = L_2$; в этом случае половина входного потока оказывается в L_2 . При оптимизированном отношении витков получаем

$$\frac{\Delta B_2}{\Delta B_1} = -\frac{1}{2} \frac{N_1 A_1}{N_2 A_2} \approx -\frac{1}{2} \frac{r_1}{r_2} \left(\frac{r_1 + l_1}{r_2 + l_2} \right)^{1/2},$$

где во второй части равенства использовано упомянутое выше равенство для C_1 .

Таким образом, для данных размеров вторичной катушки, определяемых сквидом, изменение потока для данного ΔB_1 пропорционально $r_1(r_1+l_1)^{1/2}$, т. е. пропорционально корню квадратному из объема первичной катушки, заполненного измеряемым полем. Этот результат мог быть предсказан непосредственно из равенства индуктивностей, так как $L^2/2 = (1/8\pi) \int B^2 dr \approx B^2 V / 8\pi$ и через обе катушки проходит одинаковый ток.

6.6.5. Одноконтактный высокочастотный сквид

Разновидностью сквида, которая обладает рядом практических преимуществ, является устройство на одиночном точечном контакте, описанное Зиммерманом и др. [38] и показанное на рис. 6.7. Вся конструкция выточена из единого куска ниобия; контакт сделан в виде заостренного ниобиевого винта. Так как в конструкции используется только один металл, эффекты теплового расширения происходят одинаково во всех его кусках и прибор может неоднократно подвергаться перециклированию между комнатной и гелиевой температурами без существенной деградации. Геометрия прибора обеспечивает такую жесткую фиксацию точечного контакта, что он относительно нечувствителен к механическим сотрясениям. И наконец, наличие массивной ниобиевой оболочки, полностью окружающей два отверстия, обеспечивает то, что полный поток в двух отверстиях $\Phi_1 + \Phi_2$ постоянен и равен тому значению, которое было в нем захвачено при переходе устройства в сверхпроводящее состояние. Все это делает сквид нечувствительным к однородным внешним полям и, следовательно, к магнитным наводкам. Он чувствителен только к разностным полям, которые сдвигают поток из одного отверстия в другое. Такое поле обычно обеспечивается использованием описанного выше трансформатора потока с выходной катушкой, помещенной в одно из отверстий сквида.

Если забыть о таких преимуществах, как механическая стабильность и нечувствительность к однородным окружающим полям, симметричный сквид с двумя отверстиями эквивалентен кольцу с одиночной слабой связью, содержащему разностный поток $\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$. Для измерения потока в кольце используется связь кольца с резонансным контуром, через который пропускается ток постоянной амплитуды от генератора на какой-нибудь удобной частоте радиодиапазона, например на 30 МГц (рис. 6.8). Свойства таких высокочастотных сквидов были изучены Сильвером и Зиммерманом [39]. Как добротность Q , так и резонансная частота контура изменяются связью со сквидом и зависят от потока через кольцо. Это позволяет с помощью различных схем использовать напряжение на резонансном контуре для получения электрического сигнала, который периодичен по Φ/Φ_0 . Такие устройства были

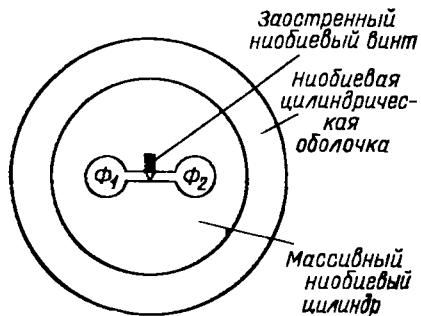


Рис. 6.7. Схематическое изображение симметричного одноконтактного радиочастотного сквада

предложены Зиммерманом и др., а позднее достижения в оптимизации этого устройства подробно излагались в работе Гиффарда, Вебба и Уитли [40]. Прекрасный общий обзор был написан Веббом [41]. Уравнения, описывающие одноконтактный сквид, проще, чем полученные выше для двухконтактного сквада, так как используют только одну фазовую переменную γ и один циркулирующий ток. Разность фаз определяется соотношением $\gamma = 2\pi\Phi/\Phi_0$, а циркулирующий ток равенством

$$I = I_0 \sin \gamma + V/R. \quad (6.61)$$

Тогда, так как $V = \dot{\Phi}$, получаем уравнение, аналогичное уравнению (6.59), но учитывающее также резистивный член:

$$\Phi_x - \Phi = LI_0 \sin(2\pi\Phi/\Phi_0) + L\dot{\Phi}/R. \quad (6.62)$$

В этом уравнении Φ_x включает как внешний измеряемый поток, так и «опрашивающий» высокочастотный поток, необходимый для измерений. Если заменить $\sin(2\pi\Phi/\Phi_0)$ линейным приближением, как это было сделано при выводе формулы (6.60), получим

$$\frac{d}{dt}(\Phi - n\Phi_0) + R(L^{-1} + L_J^{-1})(\Phi - n\Phi_0) = \frac{R}{L}(\Phi_x - n\Phi_0), \quad (6.63)$$

где в этом линейном приближении $L_J = \Phi_0/2\pi I_0$. Таким образом, экранирование на низких частотах описывается соотношением

$$\frac{\Phi - n\Phi_0}{\Phi_x - n\Phi_0} = \frac{1}{1 + L/L_J} = \frac{1}{1 + 2\pi L I_0 / \Phi_0}, \quad (6.64)$$

вполне аналогичным формуле (6.60). Время релаксации отклика на малые изменения Φ_x очень мало ($\sim L_J/R$) и приблизительно составляет от 10^{-10} до 10^{-12} с. Однако для больших приращений поля, связанных с изменением квантового числа n , линейное приближение нарушается, как можно видеть из формулы (6.62), характерная постоянная времени равна просто обычной постоянной времени L/R и составляет 10^{-9} — 10^{-10} с. Для типичных рабочих

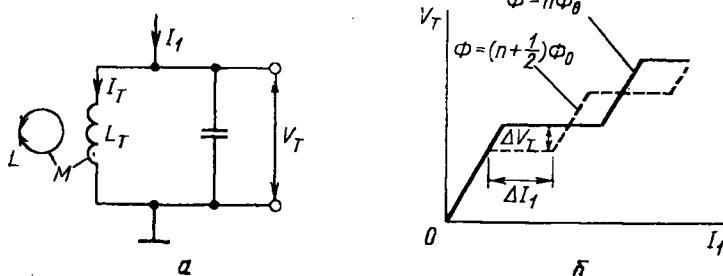


Рис. 6.8. а — Схема, используемая для радиочастотного сквидея. В контур подается радиочастотный ток постоянной амплитуды I_1 , а напряжение на контуре V_T управляется внешним полем. б — Соотношение между V_T и I_1 для случаев целого и полуцелого числа квантов потока в сквиде. При промежуточных значениях потока ступени напряжения (плато) наблюдаются при значениях V_T в промежутках между показанными значениями. Ширина плато ΔI_1 и расстояние между их крайними положениями ΔV_T вычисляются в тексте

частот $\omega L_J/R \ll 1$ и сквид действует подобно короткозамкнутому витку без потерь за исключением того момента, когда нарушается сверхпроводимость в переходе и изменяется квантовое состояние.

Обычно сквид слабо связан с высокодобротным резонансным контуром, на который подается ток постоянной амплитуды, достаточной, чтобы вызывать в кольце циркулирующие токи, которые превышают критический ток I_0 . Энергию, передаваемую за период из индуктивности к переходу, можно представить в виде

$$\Delta W = \oint IVdt = L^{-1} \oint (\Phi_x - \Phi) d\Phi = L^{-1} \oint \Phi_x d\Phi, \quad (6.65)$$

так как для любого замкнутого цикла $\oint \Phi d\Phi = 0$. Написанное выражение представляет суммарную энергию, отбираемую от резонансного контура и рассеиваемую в сопротивлении перехода за период. Оценим эту энергию в простом приближении полного экранирования, при котором Φ всегда находится как раз на квантовом уровне. Тогда, если $(\Phi_0/2L) < I_0 < (3\Phi_0/2L)$ и поэтому Φ никогда не изменяется в момент скачка более чем на один квант, можно записать соотношение (6.65) в виде

$$\Delta W = \frac{\Phi_0}{L} \sum_n [\Phi_{x\uparrow}(n) - \Phi_{x\downarrow}(n)],$$

где $\Phi_{x\uparrow}(n)$ и $\Phi_{x\downarrow}(n)$ обозначают соответственно значения Φ_x , при которых Φ изменяется от $n\Phi_0$ до $(n+1)\Phi_0$ и наоборот. Так как $\Phi_{x\uparrow}(n) = n\Phi_0 + LI_0$ (в то время как $\Phi_{x\downarrow}(n) = (n+1)\Phi_0 - LI_0$), каждый член в сумме вносит вклад $(2LI_0 - \Phi_0)$ и можно потерю для каждого одноквантового гистерезисного цикла записать

$$\Delta W = 2I_0\Phi_0 - \Phi_0^2/L, \quad I_0 \gg \Phi_0/2L. \quad (6.66)$$

Эти потери не будут зависеть от рабочей частоты до тех пор, пока $\omega\tau = \omega L/R \ll 1$. Если $\omega\tau \geq 1$, изменения потока при соответствующих значениях Φ_x больше нельзя рассматривать как мгновенные. Тогда

анализ, учитывающий только потери на гистерезис, становится несправедливым и потери за цикл падают как $1/\omega t$.

Теперь посмотрим, как существование этого механизма потерь влияет на измеряемую величину, а именно на напряжение на резонансном контуре как функцию подаваемого высокочастотного тока и постоянного потока Φ в кольце. Для простоты предположим, что ток I_1 подается точно на резонансной частоте контура и добротность контура Q велика, чтобы можно было сделать стандартные приближения. Пусть L_t есть индуктивность в резонансном контуре, связанная взаимной индуктивностью M с индуктивностью сквиде L . Тогда ток I в сквиде связан с током I_t через индуктивность L_t соотношением $MI_t = LI$, в котором сделано пренебрежение импедансом перехода. Следовательно, магнитная энергия, накопленная в сквиде, связана с полной энергией W в резонансном контуре (включая энергию в емкости) соотношением

$$\frac{1}{4} LI^2 = \frac{1}{4} \frac{M^2}{L_t L} L_t I_t^2 = \frac{1}{2} k^2 W \ll W. \quad (6.67)$$

В этом выражении и в последующем обсуждении для всех высокочастотных величин используются *амплитудные* значения, так как они физически наиболее существенны. Величина k представляет собой коэффициент связи между двумя цепями, который обычно имеет значения, много меньшие единицы.

Энергия, накопленная в резонансном контуре, может быть выражена через непосредственно измеряемое напряжение V_t в виде $W = V_t^2 / 2\omega^2 L_t$. Приравнивая входную мощность потерям, получаем выражение для W в установившемся состоянии:

$$V_t I_1 / 2 = \omega W / Q + \Delta W / \Delta t, \quad (6.68)$$

где Δt — время между гистерезисными циклами. В отсутствие потерь на гистерезис $V_t = \omega L_t Q I_1$ и $W = W_0 = Q^2 L_t I_1^2 / 2$. Гистерезис становится возможным, когда W превышает критическое значение W_c , при котором Φ_x в сквиде становится больше критического значения. Когда I_1 возрастает выше значения, определяемого равенством $W_0 = W_c$, то действительное усредненное по времени значение W «замирает» примерно на уровне $W_c - \Delta W / 2 \approx W_c$ и формула (6.68) просто определяет, насколько быстро W достигает значения W_c , чтобы дать новый цикл гистерезиса. Поэтому, до тех пор пока I_1 увеличивается настолько, что гистерезисный цикл будет происходить на каждом периоде высокочастотного сигнала, напряжение на контуре V_t остается на значении $V_{t,c} = \omega (2W_c L_t)^{1/2}$ (см. рис. 6.8, б). Положив в формуле (6.68) $\Delta t = 2\pi/\omega$, получаем длину такого «плато»:

$$\Delta I_1 = \omega \Delta W / \pi V_{t,c}. \quad (6.69)$$

На конце плато (ступеньки) V_t опять начинает расти с увеличением I_1 до нового порогового значения, при котором в сквиде возникает еще одна гистерезисная петля за цикл. Оказывается, что,

если значение Φ/Φ_0 точно целое, гистерезисные петли возникают парами с одним и тем же пороговым значением, так что длина плато в два раза превышает длину, даваемую формулой (6.69). В случае полуцелого Φ/Φ_0 все плато двойные, за исключением первого. Однако во всех других случаях длина плато всегда дается формулой (6.69).

Теперь посмотрим, как напряжения плато зависят от среднего потока Φ — величины, которая должна измеряться. Для того чтобы произошел скачок, пиковое значение $\Phi_x = (\bar{\Phi} - n\Phi) + \Phi_{RF}$ должно превышать произведение LI_0 . Для предельных случаев $\bar{\Phi} = n\Phi_0$ и $\bar{\Phi} = (n + 1/2)\Phi_0$ получаем соответственно $\Phi_{RF} = LI_0$ и $\Phi_{RF} = LI_0 - \Phi_0/2$. Используя соотношение $\Phi_{RF} = MI_T = (M/\omega L_T)V_T$, находим соответствующие напряжения на колебательном контуре:

$$V_T = \omega L_T LI_0 / M \text{ и } (\omega L_T LI_0 M)(1 - \Phi_0/2LI_0).$$

Для типичного случая $LI_0 = \Phi_0$ они отличаются в два раза. В любом случае изменение напряжения на контуре между уравнениями двух плато равно

$$\Delta V_T = \omega \Phi_0 L_T / 2M. \quad (6.70)$$

На первый взгляд кажется, что, уменьшая M , т. е. уменьшая связь между сквидом и контуром, можно этот сигнал сделать произвольно большим. Но, чтобы выражение (6.70) действительно описывало наблюдаемую периодическую модуляцию напряжения на контуре при изменении потока, эти плато должны наблюдаваться при том же токе накачки I_1 . Это возможно, только если длина плато (6.69) больше, чем изменение δI_1 в пороговом токе, соответствующем изменению V_T , даваемому формулой (6.70), а именно $\delta I_1 = \Delta V_T / \omega L_T Q = \Phi_0 / 2MQ$. Из формулы (6.69) находим, что длина нижнего плато равна $\Delta I_1 = 2M\Phi_0 / \pi L_T L$. Поэтому условие $\Delta I_1 > \delta I_1$ сводится к требованию

$$k^2 Q > \pi/4 \approx 1. \quad (6.71)$$

Если связь становится ниже этого значения, напряжение сигнала опять уменьшается пропорционально взаимной индуктивности M . Таким образом, условие оптимальной связи имеет вид $k^2 Q \approx 1$. Хотя этот результат получен с использованием очень упрощенной модели, он, по всей вероятности, подтверждается на эксперименте и при машинных расчетах, использующих более точные модели*.

Если оптимальная связь $k^2 Q = 1$ и $LI_0 = \Phi_0$, напряжение сигнала (6.70) можно переписать в виде

$$\Delta V_T = \frac{1}{2} \frac{\omega Q \Phi_0 M}{L} \approx \frac{1}{2} \omega Q I_0 M \leq \frac{I_0 R Q M}{L}; \quad (6.72)$$

в последнем выражении учтено, что рабочая частота ограничена

* Результат оказывается [63*] действительно верным, если работать на первом плато и при точной настройке частоты накачки. — Прим. ред. пер.

постоянной времени сквида L/R . Интересно сравнить это напряжение с амплитудой сигнала сквида постоянного тока, которая ограничивается величиной $\sim I_0 R \sim \Phi_0 R / 2L$. Таким образом, получаем оценку их отношения:

$$\frac{\Delta V_T}{\Delta V_{dc}} \approx \left(\frac{\omega L_T Q}{R} \right)^{1/2} \left(\frac{\omega L}{R} \right)^{1/2}. \quad (6.73)$$

Первый фактор представляет ожидаемый коэффициент трансформации в резонансном трансформаторе с отношением импедансов $\omega L_T Q / R$; для типичных значений оно приблизительно равно 10^2 . Второй фактор, обычно принимающий значения между 0, 1 и 1, отражает потери при выборе режима, если рабочая частота ниже максимально возможной. Сочетание этих двух факторов обычно приводит к выигрышу по напряжению примерно в 10 раз по сравнению со сквидом постоянного тока*. Так как даже более высокий импеданс контура имеет порядок лишь 10^4 Ом, такое повышение напряжения выгодно.

Фактически при работе на плато динамический импеданс контура намного ниже, чем в ненагруженном состоянии. Если бы напряжение на плато было точно постоянным, как считалось выше, дифференциальный импеданс был бы равен нулю. В действительности на типичных наблюдаемых плато дифференциальный импеданс ниже, чем импеданс контура, на один или два порядка величины. Этот конечный наклон вызывается тем, что эффективный критический ток слабой связи зависит от того, как быстро происходит переход. Такая зависимость обусловлена воздействием тепловых флуктуаций (эта тема будет обсуждаться в следующей главе). Низкий дифференциальный импеданс цепи контура делает устройство относительно нечувствительным к шумам, попадающим от источника накачки или сигнального усилителя, а также увеличивает полезную сигнальную мощность выходного сигнала. Эти особенности являются дополнительными преимуществами высокочастотного сквида.

6.6.6. Предел чувствительности

На практике предел чувствительности магнитометра на сквиде обычно определяется шумом усилителя, находящегося при комнатной температуре, или внешним шумом, попадающим в криостат. Тем не менее полезно найти внутренний предел собственных шумов, определяемый тепловым шумом в сквиде.

В сквиде постоянного тока, все время работающем на резистивном участке, хорошим приближением будет замена кольца сквида классической цепью, состоящей из сопротивления $R' = 2R$ и индуктивности L . Среднеквадратичное напряжение теплового шума в

* В последнее время, применяя сходные методы согласования с усилителем, удалось [64*] поднять чувствительность сквидов постоянного тока до такого же уровня. — Прим. ред. пер.

единичной полосе $4kTR'$ тогда дает средний квадрат шумового тока $4kTR'/(R'^2 + \omega^2 L^2)$. Этот ток, в свою очередь, определяет шумовой поток со среднеквадратичным шумовым значением в полосе B

$$(\delta\Phi)^2 = 4kTL^2B/R', \quad (6.74)$$

которое записано для случая $\omega \ll R'/L$, характерного для измерений квазистатических значений потока. Для $L=10^{-9}$ Гн, $R'=2$ Ом и $B=1$ Гц это дает классический предел чувствительности типичного устройства:

$$\delta\Phi/\Phi_0 \approx 0,5 \cdot 10^{-5}. \quad (6.75)$$

Реальные устройства обычно имеют чувствительность на один или два порядка меньше приведенного значения.

Шумовой анализ высокочастотного сквида отличается от анализа сквида постоянного тока тем, что сквид бывает эффективно резистивным только в течение короткого времени ($\sim \tau = L/R$), необходимого для изменения состояния потока. Только в это время сквид чувствителен к точному значению внешнего поля и только в эти моменты важны флюктуационные нормальные токи. Это уменьшает эффективное время усреднения* на фактор порядка $\omega\tau = \omega L/R$ и является причиной того, что выражение (6.74) заменяется на

$$(\delta\Phi)^2 = 4kTLB/\omega. \quad (6.76)$$

Таким образом, теоретическая чувствительность высокочастотного сквида улучшается с увеличением частоты, приближаясь к значению для сквида постоянного тока, когда ω возрастает до значения R/L , при котором сквид чувствителен к внешнему полю все время, а скачки потока еще статистически независимы. Для типичных значений $\omega = 2 \cdot 10^8$ с⁻¹ и $L = 10^{-9}$ Гн ожидаемая предельная чувствительность тогда равна

$$\delta\Phi/\Phi_0 \approx 2 \cdot 10^{-5}. \quad (6.77)$$

Значительно более строгое рассмотрение шума в высокочастотном сквиде, вызванного тепловыми флюктуациями, было дано Куркиярви [43]. В проведенном анализе он получает конечный наклон плато напряжения, показанный на рис. 6.8, б, который отражает статистическую природу квантовых переходов в кольце из одного состояния в другое. Этот процесс подобен процессу, который является причиной конечного сопротивления сверхпроводящего провода при токе ниже I_c (см. разд. 7.1). В этом более строгом анализе при выводе формулы (6.69) строго определенный критический уровень энергии контура W_c (или соответствующее критическое значение внешнего потока (Φ_x) заменяется на стати-

* За исключением верхнего по I_1 конца плато получение информации о внешнем поле происходит реже чем один раз за цикл, и в начале плато частота ее получения стремится к нулю. Поэтому выражение (6.76) может давать завышенную оценку чувствительности.

стическое распределение точек перехода, ширина которого отражает влияние шума на процессы измерений. Несмотря на значительно большую сложность рассуждений и то, что конечные формулы сильно отличаются от (6.76), конечные численные результаты для типичных значений параметров очень близки к значению (6.77). Экспериментально получены чувствительности, менее чем на порядок отличающиеся от этого предела.

Расхождение между теоретическими пределами и значениями, реально наблюдаемыми на практике, может быть в основном отнесено просто к шуму находящегося при комнатной температуре усилителя, на который подается напряжение со сквада. Качество усилителя часто характеризуется (см. прекрасное описание в статье [44]) его шум-фактором

$$F = (V_s^2 + V_a^2)/V_s^2, \quad (6.78)$$

где $V_s^2 = 4kT_s R_s B$ — средний квадрат напряжения теплового шума на сопротивлении источника сигнала R_s при температуре T_s в полосе B , а V_a^2 — приведенный к источнику средний квадрат шумового напряжения, которое добавляется усилителем. Если $F \geq 2$, шумы усилителя превышают собственные шумы источника, что приводит к ухудшению разрешения сквада. Так как V_a^2 не зависит от T_s , можно переписать формулу (6.78) в виде

$$F = 1 + (T_a/T_s),$$

где шумовая температура усилителя, определенная как $T_a = 300 \times (F_{300} - 1)$ К, есть такая температура источника, при которой мощность шумов усилителя вдвое превышает полную шумовую мощность. Эффективный шумовой фактор для источника, находящегося при температуре 4К, тогда равен

$$F_4 = 1 + \frac{300}{4} (F_{300} - 1), \quad (6.79)$$

и, чтобы учесть ухудшение чувствительности, обусловленное влиянием усилителя, находящегося при комнатной температуре, нужно увеличить идеальные пределы чувствительности по напряжению на фактор $F_4^{1/2}$ выше предела теплового шума.

В сквиде постоянного тока с $R_s = 1$ Ом при использовании звуковых частот шум-фактор F_{300} обычно порядка 4. Следовательно, $F_4^{1/2} \approx 15$ и вместо оценки (6.75) можно ожидать разрешения $0.8 \cdot 10^{-4} \Phi_0$. Реальные конструкции имеют немного худшее разрешение, возможно, из-за дополнительных флюктуаций потока, вносимых в сквид внешними низкочастотными шумовыми токами.

На более высоких частотах и более высоких уровнях импеданса контура высокочастотного сквада $\sim 10^4$ Ом существуют усилители на полевых транзисторах с $F_{300} \approx 2$, для которых $F_4^{1/2} \approx 9$. С таким шум-фактором формула (6.77) дает предел разрешения $\sim 2 \cdot 10^{-4} \Phi_0$, весьма близкий к действительно наблюдаемым величинам.

При оценке этих численных результатов следует отметить, что в обоих типах сквидов импедансы так низки, что шум усилителя близок к своему значению при закороченном входе и, следовательно, почти не зависит от импеданса источника. Поэтому характеристики улучшаются, когда импеданс источника сигнала, и следовательно напряжение повышаются. Например, на звуковых частотах при $R_s=8 \cdot 10^5$ Ом существуют стандартные усилители, имеющие шум-фактор при комнатной температуре $F_{300}=1,0017$, соответствующий шумовой температуре всего 0,5 К. Таким образом, даже для $T=4$ К шум-фактор был бы равен 1,1, так что усилитель вносил бы дополнительный шум. Но, чтобы полностью реализовать преимущества такого усилителя, необходимо повысить импеданс источника сигнала. Это можно сделать, используя трансформатор. Однако, если трансформатор находится при комнатной температуре, он вносит добавочный тепловой шум, обусловленный конечным сопротивлением обмоток. Эту трудность можно преодолеть, охлаждая трансформатор до температуры жидкого гелия. Таким путем могут быть получены шумовые температуры порядка 2К [45] для звуковых частот при импедансе источника 1 Ом и шум-факторе F_4 всего 1,5 даже при низком импедансе источника. При такой схеме возможно исследование характеристик, определяемых флуктуациями при 4К, даже используя усилитель, работающий при комнатной температуре [63*].

6.7. Другие приборы, использующие эффект Джозефсона

Высокая чувствительность сквидов к магнитному потоку, проанализированная в предыдущем разделе, позволяет проводить чувствительные измерения других электрических величин, таких как напряжение, сопротивление и индуктивность. Такие применения описаны в работах [46, 47]. Вопрос о применениях для шумовой термометрии при сверхнизких температурах также обсуждался авторами последней работы [48], а использование магнитометра на сквиде в экспериментах по ЯМР при низких температурах для наблюдения изменения ядерной намагниченности образца описано в работах [49, 50]. Не будем повторять здесь их описания; обсудим лучше другие два случая применений эффекта Джозефсона, в которых используются устройства, сильно отличающиеся от описанных. Во-первых, это гальванометр типа «слаг»*, который является модификацией сквida постоянного тока. Во-вторых, это использование джозефсоновских устройств в качестве детекторов высокочастотного излучения.

6.7.1. Гальванометр типа «слаг»

Такой прибор был впервые описан Кларком [51], а вскоре после этого применение его в качестве потенциометрического

* Слаг — от английского SLUG—Superconducting Low-inductance Undulating Galvanometer. — Прим. ред. пер.

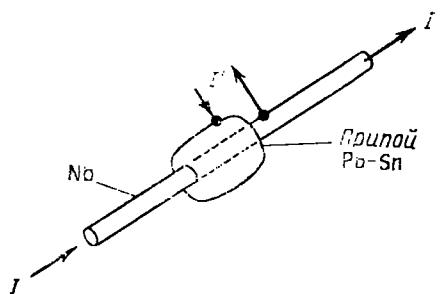


Рис. 6.9. Схематическое изображение датчика слага

новения в двух сверхпроводниках между контактами. Так как область проникновения потока очень мала, индуктивность L тоже мала, обычно порядка 10^{-11} Гн, с чем и связано название устройства. Из геометрии перехода можно видеть, что эта же самая площадь определяет взаимную индуктивность M между током I и петлей сквида. Отсюда находим ток, необходимый для создания кванта потока:

$$\Delta I = \Phi_0/M \approx 10^{-4} \text{ А.} \quad (6.80)$$

Для получения $LI_c \approx \Phi_0$ ток I_c должен иметь тот же порядок величины.

Из-за малой индуктивности чувствительность по потоку получается очень хорошая: от 10^{-3} до $10^{-4} \Phi_0$. Тем не менее она соответствует чувствительности по току только $\sim 10^{-7}$ А. Отсюда видно, что слаг не так чувствителен при измерении тока, как обычный гальванометр. Его главное достоинство состоит в большой чувствительности по напряжению, так как очень малое напряжение от источника с низким сопротивлением R_s может вызывать в сверхпроводящем проводе большой ток. Из-за приблизительного равенства L и M оказывается, что изменение тока в проводе ΔI вызывает практически равное изменение ΔI_c критического тока устройства. При надлежащем выборе внешних цепей это изменение I_c приводит к изменению выходного напряжения $\Delta V \approx RI_c$, где R — сопротивление перехода. Таким образом, устройство имеет усиление по напряжению (и мощности) порядка R/R_s . Например, если $R \sim 0,1$ Ом, а $R_s \sim 10^{-8}$ Ом, то получается усиление $\sim 10^7$, которое увеличивает напряжение от уровня 10^{-15} В до уровня 10^{-8} В, на котором его можно измерить с помощью обычной неохлаждаемой электроники. Следует отметить, что если индуктивность цепи L имеет типичное значение порядка 10^{-8} Гн, то постоянная времени L/R становится слишком большой при значениях R_s ниже 10^{-8} Ом. Однако это очевидное ограничение на полезное усиление становится менее сильным при использовании для ускорения отклика цепи отрицательной обратной связи.

вольтметра было освещено в работе [52]. Он состоит из капли припоя, нанесенной на ниобиевый провод (рис. 6.9), причем между ними, по крайней мере, в двух местах возникают слабые связи. В результате критический ток между двумя сверхпроводниками становится периодической функцией тока I , текущего по ниобиевому проводу из-за потока, который он создает на глубине проник-

Особенно впечатляющим было применение слага Кларком [53] для проверки с высокой точностью того факта, что ступеньки напряжения при облучении джозефсоновских переходов из разных материалов имеют одну и ту же величину при одинаковой частоте облучения. В этом эксперименте цепь тока была полностью сверхпроводящей, т. е. $R_s=0$. В результате любая разность потенциалов между двумя ступеньками вызывала бы циркулирующий ток через слаг, причем ток ограничивался бы только индуктивностью цепи. Так как никакой заметный ток не наблюдался в течение 30 мин, то, используя экспериментально полученную чувствительность слага (0,3 мКА), оказалось возможным установить верхний предел для разности потенциалов в $\sim 2 \cdot 10^{-17}$ В. На основании этого можно сделать вывод, что разность химических потенциалов на обоих переходах имела одну и ту же величину с точностью 10^{-8} . Это является сильным аргументом в пользу предположения о том, что нет никаких «твёрдотельных» поправок к значению h/e , определенному в экспериментах [26], и что e^* есть точно $2e$, где e — заряд свободного электрона.

6.7.2. Джозефсоновские детекторы *

Применение джозефсоновских устройств для детектирования излучения было впервые продемонстрировано Граймсом и др. [54]. Они показали, что устройство на джозефсоновском точечном контакте при рабочей точке на крутой части вольт-амперной характеристики близ ступеньки тока работало как очень чувствительный детектор СВЧ-излучения, вплоть до субмиллиметрового диапазона волн. Об этом также косвенно свидетельствует тот факт, что магнитометры на сквидах не могут хорошо работать до тех пор, пока полностью не экранированы от радиочастотных помех. Подобные устройства могут быть использованы как широкополосный детектор, как резонансный детектор и как гетеродинный смеситель. Здесь лишь кратко упомянем об этих применениях, отсылая читателя для детального ознакомления к специальной литературе **.

В широкополосном режиме детектирование осуществляется за счёт того, что высокочастотные токи уменьшают максимальный усредненный сверхток. Такое уменьшение обусловлено тем, что высокочастотное напряжение сигнала V_s вызывает модуляцию

* Под этим термином автор имеет в виду не только обычные квадратичные видеодетекторы, но и вообще любые СВЧ приемные устройства. — Прим. ред. пер.

** Полезный краткий обзор был дан в работе [55]. Особенno полный и вполне современный обзор можно найти в «Трудах Международной конференции по детектированию и излучению электромагнитных волн джозефсоновскими переходами», Перрос-Гирек, Франция, сентябрь 1973 г., опубликованных в журнале «Revue de Physique Appliquée», январь 1974 г. (За время, прошедшее с момента выхода в свет английского издания, в этой области получено очень много новых результатов. Можно рекомендовать сборники, добавленные к общему списку литературы, а также монографию [63*]. — Прим. ред. пер.)

$\delta\gamma = 2eV_s/\hbar\omega_s$ разности фаз γ , в результате чего в первом приближении $I_0 \sin \gamma$ можно заменить на

$$I_0 \langle \cos \delta\gamma \rangle \sin \gamma_0 \approx I_0 [1 - (\delta\gamma)^2/2] \sin \gamma_0.$$

Если сигнал настолько силен, что фазовая модуляция становится достаточно большой по сравнению с единицей, это простое квадратичное уменьшение заменяется функцией Бесселя $J_0(2eV_s/\hbar\omega)$, как это происходит при обычной частотной модуляции радиосигналов. Таким образом, можно получить напряжение, очень чувствительное к интенсивности падающего излучения. В этом режиме чувствительность детектора становится сравнимой с чувствительностью сверхпроводящего болометра, работающего при температуре жидкого гелия, хотя и превышает ее совсем незначительно.

Как резонансный детектор, это устройство очень чувствительно к частотам, лежащим около частоты, удовлетворяющей джозефсоновскому соотношению $\hbar\nu = 2eV$, где V — напряжение на переходе. Оказывается, что в этом режиме чувствительность детектора может превышать чувствительность лучших инфракрасных болометров на один-два порядка. Работа этих детекторов усложняется тем, что для получения лучших характеристик необходимо, чтобы джозефсоновская частота совпадала с резонансной частотой одной из мод резонатора, окружающего детектор. Более того, в определении чувствительности играет роль и частота, соответствующая энергетической щели сверхпроводника. Систематическое излучение, проведенное Ричардсом и Стерлингом [56], показало, что ширина полосы инфракрасного отклика точечного контакта в резонаторе может быть много уже, чем полоса самой резонансной моды, что говорит о наличии некоторой положительной обратной связи, типа используемой в регенеративных радиоприемниках. Из-за механической неустойчивости точечных контактов эти детекторы еще не получили широкого распространения. Однако они, очевидно, имеют хорошую перспективу в качестве настраиваемых узкополосных квантовых детекторов далекого инфракрасного диапазона, где из-за слабости доступных источников излучения весьма важно повышение чувствительности приемных устройств*.

* Автор книги совсем не упоминает о той области применений эффекта Джозефсона, объем исследований и разработок в которой в последнее время особенно велик. Это — сверхпроводниковые ЭВМ на основе джозефсоновских переходов. Для начального ознакомления с этими работами можно порекомендовать обзор [65*] и монографию [63*]. — Прим. ред. пер.

ФЛУКТУАЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ

Излагая теорию Гинзбурга — Ландау и ее приложения, мы до сих пор рассматривали только такие волновые функции ψ , которые минимизируют свободную энергию системы. Однако благодаря термодинамическим флуктуациям система в те или иные моменты времени может описываться и другими функциями ψ , причем любая функция ψ , которая повышает свободную энергию хотя бы на величину $\sim kT$, будет обладать заметным статистическим весом. Эта идея уже была использована, например, при рассмотрении термически возбужденного крипа линий магнитного потока, который приводит к появлению конечного электрического сопротивления при температурах ниже T_c . В этой главе более подробно рассмотрим простой случай тонкой проволоки из сверхпроводника I рода, для того чтобы выяснить, насколько точно равно нулю ее сопротивление при температуре ниже T_c . Это эквивалентно другому вопросу: каково время жизни метастабильного состояния сверхпроводящего кольца, по которому протекает «незатухающий» ток, по отношению к квантовым скачкам, приводящим к уменьшению квантового числа флуксоида на одну или несколько единиц. Затем рассмотрим область температур выше T_c , в которой термодинамические флуктуации приводят к эффектам, имеющим сверхпроводящую природу, так как $\langle \psi^2 \rangle \neq 0$, хотя $\langle \psi \rangle = 0$.

7.1. Появление электрического сопротивления в тонкой проволоке

Согласно теории Гинзбурга — Ландау, для существования незатухающего тока в сверхпроводящем кольце необходимо, чтобы контурный интеграл $\oint \nabla \psi \cdot d\mathbf{s}$ имел постоянное значение, кратное 2π . Это соответствует постоянству квантового числа флуксоида. Если вместо этого рассмотреть сверхпроводящую проволоку, по которой пропускается ток, вводимый через нормальные контакты, то ее идеальная проводимость требует обращения в нуль разности потенциалов на концах проволоки. В духе идей Джозефсона можно сказать, что разность фаз ϕ_{12} сверхпроводника на концах проволоки должна сохранять постоянное значение, которое зависит от силы тока. Если говорить более точно, ϕ_{12} будет флуктуировать вокруг постоянного среднего значения, так как сверток должен флуктуировать для компенсации джонсоновских шумовых нор-

мальных токов* и обеспечения постоянства полного тока. В результате на любой частоте, отличной от нуля, будет наблюдаться шумовое переменное напряжение, соответствующее действительной части импеданса сверхпроводника на переменном токе, возрастающей с частотой как ω^2 . Таким образом, в действительности сверхпроводник является идеальным проводником в лучшем случае только на постоянном токе. Поэтому, исследуя появление сопротивления у сверхпроводника ниже T_c , ограничимся случаем постоянного тока. Однако даже в этом случае сохраняется некоторая неточность, связанная с тем, что любое реальное измерение выполняется за конечный промежуток времени; а раз так, упомянутые выше флюктуации на переменном токе полностью не усредняются и \bar{V} не будет точно равно нулю, хотя и может быть неизмеримо мало. Определение нулевого сопротивления на постоянном токе, приемлемое с экспериментальной точки зрения, состоит в том, что ϕ_{12} не должно иметь измеримого среднего значения, пропорционального пропускаемому постоянному току. В терминах разности фаз это означает, что величина ϕ_{12} не должна содержать измеримой монотонно нарастающей части.

Напротив, если сопротивление имеется, усредненное по флюктуациям значение ϕ_{12} будет со временем возрастать, что, казалось бы, несовместимо со стационарностью состояния. Это кажущееся противоречие объясняется существованием «скачков фазы» (phase slips) — событий, при которых когерентность фазы в некоторой точке сверхпроводника в какой-то момент нарушается, в результате чего оказывается возможным восстановление когерентности фазы. Эти события можно считать пространственно-локализованными, если изменение фазы при скачке кратно 2π , так как однородный набег фазы по длине провода на $2\pi l$ вне области скачка не имеет физического смысла. Фактически можно ограничиться простым случаем скачка фазы на 2π , так как оказывается, что скачок на несколько 2π легче всего реализуется как несколько элементарных скачков, по 2π каждый. Для сохранения стационарного состояния такие события должны происходить со средней частотой $2e\bar{V}/h$. Если V постоянно, ϕ_{12} монотонно возрастает со скоростью $2eV/h$, но в некоторые моменты, при каждом скачке, быстро уменьшается на 2π . Таким образом, ϕ_{12} представляет собой пилообразную функцию, что эквивалентно монотонному нарастанию по модулю 2π .

Переходя от этих качественных соображений к количественному расчету частоты скачков фазы, определяющей сопротивление**, удобно ограничить рассмотрение случаем одномерного сверхпроводника. Возьмем проволоку, диаметр которой $d \ll \xi$, так что изменения ψ в поперечном сечении невозможны энергетически.

* В отечественной литературе о них чаще говорят как о шумовых токах Найквиста. — Прим. ред. пер.

** Точнее, к нахождению связи этой частоты (и следовательно, величины \bar{V}) с величиной сверхтока I_s . — Прим. ред. пер.

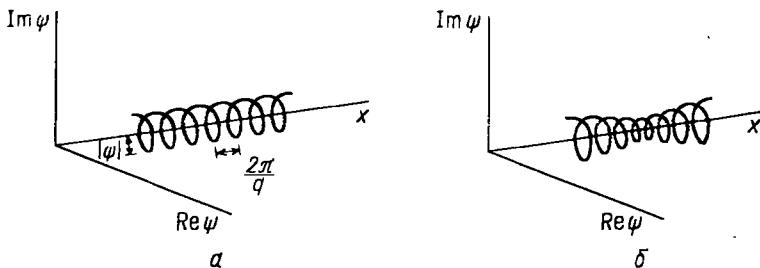


Рис. 7.1. Графическое представление комплексной волновой функции ГЛ одномерного сверхпроводника, по которому протекает ток:
а — однородное решение; б — неоднородное решение перед скачком фазы

В этом случае ψ является функцией лишь одной координаты x , направленной вдоль проволоки. Будем также считать, что $d \ll \lambda$, так что магнитной энергией можно пренебречь по сравнению с кинетической.

Если не учитывать влияние флуктуаций, то $|\psi(x)|$ постоянен и получим задачу, которая рассматривалась в разд. 4.4, в котором было получено нелинейное соотношение (4.35) между плотностью сверхтока и скоростью, а также выражение (4.36) для критической плотности тока. При плотности тока, большей критической, резко включаются диссипативные процессы, и сопротивление быстро достигает нормального значения. Попробуем описать резистивные эффекты при $J < J_c$, т. е. в условиях, когда в отсутствие флуктуаций наблюдалась бы идеальная проводимость. Этот режим впервые был подробно рассмотрен Ланджером и Амбераокаром [1].

Для того чтобы наглядно представить изменения комплексной функции $\psi(x)$ во время скачка фазы, удобно изобразить величину $|\psi(x)| \exp[i\phi(x)]$ в полярных координатах в плоскости, перпендикулярной к оси x . Тогда найденные в разд. 4.4 обычные решения, имеющие вид $\phi_0 \exp(iqx)$, можно будет изобразить в виде спиралей радиусом $2\phi_0$ с шагом $2\pi/q$ (рис. 7.1, а). Это есть стационарные равновесные решения, соответствующие протеканию сверхпроводящего тока при нулевом напряжении.

Как изменится эта картина, если между концами проволоки существует падение напряжения? Разность фаз на концах проволоки, согласно уравнению Джозефсона, возрастает со скоростью

$$\frac{d\phi_{12}}{dt} = \frac{2eV}{\hbar}. \quad (7.1)$$

Представим, что один конец спирали закреплен, а другой закручивается с постоянной скоростью, так что спираль становится более плотной. Эта картина отражает возрастание сверхпроводящего тока в соответствии с лондоновским уравнением $E = -\partial(\Lambda J_s)/\partial t$. Таким образом, при наличии напряжения величина q возрастает с такой скоростью, что полная разность фаз $\phi_{12} = qL$

на длине проволоки удовлетворяет соотношению (7.1). В локальном описании это эквивалентно уравнению

$$\frac{dv_s}{dt} = \frac{eE}{m}. \quad (7.2)$$

Но, как известно, существует критическая скорость v_c , выше которой простое однородное решение отсутствует. Таким образом, нарисованная выше картина должна нарушиться, когда v_s достигнет v_c , а может быть и раньше. Процессы скачков фазы, предложенные Ланджером и Амбераокаром, позволяют сохранить стационарное состояние с $v_s < v_c$ при наличии ненулевого напряжения V за счет аннигиляции витков спирали во внутренних участках проволоки с той же скоростью, с которой на конце проволоки накручиваются новые витки. В результате энергия, которая подается в проволоку со скоростью IV , рассеивается в виде тепла, а не превращается в кинетическую энергию сверхпроводящего тока, которая иначе быстро превысила бы энергию конденсации.

Не будем здесь вдаваться в подробности расчета, а отметим лишь некоторые узловые моменты. Во-первых, до тех пор если пренебречь нормальным током (а он не равен нулю, если $E \neq 0$), из условия постоянства тока $J_s(x)$ следует постоянство $|\psi(x)|^2 v_s(x)$. Другими словами, если $\psi(x) = |\psi(x)| \exp[i\phi(x)]$, то возможные изменения комплексной функции $\psi(x)$ ограничены соотношением

$$|\psi(x)|^2 \frac{d\phi}{dx} = \text{const} \propto I. \quad (7.3)$$

В частности, если $|\psi|$ в какой-то области становится очень малым, $d\phi/dx$ в этом месте должно сильно возрасти (см. рис. 7.1, б). Как впервые отметил Литл [2], с приближением к пределу $|\psi| \rightarrow 0$ сравнительно нетрудно добавить или убрать один виток. Ланджер и Амбераокар сумели найти в фазовом пространстве такую траекторию, соединяющую два однородных решения для различных чисел витков, при которой разделяющий их энергетический барьер имеет минимальную высоту. В точке перевала этого барьера свободная энергия Гинзбурга — Ландау, по определению, не должна изменяться при малых изменениях ϕ , и поэтому ϕ должно удовлетворять обычным уравнениям Гинзбурга — Ландау, выведенным вариационным методом из условия $\delta F = 0$. Используя соотношение (7.3), им удалось найти следующее выражение для высоты энергетического барьера в точке перевала:

$$\Delta F_0 = \frac{8\sqrt{2}}{3} \frac{H_c^2}{8\pi} A \xi, \quad (7.4)$$

где A — площадь поперечного сечения сверхпроводника. Это вполне естественный результат, так как ΔF_0 — энергия конденсации отрезка сверхпроводника длиной $\sim \xi$; к нему можно прийти,

учитывая, что ψ не может резко измениться на длине, меньшей ξ , и, следовательно, для нарушения когерентности фаз на концах проволоки в нормальное состояние должен перейти отрезок проволоки по крайней мере такой длины.

Далее, необходимо ввести в рассмотрение влияние протекающего через проволоку тока, благодаря которому скачки фазы в одном направлении более вероятны, чем в другом. В отсутствие тока скачки фазы на $\pm 2\pi$ равновероятны; они приводят к возникновению флуктуирующего шумового напряжения, но постоянная компонента при этом равна нулю. Однако при заданном (внешним источником) напряжении V возникает стационарный ток, величина которого такова, что частота скачков $\Delta\varphi_{12} = -2\pi$ превышает частоту скачков $\Delta\varphi_{12} = -2\pi$ на $2eV/h$ в секунду. Различия в частоте скачков вызваны разной величиной энергетического барьера δF для скачков в обоих направлениях, а эта разница обусловлена различием в работе электрических сил $\int IVdt$, совершающейся при таком процессе. С учетом выражения (7.1) для скачка фазы на 2π разность энергий составляет

$$\delta F = \Delta F_+ - \Delta F_- = hI/2e. \quad (7.5)$$

Как показал Маккамбер [3], все эти рассуждения могут быть без изменений применены к случаю обычных условий эксперимента, когда используется источник постоянного тока, а не постоянно-го напряжения.

Чтобы завершить построение теории, необходимо ввести частоту попыток (или «масштабный множитель») Ω , и тогда средняя суммарная частота скачков фазы будет равна

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_{12}}{dt} &= \Omega \left[\exp\left(-\frac{\Delta F_0 - \delta F/2}{kT}\right) - \exp\left(-\frac{\Delta F_0 + \delta F/2}{kT}\right) \right] = \\ &= 2\Omega \exp(-\Delta F_0/kT) \operatorname{sh}(\delta F/2kT). \end{aligned} \quad (7.6)$$

Подставляя сюда вместо δF выражение (7.5) и приравнивая $d\varphi_{1,2}/dt$ значению частоты согласно соотношению Джозефсона, получаем

$$V = (\hbar\Omega/e) \exp(-\Delta F_0/kT) \operatorname{sh}(hI/4ekT). \quad (7.7)$$

В пределе очень малых токов гиперболический синус можно заменить его аргументом. В результате получаем закон Ома, причем

$$R = V/I = (\pi\hbar^2\Omega/2e^2kT) \exp(-\Delta F_0/kT). \quad (7.8)$$

Однако такое приближение справедливо лишь при $I \leq I_0$, где

$$I_0 = 4ekT/\hbar; \quad I_0/T \approx 0,013 \text{ мкА/К}. \quad (7.9)$$

В этом режиме число скачков с $\Delta\varphi_1 = +2\pi$ и $\Delta\varphi_1 = -2\pi$ примерно одинаково и ток является небольшим возмущением. При больших токах преобладают скачки такого направления, которое соответствует уменьшению числа витков спирали. В этом случае полезно аппроксимировать формулу (7.7) выражением

$$V = (\hbar\Omega/2e) \exp(-\Delta F_0/kT) \exp(I/I_0). \quad (7.10)$$

В полной теории найдено, что входящий сюда множитель ΔF_0 убывает относительно значения (7.4) как I^2 . В этом режиме сверхпроводник ведет себя как нелинейное сопротивление.

Пока остается еще открытым вопрос о величине множителя Ω . Очевидно, он должен быть пропорционален длине провода, так как следует ожидать, что скачок фазы может произойти независимо в любом месте по длине провода. В результате падение напряжения при заданном токе будет пропорционально длине провода, поэтому сопротивление является экстенсивной переменной. В первоначальной работе Ланджера и Амбегоакара частота попыток Ω была весьма произвольно принята равной nAL/τ , где τ — время релаксации для электронов в нормальном состоянии и n — плотность электронов. Затем Маккамбер и Гальперин [4] вновь исследовали эту задачу на основе временного обобщения теории ГЛ и нашли, что масштабный множитель зависит от температуры и имеет вид

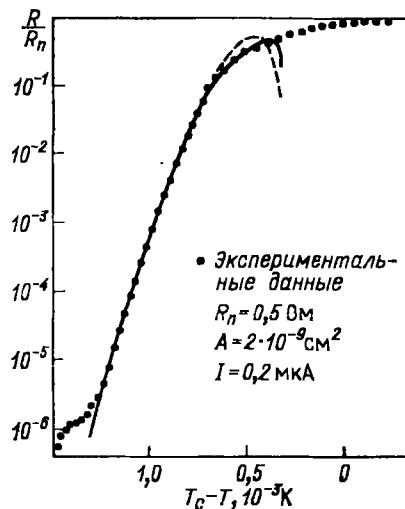
$$\Omega = (L/\xi)(\Delta F_0/kT)^{1/2}(1/\tau_s), \quad (7.11)$$

где $1/\tau_s = 8k(T_c - T)/\pi\hbar$ — характерная скорость релаксации для сверхпроводника в этой теории (см. разд. 7.5 и 8.3). Такой вид Ω разумен, потому что L/ξ представляет собой число неперекрывающихся участков, в которых могут происходить флуктуации. Множитель $(\Delta F_0/kT)^{1/2}$ учитывает поправку на перекрытие флуктуаций, происходящих в различных местах, и количественно не играет большой роли. Этот масштабный множитель Ω Маккамбера — Гальперина обычно в 10^{10} раз меньше, чем по Ланджеру — Амбегоакару, и стремится к нулю с приближением к T_c . Несмотря на то что поправочный множитель очень велик, его отсутствие вначале не было замечено, так как он соответствует изменению по шкале температур всего на несколько тысячных градуса из-за экспоненциальной зависимости напряжения от $\Delta F_0/kT$, согласно формуле (7.7).

Наиболее прямой и надежной проверкой правильности этих идей явились эксперименты Лукенса, Уорбуртона и Вэбба [5], а также Ньюбауэра, Бизли и Тинкхама [6]; те и другие были выполнены на оловянных вискерах. Последние представляют собой монокристаллические образцы цилиндрической формы, обычно диаметром $\sim 0,5$ мкм и длиной в несколько десятых миллиметра, выращенные методом сдавливания сандвича из луженной оловом стали, типа используемой в консервных банках. Даже для образцов столь малого диаметра $\Delta F_0/kT \approx 6 \cdot 10^6(1-t)^{3/2}$, так что вероятность скачка фазы становится астрономически малой за пределами интервала $\sim 0,001$ К вблизи T_c , в котором $(1-t) \leq 0,003$. Из рис. 7.2 показано, что между теорией ЛАМГ (Ланджера — Амбегоакара — Маккамбера — Гальперина) и экспериментальными данными [6] существует очень хорошее согласие. Можно ожидать, что теория ЛАМГ перестает быть справедливой — а это действительно так — при температуре очень близкой к T_c , где непримени-

Рис. 7.2. Уменьшение сопротивления сверхпроводящего оловянного вискера ниже T_c (точки — измерения Ньюбауэра и др. [6]).

Сплошная кривая — теория ЛАМГ с единственным подгоночным параметром T_c . Пунктирная кривая — теория ЛАМГ без учета параллельного нормального проводящего канала. Ступенька при $R/R_n \approx 10^{-6}$, по-видимому, связана с контактными явлениями



ма используемая в теории модель изолированных скачков фазы в сверхпроводящей среде, так как при T_c стремится к нулю и частота попыток, и высота энергетического барьера. В этом случае, может быть, правильнее идти со стороны нормального состояния и рассмотреть возникающие в нем сверхпроводящие флуктуации, а не наоборот*. Но если сопротивление упало заметно, теория ЛАМГ оказывается в точном количественном согласии с экспериментом в области изменения R на шесть порядков величины. Ступенька вблизи $R/R_n = 10^{-6}$, где сопротивление падает медленнее, чем по теории, а затем снова падает быстро, изменяется от образца к образцу и, по-видимому, связана с эффектами в контактах.

Ввиду превосходного согласия теории и эксперимента интересно использовать теорию для экстраполяции ее результатов на область сопротивлений, недоступную для измерений. При самой низкой температуре, показанной на рис. 7.2, падение напряжения на сопротивлении при измерительном токе $0.2 \cdot 10^{-6} \text{ A}$ примерно равно 10^{-13} V ; это соответствует ~ 100 скачкам фазы на 2π в секунду. Экстраполируя эти результаты в сторону низких температур еще на 0.001 K , получаем частоту скачков 10^{-11} s^{-1} или один скачок в 1000 лет; экстраполяция еще на 0.001 K дает один скачок в 10^9 лет. Таким образом, на отрезке в 0.003 K происходит переход от нормального сопротивления к режиму, при котором нельзя ожидать события, порождающего конечное сопротивление, за время существования Вселенной! Разумеется, в случае более толстой проволоки сопротивление должно исчезать еще быстрее.

Если принять во внимание эти временные масштабы, станет ясно, что результаты, полученные путем усреднения по времени, надо использовать с осторожностью. Согласно равенству (7.8),

* Попытка развить теорию, пригодную для подхода к T_c сверху, содержится, например, в работах [7—9].

при всех ненулевых температурах сверхпроводник имеет конечное сопротивление, хотя оно становится астрономически малым при температурах много ниже T_c . Но это относится к сопротивлению, статистически усредненному за промежуток времени, достаточно большой для возникновения многих скачков фазы. Если бы проволока была бесконечно длинной, усреднение не вызвало бы каких-либо проблем и можно было бы измерить любое малое сопротивление. Однако в случае проволоки конечной длины быстро достигается ситуация, когда нельзя ожидать *ни одного* проскальзывания фазы за время, достижимое в эксперименте. В этом случае сопротивление, измеренное на постоянном токе, окажется строго равным нулю, а не просто малым. Таким образом, дискретная природа скачков фазы дает ключ к пониманию перехода от очень малого сопротивления к нулевому.

7.2. Сверхпроводимость при температуре выше T_c в системах нулевой размерности

В теории ГЛ T_c определяется как температура, при которой коэффициент $\alpha(T)$ (в главном члене $\alpha|\psi|^2$ разложения свободной энергии) меняет знак. Таким образом, выше T_c F имеет минимум при $|\psi|=0$. Однако флуктуации, повышающие свободную энергию на величину $\sim kT$, могут происходить и здесь, так как вероятность уменьшается лишь как $\exp(-F/kT)$. Это приводит к существованию выше T_c сверхпроводящих эффектов, вызванных флуктуациями. Амплитуда этих флуктуаций максимальна для малых объемов, так как все возрастание энергии должно быть лишь порядка kT .

Полезным начальным ориентиром при решении этой задачи может служить рассмотрение частицы, малой по сравнению с ξ , так что можно считать величину ψ постоянной по объему частицы V . Такой случай можно назвать пределом нулевой размерности. Тогда свободная энергия ГЛ, отсчитываемая от свободной энергии в нормальном состоянии, равна (в отсутствие каких-либо полей)

$$F = V \left(\alpha |\psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi|^4 \right), \quad (7.12)$$

где $\alpha \equiv \alpha_0(t=1)$.

Ниже T_c отсюда следует обычный результат: минимальное значение свободной энергии равно

$$F_0 = -\frac{\alpha^2}{2\beta} V = -\frac{\alpha_0^2}{2\beta} (1-t)^2 V = -\frac{H_c^2}{8\pi} V; \quad (7.13)$$

достигается оно при

$$|\psi_0|^2 = -\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha_0(1-t)}{\beta}. \quad (7.14)$$

Флуктуации около ψ_0 можно оценить, вычисляя

$$\left. \frac{\partial^2 F}{\partial \psi^2} \right|_{\psi_0} = -4\alpha V = 4\alpha_0(1-t)V \quad (7.15)$$

и полагая

$$\langle F - F_0 \rangle = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 F}{\partial \psi^2} \right|_{\psi_0} (\delta \psi)^2 \approx kT. \quad (7.16)$$

Отсюда следует

$$\frac{(\delta \psi)^2}{\Phi_0^2} \approx \frac{kT}{4F_0} = \frac{2\pi kT}{H_c^2 V} \approx \frac{10^{-20}}{(1-t)^2 V}, \quad (7.17)$$

если использовать численные значения параметров для олова. Видно, что флуктуации вызывают очень малое относительное изменение ψ , за исключением случаев, когда температура очень близка к T_c или образец очень мал. Поэтому применение в предыдущих главах этой книги «среднего поля» ψ_0 , вообще говоря, вполне оправдано. Однако, используя очень маленькие частицы ($d < 1000 \text{ \AA}$), можно «прощупать» так называемую критическую область, где $(\delta \psi/\psi)^2$ не обязательно мало и где результаты, основанные на модели среднего поля, становятся неточными. В этой связи важно отметить, что кажущаяся расходимость выражения (7.17) при T_c в действительности обрезается ангармоническими членами в разложении свободной энергии, так что даже при $T_c(\delta \psi)^2$ имеет конечное значение

$$(\delta \psi)_{T_c}^2 \approx (2kT_c/V\beta)^{1/4}. \quad (7.18)$$

Теперь обсудим ситуацию выше T_c . Здесь $a > 0$, и из формулы (7.12) видно, что минимальная свободная энергия $F_0 = 0$ (по отношению к нормальному состоянию) и достигается при $\psi_0 = 0$. Флуктуации ограничены величиной

$$\left. \frac{\partial^2 F}{\partial \psi^2} \right|_{\psi=0} = 2\alpha V = 2\alpha_0(t-1)V, \quad (7.19)$$

которая, как видно, отличается лишь множителем 2 от своего значения (7.15) для температуры, отстоящей на ту же величину вниз от T_c . Соответствующий уровень флуктуаций здесь равен

$$(\delta \psi)^2 \approx \frac{kT}{\alpha V_0} = \frac{kT}{\alpha_0(t-1)V}. \quad (7.20)$$

Он опять-таки того же порядка, что и для флуктуаций ниже T_c , но, так как ψ_0 теперь равно нулю, все сверхпроводящие эффекты возникают лишь из-за флуктуаций. Заметим, что $(\delta \psi)^2$ при $T \rightarrow T_c$ расходится как $(T-T_c)^{-1}$, как в обычном законе Кюри—Вейсса в статистической теории парамагнетизма. Эта расходимость очень близко от T_c обрезается членом с четвертой степенью, что приводит к формуле (7.18). Действительно, приравнивая (7.12) к kT и точно решая уравнение, получаем выражение

$$(\delta \psi)^2 = \frac{\alpha}{\beta} \left[\left(1 + \frac{2\beta kT}{\alpha^2 V} \right)^{1/2} - 1 \right], \quad T > T_c, \quad (7.21)$$

которое в предельных случаях сводится к формулам (7.20) и (7.18).

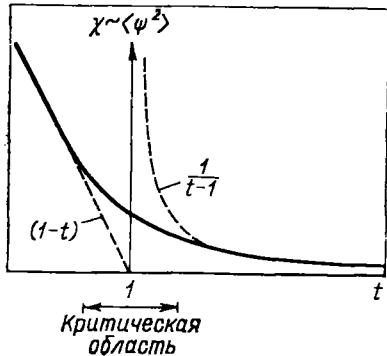


Рис. 7.3. Температурная зависимость плотности пар (и восприимчивости) одномерного сверхпроводника вблизи T_c

Попробуем ответить на вопрос, каким образом можно наблюдать эти сверхпроводящие флуктуации выше T_c . Наиболее прямой путь — измерение магнитной восприимчивости мельчайших частиц, так как χ зависит от λ , зависящего, в свою очередь, от $\langle \Psi^2 \rangle$. Точнее, для сферических частиц радиусом $R \ll \lambda$ уравнения Лондонов приводят к магнитной восприимчивости

$$\chi = -\frac{1}{40\pi} \frac{R^2}{\lambda^2} = -\frac{1}{40\pi} \frac{4\pi e^{*2}}{m^* c^2} \langle \Psi^2 \rangle R^2. \quad (7.22)$$

Если $R < \xi_0$, появляется добавочный множитель $\sim R/\xi_0$, который учитывает влияние нелокальной электродинамики. Таким образом, если $\langle \Psi^2 \rangle$ дается выражением (7.21), то с понижением температуры χ должно возрастать как $(t-1)^{-1}$, но затем, при вступлении в критическую область, этот рост должен замедлиться; наконец, ниже T_c , где флуктуации подавляются полной сверхпроводимостью, χ и $\langle \Psi^2 \rangle$ должны возрастать как $(1-t)$. Эти зависимости показаны на рис. 7.3:

Точно такое поведение χ наблюдали Бурман и Гальперин [10], измерявшие χ мелких порошков алюминия. Они нашли, что для образца, содержащего самые мелкие частицы ($R \approx 250 \text{ \AA}$), критическая область в согласии с теорией занимает интервал $0,95 < t < 1,05$. В целом они получили такое количественное согласие между экспериментальными данными и точными расчетами на основе теории ГЛ*, что можно сделать вывод об удовлетворительности выражения для свободной энергии (7.12) как внутри, так и вне критической области (если речь идет о системах нулевой размерности). Однако при $T \geq 1,5 T_c$ χ падает ниже предсказанного значения. Это неудивительно, так как нужно ожидать, что теория Гинзбурга—Ландау надежно выполняется лишь вблизи T_c .

* См., например, работу [11], в которой произведено усреднение по Ψ^2 с точными статистическими весами, вместо простого приравнивания прироста свободной энергии величине kT , как это сделано здесь.

7.3. Пространственная зависимость флуктуаций

Рассмотренный только что случай нулевой размерности прост и допускает довольно точный теоретический анализ. Однако этот анализ нельзя непосредственно применять в условиях обычного эксперимента, когда один (или более чем один) размер образца превосходит ξ , так как величина ψ не может считаться постоянной по всему образцу. Тем не менее качественно эти идеи могут быть перенесены на другие случаи, если считать макроскопический образец состоящим из мелких независимых частиц, размер которых определяется радиусом корреляции флуктуаций, этот радиус обычно порядка ξ . Например, так как $|a| = \hbar^2 / 2m^* \xi^2$, аналогично из формул (7.20) и (7.22) можно получить, что дамагнитная восприимчивость массивного сверхпроводника при температуре выше T_c пропорциональна $kT\xi(T)/\Phi_0^2$; этот простой результат подтверждается точными расчетами, приведенными ниже. Теперь обсудим подробнее пространственную зависимость флуктуаций.

Прежде всего рассмотрим случай массивного образца при температуре, настолько превышающей T_c , чтобы можно было пре-небречь членом четвертого порядка в выражении для свободной энергии. Тогда плотность свободной энергии ГЛ по отношению к нормальному состоянию может быть записана в виде

$$f = \alpha |\psi|^2 + \frac{\hbar^2}{2m^*} \left| \left(\frac{\nabla}{i} - \frac{2\pi A}{\Phi_0} \right) \psi \right|^2. \quad (7.23)$$

Так как $\alpha > 0$, оба члена положительны, следовательно, свободная энергия должна быть больше, чем в нормальном состоянии, для любого значения ψ , отличного от нуля. Соответствующее линеаризованное уравнение ГЛ имеет вид

$$\left(\frac{\nabla}{i} - \frac{2\pi A}{\Phi_0} \right)^2 \psi = - \frac{2m^*\alpha}{\hbar^2} \psi = - \frac{1}{\xi^2} \psi. \quad (7.24)$$

Так как $1/\xi^2 = 2m^*|\alpha|/\hbar^2$, знак этого выражения изменился по сравнению с уравнением (4.56) из-за изменения знака α .

Рассмотрим вначале случай $A=0$ и разложим $\psi(r)$ в ряд Фурье:

$$\psi(r) = \sum_k \psi_k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}). \quad (7.25)$$

Подставляя это выражение в формулу (7.23), интегрируя по единичному объему и используя ортогональность членов ряда Фурье, находим

$$f = \sum_k \left(\alpha + \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} \right) |\psi_k|^2. \quad (7.26)$$

Если приписать энергию kT каждой из независимых мод, т. е. каждому значению \mathbf{k} , то (для единицы объема)

$$|\psi_k|^2 = \frac{kT}{\pi + k^2/2m^2} \cdot \frac{2m^2}{k^2} \cdot \frac{kT}{k^2 + 1/\xi^2}. \quad (7.27)$$

Отсюда видно, что фурье-компоненты, описывающие изменения ψ на расстояниях, меньших ξ , как и следовало ожидать, входят с меньшим весом. Однако плотность распределения мод изменяется как $k^2 dk$, так что для получения конечного значения суммы по k в выражении $\langle \psi^2 \rangle = \sum_k |\psi_k|^2$ необходим более сильный закон спадания $|\psi_k|^2$. Можно предположить, что переход к такому спаданию должен иметь место при $k \approx 1/\xi(0)$, так как теория ГЛ несправедлива для изменений ψ , более быстрых, чем это

Пространственное отображение этих зависящих от k амплитуд можно получить, рассматривая корреляционную функцию

$$g(r, r') = \langle \psi^*(r) \psi(r') \rangle - \langle \sum_k \psi_k^* \exp(-ik \cdot r) \sum_k \psi_k \exp(ik' \cdot r') \rangle; \quad (7.28)$$

здесь угловые скобки означают усреднение. Заменив координаты r, r' на среднюю и относительную: $\bar{r} = (r+r')/2$ и $R = r' - r$, можно переписать выражение (7.28) в виде

$$g(r, r') = \left\langle \sum_{k, k'} \psi_k^* \psi_{k'} \exp\left[\frac{i(k+k')}{2} \cdot R\right] \exp[-i(k-k') \cdot \bar{r}] \right\rangle.$$

Усреднение по средней координате \bar{r} дает нуль, за исключением случая $k=k'$, где оно дает единицу. Таким образом,

$$g(r, r') = g(R) = \sum_k |\psi_k|^2 \exp(i k \cdot R), \quad (7.29)$$

где $|\psi_k|^2$ задается формулой (7.22). Из симметрии этой формулы (а также из ее физического смысла) ясно, что $g(R)$ зависит только от R . Заменив сумму интегралом, находим

$$g(R) = \frac{2m^2 k T}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{\exp(i k R \cos \theta)}{k^2 - 1/\xi^2} \sin \theta dk k^2 dk.$$

Интеграл по θ берется элементарно, а по k легко вычисляется методом контурного интеграла; в результате получается

$$g(R) = \left(\frac{m^2 k T}{2 \pi \hbar^2} \right) \frac{\exp[-R/\xi(T)]}{R}. \quad (7.30)$$

Таким образом, в режиме флюктуаций локальные значения ψ коррелированы на расстояниях $\sim \xi(T)$, как и предполагалось выше. Расходимость выражения (7.30) при $R \rightarrow 0$ не вызвана физическими причинами; она связана с тем, что интегрирование по k выполнено до бесконечности, т. е. не проведено обрезание при $k \sim 1/\xi(0)$.

Теперь посмотрим, как повлияет на эти результаты присутствие магнитного поля. Прежде чем выбрать определенную калибровку, отметим, что, вообще говоря, будет удобнее работать с ортонормиро-

$$|\psi_k|^2 = \frac{kT}{\alpha + \hbar^2 k^2 / 2m^*} = \frac{2m^*}{\hbar^2} \frac{kT}{k^2 + 1/\xi^2}. \quad (7.27)$$

Отсюда видно, что фурье-компоненты, описывающие изменения ψ на расстояниях, меньших ξ , как и следовало ожидать, входят с меньшим весом. Однако плотность распределения мод изменяется как $k^2 dk$, так что для получения конечного значения суммы по k в выражении $\langle \psi^2 \rangle = \sum_k |\psi_k|^2$ необходим более сильный закон спадания $|\psi_k|^2$. Можно предположить, что переход к такому спаданию должен иметь место при $k \approx 1/\xi(0)$, так как теория ГЛ несправедлива для изменений ψ , более быстрых, чем это.

Пространственное отображение этих зависящих от k амплитуд можно получить, рассматривая корреляционную функцию

$$\begin{aligned} g(r, r') &\equiv \langle \psi^*(r) \psi(r') \rangle = \\ &= \left\langle \sum_k \psi_k^* \exp(-ik \cdot r) \sum_k \psi_k \exp(ik' \cdot r') \right\rangle; \end{aligned} \quad (7.28)$$

здесь угловые скобки означают усреднение. Заменяя координаты r, r' на среднюю и относительную: $\bar{r} = (r+r')/2$ и $R = r' - r$, можно переписать выражение (7.28) в виде

$$g(r, r') = \left\langle \sum_{k, k'} \psi_k^* \psi_{k'} \exp\left[\frac{i(k+k')}{2} \cdot R\right] \exp[-i(k-k') \cdot r] \right\rangle.$$

Усреднение по средней координате r дает нуль, за исключением случая $k=k'$, где оно дает единицу. Таким образом,

$$g(r, r') = g(R) = \sum_k |\psi_k|^2 \exp(i k \cdot R), \quad (7.29)$$

где $|\psi_k|^2$ задается формулой (7.22). Из симметрии этой формулы (а также из ее физического смысла) ясно, что $g(R)$ зависит только от R . Заменяя сумму интегралом, находим

$$g(R) = \frac{2m^* k T}{\hbar^2} \iint \frac{\exp(i k R \cos \theta)}{k^2 + 1/\xi^2} \sin \theta d\theta k^2 dk.$$

Интеграл по θ берется элементарно, а по k легко вычисляется методом контурного интеграла; в результате получается

$$g(R) = \left(\frac{m^* k T}{2\pi\hbar^2} \right) \frac{\exp[-R/\xi(T)]}{R}. \quad (7.30)$$

Таким образом, в режиме флуктуации локальные значения ψ коррелированы на расстояниях $\sim \xi(T)$, как и предполагалось выше. Расходимость выражения (7.30) при $R \rightarrow 0$ не вызвана физическими причинами; она связана с тем, что интегрирование по k выполнено до бесконечности, т. е. не проведено обрезание при $k \sim 1/\xi(0)$.

Теперь посмотрим, как влияет на эти результаты присутствие магнитного поля. Прежде чем выбрать определенную калибровку, отметим, что, вообще говоря, будет удобнее работать с ортонорми-

рованными собственными функциями псевдогамильтониана \mathcal{H} , определяемого следующим образом:

$$\mathcal{H}\psi_v = \frac{\hbar^2}{2m^*} \left[\left(\frac{\nabla}{i} - \frac{2\pi\mathbf{A}}{\Phi_0} \right)^2 + \frac{1}{\xi^2} \right] \psi_v = \epsilon_v \psi_v. \quad (7.31)$$

Сравнивая это выражение с (7.24), видим, что собственные функции для $\epsilon_v = 0$ удовлетворяют линеаризованному уравнению ГЛ. Однако выше T_c все ϵ_v положительны, и ψ_v используются просто в качестве базисных функций. Возвращаясь к рассуждению, использованному в разд. 4.8 при выводе выражения для H_{c2} (где выступает тот же оператор, что в (7.31), если отвлечься от знака члена $1/\xi^2$), видим, что

$$\epsilon_v = \epsilon_{n, k_z} = \frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\frac{1}{\xi^2} + k_z^2 \right) + \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c, \quad (7.32)$$

где $\omega_c = 2eH/m^*c$ есть циклотронная частота пар в приложенном поле.

Если разложить произвольную функцию $\psi(r)$ по этим базисным функциям

$$\psi(r) = \sum_v c_v \psi_v(r) \quad (7.33)$$

и вычислить, используя равенство (7.23), свободную энергию, то, применяя интегрирование по частям и используя ортогональность ψ_v , найдем, что $F = \sum_v |c_v|^2 \epsilon_v$. Приписывая каждой нормальной моде энергию kT (так же, как это делалось в отсутствие поля), получаем, что $|c_v|^2 = kT/\epsilon_v$.

Теперь можно вычислить корреляционную функцию:

$$g(r, r') \equiv \langle \psi^*(r) \psi(r') \rangle = \sum_{v, v'} c_v^* c_{v'} \langle \psi_v^*(r) \psi_{v'}(r') \rangle \quad (7.34)$$

и посмотреть, каким образом выражение (7.30) видоизменяется под действием поля. Здесь уже необходимо выбрать определенную калибровку. Так как данная физическая задача характеризуется осевой симметрией относительно направления поля, удобно выбрать

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} [\mathbf{H} \times \mathbf{r}] = \frac{1}{2} H r \hat{\varphi},$$

где $\hat{\varphi}$ — единичный вектор. Так как имеется также инвариантность относительно переноса вдоль поля в направлении z , собственные функции должны иметь вид

$$\psi_v = f_{mn}(\rho) \exp(i m \rho) \exp(i k_z z), \quad (7.35)$$

где $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$. Подставляя такое выражение в дифференциальное уравнение (7.31), находим, что асимптотическое поведение f_{mn} для всех m и n дается формулой

$$f(\rho) \rightarrow f_1(\rho) \exp(-a\rho^2), \quad \rho \rightarrow \infty, \quad (7.36)$$

где $f_1(\rho)$ — полином и $a = \pi H / 2\Phi_0$. Это экспоненциальное обрезание

ника можно использовать совокупность независимо флюктуирующих сверхпроводящих частиц, для которых χ дается формулой (7.22). Далее можно оценить $|\psi^2|$ для типичной флюктуации в объеме V по формуле (7.20). Это приводит к

$$\chi \approx -\frac{\pi^2 k T \xi^2}{6 \Phi_0^2} \langle r^2 \rangle \Phi_0^2 V, \quad (7.41)$$

где $\langle r^2 \rangle$ — среднеквадратичное значение радиуса, а численный коэффициент является приближенным. Выше было показано, что в случае трехмерного объемного образца в слабых полях корреляционная функция флюктуаций спадает на длине $\sim \xi$. Таким образом, разумно принять $V = 4\pi\xi^3/3$ и $\langle r^2 \rangle = (\xi/2)^2$. С небольшой подгонкой численного коэффициента это приводит к точному результату Шмидта, основанному на теории ГЛ

$$\chi = -\frac{\pi k T}{6 \Phi_0^2} \xi(T) \approx -10^{-7} \left(\frac{T_c}{T - T_c} \right)^{1/2}. \quad (7.42)$$

Отметим, что эта восприимчивость одного порядка величины с диамагнетизмом Ландау в нормальных металлах, если отбросить увеличивающий ее температурный множитель.

Хотя формально выражение для восприимчивости расходится при T_c , на практике температурный множитель никогда не достигает очень большого значения, так как раньше наступают ограничения, связанные или с переходом первого рода в магнитном поле, или с конечной шириной перехода в реальном образце. Таким образом, восприимчивость всегда крайне мала по сравнению с мейсснеровским случаем, когда $\chi = -1/4\pi$. Кроме того, чтобы не разрушить эффект сокращением размера флюктуаций и их подавлением, для измерения можно использовать лишь малые поля. Тем не менее восприимчивость достаточно велика по сравнению с фоном и может быть измерена путем выделения той части намагниченности, которая зависит от температуры. Магнитное поле при этом поддерживается абсолютно постоянным: оно создается исследующим током, циркулирующим в сверхпроводящем соленоиде. Такие эксперименты были впервые выполнены Голлубом и др. [13—15], использовавшими магнитометр на основе сквада.

Так как намагниченность должна измеряться в комочном поле, температура, при которой флюктуационный диамагнетизм должен иметь расходимость, уменьшается от T_c до температуры $T_{c2}(H)$ — температуры, при которой $H = H_{c2}(T)$. В случае сверхпроводника I рода $T_{c2}(H)$ есть температура перехлаждения для идеального образца. В реальных образцах наблюдается лишь небольшое перехлаждение, и сверхпроводимость внесизионно восстанавливается в результате перехода первого рода вблизи смешенного термодинамического критического поля $T_c(H) > T_{c2}(H)$. Таким образом, точка T_{c2} , где χ расходится, экспериментально недостижима. Однако в сверхпроводниках II рода к точке фазового перехода второго рода $T_{c2}(H)$ можно приблизиться без скачка, так как

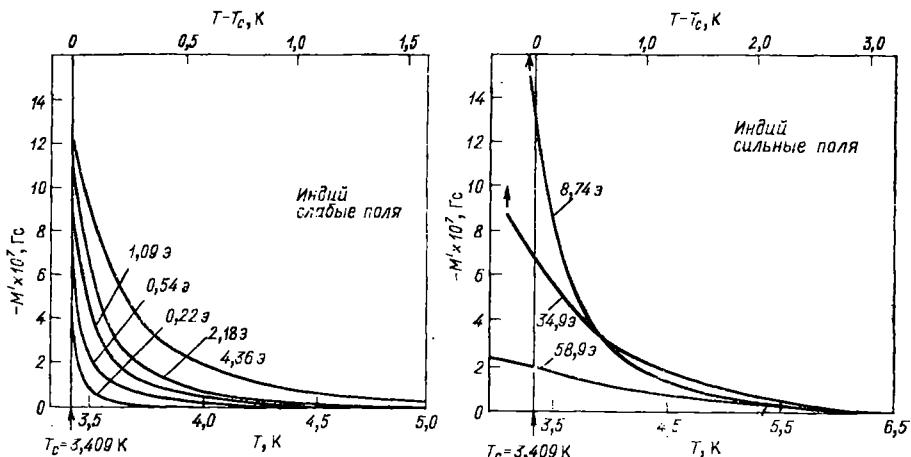


Рис. 7.4. Обусловленный флуктуациями прирост диамагнитного момента индия по данным Голлуба и др. [13–15] (в качестве нулевого принято значение M при высоких температурах, где M не зависит от T):

a — слабые поля; *b* — сильные поля

$T_{c2}(H) > T_c(H)$. К несчастью, ширина перехода ($\sim 5 \cdot 10^{-3}$ К) в большинстве сверхпроводников II рода затемняет детали поведения вблизи T_{c2} , так как линейно нарастающая основная намагниченность при температуре всего на несколько миллиградусов ниже T_{c2} намного превосходит тот флукутационный диамагнетизм, который наблюдается при температуре на несколько миллиградусов выше T_{c2} .

Некоторые типичные данные для In приведены на рис. 7.4. В левой части рисунка показаны результаты для сравнительно слабых полей; M' возрастает с ростом H , но слабее, чем по линейному закону. В правой части рисунка приведены данные для более сильных полей; здесь M' убывает с ростом H , так как более сильные поля быстро подавляют флукутации. Обратите внимание на скачок у левого конца кривой для $H=34.9$ Э. В этой точке M' возрастает скачком на пять порядков величины до значения, соответствующего эффекту Мейсснера, но, так как это переход первого рода, перед скачком нет никакой расходимости. Как следует из рисунка, зависящий от температуры диамагнетизм может наблюдаться до температуры $\sim 2T_c$.

Для сравнения этих результатов с теорией, очевидно, необходимо обобщать формулу Шмida (7.42) на случай конечных полей, что было впервые проделано в работе [16]. Точный расчет в рамках теории ГЛ был выполнен Прэйндженом [17]. Он нашел, что M' действительно должно расходиться как $(T - T_{c2})^{-1/2}$ и что, если использовать нормированные переменные, оно должно описываться универсальным соотношением, а именно

$$M'/H^{1/4}T = f_P(x), \quad (7.43)$$

где f_p — функция единственного параметра $x = [(T - T_c)/H] \times \sqrt{(dH_{c2}/dT)T_c}$. Когда графики в этих переменных были настроены для нескольких материалов, данные не ложились на универсальную теоретическую кривую, а систематически попадали ниже нее, особенно для более сильных полей. Этот факт вначале вызвал беспокойство, так как показывал серьезное расхождение между строгим следствием теории ГЛ и экспериментальными фактами.

Объяснение этому расхождению было впервые предложено Пэттоном, Амбегаокаром и Уилкинсом [18]. Они отметили, что теория ГЛ, поскольку она основана на разложении свободной энергии по производным ψ , применима лишь при рассмотрении медленных изменений в пространстве. В результате того что векторный потенциал, так же как и оператор градиента, входит в выражение канонического импульса, применимость теории ГЛ ограничена также и достаточно слабыми полями. Следовательно, можно ожидать, что она будет плохо описывать коротковолновые флуктуации [$\xi(0)$], которые являются преобладающими намного выше T_c , и флуктуации в сильных магнитных полях. Например, при $T = 2T_c$ $\xi(T) \approx \xi(0)$, тогда как даже при T_c размер флуктуаций в поле $\sim H_{c2}(0)$, как показывает формула (7.40), также порядка $\xi(0)$. Такого рода общие соображения привели авторов к попытке скорректировать расчет Прэйнджа путем обрезания коротковолновых флуктуаций. В результате они пришли к обобщению формулы Прэйнджа (7.43):

$$M'/H^{1/2}T = f_{PAW}(x, H/H_s), \quad (7.44)$$

где x — та же приведенная температурная переменная, что и раньше, а H_s — зависящий от материала масштаб поля, подлежащий определению в конкретной модели.

Голлуб и др. проверили эту идею, нанеся на график, как показано на рис. 7.5, данные для многих материалов, измеренные при T_c (где $x=0$) в зависимости от H . Согласно формуле Прэйнджа (7.43), величина $M'(T_c)/H^{1/2}T_c$ должна быть универсальной численной постоянной для всех материалов. С ростом H данные все более отклоняются от этого значения вниз и при этом, как видно из рис. 7.5, ложатся на универсальную зависимость от нормированной переменной H/H_s , входящей в формулу (7.44). Величина H_s определяется для каждого материала как поле, при котором измеренное значение $M'(T_c)$ падает до половины значения Прэйнджа. Конкретный вид уменьшения M' , предсказанный в работе [18], оказался правильным качественно, но не количественно.

Вскоре после того как эта универсальная зависимость была продемонстрирована экспериментально, Ли и Пайн (ЛП) [19] и независимо Куркиярви, Амбегаокар и Эйленбергер (КАЭ) [20] получили теоретическую кривую (она показана на рис. 7.5 пунктиром), дающую хорошее согласие с опытом. Этот теоретический результат основан на микроскопической теории Горькова для чистого предела. При разработке теории неожиданно большую роль сыграли эффекты, связанные с нелокальной электродинамикой.

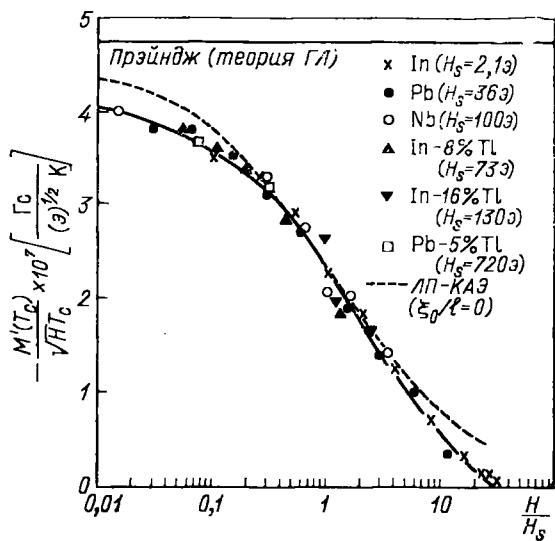


Рис. 7.5. Универсальная зависимость $M'(T_c)/H^{1/2}T_c$ от H/H_s . Сплошная кривая — эмпирическая кривая, проведенная через экспериментальные точки Голлуба и др. Пунктирная кривая — теория ЛП—КАЭ для чистого предела, $\xi_0/l_s = 0$ (см. текст). Горизонтальная прямая — расчет Прэйнда (теория ГЛ)

кой. Фактически они уменьшают H_s примерно на порядок величины по сравнению со значением, которое можно было ожидать на основании качественных соображений, говорящих о том, что H_s должно быть порядка $H_{c2}(0)$. Заметим, что эта нелокальность имеет место, несмотря на то что поле \mathbf{B} всюду однородно (в отличие от обычного появления нелокальных эффектов только в случае, когда поля ограничены тонким слоем глубины проникновения). Хотя \mathbf{B} однородно, \mathbf{A} неоднородно, а именно характер изменения \mathbf{A} существен для нелокальной электродинамики.

Экспериментально выяснилось, что у сплавов величина $H_s/H_{c2}(0)$ приближается к предельному значению $\sim 1/2$. Интуитивно это кажется разумным, так как при малых значениях средней длины свободного пробега l нелокальные эффекты должны пропадать. Однако оказалось, что расчеты ЛП—КАЭ, основанные на прямом применении теории Горькова, дают неограниченный рост $H_s/H_{c2}(0)$ при уменьшении l . Однако расчет, выполненный Маки и Такаямой [21], дал конечный предел при $l \rightarrow 0$, что, по-видимому, находится в удовлетворительном согласии с экспериментом. Как показал Маки [22], результаты ЛП—КАЭ искажены из-за учета нулевого члена, отражающего лишь свойства нормального металла.

Можно подытожить это обсуждение, сопоставив два различных режима. В сверхпроводнике II рода можно наблюдать диамагнетизм флюктуационного происхождения, если приблизиться вплотную к T_{c2} . Диамагнетизм в этом случае определяется длинноволновыми модами с очень низкой энергией, которые дают расходимость при T_{c2} и хорошо описываются теорией ГЛ. Следовательно, можно ожидать, что теория Прэйнда (или ГЛ) будет хорошо работать вблизи T_{c2} . Как показывают измерения Голлуба

и др., на таких образцах сверхпроводников II рода, как Pb+5% Tl, это действительно так. Однако при более высоких температурах заметно возбуждены все флуктуационные моды; при этом статистические веса больше у коротковолновых мод, плохо описываемых теорией ГЛ, поэтому должны появляться — и действительно появляются — большие расхождения. Очень приятно, что эти расхождения послужили толчком к разработке микроскопической теории, которая привела к значительным успехам в их объяснении.

7.4.1. Диамагнетизм в двумерных системах

Если сверхпроводник имеет форму пленки толщиной $d \ll \xi$, флуктуации могут приводить к существенному изменению переменных только по двум координатам в плоскости пленки. Такая система представляет собой «двумерный сверхпроводник». Величину флуктуационного диамагнетизма легко оценить, пользуясь формулой (7.41). Полагая, что радиус корреляции равен $\sim \xi$ в плоскости пленки и d в перпендикулярном направлении, находим, что объем такой флуктуации $V \sim \pi \xi^2 d$, так что $\chi \approx -\pi kT \langle r^2 \rangle / \Phi_0 d$. Из-за того что объем, в котором происходят флуктуации, не сферический, определение $\langle r^2 \rangle$ требует осторожности. Можно воспользоваться следующим физическим рассмотрением. Плотность энергии $\chi H^2 / 8\pi$ можно записать в калибровке Лондонов также в виде $J \cdot A / 2c \approx A^2$. Но $\oint A \cdot ds = B \mathcal{A}$, где \mathcal{A} — площадь сечения флуктуации, перпендикулярного к полю. Таким образом, $A \approx \approx B \mathcal{A} / s$, где s — периметр этого сечения. Так как в случае слабого флуктуационного магнетизма $B \approx H$, получаем $\chi \sim (\mathcal{A}/s)^2$. Для сферы этот фактор равен просто $\langle r^2 \rangle$, а для флуктуации в форме диска $\langle r^2 \rangle_{\text{оф}} \approx \xi^2$ для H_{\perp} и $\langle r^2 \rangle_{\text{оф}} \approx (d/2)^2$ для H_{\parallel} . Это общее рассуждение качественного характера в случае параллельного поля можно подтвердить, обратившись к формуле (4.54а), описывающей экранирование параллельного поля в тонкой пленке. Для $d \ll \lambda$ находим $\bar{\chi}/H = B/H = 1 + 4\pi\chi$, где $\chi = -d^2/12\lambda^2 \approx d^2$, как было найдено выше. Таким образом, по порядку величины

$$\chi'_{\perp} \approx -kT\xi^2/\Phi_0^2 d \approx (\xi/d) \chi'_{3D} \approx T_c/(T - T_c), \quad (7.45a)$$

тогда как

$$\chi'_{\parallel} \approx -kTd/\Phi_0^2 \approx (d/\xi) \chi'_{3D} \approx \text{const.} \quad (7.45b)$$

Здесь через χ'_{3D} обозначено выражение (7.42).

Отсюда заключаем, что χ'_{\parallel} практически ненаблюдаемо, так как оно слишком мало и не зависит от температуры. Однако χ'_{\perp} будет в ξ/d раза больше, чем χ'_{3D} для единицы объема; но, так как объем уменьшается как d , что приводит к полной восприимчивости, не зависящей от толщины и равной лишь восприимчивости объемного образца толщиной $\sim \xi$. Для отдельной пленки этот малый момент опять было бы трудно наблюдать. Однако если изготовить из таких пленок многослойную «этажерку»,

можно получить больший объем. Таким путем можно проверить предсказанное различие в температурной зависимости $\chi_{\perp} \propto (T - T_c)^{-1/2}$ согласно (7.45а) и $\chi'_{3D} \propto (T - T_c)^{-1/2}$ согласно (7.42).

В действительности существуют сверхпроводящие слоистые соединения, например TaS_2 , в которые могут быть «встроены» (интерколлированы) органические соединения, например пиридин, отделяющие каждый металлический слой ($d \approx 6 \text{ \AA}$) от его соседей. В идеальном образце эти слои связаны между собой только туннелированием джозефсоновского типа через пиридиновую проплойку, и можно было бы предположить, что это приведет к двумерному поведению. Фактически же, как показали Лоуренс и Дониак ([23]; см. также [24]), каждая слабая джозефсоновская связь обуславливает поведение, которое вблизи T_c лучше описывается не как двумерное, а как трехмерное с анизотропной эффективной массой. В частности, оказывается [25], что температурная зависимость восприимчивости, связанной с флуктуациями, не особенно отличается от восприимчивости трехмерных систем, по крайней мере при температурах, не намного превышающих T_c .

7.5. Зависимость флуктуаций от времени

Диамагнетизм — свойство равновесное, поэтому его можно было рассчитывать, пользуясь лишь усредненными по времени величинами $|\psi_k|^2$. Однако, когда рассматривается какое-либо неравновесное явление, например электропроводность, нужна модель, описывающая зависимость переменных от времени. Действительно, вклад каждой флуктуации в проводимость выше T_c пропорционален времени ее существования, ибо оно определяет период, в течение которого может происходить ускорение носителей в приложенном поле. Такая модельдается временным обобщением уравнений Гинзбурга — Ландау (TDGL), разработанным рядом авторов (см., например [26—29]; недавно опубликован критический обзор [30]). Согласно этой модели, которая будет рассмотрена более детально в следующей главе, ψ -функция сверхпроводника релаксирует к своему мгновенному равновесному значению по экспоненциальному закону; выше T_c это значение равно нулю. При этом, если пренебречь электрическим и магнитным потенциалами, линеаризованное уравнение TDGL является простым обобщением уравнения (7.24):

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{\tau_0} (1 - \xi^2 \nabla^2) \psi, \quad T > T_c. \quad (7.46)$$

Параметр

$$\tau_0 = \pi \hbar / 8k(T - T_c) \quad (7.47)$$

представляет собой зависящее от температуры время релаксации для однородной ($k=0$) моды. Согласно (7.46), моды с более высокой энергией ($k>0$) затухают более быстро с временем релаксации

$$1/\tau_k = (1 + k^2 \xi^2)/\tau_0. \quad (7.48)$$

Сами по себе эти уравнения говорят о том, что (выше T_c) любое Ψ_k , отличное от нуля, будет экспоненциально затухать за время τ_k . Для сохранения найденного выше отличного от нуля среднего значения $|\Psi_k|^2$ [см. формулу (7.27)] привлекают так называемую ланжевеновскую силу — полностью случайный (с «белым спектром») источник, который описывает взаимодействие между сверхпроводящими электронами и остальной частью термодинамической системы, с которой она находится в равновесии. Интенсивность этой силы определяется из требования сохранения соответствующего значения $\langle |\Psi_k|^2 \rangle$, вычисленного выше [см. формулу (7.27)] на основе лишь равновесной статистической механики. Добавляя в правую часть уравнения (7.46) силу Ланжевена F_k и выбирая значение F_k таким образом, чтобы получилось правильное среднее по времени

$$\langle |\Psi_k|^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle |\Psi_{k,\omega}|^2 \rangle d\omega,$$

находим

$$\langle |\Psi_{k,\omega}|^2 \rangle = \langle |\Psi_k|^2 \rangle 2\tau_k / (1 + \omega^2 \tau_k^2). \quad (7.49)$$

Легко проверить (используя теорему Винера — Хинчина, см., например, [31]), что этот спектр Ψ_k в пространстве частот соответствует экспоненциальному спаданию временной корреляционной функции

$$\langle \Psi_k^*(0) \Psi_k(t) \rangle = \langle |\Psi_k|^2 \rangle \exp(-t/\tau_k). \quad (7.50)$$

Наконец, подставляя в формулу (7.49) выражения для $\langle |\Psi_k|^2 \rangle$ (7.27) и для τ_k (7.48) и производя упрощения, получаем

$$\langle |\Psi_{k,\omega}|^2 \rangle = \frac{16}{\pi} \frac{k(T - T_c)}{\hbar \alpha(T)} \frac{kT \tau_k^2}{1 + \omega^2 \tau_k^2}. \quad (7.51)$$

Учитывая, что $\alpha(T) \sim (T - T_c)$, вся зависимость от T , так же как и от k и ω , сосредоточена в последнем множителе.

7.6. Флуктуационная проводимость при температуре выше T_c

В отсутствие сверхпроводящих флуктуаций нормальная проводимость (на постоянном токе) выражается формулой

$$\sigma_n = ne^2\tau/m, \quad (7.52)$$

где τ — среднее время рассеяния нормальных электронов и n — их число в единице объема. По аналогии можно ожидать, что флуктуации приведут к добавочному члену

$$\sigma' \approx (2e)^2/m^* \sum_k \langle |\Psi_k|^2 \rangle \tau_k / 2, \quad (7.53)$$

так как обычные процессы рассеяния не действуют, пока флюк-

туация не затухнет, а $|\psi_k|^2$ затухает вдвое быстрее, чем ψ_k . Если использовать значения $\langle |\psi_k|^2 \rangle$ и τ_k из формул (7.27) и (7.48) и проинтегрировать по пространству, указанный рецепт дает результат, отличающийся от результата точного расчета лишь небольшим численным коэффициентом. В частности, оказывается правильно найденной температурная зависимость $\sigma' \propto (T - T_c)^{-(4-d)/2}$, где $d (= 1, 2, 3)$ — число измерений системы.

Так как расчет σ' вполне доступен для изложения и дает некоторые дополнительные знания о предмете, рассчитаем теперь σ' точно в рамках линеаризованных уравнений ГЛ. Это просто сделать, пользуясь формализмом Кубо, который связывает коэффициенты линейного отклика с флюктуациями в невозмущенной системе, как того требует флюктуационно-диссипативная теорема. Ограничимся случаем однородных полей и токов; при этом общей исходной точкой будет формула Кубо

$$\sigma_{xx}(\omega) = \frac{1}{kT} \int_0^\infty \langle J_x(0) J_x(t) \rangle \cos \omega t dt. \quad (7.54)$$

Тем, для кого этот подход непривычен, возможно, полезно будет заметить, что этот интеграл дает спектр величины $J_x(t)$; в таком случае равенство (7.54) эквивалентно формуле Найквиста для шумового тока в единичной полосе частот: $J_x^2(\omega) = 4kT\sigma_{xx}(\omega)$. Если рассмотреть куб единичного объема, эта формула будет эквивалента еще более привычному выражению для напряжения теплового шума сопротивления R в полосе B , а именно $V = 4kTRB$.

Предположим теперь, что флюктуации тока нормальных квазичастиц не изменяются под влиянием сверхпроводящих флюктуаций. Это не вполне справедливо в непосредственной близости к T_c , где флюктуации велики. Таким образом, при вычислении σ_{xx} включаем в формулу (7.54) только флюктуирующий сверхток. При $\Psi = \sum_k \psi_k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ этот ток равен

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \frac{e\hbar}{m^* i} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) = \\ &= \frac{e\hbar}{m^*} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} (2\mathbf{k} + \mathbf{q}) \Psi_k^* \Psi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}). \end{aligned} \quad (7.55)$$

Если ограничиться однородными ($\mathbf{q} = 0$) токами в направлении x , выражение (7.55) сводится к

$$J_x = \frac{2e\hbar}{m^*} \sum_{\mathbf{k}} k_x |\psi_{\mathbf{k}}|^2. \quad (7.56)$$

Теперь нужно вычислить автокорреляционную функцию тока

$$\langle J_x(0) J_x(t) \rangle = \left(\frac{2e\hbar}{m^*} \right)^2 \left\langle \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} k_x k'_x |\psi_{\mathbf{k}}(0)|^2 |\psi_{\mathbf{k}'}(t)|^2 \right\rangle. \quad (7.57)$$

Так как $\psi_{\mathbf{k}}$ и $\psi_{\mathbf{k}'}$ статистически независимы, перекрестные члены

при усреднении выпадут и выражение (7.57) можно переписать в виде

$$\langle J_x(0) J_x(t) \rangle = \left(\frac{2e\hbar}{m^*} \right)^2 \sum_k k_x^2 \langle |\psi_k^*(0)\psi_k(t)|^2 \rangle. \quad (7.58)$$

Подставляя сюда выражение для экспоненциального затухания корреляционной функции (7.50) и выполняя косинус-преобразование Фурье (7.54), получаем

$$\sigma'_{xx}(\omega) = \left(\frac{2e\hbar}{m^*} \right)^2 \frac{1}{kT} \sum_k k_x^2 \langle |\psi_k|^2 \rangle^2 \frac{\tau_k/2}{1 + (\omega\tau_k/2)^2}. \quad (7.59)$$

Обращаясь к специальному случаю постоянного тока ($\omega=0$) и подставляя выражения (7.27) и (7.48) для $\langle |\psi_k|^2 \rangle$ и τ_k , окончательно находим

$$\sigma'_{xx}(0) = \frac{\pi e^2}{\hbar} \frac{T}{T - T_c} \sum_k \frac{k_x^2 \xi^4}{(1 + k_x^2 \xi^2)^3}. \quad (7.60)$$

7.6.1. Трехмерный случай

В случае трехмерного объемного образца k можно считать изменяющимся непрерывно, что позволяет заменить суммирование интегрированием. Усредненное по сфере значение k_x^2 равно $k^2/3$; при этом плотность состояний на единицу объема равна $4\pi k^2 dk/(2\pi)^3$. После элементарного интегрирования получаем

$$\sigma'(0)|_{3D} = \frac{1}{32} \frac{e^2}{\hbar \xi(0)} \left(\frac{T}{T - T_c} \right)^{1/2}, \quad (7.61)$$

где, как обычно, $\xi(T) = \xi(0)[T/(T-T_c)]^{1/2}$. Учитывая, что проводимость изотропна, нижние индексы опускаем. Хотя эта формула формально расходится с приближением к T_c , входящий в нее коэффициент меньше нормальной проводимости σ_n на множитель порядка $(kT_c/E_F)(1/k_F l) \approx 10^{-7}$. Таким образом, относительное изменение проводимости в любом разумном интервале температур выше T_c будет очень малым. Отметим, что этим флюктуационная проводимость отличается от флюктуационной диамагнитной восприимчивости [см. формулу (7.42)], где коэффициент сравним с фоном диамагнетизма нормального состояния и где могут наблюдаться большие относительные изменения χ .

7.6.2. Двумерный случай

Теперь рассмотрим случай пленки, достаточно тонкой, чтобы было оправдано двумерное приближение, т. е. пленки, толщина которой $d \ll \xi$. Именно для этого случая было выполнено наибольшее число экспериментальных работ. В этом случае изменения ψ

в направлении, перпендикулярном к пленке, ограничены дискретным набором стоячих волн с $k^T = v\pi/d$, где $v=0, 1, 2$ и т. д. Если пленка достаточно тонкая, так что все члены, кроме $v=0$, выпадают, суммирование (7.60) переходит в двумерное интегрирование в плоскости пленки. Среднее значение k_x^2 тогда равно $k^2/2$, а множитель с плотностью состояний становится равным $2\pi k dk/(2\pi)^2 d$. Выполнив интегрирование, получаем удивительно простой результат:

$$\sigma'(0)|_{2D} = \frac{e^2}{16\hbar d} \frac{T}{T - T_c}. \quad (7.62)$$

Заметьте, что эта формула не содержит никаких подгоночных параметров (если не говорить о T_c). Важно также понять, что толщина пленки d не является критичной, так как величиной, фактически измеряемой в эксперименте, является не удельная проводимость, а проводимость на квадрат $\sigma'd$. Формула (7.62) была впервые выведена Асламазовым и Ларкиным [32]; она находится в превосходном согласии с экспериментальными данными Гловера [33] для тонких аморфных пленок. Такие пленки особенно выгодно применять, так как они имеют большое нормальное сопротивление (малую нормальную проводимость). Эта нормальная проводимость подключена параллельно флуктуационной проводимости (7.62), имеющей универсальную величину, не зависящую от нормального сопротивления. Таким образом, чем меньше нормальная проводимость, тем большую часть полной проводимости составляет флуктуационная проводимость.

Прежде чем перейти к детальному сравнению формулы (7.62) с экспериментальными данными, важно представить себе погрешность, связанную с отбрасыванием в сумме (7.60) всех членов, кроме члена с $k_\perp=0$. Интегрирование по k в плоскости пленки может быть выполнено для произвольного k_\perp ; при этом значение интеграла уменьшается на множитель $(1 + \bar{k}_\perp^2 \xi^2)^{-1}$. Таким образом, для конечных d/ξ необходимо умножить (7.62) на фактор

$$\frac{\sigma'}{\sigma_{2D}} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{1 + (v^2 \pi^2 \xi^2 / d^2)}. \quad (7.63)$$

Таким образом, пока $d \leq \xi$, простой результат для двумерного случая точен с погрешностью 10%. Однако, если $d \gg \xi$, эту сумму можно вычислить путем интегрирования; в результате получается $d/2\xi$ — как раз такой множитель, который требуется для возврата к формуле для трехмерного случая (7.61) от формулы для двумерного (7.62). Вследствие температурной зависимости ξ поведение пленок при уходе выше T_c может изменяться от двумерного к трехмерному. Оказалось, что экспериментальные данные соглашаются с таким переходным поведением, которое описывается формулой (7.63).

7.6.3. Одномерный случай

Для полноты обзора всех важных частных случаев рассмотрим теперь случай тонкого провода, площадь поперечного сечения которого $\mathcal{A} \ll \xi^2$, в результате чего можно применить одномерное приближение. В этом случае непрерывное распределение имеет только компонента k вдоль проволоки (k_x). Оставляя в выражении (7.60) лишь член с нулевым поперечным импульсом, получаем множитель для плотности состояний $dk_x/2\pi\mathcal{A}$. Интегрируя по k_x от $-\infty$ до $+\infty$, находим

$$\sigma'(0)|_{1D} = \pi \frac{e^2 \xi(0)}{16\hbar \omega} \left(\frac{T}{T - T_c} \right)^{1/2} \quad (7.64)$$

с уменьшающими поправками порядка $(\mathcal{A}/\pi^2 \xi^2)^{3/2}$ при конечной площади \mathcal{A} . Как и в двумерном случае, измеряемой величиной является проводимость $\sigma' \mathcal{A}$, поэтому для проверки этих теоретических предсказаний точное определение площади \mathcal{A} не требуется. Тем не менее согласие между теорией и экспериментом на оловянных кристаллах-вискерах, которые использовались в экспериментах, рассмотренных в разд. 7.1, не слишком хорошее из-за существенного влияния аномальных членов (поправка Маки), которые будут рассмотрены ниже.

7.6.4. Аномальные эффекты в проводимости, вызванной флюктуациями

В то время как первоначальное сравнение формулы (7.62) Асламазова — Ларкина (АЛ) с экспериментальными данными Гловера с соавторами (см., например [34]) по тонким пленкам показало превосходное согласие теории с экспериментом, более поздние измерения (см., например [35]) дали значения σ' , иногда превосходящие предсказанные теорией АЛ в 10 раз. Такие большие значения обычно обнаруживались в чистых (т. е. обладающих малым сопротивлением) пленках алюминия; флюктуационная проводимость пленок свинца и висмута была, как и раньше, близка к значению АЛ, а пленки олова имели значения σ' , примерно в четыре раза большие, чем по теории АЛ.

Примерно в то же время, когда экспериментально было обнаружено аномально большое возрастание проводимости, Маки [36] заметил существование еще одного слагаемого (или еще одной диаграммы Фейнмана) при теоретическом расчете, которое было упущено в работе АЛ. Оказалось, что физически эта «поправка Маки» отражает возрастание проводимости нормальных электронов, вызванное сверхпроводящими флюктуациями. Аналогичное возрастание σ' по сравнению с σ_n при $\hbar\omega < \Delta < kT$ известно при температуре чуть ниже T_c при наличии слабой, но устойчивой сверхпроводимости. Действительно, рассмотрение выше формулы (2.93) показало, что при $\omega = 0$ σ' логарифмически расходится, если

пик плотности состояний БКШ не ограничен эффектами, связанными с временем жизни либо анизотропией щели. Хотя аналогия между этим эффектом и поправкой Маки является довольно поверхностной, в случае одномерных и двумерных систем слагаемое Маки, как оказывается, дает бесконечную проводимость при всех температурах выше T_c .

Как показал Томпсон [37], эта нефизичная расходимость устраняется учетом любого эффекта, приводящего к разрыву пар, например присутствием магнитного поля или магнитных примесей, которые существенно ограничивают время жизни куперовских пар. Добавление этого так называемого слагаемого Маки—Томпсона к рассмотренному выше слагаемому АЛ позволяет объяснить большое число данных, особенно по пленкам в магнитном поле.

Еще позднее Пэттон [38], а также Келлер и Коренман [39] исследовали эту проблему заново и показали, что конечная проводимость, связанная со слагаемым Маки, получается даже для простой модели БКШ, без каких-либо внешних факторов, ведущих к разрыву пар, если тщательно рассчитать так называемые вершинные поправки. Эти теории объясняют наличие эффективного фактора, вызывающего разрыв пар, амплитуда которого пропорциональна сопротивлению пленки на квадрат R_{\square} . Однако, для того чтобы объяснить различие в данных по σ , полученных на разных материалах с одинаковым R_{\square} , особенно в случае пленок малого сопротивления, даже с учетом этих усовершенствованных теорий требуется ввод внутреннего механизма разрыва пар. Интенсивность этого механизма разрыва пар обычно характеризуют параметром τ_{c0} , равным относительному понижению T_c под его влиянием. Данные для алюминия согласуются с $\tau_{c0}=2 \cdot 10^{-4}$, тогда как данные для олова — с $\tau_{c0} \approx 0,02$. Для материалов с сильной связью типа свинца и висмута величина τ_{c0} , как оказалось, может достигать 0,1; это обстоятельство, а также большие R_{\square} , по-видимому, объясняют согласие данных Гловера с простой теорией АЛ без поправок Маки—Томпсона. Характер изменения τ_{c0} в различных материалах согласуется с предположением Аппеля [40], что разрыв пар тепловыми фононами должен привести к $\tau_{c0} \propto \infty \lambda(T/\Theta_D)^2$, где λ — константа электрон-фононного взаимодействия и Θ_D — лебаевская температура; однако детальная теория здесь пока отсутствует. Для ознакомления с дальнейшими деталями, характеризующими состояние проблемы избыточной флуктуационной проводимости, отсылаем читателя к обстоятельному обзору Крейвена, Томаса и Паркса [41], содержащему рассмотрение многих различных режимов.

7.6.5. Проводимость на высоких частотах

Измерения частотной зависимости проводимости σ' допускают более конкретную проверку теории TDGL, чем описанные выше простые измерения на постоянном токе, так как из формулы (7.59)

ясно, что при $\omega > \tau_k^{-1}$ значение σ' будет уменьшаться. При количественном рассмотрении это означает, что каждый член суммы в уравнении (7.60) должен быть до интегрирования по k умножен на $[1 + (\omega\tau_k/2)^2]^{-1}$. Если ограничиться двумерным случаем, интегрирование все еще может быть выполнено точно и дает

$$\begin{aligned} \sigma'(\omega)|_{2D} = \frac{e^2}{16\hbar d} \left(\frac{T}{T - T_c} \right) \left[\frac{4}{\omega\tau_0} \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega\tau_0}{2} - \right. \\ \left. - \frac{4}{\omega^2\tau_0^2} \ln \left(1 + \frac{\omega^2\tau_0^2}{4} \right) \right]. \quad (7.65) \end{aligned}$$

В первом множителе можно узнать результат для случая постоянного тока. Если выражение в квадратных скобках разложить в ряд по низким частотам, найдем

$$\sigma'(\omega) = \sigma'(0) \left(1 - \frac{\omega^2\tau_0^2}{24} + \dots \right). \quad (7.66)$$

Таким образом, как и ожидалось, проводимость исчезает, когда ω превосходит некоторое среднее τ_k^{-1} , которое, в свою очередь, несколько больше τ_0 в силу зависимости τ_k от k . Другой интересный предел — это температура точно равна T_c , когда $\tau_0 = \infty$. В этом случае выражение (7.65) для любой конечной частоты сводится к следующему:

$$\sigma'(\omega)|_{T_c} = \frac{e^2}{\hbar d} \frac{kT_c}{\hbar\omega}, \quad \omega > 0. \quad (7.67)$$

Заметим, что это выражение совпадает со значением $\sigma'(0)$ на постоянном токе, взятым при $(T - T_c) = \hbar\omega/16k$. Ясно, что эта флюктуационная проводимость конечна даже при T_c для всех частот, кроме нулевой.

Эти предсказания теории были проверены в экспериментах [42], где измерялось прохождение СВЧ-излучения через тонкие пленки свинца. Авторы смогли выполнить измерения на частотах 24, 37 и 69 ГГц, а также на постоянном токе. При температурах ниже T_c полученные данные по прохождению СВЧ-излучения хорошо согласуются с обычной комплексной проводимостью Маттиса — Бардина [$\sigma_1(\omega) - i\sigma_2(\omega)$], следующей из теории БКШ, рассмотренной в разд. 2.10. Выше T_c данные хорошо совпадают со значением прозрачности, следующим из соотношения (7.65) для σ_1 , при $\sigma_2 = 0$. Было обнаружено возрастание проводимости при T_c , обратно пропорциональное ω , как и следовало ожидать из уравнения (7.67), и достигающее $\sim 11\%$ для низшей из применявшихся частот. Хорошее согласие теории с экспериментальными данными по зависимости σ' и от частоты, и от температуры показывает, что модель TDGL является правильной, по крайней мере для свинцовых пленок с большими сопротивлениями. Частотная зависимость проводимости в случаях, когда существенны слагаемые Маки, требует дальнейшего исследования.

ДОПОЛНЕНИЕ

Эта заключительная глава посвящена обсуждению некоторых тем, которые были обойдены, чтобы не прерывать обсуждения более простых вопросов. Вначале будут обсуждаться уравнения Боголюбова, которые описывают спектр возбуждений в пространственно неоднородных сверхпроводниках. Затем будет рассмотрено изменение спектра возбуждений под действием магнитных возмущений, приводящее в конечном счете к бесщелевой сверхпроводимости. И в заключение обсуждается нестационарная сверхпроводимость: во-первых, ее описание в рамках теории ГЛ, а во-вторых, случай, когда скорость релаксации определяется неупругими процессами.

8.1. Метод Боголюбова: обобщенное самосогласованное поле

При обсуждении микроскопической теории БКШ был рассмотрен только случай чистых материалов, для которых импульс k является хорошим квантовым числом и спариваются состояния $k\uparrow$ и $-k\downarrow$. В 1959 г. Андерсон показал [1], что более общее описание, применимое также и к грязным сверхпроводникам, есть спаривание двух произвольных состояний, взаимно обращенных во времени. Электронные собственные функции в грязных сверхпроводниках являются некоторыми функциями $w_n(r)$, которые существенно отличаются от плоских волн. Однако, если в гамильтониане нет магнитных или других членов, неинвариантных по отношению к обращению времени, состояния $w_n(r)$ и $w_n^*(r)$ являются вырожденными и могут спариваться при условии, что спиновая часть волновой функции также обращена во времени. Андерсон показал, что для подобного спаривания можно ожидать отсутствия сильной зависимости таких равновесных свойств, как T_c , H_c и Δ от длины свободного пробега электронов.

Этот результат относится к сверхпроводникам, существенно однородным в масштабе ξ_0 , несмотря на присутствие рассеивающих центров. Более общая задача возникает в тех случаях, когда параметр порядка меняется в пространстве, например на границе раздела с другим материалом или при наличии вихрей. Для решения этой задачи можно использовать уравнения Боголюбова, которые являются обобщением обычных уравнений многочастичной теории Хартри — Фока на случай учета не только обычного скалярного потенциала $U(r)$, но и ответственного за сверхпроводимость «потенциала спаривания» $\Delta(r)$. Поскольку Де Жен [2]

В своей книге приводит подробное рассмотрение этого метода, ограничиваясь кратким описанием некоторых результатов, придерживаясь в основном обозначений Де Жена, чтобы облегчить ссылки на его работу.

Для рассмотрения изменения переменных в пространстве определим обобщение преобразований Боголюбова следующим образом:

$$\begin{aligned}\Psi(\mathbf{r}\uparrow) &= \sum_n [\gamma_{n\uparrow} u_n(\mathbf{r}) - \gamma_{n\downarrow}^* v_n^*(\mathbf{r})], \\ \Psi(\mathbf{r}\downarrow) &= \sum_n [\gamma_{n\downarrow} u_n(\mathbf{r}) + \gamma_{n\uparrow}^* v_n^*(\mathbf{r})],\end{aligned}\quad (8.1)$$

где Ψ — операторы уничтожения координатных собственных функций, а не импульсных, как операторы $c_{\mathbf{k}\sigma}$, которые были использованы в гл. 2; u и v — функции, определяемые из требования диагональности гамильтониана

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\text{eff}} = & \int \left\{ \sum_{\sigma} \Psi^*(\mathbf{r}, \sigma) \left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{eA}{c} \right)^2 + U(\mathbf{r}) - \mu \right] \times \right. \\ & \left. \times \Psi(\mathbf{r}, \sigma) + \Delta(\mathbf{r}) \Psi^*(\mathbf{r}\uparrow) \Psi^*(\mathbf{r}\downarrow) + \Delta^*(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}\uparrow) \Psi(\mathbf{r}\downarrow) \right\} d\mathbf{r},\end{aligned}\quad (8.2)$$

где

$$\Delta(\mathbf{r}) = V \langle \Psi(\mathbf{r}\uparrow) \Psi(\mathbf{r}\downarrow) \rangle = V \sum_n v_n^*(\mathbf{r}) u_n(\mathbf{r}) (1 - 2f_n), \quad (8.3)$$

что находится в прямой аналогии с рассуждениями по поводу уравнений (2.38) и (2.40). Диагональность приводит к требованию, чтобы u и v подчинялись уравнениям Боголюбова:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0 u(\mathbf{r}) + \Delta(\mathbf{r}) v(\mathbf{r}) &= E u(\mathbf{r}), \\ -\mathcal{H}_0^* v(\mathbf{r}) + \Delta^*(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}) &= E v(\mathbf{r}),\end{aligned}\quad (8.4)$$

где

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{eA}{c} \right)^2 + U(\mathbf{r}) - \mu, \quad (8.5)$$

а $U(\mathbf{r})$ включает в себя обычное кулоновское взаимодействие электронов, а также потенциалы ионных остовов и любые другие электростатические потенциалы, усредненные по Хартри — Фоку.

Прежде всего отметим, что если Δ равно нулю, то уравнения (8.4) расцепляются:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0 u &= E u, \\ \mathcal{H}_0^* v &= -E v,\end{aligned}\quad (8.6)$$

и тогда $u(\mathbf{r})$ и $v(\mathbf{r})$ становятся обычными собственными функциями электронов и дырок в нормальном состоянии, обладающих энергиями $\pm E$ относительно уровня Ферми. В общем случае необходимо постараться решить системы связанных уравнений (8.4) и добиться самосогласования, вычисляя $\Delta(\mathbf{r})$ из набора u и v при помощи равенства (8.3).

8.1.1. Грязные сверхпроводники

В качестве первого примера рассмотрим задачу Андерсона об однородном грязном, но немагнитном сверхпроводнике. Тогда собственные функции w_n нормального состояния удовлетворяют соотношению

$$\mathcal{H}_0 w_n = \xi_n w_n, \quad (8.7)$$

где ξ_n — собственные значения, отсчитанные от химического потенциала μ . В чистых металлах w_n являются блоховскими функциями с хорошо определенными k . В общем случае допускается, что это точные, хотя и неизвестные решения при наличии произвольных центров упругого рассеяния. В предположении однородности металла в масштабе ξ_0 величину $\Delta(r)$ можно считать константой. В этом случае равенства (8.4) выполняются, если положить величины $u_n(r)$ и $v_n(r)$ пропорциональными $w_n(r)$, т. е. $u_n(r) = u_n w_n(r)$ и $v_n(r) = v_n w_n(r)$, где u_n и v_n теперь просто числа. Тогда система (8.4) приобретает вид:

$$\begin{aligned} (\xi_n - E_n) u_n + \Delta v_n &= 0, \\ (-\xi_n - E_n) v_n + \Delta^* u_n &= 0. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Решение этой системы дает

$$E_n = (\xi_n^2 + |\Delta|^2)^{1/2}, \quad (8.9)$$

как и в обычной теории БКШ. Более того, если вернуться к нахождению самосогласованных значений Δ , то получим хорошо известный результат, определяемый выражением

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{2} \sum_n \frac{|w_n(r)|^2}{E_n} \operatorname{th} \frac{\beta E_n}{2}. \quad (8.10)$$

Если предположить, что рассеяние не меняет плотности состояний, то снова получим результат (2.50) (для того чтобы показать это подробно, надо приложить некоторые усилия для нормализации w_n и определения V). Таким образом, при переходе от чистого образца к грязному не ожидается значительных изменений T_c или Δ , что согласуется с экспериментальными данными.

8.1.2. Однородный ток в чистых сверхпроводниках

При обсуждении вопроса о критическом токе в тонких проволоках в связи с формулой (4.41) было отмечено, что при таком токе энергии квазичастиц сдвигаются на $v_s \cdot p$. Этот результат можно получить, используя настоящий метод. Если пары имеют импульс центра масс* $2q$, то

$$\Delta = |\Delta| \exp(i2q \cdot r). \quad (8.11)$$

* Отметим здесь, что, следуя Де Жену, импульс центра масс обозначен $2q$, а не q , как в остальном тексте. Кроме того, принимаем, что $m^*=2m$.

Из формулы (8.3) видно, что это соотношение выполняется, если

$$\begin{aligned} v_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) &= V_{\mathbf{k}} \exp[i(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{r}], \\ u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) &= U_{\mathbf{k}} \exp[i(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \cdot \mathbf{r}]. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Заметим, что при $q \neq 0$ спариваются уже состояния, не обращенные точно во времени. Подставляя (8.11) и (8.12) в уравнения Боголюбова (8.4), получаем

$$\begin{aligned} (\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - E_{\mathbf{k}}) U_{\mathbf{k}} + |\Delta| V_{\mathbf{k}} &= 0, \\ (-\xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - E_{\mathbf{k}}) V_{\mathbf{k}} + |\Delta| U_{\mathbf{k}} &= 0. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Решая уравнения (8.13) относительно энергий возбуждений $E_{\mathbf{k}}$, находим

$$E_{\mathbf{k}} = \frac{\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}}{2} + \left[\left(\frac{\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}}{2} \right)^2 + |\Delta|^2 \right]^{1/2}. \quad (8.14)$$

Так как $\xi_{\mathbf{k}} = (\hbar^2 k^2 / 2m) - \mu$, находим

$$\frac{1}{2} (\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) = \frac{\hbar^2}{m} \mathbf{k} \cdot \mathbf{q} = \frac{\hbar}{m} \mathbf{p}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{q}, \quad (8.15)$$

а поскольку $q \ll k_F$, то $\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} \approx 2\xi_{\mathbf{k}}$. Таким образом, формула (8.14) упрощается:

$$E_{\mathbf{k}} = E_{\mathbf{k}}^0 + \mathbf{p}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v}_s, \quad (8.16)$$

где $\mathbf{v}_s = \hbar \mathbf{q} / m$ — скорость сверхтока и $E_{\mathbf{k}}^0 = (\xi_{\mathbf{k}}^2 + |\Delta|^2)^{1/2}$ — энергия возбуждений в отсутствие тока.

Чтобы обеспечить самосогласование, в ферми-функциях в формуле (8.3) следовало бы использовать эти сдвинутые значения энергии. Однако при низких температурах величина f_n близка к нулю при всех E_n , не равных нулю, поэтому величина $|\Delta|$ не будет сильно уменьшаться с появлением тока, даже когда минимальная энергия возбуждения

$$E_{\min} = \Delta - p_F v_s \quad (8.17)$$

уменьшится. Этот пример дает простое подтверждение того факта, что потенциал спаривания Δ не обязательно равнозначен энергетической щели в спектре возбуждений. Оказывается, возможно довольно просто реализовать *бесщелевую* сверхпроводимость в случае скорости, чуть большей значения Δ/p_F . Тогда для небольшого числа значений \mathbf{k} , направленных противоположно \mathbf{v}_s , могут существовать возбуждения и с нулевой энергией, точно так же как и в нормальном состоянии. Но, так же как и в нормальном состоянии, статистика Ферми ограничивает число частиц в этих состояниях до $f_h \sim 1/2$. Обращаясь к уравнению самосогласования (8.3), видим, что эти несколько состояний почти не дают вклада в поддержание потенциала спаривания; однако остальные участки поверхности Ферми вносят почти такой же вклад, как в отсутствие тока. При детальном исследовании самосогласован-

ного решения было выяснено [3], что существует небольшая область значений v_s выше Δ/p_F , где $E_{\min}=0$, тогда как $\Delta \neq 0$. Таким образом, еще существует когерентное конденсированное состояние с макроскопическими квантовыми свойствами, которое описывается волновой функцией $\phi \propto \Delta \exp 2i\vec{q} \cdot \vec{r}$, и следовательно, еще можно ожидать сохранения сверхпроводящих свойств. Однако распаривание, возникающее при $v_s > \Delta/p_F$, делает максимальное значение сверхтока лишь примерно на 1% превышающим ток при $v_s = \Delta/p_F$. Для больших значений v_s $dJ_s/dv_s < 0$, т. е. режим нестабилен и его экспериментальная реализация затруднительна.

8.1.3. Возбуждения в вихрях

Из теории ГЛ (см. разд. 5.1) известно, что при наличии вихрей в сверхпроводниках II рода величина $\Delta(z, r, \theta)$ имеет вид $|\Delta(r)| \exp i\theta$, где $|\Delta(r)|$ растет от нуля в центре вихря до Δ_∞ , причем большая часть этого роста приходится на расстояние $\sim \xi(T)$. Решение уравнения ГЛ для $\Delta(r)$ является точным вблизи T_c , когда $\xi(T) \gg \xi(0)$, т. е. выполняется требование теории об относительно медленном изменении $\Delta(r)$. Однако при низких температурах, когда Δ изменяется на расстоянии порядка $\xi(0)$, теория ГЛ дает только качественное описание явлений. Какова же природа квазичастичных возбуждений при быстро меняющихся Δ ? На этот вопрос первыми дали ответ Кароли, Де Жен и Матрикон [4]; обзор этого решения дан в разд. 5.2 книги Де Жена. В своей работе авторы используют уравнения Боголюбова, но рассматривают приближение $\kappa \gg 1$, в результате чего магнитное поле в сердцевине вихря пренебрежимо мало. Так как кроме условия $\kappa \gg 1$ авторы сделали предположение, что материал чистый (импульс сохраняется), результаты плохо применимы к реальным материалам. В важной работе Бардина и др. [5] эти вычисления были распространены на все значения κ , для чего находились самосогласованные решения с использованием вариационного выражения для свободной энергии. Качественно их результаты подобны выводам, сделанным в работе [4].

На больших расстояниях от центра вихря ($r \gg \xi$) весьма хорошим приближением оказывается применение выражения (8.16) для сдвига энергетического спектра, причем $v_s = \hbar/2mr = \hbar/m^*r$. Как было показано в разд. 5.5, это выражение приводит к бесщелевой сверхпроводимости в области керна $r \approx \xi$. Для того чтобы учесть влияние быстрого пространственного изменения в этой области, нужно решить уравнения Боголюбова. Результаты работ [4, 5] сводятся к тому, что действительно существует группа низколежащих возбуждений с волновыми функциями $u(r)$ и $v(r)$, локализованными около керна. Самое низкое из них лежит на уровне всего лишь $\sim \Delta_\infty^2/E_F \sim 10^{-4}\Delta_\infty \ll kT_c$, так что щель фактически отсутствует. Поскольку оказалось, что плотность уровней в вихре грубо соответствует плотности уровней в цилиндре из

нормального металла радиусом $\sim \xi$, этот результат можно считать микроскопическим подтверждением качественных представлений о «нормальном» керне вихря.

8.2. Магнитные возмущения и бесщелевая сверхпроводимость

В предыдущей части было показано, что спектр возбуждений сверхпроводника меняется в присутствии тока и в узком диапазоне тока перед разрушением сверхпроводимости спектр становится бесщелевым. Причина такого изменения спектра состоит в том, что добавление импульса общего дрейфа \mathbf{q} спаренных электронов к собственным импульсам \mathbf{k} и $-\mathbf{k}$ сообщает им разные кинетические энергии $\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}$ и $\xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}$, уменьшая таким образом вырождение $\xi_{\mathbf{k}}$ и $\xi_{-\mathbf{k}}$, которое было точным из-за симметрии к обращению времени. Действительно, прослеживая вывод формулы (8.17) из формулы (8.14), видим, что уменьшение щели ($\Delta - E_{\min}$) точно равно половине максимального расщепления вырождения импульсом дрейфа. Как уже говорилось, этот результат применим только к чистым сверхпроводникам, для которых \mathbf{k} — хорошее квантовое число. Однако, как будет видно ниже, изложенная основная идея обладает большой общностью.

Когда рассматривалась (разд. 8.1.1) андерсоновская теория грязных сверхпроводников, т. е. неоднородных сплавов со средней длиной свободного пробега $l < \xi_0$, было отмечено, что спаривание состояний, вырожденных по отношению к обращению времени, приводит к такому же выражению для T_c и плотности состояний БКШ, что и для чистых сверхпроводников. Однако Абрикосов и Горьков [6] (АГ) показали, что *магнитные* примеси (разрушающие симметрию к обращению времени) приводят к сильному подавлению T_c и изменению плотности состояний. Именно в ограниченной области концентраций, предшествующей полному разрушению сверхпроводимости, плотность состояний принимает бесщелевой вид. Последующие работы Маки [7, 8] и Де Жена [9—11] показали, что результаты Абрикосова и Горькова для плотности состояний и подавления T_c можно перенести на случай воздействия многих других распаривающих факторов, которые снимают вырождение по отношению к обращению времени. Такой перенос результатов возможен при наличии быстрого рассеяния, как в грязном сверхпроводнике, которое гарантирует «эргодичность» поведения электронов. Примерами таких возмущений, кроме магнитных примесей, являются внешние магнитные поля, электрический ток и механическое вращение. Было установлено также, что и пространственные градиенты параметра порядка, например около границы с нормальным металлом или на поверхности вихря в сверхпроводниках II рода, разрушают пары и могут привести к бесщелевой сверхпроводимости. Фактически бесщелевая сверхпроводимость оказывается скорее правилом, чем исключением, во всех случаях, когда вызванный возму-

щением переход в нормальное состояние является переходом второго, а не первого рода.

Так как общая теория этого явления наиболее естественно описывается в рамках формализма функций Грина, развитого Горьковым, а этот метод выходит за рамки этой книги, ограничимся кратким обзором нескольких главных результатов и их экспериментальных подтверждений. Для более детального ознакомления отсылаем читателя к обзорам Маки и Де Жена [2, 12].

8.2.1. Подавление T_c магнитными возмущениями

В теории АГ и ее приложениях к другим магнитным возмущениям распаривающее воздействие характеризуется энергетической разностью 2α , которую оно сообщает электронам при обращении времени. Для чистых металлов в присутствии дрейфового импульса q эта энергия распаривания представляет собой просто постоянную энергию расщепления уровней \mathbf{k} и $-\mathbf{k}$. Однако в эргодическом случае акты рассеяния происходят настолько быстро, что энергия распаривания постоянно меняется, имея тенденцию к самоусреднению. Разумным временным масштабом такого усреднения служит время, необходимое для того, чтобы относительная фаза двух электронов, обращенных во времени, приобрела в результате возмущения случайный характер. Наиболее ясно это просматривается в формулировке Де Жена, в которой эффективная энергия распаривания 2α обозначена \hbar/τ_k , где τ_k есть упомянутое время. Очевидно, что разность энергий \hbar/τ_k , действующая в течение времени τ_k , произведет сдвиг фазы на величину порядка единицы.

Эту мысль можно пояснить следующим примером. Рассмотрим влияние магнитного поля на частицу грязного сверхпроводника, столь малую, что в нее не могут войти вихри. Главным членом магнитного возмущения является $(e/mc)\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{A}$, поэтому разница в его энергетическом воздействии на электроны \mathbf{k} и $-\mathbf{k}$ составляет $(2e/mc)\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{A}$. Так как фаза изменяется во времени по закону $\exp(-iEt/\hbar)$, изменение разности фаз равно

$$\frac{d\Phi}{dt} = \left(\frac{2e}{\hbar c} \right) \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{A}. \quad (8.18)$$

Если время рассеяния τ мало по сравнению с $(d\Phi/dt)^{-1}$, то между столкновениями фаза изменится на малую величину $(d\Phi/dt)\tau$, поэтому для изменения фазы примерно на единицу надо проинтегрировать величину $d\Phi/dt$ по многим отрезкам траектории. Так как направление \mathbf{v}_k при каждом рассеянии меняется произвольно, разность фаз в таком случайном процессе растет как квадратный корень числа свободных пробегов. За время t разность фаз окажется порядка $(d\Phi/dt)(t\tau)^{1/2}$. Время τ_k , требуемое для того, чтобы эта разность достигла ~ 1 ,

$$\frac{1}{\tau_k} = \tau \left\langle \left(\frac{d\Phi}{dt} \right)^2 \right\rangle = \frac{1}{3} v_F^2 \tau \left(\frac{2e}{\hbar c} \right)^2 \langle A^2 \rangle = D \left(\frac{2\pi}{\Phi_0} \right)^2 \langle A^2 \rangle, \quad (8.19)$$

где $D = \frac{1}{3} v_F l = \frac{1}{3} v_F^2 \tau$ — коэффициент диффузии электронов (напомним связь между двумя обозначениями силы распаривания: $2\alpha = \hbar/\tau_K$).

Оказывается, что подавление T_c таким распаривающим фактором описывается следующим выражением:

$$\ln \frac{T_c}{T_{c0}} = \psi\left(\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2\pi k T_c}\right), \quad (8.20)$$

где введены обозначения $T_c = T_c(\alpha)$, $T_{c0} = T_c(0)$, а $\psi(Z) = \Gamma'(Z)/\Gamma(Z)$ — логарифмическая производная гамма-функции. Разложение ψ в ряд вблизи значения $1/2$ дает результат

$$k(T_{c0} - T_c) = \pi\alpha/4 = (\pi/8)\hbar/\tau_K, \quad (8.20a)$$

т. е. для слабого распаривания подавление T_c пропорционально α . Сверхпроводимость полностью разрушается ($T_c = 0$) при

$$2\alpha = \hbar/\tau_K = 1,76kT_c = \Delta_{БКШ}(0) = \Delta_{00}. \quad (8.20b)$$

Полная зависимость T_c от силы распаривания или, наоборот, температурная зависимость критической силы распаривания приведена на рис. 8.1. Заштрихованный участок обозначает область значений параметров, для которой предсказывается существование бесщелевой сверхпроводимости.

Как подчеркивали Маки и Де Жен, если все эргодические возмущения по своему влиянию на T_c эквивалентны магнитным примесям, то функция $a_c(T)$ должна быть *универсальной*, т. е. применимой к каждому из этих возмущений. Если для нахождения критического поля рассмотреть линеаризованное уравнение ГЛ, то окажется, что 2α — это наименьшее собственное значение этого уравнения, записанного в виде

$$\hbar D \left(\frac{\nabla}{i} - \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \right)^2 \Delta = 2\alpha \Delta. \quad (8.21)$$

Заметим, что результат (8.19), полученный выше, является частным случаем этой формулы, так как для малых частиц величина Δ постоянна. Используя решения, найденные в гл. 4, можно записать следующие выражения для α :

в массивном сверхпроводнике II рода в вихревом состоянии
 $\alpha = DeH/c, \quad (8.22a)$

в поверхностном слое

$$\alpha = 0,59DeH/c, \quad (8.22b)$$

в тонкой пленке в параллельном поле

$$\alpha = De^2 H^2 d^2 / 6\hbar c^2, \quad (8.22b)$$

в тонкой пленке в перпендикулярном поле

$$\alpha = DeH/c, \quad (8.22c)$$

в малой частице

$$\alpha = 2De^2 \langle A^2 \rangle / \hbar c^2. \quad (8.22d)$$

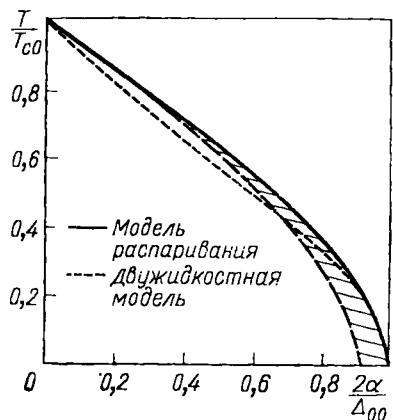


Рис. 8.1. Универсальное функциональное соотношение между параметром распаривания α и приведенной температурой T_c показано сплошной линией. Штрихованной обозначена бесщелевая область. Значения 2α для разных магнитных возмущений даются выражениями (8.22а) — (8.22ж). Пунктирная кривая обозначает график $2\alpha/\Delta_{00} = (1-t^2)/(1+t^2)$, где $t=T/T_{c0}$. Это соотношение показывает результат вычислений критического поля ГЛ, построенных на двухжидкостной температурной зависимости $\lambda(t) \propto (1-t^4)^{-1/2}$, $H_c(t) \sim (1-t^2)$, и следовательно $\alpha_c \sim \xi^{-2}(t) \sim \lambda^2 H_c^2 \sim (1-t^2)/(1+t^2)$ [см. формулу (8.23)]

Интересно отметить, что угловую зависимость (4.70) критического поля тонкой пленки можно получить, если сложить выражения (8.22в) и (8.22г), использовать для каждого случая соответствующую компоненту полного поля и положить сумму равной $\alpha_c(T)$. Отметим также, что критические поля, найденные из формулы (4.56), согласуются с критическими полями, найденными из уравнения (8.20), если определить длину когерентности, зависящую от температуры, следующим образом:

$$\xi^2(T) = D\hbar/2\alpha_c(T) = D\tau_{Kc}(T). \quad (8.23)$$

Таким образом, линеаризованное уравнение ГЛ можно использовать в любой области вплоть до $T=0$ (для грязных сверхпроводников, для которых верна настоящая теория), хотя обычно теория ГЛ справедлива только вблизи T_c . По этой причине результаты теории ГЛ оказываются применимы в более широком температурном интервале, чем можно было бы ожидать.

Все упомянутые выше распаривающие силы действуют на орбитальное движение электронов. Исходные вычисления АГ относились к магнитным примесям, связанным со спином электрона обменным взаимодействием вида $J(r)\mathbf{S} \cdot \mathbf{s}$, где \mathbf{S} — спин примеси, а \mathbf{s} — спин электрона проводимости. С точностью до числового коэффициента энергия распаривания определяется выражением

$$2\alpha \approx xJ^2/E_F, \quad (8.22e)$$

где x — относительная плотность примеси, а величина J усреднена по атомному объему.

Действие внешнего магнитного поля на электронные спины также должно приводить к эффектам распаривания. Этому эффекту соответствует значение $d\phi/dt$, равное $2\mu_B H/\hbar = eH/mc$, а время распаривания есть τ_{s0} — время, необходимое для того, чтобы из-за распаривающего возмущения произошел переворот спина. Если эти величины подставить в формулу (8.19), получим

$$2\alpha \approx \tau_{s0} e^2 \hbar H^2 / m^2 c^2. \quad (8.22ж)$$

Этот результат применим только для достаточно сильного спин-орбитального рассеяния: $\tau_{so}eH/mc \ll 1$. В другом пределе спин-орбитальным рассеянием можно пренебречь. Тогда случайное усреднение отсутствует, энергия распаривания равна просто $2a = 2\mu_B H$, и возбуждения с нулевой энергией могут существовать при $\mu_B H = \Delta$. Однако, как было отмечено в работе [13, 14], еще до того, как достигнуто это поле, может иметь место переход первого рода при $\mu_B H = \Delta_0/\sqrt{2}$ ($T = 0$). Это ограничивает критическое поле материалов с пренебрежимо малым спин-орбитальным взаимодействием величиной $H_p = \Delta_0/\sqrt{2}\mu_B$. При $\Delta_0 = 1,76 kT_c$ это приводит к значению

$$H_p/T_c = 18400 \text{ Гс/К.} \quad (8.24)$$

У многих практически применяемых сверхпроводников II рода $H_{c2} \geq H_p$, что подтверждает важность усредняющего действия спин-орбитального рассеяния в уменьшении распаривающей силы зеемановского расщепления спиновых уровней.

Когда одновременно действуют несколько механизмов распаривания, их действие обычно описывается простой суммой вкладов каждого из них в a .

8.2.2. Плотность состояний

При интерпретации ранних работ по исследованию различных свойств (теплопроводности [15], поглощения СВЧ-волн [16], электронного туннелирования [17]) сверхпроводящих пленок в магнитных полях предполагалось, что плотность состояний адекватно описывается спектром БКШ со целью $\Delta(H)$, зависящей от поля. Однако величины $\Delta(H)$, рассчитанные в таком предположении для разных типов измерений, не согласовывались друг с другом, особенно при низких температурах. Это несоответствие можно было бы объяснить, если бы щель размывалась низколежащими возбуждениями, появляющимися в ней еще до того как полностью исчезнет пик в спектре на краю энергетической щели.

Как отмечалось выше, как раз такое поведение действительно было предсказано для некоторого диапазона сил магнитных возмущений. Предсказанная плотность состояний, вычисленная в работе [17], показана на рис. 8.2. На этой диаграмме энергии нормированы на Δ , так называемый параметр щели, который является мерой энергии спаривания при температуре T при наличии распаривания с интенсивностью a . Этот параметр не эквивалентен минимальной энергии возбуждения (щели в энергетическом спектре) Ω_G . Различие между ними иллюстрирует рис. 8.3, на котором сравниваются зависимости Ω_G и Δ от a (при $T=0$). На этом рисунке также приведена кривая T_c/T_{c0} , та же самая, что и на рис. 8.1. Отметим сильное отклонение от теории БКШ, в которой $\Omega_G(0) = \Delta(0) = 1,76 kT_c$ и все три величины при использованной нормировке вели бы себя одинаково. Наконец, на

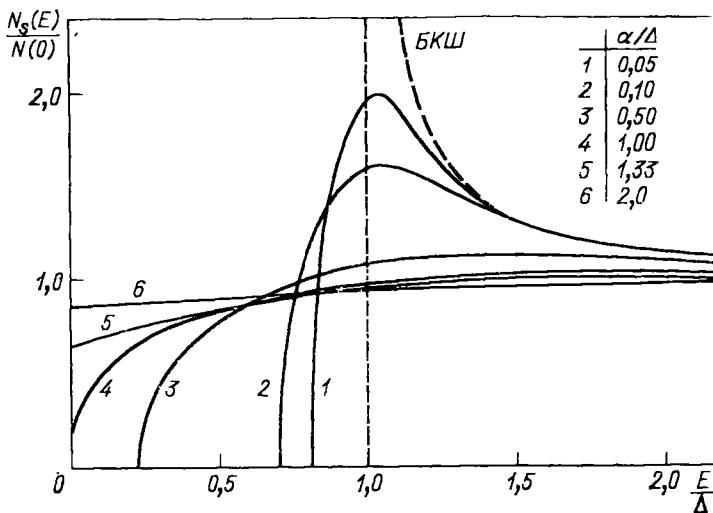


Рис. 8.2. Плотность состояний как функция приведенной энергии, вычисленная в работе [15] для нескольких значений нормированной силы распаривания α/Δ . На этой диаграмме Δ должно пониматься как $\Delta(T, \alpha)$

рис. 8.4 показана температурная зависимость Δ/Δ_00 для разных значений $2\alpha/\Delta_00$. На этом рисунке заштрихована бесщелевая область, в которой $\alpha \geq \Delta$.

Детальные вычисления, приводящие к изложенным выше результатам, весьма трудоемки, поэтому весьма интересен подход Де Жена [12], относящийся к бесщелевому режиму с $\Omega_G=0$ и $\Delta/\alpha \ll 1$. Он показал, что для этого режима потенциал спаривания Δ можно учесть во втором порядке теории возмущений, чего нельзя сделать в отсутствие сильного распаривания. При этом энергии возбуждений меняются от $|\xi|$ при $\Delta=0$ до

$$E = |\xi| \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{\xi^2 + \alpha^2} \right) \text{ при } \Delta \ll \alpha. \quad (8.25)$$

Обратите внимание, что при $|\xi| \gg \alpha$ имеет место результат БКШ для обычного сверхпроводника $E \approx |\xi| + \Delta^2/2|\xi| \approx (\Delta^2 + \xi^2)^{1/2}$. Однако при $|\xi| \ll \alpha$ величина E приближается к значению $|\xi|(1 + \Delta^2/2\alpha^2)$, пропорциональному $|\xi|$, так что щель в спектре отсутствует. Из формулы (8.25) можно легко вычислить плотность состояний и найти, что с точностью до членов порядка

$$\frac{N_s(E)}{N(0)} = \frac{d\xi}{dE} = 1 + \frac{\Delta^2}{2} \frac{E^2 - \alpha^2}{(E^2 + \alpha^2)^2}, \quad \Delta \ll \alpha. \quad (8.26)$$

Заметим, что для $E < \alpha$ $N_s(E) < N(0)$, но величина N_s остается конечной, что соответствует отсутствию щели, а при $E > \alpha$ $N_s(E) > N(0)$. Такая зависимость $N_s(E)$ напоминает пик плотности состояний над щелью в сверхпроводниках БКШ, но с одним важ-

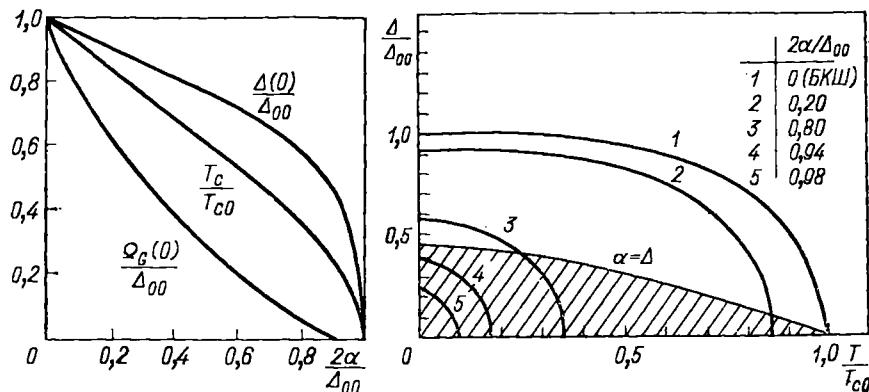


Рис. 8.3. Уменьшение щели в спектре возбуждений Ω_G и параметра щели Δ при $T=0$, а также температуры перехода T_c с ростом силы распаривания α (по данным работы [15])

Рис. 8.4. Температурная зависимость потенциала спаривания (параметра щели) Δ для разных сил распаривания α [15]. В заштрихованной области, определенной соотношением $\alpha > \Delta$, щель Ω_G в спектре возбуждений равна нулю

ным отличием: энергетический масштаб определяется величиной α , а не Δ . Более того, эта теория применима только при малых Δ , т. е. вблизи перехода в нормальное состояние; таким образом, величина α должна быть близка к $\alpha_c(T)$. Это приводит к важному выводу о том, что энергетический масштаб отклонения $N_s(E)$ от $N(0)$ есть функция только T , а не Δ . Другими словами, величина Δ определяет только амплитуду отклонений $N_s(E)$ от $N(0)$, но не распределение состояний по энергиям.

Наиболее точное сравнение теории с экспериментом дают туннельные измерения плотности состояний. Впервые они были проведены при достаточно низких температурах Вулфом и Дейфом [19] на свинцовых и индиевых пленках, содержащих магнитные примеси. Авторы обнаружили хорошее согласие с теорией для редкоземельной примеси (Gd), но для примесей Fe и Mn щель заполнялась гораздо быстрее, чем предсказывалось. Эти различия были отнесены за счет того, что 4f-электроны Gd весьма близки к локализованным магнитным моментам, предполагаемым теорией АГ, тогда как 3d-электроны Fe и Mn сильно взаимодействуют с электронами проводимости, и следовательно, менее локализованы.

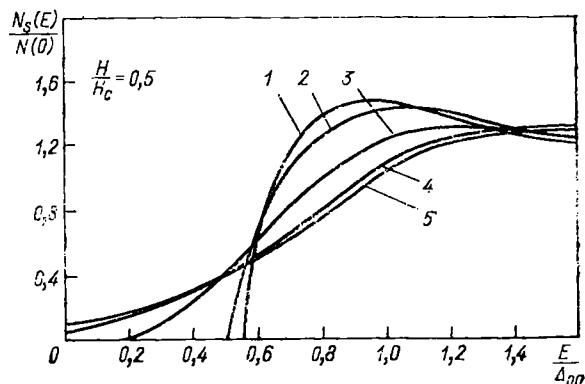
Наиболее чистую проверку теории обеспечивают туннельные эксперименты с тонкими пленками в параллельном магнитном поле, так как они исключают вопрос о степени локализации магнитного момента. Более того, поле можно изменять как угодно, тогда как достигнуть однородного распределения примесей чрезвычайно трудно, а каждая концентрация требует изготовления нового образца. Тщательные туннельные эксперименты в магнит-

ном поле были выполнены Левиным [20], а также Миллстейном и Тинкхамом [21]. В последних экспериментах, например, использовались пленки из олова, а также сплавов индия и олова толщиной $d \sim 1000 \text{ \AA}$ и со средней длиной свободного пробега $l \approx 300 \div 1200 \text{ \AA}$. Таким образом, величина l была меньше, но сравнима с длиной когерентности $\xi = 2300 \text{ \AA}$. Средняя пленка сандвича была из Al с примесью Mp для поддержания нормального состояния. Для охлаждения применялся ^3He , и измерения плотности состояний проводили при температуре $0,36 \text{ K}$, т. е. примерно $T_c/10$. Даже при такой низкой температуре тепловое сглаживание, вызванное размытием распределения Ферми, приводит к значительному отличию дифференциальной проводимости (dI/dV) от истинной плотности состояний*. Таким образом, для получения действительно точных данных надо прежде всего учесть в теории это тепловое сглаживание, а уже потом сравнивать экспериментальную кривую с теоретической. После того как это было сделано, было получено полуоколичественное согласие экспериментальной кривой $\sigma(V)$ с теорией Абрикосова—Горькова, тогда как любые попытки подогнать данные измерений под плотность состояний БКШ оказались совершенно безрезультатными.

Однако даже при учете теплового размытия кривой АГ оставалось некоторое расхождение экспериментальных данных с теорией, причем это расхождение явно выходило за рамки экспериментальной погрешности. Оказалось, что пленки приходят в бесщелевое состояние в полях, значительно меньших $(0,91)^{1/2}H_{c\parallel}$, предсказанных теорией. Возможное объяснение этого несоответствия было предложено в работе Ларкина [22], который рассмотрел очень частный случай маленькой сверхпроводящей сферы в магнитном поле, причем он предположил, что имеется только зеркальное поверхностное рассеяние, а объемное рассеяние отсутствует, и нашел, что в этом случае спектр становится бесщелевым в поле $\sim 0,4H_c$, что значительно ниже экспериментальных результатов. Авторы работы [23] обобщили подход Ларкина, введя объемное рассеяние. Варьируя параметр l/ξ_0 от 0 до ∞ , они смогли вычислить кривые плотностей состояний, показанные на рис. 8.5, для случая, когда магнитное поле равно половине критического. Предельный случай $l=0$ соответствует кривой, рассчитанной в работе [18] (см. рис. 8.2), тогда как предел $l=\infty$ соответствует результату Ларкина. Качественно различие между этими кривыми можно объяснить так: при отсутствии рассеяния некоторые электроны испытывают очень сильные возмущения магнитным полем и переходят в бесщелевое состояние уже в слабых полях, тогда как при быстром рассеянии электроны ощущают на себе усредняющую силу возмущения, которая оказывает гораздо меньшее воздействие. Возвращаясь к сравнению с экспериментом,

* Из сравнения формул (2.79) и (2.80) видно, что нормированная дифференциальная проводимость $\sigma(V) = G_{ns}(V)/G_{nn}$ дает среднее значение $N_s(E)/N(0)$ в энергетическом интервале в несколько kT около точки eV .

Рис. 8.5. Плотность состояний как функция энергии E , вычисленная в работе [23] для разной длины свободного пробега, при магнитном поле, равном половине критического поля для малой сферы [1 : $l = 0$; 2 : $l = (\pi/10) \xi_0$; 3 : $l = \pi \xi_0$; 4 : $l = 10 \pi \xi_0$; 5 : $l = \infty$]. Кривая 1 соответствует вычислениям, сделанным в работе [15] (см. рис. 8.2), основанным на теории АГ [6]. Кривая 5 соответствует пределу, рассмотренному Ларкиным [22]



отметим, что наилучшее согласие с измерениями было достигнуто, когда значение l/ξ_0 для различных пленок выбиралось в пределах от 0,3 до 1, и с точностью до коэффициента порядка 2, совпадающим со значениями этого отношения, измеренными независимыми методами. Учитывая неточность этих измерений и идеализированность теоретической модели, такую степень согласия теории с экспериментом можно считать вполне удовлетворительной.

В заключение интересно заметить, что температурная зависимость H_c [или, что равнозначно, зависимость $T_c(H)$], найденная Миллстейном и Тинкхамом [21], находится в количественном согласии с результатами АГ. Можно задаться вопросом, почему на этой характеристике не оказывается рассмотренное выше влияние длины свободного пробега. Ответ весьма прост: величина $T_c(H)$ есть интегральная характеристика и менее чувствительна к деталям модели, чем «более микроскопический» параметр $N_s(E)$.

8.3. Нестационарная теория Гинзбурга—Ландау

Так как теория Гинзбурга—Ландау исключительно хорошо описывает свойства сверхпроводников, находящихся в состоянии термодинамического равновесия вблизи T_c , было бы естественно искать ее нестационарное обобщение в виде дифференциального уравнения для пространственной и временной зависимостей параметра порядка Δ . Многие исследователи [24—29] пытались разрешить эту проблему; недавно опубликован критический обзор этих работ [30]. Из него следует, что построить нелинейное нестационарное уравнение Гинзбурга—Ландау (TDGL), обладающее какой-либо общностью, очень трудно. Горьков и Элиашберг [31] отметили, что эта трудность происходит как раз из-за существования на краю щели особенности в плотности состояний. Указанная особенность приводит во временном представлении к появ-

лению слабо затухающих осциллирующих откликов. В разд. 8.2 было показано, что магнитные примеси и другие распаривающие факторы сильно ослабляют особенность плотности состояний БКШ, и при достаточной силе распаривания спектр становится бесщелевым. В этом режиме энергию можно разложить в ряд по Δ/α и ω/α , где $\alpha = \hbar/2\tau_k$ — обычный параметр распаривания, описанный выше. Используя этот подход, Горьков и Элиашберг получили единственный строгий вариант нелинейного нестационарного уравнения ГЛ, справедливый при разумных значениях полей и частот; однако применимость этого уравнения ограничивается случаем бесщелевых сверхпроводников. Шмид [24] еще раньше ввел аналогичные уравнения, не налагая этого ограничения, но, очевидно, вне бесщелевого случая их нельзя получить строго.

Результат Горькова и Элиашберга удобно записать в нормализованном виде, предложенном Хью и Томпсоном [32], а именно в виде системы уравнений:

$$D^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial t} + i \frac{2e\psi}{\hbar} \right) \Delta + \xi^{-2} (|\Delta|^2 - 1) \Delta + \left(\frac{\nabla}{i} - \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \right)^2 \Delta = 0, \quad (8.27)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \left(-\nabla \psi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) + \operatorname{Re} \left[\Delta^* \left(\frac{\nabla}{i} - \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \right) \Delta \right] \frac{1}{8\pi e \lambda^2}, \quad (8.28)$$

$$\rho = (\psi - \phi)/4\pi\lambda_{TF}^2, \quad (8.29)$$

которую нужно дополнить еще уравнениями Максвелла, связывающими скалярный и векторный потенциалы ϕ и \mathbf{A} с плотностями заряда и тока ρ и \mathbf{J} . Здесь D — коэффициент диффузии в нормальном состоянии; ψ — электрохимический потенциал, деленный на заряд электрона; Δ — параметр щели, деленный на свое равновесное значение в отсутствие полей $\Delta_0 = \pi k [2(T_c^2 - T^2)]^{1/2}$; T — температура, а T_c — критическая температура (в присутствии магнитных примесей); таким образом, в отсутствие полей $\Delta = 1$. Зависящая от температуры длина когерентности ξ в данном случае равна $\hbar(6D/\tau_s)^{1/2}$, τ_s — время спинового рассеяния, зависящая от температуры глубина проникновения поля λ равна $\hbar c (8\pi \rho \tau_s)^{-1/2}/\Delta_0$, λ_{TF} — радиус экранировки Томаса—Ферми. Надо отметить, что для вывода этих уравнений необходимо пренебречь нагревом, к которому приводят рассеяние энергии меняющихся во времени полей и токов. Как отметили Горьков и Элиашберг, это ограничивает применимость теории узкой областью вблизи T_c , если только плотность парамагнитных примесей не очень высока.

Так как работа с этой системой нелинейных уравнений в частных производных очень трудоемка, ограничимся простым упоминанием некоторых достигнутых результатов. В своей работе [29] Горьков и Элиашберг рассмотрели отклик парамагнитных сплавов на сильно меняющееся магнитное поле. Они нашли приближенное решение для случая скин-эффекта в массивном образце, определив, например, значение третьей гармоники излучения,

вызванного нелинейными поверхностными токами. Затем они исследовали случай тонкопленочного образца толщиной d , помещенного в осциллирующем поле, которое имеет одинаковое значение на обеих сторонах пленки и параллельно ей. В этом простом случае удалось найти точное решение задачи, которое при частотах, намного больших и намного меньших характерной релаксационной скорости τ^{-1} , приводит к физически приемлемым результатам. Действительно, было получено, что при $\omega t \ll 1$ параметр порядка адиабатически следует за колебаниями поля, т. е. $\Delta(t)/\Delta_0 = -[1 - h^2(t)]^{1/2}$, где $h = H/H_{c\parallel}$. Этого и следовало ожидать, исходя из формулы (4.52), так как Δ пропорционально ϕ теории ГЛ. В высокочастотном пределе, как оказывается, нужно заменить $h^2(t)$ на среднее значение $\bar{h}^2(t)$. Было найдено, что характерная частота релаксации, разделяющая эти два режима, равна $1/\tau = e^2 d^3 H_{c\parallel}^2 / 3c^2 \hbar$. Сравнивая это выражение с формулой (8.28в), видим, что τ как раз равно τ_K . Таким образом, используя формулу (8.22а), вблизи T_c получаем

$$\tau = \pi \hbar / 8k(T_c - T). \quad (8.30)$$

Это выражение совпадает с выражением (7.47) для времени релаксации, использованным при обсуждении флуктуационной проводимости.

Следуя за пионерскими работами Шмита и Кароли и Маки, Томпсон с сотрудниками использовали эти уравнения для анализа динамической структуры движения вихрей в сверхпроводниках II рода, находящихся в смешанном или в динамическом вихревом состоянии; эта структура качественно обсуждалась в разд. 5.5. При этом решение Шмита—Кароли—Маки получается следующим образом: предполагается существование однородного электрического поля, связанного с однородно перемещающейся абрикосовской решеткой вихрей; затем решается уравнение (8.27) для Δ , формула (8.28) используется для вычисления $J(r)$, а получающееся отношение средней плотности тока $\langle J \rangle$ к исходному однородному полю E дает эффективную вихревую проводимость. Томпсон и Хью показали, что для этого решения $\nabla \cdot J \neq 0$, и поэтому должен возникать электрический заряд, который создает неоднородное поле E до тех пор, пока не установится новое стационарное состояние. Существенной чертой такого состояния является противоток J_b , который течет по керну вихря, а возвращается по его периферии. Этот ток протекает без потерь, хотя течет по самому керну. Данный результат показывает, что введенное в теории Бардина и Стефена представление о «нормальном» керне является приближенным. Параметр порядка на самом деле равен нулю только вдоль осевой линии вихря, поэтому ни отсутствие шели, ни наличие низколежащих возбуждений не препятствуют протеканию в области керна сверхтока. Один из количественных результатов состоит в том, что нормированное сопротивление $R = \rho_j / \rho_n$, связанное с течением вихрей, для сверх-

проводников с большим содержанием парамагнитных примесей должно при изменении B от 0 до H_{c2} меняться по кривой с положительной кривизной, а не по линейному закону (5.59). Вычисленная в начальной точке производная $dR/d(B/H_{c2})$ равна 0,33*, а при $B=H_{c2}$ эта производная равна 5,2. Экспериментальные данные в общих чертах подтверждают вид этой кривой, хотя при проведении опытов имеются серьезные затруднения в выделении идеального, свободного от пиннинга поведения.

Возможно, наилучшей экспериментальной проверкой для уравнения TDGL является измерение флуктуационной проводимости выше T_c , рассмотренной в разд. 7.6. Хотя выше T_c сверхпроводник всегда является бесщелевым, но и в этом случае, как говорилось выше, остается несоответствие с данной моделью, если только так называемые члены Маки не будут подавлены каким-либо распаривающим воздействием.

8.3.1. Электрон-фононная релаксация

Весьма часто оказывается необходимым исследовать релаксационные процессы в сверхпроводниках, не содержащих магнитных примесей. В этих случаях теория Горькова—Элиашberга неприменима. При отсутствии магнитного распаривания достижение равновесия между квазичастицами и конденсатом (процессы рождения и рекомбинации), а также равновесия внутри квазичастичной подсистемы возможно лишь посредством неупругого электрон-фононного взаимодействия. Вблизи T_c оба эти процесса характеризуются временем τ_2 неупругого рассеяния нормальных электронов на фонах, хотя должны возникать некоторые различия, зависящие от того, каким именно образом возникла релаксирующая неравновесность. Самый прямой способ для оценки этого времени дает электронная низкотемпературная теплопроводность, конечность которой связана с фононным рассеянием (электропроводность не дает возможности оценить время рассеяния, так как рассеяние под малыми углами на фонах с низкой энергией не вносит существенного вклада в электрическое сопротивление, хотя и значительно влияет на распределение тепловой энергии). Просто, хотя и менее достоверно, можно оценить время рассеяния из проводимости при комнатной температуре, при которой эффективность фонаров и для электрического и для теплового сопротивления одинакова. Если предположить, что спектр фонов описывается простым дебаевским законом, а электроны образуют ферми-газ, то из высокотемпературного времени рассеяния τ_{300} можно найти величину

$$\tau_2(T_c) = C\tau_{300} (300\Theta_D^2/T_c^3), \quad (8.31)$$

* Более полные результаты независимо получены в работе [45*]. Полная зависимость от поля в приближении теории ГЛ найдена в работе [46*]. Обсуждение микроскопических теорий вязкого течения вихрей можно найти в обзоре [47*]. — Прим. ред. пер.

где коэффициент C равен 1/93 [33] для обычной тепловой квазичастицы и 1/8,4 [34] для квазичастицы, расположенной на поверхности Ферми, где характерные изменения энергии при рассеянии гораздо меньше. В любом случае $\tau_2(T_c)$, грубо говоря, изменяется по закону $(\Theta_D/T_c)^3$. Для олова эта величина имеет порядок 10^{-10} — 10^{-9} с, для свинца она много меньше, а для алюминия — много больше.

Так как более конкретные результаты зависят от конкретного вида релаксационного процесса и этот вопрос еще находится в стадии разработки, ограничимся качественным обсуждением уже полученных результатов. Один из важных первых шагов был сделан Шмидом [35], который рассмотрел случай малого отклонения от пространственно-равновесной плотности пар. Для простейшего случая, когда и отклонение и фон пространственно однородны, он нашел, что время релаксации при $\Delta > 1/\tau_2$ равно

$$\tau \approx \tau_2(T_c)(1-t)^{-1/2} t = T/T_c. \quad (8.32)$$

При обратном соотношении Δ и τ_2 размытие энергетических уровней в результате столкновений превышает ширину щели, спектр становится практически бесщелевым и происходит возврат к времени (8.30), характеризующему бесщелевой сверхпроводник. Последний случай обычно имеет место лишь при $(1-t) \leq 10^{-3}$, следовательно, в обычном случае температурная зависимость дается формулой (8.32). Шмид также показал, что если неравновесная плотность меняется в пространстве, то скорость релаксации возрастает, стремясь к максимальному значению $\sim 1/\tau_2$. Предсказание (8.32) недавно было подтверждено Петерсоном и Мейсснером [36], которые измерили частотную зависимость нелинейности кинетической индуктивности сверхпроводящего оловянного микромостика в диапазоне от 30 до 1000 МГц.

Кларк [37] получил весьма похожую зависимость от температуры для времени релаксации τ разбаланса числа возбуждений в дырочной ($k < k_F$) и электронной ($k > k_F$) зонах спектра возбуждений. Этот разбаланс (обозначаемый обычно Q) создается в результате преимущественного туннельного инжектирования квазичастиц на одну из ветвей. Существование стационарного разбаланса было доказано с помощью измерений, с применением сверхпроводящего гальванометра, разности химического потенциала сверхпроводящих пар и потенциала квазичастиц. Результаты подробной теории [38, 39] релаксационных процессов находятся в удовлетворительном согласии с экспериментами. Для такого процесса температурную зависимость τ_Q можно просто пояснить следующим образом. Рассеяние с электронной ветви на дырочную запрещено правилами отбора, которые не затрагивают квазичастиц смешанного типа с энергиями, лежащими между Δ и $\sim 2\Delta$; доля рассеяния, обеспечиваемая такими состояниями, равна по порядку $\Delta/kT_c \sim (1-t)^{1/2}$, что и приводит к температурной зависимости $\tau_Q \approx \tau_2(1-t)^{-1/2}$.

Недавно Скочпол, Бизли и Тинкхам показали [40], что возникновение удивительно регулярных ступенек на вольт-амперных характеристиках сверхпроводящих микромостиков можно объяснить образованием локализованных центров скачков фазы. В каждом из таких центров параметр порядка совершают релаксационные осцилляции [41, 42] на джозефсоновской частоте, которая соответствует напряжению на данном центре. Это напряжение, в свою очередь, определяется квазичастичным током, который должен течь для того, чтобы мостик мог переносить суммарный ток, больший критического тока мостика I_c . В соответствии с этим анализом с каждым центром связан эффективно нормальный участок длиной 2Λ , где $\Lambda = \left(\frac{1}{3}v_F t_2 l\right)^{1/3}$ — введенная еще в работе [43] длина диффузии квазичастиц, до того как они подвергнутся неупругому рассеянию. Этому случаю, как показывает эксперимент, соответствует не зависящее от температуры время $t_2(T_c)$, а не функция типа (8.32). Возможно, это различие возникает из-за того, что разбаланс квазичастиц имеет место преимущественно в области энергий вблизи Δ , где процессы перемещивания ветвей ничем не сдерживаются*.

Попытка сформулировать более общее кинетическое уравнение для неравновесных сверхпроводников была сделана Галайко [44]. Он обнаружил, что релаксация системы к равновесному состоянию происходит в два этапа. Вначале, когда происходит быстрое квантовое разупорядочение системы, образуется самосогласованное поле конденсата; в результате становится справедливым квазичастичное описание возбуждений. Затем распределение квазичастиц и параметр порядка медленно изменяются из-за соударений между возбуждениями. Он считает также, что временным масштабом последнего процесса является время неупругого рассеяния t_2 в нормальном состоянии. Однако не ясно, вытекают ли из подхода Галайко какие-либо феноменологические формулы большой общности. Таким образом, вопрос о нестационарном обобщении теории ГЛ остается открытым и до сих пор представляет большой интерес**.

* Более поздние тщательные эксперименты показали (см., например [44*]), что Λ все же имеет следующую из теории слабую температурную зависимость $\Lambda \propto (T_c - T)^{1/4}$. — Прим. ред. пер.

** В настоящее время общепринято, что для обычных сверхпроводников с конечной щелью в спектре возбуждений простое временное обобщение теории ГЛ построить нельзя. Обсуждение вопроса о нестационарных нелинейных явлениях в сверхпроводниках см., например, в работах [48*—52*]. — Прим. ред. пер.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Единицы и обозначения

При написании этой книги использована гауссова система единиц СГС (исключение составляют несколько формул, которые для удобства приложений записаны в практических единицах, причем каждый такой случай специально оговорен в тексте). Этот выбор единиц удобен тем, что система СГС используется почти во всей литературе, на которой основывается данная книга. Более того, в ней большое удобство представляет равенство $B = H$ в вакууме, а также запись электрического поля, связанного с изменением плотности потока, в естественном виде $E = (v/c) \times B$. Читателям, чувствующим себя неуверенно в системе СГС, можно порекомендовать для перехода к единицам СИ или практической системы единиц приложение к книге Jackson «Electromagnetic Theory», Wiley, New York, 1962 или приложение к книге W. K. H. Panofsky and M. Phillips, «Classical Electricity and Magnetism», Addison-Wesley, Reading, Mass. 1962*.

Так как в данной области науки магнитные поля оказываются поистине вездесущими, для облегчения обсуждения были введены специальные условные обозначения. В основном использованы обозначения Де Жена (и многих других авторов), где $h(r)$ — обозначение локальной магнитной индукции или плотности потока, которая может изменяться на расстояниях порядка λ . Символ B сохранен для обозначения значения h , усредненного по этой микроскопической области, но способного изменяться в макроскопическом объеме образца.

Разумеется, в нормальном металле и в вакууме микроскопических изменений h нет (диамагнетизмом Ландау и парамагнетизмом Паули пренебрегаем), так что $B = h$. В этом случае также $B = H^{**}$, поэтому в данном случае все три символа обозначают одно и то же и взаимозаменяются.

Для массивного сверхпроводника в мейсснеровском состоянии h уменьшается до нуля на глубине проникновения λ под действием сверхтока в скин-слое, которое описывается уравнением Максвелла

$$\operatorname{rot} h = 4\pi J_{\text{полз}}/c. \quad (\text{П.1})$$

Следовательно, $B = 0$ внутри образца, с другой стороны, H подчиняется уравнению Максвелла

$$\operatorname{rot} H = 4\pi J_{\text{внешн}}/c, \quad (\text{П.2})$$

где $J_{\text{внешн}}$ не включает токи, возникающие в результате отклика среды на изменение поля, например токи, описываемые уравнениями Лондонов. Следовательно, $H = 0$ и тангенциальная компонента поля на всей глубине скин-слоя постоянна и сохраняет значение $H_t (=B_t = h_t)$, которое она имеет на внешней поверхности образца. Если образец эллипсоидальный, то H во всем объеме однородно и равно экваториальному значению H_t . Конечно, истинное значение H_t в общем случае превышает внешнее однородное поле H_a в $(1-\eta)^{-1}$ раза, где η — диамагнитный фактор образца (см. формулу (3.47) и ее обсуждение).

В сверхпроводниках I рода, находящихся в промежуточном состоянии, достигаемом при $H_t = H_c$, значение h непрерывно меняется от H_c в нормаль-

* См. также, например, Бурден Г. Д., Калашников Н. В., Стоцкий Л. Р. Международная система единиц. М., Высшая школа, 1964. — Прим. ред. пер.

** Это справедливо лишь для образцов цилиндрической формы в продольном магнитном поле. — Прим. ред. пер.

ных областях до нуля в сверхпроводящих. Величина B , которая является усреднением h по этой ламинарной структуре, постоянна внутри эллипсоидального образца. Для того чтобы обеспечить существование нормального и сверхпроводящего состояний, необходимо выполнение условия $|H| = H_c$.

В случае смешанного состояния сверхпроводников II рода, находящихся в магнитном поле, величина h меняется на микроскопических расстояниях порядка размера вихря, тогда как величина B является усреднением h по этой структуре. В идеальном равновесном случае значение $|H|$ снова равно значению H_t на экваториальной поверхности. В тех случаях, когда имеется транспортный ток или нарушение равновесности за счет линнинга, H является меняющейся величиной, так как $\text{rot}H$ теперь не равен нулю. Эта ситуация более подробно освещается в тексте в связи с формулой (5.48).

Для соблюдения симметрии в обозначениях введем микроскопическое электрическое поле $e(r)$, так чтобы величина E являлась его макроскопическим усреднением. Так как $\text{rot}e = -\mathbf{h}/c$, e однородно в статическом случае и равно нулю в равновесии. Таким образом, различие между e и E проявляется реже, чем между h и B , которые могут возникать и из-за равновесного сверхтока, поэтому в большинстве случаев пользовались обозначением E вместо e , чтобы не путать с зарядом электрона.

Обозначение e вводится только для описания распределения электрического поля вблизи движущегося вихря. В этом случае макроскопическая усредненная величина E сильно отличается от e и дает физически важную величину — резистивное напряжение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

К гл. 1

1. Kamerling Onnes H. — Leiden. Comm., 1911, p. 120b, 122b.
2. Meissner W., Ochsenfeld R. — Naturwissenschaften, 1933, Bd 21, S. 787.
3. London F., H. — Proc. Roy. Soc. (Lond.), 1935, v. A149, p. 71.
4. London F. — Superfluids. v. 1. John Wiley, N. Y., 1950.
5. Pippard A. B. — Proc. Roy. Soc. (Lond.), 1953, v. A216, p. 547.
6. Faber T. E., Pippard A. B. — Proc. Roy. Soc., 1955, v. A213, p. 336.
7. Bardeen J., Cooper L. N., Schrieffer J. R. — Phys. Rev., 1957, v. 108, p. 1175.
8. Daunt J. G., Mendelsohn K. — Proc. Roy. Soc. (Lond.), 1946, v. A185, p. 225.
9. Corak W. S., Goodman B. B., Satterthwaite C. B., Wexler A. — Phys. Rev., 1954, v. 96, p. 1442; 1956, v. 102, p. 656.
10. Biondi M. A., Garfunkel M. P., McCoubrey A. O. — Phys. Rev., 1956, v. 101, p. 1427.
11. Glover R. E., Tinkham M. — Phys. Rev., 1957, v. 108, p. 243; 1956, v. 104, p. 844.
12. Гинзбург В. Л., Ландau Л. Д. — Журн. эксперим. и теор. физ., 1950, т. 20, с. 1064.
13. Горьков Л. П. — Журн. эксперим. и теор. физ., 1959, т. 36, с. 1918.
14. Абрикосов А. А. — Журн. эксперим. и теор. физ., 1957, т. 32, с. 1442.
15. Essmann U., Traüble H. — Phys. Lett., 1967, v. 24A, p. 526.
16. Josephson B. D. — Phys. Lett., 1962, v. 1, p. 251.
17. Deaver B. S., Fairbank W. M. — Phys. Rev. Lett., 1961, v. 7, p. 43.
18. Doll R., Näbauer M. — Phys. Rev. Lett., 1961, v. 7, p. 51.
19. Glover R. E., III — Phys. Lett., 1967, v. 25A, p. 542.
20. Gollub J. P., Beasley M. R., Newbower R. S., Tinkham M. — Phys. Rev. Lett., 1969, v. 22, p. 1288.

К гл. 2

1. Bardeen J., Cooper L. N., Schrieffer J. R. — Phys. Rev., 1957, v. 108, p. 1175.
2. Cooper L. N. — Phys. Rev., 1956, v. 104, p. 1189.
3. Займан Дж. Принципы теории твердого тела. М., Мир, 1974.
4. Fröhlich H. — Phys. Rev., 1950, v. 79, p. 845.
5. Maxwell E. — Phys. Rev., 1950, v. 78, p. 477.
6. Reynolds C. A., Serin B., Wright W. H., Nesbitt L. B. — Phys. Rev., 1950, v. 78, p. 487.
7. Fröhlich H. — Proc. Roy. Soc. (Lond.), 1952, v. A215, p. 291.
8. Bardeen J., Pines D. — Phys. Rev., 1955, v. 99, p. 1140.
9. Pines D. — Phys. Rev., 1958, v. 109, p. 280.

10. Де Жен П. Сверхпроводимость металлов и сплавов. М., Мир, 1968.
11. Anderson P. W.—J. Phys. Chem. Sol., 1959, v. 11, p. 26.
12. Morel P., Anderson P. W.—Phys. Rev., 1962, v. 125, p. 1263.
13. Garland J. W.—Phys. Rev. Lett., 1963, v. 11, p. 114.
14. McMillan W. L.—Phys. Rev., 1968, v. 167, p. 331.
15. Богоявленский Н. Н.—Nuovo cimento, 1958, v. 7, p. 794; Журн. эксперим. и теор. физ., 1958, т. 34, с. 58.
16. Valatin J. G.—Nuovo cimento, 1958, v. 7, p. 843.
17. Mühlischlegel B.—Z. Phys., 1959, Bd 155, S. 313.
18. Mapother D. E.—Phys. Rev., 1962, v. 126, p. 2021.
19. Josephson B. D.—Phys. Lett., 1962, v. 1, p. 251.
20. Bardeen J.—Phys. Rev. Lett., 1962, v. 9, p. 147.
21. Giaever I.—Phys. Rev. Lett., 1960, v. 5, p. 147, 464.
22. Tinkham M.—Phys. Rev., 1972, v. B6, p. 1747.
23. Cohen M. H., Falicov L. M., Philips J. C.—Phys. Rev. Lett., 1962, v. 8, p. 316.
24. Douglass D. H., Falicov L. M.—In: Gorler C. J. (ed.), Progress in Low Temperature Physics. Amsterdam, North-Holland, 1964, v. 4, p. 97.
25. McMillan W. L., Rowell J. M.—In: Parks R. D. (ed.) Superconductivity, chap. 11. N. Y., Marcel Dekker, 1969.
26. Tomash W. J.—Phys. Rev. Lett., 1965, v. 15, p. 672; 1966, v. 16, p. 16.
27. Giaever I., Hart H. R., Megerle K.—Phys. Rev., 1962, v. 126, p. 941.
28. Schrieffer J. R., Scalapino D. J., Wilkins J. W.—Phys. Rev. Lett., 1963, v. 10, p. 336; Phys. Rev., 1966, v. 148, p. 263.
29. Элиашберг Г. М.—Журн. эксперим. и теор. физ., 1960, т. 38, с. 966.
30. McMillan W. L., Rowell J. M.—Phys. Rev. Lett., 1965, v. 14, p. 108.
31. Rowell J. M., Kopf L.—Phys. Rev., 1965, v. 137, p. A907.
32. Morse R. W.—In: Mendelson K. (ed.), Progress in Cryogenics Lond. Heywood, 1959, v. 1, p. 219.
33. Claiborne L. T., Einspruch N. G.—Phys. Rev. Lett., 1965, v. 15, p. 862.
34. Phillips W. A.—Proc. Roy. Soc., 1969, v. A309, p. 259.
35. Fossheim K.—Phys. Rev. Lett., 1967, v. 19, p. 81.
36. Tittman B. R., Bömmel H. E.—Phys. Rev., 1965, v. 151, p. 178.
37. Mason W. P.—Phys. Rev., 1966, v. 143, p. 229.
38. Love R. E., Shaw R. W., Fate W. A.—Phys. Rev., 1965, v. 138, p. A1453.
39. Hebel L. C., Slichter C. P.—Phys. Rev., 1957, v. 107, p. 901; 1959, v. 113, p. 1504.
40. Hebel L. C.—Phys. Rev., 1959, v. 116, p. 79.
41. Masuda Y.—Phys. Rev., 1962, v. 126, p. 1271.
42. Fibich M.—Phys. Rev. Lett., 1965, v. 14, p. 561.
43. Mattis D. C., Bardeen J.—Phys. Rev., 1958, v. 111, p. 412.
44. Glover R. E., Tinkham M.—Phys. Rev., 1956, v. 104, p. 844.
45. Ginsberg D. M., Tinkham M.—Phys. Rev., 1960, v. 118, p. 990.
46. Palmer L. H., Tinkham M.—Phys. Rev., 1968, v. 165, p. 558.
47. Kubo R.—J. Phys. Soc. Japan, 1957, v. 12, p. 570.
48. Tinkham M., Ferrel R. A.—Phys. Rev. Lett., 1959, v. 2, p. 331.
49. Tinkham M.—In: de Witt C., Dreyfus B., de Gennes P. G. (ed.) Low Temperature Physics. N. Y., Gordon and Breach, 1962.
50. Pippard A. B.—Proc. Roy. Soc. (Lond.), 1953, v. A216, p. 547.

51*. Ландау Л. Д., Либшиц Е. М. Квантовая механика. М., Наука, 1974.

52*. Реймс С. Теория многоэлектронных систем. М., Мир, 1976.

К гл. 3

1. Miller P. B.—Phys. Rev., 1959, v. 113, p. 1209.
2. Muhlschlegel B.—Z. Phys., 1959, v. 155, p. 313.
3. Shoenberg D.—Proc. Soc. (Lond.), 1940, v. A175, p. 49.
4. Lock J. M.—Proc. Roy. Soc. (Lond.), 1951, v. A208, p. 391.
5. Casimir N. B. G.—Physica, 1940, v. 7, p. 887.
6. Laurmann E., Shoenberg D.—Nature, 1947, v. 160, p. 747.
7. Laurmann E., Shoenberg D.—Proc. Roy. Soc. (Lond.), 1949, v. A198, p. 560.
8. Pippard A. B.—Proc. Roy. Soc. (Lond.), 1947, v. A191, p. 399.
9. Pippard A. B.—Proc. Roy. Soc. (Lond.), 1950, v. 203, p. 98.
10. Schawlow A. L., Devlin G. E.—Phys. Rev., 1959, v. 113, p. 120.
11. Waldram J. R.—Advan. Phys., 1964, v. 13, p. 1.
12. Landau L. D.—Phys. Z. Sowjet., 1937, v. 11, p. 129.
13. Andrew E. R.—Proc. Roy. Soc. (Lond.), 1948, v. A194, p. 98.
14. Goren R. N., Tinkham M.—J. Low Temp. Phys., 1971, v. 5, p. 465.
15. Livingston J. D., De Sorbo W.—In: Parks R. D. (ed.). Superconductivity, chap. 21. N. Y., Marcel Dekker, 1969.
16. Landau L. D.—Nature, 1938, v. 141, p. 688.
17. Landau L. D.—J. Phys. USSR, 1943, v. 7, p. 99.
18. Solomon P. R., Harris R. E.—Phys. Rev., 1971, v. B3, p. 2969.
19. Faber T. E.—Proc. Roy. Soc. (Lond.), 1958, v. A248, p. 460.
20. Trauble H., Essman U.—Phys. Stat. Sol., 1968, v. 25, p. 395.
21. Kirchner H.—Phys. Lett., 1968, v. 26A, p. 651.
22. Solomon P. R., Harris R. E.—Proc. 12th Intern. Conf. on Low Temp. Phys., Kyoto, Japan, 1970, p. 475.
23. London F. Une Conception nouvelle de la supraconductibilité. Paris, Hermann & Cie, 1937.
24. London F. Superfluids, v. 1. N. Y., Wiley, 1950.
25. Baird D. C., Mukherjee B. K.—Phys. Lett., 1967, v. 25A, p. 137.
26. Mukherjee B. K., Allen J. F., Baird D. C.—Proc. 11th Intern. Conf. on Low Temp. Phys., St. Andrews, 1968, p. 827.
27. Carter C. J.—Physica, 1957, v. 23, p. 45.
28. Андреев А. Ф., Шарвин Ю. В.—Журн. эксперим. и теор. физ., 1967, т. 53, № 10, с. 1499.
29. Andreyev A. F.—Proc. 11th Intern. Conf. on Low Temp. Phys., St. Andrews, 1968, p. 831.
30. Huebener R. P., Kampwirth R. T.—Solid State Comm., 1972, v. 10, p. 1289.
31. Huebener R. P., Gallus D. E.—Phys. Rev., 1973, v. B7, p. 4089.
- 32*. Де Жен П. Сверхпроводимость металлов и сплавов. М., Мир, 1968.
- 33*. Лихарев К. К.—Журн. эксперим. и теор. физ., 1971, т. 61, с. 1700.

К гл. 4

1. Гинзбург В. Л., Ландау Л. Д.—Журн. эксперим. и теор. физ., 1950, т. 20, с. 1064.
2. Горьков Л. П.—Журн. эксперим. и теор. физ., 1959, т. 37, с. 1918.

3. Brickman N. F. — Phys. Rev., 1969, v. 184, p. 460.
4. Alben R. — Phys. Lett., 1969, v. 29A, p. 477.
5. Lindhard J. — Kgl. Danske Videnskab. Selskab. Mat.-fys. Medd., 1954, Bd 28, N 8.
6. Де Жен П. Сверхпроводимость металлов и сплавов. М., Мир, 1968.
7. Абрикосов А. А. — Журн. эксперим. и теор. физ., 1957, т. 32, с. 1442.
8. Bardeen J. — Rev. Mod. Phys., 1962, v. 34, p. 667.
9. Hunt T. K. — Phys. Rev., 1966, v. 151, p. 325.
10. Levine J. L. — Phys. Rev. Lett., 1965, v. 15, p. 154.
11. Mitescu C. D. Doctoral thesis. California Institute of Technology. Pasadena, 1966.
12. Little W. A., Parks R. D. — Phys. Rev. Lett., 1962, v. 9, p. 9; Phys. Rev., 1964, v. 133 p. A97.
13. Tinkham M. — Phys. Rev., 1963, v. 129, p. 2413.
14. London F. Superfluids, v. 1, p. 152, N. Y., Wiley, 1950.
15. Deaver B. S., Fairbank W. M. — Phys. Rev. Lett., 1961, v. 7, p. 43.
16. Doll R., Nabauer M. — Phys. Rev. Lett., 1961, v. 7, p. 51.
17. Groff R. P., Parks R. D. — Phys. Rev., 1968, v. 176, p. 567.
18. Meservy R., Douglass D. H., Jr. — Phys. Rev., 1964, v. 134, p. A24.
19. Levine J. L. — Phys. Rev., 1967, v. 155, p. 373.
20. Millstein J., Tinkham M. — Phys. Rev., 1967, v. 158, p. 325.
21. Абрикосов А. А., Горьков Л. П. — Журн. эксперим. и теор. физ., 1960, т. 39, с. 1781.
22. Feder J., McLachlan D. S. — Phys. Rev., 1969, v. 177, p. 763.
23. Saint-James D., Gennes P. G. — Phys. Lett., 1963, v. 7, p. 306.
24. Harper F. E., Tinkham M. — Phys. Rev., 1968, v. 172, p. 441.
25. Yamafuji K., Kawashima T., Irie F. — Phys. Lett., 1966, v. 20, p. 123.
26. Saint-James D. — Phys. Lett., 1965, v. 16, p. 218.
27. Fink H. J. — Phys. Rev., 1969, v. 177, p. 732.
28. Schultens H. A. — Z. Phys., 1970, Bd 232, S. 430.
29. Kleiner W. H., Roth L. M., Autler S. H. — Phys. Rev., 1964, v. 133, p. A1226.
30. Essmann U., Träuble H. — Phys. Lett., 1967, v. 24A, p. 526.
31. Seeger A. — Comments Solid State Phys., 1970, v. 3, p. 97.
32. Essman P. — Phys. Lett., 1972, v. 41A, p. 477.
- 33*. Лихарев К. К. — Изв. вузов. Радиофизика, 1971, т. 14, с. 909.
- 34*. Андрацкий В. П. и др. — Журн. эксперим. и теор. физ., 1973, т. 65, с. 1591.
- 35*. Ihle D. — Phys. Stat. Sol., 1971, v. 47B, p. 423.

К гл. 5

1. Fetter A. L., Hohenberg P. C., Pincus P. — Phys. Rev., 1966, v. 147, p. 140.
2. Kumpf U. — Phys. Stat. Sol., 1971, v. 44, p. 829.
3. Auer J., Ullmaier H. — Phys. Rev., 1973, v. B7, p. 136.
4. Eilenberger G., Buttner H. — Z. Phys., 1969, Bd 224, S. 335.
5. Cleary R. M. — Phys. Rev. Lett., 1970, v. 24, p. 940.
6. Jacobs A. E. — Phys. Rev., 1971, v. B4, p. 3016, 3022, 3029; J. Low Temp. Phys., 1973, v. 10, p. 137.
7. Maki K. — Physics, 1964, v. 1, p. 21, 127.
8. Harden J. L., Arp V. — Cryogen., 1963, v. 3, p. 105.
9. Eilenberger G. — Phys. Rev., 1967, v. 153, p. 584.

10. Solomon P. R., Harris R. E. — Phys. Rev., 1971, v. B3, p. 2969.
11. Bardeen J., Stephen M. J. — Phys. Rev., 1965, v. 140, p. A1197.
12. Schmid A. — Phys. Kondens. Mater., 1966, v. 5, p. 302.
13. Caroli C., Maki K. — Phys. Rev., 1967, v. 159, p. 306, 316; 1967, v. 164, p. 591; 1968, v. 169, p. 381.
14. Hu C. R., Tompson R. S. — Phys. Rev., 1972, v. B6, p. 110.
15. Caroly C., De Gennes P. D., Matricon J. — Phys. Lett., 1964, v. 9, p. 307.
16. Де Жен П. Сверхпроводимость металлов и сплавов. М., Мир, 1968.
17. Tinkham M. — Phys. Rev. Lett., 1964, v. 13, p. 804.
18. Clem J. R. — Phys. Rev. Lett., 1968, v. 20, p. 735.
19. Kim Y. B., Hempstead C. F., Strnad A. R. — Phys. Rev., 1965, v. 139, p. A1163; Phys. Rev Lett., 1964, v. 12, p. 145.
20. Parks R. D. (ed.) Superconductivity, chap. 19. N. Y., Marcel Dekker, 1969.
21. Giaever I. — Phys. Rev. Lett., 1965, v. 15, p. 825.
22. Ekin J. M., Serin B., Clem J. R. — Phys. Rev., 1974, v. B9, p. 912.
23. van Ooijen D. J., van Gurp G. J. — Phys. Lett., 1965, v. 17, p. 230.
24. Cape J. A., Silvera I. F. — Phys. Rev. Lett., 1968, v. 20, p. 326.
25. Weissenfeld C. H. — Phys. Lett., 1968, v. 28A, p. 362.
26. Maki K. — Phys. Rev. Lett., 1969, v. 23, p. 1223.
27. Solomon P. R., Otter F. A. — Phys. Rev., 1967, v. 164, p. 608.
28. Solomon P. R. — Phys. Rev., 1969, v. 179, p. 475.
29. Vidal F. — Phys. Rev., 1973, v. B8, p. 1982.
30. Gittleman J. I., Rosenblum B. — Phys. Rev. Lett., 1968, v. 16, p. 734.
31. Bean C. P. — Phys. Rev. Lett., 1962, v. 8, p. 250.
32. Anderson P. W. — Phys. Rev. Lett., 1962, v. 9, p. 309.
33. Anderson P. W., Kim Y. B. — Rev. Mod. Phys., 1964, v. 36, p. 39.
34. Beasley M. R., Labusch R., Webb W. W. — Phys. Rev., 1969, v. 181, p. 682.
35. Kim Y. B., Hempstead C. F., Strnad A. R. — Phys. Rev., 1963, v. 131, p. 2486.
36. Campbell A. M., Evetts J. E., Dew-Higes D. — Phill. Mag., 1968, v. 18, p. 313.
37. Kim Y. B., Hempstead C. F., Strnad A. R. — Phys. Rev. Lett., 1962, v. 9, p. 306.
38. Wilson M. N., Walters C. R., Lewin J. D., Smith P. F. — J. Phys., 1970, v. D3, p. 1518.
39. Spurway A. H., Lewin J. D., Smith P. F. — J. Phys., 1970, v. D3, p. 1572.
40. Dahl P. F., Morgan G. H., Sampson W. B. — J. Appl. Phys., 1969, v. 40, p. 2083.
- 41*. Минц Р. Г., Рахманов А. Л. — Усп. физ. наук, 1977, т. 121, с. 499.

К гл. 6

1. Josephson B. D. — Phys. Lett., 1962, v. 1, p. 251.
2. Josephson B. D. — Advan. Phys., 1965, v. 14, p. 419.
3. Josephson B. D. — Rev. Mod. Phys., 1974, v. 46, p. 251.
4. Fulton T. A., Dynes R. C. — Phys. Rev. Lett., 1970, v. 25, p. 794.
5. Anderson P. W. — Lectures at Ravello Spring School, 1963.
6. Ambegaokar V., Baratoff A. — Phys. Rev. Lett., 1963, v. 10, p. 486; Phys. Rev. Lett., 1963, v. 11, p. 104.
7. Baratoff A., Blackburn J. A., Schwartz B. B. — Phys. Rev. Lett., 1970, v. 25, p. 1096.

8. Skocpol M. J., Beasley M. R., Tinkham M. — J. Appl. Phys., 1974, v. 45, p. 4054.
9. Pedersen N. F., Finnegan T. F., Langenberg D. N. — Phys. Rev., 1972, v. B6, p. 4151.
10. Falco C. M., Parker W. H., Trullinger S. E. — Phys. Rev. Lett., 1973, v. 31, p. 933.
11. Vincent D. A., Deaver B. S., Jr. — Phys. Rev. Lett., 1974, v. 32, p. 212.
12. Langenberg D. N. — Rev. Phys. Appl., 1974, v. 9, p. 35.
13. Poulsen U. K. — Rev. Phys. Appl., 1974, v. 9, p. 41.
14. Riedel E. — Z. Naturforschung, 1964, Bd 19a, S. 1634.
15. Werthamer N. R. — Phys. Rev., 1966, v. 147, p. 255.
16. Jaklevic R. C., Lambe J., Mercereau J. E., Silver A. N. — Phys. Rev., 1965, v. 140, p. A1628.
17. Zimmerman J. E., Silver A. N. — Phys. Rev., 1966, v. 141, p. 367.
18. Silver A. N., Zimmerman J. E. — Phys. Rev., 1967, v. 157, p. 317.
19. Zimmerman J. E., Mercereau J. E. — Phys. Rev. Lett., 1964, v. 13, p. 125.
20. Beasley M. R., Labusch R., Webb W. W. — Phys. Rev., 1969, v. 181, p. 682.
21. Gollub J. P., Beasley M. R., Tinkham M. — Phys. Rev. Lett., 1970, v. 25, p. 1646.
22. Shapiro S. — Phys. Rev. Lett., 1963, v. 11, p. 80.
23. Hamilton C. A. — Phys. Rev., 1972, v. B5, p. 912.
24. Янсон И. К., Свищунов В. М., Дмитренко И. М. — Журн. эксперим. и теор. физ., 1965, т. 48, с. 976.
25. Langenberg D. N., Scalapino D. J., Taylor B. N., Eck R. E. — Phys. Rev. Lett., 1965, v. 15, p. 294.
26. Parker W. H., Langenberg D. N., Denenstein A., Taylor B. N. — Phys. Rev., 1969, v. 177, p. 639.
27. Rieger T. J., Scalapino D. J., Mercereau J. E. — Phys. Rev. Letters, 1971, v. 27, p. 1789.
28. Yu M. L., Mercereau J. E. — Phys. Rev. Lett., 1972, v. 28, p. 1117.
29. Clarke J. — Phys. Rev. Lett., 1972, v. 28, p. 1366.
30. Tinkham M., Clarke J. — Phys. Rev. Lett., 1972, v. 28, p. 1366.
31. Eck R. E., Scalapino D. J., Taylor B. N. — Phys. Rev. Lett., 1964, v. 13, p. 15.
32. Fiske M. D. — Rev. Mod. Phys., 1964, v. 36, p. 221.
33. Coon D. D., Fiske M. D. — Phys. Rev., 1965, v. 138, p. A744.
34. Dahm A. J., Denenstein A., Finnegan T. F., Langenberg D. N., Scalapino D. J. — Phys. Rev. Lett. 1968, v. 20, p. 589.
35. De Waele A. Th. A. M., De Bruyn Ouboter R. — Physica, 1969, v. 41, p. 225.
36. Clarke J., Peterson J. L. — Appl. Phys. Lett., 1971, v. 19, p. 469.
37. Gollub J. P. Diamagnetism Due to Fluctuations in Superconductors. — Technical Report, 1970, N 3, Div. of Eng. and Appl. Phys., Harvard Univ.
38. Zimmerman J. E., Thiene P., Harding J. T. — J. Appl. Phys., 1970, v. 41, p. 1572.
39. Silver A. N., Zimmerman J. E. — Phys. Rev., 1967, v. 157, p. 317.
40. Giffard R. P., Webb R. A., Wheatley J. C. — J. Low Temp. Phys., 1972, v. 6, p. 533.
41. Webb W. W. — IEEE Trans., 1972, v. MAG—8, p. 51.
42. Simmons M. B., Parker W. H. — J. Appl. Phys., 1971, v. 42, p. 38.
43. Kurkijarvi J. — Phys. Rev., 1972, v. B6, p. 832; J. Appl. Phys., 1973, v. 44, p. 3729.

44. Letzter S., Webster N.—IEEE Spec., 1970, v. 7, N 8, p. 67.
45. Prober D. E.—Rev. Sci. Inst., 1974, v. 45, p. 849.
46. Lukens J. E., Warburton R. J., Webb W. W.—J. Appl. Phys., 1971, v. 42, p. 27.
48. Webb R. A., Giffard R. P., Wheatley J. G.—J. Low Temp. Phys., 1973, v. 13, p. 383.
49. Day E. P.—Phys. Rev. Lett., 1970, v. 29, p. 540.
50. Meredith D. J., Pickett G. R., Symko O. G.—Phys. Lett., 1972, v. 42A, p. 13; J. Low Temp. Phys., 1973, v. 13, p. 607.
51. Clarke J.—Phil. Mag., 1966, v. 13, p. 155.
52. McWane J. W., Neighbor J. E., Newbower R. S.—Rev. Sci. Instr., 1966, v. 37, p. 1602.
53. Clarke J.—Phys. Rev. Lett., 1968, v. 21, p. 1566.
54. Grimes C. C., Richards P. L., Shapiro S.—Phys. Rev. Lett., 1966, v. 17, p. 431.
55. Richards P. L., Auracher F., Van Duzer T.—Proc. IEEE, 1973, v. 61, p. 36.
56. Richards P. L., Sterling S. A.—Appl. Phys. Lett., 1969, v. 14, p. 394.
- 57*. Асламазов Л. Г., Ларкин А. И.—Письма в журн. эксперим. и теор. физ., 1969, т. 9, с. 150.
- 58*. Лихарев К. К.—Успехи физ. наук, 1979, т. 127, с. 185.
- 59* Зорин А. Б., Кулик И. О., Лихарев К. К., Шриффер Дж.—Физ. низких температур, 1979, т. 5, с. 1138.
- 60*. Harris R. E.—Phys. Rev., 1975, v. B11, p. 3329.
- 61*. Superconducting Quantum Interference Devices and their Applications. Eds by H. D. Hahlbohm, H. Lübbig. West Berlin, Walter de Gruyter, 1977.
- 62*. Future Trends in Superconductive Electronics (Eds by B. S. Deaver Jr., C. M. Falco, J. H. Harris, S. A. Wolf. AIP Conf. Proceedings, N 44, N. Y., 1978).
- 63*. Лихарев К. К., Ульрих Б. Т. Системы с джозефсоновскими контактами. М., Изд. Моск. ун-та, 1978.
- 64*. Clarke J.—In: Superconductor Applications: SQUID's and Machines (eds by B. B. Schwartz, S. Foner). N. Y., Plenum Press, 1977, p. 67.
- 65*. Zappe H. H.—Jap. J. Appl. Phys., 1977, v. 16 (suppl), p. 247.

К гл. 7

1. Langer J. S., Ambegaokar V.—Phys. Rev., 1967, v. 164, p. 498.
2. Little W. A.—Phys. Rev., 1967, v. 156, p. 398.
3. McCumber D. E.—Phys. Rev., 1968, v. 172, p. 427.
4. McCumber D. E., Halperin B. I.—Phys. Rev., 1970, v. B1, p. 1054.
5. Lukens J. E., Warburton R. J., Webb W. W.—Phys. Rev. Lett., 1970, v. 25, p. 1180.
6. Newbower R. S., Beasley M. R., Tinkham M.—Phys. Rev., 1972, v. B5, p. 864.
7. Masker W. E., Marcelja S., Parks R. D.—Phys. Rev., 1970, v. 188, p. 745.
8. Tucker J., Halperin B. I.—Phys. Rev., 1971, v. B3, p. 378.
9. Londergan R. J., Langer J. S.—Phys. Rev., 1972, v. B5, p. 4376.
10. Buhrman R. A., Halperin W. P.—Phys. Rev. Lett., 1973, v. 30, p. 692.

11. Mühlischlegel B., Scalapino D. J., Denton R. — Phys. Rev., 1972, v. B6, p. 1767.
12. Schmid A. — Phys. Rev., 1969, v. 180, p. 527.
13. Gollub J. P., Beasley M. R., Newbower R. S., Tinkham M. — Phys. Rev. Lett. 1969, v. 22, p. 1288.
14. Gollub J. P., Beasley M. R., Tinkham M. — Phys. Rev. Lett., 1970, v. 25, p. 1646.
15. Gollub J. P., Beasley M. R., Callarotti R., Tinkham M. — Phys. Rev., 1973, v. B7, p. 3039.
16. Schmidt H. — Z. Phys., 1968, Bd 216, S. 336.
17. Prange R. E. — Phys. Rev., 1970, B1, p. 2349.
18. Patton B. R., Ambegaokar V., Wilkins J. W. — Solid State Commun., 1969, v. 7, p. 1287.
19. Lee P. A., Payne M. G. — Phys. Rev. Lett., 1971, v. 26, p. 1537; Phys. Rev., 1972, v. B5, p. 923.
20. Kurkijärvi J., Ambegaokar V., Eilenberger G. — Phys. Rev., 1972, v. B5, p. 868.
21. Maki K., Takayama H. — J. Low Temp. Phys., 1971, v. 5, p. 313.
22. Maki K. — Phys. Rev. Lett., 1973, v. 30, p. 648.
23. Lawrence W. E., Daniach S. — Proc. 12th Intern. Conf. on Low Temp. Physics, Kyoto, Japan, 1970 (Keigaku Publ. Co., 1971, p. 361).
24. Tsuzuki T. — J. Low Temp. Phys., 1972, v. 9, p. 525.
25. Prober D. E., Beasley M. R., Schwall R. E. Неопубликованная работа.
26. Schmid A. — Phys. Kondens. Mat., 1966, v. 5, p. 302.
27. Caroli C., Maki K. — Phys. Rev., 1967, v. 159, p. 306, 316.
28. Abrahams E., Tsuneto T. — Phys. Rev., 1966, v. 152, p. 416.
29. Woo J. W. F., Abrahams E. — Phys. Rev., 1968, v. 169, p. 407.
30. Cyrot M. — Repts Progr. Phys., 1973, v. 36, p. 103.
31. Киттель Ч. Элементарная статистическая физика. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
32. Aslamasov L. G., Larkin A. I. — Phys. Lett., 1968, v. 26A, p. 238.
33. Glover R. E. III. — Phys. Lett., 1967, v. 25A, p. 542.
34. Naugle D. C., Glover R. E. III. — Phys. Lett., 1968, v. 28A, p. 110.
35. Crow J. E., Thompson R. S., Klenin M. A., Bhatnagar A. (Kyoto) K. — Phys. Rev. Lett., 1970, v. 24, p. 371.
36. Maki K. — Progr. Theor. Phys., 1968, v. 39, p. 897; 1968, v. 40, p. 193.
37. Thompson R. S. — Phys. Rev., 1970, v. B1, p. 327.
38. Patton B. R. — Phys. Rev. Lett., 1971, v. 27, p. 1273.
39. Keller J., Korenman V. — Phys. Rev. Lett., 1971, v. 27, p. 1270; Phys. Rev., 1972, v. B5, p. 4367.
40. Appel J. — Phys. Rev. Lett., 1968, v. 21, p. 1164.
41. Craven R. A., Thomas G. A., Parks R. D. — Phys. Rev., 1973, v. B7, p. 157.
42. Lehoczky S. L. (A.), Briscoe C. V. — Phys. Rev. Lett., 1969, v. 23, p. 695.
- 43*. Хоэнберг П. — Успехи физ. наук, 1970, т. 102, с. 239.

К гл. 8

1. Anderson P. W. — J. Phys. Chem. Sol., 1959, v. 11, p. 26.
2. Де Жен П. Сверхпроводимость металлов и сплавов, гл. 5 и 8. — М., Мир, 1968.

3. Bardeen J. — Rev. Mod. Phys., 1962, v. 34, p. 667; Rogers K. T. — Unpublished Ph. D. Thesis, University of Illinois, 1960.
4. Caroli C., de Gennes P. G., Matricon J. — Phys. Lett., 1964, v. 9, p. 307.
5. Bardin J., Kümmel R., Jacobs A. E., Tewordt L. — Phys. Rev., 1969, v. 187, p. 556.
6. Абрикосов А. А., Горьков Л. П. — Журн. эксперим. и теор. физ., 1960, т. 39, с. 1781.
7. Maki K. — Prog. Theor. Phys. (Kyoto), 1963, v. 29, p. 333; 1964, v. 31, p. 731; 1964, v. 32, p. 29.
8. Maki K., Fulde P. — Phys. Rev., 1965, v. 140, p. A1586.
9. De Gennes P. G. — Phys. Kondens. Materie, 1964, v. 3, p. 79.
10. De Gennes P. G., Sarma G. — J. Appl. Phys., 1963, v. 34, p. 1380.
11. De Gennes P. G., Tinkham M. — Physics, 1964, v. 1, p. 107.
12. Maki K. — In: Parks R. D. (ed.) Superconductivity, chap. 18. N. Y., Marcel Dekker, 1969.
13. Clogston A. M. — Phys. Rev. Lett., 1962, v. 9, p. 266.
14. Chandrasekhar B. S. — Appl. Phys. Lett., 1962, v. 1, p. 7.
15. Morris D. E., Tinkham M. — Phys. Rev., 1964, v. 134, p. A1154.
16. White P. H., Tinkham M. — Phys. Rev., 1964, v. 136, p. A203.
17. Meservey R., Douglass D. H. — Phys. Rev., 1964, v. 135, p. A24.
18. Skalski S., Betbedes—Matibet O., Weiss P. R. — Phys. Rev., 1964, v. 136, p. A1500.
19. Wolf M. A., Reif F. — Phys. Rev., 1965, v. 137, p. A557.
20. Levine J. L. — Phys. Rev., 1967, v. 155, p. 373.
21. Millstein J., Tinkham M. — Phys. Rev., 1967, v. 158, p. 325.
22. Ларкин А. Г. — Журн. эксперим. и теор. физ., 1965, т. 48, с. 232.
23. Strässler S., Wyder P. — Phys. Rev., 1967, v. 158, p. 319.
24. Schmid A. — Phys. Kondens. Materie, 1966, v. 5, p. 302.
25. Caroli C., Maki K. — Phys. Rev., 1967, v. 159, p. 306; 316; 1967, v. 164, p. 591.
26. Abrahams E., Tsuneto T. — Phys. Rev., 1966, v. 152, p. 416.
27. Woo J. W. F., Abrahams E. — Phys. Rev., 1968, v. 169, p. 407.
28. Thompson R. S. — Phys. Rev., 1970, v. B1, p. 327.
29. Горьков Л. П., Элиашберг Г. М. — Журн. эксперим. и теор. физ., 1968, т. 54, с. 612.
30. Cyrot M. — Repts Progr. Phys., 1973, v. 36, p. 103.
31. Элиашберг Г. М. — Журн. эксперим. и теор. физ., 1969, т. 55, с. 2443.
32. Hu C. R., Thompson R. S. — Phys. Rev., 1972, v. B6, p. 110.
33. Займан Дж. Электроны и фононы. М., Физматгиз, 1963.
34. Tinkham M. — Phys. Rev., 1972, v. B6, p. 1747.
35. Schmid A. — Phys. Kondens. Mat., 1968, v. 8, p. 129.
36. Peters R., Meissner H. — Phys. Rev. Lett., 1973, v. 30, p. 965.
37. Clarke J. — Phys. Rev. Lett., 1972, v. 28, p. 1363.
38. Tinkham M., Clarke J. — Phys. Rev. Lett., 1972, v. 28, p. 1366.
39. Tinkham M. — Phys. Rev., 1972, v. B6, p. 1747.
40. Skocpol W. J., Beasley M. R., Tinkham M. — J. Low Temp. Phys., 1974, v. 16, p. 145.
41. Notarys H. A., Mercereau J. E. — Physica, 1971, v. 55, p. 424.

42. Reiger T. J., Scalapino D. J., Mercereau J. E.—Phys. Rev. Lett., 1971, v. 27, p. 1787; Phys. Rev., 1972, v. B6, p. 1734.
43. Pippard A. B., Shepherd J. G., Tindall D. A.—Proc. Roy. Soc. (Lond.), 1971, v. A324, p. 17.
44. Галайко В. П.—Журн. эксперим. и теор. физ., 1971, т. 34, с. 203; 1973, т. 37, с. 922.
- 45*. Куприянов М. Ю., Лихарев К. К.—Письма в журн. эксперим. и теор. физ., 1972, т. 15, с. 349.
- 46*. Данилов В. В., Куприянов М. Ю., Лихарев К. К.—Физ. твердого тела, 1974, т. 16, с. 935.
- 47*. Горьков Л. П., Конин Н. Б.—Усп. физ. наук, 1975, т. 116, с. 413.
- 48*. Dolan G. J., Jackel L. D.—Phys. Rev. Lett., 1977, v. 39, p. 1628.
- 49*. Элиашберг Г. М.—Журн. эксперим. и теор. физ., 1971, т. 61, с. 1254.
- 50*. Larkin A. I., Ovchinnikov Yu. N.—J. Low Temp. Phys., 1973, v. 10, p. 407.
- 51*. Аронов А. Г., Гуревич В. Л.—Физ. твердого тела, 1974, т. 16, с. 2636.
- 52*. Кулик И. О.—Физ. низких температур, 1976, т. 2, с. 962.

ОБЩИЙ СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Приводимый список литературы не является исчерпывающим, но он включает многие из часто цитируемых работ, причем кратко выделены индивидуальные особенности каждой из них. Так как литература по прикладным вопросам особенно сильно распылена, приводим отдельный список таких работ.

Фундаментальная физика: книги

- Blatt J. M.** Theory of Superconductivity. N. Y., Academic Press, Inc., 1964.— В книге рассматривается подход к сверхтекучему состоянию с точки зрения квазихимического равновесия.
- De Gennes P. G.** Superconductivity in Metals and Alloys. N. Y., W. A. Benjamin, Inc., 1966. (Де Жен П. Сверхпроводимость металлов и сплавов. Пер. с англ. М., Мир, 1968.) — Блестящее физически мотивированное изложение.
- Kuper C. G.** Introduction to the Theory of Superconductivity. Oxford, Clarendon Press, 1968.— Более элементарное изложение.
- London F.** Superfluids, vol. 1. N. Y., John Wiley and Sons, Inc., 1950. Обсуждается теория Лондона и ее философская основа; содержит на с. 152 знаменитое предсказание квантования потока, сделанное за десять лет до его экспериментального открытия.
- Lynton E. A.** Superconductivity, 3rd. Lond., Methuen and Co., Ltd., 1969. (Линтон Э. А. Сверхпроводимость. Пер. с англ. М., Мир, 1971.). — Хороший, ясный обзор.
- Rickayzen G.** Theory of Superconductivity. N. Y.: John Wiley and Sons, Inc., 1965.— Хороший обзор.
- Roys-Innes A. C., Rhoderick F. H.** Introduction to Superconductivity. N. Y., Pergamon Press, 1969. (Роуз-Инс А., Родерик Е. Введение в физику сверхпроводимости. М., Мир, 1972.) — Вводное изложение примерно на том же уровне, что и настоящая книга.
- Saint-James D., Sarma G., Thomas F. J.** Type III Superconductivity. N. Y., Pergamon Press, 1969. (Сан Жам Д., Сарма Г., Томас Е. Сверхпроводимость II рода. М., Мир, 1970.) — Детальный обзор указанной темы, теория дается на уровне уравнений Гинзбурга — Ландау.
- Schrieffer J. R.** Theory of Superconductivity. N. Y., Benjamin W. A., Inc., 1964.— Хорошее описание теории одним из ее основателей, включающее главу о функциях Грина, не рассмотренных в настоящей книге.
- Shoenberg D.** Superconductivity. N. Y., Cambridge University Press, 1952. (Шенберг Д. Сверхпроводимость. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1953.) — Классический обзор, особенно подробно описывающий экспериментальные результаты; написан до появления теории БКШ.
- * **Теория сверхпроводимости.** Сб. статей./Под ред. Н. Н. Боголюбова. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
- * **Кулик И. О., Янсон И. К.** Эффект Джозефсона в сверхпроводящих туннельных структурах. М., Наука, 1970.
- * **Гейлиман Б. Т., Кресин В. З.** Кинетические и нестационарные явления в сверхпроводимости. М., Наука, 1972.
- * **Коэн М., Гладстоун Г., Йенсен М., Шриффер Дж.** Сверхпроводимость полупроводников и переходных металлов. М., Мир, 1974.

- * Солимар Л. Туннельный эффект в сверхпроводниках и его применение. М., Мир, 1974.
- * Буккель В. Сверхпроводимость. М., Мир, 1975.
- * Кемпбелл А., Иветс Дж. Критические токи в сверхпроводниках. М., Мир, 1975.
- * Тилли Д. Р., Тилли Дж. Сверхтекучесть и сверхпроводимость. М., Мир, 1977.
- * Булаевский Л. П. и др. Проблема высокотемпературной сверхпроводимости.

Фундаментальная физика: обзоры

Anderson P. W. The Josephson Effect and Quantum Coherence Measurements in Superconductors and Superfluids.— In: **Gorter C. J. (ed.)**. Progress in Low Temperature Physics, vol. 5. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1967.— Следует отметить глубокое рассмотрение указанного вопроса.

Bardeen N. J. Theory of Superconductivity.— In: **Flügge S. (ed.)**. Handbuch der Physik, Bd 15. Berlin, Springer-Verlag OHG, 1956.— Мастерский обзор состояния теории накануне появления теории БКШ.

Bardeen J., Schrieffer J. R. Recent Development in Superconductivity.— In: **Gorter (ed.)**. Progress in Low Temperature Physics, vol. 3. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1961. (Бардин Дж., Шриффер Дж. Новое в изучении сверхпроводимости. М., 1962.) — Обзор начального периода после появления теории БКШ.

Dewitt C., Dreyfus B., De Gennes P. G. (eds). Low Temperature Physics. N. Y., Gordon and Breach, Science Publishers, 1962.— Содержит лекции, прочитанные в Высшей летней школе в 1961 г., включая написанную Тинкхамом, которая была издана позже под названием «Сверхпроводимость». Хотя этот обзор написан давно, в нем мало материала, успевшего устареть. Кроме того, приведено более подробное, чем в данной книге, описание применения правила сумм и состояний Крамера—Кронига.

Douglass D. H., Falicov L. M. The Superconducting Energy Gap. In: **Gorter C. J. (ed.)**. Progress in Low Temperature Physics, vol. 4.— Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1964.— Расширенный обзор экспериментальных данных и их теоретических истолкований. (Имеется русский перевод в сб.: Сверхпроводимость. М., Наука, 1967.)

Glover R. E. III. Superconductivity Above the Transition Temperature.— In: **Gorter C. J. (ed.)**. Progress in Low Temperature Physics, vol. 6. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1964. г— Обзор работ по флуктуационной избыточной проводимости выше T_c .

Parks R. D. (ed.) Superconductivity. Vols I, II. N. Y., Marcel Dekker, Inc., 1969.— Это двухтомное издание, написанное коллективом авторов; каждый из них писал о проблеме, в которой является специалистом. Этот труд представляет собой один из наиболее исчерпывающих обзоров состояния предмета на 1968 г.

Serin B. Superconductivity, Experimental Part.— In: **Flügge S.** Handbuch der Physik, Bd 15. Berlin: Springer-Verlag, OHG, 1956.— Обзор экспериментального состояния проблемы на 1956 г.

Wallace P. R. (ed.) Superconductivity. Vols I, II. N. Y., Gordon and Breach, Science Publishers, 1969.— Еще один двухтомник, содержащий лекции, прочитанные в Объединенном институте сверхпроводимости при Макгильском университете в 1968 г. Это не столь исчерпывающий труд, как сборник Паркса. Издание содержит целый ряд опечаток, однако лекции могут быть полезны в качестве учебного пособия.

Прикладные вопросы

Foner S., Schwartz B. B. (eds). Superconducting Machines and Devices: Large System Applications. Proceedings of a summer school. N. Y., Plenum Press, Plenum Publishing Corporation, 1974.— Обширное описание работ во многих странах по сверхпроводящим линиям электропередачи, электрическим машинам, транспортным системам и т. д.

Gregory W. D., Mathews W. N., Edelsak E. A. (eds.). The Science and Technology of Superconductivity. In 2 vols. Proceedings of a summer school. New York: Plenum Press, Plenum Publishing Corporation, 1973.— Труды летней школы.

Newhouse V. L. Applied Superconductivity. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1964.—Хороший обзор, который, к сожалению, написан до периода использования сверхпроводимости II рода и устройств, основанных на эффекте Джозефсона.

Proc. IEEE, Special Issue on «Applications of Superconductivity», January, 1973, vol. 61, N 1. (Имеется русский перевод: ТИИЭР, специальный выпуск применения сверхпроводимости, янв. 1973, т. 61, № 1.)

Research Advisory Institute. Device Applications of Cryogenics, 1971; publication A 729697, available through the National Technical Information Service, U. S. Dept. of Commerce, Springfield, Va. 27151. — Очень подробный обзор слаботочныхных устройств, включая устройства, использующие эффект Джозефсона; написан специалистами по этому вопросу. Обзор дополняет упомянутый выше обзор, изданный Фонером и Шварцем.

* **Бремер Дж. Сверхпроводящие устройства.** М., Мир, 1964.

* **Foner S., Schwartz B. B. (eds.). Superconductor Applications: SQUID's and Machines. Proceedings of a summer school.** N. Y., Plenum Press, 1977.

* **Deaver B. S., Jr., e. a. (eds). Future Trends in Superconductive Electronics.** AIP Conf. Proc. N 44, N. Y., 1978.

* **Труды конференций по прикладной сверхпроводимости (Applied Superconductivity Conferences).**

Конференция 1974 г.: IEEE Trans. on Magn., 1975, vol. 11, p. 90—290.

Конференция 1976 г.: IEEE Trans. on Magn., 1977, v. 13, p. 1—897.

Конференция 1978 г.: IEEE Trans. on Magn., 1979, v. 15, p. 1—875.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода	5
Предисловие к русскому изданию	7
Предисловие к английскому изданию	7
Глава 1. Вводный обзор : : : : :	11
1.1. Основные факты	11
1.2. Уравнения Лондонов	13
1.3. Нелокальная электродинамика Пиппарда	16
1.4. Энергетическая щель и теория БКШ	17
1.5. Теория Гинзбурга — Ландау	19
1.6. Сверхпроводники II рода	21
1.7. Фаза, джозефсоновское туннелирование, квантование флюксоида и незатухающие токи — сущность сверхпроводимости	23
1.8. Флуктуационные эффекты	24
Глава 2. Теория БКШ	26
2.1. Куперовские пары	26
2.2. Природа притяжения	29
2.3. Основное состояние в теории БКШ	31
2.4. Вариационный метод	35
2.4.1. Определение коэффициентов	36
2.4.2. Нахождение энергии основного состояния	40
2.5. Решение с помощью канонического преобразования	41
2.5.1. Энергия возбуждений и энергетическая щель	44
2.6. Конечные температуры	45
2.6.1. Определение T_c	45
2.6.2. Температурная зависимость щели	46
2.6.3. Термодинамические величины	47
2.7. Функция состояния и плотность состояний	49
2.7.1. Плотность состояний	53
2.8. Туннелирование электронов	54
2.8.1. Полупроводниковая модель	56
2.8.2. Туннелирование между нормальными металлами	57
2.8.3. Туннелирование между нормальным металлом и сверхпроводником	58
2.8.4. Туннелирование между двумя сверхпроводниками	59
2.8.5. Фоновая структура	61
2.9. Вероятности прохождения и эффекты когерентности	62
2.9.1. Затухание ультразвука	65
2.9.2. Ядерная релаксация	67
2.9.3. Поглощение электромагнитных волн	69
2.10. Электродинамика : : : : :	72
2.10.1. Вычисление $K(0, T)$ или $\lambda_L(T)$	75
2.10.2. Расчет зависимости $K(q, 0)$	77
2.10.3. Нелокальная электродинамика в координатном пространстве	78
2.10.4. Влияние примесей	79
2.10.5. Комплексная проводимость	81
2.11. Заключение	83

Глава 3. Магнитные свойства сверхпроводников I рода	85
3.1. Глубина проникновения	85
3.1.1 Калибрюка вектор-потенциала	85
3.1.2. Предварительная оценка λ	87
3.1.3. Точное решение с помощью фурье-анализа	88
3.1.4. Температурная зависимость λ	93
3.2. Глубина проникновения в тонких пленках	94
3.2.1. Диффузное рассеяние поверхностью	95
3.2.2. Зеркальное рассеяние поверхностью	99
3.3. Измерения λ	100
3.4. Сверхпроводники в сильных магнитных полях: промежуточное состояние	102
3.4.1. Ненулевой размагничивающий фактор	104
3.4.2. Структура промежуточного состояния в плоскопараллельной пластине	105
3.4.3. Структура промежуточного состояния шара	111
3.5. Критический ток сверхпроводящего провода	112
Глава 4. Теория Гинзбурга — Ландау	117
4.1. Свободная энергия в теории Гинзбурга — Ландау	118
4.2. Дифференциальные уравнения Гинзбурга — Ландау	124
4.2.1. Длина когерентности Гинзбурга — Ландау	125
4.3. Вычисление параметра энергии в области границы	127
4.4. Критический ток тонкого провода или пленки	130
4.5. Квантование флюкоида и эксперимент Литтла и Паркса	134
4.5.1. Флюкоид	134
4.5.2. Эксперимент Литтла — Паркса	136
4.6. Параллельное критическое поле тонких пленок	138
4.6.1 Относительно толстые пленки	139
4.7. Линеаризованные уравнения Гинзбурга — Ландау	141
4.8. Образование зародышей в массивных образцах; поле H_{c2}	142
4.9. Образование зародышей у поверхностей; поле H_{c3}	144
4.10. Образование зародышей в пленках и фольгах	147
4.10.1. Угловая зависимость критического поля тонких пленок	147
4.10.2. Образование зародышей в пленках промежуточной толщины	149
4.11. Абрикосовские вихри при H_{c2}	151
Глава 5. Магнитные свойства сверхпроводников II рода	157
5.1. Поведение в окрестности H_{c1} : структура изолированного вихря	157
5.1.1. Приближение больших κ	160
5.1.2. Энергия вихревой линии	161
5.2. Взаимодействие между вихревыми линиями	162
5.3. Кривые намагничивания	164
5.3.1. Малая плотность вихрей	165
5.3.2. Промежуточные плотности потока	166
5.3.3. Окрестность H_{c2}	169
5.4. Пиннинг, крип и течение потока	171
5.5. Идеальное течение потока	176
5.5.1. Модель Бардина — Стефена	177
5.5.2. Возникновение сопротивления провода	181
5.5.3. Экспериментальные исследования течения потока	183
5.5.4. Заключительные замечания о движении потока	185
5.6. Модель критического состояния	186
5.7. Термически активированный крип потока	189
5.7.1. Теория Андерсона и Кима для крипа потока	190
5.7.2. Тепловая неустойчивость	196
5.8. Сверхпроводящие магниты для переменных полей	198
5.8.1. Скачки потока	199
5.8.2. Скрученные композитные проводники	201

Глава 6. Эффект Джозефсона и макроскопические квантовые явления	208
6.1. Джозефсоновские соотношения между током и фазой	208
6.2. Воздействие магнитного поля	212
6.3. Сверхпроводящие квантовые интерферометры	217
6.4. Нестационарный эффект Джозефсона	219
6.4.1. Основные уравнения	221
6.4.2. Примеры	223
6.5. Основные соотношения между фазой, числом частиц, энергией и током	225
6.6. Магнитометры на сквифах	228
6.6.1. Типичные значения параметров	228
6.6.2. Двухконтактный сквид постоянного тока	230
6.6.3. Влияние экранирования	231
6.6.4. Использование трансформатора потока	233
6.6.5. Одноконтактный высокочастотный сквид	235
6.6.6. Предел чувствительности	240
6.7. Другие приборы, использующие эффект Джозефсона	243
6.7.1. Гальванометр типа «слаг»	243
6.7.2. Джозефсоновские детекторы	245
Глава 7. Флуктуационные эффекты	247
7.1. Появление электрического сопротивления в тонкой проволоке	247
7.2. Сверхпроводимость при температуре выше T_c в системах нулевой размерности	254
7.3. Пространственная зависимость флуктуаций	257
7.4. Флуктуационный диамагнетизм при температуре выше T_c	260
7.4.1. Диамагнетизм в двумерных системах	265
7.5. Зависимость флуктуаций от времени	266
7.6. Флуктуационная проводимость при температуре выше T_c	267
7.6.1. Трехмерный случай	269
7.6.2. Двумерный случай	269
7.6.3. Одномерный случай	271
7.6.4. Аномальные эффекты в проводимости, вызванной флуктуациями	271
7.6.5. Проводимость на высоких частотах	272
Глава 8. Дополнение	274
8.1. Метод Боголюбова: обобщенное самосогласованное поле	274
8.1.1. Грязные сверхпроводники	276
8.1.2. Однородный ток в чистых сверхпроводниках	276
8.1.3. Возбуждения в вихрях	278
8.2. Магнитные возмущения и бесщелевая сверхпроводимость	279
8.2.1. Подавление T_c магнитными возмущениями	280
8.2.2. Плотность состояний	283
8.3. Нестационарная теория Гинзбурга — Ландау	287
8.3.1. Электрон-фононная релаксация	290
Приложение. Единицы и обозначения	293
Список литературы	295

СПИСОК ОПЕЧАТОК

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
32	4-я сверху	$c_{k\downarrow}$	$c_{k\uparrow}$
38	формула (2.33а)	\arcsin	$\operatorname{arc sh}$
42	формула (2.38)	$c_{-k\downarrow}$	$c_{-k\downarrow}^*$
	» »	$b_k c_{-l\downarrow}^* c_{l\uparrow}$	$b_k^* c_{-l\downarrow} c_{l\uparrow}$
62	формула (2.856)	$u_k u_k^* \gamma_{kl} \gamma_{k'l}$	$u_k u_k^* \gamma_{kl}^* \gamma_{k'l}$
63	формула (2.87)	$u_k u_k \pm v_k v_k$	$u_k u_k \mp v_k v_k$
75	формула (2.109)	$\sum_k (f_{k0} - f_{ki})$	$\sum_k k (f_{k0} - f_{ki})$
82	11-я сверху	σ_1/ω	$\sigma_1(\omega)$
95	5-я сверху	поля	проникновения поля
96	формула (3.22)	$(\beta^{-1} - \beta^{-3}) J(\beta X, T) d\beta$	$\int_1^\infty (\beta^{-1} - \beta^{-3}) J(\beta X, T) d\beta$
97	22-я сверху	$J \sim J$	$J \sim A$
120	7-я снизу	$s n^* \frac{1}{2} m^* v_s^2$	$n_s^* \left(\frac{1}{2} m^* v_s^2 \right)$
135	3-я сверху	$\int \vec{h} \cdot dS$	$\int h \cdot dS$
138	формула (4.49)	$\alpha \psi ^2 \frac{\beta}{2} \psi ^4$	$\alpha \psi ^2 + \frac{\beta}{2} \psi ^4$
207	10-я сверху	\dot{H}	H
225	формула (6.41)	$ \Phi_0\rangle$	$ \Phi_0\rangle$
227	5-я снизу	T_0	I_0
251	5-я снизу	$\Delta\varphi_1 = +2\pi$ и $\Delta\varphi_1 = -2\pi$	$\Delta\varphi_{12} = +2\pi$ и $\Delta\varphi_{12} = -2\pi$
258	18-я сверху	r	\bar{r}
260	формула (7.37)	$-k_z^2$	$+k_z^2$
302	[35]	Bhatnagar A. (Kyoto) K.	Bhatnagar A. K.
305	19-я снизу	Type III	Type II
306	6-я сверху	Проблема высокотемпературной сверхпроводимости.	Проблема высокотемпературной сверхпроводимости, М., Наука, 1977.

ИБ № 973

Майкл Тинхам

ВВЕДЕНИЕ В СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ

Редактор Н. А. Чеснок
Художественный редактор А. Т. Кирьянов
Перевод художника О. В. Каменева
Технический редактор О. И. Адаскана

Сдано в набор 02.1.70. Выполнено в количестве 14 000 экз.
Формат 50x70^{1/2}. Бумага тгб. № 2
Гарнитура «Историограф». Испечты высокими
Усл. печ. л. 19,5. УЧ.-изд. л. 21,04
Тираж 3100 экз. Зак. № 27602
Знак там. № 88. Цена 3 р 40 к.

Атомиздат. Издательство № 31
ул. Ждановская, 5

Московским типографиям № 6 Союзполиграфпрома
при Государственном комитете СССР
по делам издательства, полиграфии
и книжной торговли,
109088 Москва, Ж-68, Южношорская ул., 24.