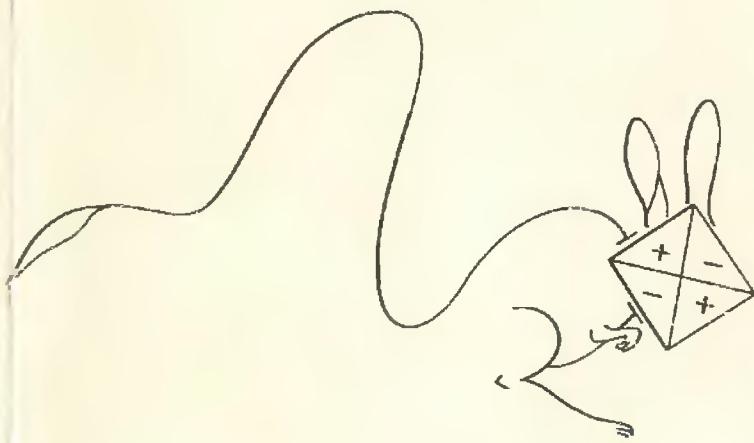


В. П. Минеев, К. В. Самохин

Введение в теорию необычной сверхпроводимости



В. П. Минеев, К. В. Самохин

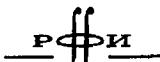
ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ НЕОБЫЧНОЙ СВЕРХПРОВОДИМОСТИ

*Рекомендовано Министерством общего и профессионального образования
Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов
физических специальностей высших учебных заведений*



Москва
Издательство МФТИ
1998

ББК 22.36
М 21
УДК 338.945



Издание осуществлено при поддержке
Российского фонда фундаментальных
исследований по проекту 95-02-07241

Р е п с и з е н т ы:

кафедра проблем физики и астрофизики МФТИ
(зав. кафедрой академик РАН В. Л. Гинзбург)

д.ф.-м.н. Г. Е. Воловик

МИНЕНЕВ В. П., САМОХИН К. В. Введение в теорию необычной сверхпроводимости — М.: Изд-во МФТИ, 1998. — 144 с. — ISBN 5-89155-024-5.

Эта книга — первый в мировой литературе учебник-монография по теории необычной сверхпроводимости (сверхпроводимости с истривиальным куперовским спариванием).

Книга состоит из двух частей. В первой части представлены симметричная классификация сверхпроводящих фаз, теории Бардина—Купера—Шиффера и Гинзбурга—Ландау—Абрикосова, а также описан ряд эффектов, специфичных для необычных сверхпроводников. В изложении первой части используются общие понятия квантовой механики и статистической физики (включая метод вторичного квантования), что делает материал доступным широкому кругу физиков-экспериментаторов и теоретиков всех специальностей, а также студентам-физикам.

Во вторую часть включен ряд задач теории необычной сверхпроводимости, решение которых требует применения аппарата функций Грина (уравнения Горькова). Чтение этой части предполагает соответствующую подготовку читателей и будет полезно, главным образом, физикам-теоретикам, аспирантам и студентам, специализирующимся в области теоретической физики.

В книге использован ряд оригинальных результатов авторов.

Табл. 7. Ил. 22. Библиогр. 98 назв.

К 1604090000—004
98 Без объявл.

ISBN 5-89155-024-5

© В. П. Минеев, К. В. Самохин, 1998

© Издательство МФТИ. Оформление, 1998

Содержание

Предисловие	4
-----------------------	---

Часть I

§ 1. Куперовское спаривание	6
§ 2. Спиновая структура спаренных состояний	9
§ 3. Фазы сверхтекучего гелия-3	12
§ 4. Сверхпроводящие состояния в кристаллах	14
§ 5. Энергия элементарных возбуждений сверхпроводника	24
§ 6. Щель в спектре и критическая температура	31
§ 7. Температурное поведение термодинамических величин при $T \rightarrow 0$	34
§ 8. Эффекты четности числа электронов в сверхпроводниках	37
§ 9. Парамагнитная восприимчивость и сдвиг Найта	43
§ 10. Разложение Ландау свободной энергии сверхпроводника	47
§ 11. Сверхпроводящие состояния с многокомпонентными параметрами порядка	51
§ 12. Уравнения Гинзбурга–Ландау и верхнее критическое поле	55
§ 13. Граничные условия и поверхностная сверхпроводимость	62
§ 14. Мейсснеровское и смешанное состояния в необычных сверхпроводниках	71
§ 15. Магнитные сверхпроводники	79
§ 16. Эффект Джозефсона	85

Часть II

§ 17. Уравнения Горькова	90
§ 18. Функционал Гинзбурга–Ландау	97
§ 19. Верхнее критическое поле в сверхпроводниках с p -спариванием	104
§ 20. Граничные условия для параметра порядка	111
§ 21. Влияние примесей на необычную сверхпроводимость	120
§ 22. Электронная теплопроводность необычных сверхпроводников	129
Список литературы	141

Предисловие

Эта книга возникла на основе курса лекций по теории обычной и необычной сверхпроводимости, который один из авторов (В. П. Минеев) читал в течение ряда лет студентам Московского физико-технического института. Хотя сам термин «необычная сверхпроводимость» появился существенно позднее, начало ее интенсивного изучения относится к 70-м годам и связано с открытием сверхтекучести гелия-3 — явления, имеющего ту же природу и характерные признаки, что и необычная сверхпроводимость. Дело в том, что при фазовом переходе в сверхтекучее состояние жидкого гелия-3 — изотропная ферми-жидкость — становится жидким кристаллом, то есть веществом с анизотропными механическими и магнитными свойствами. В сверхтекучих A - и A_1 -фазах ^3He имеется также спонтанный магнетизм. Таким образом, кроме появления специфической фазовой когерентности макроскопического числа ферми-частиц, обеспечивающей возможность протекания бездиссилиптивных токов, при переходе ^3He в сверхтекучее состояние появляется пространственное и магнитное упорядочение. Сверхпроводимость, сопровождаемая подобными дополнительными нарушениями симметрии, получила название *необычной сверхпроводимости*.

Развитие теории необычной сверхпроводимости было существенно стимулировано недавними экспериментальными открытиями высокотемпературной сверхпроводимости и сверхпроводимости в соединениях с тяжелыми фермионами. Изложению основ макроскопической физики и микроскопической теории необычной сверхпроводимости посвящена настоящая книга. Она может служить введением в современную теорию сверхпроводимости как для студентов-физиков, так и для взрослых исследователей. Для изучения книги желательно знакомство с основами стандартной теории сверхпроводимости, с s -спариванием (см., например, известные руководства [1], [2]). В то же время, многие результаты этой теории воспроизводятся в тексте для удобства сопоставления с соответствующими результатами теории необычных сверхпроводников. Из педагогических соображений большая часть материала изложена на простейшем примере изотропной ферми-жидкости с анизотропным спаривающим взаимодействием с последующим обобщением на случай нетривиальной анизотропной сверхпроводимости в кристаллах.

Книга состоит из двух частей. Первая часть представляет элементарное введение в физику необычной сверхпроводимости. Применяемый в ней математический аппарат включает лишь метод вторичного квантования и общие симметрийные соображения. В эту часть входят: классификация необычных сверхпроводящих состояний, вывод спектра элементарных возбуждений, разложение Ландау для свободной энергии, термодинамические свойства, а также

те пространственно неоднородные задачи, решение которых может быть дано на макроскопическом уровне (теория Гинзбурга—Ландау—Абрикосова).

Во вторую часть книги включены те разделы теории необычной сверхпроводимости, изложение которых требует применения более серьезного математического аппарата функций Грина. Сюда относятся: граничные задачи, влияние примесей, кинетические явления и др. Чтение этой части предполагает владение теоретико-полевыми методами статистической физики (см., например, монографию [3]).

Двухэтажное построение книги, хотя и проигрышное с точки зрения единства изложения, дает возможность ознакомления с основными представлениями физики необычной сверхпроводимости более широкому кругу читателей.

Авторы признательны Г. Е. Воловику, Л. П. Горькову, Ю. С. Барашу, Е. Я. Шерману и В. Л. Гинзбургу, прочитавшим книгу в рукописи и сделавшим ряд полезных замечаний. Особенную благодарность мы выражаем Толе Свидзинскому, проверившему вычисления в последних двух параграфах и внесшему ряд существенных уточнений. Мы благодарны также Г. Д. Булановой и М. Г. Вавилову за помощь в оформлении рукописи.

Литература к предисловию

1. *Де Жен П. Сверхпроводимость металлов и сплавов.* — М.: Мир, 1968.
2. *Абрикосов А. А. Основы теории металлов.* — М.: Наука, 1987.
3. *Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Дзялошинский И. П. Методы квантовой теории поля в статистической физике.* — М.: Физматгиз, 1962.

ЧАСТЬ I

§ 1. Куперовское спаривание

Сверхпроводимость — полное исчезновение электрического сопротивления постоянному току — наблюдается во многих металлах при достаточно низких температурах. О сверхпроводимости можно говорить как о сверхтекучести, то есть полном исчезновении вязкости в жидкости, состоящей из электронов проводимости. Подобное явление имеет место и в ряде других квантовых жидкостей: сверхтекучих ^4He и ^3He , атомных ядрах и нейтронных звездах.

Теоретическое изучение сверхтекучих ферми-систем началось со времени создания в 1957 г. Дж. Бардином, Л. Купером и Дж. Шриффером [1] теории сверхпроводимости (здесь и далее — теория БКШ). В основе этой теории лежит утверждение Л. Купера о неустойчивости основного состояния электронного газа со сколь угодно слабым притяжением между частицами по отношению к образованию связанных состояний — пар электронов. Межэлектронное

притяжение, превосходящее кулоновское отталкивание, в большинстве сверхпроводников обязано своим происхождением взаимодействию электронов с колебаниями кристаллической решетки (фононами), приводящему к образованию области избыточного положительного заряда, окружающего данный электрон. Такое взаимодействие практически изотропно, поэтому куперовские пары образуются в состоянии с нулевым орбитальным моментом (s -спаривание). Иначе дело обстоит в сверхтекучем ^3He , где куперовское спаривание возникает благодаря взаимодействию ядерных спинов атомов гелия-3 с флуктуациями намагниченности жидкости (парамагнонами). Парамагнонное взаимодействие существенно анизотропно и приводит к образованию куперовских пар с орбитальным моментом $L = 1$ (p -спаривание).

Несмотря на значительную разницу в природе притяжения между частицами, куперовское спаривание является общим механизмом, ответственным за формирование сверхтекучего состояния в различных ферми-системах. Следуя работе [2], рассмотрим квантово-механическую задачу о двух электронах в нормальном металле при нулевой температуре. Будем считать, что пара электронов взаимодействует между собой посредством потенциала $V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$, не зависящего от их спинов, а наличие остальных электронов, заполняющих все состояния ниже уровня Ферми, проявляется только через принцип Паули

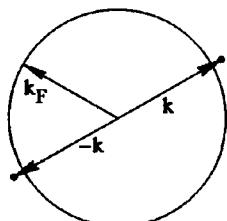


Рис. 1. Два электрона с противоположными импульсами над сферой Ферми

(рис. 1). Для определения уровней энергии и волновых функций $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ электронной пары необходимо решить уравнение Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla_1^2 + \nabla_2^2)\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \left(\Delta + \frac{\hbar^2 k_F^2}{m}\right)\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \quad (1.1)$$

где Δ — энергия электронной пары, отсчитанная от энергии двух свободных электронов, т. е. удвоенной энергией Ферми $\hbar^2 k_F^2/m$.

От координат электронов \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 можно перейти к координатам центра инерции $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$ и относительного движения $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Если считать, что центр инерции пары покойится, иными словами, что импульсы электронов противоположны (\mathbf{k} и $-\mathbf{k}$), то зависимость ψ от \mathbf{R} можно опустить, и уравнение Шредингера перепишется в виде

$$-\frac{\hbar^2}{m} \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}^2} + V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = \left(\Delta + \frac{\hbar^2 k_F^2}{m}\right)\psi(\mathbf{r}). \quad (1.2)$$

Переходя к импульсному представлению

$$g(\mathbf{k}) = \int d^3 r e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}\psi(\mathbf{r}), \quad (1.3)$$

получаем:

$$\frac{\hbar^2}{m}k^2 g(\mathbf{k}) + \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} V(\mathbf{k} - \mathbf{k}') g(\mathbf{k}') = \left(\Delta + \frac{\hbar^2 k_F^2}{m}\right) g(\mathbf{k}). \quad (1.4)$$

Взаимодействие

$$V(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = \int d^3 r e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}} V(\mathbf{r}), \quad (1.5)$$

зависящее от направлений импульсов

$$V(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = \sum_{l=0}^{\infty} V_l(k, k') \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}}'), \quad (1.6)$$

будем считать притяжением в узком слое толщиной $\epsilon_l \ll \epsilon_F = \hbar^2 k_F^2/(2m)$ над поверхностью Ферми

$$V_l(k, k') = \begin{cases} -V_l, & \text{при } \epsilon_F < \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \frac{\hbar^2 k'^2}{2m} < \epsilon_F + \epsilon_l \\ 0, & \text{вне интервала } (\epsilon_F, \epsilon_F + \epsilon_l). \end{cases} \quad (1.7)$$

Здесь $Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}})$ — сферические функции с орбитальным моментом l и его проекцией m на ось z , а $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k_F$.

О我们将 в (1.4) обычный переход от интегрирования по волновому вектору к интегрированию по энергии $\xi = \hbar^2 k^2/2m - \epsilon_F$ и направлениям \mathbf{k}

$$\int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \rightarrow N_0 \int d\xi \int \frac{d\Omega}{4\pi}, \quad (1.8)$$

где

$$N_0 = \frac{mk_F}{2\pi^2 \hbar^2} \quad (1.9)$$

— плотность состояний на поверхности Ферми на одну проекцию спина электрона. Имеем:

$$\left[\frac{\hbar^2}{m} (k^2 - k_F^2) - \Delta \right] g(\mathbf{k}) - N_0 \int_0^{\varepsilon_l} d\xi' \int \frac{d\Omega'}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} V_l \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}}') g(\mathbf{k}') = 0. \quad (1.10)$$

Нетрудно убедиться, что каждому значению орбитального момента l соответствует определенное собственное состояние $\{g_l(\mathbf{k}), \Delta_l\}$ уравнения (1.10). Действительно, подставляя разложение

$$g(\mathbf{k}) = g_{ll'}(\mathbf{k}) = \sum_{m'=-l'}^{l'} a_{l'm'}(k) Y_{l'm'}(\hat{\mathbf{k}}),$$

в (1.10) и пользуясь ортонормированностью сферических функций

$$\int \frac{d\Omega'}{4\pi} Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}}') Y_{l'm'}(\hat{\mathbf{k}}') = \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (1.11)$$

получим:

$$\left[\frac{\hbar^2}{m} (k^2 - k_F^2) - \Delta_l \right] g_l(\mathbf{k}) - N_0 V_l \int_0^{\varepsilon_l} d\xi g_l(\mathbf{k}) = 0.$$

Следовательно,

$$g_l(\mathbf{k}) = \frac{N_0 V_l \int_0^{\varepsilon_l} d\xi g_l(\mathbf{k})}{2\xi - \Delta_l}. \quad (1.12)$$

Интегрируя по ξ левую и правую части этого уравнения, получим

$$1 = N_0 V_l \int_0^{\varepsilon_l} \frac{d\xi}{2\xi - \Delta_l} = \frac{N_0 V_l}{2} \ln \frac{\varepsilon_l - \frac{\Delta_l}{2}}{-\frac{\Delta_l}{2}}.$$

Отсюда, полагая взаимодействие слабым $N_0 V_l \ll 1$, находим

$$\Delta_l = -2\varepsilon_l \exp\left(-\frac{2}{N_0 V_l}\right). \quad (1.13)$$

Итак, при сколь угодно слабом притяжении между двумя электронами возникает связанное состояние, энергия которого зависит от орбитального момента.

Данное утверждение, доказанное для двух электронов, сохраняет свою силу и в многоэлектронной задаче (см. § 6). Именно, сверхпроводящие состояния, соответствующие куперовскому спариванию с различными значениями орбитального момента, имеют различную критическую температуру. Сверхпроводящие состояния

$$g_l(\mathbf{k}) = \sum_{m=-l}^l a_{l'm}(k) Y_{l'm}(\hat{\mathbf{k}}) \quad (1.14)$$

с данным l , отличающиеся наборами коэффициентов $\{a_{lm}(k)\}$, имеют одинаковую критическую температуру. Из всех таких состояний при определенной температуре и определенном давлении реализуется наиболее энергетически выгодное.

Размер куперовской пары. Характерный интервал δk , на котором изменяются коэффициенты $a_{lm}(k)$, связан соотношением неопределенности $\xi_0 \delta k \geq 1$ с характерным размером ξ_0 волновой функции в координатном пространстве — размером куперовской пары¹. Неопределенность волнового вектора δk можно оценить через энергию связи пары:

$$\Delta \sim \delta \epsilon \sim \frac{\hbar^2}{m} k_F \delta k \sim \hbar v_F \delta k.$$

Следовательно,

$$\xi_0 \sim \frac{\hbar v_F}{\Delta}. \quad (1.15)$$

Неустойчивость нормального ферми-газа по отношению к куперовскому спариванию, очевидно, должна проявляться при температуре $T_c \sim \Delta$. Фермиевская скорость оценивается через среднее расстояние между фермionами $n^{-1/3}$ (n — концентрация) как $v_F \sim \hbar n^{1/3}/m$. Для обычных сверхпроводников T_c порядка нескольких градусов, а масса электронов проводимости, грубо говоря, совпадает с массой электронов в вакууме, и $\xi_0 \approx 10^{-5}$ см. В ${}^3\text{He}$ критическая температура ниже на три порядка, но и масса атомов ${}^3\text{He}$ в несколько тысяч раз больше массы электронов, поэтому $\xi_0 \approx 10^{-6}$ см. В тяжелофермионных соединениях эффективная масса электронов в 10–100 раз больше массы электронов в вакууме, а в высокотемпературных сверхпроводниках T_c достигает десятков и сотен градусов. Поэтому в этих соединениях $\xi_0 \approx 10^{-6}–10^{-7}$ см.

Во всех перечисленных случаях $\xi_0 \gg n^{-1/3}$, то есть изолированных куперовских пар не существует, и задача о возникновении сверхпроводящего состояния является существенно многочастичной.

§ 2. Спиновая структура спаренных состояний

Во всех известных к настоящему моменту сверхтекучих ферми-жидкостях куперовские пары состоят из частиц со спином 1/2. Спиновое состояние пары может характеризоваться значением полного спина $S = 0$ (синглет) или $S = 1$ (триплет), либо же представлять суперпозицию этих двух состояний. Для сверхпроводящих систем, обладающих определенной пространственной четностью, последняя возможность исключается. Удобно рассмотреть этот вопрос для сверхпроводящих состояний с определенным орбитальным моментом.

Орбитальная волновая функция (1.14) является четной для четных значений орбитального момента l и нечетной для нечетных l :

$$g_l(-\mathbf{k}) = (-1)^l g_l(\mathbf{k}). \quad (2.1)$$

¹ Точное выражение $\xi_0 = \hbar v_F / (2\pi T_c)$ для размера куперовской пары будет получено в § 18.

В то же время, согласно принципу Паули, полная волновая функция пары, состоящая из произведений вида $g(\mathbf{k})\chi_{12}$, где χ_{12} — спиновая волновая функция частиц 1 и 2, должна менять знак при их перестановке:

$$g(-\mathbf{k})\chi_{21} = -g(\mathbf{k})\chi_{12}. \quad (2.2)$$

Из соотношений (2.1) и (2.2) следует, что спиновое состояние пары с четным (нечетным) орбитальным моментом l должно быть антисимметричным (симметричным) по отношению к перестановке частиц.

Спиновые состояния двух частиц со спином $1/2$ строятся из спиновых состояний

$$\alpha_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |\uparrow\rangle \quad \text{и} \quad \beta_\lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |\downarrow\rangle$$

одной частицы, являющихся собственными для операторов квадрата спина s^2 и проекции спина s_z на ось z :

$$s_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad s_z \alpha_\lambda = \frac{\hbar}{2} \alpha_\lambda, \quad s_z \beta_\lambda = -\frac{\hbar}{2} \beta_\lambda$$

Собственная функция спин-синглетного состояния пары, для которого $S = 0$, $S_z = 0$ (где $S = s_1 + s_2$), антисимметричная по отношению к перестановке частиц, имеет вид

$$\alpha_{1\lambda}\beta_{2\mu} - \beta_{1\lambda}\alpha_{2\mu} = |\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_y,$$

то есть выражается через матрицу Паули σ_y ¹. Полная волновая функция пары с $S = 0$ выглядит при этом следующим образом:

$$\Psi_{\text{pair}}^l = g(\mathbf{k})i\sigma_y = \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}})i\sigma_y, \quad (2.3)$$

где l может принимать значения $0, 2, 4, \dots$. Соответствующие парные состояния, как это принято в атомной физике, носят названия s, d, g, \dots состояний.

Комплексные коэффициенты a_{lm} , входящие в формулу (2.3), одинаковые для всех куперовских пар данного сверхпроводящего состояния, представляют собой *параметр порядка сверхпроводника*. В слабо неоднородных состояниях параметр порядка зависит от координат, то есть коэффициенты a_{lm} являются функциями \mathbf{r} . Так, параметром порядка для сверхпроводника с s -спариванием служит одна комплексная функция

$$a_{00}(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}) = |\psi|e^{i\varphi}, \quad (2.4)$$

а, например, для сверхпроводника с d -спариванием ($l = 2$) таких функций пять.

Для спин-триплетного состояния пары ($S = 1$) волновые функции, соответствующие трем различным проекциям спина пары на ось квантования и

¹ Напомним определение матриц Паули:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

симметричные по отношению к перестановке частиц, имеют вид

$$S_z = \begin{cases} 1, & \alpha_{1\lambda}\alpha_{2\mu} = |\uparrow\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ 0, & \alpha_{1\lambda}\beta_{2\mu} + \beta_{1\lambda}\alpha_{2\mu} = |\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ -1, & \beta_{1\lambda}\beta_{2\mu} = |\downarrow\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

то есть являются симметричными матрицами. Полная волновая функция пары представляет собой линейную комбинацию этих состояний:

$$\Psi_{\text{pair}}^l = g_1(\mathbf{k})|\uparrow\uparrow\rangle + g_2(\mathbf{k})(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) + g_3(\mathbf{k})|\downarrow\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} g_1(\mathbf{k}) & g_2(\mathbf{k}) \\ g_2(\mathbf{k}) & g_3(\mathbf{k}) \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Здесь

$$g_\alpha(\mathbf{k}) = \sum_{m=-l}^l a_{lm}^\alpha Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}) \quad (2.6)$$

— амплитуды состояний с $S_z = 1, 0$ и -1 , соответственно.

Квантовое число l в формуле (2.6) может принимать значения $1, 3, \dots$. Соответствующие состояния называют сверхпроводящими состояниями с p, f, \dots спариванием. Другая форма записи выражения (2.5) связана с использованием базиса симметричных матриц $i\sigma_y = (i\sigma_x\sigma_y, i\sigma_y\sigma_y, i\sigma_z\sigma_y)$. Имеем:

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{pair}}^l &= i(\mathbf{d}(\mathbf{k})\boldsymbol{\sigma})\sigma_y = (d_x(\mathbf{k})\sigma_x + d_y(\mathbf{k})\sigma_y + d_z(\mathbf{k})\sigma_z)i\sigma_y = \\ &= \begin{pmatrix} -d_x(\mathbf{k}) + id_y(\mathbf{k}) & d_z(\mathbf{k}) \\ d_z(\mathbf{k}) & d_x(\mathbf{k}) + id_y(\mathbf{k}) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Компоненты вектора $\mathbf{d}(\mathbf{k})$, линейно выраждающиеся через амплитуды $g_\alpha(\mathbf{k})$:

$$g_1 = -d_x + id_y, \quad g_2 = d_z, \quad g_3 = d_x + id_y,$$

могут быть разложены по сферическим гармоникам:

$$d_\alpha(\mathbf{k}) = \sum_{m=-l}^l b_{lm}^\alpha Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}). \quad (2.8)$$

Коэффициенты b_{lm}^α играют роль параметра порядка сверхпроводника с данным типом спаривания, то есть с данным значением квантового числа l . Так, в простейшем случае p -спаривания параметром порядка является набор девяти комплексных функций b_{lm}^α ($m = -1, 0, 1$).

Упражнение. Используя выражение (2.7) для спиновой волновой функции триплетного состояния, доказать формулы для

а) среднего значения спина пары:

$$\mathbf{S} = i\hbar \int \frac{d\Omega}{4\pi} \mathbf{d}^*(\mathbf{k}) \times \mathbf{d}(\mathbf{k}); \quad (2.9)$$

б) среднего значения орбитального момента пары:

$$\mathbf{L} = i\hbar \int \frac{d\Omega}{4\pi} \mathbf{d}^*(\mathbf{k}) \left[\mathbf{k} \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \right] \mathbf{d}(\mathbf{k}). \quad (2.10)$$

§ 3. Фазы сверхтекучего гелия-3

Сферические гармоники $Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}})$ с $l = 1$

$$Y_{11}(\hat{\mathbf{k}}) \propto (\hat{k}_x + i\hat{k}_y),$$

$$Y_{1-1}(\hat{\mathbf{k}}) \propto (\hat{k}_x - i\hat{k}_y), \quad Y_{10}(\hat{\mathbf{k}}) \propto \hat{k}_z$$

линейно выражаются через компоненты вектора $\hat{\mathbf{k}}$, что порождает еще одну форму записи вектора \mathbf{d} :

$$\mathbf{d}_\alpha(\mathbf{k}) = A_{\alpha i} \hat{k}_i. \quad (3.1)$$

Комплексная 3×3 матрица $A_{\alpha i}$ есть параметр порядка в сверхтекущих фермий-жидкостях с p -спариванием. Именно такой тип спаривания осуществляется в сверхтекучем ^3He [3–6], фазовая диаграмма которого изображена на рис. 2.

Вектор \mathbf{d} в выражении (3.1) зависит от компонент вектора \mathbf{k} в некоторой фиксированной системе координат. Пользуясь тем, что при трехмерных по-

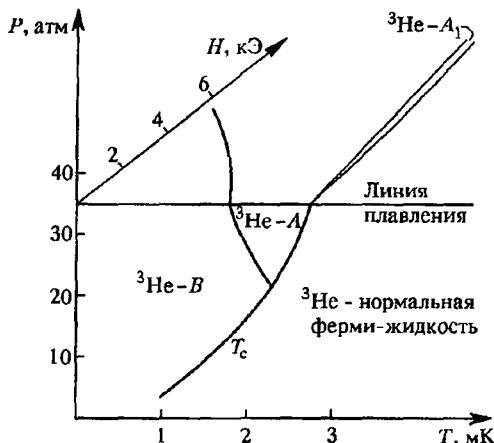


Рис. 2. Фазовая диаграмма жидкого гелия-3 в координатах: температура — T (мК), давление — P (атм), магнитное поле — H (кЭ)

воротах \hat{R}^S и \hat{R}^O в спиновом и орбитальном (координатном) пространствах, соответственно, компоненты векторов \mathbf{d} и \mathbf{k} линейно преобразуются через самих себя, то есть

$$d_\alpha \rightarrow \tilde{d}_i = R_{\alpha\beta}^S d_\beta,$$

$$k_i \rightarrow \tilde{k}_j = R_{ij}^O k_j,$$

мы можем записать параметр порядка в произвольной системе координат.

Перечислим возможные фазы сверхтекущей жидкости с p -спариванием, различающиеся видом спинового вектора \mathbf{d} (или матрицы $A_{\alpha i}$).

B-фаза:

$$\mathbf{d}(\mathbf{k}) \propto \hat{\mathbf{k}}, \quad (3.2)$$

то есть $A_{\alpha i} \propto \delta_{\alpha i}$ (в произвольной системе координат $A_{\alpha i} \propto R_{\alpha i}$, где \hat{R} — матрица трехмерных вращений). Волновая функция пары (см. (2.7)) имеет вид

$$\Psi_{\text{pair}}^B \propto \begin{pmatrix} -\hat{k}_x + i\hat{k}_y & \hat{k}_z \\ \hat{k}_z & \hat{k}_x + i\hat{k}_y \end{pmatrix} = \\ = (-\hat{k}_x + i\hat{k}_y)|\uparrow\uparrow\rangle + \hat{k}_z(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) + (\hat{k}_x + i\hat{k}_y)|\downarrow\downarrow\rangle. \quad (3.3)$$

Таким образом, B -фаза представляет собой линейную комбинацию трех равновероятных состояний $|S_z = +1, m = -1\rangle$, $|S_z = 0, m = 0\rangle$ и $|S_z = -1, m = +1\rangle$.

Имеются еще две фазы, в которых реализуется часть состояний, из которых состоит B -фаза.

Планарная фаза:

$$\mathbf{d}(\mathbf{k}) \propto (\hat{k}_x, \hat{k}_y, 0). \quad (3.4)$$

Отсюда

$$\Psi_{\text{pair}}^{\text{pl}} \propto (-\hat{k}_x + i\hat{k}_y)|\uparrow\uparrow\rangle + (\hat{k}_x + i\hat{k}_y)|\downarrow\downarrow\rangle. \quad (3.5)$$

Планарная фаза является смесью двух состояний: $|S_z = +1, m = -1\rangle$ и $|S_z = -1, m = +1\rangle$.

Полярная фаза:

$$\mathbf{d}(\mathbf{k}) \propto (0, 0, \hat{k}_z). \quad (3.6)$$

Отсюда

$$\Psi_{\text{pair}}^{\text{pol}} \propto \hat{k}_z(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle). \quad (3.7)$$

Полярная фаза состоит из пар с $S_z = 0$ и $m = 0$.

Имеются также фазы с ненулевыми орбитальным и спиновым моментами.

A-фаза:

$$\mathbf{d}(\mathbf{k}) \propto (\hat{k}_x + i\hat{k}_y, 0, 0), \quad (3.8)$$

то есть $A_{\alpha i}^A \propto V_\alpha(\Delta'_i + i\Delta''_i)$, где $\mathbf{V} = (1, 0, 0)$, $\Delta' = (1, 0, 0)$, $\Delta'' = (0, 1, 0)$. В произвольной системе координат: \mathbf{V} — единичный вектор в спиновом пространстве, а Δ' и Δ'' — единичные взаимно перпендикулярные векторы в координатном пространстве. Парная волновая функция имеет вид

$$\Psi_{\text{pair}}^A \propto (\hat{k}_x + i\hat{k}_y) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \propto (\hat{k}_x + i\hat{k}_y)(|\uparrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle). \quad (3.9)$$

Таким образом, A -фаза представляет собой линейную комбинацию двух равновероятных состояний $|S_z = +1, m = 1\rangle$ и $|S_z = -1, m = 1\rangle$. Спиновый момент в этой фазе отсутствует. Орбитальный момент сосуда с A -фазой в основном состоянии должен быть порядка $N\hbar$, где N — число куперовских пар.

A_1 -фаза:

$$\mathbf{d}(\mathbf{k}) \propto (\hat{k}_x + i\hat{k}_y, i(\hat{k}_x + i\hat{k}_y), 0). \quad (3.10)$$

Отсюда $A_{\alpha i}^{A_1} \propto (V'_\alpha + iV''_\alpha)(\Delta'_i + i\Delta''_i)$, причем в произвольной системе координат \mathbf{V}' и \mathbf{V}'' — единичные взаимно перпендикулярные спиновые векторы,

а Δ' и Δ'' определяются аналогично A -фазе. Парная волновая функция имеет вид

$$\Psi_{\text{pair}}^{A_1} \propto (\hat{k}_x + i\hat{k}_y) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (\hat{k}_x + i\hat{k}_y) |\uparrow\uparrow\rangle. \quad (3.11)$$

Следовательно, A_1 -фаза состоит из пар с $S_z = 1$ и $m = 1$. Эта фаза обладает как орбитальным, так и спиновым магнитным моментом.

β -фаза:

$$d(\mathbf{k}) \propto (\hat{k}_x, i\hat{k}_x, 0). \quad (3.12)$$

Отсюда $A_{\alpha i}^{\beta} \propto (V'_\alpha + iV''_\alpha)\Delta_i$, и

$$\Psi_{\text{pair}}^{\beta} \propto \hat{k}_x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = ((\hat{k}_x + i\hat{k}_y) + (\hat{k}_x - i\hat{k}_y)) |\uparrow\uparrow\rangle, \quad (3.13)$$

то есть β -фаза состоит из пар с $S_z = 1$, $m = +1$ и $S_z = 1$, $m = -1$ и обладает ненулевым спиновым моментом.

§ 4. Сверхпроводящие состояния в кристаллах

Из рассмотрения в § 2 следует, что сверхпроводящие состояния, обладающие определенной пространственной четностью, могут быть либо спин-синглетными, либо спин-триплетными. Именно, парная волновая функция для пространственно-четных состояний

$$\Psi_{\text{pair}}^s \propto g(\mathbf{k})i\sigma_y, \quad (4.1)$$

$$g(\mathbf{k}) = g(-\mathbf{k}), \quad (4.2)$$

соответствует $S = 0$, а для пространственно-нечетных состояний $S = 1$, то есть

$$\Psi_{\text{pair}}^t \propto (d(\mathbf{k})\sigma)i\sigma_y, \quad (4.3)$$

$$d(\mathbf{k}) = -d(-\mathbf{k}). \quad (4.4)$$

Симметрия системы в сверхпроводящем состоянии включает в себя пространственную инверсию, если парная волновая функция Ψ_{pair} под действием оператора инверсии I не меняется:

$$I\Psi_{\text{pair}} = \Psi_{\text{pair}}, \quad (4.5)$$

что соответствует синглетному спариванию, или меняет знак:

$$I\Psi_{\text{pair}} = -\Psi_{\text{pair}}, \quad (4.6)$$

при триплетном спаривании. Смешанные сверхпроводящие состояния вида

$$a\Psi^s + b\Psi^t \quad (4.7)$$

в этом случае запрещены.

Если же симметрия нормального состояния не включает пространственную инверсию (кристаллы без центра инверсии), или симметрия по отношению к инверсии нарушается при переходе в сверхпроводящее состояние (специальный вид спаривающего взаимодействия), то состояния типа (4.7) в

принципе могут реализовываться [7]. Мы будем предполагать наличие пространственной инверсии и работать со сверхпроводящими состояниями вида (4.1) либо (4.3).

Как было показано в § 1, в изотропном веществе температуры перехода в сверхпроводящие состояния с разными значениями орбитального момента куперовских пар различны, то есть $T_c = T_c(l)$. Функции $g(\mathbf{k})$ и $d(\mathbf{k})$ для синглетного и триплетного состояний, соответственно, имеют вид линейных комбинаций сферических функций с данным l :

$$g^l(\mathbf{k}) = \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}), \quad \text{при } l = 0, 2, 4, \dots, \quad (4.8)$$

$$d^l(\mathbf{k}) = \sum_{m=-l}^l b_{lm} Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}), \quad \text{при } l = 1, 3, 5, \dots \quad (4.9)$$

Как отмечалось в предыдущем параграфе, выбор системы координат, в которой записываются функции $Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}})$, роли не играет, поскольку при переходе от одного базиса $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ к другому $(\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}')$, то есть при пространственных вращениях системы координат, функции $Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}')$ линейно выражаются через сферические гармоники с тем же значением l :

$$Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}') = \sum_{m'=-l}^l \Gamma_{mm'} Y_{lm'}(\hat{\mathbf{k}}).$$

В общем случае говорят, что набор функций $\{\psi_i(\mathbf{r})\}$ образует базис не-приводимого представления некоторой группы пространственной симметрии G , если функции данного набора при любом преобразовании симметрии g из этой группы линейно выражаются только через самих себя [8]:

$$\psi_i(g\mathbf{r}) = \psi_i(\mathbf{r}') = \sum_{j=1}^d c_{ij} \psi_j(\mathbf{r}).$$

В изотропной системе, инвариантной относительно любых пространственных вращений, то есть преобразований из группы SO_3 , неприводимые представления нумеруются значением орбитального момента l , а набор из $2l+1$ сферических гармоник с данным l образует базис представления. Типы куперовского спаривания при этом находятся во взаимнооднозначном соответствии с неприводимыми представлениями группы трехмерных вращений.

Принцип классификации сверхпроводящих состояний согласно различным представлениям группы симметрии системы в нормальном состоянии полностью сохраняется и в присутствии кристаллической анизотропии [9–14]. Именно, сверхпроводящие состояния с различными критическими температурами описываются базисными функциями различных неприводимых представлений Γ группы G точечной симметрии кристалла¹, причем $T_c = T_c(\Gamma)$.

¹ Пространственная группа симметрии кристалла включает комбинации операций точечной симметрии и трансляций. Последние можно не принимать во внимание, так как никакой дополнительной пространственной модуляции при переходе в сверхпроводящее состояние не возникает.

Разложения (4.8), (4.9) в этом случае принимают вид:

$$g(\mathbf{k}) = \sum_{i=1}^{d_\Gamma} \eta_i \psi_i^{\Gamma_e}(\hat{\mathbf{k}}), \quad (4.10)$$

$$\mathbf{d}(\mathbf{k}) = \sum_{i=1}^{d_\Gamma} \eta_i \psi_i^{\Gamma_u}(\hat{\mathbf{k}}), \quad (4.11)$$

где $\psi_i^{\Gamma_e}(\hat{\mathbf{k}})$ и $\psi_i^{\Gamma_u}(\hat{\mathbf{k}})$ — базисные функции (g — четные, а u — нечетные по $\hat{\mathbf{k}}$) неприводимых представлений Γ размерности d_Γ группы G .

Для пренебрежимо малого спин-орбитального взаимодействия имеется вырождение состояний по отношению к вращениям спиновых векторов:

$$\eta_i^\alpha \rightarrow \tilde{\eta}_i^\alpha = R_{\alpha\beta}^S \eta_i^\beta.$$

В случае сильного спин-орбитального взаимодействия, которое имеет место в соединениях, содержащих элементы с большими атомными номерами, удобно представить (4.11) в виде разложения

$$\mathbf{d}^\Gamma(\mathbf{k}) = \sum_{i=1}^{d_\Gamma} \eta_i \psi_i^{\Gamma_u}(\hat{\mathbf{k}}) \quad (4.12)$$

по векторным базисным функциям

$$\begin{aligned} \psi_i^{\Gamma_u}(\hat{\mathbf{k}}) &= \psi_i^x(\hat{\mathbf{k}})\hat{x} + \psi_i^y(\hat{\mathbf{k}})\hat{y} + \psi_i^z(\hat{\mathbf{k}})\hat{z}, \\ \psi_i^{\Gamma_u}(-\hat{\mathbf{k}}) &= -\psi_i^{\Gamma_u}(\hat{\mathbf{k}}) \end{aligned} \quad (4.13)$$

неприводимого представления Γ . Базис в спиновом пространстве задается единичными аксиальными векторами $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$, жестко связанными с кристаллическими осями. Здесь необходимо сделать следующее замечание. Несмотря на то, что в кристаллах с сильным спин-орбитальным взаимодействием спин электрона становится «плохим» квантовым числом, электронные состояния тем не менее остаются двукратно вырожденными (крамерсовское вырождение — следствие симметрии по отношению к обращению времени), что позволяет характеризовать их «псевдоспином». В этом же смысле следует понимать термин «спин-синглетное» или «спин-триплетное» сверхпроводящие состояния.

Совокупность комплексных коэффициентов η_i (или η_i) в разложениях (4.10), (4.11) или (4.12) представляет собой *параметр порядка* в кристаллических сверхпроводниках. Таким образом, возможны как сверхпроводящие состояния с однокомпонентными параметрами порядка $\eta = |\eta|e^{i\varphi}$, так и с многокомпонентными параметрами порядка.

Помимо точечных преобразований, группа симметрии нормального состояния \mathcal{G} включает операцию обращения времени R и калибровочные преобразования $U(1)^2$:

$$\mathcal{G} = U(1) \times R \times G.$$

²В отсутствие спин-орбитального взаимодействия в группу \mathcal{G} необходимо включать также преобразования свободных трехмерных вращений спинов, образующих группу SO_3^S .

Переход в сверхтекучес или сверхпроводящее состояние означает появление фазовой когерентности, то есть различия между состояниями с различными фазами φ параметра порядка $|\eta|e^{i\varphi}$, о чем говорят как о спонтанном нарушении калибровочной симметрии $U(1)$. При переходе в данное сверхтекучес состояние могут нарушаться также и другие симметрии из G (*необычная сверхтекучесть* или *сверхпроводимость*). В результате сохраняется инвариантность лишь по отношению к преобразованиям, образующим подгруппу H (*сверхпроводящий класс*) группы G . Таким образом, задача перечисления всех возможных сверхпроводящих (или сверхтекущих) фаз сводится к нахождению сверхпроводящих классов, соответствующих различным нарушенным симметриям нормальной фазы [9].

Среди допустимых по симметрии сверхпроводящих состояний следует выделять те, которые могут возникнуть непосредственно из нормальной фазы³. Согласно общей теории фазовых переходов Ландау, параметры порядка таких состояний должны преобразовываться по одному из неприводимых представлений точечной группы симметрии G нормальной фазы [9]. Обычное сверхпроводящее состояние обладает полной точечной симметрией кристалла, то есть относится к единичному представлению A_{1g} и описывается тривиальным сверхпроводящим классом $H = R \times G$. Точечная симметрия всех остальных сверхпроводящих состояний, относящихся к неслиничным представлениям

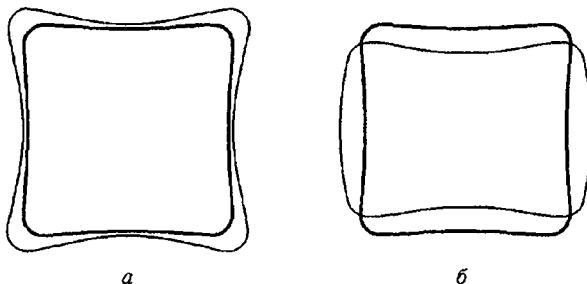


Рис. 3. Сечение ферми-поверхности (жирная линия) в базисной плоскости тетрагонального кристалла (группа симметрии D_{4h}). Тонкой линией изображены: а) амплитуда параметра порядка обычного сверхпроводящего состояния (представление A_{1g}), б) амплитуда параметра порядка одного из необычных сверхпроводящих состояний (представление B_{1g}), поникающего точечную симметрию кристалла до D_{2h}

(или нечетному единичному представлению A_{1u}), нарушена, и они называются *нетривиальными* или *необычными сверхпроводящими состояниями* (рис. 3).

В случае однокомпонентного параметра порядка имеется взаимнооднозначное соответствие между одномерными представлениями группы G и сверхпроводящими классами. Напротив, неодномерные представления порождают несколько сверхпроводящих состояний, относящихся к различным сверхпроводящим классам и имеющих одинаковую критическую температуру, но разную свободную энергию (подробнее об этом см. § 11). Это имеет место, например, для фаз с p -спариванием, перечисленных в § 3.

³Сверхпроводящие классы, не относящиеся к данной категории, соответствуют состояниям, которые могут возникнуть при дополнительных фазовых переходах внутри сверхпроводящей фазы.

Сверхпроводящие классы в гексагональном кристалле. В качестве примера, важного с точки зрения приложений к сверхпроводящему соединению с тяжелыми фермионами UPt_3 , обсудим сверхпроводящие состояния в кристалле с гексагональной симметрией, для которого $G = D_{6h} = D_6 \times I$, где I — преобразование инверсии. Здесь имеется 6 неприводимых представлений: 4 одномерных (A_1, A_2, B_1, B_2) и 2 двумерных (E_1, E_2). Симметрия каждого сверхпроводящего состояния должна описываться подгруппой группы $\mathcal{G} = U(1) \times R \times D_{6h}$.

Группа $D_6 = \{C_n, U_n\}$ состоит из шести операций поворота C_n вокруг оси \hat{z} на угол $\pi n/3$ ($n = 0, 1, \dots, 5$; $C_0 = E$ — единичный элемент группы) и вращений U_n на угол π вокруг шести осей

$$-\hat{x} \sin \frac{\pi n}{3} + \hat{y} \cos \frac{\pi n}{3}.$$

Среди подгрупп группы \mathcal{G} имеются четыре подгруппы H , которые соответствуют сверхпроводящим состояниям, описываемым функциями четырех одномерных представлений D_6 . Это подгруппы $D_6 \times R$, $D_6(C_6) \times R$, $D_6(D_3) \times R$, и $D_6(D'_3) \times R$. Подгруппа, указанная в скобках, объединяет те элементы группы D_{6h} , которые не умножаются на фазовый множитель из $U(1)$, то есть

$$\begin{aligned} D_6(C_6) &= \{C_n, e^{i\pi} U_n\} \\ D_6(D_3) &= \{C_{2k}, U_{2k}, e^{i\pi} C_{2k+1}, e^{i\pi} U_{2k+1}\}, \\ D_6(D'_3) &= \{C_{2k}, U_{2k+1}, e^{i\pi} C_{2k+1}, e^{i\pi} U_{2k}\}, \end{aligned}$$

где $k = 0, 1, 2$. Легко видеть, что подгруппа D_6 соответствует единично-му представлению A_1 . Ровно половина элементов подгруппы $D_6(C_6)$ (или $D_6(D_3)$, $D_6(D'_3)$) есть элементы группы D_6 , другая половина — комбинации операций точечной симметрии и калибровочного преобразования $e^{i\pi}$. Так, точечные преобразования U_n меняют знак параметра порядка сверхпроводящего состояния с симметрией $D_6(C_6)$, которое, тем самым, соответствует неединичному представлению A_2 группы D_6 (аналогично, $D_6(D_3)$ соответствует B_1 , а $D_6(D'_3)$ соответствует B_2).

Высокотемпературные сверхпроводники. Еще одним примером необычной сверхпроводимости являются высокотемпературные сверхпроводники, к которым относятся металлооксидные материалы с T_c в пределах от 7 К до 100 К. Наиболее изученные представители этого класса — соединения $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$ и $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$, — обладают тетрагональной симметрией кристаллической решетки, то есть $G = D_{4h} = D_4 \times I$. В иттрий-бариевых соединениях имеются небольшие (порядка одного процента) орторомбические искажения кристаллической решетки, влияние которых мы рассмотрим несколько ниже.

Группа D_4 , включающая операции поворотов C_n вокруг оси \hat{z} на угол $\pi n/2$ и поворотов U_n на угол π вокруг осей

$$\hat{x} \cos \frac{\pi n}{2} + \hat{y} \sin \frac{\pi n}{2},$$

где $n = 0, 1, 2, 3$, имеет 5 неприводимых представлений: четыре одномерных (A_1, A_2, B_1, B_2) и одно двумерное (E).

Совокупность данных о низкотемпературном поведении термодинамических характеристик [15, 16], а также измерения угловой зависимости амплитуды фотоэмиссии (ARPES) [17] и фазочувствительные SQUID-эксперименты [18–20] (см. § 16) позволяют сделать вывод о том, что сверхпроводящее состояние в этих соединениях описывается однокомпонентным нетривиальным параметром порядка, отвечающим синглетному спариванию и преобразующимся в соответствии с представлением B_{1g} , то есть

$$g(\mathbf{k}) \propto \hat{k}_x^2 - \hat{k}_y^2. \quad (4.14)$$

В устоявшейся терминологии такая импульсная зависимость называется «*d*-спариванием», что, однако, не совсем точно, поскольку в кристаллах нет классификации состояний по орбитальному моменту. В соответствующем сверхпроводящем классе

$$D_4(D_2) \times R = \{C_{2k}, U_{2k}, e^{i\pi} C_{2k+1}, e^{i\pi} U_{2k+1}\} \times R \quad (k = 0, 1)$$

фазовые множители $e^{i\pi} = -1$ компенсируют смену знака базисной функции при действии операций точечной симметрии.

Орторомбические кристаллы характеризуются группой симметрии $G = D_{2h}$, имеющей четыре одномерных неприводимых представления. Простейшее из них — единичное A_{1g} , соответствующее обычной сверхпроводимости, описывается параметром порядка, инвариантным относительно вращений на угол π вокруг направлений $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$. Для синглетного спаривания такими свойствами, в частности, обладает функция

$$g(\mathbf{k}) \propto a + b(\hat{k}_x^2 - \hat{k}_y^2),$$

представляющая собой смесь *s* и *d*-состояний — параметр порядка сверхпроводимости с так называемым «*s* + *d*-спариванием». Интересно отметить, что это вполне обычное сверхпроводящее состояние в орторомбическом кристалле может оказаться довольно «близким» к необычному сверхпроводящему состоянию B_{1g} в тетрагональном кристалле. Так будет, когда небольшие орторомбические искажения в тетрагональном кристалле вызывают примешивание *s*-компоненты к исходной *d*-компоненте параметра порядка (4.14). Другое, часто фигурирующее в литературе «*s* + *id*-состояние», мы обсудим в следующем подразделе.

Магнитные сверхпроводящие классы. Приведенные выше примеры сверхпроводящих классов явно содержат операцию R , то есть соответствующие состояния инвариантны по отношению к обращению времени. Это, в свою очередь, означает отсутствие спонтанного магнетизма куперовских пар. Однако действие операций точечной группы на параметр порядка может быть скомпенсировано умножением не только на фазовый множитель из калибронной группы $U(1)$, но и на операцию R , которая сводится к комплексному сопряжению: $g(\mathbf{k}) \rightarrow g^*(\mathbf{k})$ или $d(\mathbf{k}) \rightarrow d^*(\mathbf{k})$. Тем самым инвариантность по отношению к обращению времени оказывается нарушенной, и симметрия таких сверхпроводящих состояний описывается *магнитными сверхпроводящими классами* [9].

Легко видеть, что непосредственный переход из нормальной фазы в сверхпроводящую с однокомпонентным параметром порядка и нарушенной симметрией по отношению к обращению времени невозможен. В самом деле, вблизи

критической температуры сверхпроводящие классы находятся во взаимнооднозначном соответствии с представлениями точечной группы G , а операция R переводит базисную функцию представления в комплексно-сопряженную и поэтому требует, чтобы размерность представления d_Γ была не меньше двух.

Детальное обсуждение вопроса о магнетизме сверхпроводящих фаз с многокомпонентными параметрами порядка мы отложим до § 15, а здесь приведем лишь один пример магнитного сверхпроводящего класса для тетрагонального кристалла. Нетрудно убедиться в том, что у группы $\mathcal{G} = U(1) \times R \times D_{4h}$ имеется подгруппа:

$$D_4(D_2) = \{C_{2k}, U_{2k}, RC_{2k+1}, RU_{2k+1}\} \quad (k = 0, 1),$$

содержащая операцию обращения времени лишь в комбинации с поворотами вокруг осей симметрии тетрагональной решетки. Указанной симметрией обладает, например, сверхпроводящая фаза синглетного спаривания с параметром порядка $g(\mathbf{k}) = (\Delta_s + i\Delta_d(\hat{k}_x^2 - \hat{k}_y^2))e^{i\varphi}$, где Δ_s и Δ_d — произвольные константы. Такое состояние (часто называемое $s + id$ -спариванием) может возникнуть в результате двух последовательных фазовых переходов: сначала из нормальной фазы в сверхпроводящую с однокомпонентным параметром порядка $g_1(\mathbf{k}) = \Delta_s e^{i\varphi}$, соответствующим представлению A_{1g} , а затем, при более низкой температуре — в другую сверхпроводящую fazу, в которой к $g_1(\mathbf{k})$ примешивается параметр порядка $g_2(\mathbf{k}) = \Delta_d(\hat{k}_x^2 - \hat{k}_y^2)e^{i\varphi}$, соответствующий представлению B_{1g} .

Нули в спектре элементарных возбуждений. Наличие нетривиальных элементов симметрии, включающих калибровочное преобразование, приводит к важному следствию — существованию нулей параметра порядка. Обсудим это свойство для спин-синглетного параметра порядка $g(\mathbf{k})$ с симметрией $D_6(C_6) \times R$:

$$C_n g(\mathbf{k}) = g(\mathbf{k}), \quad (4.15)$$

$$e^{i\pi} U_n g(\mathbf{k}) = g(\mathbf{k}), \quad (4.16)$$

$$g(-\mathbf{k}) = g(\mathbf{k}). \quad (4.17)$$

В частности, значений параметра порядка на плоскости (k_x, k_z) , перпендикулярной оси \hat{y} , вокруг которой осуществляется поворот U_0 , из (4.16) имеем:

$$U_0 g(k_x, k_z) = -g(k_x, k_z). \quad (4.18)$$

С другой стороны, $U_0 k_x = -k_x$, $U_0 k_z = -k_z$, и

$$U_0 g(k_x, k_z) = g(-k_x, -k_z)$$

Используя свойство (4.17), получаем:

$$U_0 g(k_x, k_z) = g(k_x, k_z). \quad (4.19)$$

Равенства (4.18) и (4.19) могут быть выполнены одновременно лишь при условии

$$g(k_x, k_z) = 0. \quad (4.20)$$

Таким образом, параметр порядка обращается в нуль на плоскости (k_x, k_z) , более того, он меняет знак при ее пересечении. То же самое верно для всех плоскостей, перпендикулярных к осям поворотов U_n .

Таблица 1. Базисные функции чистых ($S = 0$) и нечетных ($S = 1$, сильное спин-орбитальное взаимодействие) представлений группы D_{6h}

d	Γ	$\psi_i^{\Gamma_g}(\vec{k}), \psi_i^{\Gamma_u}(\vec{k})$	H
1	A_{1g}	$ak_x^2 + b(k_x^2 + k_y^2) + c(k_x^6 - 15k_x^4k_y^2 + 15k_x^2k_y^4 - k_y^6)$	$D_6 \times R$
1	A_{1u}	$ak_z\hat{z} + b(k_x\hat{x} + k_y\hat{y})$	
1	A_{2g}	$(k_x^3 - 3k_xk_y^2)(k_y^3 - 3k_yk_x^2)$	$D_6(C_6) \times R$
1	A_{2u}	$a\hat{z}k_z(k_x^3 - 3k_xk_y^2)(k_y^3 - 3k_yk_x^2) + b(\hat{x}k_y - \hat{y}k_x)$	
1	B_{1g}	$k_z(k_x^3 - 3k_xk_y^2)$	$D_6(D_3) \times R$
1	B_{1u}	$a\hat{z}(k_x^3 - 3k_xk_y^2) + bk_z[\hat{x}(k_x^2 - k_y^2) - 2\hat{y}k_xk_y]$	
1	B_{2g}	$k_z(k_y^3 - 3k_yk_x^2)$	$D_6(D'_3) \times R$
1	B_{2u}	$a\hat{z}(k_y^3 - 3k_yk_x^2) + bk_z[\hat{y}(k_x^2 - k_y^2) - 2\hat{x}k_xk_y]$	
2	E_{1g}	k_zk_x, k_zk_y	
2	E_{1u}	$\hat{z}k_x, \hat{z}k_y$ или $k_z\hat{x}, k_z\hat{y}$	
2	E_{2g}	$k_x^2 - k_y^2, 2k_xk_y$	
2	E_{2u}	$k_x\hat{x} - k_y\hat{y}, k_x\hat{y} + k_y\hat{x}$ или $\hat{z}k_z(k_x^2 - k_y^2), 2\hat{z}k_zk_xk_y$	

Таблица 2. Базисные функции нечетных ($S = 1$, слабое спин-орбитальное взаимодействие) представлений группы D_{6h}

d	Γ	$\psi_i^{\Gamma_u}(\vec{k})$	H
1	A_{1u}	$k_z(k_x^3 - 3k_xk_y^2)(k_y^3 - 3k_yk_x^2)$	$D_6 \times R \times SO_3^S$
1	A_{2u}	k_z	$D_6(C_6) \times R \times SO_3^S$
1	B_{1u}	$k_y^3 - 3k_yk_x^2$	$D_6(D_3) \times R \times SO_3^S$
1	B_{2u}	$k_x^3 - 3k_xk_y^2$	$D_6(D'_3) \times R \times SO_3^S$
2	E_{1u}	k_x, k_y	
2	E_{2u}	$k_z(k_x^2 - k_y^2), 2k_xk_yk_z$	

Щель в спектре элементарных возбуждений сверхпроводника пропорциональна модулю параметра порядка⁴:

$$\Delta_k \sim |g(k)| \quad \text{при } S = 0, \quad \Delta_k \sim |d(k)| \quad \text{при } S = 1$$

(см. ниже § 5). Поэтому энергетический спектр квазичастиц в сверхпроводящем состоянии с симметрией $D_6(C_6) \times R$ является бесщелевым на линиях пересечения поверхности Ферми и плоскостей, перпендикулярных к осям поворотов U_n .

Для спин-триплетного параметра порядка $d(k)$ с симметрией $D_6(C_6) \times R$ имеем:

$$C_n d(k) = d(k), \quad (4.21)$$

$$e^{i\pi} U_n d(k) = d(k), \quad (4.22)$$

$$d(-k) = -d(k). \quad (4.23)$$

⁴Данное утверждение справедливо для унитарных сверхпроводящих состояний в отсутствие примесей (см. сноску 6 в § 5 и § 17).

Таблица 3. Базисные функции четных ($S = 0$) и нечетных ($S = 1$, сильное спин-орбитальное взаимодействие) представлений группы D_{4h}

d	Γ	$\psi_i^{\Gamma_s}(\hat{k}), \psi_i^{\Gamma_u}(\hat{k})$	H
1	A_{1g}	$ak_x^2 + b(k_x^2 + k_y^2)$	$D_4 \times R$
1	A_{1u}	$a\hat{z}k_x + b(\hat{x}k_x + \hat{y}k_y)$	
1	A_{2g}	$k_x k_y (k_x^2 - k_y^2)$	$D_4(C_4) \times R$
1	A_{2u}	$a(\hat{x}k_y + \hat{y}k_x)(k_x^2 - k_y^2) + b(\hat{x}k_y - \hat{y}k_x)$	$D_4(D_2) \times R$
1	B_{1g}	$k_x^2 - k_y^2$	
1	B_{1u}	$a(\hat{x}k_x - \hat{y}k_y) + b\hat{z}k_x(k_x^2 - k_y^2)$	
1	B_{2g}	$k_x k_y$	$D_4(D'_2) \times R$
1	B_{2u}	$a(\hat{x}k_y + \hat{y}k_x) + b\hat{z}k_x k_y k_z$	
2	E_g	$k_x k_z, k_z k_y$	
2	E_u	$\hat{z}k_x, \hat{z}k_y$	

Таблица 4. Базисные функции нечетных ($S = 1$, слабое спин-орбитальное взаимодействие) представлений группы D_{4h}

d	Γ	$\psi_i^{\Gamma_s}(\hat{k})$	H
1	A_{1u}	$k_x k_y k_z (k_x^2 - k_y^2)$	$D_4 \times R \times SO_3^S$
1	A_{2u}	k_z	$D_4(C_4) \times R \times SO_3^S$
1	B_{1u}	$k_x k_y k_z$	$D_4(D_2) \times R \times SO_3^S$
1	B_{2u}	$k_z (k_x^2 - k_y^2)$	$D_4(D'_2) \times R \times SO_3^S$
2	E_u	k_x, k_y	

Инвариантность параметра порядка по отношению к вращениям C_n означает, что для импульсов, направленных вдоль оси \hat{z} , отлична от нуля только z -компоненты вектора $\mathbf{d}(\mathbf{k})$:

$$\mathbf{d}(k_z) = \hat{z}\psi^z(\hat{k}_z). \quad (4.24)$$

Из (4.22)

$$U_0 \mathbf{d}(k_z) = -\mathbf{d}(k_z), \quad (4.25)$$

но в то же время из (4.23) и (4.24) получаем:

$$U_0 \mathbf{d}(k_z) = U_0 \hat{z}\psi^z(\hat{k}_z) = -\hat{z}\psi^z(-\hat{k}_z) = \hat{z}\psi^z(\hat{k}_z) = \mathbf{d}(k_z). \quad (4.26)$$

Из сравнения соотношений (4.25) и (4.26) следует, что

$$\mathbf{d}(k_z) = 0, \quad (4.27)$$

то есть параметр порядка равен нулю на оси \hat{z} , и поэтому спектр квазичастиц является бесщелевым на северном и южном полюсах ферми-поверхности.

Таким образом, имеется общая особенность сверхпроводящих состояний, симметрия которых включает комбинации точечных и калибровочных преобразований (или точечных преобразований и операции обращения времени). А именно, спектр элементарных возбуждений в таких сверхпроводниках является бесщелевым. Нули параметра порядка расположены на

Таблица 5. Базисные функции четных ($S = 0$) и нечетных ($S = 1$, сильное спин-орбитальное взаимодействие) представлений группы O_h ($\epsilon = \exp(2\pi i/3)$). $O(T) = (E, 8C_3, 3C_2, 6e^{i\pi} U_2, 6e^{i\pi} C_4)$

d	Γ	$\psi_i^{\Gamma_S}(\vec{k}), \psi_i^{\Gamma_u}(\vec{k})$	H
1	A_{1g}	$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$	$O \times R$
1	A_{1u}	$\hat{x}k_x + \hat{y}k_y + \hat{z}k_z$	$O(T) \times R$
1	A_{2g}	$(k_x^2 - k_y^2)(k_x^2 - k_z^2)(k_z^2 - k_x^2)$	
1	A_{2u}	$\hat{x}k_x(k_z^2 - k_y^2) + \hat{y}k_y(k_x^2 - k_z^2) + \hat{z}k_z(k_y^2 - k_x^2)$	
2	E_g	$k_x^2 + \epsilon k_y^2 + \epsilon^2 k_z^2, k_x^2 + \epsilon^2 k_y^2 + \epsilon k_z^2$	
2	E_u	$\hat{x}k_x + \epsilon \hat{y}k_y + \epsilon^2 \hat{z}k_z, \hat{x}k_x + \epsilon^2 \hat{y}k_y + \epsilon \hat{z}k_z$	
3	F_{1g}	$k_y k_z (k_x^2 - k_z^2), k_z k_x (k_z^2 - k_x^2), k_x k_y (k_x^2 - k_y^2)$	
3	F_{1u}	$\hat{y}k_z - \hat{z}k_y, \hat{z}k_x - \hat{x}k_z, \hat{x}k_y - \hat{y}k_x$	
3	F_{2g}	$k_y k_z, k_z k_x, k_x k_y$	
3	F_{2u}	$\hat{y}k_z + \hat{z}k_y, \hat{z}k_x + \hat{x}k_z, \hat{x}k_y + \hat{y}k_x$	

Таблица 6. Базисные функции нечетных ($S = 1$, слабое спин-орбитальное взаимодействие) представлений группы O_h

d	Γ	$\psi_i^{\Gamma_S}(\vec{k})$	H
1	A_{1u}	$k_x k_y k_z (k_x^2 - k_y^2)(k_y^2 - k_z^2)(k_z^2 - k_x^2)$	$O \times R \times SO_3^S$
1	A_{2u}	$k_x k_y k_z$	$O(T) \times R \times SO_3^S$
2	E_u	$k_x k_y k_z (k_x^2 + \epsilon k_y^2 + \epsilon^2 k_z^2), k_x k_y k_z (k_x^2 + \epsilon^2 k_y^2 + \epsilon k_z^2)$	
3	F_{1u}	k_x, k_y, k_z	
3	F_{2u}	$k_x (k_y^2 - k_z^2), k_y (k_z^2 - k_x^2), k_z (k_x^2 - k_y^2)$	

Ферми-поверхности на линиях и в изолированных точках для $S = 0$ и в точках для $S = 1$. Последнее утверждение верно лишь для случая сильного спин-орбитального взаимодействия (контрпример — параметр порядка для полярной фазы с p -спариванием).

Непременное наличие нулей в спектре возбуждений есть прямое следствие определенной симметрии сверхпроводящего состояния. Поэтому нули этого типа называются *симметрийными нулями*. Среди симметрийных нулей можно выделить особый подкласс *топологических нулей*. К последним относятся те симметрийные нули, которые не исчезают при непрерывных деформациях, нарушающих симметрию кристалла. Не углубляясь особо в сей предмет, укажем без доказательства, что симметрийные точки нулей являются в то же время топологическими, линии — нет.

Симметрийный подход оставляет значительную свободу в выборе базисных функций неприводимых представлений. Конкретный выбор базисных функций данного представления Γ может быть сделан только в рамках какой-либо микроскопической модели и определяется точностью, с которой мы хотим описать параметр порядка данного сверхпроводящего состояния. Наличие и положение симметрийных нулей в спектре элементарных возбуждений

определяется не видом базисных функций, а симметрией сверхпроводящего состояния. Определенный же выбор базисных функций может искусственно породить дополнительные нефизические («случайные») нули в спектре элементарных возбуждений.

Примеры базисных функций для представлений группы D_{6h} собраны в табл. 1 и 2. Для иллюстрации высказанных утверждений базисные функции исчетных представлений в табл. 1 представлены в виде линейных комбинаций функций двух типов. При произвольных значениях коэффициентов a и b базисные функции $\psi_i^{\Gamma_u}(\vec{k})$ обращаются в нуль только в изолированных точках на ферми-поверхности, лежащих на осях вращений, соответствующих комбинированым элементам симметрии данного сверхпроводящего состояния (симметрийные нули). С другой стороны, при $a = 0$ (или $b = 0$) в каждой из перечисленных сверхпроводящих фаз к симметрийным пузяям добавляются случайные (в том числе и лежащие на линиях) нули параметра порядка.

Базисные функции представлений для кристаллов с тетрагональной (группа D_{4h}) и кубической (группа O_h) симметрией приведены в табл. 3–6. Для одномерных представлений указаны также соответствующие сверхпроводящие классы H . Классы сверхпроводящих состояний, описываемых неодномерными представлениями, будут введенены в § 11, посвященном теории Ландау для анизотропных сверхпроводников.

§ 5. Энергия элементарных возбуждений сверхпроводника

Задача о нахождении спектра элементарных возбуждений сверхпроводника решается путем диагонализации гамильтонiana системы ферми-частиц¹, в котором из всех видов взаимодействий оставлено только существенное для сверхпроводимости парное притяжение частиц, имеющих противоположные импульсы (гамильтониан Бардина–Купера–Шриффера)²:

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}\alpha}^+ a_{\mathbf{k}\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} V_{\alpha\beta, \lambda\mu}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') a_{-\mathbf{k}\alpha}^+ a_{\mathbf{k}\beta}^+ a_{\mathbf{k}'\lambda} a_{-\mathbf{k}'\mu}. \quad (5.1)$$

Здесь и ниже по повторяющимся спиновым индексам подразумевается суммирование, $\xi_{\mathbf{k}} = \hbar^2 k^2 / (2m^*) - \varepsilon_F$ — энергия возбуждений в нормальном металле, отсчитанная от энергии Ферми, m^* — эффективная масса. $V_{\alpha\beta, \lambda\mu}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ — потенциал парного притяжения, обладающий симметрийными свойствами:

$$V_{\alpha\beta, \lambda\mu}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = -V_{\beta\alpha, \lambda\mu}(-\mathbf{k}, \mathbf{k}') = -V_{\alpha\beta, \mu\lambda}(\mathbf{k}, -\mathbf{k}') = V_{\mu\lambda, \beta\alpha}(\mathbf{k}', \mathbf{k}). \quad (5.2)$$

В отсутствие спин-орбитального взаимодействия потенциал факторизуется:

$$V_{\alpha\beta, \lambda\mu}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = V(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \Gamma_{\alpha\beta, \lambda\mu}. \quad (5.3)$$

¹ Для простоты мы будем рассматривать ферми-газ со сферической ферми-поверхностью, не принимая во внимание влияние кристаллической решетки на энергетический спектр.

² Здесь и ниже мы используем волновые функции, нормированные на единичный объем, поэтому $\sum_{\mathbf{k}} \leftrightarrow \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = N_0 \int d\xi \int \frac{d\Omega}{4\pi}$, где $N_0 = \frac{m^* k_F}{2\pi^2 \hbar^2}$ — плотность состояний на поверхности Ферми на одног проекцию спина.

Функцию $V(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ будем считать отличной от нуля, когда концы векторов \mathbf{k} и \mathbf{k}' лежат в узком слое вблизи ферми-поверхности:

$$V(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = V_l(k, k') \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}}'), \quad (5.4)$$

$$V_l(k, k') = \begin{cases} -V_l, & \text{при } \epsilon_F - \epsilon_l \leq k^2/(2m^*), k'^2/(2m^*) \leq \epsilon_F + \epsilon_l, \\ 0, & \text{вне указанного интервала.} \end{cases}$$

Здесь в разложении функции $V(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ по сферическим гармоникам с различными l оставлено лишь взаимодействие V_l , приводящее к максимальной критической температуре (см. § 1).

Что касается спиновой зависимости потенциала, то для четных l она записывается через антисимметричные по индексам $\alpha\beta(\lambda\mu)$ матрицы

$$\Gamma_{\alpha\beta,\lambda\mu} = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} g_{\lambda\mu}^+, \quad (5.5)$$

$g_{\alpha\beta} = (i\sigma_y)_{\alpha\beta}$, а для нечетных l — через симметричные:

$$\Gamma_{\alpha\beta,\lambda\mu} = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} g_{\lambda\mu}^-, \quad (5.6)$$

где $g_{\alpha\beta} = (i\sigma_y)_{\alpha\beta}$, а g^+ и g^- обозначают эрмитово-сопряженные матрицы.

В кристаллах, где существует инвариантность относительно преобразований точечной группы симметрии, парное взаимодействие имеет вид

$$V_{\alpha\beta,\lambda\mu}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = V_\Gamma(k, k') \Gamma_{\alpha\beta,\lambda\mu} \sum_{i=1}^{d_\Gamma} \psi_i^\Gamma(\hat{\mathbf{k}}) \psi_i^{\Gamma*}(\hat{\mathbf{k}}') \quad (5.7)$$

Здесь оставлено лишь взаимодействие V_Γ , относящееся к неприводимому представлению Γ с базисными функциями $\psi_i^\Gamma(\hat{\mathbf{k}})$, которое приводит к спариванию с максимальной критической температурой. Функции $\Gamma_{\alpha\beta,\lambda\mu}$ для четных и нечетных представлений задаются формулами (5.5) и (5.6), соответственно.

Выражение (5.7) справедливо для синглетного спаривания и триплетного спаривания со слабым спин-орбитальным взаимодействием. В случае $S = 1$ и сильного спин-орбитального взаимодействия (см. § 4) парное взаимодействие имеет вид

$$V_{\alpha\beta,\lambda\mu}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{1}{2} V_\Gamma(k, k') \sum_{i=1}^{d_\Gamma} (\psi_i(\hat{\mathbf{k}}) g_{\alpha\beta}) (\psi_i^*(\hat{\mathbf{k}}') g_{\lambda\mu}^+). \quad (5.8)$$

Неустойчивость электронного газа, описываемого гамильтонианом (5.1), по отношению к образованию куперовских пар можно учесть [1], записывая волновую функцию основного состояния в виде произведения

$$\Psi = \prod_{\mathbf{k}} (u_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}\uparrow}^+ a_{-\mathbf{k}\downarrow}^+) |vac\rangle. \quad (5.9)$$

Здесь $v_{\mathbf{k}}$ — амплитуда вероятности заполнения пары одночастичных состояний $(\mathbf{k}\uparrow, -\mathbf{k}\downarrow)$ (для простоты мы имеем в виду синглетное спаривание),

$u_{\mathbf{k}}$ — амплитуда вероятности обнаружить состояние $(\mathbf{k}\uparrow, -\mathbf{k}\downarrow)$ незаполненным, а $|\text{vac}\rangle$ — волновая функция вакуумного состояния, причем выполняется условие

$$|u_{\mathbf{k}}|^2 + |v_{\mathbf{k}}|^2 = 1.$$

В нормальном металле

$$\begin{aligned} v_{\mathbf{k}} &= 1, \quad u_{\mathbf{k}} = 0, \quad \text{при } |\mathbf{k}| < k_F, \\ v_{\mathbf{k}} &= 0, \quad u_{\mathbf{k}} = 1, \quad \text{при } |\mathbf{k}| > k_F, \end{aligned} \quad (5.10)$$

то есть все состояния ниже ферми-уровня заполнены, выше него — пусты.

В сверхпроводнике при любом \mathbf{k} имеется ненулевая вероятность обнаружить данное парное состояние пустым, и волновая функция основного состояния (5.9) состоит из большого числа слагаемых, в каждом из которых с различной вероятностью заполнено $0, 2, \dots, N, N \pm 2, \dots$ парных одиночечных состояний. Иными словами, основное состояние сверхпроводника представляет собой суперпозицию состояний с различным числом куперовских пар³. Следствием этого фундаментального факта служит отличие от нуля так называемых аномальных средних [21]:

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{k},\uparrow\downarrow} &= \langle \Psi | a_{\mathbf{k}\uparrow} a_{-\mathbf{k}\downarrow} | \Psi \rangle, \\ F_{\mathbf{k},\uparrow\downarrow}^+ &= \langle \Psi | a_{-\mathbf{k}\uparrow}^+ a_{\mathbf{k}\downarrow}^+ | \Psi \rangle. \end{aligned}$$

Такие средние можно определить и при произвольной температуре⁴:

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{k},\alpha\beta} &= \langle a_{\mathbf{k}\alpha} a_{-\mathbf{k}\beta} \rangle, \\ F_{\mathbf{k},\alpha\beta}^+ &= \langle a_{-\mathbf{k}\alpha}^+ a_{\mathbf{k}\beta}^+ \rangle. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Функция $F_{\mathbf{k},\alpha\beta}$, имеющая смысл волновой функции пары, антисимметрична относительно перестановки частиц:

$$F_{\mathbf{k},\alpha\beta} \rightarrow F_{-\mathbf{k},\beta\alpha} = -F_{\mathbf{k},\alpha\beta}. \quad (5.12)$$

Для пространственно-четных функций F равенство (5.12) означает антисимметрию по спиновым индексам:

$$F_{\mathbf{k},\alpha\beta}^g = -F_{\mathbf{k},\beta\alpha}^g,$$

то есть для спаривания в синглетном состоянии имеем:

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{k},\alpha\beta}^g &= F_{\mathbf{k}} g_{\alpha\beta}, \\ F_{\mathbf{k},\alpha\beta}^{g+} &= F_{\mathbf{k}}^* g_{\alpha\beta}^+. \end{aligned} \quad (5.13)$$

где $F_{-\mathbf{k}} = F_{\mathbf{k}}$. Для пространственно-нечетных функций F равенство (5.12) справедливо лишь в случае симметрии по спиновым индексам:

$$F_{\mathbf{k},\alpha\beta}^u = F_{\mathbf{k},\beta\alpha}^u,$$

³Главный вклад в эту суперпозицию вносят состояния с числом пар $N_{\text{pairs}} \approx N_{\text{particles}}/2$.

⁴Среднее в формулах (5.11) понимается как

$$\langle A \rangle = \frac{\sum_n A_{nn} e^{-E_n/T}}{\sum_n e^{-E_n/T}}.$$

то есть для спаривания в триплетном состоянии:

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{k}, \alpha\beta}^u &= \mathbf{F}_{\mathbf{k}} g_{\alpha\beta}, \\ F_{\mathbf{k}, \alpha\beta}^{u+} &= \mathbf{F}_{\mathbf{k}}^* g_{\alpha\beta}^+, \end{aligned} \quad (5.14)$$

где $\mathbf{F}_{-\mathbf{k}} = -\mathbf{F}_{\mathbf{k}}$.

Для диагонализации гамильтониана в приближении самосогласованного поля [21] предположим, что отклонения произведений пар операторов, входящих в (5.1), от их средних значений (5.11) малы. Воспользовавшись тождественными преобразованиями:

$$\begin{aligned} a_{-\mathbf{k}\alpha}^+ a_{\mathbf{k}\beta}^+ &= F_{\mathbf{k}, \alpha\beta}^+ + (a_{-\mathbf{k}\alpha}^+ a_{\mathbf{k}\beta}^+ - F_{\mathbf{k}, \alpha\beta}^+) \\ a_{\mathbf{k}'\lambda} a_{-\mathbf{k}'\mu} &= F_{\mathbf{k}', \lambda\mu} + (a_{\mathbf{k}'\lambda} a_{-\mathbf{k}'\mu} - F_{\mathbf{k}', \lambda\mu}), \end{aligned} \quad (5.15)$$

перепишем гамильтониан (5.1) в линейном приближении по указанным отклонениям:

$$\begin{aligned} H = \sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}\alpha}^+ a_{\mathbf{k}\alpha} &+ \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} V_{\alpha\beta, \lambda\mu}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') (-F_{\mathbf{k}, \alpha\beta}^+ F_{\mathbf{k}', \lambda\mu} + \\ &+ F_{\mathbf{k}, \alpha\beta}^+ a_{\mathbf{k}'\lambda} a_{-\mathbf{k}'\mu} + F_{\mathbf{k}', \lambda\mu} a_{-\mathbf{k}\alpha}^+ a_{\mathbf{k}\beta}^+). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Введем теперь функции

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{k}, \alpha\beta} &= - \sum_{\mathbf{k}'} V_{\beta\alpha, \lambda\mu}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') F_{\mathbf{k}', \lambda\mu}, \\ \Delta_{\mathbf{k}, \lambda\mu}^+ &= - \sum_{\mathbf{k}'} V_{\alpha\beta, \mu\lambda}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) F_{\mathbf{k}', \alpha\beta}^+. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Из (5.2) и (5.12) получаем:

$$\Delta_{\mathbf{k}, \alpha\beta} = -\Delta_{-\mathbf{k}, \beta\alpha}.$$

Очевидно, что для четного по импульсам потенциала взаимодействия функции $\Delta_{\mathbf{k}, \alpha\beta}$ и $F_{\mathbf{k}, \alpha\beta}$ также должны быть четными, что соответствует спариванию в синглетном состоянии:

$$\Delta_{\mathbf{k}, \alpha\beta} = \Delta g(\mathbf{k})(i\sigma_y)_{\alpha\beta}. \quad (5.18)$$

Здесь

$$g(\mathbf{k}) = g^l(\mathbf{k}) = \sum_{m=-l}^l a_{lm}(k) Y_{lm}(\mathbf{k}),$$

а нормировка выбрана следующим образом:

$$\int \frac{d\Omega}{4\pi} |g^l(\mathbf{k})|^2 = 1. \quad (5.19)$$

Заметим, что

$$\int \frac{d\Omega}{4\pi} g^l(\mathbf{k}) = 0$$

для всех значений l , кроме s -спаривания ($l = 0$).

В случае нечетного потенциала взаимодействия функции $\Delta_{\mathbf{k}, \alpha\beta}$ и $F_{\mathbf{k}, \alpha\beta}$ также нечетны и описывают триплетное спаривание:

$$\Delta_{\mathbf{k}, \alpha\beta} = \Delta d(\mathbf{k})(i\sigma\sigma_y)_{\alpha\beta}. \quad (5.20)$$

Здесь

$$d(\mathbf{k}) = d^l(\mathbf{k}) = \sum_{m=-l}^l b_{lm}(k) Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}),$$

и

$$\int \frac{d\Omega}{4\pi} |d(\mathbf{k})|^2 = 1. \quad (5.21)$$

Коэффициенты $a_{lm}(k)$ и $b_{lm}(k)$ отличны от нуля лишь в узком слое толщиной $\delta k = \varepsilon_l/v_F$ вблизи поверхности Ферми.

Используя (5.17), для гамильтониана (5.16) получаем⁵:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}\alpha}^+ a_{\mathbf{k}\alpha} - a_{-\mathbf{k}\alpha} a_{-\mathbf{k}\alpha}^+) + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}\alpha} \xi_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} (\Delta_{\mathbf{k},\alpha\beta} a_{\mathbf{k}\alpha}^+ a_{-\mathbf{k}\beta}^+ + \Delta_{\mathbf{k},\alpha\beta}^+ a_{-\mathbf{k}\alpha} a_{\mathbf{k}\beta} + \Delta_{\mathbf{k},\alpha\beta} F_{\mathbf{k},\beta\alpha}^+). \quad (5.22)$$

Это выражение можно переписать в более компактном виде, определив векторные операторы [22]

$$A_{\mathbf{k},i}^+ \equiv (a_{\mathbf{k}\alpha}^+, a_{-\mathbf{k}\alpha}) \equiv (a_{\mathbf{k}\uparrow}^+, a_{\mathbf{k}\downarrow}^+, a_{-\mathbf{k}\uparrow}, a_{-\mathbf{k}\downarrow}),$$

$$A_{\mathbf{k},i} \equiv \begin{pmatrix} a_{\mathbf{k}\alpha} \\ a_{-\mathbf{k}\alpha}^+ \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_{\mathbf{k}\uparrow} \\ a_{\mathbf{k}\downarrow} \\ a_{-\mathbf{k}\uparrow}^+ \\ a_{-\mathbf{k}\downarrow}^+ \end{pmatrix}. \quad (5.23)$$

Имеем:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k},i}^+ \varepsilon_{\mathbf{k},ij} A_{\mathbf{k},j} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \Delta_{\mathbf{k},\alpha\beta} F_{\mathbf{k},\beta\alpha}^+ + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}\alpha} \xi_{\mathbf{k}}, \quad (5.24)$$

где мы ввели матрицу 4×4 :

$$\varepsilon_{\mathbf{k},ij} = \begin{pmatrix} \xi_{\mathbf{k}} \delta_{\alpha\beta} & \Delta_{\mathbf{k},\alpha\beta} \\ \Delta_{\mathbf{k},\alpha\beta}^+ & -\xi_{\mathbf{k}} \delta_{\alpha\beta} \end{pmatrix}.$$

Гамильтониан (5.24) приводится к диагональному виду с помощью сохраняющего антисимметрические соотношения унитарного преобразования Боголюбова⁶, преобразующего фермиевские операторы $a_{\mathbf{k}\alpha}$ в фермиевские операторы $b_{\mathbf{k}\alpha}$:

$$A_{\mathbf{k},i} = U_{ij} B_{\mathbf{k},j}, \quad (5.25)$$

где

$$U_{ij} = \begin{pmatrix} u_{\mathbf{k},\alpha\beta} & v_{\mathbf{k},\alpha\beta} \\ v_{-\mathbf{k},\alpha\beta}^* & u_{-\mathbf{k},\alpha\beta}^* \end{pmatrix}, \quad (5.26)$$

⁵Суммирование по спиновым индексам от функции $\xi_{\mathbf{k}}$, не зависящей от спинов, означает $\sum_{\mathbf{k}\alpha} \xi_{\mathbf{k}} = 2 \sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}}$

⁶Все формулы, приводимые ниже, справедливы для произвольного типа спаривания, а в случае тройплетного спаривания — лишь для так называемых унитарных фаз, удовлетворяющих условию: $(\Delta \Delta^+)^{}_{\alpha\beta} \sim \delta_{\alpha\beta}$. Среди перечисленных в § 3 фаз с p -спариванием к унитарным фазам относятся все, кроме A_1 - и β -фазы. В неунитарном случае диагонализация гамильтониана выглядит несколько сложнее (см. [13], а также § 17), и мы не будем здесь на этом останавливаться.

$$a \quad B_{\mathbf{k},i} = \begin{pmatrix} b_{\mathbf{k}\beta} \\ b_{-\mathbf{k}\beta}^+ \end{pmatrix}. \quad (5.27)$$

Элементы матрицы преобразования являются, в свою очередь, матрицами 2×2 в спиновом пространстве и определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned} u_{\mathbf{k},\alpha\beta} &= \frac{(E_{\mathbf{k}} + \xi_{\mathbf{k}})\delta_{\alpha\beta}}{\sqrt{(E_{\mathbf{k}} + \xi_{\mathbf{k}})^2 + \Delta_{\mathbf{k}}^2}} = u_{\mathbf{k}}\delta_{\alpha\beta}, \\ v_{\mathbf{k},\alpha\beta} &= -\frac{\Delta_{\mathbf{k},\alpha\beta}}{\sqrt{(E_{\mathbf{k}} + \xi_{\mathbf{k}})^2 + \Delta_{\mathbf{k}}^2}}, \end{aligned} \quad (5.28)$$

где

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta_{\mathbf{k}}^2} \quad (5.29)$$

и введено обозначение (см. (5.18) и (5.20))

$$\Delta_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2} \operatorname{Sp} \Delta_{\mathbf{k}}^+ \Delta_{\mathbf{k}} = \begin{cases} \Delta^2 |g(\mathbf{k})|^2, & \text{при } S = 0, \\ \Delta^2 d(\mathbf{k}) d^*(\mathbf{k}), & \text{при } S = 1. \end{cases} \quad (5.30)$$

В результате получаем:

$$\sum_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k},i}^+ \varepsilon_{\mathbf{k},ij} A_{\mathbf{k},j} = \sum_{\mathbf{k}} B_{\mathbf{k},i}^+ E_{\mathbf{k},ij} B_{\mathbf{k},j},$$

где

$$E_{\mathbf{k},ij} = \begin{pmatrix} E_{\mathbf{k}}\delta_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & -E_{\mathbf{k}}\delta_{\alpha\beta} \end{pmatrix}.$$

Перепишем последнее выражение в терминах операторов рождения и уничтожения квазичастиц $b_{\mathbf{k}\alpha}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} B_{\mathbf{k},i}^+ \hat{E}_{\mathbf{k},ij} B_{\mathbf{k},j} &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}\alpha}^+ b_{\mathbf{k}\alpha} - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}\alpha}^+ b_{-\mathbf{k}\alpha}^+ = \\ &= \sum_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}\alpha}^+ b_{\mathbf{k}\alpha} - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}\alpha} E_{\mathbf{k}}. \end{aligned}$$

Таким образом, гамильтониан сверхпроводника окончательно приобретает следующий вид:

$$H = E_0 + \sum_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}\alpha}^+ b_{\mathbf{k}\alpha}, \quad (5.31)$$

где

$$E_0 = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \Delta_{\mathbf{k},\alpha\beta} F_{\mathbf{k},\beta\alpha}^+ + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}\alpha} (\xi_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}}) \quad (5.32)$$

есть энергия основного состояния, а величины $E_{\mathbf{k}}$ представляют собой энергию элементарных возбуждений сверхпроводника.

Для сверхпроводника с синглетным спариванием имеем:

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2 |g(\mathbf{k})|^2}, \quad (5.33)$$

то есть в спектре элементарных возбуждений имеется щель. В полностью изотропном случае (s -спаривание) $g(\mathbf{k}) = |\Delta| e^{i\varphi}$, и щель отлична от нуля на всей ферми-поверхности. Как было показано в § 4, s -спаривание в кристалле соответствует сверхпроводящему состоянию, преобразующемуся согласно

единичному представлению точечной группы симметрии кристалла. В этом случае $g(\mathbf{k})$ может обращаться в нуль при некоторых значениях \mathbf{k} (случайные нули). Для анизотропных типов спаривания с $l \neq 0$, таких, что сверхпроводящее состояние обладает комбинированной (например, поворотной и калибровочной) симметрией, обращение щели в нуль при некоторых \mathbf{k} обязательно (симметрийные нули).

Для сверхпроводника с триплетным спариванием:

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\xi_k^2 + \Delta^2 |d(\mathbf{k})|^2}. \quad (5.34)$$

В B -фазе $d = \hat{\mathbf{k}}$ (см. (3.2) и (5.21)), и

$$E_k^B = \sqrt{\xi_k^2 + |\Delta|^2}, \quad (5.35)$$

то есть, как и в случае s -спаривания, на всей ферми-поверхности имеется щель, не зависящая от направления \mathbf{k} .

В A -фазе $d = \sqrt{3/2} (\hat{k}_x + i\hat{k}_y, 0, 0)$ (см. (3.8) с учетом нормировочного множителя), и

$$E_k^A = \sqrt{\xi_k^2 + \frac{3}{2} \Delta^2 (\hat{k}_x^2 + \hat{k}_y^2)} = \sqrt{\xi_k^2 + \frac{3}{2} \Delta^2 \sin^2 \theta}, \quad (5.36)$$

то есть щель в спектре обращается в нуль на северном и южном полюсах ($\theta = 0, \pi$) ферми-сферы (рис. 4). Наличие нулей в спектре A -фазы следует из

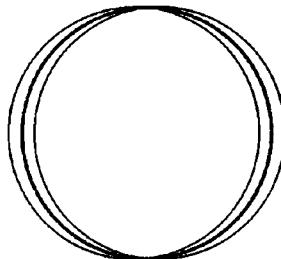


Рис. 4. Щель в спектре A -фазы. Границы щели — тонкие линии, ферми-сфера — жирная линия комбинированной инвариантности состояния (3.8) относительно поворотов на угол α вокруг оси z и одновременного калибровочного преобразования — домножения на $e^{-i\alpha}$ (более подробно см. § 4).

Упражнение. Показать, что энергия основного состояния сверхпроводника (5.32) определяется следующими выражениями:

$$E_{0s} = E_{0n} - \frac{1}{2} N_0 \Delta^2 \quad (5.37)$$

для синглетного изотропного спаривания, и

$$E_{0s} = E_{0n} - \frac{1}{4} N_0 \text{Sp} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \Delta_{\mathbf{k}}^+ \Delta_{\mathbf{k}} \quad (5.38)$$

для произвольного типа спаривания, где E_{0n} есть энергия основного состояния нормального металла.

§ 6. Щель в спектре возбуждений и критическая температура

Для определения температурной зависимости щели в спектре элементарных возбуждений обратимся к формуле (5.17):

$$\Delta_{\mathbf{k},\alpha\beta} = - \sum_{\mathbf{k}'} V_{\beta\alpha,\lambda\mu}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') F_{\mathbf{k}',\lambda\mu}. \quad (6.1)$$

Подставляя сюда аномальное среднее (5.11) и применяя преобразование Борглобова (5.25), имеем:

$$F_{\mathbf{k},\lambda\mu} = \langle a_{\mathbf{k}\lambda} a_{-\mathbf{k}\mu} \rangle = \langle (u_{\mathbf{k},\lambda\gamma} b_{\mathbf{k}\gamma} + v_{\mathbf{k},\lambda\gamma} b_{-\mathbf{k}\gamma}^+) (u_{-\mathbf{k},\mu\delta} b_{-\mathbf{k}\delta} + v_{-\mathbf{k},\mu\delta} b_{\mathbf{k}\delta}^+) \rangle.$$

Используя соотношения

$$u_{\mathbf{k},\alpha\beta} = u_{\mathbf{k}} \delta_{\alpha\beta}, \quad v_{\mathbf{k},\alpha\beta} = -v_{-\mathbf{k},\beta\alpha},$$

$$\langle b_{-\mathbf{k}\alpha} b_{\mathbf{k}\beta} \rangle = \langle b_{\mathbf{k}\alpha}^+ b_{-\mathbf{k}\beta}^+ \rangle = 0,$$

$$\langle b_{\mathbf{k}\alpha}^+ b_{\mathbf{k}\beta} \rangle = \delta_{\alpha\beta} - \langle b_{\mathbf{k}\beta} b_{\mathbf{k}\alpha}^+ \rangle = f_{\mathbf{k}} \delta_{\alpha\beta},$$

где

$$f_{\mathbf{k}} = f(E_{\mathbf{k}}) = \frac{1}{\exp(E_{\mathbf{k}}/T) + 1} \quad (6.2)$$

есть фермиевская функция распределения возбуждений с энергией $E_{\mathbf{k}}$, определяемой формулой (5.29), получаем:

$$F_{\mathbf{k},\lambda\mu} = -u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k},\lambda\mu} (1 - 2f_{\mathbf{k}}) = \frac{\Delta_{\mathbf{k},\lambda\mu}}{2E_{\mathbf{k}}} (1 - 2f_{\mathbf{k}}). \quad (6.3)$$

После подстановки в (6.1) окончательно приходим к следующему условию самосогласования:

$$\Delta_{\mathbf{k},\alpha\beta} = - \sum_{\mathbf{k}'} V_{\beta\alpha,\lambda\mu}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \frac{1 - 2f_{\mathbf{k}'}}{2E_{\mathbf{k}'}} \Delta_{\mathbf{k}',\lambda\mu}; \quad (6.4)$$

называемому также «уравнением на щель». Вспоминая выражения (5.33) и (5.34), имеем:

$$g(\mathbf{k}) = - \sum_{\mathbf{k}'} \frac{V(\mathbf{k}, \mathbf{k}') (1 - 2f_{\mathbf{k}'})}{2\sqrt{\xi_{\mathbf{k}'}^2 + \Delta^2 |g(\mathbf{k}')|^2}} g(\mathbf{k}') \quad (6.5)$$

для синглетного спаривания и

$$d(\mathbf{k}) = - \sum_{\mathbf{k}'} \frac{V(\mathbf{k}, \mathbf{k}') (1 - 2f_{\mathbf{k}'})}{2\sqrt{\xi_{\mathbf{k}'}^2 + \Delta^2 |d(\mathbf{k}')|^2}} d(\mathbf{k}') \quad (6.6)$$

для триплетного спаривания.

При $T \rightarrow T_c$ щель в спектре обращается в нуль, и уравнения (6.5) и (6.6) становятся линейными. Это означает, что любая комбинация сферических гармоник с данным l (в общем случае — функций данного неприводимого представления группы симметрии нормальной фазы), имеющая вид

$$g(\mathbf{k}) = \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}) \quad (6.7)$$

или

$$\mathbf{d}(\mathbf{k}) = \sum_{m=-l}^l \mathbf{b}_{lm} Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}) \quad (6.8)$$

является решением уравнений (6.5) и (6.6), соответственно. Мы вновь пришли к утверждению, что все сверхпроводящие состояния, относящиеся к данному неприводимому представлению группы симметрии нормальной фазы, имеют одинаковую критическую температуру. Она определяется уравнением

$$1 = N_0 V_l \int_0^{\varepsilon_l} d\xi \frac{\operatorname{th}(|\xi|/2T_c)}{|\xi|}, \quad (6.9)$$

которое получается при подстановке в уравнение на щель разложений (6.7) (или (6.8)). Интегрируя по частям правую часть (6.9) и заменяя на бесконечность верхний предел быстро сходящегося интеграла, получаем:

$$1 = N_0 V_l \left(\ln \frac{\varepsilon_l}{2T_c} - \int_0^\infty dx \frac{\ln x}{\operatorname{ch}^2 x} \right).$$

Следовательно,

$$T_c = \frac{2\gamma}{\pi} \varepsilon_l \exp \left(-\frac{1}{N_0 V_l} \right). \quad (6.10)$$

Здесь $2\gamma/\pi \approx 1.14$, где

$$\ln \gamma = C \approx 0.577$$

носит название постоянной Эйлера.

Подставляя в (6.5) и (6.6) разложения (5.4), (5.7) или (5.8) потенциала парного притяжения и используя ортогональность базисных функций неприводимого представления, получаем, что параметр порядка при всех $T < T_c$ имеет вид (6.7) или (6.8). Зависимость модуля параметра порядка и коэффициентов a_{lm} и b_{lm} от температуры при этом определяется нелинейными уравнениями вида¹:

$$a_{lm}(T) = N_0 V_l \int_0^{\varepsilon_l} d\xi \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{\operatorname{th}(\sqrt{\xi^2 + \Delta^2(T)}|g(\mathbf{k})|^2/2T)}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2(T)}|g(\mathbf{k})|^2} Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}}) g(\mathbf{k}) \quad (6.11)$$

для синглетного спаривания, и

$$b_{lm}(T) = N_0 V_l \int_0^{\varepsilon_l} d\xi \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{\operatorname{th}(\sqrt{\xi^2 + \Delta^2(T)}|\mathbf{d}(\mathbf{k})|^2/2T)}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2(T)}|\mathbf{d}(\mathbf{k})|^2} Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}}) \mathbf{d}(\mathbf{k}) \quad (6.12)$$

¹ Если в разложении потенциала парного притяжения присутствуют сферические гармоники с другими значениями орбитального момента (в общем случае — базисные функции других неприводимых представлений), соответствующие меньшим критическим температурам, то при $T < T_c$ сверхпроводящее состояние будет представлять собой суперпозицию гармоник с разными l . При этом допустимо, разумеется, лишь примешивание гармоник, не поникающее симметрии данного сверхпроводящего состояния. В противном случае происходит фазовый переход из одной сверхпроводящей фазы в другую.

для тройственного спаривания, дополненными условиями нормировки (5.19) и (5.21).

В общем случае необходимо решать аналогичные нелинейные уравнения для коэффициентов разложения параметра порядка по базисным функциям неприводимого представления группы симметрии кристалла. Ввиду значительного произвола в выборе этих функций (см. § 4), а также анизотропии ферми-поверхности, задача количественного описания температурного поведения параметра порядка, а, следовательно, термодинамических и кинетических свойств анизотропных сверхпроводников, является весьма неопределенной.

В некоторых случаях величину щели в спектре при $T = 0$ можно найти аналитически. Так, для s -спаривания из (6.11) получаем:

$$\frac{1}{N_0 V_0} = \int_0^{\epsilon_0} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 + \Delta_0^2}} \approx \ln \frac{2\epsilon_0}{\Delta_0}. \quad (6.13)$$

Следовательно,

$$\Delta_0 = \Delta(T = 0) = 2\epsilon_0 \exp\left(-\frac{1}{N_0 V_0}\right), \quad (6.14)$$

и, сравнивая с (6.10), имеем:

$$\Delta_0 = \frac{\pi}{\gamma} T_c \approx 1,75 T_c. \quad (6.15)$$

Температурное поведение щели в спектре для s -спаривания определяется уравнением, следующим из (6.4):

$$\frac{1}{N_0 V_0} = \int_0^{\epsilon_0} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}} - 2 \int_0^{\epsilon_0} \frac{f(E) d\xi}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}}.$$

Отсюда, воспользовавшись (6.13), получаем:

$$\ln \frac{2\epsilon_0}{\Delta_0} = \ln \frac{2\epsilon_0}{\Delta} - 2 \int_0^{\epsilon_0} \frac{f(E) d\xi}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}},$$

или

$$\ln \frac{\Delta_0}{\Delta} = 2 \int_0^{\epsilon_0} \frac{d\xi}{\left(\exp(\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}/T) + 1\right) \sqrt{\xi^2 + \Delta^2}}. \quad (6.16)$$

Ввиду быстрой сходимости верхний предел интегрирования в этом уравнении можно заменить на бесконечность.

При $T \rightarrow 0$ имеем $\Delta/T \rightarrow \infty$, и

$$\begin{aligned} \ln \frac{\Delta_0}{\Delta} &\approx \frac{2}{\Delta} e^{-\Delta_0/T} \int_0^{\infty} e^{-\xi^2/(2\Delta T)} d\xi = \sqrt{\frac{2\pi T}{\Delta}} e^{-\Delta_0/T}, \\ \Delta &= \Delta_0 \left(1 - \sqrt{\frac{2\pi T}{\Delta_0}} e^{-\Delta_0/T}\right). \end{aligned} \quad (6.17)$$

При $T \rightarrow T_c$ имеем $\Delta/T \rightarrow 0$, и

$$\ln \frac{\Delta_0}{\Delta} = \ln \frac{\pi T}{\gamma \Delta} + \frac{7\zeta(3)}{8\pi^2} \left(\frac{\Delta}{T} \right)^2 + \dots$$

Здесь $\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3}$ — дзета-функция Римана.

Поскольку $\Delta_0 = \pi T_c / \gamma$, то

$$\ln \frac{T_c}{T} \approx \frac{7\zeta(3)}{8\pi^2} \left(\frac{\Delta}{T} \right)^2.$$

Отсюда

$$\Delta(T) \approx \left(\frac{8\pi^2}{7\zeta(3)} \right)^{1/2} T_c \left(\frac{T_c - T}{T_c} \right)^{1/2}. \quad (6.18)$$

Ввиду условий нормировки (5.19) и (5.21) температурное поведение амплитуды энергетической щели в анизотропных сверхпроводниках при $T \rightarrow T_c$ также определяется формулой (6.18).

Упражнения. 1. Найти распределение электронов в сверхпроводнике по импульсам: $n_{\mathbf{k},\alpha\beta} = \langle a_{\mathbf{k}\alpha}^+ a_{\mathbf{k}\beta} \rangle$;

2. Найти флуктуацию числа частиц при $T = 0$: $\delta N = \frac{\sqrt{\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2}}{\langle N \rangle}$, где $N = \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}\alpha}^+ a_{\mathbf{k}\alpha}$.

§ 7. Температурное поведение термодинамических величин при $T \rightarrow 0$

Наличие щели в спектре сверхпроводников с s -спариванием обуславливает термоактивационное ($\sim e^{-\Delta_0/T}$) поведение всех термодинамических и кинетических величин при низких температурах.

Так, электронная теплоемкость сверхпроводника¹

$$C_s = \sum_{\mathbf{k}\alpha} E_{\mathbf{k}} \frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial T}, \quad (7.1)$$

в случае s -спаривания равная

$$C_s = 2N_0 \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \sqrt{\xi^2 + \Delta^2} \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{\exp(\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}/T) + 1} \right), \quad (7.2)$$

¹ Напомним, что формулу (7.1) проще всего получить, дифференцируя комбинаторное выражение для энтропии ферми-газа

$$C = T \frac{\partial S}{\partial T},$$

где

$$S = - \sum_{\mathbf{k}\alpha} \{(1 - f_{\mathbf{k}}) \ln(1 - f_{\mathbf{k}}) + f_{\mathbf{k}} \ln f_{\mathbf{k}}\}.$$

в пределе $T \rightarrow 0$ принимает вид

$$C_s \approx \frac{2N_0\Delta^2}{T^2} e^{-\Delta/T} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi e^{-\xi^2/(2\Delta T)} \approx N_0 \left(\frac{\Delta_0}{T} \right)^2 \sqrt{2\pi T \Delta_0} e^{-\Delta_0/T}. \quad (7.3)$$

В необычных сверхпроводниках с симметрийными пуллями в спектре возбуждений естественно ожидать степенное поведение термодинамических величин при низких температурах. Формула, обобщающая (7.2) на случай анизотропного спаривания, имеет вид

$$C_s = 2N_0 \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int \frac{d\Omega}{4\pi} E_k \frac{\partial}{\partial T} \frac{1}{e^{E_k/T} + 1}, \quad (7.4)$$

где спектр возбуждений E_k определяется формулами (5.33) или (5.34).

Рассмотрим в качестве примера теплоемкость в A -фазе ${}^3\text{He}$. Спектр элементарных возбуждений имеет вид (5.36), то есть щель обращается в нуль на северном и южном полюсах ферми-сферы ($\theta = 0, \pi$), и главный вклад в теплоемкость дают окрестности этих точек²:

$$\theta < \frac{\xi}{\Delta}, \quad \pi - \theta < \frac{\xi}{\Delta}.$$

Отсюда в пределе $T \rightarrow 0$ получаем:

$$C_s = \frac{N_0}{T^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \frac{E^2 e^{E/T}}{(e^{E/T} + 1)^2} \approx \frac{N_0}{2T^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi \xi^2}{\text{ch}^2(\xi/2T)} \int_0^{\xi/\Delta} \theta d\theta + \\ + O\left(\exp\left(-\frac{\Delta_0}{T}\right)\right) \approx \frac{N_0}{4T^2 \Delta^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi \xi^4}{\text{ch}^2(\xi/2T)} = N_0 \frac{T^3}{\Delta_0^2} I, \quad (7.5)$$

где

$$I = 8 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz z^4}{\text{ch}^2 z} = \frac{7\pi^4}{15}.$$

Таким образом, электронная теплоемкость сверхпроводника, щель в спектре которого обращается в нуль в изолированных точках на ферми-поверхности, при $T \rightarrow 0$ пропорциональна T^3 . Аналогичное вычисление для сверхпроводника с нулями щели на линиях на ферми-поверхности дает $C_s \sim T^2$ при $T \rightarrow 0$.

Возможны также сверхпроводящие состояния, в которых щель в спектре возбуждений имеет изолированные точки нулей более высокого порядка. Например, для аксиальной фазы в случае d -спаривания:

$$g(\mathbf{k}) \propto (\hat{k}_x + i\hat{k}_y)^2 \quad (7.6)$$

имеются два нуля второго порядка на полюсах ферми-поверхности. Для этой фазы вычисления, подобные приведенным выше, дают $C_s \sim T^2$.

² В этом параграфе для более компактной записи мы используем в A -фазе спектр вида $E_k^A = \sqrt{\xi^2 + \Delta^2 \sin^2 \theta}$, отличающийся от (5.36) перенесением модуля Δ .

Полученные результаты можно сформулировать так:

$$\left. \frac{C_s}{C_n} \right|_{T \rightarrow 0} \sim \begin{cases} \left(\frac{T_c}{T} \right)^{5/2} e^{-\Delta_0/T}, & \text{щель в спектре не обращается в нуль,} \\ \left(\frac{T}{T_c} \right)^2, & \text{щель в спектре имеет нули первого порядка в изолированных точках,} \\ \frac{T}{T_c}, & \text{щель в спектре равна нулю на линиях или имеет нули второго порядка в изолированных точках.} \end{cases} \quad (7.7)$$

Здесь C_n — теплоемкость нормальной фазы.

Довольно просто установить степенное температурное поведение при $T \rightarrow 0$ и для других термодинамических величин, например, лондоновской глубины проникновения, сдвига Найта (парамагнитной восприимчивости), а также кинетических величин, таких как коэффициент электронной теплопроводности или коэффициент поглощения ультразвука.

Степенное поведение перечисленных величин при низких температурах служит прямым указанием на необычный характер сверхпроводимости. Более того, поскольку в случае сильного спин-орбитального взаимодействия для триплетного спаривания симметрийные нули в спектре могут реализовываться лишь в изолированных точках на ферми-поверхности (см. § 4), то различие показателей в степенных законах для линий и точек нулей даст принципиальную возможность сделать выбор между спин-синглетной и спин-триплетной сверхпроводимостью.

На практике, применение этих простых результатов усложняется тем, что наличие сколь угодно малого количества примесей превращает линии нулей в полоски конечной ширины, что дает линейное поведение теплоемкости в области низких температур. Изолированные точки нулей под действием примесей также превращаются в пятна конечного диаметра, окружающие исходные точки [23]. Эти процессы влияют на низкотемпературное поведение всех величин, усложняя интерпретацию экспериментальных данных. Мы вернемся к этому вопросу в § 21, посвященному влиянию примесей на свойства необычных сверхпроводников.

§ 8. Эффекты четности числа электронов в сверхпроводниках

Согласно теории БКШ, основное состояние сверхпроводника (5.9) представляет собой суперпозицию состояний с различным числом куперовских пар. Энергия сверхпроводника при $T \rightarrow 0$ ниже энергии нормального металла на величину $\delta E_s \sim N \Delta^2 / \varepsilon_F$ (см. упражнение к § 5), где N — полное число электронов. Возбужденные, то есть неспаренные, состояния в обычном сверхпроводнике отделены от основного состояния энергетической щелью Δ . Поэтому при изменении числа электронов на единицу: $N \rightarrow N \pm 1$ величина δE_s должна измениться на $\pm \Delta$. Знак плюс или минус здесь зависит от того, было исходное число N четным или нечетным. Поскольку величина Δ порядка нескольких градусов (напомним, что $\Delta \sim T_c$), то измерение δE_s при

изменении огромного числа N на единицу является, казалось бы, нереальной задачей. Тем не менее это удалось сделать [24, 25] после создания так называемых транзисторов с кулоновской блокадой.

В этом параграфе мы опишем действие этого прибора, дающего возможность непосредственно продемонстрировать существование куперовских пар, а также вычислим изменение термодинамического потенциала газа элементарных возбуждений сверхпроводника для различных сверхпроводящих состояний при изменении полного числа электронов на единицу [26–28].

Транзистор (электрометр) с кулоновской блокадой представляет собой прямоугольную алюминиевую пленку (островок), занимающую участок электрической цепи между двумя туннельными контактами с емкостями C_1 и C_2 . Размеры пленки в эксперименте, выполненном в Гарвардском университете [24], были таковы: толщина — 200 \AA , ширина — 600 \AA , длина — $2 \cdot 10^4\text{ \AA}$. Островок связан емкостью C_g с затвором, позволяющим менять электростатический потенциал островка, прикладывая напряжение V_g (см. рис. 5). При достаточно слабой связи островка с внешней цепью, когда сопротивление каждого из контактов подчиняется условию $R > h/e^2$, квантовомеханические состояния островка характеризуются определенным числом электронов¹. Если полная емкость всех контактов $C = C_1 + C_2 + C_g$ достаточно мала, элементарная

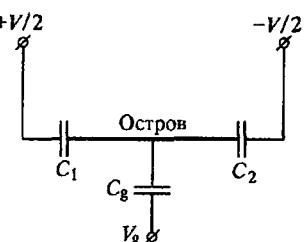


Рис. 5. Электрическая схема электрометра с кулоновской блокадой

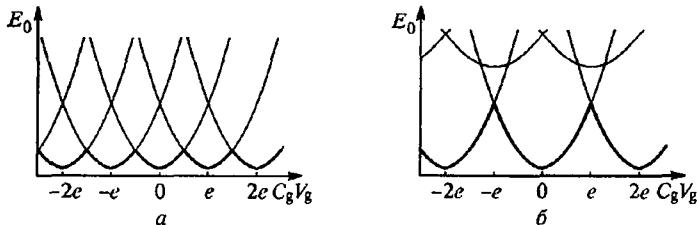


Рис. 6. Качественное поведение энергии островка как функции заряда $C_g V_g$ на затворе: а) при $e^2/(2C) > T, \delta\Omega$; б) при $\delta\Omega > e^2/(2C) > T$

электростатическая энергия $E_c = e^2/2C$ превышает температуру, и можно пренебречь тепловыми флуктуациями. В этих условиях полная электростатическая энергия островка

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \min_n \frac{(en + C_g V_g)^2}{2C} \quad (8.1)$$

является периодической функцией напряжения на затворе (рис. 6а), поэтому ток через островок при заданном напряжении во внешней цепи V будет также периодической функцией от $C_g V_g$ с периодом e .

¹Чтобы не прерывать связности изложения, вывод указанного неравенства отнесен в конец параграфа.

Так обстоит дело, пока алюминиевый островок находится в нормальном состоянии. В сверхпроводящем состоянии было обнаружено, что при температурах ниже 0,3 К (что соответствует $0.4T_c$) пики тока, соответствующие нечетному количеству электронов на острове, начинают подавляться, и зависимость $j(C_g V_g)$ становится $2e$ -периодической. Естественное объяснение этого явления состоит в том, что свободные энергии (более точно, термодинамические потенциалы Ω) островка в сверхпроводящем состоянии с четным и нечетным числами электронов $\Omega_{\text{odd}} - \Omega_{\text{even}}$ при $T \rightarrow 0$ отличаются на величину порядка щели Δ в спектре элементарных возбуждений. Поэтому при выполнении условия $\Delta > E_c$ параболические участки, отвечающие нечетным значениям n в зависимости $U(C_g V_g)$, поднимутся на высоту $\Omega_{\text{odd}} - \Omega_{\text{even}}$ и станут ненаблюдаемыми (см. рис. 6б). Соответственно, ток $j = j(C_g V_g)$ станет $2e$ -периодической функцией $C_g V_g$.

Островок представляет собой два последовательно включенных джозефсоновских контакта. Нас интересует зависимость тока через островок от энергии островка. Проще всего она выглядит для нулевой внешней разности потенциалов²:

$$j = \frac{2e}{\hbar} \sqrt{n_{s1} n_{s2}} \frac{K^2 \sin \Phi}{E_0}. \quad (8.2)$$

Здесь K — джозефсоновская энергия (матричный элемент перехода) каждого из контактов, которые для простоты мы полагаем одинаковыми; n_{s1} и n_{s2} — плотности сверхпроводящих электронов в подводящих проводах по обе стороны островка; Φ — «внешняя» разность фаз (разность фаз между контактами, к которым подключен островок). E_0 — энергия островка, включающая как электростатическую часть (8.1), так и слагаемое, величина которого меняется на $\delta\Omega = \Omega_{\text{odd}} - \Omega_{\text{even}}$ при изменениях $C_g V_g$, сопровождающихся сменой плотности числа электронов на островке:

$$E_0 = U + \begin{cases} \delta\Omega, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ 0, & \text{если } n \text{ четно.} \end{cases} \quad (8.3)$$

Для вычисления $\delta\Omega$ заметим, что термодинамический потенциал сверхпроводника складывается из энергии конденсата куперовских пар и термодинамического потенциала газа элементарных возбуждений. Конденсат пар состоит из четного числа частиц, поэтому разность термодинамических потенциалов сверхпроводника с нечетным и четным числом электронов совпадает с разностью Ω -потенциалов ансамблей с нечетным и четным числом квазичастиц. Термодинамический потенциал для газа квазичастиц записывается как сумма потенциалов всех состояний, нумеруемых квантовым числом $i = (\mathbf{k}, \alpha)$, в каждом из которых может быть $n_i = 0, 1$ квазичастиц с энергией E_i :

$$\Omega = -T \sum_i \ln \left(\sum_{n_i=0,1} e^{-\beta E_i n_i} \right), \quad (8.4)$$

² Вывод формулы для тока приведен в конце параграфа.

здесь $\beta = 1/T$. Этую формулу можно переписать иначе:

$$\Omega = -T \ln \prod_i (1 + e^{-\beta E_i}) = -T \ln \left(1 + \sum_i e^{-\beta E_i} + \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} e^{-\beta E_i - \beta E_j} + \right. \\ \left. + \frac{1}{6} \sum_i \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i, j} e^{-\beta E_i - \beta E_j - \beta E_k} + \dots \right) = -T \ln (Z_{\text{odd}} + Z_{\text{even}}),$$

где

$$Z_{\text{odd}} = \sum_i e^{-\beta E_i} + \frac{1}{6} \sum_i \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i, j} e^{-\beta E_i - \beta E_j - \beta E_k} + \dots, \quad (8.5)$$

$$Z_{\text{even}} = 1 + \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} e^{-\beta E_i - \beta E_j} + \dots \quad (8.6)$$

представляют собой большие статистические суммы для ансамблей систем с нечетным и четным числом квазичастиц. Соответствующие термодинамические потенциалы имеют вид

$$\Omega_{\text{odd/even}} = -T \ln Z_{\text{odd/even}} = -T \ln \frac{\prod_i (1 + e^{-\beta E_i}) \mp \prod_i (1 - e^{-\beta E_i})}{2} = \\ = \Omega_{\text{BCS}} - T \ln \frac{1}{2} \left(1 \mp \prod_i \text{th} \frac{\beta E_i}{2} \right). \quad (8.7)$$

Следовательно,

$$\delta \Omega = \Omega_{\text{odd}} - \Omega_{\text{even}} = -T \ln \frac{1 - f(T)}{1 + f(T)}, \quad (8.8)$$

где

$$f(T) = \prod_{\mathbf{k}\alpha} \text{th} \frac{\beta E_{\mathbf{k}}}{2} \quad (8.9)$$

Рассмотрим теперь, как проявляются эффекты четности числа частиц в нормальном металле и различных сверхпроводниках. Для нормального металла

$$f(T) = \prod_{\mathbf{k}\alpha} \text{th} \frac{\beta |\xi_{\mathbf{k}}|}{2} = \exp \left(4N_0 V \int_0^{\infty} d\xi \ln \text{th} \frac{\xi}{2T} \right) = \exp (-2\pi^2 N_0 VT). \quad (8.10)$$

Здесь N_0 — плотность состояний на одну проекцию спина, а V — объем образца. Эффекты четности, таким образом, преисбражимо малы:

$$\Omega_{\text{odd}} - \Omega_{\text{even}} \approx 2T \exp (-2\pi^2 N_0 VT), \quad (8.11)$$

если температура велика по сравнению с расстоянием между энергетическими уровнями электронов в островке $\delta E = (N_0 V)^{-1}$ или точнее, если

$$T > T^* \approx \frac{\delta E}{2\pi^2}. \quad (8.12)$$

Для микроостровков, использованных в Гарвардских экспериментах, $\delta E \sim 2 \cdot 10^{-4}$ К.

В обычных сверхпроводниках щель в спектре элементарных возбуждений никогда не обращается в нуль, и

$$f_s(T) = \prod_{\mathbf{k}\alpha} \operatorname{th} \frac{\beta E}{2} = \exp \left(4N_0 V \int_{\Delta}^{\infty} \frac{E dE}{\sqrt{E^2 - \Delta^2}} \ln \frac{1 - e^{-E/T}}{1 + e^{-E/T}} \right). \quad (8.13)$$

Последнее выражение при низких температурах $T < \Delta$ можно представить в виде

$$f_s(T) = \left(\operatorname{th} \frac{\Delta}{2T} \right)^{N_{\text{eff}}}, \quad (8.14)$$

где

$$N_{\text{eff}} = 4N_0 V \int_{\Delta}^{\infty} \frac{E dE}{\sqrt{E^2 - \Delta^2}} e^{-(E-\Delta)/T} \approx 2\sqrt{2\pi\Delta T} N_0 V, \quad (8.15)$$

что, в свою очередь, позволяет записать $\delta\Omega$ в виде

$$\delta\Omega \approx \Delta - T \ln N_{\text{eff}}. \quad (8.16)$$

Эта формула имеет ясный физический смысл: свободная энергия, связанная с появлением неспаренного электрона, есть величина щели в спектре возбуждений минус температура, умноженная на логарифм эффективного числа состояний, в которых размещаются тепловые возбуждения. В отличие от нормального металла, проявление эффектов четности (подавление нечетных пиков в токе через островок) начинается с температуры

$$T_s^* \approx \frac{\Delta}{\ln N_{\text{eff}}}. \quad (8.17)$$

При этой температуре на островке будет порядка одной квазичастицы:

$$N_{\text{qp}} \approx e^{-\delta\Omega/T} = N_{\text{eff}} e^{-\Delta/T}. \quad (8.18)$$

Для Гарвардских экспериментов $T_s^* \approx 0,3$ К.

Обратимся теперь к сверхпроводникам, щель в спектре которых обращается в нуль в изолированных точках, как в A -фазе ${}^3\text{He}$, или на изолированных линиях на ферми-поверхности, как это имеет место в полярной фазе. Вычисления, аналогичные тем, что были проделаны для теплоемкости необычных сверхпроводников (см. § 7), дают:

$$f_A(T) \approx \exp \left(-\frac{\pi^4}{18} N_0 V \frac{T^3}{\Delta^2} \right), \quad (8.19)$$

$$f_{\text{pol}}(T) \approx \exp \left(-C N_0 V \frac{T^2}{\Delta} \right), \quad (8.20)$$

где C – постоянная порядка единицы. Следовательно, для сверхпроводников с нулями в изолированных точках имеем:

$$\Omega_{\text{odd}} - \Omega_{\text{even}} = \begin{cases} 2T \exp \left[-(T/T_A^*)^3 \right], & \text{при } T > T_A^*, \\ \delta E, & \text{при } T \ll T_A^*. \end{cases} \quad (8.21)$$

Здесь

$$T_A^* = \left(\frac{18}{\pi^4} \Delta^2 \delta E \right)^{1/3}. \quad (8.22)$$

Мы видим, что значение $\delta\Omega$ в этом случае не достигает величины щели Δ . С понижением температуры $\delta\Omega$ возрастает, а затем начинает падать. В точке максимума $\delta\Omega(T_A^*) \approx T_A^*$, T_A^* — температура, при которой членом уровней в

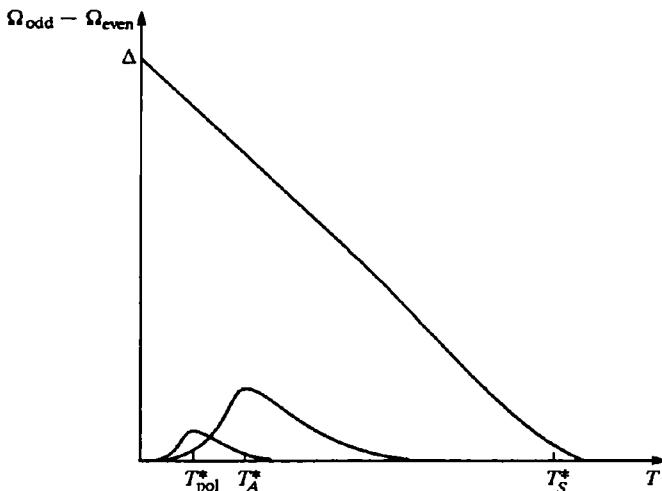


Рис. 7. Качественная зависимость от температуры разности термодинамических потенциалов с нечетным и четным числом электронов для обычного сверхпроводника (верхняя линия) и для сверхпроводников, щель в спектре которых обращается в ноль в изолированных точках или на линиях

энергетическом интервале $E < T_A^*$ становится порядка единицы (сравните с (8.12)). При температурах $T < T_A^*$ пренебрежение дискретностью спектра неоправдано, и в этой области $\Omega_{\text{odd}} - \Omega_{\text{even}} \approx \delta E$.

Для сверхпроводников с нулями параметра порядка на линиях имеем:

$$\Omega_{\text{odd}} - \Omega_{\text{even}} = \begin{cases} 2T \exp \left[- \left(T/T_{\text{pol}}^* \right)^2 \right], & \text{при } T > T_{\text{pol}}^*, \\ \delta E, & \text{при } T \ll T_{\text{pol}}^*, \end{cases} \quad (8.23)$$

где

$$T_{\text{pol}}^* = \left(\frac{\Delta \delta E}{C} \right)^{1/2}. \quad (8.24)$$

Как и в предыдущем случае, имеет место немонотонное поведение $\delta\Omega(T)$. В точке максимума $\delta\Omega(T_{\text{pol}}^*) \approx T_{\text{pol}}^*$. В условиях эксперимента [24]: $T_A^* \approx 0,1 T_c$, $T_{\text{pol}}^* \approx 10^{-2} T_c$.

Качественное поведение $\delta\Omega$ в различных типах сверхпроводников изображено на рис. 7. Эффект четности числа электронов в микроостровках из необычных сверхпроводников выражен заметно слабее. Он имеет место при существенно более низких температурах и существенно меньше, чем в микроостровках из обычных сверхпроводников.

Имеется и другое ограничение возможности наблюдения $2e$ -периодичности тока через транзистор с кулоновской блокадой, изготовленный из сверхпроводника с нулями в спектре элементарных возбуждений. Сверхпроводящее состояние в таком транзисторе скорее всего будет подавлено в поверхностном слое толщиной ξ_0 . Плотность состояний в этом слое будет близка к плотности состояний нормального металла. Поэтому разность $\Omega_{\text{odd}} - \Omega_{\text{even}}$ может остаться экспоненциально малой.

Итак, удвоение периода тока через сверхпроводящий транзистор с кулоновской блокадой реализуемо, по-видимому, лишь в сверхпроводниках без нулей в спектре возбуждений.

В заключение обсудим два вопроса, рассмотрение которых мы оставили в стороне, чтобы не прерывать связности изложения.

Условие слабой связи островка с внешней цепью. Островок можно рассматривать как изолированный объект при условии отсутствия в контактах, связывающих островок с внешней цепью, локализованных электронных состояний, распространенных на весь объем контакта. Электронные состояния в контакте не должны испытывать влияния границ, что количественно можно записать в виде неравенства $\delta E \gg \Delta E$ (условие локализации). Здесь δE — расстояние между энергетическими уровнями, ΔE — сдвиг уровней за счет влияния границы. В плоских контактах толщиной L и площадью S , имеем $\delta E = 1/(SLN_0)$, где N_0 — плотность состояний, а $\Delta E \sim h/\tau \approx hD/L^2$, где τ — время диффузионного движения электрона до границы ($L \ll \sqrt{S}$), D — коэффициент диффузии, связанный с проводимостью контакта σ соотношением Эйнштейна

$$e^2 DN_0 = \sigma.$$

Подставляя все перечисленные выражения в исходное неравенство, окончательно получим условие локализации [29]:

$$R = \frac{L}{\sigma S} \gg \frac{h}{e^2} \approx 26 \text{ кОм}.$$

Ток через два последовательно включенных Джозефсоновских контакта. Джозефсоновский ток в схеме, изображенной на рис. 8, легко найти с помощью

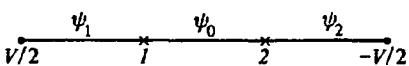


Рис. 8. Два последовательно включенных Джозефсоновских контакта

элементарного обобщения фейнмановского подхода [30] к контакту Джозефсона как к двухуровневой квантовомеханической системе. Вводя в двухуровневую систему с амплитудами

состояний $\psi_1 = \sqrt{n_{s1}/2} e^{i\varphi_1}$, $\psi_2 = \sqrt{n_{s2}/2} e^{i\varphi_2}$ промежуточное состояние — островок с волновой функцией ψ_0 , запишем уравнения Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \frac{eV}{2} \psi_1 + K \psi_0,$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi_0}{\partial t} = K \psi_1 + K \psi_2 + E_0 \psi_0,$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = K \psi_0 - \frac{eV}{2} \psi_2.$$

Здесь V — внешняя разность потенциалов, K — джозефсоновская энергия (матричный элемент перехода) каждого из контактов, E_0 — энергия островка. При нулевой внешней разности потенциалов через контакты течет постоянный ток. В этих условиях волновая функция островка, также как и разность фаз $\varphi_2 - \varphi_1$ не зависят от времени. Требование стационарности состояния ψ_0 приводит к условию

$$\psi_0 = -\frac{K(\psi_1 + \psi_2)}{E_0},$$

с учетом которого система уравнений переписывается в виде:

$$i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = -\frac{K^2}{E_0} (\psi_1 + \psi_2),$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = -\frac{K^2}{E_0} (\psi_1 + \psi_2).$$

Подставляя в первое уравнение выражения для ψ_1 и ψ_2 и выделяя мнимую часть, получаем:

$$\hbar \frac{\partial \sqrt{n_{s1}}}{\partial t} = -\frac{K^2}{E_0} \sqrt{n_{s2}} \sin(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Поскольку ток пропорционален n_{s1} , то окончательное выражение для постоянного тока через два последовательно включенных джозефсоновских контакта при нулевой внешней разности потенциалов принимает вид

$$j = \frac{2e}{\hbar} \sqrt{n_{s1} n_{s2}} \frac{K^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{E_0}.$$

§ 9. Парамагнитная восприимчивость и сдвиг Найта

Измерение парамагнитной восприимчивости электронного газа в сверхпроводнике является еще одним способом тестирования сверхпроводящего состояния. Хотя слабое магнитное поле, экранируемое незатухающими токами, не проникает в толщу сверхпроводника, тем не менее спиновый (паулиевский) парамагнетизм в сверхпроводниках (а тем более в нейтральной сверхтекущей ферми-жидкости ${}^3\text{He}$) — наблюдаемое явление. В этом параграфе мы найдем температурную зависимость парамагнитной восприимчивости электронного газа в различных сверхпроводящих состояниях.

Для сверхпроводника с синглетным спариванием куперовские пары не дают вклада в спиновый парамагнетизм, и спиновый магнитный момент электронного газа определяется только вкладом элементарных возбуждений:

$$M = \mu_B \sum_{\mathbf{k}} [f(E_{\mathbf{k},-}) - f(E_{\mathbf{k},+})]. \quad (9.1)$$

Здесь $f(E)$ — фермиевская функция распределения (6.2),

$$E_{\mathbf{k},\pm} = \sqrt{\xi^2 + \Delta^2 |g(\mathbf{k})|^2} \pm \mu_B H \quad (9.2)$$

— энергии возбуждений с ориентацией спинов соответственно по и против направления поля H , μ_B — магнетон Бора (в случае ^3He — магнитный момент ядра). Из (9.1) имеем:

$$M = -2\mu_B^2 N_0 H \int \frac{d\Omega}{4\pi} \int d\xi \frac{\partial f(E_k)}{\partial E} = 2\mu_B^2 N_0 H \int \frac{d\Omega}{4\pi} Y(\hat{k}, T), \quad (9.3)$$

где

$$Y(\hat{k}, T) = \frac{1}{4T} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{\text{ch}^2(E_k/2T)}, \quad (9.4)$$

а $E_k = \sqrt{\xi^2 + \Delta^2 |g(\mathbf{k})|^2}$. Отсюда получаем выражение для магнитной восприимчивости:

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial H} = \chi_n Y(T), \quad (9.5)$$

где $\chi_n = 2\mu_B^2 N_0$ — восприимчивость в нормальном состоянии¹, а функция

$$Y(T) = \int \frac{d\Omega}{4\pi} Y(\hat{k}, T) = \begin{cases} 1, & \text{при } T = T_c, \\ 0, & \text{при } T = 0 \end{cases} \quad (9.6)$$

называется функцией Иосида и описывает долю нормальных электронов в сверхпроводнике (рис. 9).

При $0 < T < T_c$ температурное поведение $Y(T)$ для различных сверхпроводящих состояний различно. В пределе $T \rightarrow 0$ вычисления, аналогичные проделанным в § 7 для теплоемкости, дают:

$$Y(T) \sim \begin{cases} e^{-\Delta_0/T}, & g(\mathbf{k}) \neq 0, \\ \left(\frac{T}{T_c}\right)^2, & g(\mathbf{k}) \text{ обращается в нуль в изолированных точках,} \\ \frac{T}{T_c}, & g(\mathbf{k}) \text{ обращается в нуль на линиях.} \end{cases} \quad (9.7)$$

Парамагнитная восприимчивость сверхпроводника с синглетным спариванием при $T \rightarrow 0$ обращается в нуль, что обуславливает проигрыш в энергии $\chi_n H^2/2 = \mu_B^2 N_0 H^2$ сверхпроводника, находящегося в магнитном поле, по сравнению с нормальным металлом. В то же время, при $T = 0$ сверхпроводящее состояние энергетически выгоднее нормального на $N_0 \Delta_0^2/2$ (см. (5.37)). Сравнивая эти две энергии, получаем, что в полях, больших, чем

$$H_p = \frac{\Delta_0}{\sqrt{2\mu_B}} \quad (9.8)$$

сверхпроводящее состояние заведомо невыгодно. В поле H_p , называемом *парамагнитным пределом сверхпроводимости*, происходит разрушение синглетного состояния куперовских пар. В обычных сверхпроводниках $H_p \approx 1$ Тесла. На практике сверхпроводимость разрушается в полях, превышающих верхнее критическое поле H_{c2} в сверхпроводниках второго рода (см. ниже § 12) или поле абсолютной неустойчивости сверхпроводящего состояния H_{c1} в сверхпроводниках первого рода, значительно меньших парамагнитного

¹ Напомним, что N_0 — плотность состояний на одну проекцию спина.

предела H_p . Кроме парамагнитного предела в сверхпроводниках с несущим орбитальным моментом куперовских пар, как при синглетном $S = 0$, так и при триплетном $S = 1$ спаривании, имеется диамагнитный предел² $H_D \approx \frac{m^*}{m} H_p$. Поле H_D может как превосходить, так и быть меньше парамагнитного предела, в зависимости от отношения эффективной массы электрона к массе электрона в вакууме.

Температурная зависимость (9.5) измеряется следующим образом. Ядерные спины атомов вещества, из которого состоит сверхпроводник, прецессируют в магнитном поле \mathbf{H} с частотой

$$\omega = \gamma H. \quad (9.9)$$

На этой частоте наблюдается ядерный магнитный резонанс, то есть резонансное поглощение радиочастотного поля H_{rf} , перпендикулярного постоянному полю \mathbf{H} ³. Из-за количества вероятности попадания электронов проводимости в точку нахождения ядра R_n , пропорциональной $|\psi_e(R_n)|^2$, имеется взаимодействие магнитных моментов ядер μ_n и магнитных моментов электронов проводимости μ_e (контактное взаимодействие):

$$H_{int} \sim \mu_n \mu_e \delta(r - R_n). \quad (9.10)$$

Среднее значение величины μ_e во внешнем поле дается выражением

$$\langle \mu_e \rangle = \frac{\chi H}{n},$$

где χ есть парамагнитная восприимчивость, а n — плотность электронного газа.

Сдвиг уровней энергии ядерного спина вследствие взаимодействия (9.10):

$$\delta E \sim \mu_n \frac{\chi}{n} |\psi(R_n)|^2 H$$

приводит к изменению резонансной частоты (9.9), то есть частоты переходов между уровнями в магнитном поле (*сдвиг Найта*) на величину:

$$\delta\omega \sim \frac{\mu_n \chi}{n \hbar} |\psi(R_n)|^2 H. \quad (9.11)$$

При переходе металла в сверхпроводящее состояние изменяется входящая в (9.11) парамагнитная восприимчивость χ , поэтому измерение отношения $\delta\omega_s / \delta\omega_n = \chi_s / \chi_n$ позволяет, согласно (9.5), определить плотность нормальных электронов. Из (9.6) следует, что сдвиг Найта в сверхпроводнике с синглетным спариванием должен исчезать по мере уменьшения температуры.

Посмотрим теперь, как обстоит дело в сверхпроводниках с триплетным спариванием. Спиновое состояние куперовских пар во всем объеме сверхпроводника задается вектором \mathbf{d} , зависящим от направления импульса на Ферми-поверхности. Вероятность найти пару в состоянии с нулевой проекцией спина на ось квантования \hat{z} пропорциональна $|d_z(\mathbf{k})|^2$ (см. (2.5) и (2.7)).

²См. И. А. Лукьянчук, В. П. Минеев // Письма в ЖЭТФ, 44, 183 (1986).

³Для наблюдения этого эффекта поле в образце должно быть однородно, что имеет место при условии малости размера образца по сравнению с лоционовской глубиной проникновения.

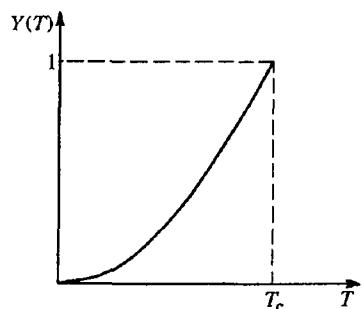


Рис. 9. Общий вид функции Иосила

Очевидно, что если внешнее поле \mathbf{H} (задающее ось квантования) направлено вдоль $\mathbf{d}(\mathbf{k})$, то спин пар перпендикулярен \mathbf{H} и не дает вклада в восприимчивость, которая, следовательно, определяется лишь вкладом возбуждений:

$$\chi_{\perp}(\mathbf{k}) = \chi_n Y(\hat{\mathbf{k}}, T), \quad (9.12)$$

где $Y(\hat{\mathbf{k}}, T)$ дается формулой (9.4), а $E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\xi^2 + \Delta^2 |\mathbf{d}(\mathbf{k})|^2}$.

Для направления поля (то есть оси \hat{z}) в плоскости, перпендикулярной вектору $\mathbf{d}(\mathbf{k})$, будут отличны от нуля только x - и y -компоненты вектора $\mathbf{d}(\mathbf{k})$, из которых составлены амплитуды вероятности $\pm d_x(\mathbf{k}) + id_y(\mathbf{k})$ найти пары в состояниях с проекциями спина ± 1 на ось квантования. Очевидно, что для такого направления поля вклад в восприимчивость дают как пары, так и возбуждения, и она совпадает с восприимчивостью ферми-жидкости в нормальном состоянии:

$$\chi_{\parallel} = \chi_n. \quad (9.13)$$

Для произвольной ориентации поля магнитный момент сверхтекучей жидкости определяется тензором восприимчивости:

$$M_{\alpha} = \chi_{\alpha\beta} H_{\beta},$$

который получается путем комбинирования выражений (9.12) и (9.13):

$$\chi_{\alpha\beta} = \int \frac{d\Omega}{4\pi} \left\{ \chi_{\perp}(\mathbf{k}) \frac{d_{\alpha}^{*}(\mathbf{k})d_{\beta}(\mathbf{k})}{d^{*}(\mathbf{k})d(\mathbf{k})} + \chi_{\parallel}(\mathbf{k}) \left[\delta_{\alpha\beta} - \frac{d_{\alpha}^{*}(\mathbf{k})d_{\beta}(\mathbf{k})}{d^{*}(\mathbf{k})d(\mathbf{k})} \right] \right\}. \quad (9.14)$$

В качестве примера приведем выражения для тензоров восприимчивости в A - и B -фазах гелия-3, которые получаются из (9.14) после подстановки соответствующих параметров порядка⁴ $d^A(\mathbf{k})$ и $d^B(\mathbf{k})$ (см. § 3):

$$\chi_{\alpha\beta}^A = \chi_n [\delta_{\alpha\beta} + V_{\alpha} V_{\beta} (Y_A(T) - 1)], \quad (9.15)$$

$$\chi_{\alpha\beta}^B = \chi_n \delta_{\alpha\beta} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} Y_B(T) \right). \quad (9.16)$$

Мы видим, что в B -фазе восприимчивость изотропна, и при $T \rightarrow 0$ сдвиг Найта в сверхпроводнике со структурой B -фазы исчезает лишь частично. В A -фазе восприимчивость является одноосным тензором. На практике, вдали от стенок сосуда с гелием-3, восприимчивость A -фазы всегда совпадает с χ_n , поскольку вектор \mathbf{V} разворачивается перпендикулярно магнитному полю, чем достигается энергетически выгодное максимальное значение восприимчивости. Вблизи стенок из-за спин-орбитального взаимодействия вектор \mathbf{V} перпендикулярен к поверхности, поэтому восприимчивость A -фазы зависит от направления.

Такой же эффект должен иметь место и в сверхпроводниках с триплетным спариванием и сильным спин-орбитальным взаимодействием, фиксирующим направление вектора \mathbf{d} . Парамагнитные эффекты (в частности, сдвиг Найта) должны в этом случае сильно зависеть от направления внешнего магнитного поля [31–33]. Угловая зависимость восприимчивости любой из триплетных

⁴ При вычислении восприимчивостей A - и B -фаз в реальном гелии-3 необходимо учитывать изменения внешнего поля за счет намагничивания самой жидкости (ферми-жидкостные поправки) [3, 6]. Этот количественно довольно значительный эффект не приводит, однако, к качественным изменениям, и здесь мы его учитывать не будем.

фаз, перечисленных в табл. 1–6, устанавливается после подстановки в (9.14) соответствующих выражений для параметров порядка $d(\mathbf{k}) = \sum_i \eta_i \psi(\mathbf{k})$. Следует, однако, иметь в виду, что результат вычислений зависит от конкретного вида базисных функций неприводимого представления. При этом температурная зависимость различных компонент восприимчивости должна определяться с учетом зависимости $\eta_i(T)$, диктуемой уравнениями типа (6.12). Парамагнитная восприимчивость в сверхпроводниках с триплетным спариванием и слабым спин-орбитальным взаимодействием совпадает с паулиевской восприимчивостью в нормальном состоянии.

Упражнение. 1. Доказать формулы (9.5) и (9.14) прямым вычислением спинового магнитного момента.

Указание. Найти преобразование Боголюбова, диагонализирующее гамильтониан

$$H = H_{\text{BCS}} - \mu_B \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}\alpha}^+ (\sigma_{\alpha\beta} \mathbf{H}) a_{\mathbf{k}\beta},$$

где H_{BCS} — гамильтониан (5.1). Воспользовавшись этим преобразованием, найти линейный по полю вклад в среднее значение оператора спинового магнитного момента

$$\mathbf{M} = \mu_B \sum_{\mathbf{k}} \langle a_{\mathbf{k}\alpha}^+ \sigma_{\alpha\beta} a_{\mathbf{k}\beta} \rangle.$$

2. Найти поведение функций Иосида $Y_A(T)$ и $Y_B(T)$ для A - и B -фаз при $T \rightarrow 0$ и $T \rightarrow T_c$.

§ 10. Разложение Ландау свободной энергии сверхпроводников

Образование сверхпроводящего состояния из нормального происходит посредством фазового перехода второго рода. Согласно теории Ландау, изменение плотности свободной энергии при таком переходе может быть разложено в ряд по степеням параметра порядка. В случае однокомпонентной сверхпроводимости, когда параметром порядка является комплексная скалярная функция $\eta = |\eta| e^{i\varphi} = \Delta e^{i\varphi}$ (см. § 4), это разложение имеет вид

$$F_{\text{cond}} = F_s - F_n = \alpha |\eta|^2 + \frac{\beta}{2} |\eta|^4 = \alpha \Delta^2 + \frac{\beta}{2} \Delta^4, \quad (10.1)$$

где $\alpha(T) = \alpha_0(T - T_c)/T_c$ — меняет знак при $T = T_c$; α_0 , β — постоянные положительные коэффициенты. Минимизация F_s по Δ дает следующие температурные зависимости щели (параметра порядка):

$$\Delta^2(T) = -\frac{\alpha_0}{\beta} \frac{T - T_c}{T_c}, \quad (10.2)$$

и свободной энергии:

$$F_{\text{cond}} = -\frac{\alpha_0^2}{2\beta} \left(\frac{T - T_c}{T_c} \right)^2 \quad (10.3)$$

вблизи критической температуры. Выражение (10.3) позволяет найти скачок теплоемкости при переходе в сверхпроводящее состояние:

$$(C_s - C_n)|_{T=T_c} = -T_c \frac{\partial^2 F_{\text{cond}}}{\partial T^2} \Big|_{T=T_c} = \frac{\alpha_0^2}{T_c \beta}. \quad (10.4)$$

Формула (10.1) и ее обобщение на пространственно-неоднородный случай играют важнейшую роль в теории сверхпроводимости. Она может быть получена из микроскопической теории Бардина–Купера–Шриффера. Такой вывод для произвольного типа спаривания и составляет предмет настоящего параграфа.

Свободная энергия сверхпроводника имеет вид

$$F_s = \langle H_{\text{BCS}} \rangle - TS. \quad (10.5)$$

Здесь H_{BCS} — гамильтониан БКШ (5.31):

$$H_{\text{BCS}} = \sum_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}\alpha}^+ b_{\mathbf{k}\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \Delta_{\mathbf{k},\alpha\beta} F_{\mathbf{k},\alpha\beta}^+ + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}\alpha} (\xi_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}}), \quad (10.6)$$

а S — энтропия электронного газа, определяемая формулой

$$S = - \sum_{\mathbf{k}\alpha} [f_{\mathbf{k}} \ln f_{\mathbf{k}} + (1 - f_{\mathbf{k}}) \ln (1 - f_{\mathbf{k}})], \quad (10.7)$$

где $f_{\mathbf{k}}$ — фермиевская функция распределения (6.2).

Для определенности мы будем рассматривать случай унитарных фаз с тринадцатым спариванием, когда параметр порядка и энергия элементарных возбуждений даются формулами

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\xi_k^2 + \Delta^2(T) d(\mathbf{k}) d^*(\mathbf{k})},$$

$$\Delta_{\mathbf{k},\alpha\beta} = \Delta(T) d(\mathbf{k}) g_{\alpha\beta},$$

$$F_{\mathbf{k},\alpha\beta}^+ = F_{\mathbf{k}}^* g_{\alpha\beta}^+$$

(см. § 5). Подставляя в (10.5) и выполняя статистическое усреднение, имеем:

$$\langle H_{\text{BCS}} \rangle = \sum_{\mathbf{k}\alpha} \left[E_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} (\Delta(T) d(\mathbf{k}) F_{\mathbf{k}}^* + \xi_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}}) \right].$$

В то же время:

$$\begin{aligned} -TS &= T \sum_{\mathbf{k}\alpha} \ln (1 - f_{\mathbf{k}}) + T \sum_{\mathbf{k}\alpha} f_{\mathbf{k}} \ln \frac{f_{\mathbf{k}}}{1 - f_{\mathbf{k}}} = \\ &= T \sum_{\mathbf{k}\alpha} \ln (1 - f_{\mathbf{k}}) - \sum_{\mathbf{k}\alpha} E_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (10.8)$$

После подстановки в (10.5) получаем:

$$F_s = \sum_{\mathbf{k}} [\Delta(T) d(\mathbf{k}) F_{\mathbf{k}}^* + \xi_{\mathbf{k}} + 2T \ln (1 - f_{\mathbf{k}}) - E_{\mathbf{k}}]. \quad (10.9)$$

Первый член в этой формуле преобразуется с помощью уравнения (5.17):

$$\Delta d^*(\mathbf{k}) = - \sum_{\mathbf{k}'} V_l(\mathbf{k}, \mathbf{k}') F_{\mathbf{k}'}^*.$$

Домножая здесь левую и правую части на $\Delta d(\mathbf{k})$ и интегрируя по углам с помощью условия нормировки и разложения (5.4) потенциала $V_l(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$, имеем:

$$\frac{\Delta^2}{V_l} = \sum_{\mathbf{k}'} \Delta d(\mathbf{k}') F_{\mathbf{k}'}^*.$$

Отсюда, в свою очередь, учитывая выражение для критической температуры (6.10), получаем:

$$N_0 \Delta^2 \ln \frac{2\gamma\epsilon_l}{\pi T_c} = \sum_{\mathbf{k}'} \Delta d(\mathbf{k}') F_{\mathbf{k}'}^*.$$

Окончательно:

$$F_s = N_0 \Delta^2 \ln \frac{2\gamma\epsilon_l}{\pi T_c} + \sum_{\mathbf{k}} [\zeta_k + 2T \ln(1 - f_k) - E_k]. \quad (10.10)$$

Поскольку нас интересует только энергия конденсации, то есть отклонение энергии сверхпроводника от энергии нормального металла, то, принимая во внимание равенство

$$\frac{\partial}{\partial \Delta} [2T \ln(1 - f_k) - E_k] = -2d(\mathbf{k}) F_{\mathbf{k}}^*,$$

можно переписать (10.10) в виде

$$F_{\text{cond}} = N_0 \Delta^2 \ln \frac{2\gamma\epsilon_l}{\pi T_c} - 2 \sum_{\mathbf{k}} \int_0^\Delta d\Delta d(\mathbf{k}) F_{\mathbf{k}}^*. \quad (10.11)$$

Интегрирование по волновым векторам выполняется в соответствии с правилом (1.8), при этом удобно сначала произвести интегрирование по энергии:

$$N_0 \int_{-\epsilon_l}^{\epsilon_l} F_{\mathbf{k}}^* d\xi = N_0 \Delta d^*(\mathbf{k}) \int_{-\epsilon_l}^{\epsilon_l} d\xi \frac{1 - 2f_k}{2E_k}.$$

Это выражение при $\Delta \rightarrow 0$ приводится к виду (ср. с выводом формулы (6.18))

$$\begin{aligned} N_0 \Delta d^*(\mathbf{k}) \left[\ln \frac{2\epsilon_0}{\Delta} - \ln \frac{\pi T}{\gamma \Delta} - \frac{7\zeta(3)}{8\pi^2} d(\mathbf{k}) d^*(\mathbf{k}) \left(\frac{\Delta}{T} \right)^2 \right] &= \\ &= N_0 \Delta d^*(\mathbf{k}) \left[\ln \frac{2\gamma\epsilon_0}{\pi T} - \frac{7\zeta(3)}{8\pi^2} d(\mathbf{k}) d^*(\mathbf{k}) \left(\frac{\Delta}{T} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (10.12)$$

Подставляя (10.12) в (10.11) и выполняя интегрирование по Δ , имеем:

$$F_{\text{cond}} = N_0 \Delta^2 \ln \frac{T}{T_c} + \frac{7\zeta(3)}{16\pi^2} N_0 \int \frac{d\Omega}{4\pi} (d(\mathbf{k}) d^*(\mathbf{k}))^2 \frac{\Delta^4}{T^2}.$$

Учитывая близость T к T_c , получаем окончательно:

$$F_{\text{cond}} = N_0 \frac{T - T_c}{T_c} \Delta^2 + \frac{7\zeta(3)}{16\pi^2} N_0 \int \frac{d\Omega}{4\pi} (d(\mathbf{k}) d^*(\mathbf{k}))^2 \frac{\Delta^4}{T_c^2}. \quad (10.13)$$

Аналогичные рассуждения позволяют получить разложение Ландау и для случая синглетного спаривания:

$$F_{\text{cond}} = N_0 \frac{T - T_c}{T_c} \Delta^2 + \frac{7\zeta(3)}{16\pi^2} N_0 \int \frac{d\Omega}{4\pi} (g(\mathbf{k})g^*(\mathbf{k}))^2 \frac{\Delta^4}{T_c^2}. \quad (10.14)$$

В частности, для обычного сверхпроводника с s -спариванием ($g(\mathbf{k}) = e^{i\varphi}$)

$$F_{\text{cond}} = N_0 \frac{T - T_c}{T_c} \Delta^2 + \frac{7\zeta(3)}{16\pi^2} N_0 \frac{\Delta^4}{T_c^2}. \quad (10.15)$$

Итак, мы получили разложения Ландау для сверхпроводников с тройственным¹ и синглетным спариванием, следующие из теории БКШ. Критическая температура, входящая в (10.13) и (10.14), одинакова для всех сверхпроводящих состояний с данным l (относящихся к данному неприводимому представлению группы симметрии нормального состояния). В то же время, энергия сверхпроводящих состояний с данным l , отличающихся наборами коэффициентов в разложениях (4.8) или (4.9) параметра порядка по сферическим гармоникам (в общем случае — по функциям базиса неприводимого представления (4.10) или (4.11)), будут различными. В самом деле, равновесная энергия конденсации (10.3)

$$F_{\text{cond}} = -\frac{\alpha_0^2}{2\beta} \left(\frac{T - T_c}{T_c} \right)^2 \sim \left[\int \frac{d\Omega}{4\pi} (d(\mathbf{k})d^*(\mathbf{k}))^2 \right]^{-1} \quad (10.16)$$

существенно зависит от вида сверхпроводящего состояния. Так, например, для фаз с p -спариванием после подстановки в (10.16) параметров порядка из § 3 мы получаем, что минимальной энергией среди фаз с p -спариванием будет обладать B -фаза ($d(\mathbf{k}) = \hat{\mathbf{k}}$). В частности, ее энергия оказывается ниже энергии A -фазы ($d(\mathbf{k}) = \sqrt{3/2}(\hat{k}_x + i\hat{k}_y, 0, 0)$) в 6/5 раз [22].

Действительно, в жидком гелии-3 при низких давлениях фазовый переход из нормальной жидкости происходит в сверхтекучую B -фазу. Однако, в области высоких давлений (рис. 2) сначала происходит переход в A -фазу, которая затем сменяется на B -фазу посредством перехода первого рода. Это означает, что при высоких давлениях вблизи T_c именно A -фаза наиболее энергетически выгодна. Разрешение противоречия с нашим результатом состоит в том, что формула (10.13), на основании которой сделан вывод о минимальности энергии B -фазы, является на самом деле недостаточно общей. В процессе ее вывода использовалось, казалось бы, естественное предположение о том, что спаривающее взаимодействие не изменяется в сверхпроводящем состоянии, в частности, является одинаковым во всех сверхпроводящих фазах с данным l (приближение слабой связи или приближение БКШ). На самом деле это не так, и $V(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ зависит от конкретного вида параметра порядка (сильная связь). Хотя этот факт не сказывается на утверждении о том, что все фазы с данным l имеют одинаковую критическую температуру, вид члена четвертого порядка по Δ в разложении (10.13) при этом меняется, что делает, вообще говоря, неверным вывод об энергетической выгодности B -фазы при любых температурах и давлениях. Учет влияния вида спаривания на $V(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ может

¹ Напомним, что разложение (10.13) справедливо лишь для так называемых унитарных фаз (см. § 5). Вывод разложения Ландау из теории БКШ для произвольных сверхпроводящих фаз с тройственным спариванием проделан в § 18.

быть произведен лишь в рамках конкретной микроскопической модели (см. [3, 6]) и мы не будем здесь этим заниматься, тем более что на практике нет возможности количественно проверить справедливость той или иной модели сильной связи.

§ 11. Сверхпроводящие состояния с многокомпонентными параметрами порядка

Из рассмотрения в §§ 4 и 10 следует, что возможные сверхпроводящие или сверхтекущие фазы, параметр порядка которых преобразуется в соответствии с определенным (неодномерным) представлением точечной группы симметрии G , имеют одинаковую критическую температуру, но различную свободную энергию. Вычисления с помощью той или иной микроскопической модели в принципе позволяют найти коэффициенты в разложении Ландау и ответить на вопрос, в какое именно состояние происходит фазовый переход, подобно тому, как это было сделано в предыдущем параграфе в рамках теории БКШ. Однако к выводу о том, что минимальную свободную энергию могут иметь различные состояния, причем каждое — в своей области фазовой диаграммы (например, не только B -фаза, но и другие фазы p -спаривания на плоскости давление-температура), можно прийти не зависящим от конкретной микроскопической модели феноменологическим путем. При этом для получения разложения Ландау могут быть использованы лишь весьма общие симметрийные соображения [34].

Разложение свободной энергии Ландау для фаз с p -спариванием. Параметром порядка в сверхтекущей ферми-жидкости с p -спариванием является комплексная 3×3 матрица $A_{\alpha i}$ (см. § 3), которая преобразуется при спиновых вращениях как вектор по индексу α , а при вращениях в координатном пространстве — как вектор по индексу i . Свободная энергия, будучи скалярной величиной, не зависит от выбора систем координат, в которых заданы эти вектора. Иными словами, разложение должно быть инвариантно относительно произвольных и независимых (в отсутствие спин-орбитального взаимодействия) трехмерных вращений спинового и координатного пространств. Кроме этого, свободная энергия вещественна, то есть не должна меняться при комплексном сопряжении параметра порядка (симметрия по отношению к обращению времени), а также при домножении параметра порядка на произвольный фазовый множитель $e^{i\varphi}$ (калибровочная инвариантность).

Указанным свойствам инвариантности при преобразованиях параметра порядка вида

$$A_{\alpha i} \rightarrow \tilde{A}_{\alpha i} = R_{\alpha \beta}^S R_{ij}^O e^{i\varphi} R A_{\beta j},$$

где $R_{\alpha \beta}^S$ и R_{ij}^O — матрицы трехмерных вращений в спиновом и координатном (орбитальном) пространствах, соответственно, а $R A_{\alpha i} = A_{\alpha i}^*$ — операция обращения времени, удовлетворяет выражение для плотности свободной энергии, содержащее всего пять инвариантных членов четвертого порядка:

$$\begin{aligned} F_{\text{cond}} = & \alpha A_{\alpha i} A_{\alpha i}^* + \beta_1 |A_{\alpha i} A_{\alpha i}|^2 + \beta_2 (A_{\alpha i}^* A_{\alpha i})^2 + \beta_3 A_{\alpha i}^* A_{\beta i} A_{\alpha j}^* A_{\beta j} + \\ & + \beta_4 A_{\alpha i}^* A_{\beta i} A_{\beta j}^* A_{\alpha j} + \beta_5 A_{\alpha i}^* A_{\alpha j} A_{\beta i}^* A_{\beta j}. \end{aligned} \quad (11.1)$$

Здесь матрицы A и A^* встречаются попарно, и во всех слагаемых произведена попарная свертка спиновых индексов со спиновыми, а орбитальными — с орбитальными.

Плотность свободной энергии (11.1) имеет несколько экстремумов, определяемых уравнениями $\delta F_{\text{cond}} / \delta A_{\alpha i} = 0$. Какие из этих экстремумов есть минимумы, и какой из минимумов является абсолютным, зависит от соотношения между коэффициентами β_i , которые в свою очередь, зависят от температуры и давления¹. A - и B -фазы входят в число минимумов F_{cond} . Матрицы параметра порядка для них выглядят следующим образом (см. § 3):

$$A_{\alpha i}^A = \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta(T) V_\alpha (\Delta'_i + i \Delta''_i), \quad (11.2)$$

$$A_{\alpha i}^B = \Delta(T) R_{\alpha i} e^{i\varphi}, \quad (11.3)$$

где V , Δ' , Δ'' — единичные векторы (причем $\Delta' \Delta'' = 0$), $R_{\alpha i}$ — матрица трехмерных вращений, а $\Delta(T)$ — модуль параметра порядка. Состояния A -фазы вырождены по ориентациям вектора V и пары векторов Δ' и Δ'' , а состояния B -фазы вырождены по отношению к трехмерным вращениям, задаваемым матрицей параметра порядка $R_{\alpha i}$, и к выбору фазы φ .

В отличие от (10.13), разложение (11.1) дает право на существование A -фазы. Действительно, подставляя (11.2) и (11.3) в (11.1), получаем:

$$\begin{aligned} F_{\text{cond}}^A &= 3\alpha\Delta^2 + 9\Delta^4(\beta_2 + \beta_3 + \beta_4), \\ F_{\text{cond}}^B &= 3\alpha\Delta^2 + 9\Delta^4 \left(\beta_1 + \beta_2 + \frac{\beta_3 + \beta_4 + \beta_5}{3} \right). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что A -фаза энергетически выгоднее B -фазы, если значение β_1 (или β_5) достаточно велико.

Многокомпонентные сверхпроводящие состояния в кристаллах. Пусть сверхпроводящее состояние соответствует одному из неодномерных представлений группы точечной симметрии кристалла. В случае сильного спин-орбитального взаимодействия параметр порядка такого состояния имеет вид (см. § 4)

$$\begin{aligned} g(\mathbf{k}) &= \eta_1 \psi_1^S(\hat{\mathbf{k}}) + \eta_2 \psi_2^S(\hat{\mathbf{k}}) + \dots \quad \text{при } S = 0, \\ d(\mathbf{k}) &= \eta_1 \psi_1^u(\hat{\mathbf{k}}) + \eta_2 \psi_2^u(\hat{\mathbf{k}}) + \dots \quad \text{при } S = 1. \end{aligned} \quad (11.4)$$

Как для синглетного, так и для триплетного сверхпроводящего состояния плотность свободной энергии вблизи температуры перехода записывается в виде разложения по степеням комплексных коэффициентов η_i , которое должно быть инвариантно относительно преобразований группы симметрии нормального состояния $G = U(1) \times R \times G$. При выводе такого разложения необходимо принять во внимание, что трансформационные свойства базисных функций $\psi_i^S(\hat{\mathbf{k}})$ и $\psi_i^u(\hat{\mathbf{k}})$ при преобразованиях симметрии можно отнести к коэффициентам η_i .

¹ Общая задача о нахождении всех экстремумов функционала (11.1) решена В. Березинским [35]. Те же результаты независимо получены в работе [36].

Например, для представлений E_{1g} и E_{1u} группы D_{6h} базисные функции пропорциональны компонентам вектора, лежащего в базисной плоскости (см. табл. 1), т. е.

$$\begin{aligned} (\psi_1^g(\hat{\mathbf{k}}), \psi_2^g(\hat{\mathbf{k}})) &\sim (k_z k_x, k_z k_y), \\ (\psi_1^u(\hat{\mathbf{k}}), \psi_2^u(\hat{\mathbf{k}})) &\sim (\hat{z} k_x, \hat{z} k_y). \end{aligned} \quad (11.5)$$

Поэтому можно считать, что коэффициенты η_1, η_2 преобразуются под действием элементов группы D_{6h} как компоненты такого вектора². Скалярные произведения $\eta\eta^*$, $\eta\eta$, $\eta^*\eta^*$ инвариантны относительно любых вращений из группы D_6 . Из них можно составить два вещественных инварианта четвертого порядка. Других инвариантов в случае гексагональной симметрии не существует, следовательно, разложение Ландау имеет вид:

$$F = \alpha\eta\eta^* + \frac{\beta_1}{2}(\eta\eta^*)^2 + \frac{\beta_2}{2}|\eta\eta|^2. \quad (11.6)$$

Минимуму свободной энергии (11.6) при $\beta_2 < 0$ соответствует параметр порядка

$$\eta = \eta_0(\cos \lambda, \sin \lambda)e^{i\varphi}, \quad (11.7)$$

$$\eta_0^2 = -\frac{\alpha}{\beta_1 + \beta_2},$$

где φ и λ — произвольные фазы. Снятие вырождения по отношению к λ происходит только при добавлении к разложению (11.6) инварианта шестого порядка:

$$\gamma \operatorname{Re}(\eta_1 + i\eta_2)^3(\eta_1^* + i\eta_2^*)^3. \quad (11.8)$$

Если $\gamma < 0$, то минимум свободной энергии достигается при $\lambda = \lambda_n = \pi n/3$, $n = 0, 1, \dots, 5$, если $\gamma > 0$, то — при $\lambda_n = \pi n/3 + \pi/6$. Все сверхпроводящие состояния, описываемые параметром порядка (11.7) с указанными значениями λ формально принадлежат одному сверхпроводящему классу $D_2(C_2) \times R$, однако направление осей симметрии для разных λ_n различно. Так, например, при $\gamma < 0$ и $\lambda = 0$ сверхпроводящий класс выглядит следующим образом:

$$D_2(C_2) \times R = \{E, C_{2y}, e^{i\pi}C_{2x}, e^{i\pi}C_{2z}\} \times R.$$

При $\beta_2 > 0$ минимум энергии (11.6) достигается при³

$$\eta = \eta_0(1, \pm i)e^{i\varphi}, \quad (11.9)$$

$$\eta_0^2 = -\frac{\alpha}{2\beta_1}.$$

Этому решению соответствует сверхпроводящий класс

$$D_6(E) = \left\{ \exp\left(\frac{i\pi n}{3}\right) C_n, \exp\left(\frac{i\pi n}{3}\right) RU_n \right\},$$

²Действие операций калибровочной группы сводится к умножению компонент параметра порядка на общий фазовый множитель: $(\eta_1, \eta_2) \rightarrow e^{i\varphi}(\eta_1, \eta_2)$, а обращение времени эквивалентно комплексному сопряжению: $(\eta_1, \eta_2) \rightarrow (\eta_1^*, \eta_2^*)$.

³Пользуясь результатами предыдущего параграфа, нетрудно установить, что в теории БКШ (приближение слабой связи) выполняется соотношение $\beta_1 = 2\beta_2 > 0$.

где $n = 0, 1, \dots, 5$. Аналогично A -фазе гелия-3, состояние (11.9) не инвариантно относительно обращения времени, что означает наличие спонтанного магнетизма куперовских пар. К этому вопросу мы еще вернемся в § 15.

Для сверхпроводящих состояний, соответствующих двумерным представлениям E_{2g} и E_{2u} группы D_{6h} , свободная энергия сохраняет вид (11.6). Ее минимумы определяются формулами (11.7) и (11.9) и формально относятся к тем же сверхпроводящим классам, включающим, однако, другие элементы симметрии в соответствии с трансформационными свойствами базисных функций представления E_2 .

В тетрагональном кристалле ($G = D_{4h}$) базисные функции единственного двумерного представления E тоже имеют вид (11.5), то есть преобразуются как

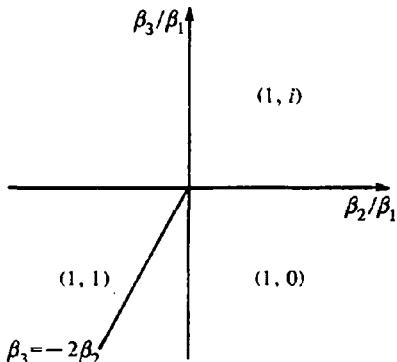


Рис. 10. Области существования двухкомпонентных сверхпроводящих состояний $(1,0)$, $(1,i)$ и $(1,-i)$ в тетрагональном кристалле

компоненты вектора, лежащего в базисной плоскости. Однако, в этом случае симметрия допускает существование трех инвариантов четвертого порядка, и свободная энергия Ландау принимает вид

$$F = \alpha \eta \eta^* + \frac{\beta_1}{2} (\eta \eta^*)^2 + \frac{\beta_2}{2} |\eta \eta|^2 + \frac{\beta_3}{2} (|\eta_1|^4 + |\eta_2|^4). \quad (11.10)$$

В зависимости от отношения коэффициентов β_2 и β_3 (см. рис. 10) энергия достигает минимальных значений на решениях трех типов:

$$\eta \sim (1,0) \text{ (или } (0,1)\text{)}, \quad (1,\pm i), \quad (1,\pm 1). \quad (11.11)$$

Вещественные фазы относятся к классам вида $D_2(C_2) \times R$, причем, как и в гексагональном кристалле, направления осей симметрии для различных фаз различно. Комплексные состояния принадлежат магнитному классу

$$D_4(E) = \left\{ \exp\left(\frac{i\pi n}{2}\right) C_n, \exp\left(\frac{i\pi n}{2}\right) RU_n \right\},$$

где $n = 0, 1, 2, 3$.

В кристаллах с кубической симметрией для сверхпроводящих состояний, параметры порядка $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ которых преобразуются согласно одному из двух трехмерных представлений группы O_h (см. табл. 5, 6), плотность свободной энергии записывается в виде, аналогичном (11.10):

$$F = \alpha \eta \eta^* + \frac{\beta_1}{2} (\eta \eta^*)^2 + \frac{\beta_2}{2} |\eta \eta|^2 + \frac{\beta_3}{2} (|\eta_1|^4 + |\eta_2|^4 + |\eta_3|^4). \quad (11.12)$$

В случае же двухкомпонентного параметра порядка, соответствующего двумерному представлению, свободная энергия имеет вид

$$F = \alpha \eta \eta^* + \frac{\beta_1}{2} (\eta \eta^*)^2 + \frac{\beta_2}{2} |\eta \eta|^2 + \gamma (\eta_1^3 \eta_2^{*3} + \eta_1^{*3} \eta_2^3), \quad (11.13)$$

где мы добавили инвариант шестого порядка, снимающий вырождение вещественных состояний.

Мы не будем здесь останавливаться на перечислении всех возможных минимумов (11.12) и (11.13) и соответствующих им сверхпроводящих классов. Это может быть сделано (см. [9]) аналогично рассмотренному выше простому случаю тетрагонального кристалла.

Упражнение. Найти разложение Ландау свободной энергии изотропного сверхпроводника с d -спариванием.

§ 12. Уравнения Гинзбурга–Ландау и верхнее критическое поле

В этом и нескольких следующих параграфах будет изложена теория Гинзбурга–Ландау для анизотропных сверхпроводящих состояний. Предполагая, что читатель знаком с теорией Гинзбурга–Ландау для обычных сверхпроводников (см., например, [37]), мы сосредоточим внимание на вопросах, специфических для необычной сверхпроводимости. Начнем с построения функционалов Гинзбурга–Ландау и вычисления верхних критических полей в необычных сверхпроводниках второго рода.

Однокомпонентные сверхпроводящие состояния в кристаллах. Функционал Гинзбурга–Ландау, то есть разность энергий Гиббса¹ сверхпроводника в неоднородном состоянии вблизи T_c и нормального металла, в случае однокомпонентного параметра порядка $\eta(\mathbf{r}) = |\eta(\mathbf{r})|e^{i\omega(\mathbf{r})}$ имеет вид

$$\mathcal{G} = \int d^3 r G = \int d^3 r \left(F - \frac{HB}{4\pi} \right), \quad (12.1)$$

где плотность свободной энергии F отличается от выражения (10.1) тем, что здесь добавлена градиентная энергия и энергия магнитного поля:

$$F = \alpha_0 \left(\frac{T - T_c}{T_c} \right) |\eta|^2 + \frac{\beta}{2} |\eta|^4 + K_{ij} (D_i \eta)^* (D_j \eta) + \frac{B^2}{8\pi}. \quad (12.2)$$

Здесь

$$D_i = -i\nabla_i + \frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{A}_i, \quad (i = x, y, z), \quad (12.3)$$

$\Phi_0 = \pi \hbar c / e$ — квант магнитного потока², а $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ — вектор магнитной индукции.

Тензор K_{ij} , называемый тензором эффективных масс, описывает анизотропию направлений в кристалле. Так, для одноосных кристаллов с гексаго-

¹ В задании внешним магнитным полем H вместо свободной энергии $\mathcal{F}(T, B)$ удобно использовать энергию Гиббса $\mathcal{G}(T, H)$.

² Здесь и ниже e обозначает абсолютную величину заряда электрона.

нальной (или тетрагональной) симметрией:

$$K_{ij} = (\delta_{ij} - \hat{z}_i \hat{z}_j) K_1 + \hat{z}_i \hat{z}_j K_4. \quad (12.4)$$

В кристаллах с кубической симметрией $K_1 = K_4$, то есть $K_{ij} = K \delta_{ij}$. Вывод градиентных слагаемых в свободной энергии с помощью микроскопической теории проделан в параграфе § 18.

Пространственные распределения параметра порядка η и вектор-потенциала \mathbf{A} должны обеспечивать минимальность функционала \mathcal{G} :

$$\frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \eta^*} = 0, \quad \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \mathbf{A}} = 0. \quad (12.5)$$

Варьируя (12.1) по η^* и отбрасывая интеграл по поверхности сверхпроводника (мы обсудим поверхностные эффекты в следующем параграфе), приходим к уравнению Гинзбурга–Ландау:

$$\alpha_0 \left(\frac{T - T_c}{T_c} \right) \eta + \beta |\eta|^2 \eta + K_{ij} D_i D_j \eta = 0. \quad (12.6)$$

Сравнивая первый и последний члены в уравнении (12.6), мы видим, что в теории имеется характерный пространственный масштаб — корреляционная длина $\xi(T)$, различная для различных кристаллографических направлений i :

$$\xi_i(T) \approx \hbar \left(\frac{K_n}{\alpha(T)} \right)^{1/2} \quad (12.7)$$

Буквенная оценка $\xi(T)$ для произвольного направления имеет вид

$$\xi(T) \sim \xi_0 \left(\frac{T_c - T}{T_c} \right)^{-1/2}, \quad (12.8)$$

где $\xi_0 = \hbar v_F / (2\pi T_c)$ есть размер куперовской пары (см. § 1).

Градиентная энергия сверхпроводника включает, разумеется, и члены более высоких порядков по градиентам, чем $K_{ij}(D_i \eta)^*(D_j \eta)$. Их игнорирование означает, что теория Гинзбурга–Ландау адекватно описывает достаточно медленные пространственные изменения параметра порядка с масштабом, превышающим ξ_0 .

Верхнее критическое поле. Верхнее критическое поле $H_{c2}(T)$, при котором в сверхпроводниках второго рода происходит фазовый переход в сверхпроводящее состояние, соответствует наименьшему собственному значению дифференциального оператора в линеаризованном уравнении Гинзбурга–Ландау. Перед изучением анизотропии верхнего критического поля, специфической для некоторых кристаллических сверхпроводников с многокомпонентным параметром порядка, посмотрим сначала, как обстоит дело для однокомпонентного сверхпроводимости в одноосных кристаллах. В этом случае линеаризованное уравнение Гинзбурга–Ландау имеет вид

$$\alpha_0 \left(\frac{T - T_c}{T_c} \right) \eta + K_1(D_x^2 + D_y^2)\eta + K_4 D_z^2 \eta = 0. \quad (12.9)$$

Выбирая магнитное поле лежащим в базисной плоскости:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= H(\cos \varphi, \sin \varphi, 0), \\ \mathbf{A} &= Hz(\sin \varphi, -\cos \varphi, 0), \end{aligned} \quad (12.10)$$

из (12.9) получаем:

$$-K_4 \frac{d^2 \eta}{dz^2} + K_1 \left(\frac{2\pi H}{\Phi_0} \right)^2 z^2 \eta + \alpha_0 \left(\frac{T - T_c}{T_c} \right) \eta = 0. \quad (12.11)$$

Пользуясь тем, что данное уравнение формально совпадает с уравнением Шредингера для заряженной частицы в магнитном поле, собственные функции и собственные значения которого (уровни Ландау) хорошо известны, находим:

$$H_{c2}(T) = \frac{\Phi_0 \alpha_0}{2\pi \sqrt{K_1 K_4}} \frac{T_c - T}{T_c}, \quad (12.12)$$

то есть величина верхнего критического поля, лежащего в базисной плоскости гексагонального (тетрагонального) кристалла, не зависит от направления.

Такая зависимость появляется лишь при выходе из базисной плоскости. Например, для поля, лежащего в плоскости (y, z) :

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= H(0, \sin \theta, \cos \theta), \\ \mathbf{A} &= Hx(0, \cos \theta, -\sin \theta), \end{aligned} \quad (12.13)$$

решение уравнения (12.9) дает

$$H_{c2}(T) = \frac{\Phi_0 \alpha_0}{2\pi \sqrt{K_1(K_1 \cos^2 \theta + K_4 \sin^2 \theta)}} \frac{T_c - T}{T_c}. \quad (12.14)$$

В кристаллах с кубической симметрией $K_1 = K_4$, и величина верхнего критического поля не зависит от его ориентации относительно осей кристаллической решетки.

Многокомпонентные сверхпроводящие состояния в кристаллах. Перейдем теперь к рассмотрению двухкомпонентной сверхпроводимости с векторным параметром порядка $\boldsymbol{\eta} = (\eta_x, \eta_y)$, соответствующим либо представлению E_1 группы D_6 , либо представлению группы E группы D_4 (см. § 4). Функционалы Гинзбурга–Ландау записываются в виде разложения по степеням двух комплексных функций η_1 и η_2 и их градиентов, которое должно быть вещественным и инвариантным относительно всех преобразований точечной группы D_{6h} (или D_{4h}). Последнее требование означает, что всякий член разложения имеет один и тот же вид во всех системах координат, связанных между собой преобразованиями из D_{6h} (или D_{4h}). Оставляя лишь квадратичные по параметру порядка слагаемые, существенные для вычисления верхнего критического поля, запишем функционалы Гинзбурга–Ландау для векторного представления в гексагональном:

$$\begin{aligned} F_{\text{hex}} = \alpha_0 \left(\frac{T - T_c}{T_c} \right) \eta \eta^* + K_1 (D_i \eta_i)^* (D_i \eta_j) + K_2 (D_i \eta_i)^* (D_j \eta_j) + \\ + K_3 (D_i \eta_j)^* (D_j \eta_i) + K_4 (D_z \eta_i)^* (D_z \eta_i) + \frac{B^2}{8\pi}, \end{aligned} \quad (12.15)$$

и тетрагональном:

$$F_{\text{tetr}} = F_{\text{hex}} + K_5 [(D_x \eta_x)^* (D_x \eta_x) + (D_y \eta_y)^* (D_y \eta_y)] \quad (12.16)$$

кристаллах, $i = x, y$.

Плотность свободной энергии F_{hex} содержит только скалярные произведения двух лежащих в базисной плоскости векторов $\boldsymbol{\eta}$ и \mathbf{D} ($\eta \eta^*$, $\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}$ и т. д.),

и поэтому инвариантна относительно любых поворотов в базисной плоскости. Члены, соответствующие специфической гексагональной анизотропии, появляются только в более высоких порядках разложения по градиентам. Полная симметрия свободной энергии по отношению к вращениям на произвольный угол в базисной плоскости приводит к изотропии верхнего критического поля. В этом можно убедиться непосредственно, решая два уравнения, получающиеся варьированием (12.15) по η_j^* :

$$K_1 D_i^2 \eta_j + K_2 D_j D_i \eta_i + K_3 D_i D_j \eta_j + K_4 D_z^2 \eta_j + \alpha_0 \left(\frac{T - T_c}{T_c} \right) \eta_j = 0 \quad (12.17)$$

в поле вида (12.10). Выбирая систему координат таким образом, чтобы ось \hat{x} была параллельна магнитному полю, из (12.17) получаем систему двух независимых дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} -K_4 \frac{d^2 \eta_x}{dz^2} + K_1 \left(\frac{2\pi H}{\Phi_0} \right)^2 z^2 \eta_x + \alpha_0 \left(\frac{T - T_c}{T_c} \right) \eta_x = 0, \\ -K_4 \frac{d^2 \eta_y}{dz^2} + (K_1 + K_2 + K_3) \left(\frac{2\pi H}{\Phi_0} \right)^2 z^2 \eta_y + \alpha_0 \left(\frac{T - T_c}{T_c} \right) \eta_y = 0 \end{cases} \quad (12.18)$$

с собственными значениями, определяющими две возможные величины $H_{c2}(T)$:

$$H_{c2}^{(1)}(T) = \frac{\Phi_0 \alpha_0}{2\pi \sqrt{K_1 K_4}} \frac{T_c - T}{T_c}, \quad (12.19)$$

$$H_{c2}^{(2)}(T) = \frac{\Phi_0 \alpha_0}{2\pi \sqrt{(K_1 + K_2 + K_3) K_4}} \frac{T_c - T}{T_c}. \quad (12.20)$$

Большая из них соответствует верхнему критическому полю, при котором происходит фазовый переход в сверхпроводящее состояние. Таким образом, верхнее критическое поле оказывается изотропным в базисной плоскости гексагонального кристалла и в случае двухкомпонентной сверхпроводимости. Для состояния, преобразующегося согласно представлению E_2 , доказательство этого факта можно найти в работе [38].

Отметим еще одно важное следствие из уравнений (12.18). Мы видим, что в магнитном поле фазовый переход из нормального состояния происходит в одну из двух сверхпроводящих фаз:

$$\eta_x \propto (1, 0) f_0(z) \quad (12.21)$$

или

$$\eta_y \propto (0, 1) f_0(z), \quad (12.22)$$

где $f_0(z)$ — функция основного состояния Ландау для заряженной частицы в магнитном поле. С другой стороны, если переход в нулевом магнитном поле для векторного представления происходит в комплексную фазу (см. (11.9))

$$\eta \propto (1, \pm i), \quad (12.23)$$

то при уменьшении магнитного поля (при $T < T_c$) трансформация состояния с параметром порядка (12.21) в состояние (12.23) должна обязательно сопровождаться переходом, связанным с зарождением фазы с параметром

порядка (12.22) (см. рис. 11). Аналогичное явление должно наблюдаться, если в нулевом поле переход происходит в вещественную fazу

$$\eta \propto (\cos \lambda_n, \sin \lambda_n), \quad (12.24)$$

где величины λ_n определяются кристаллической анизотропией (см. § 11).

Свойство изотропии $H_{c2}(T)$ в базисной плоскости гексагонального кристалла, разумеется, утрачивается при введении любого внешнего воздействия, нарушающего гексагональную симметрию. Так например, слабое орторомбическое возмущение, характеризуемое вектором M , лежащим в базисной плоскости, приводит к появлению в функционале Гинзбурга—Ландау слагаемого с орторомбической симметрией, имеющего вид

$$\gamma(M\eta)^*(M\eta). \quad (12.25)$$

Учет такого вклада приводит как к расщеплению температуры перехода (компоненты η , параллельная и перпендикулярная M , будут появляться при разных температурах), так и к заметной анизотропии верхнего критического поля [39]. Последнее свойство следует из того, что уравнения для компонент параметра порядка перестают быть независимыми (кроме выделенных направлений $H \parallel M$ и $H \perp M$).

Рассмотрим теперь кристалл с тетрагональной симметрией. Специфическим для него является дополнительный член в градиентной энергии (12.16), обладающий симметрией четвертого порядка относительно поворотов вокруг оси \hat{z} . Линеаризованные уравнения Гинзбурга—Ландау в этом случае имеют вид

$$K_1 D_i^2 \eta_j + K_2 D_j D_i \eta_i + K_3 D_i D_j \eta_i + K_4 D_z^2 \eta_j + K_5 (\delta_{xj} D_x^2 \eta_x + \delta_{yj} D_y^2 \eta_y) + \alpha_0 \left(\frac{T - T_c}{T_c} \right) \eta_j = 0. \quad (12.26)$$

Положим для простоты $K_2 = K_3 = 0$, тогда уравнения для компонент параметра порядка расцепляются, и, в случае поля вида (12.10), лежащего в базисной плоскости, получаем следующие значения H_{c2} для компонент η_x и η_y , соответственно:

$$H_{c2}^{(1)}(T) = \frac{\Phi_0 \alpha_0}{2\pi \sqrt{K_4(K_1 + K_5 \sin^2 \varphi)}} \frac{T_c - T}{T_c}, \quad (12.27)$$

$$H_{c2}^{(2)}(T) = \frac{\Phi_0 \alpha_0}{2\pi \sqrt{K_4(K_1 + K_5 \cos^2 \varphi)}} \frac{T_c - T}{T_c}. \quad (12.28)$$

При каждом направлении поля $H(\varphi)$ нужно выбрать из этих двух значений большее. Таким образом, в тетрагональном кристалле возникает анизотропия верхнего критического поля, специфическая для двухкомпонентной сверхпроводимости [40] (рис. 12).

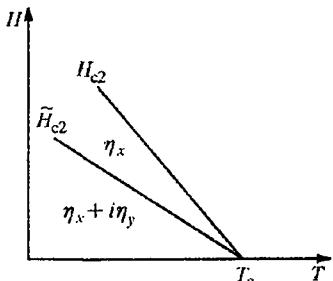


Рис. 11. Фазовые переходы в магнитном поле для двухкомпонентных сверхпроводящих состояний в гексагональном кристалле

Анизотропия верхнего критического поля той же природы имеет место в кубических кристаллах в случае двух- или трехкомпонентных сверхпроводящих состояний [38].

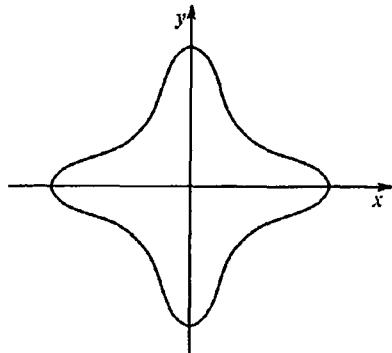


Рис. 12. Анизотропия верхнего критического поля в базисной плоскости тетрагонального кристалла для двухкомпонентного сверхпроводящего состояния

В этом случае последний член в (12.16) не приводит к качественным отличиям, и мы будем решать задачу при $K_5 = 0$. Поскольку магнитное поле направлено вдоль оси шестого порядка \hat{z} (калибровка $\mathbf{A} = (0, Hx, 0)$), то можно считать, что параметр порядка от z не зависит, и из (12.17) мы имеем следующие уравнения:

$$\begin{cases} (K_{123}D_x^2 + K_1 D_y^2)\eta_x + (K_2 D_x D_y + K_3 D_y D_x)\eta_y + \alpha_0 \left(\frac{T - T_c}{T_c} \right) \eta_x = 0, \\ (K_{123}D_y^2 + K_1 D_x^2)\eta_y + (K_3 D_x D_y + K_2 D_y D_x)\eta_x + \alpha_0 \left(\frac{T - T_c}{T_c} \right) \eta_y = 0, \end{cases} \quad (12.29)$$

где $K_{123} = K_1 + K_2 + K_3$. Введем теперь новые функции $\eta_{\pm} = \eta_x \pm i\eta_y$ и операторы $D_{\pm} = D_x \pm iD_y$, а также учтем, что $[D_x, D_y] = -2\pi iH/\Phi_0$. Тогда уравнения переписываются в виде

$$\begin{cases} \left(\alpha_0 \left(\frac{T - T_c}{T_c} \right) + K_0(D_x^2 + D_y^2) - K_- \frac{2\pi H}{\Phi_0} \right) \eta_+ + K_+ D_+^2 \eta_- = 0, \\ K_+ D_-^2 \eta_+ + \left(\alpha_0 \left(\frac{T - T_c}{T_c} \right) + K_0(D_x^2 + D_y^2) + K_- \frac{2\pi H}{\Phi_0} \right) \eta_- = 0, \end{cases} \quad (12.30)$$

где $K_0 = (K_{123} + K_1)/2$, $K_{\pm} = (K_2 \pm K_3)/2$.

Параметр порядка ищем в виде

$$\eta_{\pm} = \exp(-ipy)f_{\pm}(x). \quad (12.31)$$

Тогда уравнения Гинзбурга–Ландау имеют решения двух типов:

$$\begin{pmatrix} f_+(x) \\ f_-(x) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} F_{0,1}(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (12.32)$$

либо

$$\begin{pmatrix} f_+(x) \\ f_-(x) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} qF_{n+2}(x) \\ F_n(x) \end{pmatrix}, \quad (12.33)$$

где q — константа, а функция $F_n(x)$ связана с полиномами Эрмита $H_n(x)$ следующим соотношением:

$$F_n(x) = \exp \left[-\frac{\pi H}{\Phi_0} \left(x - p \frac{\Phi_0}{2\pi H} \right)^2 \right] H_n \left[\sqrt{\frac{2\pi H}{\Phi_0}} \left(x - p \frac{\Phi_0}{2\pi H} \right) \right]. \quad (12.34)$$

В том, что семейство (12.33) в самом деле является решением уравнений (12.30), легко убедиться, используя тождество [42]:

$$\begin{aligned} D_-^2 F_n &= -4n(n-1) \frac{2\pi H}{\Phi_0} F_{n-2}, \\ D_+^2 F_n &= -\frac{2\pi H}{\Phi_0} F_{n+2}, \\ (D_x^2 + D_y^2) F_n &= (2n+1) \frac{2\pi H}{\Phi_0} F_n. \end{aligned}$$

Подставляя (12.34) в (12.31), получаем выражение для температур перехода, соответствующих этому семейству решений:

$$\begin{aligned} \alpha_0 \frac{T - T_c}{T_c} &= \\ &= \left[-(2n+3)K_0 + \sqrt{(2K_0 - K_-)^2 + 4(n+1)(n+2)K_+^2} \right] \frac{2\pi H}{\Phi_0}. \end{aligned} \quad (12.35)$$

Максимальная величина верхнего критического поля соответствует либо решению

$$\begin{pmatrix} f_+(x) \\ f_-(x) \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} F_0(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (12.36)$$

при котором

$$H_{c2}^{(1)}(T) = \frac{\Phi_0 \alpha_0}{2\pi(K_0 - K_-)} \frac{T_c - T}{T_c}, \quad (12.37)$$

либо решению

$$\begin{pmatrix} f_+(x) \\ f_-(x) \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} qF_2(x) \\ F_0(x) \end{pmatrix}, \quad (12.38)$$

которому соответствует

$$H_{c2}^{(2)}(T) = \frac{\Phi_0 \alpha_0}{2\pi(3K_0 - \sqrt{(2K_0 - K_-)^2 + 8K_+^2})} \frac{T_c - T}{T_c}. \quad (12.39)$$

Вид состояния, в которое происходит фазовый переход в магнитном поле, зависит от соотношения между коэффициентами K_i . В частности, в теории БКШ $K_1 = K_2 = K_3$ (см. § 18), и большее значение верхнего критического поля имеет состояние (12.38).

При уменьшении внешнего поля ниже $H_{c2}(T)$ сверхпроводящие зародыши, отвечающие различным значениям параметра вырождения p , формируют периодическую решетку вихрей Абрикосова, вид которой может существенно отличаться от обычной треугольной (подробнее об этом см. [43]).

Нарушение пространственной четности и геликоидальные фазы. Всё рассмотренные многокомпонентные сверхпроводящие состояния возникают из нормальной фазы, в группе симметрий которой имеется преобразование пространственной инверсии. В противном случае, во-первых, теряет смысл

разделение на четные и нечетные сверхпроводящие состояния, ввиду возможности их перемешивания (см. § 4), и, во-вторых, появляется возможность построения инвариантных слагаемых в свободной энергии, линейных по пространственным градиентам (инварианты Лифшица).

Например, если параметр порядка $\eta = (\eta_x, \eta_y)$ соответствует двумерному представлению E_1 группы D_6 , то кроме членов, входящих в разложение (12.15), имеется инвариант вида

$$\gamma(\eta_1^* D_z \eta_2 + \text{к.с.}). \quad (12.40)$$

Учет подобных членов приводит к значительному изменению термодинамических и магнитных свойств системы, в частности, к возможности существования неоднородных (геликоидальных) фаз в нулевом магнитном поле [7].

Упражнения. 1. Доказать, что функционал Гинзбурга–Ландау для двухкомпонентного параметра порядка, соответствующего представлению E_2 группы D_6 (базисные функции см. в табл. 1, 2), также можно записать в виде (12.15). (Указание. Составьте из компонент D и η комбинации, инвариантные относительно операций группы D_{6h} и найдите преобразование $\eta_i \rightarrow \chi_i$, такое, что для функций $\chi_{1,2}$ градиентная энергия может быть приведена к виду (12.15).)

2. Найти критическую температуру и состояния, в которые происходит фазовый переход в гексагональном сверхпроводнике без центра инверсии с учетом слагаемого вида (12.40) в свободной энергии.

§ 13. Границные условия и поверхностная сверхпроводимость

Вблизи поверхности зародыши сверхпроводящей фазы в сверхпроводниках второго рода возникают в магнитном поле, превышающем верхнее критическое поле. Для нахождения поверхностного критического поля необходимо решить линеаризованное уравнение Гинзбурга–Ландау с учетом граничных условий для параметра порядка. В этом параграфе будут получены граничные условия и изучен вопрос о поверхностной сверхпроводимости в кристаллах. Возможность образования поверхностных зародышей в необычных сверхпроводниках существенно зависит от ориентации поверхности по отношению к кристаллическим осям. Обнаружение такой зависимости может служить способом идентификации сверхпроводящих фаз.

Границные условия. Однокомпонентная сверхпроводимость. Уравнения Гинзбурга–Ландау были получены в предыдущем параграфе из условия равенства нулю вариации свободной энергии. Оставшаяся поверхностная часть:

$$\delta\mathcal{F}|_{S,\text{grad}} = -i \oint dS n_i K_{ij} (D_j \eta) \delta\eta^*, \quad (13.1)$$

где n — вектор нормали к поверхности, обращается в нуль при условии

$$n_i K_{ij} D_j \eta|_S = 0, \quad (13.2)$$

которое обеспечивает обращение в нуль нормальной к поверхности компоненты тока: $n_j|_S = 0$. Полагая, что параметр порядка вблизи поверхности в

нулевом магнитном поле может меняться лишь вдоль направления нормали, получаем:

$$(\mathbf{n} \nabla) \eta|_S = 0. \quad (13.3)$$

Отсюда следует, что на поверхности сверхпроводника в отсутствие магнитного поля параметр порядка имеет ту же величину, что и в объеме.

Однако, даже для обычных сверхпроводников этот вывод, полученный в рамках теории Гинзбурга–Ландау, нуждается в проверке на основе микроскопической теории. Дело в том, что теория Гинзбурга–Ландау применима лишь на пространственных масштабах, превышающих длину когерентности ξ_0 и поэтому не учитывает изменение условий возникновения сверхпроводимости непосредственно вблизи поверхности. Микроскопическое рассмотрение (см. ниже § 20) показывает, что вблизи границы, на расстояниях порядка атомных, волновые функции электронов существенно отличаются от волновых функций в объеме. Это, в свою очередь, приводит к появлению в свободной энергии сверхпроводника дополнительных слагаемых, локализованных на расстояниях порядка ξ_0 от границы. Данный факт можно учесть феноменологически, вволя в рассмотрение поверхностную энергию

$$\mathcal{F}_S = \oint dS a(\mathbf{n}) |\eta|^2, \quad (13.4)$$

которая зависит от ориентации поверхности кристалла по отношению к осям кристаллической решетки. Здесь $a(\mathbf{n}) \sim N_0 \xi_0 f(\mathbf{n})$, причем $f(\mathbf{n})$ есть безразмерная скалярная функция направлений нормали, инвариантная относительно всех преобразований симметрии точечной группы кристалла.

Границные условия для параметра порядка могут быть получены путем варьирования по η^* полной свободной энергии сверхпроводника

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_V + \mathcal{F}_S, \quad (13.5)$$

состоящей из обычной объемной части (12.2) и поверхностной энергии (13.4). Условие исчезновения вариации на поверхности принимает вид

$$i n_i K_{ij} D_j \eta|_S = a(\mathbf{n}) \eta|_S. \quad (13.6)$$

Таким образом, в задаче появляется новый характерный масштаб — интерполяционная длина, которая зависит от направления нормали:

$$b_i(\mathbf{n}) \sim \frac{K_{ii}}{a(\mathbf{n})}. \quad (13.7)$$

Эффективное граничное условие для параметра порядка вблизи критической температуры может быть получено путем сравнения $b(\mathbf{n})$ с корреляционной длиной $\xi(\mathbf{n})$ (12.8).

Пусть направление нормали таково, что поверхностный инвариант $f(\mathbf{n})$ и, следовательно, функция $a(\mathbf{n})$ равны нулю. Тогда из (13.6) мы получаем граничное условие (13.3). Интерполяционная длина в этом случае обращается в бесконечность.

Если же для данного направления нормали $f(\mathbf{n}) \neq 0$, то интерполяционная длина $b(\mathbf{n})$ конечна и не зависит от температуры. Следовательно, при $T \rightarrow T_c$ выполняется неравенство $b(\mathbf{n}) \ll \xi(\mathbf{n})$, которое, в свою очередь, означает,

что эффективное граничное условие для параметра порядка имеет следующий вид:

$$\eta|_S = 0. \quad (13.8)$$

Вывод о том, что при $f(\mathbf{n}) \neq 0$ граничное условие (13.3) должно быть заменено на (13.8), может быть получен также с помощью простых энергетических соображений. Проигрыш в энергии сверхпроводника вблизи поверхности определяется суммой градиентного (13.1) и поверхностного (13.4) вкладов. Относительный величину этих слагаемых при $T \rightarrow T_c$ можно оценить, учитывая, что характерным масштабом пространственного изменения параметра порядка является корреляционная длина $\xi(T) \sim \xi_0(1 - T/T_c)^{-1/2}$, а его значение в объеме кристалла есть $|\eta_0| \propto (1 - T/T_c)^{1/2}$. Тогда из (13.1) имеем

$$\mathcal{F}_{S,\text{grad}} \propto \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{3/2}. \quad (13.9)$$

Если $f(\mathbf{n}) \neq 0$, и параметр порядка на поверхности отличен от нуля, то из (13.4) имеем

$$\mathcal{F}_S \propto \left(1 - \frac{T}{T_c}\right). \quad (13.10)$$

Сравнивая (13.9) и (13.10), мы видим, что вблизи критической температуры \mathcal{F}_S превосходит $\mathcal{F}_{S,\text{grad}}$. Этот существенный проигрыш в поверхностной энергии исчезает лишь при полном подавлении сверхпроводимости на поверхности, что приводит к граничному условию (13.8). Если $f(\mathbf{n}) = 0$, то проигрыша в энергии (13.4) нет, и имеет место граничное условие (13.3).

Очевидно, что на границе сверхпроводника с нормальным металлом условия отражения и прохождения квазичастиц изменяют их волновые функции в поверхностном слое, то есть $f(\mathbf{n}) \neq 0$ при любом направлении \mathbf{n} . Следовательно, в этом случае при $T \rightarrow T_c$ всегда имеют место граничные условия (13.6). Для границы сверхпроводника с диэлектриком или вакуумом следует различать случаи зеркального и диффузного отражения квазичастиц от границы. Рассмотрим сначала *зеркальное отражение*.

В этом случае также $f(\mathbf{n}) \neq 0$ для всех ориентаций нормали по отношению к кристаллографическим осям, кроме тех, для которых электронный спектр $\epsilon(\mathbf{k})$ и функции $g(\mathbf{k})$ (или $d(\mathbf{k})$), описывающие сверхпроводящие состояния и прособразующиеся согласно одному из одномерных неприводимых представлений группы симметрии кристалла, не меняются при отражении в плоскости границы:

$$\begin{aligned} \epsilon(\mathbf{k} - 2\mathbf{n}(k\mathbf{n})) &= \epsilon(\mathbf{k}), \\ g(\mathbf{k} - 2\mathbf{n}(k\mathbf{n})) &= g(\mathbf{k}), \quad d(\mathbf{k} - 2\mathbf{n}(k\mathbf{n})) = d(\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (13.11)$$

В самом деле, при выполнении этих условий траектории квазичастиц, отраженных от границы, представляют собой зеркальное отражение в плоскости границы траекторий падающих на нее частиц, продолженных в полупространство, занятое диэлектриком (подробнее об этом см. ниже § 20). Поэтому задача становится эквивалентной задаче о нахождении параметра порядка в сверхпроводнике, заполняющем все пространство, и подавления сверхпроводимости на границе не происходит, то есть имеют место граничные условия (13.3).

Таблица 7. Угловые зависимости параметра порядка и поверхностной энергии для однокомпонентных параметров порядка в тетрагональном кристалле ($S = 0$, $G = D_{4h}$)

Γ	$g(\mathbf{k})$	$f(\mathbf{n})$
A_{1g}	$(k_x^4 + k_y^4)$	$an_z^2(n_x^2 + n_y^2) + bn_x^2n_y^2(n_x^2 - n_y^2)^2$
A_{2g}	$k_xk_y(k_x^2 - k_y^2)$	$(n_x^2 + n_y^2)$
B_{1g}	$k_x^2 - k_y^2$	$an_z^2(n_x^2 + n_y^2) + bn_x^2n_y^2$
B_{2g}	k_xk_y	$an_z^2(n_x^2 + n_y^2) + b(n_x^2 - n_y^2)^2$

Итак, нули функции $f(\mathbf{n})$ для данного сверхпроводящего состояния должны соответствовать орIENTATIONям плоскости границы, совпадающим с общими плоскостями симметрии ферми-поверхности и параметра порядка сверхпроводника. Для сферической ферми-поверхности и полностью изотропного сверхпроводящего состояния (s -спаривание) $f(\mathbf{n})$ тождественно обращается в нуль для всех ориентаций \mathbf{n} . Поэтому общепринято, что в этом случае на границе сверхпроводник–диэлектрик выполнены граничные условия (13.3).

Для обычной сверхпроводимости, соответствующей единичному представлению A_{1g} в анизотропном кристалле, симметрия параметра порядка совпадает с симметрией ферми-поверхности и включает в себя все преобразования точечной группы кристалла. Функции $f(\mathbf{n})$, обращающиеся в нуль для всех зеркально-симметричных направлений, в кристаллах с кубической, тетрагональной и гексагональной симметрией, соответственно, имеют вид

$$f_{A_{1g}}^{\text{cub}}(\mathbf{n}) = a[n_x^2n_y^2(n_x^2 - n_y^2)^2 + n_x^2n_z^2(n_x^2 - n_z^2)^2 + n_y^2n_z^2(n_y^2 - n_z^2)^2], \quad (13.12)$$

$$f_{A_{1g}}^{\text{tetra}}(\mathbf{n}) = an_z^2(n_x^2 + n_y^2)^2 + bn_x^2n_y^2(n_x^2 - n_y^2)^2, \quad (13.13)$$

$$f_{A_{1g}}^{\text{hex}}(\mathbf{n}) = an_z^2(n_x^2 + n_y^2) + b(n_x^3 - 3n_xn_y^2)^2(n_y^3 - 3n_yn_x^2)^2. \quad (13.14)$$

Здесь a и b — числа, определяющие меру анизотропии, то есть отличие формы ферми-поверхности и щели в спектре от сферической или цилиндрической.

Границные условия (13.3) имеют место в узкой области направлений нормали с шириной $\sim \sqrt{\xi_0/\xi(T)}$ ¹, для которых функции $f(\mathbf{n})$ обращаются в нуль. Для всех остальных ориентаций поверхности сверхпроводник–диэлектрик граничные условия имеют вид (13.6).

Если мы имеем дело с необычным сверхпроводящим состоянием, параметр порядка которого преобразуется согласно неединичному представлению, то число ориентаций поверхности, для которых выполняется условие $f(\mathbf{n}) = 0$, может только уменьшиться по сравнению с обычным сверхпроводящим состоянием. В табл. 7 приведены соответствующие функции для однокомпонентных сверхпроводящих состояний с синглетным спариванием в тетрагональном кристалле, популярных в настоящее время в связи с исследованиями высокотемпературной сверхпроводимости.

Мы видим, что для представления A_{1g} поверхностная энергия обращается в нуль для восьми направлений \mathbf{n} в базисной плоскости, а также при $\mathbf{n} \parallel \hat{z}$. Для представлений B_{1g} и B_{2g} из этих нулей остается лишь по четыре

¹ Эта оценка получается путем сравнения поверхностной градиентной энергии (13.1) и поверхностной энергии (13.4) вблизи направления, для которого $f(\mathbf{n})$ обращается в нуль.

нуля в базисной плоскости и один нуль при $\mathbf{n} \parallel \hat{z}$. Вертикальные плоскости зеркальной симметрии для представлений A_{1g} (ферми-поверхность) и A_{2g} (сверхпроводящее состояние) не совпадают, поэтому если параметр порядка преобразуется согласно A_{2g} , то у функции $f_{A_{2g}}(\mathbf{n})$ остается лишь один нуль при $\mathbf{n} \parallel \hat{z}$, то есть вдоль направления, перпендикулярного общей горизонтальной плоскости симметрии функций $\varepsilon(\mathbf{k})$ и $g_{A_{2g}}(\mathbf{k})$.

Для пространственно-нечетных однокомпонентных сверхпроводящих состояний в тетрагональном кристалле ($S = 1$, сильное спин-орбитальное взаимодействие, см. табл. 3) нет симметрийных причин, по которым функция $f(\mathbf{n})$ должна обратиться в нуль, и поэтому поверхностная энергия представляет собой произвольную комбинацию всех скалярных инвариантов тетрагональной группы.

Мы не будем здесь находить функции $f(\mathbf{n})$ для истривиальных сверхпроводящих состояний в гексагональных и кубических кристаллах, предоставив это читателю (см. упражнение в конце параграфа).

Поверхностная сверхпроводимость. Найденные выше граничные условия (13.3) и (13.6) для параметра порядка позволяют вычислить критическое поле поверхности сверхпроводимости в области применимости теории Гинзбурга–Ландау.

Рассмотрим тетрагональный сверхпроводник, занимающий полупространство $x > 0$ так, что тетрагональная ось лежит в плоскости границы, а нормаль к границе расположена в базисной плоскости кристалла. Выберем направление магнитного поля вдоль тетрагональной оси:

$$\mathbf{H} = H(0, 0, 1),$$

$$\mathbf{A} = (0, Hx, 0).$$

Подставляя в уравнение Гинзбурга–Ландау (12.9) параметр порядка в виде $\eta(x, y) = f(x) \exp(-ipy)$, получаем:

$$-K_1 \frac{d^2 f}{dx^2} + K_1 \left(\frac{2\pi H}{\Phi_0} \right)^2 \left(x - p \frac{\Phi_0}{2\pi H} \right)^2 f + \alpha_0 \left(\frac{T - T_c}{T_c} \right) f = 0. \quad (13.15)$$

Решение этого уравнения и величина поверхностного критического поля определяются граничными условиями.

Для тех ориентаций поверхности, для которых выполняется условие (13.8), то есть

$$\eta(x = 0) = 0, \quad (13.16)$$

сверхпроводящий зародыш образуется вдали от поверхности ($p\xi(T) \gg 1$). Соответствующее решение уравнения (13.15) имеет вид

$$f(x) \propto \exp \left[-\frac{\pi H}{\Phi_0} \left(x - p \frac{\Phi_0}{2\pi H} \right)^2 \right],$$

а поле, в котором зарождается сверхпроводящее состояние, совпадает с объемным верхним критическим полем:

$$H_{c3}(T) = H_{c2}(T) = \frac{\Phi_0 \alpha_0}{2\pi K_1} \frac{T_c - T}{T_c}. \quad (13.17)$$

Если же поверхность ориентирована так, что выполняется граничное условие (13.3), то есть

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad (13.18)$$

то уравнение (13.15) имеет решение, локализованное вблизи границы:

$$f(x) \propto F_\nu(x) \quad (13.19)$$

$$F_\nu(x) = \exp \left[-\frac{\pi H}{\Phi_0} \left(x - p \frac{\Phi_0}{2\pi H} \right)^2 \right] H_\nu \left[\sqrt{\frac{2\pi H}{\Phi_0}} \left(x - p \frac{\Phi_0}{2\pi H} \right) \right],$$

где $H_\nu(x)$ — функция Эрмита (функция параболического цилиндра) с индексом

$$\nu(\lambda) = -\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2}. \quad (13.20)$$

Здесь введена безразмерная величина

$$\lambda = \frac{\Phi_0 \alpha_0}{2\pi K_1 H} \frac{T_c - T}{T_c}.$$

Подстановка (13.19) в граничное условие (13.18) приводит к трансцендентному уравнению

$$2\nu H_{\nu-1}(-r) = -r H_\nu(-r), \quad (13.21)$$

где

$$r = p \sqrt{\frac{\Phi_0}{2\pi H}},$$

которое позволяет найти зависимость $\lambda(r)$. При этом магнитное поле, в котором зарождается сверхпроводящая фаза вблизи поверхности образца, соответствует минимальному значению функции $\lambda(r)$. Численное решение уравнения (13.21) дает [78]: $\lambda_{\min} = 0,59$, $r = 0,77$, следовательно,

$$H_{c3}(T) \approx 1,69 H_{c2}(T). \quad (13.22)$$

Для обычного сверхпроводящего состояния (представление A_{1g}) граничное условие (13.18) реализуется, строго говоря, для поверхностей с ориентациями нормали $n = (\cos(\pi k/4), \sin(\pi k/4), 0)$, где $k = 0, 1, \dots, 7$, или $n = (0, 0, 1)$. Для поверхностей, нормаль к которым отклоняется от указанных значений на углы, превышающие отношение $\sqrt{\xi_0/\xi(T)}$, граничное условие (13.18) заменяется на условие (13.16), и поверхностной сверхпроводимости не возникает.

На практике анизотропия обычного сверхпроводящего состояния не очень выражена. Дело в том, что как рассеяние на примесях, так и усредняющее действие диффузного рассеяния на поверхности, не подавляя сверхпроводимости, приводят к уменьшению функции $f_{A_{1g}}(n)$, поэтому поверхностная сверхпроводимость наблюдается для произвольной ориентации поверхности.

Не так обстоит дело для сверхпроводящих состояний, преобразующихся согласно неединичным представлениям. Например, в тетрагональных кристаллах для состояния, соответствующего представлению B_{1g} , которое реализуется, по-видимому, в высокотемпературных сверхпроводниках, поверхностная сверхпроводимость в случае зеркально отражающей поверхности имеет

место для следующих ориентаций нормали:

$$\mathbf{n} = \left(\cos \frac{\pi k}{2}, \sin \frac{\pi k}{2}, 0 \right), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

$$\mathbf{n} = (0, 0, 1).$$

Если поверхность отклоняется от указанных направлений на углы, превышающие $\sqrt{\xi_0/\xi(T)}$, поверхностной сверхпроводимости нет. В отличие от состояния A_{1g} , учет диффузности рассеяния на границе не восстанавливает поверхностную сверхпроводимость для произвольной ориентации поверхности, а, напротив, вызывает усреднение параметра порядка по направлениям импульса и тем самым подавляет поверхностную сверхпроводимость.

Окончательный вывод таков: отсутствие поверхностной сверхпроводимости на диффузно-отражающих поверхностях может служить характерным признаком необычных сверхпроводящих состояний. По наличию же поверхностной сверхпроводимости лишь в узких угловых окрестностях выделенных направлений можно установить симметрию сверхпроводящего состояния.

Границные условия для многокомпонентных параметров порядка. В этом случае выражение для поверхностной энергии находится точно так же, как это делалось для получения градиентной энергии в § 12. Например, для сверхпроводящего состояния, преобразующегося согласно двумерному представлению E в тетрагональном кристалле, необходимо составить все возможные квадратичные по компонентам параметра порядка (η_x, η_y) и вектора нормали \mathbf{n} , комбинации, инвариантные относительно всех преобразований группы симметрии нормального состояния $U(1) \times R \times D_{4h}$:

$$\mathcal{F}_S = \oint dS [a_1(\mathbf{n})\eta\eta^* + a_2(\mathbf{n})|\eta_x n_x + \eta_y n_y|^2 + \\ + a_3(\mathbf{n})(|\eta_x n_x|^2 + |\eta_y n_y|^2)]. \quad (13.23)$$

Здесь $a_i(\mathbf{n}) \sim N_0 \xi_0 f_i(\mathbf{n})$ ($i = 1, 2, 3$) — функции, инвариантные относительно всех преобразований из D_{4h} . За исключением ориентаций границы, задаваемых кристаллографическими направлениями, обе компоненты параметра порядка, преобразующиеся как $(k_z k_x, k_z k_y)$, не обладают определенной четностью при отражении в плоскости границы (ср. с (13.11)). Отсюда, так же, как и в однокомпонентном случае, следует обращение в нуль обеих компонент параметра порядка на поверхности и отсутствие поверхностной сверхпроводимости. Ориентации границы, совпадающие с кристаллографическими направлениями, требуют специального исследования. Мы проделаем его для более простого объекта — двухкомпонентного сверхпроводящего состояния в гексагональном кристалле, где выражение для поверхностной энергии имеет вид (13.23) без последнего слагаемого, отсутствие которого означает инвариантность по отношению к вращениям на произвольный угол вокруг оси шестого порядка.

Поверхностное критическое поле для векторного параметра порядка в гексагональном кристалле. Аналогично верхнему критическому полю в объеме, поверхностное критическое поле для многокомпонентной сверхпроводимости может быть вычислено аналитически лишь в исключительных случаях. В частности, это можно сделать для параметра порядка, соответствующего

представлению E_1 в гексагональном кристалле, если поле направлено вдоль оси шестого порядка, а нормаль лежит в базисной плоскости [44].

Поверхностная энергия обладает симметрией шестого порядка относительно вращений вокруг гексагональной оси. Поэтому, при совпадении ориентации нормали к поверхности с одним из кристаллографических направлений, можно выбрать систему координат так, чтобы ось \hat{x} совпала с направлением нормали. Тогда перекрестные члены вида $\eta_1^* \eta_2$ исчезают, и поверхностная энергия принимает вид

$$\mathcal{F}_S = \oint dS (b_1 |\eta_1|^2 + b_2 |\eta_2|^2). \quad (13.24)$$

Поскольку пара (η_1, η_2) преобразуется как $(k_z k_x, k_z k_y)$, то при отражении в плоскости yz компонента η_1 меняет, а компонента η_2 сохраняет знак. Поэтому на зеркально-отражающей границе векторный параметр порядка должен удовлетворять граничным условиям:

$$\eta_1|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \eta_2}{\partial x} \right|_{x=0} = 0. \quad (13.25)$$

Для вычисления поверхностного критического поля сверхпроводника, занимающего полупространство $x > 0$, в случае поля, направленного вдоль оси шестого порядка, необходимо решить уравнения Гинзбурга–Ландау (12.30)

$$\begin{cases} \left(\alpha_0 \left(\frac{T - T_c}{T_c} \right) + K_0 (D_x^2 + D_y^2) - K_- \frac{2\pi H}{\Phi_0} \right) \eta_+ + K_+ D_+^2 \eta_- = 0, \\ K_+ D_-^2 \eta_+ + \left(\alpha_0 \left(\frac{T - T_c}{T_c} \right) + K_0 (D_x^2 + D_y^2) + K_- \frac{2\pi H}{\Phi_0} \right) \eta_- = 0, \end{cases} \quad (13.26)$$

дополнительные граничными условиями (13.25).

При нахождении верхнего критического поля в бесконечном объеме необходимо было наложить на параметр порядка условие убывания при $x \rightarrow -\infty$, вследствие чего решение уравнений выражалось через полиномы Эрмита. Теперь же, при рассмотрении поверхностной задачи, мы не фиксируем поведение решения на $-\infty$ и, соответственно, отказываемся от требования неотрицательности и целочисленности индекса полиномов Эрмита, которые, таким образом, становятся функциями Эрмита $H_\nu(x)$.

Итак, ищем решение уравнений (13.26) в виде

$$\begin{pmatrix} f_+(x) \\ f_-(x) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} q F_{\nu+2}(x) \\ F_\nu(x) \end{pmatrix},$$

где $F_\nu(x)$ даются формулой (13.19), а индекс ν должен удовлетворять уравнению

$$\alpha_0 \frac{T - T_c}{T_c} = \left(-(2\nu + 3)K_0 + \sqrt{(2K_0 - K_-)^2 + 4(\nu + 1)(\nu + 2)K_+^2} \right) \frac{2\pi H}{\Phi_0}. \quad (13.27)$$

При этом параметр q равен

$$q(\nu) = \frac{-(2K_0 - K_-) + \sqrt{(2K_0 - K_-)^2 + 4(\nu + 1)(\nu + 2)K_+^2}}{4(\nu + 1)(\nu + 2)K_+}.$$

В отличие от однокомпонентного случая (см. (13.20)), выражение (13.27) не позволяет однозначно найти ν как функцию безразмерного параметра

$$\lambda = \frac{\Phi_0 \alpha_0}{2\pi K_1 H} \frac{T_c - T}{T_c}.$$

Будучи квадратным по ν , это уравнение при заданном λ может иметь два корня:

$$\nu_{1,2}(\lambda) = -\frac{3}{2} + \frac{\lambda K_0 K_1 \pm \sqrt{D}}{2(K_0^2 - K_+^2)}, \quad (13.28)$$

где

$$D = 4K_0^4 + K_+^4 - 5K_0^2 K_+^2 - K_-(K_0^2 - K_+^2)(4K_0 - K_-) + \lambda^2 K_+^2 K_1^2.$$

Соответствующие значения $q_{1,2}$ есть

$$q_{1,2}(\lambda) = \frac{K_+(K_0^2 - K_+^2)}{(2K_0 - K_-)(K_0^2 - K_+^2) + \lambda K_1 K_+^2 \pm \sqrt{D} K_0}. \quad (13.29)$$

Ниже мы будем считать, что дискриминант положителен, а $\nu_{1,2}$ и $q_{1,2}$ — вещественны².

Собственное значение уравнений (13.26) оказывается двукратно вырожденным, поэтому их общее решение записывается в виде

$$\begin{pmatrix} f_+(x) \\ f_-(x) \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} q_1 F_{\nu_1+2}(x) \\ F_{\nu_1}(x) \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} q_2 F_{\nu_2+2}(x) \\ F_{\nu_2}(x) \end{pmatrix}, \quad (13.30)$$

где s — свободный параметр, который без потери общности мы выбираем вещественным. Подстановка в граничные условия (13.25) дает нам систему двух трансцендентных уравнений для определения $\lambda(r, s)$ (ср. с (13.21)). Исключая из них s , получаем одноточечное уравнение на $\lambda(r)$:

$$\frac{A_1(\lambda, r)}{B_1(\lambda, r)} = \frac{A_2(\lambda, r)}{B_2(\lambda, r)}, \quad (13.31)$$

где

$$\begin{aligned} A_i(\lambda, r) &= r H_{\nu_i}(-r) + 2\nu_i H_{\nu_i-1}(-r) - \\ &\quad - rq_i H_{\nu_i+2}(-r) - 2q_i(\nu_i + 2) H_{\nu_i+1}(-r), \\ B_i(\lambda, r) &= H_{\nu_i}(-r) + q_i H_{\nu_i+2}(-r) \end{aligned}$$

Здесь $\nu_{1,2}$ и $q_{1,2}$ являются функциями λ (см. (13.28) и (13.29)). Минимизация решения по r в принципе решает поставленную задачу, то есть позволяет найти температурную зависимость критического поля поверхностной сверхпроводимости $H_{c3}(T)$.

Важным свойством (13.31) является то, что это уравнение не содержит явно зависимости от H , и, следовательно, зависимость $H_{c3}(T)$, отвечающая λ_{\min} — минимальному по r решению — линейна, однако аналитически найти коэффициент не представляется возможным. Численный расчет

²Отказ от этого требования не вносит никаких принципиальных затруднений, поскольку функции Эрмита допускают аналитическое продолжение на комплексные значения индекса. Заметим, что если $K_1 = K_2 = K_3$ (теория слабой связи, см. ниже § 18), то $D > 0$.

для $K_1 = K_2 = K_3$ даст следующий результат: $\lambda_{\min} \approx 0,89$, $r \approx 0,55$, то есть

$$H_{c3}(T) \approx 1,24 H_{c2}(T). \quad (13.32)$$

Здесь для верхнего критического поля в объеме использовано выражение (12.39).

Отметим, что в предположении цилиндрической симметрии ферми-поверхности поверхность критическое поле одинаково для любых ориентаций поверхности, параллельных гексагональной оси. Полученный результат справедлив и для сверхпроводящих фаз с p -спариванием. В общем случае, так же, как и для однокомпонентных сверхпроводящих состояний, поверхностная сверхпроводимость исчезает при отклонении нормали к поверхности от кристаллографических направлений на весьма малые углы.

Упражнение. Перечислить поверхностные инварианты $f(\mathbf{n})$ для всех однокомпонентных сверхпроводящих состояний в гексагональном и кубическом кристаллах.

§ 14. Мейсснеровское и смешанное состояние в необычных сверхпроводниках

Большая часть анизотропных сверхпроводников (высокотемпературные и органические сверхпроводники, сверхпроводящие соединения с тяжелыми фермионами) относится к ярко выраженным сверхпроводникам второго рода. Электродинамика таких сверхпроводников является лондоновской, то есть между плотностью тока и вектором-потенциалом имеется локальная связь во всем температурном интервале вплоть до $T = 0$. В настоящем параграфе мы изучим ряд свойств необычных сверхпроводников, которые можно рассмотреть в рамках лондоновской электродинамики. Помимо обычных проявлений анизотропии здесь, как и в термодинамике, имеются специфические эффекты, связанные с наличием пулей в спектре элементарных возбуждений.

Эффект Мейсснера. Сравнение уравнения

$$\frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \mathbf{A}} = 0$$

(см. § 12) с уравнением Maxwella

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi j}{c} \quad (14.1)$$

позволяет найти выражение для плотности тока j . Так, для однокомпонентного сверхпроводящего состояния, где плотность свободной энергии имеет вид (12.2), плотность тока определяется выражением

$$j_i = -2eK_{ij}[\eta^*(D_j\eta) + \eta(D_j\eta)^*]. \quad (14.2)$$

Для двухкомпонентного сверхпроводящего состояния в гексагональном кристалле (представление E_1) из (12.15) имеем:

$$j_i = -\frac{2e}{\hbar} \{ K_1 \eta_j^* D_i \eta_j + K_2 \eta_i^* D_j \eta_j + K_3 \eta_j^* D_j \eta_i + \text{к.с.} \}, \quad i = x, y, \quad (14.3)$$

$$j_z = -\frac{2e}{\hbar} K_4 (\eta_i^* D_z \eta_i + \text{к.с.}). \quad (14.4)$$

Подставляя в (14.2) параметр порядка $\eta(\mathbf{r}) = |\eta(\mathbf{r})|e^{i\varphi(\mathbf{r})} = \Delta(\mathbf{r})e^{i\varphi(\mathbf{r})}$, получаем:

$$j_i = -en_i^s w_j, \quad (14.5)$$

где введены скорость конденсата куперовских пар (сверхтекущая скорость):

$$\mathbf{w} = \frac{\hbar}{2m} \left(\nabla \varphi + \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \right) \quad (14.6)$$

(m — масса электрона), и тензор плотности сверхпроводящих электронов (сверхтекущей плотности):

$$n_{ij}^s = \frac{8m}{\hbar^2} \Delta^2 K_{ij}. \quad (14.7)$$

Для двухкомпонентной сверхпроводимости с «вещественным» параметром порядка вида (11.7):

$$\eta \sim (\cos \lambda_n, \sin \lambda_n) e^{i\varphi(\mathbf{r})},$$

характеризуемым общей фазой φ обеих компонент, плотность тока также можно записать в виде (14.5), причем тензор сверхтекущей плотности n_{ij}^s , здесь выражается через коэффициенты K_1, K_2, K_3, K_4 . В магнитных сверхпроводниках с комплексным параметром порядка (11.9) ситуация несколько сложнее, и мы рассмотрим ее в следующем параграфе.

Итак, в немагнитных сверхпроводниках с произвольным числом компонент параметра порядка связь тока с градиентом фазы и вектор-потенциалом в слабых полях имеет вид (14.5). Следует также подчеркнуть, что в немагнитных сверхпроводниках второго рода линейная связь (14.5) имеет место при любых температурах. Температурная зависимость тензора $n_{ij}^s(T)$ будет найдена ниже.

Плотность тока, также, как и плотность свободной энергии, инвариантна относительно калибровочных преобразований:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\rightarrow \mathbf{A} + \nabla \chi, \\ \varphi &\rightarrow \varphi - \frac{2e}{\hbar c} \chi, \end{aligned} \quad (14.8)$$

что позволяет записать (14.5) в виде

$$j_i = -\frac{e^2}{mc} n_{ij}^s A_j. \quad (14.9)$$

После подстановки (14.9) в (14.1) получаем уравнение для вектора \mathbf{B} (уравнение Лондонов):

$$\frac{mc^2}{4\pi e^2} \operatorname{rot} \left((\vec{n}^s)^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{B} \right) + \mathbf{B} = 0. \quad (14.10)$$

Для любых сверхпроводящих состояний в одноосных кристаллах (гексагональном и тетрагональном), а также в случае многокомпонентных сверхпроводящих состояний в кубических кристаллах, тензор n_{ij}^s имеет одноосную анизотропию и его можно записать в виде

$$n_{ij}^s = n_0 \delta_{ij} + n' \nu_i \nu_j, \quad (14.11)$$

где ν — ось анизотропии. Подставляя (14.11) в уравнение (14.10), получаем:

$$\delta_0^2 [\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B} + \lambda \operatorname{rot} (\nu (\nu \operatorname{rot} \mathbf{B}))] + \mathbf{B} = 0, \quad (14.12)$$

где

$$\delta_0 = \left(\frac{mc^2}{4\pi n_0 e^2} \right)^{1/2}, \quad (14.13)$$

а $\lambda = -n'/(n_0 + n')$.

Пусть ось анизотропии $\nu = \hat{z}$ и внешнее поле $\mathbf{H} = (0, H_y, H_z)$ лежат в плоскости поверхности сверхпроводника, занимающего полупространство $x > 0$. Легко убедиться, что решение уравнения (14.12) имеет вид

$$B_y = H_y \exp \left(-\frac{x}{\delta_0 \sqrt{1 + \lambda}} \right), \quad (14.14)$$

$$B_z = H_z \exp \left(-\frac{x}{\delta_0} \right), \quad (14.15)$$

то есть магнитное поле затухает вглубь образца (эффект Мейсснера), при этом поворачиваясь, вследствие анизотропии, вокруг направления \hat{x} [45]. Глубина проникновения поля $\delta(T)$, различная вдоль разных направлений, называется лондоновской глубиной проникновения и определяется тензором плотности сверхпроводящих электронов $n_{ij}^s(T)$. Ее типичные значения при $T = 0$ порядка $10^{-5}\text{--}10^{-6}$ см.

Плотность сверхпроводящих электронов. Температурную зависимость тензора n_{ij}^s можно найти из следующих соображений. Легко проверить, что формула (5.29) для энергий элементарных возбуждений сверхпроводника при учете различия направлений \mathbf{k} и $-\mathbf{k}$ принимает вид

$$E_{\mathbf{k}} = \frac{\xi_{\mathbf{k}} - \xi_{-\mathbf{k}}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\xi_{\mathbf{k}} + \xi_{-\mathbf{k}}}{2} \right)^2 + \Delta_{\mathbf{k}}^2}. \quad (14.16)$$

В магнитном поле, достаточно медленно меняющемся в пространстве¹, импульсы элементарных возбуждений приобретают одинаковую добавку $m\mathbf{w}$ за счет ненулевой скорости движения сверхтекущей компоненты. С помощью (14.16) получаем:

$$E_{\mathbf{k}} \rightarrow E_{\mathbf{k}+m\mathbf{w}} \approx E_{\mathbf{k}} + m\mathbf{v}_F(\mathbf{k})\mathbf{w}, \quad (14.17)$$

где $\mathbf{v}_F(\mathbf{k}) = \partial\xi_{\mathbf{k}}/\partial\mathbf{k}$. Плотность потока возбуждений есть

$$\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{k}\alpha} \mathbf{v}_F(\mathbf{k}) f(E_{\mathbf{k}} + m\mathbf{v}_F(\mathbf{k})\mathbf{w}), \quad (14.18)$$

где $f(E)$ — фермиевская функция распределения. Введем тензор плотности возбуждений, как величину, определяющую отклик \mathbf{P} на изменение скорости \mathbf{w} :

$$\delta P_i = -n_{ij}^s \delta w_j. \quad (14.19)$$

Из (14.18) получаем:

$$n_{ij}^s = -m \sum_{\mathbf{k}\alpha} v_{F,i}(\mathbf{k}) v_{F,j}(\mathbf{k}) \frac{\partial f(E_{\mathbf{k}} + m\mathbf{v}_F(\mathbf{k})\mathbf{w})}{\partial E}. \quad (14.20)$$

¹Более точно, в лондоновском пределе, когда глубина проникновения превышает длину когерентности, что всегда имеет место в сверхпроводниках второго рода.

Разность тензоров n_{ij}^n в нормальном (то есть при $\Delta = 0$) и сверхпроводящем состояниях дает величину тензора плотности сверхпроводящих электронов

$$n_{ij}^s = n_{ij}^n(\Delta = 0) - n_{ij}^n. \quad (14.21)$$

Опуская зависимость n_{ij}^n от магнитного поля (мы вернемся к этому вопросу ниже), получаем

$$n_{ij}^s(T) = 2m \int \frac{dS_F}{(2\pi\hbar)^3} \frac{v_{F,i}(k)v_{F,j}(k)}{|v_F(k)|} \left[1 - Y(\hat{k}, T) \right], \quad (14.22)$$

где $Y(\hat{k}, T)$ — функция Иосида (9.4), а интегрирование происходит по ферми-поверхности. Формула (14.22) определяет тензор n_{ij}^s для ферми-поверхности произвольной формы и произвольного типа спаривания. В области Гинзбурга—Ландау аналогичное выражение для обычной анизотропной сверхпроводимости впервые получено в работе [46]. При $T = 0$

$$n_{ij}^s(0) = 2m \int \frac{dS_F}{(2\pi\hbar)^3} \frac{v_{F,i}(k)v_{F,j}(k)}{|v_F(k)|}. \quad (14.23)$$

При наличии нулей в спектре элементарных возбуждений изменение компонент тензора плотности сверхпроводящих электронов (или лондоновской глубины проникновения) с температурой при $T \rightarrow 0$ происходит по степенным законам, аналогично поведению теплоемкости, парамагнитной восприимчивости и т. д. Так, для A -фазы, где $\Delta_k^2 = \Delta^2 \sin^2 \theta$, вычисления, подобные приведенным в § 7, дают [47]:

$$[n_{zz}^s(0) - n_{zz}^s(T)]|_{T \rightarrow 0} \sim n \left(\frac{T}{T_c} \right)^2, \quad (14.24)$$

$$[n_{xx}^s(0) - n_{xx}^s(T)]|_{T \rightarrow 0} \sim n \left(\frac{T}{T_c} \right)^4, \quad (14.25)$$

где n — полная плотность частиц. Аналогично, для полярной фазы ($\Delta_k^2 = \Delta^2 \cos^2 \theta$):

$$[n_{zz}^s(0) - n_{zz}^s(T)]|_{T \rightarrow 0} \sim n \left(\frac{T}{T_c} \right)^3, \quad (14.26)$$

$$[n_{xx}^s(0) - n_{xx}^s(T)]|_{T \rightarrow 0} \sim n \frac{T}{T_c}. \quad (14.27)$$

Нетрудно установить законы низкотемпературного поведения и для фаз с другим расположением нулей.

Вблизи критической температуры

$$n_{ij}^s(T \rightarrow T_c) = \frac{7\zeta(3)m}{2\pi^2} \left(\frac{\Delta(T)}{T_c} \right)^2 \int \frac{dS_F}{(2\pi\hbar)^3} \frac{v_{F,i}(k)v_{F,j}(k)}{|v_F(k)|} |g(k)|^2. \quad (14.28)$$

Это выражение соответствует случаю синглетного спаривания, для триплетного спаривания надо произвести очевидную замену $|g(k)|^2 \rightarrow |\mathbf{d}(k)|^2$. Функция $\Delta(T)$ задана формулой (6.18). Для полностью изотропного сверхпроводящего состояния из (14.23) и (14.28) получается известное соотношение [48]

$$n^s(T \rightarrow T_c) = 2n^s(0) \left(1 - \frac{T}{T_c} \right). \quad (14.29)$$

Обратим внимание на то, что согласно (14.7) матрица коэффициентов K_{ij} , определяющая пространственные масштабы изменения параметра порядка (уравнение (12.6)) и поля (уравнение (14.10)) не зависит от массы электрона m , но зависит (через $v_F(\mathbf{k})$) от той эффективной массы, которую электрон приобретает в кристалле.

Заметим также, что мы здесь не принимали во внимание перенормировку массы за счет ферми-жидкостного взаимодействия электрона с молекулярным полем, создаваемым током остальных электронов. Это можно сделать включая в скорость \mathbf{w} молекулярное поле:

$$w_i \rightarrow w_i - m F_{1,ij} P_j$$

и разрешая уравнения (14.18), (14.19) относительно $\delta\mathbf{P}$. Здесь $F_{1,ij}$ — тензор плотности ферми-жидкостного взаимодействия в кристалле, являющийся обобщением величины $F_1/(N_0 k_F^2)$ в изотропной ферми-жидкости. Учет ферми-жидкостных эффектов, вообще говоря, изменяет температурную зависимость n_{ij}^s даже в изотропном случае [49, 50]. Мы не будем в дальнейшем принимать во внимание ферми-жидкостные эффекты, предполагая, что основная перенормировка массы электрона происходит за счет его взаимодействия с кристаллической решеткой.

Нелинейный эффект Мейсснера [51]. Кроме степенного убывания лондонской глубины проникновения $\delta(T)$ при $T \rightarrow 0$, наличие нулей в спектре возбуждений приводит к специальному для каждой сверхпроводящей фазы и геометрии задачи увеличению $\delta(0)$ с ростом магнитного поля. Для рассмотрения этого эффекта вернемся к формуле (14.20). При $T = 0$ входящая в эту формулу производная фермисовской функции распределения обращается в нуль для всех ненулевых значений своего аргумента:

$$n_{ij}^n(0) = m \sum_{\mathbf{k}\alpha} v_{F,i}(\mathbf{k}) v_{F,j}(\mathbf{k}) \delta(E_{\mathbf{k}} + m\mathbf{v}_F(\mathbf{k})\mathbf{w}). \quad (14.30)$$

Отсюда видно, что при $T = 0$ в сверхпроводниках с конечной величиной щели на всей ферми-поверхности тензор нормальной плотности равен нулю для скоростей \mathbf{w} , не превышающих критическую скорость Ландау $w_c \approx \Delta/mv_F$.

Если щель обращается в нуль на некотором множестве точек на ферми-поверхности, то конечная плотность возбуждений сохраняется и при $T = 0$. Для сверхпроводника со сферической ферми-поверхностью можно переписать (14.30) следующим образом:

$$\begin{aligned} n_{ij}^n &= 3n \int \frac{d\Omega}{4\pi} \hat{k}_i \hat{k}_j \int \frac{dE E}{\sqrt{E^2 - \Delta_{\mathbf{k}}^2}} \delta(E + \mathbf{k}\mathbf{w}) = \\ &= 3n \int \frac{d\Omega}{4\pi} \hat{k}_i \hat{k}_j \frac{|\mathbf{k}\mathbf{w}|}{\sqrt{(\mathbf{k}\mathbf{w})^2 - \Delta_{\mathbf{k}}^2}}, \end{aligned} \quad (14.31)$$

где n — полная плотность электронов, а интегрирование по углам производится в пределах, задаваемых условием $(\mathbf{k}\mathbf{w})^2 > \Delta_{\mathbf{k}}^2$.

Пусть щель обращается в нуль на экваторе ферми-сферы, как это имеет место в полярной фазе ($\Delta_{\mathbf{k}}^2 = \Delta \cos^2 \theta$), а сверхтекущая скорость $\mathbf{w} = [e/(mc)] \mathbf{A}$ направлена вдоль оси y (сверхпроводник занимает полупространство $z > 0$, внешнее поле направлено вдоль оси x , в выбранной калибровке фаза кон-

денсата постоянна). Тогда из (14.31) мы получаем, что при $T = 0$ имеется ненулевая плотность нормальной компоненты²:

$$n_{yy}^n \approx \frac{3nk_F|w_y|}{\Delta} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \sin^2 \varphi |\sin \varphi| = n \frac{4ek_F}{\pi mc\Delta} |A_y|. \quad (14.32)$$

Следовательно,

$$n_{yy}^s = n \left(1 - \frac{4ek_F}{\pi mc\Delta} |A_y| \right). \quad (14.33)$$

Уравнение Максвелла (14.1), с учетом выражений для тока (14.9) и плотности сверхтекучей компоненты (14.33), принимает вид

$$\frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} = \frac{1}{\delta^2} A_y, \quad (14.34)$$

где

$$\frac{1}{\delta^2} = \frac{mc^2}{4\pi ne^2} \left(1 - \frac{4ek_F}{\pi mc\Delta} |A_y| \right). \quad (14.35)$$

Таким образом, благодаря тому, что щель в спектре возбуждений обращается в нуль на экваторе ферми-сферы, в выражении для лондоновской глубины проникновения появляется неаналитическое, линейно зависящее от модуля поля слагаемое³. Его удобно записать, выражая Δ через термодинамическое критическое поле H_c :

$$\frac{H_c^2}{8\pi} = \frac{N_0}{2} \Delta^2, \quad (14.36)$$

при котором работа по выталкиванию магнитного поля из сверхпроводника равняется выигрышу энергии (5.37) (или (5.38)) при переходе в сверхпроводящее состояние. Оценивая входящий в (14.35) вектор-потенциал как $|A_y| \sim H\delta_0$, где δ_0 дается формулой (14.13), получаем:

$$\delta(H) = \delta_0 \left(1 + \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{H}{H_c} \right). \quad (14.37)$$

Смешанное состояние. Так же, как и в обычных сверхпроводниках второго рода, в полях, превышающих величину

$$H_{c1}(T) \sim \frac{\Phi_0}{4\pi\delta^2(T)} \ln \frac{\delta(T)}{\xi(T)}, \quad (14.38)$$

мейсснеровское (идеально диамагнитное) состояние в необычных сверхпроводниках переходит в смешанное состояние, в котором в толще сверхпроводника начинают проникать абрикосовские вихри.

В отличие от изотропного случая, в анизотропных сверхпроводниках направление и расположение вихрей зависит от величины и направления внешнего поля по отношению к кристаллическим осям. Величина нижнего крити-

²На появление при $T = 0$ плотности нормальной компоненты, неаналитически зависящей от поля, в сверхтекучих фазах с нулями в щели в спектре возбуждений впервые указано в работе [58].

³В обычных сверхпроводниках добавка к глубине проникновения квадратична по полю.

ческого поля H_{c1} также зависит от направления внешнего поля, а симметрия вихревых решеток может отличаться от правильной треугольной. Теория смешанного состояния для необычных сверхпроводников в основном совпадает с соответствующей теорией для обычных анизотропных сверхпроводников, охватывающей большое разнообразие различных частных вопросов (распределения полей, угловые зависимости и пр.). Мы не будем останавливаться на этой части теории (см. [45, 52–54]).

Среди явлений, специфических для смешанного состояния в необычных сверхпроводниках, следует прежде всего указать на фазовые переходы, связанные с изменением симметрии многокомпонентных сверхпроводящих состояний [43]. Пример такого перехода обсуждался в § 12. Другой характерной чертой многокомпонентной сверхпроводимости является возможность существования сверхпроводящих состояний со спонтанным магнетизмом [9]. Свойства таких сверхпроводников мы изучим в следующем параграфе. Наконец, еще один эффект, специфический для сверхпроводников с нетривиальным спариванием — это появление необычной зависимости теплоемкости от магнитного поля в смешанном состоянии [55]. Посмотрим сначала, как обстоит дело в обычных сверхпроводниках.

Как известно, параметр порядка сверхпроводника обращается в нуль на оси вихревой нити и восстанавливает свое равновесное постоянное значение на расстояниях $\rho \sim \xi(T)$ от оси вихря. Такая «яма» в потенциале $\Delta(\rho)$ приводит к образованию локализованных на ядре вихря связанных состояний квазичастиц. Наимизшую энергию связанных состояний можно оценить с помощью соотношения неопределенностей как

$$E_0 \approx \frac{\hbar^2}{2m\xi^2(T)} \approx \frac{\Delta^2}{\varepsilon_F}. \quad (14.39)$$

Поскольку эта энергия в Δ/ε_F раз меньше наимизшей энергии возбуждений вдали от ядра вихря, то спектр возбуждений, локализованных в ядре, можно считать бесщелевым, практически совпадающим со спектром возбуждений в нормальном металле. Таким образом, занимаемая ядрами вихрей часть объема сверхпроводника второго рода в смешанном состоянии обладает той же плотностью состояний⁴, что и нормальный металл. Следовательно, дополнительный вклад в плотность состояний пропорционален доле площади, занимаемой ядрами вихрей в плоскости, им перпендикулярной:

$$N_{loc} \approx N_0 \frac{S_{cores}}{S} = N_0 \pi \xi^2 n_v. \quad (14.40)$$

Здесь N_0 — плотность состояний в нормальном металле, $n_v = B/\Phi_0$ — число вихрей на единицу площади, B — магнитная индукция (среднее значение микроскопического магнитного поля в образце).

В сильно выраженных сверхпроводниках второго рода, в которых выполняется условие $\delta(T)/\xi(T) \gg 1$, индукция B мало отличается от внешнего поля H практически во всем интервале полей $H_{c1} < H < H_{c2}$ (но не в непосредственной окрестности H_{c1}). Учитывая это обстоятельство, а также

⁴ Плотность состояний определяется следующим образом:

$$N(E) = \sum_{k\alpha} \delta(E - E_k).$$

вспоминая, что переход в нормальное состояние происходит в поле

$$H_{c2} \approx \frac{\Phi_0}{\pi \xi^2(T)}, \quad (14.41)$$

когда расстояние между ядрами вихрей становится порядка ξ , получаем:

$$N_{loc} \approx N_0 \frac{H}{H_{c2}}. \quad (14.42)$$

В результате, при низких температурах ($T \ll T_c$), теплоемкость сверхпроводника в смешанном состоянии будет определяться в основном вкладом возбуждений, локализованных в ядрах вихрей:

$$C_s \approx \frac{H}{H_{c2}} C_n, \quad (14.43)$$

где C_n — теплоемкость нормального металла, линейно зависящая от температуры.

В сверхпроводниках с нетривиальным спариванием результат (14.43), разумеется, сохраняет силу. Однако, если щель в спектре возбуждений обращается в нуль где-либо на ферми-поверхности, то возможно появление дополнительных вкладов в теплоемкость, связанных с плотностью состояний в окрестности нулей. В пространстве между ядрами вихрей текут незатухающие сверхтекущие токи $j = -en_s w$, что приводит к сдвигу энергии элементарных возбуждений (14.17). В области полей $H_{c1} < H \ll H_{c2}$ расстояние между вихрями $a \sim n_v^{-1/2} \sim (\Phi_0/H)^{1/2}$ ограничено интервалом $\xi \ll a < \delta$, и распределение сверхтекущей скорости

$$w = -\frac{j}{en_s} = -\frac{c}{4\pi en_s} \operatorname{rot} B$$

определяется вкладом ближайшего вихря:

$$\begin{aligned} B &\approx \hat{z} \frac{\Phi_0}{2\pi\delta^2} \ln \frac{\delta}{\rho}, \\ w &= -\frac{\hbar}{2m} \frac{\dot{\varphi}}{\rho}. \end{aligned} \quad (14.44)$$

Здесь ρ обозначает расстояние до оси вихря, а $\dot{\varphi}$ — единичный вектор азимутального направления. Вновь, ограничиваясь для простоты случаем сферической ферми-поверхности, получаем вклад в плотность состояний за счет окрестностей нулей щели в спектре элементарных возбуждений:

$$N_{deloc} = n_v \int dS \sum_{k\alpha} \delta(E_k + kw). \quad (14.45)$$

Интегрирование ведется здесь по площади элементарной ячейки решетки Абрикосова. Имеем (ср. с выводом формулы (14.31)):

$$\sum_{k\alpha} \delta(E_k + kw) = 2N_0 \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{|kw|}{\sqrt{(kw)^2 - \Delta_k^2}}, \quad (14.46)$$

причем интегрирование происходит по области $(kw)^2 > \Delta_k^2$. Дальнейшие вычисления необходимо производить уже для конкретного вида сверхпроводящего состояния.

Рассмотрим в качестве примера полярную фазу с p -спариванием, где $\Delta_{\mathbf{k}}^2 = \Delta^2 \cos^2 \theta$. Главный вклад в плотность состояний возникает от окрестности экватора ферми-поверхности. Выполняя в (14.46) интегрирование по углам, получаем:

$$N_0 \frac{k_F |\mathbf{w}|}{\pi \Delta} \int_0^{2\pi} d\varphi |\cos \varphi| = N_0 \frac{4k_F |\mathbf{w}|}{\pi \Delta}.$$

Подставляя это выражение в (14.45), получаем (с учетом (14.44)):

$$N_{\text{deloc}} \approx n_v N_0 \frac{4\hbar v_F}{\Delta} a \sim N_0 \sqrt{\frac{H}{H_{c2}}} . \quad (14.47)$$

Полученный результат показывает, что в смешанном состоянии при $H \ll H_{c2}$ главный вклад в электронную плотность состояний сверхпроводника, имеющего нули параметра порядка на линиях на ферми-поверхности, вносят неядра вихрей, а пространство между ними, где текут сверхпроводящие токи:

$$\frac{N_{\text{deloc}}}{N_{\text{loc}}} \sim \sqrt{\frac{H_{c2}}{H}} \gg 1. \quad (14.48)$$

Теплоемкость такого сверхпроводника в смешанном состоянии при достаточно низких температурах должна иметь вид⁵

$$\frac{C_s}{C_n} = b \sqrt{\frac{H}{H_{c2}}}, \quad (14.49)$$

где b — численный коэффициент. Подобная зависимость наблюдалась экспериментально в высокотемпературных ($YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$ [16, 56]) и в тяжелодиагониальных (UPt_3 [57]) сверхпроводниках.

Упражнение. Показать, что для сверхпроводника с нулями щели в изолированных точках на ферми-поверхности имеет место следующее поведение теплоемкости в смешанном состоянии при низких температурах:

$$\frac{C_s}{C_n} = b \frac{H}{H_{c2}} \ln \frac{H_{c2}}{H}. \quad (14.50)$$

§ 15. Магнитные сверхпроводники

Сверхпроводящие состояния с многокомпонентным параметром порядка могут обладать спонтанным магнитным моментом. Так, орбитальный момент куперовской пары в состояниях, преобразующихся согласно представлению E_1 группы D_6 , с параметрами порядка:

$$g(\mathbf{k}) \propto \hat{k}_z (\hat{k}_x + i \hat{k}_y), \quad \text{при } S = 0, \quad (15.1)$$

$$d(\mathbf{k}) \propto \hat{z} (\hat{k}_x + i \hat{k}_y), \quad \text{при } S = 1 \quad (15.2)$$

⁵ См. также Н. Б. Коннин, Г. Е. Воловик // Письма в ЖЭТФ, 64, 641 (1996).

равен \hbar . Имеются также состояния, обладающие спонтанным спиновым моментом пары, например:

$$\mathbf{d}(\mathbf{k}) \propto \hat{k}_z(\hat{x} + i\hat{y}), \quad \text{при } S = 1. \quad (15.3)$$

С симметрийной точки зрения все такие состояния соответствуют магнитным сверхпроводящим классам (§§ 4, 11).

Магнитный момент \mathcal{M} сверхпроводящего магнетика складывается из магнитных моментов всех куперовских пар и для образца объемом V , в большей части которого они ориентированы вдоль общего направления $\hat{\mu}$, дается выражением

$$\mathcal{M} = MV, \quad \mathbf{M} \sim \frac{\hbar\gamma n_s}{2} \hat{\mu}. \quad (15.4)$$

Здесь n_s есть плотность сверхпроводящих электронов, а $\gamma = e/(2mc)$ — гиромагнитное отношение. Легко проверить, что магнитный момент магнитного сверхпроводника с точностью до численного множителя совпадает с магнитным моментом обычного сверхпроводника такого же объема, в котором находится один абрикосовский вихрь.

Магнитный момент (15.4) сверхпроводника создается незатухающими токами, текущими по его поверхности. В то же время магнитный момент единицы объема в толще сверхпроводника ничтожно мал. Дело в том, что спиновый момент пар компенсируется моментом неспаренных частиц. С другой стороны, куперовские пары сильно перекрываются между собой, поскольку размер пары ξ_0 велик по сравнению с межатомным расстоянием. По этой причине локальные токи, создающие орбитальный момент, практически полностью компенсируют друг друга в объеме сверхпроводника. Однако, на поверхности образца такая компенсация отсутствует, и поверхностные токи порождают магнитный момент [58, 59].

Локальный магнетизм. Рассмотрим ситуацию количественно на примере двухкомпонентного векторного параметра порядка в гексагональном кристалле. Для вычисления плотности внутреннего спонтанного момента вблизи критической температуры мы должны явно выделить в функционale свободной энергии Гинзбурга—Ландау (12.15) слагаемые, пропорциональные магнитному полю. Для этой цели перепишем градиентные члены в (12.15) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{grad}} = \int d^3r & \left\{ K_1(D_i\eta_j)^*(D_i\eta_j) + K_4(D_z\eta_i)^*(D_z\eta_i) + \right. \\ & + \frac{K_2 + K_3}{2} [(D_i\eta_i)^*(D_j\eta_j) + (D_i\eta_j)^*(D_j\eta_i)] + \\ & \left. + \frac{K_2 - K_3}{2} [(D_i\eta_i)^*(D_j\eta_j) - (D_i\eta_j)^*(D_j\eta_i)] \right\}. \end{aligned} \quad (15.5)$$

Интегрируя по частям последнее слагаемое в правой части и используя тождество

$$[D_i, D_j] \equiv D_i D_j - D_j D_i = -\frac{2\pi i}{\Phi_0} \epsilon_{ijk} (\text{rot } \mathbf{A})_k,$$

находим, что вклад в плотность свободной энергии, пропорциональный магнитному полю, имеет вид

$$F_{MH} = -\frac{\pi i}{\Phi_0} (K_2 - K_3) (\boldsymbol{\eta}^* \times \boldsymbol{\eta}) \cdot \text{rot } \mathbf{A}. \quad (15.6)$$

Отсюда получаем выражение для плотности внутреннего спонтанного момента:

$$M_i = \frac{\pi i}{\Phi_0} (K_2 - K_3) (\eta^* \times \eta). \quad (15.7)$$

Как мы знаем (см. § 11), минимуму свободной энергии (11.6) при $\beta_2 > 0$ отвечает комплексная сверхпроводящая фаза $\eta = \eta_0(1, \pm i)e^{i\varphi}$. Согласно (15.7), эта фаза обладает ненулевым собственным магнитным моментом в однородном состоянии. Величина этого момента определяется значением разности $K_2 - K_3$ и оказывается чрезвычайно малой. Микроскопический анализ (см. § 18) показывает, что в теории БКШ для векторного параметра порядка $K_1 = K_2 = K_3$, и спонтанный магнетизм отсутствует. Однако, при учете зависимости плотности состояний вблизи ферми-поверхности от энергии (электрон-дырочная асимметрия), разность $K_2 - K_3$, а вместе с ней и плотность внутреннего момента, становится отличной от нуля:

$$K_2 - K_3 \sim N_0 \xi_0^2 \left(\frac{T_c}{\epsilon_F} \right)^2 \ln \frac{\epsilon_1}{T_c}.$$

Можно убедиться в том, что плотность внутреннего магнитного момента сверхпроводника весьма мала и при нулевой температуре. Проще всего это сделать для состояния (15.3). В этом состоянии спарены только электроны со спинами «вверх» (см. (2.7)). Используя преобразование Боголюбова (§ 5), нетрудно проверить, что распределение таких электронов по энергиям имеет вид

$$n_{\uparrow}(\xi) = \langle a_{k\uparrow}^+ a_{k\uparrow} \rangle = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\xi}{E} (1 - 2f(E)) \right], \quad (15.8)$$

где $f(E)$ — фермиевская функция распределения, $E = \sqrt{\xi^2 + \Delta_k^2}$. При $T = 0$

$$n_{\uparrow}(\xi) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi}{E} \right).$$

В то же время, электроны со спинами «вниз» не спарены, и их распределение по энергиям

$$n_{\downarrow}(\xi) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi}{|\xi|} \right)$$

есть фермиевская «ступенька». Спиновый магнитный момент единицы объема такой жидкости дается выражением

$$M_i = \hat{z} \mu_B \int d\xi N(\xi) (n_{\uparrow}(\xi) - n_{\downarrow}(\xi)) \approx \hat{z} \mu_B N'_0 \Delta^2 \ln \frac{\epsilon_1}{\Delta}. \quad (15.9)$$

Здесь $N(\xi)$ — плотность электронных состояний, N'_0 — производная плотности состояний на ферми-поверхности, а ϵ_1 — параметр обрезания логарифмически расходящегося интеграла, соответствующий тому, что параметр порядка отличен от нуля в узком слое вблизи ферми-поверхности (см. § 5). Таким образом, плотность спонтанного магнитного момента мала в меру малости $(T_c/\epsilon_1)^2 \ln(\epsilon_1/T_c)$ и отлична от нуля лишь при наличии асимметрии в распределении частиц и дырок вблизи ферми-поверхности [3, 60].

Малая плотность внутреннего спинового момента возникает в результате компенсации спиновых моментов куперовских пар, состоящих из частиц со спинами вдоль поля и неспаренных частиц с противоположной ориентацией

сей спина. Такой компенсации может и не быть. Для этого надо иметь либо гигантское спаривающее взаимодействие для одного из двух направлений спина, либо создать практически полностью поляризованную ферми жидкость с очень сильно раздвинутыми ферми-поверхностями для частиц со спинами «вверх» и «вниз». Для сверхпроводников обе эти возможности в настоящем времени выглядят не очень реально. В нейтральной сверхтекучей ферми-жидкости (^3He) создание сильно спин-поляризованной сверхтекучей фазы возможно.

Поверхностные токи и магнитный момент образца. Магнитные сверхпроводящие состояния в кристаллах, где существенны эффекты кристаллической анизотропии и сильного спин-орбитального взаимодействия, имеют лишь один вид непрерывного вырождения — вырождение по фазе φ параметра порядка, обеспечивающее возможность протекания бездиссиливативных токов. Токи, не связанные с градиентами φ , могут протекать лишь в слоях толщиной порядка ξ вблизи границ образца или границ магнитных доменов. Для их вычисления воспользуемся выражением (15.5) для градиентной части свободной энергии, подставив в него параметр порядка s явно выделенным фазовым множителем $\eta \rightarrow \eta(\mathbf{r})e^{i\varphi(\mathbf{r})}$. Опуская слагаемые с K_4 , с точностью до полных производных в подынтегральном выражении имеем:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{grad}} = & \int d^3r \left\{ K_1 [v^2|\boldsymbol{\eta}|^2 + iv_i(\eta_k \nabla_i \eta_k^* - \eta_k^* \nabla_i \eta_k) + (\nabla_i \eta_j^*)(\nabla_i \eta_j)] + \right. \\ & + \frac{K_2 + K_3}{2} [2|v\boldsymbol{\eta}|^2 + iv \operatorname{rot}(\boldsymbol{\eta}^* \times \boldsymbol{\eta}) + |\nabla_i \eta_i|^2 + (\nabla_i \eta_j^*)(\nabla_i \eta_j)] - \\ & \left. - \frac{K_2 - K_3}{2} \frac{2\pi i}{\Phi_0} (\boldsymbol{\eta}^* \times \boldsymbol{\eta}) \operatorname{rot} \mathbf{A} \right\}. \quad (15.10) \end{aligned}$$

Здесь

$$\mathbf{v} = \nabla \varphi + \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A}$$

— калибровочно-инвариантный градиент фазы (ср. с (14.6)). Соответствующее выражение для плотности тока выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{j} = & -c \frac{\delta \mathcal{F}_{\text{grad}}}{\delta \mathbf{A}} = -\frac{2e}{\hbar} \frac{\delta \mathcal{F}_{\text{grad}}}{\delta \mathbf{v}} = \\ = & -\frac{2e}{\hbar} \left\{ K_1 [2v|\boldsymbol{\eta}|^2 + i(\eta_i \nabla \eta_i^* - \eta_i^* \nabla \eta_i)] + \frac{K_2 + K_3}{2} [2(\boldsymbol{\eta}^*(v\boldsymbol{\eta}) + \right. \\ & \left. + (v\boldsymbol{\eta}^*)\boldsymbol{\eta}) + i \operatorname{rot}(\boldsymbol{\eta}^* \times \boldsymbol{\eta})] + i \frac{K_2 - K_3}{2} \operatorname{rot}(\boldsymbol{\eta}^* \times \boldsymbol{\eta}) \right\}. \quad (15.11) \end{aligned}$$

Неоднородности в распределении модуля или направления вектора $i(\boldsymbol{\eta}^* \times \boldsymbol{\eta})$ на границе образца (на расстояниях порядка длины когерентности $\xi(T)$) или на границах магнитных доменов порождают незатухающие поверхностные токи, создающие полный магнитный момент:

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2c} \int d^3r (\mathbf{r} \times \mathbf{j}). \quad (15.12)$$

Величина \mathcal{M} зависит, разумеется, от распределения компонент параметра порядка $\eta_i(\mathbf{r})$ вблизи границы образца.

Рассмотрим цилиндрический образец радиуса R с осью \hat{z} вдоль гексагональной кристаллической оси. Для простоты будем считать, что параметр

порядка во всем объеме имеет вид $\eta = \eta_0(r)(1, i)$, где $\eta_0(r)$ в поверхностном слое толщиной ξ гладко спадает от объемного значения η_0 до нуля при $r = R$. В этом случае даже в отсутствие внешнего магнитного поля, то есть при $v = 0$, выражение для плотности тока приобретает вид

$$\mathbf{j} = c \operatorname{rot} \mathbf{M} = -\frac{4e}{\hbar} K_2 \frac{\partial \eta_0^2(r)}{\partial r} \hat{\phi},$$

где $\hat{\phi}$ — единичный вектор азимутального направления. Выполняя теперь интегрирование в (15.12), получаем оценку (15.4) для магнитного момента цилиндра объема V :

$$\mathbf{M} = \frac{8e}{\hbar c} K_2 \eta_0^2 V \hat{z} \approx 2\hbar \gamma n_s V \hat{z}. \quad (15.13)$$

Здесь использовано, что $K_2 \sim \hbar^2 n_s / (m \eta_0^2)$ (см. (14.7)).

Заканчивая обсуждение вопроса о спонтанном моменте магнитных сверхпроводников, подчеркнем, что в выражении для плотности тока (15.11) последнее слагаемое, соответствующее плотности спонтанного внутреннего момента, и предпоследнее слагаемое, соответствующее поверхностиному моменту, неотличимы по своей структуре. Поэтому формулы для плотности тока, полученные на основе микроскопической теории, приводили многих авторов к утверждению о существовании «большой» ($\sim \mu_B n_s$) плотности спонтанного внутреннего момента (см., например, [61]). Для правильной же интерпретации различных вкладов в ток необходимо производить микроскопическое вычисление градиентной энергии [62, 63].

Электродинамика магнитных сверхпроводников. При наличии внешнего поля \mathbf{H} , параллельного оси цилиндра, уравнение лондоновской электродинамики приобретает вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi \mathbf{j}}{c} = -\frac{\mathbf{A}}{\delta^2} + 4\pi \operatorname{rot} \mathbf{M}, \quad (15.14)$$

где δ — лондоновская глубина проникновения. Поскольку вклад в ток, обусловленный слагаемым с $\operatorname{rot} \mathbf{M}$, сосредоточен в поверхностном слое толщиной $\xi \ll \delta \ll R$, то магнитное поле, как обычно, затухает вглубь образца:

$$\mathbf{B}(r) = \mathbf{B}(R) \exp\left(-\frac{R-r}{\delta}\right). \quad (15.15)$$

Однако, за счет того, что по поверхности текут позатухающие токи, граничное условие для уравнений Лондонов приобретает вид:

$$\mathbf{B}(R) = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}. \quad (15.16)$$

Таким образом, даже в отсутствие внешнего поля на поверхности сверхпроводника имеется магнитное поле, индуцированное магнетизмом пар:

$$\mathbf{B}_0 = 4\pi \mathbf{M} = 4\pi \frac{e\hbar}{2mc} n_s \hat{\mu} = 4\pi \mu_B n_s \hat{\mu}, \quad (15.17)$$

которое подавляется в толще сверхпроводника, причем величина \mathbf{B}_0 оказывается порядка нижнего критического поля:

$$H_{c1} = \frac{\Phi_0}{4\pi \delta^2} \ln \frac{\delta}{\xi} = 2\pi \mu_B n_s \ln \frac{\delta}{\xi}. \quad (15.18)$$

Мы видим, что в магнитном сверхпроводнике достичь нижнего критического поля легче, прикладывая внешнее поле параллельно $\hat{\mu}$, чем антипараллельно ему. Более того, если поверхностное поле (15.17) в каком-то сверхпроводнике окажется больше H_{c1} , то это будет означать отсутствие мейсснеровского состояния. Вихревые нити будут проникать вглубь такого сверхпроводника при сколь угодно малом внешнем поле.

Вблизи поверхности однодоменного магнитного сверхпроводника конечных размеров должно возникать поле порядка H_{c1} , убывающее с расстоянием от поверхности по тому же закону, что и поле магнитного диполя.

Магнетизм в сверхпроводниках с p -спариванием. Несколько иная ситуация, по сравнению с рассмотренной выше, возникает в сверхпроводниках со слабым спин-орбитальным взаимодействием. В этом случае существенно не только вырождение по фазе, но и по пространственным ориентациям параметра порядка. Так, например, в заряженной сверхтекучей ферми-жидкости со структурой A -фазы гелия-3 (см. §§ 3, 11), параметр порядка имеет вид

$$A_{\alpha i} \sim V_\alpha (\Delta'_i + i\Delta''_i), \quad (15.19)$$

где $\mathbf{V}, \Delta', \Delta''$ — единичные векторы, причем $\Delta' \perp \Delta''$, а $\Delta' \times \Delta'' = \mathbf{l}$ задает направление орбитального момента куперовских пар. Неоднородная часть свободной энергии Гинзбурга—Ландау в сверхпроводниках с p -спариванием в магнитном поле записывается как

$$\mathcal{F}_{\text{grad}} = \int d^3r \left[K_1 (D_i A_{\alpha j})^* (D_i A_{\alpha j}) + K_2 (D_i A_{\alpha i})^* (D_j A_{\alpha j}) + \right. \\ \left. + K_3 (D_i A_{\alpha j})^* (D_j A_{\alpha i}) + K_4 \frac{2e}{\hbar c} i e_{\alpha\beta\gamma} B_\alpha A_{\beta i}^* A_{\gamma i} + \frac{B^2}{8\pi} \right]. \quad (15.20)$$

Состояния A -фазы вырождены по отношению к вращениям вектора \mathbf{V} и репера ($\Delta', \Delta'', \mathbf{l}$). Поэтому во всем объеме бездиссипативные токи определяются не только калибровочно-инвариантной скоростью \mathbf{v} , но и пространственным изменением (текстурой) векторов, задающих параметр порядка (ср. с (15.11)). Выводы, сделанные выше о величине спонтанного магнетизма в таком сверхпроводнике, сохраняются, однако возможные типы вихрей и структура смешанного состояния оказываются существенно сложнее, нежели для многокомпонентных сверхпроводящих фаз в кристаллах, где ориентационное вырождение подавлено сильной анизотропией и спин-орбитальным взаимодействием.

Слагаемое в свободной энергии (15.20), содержащее K_4 , описывает взаимодействие спонтанного спинового магнитного момента сверхпроводящей фазы с внешним полем. Для унитарных фаз (определение унитарной фазы см. в сноске 6 к § 5), в частности, для A - и B -фаз, такое слагаемое отсутствует. Для неунитарных фаз спиральный момент отличен от нуля, что вызывает расщепление фазового перехода ${}^3\text{He}$ в сверхтекучее состояние на два. Сначала имеет место переход в A_1 -фазу, а затем — в A -фазу (см. рис. 2) [64]. Расщепление перехода, однако, оказывается малым, поскольку коэффициент K_4 отличен от нуля лишь в меру малости электрон-дырочной асимметрии (см. § 18).

Сверхпроводники с p -спариванием и со структурой A - или A_1 -фазы в настоящий момент неизвестны. Отдельные вопросы теории таких сверхпроводящих состояний рассмотрены в работах [31, 65, 66].

§ 16. Эффект Джозефсона

Обобщение феноменологической теории эффекта Джозефсона на случай контактов между двумя сверхпроводниками, обладающими различной симметрией, может быть построено в духе подхода, развитого в § 13 при анализе поверхностных свойств. Проще всего рассмотреть это явление на примере плоского контакта между двумя сверхпроводниками, находящимися в различных сверхпроводящих состояниях с однокомпонентными параметрами порядка

$$\eta_1 = |\eta_1| e^{i\varphi_1}, \quad \eta_2 = |\eta_2| e^{i\varphi_2}. \quad (16.1)$$

Для одноосных (гексагональных и тетрагональных), а также кубических кристаллов свободная энергия системы дается выражением

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_J, \quad (16.2)$$

где

$$\mathcal{F}_i = \int_{r \mathbf{n}_i > 0} d^3 r F_i \quad (i = 1, 2) \quad (16.3)$$

есть свободные энергии (12.2) сверхпроводников, занимающих левое и правое полупространства с плоской границей, проходящей через начало координат, \mathbf{n}_i — векторы внешней нормали к соответствующему полупространству ($\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$), а \mathcal{F}_J есть поверхностная (джозефсоновская) энергия, феноменологически описывающая связь между сверхпроводниками из-за возможности туннелирования куперовских пар:

$$\mathcal{F}_J = A \oint dS g_1(\mathbf{n}_1) g_2(\mathbf{n}_2) (\eta_1^* \eta_2 + \eta_1 \eta_2^*). \quad (16.4)$$

Здесь интегрирование происходит по поверхности раздела. Вообще говоря, энергия джозефсонового контакта представляется бесконечной суммой слагаемых вида (16.4):

$$\sum_{p,q} \oint dS g_1^p(\mathbf{n}_1) g_2^q(\mathbf{n}_2) (\eta_1^* \eta_2 + \eta_1 \eta_2^*),$$

где каждое произведение $g_1^p(\mathbf{n}_1)\eta_1$ и $g_2^q(\mathbf{n}_2)\eta_2$ не должно меняться при всех преобразованиях группы точечной симметрии соответствующего полупространства. Для дальнейшего, однако, достаточно рассмотреть лишь одно слагаемое в этой сумме.

Энергия \mathcal{F}_J инвариантна относительно всех преобразований группы симметрии как левого, так и правого кристаллов в нормальном состоянии. Для кристаллов с сильным спин-орбитальным взаимодействием всегда имеются билинейные по η_1 и η_2 комбинации, обладающие указанной симметрией. Это означает, что в принципе нет никаких ограничений на существование джозефсоновой связи между двумя сверхпроводниками с однокомпонентными параметрами порядка, в том числе — между сверхпроводниками с синглетным и триплетным спариванием. При этом, разумеется, возможны такие ориентации поверхности, при которых какая-то из функций $g_i(\mathbf{n}_i)$, а вместе с ней и \mathcal{F}_J , обращаются в нуль. В этом случае необходимо принимать во внимание джозефсоновские энергии более высоких порядков по η_i .

Симметрия $g(\mathbf{n})$ совпадает с симметрией соответствующего сверхпроводящего класса. Для синглетных состояний это означает, что $g(\mathbf{n}) = 0$ для направлений нормали, при которых параметр порядка обращается в нуль на ферми-поверхности (см. § 4), то есть при $S = 0$ функции $g(\mathbf{n})$ можно считать совпадающими с базисными функциями соответствующего представления. Для случая триплетного спаривания функции $g(\mathbf{n})$ найдены в работе [67].

Точно таким же образом, составляя инвариантные комбинации из векторов \mathbf{n}_i и компонент параметров порядка η_i , в случае сильной спин-орбитальной связи, можно получить джозефсоновские энергии \mathcal{F}_j для многоатомных сверхпроводящих состояний.

В отсутствие спин-орбитального взаимодействия, в сверхпроводнике с триплетным спариванием нельзя построить скалярную линейную функцию из спинового вектора $\boldsymbol{\eta}$ параметра порядка и пространственного вектора нормали \mathbf{n} , поэтому джозефсоновская связь вида (16.4) невозможна. Однако в этом случае можно рассмотреть связи (джозефсоновские энергии) более высоких порядков по $\boldsymbol{\eta}$ [68]. То же самое справедливо для тех ориентаций поверхности, для которых выражение (16.4) обращается в нуль по симметричным соображениям.

Варьируя градиентную часть (16.2) по \mathbf{A} , находим выражения для плотности тока в правом и левом полупространствах:

$$\begin{aligned} j_1 &= -c \frac{\delta \mathcal{F}_{1,\text{grad}}}{\delta \mathbf{A}} = -\frac{2\pi c}{\Phi_0} \operatorname{Re} \eta_1^* [K_{11}(D_x + D_y) + K_{12}D_z] \eta_1, \\ j_2 &= -c \frac{\delta \mathcal{F}_{2,\text{grad}}}{\delta \mathbf{A}} = -\frac{2\pi c}{\Phi_0} \operatorname{Re} \eta_2^* [K_{21}(D_x + D_y) + K_{22}D_z] \eta_2. \end{aligned} \quad (16.5)$$

Как и в § 13, граничные условия для уравнений Гинзбурга–Ландау на поверхности контакта получаются варьированием полной энергии (16.2) по η_1 и η_2 :

$$\begin{aligned} i[K_{11}(n_{1,x}D_x + n_{1,y}D_y) + K_{12}n_{1,z}D_z]\eta_1|_S &= -Ag_1(\mathbf{n}_1)g_2(\mathbf{n}_2)\eta_2|_S, \\ i[K_{21}(n_{2,x}D_x + n_{2,y}D_y) + K_{22}n_{2,z}D_z]\eta_2|_S &= -Ag_1(\mathbf{n}_1)g_2(\mathbf{n}_2)\eta_1|_S. \end{aligned} \quad (16.6)$$

С помощью (16.5) и (16.6) находим плотность тока через джозефсоновский контакт:

$$j = (j_1 + j_2)\mathbf{n}_1|_S = \frac{4\pi c A}{\Phi_0} g_1(\mathbf{n}_1)g_2(\mathbf{n}_2) |\eta_1||\eta_2| \sin(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (16.7)$$

Согласно формуле (16.7), температурная зависимость максимального джозефсоновского тока определяется произведением модулей параметров порядка на границах контакта. Если правое и левое полупространства заняты сверхпроводниками с одинаковыми критическими температурами, и модуль параметра порядка принимает на границе объемное значение, то максимальный джозефсоновский ток пропорционален $T_c - T$. Однако, как мы знаем, в необычных сверхпроводниках величина параметра порядка на границе может быть сильно подавлена по сравнению с его объемным значением из-за проигрыша в поверхностной энергии, что имеет место при условии $f(\mathbf{n}) \neq 0$, где функция $f(\mathbf{n})$ описывает зависимость поверхностной энергии от ориентации нормали (см. § 13). В этом случае справедлива следующая оценка

$$\eta|_S \sim \frac{b(\mathbf{n})}{\xi(T)} \eta_0(T), \quad (16.8)$$

где $b(n)$ — интерполяционная длина, определяемая формулой (13.7), $\xi(T) \sim \xi_0(1 - T/T_c)^{-1/2}$ — корреляционная длина, $\eta_0(T) \propto (1 - T/T_c)^{1/2}$ — объемное значение модуля параметра порядка. Подставляя (16.8) в (16.7), мы видим, что максимальный джозефсоновский ток пропорционален $(T_c - T)^2$, если параметры порядка обоих сверхпроводников подавлены на границах контакта и пропорционален $(T_c - T)^{3/2}$, если подавление имеет место только на одной из границ.

Для обычного сверхпроводящего состояния $g(n)$ преобразуется как базисная функция единичного представления A_1 , инвариантная относительно всех преобразований точечной группы кристалла. Традиционно считается, что $g_{A_1}(n)$ полностью изотропна, поэтому джозефсоновский ток не зависит от ориентации контакта по отношению к кристаллическим осям.

Напротив, для необычных сверхпроводящих состояний $g(n)$ зависит от направления n . Так, для любого из одномерных исединичных представлений в тетрагональном кристалле $g(n)$ меняет знак при пересечении линии нулей. Например, $g_{B_1}(n) \propto n_x^2 - n_y^2$ и меняет знак при изменении ориентации

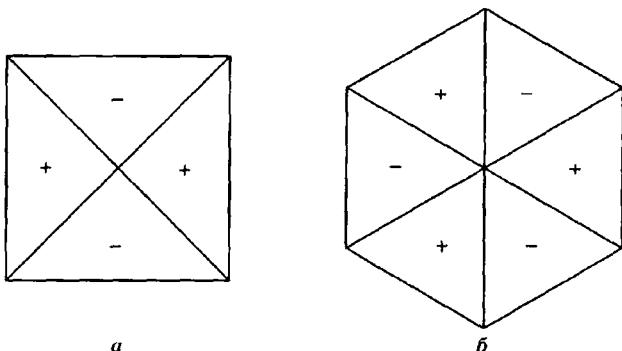


Рис. 13. Знакочередование функции $g(n)$ для представлений B_{1g} на гранях: а) тетрагонального и б) гексагонального кристаллов

поверхности от одной боковой грани тетрагонального кристалла к другой (рис. 13а). То же самое происходит в гексагональном кристалле для сверхпроводящего состояния B_1 (рис. 13б), поскольку $g_{B_1} \propto n_x^3 - 3n_x n_y^2$. Поэтому для контакта обычного сверхпроводника с различными боковыми гранями идеального тетрагонального или гексагонального кристалла в сверхпроводящем состоянии B_1 выражение для тока, используя формулу (16.7), можно записать в виде

$$I = I_0 \sin(\varphi_1 - \varphi_2 + \pi n), \quad (16.9)$$

где n — номер боковой грани.

Этот результат позволил установить симметрию сверхпроводящего состояния иттриевых высокотемпературных сверхпроводников. Наиболее надежными выглядят измерения [69, 70] тока через двухконтактный SQUID, в двух джозефсоновых контактах которого провода из обычного сверхпроводника (свинец) подсоединенны к двум боковым граням сверхпроводящего тетрагонального кристалла $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$ (рис. 14). В предположении, что

контакты 1 и 2 одинаковы, полный ток через SQUID дается выражением

$$I = I_0(\sin \Delta\varphi_1 + \sin \Delta\varphi_2) = 2I_0 \sin \frac{\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2}{2} \cos \frac{\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2}{2}. \quad (16.10)$$

Здесь $\Delta\varphi_1$ и $\Delta\varphi_2$ — скачки фаз на контактах 1 и 2. Их разность, то есть полное изменение фазы параметра порядка при обходе по замкнутому контуру SQUID'a, складывается из набега фазы в магнитном поле $(2e/\hbar c) \oint \mathbf{A} d\mathbf{r} = (2\pi\Phi/\Phi_0)$ и «внутреннего» набега фазы δ_{12} между контактами 1 и 2:

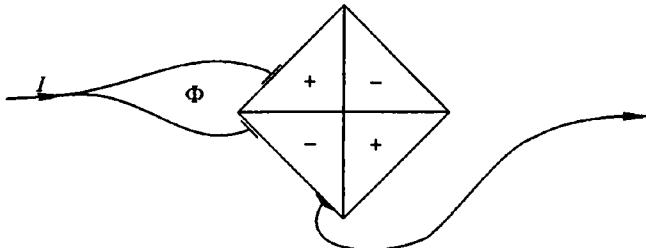


Рис. 14. Двухконтактный SQUID, подсоединененный к соседним граням тетрагонального кристалла с противоположными знаками параметра порядка

тому контуру SQUID'a, складывается из набега фазы в магнитном поле $(2e/\hbar c) \oint \mathbf{A} d\mathbf{r} = (2\pi\Phi/\Phi_0)$ и «внутреннего» набега фазы δ_{12} между контактами 1 и 2:

$$\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2 = \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0} + \delta_{12}. \quad (16.11)$$

Из формул (16.10) и (16.11) получаем выражение для максимального тока как функции внешнего поля:

$$I_{\max} = 2I_0 \cos \left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0} + \frac{\delta_{12}}{2} \right). \quad (16.12)$$

В случае обычной сверхпроводимости в $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$ $\delta_{12} = 0$, так что в отсутствие внешнего поля ток $I_{\max}(\Phi = 0) = 2I_0$ принимает наибольшее значение. На опыте [69, 70] оказалось, что $I_{\max}(\Phi = 0) = 0$, то есть $\delta_{12} = \pi$, как должно быть в случае необычной синглетной сверхпроводимости, соответствующей представлению B_1 .

Существование внутреннего набега фазы параметра порядка между боковыми гранями кристалла $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$ продемонстрировано также прямым измерением полуцелого кванта потока, захваченного сверхпроводящим кольцом, изготовленным из трех иттриевых сверхпроводящих монокристаллов с различной ориентацией [19].

Поскольку простейшая функция неприводимого представления B_1 имеет вид

$$g(\mathbf{k}) \propto \hat{k}_x^2 - \hat{k}_y^2, \quad (16.13)$$

то в литературе принято говорить о сверхпроводимости в $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$ как о сверхпроводимости с d -спариванием (или $d_{x^2-y^2}$ -спариванием). Иногда (см. ссылки в работе [18]) также обсуждается так называемое « $s + id$ -спаривание»:

$$g(\mathbf{k}) = \Delta_s + i\Delta_d(k_x^2 - k_y^2), \quad (16.14)$$

для которого δ_{12} может отклоняться от π в меру отношения Δ_s/Δ_d . Как уже указывалось в § 4, фаза вида (16.14) может образоваться непосредственно из

нормального состояния, только если фазовые переходы в сверхпроводящее состояние (нарушение калибровочной симметрии) и в ферромагнитное состояние (нарушение симметрии по отношению к обращению времени) происходят одновременно, для чего не видно особых причин. Поэтому возникновение состояния (16.14) из нормального должно идти через два последовательных фазовых перехода, что, насколько известно авторам, не наблюдается. Таким образом, интерпретация отклонений δ_{12} от π в терминах смеси s - и d -состояний представляется весьма условной.

ЧАСТЬ II

Во второй части книги мы строим теорию необычной сверхпроводимости, используя квантово-полевой подход. Формулировка теории в терминах функций Грина не только придает наглядность и компактность процедур вывода основных результатов, но и позволяет решать значительно более широкий круг задач, не поддающихся решению методами, изложенными в первой части. Мы не ставим здесь своей целью систематическое введение в метод функций Грина в теории конденсированного состояния, в частности, в теории обычной сверхпроводимости (см. [71]), предполагая знакомство читателя с основными идеями и понятиями этого метода.

§ 17. Уравнения Горькова

Рассмотрим электронный газ с притяжением между частицами, описываемый следующим гамильтонианом:

$$H = H_0 + H_{\text{int}} = \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} (\mathbf{k}\alpha | H_0 | \mathbf{k}'\beta) a_{\mathbf{k}\alpha}^+ a_{\mathbf{k}'\beta} + \\ + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}} V_{\alpha\beta, \lambda\mu}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') a_{-\mathbf{k}+\mathbf{q}/2, \alpha}^+ a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2, \beta}^+ a_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}/2, \lambda} a_{-\mathbf{k}'+\mathbf{q}/2, \mu}. \quad (17.1)$$
$$H_0 = \frac{1}{2m} \left[-i\nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right]^2 + U(\mathbf{r}) - \mu.$$

Здесь мы использовали более общее выражение, нежели (5.1), включив в одиночественный гамильтониан H_0 возможную пространственную неоднородность системы, возникающую за счет примесей, поверхности, внешних полей и т. д. Справительное взаимодействие V имеет вид (5.3), (5.7) или (5.8).

Функция Грина сверхпроводника при конечных температурах (майдубаровская функция Грина) определяется следующим образом:

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \tau_1; \mathbf{k}', \tau_2) = -\langle T_\tau a_{\mathbf{k}\alpha}(\tau_1) a_{\mathbf{k}'\beta}^+(\tau_2) \rangle, \quad (17.2)$$

где угловые скобки означают гиббсовское усреднение с гамильтонианом (17.1) (см. сноску 4 в § 5), $a_{\mathbf{k}\alpha}(\tau) = \exp(\tau H) a_{\mathbf{k}\alpha} \exp(-\tau H)$ — фермионные операторы в майдубаровском представлении, а T_τ — символ упорядочения в мнимом времени τ . Через функцию Грина (17.2) непосредственно выражаются физические характеристики системы.

Подобно тому, как это делается в теории обычной сверхпроводимости, введем еще две, так называемые аномальные функции Грина:

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \tau_1; \mathbf{k}', \tau_2) &= \langle T_\tau a_{\mathbf{k}\alpha}(\tau_1) a_{-\mathbf{k}'\beta}(\tau_2) \rangle, \\ F_{\alpha\beta}^+(\mathbf{k}, \tau_1; \mathbf{k}', \tau_2) &= \langle T_\tau a_{-\mathbf{k}\alpha}^+(\tau_1) a_{\mathbf{k}'\beta}^+(\tau_2) \rangle. \end{aligned} \quad (17.3)$$

Отличие от нуля аномальных средних следует из того, что в присутствии бозе-коалианса куперовских пар рождение или уничтожение пары электронов практически не меняет состояние системы (см. § 5). В диаграммной технике нормальные и аномальные функции Грина (17.2) и (17.3) изображаются линиями со стрелками (рис. 15).

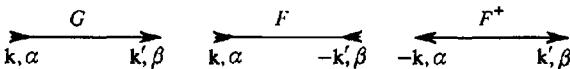


Рис. 15. Графическое изображение нормальной и аномальных функций Грина

При рассмотрении статических задач функции Грина зависят лишь от разности мнимых времен $\tau_1 - \tau_2 = \tau$, и удобно перейти в импульсно-частотное представление:

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; \tau) = T \sum_n G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; \omega_n) e^{-i\omega_n \tau} \quad \text{и т. д.},$$

где $\omega_n = (2n + 1)\pi T$ — фермионная мацубаровская частота.

Функции G и F удовлетворяют системе дифференциальных уравнений, к выводу которой мы и переходим. Воспользуемся уравнениями движения для операторов $a_{\mathbf{k}\alpha}$:

$$\frac{\partial a_{\mathbf{k}\alpha}}{\partial \tau} = [H, a_{\mathbf{k}\alpha}].$$

Дифференцируем функцию G (17.2) по τ :

$$\frac{\partial G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; \tau)}{\partial \tau} = -\langle T_\tau [H(\tau), a_{\mathbf{k}\alpha}(\tau)] a_{\mathbf{k}'\beta}^+(0) \rangle - \delta(\tau) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{\alpha\beta}.$$

Подставляя сюда гамильтониан (17.1) и используя свойство (5.2), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; \tau)}{\partial \tau} &= - \sum_{\mathbf{k}_1} \langle \mathbf{k}\alpha | H_0 | \mathbf{k}_1\gamma \rangle G_{\gamma\beta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}') - \\ &- \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{q}} V_{\gamma_1\alpha, \gamma_2\gamma_3}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1) \langle T_\tau a_{-\mathbf{k}+\mathbf{q}, \gamma_1}^+(\tau) a_{\mathbf{k}_1+\mathbf{q}/2, \gamma_2}(\tau) a_{-\mathbf{k}_1+\mathbf{q}/2, \gamma_3}(\tau) a_{\mathbf{k}'\beta}^+(0) \rangle - \\ &\quad - \delta(\tau) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (17.4)$$

Следующий шаг состоит в преобразовании точного уравнения (17.4) с помощью расщепления стоящей в правой части двухчастичной функции Грина по следующему рецепту (приближение среднего поля):

$$\begin{aligned} \langle T_\tau a_{-\mathbf{k}+\mathbf{q}, \gamma_1}^+(\tau) a_{\mathbf{k}_1+\mathbf{q}/2, \gamma_2}(\tau) a_{-\mathbf{k}_1+\mathbf{q}/2, \gamma_3}(\tau) a_{\mathbf{k}'\beta}^+(0) \rangle &\rightarrow \\ \rightarrow \langle T_\tau a_{-\mathbf{k}+\mathbf{q}, \gamma_1}^+(\tau) a_{\mathbf{k}'\beta}^+(0) \rangle \langle T_\tau a_{\mathbf{k}_1+\mathbf{q}/2, \gamma_2}(\tau) a_{-\mathbf{k}_1+\mathbf{q}/2, \gamma_3}(\tau) \rangle. \end{aligned}$$

Остальные слагаемые в данном расщеплении дают лишь аддитивную добавку \mathbf{k} входящему в H_0 химическому потенциалу, и поэтому не учитываются.

Введем теперь функцию, являющуюся параметром порядка сверхпроводника:

$$\begin{aligned}\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) &= -\sum_{\mathbf{k}'} V_{\beta\alpha, \lambda\mu}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') F_{\lambda\mu} \left(\mathbf{k}' + \frac{\mathbf{q}}{2}, \tau; \mathbf{k}' - \frac{\mathbf{q}}{2}, \tau \right) = \\ &= -T \sum_n \sum_{\mathbf{k}'} V_{\beta\alpha, \lambda\mu}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') F_{\lambda\mu} \left(\mathbf{k}' + \frac{\mathbf{q}}{2}, \mathbf{k}' - \frac{\mathbf{q}}{2}; \omega_n \right), \quad (17.5)\end{aligned}$$

а также

$$\Delta_{\lambda\mu}^+(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = -T \sum_n \sum_{\mathbf{k}'} V_{\alpha\beta, \mu\lambda}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) F_{\alpha\beta}^+ \left(\mathbf{k}' - \frac{\mathbf{q}}{2}, \mathbf{k}' + \frac{\mathbf{q}}{2}; \omega_n \right).$$

После этого уравнение для функции Грина G в импульсно-частотном представлении окончательно переписывается в виде

$$\begin{aligned}\sum_{\mathbf{k}_1} \langle \mathbf{k}\alpha | i\omega_n - H_0 | \mathbf{k}_1\gamma \rangle G_{\gamma\beta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}'; \omega_n) + \sum_{\mathbf{q}} \Delta_{\alpha\gamma}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) F_{\gamma\beta}^+(\mathbf{k} - \mathbf{q}, \mathbf{k}'; \omega_n) = \\ = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{\alpha\beta}. \quad (17.6)\end{aligned}$$

Рассуждая аналогичным образом, получаем уравнения для аномальных функций Грина:

$$\begin{aligned}\sum_{\mathbf{k}_1} \langle -\mathbf{k}_1\gamma | i\omega_n + H_0 | -\mathbf{k}\alpha \rangle F_{\gamma\beta}^+(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}'; \omega_n) + \\ + \sum_{\mathbf{q}} \Delta_{\alpha\gamma}^+(\mathbf{k}, \mathbf{q}) G_{\gamma\beta}(\mathbf{k} + \mathbf{q}, \mathbf{k}'; \omega_n) = 0, \quad (17.7)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{\mathbf{k}_1} \langle \mathbf{k}\alpha | i\omega_n - H_0 | \mathbf{k}_1\gamma \rangle F_{\gamma\beta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}'; \omega_n) - \\ - \sum_{\mathbf{q}} \Delta_{\alpha\gamma}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) G_{\beta\gamma}(-\mathbf{k}', -\mathbf{k} + \mathbf{q}; -\omega_n) = 0. \quad (17.8)\end{aligned}$$

Уравнения (17.6)–(17.8) (дифференциальные в координатном представлении) называются *уравнениями Горькова* и составляют, вместе с условием согласования (17.5), основу теоретического описания сверхпроводников.

В дальнейшем нам часто придется использовать уравнение, определяющее температуру сверхпроводящего перехода T_c для различных ситуаций (например, в присутствие примесей или внешнего магнитного поля), получающееся из уравнений Горькова следующим образом. Вблизи T_c параметр порядка мал и можно, используя (17.6) и (17.8), разложить аномальную функцию Грина F до первой степени по Δ , а затем подставить в условие согласования. При этом мы приходим к следующему уравнению:

$$\begin{aligned}\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = -T_c \sum_n \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{k}'', \mathbf{q}'} V_{\beta\alpha, \lambda\mu}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') G_{\lambda\gamma}^{(0)} \left(\mathbf{k}' + \frac{\mathbf{q}}{2}, \mathbf{k}'' + \frac{\mathbf{q}'}{2}; \omega_n \right) \times \\ \times G_{\mu\delta}^{(0)} \left(-\mathbf{k}' + \frac{\mathbf{q}}{2}, -\mathbf{k}'' + \frac{\mathbf{q}'}{2}; -\omega_n \right) \Delta_{\gamma\delta}(\mathbf{k}'', \mathbf{q}'), \quad (17.9)\end{aligned}$$

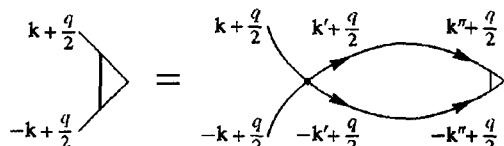


Рис. 16. Уравнение самосогласования

где $G^{(0)}$ есть функция Грина нормального металла с учетом всех внешних полей. Соответствующее диаграммное выражение изображено на рис. 16. Критическая температура определяется как температура, при которой у линейного интегрального уравнения (17.9) появляется ненулевое решение.

Для практических вычислений важно знать функции Грина пространственно-однородной системы в отсутствие внешних возмущений. В этом случае уравнения Горькова значительно упрощаются:

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; \omega_n) = G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega_n)\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad \text{и т. д.} \quad (17.10)$$

Следовательно, параметр порядка зависит лишь от направления импульсов \mathbf{k} на поверхности Ферми, но не от пространственных координат:

$$\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = \Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{k})\delta(\mathbf{q}),$$

причем

$$\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = -\Delta_{\beta\alpha}(-\mathbf{k}).$$

Легко видеть, что введенные в § 5 аномальные средние непосредственно выражаются через функции Грина однородной системы при совпадающих временных аргументах:

$$F_{\mathbf{k},\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \tau; \mathbf{k}, \tau) = T \sum_n F_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega_n),$$

$$F_{\mathbf{k},\alpha\beta}^+ = T \sum_n F_{\alpha\beta}^+(\mathbf{k}, \omega_n).$$

Подставляя (17.10) в уравнения (17.6)–(17.8) и учитывая, что одночастичный гамильтониан невозмущенной системы диагонален по импульсам и спинам:

$$\langle \mathbf{k}\alpha | H_0 | \mathbf{k}'\beta \rangle = \xi_{\mathbf{k}}\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\delta_{\alpha\beta},$$

причем $\xi_{\mathbf{k}} = \xi_{-\mathbf{k}}$, получаем

$$\begin{aligned} (i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}})G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega_n) + \Delta_{\alpha\gamma}(\mathbf{k})F_{\gamma\beta}^+(\mathbf{k}, \omega_n) &= \delta_{\alpha\beta}, \\ (i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}})F_{\alpha\beta}^+(\mathbf{k}, \omega_n) + \Delta_{\alpha\gamma}^+(\mathbf{k})G_{\gamma\beta}(\mathbf{k}, \omega_n) &= 0, \\ (i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}})F_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega_n) - \Delta_{\alpha\gamma}(\mathbf{k})G_{\beta\gamma}(-\mathbf{k}, -\omega_n) &= 0. \end{aligned} \quad (17.11)$$

Решениес данной алгебраической системы уравнений выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega_n) &= -(i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}}) [\omega_n^2 + \xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta(\mathbf{k})\Delta^+(\mathbf{k})]_{\alpha\beta}^{-1}, \\ F_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega_n) &= \Delta_{\alpha\gamma}(\mathbf{k}) [\omega_n^2 + \xi_{\mathbf{k}}^2 + (\Delta^+(\mathbf{k})\Delta(\mathbf{k}))]_{\gamma\beta}^{-1}. \end{aligned} \quad (17.12)$$

Для всех сверхпроводящих фаз с синглетным спариванием, а также для унитарных фаз с триплетным спариванием, выполняется условие $(\Delta\Delta^+)_{\alpha\beta} \propto \delta_{\alpha\beta}$, и функции Грина принимают вид

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega_n) &= -\frac{i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}}}{\omega_n^2 + \xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta_{\mathbf{k}}^2} \delta_{\alpha\beta}, \\ F_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega_n) &= \frac{\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{k})}{\omega_n^2 + \xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta_{\mathbf{k}}^2}, \end{aligned} \quad (17.13)$$

где

$$\Delta_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2} \operatorname{Sp} \Delta^+(\mathbf{k}) \Delta(\mathbf{k}).$$

Отсюда для функции Грина нормального состояния (то есть при $\Delta = 0$) мы получаем

$$G_{\alpha\beta}^{(0)}(\mathbf{k}, \omega_n) = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{i\omega_n - \xi_k}. \quad (17.14)$$

Для неунитарных фаз с триплетным спариванием

$$(\Delta \Delta^+)_{{\alpha\beta}} = \Delta^2 (\mathbf{d} \mathbf{d}^* \delta_{\alpha\beta} + \mathbf{m} \boldsymbol{\sigma}_{\alpha\beta}),$$

здесь $\mathbf{m}(\mathbf{k}) = i\mathbf{d}(\mathbf{k}) \times \mathbf{d}^*(\mathbf{k}) \neq 0$, и выражения для функций Грина сверхпроводника выглядят несколько сложнее:

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega_n) &= -(i\omega_n + \xi_k) \frac{(\omega_n^2 + \xi_k^2 + \Delta^2 |\mathbf{d}(\mathbf{k})|^2) \delta_{\alpha\beta} + \Delta^2 \mathbf{m}(\mathbf{k}) \boldsymbol{\sigma}_{\alpha\beta}}{(\omega_n^2 + E_{\mathbf{k},+}^2)(\omega_n^2 + E_{\mathbf{k},-}^2)}, \\ F_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega_n) &= \Delta (i\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}_y)_{\alpha\beta} \frac{(\omega_n^2 + \xi_k^2 + \Delta^2 |\mathbf{d}(\mathbf{k})|^2) \mathbf{d}(\mathbf{k}) - i\Delta^2 \mathbf{m}(\mathbf{k}) \times \mathbf{d}(\mathbf{k})}{(\omega_n^2 + E_{\mathbf{k},+}^2)(\omega_n^2 + E_{\mathbf{k},-}^2)}, \end{aligned} \quad (17.15)$$

где

$$E_{\mathbf{k},\pm} = \sqrt{\xi_k^2 + \Delta^2 (|\mathbf{d}(\mathbf{k})|^2 \pm |\mathbf{m}(\mathbf{k})|)}. \quad (17.16)$$

Уравнение, определяющее температурное поведение параметра порядка, получается подстановкой выражения (17.13) для функции F в условие согласования (17.5):

$$\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = -T \sum_n \sum_{\mathbf{k}'} V_{\beta\alpha,\gamma\delta}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \frac{\Delta_{\gamma\delta}(\mathbf{k}')}{\omega_n^2 + \xi_{\mathbf{k}'}^2 + \Delta_{\mathbf{k}'}^2}, \quad (17.17)$$

(аналогичным образом может быть получено и соответствующее уравнение в случае неунитарных фаз (см. [13]). Для вычисления суммы по частотам в (17.17) воспользуемся формулой

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 \pi^2 + x^2} = \frac{1}{2x} \operatorname{th} \frac{x}{2}. \quad (17.18)$$

Из (17.17) получаем:

$$\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = - \sum_{\mathbf{k}'} V_{\beta\alpha,\gamma\delta}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \Delta_{\gamma\delta}(\mathbf{k}') \frac{1}{2E_{\mathbf{k}'}} \operatorname{th} \left(\frac{E_{\mathbf{k}'}}{2T} \right), \quad (17.19)$$

откуда, учитывая, что $\operatorname{th}(E_{\mathbf{k}'} / 2T) = 1 - 2f_{\mathbf{k}'}$, где $f_{\mathbf{k}'}$ — фермиевская функция распределения, возвращающаяся к формулам (6.5) и (6.6). Уравнение, определяющее критическую температуру T_c , получается путем подстановки $\Delta = 0$ (т. е. замены $E_{\mathbf{k}'} \rightarrow |\xi_{\mathbf{k}'}|$) в (17.19).

Техника функций Грина для сверхпроводника может быть сформулирована в более компактном виде, формально напоминающим диаграммную технику для нормальной ферми-жидкости, если объединить G , F и F^+ в

одну матричную функцию Грина \hat{G} , используя векторные операторы (5.23) в мацубаровском представлении. По определению:

$$\begin{aligned}\hat{G}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \omega_n) &= - \int_0^{1/T} d\tau e^{i\omega_n \tau} \langle T_\tau A_{\mathbf{k}_1}(\tau) A_{\mathbf{k}_2}^+(0) \rangle = \\ &= \begin{pmatrix} G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \omega_n) & -F_{\alpha\beta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \omega_n) \\ -F_{\alpha\beta}^+(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \omega_n) & -G_{\beta\alpha}(-\mathbf{k}_2, -\mathbf{k}_1; -\omega_n) \end{pmatrix}. \quad (17.20)\end{aligned}$$

Матричные элементы \hat{G} являются, в свою очередь, матрицами 2×2 в спиновом пространстве. В пространственно-однородном случае имеем (см. (17.12)):

$$\begin{aligned}\hat{G}_0(\mathbf{k}, \omega_n) &= - \frac{1}{\omega_n^2 + \xi_k^2 + \Delta_{\mathbf{k}}^2} \begin{pmatrix} (i\omega_n + \xi_k)\delta_{\alpha\beta} & \Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) \\ \Delta_{\alpha\beta}^+(\mathbf{k}) & (i\omega_n - \xi_k)\delta_{\alpha\beta} \end{pmatrix} = \\ &= - \frac{i\omega_n \hat{\tau}_0 + \xi_k \hat{\tau}_3 + \hat{\Delta}(\mathbf{k})}{\omega_n^2 + \xi_k^2 + \Delta_{\mathbf{k}}^2}, \quad (17.21)\end{aligned}$$

где $\hat{\tau}_i$ — матрицы Паули в «пространстве» частица—дырка.

Спектральное представление и энергии возбуждений. При решении конкретных задач необходимо уметь вычислять суммы по мацубаровским частотам. Для этого удобно использовать так называемое спектральное разложение функций Грина, которое в матричных обозначениях имеет вид

$$\hat{G}(\mathbf{k}, \omega_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{2\pi i} \frac{\hat{\rho}(\mathbf{k}, z)}{i\omega_n - z}.$$

После этого суммы по фермионным частотам легко вычисляются с помощью тождества (ср. с (17.18))

$$T \sum_n \frac{1}{i\omega_n - z} = \frac{1}{2} \operatorname{th} \frac{z}{2T}. \quad (17.22)$$

Вещественная спектральная плотность $\hat{\rho}$ выражается через фурье-образы запаздывающих и опережающих функций Грина¹ следующим образом:

$$\hat{\rho}(\mathbf{k}, \omega) = -2 \operatorname{Im} \hat{G}^R(\mathbf{k}, \omega) = i(\hat{G}^R(\mathbf{k}, \omega) - \hat{G}^A(\mathbf{k}, \omega)).$$

В свою очередь, запаздывающие (опережающие) функции Грина получают-ся из $\hat{G}(\mathbf{k}, \omega_n)$ путем аналитического продолжения на верхнюю (нижнюю) полу平面 комплексных ω :

$$\hat{G}^{R(A)}(\mathbf{k}, \omega) = \hat{G}(\mathbf{k}, \omega_n) \Big|_{i\omega_n \rightarrow \omega \pm i0}. \quad (17.23)$$

Спектр элементарных возбуждений сверхпроводника определяется полюсами функции G^R . Выполняя аналитическое продолжение в (17.13), получаем уравнение, определяющее спектр:

$$\det \|E^2 - \xi_k^2 - \Delta(\mathbf{k})\Delta^+(\mathbf{k})\| = 0. \quad (17.24)$$

¹Напомним, что функции \hat{G}^R (\hat{G}^A) отличаются от мацубаровской функции \hat{G} (17.20) заменой τ -упорядоченного произведения операторов на их запаздывающие (опережающие) антисимметрические операторы.

Подставляя сюда выражения (5.18) и (5.20), получаем, что энергии возбуждений даются формулами

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2 |g(\mathbf{k})|^2}$$

для синглетного спаривания и

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2 |\mathbf{d}(\mathbf{k})|^2}$$

для унитарных фаз с триплетным спариванием, то есть возвращаемся к результатам (5.33) и (5.34).

Для неунитарных фаз спектр возбуждений расщепляется на две ветви аналогично тому, как это происходит в обычных магнитных материалах, поскольку неунитарные фазы обладают собственным магнитным моментом:

$$E_{\mathbf{k}, \pm} = \sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2 (|\mathbf{d}(\mathbf{k})|^2 \pm |\mathbf{d}^*(\mathbf{k}) \times \mathbf{d}(\mathbf{k})|)}. \quad (17.25)$$

Отсюда следует, что положение нулей спектра возбуждений для любых фаз триплетного спаривания определяется уравнением $\det \Delta(\mathbf{k}) = 0$, то есть $\mathbf{d}^2(\mathbf{k}) = 0$.

Плотность состояний. Плотность состояний квазичастиц по определению

$$N(E) = \sum_{\mathbf{k}\alpha} \delta(E - E_{\mathbf{k}}). \quad (17.26)$$

Эта величина следующим образом выражается через функцию Грина:

$$N(E) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\mathbf{k}\alpha} \rho(\mathbf{k}, E) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \sum_{\mathbf{k}\alpha} G(\mathbf{k}, \omega_n) \Big|_{i\omega_n \rightarrow E+i0}. \quad (17.27)$$

Из (17.26), с учетом выражения (5.29) для спектра возбуждений, получаем:

$$\begin{aligned} N(E) &= 2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \delta(E - E_{\mathbf{k}}) = 2N_0 \int \frac{d\Omega}{4\pi} \int d\xi \delta(E - E_{\mathbf{k}}) = \\ &= 2N_0 \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{dE' E'}{\sqrt{E'^2 - \Delta_{\mathbf{k}}^2}} \delta(E - E') = 2N_0 \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{E}{\sqrt{E^2 - \Delta_{\mathbf{k}}^2}}, \end{aligned} \quad (17.28)$$

где N_0 есть плотность состояний на уровне Ферми в нормальном металле на одну проекцию спина, а интегрирование по углам производится в пределах $\Delta_{\mathbf{k}}^2 < E^2$.

Для обычного изотропного сверхпроводника с s -спариванием ($g(\mathbf{k}) = 1$) из (17.28) следует, что

$$N(E) = 2N_0 \begin{cases} 0, & \text{при } E < \Delta, \\ \frac{E}{\sqrt{E^2 - \Delta^2}}, & \text{при } E > \Delta, \end{cases} \quad (17.29)$$

то есть плотность квазичастических состояний тождественно обращается в нуль при $E < \Delta$.

Посмотрим теперь, что изменится, если в спектре возбуждений имеются пули. В качестве примера рассмотрим сверхпроводник со структурой A -фазы,

параметр порядка в котором имеет вид (3.8), то есть щель обращается в нуль на северном и южном полюсах ферми-поверхности. Из (17.28) получаем:

$$N(E) = 2N_0 \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{E}{\sqrt{E^2 - \Delta^2(\hat{k}_x^2 + \hat{k}_y^2)}} = N_0 \int \sin \theta d\theta \frac{E}{\sqrt{E^2 - \Delta^2 \sin^2 \theta}},$$

причем $\sin \theta < E/\Delta$. При $E \rightarrow 0$ основной вклад в интеграл дают окрестности полюсов $\theta < E/\Delta$ и $\pi - \theta < E/\Delta$, следовательно,

$$N(E) \approx N_0 \int_0^{E/\Delta} \theta d\theta \frac{E}{\sqrt{E^2 - \Delta^2 \theta^2}} \sim N_0 \left(\frac{E}{\Delta} \right)^2. \quad (17.30)$$

Таким образом, мы имеем ненулевую плотность состояний.

Можно убедиться в том, что если щель в спектре обращается в нуль на целой линии (это имеет место, например, для сверхпроводника со структурой полярной фазы), то

$$N(E) \sim N_0 \frac{E}{\Delta}. \quad (17.31)$$

Подобные степенные зависимости плотности состояний квазичастиц от энергии приводят к степенному (а не экспоненциальному) температурному поведению термодинамических и кинетических характеристик необычных сверхпроводников.

§ 18. Функционал Гинзбурга–Ландау

Полученные в предыдущем параграфе уравнения для функций Грина сверхпроводника — уравнения Горькова — позволяют в принципе полностью описать свойства сверхпроводящего состояния. На практике, однако, существует широкий круг задач, в которых нет необходимости использовать эти достаточно сложные уравнения непосредственно. В частности, вблизи критической температуры, когда малы как сам сверхпроводящий параметр порядка ($\Delta \propto (T_c - T)^{1/2}$), так и его градиенты (то есть $\Delta(r)$ медленно меняется на характерном масштабе теории сверхпроводимости — размере куперовской пары ξ_0), удобно использовать уравнения Гинзбурга–Ландау (см. § 12). Эти уравнения проще всего вывести с использованием техники функций Грина, вычисляя свободную энергию сверхпроводника \mathcal{F}_s как функционал от параметра порядка, с последующей ее минимизацией по Δ .

Мы рассмотрим в качестве примера сверхпроводник с p -спариванием вблизи критической температуры в отсутствие примесей (см. [72]), для которого потенциал спаривающего взаимодействия, входящий в гамильтониан (17.1), выглядит следующим образом:

$$V(k, k') = -3V \frac{k k'}{k_F^2}, \quad (18.1)$$

где константа связи V отлична от нуля лишь в узком слое толщиной ε_1 вблизи ферми-сферы (см. (5.4)).

Свободная энергия определяется формулой $\mathcal{F} = -T \ln Z$, где $Z = \text{Sp}(e^{-\beta H})$ есть статистическая сумма¹. Для гамильтониана H мы используем соответствующее приближение среднего поля выражение (5.22), переписав его в виде, содержащем только сверхпроводящий параметр порядка Δ и фермионные операторы рождения и уничтожения:

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \xi_k a_{\mathbf{k}\alpha}^+ a_{\mathbf{k}\alpha} + \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} \text{Sp} \Delta^+(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \Delta(\mathbf{k}, \mathbf{q}) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} \left(\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2, \alpha}^+ a_{-\mathbf{k}+\mathbf{q}/2, \beta}^+ + \right. \\ \left. + \Delta_{\alpha\beta}^+(\mathbf{k}, \mathbf{q}) a_{-\mathbf{k}+\mathbf{q}/2, \alpha} a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2, \beta} \right). \quad (18.2)$$

В отличие от (5.22), здесь учтена возможная пространственная неоднородность параметра порядка².

Рассматривая содержащие Δ слагаемые в (18.2) как возмущение \hat{H}_{int} и переходя к мацубаровскому представлению, разложим разность свободных энергий сверхпроводящего и нормального состояний

$$-T \ln \left\langle \exp \left[- \int_0^{1/\tau} d\tau \hat{H}_{\text{int}}(\tau) \right] \right\rangle$$

вплоть до членов четвертой степени по Δ . Имеем:

$$\mathcal{F}_{\text{cond}} = \mathcal{F}_s - \mathcal{F}_n = \frac{1}{2V} \int d^3r \int \frac{d\Omega}{4\pi} \text{Sp} \Delta^+(\mathbf{k}, \mathbf{r}) \Delta(\mathbf{k}, \mathbf{r}) + \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_4. \quad (18.3)$$

Здесь

$$\Delta_{\lambda\mu}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \Delta_{\lambda\mu}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) e^{i\mathbf{qr}} = (i\sigma_\alpha \sigma_y)_{\lambda\mu} A_{\alpha i}(\mathbf{r}) \hat{k}_i, \quad (18.4)$$

— параметр порядка сверхпроводника с p -спариванием,

$$\mathcal{F}_2 = - \int d^3r_1 d^3r_2 A_{\alpha i}^*(\mathbf{r}_1) S_{ij, \alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) A_{\beta j}(\mathbf{r}_2), \quad (18.5)$$

где ядро S выглядит следующим образом:

$$S_{ij, \alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \lim_{\mathbf{r}'_{1,2} \rightarrow \mathbf{r}_{1,2}} \frac{T}{4k_F^2} \sum_n \left(\frac{\partial}{\partial r_{1,i}} - \frac{\partial}{\partial r'_{1,i}} \right) \left(\frac{\partial}{\partial r_{2,j}} - \frac{\partial}{\partial r'_{2,j}} \right) \times \\ \times (\sigma_y \sigma_\alpha)_{\lambda\mu} G_{\lambda\gamma}^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega_n) (\sigma_\beta \sigma_y)_{\gamma\delta} G_{\mu\delta}^{(0)}(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2; -\omega_n). \quad (18.6)$$

¹Более точно, таким образом определяется термодинамический потенциал Ω , однако, согласно общим принципам термодинамики, разность $\Omega_s - \Omega_n$ равна разности свободных энергий $\mathcal{F}_s - \mathcal{F}_n$.

²В общем случае второе слагаемое в правой части (18.2) имеет вид:

$$- \frac{1}{2} \text{Sp} \sum \Delta^+(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \hat{V}^{-1}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \Delta(\mathbf{k}', \mathbf{q}),$$

где \hat{V}^{-1} удовлетворяет уравнению $\sum_{\mathbf{k}''} \hat{V}^{-1}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'') \hat{V}(\mathbf{k}'', \mathbf{k}') = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$. Используя ортогональность и полноту системы базисных функций, приходим к выражению (18.2).

Входящие сюда функции $G^{(0)}$ представляют собой функции Грина нормального металла с учетом взаимодействия как зарядов, так и спинов электронов с внешним магнитным полем. Наконец член четвертого порядка в разложении свободной энергии имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_4 = \frac{1}{4} T_c \sum_n \sum_{\{\mathbf{q}_i\}} \sum_{\mathbf{k}} & \text{Sp } \Delta^+(\mathbf{k}, \mathbf{q}_1) G^{(0)}(\mathbf{k}, \omega_n) \times \\ & \times \Delta(\mathbf{k}, \mathbf{q}_2) G^{(0)}(-\mathbf{k}, -\omega_n) \Delta^+(\mathbf{k}, \mathbf{q}_3) G^{(0)}(\mathbf{k}, \omega_n) \times \\ & \times \Delta(\mathbf{k}, \mathbf{q}_4) G^{(0)}(-\mathbf{k}, -\omega_n) \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_4) \quad (18.7) \end{aligned}$$

Все импульсы \mathbf{q}_i в функциях Грина положены равными нулю, так как рассмотрение конечных импульсов нужно лишь при вычислении градиентных членов четвертой степени по Δ , которые нас не интересуют.

Если пренебречь действием поля на спины электронов (мы вернемся к этому вопросу позже), то

$$G_{\lambda\gamma}^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega_n) = G^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega_n) \delta_{\lambda\gamma}.$$

Для квадратичного закона дисперсии при $H = 0$ фурье-образ выражения (17.14) есть

$$\begin{aligned} G^{(0)}(\mathbf{r}, \omega_n) = -\frac{\pi N_0}{k_F r} \exp \left(ik_F r \sqrt{1 + \frac{i\omega_n}{\varepsilon_F}} \operatorname{sign} \omega_n \right) \approx \\ \approx -\frac{\pi N_0}{k_F r} \exp \left(ik_F r \operatorname{sign} \omega_n - \frac{|\omega_n|}{v_F} r \right). \quad (18.8) \end{aligned}$$

При $\Delta = 0$, но $H \neq 0$, из (17.6) получаем следующее уравнение для функции Грина G :

$$\left[i\omega_n - \frac{\hbar^2}{2m} \left(-i \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} + \frac{e}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_1) \right)^2 + \epsilon_F \right] G^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega_n) = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2).$$

В последующих выкладках мы используем систему единиц, в которой $\hbar = 1$, при необходимости восстанавливая постоянную Планка в окончательных ответах.

Ищем решение этого уравнения в виде

$$\begin{aligned} G^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega_n) = \\ = G^{(0)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \omega_n) \exp \left[\frac{ie}{c} \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{A}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + i\psi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \omega_n) \right]. \quad (18.9) \end{aligned}$$

Интегрирование в показателе экспоненты идет по прямой линии, соединяющей точки \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 . Для функции ψ получаем уравнение [73]:

$$k_F \hat{\mathbf{r}} \operatorname{sign} \omega_n \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, \omega_n)}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e^2}{4c^2} (\mathbf{H} \times \mathbf{r})^2 = 0,$$

откуда видно, что в полях порядка $H_{c2}(0) \sim \Phi_0 / (\pi \xi_0^2)$ добавка к фазе имеет малость $\sim (k_F \xi_0)^{-1}$ по сравнению с первым членом в показателе

экспоненты в (18.9). Поэтому для функции Грина имеем:

$$G^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega_n) = G^{(0)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2; \omega_n) \exp \left(\frac{ie}{c} \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{A}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right) \approx \\ \approx G^{(0)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2; \omega_n) \exp \left(\frac{ie}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \right). \quad (18.10)$$

Последнее равенство написано на том основании, что характерный масштаб изменения вектор-потенциала (лондоновская глубина проникновения) вблизи T_c значительно превышает расстояние, на котором спадают нулевые функции Грина (18.8).

Подставляя (18.8) и (18.10) в (18.6), убеждаемся, что главный вклад в ядро происходит от дифференцирования меняющихся на атомных масштабах множителей вида $\exp(ik_F r \operatorname{sign} \omega_n)$, а поправки первого порядка малости по магнитному полю возникают при дифференцировании зависящих от поля фазовых множителей в (18.10). Имеем [31]:

$$S_{ij,\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = S_{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \delta_{\alpha\beta} \\ S_{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = T \left(\frac{\pi N_0}{k_F R} \right)^2 \sum_n \exp \left(-\frac{2|\omega_n|}{v_F} R \right) \left(\hat{R}_i \hat{R}_j + \frac{ie}{2k_F^2 c} e_{ijk} H_k \right) \times \\ \times \exp \left(\frac{2ie}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_1) \mathbf{R} \right), \quad (18.11)$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ и $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}/|\mathbf{R}|$.

Оценим второй член в квадратных скобках в правой части (18.11):

$$\frac{eH}{k_F^2 c} \sim \frac{1}{(k_F \xi_0)^2} \frac{H}{H_{c2}(0)}.$$

В нулевом порядке по параметру квазиклассичности $(k_F \xi_0)^{-1}$ им можно пренебречь, тогда

$$S_{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = K_{ij}^{(0)}(\mathbf{R}) \exp \left(\frac{2ie}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_1) \mathbf{R} \right), \quad (18.12)$$

где

$$K_{ij}^{(0)}(\mathbf{R}) = T \left(\frac{\pi N_0}{k_F R} \right)^2 \sum_n \exp \left(-\frac{2|\omega_n|}{v_F} R \right) \hat{R}_i \hat{R}_j.$$

Мы видим, что ядро $K^{(0)}$ экспоненциально убывает на расстояниях между \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , превышающих

$$\xi_0 = \frac{v_F}{2\pi T_c},$$

и тем самым в теории появляется характерный микроскопический масштаб — размер куперовской пары (или длина когерентности) ξ_0 . С другой стороны, параметр порядка сверхпроводника изменяется на масштабе порядка корреляционной длины $\xi(T)$, причем $\xi/\xi_0 \sim (1 - T/T_c)^{-1/2} \gg 1$ (см. § 12).

Следовательно, вблизи T_c мы можем разложить в подынтегральном выражении в (18.5) как параметр порядка, так и фазовый множитель в ядре вплоть до второй степени по $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{R}$. Имеем:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_2 = - \int d^3 r A_{\alpha i}^*(\mathbf{r}) \int d^3 R S_{ij}^{(0)}(\mathbf{R}) \times \\ \times \left[1 + \frac{2ie}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \mathbf{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{2ie}{c} \right)^2 (\mathbf{A}(\mathbf{r}) \mathbf{R})^2 \right] \times \\ \times \left[A_{\alpha j}(\mathbf{r}) + \frac{\partial A_{\alpha j}}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{R} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A_{\alpha j}}{\partial \tau_k \partial \tau_l} R_k R_l \right].\end{aligned}$$

Выделяя явно члены нулевой степени по \mathbf{R} и интегрируя члены второй степени по частям, получаем:

$$\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_{\text{uniform}} + \mathcal{F}_{\text{grad}}, \quad (18.13)$$

где

$$\mathcal{F}_{\text{uniform}} = - \int d^3 r A_{\alpha i}^*(\mathbf{r}) A_{\alpha j}(\mathbf{r}) \int d^3 R S_{ij}^{(0)}(\mathbf{R}), \quad (18.14)$$

$$\mathcal{F}_{\text{grad}} = \frac{1}{2} \int d^3 r (D_k A_{\alpha i})^* (D_l A_{\alpha j}) \int d^3 R S_{ij}^{(0)}(\mathbf{R}) R_k R_l, \quad (18.15)$$

а $\mathbf{D} = -i(\partial/\partial \mathbf{r}) + (2e/c)\mathbf{A}(\mathbf{r})$ — ковариантная производная.

Вычислим входящие в (18.14) и (18.15) интегралы по \mathbf{R} . Для однородной части имеем:

$$\begin{aligned}\int d^3 R S_{ij}^{(0)}(\mathbf{R}) = T \left(\frac{\pi N_0}{k_F} \right)^2 \sum_n \int_0^\infty dR \exp \left(-\frac{2|\omega_n|}{v_F} R \right) \int d\Omega \hat{R}_i \hat{R}_j = \\ = \frac{2\pi}{3} \delta_{ij} v_F \left(\frac{\pi N_0}{k_F} \right)^2 T \sum_n \frac{1}{|\omega_n|} = \frac{2\pi}{3} \delta_{ij} N_0 T \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\omega_n}. \quad (18.16)\end{aligned}$$

Обрезая логарифмически расходящуюся сумму на граничной частоте ϵ_1 , получаем:

$$2\pi T \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\omega_n} = \ln \frac{\epsilon_1}{2\pi T} + \ln 4\gamma = \frac{1}{N_0 V} + \ln \frac{T_c}{T} = \frac{1}{N_0 V} - \frac{T - T_c}{T_c}. \quad (18.17)$$

Здесь мы воспользовались формулой (6.10) и тождеством

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n \geq 0}^N \frac{1}{n + 1/2} = \ln N + \ln 4\gamma.$$

Подставляя (18.16) и (18.17) в (18.14), получаем:

$$\mathcal{F}_{\text{uniform}} = \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{V} + N_0 \frac{T - T_c}{T_c} \right) \int d^3 r A_{\alpha i}^*(\mathbf{r}) A_{\alpha i}(\mathbf{r}). \quad (18.18)$$

Подставляя (18.18) в (18.3), убеждаемся, что однородные слагаемые, явно содержащие константу связи, сокращают друг друга.

Для градиентной части имеем:

$$\begin{aligned} \int d^3R S_{ij}^{(0)}(\mathbf{R}) R_k R_l &= T \left(\frac{\pi N_0}{k_F} \right)^2 \sum_n \int_0^\infty dR R^2 \exp \left(-\frac{2|\omega_n|}{v_F} R \right) \times \\ &\times \int d\Omega \hat{R}_i \hat{R}_j \hat{R}_k \hat{R}_l = \frac{\pi}{15} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) v_F^2 N_0 T_c \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\omega_n^3} = \\ &= \frac{7\zeta(3)}{120} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \frac{N_0 v_F^2}{\pi^2 T_c^2}. \quad (18.19) \end{aligned}$$

Сравнивая полученный результат с феноменологическим выражением (15.20) для свободной энергии сверхпроводника с p -спариванием, получаем окончательно следующие значения констант [72]:

$$K_1 = K_2 = K_3 = \frac{7\zeta(3) N_0 v_F^2}{240 \pi^2 T_c^2} = \frac{7\zeta(3)}{60} N_0 \xi_0^2. \quad (18.20)$$

Рассмотрим теперь член четвертого порядка в разложении свободной энергии. Подставляя в \mathcal{F}_4 выражения (18.4) и (17.13), а затем вычисляя интеграл по углам и след по спиновым индексам с использованием тождества

$$\text{Sp}(\sigma \mathbf{d}_1)(\sigma \mathbf{d}_2)(\sigma \mathbf{d}_3)(\sigma \mathbf{d}_4) = 2(\mathbf{d}_1 \mathbf{d}_2)(\mathbf{d}_3 \mathbf{d}_4) - 2(\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2)(\mathbf{d}_3 \times \mathbf{d}_4),$$

получаем:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_4 &= \frac{B}{4} \sum_{\mathbf{q}_i} \left(-A_{\alpha i}^* A_{\beta j} A_{\alpha i}^* A_{\beta j} + 2A_{\alpha i}^* A_{\alpha i} A_{\beta j}^* A_{\beta j} - 2A_{\alpha i}^* A_{\beta i} A_{\alpha j}^* A_{\beta j} + \right. \\ &\quad \left. + 2A_{\alpha i}^* A_{\beta i} A_{\beta j}^* A_{\alpha j} + 2A_{\alpha i}^* A_{\alpha j} A_{\beta i}^* A_{\beta j} \right) \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_4), \quad (18.21) \end{aligned}$$

где все слагаемые в фигурных скобках зависят от импульсов следующим образом: $A_{\alpha i}^* A_{\beta j} A_{\alpha i}^* A_{\beta j} = A_{\alpha i}^*(\mathbf{q}_1) A_{\beta j}(\mathbf{q}_2) A_{\alpha i}^*(\mathbf{q}_3) A_{\beta j}(\mathbf{q}_4)$ и т. д., а

$$B = \frac{2}{15} N_0 T_c \sum_n \int d\xi \frac{1}{(\omega_n^2 + \xi^2)^2} = \frac{7\zeta(3)}{60} \frac{N_0}{\pi^2 T_c^2},$$

Возвращаясь в (18.21) в координатное представление и сравнивая результат с (11.1), получаем значения констант [34, 74]:

$$-2\beta_1 = \beta_2 = -\beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = \frac{7\zeta(3)}{120} \frac{N_0}{\pi^2 T_c^2}. \quad (18.22)$$

Таким образом, плотность функционала (18.3) принимает следующий окончательный вид:

$$\begin{aligned} F_{\text{cond}} &= \frac{N_0}{3} \frac{T - T_c}{T_c} A_{\alpha i} A_{\alpha i}^* + \frac{7\zeta(3)}{120 \pi^2} \frac{N_0}{T_c^2} \left[-\frac{1}{2} |A_{\alpha i} A_{\alpha i}|^2 + (A_{\alpha i}^* A_{\alpha i})^2 - \right. \\ &\quad \left. - A_{\alpha i}^* A_{\beta i} A_{\alpha j}^* A_{\beta j} + A_{\alpha i}^* A_{\beta i} A_{\beta j}^* A_{\alpha j} + A_{\alpha i}^* A_{\alpha j} A_{\beta i}^* A_{\beta j} \right] + \\ &\quad + \frac{7\zeta(3)}{60} N_0 \xi_0^2 \left[(D_i A_{\alpha j})^* (D_i A_{\alpha j}) + (D_i A_{\alpha i})^* (D_j A_{\alpha j}) + \right. \\ &\quad \left. + (D_i A_{\alpha j})^* (D_j A_{\alpha i}) \right]. \quad (18.23) \end{aligned}$$

Найденные параметры функционала Гинзбурга–Ландау соответствуют приближению слабой связи (см. конец § 10).

Поправки к квазиклассическому приближению. Орбитальный магнетизм. Сравнивая (18.20) и (15.7), мы видим, что в рассматриваемом приближении внутренний спонтанный орбитальный магнитный момент в сверхпроводнике с p -спариванием отсутствует в силу равенства $K_2 = K_3$. Посмотрим, что произойдет, если учесть второе слагаемое в квадратной скобке в выражении (18.11), антисимметричное по индексам i, j и представляющее собой, как уже отмечалось, поправку второго порядка малости по параметру квазиклассичности.

Опуская зависящий от поля фазовый множитель в (18.11), получаем следующую поправку к плотности свободной энергии:

$$\delta F_{MH} = i \frac{e}{2k_F^2 c} \left(\frac{\pi N_0}{k_F} \right)^2 e_{ijk} A_{\alpha i}^* A_{\alpha j} H_k 2\pi T_c \sum_n \int_0^\infty dR \exp \left(-\frac{2|\omega_n|}{v_F} R \right) = \\ = i \frac{e}{4k_F^2 c} N_0 \ln \frac{\epsilon_1}{2\pi T_c} e_{ijk} A_{\alpha i}^* A_{\alpha j} H_k.$$

Отсюда, восстанавливая постоянную Планка, получаем выражение для плотности внутреннего орбитального магнитного момента [75]

$$M_i = -i \frac{e\hbar}{4k_F^2 c} N_0 \ln \frac{\epsilon_1}{2\pi T_c} e_{ijk} A_{\alpha j}^* A_{\alpha k}.$$

Сравнивая с (15.7), приходим к выводу о том, что при учете поправок порядка $(k_F \xi_0)^{-2}$ к квазиклассическому приближению разность $K_2 - K_3$, а вместе с ней и плотность внутреннего спонтанного орбитального момента, становятся отличными от пуля.

Спиновый магнетизм. Рассмотрим теперь эффект взаимодействия спинов электронов с магнитным полем. В пренебрежении орбитальными эффектами ядро (18.6) зависит только от разности координат. Параметр порядка тогда можно считать не зависящим от r , и из (18.5) имеем следующее выражение для плотности свободной энергии:

$$F_{SH} = -\frac{1}{2} A_{\alpha i}^* S_{ij,\alpha\beta} A_{\beta j}. \quad (18.24)$$

Входящий сюда коэффициент K удобно вычислять в импульсном представлении:

$$S_{ij,\alpha\beta} = T_c \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \hat{k}_i \hat{k}_j (\sigma_y \sigma_\alpha)_{\lambda\mu} \times \\ \times G_{\lambda\gamma}^{(0)}(\mathbf{k}, \omega_n) (\sigma_\beta \sigma_y)_{\gamma\delta} G_{\mu\delta}^{(0)}(-\mathbf{k}, -\omega_n). \quad (18.25)$$

Выбирая ось квантования (направление магнитного поля \mathbf{H}) вдоль оси \hat{z} , функции Грина можно записать в следующем виде (ср. с (17.14) при $\mathbf{H} = 0$):

$$G_{\lambda\gamma}^{(0)}(\mathbf{k}, \omega_n) = \frac{i\omega_n - \xi_k}{(i\omega_n - \xi_k)^2 - (\mu_B H)^2} \delta_{\lambda\gamma} - \\ - \frac{\mu_B H}{(i\omega_n - \xi_k)^2 - (\mu_B H)^2} (\sigma_z)_{\lambda\gamma}, \quad (18.26)$$

где μ_B есть магнетон Бора (или магнитный момент ядра в ${}^3\text{He}$). Подставляя (18.26) в (18.25) и вычисляя след по спиновым индексам, получаем линейную

по полю поправку к коэффициенту K :

$$\delta S_{ij,\alpha\beta} = -ie_{\alpha\beta z}\mu_B H T_c \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \hat{k}_i \hat{k}_j \left[\frac{1}{i\omega_n - \xi} \frac{1}{(i\omega_n + \xi)^2} + \text{к.с.} \right] = \\ = -\frac{1}{3} i \delta_{ij} e_{\alpha\beta z} \mu_B H T_c \sum_n \int d\xi N(\xi) \left[\frac{1}{i\omega_n - \xi} \frac{1}{(i\omega_n + \xi)^2} + \text{к.с.} \right],$$

где $N(\xi)$ есть плотность электронных состояний. Записывая ее в виде разложения $N(\xi) = N_0 + N'_0 \xi$ вблизи энергии Ферми и выполняя интегрирование по ξ , получаем:

$$\delta S_{ij,\alpha\beta} = -\frac{\pi}{2} \delta_{ij} e_{\alpha\beta z} \mu_B H N_0 T_c \sum_n \frac{\text{sign } \omega_n}{\omega_n^2} - \\ - i \frac{\pi}{2} \delta_{ij} e_{\alpha\beta z} \mu_B H N'_0 T_c \sum_n \frac{\text{sign } \omega_n}{\omega_n}. \quad (18.27)$$

Первое слагаемое в правой части тождественно обращается в нуль, а расходящаяся сумма во втором слагаемом обрезается на граничной частоте ε_1 . Подставляя полученный результат в (18.24), приходим к ответу:

$$\delta F_{SH} = i \frac{\pi}{4} \mu_B N'_0 \ln \frac{\varepsilon_1}{2\pi T_c} e_{\alpha\beta\gamma} A_{\alpha i}^* A_{\beta i} H_\gamma. \quad (18.28)$$

Сравнивая это выражение с (15.20), видим, что значение коэффициента K_4 , а, следовательно, и плотность внутреннего спонтанного спинового магнитного момента малы в меру малости асимметрии в распределении частиц и дырок вблизи поверхности Ферми.

Упражнение. Вычислить коэффициенты в разложении Гинзбурга–Ландау для изотропного сверхпроводника с d -спариванием в модели слабой связи.

§ 19. Верхнее критическое поле в сверхпроводниках с p -спариванием

В области применимости теории Гинзбурга–Ландау верхние критические поля для сверхпроводников с необычным параметром порядка вычислялись в § 12. При понижении температуры корреляционная длина $\xi(T)$, задающая пространственный масштаб изменения параметра порядка, уменьшается и при $T \ll T_c$ становится сравнимой с длиной когерентности ξ_0 . В этих условиях градиентное разложение свободной энергии становится неприменимым, и для вычисления $H_{c2}(T)$ необходимо использовать методы микроскопической теории. В настоящем параграфе мы проведем вычисления для анизотропного сверхпроводника с p -спариванием. В этом случае, также как в случае обычного изотропного сверхпроводника можно получить аналитические выражения для верхнего критического поля при $T = 0$. Для многих других необычных сверхпроводящих состояний, даже с однокомпонентными параметрами порядка, не являющихся собственными функциями уравнения типа (19.5) (см. ниже), например, для тетрагонального сверхпроводника с $\Delta(\mathbf{r}) \sim \Delta(\hat{x}^2 - \hat{y}^2)$, верхнее критическое поле можно найти лишь приближенно.

Для вычисления верхнего критического поля $H_{c2}(T)$ в сверхпроводнике с p -спариванием воспользуемся уравнением (17.9). Переходя в координатное представление, с учетом выражения (18.4) для параметра порядка и разложения (18.1) притягивающего взаимодействия, получаем линейное интегральное уравнение [76]:

$$A_{\alpha i}(\mathbf{r}_1) = \int d^3 r_2 K_{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) A_{\alpha j}(\mathbf{r}_2), \quad (19.1)$$

где ядро имеет вид (ср. с (18.5))

$$K_{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \lim_{\mathbf{r}'_{1,2} \rightarrow \mathbf{r}_{1,2}} \frac{3VT}{4k_F^2} \sum_n \left(\frac{\partial}{\partial r_{1,i}} - \frac{\partial}{\partial r'_{1,i}} \right) \left(\frac{\partial}{\partial r_{2,j}} - \frac{\partial}{\partial r'_{2,j}} \right) \times G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega_n) G(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2; -\omega_n). \quad (19.2)$$

Повторяя дословно рассуждения, использованные в предыдущем параграфе при выводе формулы (18.12), получаем:

$$K_{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = 3VT \hat{R}_i \hat{R}_j \left(\frac{\pi N_0}{k_F R} \right)^2 \times \sum_n \exp \left(-\frac{2|\omega_n|}{v_F} R \right) \exp \left(\frac{2ie}{c} \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{A}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right), \quad (19.3)$$

где $\hat{R} = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)/|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$.

Воспользовавшись тождеством

$$\exp \left(\frac{2ie}{c} \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{A}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right) f(\mathbf{r}_2) = \exp(i(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \mathbf{D}(\mathbf{r}_1)) f(\mathbf{r}_1), \quad (19.4)$$

где $\mathbf{D}(\mathbf{r}) = -i(\partial/\partial \mathbf{r}) + (2e/c)\mathbf{A}(\mathbf{r})$ — оператор ковариантного дифференцирования, переписываем уравнение (19.1) в виде

$$A_{\alpha i}(\mathbf{r}) = 3VT \left(\frac{\pi N_0}{k_F} \right)^2 \int d^3 R \frac{\hat{R}_i \hat{R}_j}{R^2} \sum_n \exp \left(-\frac{2|\omega_n|}{v_F} R \right) \times \exp(i\mathbf{R}\mathbf{D}(\mathbf{r})) A_{\alpha j}(\mathbf{r}). \quad (19.5)$$

Заметим, что (19.5) является дифференциальным уравнением бесконечно высокого порядка [77], причем линсаризованные уравнения Гинзбурга—Ландау получаются, если мы разложим экспоненту в правой части до членов второго порядка по \mathbf{D} .

Пусть внешнее поле H направлено вдоль оси z , тогда ищем решение уравнения (19.5) в виде

$$A_{\alpha i}(\mathbf{r}) = e^{ip_z z} A_{\alpha i}(\rho),$$

где $\rho = (x, y)$.

Естественно предположить, что максимальному значению верхнего критического поля отвечает $p_z = 0$. Переходя в интеграле в (19.5) к сферическим координатам с полярной осью вдоль z , легко убедиться, что уравнения расцепляются, т. е. z -компоненты параметра порядка $A_{\alpha z}$ могут быть рассмотрены независимо от x , y -компонент.

Полярная фаза [76]. Начнем с вычисления $H_{c2}(T)$ для сверхпроводящего состояния вида

$$d_\alpha = A_{\alpha z} \hat{k}_z.$$

Поскольку уравнение (19.5) диагонально по спиновым индексам, то всем компонентам вектора d соответствует одинаковое значение верхнего критического поля. Полагая $d_1 = d_2 = 0$, убеждаемся, что рассматриваемый случай соответствует полярной фазе¹. Итак, пусть $A_{zz}(\rho) = f(\rho)$. Метод решения аналогичен применяемому в соответствующей задаче для изотропного сверхпроводника с s -спариванием [77].

Введем повышающий и понижающий операторы:

$$D_\pm = \frac{D_x \pm i D_y}{\sqrt{2}}, \quad (19.6)$$

удовлетворяющие коммутационному соотношению $[D_-, D_+] = 2\pi H/\Phi_0$, где Φ_0 — квант потока. Тогда уравнение (19.5) принимает вид

$$f(\rho) = 3VT \left(\frac{\pi N_0}{k_F} \right)^2 \sum_n \int_0^\infty dR \exp \left(-\frac{2|\omega_n|}{v_F} R \right) \int_0^\pi \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \times \\ \times \int_0^{2\pi} d\varphi \exp \left(i \frac{R}{\sqrt{2}} \sin \theta (e^{-i\varphi} D_+ + e^{i\varphi} D_-) \right) f(\rho). \quad (19.7)$$

Воспользуемся теперь операторным тождеством:

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-(1/2)[A, B]},$$

верным, если коммутатор операторов A и B есть c -число, и перепишем содержащую D_\pm экспоненту в (19.7) в следующем виде:

$$\exp \left(i \frac{R}{\sqrt{2}} \sin \theta (e^{-i\varphi} D_+ + e^{i\varphi} D_-) \right) = \\ = \exp \left(-\frac{\pi H}{2\Phi_0} R^2 \sin^2 \theta \right) \exp \left(i \frac{R}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{-i\varphi} D_+ \right) \times \\ \times \exp \left(i \frac{R}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{i\varphi} D_- \right). \quad (19.8)$$

Если мы разложим правую часть в ряд по степеням D_\pm и подставим в (19.7), то после интегрирования по углу φ в этом разложении останутся только члены вида $D_+^n D_-^n$, содержащие одинаковое число повышающих и понижающих операторов. Это означает, что решениями уравнения (19.7) являются собственные функции $|N\rangle$ оператора $D_+ D_-$, являющегося оператором Гамильтона для гармонического осциллятора:

$$D_+ D_- |N\rangle = N \frac{2\pi H}{\Phi_0} |N\rangle,$$

$$D_+^n D_-^n |N\rangle = \frac{N!}{(N-n)!} \left(\frac{2\pi H}{\Phi_0} \right)^n |N\rangle.$$

¹ Это справедливо в пренебрежении взаимодействием $\mu_B H$ спинов электронов с магнитным полем. Если учесть такое взаимодействие, то переход происходит в β -фазу (см. § 3) [31].

В калибровке Ландау $\mathbf{A} = (0, Hx, 0)$ эти собственные функции выглядят следующим образом:

$$f_{N,p}(\rho) \propto e^{ipy} \exp \left[-\frac{\pi H}{\Phi_0} \left(x - \frac{p\Phi_0}{2\pi H} \right)^2 \right] \times \\ \times H_N \left[\sqrt{\frac{2\pi H}{\Phi_0}} \left(x - \frac{p\Phi_0}{2\pi H} \right) \right], \quad (19.9)$$

где $H_N(x)$ — полиномы Эрмита. С учетом сказанного получаем:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \exp \left(i \frac{R}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{-i\varphi} D_+ \right) \exp \left(i \frac{R}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{i\varphi} D_- \right) |N\rangle = \\ = 2\pi \sum_{n=0}^N \frac{N!}{(n!)^2 (N-n)!} \left(-\frac{\pi H}{\Phi_0} R^2 \sin^2 \theta \right)^n |N\rangle = \\ = 2\pi L_N \left(\frac{\pi H}{\Phi_0} R^2 \sin^2 \theta \right) |N\rangle, \quad (19.10)$$

где $L_N(x)$ — полиномы Лагерра. Уравнение на собственные значения (19.7) принимает вид

$$1 = 6\pi VT \left(\frac{\pi N_0}{k_F} \right)^2 \sum_n \int_0^\infty dR \exp \left(-\frac{2|\omega_n|}{v_F} R \right) \times \\ \times \int_0^\pi \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \exp \left(-\frac{\pi H}{2\Phi_0} R^2 \sin^2 \theta \right) \times \\ \times L_N \left(\frac{\pi H}{\Phi_0} R^2 \sin^2 \theta \right). \quad (19.11)$$

Можно показать, что максимальное значение верхнего критического поля получается для решения, отвечающего нулевому ($N = 0$) уровню гармонического осциллятора, при этом параметр порядка имеет вид

$$\mathbf{d} \propto f_{0,p}(x, y) \hat{k}_z. \quad (19.12)$$

Для устранения логарифмической расходимости при суммировании по n в (19.11) вычтем из обеих частей выражения в нулевом поле. Тогда, учитывая (18.17), получаем окончательное уравнение, определяющее зависимость $H_{c2}(T)$ для полярной фазы:

$$\ln \frac{T_c}{T} = \sum_n \left[\frac{1}{|2n+1|} - \frac{6\pi T}{N_0} \left(\frac{\pi N_0}{k_F} \right)^2 \int_0^\infty dR \exp \left(-\frac{2|\omega_n|}{v_F} R \right) \times \right. \\ \left. \times \int_0^\pi \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \exp \left(-\frac{\pi H}{2\Phi_0} R^2 \sin^2 \theta \right) \right] \quad (19.13)$$

При выводе (19.13) использовано определение критической температуры T_c в нулевом поле:

$$\pi V N_0 T_c \sum_n \frac{1}{|\omega_n|} = 1,$$

где сумма по частотам обрезана на граничной энергии ε_1 (см. предыдущий параграф).

A-фаза и фаза Шарнберга–Клемма [76]. Рассмотрим теперь x - и y -компоненты параметра порядка. Обозначим $A_{\alpha i}(\rho) = f_i(\rho)$ и введем новые функции

$$f_{\pm}(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_x \pm i f_y),$$

тогда уравнение (19.5) принимает вид

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f_+ \\ f_- \end{pmatrix} &= \frac{3VT}{2} \left(\frac{\pi N_0}{k_F} \right)^2 \sum_n \int_0^\infty dR \exp \left(-\frac{2|\omega_n|}{v_F} R \right) \times \\ &\quad \times \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \begin{pmatrix} 1 & e^{2i\varphi} \\ e^{-2i\varphi} & 1 \end{pmatrix} \times \\ &\quad \times \exp \left(i \frac{R}{\sqrt{2}} \sin \theta (e^{-i\varphi} D_+ + e^{i\varphi} D_-) \right) \begin{pmatrix} f_+ \\ f_- \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (19.14)$$

Если воспользоваться формулой (19.8), разложить зависящие от φ экспоненты в ряд Тейлора, а затем проинтегрировать по φ , то диагональные элементы матричного оператора в правой части содержат слагаемые вида $D_+^n D_-^n$, наддиагональный элемент — слагаемые вида $D_+^{n+2} D_-^n$, а поддиагональный — слагаемые вида $D_+^n D_-^{n+2}$. По этой причине ищем решения уравнения (19.14) в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} f_+ \\ f_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_N |N+2\rangle \\ q_N |N\rangle \end{pmatrix}, \quad N \geq 0, \quad (19.15)$$

где $|N\rangle$ определяется формулой (19.9).

Имеем:

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} d\varphi \begin{pmatrix} 1 & e^{2i\varphi} \\ e^{-2i\varphi} & 1 \end{pmatrix} \exp \left(i \frac{R}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{-i\varphi} D_+ \right) \times \\ &\quad \times \exp \left(i \frac{R}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{i\varphi} D_- \right) \begin{pmatrix} p_N |N+2\rangle \\ q_N |N\rangle \end{pmatrix} = \\ &= 2\pi \left(p_N \sqrt{(N+1)(N+2)} \sum_{n=0}^N \frac{N!}{n!(n+2)!(N-n)!} \left(-\frac{\pi H}{\Phi_0} R^2 \sin^2 \theta \right)^{n+1} |N+2\rangle + \right. \\ &\quad \left. + q_N L_{N+2} \left(\frac{\pi H}{\Phi_0} R^2 \sin^2 \theta \right) |N+2\rangle \right) \\ &= 2\pi \left(p_N L_N \left(\frac{\pi H}{\Phi_0} R^2 \sin^2 \theta \right) |N\rangle + \right. \\ &\quad \left. + q_N \sqrt{(N+1)(N+2)} \sum_{n=0}^N \frac{N!}{n!(n+2)!(N-n)!} \left(-\frac{\pi H}{\Phi_0} R^2 \sin^2 \theta \right)^{n+1} |N\rangle \right). \end{aligned}$$

Мы получили линейную однородную систему уравнений на коэффициенты p_N и q_N , условие разрешимости которой имеет вид

$$(1 - \alpha_N)(1 - \alpha_{N+2}) - \beta_N^2 = 0, \quad (19.16)$$

где

$$\alpha_N(H, T) = 3\pi V T \left(\frac{\pi N_0}{k_F} \right)^2 \sum_n \int_0^\infty dR \exp \left(-\frac{2|\omega_n|}{v_F} R \right) \times$$

$$\times \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \exp \left(-\frac{\pi H}{2\Phi_0} R^2 \sin^2 \theta \right) L_N \left(\frac{\pi H}{\Phi_0} R^2 \sin^2 \theta \right),$$

$$\beta_N(H, T) = 3\pi V T \left(\frac{\pi N_0}{k_F} \right)^2 \sum_n \int_0^\infty dR \exp \left(-\frac{2|\omega_n|}{v_F} R \right) \times$$

$$\times \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \exp \left(-\frac{\pi H}{2\Phi_0} R^2 \sin^2 \theta \right) \sqrt{(N+1)(N+2)} \times$$

$$\times \sum_{m=0}^N \frac{N!}{m!(m+2)!(N-m)!} \left(-\frac{\pi H}{\Phi_0} R^2 \sin^2 \theta \right)^{m+1},$$

при этом $q_N = ((\alpha_N - 1)/\beta_N)p_N$.

Итак, мы получили уравнение, определяющее температурную зависимость верхнего критического поля для решения вида (19.15). Можно показать, что максимальное значение $H_{c2}(T)$ достигается при $N = 0$. Соответствующий параметр порядка:

$$\mathbf{d} \propto \left[f_{2,p}(x, y) (\hat{k}_x - i\hat{k}_y) + \frac{\alpha_0 - 1}{\beta_0} f_{0,p}(x, y) (\hat{k}_x + i\hat{k}_y) \right] \quad (19.17)$$

описывает так называемую фазу Шарнберга–Клемма. В отсутствие спиновых эффектов верхнее критическое поле одинаково для всех компонент вектора \mathbf{d} .

Осталось рассмотреть состояние

$$\begin{pmatrix} f_+ \\ f_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |0\rangle \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (19.18)$$

которое также является решением (19.14), но не принадлежит к семейству (19.15)². Подставляя (19.18) в (19.14), убеждаемся в том, что уравнение на верхнее критическое поле для параметра порядка

$$\mathbf{d} \propto f_{0,p}(x, y) (\hat{k}_x - i\hat{k}_y), \quad (19.19)$$

соответствующего, как легко видеть, A -фазе³, имеет вид

$$1 - \alpha_0 = 0. \quad (19.20)$$

Мы приходим, таким образом, к следующему выводу: в заряженной ферми-жидкости с p -спариванием переход из нормального в сверхпроводящее состояние в магнитном поле может произойти в одну из трех фаз: полярную фазу, A -фазу или фазу Шарнберга–Клемма. Для ответа на вопрос,

²У (19.14) имеется также решение вида $\begin{pmatrix} f_+ \\ f_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, однако можно показать, что оно приводит к заведомо меньшему значению верхнего критического поля.

³В сверхпроводящей A -фазе орбитальный момент пар ориентирован против направления поля H .

какая именно из них имеет максимальное критическое поле, необходимо решить уравнения (19.13), (19.20) и (19.16). Хотя в общем случае эта задача может быть решена лишь путем численного анализа, оказывается возможным получить аналитические выражения для H_{c2} при $T \rightarrow T_c$ (см. §§ 12, 18, а также упражнение в конце параграфа) и при нулевой температуре.

Вычисление $H_{c2}(0)$ [76]. Начнем с исследования полярной фазы. Для сокращения обозначений удобно ввести следующие безразмерные переменные:

$$h = \frac{2H}{H_0}, \quad \rho = \frac{r\sqrt{h}}{\xi_0}, \quad t = \frac{T}{T_{c0}},$$

где $H_0 = \Phi_0/(\pi\xi_0^2)$, а T_{c0} — критическая температура при $H = 0$. Из (19.13) имеем

$$\ln t = \sum_n \left[\frac{3t}{2\sqrt{h}} \int_0^\infty d\rho \int_0^\pi \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \times \right. \\ \left. \times \exp \left(-\frac{t\rho|2n+1|}{\sqrt{h}} - \frac{\rho^2 \sin^2 \theta}{4} \right) - \frac{1}{|2n+1|} \right]. \quad (19.21)$$

Предельный переход $t \rightarrow 0$ в этом уравнении выполняется следующим образом. Перепишем сумму по частотам в виде

$$\sum_n \{ \dots \} = 2 \lim_{y \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} y^{2n+1} \{ \dots \}.$$

Обозначая $x = \cos \theta$ и суммируя по n , получаем:

$$\ln t = \lim_{y \rightarrow 1} \left[\frac{3t}{\sqrt{h}} \int_0^1 x^2 dx \int_0^\infty d\rho \frac{2y \exp \left(-\frac{t\rho}{\sqrt{h}} - \frac{\rho^2(1-x^2)}{4} \right)}{1-y^2 \exp \left(-\frac{2t\rho}{\sqrt{h}} \right)} - \ln \frac{1+y}{1-y} \right].$$

Разложим теперь экспоненты в подынтегральном выражении по степеням t при $t \rightarrow 0$ и запишем правую часть в виде

$$\lim_{y \rightarrow 1} \left[3 \int_0^1 dx x^2 \int_0^\infty d\rho \frac{\exp \left(-\frac{\rho^2(1-x^2)}{4} \right)}{\rho + \frac{\sqrt{h}(1-y)}{t}} - \ln \frac{2}{1-y} \right] = \\ = \lim_{y \rightarrow 1} \left\{ 3 \int_0^1 dx x^2 \left[\ln \frac{t}{\sqrt{h}(1-y)} - \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1-x^2}{4} + C \right) \right] - \ln \frac{2}{1-y} \right\} = \\ = \ln \frac{t}{2\sqrt{h}} - \frac{C}{2} - \frac{3}{2} \int_0^1 dx x^2 \ln \frac{1-x^2}{4} = \ln \frac{t}{2\sqrt{h}} - \frac{C}{2} + \frac{4}{3},$$

где $C = \ln \gamma$ — постоянная Эйлера. Отсюда окончательно получаем, что

$$h = \frac{e^{8/3}}{4\gamma}.$$

Вычисления для A -фазы и фазы Шарнберга–Клемма выполняются аналогично. Возвращаясь к размерным величинам, приведем сводку результатов:

$$H_{c2}(T=0) = \frac{e^2}{4\gamma} \frac{\Phi_0}{2\pi\xi_0^2} \begin{cases} e^{2/3}, & \text{полярная фаза,} \\ e^{-1/3}, & A\text{-фаза,} \\ e^{\sqrt{3}-4/3}, & \text{фаза Шарнберга–Клемма.} \end{cases} \quad (19.22)$$

Для удобства сравнения мы явно выделили перед фигурной скобкой значение верхнего критического поля при $T = 0$ для изотропного сверхпроводника

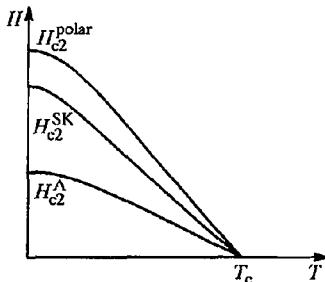


Рис. 17. Качественное поведение $H_{c2}(T)$ в различных фазах с p -спариванием

с s -спариванием. Мы видим, что максимальное значение верхнего критического поля получается для полярной фазы. Графики $H_{c2}(T)$ для фаз с p -спариванием изображены на рис. 17.

Упражнения. 1. Доказать тождество (19.4).

2. С помощью уравнений (19.13), (19.16) и (19.20) вычислить значение H_{c2} для сверхпроводника с p -спариванием вблизи критической температуры.

§ 20. Граничные условия для параметра порядка

Из феноменологического анализа в § 13 следует, что ввиду внутренней анизотропии параметра порядка, граничные условия для уравнений Гинзбурга–Ландау, определяющие поверхностные свойства сверхпроводника, также оказываются существенно анизотропными. Предмет настоящего параграфа составляет микроскопический вывод граничных условий для параметров порядка, соответствующих нетривиальным типам спаривания. При этом мы ограничимся рассмотрением сверхпроводников со слабым спин-орбитальным взаимодействием и сферической ферми-поверхностью.

Зеркально отражающая поверхность [79, 80]. В области применимости теории Гинзбурга–Ландау задача сводится к решению линейного интегрального уравнения (17.9), в которое входят мацубаровские функции Грина нормально-го металла в полупространстве $x > 0$, обращающиеся в нуль на поверхности (то есть при $x = 0$) и имеющие в отсутствии примесей и магнитного поля

следующий вид:

$$G^{(0)}(x_1, x_2; \mathbf{k}_{\parallel}, \omega_n) = \sum_q \frac{F_q(x_1, x_2)}{i\omega_n - \xi(q, \mathbf{k}_{\parallel})}, \quad (20.1)$$

где

$$F_q(x_1, x_2) = \theta(x_1)\theta(x_2)\sin qx_1\sin qx_2,$$

а

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x > 0, \\ 0, & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Мы использовали смешанное координатно-импульсное представление, в котором функции Грина диагональны по компонентам импульса вдоль поверхности.

Рассмотрим ситуацию на примере сверхпроводника с синглетным спариванием, параметр порядка в котором соответствует одномерному нетрициональному представлению точечной группы симметрии кристалла (см. § 4). Обобщение на остальные случаи не составляет труда. Входящий в (17.9) параметр порядка выглядит в смешанном координатно-импульсном представлении следующим образом:

$$\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = (i\sigma_y)_{\alpha\beta}\eta(\mathbf{r})\psi(\hat{\mathbf{k}}).$$

Подставляя в (17.9) разложение (5.7) и возвращаясь в координатное представление по x , получаем линейное интегральное уравнение для параметра порядка:

$$\eta(x_1) = \int_0^\infty dx_2 K(x_1, x_2)\eta(x_2), \quad (20.2)$$

ядро которого имеет вид

$$K(x_1, x_2) = -V T_c \sum_n \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, q_1, q_2} \exp(iq_1 x_1 - iq_2 x_2) \times \\ \times \psi^*(\hat{\mathbf{k}}_1)\psi(\hat{\mathbf{k}}_2)\delta(\mathbf{k}_{1,\parallel} - \mathbf{k}_{2,\parallel})G^{(0)}\left(k_{1,x} + \frac{q_1}{2}, k_{2,x} + \frac{q_2}{2}; \mathbf{k}_{\parallel}, \omega_n\right) \times \\ \times G^{(0)}\left(-k_{1,x} + \frac{q_1}{2}, -k_{2,x} + \frac{q_2}{2}; -\mathbf{k}_{\parallel}, -\omega_n\right), \quad (20.3)$$

где $V > 0$ есть константа связи, а базисные функции ψ зависят от направлений векторов $\mathbf{k}_i = (k_{i,x}, \mathbf{k}_{\parallel})$.

Выполняя в (20.1) преобразование Фурье и подставляя результат в (20.3), получаем, после интегрирования сначала по модулям \mathbf{k}_i , а затем по $q_{1,2}$, следующее выражение для ядра¹:

$$K(x_1, x_2) = \frac{\pi V N_0 T_c}{v_F} \sum_n \int_0^1 \frac{ds}{s} \left[\exp\left(-\frac{2|\omega_n|}{v_F s}|x_1 - x_2|\right) F^{(-)}(s) + \right. \\ \left. + \exp\left(-\frac{2|\omega_n|}{v_F s}(x_1 + x_2)\right) F^{(+)}(s) \right], \quad (20.4)$$

¹ Данное выражение справедливо в квазиклассическом приближении. Это означает, что, поскольку характерный масштаб изменения ядра — длина когерентности ξ_0 — значительно превосходит атомный масштаб k_F^{-1} , то можно пренебречь быстроосцилирующими вкладами в $K(x_1, x_2)$, пропорциональными $e^{\pm 2ik_F x}$.

где $s = \cos \theta$, а

$$F^{(\pm)}(s) = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} f^{(\pm)}(s, \varphi).$$

Функции направлений $f^{(\pm)}(\hat{\mathbf{k}}) = f^{(\pm)}(s, \varphi)$ определяются следующим образом. Для фиксированных значений углов $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq \theta < \pi/2$ вводим два единичных вектора:

$\hat{\mathbf{k}}_{\pm} = (\pm \cos \theta, \sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi) = (\pm s, \sqrt{1-s^2} \cos \varphi, \sqrt{1-s^2} \sin \varphi)$, связанных отражением в плоскости границы. Тогда

$$f^{(\pm)} = \frac{1}{2} \left(\psi^*(\hat{\mathbf{k}}_+) \psi(\hat{\mathbf{k}}_{\mp}) + \psi^*(\hat{\mathbf{k}}_-) \psi(\hat{\mathbf{k}}_{\pm}) \right).$$

Таким образом, вид ядра $K(x_1, x_2)$ определяется трансформационными свойствами базисных функций представления при отражении в плоскости границы.

Для бесконечного однородного сверхпроводника ядро линейного интегрального уравнения, определяющее параметр порядка, имеет вид:

$$K^{(0)}(x_1 - x_2) = \frac{\pi V N_0 T_c}{v_F} \sum_n \int_0^1 \frac{ds}{s} \exp \left(-\frac{2|\omega_n|}{v_F s} |x_1 - x_2| \right) F^{(-)}(s), \quad (20.5)$$

причем из определения критической температуры:

$$\pi V N_0 T_c \sum_n \frac{1}{|\omega_n|} = 1$$

следует, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 K^{(0)}(x_1 - x_2) = 1. \quad (20.6)$$

По сравнению с бесконечным неограниченным сверхпроводником, учет поверхности свелся к появлению в правой части (20.4) второго слагаемого, убывающего на расстояниях порядка ξ_0 от поверхности и отвественного, как указывалось в § 13, за подавление сверхпроводимости в приповерхностном слое.

Границные условия для уравнений Гинзбурга–Ландау получаются из асимптотики решения интегрального уравнения (20.2) при $x \gg \xi_0$. Непосредственной подстановкой в (20.2) с учетом (20.5), убеждаемся, что искомым асимптотическим решением является линейная функция $\eta(x) = \eta_0(1 + x/b)$ с вещественным b . Эффективное граничное условие тогда выглядит следующим образом:

$$\left. \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{1}{b} \eta|_{x=0}. \quad (20.7)$$

Параметр b совпадает с интерполяционной линией, введенной в § 13.

Отметим два существенных симметрийных свойства граничных условий. Если базисная функция не меняется при отражении $x \rightarrow -x$, т. е.

$\psi(\hat{\mathbf{k}}_-) = \psi(\hat{\mathbf{k}}_+)$, то $b = \infty$, т. е. $\partial\eta/\partial x|_{x=0} = 0$. Действительно, в этом случае, распространяя параметр порядка четным образом на «нефизическую» область $x < 0$: $\eta(-x) = \eta(x)$, получим, что ядро (20.4) принимает вид однородного объемного ядра $K^{(0)}$, а уравнение (20.2) в полупространстве становится уравнением во всем пространстве:

$$\eta(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 K^{(0)}(x_1 - x_2) \eta(x_2), \quad (20.8)$$

определенным температурой сверхпроводящего перехода для бесконечного однородного кристалла. Четное решение этого уравнения в силу (20.5) есть просто константа. Границное условие, таким образом, имеет вид (13.18):

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0. \quad (20.9)$$

Покажем, что в другом предельном случае, когда базисная функция меняет знак при отражении, имеем $b = 0$. Параметр порядка теперь также можно продолжить в область $x < 0$, но уже нечетным образом: $\eta(-x) = -\eta(x)$. Тогда уравнение (20.2) вновь переходит в объемное уравнение, нечетное решение которого есть линейная функция x , что дает граничное условие вида (13.16):

$$\eta|_{x=0} = 0. \quad (20.10)$$

В общем случае, если базисные функции не имеют определенной четности при отражении в плоскости границы, то интегральное уравнение, определяющее параметр порядка, не сводится к простому виду и граничные условия не совпадают с (20.9) или (20.10). В этой ситуации можно пользоваться следующим приближенным выражением для интерполяционной длины b :

$$\begin{aligned} \frac{b}{\xi_0} = \frac{1}{7\zeta(3)} \frac{1}{\int_0^1 ds s^2 F^{(-)}(s)} & \left\{ \frac{\pi^4}{24} \int_0^1 ds s^3 (F^{(-)}(s) + F^{(+)}(s)) + \right. \\ & + \left. \frac{\left[7\zeta(3) \int_0^1 ds s^2 (F^{(-)}(s) + F^{(+)}(s)) \right]^2}{2\pi^2 \int_0^1 ds s (F^{(-)}(s) - F^{(+)}(s))} \right\} \quad (20.11) \end{aligned}$$

Чтобы не прерывать связности изложения, вывод этой формулы вынесен в конец параграфа.

Для единичного представления A_{1g} , соответствующего обычному волновому параметру порядка, базисная функция $\psi(\hat{\mathbf{k}}) \sim \text{const}$ не изменяет знака при отражении в плоскости границы, и мы имеем $b = \infty$, что означает существование изотропной в базисной плоскости поверхностной сверхпроводимости.

Совсем по-другому обстоит дело в случае неединичных представлений. Рассмотрим ситуацию на примере параметра порядка, соответствующего представлению B_{1g} группы D_{6h} . В главных осях (X, Y, Z) (см. рис. 18) базисная функция имеет следующий вид:

$$\psi(\hat{k}) \propto \hat{k}_Z (\hat{k}_X^3 - 3\hat{k}_X \hat{k}_Y^2). \quad (20.12)$$

Если поверхность кристалла совпадает с плоскостью XZ , т. е. $\varphi = \pi/2$, то отражению в плоскости границы соответствует замена $Y \rightarrow -Y$. При таком преобразовании базисная функция не меняет знак, и мы получаем $b = \infty$. Следовательно, поверхностное критическое поле максимально и определяется формулой (13.22). Этот же результат мы получим, если угол φ принимает значения $\pi/6, 5\pi/6$ и т. д., поскольку во всех этих случаях $\psi(\hat{k})$ не меняется при отражении в плоскости границы.

Если же поверхность сверхпроводника совпадает с кристаллографической плоскостью YZ , т. е. $\varphi = 0$, то при замене $X \rightarrow -X$ базисная функция (20.15) меняет знак. Поэтому $b = 0$ и $f(0) = 0$. В этом случае (а также при $\varphi = \pi/3, 2\pi/3$ и т. д.) поверхностное критическое поле минимально и совпадает с верхним критическим полем в объеме (см. (13.17)).

Окончательный вывод:

$$\frac{H_{c3}(T)}{H_{c2}(T)} = \begin{cases} \approx 1,69, & \text{при } \varphi = \frac{(2n+1)\pi}{6}, \\ 1, & \text{при } \varphi = \frac{n\pi}{3}, \end{cases} \quad (20.13)$$

где $n = 0, 1, \dots, 5$. Таким образом, граничные условия и поверхностное критическое поле демонстрируют существенную анизотропию (в данном случае — шестого порядка)². Следует отметить, что результат (20.13) вытекает из общих свойств четности или нечетности базисной функции представления B_1 при отражении в плоскости границы и поэтому не зависит от выбора $\psi(\hat{k})$.

При промежуточных значениях угла φ необходимо пользоваться граничными условиями общего вида (20.7), причем для вычисления $b(\varphi)$ — периодической функции с периодом $\pi/3$, изменяющейся в пределах 0 до ∞ , важен, разумеется, конкретный выбор базисной функции. Зависимость $H_{c3}(\varphi)$ должна при этом иметь достаточно резкие пики. Дело в том, что вблизи T_c существует характерный масштаб изменения параметра порядка — корреляционная длина $\xi \gg \xi_0$. Если $b(\varphi) < \xi$, что имеет место почти всюду, кроме узких окрестностей ширины $d\varphi$ вблизи угла $\varphi = \pi/2$ и т. д., то эффективное граничное условие имеет вид (20.10) и $H_{c3} = H_{c2}$ в целом интервале углов. С другой стороны, при $|\varphi - (2n+1)\pi/6| < d\varphi$ имеем $b(\varphi) > \xi$, т. е. эффективно $b = \infty$ и $H_{c3} \approx 1,69 H_{c2}$. Ширина пика определяется конкретным

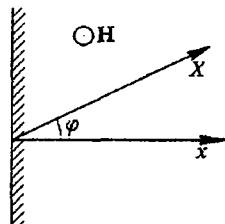


Рис. 18. Ориентация поверхности сверхпроводника (внутренняя нормаль — вдоль \hat{x}) относительно осей кристаллической решетки. Поле H параллельно оси шестого порядка, внутренняя нормаль направлена вдоль оси x

² Во избежание недоразумений подчеркнем, что под анизотропией поверхностной сверхпроводимости здесь имеется в виду анизотропия наклона линии $H_{c3}(T)$ при фиксированном направлении внешнего поля — вдоль главной оси — и различных направлениях нормали к поверхности в базисной плоскости.

видом функции $b(\varphi)$. Для базисной функции (20.12) вычисление с помощью (20.11) дает:

$$\frac{b(\varphi)}{\xi_0} \sim \frac{1}{\cos^2 3\varphi}, \quad \text{при } \varphi \rightarrow \frac{(2n+1)\pi}{6},$$

откуда $\delta\varphi \sim \sqrt{\xi_0/\xi}$.

В указанной узкой переходной области углов, где b изменяется от 0 до ∞ , следует ожидать, что сверхпроводящее состояние вблизи поверхности будет возникать в некотором поле между $H_{c2}(T)$ и $1,69H_{c2}(T)$, наклон которого становится функцией H . Следует заметить, что анизотропия интерполяционной длины, а следовательно и поверхностной энергии, вычисленная с помощью формулы (20.11), не описывается, вообще говоря, простейшими допустимыми по симметрии функциями $f(\mathbf{n})$ (см. (13.12)–(13.14)). Однако, положение нулей этих функций (то есть пиков интерполяционной длины) обусловлено симметричными требованиями.

Диффузно-отражающая поверхность. Для получения граничных условий на диффузно-отражающей поверхности удобно использовать метод квазиклассических траекторий (см. [81, 82]). Исходным пунктом, как и при рассмотрении случая зеркальной границы, является интегральное уравнение вида (17.9) для компонент параметра порядка.

Принимая во внимание слабую зависимость плотности состояний вблизи ферми-поверхности от энергии и сохраняя только медленно меняющиеся на атомных масштабах вклады, получаем следующее выражение для ядра $K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$:

$$K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \pi V N_0 T \sum_n \int_0^\infty dt \exp(-2|\omega|t) \langle \psi^*(\hat{\mathbf{n}}_1) \psi_j(\hat{\mathbf{n}}_2) \rangle_{\varepsilon_F, \text{classical}}, \quad (20.14)$$

где $\psi(\hat{\mathbf{n}})$ — базисные функции выбранного представления. Угловые скобки означают усреднение по всем траекториям классической частицы, движущейся с фермиевской скоростью v_F , которые соединяют точки \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 и удовлетворяют условию $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_1$. При этом мы должны рассматривать как траектории, стартующие в момент времени $t = 0$ из \mathbf{r}_1 и через время t заканчивающиеся в \mathbf{r}_2 , так и обращенные во времени, то есть те, которые стартуют при $-t$ из \mathbf{r}_2 и заканчиваются в \mathbf{r}_1 при $t = 0$ (ниже мы выписываем явные выражения только для траекторий первого типа, поскольку обращенные во времени дают лишь эрмитово-сопряженный вклад в ядро). Единичные векторы $\hat{\mathbf{n}}_1 = \mathbf{n}(\mathbf{r}_1)$ и $\hat{\mathbf{n}}_2 = \mathbf{n}(\mathbf{r}_2)$ обозначают направления и скорости частицы в соответствующих точках.

Для того, чтобы вывести формулу (20.14), начнем с микроскопического определения ядра K :

$$K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = VT \lim_{\mathbf{r}'_{1,2} \rightarrow \mathbf{r}_{1,2}} \sum_n \psi^* \left(\frac{\nabla_{\mathbf{r}_1} - \nabla_{\mathbf{r}'_1}}{2ik_F} \right) \psi \left(\frac{\nabla_{\mathbf{r}'_2} - \nabla_{\mathbf{r}_2}}{2ik_F} \right) \times \\ \times G^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega_n) G^{(0)}(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2; -\omega_n) \quad (20.15)$$

(ср. с выражением (19.2) для случая p -спаривания). Здесь $G^{(0)}$ есть функции Грина нормального состояния, для которых мы используем следующее

представление:

$$G^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega_n) = \sum_i \frac{\Psi_i^*(\mathbf{r}_1)\Psi_i(\mathbf{r}_2)}{i\omega_n - \epsilon_i}, \quad (20.16)$$

где Ψ_i — собственные функции одночастичного гамильтониана H_0 (см. § 17), а ϵ_i — соответствующие собственные значения. Здесь и ниже мы опускаем спиновые индексы.

Подставляя (20.16) в (20.15), получаем:

$$K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{VT}{k_F^2} \sum_n \sum_{ij} \frac{\langle i | \psi_j^* \mathbf{J}(\mathbf{r}_1) | j \rangle \langle j | \psi_i \mathbf{J}(\mathbf{r}_2) | i \rangle}{(i\omega_n - \epsilon_i)(-i\omega_n - \epsilon_j)}, \quad (20.17)$$

где $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ есть оператор тока:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2i} \lim_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} \right).$$

Следующий шаг состоит в использовании того факта, что только медленно меняющиеся части волновых функций дают вклады в сверхпроводящее ядро, и поэтому можно применять квазиклассическое приближение. Можно показать [81, 82], что в данном приближении произведение двух матричных элементов в числителе (20.17) может быть переписано в виде

$$\langle i | \hat{A} | j \rangle \langle j | \hat{B} | i \rangle = \frac{1}{2\pi N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp(-i(\epsilon_i - \epsilon_j)t) \times \\ \times \left\langle \hat{A}(\mathbf{r}_1) \hat{B}(\mathbf{r}(t)) \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}(t)) \right\rangle_{\epsilon_F, \text{classical}}, \quad (20.18)$$

где усреднение проводится по всем классическим траекториям $\mathbf{r}(t)$, таким, что $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_1$. Разделим теперь область интегрирования в (20.18) на две части: $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$, и произведем в первой из них замену $t \rightarrow -t$. Таким образом, мы получаем интеграл по положительным t от суммы двух вкладов — от «прямых» и «обращенных» во времени траекторий, соединяющих точки \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 (t при этом имеет смысл времени пролета частицы по траектории). После суммирования по i и j приходим к формуле (20.14).

Рассмотрим оба типа рассеяния квазичастиц на поверхности: зеркальное и диффузное. Кроме того, мы ограничимся случаем чистых сверхпроводников, следовательно, квазиклассические траектории в объеме образца являются прямыми линиями, а все вклады в ядро могут быть разделены на два класса: «прямые» и «отраженные» (см. рис. 19).

Первый вклад определяется тривиальной траекторией: $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_1 + \mathbf{v}_F t$. Ее подстановка в (20.17) дает следующее выражение:

$$K^{(0)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{\pi V N_0 T}{v_F} \sum_n \int_0^1 \frac{ds}{s} \exp\left(-\frac{2|\omega_n|}{v_F s} |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|\right) F^{(0)}(s), \quad (20.19)$$

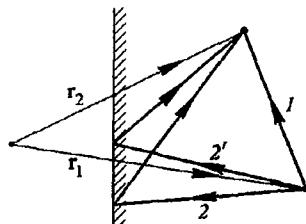


Рис. 19. Прямая (1) и отраженные (2 и 2') траектории из точки \mathbf{r}_1 в точку \mathbf{r}_2 в случае диффузного отражения на границе

где

$$F^{(0)}(s) = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{4\pi} \left(\psi^*(s, \varphi)\psi(s, \varphi) + \psi^*(-s, \varphi)\psi(-s, \varphi) \right). \quad (20.20)$$

Как и выше, мы ввели обозначение: $s = \cos \theta$, где θ, φ есть полярный и азимутальный углы, соответственно (полярная ось направлена вдоль оси \hat{x} — нормали к поверхности). Подразумевается также, что все суммы по частотам обрезаны на граничной частоте ε_l .

Что касается второго вклада в ядро, который дают все возможные отраженные траектории, то его вид существенно зависит от характера отражения квазичастиц на поверхности. В случае зеркального отражения мы имеем дело лишь с одной траекторией:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} \mathbf{r}_1 + \mathbf{v}_F t, & t < t_0 = -\frac{x_1}{v_{F,x}}, \\ \bar{\mathbf{v}}_F(t - t_0), & t > t_0, \end{cases}$$

где t_0 соответствует моменту соударения с поверхностью, а $\bar{\mathbf{v}}_F = (-v_{F,x}, v_{F,y}, v_{F,z})$. Подставляя это выражение для $\mathbf{r}(t)$ в (20.17) и выполняя интегрирования, окончательно приходим к следующему результату:

$$K^{(\text{spec})}(x_1, x_2) = \frac{\pi V N_0 T}{v_F} \sum_n \int_0^1 \frac{ds}{s} \exp\left(-\frac{2|\omega_n|}{v_F s} (x_1 + x_2)\right) F^{(\text{spec})}(s), \quad (20.21)$$

где

$$F^{(\text{spec})}(s) = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{4\pi} \left(\psi^*(-s, \varphi)\psi(s, \varphi) + \psi^*(s, \varphi)\psi(-s, \varphi) \right). \quad (20.22)$$

Сумма выражений (20.19) и (20.21) совпадает, как и следовало ожидать, с формулой (20.4), полученной путем непосредственного интегрирования функций Грина.

В случае диффузного отражения, принимая во внимание вклады от всех возможных траекторий вида:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} \mathbf{r}_1 + \mathbf{v}_F^{(1)} t, & t < t_0 = -\frac{x_1}{v_{F,x}^{(1)}}, \\ \mathbf{v}_F^{(2)}(t - t_0), & t > t_0, \end{cases}$$

где $\mathbf{v}_F^{(1)}$ и $\mathbf{v}_F^{(2)}$ — скорости частицы на двух прямых отрезках данной траектории, и интегрируя по всем отраженным траекториям с весовым множителем $(1/\pi) \cos \theta$, получаем:

$$K^{(\text{diff})}(x_1, x_2) = \frac{\pi V N_0 T_c}{v_F} \times \\ \times \sum_n \int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \exp\left(-\frac{2|\omega_n|}{v_F} \left(\frac{x_1}{s_1} + \frac{x_2}{s_2}\right)\right) F^{(\text{diff})}(s_1, s_2), \quad (20.23)$$

где

$$F^{(\text{diff})}(s_1, s_2) = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_2}{2\pi} \left(\psi^*(-s_1, \varphi_1) \psi(s_2, \varphi_2) + \right. \\ \left. + \psi^*(s_1, \varphi_1) \psi(-s_2, \varphi_2) \right).$$

Окончательно получаем:

$$K(x_1, x_2) = K^{(0)}(x_1, x_2) + K^{(\text{diff})}(x_1, x_2). \quad (20.24)$$

В общем случае анизотропного спаривания и произвольной ориентации поверхности уравнение (20.2) с ядром (20.24) не может быть решено точно³, однако для вычисления b можно использовать вариационный метод. В результате интерполяционная длина b всегда оказывается порядка длины когерентности ξ_0 , то есть эффективное граничное условие в области Гинзбурга–Ландау имеет вид (20.10), и поверхностная сверхпроводимость отсутствует для всех направлений нормали. В случае изотропного s -спаривания можно показать [83], что граничное условие имеет вид (20.9) вне зависимости от характера отражения электронов.

Таким образом, поверхностная сверхпроводимость на диффузно отражающей границе оказывается весьма чувствительной к внутренней симметрии параметра порядка, поскольку случайный характер отражения электронов приводит к его изотропизации, а это может быть достигнуто лишь путем подавления сверхпроводимости вблизи поверхности.

Выход формулы (20.11). Для вычисления коэффициента b в линейной асимптотике параметра порядка воспользуемся вариационным методом.

Перейдем в (20.4) к безразмерной переменной $X = x/\xi_0$. Тогда

$$K(X_1, X_2) = \frac{1}{2} V N_C \sum_n \int_0^1 \frac{ds}{s} \left[F_i^{(-)}(s) \exp \left(-\frac{|2n+1|}{s} |X_1 - X_2| \right) + \right. \\ \left. + F_i^{(+)}(s) \exp \left(-\frac{|2n+1|}{s} (X_1 + X_2) \right) \right]. \quad (20.25)$$

При $X \gg 1$, ищем решение в виде (индекс i опускаем): $\eta(X) = C(X + q(X))$, причем $b/\xi_0 = \lim_{X \rightarrow \infty} q(X)$. Уравнение для $q(X)$ имеет вид

$$q(X_1) = \frac{1}{2} E(X_1) + \int_0^\infty dX_2 K(X_1, X_2) q(X_2), \quad (20.26)$$

$$E(X_1) = V N_0 \sum_n \frac{1}{(2n+1)^2} \int_0^1 ds s \left[F^{(-)}(s) + F^{(+)}(s) \right] \exp \left(-\frac{|2n+1|}{s} X_1 \right).$$

³ Если параметр порядка преобразуется согласно неединичному представлению точечной группы симметрии кристалла, то для некоторых выделенных направлений нормали вклад $K^{(\text{diff})}(x_1, x_2)$ тождественно обращается в нуль в результате интегрирования по углам. Аналогичная ситуация имеет место для фаз p -спаривания при любой ориентации поверхности [72]. Интегральное уравнение (20.2) в этом случае может быть решено методом Винера–Хопфа.

Для формулировки вариационного принципа заметим, что интегральное уравнение на параметр порядка получается вариацией функционала: $\delta\Phi/\delta q = 0$, где

$$\Phi[q] = \frac{\int_0^\infty dX q(X) \left[q(X) - \int_0^\infty dX' K(X, X') q(X') \right]}{\left[\int_0^\infty dX q(X) E(X) \right]^2}. \quad (20.27)$$

При этом экстремальное (минимальное) значение функционала есть

$$\Phi_{\min} = \frac{1}{2 \int_0^\infty dX E(X) q(X)}.$$

Покажем теперь, что нужное нам предельное значение решения уравнения (20.25) при $X \rightarrow \infty$ выражается как раз через Φ_{\min} . Пусть $q(X) = b/\xi_0 + Q(X)$, где $Q(X) \rightarrow 0$ при $X \rightarrow \infty$. Подставляя $q(X)$ в (20.25), получаем уравнение на $Q(X)$, затем умножаем обе его части на X_1 и, интегрируя по X_1 от 0 до ∞ , окончательно имеем:

$$\frac{b}{\xi_0} = \frac{1}{7\zeta(3)} \frac{1}{\int_0^1 ds s^2 F^{(-)}(s)} \left\{ \frac{\pi^4}{24} \int_0^1 ds s^3 [F^{(-)}(s) + F^{(+)}(s)] + \frac{1}{VN_0 \Phi_{\min}} \right\}.$$

Величину Φ_{\min} можно вычислять, используя вариационный принцип. Выбирая в качестве пробной функции нулевого приближения произвольную константу и подставляя ее в (20.26), приходим к формуле (20.11).

§ 21. Влияние примесей на необычную сверхпроводимость

Хорошо известно, что немагнитные примеси не влияют на термодинамические свойства обычных сверхпроводников. В частности, критическая температура не зависит от концентрации немагнитных примесей. Эффект подавления сверхпроводимости возникает только за счет рассеяния на магнитных примесях, разрушающих когерентность спиновых состояний электронов в куперовских парах с $S = 0$. В необычных сверхпроводниках к такому же эффекту приводят и рассеяние на обычных примесях, разрушающее когерентность орбитальных состояний спаренных электронов.

Здесь мы рассмотрим два эффекта, связанных с примесями в необычных сверхпроводниках: во-первых, уменьшение критической температуры немагнитными примесями, во-вторых, изменение плотности состояний квазичастиц и, соответственно, термодинамических и кинетических свойств при $T \rightarrow 0$.

Уравнения Горькова и температура перехода. Функции Грина сверхпроводника при произвольной температуре $T \leq T_c$ при наличии примесей определяются путем решения уравнений Горькова (17.6)–(17.8). При этом в одночастичный гамильтониан следует добавить слагаемое вида

$$H_{\text{imp}} = \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} u_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') a_{\mathbf{k}\alpha}^+ a_{\mathbf{k}'\beta}, \quad (21.1)$$

где $u_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ есть амплитуда рассеяния электрона в поле примесей, в общем случае зависящая от спина.

Поскольку мы интересуемся лишь характеристиками, усредненными по реализациям случайного потенциала (по положениям примесей), то для нахождения функций Грина следует воспользоваться уравнениями (17.11), включив в них примесные собственно-энергетические части (см. рис. 20), причем усреднение производится в точности так же, как и в теории обычных сверхпроводящих сплавов [71]. Мы не принимаем во внимание интерференцию волн, рассеянных на разных примесях, предполагая выполнение условия слабого беспорядка $k_F l \gg 1$, где $l = v_F \tau$ — длина свободного пробега. Кроме того, мы пренебрегаем возможностью многократного рассеяния на одной и той же примеси, что справедливо в случае малости потенциала примесей по сравнению с характерной энергией электронов ε_F (борновское приближение)¹.

В указанных условиях диаграммы для усредненных собственно-энергетических частей содержат по два примесных креста, соединенных пунктирной линией (рис. 21). Если рассеяние на примесях изотропно и не зависит от спина, то пунктирной линии соответствует выражение

$$n_{\text{imp}} u^2 = \frac{1}{2\pi N_0 \tau},$$

где n_{imp} — концентрация примесей, u — входящая в (21.1) амплитуда рассеяния, а τ есть время свободного пробега квазичастицы.

В анизотропном сверхпроводнике амплитуда рассеяния на примеси зависит от углов, и пунктиру отвечает выражение $\hat{\tau}^{-1}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$, обладающее точечной симметрией кристалла (см. § 4). Мы можем представить его в виде разложения по неприводимым представлениям группы G :

$$\tau_{\alpha\beta,\gamma\delta}^{-1}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \sum_{\Gamma} \left(\frac{1}{\tau_{\Gamma,1}} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + \frac{1}{\tau_{\Gamma,2}} \sigma_{\alpha\beta} \sigma_{\gamma\delta} \right) \sum_{i=1}^{d_{\Gamma}} \psi_i^{\Gamma}(\hat{\mathbf{k}}) \psi_i^{\Gamma*}(\hat{\mathbf{k}}') \quad (21.2)$$

для случая слабого спин-орбитального взаимодействия, или

$$\tau_{\alpha\beta,\gamma\delta}^{-1}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \sum_{\Gamma} \frac{1}{\tau_{\Gamma}} \sum_{i=1}^{d_{\Gamma}} \left(\psi_i^{\Gamma}(\hat{\mathbf{k}}) \sigma \right)_{\alpha\beta} \left(\psi_i^{\Gamma*}(\hat{\mathbf{k}}') \sigma \right)_{\gamma\delta}$$

¹ Некоторые следствия выхода за пределы борновского приближения будут рассмотрены ниже.

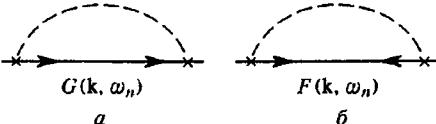


Рис. 20. Примесные собственно-энергетические функции. Борновское приближение

для случая сильного спин-орбитального взаимодействия. Индекс Γ обозначает неприводимые представления размерности d_Γ группы G , а i нумерует базисные функции $\psi_i^\Gamma(\mathbf{k})$. Коэффициенты разложения τ^{-1} пропорциональны концентрации примесей, причем слагаемые с τ_2 в выражении (21.2) соответствуют рассеянию с переворотом спина.

Для простоты ограничимся рассмотрением изотропного рассеяния на немагнитных примесях. Тогда усредненная нормальная собственно-энергетическая часть (см. рис. 20a) имеет вид:

$$\Sigma_{1,\alpha\beta}(\omega_n) = \Sigma(\omega_n)\delta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\pi N_0 \tau} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} G(\mathbf{k}, \omega_n) \delta_{\alpha\beta}. \quad (21.3)$$

Аномальная собственно-энергетическая часть, соответствующая диаграмме на рис. 20б:

$$\Sigma_{2,\alpha\beta}(\omega_n) = \frac{1}{2\pi N_0 \tau} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} F_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega_n) \quad (21.4)$$

обращается в нуль в результате интегрирования по направлениям \mathbf{k} в случае изотропного примесного рассеяния для любого сверхпроводящего состояния с параметром порядка, преобразующимся согласно неединичному представлению.

Уравнения Горькова теперь записываются как

$$\begin{aligned} (i\omega_n - \xi_k - \Sigma(\omega_n))G(\mathbf{k}, \omega_n)\delta_{\alpha\beta} + \Delta_{\alpha\gamma}(\mathbf{k})F_{\gamma\beta}^+(\mathbf{k}, \omega_n) &= \delta_{\alpha\beta}, \\ (i\omega_n + \xi_k - \Sigma(\omega_n))F_{\alpha\beta}^+(\mathbf{k}, \omega_n) + \Delta_{\alpha\beta}^+(\mathbf{k})G(\mathbf{k}, \omega_n) &= 0, \\ (i\omega_n - \xi_k - \Sigma(\omega_n))F_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega_n) - \Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{k})G(-\mathbf{k}, -\omega_n) &= 0. \end{aligned} \quad (21.5)$$

Отсюда мы получаем следующие выражения для функций Грина сверхпроводника:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{k}, \omega_n) &= -\frac{i\tilde{\omega}_n + \xi_k}{\tilde{\omega}_n^2 + \xi_k^2 + \Delta_k^2} \\ F_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega_n) &= \frac{\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{k})}{\tilde{\omega}_n^2 + \xi_k^2 + \Delta_k^2}, \end{aligned} \quad (21.6)$$

где

$$i\tilde{\omega}_n = i\omega_n - \Sigma(\omega_n). \quad (21.7)$$

Собственно-энергетическая часть должна быть вычислена самосогласованным образом. Подставляя выражение для функции G из (21.6) в (21.3) и выполняя интегрирование по энергии в предположении электрон-дырочной симметрии, приходим к следующему уравнению:

$$\Sigma(\omega_n) = -\frac{i\tilde{\omega}_n}{2\tau} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{\tilde{\omega}_n^2 + \Delta_k^2}}. \quad (21.8)$$

При $T < T_c$ решение уравнений (21.7), (21.8) определяется конкретным видом параметра порядка.

Вблизи критической температуры параметр порядка мал, и можно пренебречь зависимостью правой части уравнения (21.8) от Δ_k . Учитывая (21.7), получаем:

$$\tilde{\omega}_n = \omega_n + \frac{1}{2\tau} \operatorname{sign} \tilde{\omega}_n.$$

Отсюда

$$\tilde{\omega}_n = \omega_n + \frac{1}{2\tau} \operatorname{sign} \omega_n,$$

и, следовательно, собственно-энергетическая часть при $\Delta_{\mathbf{k}} \rightarrow 0$ имеет вид:

$$\Sigma(\omega_n) = -\frac{i}{2\tau} \operatorname{sign} \omega_n, \quad (21.9)$$

то есть совпадает, как и должно быть, с соответствующим выражением для нормального металла.

Усредненная аномальная функция Грина выглядит тогда следующим образом:

$$F_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega_n) = \frac{\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{k})}{[\omega_n + (1/2\tau) \operatorname{sign} \omega_n]^2 + \xi_k^2}. \quad (21.10)$$

Подставляя (21.10) в условие самосогласования (17.5) и выполняя интегрирование по ξ , находим:

$$\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = \pi N_0 V T \sum_n \frac{\operatorname{sign} \omega_n}{\omega_n + (1/2\tau) \operatorname{sign} \omega_n} \int \frac{d\Omega'}{4\pi} V_{\beta\alpha,\gamma\delta}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \Delta_{\gamma\delta}(\mathbf{k}').$$

После подстановки сюда разложений потенциала парного притяжения V из § 5, получаем:

$$\begin{aligned} 1 &= \pi N_0 V T \sum_n \frac{\operatorname{sign} \omega_n}{\omega_n + (1/2\tau) \operatorname{sign} \omega_n} = \\ &= 2\pi N_0 V T \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\omega_n} + 2\pi N_0 V T \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{\omega_n + 1/2\tau} - \frac{1}{\omega_n} \right). \end{aligned} \quad (21.11)$$

Логарифмически расходящаяся сумма в первом слагаемом обрезается на граничной частоте ε_l . Вспоминая определение критической температуры T_{c0} в чистом сверхпроводнике (см. (18.17)), и переписывая второе (сходящееся) слагаемое в (21.11) с учетом определения дигамма-функции $\psi(x)$, мы приходим к окончательному результату [84]:

$$\ln \frac{T_{c0}}{T_c} = \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi\tau T_c}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right). \quad (21.12)$$

Полученное уравнение определяет понижение критической температуры для произвольного сверхпроводящего состояния с нетривиальным спариванием за счет изотропного рассеяния на немагнитных примесях относительно температуры перехода T_{c0} чистого сверхпроводника, характерной для представления Γ , согласно которому преобразуется параметр порядка. Обратим внимание на то, что (21.12) (с точностью до обозначений) совпадает с уравнением, описывающим подавление критической температуры парамагнитными примесями в обычном сверхпроводнике [85].

В случае малой концентрации примесей получаем:

$$T_c = T_{c0} - \frac{\pi}{8\tau} \quad (21.13)$$

(мы воспользовались тем, что $\psi'(1/2) = \pi^2/2$).

Таким образом, немагнитные примеси в сверхпроводнике с нетривиальным спариванием подавляют сверхпроводимость. Качественно данный эффект можно объяснить следующим образом. Внесение примесей приводит

к изотропизации щели в спектре возбуждений. Однако, если куперовское спаривание происходит в состоянии с нарушенной пространственной симметрией, то единственной возможностью сделать щель изотропной является тождественное обращение ее в нуль на всей поверхности Ферми, что и происходит при некоторой концентрации примесей $\tau\Delta_0 \sim 1$, где Δ_0 — модуль щели при $T = 0$ в отсутствие примесей.

Плотность состояний. Представляет интерес проследить, каким образом происходит подавление параметра порядка и что происходит с нулями щели при увеличении концентрации примесей. Для ответа на эти вопросы найдем плотность состояний квазичастич $N(E)$ (см. § 17) при $E \rightarrow 0$. При этом мы не будем принимать во внимание уравнение самосогласования для параметра порядка в присутствие примесей, так как это не влияет на поведение $N(E)$ при $E \rightarrow 0$, а лишь меняет величину модуля параметра порядка.

Выполним в (21.7) аналитическое продолжение и введем обозначение

$$t(E) = (i\omega_n)|_{i\omega_n \rightarrow E+i0} = E - \Sigma^R(E). \quad (21.14)$$

Тогда выражение (17.27) для плотности состояний может быть, с учетом (21.3), записано следующим образом:

$$N(E) = -2N_0\tau \operatorname{Im} \Sigma(\omega_n)|_{i\omega_n \rightarrow E+i0} = 2N_0\tau \operatorname{Im} t(E). \quad (21.15)$$

Таким образом, задача свелась к нахождению зависимости $\operatorname{Im} t(E)$. Для ее вычисления необходимо произвести в (21.8) аналитическое продолжение на ось вещественных частот. В результате получается зависящее от структуры сверхпроводящего параметра порядка $\Delta(\mathbf{k})$ уравнение самосогласования для функции $t(E)$:

$$t = E + \frac{i}{2\tau} g(t), \quad (21.16)$$

где

$$g(t) = \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{t}{\sqrt{t^2 - \Delta_k^2}} \quad (21.17)$$

(знак корня при аналитическом продолжении выбирается таким образом, чтобы $\operatorname{Im} \Sigma^R < 0$).

В качестве примеров, иллюстрирующих поведение плотности состояний в необычных сверхпроводниках с примесями, найдем решения уравнения (21.16) для различных фаз с p -спариванием.

B-фаза. Аналогично случаю обычной сверхпроводимости, для *B*-фазы мы имеем $\Delta_k^2 = \Delta^2 = \text{const}$, и (21.16) принимает вид

$$t = E + \frac{i}{2\tau} \frac{t}{\sqrt{t^2 - \Delta^2}}.$$

Мнимая часть у решения $t(E)$ данного уравнения (а, следовательно, и ненулевая плотность состояний) появляется лишь при $E > E_c$, где величина порога соответствует максимальному значению функции $E(t) = t - i/2\tau\sqrt{\Delta^2 - t^2}$ (см. [85]):

$$E_c = \Delta \left[1 - \left(\frac{1}{2\tau\Delta} \right)^{2/3} \right]^{3/2}. \quad (21.18)$$

Мы видим, что при достаточно высокой концентрации немагнитных примесей такой, что $\tau < 1/2\Delta$, щель в спектре обращается в нуль. При этом, однако, критическая температура, определяемая уравнением (21.12), все еще больше нуля, что соответствует бесщелевой сверхпроводимости, совершенно аналогично тому, что имеет место в обычных сверхпроводниках с параметрическими примесями (см. упражнение в конце параграфа).

A-фаза. Параметр порядка имеет вид $\Delta_{\mathbf{k}}^2 = \Delta^2 \sin^2 \theta$ (мы выбрали такую же нормировку модуля Δ , как и в § 7). Выполняя интегрирование по углам в (21.17), получаем:

$$t = E + \frac{i}{4\tau\Delta} t \ln \frac{t+\Delta}{t-\Delta}.$$

Это уравнение может быть решено при $E \rightarrow 0$:

$$t = \frac{E}{1 - \pi/(4\tau\Delta)} + \frac{iE^2}{2\tau\Delta^2 [1 - \pi/(4\tau\Delta)]^3},$$

откуда следует, что

$$N(E) = N_0 \frac{1}{[1 - \pi/(4\tau\Delta)]^3} \left(\frac{E}{\Delta} \right)^2.$$

С увеличением степени загрязнения, то есть уменьшением времени пробега τ , коэффициент при E^2 растет и при $\tau\Delta = \pi/4$ обращается в бесконечность. Этим определяется критическая концентрация примесей, выше которой

$$N(E=0) = 2N_0\tau\Delta \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - 2\tau\Delta \right). \quad (21.19)$$

Физический смысл полученного результата становится ясным при сравнении с (17.30): нули в спектре квазичастиц для *A*-фазы остаются изолированными точками при малом количестве примесей и размываются в « пятна » нулей [23, 86] только выше критической концентрации.

Полярная фаза. Параметр порядка имеет вид $\Delta_{\mathbf{k}}^2 = \Delta^2 \cos^2 \theta$. Из (21.16) имеем:

$$t = E + \frac{i}{2\tau\Delta} t \arcsin \frac{\Delta}{t}.$$

Легко убедиться в том, что это уравнение имеет при $E = 0$ следующее решение

$$t(E=0) = \frac{i\Delta}{\operatorname{sh} 2\tau\Delta}, \quad (21.20)$$

откуда

$$N(E=0) = N_0 \frac{2\tau\Delta}{\operatorname{sh} 2\tau\Delta}. \quad (21.21)$$

Это означает, что при сколь угодно слабом загрязнении линии нулей становятся целыми полосами [23, 86]. Такой эффект приведет к изменению термодинамических свойств сверхпроводника с подобной структурой щели при $T \rightarrow 0$, в частности, электронная теплоемкость станет пропорциональной температуре.

Упражнение. С помощью уравнения (21.12) вычислить значение критической концентрации примесей, при которой T_c обращается в нуль, и найти область существования бесщелевой сверхпроводимости в *B*-фазе.

Выход за пределы борновского приближения. Приведенный выше анализ базировался на использовании борновского приближения, то есть на пренебрежении возможностью многократного рассеяния электрона на одной и той же примеси. При учете такого рассеяния необходимая модификация теории сводится к замене собственно-энергетических частей, найденных в борновском приближении, на точные. Для обычных сверхпроводников при этом сохраняется основной вывод об отсутствии подавления сверхпроводимости немагнитными примесями. Для необычных сверхпроводников рассеяние на примесях подавляет сверхпроводимость, а выход за пределы борновского приближения приводит к существенным изменениям в поведении функций Грина, а, следовательно, и физических величин [87, 88].

Мы рассмотрим случай слабого беспорядка, то есть достаточно малой концентрации примесей, когда выполняется условие $k_F l \gg 1$, позволяющее не учитывать диаграммы с пересекающимися пунктирными линиями. Физически это означает пренебрежение интерференцией волн, рассеянных на разных примесях, и ответ для $\Sigma(\omega_n)$ получается просто умножением вклада одной примеси $\Sigma_0(\omega_n)$ на их концентрацию: $\Sigma(\omega_n) = n_{\text{imp}} \Sigma_0(\omega_n)$. Величина $\Sigma_0(\omega_n)$ непосредственно связана с точной амплитудой рассеяния на нулевой угол на одной примеси, которая определяется суммой диаграмм

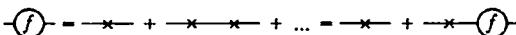


Рис. 21. Диаграммное уравнение для точной амплитуды рассеяния на одной примеси

на рис. 21. Для изотропного точечного потенциала примесей аномальная собственно-энергетическая часть обращается в нуль для любых сверхпроводящих состояний с параметрами порядка, соответствующими неединичным представлениям группы симметрии кристалла. В этом случае амплитуда рассеяния характеризуется единственной скалярной функцией $f(\omega_n)$, причем

$$\Sigma(\omega_n) = n_{\text{imp}} f(\omega_n). \quad (21.22)$$

В общем же случае амплитуда рассеяния зависит от импульсов и является матрицей 4×4 (T -матрицей) в спиновом пространстве и «пространстве» частица-дырка (см. § 17).

Суммирование диаграммного ряда на рис. 21 позволяет выразить $f(\omega_n)$ через затравочную амплитуду рассеяния a . Удобнее, однако, записать точную амплитуду рассеяния в несколько ином виде, вводя фазовый сдвиг δ_0 рассеянной s -волны в нормальном состоянии:

$$f(\omega_n) = \frac{k_n}{1 - k_n \sum_{\mathbf{k}} G(\mathbf{k}, \omega_n)}, \quad (21.23)$$

где $k_n = -\operatorname{tg} \delta_0 / (\pi N_0)$, а $G(\mathbf{k}, \omega_n)$ есть усредненная функция Грина сверхпроводника². Подставляя (21.23) в (21.22), включая вещественную (четную по ω_n) часть собственно-энергетической функции в перенормировку

²Чтобы не прерывать связности изложения, вывод формулы (21.23) вынесен в конец параграфа.

химического потенциала и выделяя явно мнимую (нечетную по ω_n) часть, получаем:

$$\Sigma(\omega_n) = \frac{n_{\text{imp}} k_n^2 \sum_{\mathbf{k}} G(\mathbf{k}, \omega_n)}{1 - k_n^2 \left(\sum_{\mathbf{k}} G(\mathbf{k}, \omega_n) \right)^2}. \quad (21.24)$$

Здесь мы использовали тот факт, что в случае электрон-дырочной симметрии $\sum_{\mathbf{k}} G(\mathbf{k}, -\omega_n) = -\sum_{\mathbf{k}} G(\mathbf{k}, \omega_n)$ (см. (21.6)). Подставляя в (21.24) выражение для функции Грина (21.6), интегрируя по ξ и выполняя аналитическое продолжение с учетом (21.14), получаем окончательно уравнение для функции $t(E)$, обобщающее (21.16) на случай неборновского рассеяния:

$$t = E + i\Gamma \frac{g(t)}{\cos^2 \delta_0 + \sin^2 \delta_0 g^2(t)}, \quad (21.25)$$

где

$$\Gamma = \frac{n_{\text{imp}}}{\pi N_0} \sin^2 \delta_0,$$

а $g(t)$ определяется формулой (21.17). В пределе слабого рассеяния, устремляя δ_0 к нулю, имеем:

$$\Gamma \rightarrow \frac{n_{\text{imp}}}{\pi N_0} \delta_0^2 = \pi N_0 n_{\text{imp}} u^2 = \frac{1}{2\tau_{\text{Born}}},$$

и (21.25) переходит в (21.16).

Выражение (21.15) для плотности состояний квазичастиц справедливо лишь в борновском приближении. Для вычисления $N(E)$ в случае произвольных фазовых сдвигов вернемся к определению (17.27):

$$N(E) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \sum_{\mathbf{k}} G(\mathbf{k}, \omega_n) \Big|_{i\omega_n \rightarrow E+i0} = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \sum_{\mathbf{k}} G^R(\mathbf{k}, E). \quad (21.26)$$

Входящая сюда функция Грина получается путем аналитического продолжения в (21.5):

$$G^R(\mathbf{k}, E) = \frac{t(E) + \xi_k}{t^2(E) - \Delta_{\mathbf{k}}^2 - \xi_k^2}. \quad (21.27)$$

Из (21.26), (21.27) и (21.17) окончательно получаем:

$$N(E) = N_0 \operatorname{Re} g(t(E)). \quad (21.28)$$

В борновском приближении, как мы видели, изолированные точки нулей в сверхпроводнике со структурой, например, A -фазы, являются устойчивыми по отношению к слабому загрязнению. Покажем теперь, что для достаточно сильного потенциала примесей это не так.

Рассмотрим противоположный борновскому случай резонансного рассеяния, то есть больших фазовых сдвигов: $\delta_0 \rightarrow \pi/2$. Подставляя в (21.25) $\Delta_{\mathbf{k}}^2 = \Delta^2 \sin^2 \theta$, получаем для $t(E)$ уравнение:

$$t = E + 2i\Gamma \Delta \frac{1}{t} \left(\ln \frac{t + \Delta}{t - \Delta} \right)^{-1}, \quad (21.29)$$

имеющее при $E = 0$ и $\Gamma \ll \Delta$ следующее решение:

$$t(E) = i\sqrt{\frac{2\Gamma\Delta}{\pi}}. \quad (21.30)$$

Подставляя его в (21.17), получаем:

$$\operatorname{Re} g(t(E=0)) = \sqrt{\frac{\pi\Gamma}{2\Delta}}.$$

Окончательно:

$$N(E=0) = N_0 \sqrt{\frac{\pi\Gamma}{2\Delta}}. \quad (21.31)$$

Мы видим, что плотность состояний при $E = 0$ оказывается конечной, но, разумеется, обращается в нуль при уменьшении степени загрязнения, то есть при $\Gamma \rightarrow 0$. Это означает, что внесение сколь угодно малого количества резонансных примесей превращает изолированные нули щели в спектре сверхпроводника в пятна конечного размера [88].

Упражнение. 1. Найти понижение критической температуры сверхпроводника с p -спариванием вследствие резонансного рассеяния на примесях. Как изменится в этом случае уравнение (21.12)?

2. Вычислить плотность состояний при $E = 0$ для полярной фазы при резонанском рассеянии на примесях³.

Вывод формулы (21.23). Диаграммный ряд на рис. 21 сводится, как легко видеть, к следующему уравнению на амплитуду рассеяния:

$$f(\omega) = u + u \sum_{\mathbf{k}} G(\mathbf{k}, \omega) f(\omega). \quad (21.32)$$

Запишем входящую сюда функцию Грина сверхпроводника как

$$G = G_{\text{off}}^{(0)} + G - G_{\text{off}}^{(0)}, \quad (21.33)$$

где

$$G_{\text{off}}^{(0)} = \frac{1}{2} \left(G^{(0)R} + G^{(0)A} \right)$$

есть вещественная часть функции Грина для рассеяния на одной примеси в нормальном состоянии. В соответствии с определением функции Грина уравнения Шредингера:

$$G^{(0)}(\omega) = \frac{1}{\omega - \epsilon + i0} = P \frac{1}{\omega - \epsilon} - i\pi\delta(\omega - \epsilon) = G_{\text{off}}^{(0)} + G_{\text{on}}^{(0)},$$

где ϵ есть энергия свободных электронов, взаимодействующих с примесью, а P — символ главного значения интеграла. Индекс «off» («он») у вещественной (мнимой) части функции Грина означает, что промежуточные состояния не находятся (находятся) на массовой поверхности.

³ См. Ю. С. Бараш, В. П. Минеев, А. А. Свидзинский //Письма в ЖЭТФ. 1997. 65. 606.

Подстановка (21.33) в (21.32) и перегруппировка слагаемых дают:

$$\begin{aligned}
 f(\omega) &= \left(u + u^2 \sum_{\mathbf{k}} G_{\text{off}}^{(0)}(\mathbf{k}, \omega) + \dots \right) \times \\
 &\quad \times \left(1 + \sum_{\mathbf{k}} [G(\mathbf{k}, \omega) - G_{\text{off}}^{(0)}(\mathbf{k}, \omega)] f(\omega) \right) = \\
 &= k_n + k_n \sum_{\mathbf{k}} [G(\mathbf{k}, \omega) - G_{\text{off}}^{(0)}(\mathbf{k}, \omega)] f(\omega). \quad (21.34)
 \end{aligned}$$

Здесь мы ввели величину k_n , описывающую рассеяние на примеси в нормальном металле и удовлетворяющую соотношению:

$$k_n = u + u G_{\text{off}}^{(0)} k_n.$$

В общем случае вместо одной скалярной функции k_n необходимо рассматривать матрицу 4×4 (K -матрицу) [88].

Величина k_n параметризуется с помощью фазового сдвига рассеянных волн следующим образом:

$$k_n = - \frac{\operatorname{tg} \delta_0}{\pi N_0}. \quad (21.35)$$

Стоящая в правой части (21.34) сумма по импульсам от $G_{\text{off}}^{(0)}(\mathbf{k}, \omega)$ равна нулю и мы приходим к формуле (21.23).

§ 22. Электронная теплопроводность необычных сверхпроводников

Наличие симметрийных нулей в спектре элементарных возбуждений приводит, как мы убедились выше, к существенному изменению термодинамических характеристик сверхпроводника при низких температурах. В кинетике необычных сверхпроводников нули в спектре также играют важную роль.

Наиболее просто неравновесные свойства сверхпроводников описываются с помощью кинетического уравнения Больцмана, которому удовлетворяет функция распределения возбуждений. Разумеется, большинством кинетическая теория справедлива лишь для газа хорошо определенных элементарных возбуждений, энергия которых велика по сравнению с обратным временем их жизни. Это условие заведомо нарушается в необычных сверхпроводниках с нулями в спектре элементарных возбуждений, обладающих конечной плотностью состояний при нулевой энергии. Поэтому описание релаксационных процессов с помощью уравнения Больцмана справедливо только в области достаточно высоких температур, где средняя тепловая энергия возбуждений велика по сравнению с их затуханием γ . В чистых сверхпроводниках данная область охватывает почти весь диапазон температур, кроме непосредственной окрестности нуля, поэтому здесь можно пользоваться уравнением Больцмана. Следует, однако, иметь в виду, что в этой области вычисление энергетической зависимости времени свободного пробега возбуждений, через которое выражаются кинетические коэффициенты, требует привлечения

микроскопической теории. При $T < \gamma$ кинетические коэффициенты можно вычислить только теоретико-полевыми методами. Мы изложим здесь оба подхода к кинетике сверхпроводников на примере вычисления электронной теплопроводности.

Метод кинетического уравнения. Напомним определение коэффициента теплопроводности κ . Поток тепла, переносимый неравновесными возбуждениями, определяется формулой

$$Q(\mathbf{r}) = 2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \mathbf{v}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) f_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}), \quad (22.1)$$

где E — энергия, $\mathbf{v} = \partial E / \partial \mathbf{k}$ — скорость квазичастиц в сверхпроводнике¹, а $f_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ — неравновесная функция распределения возбуждений, взаимодействующих с примесями. Коэффициент теплопроводности κ связывает поток тепла с градиентом температуры

$$\mathbf{Q} = -\kappa \nabla T. \quad (22.2)$$

Функция $f_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t)$ удовлетворяет кинетическому уравнению Больцмана, которое имеет следующий вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial \mathbf{k}} \nabla f - \nabla E \frac{\partial f}{\partial \mathbf{k}} = \left(\frac{\partial n}{\partial t} \right)_{\text{imp}}, \quad (22.3)$$

где в правой части стоит интеграл столкновений возбуждений с примесями². В стационарном случае и для слабо неравновесных распределений это уравнение может быть упрощено. Поскольку интеграл столкновений обращается в нуль при подстановке локально-равновесной функции распределения $f_{\mathbf{k}}^{(0)}(\mathbf{r}) = f(E_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})/T(\mathbf{r}))$, где f — фермиевская функция (6.2), то в линейном по отклонению от равновесия приближении в левой части уравнения (22.3) мы можем заменить f на $f^{(0)}$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{k}} \nabla f_{\mathbf{k}}^{(0)} - \nabla E \frac{\partial f_{\mathbf{k}}^{(0)}}{\partial \mathbf{k}} &= \frac{\partial E}{\partial \mathbf{k}} \frac{\partial f_{\mathbf{k}}^{(0)}}{\partial E} T \left(\frac{1}{T} \nabla E - \frac{E}{T^2} \nabla T \right) - \\ &- \nabla E \frac{\partial f_{\mathbf{k}}^{(0)}}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{k}} = -\frac{E}{T} \frac{\partial f_{\mathbf{k}}^{(0)}}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{k}} \nabla T. \end{aligned} \quad (22.4)$$

Обратим внимание на то, что члены, содержащие градиенты щели Δ , в точности сократили друг друга.

Интеграл столкновений в случае слабого беспорядка получается умножением вклада одной примеси на их концентрацию:

$$\left(\frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial t} \right)_{\text{imp}} = n_{\text{imp}} \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} w(\mathbf{k}, \mathbf{k}') (\delta f_{\mathbf{k}'} - \delta f_{\mathbf{k}}), \quad (22.5)$$

¹Пространственная зависимость E и \mathbf{v} возникает из-за зависимости энергетической щели Δ от температуры, которая, в свою очередь, является функцией \mathbf{r} . Предполагается, что T медленно меняется на масштабе корреляционной длины.

²Вывод кинетических уравнений для сверхпроводника представляет собой довольно сложную задачу, поскольку необходимо учитывать динамику самого параметра порядка. Уравнение (22.3) справедливо в предположении, что возбуждения распространяются в заданном, не зависящем от времени, слабо неоднородном потенциале $\Delta(\mathbf{r})$, а $E_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \sqrt{\xi^2 + \Delta_{\mathbf{k}}^2(\mathbf{r})}$.

где $w(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ — вероятность упругого рассеяния квазичастиц, а δf — отклонение функции распределения от равновесной, входящее, согласно (22.1), в формулу для теплового потока:

$$\mathbf{Q} = 2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{k}} \mathbf{v}_{\mathbf{k}} \delta f_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}). \quad (22.6)$$

В борновском приближении вероятность w вычисляется с помощью «золотого правила Ферми»:

$$w(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \mathbf{k}' | H_{\text{imp}} | \mathbf{k} \rangle|^2 \delta(E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}'}) .$$

Применяя преобразование Боголюбова (5.25) к гамильтониану (21.1), описывающему взаимодействие электронов с немагнитной примесью, получаем:

$$w(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{2\pi}{\hbar} u^2 C(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \delta(E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}'}), \quad (22.7)$$

где так называемый фактор когерентности дается выражением:

$$C(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi_k \xi_{k'} - \text{Re } \Delta^2 g(\mathbf{k}) g(\mathbf{k}')}{E_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}'}} \right), & \text{при } S = 0, \\ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi_k \xi_{k'} - \text{Re } \Delta^2 d(\mathbf{k}) d(\mathbf{k}')}{E_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}'}} \right), & \text{при } S = 1. \end{cases}$$

Мы видим, что в случае анизотропного спаривания вероятность w зависит от углов даже для изотропной амплитуды рассеяния $u(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = u = \text{const.}$

Перепишем кинетическое уравнение (22.3) с учетом (22.4) и (22.5) в следующем виде:

$$\delta f_{\mathbf{k}} - \tau_{\mathbf{k}} \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \tau^{-1}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \delta f_{\mathbf{k}'} = \tau_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}} \mathbf{v}_{\mathbf{k}} \frac{\partial f_{\mathbf{k}}^{(0)}}{\partial E} \frac{\nabla T}{T}, \quad (22.8)$$

где

$$\tau^{-1}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = n_{\text{imp}} w(\mathbf{k}, \mathbf{k}'),$$

$$\tau_{\mathbf{k}}^{-1} = \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \tau^{-1}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{2\pi}{\hbar} n_{\text{imp}} u^2 \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} C(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \delta(E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}}'), \quad (22.9)$$

причем $\tau_{\mathbf{k}}$ имеет смысл времени свободного пробега квазичастиц. Поскольку как при замене частица-дырка (т. е. $\xi_k \rightarrow -\xi_k$), так и при пространственной инверсии τ^{-1} остается инвариантным, а правая часть (22.8) меняет знак, получаем, что $\delta f_{\mathbf{k}}$ должна быть нечетной относительно указанных преобразований. По этой причине второе слагаемое в левой части (22.8) обращается в нуль, и

$$\delta f_{\mathbf{k}} = \tau_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}} \mathbf{v}_{\mathbf{k}} \frac{\partial f_{\mathbf{k}}^{(0)}}{\partial E} \frac{\nabla T}{T}.$$

Подставляя найденное решение кинетического уравнения в (22.6) и вспоминая определение коэффициента теплопроводности (22.2), окончательно имеем:

$$\kappa_{ij} = -\frac{2}{T} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\partial f_{\mathbf{k}}^{(0)}}{\partial E} E_{\mathbf{k}}^2 v_{\mathbf{k},i} v_{\mathbf{k},j} \tau_{\mathbf{k}}, \quad (22.10)$$

причем скорость квазичастиц определяется следующим образом

$$v_k = \frac{\partial E_k}{\partial k} = v_F k \frac{\xi_k}{E_k} + O\left(\frac{\Delta}{\epsilon_F}\right). \quad (22.11)$$

Из всех величин, входящих в (22.10), неизвестным пока осталось лишь время свободного пробега квазичастиц τ_k . Для синглетного изотропного спаривания из (22.9) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_k} &= \frac{2\pi}{\hbar} n_{\text{imp}} u^2 \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \left(1 - \frac{\Delta^2}{E_k E_{k'}}\right) \delta(E_k - E_{k'}) = \\ &= \frac{1}{\tau_n} \frac{1}{N_0} \frac{E_k^2 - \Delta^2}{E_k^2} \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \delta(E_k - E_{k'}) = \frac{1}{\tau_n} \frac{N(E_k)}{N_0} \frac{\xi_k^2}{E_k^2}, \end{aligned} \quad (22.12)$$

где

$$\tau_n^{-1} = \frac{2\pi}{\hbar} n_{\text{imp}} N_0 u^2 \quad (22.13)$$

есть время свободного пробега в нормальной фазе³, а плотность состояний $N(E_k) = \int d^3 k' \delta(E_k - E_{k'})/(2\pi)^3$ (см. (17.26)).

Подставляя (22.11) и (22.12) в (22.10) и учитывая (17.28), находим выражение для коэффициента теплопроводности [89, 90]:

$$\kappa = \frac{2\tau_n N_0 v_F^2}{3T^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{E_k^2 e^{E_k/T}}{(e^{E_k/T} + 1)^2} \frac{N_0}{N(E_k)} = \frac{\tau_n N_0 v_F^2}{3T^2} \int_{\Delta}^{\infty} \frac{dE E^2}{\text{ch}^2[E/(2T)]}. \quad (22.14)$$

При $T \ll \Delta$

$$\kappa(T) = \frac{4}{3} v_F^2 \tau_n N_0 T \left(\frac{\Delta}{T}\right)^2 \exp\left(-\frac{\Delta}{T}\right),$$

что можно переписать также в виде:

$$\frac{\kappa(T)}{\kappa_n(T_c)} = \frac{T}{T_c} \left(\frac{\Delta}{T}\right)^2 \exp\left(-\frac{\Delta}{T}\right) I^{-1}, \quad (22.15)$$

где теплопроводность в нормальном состоянии есть

$$\kappa_n(T_c) = \frac{1}{3} v_F^2 \tau_n N_0 T_c I, \quad (22.16)$$

а

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dz z^2}{\text{ch}^2(z/2)} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

В случае анизотропного спаривания параметр порядка преобразуется в соответствии с неединичным представлением группы симметрии, и интеграл от фактора когерентности по направлениям k' в (22.9) равен единице. Следовательно,

$$\frac{1}{\tau_k} = \frac{2\pi}{\hbar} n_{\text{imp}} u^2 \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \delta(E_k - E_{k'}) = \frac{1}{\tau_n} \frac{N(E_k)}{N_0}. \quad (22.17)$$

³С учетом выражения для скорости возбуждений $v = \partial E / \partial k = v_F \xi_k / E_k$ и формулы (17.28) из (22.13) следует, что длина свободного пробега в сверхпроводящем состоянии с *s*-спариванием равна длине пробега в нормальном состоянии.

Подставляя это выражение в (22.10), получаем, с учетом (22.11):

$$\begin{aligned}\kappa_{ij} &= \frac{2\tau_n v_F^2}{T^2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\xi_k^2 e^{E_k/T}}{(e^{E_k/T} + 1)^2} \frac{N_0}{N(E_k)} \hat{k}_i \hat{k}_j = \\ &= \frac{\tau_n N_0 v_F^2}{T^2} \int_0^\infty \frac{E dE}{\text{ch}^2(E/2T)} \frac{N_0}{N(E)} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \hat{k}_i \hat{k}_j \sqrt{E^2 - \Delta_k^2}, \quad (22.18)\end{aligned}$$

причем интегрирование по углам производится в пределах, задаваемых условием $\Delta_k^2 < E^2$.

Для сверхпроводника со структурой B -фазы коэффициент теплопроводности изотропен и экспоненциально мал при $T \rightarrow 0$ (см. (22.15)).

Для сверхпроводников с нулями щели на поверхности Ферми температурное поведение теплопроводности, напротив, будет не экспоненциальным, а степенным, подобно многим другим физическим характеристикам (см. § 7). Кроме того, следует ожидать, что ввиду анизотропии щели коэффициенты теплопроводности будут зависеть от направления. В качестве примера рассмотрим сверхпроводник со структурой A -фазы, параметр порядка в котором обращается в нуль на полюсах ферми-сферы: $\Delta_k^2 = \Delta^2 \sin^2 \theta$. Ввиду однородной анизотропии спектра возбуждений теплопроводность описывается двумя коэффициентами: $\kappa_{\parallel} = \kappa_{zz}$ и $\kappa_{\perp} = \kappa_{xx} = \kappa_{yy}$. Из (22.18) получаем:

$$\begin{aligned}\kappa_{\parallel} &= \frac{\tau_n N_0 v_F^2}{T^2} \int_0^\infty \frac{dE}{\text{ch}^2(E/2T)} \frac{E}{N(E)} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \sqrt{E^2 - \Delta^2 \sin^2 \theta} \cos^2 \theta \approx \\ &\approx \frac{\tau_n N_0 v_F^2}{T^2} \int_0^\infty \frac{dE}{\text{ch}^2(E/2T)} \frac{E}{N(E)} \int_0^{E/\Delta} \theta d\theta \sqrt{E^2 - \Delta^2 \theta^2} \sim \\ &\sim \frac{\tau_n N_0 v_F^2}{T^2} \int_0^\infty \frac{dE}{\text{ch}^2(E/2T)} \frac{N_0}{N(E)} \frac{E^3}{\Delta^2}.\end{aligned}$$

Вспоминая выражение (17.30) для плотности состояний в A -фазе, окончательно получаем:

$$\frac{\kappa_{\parallel}(T)}{\kappa_n(T_c)} \sim \frac{T}{T_c}. \quad (22.19)$$

Аналогично выполняются вычисления для поперечного коэффициента теплопроводности:

$$\begin{aligned}\kappa_{\perp} &= \frac{\tau_n N_0 v_F^2}{T^2} \int_0^\infty \frac{dE}{\text{ch}^2(E/2T)} \frac{E}{N(E)} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \sqrt{E^2 - \Delta^2 \sin^2 \theta} \sin^2 \theta \sim \\ &\sim \frac{\tau_n N_0 v_F^2 T^3}{\Delta}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{\kappa_{\perp}(T)}{\kappa_n(T_c)} \sim \left(\frac{T}{T_c}\right)^3. \quad (22.20)$$

Если щель в спектре обращается в нуль на целых линиях на ферми-поверхности, как это имеет место, например, в сверхпроводнике со структурой

полярной фазы: $\Delta_{\mathbf{k}}^2 = \Delta^2 \cos^2 \theta$, то вычисления с помощью формулы (22.18), аналогичные проведенным выше, дают следующие результаты:

$$\frac{\chi_{||}(T)}{\chi_n(T_c)} \sim \left(\frac{T}{T_c} \right)^3; \quad \frac{\chi_{\perp}(T)}{\chi_n(T_c)} \sim \frac{T}{T_c}. \quad (22.21)$$

Из (22.19)–(22.21) видно, что в сверхпроводниках с нулями щели как на полюсах, так и на экваторе ферми-поверхности, максимальный коэффициент теплопроводности линейно зависит от температуры, т. е. $\chi(T)/T \rightarrow \text{const}$ при $T \rightarrow 0$.

Резонансное рассеяние на примесях [87, 91]. Выражение (22.10) для электронной теплопроводности, полученное из кинетического уравнения, справедливо и при резонанском рассеянии на примесях. Отличие от случая борновского рассеяния состоит в существенно иной зависимости времени свободного пробега возбуждений от энергии $\tau(E)$, которую нужно найти из решения уравнения самосогласования для собственно-энергетической части, выведенного в § 21. В этом разделе мы получим $\tau(E)$ и определим область справедливости описания релаксационных явлений в необычных сверхпроводниках с помощью уравнения Больцмана.

При наличии рассеяния на примесях квазичастицы приобретают конечное время жизни, которое определяется мнимой частью запаздывающей собственно-энергетической функции:

$$\frac{1}{\tau(E)} = -2 \operatorname{Im} \Sigma^R(E) = 2 \operatorname{Im} t(E). \quad (22.22)$$

Здесь мы воспользовались определением (21.14). Величина $t(E)$ удовлетворяет уравнению (21.25).

В случае резонанского рассеяния ($\delta_0 \rightarrow \pi/2$) уравнение (21.25) принимает вид

$$t = E + i\Gamma \frac{1}{g(t)},$$

где

$$g(t) = \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{t}{\sqrt{t^2 - \Delta_{\mathbf{k}}^2}}.$$

В нормальном состоянии $g(t) = 1$, и

$$t_n(E) = E + i\Gamma.$$

Сравнивая это выражение с (22.22), получаем, что величина Γ связана с временем жизни квазичастиц в нормальном металле с резонансными примесями следующим образом:

$$\frac{1}{\tau_n} = 2\Gamma, \quad (22.23)$$

и уравнение на функцию $t(E)$ в сверхпроводящем состоянии может быть записано как

$$t = E + \frac{i}{2\tau_n} \frac{1}{g(t)}. \quad (22.24)$$

Из (22.22), (22.24) и (21.28) имеем

$$\frac{1}{\tau(E)} = \frac{1}{\tau_n} \operatorname{Re} \frac{1}{g(t)} = \frac{1}{\tau_n} \frac{N(E)}{N_0} \frac{1}{|g(t(E))|^2}. \quad (22.25)$$

Таким образом, нахождение времени жизни квазичастиц требует, вообще говоря, самосогласованного вычисления собственно-энергетической части с помощью уравнения (22.24). Однако, в случае достаточно слабого беспорядка для энергий, превышающих некоторое критическое значение (точный критерий зависит от конкретного вида сверхпроводящего состояния, см. ниже), задача может быть упрощена. В самом деле, если при $E \rightarrow 0$

$$\operatorname{Im} t(E) \rightarrow \gamma = \text{const} \neq 0, \quad (22.26)$$

то при $E < \gamma$, как следует из (22.22), время жизни почти не зависит от энергии, и:

$$\frac{1}{\tau} = 2\gamma. \quad (22.27)$$

Энергия квазичастиц становится малой по сравнению с их затуханием, и при $T < \gamma$ больцмановское описание кинетики неприменимо.

Если же $E > \gamma$, то при вычислении малой мнимой добавки к $t(E)$ можно ограничиться низшим порядком теории возмущений по потенциальну примесей. Это, в частности, означает, что в выражении (22.25) мы можем пренебречь отличием $t(E)$ от E . Тогда

$$\left. \frac{1}{\tau(E)} \right|_{\delta_0 \rightarrow \pi/2} = \frac{1}{\tau_n} \frac{N(E)}{N_0} \frac{1}{|g(E)|^2}, \quad (22.28)$$

причем в правую часть здесь следует подставлять плотность состояний для чистого сверхпроводника.

При вычислении коэффициента теплопроводности в случае резонансного рассеяния на примесях с помощью кинетического уравнения необходимо использовать выражение (22.28). Проделаем эти вычисления для различных фаз с p -спариванием.

Для сверхпроводника со структурой A -фазы из (22.26) и (21.30) имеем

$$\gamma = \sqrt{\frac{2\Gamma\Delta}{\pi}} = \sqrt{\frac{\Delta}{\pi\tau_n}}. \quad (22.29)$$

Из (21.17) находим функцию $g(E)$ (при $\gamma < E \ll \Delta$):

$$g(E) = \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{E}{\sqrt{E^2 - \Delta^2 \sin^2 \theta}} \approx -i \frac{\pi E}{2\Delta}.$$

Подставляя это выражение в (22.28) и учитывая (17.30), получаем:

$$\tau(E) \sim \tau_n. \quad (22.30)$$

Для сверхпроводника со структурой полярной фазы решение уравнения (22.24) дает с логарифмической точностью при $\Gamma \ll \Delta$:

$$\gamma = \sqrt{\frac{\Delta}{\tau_n}} (\ln \tau_n \Delta)^{-1/2}. \quad (22.31)$$

Из (21.17) получаем (при $\gamma < E \ll \Delta$):

$$g(E) = \frac{E}{\Delta} \ln \frac{2\Delta}{E}.$$

Из (22.28) тогда имеем

$$\tau(E) \sim \tau_n \frac{E}{\Delta} \ln^2 \frac{E}{\Delta}. \quad (22.32)$$

Как и следовало ожидать, в случае сильного рассеяния на резонансных примесях время жизни квазичастиц уменьшается по сравнению с борновским случаем. Подставляя (22.30) в (22.10), получаем, что в выражениях для коэффициента теплопроводности в А-фазе появляется дополнительная вторая степень температуры:

$$\frac{\kappa_{||}(T)}{\kappa_n(T_c)} \sim \left(\frac{T}{T_c} \right)^3; \quad \frac{\kappa_{\perp}(T)}{\kappa_n(T_c)} \sim \left(\frac{T}{T_c} \right)^5. \quad (22.33)$$

Аналогичные вычисления с помощью (22.32) для полярной фазы дают

$$\frac{\kappa_{||}(T)}{\kappa_n(T_c)} \sim \left(\frac{T}{T_c} \right)^5 \ln^2 \frac{T}{T_c}; \quad \frac{\kappa_{\perp}(T)}{\kappa_n(T_c)} \sim \left(\frac{T}{T_c} \right)^3 \ln^2 \frac{T}{T_c}. \quad (22.34)$$

Найденные температурные зависимости (22.33) и (22.34) согласуются с результатами измерений теплопроводности на монокристаллах UPt₃ [92–94], в соответствии с которыми $\kappa(T)/T \propto T^2$ для всех направлений. Совокупность экспериментальных данных свидетельствует о том, что сверхпроводящий параметр порядка в UPt₃ преобразуется согласно представлению E_{1g} (или E_{2u}) группы D_{6h} (см. § 4). В этом случае продольный (вдоль оси шестого порядка) коэффициент теплопроводности определяется формулой (22.33), а поперечный — формулой (22.34).

Подчеркнем еще раз, что результаты, полученные с помощью кинетического уравнения, справедливы при не слишком низких температурах $\gamma \ll T < \Delta$. При $T < \gamma$ вычисление кинетических коэффициентов может быть произведено лишь в рамках теории линейного отклика, к изложению которой мы и переходим.

Упражнение. Вывести формулу (22.7).

Метод функций Грина: теория линейного отклика. Другой способ вычисления теплопроводности, а также многих других термодинамических и кинетических характеристик сверхпроводника, основан на использовании теории линейного отклика в терминах функций Грина [95]. Согласно этой теории, реакция системы на малое возмущение ее параметров (в нашем случае — на градиент температуры) описывается запаздывающими корреляторами сопряженных потоков.

Коэффициент теплопроводности в этом формализме вычисляется следующим образом. Введем прежде всего мацубаровскую корреляционную функцию потоков тепла:

$$K_{ij}(\mathbf{r}_1, \tau_1; \mathbf{r}_2, \tau_2) = \langle T_{\tau_1} Q_i(\mathbf{r}_1, \tau_1) Q_j(\mathbf{r}_2, \tau_2) \rangle, \quad (22.35)$$

где Q_i — оператор потока тепла. В реальном времени имеем:

$$Q_i(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial \psi_{\alpha}^{+}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \frac{\partial \psi_{\alpha}(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i} + \frac{\partial \psi_{\alpha}^{+}(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i} \frac{\partial \psi_{\alpha}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right). \quad (22.36)$$

Справедливость такого определения вытекает из операторного уравнения непрерывности для плотности гамильтониана $h(\mathbf{r}, t)$ ($H = \int d^3r h$, где H — гамильтониан БКШ (17.1) в координатном представлении):

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{Q} = 0.$$

Фурье-образ уравнения (22.36) имеет вид $K_{ij}(\mathbf{q}, \omega_n)$, где $\omega_n = 2\pi nT$ — бозонная мацубаровская частота. Запаздывающая корреляционная функция потоков тепла $K_{ij}^R(\mathbf{q}, \omega)$ находится путем аналитического продолжения мацубаровской функции на ось вещественных частот $i\omega_n \rightarrow \omega + i0$. Согласно теории линейного отклика, коэффициент теплопроводности связан с $K_{ij}^R(\mathbf{q} = 0, \omega)$ следующим образом [95]:

$$\kappa_{ij} = -\frac{1}{T} \lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Im} \frac{K_{ij}^R(\omega) - K_{ij}^R(0)}{\omega} = -\frac{1}{T} \left. \frac{d \operatorname{Im} K_{ij}^R(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=0}. \quad (22.37)$$

Подставим (22.36) в (22.35) и используем для расцепления стоящего в правой части (22.35) τ -упорядоченного произведения четырех фермионных операторов (двухчастичной функции Грина) приближение среднего поля:

$$\begin{aligned} \langle T_\tau \psi_\alpha^+(\mathbf{r}'_1, \tau_1) \psi_\alpha(\mathbf{r}_1, \tau_1) \psi_\beta^+(\mathbf{r}'_2, \tau_2) \psi_\beta(\mathbf{r}_2, \tau_2) \rangle &\rightarrow \\ &\rightarrow -\overline{G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \tau_1; \mathbf{r}'_2, \tau_2) G_{\beta\alpha}(\mathbf{r}_2, \tau_2; \mathbf{r}'_1, \tau_1)} - \\ &- \overline{F_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \tau_1; \mathbf{r}_2, \tau_2) F_{\alpha\beta}^+(\mathbf{r}'_1, \tau_1; \mathbf{r}'_2, \tau_2)} = \\ &= -\overline{G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \tau_1; \mathbf{r}'_2, \tau_2) G_{\beta\alpha}(\mathbf{r}_2, \tau_2; \mathbf{r}'_1, \tau_1)} + \\ &+ \overline{F_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \tau_1; \mathbf{r}_2, \tau_2) F_{\beta\alpha}^+(\mathbf{r}'_2, \tau_2; \mathbf{r}'_1, \tau_1)}, \end{aligned}$$

где черта сверху обозначает усреднение по положениям примесей. Переходя в импульсно-частотное представление, перепишем коррелятор (22.35) в следующем виде:

$$K_{ij}(\omega_n) = T \sum_m \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} (2\epsilon_m + \omega_n)^2 \frac{k_i k_j}{4m^2} \left(\overline{G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \epsilon_m + \omega_n) G_{\beta\alpha}(\mathbf{k}, \epsilon_m)} - \right. \\ \left. - \overline{F_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \epsilon_m + \omega_n) F_{\beta\alpha}^+(\mathbf{k}, \epsilon_m)} \right) + K_{ij}^{(\text{sing})},$$

где $\epsilon_m = (2m + 1)\pi T$. Последнее слагаемое в правой части объединяет сингулярные вклады вида $\delta(\tau_1 - \tau_2)$, происходящие от дифференцирования по времени τ -упорядоченных произведений. Учет таких вкладов позволяет сократить расходимости при суммировании по m в первом слагаемом.

Данную трудность удобнее обойти, используя спектральное разложение (17.22) для функций Грина. При этом можно показать [96], что аналитически продолженное выражение для коррелятора имеет вид:

$$\begin{aligned} K_{ij}^R(\omega) = \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \frac{d\omega_2}{2\pi} \frac{(\omega_1 + \omega_2)^2}{\omega_1 - \omega_2 - \omega - i0} \left(\operatorname{th} \frac{\omega_1 + \omega}{2T} - \operatorname{th} \frac{\omega_2}{2T} \right) \times \\ \times \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{k_i k_j}{4m^2} \left(\overline{\operatorname{Im} G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega_1 + \omega) \operatorname{Im} G_{\beta\alpha}(\mathbf{k}, \omega_2)} - \right. \\ \left. - \overline{\operatorname{Im} F_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega_1 + \omega) \operatorname{Im} F_{\beta\alpha}^+(\mathbf{k}, \omega_2)} \right). \end{aligned}$$

Подставляя сюда выражение (17.23) для спектральной плотности, можно убедиться, что интеграл по ξ от слагаемых вида $G^R G^R$ и т. д. обращается в нуль. Для коэффициента теплопроводности тогда получаем:

$$x_{ij} = \frac{1}{4m^2 T^2} \int \frac{dE}{2\pi} \frac{E^2}{\text{ch}^2(E/2T)} \times \\ \times \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} k_i k_j \left(\overline{G_{\alpha\beta}^R(\mathbf{k}, E) G_{\beta\alpha}^A(\mathbf{k}, E)} - \overline{F_{\alpha\beta}^R(\mathbf{k}, E) F_{\beta\alpha}^{+A}(\mathbf{k}, E)} \right). \quad (22.38)$$

Интеграл по импульсам в правой части определяется суммой диаграмм, изображенных на рис. 22, причем сплошным линиям соответствуют усредненные запаздывающие и опережающие функции Грина.

Если, как и выше, ограничиться случаем изотропного рассеяния на точечных примесях, то пунктирные линии не несут никакой зависимости от импульсов. Поэтому для пространственно-четных сверхпроводящих фаз все диаграммы, кроме первой, обращаются в нуль при интегрировании по направлениям \mathbf{k} ввиду нечетности вершины k_i .

Для пространственно-нечетных фаз, в частности, для p -спаривания, диаграммы с попечными примесными линиями (так называемые вершинные поправки), вообще говоря, в нуль не обращаются, что значительно усложняет задачу. Однако, здесь мы интересуемся лишь поведением максимального

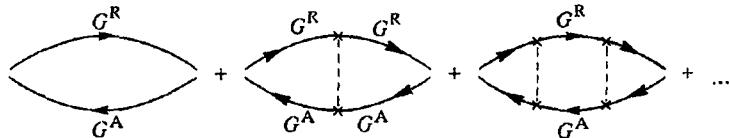


Рис. 22. Совокупность диаграмм, определяющих электронную теплопроводность сверхпроводника при рассеянии электрона на примесях.

коэффициента теплопроводности $x_{\max} = x_{ii}$, совпадающего с $x_{zz} = x_{||}$ для A -фазы, и с $x_{xx} = x_{yy} = x_{\perp}$ для полярной фазы. В этом случае непосредственное вычисление показывает, что вершинные поправки равны нулю [88] в результате интегрирования по азимутальному углу. Следовательно,

$$x_{ii} = \frac{1}{8\pi n^2 T^2} \int_0^\infty \frac{dE}{2\pi} \frac{E^2}{\text{ch}^2(E/2T)} L_{ii}(E), \quad (22.39)$$

где

$$L_{ii}(E) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} k_i^2 \left(\overline{G_{\alpha\beta}^R(\mathbf{k}, E) G_{\beta\alpha}^A(\mathbf{k}, E)} - \overline{F_{\alpha\beta}^R(\mathbf{k}, E) F_{\beta\alpha}^{+A}(\mathbf{k}, E)} \right) \quad (22.40)$$

(суммирования по повторяющимся латинским индексам нет).

Усредненные запаздывающие и опережающие функции Грина получаются путем аналитического продолжения в (21.6) и выглядят следующим образом:

$$\overline{G^R(\mathbf{k}, E)} = \frac{t(E) + \xi_k}{t^2(E) - \Delta_{\mathbf{k}}^2 - \xi_k^2}, \quad \overline{F_{\alpha\beta}^R(\mathbf{k}, E)} = \frac{\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{k})}{t^2(E) - \Delta_{\mathbf{k}}^2 - \xi_k^2}, \\ G^A(\mathbf{k}, E) = G^{R*}(\mathbf{k}, E), \quad F^A(\mathbf{k}, E) = F^{R*}(\mathbf{k}, E),$$

причем $t(E)$ находится из уравнения самосогласования (21.16) (или (21.25)). После подстановки в (22.40) получаем [88]:

$$\begin{aligned} L_{ii}(E) &= 2N_0 k_F^2 \int \frac{d\Omega}{4\pi} \hat{k}_i^2 \int d\xi \frac{|t|^2 + \xi^2 - \Delta_{\mathbf{k}}^2}{(\xi^2 - t^2 + \Delta_{\mathbf{k}}^2)(\xi^2 - t^{*2} + \Delta_{\mathbf{k}}^2)} = \\ &= \frac{2\pi N_0 k_F^2}{\operatorname{Re} t \operatorname{Im} t} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \hat{k}_i^2 \operatorname{Re} \frac{|t|^2 + t^2 - 2\Delta_{\mathbf{k}}^2}{\sqrt{t^2 - \Delta_{\mathbf{k}}^2}}. \end{aligned} \quad (22.41)$$

Подставляя (22.41) в (22.39), приходим к окончательному ответу:

$$\begin{aligned} \chi_{ii} &= \frac{N_0 v_F^2}{4T^2} \int_0^\infty \frac{dE E^2}{\operatorname{ch}^2(E/2T)} \frac{1}{\operatorname{Re} t(E) \operatorname{Im} t(E)} \times \\ &\quad \times \int \frac{d\Omega}{4\pi} \hat{k}_i^2 \operatorname{Re} \frac{|t(E)|^2 + t^2(E) - 2\Delta_{\mathbf{k}}^2}{\sqrt{t^2(E) - \Delta_{\mathbf{k}}^2}}. \end{aligned} \quad (22.42)$$

Данное выражение определяет максимальный коэффициент теплопроводности для нечетных фаз и все компоненты тензора теплопроводности для четных фаз.

Поскольку основной вклад в интеграл (22.42) происходит от области энергий $E \sim T$, поэтому при не слишком низких температурах и для достаточно малой концентрации примесей можно, как показано выше, пренебречь отличием $\operatorname{Re} t(E)$ от E . Тогда, вводя время жизни квазичастиц согласно (22.22), получаем

$$\chi_{ii} = \frac{N_0 v_F^2}{T^2} \int_0^\infty \frac{dE E}{\operatorname{ch}^2(E/2T)} \tau(E) \int \frac{d\Omega}{4\pi} \hat{k}_i^2 \sqrt{E^2 - \Delta_{\mathbf{k}}^2}. \quad (22.43)$$

Данное выражение справедливо как для борновского, так и для неборновского рассеяния на примесях. В случае борновского рассеяния, используя (22.17), приходим к формуле (22.18), полученной путем решения кинетического уравнения.

Универсальность кинетических коэффициентов при очень низких температурах [97]. Если $T < \gamma$ (то есть $\operatorname{Re} t(E) < \gamma$), то, подставляя $t(E) = \operatorname{Re} t + i\gamma$ в (22.41), получаем:

$$\begin{aligned} L_{ii}(E \rightarrow 0) &= \frac{4\pi N_0 k_F^2}{\gamma \operatorname{Re} t} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \hat{k}_i^2 \operatorname{Re} \frac{i\gamma \operatorname{Re} t - \Delta_{\mathbf{k}}^2}{\sqrt{2i\gamma \operatorname{Re} t - \gamma^2 - \Delta_{\mathbf{k}}^2}} = \\ &= 4\pi N_0 k_F^2 \int \frac{d\Omega}{4\pi} \hat{k}_i^2 \frac{\gamma^2}{(\gamma^2 + \Delta_{\mathbf{k}}^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\chi_{ii} = 4N_0 v_F^2 T I \int \frac{d\Omega}{4\pi} \hat{k}_i^2 \frac{\gamma^2}{(\gamma^2 + \Delta_{\mathbf{k}}^2)^{3/2}}, \quad (22.44)$$

где

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dz z^2}{\operatorname{ch}^2 z} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Таким образом, для сверхпроводящих фаз с нетривиальным спариванием имеет место линейное по T поведение теплопроводности при очень низких температурах, а коэффициент этой линейной зависимости определяется конкретным видом параметра порядка.

Так, для полярной фазы ($\Delta_{\mathbf{k}}^2 = \Delta^2 \cos^2 \theta$) из (22.44) имеем (при условии $\gamma \ll \Delta$):

$$x_{\parallel} = 4N_0 v_F^2 T I \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{4\pi} \cos^2 \theta \frac{\gamma^2}{(\gamma^2 + \Delta^2 \cos^2 \theta)^{3/2}} \approx \\ \approx 4N_0 v_F^2 T I \frac{\gamma^2}{\Delta^3} \ln \frac{2\Delta}{\gamma e}, \quad (22.45)$$

$$x_{\perp} = 4N_0 v_F^2 T I \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{4\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \frac{\gamma^2}{(\gamma^2 + \Delta^2 \cos^2 \theta)^{3/2}} \approx \\ \approx 2N_0 v_F^2 T I \frac{T}{\Delta} \left(1 + O\left(\frac{\gamma}{\Delta}\right) \right). \quad (22.46)$$

Для фаз с изолированными нулями первого или второго порядка аналогичные вычисления дают:

$$x_{\parallel} = 4N_0 v_F^2 T I \frac{\gamma}{\Delta^2}, \quad x_{\perp} = \pi N_0 v_F^2 T I \frac{\gamma^2}{\Delta^3}, \quad \text{для } \Delta_{\mathbf{k}}^2 = \Delta^2 \sin^2 \theta; \\ x_{\parallel} = 2N_0 v_F^2 T I \frac{T}{\Delta}, \quad x_{\perp} = N_0 v_F^2 T I \frac{\gamma}{\Delta^2}, \quad \text{для } \Delta_{\mathbf{k}}^2 = \Delta^2 \sin^4 \theta. \quad (22.47)$$

Мы приходим к заключению, что если тепловой поток направлен параллельно плоскости, в которой параметр порядка обращается в нуль, или вдоль линии, соединяющей точечные нули второго порядка, то коэффициент теплопроводности не зависит от концентрации примесей. Подобная универсальность имеет место и для других кинетических коэффициентов [98].

Список литературы

1. Bardeen J., Cooper L. and Schrieffer J. //Phys.Rev. 1957. **108**. 1175.
2. Cooper L.N. //Phys.Rev. 1956. **104**. 1189.
3. Leggett A. //Rev.Mod.Phys. 1975. **47**. 331.
4. Whealton J.C. //Rev.Mod.Phys. 1975. **47**. 415.
5. Минеев В.П. //Усп.Физ.Нук. 1983. **139**. 303.
6. Vollhardt D. and Wölfle P. The Superfluid Phases of ^3He . — NY: Taylor and Francis, 1990
7. Минеев В.П., Самохин К.В. //ЖЭТФ. 1994. **105**. 747.
8. Ландау Л.Д., Лишинц Е.М. Квантовая механика. — М.: Наука, 1974.
9. Воловик Г.Е., Горьков Л.П. //ЖЭТФ. 1985. **88**. 1412.
10. Ueda K. and Rice T.M. //Phys.Rev.B. 1985. **31**. 7144.
11. Blount E.I. //Phys.Rev.B. 1985. **31**. 2935.
12. Gor'kov L.P. //Sov.Sci.Rev.A. 1987. **9**. 1.
13. Sigrist M. and Ueda K. //Rev.Mod.Phys. 1991. **63**. 239.
14. Mineev V.P. Superconductivity of Heavy Fermionic Compounds. /in "The First Landau Institute Summer School, 1993", Selected Proceedings (ed. by V.P. Mineev). — Gordon and Breach Publ, 1995. P.205.
15. Hardy W.N., Bonn D.A., Morgan D.C., Liang R. and Zhang K. //Phys.Rev.Lett. 1993. **70**. 3999.
16. Moler K., Baar D.J., Urbach J.S., Ruixing Liang, Hardy W.N. and Kapitulnik A. //Phys.Rev.Lett. 1994. **73**. 2744.
17. Shen Z.-X. et al. //Phys.Rev.Lett. 1993. **70**. 1553.
18. Van Harlingen D.J. //Rev.Mod.Phys. 1995. **67**. 515.
19. Kirtley J.R., Tsuei C.C., Sun J.Z., Chi C.C., Yu-Jahes L.S., Gupta A., Rupp M. and Ketchan M.B. //Nature. 1995. **373**. 225.
20. Sigrist M. and Rice T.M. //Rev.Mod.Phys. 1995. **65**. 503.
21. Горьков Л.П. //ЖЭТФ. 1958. **34**. 735.
22. Balian R. and Werthamer N.R. //Phys.Rev. 1963. **131**. 1553.
23. Горьков Л.П., Кацуши П.А. //Письма в ЖЭТФ. 1984. **41**. 1155.
24. Tuominen M.T., Hergenrother J.M., Tighe T.S. and Tinkham M. //Phys.Rev.Lett. 1992. **69**. 1997.
25. Lafarge P., Joyez P., Esteve D., Urbina C. and Devoret M.H. //Phys.Rev.Lett. 1993. **70**. 994.
26. Janko B., Smith A. and Ambegaokar V. //Phys.Rev.B. 1994. **50**. 1152.
27. Golubev D.S. and Zaikin A.D. //Phys.Lett.A. 1994. **195**. 380.
28. Минеев В.П. //Письма в ЖЭТФ. 1994. **60**. 861.
29. Licciardello D.C. and Thouless D.J. //Phys.Rev.Lett. 1975. **35**. 1475.
30. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Т.9. — М.: Мир, 1967.
31. Дукьянчук И.А., Минеев В.П. //ЖЭТФ. 1987. **93**. 2045.
32. Дукьянчук И.А., Минеев В.П. //ЖЭТФ. 1989. **95**. 709.
33. Choi C.H. and Sauls J.A. //Phys.Rev.Lett. 1991. **66**. 484.
34. Mermin N.D. and Stare G. //Phys.Rev.Lett. 1973. **30**. 1135.
35. Березинский В.Б. //неопубликовано (1980)
36. Марченко В.А. //ЖЭТФ. 1987. **93**. 141.
37. Де Жен П. Сверхпроводимость металлов и сплавов. — М.: Мир, 1968.
38. Бурлачков Л.И. //ЖЭТФ. 1985. **89**. 1382.
39. Mineev V.P. //Annales de Physique (Fr.). 1994. **19**. 367.
40. Горьков Л.П. //Письма в ЖЭТФ. 1984. **40**. 351.
41. Житомирский М.Е. //Письма в ЖЭТФ. 1989. **49**. 333.
42. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. — М.: Наука, 1984.
43. Luk'yanchuk I.A. and Zhitomirskii M.E. //Supercond.Reviews. 1995. **1**. 207.
44. Somokhin K. //Europhysics Letters. 1995. **32**. 675.

45. Балацкий А.В., Бурлакчуков Л.И., Горьков Л.П. //ЖЭТФ. 1986. **90**. 1478.
46. Горьков Л.П., Мелик-Бархударов Т.К. //ЖЭТФ. 1963. **45**. 1493.
47. Gross F., Chandrasekhar B.S., Einzel D. et al. //Z.Phys.B-Cond.Matter. 1986. **64**. 175.
48. Лифшиц Е.М., Питалевский Л.П. Статистическая физика. Часть 2. — М.: Наука, 1978.
49. Varma C.M., Miyake K. and Schmitt-Rink S. //Phys.Rev.Lett. 1986. **57**. 626.
50. Gross-Altag F., Chandrasekhar B., Einzel D., Hirschfeld P.J. and Andres K. //Z.Phys.B-Cond.Matter. 1991. **82**. 243.
51. Xu D., Yip S.K. and Sauls J.A. //Phys.Rev.B. 1995. **51**. 16233.
52. Kogan V.G. //Phys.Rev.B. 1981. **24**. 1572.
53. Гришин А.М., Мартынович А.Ю., Ямпольский С.В. //ЖЭТФ. 1990. **97**. 1930.
54. Feinberg D. and Villard C. //Phys.Rev.Lett. 1990. **65**. 919.
55. Воловик Г.Е. //Письма в ЖЭТФ. 1993. **58**. 457.
56. Fisher R.A., Gordon J.E., Reklis S.F. et al. //Physica C. 1995. **252**. 237.
57. Ramirez A.P., Sticheli N. and Bucher E. //Phys.Rev.Lett. 1995. **74**. 1218.
58. Воловик Г.Е., Минеев В.П. //ЖЭТФ. 1981. **81**. 989.
59. Воловик Г.Е., Минеев В.П. //ЖЭТФ. 1984. **86**. 1667.
60. Fomin I.A. //Phys.Lett.A. 1978. **66**. 47.
61. Choi C.H. and Muzikar P. //Phys.Rev.B. 1990. **40**. 5144.
62. Балацкий А.В., Минеев В.П. //ЖЭТФ. 1985. **89**. 2073.
63. Минеев В.П. //ЖЭТФ. 1986. **90**. 1236.
64. Ambegaokar V. and Mermin N.D. //Phys.Rev.Lett. 1973. **30**. 81.
65. Бурлакчуков Л.И., Конин Н.Б. //ЖЭТФ. 1987. **92**. 1110.
66. Kita T. //Phys.Rev.B. 1991. **43**. 5343.
67. Гешкенбейн В.Б., Ларкин А.И. //Письма в ЖЭТФ. 1986. **43**. 306.
68. Yip S.K., De Alcantara Bonfim O.F. and Kumar P. //Phys.Rev.B. 1990. **41**. 11214.
69. Wollman D.A., Van Harlingen D.J., Lee W.C., Ginzberg D.M. and Leggett A.J. //Phys.Rev.Lett. 1993. **71**. 2134.
70. Wollman D.A., Van Harlingen D.J., Giapitzakis J. and Ginzberg D.M. //Phys.Rev.Lett. 1995. **74**. 797.
71. Абрекосов А.А., Горьков Л.П., Дзялошинский И.Е. Методы квантовой теории поля в статистической физике. — М.: Физматгиз, 1962.
72. Ambegaokar V., De Gennes P.G. and Rainer D. //Phys.Rev.A. 1974. **9**. 2676.
73. Горьков Л.П. //ЖЭТФ. 1959. **37**. 833.
74. Brinkman W.F. and Anderson P.W. //Phys.Rev.A. 1973. **8**. 2732.
75. Cross M. //J.Low Temp.Phys. 1976. **26**. 165.
76. Scharnberg K. and Klemm R.A. //Phys.Rev.B. 1980. **22**. 5233.
77. Helfand E. and Werthamer N.R. //Phys.Rev. 1966. **147**. 288.
78. Saint-James D. and De Gennes P.G. //Phys.Lett. 1963. **7**. 306.
79. Самохин К.В. //ЖЭТФ. 1995. **107**. 906.
80. Barash Yu.S., Galaktionov A.V. and Zaikin A.D. //Phys.Rev.B. 1995. **52**. 665.
81. Lüders G. and Usadel K.D. The Method of the Correlation Function in Superconductivity Theory. — Berlin: Springer, 1971.
82. Шаповал Е.А. //ЖЭТФ. 1964. **47**. 1007.
83. Зайцев Р.О. //ЖЭТФ. 1966. **50**. 1055.
84. Ларкин А.И. //Письма в ЖЭТФ. 1965. **2**. 205.
85. Абрекосов А.А., Горьков Л.П. //ЖЭТФ. 1960. **39**. 1781.
86. Ueda K. and Rice T.M. /in Theory of Heavy Fermions and Valence Fluctuations, edited by T. Kasuya and T. Sato. — Berlin: Springer, 1985.
87. Pethick C.J. and Pines D. //Phys.Rev.Lett. 1986. **57**. 118.
88. Hirschfeld P., Wölfe P. and Einzel D. //Phys.Rev.B. 1988. **37**. 83.
89. Гейликман Б.Т. //ЖЭТФ. 1958. **34**. 1042.
90. Лифшиц Е.М., Питалевский Л.П. Физическая кинетика. — М.: Наука, 1979.
91. Arfi B. and Pethick C.J. //Phys.Rev.B. 1988. **38**. 2312.
92. Lussier B., Ellman B. and Taillefer L. //Phys.Rev.Lett. 1994. **73**. 3294.
93. Huxley A.D., Suderow H., Brison J.P. and Flouquet J. //Phys.Lett.A. 1995. **209**. 365.
94. Lussier B., Ellman B. and Taillefer L. //Phys.Rev.B. 1996. **53**. 5145.
95. Ambegaokar V. and Tewordt L. //Phys.Rev. 1964. **134**. A805.
96. Ambegaokar V. and Griffin A. //Phys.Rev. 1965. **137**. A1151.
97. Lee P.A. //Phys.Rev.Lett. 1993. **71**. 1887.
98. Graf M.J., Yip S.-K. and Sauls J.A. //Czechoslovak J.of Physics. 1996. **46**. 1005. Suppl. S2 (Proceedings of LT-21, Prague, 1996)

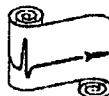
Издательство МФТИ

141700, Долгопрудный Московской обл.,

Институтский пер., 9. 206 АК.

Тел./факс (095) 408-76-81

E-mail publ@za-nauku.mipt.ru



ВЫШЛИ В СВЕТ КНИГИ

ФЕДОРЕНКО Р. П. Введение в вычислительную физику. 1994. — 528 с.

РАЙЗЕР Ю. П., ШНЕЙДЕР М. Н., ЯЦЕНКО Н. А. Высокочастотный емкостный разряд: Физика. Техника эксперимента. Приложения. 1995. — 320 с.

КАЛИНИН А. Ю., ТЕРЕШИН Д. А. Стереометрия-10. 1996. — 256 с.

КОРЕНЕВ Г. В. Тензорное исчисление. 1996. — 240 с.

КИНГСЕП А. С. Введение в нелинейную физику плазмы. 1996. — 208 с.

ЦИПЕНЮК Ю. М. Физические основы сверхпроводимости. 1996. — 96 с.

БАЗЕЛЯН Э. М., РАЙЗЕР Ю. П. Искровой разряд. 1997. — 320 с.

ТЕР-КРИКОРОВ А. М., ШАБУНИН М. И. Курс математического анализа. 2-е издание. 1997. — 720 с.

ВОЛОСЕВИЧ П. П., ЛЕВАНОВ Е. И. Автомодельные задачи газовой динамики. 1997. — 240 с.

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ по общей физике. Том третий. Квантовая физика. Под ред. Ю. М. ЦИПЕНЮКА. 1998. — 400 стр.

СБОРНИК ЗАДАЧ по общей физике. Часть 1. Механика и термодинамика. Под ред. В. А. ОВЧИННИКА. 1998. — 416 стр.

Научное издание

*МИНЕЕВ Владимир Петрович
САМОХИН Кирилл Владимирович*

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ НЕОБЫЧНОЙ СВЕРХПРОВОДИМОСТИ

Научный редактор *Е. Я. Шерман*
Оператор верстки *В. И. Федотов*
Художник *М. В. Ивановский*
Рис. на обложке *Л. В. Минеевой*

ИБ № 21

ЛР № 064290 от 14.11.95. Подписано в печать 23.02.98. Формат 60×90/16.
Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Печ. л. 9. Уч.-изд. л. 9,35.
Тираж 1000 экз. Заказ № 3340 . С-004.

Издательство Московского физико-технического института
141700, г. Долгопрудный Московской обл., Институтский пер., д. 9
Тел. 408-76-81

Отпечатано в Московской типографии № 2 РАН
121099, Москва, Шубинский пер., д. 6
