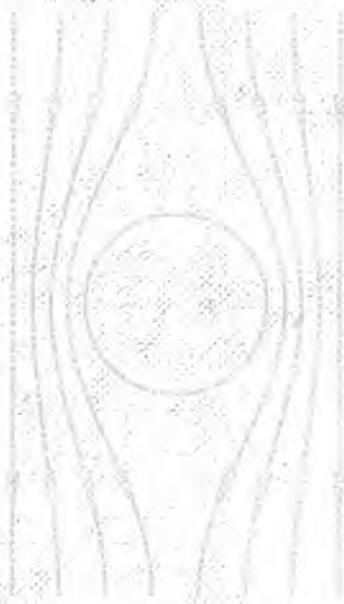


Современные

ЛЕКЦИОННЫЕ КУРСЫ

В.В. ШМИДТ

**Введение
в физику
сверхпроводников**



ББК 22.16
УДК 539.2
Ш 73

—  и —

Издание осуществлено при
поддержке Российского фонда
фундаментальных исследований
по проекту 99-02-30008

Шмидт В. В.

Ш 73 Введение в физику сверхпроводников. Изд. 2-е, испр.
и доп. М.: МЦНМО, 2000. — XIV + 402 с.: ил. Библиогр.:
с. 379 – 393 (198 назв.).

ISBN 5-900916-68-5

В книге изложены основы современных представлений о сверхпроводимости. Материал, как правило, расположен в порядке возрастания сложности изложения. В начале представлены основные экспериментальные факты и термодинамическое описание сверхпроводимости. Затем следует линейная электродинамика сверхпроводников, основанная на феноменологических уравнениях Лондонов. Далее излагается теория сверхпроводимости Гинзбурга – Ландау, основанная на простейших представлениях о квантовой природе сверхпроводимости, и ее следствия, а также основные понятия о флуктуационных эффектах в низкоразмерных сверхпроводниках. Глава, посвященная слабой сверхпроводимости (эффектам Джозефсона), заканчивается описанием сверхпроводящих квантовых интерферометров (сквидов) и других практических применений джозефсоновских переходов. Основы физики сверхпроводников второго рода, включающие эффекты, характерные для высокотемпературных сверхпроводников, также изложены (в следующей главе) в рамках феноменологической теории Гинзбурга – Ландау. Отдельная глава посвящена изучению физики сверхпроводников на основе микроскопической теории Бардина – Купера – Шриффера и ее обобщения для куперовского спаривания с нетривиальной симметрией. В последней главе излагаются основы теории неравновесных явлений в сверхпроводниках и мезоскопических сверхпроводящих структурах.

Главное внимание уделяется физической интерпретации явлений.

Для чтения книги необходимо знание основ классической электродинамики и квантовой механики в объеме вузовского курса физики, а также элементов квантовой теории металлов.

МЦНМО выражает благодарность компании «Демос» за предоставление высокоскоростного и качественного доступа в интернет

ISBN 5-900916-68-5

© В. В. Шмидт, 2000

© МЦНМО, 2009

Предисловие ко второму изданию

Автор этой книги, Вадим Васильевич Шмидт, безвременно ушел из жизни в 1985 году, через 3 года после выхода в свет ее первого издания. С тех пор этот популярный учебник, в котором в доступной форме излагаются основы физики сверхпроводников, стал библиографической редкостью, и его трудно найти даже в крупнейших научных библиотеках. За последние 15 лет в физике сверхпроводимости был достигнут очень существенный прогресс. В первую очередь, нужно отметить открытие в 1986 г. высокотемпературной сверхпроводимости (ВТСП), а также активные исследования с начала 90-х годов в области мезоскопической сверхпроводимости. Эти научные достижения, часть из которых сулит весьма важные практические применения, привели к значительному росту интереса физиков и инженеров к различным аспектам физики сверхпроводников. В 1997 году английский перевод книги (с небольшими добавлениями о высокотемпературных сверхпроводниках) был издан в германском издательстве Springer-Verlag [1]. Англоязычное издание, несомненно полезное для зарубежных читателей, не сделало книгу более доступной для студентов-физиков и инженеров в России.

Решаясь предпринять второе русское издание книги, мы надеемся предоставить новому поколению отечественных физиков возможность изучить основы сверхпроводимости по лучшему из

написанных для этого учебников. При этом нам кажется разумным дополнить книгу изложением некоторых достаточно уже устоявшихся элементов современной науки о сверхпроводимости, которые либо вовсе не существовали к началу 80-х годов, либо приобрели с тех пор заметно большее значение. К таковым, по нашему мнению, относятся флюктуационные эффекты вблизи точки сверхпроводящего перехода, а также в низкоразмерных сверхпроводниках (тонкие пленки и проволоки, слоистые вещества); взаимодействие вихрей со слабыми примесями и аномальная магнитная релаксация в смешанном состоянии ВТСП; эффект четности в малых сверхпроводящих гранулах; анизотропное спаривание в ВТСП; квантовые флюктуации и макроскопическое квантовое туннелирование в джозефсоновских контактах; когерентные явления в мезоскопических структурах из сверхпроводников и нормальных металлов. В то же время, мы вовсе не касаемся вопроса о микроскопической природе ВТСП, поскольку достигнутая здесь степень понимания еще недостаточна для физически прозрачного изложения.

При написании дополняющего материала мы старались по возможности не отклоняться от общего стиля книги, предпочитая качественные соображения сколько-нибудь громоздким вычислениям (вниманию читателя, более интересующегося теоретическими аспектами современной физики сверхпроводимости, могут быть предложены недавно вышедшие книги [2, 3]). Как правило, добавленный текст содержится в отдельных параграфах, отмеченных значком *, а некоторые небольшие дополнения встроены непосредственно в оригинальный текст. Мы благодарны В. Б. Гешкенбейну, Л. Б. Иоффе, А. И. Ларкину, Г. Б. Лесовику и А. В. Устинову за полезные советы по содержанию и стилю добавлений.

2000 г.

Черноголовка – Москва

Валерий Рязанов, Михаил Фейгельман

Предисловие к первому изданию

С момента открытия сверхпроводимости прошло уже 70 лет, но только за последние два десятилетия сверхпроводники из экзотического объекта физических исследований превратились в практически используемые материалы. Появились новые отрасли техники, где сверхпроводящие материалы используются для создания сверхсильных магнитных полей, для создания кабелей, способных передавать большие потоки энергии без потерь, для создания мощных электрических генераторов и двигателей. Все большее значение приобретают сверхпроводники в области слаботочной электротехники и электроники. Здесь прежде всего нужно назвать приборы уникальной чувствительности, основанные на эффекте Джозефсона, болометры, СВЧ-резонаторы, параметрические преобразователи частоты и т. п. Ведутся исследовательские работы по использованию сверхпроводников для создания элементов памяти и логики в ЭВМ.

В связи с этим появилось значительное количество специалистов, непосредственно сталкивающихся в своей повседневной практической работе с явлением сверхпроводимости. Появились соответствующие специальности в некоторых вузах.

Сейчас на русском языке существует несколько книг по сверхпроводимости достаточно общего содержания — это прежде все-

го книги Роуз-Инса и Родерика [4], Линтона [5], Тинкхама [6], Де Жена [7], Тилли и Тилли [8]. Каждая из этих книг хороша по-своему, однако некоторые из них [6], [7] требуют от читателя достаточно высокого уровня подготовки по теоретической физике, а другие недостаточно полно отражают современное состояние физики сверхпроводников.

Предлагаемая вниманию читателя книга написана на основе курса лекций, который на протяжении ряда лет читался автором в Московском институте стали и сплавов, и, по замыслу автора, должна главным образом раскрыть физику явления сверхпроводимости.

Мы старались избегать ситуаций, когда за словами «легко показать» скрываются нудные и громоздкие выкладки. Почти все результаты, данные в книге, выведены из «первых принципов», и читатель способен проследить за выводом от начала до конца. Мы всегда старались просто и быстро получить качественный результат, оценку по порядку величины, вместо того чтобы излагать сложные расчеты, ведущие к точному ответу.

При написании книги предполагалось, что читатель знаком с основами квантовой механики и физики металлов.

Первая глава носит вводный характер. В ней приводятся основные экспериментальные факты, дается краткий очерк развития теории сверхпроводимости и излагается термодинамика сверхпроводников. Вторая глава посвящена линейной электродинамике сверхпроводников на основе уравнений Лондонов. Основы теории сверхпроводимости Гинзбурга – Ландау — содержание третьей главы. В четвертой главе излагается физика слабой сверхпроводимости (эффектов Джозефсона). Здесь же дается описание основных принципов работы сверхпроводящих квантовых интерферометров (СКВИДов). Пятая глава посвящена проблемам сверхпроводников второго рода. В шестой главе дается изложение основных физических идей микроскопической теории сверхпроводимости Бардина – Купера – Шриффера. От читателя при этом требуется лишь самое минимальное знание основ квантовой механики. В этой главе дается представление об электрон-электронном взаимодействии через фононы, об основ-

ном состоянии сверхпроводника, об энергетической щели и ее зависимости от температуры. Показывается, как существование энергетической щели обуславливает возможность бездисипативного тока. Заключительная седьмая глава посвящена изучению некоторых неравновесных эффектов в сверхпроводниках.

Автор рад воспользоваться возможностью, чтобы искренне поблагодарить Д. А. Киржница, прочитавшего рукопись этой книги, за многие интересные замечания и дискуссии.

Автор приносит свою глубокую благодарность К. К. Лихареву за обсуждение некоторых вопросов физики сверхпроводников и за его конструктивную критику рукописи этой книги.

1981–82 гг.

Москва – Черноголовка

B. Шмидт

Содержание

Предисловие ко второму изданию	IX
Предисловие к первому изданию	XI
I. ВВЕДЕНИЕ	1
§ 1. Основные экспериментальные факты	1
1.1. Открытие сверхпроводимости. Сверхпроводящие элементы и соединения	1
1.2. Квантование магнитного потока	4
1.3. Эффекты Джозефсона	5
1.4. Эффект Мейсснера - Оксенфельда	6
§ 2. Магнитные свойства сверхпроводников	9
2.1. Магнитные свойства сверхпроводников первого рода	9
2.2. Промежуточное состояние	12
2.3. Магнитные свойства сверхпроводников второго рода	17
§ 3. Термодинамика сверхпроводников	18
3.1. Критическое поле массивного материала (критическое термодинамическое магнитное поле)	18
3.2. Энтропия сверхпроводника	19
3.3. Теплоемкость	21
3.4. Свободная энергия	22
§ 4. Очертания развития теории сверхпроводимости	24

II. ЛИНЕЙНАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА СВЕРХПРОВОДНИКОВ	30
§ 5. Уравнения Лондонов	30
5.1. Первое уравнение Лондонов	31
5.2. Второе уравнение Лондонов	31
§ 6. Глубина проникновения магнитного поля	34
§ 7. Нелокальная электродинамика сверхпроводников	36
§ 8. Квантовое обобщение уравнения Лондонов.	
Квантование магнитного потока	39
8.1. Квантовое обобщение уравнения Лондонов	39
8.2. Квантование магнитного потока	40
§ 9. Распределение поля и тока в простейших конфигурациях сверхпроводников	43
9.1. Пластина в параллельном поле	43
9.2. Пластина с током	45
9.3. Пластина с током в однородном поперечном магнитном поле	46
9.4. Пленка над экраном	47
9.5. Принцип замыкания	50
§ 10. Кинетическая индуктивность	53
§ 11. Комплексная проводимость сверхпроводника	56
§ 12. Скин-эффект и поверхностный импеданс	58
12.1. Нормальный скин-эффект	58
12.2. Поверхностный импеданс	59
III. ТЕОРИЯ СВЕРХПРОВОДИМОСТИ ГИНЗБУРГА – ЛАНДАУ	62
§ 13. Введение	62
§ 14. Уравнения теории Гинзбурга – Ландау	65
14.1. Плотность свободной энергии	65
14.2. Уравнения Гинзбурга – Ландау (ГЛ)	67
14.3. Градиентная инвариантность теории ГЛ .	71
§ 15. Два характерных масштаба длины в сверхпроводниках. Эффект близости	73
15.1. Длина когерентности и глубина проникновения	73

15.2. Эффект близости	76
§ 16. Энергия границы раздела между нормальной и сверхпроводящей фазами	79
§ 17. Критическое поле тонкой пленки	87
§ 18. Критический ток тонкой пленки	92
§ 19*. Флуктуационные эффекты вблизи сверхпроводящего перехода	97
19.1. Оценка ширины флуктуационной области	97
19.2. Флуктуационные эффекты в окрестности T_c	102
19.3. Парапроводимость (эффект Асламазова – Ларкина)	108
IV. СЛАБАЯ СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ	112
§ 20. Фазовая когерентность и виды слабых связей	112
§ 21. Стационарный эффект Джозефсона	115
§ 22. Нестационарный эффект Джозефсона. Резистивные характеристики джозефсоновских переходов	122
22.1. Джозефсоновская генерация	122
22.2*. Критический ток и «ток возврата» джозефсонового перехода с емкостью	127
§ 23*. Флуктуации критического тока. Макроскопическое квантовое туннелирование	133
23.1. Тепловые флуктуации критического тока в джозефсоновском переходе	133
23.2. Макроскопические квантовые эффекты	135
23.3. Макроскопическое квантовое туннелирование и когерентность	139
§ 24. Отклик джозефсоновского перехода на внешнее магнитное поле	142
24.1. Уравнение Феррелла – Прейнджа	143
24.2. Проникновение магнитного поля в переход. Джозефсоновские вихри	146
24.3. Максимальный бездиссилиативный ток джозефсоновского перехода. Сильное магнитное поле	149

§ 25. Сверхпроводящие квантовые интерферометры (сквиды)	153
25.1. Двухконтактный сквид	153
25.2. Одноконтактный сквид	157
§ 26. Применения слабой сверхпроводимости	166
V. СВЕРХПРОВОДНИКИ ВТОРОГО РОДА	171
§ 27. Введение	171
§ 28. Поле одиночного вихря	174
§ 29. Первое критическое поле	177
§ 30. Взаимодействие вихрей	181
§ 31. Второе критическое поле	184
§ 32. Обратимый магнитный момент сверхпроводника второго рода	187
§ 33. Поверхностная сверхпроводимость. Третье крити- ческое поле	191
§ 34. Поверхностный барьер. Перегрев мейсснеровского состояния	195
§ 35*. Анизотропные сверхпроводники II рода	203
§ 36*. Разрушение сверхпроводимости в тонкой пленке тепловыми вихрями	206
36.1. Фазовый переход Березинского – Костери- ца – Таулеса	206
36.2. Вольт-амперные характеристики вблизи БКТ-перехода	213
§ 37*. Плавление решетки вихрей	216
§ 38. Критический ток в сверхпроводниках второго ро- да. Критическое состояние	219
§ 39. Взаимодействие вихрей с центрами пиннинга	223
39.1. Взаимодействие вихрей с плоской поверхно- стью сверхпроводника	224
39.2. Взаимодействие вихря с полостью в сверх- проводнике	228
§ 40. Резистивное состояние	231
§ 41*. Коллективный пиннинг вихрей слабыми дефек- тами	236

41.1. Одиночный вихрь в поле слабых примесей	236
41.2. Коллективный пиннинг вихревой решетки	239
§ 42*. Крип магнитного потока и нелинейная проводимость в ВТСП	244
VI. МИКРОСКОПИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СВЕРХПРОВОДИМОСТИ	255
§ 43. Введение. Электрон-фононное взаимодействие	255
§ 44. Основное состояние сверхпроводника	259
44.1. Распределение электронов в основном состоянии	259
44.2. Энергия основного состояния	265
§ 45. Спектр элементарных возбуждений сверхпроводника	269
45.1. Энергетическая щель	269
45.2. Плотность состояний элементарных возбуждений сверхпроводника и длина когерентности	272
45.3. Зависимость величины энергетической щели от температуры	274
§ 46. Туннельные эффекты в сверхпроводниках	279
46.1. Туннельные характеристики	280
46.2*. Энергия связи <i>SIS</i> -перехода и температурная зависимость критического тока	285
§ 47*. Связь сверхпроводников через ферромагнетик	292
§ 48*. Эффект четности в сверхпроводниках	301
§ 49*. Сверхпроводники с нетривиальным спариванием	307
§ 50. Незатухающий ток и эффект Мейсснера – Оксенфельда	314
§ 51. Связь микротеории с теорией Гинзбурга – Ландау	320
VII. НЕКОТОРЫЕ НЕРАВНОВЕСНЫЕ ЭФФЕКТЫ В СВЕРХПРОВОДНИКАХ	323
§ 51. Квазичастицы: электроны и дырки	324
§ 52. Заряд квазичастицы в сверхпроводнике	326
§ 53. Время релаксации заряда квазичастиц	330

§ 54. Андреевское отражение. Андреевские уровни в <i>SNS</i> -переходе	331
§ 55*. Проводимость <i>SIN</i> -структур при низких температурах. Андреевский интерферометр	340
§ 56. Разбаланс заселенностей ветвей спектра элементарных возбуждений и электрическое поле в сверхпроводнике	349
§ 57. Экспериментальное исследование неравновесного состояния сверхпроводника около <i>NS</i> -границы	356
57.1. Опыты Ю и Мерсеро	356
57.2. Избыточное сопротивление <i>NS</i> -границы	359
57.3. Центры проскальзывания фазы	361
§ 58. Неравновесное усиление сверхпроводимости	365
§ 59. Продольный термоэлектрический эффект (эффект Зеебека) в сверхпроводниках	366
§ 60. Сверхпроводящая «термопара» и магнитный поток, индуцированный потоком тепла	368
§ 61. Термоэлектрические эффекты в джозефсоновских переходах и сверхпроводниках II рода со слабым пиннингом	371
61.1. Джозефсоновский <i>SNS</i> -переход в потоке тепла	371
61.2. Влияние магнитного поля на термоэлектрические явления в джозефсоновских <i>SNS</i> -переходах	374
61.3*. Термоэлектрические эффекты в смешанном состоянии сверхпроводников II рода со слабым пиннингом	377
Литература	379
Предметный указатель	394

ГЛАВА I

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Основные экспериментальные факты

1.1. Открытие сверхпроводимости. Сверхпроводящие элементы и соединения. Сверхпроводимость была открыта в 1911 г. в Голландии в Лейденской лаборатории. Камерлинг-ОН-нес, изучая зависимость электросопротивления ртути от температуры, обнаружил, что при температуре около 4 К сопротивление образца внезапно исчезло и не было обнаружено при всех достижимых температурах ниже этой [9]. Важно, что сопротивление исчезало не постепенно с уменьшением температуры, а сразу, скачком. Стало ясно, что образец перешел в какое-то новое, до тех пор неизвестное состояние, в котором он не имеет электрического сопротивления. Это явление было названо сверхпроводимостью.

Все попытки обнаружить хоть какие-то следы сопротивления у массивных сверхпроводников ни к чему не привели. Используя современные чувствительные приборы, мы можем утверждать, что сопротивление сверхпроводников отсутствует по крайней мере на уровне 10^{-24} Ом · см. Для сравнения укажем, что удельное сопротивление очень чистой меди при температуре 4.2 К имеет порядок 10^{-9} Ом · см.

Вскоре после открытия сверхпроводимости ртути было обнаружено, что этим свойством обладают и некоторые другие

металлы: олово, свинец, индий, алюминий, ниобий и др. (см. табл. 1.1). Сверхпроводниками оказались и многие сплавы и интерметаллические соединения. Так, до 1986 г. рекордные температуры существования сверхпроводимости (около 20 К) наблюдались именно на интерметаллических соединениях (см. табл. 1.2). Открытие в 1986 – 1993 гг. ряда высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП) дало отодвинуло температурную границу сверхпроводимости и позволило изучать и практически использовать сверхпроводящие материалы не только при температуре кипения жидкого гелия (4.2 К), но и при температуре кипения жидкого азота (77 К), гораздо более дешевой криогенной жидкости.

Таблица 1.1. Критические температуры и критические магнитные поля элементов-сверхпроводников [10].

Элемент	T_c , К	$H_{cm}(0)$, Э
Al	1.175 ± 0.002	104.9 ± 0.3
Be	0.026	
Cd	0.517 ± 0.002	28 ± 1
Ga	1.083 ± 0.001	59.2 ± 0.3
Hf	0.128	
Hg (α)	4.154 ± 0.001	411 ± 2
Hg (β)	3.949	339
In	3.408 ± 0.001	281.5 ± 2
Ir	0.1125 ± 0.001	16 ± 0.05
La (α)	4.88 ± 0.02	800 ± 10
La (β)	6.00 ± 0.1	1096, 1600
Lu	0.1	< 400
Mo	0.915 ± 0.005	96 ± 3
Nb	9.25 ± 0.02	2060 ± 50
Os	0.66 ± 0.03	70
Pa	1.4	
Pb	7.196 ± 0.006	803 ± 1
Re	1.697 ± 0.006	200 ± 5
Ru	0.49 ± 0.015	69 ± 2
Sn	3.722 ± 0.001	305 ± 2

Элемент	T_c , К	$H_{cm}(0)$, Э
Ta	4.47 ± 0.04	829 ± 6
Tc	7.8 ± 0.01	1410
Th	1.38 ± 0.02	160 ± 3
Ti	0.40 ± 0.04	56
Tl	2.38 ± 0.04	178 ± 5
V	5.40 ± 0.05	1408
W	0.0154 ± 0.0005	1.15 ± 0.03
Zn	0.850 ± 0.01	54 ± 0.3
Zr	0.61 ± 0.15	47

Температура, при которой происходит переход из нормального состояния в сверхпроводящее, называется критической и обозначается T_c . Очень скоро после открытия сверхпроводимости было обнаружено, что сверхпроводимость можно разрушить не только нагреванием образца, но и помещением его в сравнительно слабое магнитное поле. Это поле назвали критическим полем массивного материала и обозначили H_{cm} в отличие от критических полей пленок, тонких нитей, шариков и т. д.

Таблица 1.2. Критические температуры некоторых интерметаллических соединений и высокотемпературных сверхпроводников.

Соединение	T_c , К
Nb ₃ Sn	18.1
(Nb ₃ Al) ₄ + Nb ₃ Ge	20
La _{0.925} Sr _{0.075} CuO ₄	34
YBa ₂ Cu ₃ O ₇	92.4
Bi ₂ Sr ₂ Ca ₂ Cu ₃ O ₁₀	111
Tl ₂ Sr ₂ Ca ₂ Cu ₃ O ₁₀	123
HgBa ₂ Ca ₂ Cu ₃ O ₈	133

Величины T_c и H_{cm} для элементов-сверхпроводников приведены в табл. 1.1. Здесь $H_{cm}(0)$ — критическое поле, экстраполированное к абсолютному нулю температуры. Зависимость H_{cm} от

температуры хорошо описывается эмпирической формулой

$$H_{cm}(T) = H_{cm}(0) [1 - (T/T_c)^2]. \quad (1.1)$$

Эта зависимость приведена на рис. 1.1. Этот рисунок по существу представляет собой фазовую диаграмму сверхпроводящего состояния в координатах (H, T) . Любая точка на этой плоскости, лежащая в заштрихованной области, соответствует сверхпроводящему состоянию.

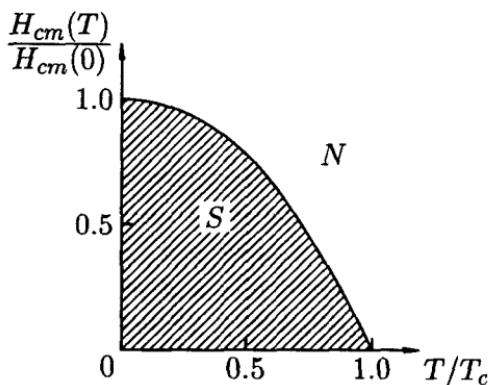


Рис. 1.1. Зависимость критического поля H_{cm} от температуры.

1.2. Квантование магнитного потока. Электрический ток в массивном сверхпроводящем кольце может существовать неограниченно долго. При этом, конечно, никакого источника тока не требуется, так как сопротивление кольца равно нулю. Создать такой незатухающий ток можно следующим образом. Поместим кольцо при $T > T_c$ во внешнее магнитное поле так, чтобы магнитные силовые линии проходили через отверстие кольца. Переведем кольцо в сверхпроводящее состояние, т. е. понизим температуру ниже T_c , и выключим после этого источник магнитного поля. В первый момент после выключения поля магнитный поток внутри начнет уменьшаться и, по закону электромагнитной индукции Фарадея, индуцирует в кольце ток, который уже не затухнет. Этот ток будет препятствовать уменьшению магнитного потока в кольце, т. е. будет теперь, после выключения внешнего источника магнитного поля, сам

поддерживать поток в кольце на прежнем уровне. Действительно, если бы кольцо обладало каким-то сопротивлением R , то после выключения внешнего поля ток в кольце затух бы за время порядка L/R , где L — индуктивность кольца, но в сверхпроводящем кольце $R = 0$, и такое затухание будет продолжаться бесконечно долго. Это значит, что в кольце оказался «замороженным» магнитный поток, а по кольцу циркулирует не затухающий ток. Это — так называемый сверхпроводящий ток, или сверхток.

На первый взгляд кажется, что величина «замороженного» в кольце магнитного потока может быть произвольной. Для исследования этого вопроса были поставлены эксперименты [11], [12], которые обогатили нас важнейшим экспериментальным фактом: магнитный поток в полом сверхпроводящем цилиндре может принимать только значения, кратные некоторой величине $\Phi_0 = 2.07 \cdot 10^{-7} \text{ Гс} \cdot \text{см}^2$, которую называют квантом магнитного потока. Квант магнитного потока может быть выражен через фундаментальные константы: $\Phi_0 = \pi \hbar c/e$, где \hbar — постоянная Планка, c — скорость света в вакууме, e — заряд электрона.

Конечно, эти исследования (1961 г.) были предприняты не случайно. Удивительно даже, что они не были проведены раньше, потому что уже к середине 30-х годов сложилось мнение, что сверхпроводимость — это квантовое явление.

1.3. Эффекты Джозефсона. Другим подтверждением того, что сверхпроводимость — квантовое явление, служат эффекты так называемой слабой сверхпроводимости, или эффекты Джозефсона [13]. Предсказанные в 1962 году, они вскоре были экспериментально обнаружены.

Под слабой сверхпроводимостью понимается такая ситуация, когда два сверхпроводника соединены между собой какой-либо слабой связью. Такой слабой связью может быть туннельный переход, тонкопленочное сужение, просто слабое касание двух сверхпроводников на малой площади и другие подобные «ослащения» сверхпроводимости контакта между двумя сверхпроводниками.

Различают два эффекта Джозефсона: стационарный и нестационарный.

Остановимся сперва на стационарном эффекте. Пропустим ток через слабую связь (или, иначе, через переход Джозефсона). Оказывается, что если ток достаточно слабый, он протекает через слабую связь без сопротивления, даже если сама слабая связь сделана из несверхпроводящего материала, например, в туннельном переходе — из изолятора. Здесь мы самым непосредственным образом сталкиваемся с важнейшим свойством сверхпроводника — согласованным, когерентным поведением его электронов. Электроны двух сверхпроводников с помощью слабой связи объединились в единый квантовый коллектив. То же можно сказать и по-другому. Волновая функция электронов с одной стороны слабой связи, проникнув через эту связь на другую сторону, проинтерферировала с «местной» волновой функцией электронов. В результате все сверхпроводящие электроны с обеих сторон слабой связи стали описываться единой волновой функцией. При этом слабая связь не должна сильно изменить волновые функции с двух сторон связи по сравнению с тем, какими они были до установления этой связи.

Еще более впечатляющим является нестационарный эффект Джозефсона. Увеличим постоянный ток через слабую связь настолько, чтобы на ней появилось некоторое электрическое напряжение. Оказывается, что это напряжение, кроме постоянной составляющей V , будет иметь еще и переменную составляющую, осциллирующую с угловой частотой ω , причем

$$\hbar\omega = 2eV. \quad (1.2)$$

Фундаментальный эксперимент по прямому обнаружению этого излучения из джозефсоновского перехода, или, иначе, джозефсоновской генерации, был успешно проведен советскими физиками И. К. Янсоном, В. М. Свишуновым и И. М. Дмитренко [14].

1.4. Эффект Мейсснера – Оксенфельда. Целых 22 года после открытия сверхпроводимости считалось, что сверхпровод-

ник — это идеальный проводник, т. е. просто металл с нулевым удельным сопротивлением.

Рассмотрим, как должен вести себя такой идеальный проводник в слабом внешнем магнитном поле, которое еще не может разрушить его идеальную проводимость.

Пусть в исходном состоянии идеальный проводник охлажден ниже критической температуры и внешнее магнитное поле отсутствует. Внесем теперь такой идеальный проводник во внешнее магнитное поле. Из общих соображений легко установить, что это поле в наш образец не проникает, что схематически изображено на рис. 1.2, а. Действительно, сразу по появлении внешнего поля на поверхности идеального проводника возникает ток, создающий по правилу Ленца свое собственное магнитное поле, направленное навстречу приложенному, и полное поле в образце будет равно нулю.

Докажем это, воспользовавшись уравнениями Максвелла. При изменении индукции B внутри образца должно возникнуть электрическое поле E :

$$\text{rot } E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t},$$

где c — скорость света в вакууме. Но в идеальном проводнике $E = 0$, так как $E = j\rho$, где ρ — удельное сопротивление, которое в нашем случае равно нулю, j — плотность наведенного тока. Отсюда следует, что $B = \text{const}$, но поскольку до внесения образца в поле $B = 0$, то ясно, что $B = 0$ и после внесения в поле. Это можно интерпретировать еще и так: поскольку $\rho = 0$, время проникновения магнитного поля в идеальный проводник равно бесконечности.

Итак, внесенный во внешнее магнитное поле идеальный проводник имеет $B = 0$ в любой точке образца. Однако того же состояния (идеальный проводник при $T < T_c$ во внешнем магнитном поле) можно достигнуть и другим путем: сперва наложить внешнее поле на «теплый» образец, а затем охладить его до температуры $T < T_c$.

Электродинамика предсказывает для идеального проводника совершенно другой результат. Действительно, образец при $T >$

$> T_c$ имеет сопротивление и магнитное поле в него хорошо проникает. После охлаждения его ниже T_c поле останется в образце. Эта ситуация изображена на рис. 1.2, б.

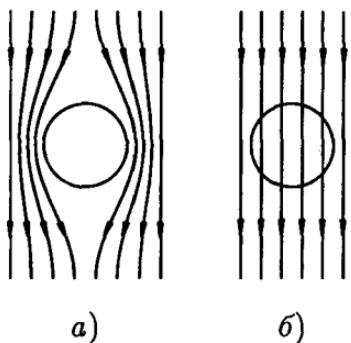


Рис. 1.2. Магнитное состояние идеального проводника при $T < T_c$, $H > 0$ зависит от предыстории: а) идеальный проводник внесен в магнитное поле при $T < T_c$; б) то же, но при $T > T_c$.

Обратите внимание на то, что во всех предыдущих рассуждениях мы всегда называли образец в состоянии $\rho = 0$ идеальным проводником, а не сверхпроводником.

До 1933 г. считалось, что сверхпроводник — это и есть идеальный проводник. Но вот Мейсснер и Оксенфельд [15] поставили опыт и обнаружили, что это не так! Оказалось, что при $T < T_c$ поле в образце равно нулю всегда ($B = 0$), независимо от пути перехода к условию $T < T_c$ при наличии внешнего магнитного поля.

Это было чрезвычайно важное открытие. Ведь если $B = 0$ независимо от предыстории образца, то это равенство можно рассматривать как характеристику сверхпроводящего состояния, которое возникает при $H < H_{cm}$. Но тогда можно рассматривать переход в сверхпроводящее состояние как фазовый переход в новое фазовое состояние и использовать для исследования сверхпроводящей фазы вещества всю мощь термодинамического подхода.

Итак, сверхпроводящее состояние удовлетворяет уравнениям

$$\rho = 0, \quad (1.3)$$

$$\mathbf{B} = 0. \quad (1.4)$$

§ 2. Магнитные свойства сверхпроводников

По своим магнитным свойствам сверхпроводники делятся на сверхпроводники первого рода и сверхпроводники второго рода. К сверхпроводникам первого рода относятся все элементы сверхпроводники, кроме ниобия. Ниобий, сверхпроводящие сплавы и химические соединения являются сверхпроводниками второго рода.

Главное отличие этих двух групп сверхпроводников заключается в том, что они по-разному откликаются на внешнее магнитное поле. Эффект Мейсснера – Оксенфельда (§ 1) наблюдается у сверхпроводников первого рода.

2.1. Магнитные свойства сверхпроводников первого рода. Рассмотрим кривую намагничивания сверхпроводника. Пусть образец представляет собой длинный цилиндр, помещенный в продольное внешнее магнитное поле H_0 . С увеличением поля H_0 индукция внутри сверхпроводника не будет изменяться она останется равной $B = 0$. Поэтому кривая намагничивания $B = B(H_0)$ будет иметь вид, изображенный на рис. 2.1, а. Когда H_0 станет равным H_{cm} , сверхпроводимость разрушится, поле проникнет в сверхпроводник и B станет равным H_0 .

Магнитная индукция B и напряженность поля H_0 связаны известным соотношением

$$B = H_0 + 4\pi M, \quad (2.1)$$

где M — магнитный момент единицы объема образца. Часто кривую намагничивания строят в виде зависимости величины $-4\pi M$ от H_0 . Эта зависимость приведена на рис. 2.1, б. Выведем основные магнитные свойства сверхпроводников первого рода из уравнений (1.3) и (1.4) [16].

1) Магнитные силовые линии вне сверхпроводника всегда касательны к его поверхности. Действительно, мы знаем из электродинамики, что магнитные силовые линии, т. е. линии вектора индукции B , непрерывны и замкнуты. Это можно сформулировать в виде уравнения

$$\operatorname{div} B = 0.$$

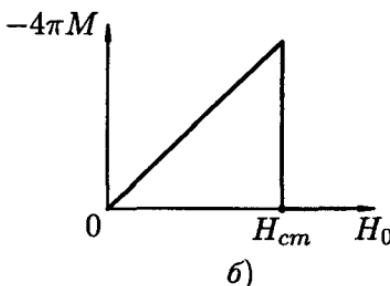
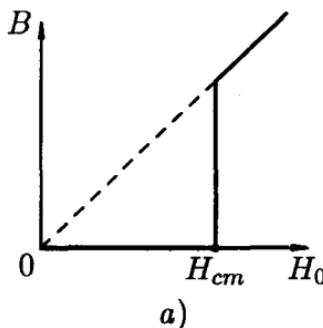


Рис. 2.1. а) Кривая намагничивания сверхпроводника; б) зависимость магнитного момента единицы объема M от H_0 в сверхпроводнике.

Отсюда следует, что нормальные составляющие вектора \mathbf{B} к поверхности любого материала внутри и снаружи должны быть равны. Но внутри сверхпроводника $B^{(i)} = 0$, следовательно, и нормальная компонента $B_n^{(i)} = 0$. Следовательно, нормальная компонента $B_n^{(e)}$ вне сверхпроводника на его поверхности тоже равна нулю. Но равенство $B_n^{(e)} = 0$ как раз и означает, что магнитные силовые линии касательны к поверхности сверхпроводника.

2) Следствием предыдущего свойства является то, что по поверхности сверхпроводника, находящегося во внешнем магнитном поле, всегда течет поверхностный электрический ток. Рис. 2.2 иллюстрирует это утверждение. Пусть \mathbf{H}_0 — поле в данном месте поверхности сверхпроводника. Из уравнения Максвелла $\operatorname{rot} \mathbf{B} = (4\pi/c)\mathbf{j}$ следует, что внутри сверхпроводника нет объемного тока ($\mathbf{j} = 0$), так как $\mathbf{B} = 0$. Значит, возможен только поверхностный ток. Рассмотрим контур $1 - 2 - 3 - 4 - 1$ на рис. 2.2 и возьмем циркуляцию $\oint \mathbf{B} d\mathbf{l}$ вектора \mathbf{B} по этому контуру. На участке $1 - 2$, который параллелен поверхности сверхпроводника,

$$\int_1^2 \mathbf{B} d\mathbf{l} = H_0 l_{12},$$

где l_{12} — длина участка $1 - 2$. Вклад от участков

2 – 3 и 1 – 4 равен нулю, так как из соображений симметрии можно утверждать, что вектор \mathbf{B} на этих участках ортогонален пути интегрирования. Вклад участка 3 – 4 тоже нулевой, так как $\mathbf{B} = 0$ внутри сверхпроводника. Итак, $\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = H_0 l_{12}$. Но согласно уравнению Максвелла

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I,$$

где I — полный ток, протекающий через поверхность, ограниченную контуром 1 – 2 – 3 – 4 – 1. Отсюда следует, что перпендикулярно плоскости чертежа в направлении «от нас» (так, как это показано на рис. 2.2) по поверхности сверхпроводника течет поверхностный ток, линейная плотность которого $j_{\text{пов}}$ определяется из уравнения

$$H_0 l_{12} = \frac{4\pi}{c} j_{\text{пов}} l_{12}.$$

Отсюда следует связь между поверхностным током и магнитным полем на поверхности сверхпроводника:

$$\mathbf{j}_{\text{пов}} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{n}, \mathbf{H}_0], \quad (2.2)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к поверхности сверхпроводника.

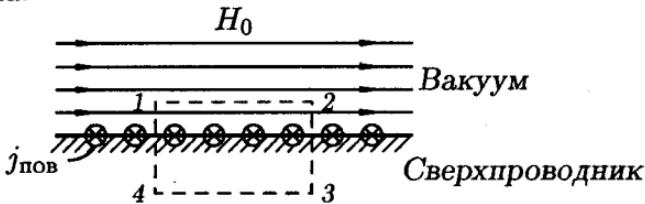


Рис. 2.2. По поверхности сверхпроводника, находящегося во внешнем магнитном поле, течет поверхностный ток.

Итак, поверхностный ток $\mathbf{j}_{\text{пов}}$ полностью задан магнитным полем на поверхности сверхпроводника \mathbf{H}_0 . Иными словами, поверхностный ток автоматически становится таким, чтобы его собственное магнитное поле внутри сверхпроводника было в точности равно и противоположно по направлению внешнему полю, что обеспечивает отсутствие результирующего поля внутри сверхпроводника ($\mathbf{B} = 0$).

3) Укажем на еще одно почти очевидное свойство: в односвязном¹⁾ сверхпроводнике токи по его поверхности текут только тогда, когда он находится во внешнем магнитном поле. Действительно, если поверхностные токи сохраняются и после отключения внешнего поля, то они создают свое поле в сверхпроводнике, что невозможно.

Задача 2.1. Какой ток течет по плоской поверхности свинца в полосе шириной 1 см, если образец находится в критическом поле при температуре 4.2 К?

Решение. Поверхностная плотность тока $j_{\text{пов}}$ определяется формулой (2.2). Поле H_0 нужно положить равным критическому для температуры 4.2 К, согласно формуле (1.1). В результате получим $j_{\text{пов}} = 422 \text{ A/cm}$.

2.2. Промежуточное состояние. Мы уже знаем, что разрушение сверхпроводимости длинного цилиндра из сверхпроводника первого рода в однородном магнитном поле, параллельном цилиндру, произойдет тогда, когда это поле достигнет критического значения H_{cm} . Значительно более сложным будет процесс разрушения сверхпроводимости того же цилиндра, если его поместить в поперечное магнитное поле. То же можно сказать об эллипсоиде, шаре и других телах более сложной формы.

Рассмотрим, например, поведение сверхпроводящего шара, помещенного во внешнее магнитное поле (рис. 2.3). Поскольку магнитные силовые линии всегда касательны к поверхности сверхпроводника, то ясно, что на «экваторе» шара произойдет сгущение силовых линий, т. е. магнитное поле увеличится, а на «полюсах» шара поле будет отсутствовать. На далеком расстоянии от шара, куда не будет достигать возмущение поля, вносимое шаром, однородное внешнее поле H_0 будет меньше «экваториального».

Возникает естественный вопрос: «А что будет, когда поле на «экваторе» достигнет критического значения H_{cm} ?» Ясно, что при этом еще H_0 будет меньше H_{cm} и поэтому полный переход

¹⁾Под односвязным телом понимается такое тело, в котором можно произвольный замкнутый контур стянуть в точку, не пересекая при этом нигде границ тела.

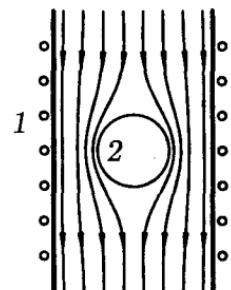


Рис. 2.3. Сверхпроводящий шар в однородном поле соленоида; 1 — обмотка соленоида, 2 — сверхпроводящий шар.

шара в нормальное состояние невозможен. Но, с другой стороны, невозможно и полностью сверхпроводящее состояние шара, так как поле на «экваторе» уже достигло критического значения.

Разрешение этого противоречия заключается в том, что шар перейдет в так называемое промежуточное состояние, т. е. разобьется на сеть чередующихся областей сверхпроводящей и нормальной фаз. При этом граничные поверхности этих областей будут всегда параллельны магнитному полю, хотя в сечении, перпендикулярном полю, они могут образовывать фигуры весьма причудливой формы.

Пусть до перехода тела в промежуточное состояние максимальное поле на его поверхности (в случае шара — на «экваторе») равно H_m . При этом внешнее поле вдали от тела равно H_0 . Ясно, что $H_m > H_0$, ясно также, что H_m пропорционально H_0 , причем коэффициент пропорциональности зависит от формы тела. Запишем это в виде

$$H_m = \frac{H_0}{1 - n}. \quad (2.3)$$

Значения n для тел различной формы приведены в нижеследующей таблице:²⁾

Геометрия образца	n
Цилиндр, параллельный полю	0
Цилиндр, перпендикулярный полю	1/2
Шар	1/3
Плоская пластинка, перпендикулярная полю	1

²⁾ Число n часто называют размагничивающим фактором.

Используя эту таблицу, легко вычислить поле H_0 , при котором тело той или иной формы переходит в промежуточное состояние. Это происходит тогда, когда поле H_m достигает значения H_{cm} . Это значит, что сфера переходит в промежуточное состояние, когда, согласно (2.3), внешнее поле H_0 достигает значения

$$H_0 = H_{cm} \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}H_{cm}.$$

Пластинка в перпендикулярном поле переходит в промежуточное состояние в любом, как угодно слабом поле H_0 . Это следует как из формулы (2.3) ($n = 1$), так и из чисто физических соображений. Действительно, пусть пластина в виде тонкого диска ориентирована перпендикулярно внешнему магнитному полю. Обтекание диска магнитными силовыми линиями приводит к большой их концентрации на краях диска. Чем больше будет радиус диска, тем больше эта концентрация, т. е. поле H_m . При бесконечном радиусе диска переход в промежуточное состояние происходит в бесконечно малом поле H_0 .

Пластина в промежуточном состоянии изображена на рис. 2.4.

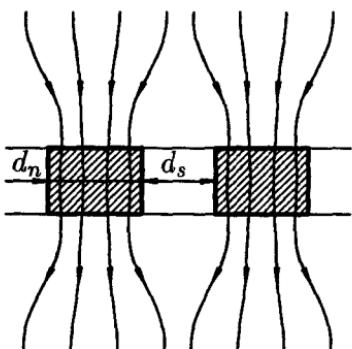


Рис. 2.4. Промежуточное состояние плоской сверхпроводящей пластины, расположенной перпендикулярно магнитному полю; d_s — размер сверхпроводящей области, d_n — размер нормальной области.

Рассмотрим теперь условия термодинамического равновесия для промежуточного состояния.

Покажем, что поле в нормальной фазе всегда равно критическому полю H_{cm} , а размеры нормальных областей d_n (см. рис. 2.4) автоматически подстраиваются так, чтобы поле там

равнялось H_{cm} . Действительно, предположим, что поле в нормальной области больше H_{cm} . Тогда это поле должно будет разрушить сверхпроводимость соседних сверхпроводящих областей. Наоборот, если поле в нормальной области меньше H_{cm} , то тогда эта нормальная область должна перейти в сверхпроводящее состояние. Поэтому устойчиво существовать нормальные и сверхпроводящие области могут только при условии, что поле в нормальных областях равно H_{cm} .

Структура промежуточного состояния сверхпроводников в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, может быть весьма нерегулярной. Классические опыты по исследованию этой структуры у сверхпроводящего шара были выполнены советски-

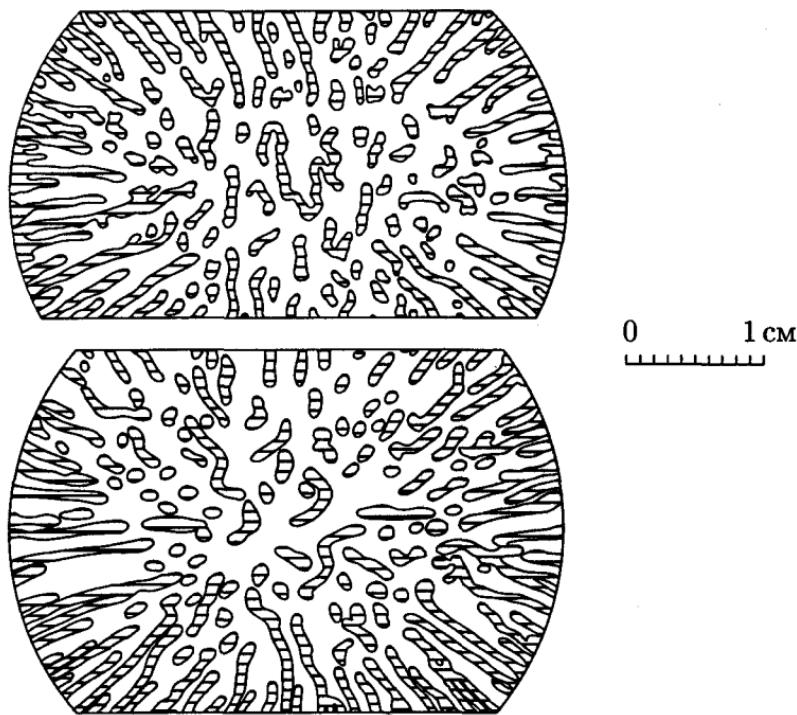


Рис. 2.5. Распределение сверхпроводящих и нормальных областей в оловянном шаре. Заштрихованы сверхпроводящие области [18].

ми физиками А. И. Шальниковым и А. Г. Мешковским [17], [18], которые исследовали распределение магнитного поля в экваториальной плоскости шара с помощью тонкой висмутовой проволочки. Для этого исследуемый шар разрезался по экватору, и затем обе его половинки располагались так, что между ними оставался очень узкий зазор, а внешнее поле было направлено перпендикулярно плоскости разреза. В этот зазор вводилась тонкая висмутовая проволочка. При низкой температуре сопротивление проволочки сильно зависит от магнитного поля, в которое она помещается. Передвигая этот висмутовый зонд, можно было изучить топографию магнитного потока в щели. Результат этого эксперимента приведен на рис. 2.5. Промежуточное состояние было исследовано и другими методами, например, с помощью фигур, полученных при напылении ферромагнитного порошка на сверхпроводящую поверхность (рис. 2.6).



Рис. 2.6. Промежуточное состояние монокристаллической оловянной фольги толщиной 29 мкм в перпендикулярном поле [19].

Интересная и своеобразная картина промежуточного состояния возникает в цилиндрической проволоке при протекании по ней тока. Когда ток в проволоке достигнет такой величины, что его магнитное поле на поверхности проволоки станет равным критическому полю H_{cm} , начнется переход проволоки в промежуточное состояние.

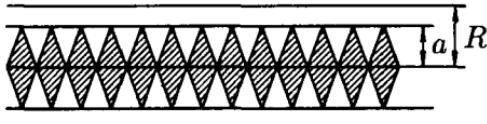


Рис. 2.7. Промежуточное состояние проволоки, по которой течет ток, больший критического.

Распределение нормальных и сверхпроводящих (заштрихованных) областей для случая, когда ток больше критического, показано на рис. 2.7. В этом случае на поверхности проволоки появится полностью нормальный слой, толщина которого ($R - a$) будет увеличиваться по мере превышения током своего критического значения.

2.3. Магнитные свойства сверхпроводников второго рода. В отличие от сверхпроводников первого рода, сверхпроводники второго рода не обнаруживают полного эффекта Мейсснера – Оксенфельда. Магнитное поле в них проникает, но весьма своеобразно.

Возьмем длинный цилиндр из сверхпроводника второго рода и поместим его в продольное внешнее магнитное поле. Начнем увеличивать это поле от нуля. Тогда мы обнаружим, что сначала цилиндр полностью выталкивает это поле, т. е. индукция внутри цилиндра равна нулю. Это значит, что сперва обнаруживается эффект Мейсснера – Оксенфельда. Однако, начиная с некоторого поля (назовем его первым критическим полем и обозначим H_{c1}), внутри цилиндра начинает появляться конечная индукция B , которая увеличивается с увеличением внешнего поля H_0 . Так будет происходить до тех пор, пока среднее поле B внутри цилиндра не станет равным внешнему полю H_0 . Это произойдет при так называемом втором критическом поле H_{c2} , при котором наш цилиндр перейдет в нормальное состояние. Правда, даже при $H_0 > H_{c2}$ сверхпроводимость все-таки сохранится в тонком поверхностном слое. Но при $H_0 = 1.69 H_{c2}$ сверхпроводимость и этого поверхностного слоя окажется разрушенной. Это поле называют третьим критическим и обозначают H_{c3} .

Состояние сверхпроводника в полях между H_{c1} и H_{c2} называется смешанным или вихревым состоянием, поскольку наличие магнитной индукции в таком состоянии поддерживается многочисленными вихревыми токами в глубине сверхпроводника. Особенна область смешанного состояния в высокотемпературных сверхпроводниках, где оно существует при низких температурах в интервале полей от 10^3 до 10^6 Э для направления поля поперек слоистой структуры кристаллов ВТСП. Хорошая металлическая проводимость в этих веществах обеспечивается электронным транспортом вдоль плоскостей Cu–O, в то время как транспорт поперек слоев слоев гораздо слабее, что можно охарактеризовать с помощью сильной анизотропии эффективной массы носителей, электронов или дырок: $m_{\parallel}/m_{\perp} = \varepsilon^2 \ll 1$. Как следствие этого (см. § 35), анизотропным оказывается и отношение второго и первого критических полей: параметр анизотропии $\varepsilon^{-1} = H_{c2}^{\parallel}/H_{c2}^{\perp} \simeq H_{c1}^{\perp}/H_{c1}^{\parallel}$ достигает нескольких сотен в ВТСП висмутового и таллиевого семейств, так что интервал существования смешанного состояния оказывается еще шире для полей, параллельных плоскостям Cu–O.

Подробно физика сверхпроводников второго рода будет рассмотрена в главе V.

§ 3. Термодинамика сверхпроводников

3.1. Критическое поле массивного материала (критическое термодинамическое магнитное поле). Пусть длинный сверхпроводящий цилиндр из сверхпроводника первого рода помещен в однородное продольное поле H_0 . Найдем то значение этого поля, при котором произойдет разрушение сверхпроводимости, т. е. найдем H_{cm} .

Если $H_0 < H_{cm}$, то существует эффект Мейсснера – Оксенфельда, т. е. $\mathbf{B} = 0$ и магнитный момент единицы объема цилиндра \mathbf{M} равен

$$\mathbf{M} = -\mathbf{H}_0/4\pi. \quad (3.1)$$

При изменении внешнего поля \mathbf{H}_0 на величину $d\mathbf{H}_0$ источник магнитного поля совершил работу над единицей объема сверхпроводника, равную

$$-\mathbf{M} d\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_0 d\mathbf{H}_0 / 4\pi. \quad (3.2)$$

Следовательно, при изменении поля от 0 до H_0 источник поля совершил работу

$$-\int_0^{H_0} \mathbf{M} d\mathbf{H}_0 = H_0^2 / 8\pi. \quad (3.3)$$

Эта работа запасена теперь в свободной энергии сверхпроводника, находящегося в магнитном поле H_0 . Таким образом, если плотность свободной энергии сверхпроводника в отсутствие магнитного поля равна F_{s0} , то плотность свободной энергии сверхпроводника в магнитном поле равна

$$F_{sH} = F_{s0} + H_0^2 / 8\pi. \quad (3.4)$$

Переход в нормальное состояние произойдет тогда, когда плотность свободной энергии F_{sH} поднимется до уровня плотности свободной энергии нормального металла: $F_{sH} = F_n$ при $H_0 = H_{cm}$. Это значит, что

$$F_n - F_{s0} = H_{cm}^2 / 8\pi. \quad (3.5)$$

Из этой формулы следует, что критическое поле массивного материала является мерой того, насколько сверхпроводящее состояние является энергетически более выгодным, чем нормальное, т. е. насколько свободная энергия сверхпроводящего состояния меньше свободной энергии нормального состояния. Поле H_{cm} часто называют критическим термодинамическим магнитным полем.

3.2. Энтропия сверхпроводника. Согласно первому началу термодинамики,

$$\delta Q = \delta R + \delta U, \quad (3.6)$$

где δQ — приращение плотности тепловой энергии рассматриваемого тела, δR — работа, совершенная единицей объема этого тела над внешними телами, δU — приращение его внутренней энергии. По определению, плотность свободной энергии F равна

$$F = U - TS, \quad (3.7)$$

где T — температура тела, S — плотность энтропии. Тогда

$$\delta F = \delta U - T \delta S - S \delta T.$$

Поскольку при обратимом процессе $\delta Q = T \delta S$, имеем

$$\delta U = T \delta S - \delta R, \quad (3.8)$$

$$\delta F = -\delta R - S \delta T. \quad (3.9)$$

Из (3.9) следует

$$S = -(\partial F / \partial T)_R. \quad (3.10)$$

Воспользуемся формулой (3.10), чтобы вычислить разность удельных энтропий сверхпроводящего и нормального состояний. Подставим для этого (3.5) в (3.10):

$$S_s - S_n = \frac{H_{cm}}{4\pi} \left(\frac{\partial H_{cm}}{\partial T} \right)_R. \quad (3.11)$$

Формула (3.11) позволяет получить важные физические следствия:

1) Согласно теореме Нернста, энтропия всех тел при $T = 0$ равна нулю. Поэтому $(\partial H_{cm} / \partial T)_{T=0} = 0$. Это значит, что кривая зависимости $H_{cm}(T)$ при $T = 0$ имеет нулевую производную.

2) Из эксперимента следует, что зависимость $H_{cm}(T)$ — это монотонно спадающая с увеличением T кривая (см. рис. 1.1), т. е. что во всем интервале температур от 0 до T_c величина $\partial H_{cm} / \partial T < 0$. Следовательно, в этом интервале температур $S_s < S_n$.

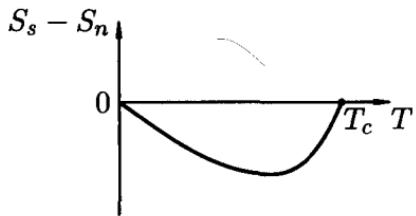


Рис. 3.1. Зависимость разности энтропий $S_s - S_n$ от температуры.

3) Поскольку при $T = T_c$ поле $H_{cm} = 0$, то $S_s = S_n$ при $T = T_c$. Схематически зависимость $S_s - S_n$ от температуры показана на рис. 3.1.

Мы можем сделать теперь весьма важные выводы.

1) Оказывается, сверхпроводящее состояние является чем-то более упорядоченным, чем нормальное, так как его энтропия меньше.

2) Переход при $T = T_c$ происходит без поглощения или выделения скрытой теплоты, так как $S_s = S_n$ при $T = T_c$. Следовательно, переход при $T = T_c$ — это фазовый переход второго рода.

3) При $T < T_c$ переход из сверхпроводящего состояния в нормальное происходит под действием магнитного поля. Поскольку при этом $S_s < S_n$, то при переходе происходит поглощение скрытой теплоты. Наоборот, при переходе из нормального в сверхпроводящее состояние скрытая теплота выделяется. Следовательно, все переходы в магнитном поле при $T < T_c$ являются фазовыми переходами первого рода.

Удивительно, как несколько формул термодинамики и всего лишь один экспериментальный факт — зависимость H_{cm} от T (рис. 1.1) — позволяют сделать столь фундаментальные выводы! Ведь от понимания того, что сверхпроводящее состояние характеризуется большим порядком (меньшей энтропией), чем нормальное, лежит путь к пониманию того, что это — состояние с согласованным когерентным поведением электронов.

3.3. Теплоемкость. Поскольку удельную теплоемкость вещества можно определить формулой $C = T(\partial S / \partial T)$, разность удельных теплоемкостей сверхпроводящего и нормального состоя-

яний запишется в виде

$$C_s - C_n = \frac{T}{4\pi} \left[\left(\frac{\partial H_{cm}}{\partial T} \right)^2 + H_{cm} \frac{\partial^2 H_{cm}}{\partial T^2} \right]. \quad (3.12)$$

При получении этой формулы мы продифференцировали формулу (3.11). Но при $T = T_c$ критическое поле $H_{cm} = 0$, поэтому

$$C_s - C_n = \frac{T_c}{4\pi} \left(\frac{\partial H_{cm}}{\partial T} \right)_{T_c}^2. \quad (3.13)$$

Эта формула, известная как формула Рутгерса, показывает, что зависимость теплоемкости от температуры испытывает скачок при $T = T_c$. Формула Рутгерса дает величину этого скачка. График температурной зависимости теплоемкости приведен на рис. 3.2. При $T > T_c$ теплоемкость линейно зависит от температуры, как это бывает у обычных нормальных металлов (электронная теплоемкость).

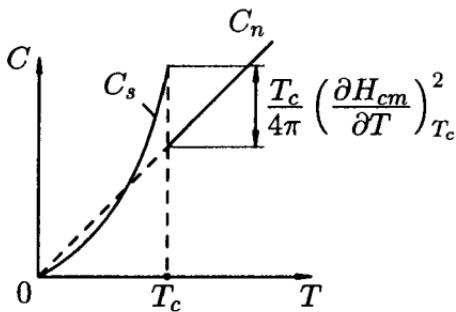


Рис. 3.2. Температурная зависимость теплоемкости сверхпроводника.

Показанный на рис. 3.2 ход теплоемкости мы пока рассматриваем просто как экспериментальный факт, но то, что при $T < T_c$ существует точка, где продолжение прямой $C_n(T)$ пересекает кривую $C_s(T)$ — это следствие проведенных выше рассуждений. Действительно, в этой точке $C_s = C_n$, т. е. $\partial(S_s - S_n)/\partial T = 0$. Но согласно рис. 3.1 при $T < T_c$ такая точка обязательно должна существовать.

3.4. Свободная энергия. Остановимся на свойствах тех термодинамических потенциалов, с которыми нам придется ча-

сто встречаться при изучении сверхпроводимости. Эти потенциалы в равной мере пригодны для расчетов свойств любого вещества, в частности сверхпроводника. Все доказательства и подробности можно найти в [16].

Если тело находится во внешнем магнитном поле H_0 при заданных магнитной индукции внутри тела B и температуре, то при термодинамическом равновесии минимума достигает свободная энергия $\mathcal{F} = \int F dV$, где плотность свободной энергии F определена в (3.7). Иногда эту величину называют гельмгольцской свободной энергией. Для многих расчетов такой потенциал неудобен, так как для тела, находящегося во внешнем магнитном поле, обычно задаются условия постоянства температуры и внешнего поля H_0 .

В этом случае термодинамическое равновесие наступает тогда, когда достигает минимума другой термодинамический потенциал — так называемая свободная энергия Гиббса \mathcal{G} , которая определяется следующим образом:

$$\mathcal{G} = \int G dV, \quad (3.14)$$

$$G = F - BH_0/4\pi. \quad (3.15)$$

Задача 3.1. Насколько понизится свободная энергия 1 см^3 свинца при его переходе в сверхпроводящее состояние? Переход происходит в магнитном поле при температуре 4.2 K .

Решение. Разность свободных энергий определяется формулой (3.5). Величина H_{cm} при 4.2 K может быть вычислена по формуле (1.1). Используя данные таблицы 1.1, имеем окончательно $F_n - F_{s0} = 1.1 \cdot 10^4 \text{ эрг}/\text{см}^3$.

Задача 3.2. Какое количество теплоты выделится при переходе 1 см^3 свинца в сверхпроводящее состояние в условиях задачи 3.1?

Решение. Выделившееся количество теплоты равно $Q = T(S_n - S_s)$. Используя формулы (1.1) и (3.11), получим $Q = 2.30 \cdot 10^4 \text{ эрг}$.

Замечание. Формула (3.11) дает выражение разности энтропий через величину $(\partial H_{cm}/\partial T)_R$. В условиях данной задачи, когда фиксировано внешнее поле на бесконечности, сверхпроводник не совершает работу над внешними телами при изменении его температуры. Действительно, единственный вид работы над внешними телами для такого сверхпроводника — это излучение электромагнитной волны при изменении его внутреннего состояния. Но для этого нужно, чтобы интеграл вектора Пойнтинга $(c/4\pi)[EH]$ по поверхности

сверхпроводника не равнялся нулю. Электрическое поле E может возникнуть только при изменении индукции B , но $B = 0$, поэтому при изменении температуры сверхпроводника в магнитном поле излучения не происходит, значит, $(\partial H_{cm}/\partial T)_R = (\partial H_{cm}/\partial T)_H$, и можно пользоваться формулой (3.11).

Задача 3.3. Найти температуру, при которой у свинца теплоемкости нормальной и сверхпроводящей фаз оказывается равными.

Решение. Исследуя разность энтропий (3.11) на минимум, находим, что искомая температура равна $T_c/\sqrt{3} = 4.16$ К.

Задача 3.4. Найти критическое термодинамическое магнитное поле олова при температуре 3 К.

Ответ. 108 Э.

Задача 3.5. Найти скачок теплоемкости единицы объема свинца при критической температуре.

Ответ. $2.8 \cdot 10^4$ эрг/(см³ · К).

§ 4. Очерк развития теории сверхпроводимости

Первой теорией, успешно описавшей электродинамику сверхпроводников, была теория Лондонов (1935). Это была феноменологическая теория, т. е. в дополнение к уравнениям Максвелла были предложены уравнения электромагнитного поля в сверхпроводнике, из которых следовали его основные свойства: абсолютный диамagnetизм и отсутствие сопротивления постоянному току. В чем состоит микроскопический механизм сверхпроводимости на электронном уровне, не объяснялось, т. е. за рамками теории оставался ответ на вопрос: «Почему сверхпроводник ведет себя так, как это следует из уравнений Лондонов?»

Согласно теории Лондонов, электроны в сверхпроводнике можно рассматривать как совокупность двух электронных коллективов: сверхпроводящей и нормальной электронных компонент. Плотность сверхпроводящих электронов n_s должна уменьшаться с повышением температуры и обращаться в нуль при $T = T_c$. Наоборот, при $T = 0$ величина n_s должна равняться плотности всех свободных электронов металла. Это — формулировка так называемой двухжидкостной модели сверхпроводника.

Ток сверхпроводящих электронов — это ток без сопротивления. Ясно, что постоянного электрического поля при этом в сверхпроводнике быть не может, так как в противном случае это привело бы к неограниченному ускорению коллектива сверхпроводящих электронов. Поэтому в стационарных условиях, когда электрического поля нет, нормальные электроны покоятся. Наоборот, в переменном электрическом поле есть и ток сверхпроводящих электронов, и ток нормальной компоненты. При этом нормальный ток подчиняется обычному закону Ома.

Реальный сверхпроводник в этой модели можно моделировать эквивалентной схемой, в которой нормальное сопротивление и идеальный проводник соединены параллельно. Идеальный проводник при этом должен иметь некоторую индуктивность, с помощью которой можно моделировать инерциальные свойства сверхпроводящих электронов.

Предложенные Лондонами уравнения дали описание поведения сверхпроводящей компоненты электронной жидкости в постоянном и переменном электромагнитном полях. С их помощью удалось описать многие аспекты поведения сверхпроводников, но к концу 40-х годов стало ясно, что по крайней мере в одном вопросе теория Лондонов дает неверный ответ. Из этой теории следовало, что энергия границы раздела между нормальной и сверхпроводящей фазами σ_{ns} у сверхпроводника в промежуточном состоянии отрицательна. Это значит, что во внешнем магнитном поле сверхпроводнику выгодно было бы расслоиться на возможно более мелкую сеть чередующихся областей нормальной и сверхпроводящей фаз, чтобы внутри сверхпроводника суммарная площадь границ раздела была как можно больше, так как ее энергия $\sigma_{ns} < 0$. Причем так должно было бы быть даже для длинного цилиндра в магнитном поле, параллельном его оси. Это противоречило результатам экспериментов того времени. Опыт показывал, что такое расслоение происходило только у тел с отличным от нуля размагничивающим фактором (промежуточное состояние, см. § 2), и размеры слоев оказывались достаточно большими (порядка 1 мм, см. рис. 2.5), а это могло быть только при $\sigma_{ns} > 0$, что противоречило предсказаниям теории Лондонов.

Это противоречие было снято теорией В. Л. Гинзбурга и Л. Д. Ландау (теорией ГЛ), которая тоже была феноменологической теорией, но учитывавшей квантовые эффекты. Необходимость учета квантовых эффектов сейчас станет ясной. Пусть существует некоторая волновая функция Ψ , квантовомеханически описывающая поведение сверхпроводящих электронов. Тогда квадрат модуля этой функции (пропорциональный n_s) должен обращаться в нуль в нормальной фазе и, плавно увеличиваясь на NS -границе, достигать какого-то равновесного значения в сверхпроводящей фазе. Следовательно, на границе должен возникнуть градиент Ψ , но $|\nabla\Psi|^2$, как известно из квантовой механики, пропорционален плотности кинетической энергии. Это значит, что, учитывая квантовые эффекты, мы учитываем дополнительную положительную энергию, запасенную в NS -границе. Таким образом, учет квантовых эффектов открывал возможность получить $\sigma_{ns} > 0$.

Подробно обоснование и основы теории ГЛ будут рассмотрены в главе III. Сейчас же отметим то главное, что определило огромное значение теории ГЛ во всей науке о сверхпроводимости.

Для описания поведения сверхпроводников была привлечена квантовая механика. Поведение всей совокупности сверхпроводящих электронов было описано волновой функцией $\Psi(\mathbf{r})$ от одной пространственной координаты (напомним, что, вообще говоря, волновая функция n электронов в металле есть функция n координат $\Psi(r_1, r_2, \dots, r_n)$). Этим устанавливалось когерентное, согласованное поведение всех сверхпроводящих электронов. Действительно, поведение одного электрона в стационарном состоянии описывается в квантовой механике функцией $\Psi(\mathbf{r})$. Если же n_s электронов (где n_s — плотность сверхпроводящих электронов — макроскопически большое число) ведут себя совершенно одинаково, согласованно, то понятно, что для описания их поведения достаточно той же самой волновой функции от одного переменного. Открывалась возможность предсказания существования многих необычайно красивых квантовых и в то же время макроскопических эффектов сверхпроводимости.

Поскольку теория ГЛ была построена на основе теории фазовых переходов второго рода (теории Ландау), она оказалась справедливой лишь вблизи критической температуры сверхпроводника, т. е. в области $T_c - T \ll T_c$. Более подробно об области применимости теории ГЛ см. § 51. Область применимости теории ГЛ ограничена и со стороны очень малых $|T_c - T|/T_c$, однако практически это ограничение существенно лишь для высокотемпературных сверхпроводников, см. § 19.

Применив теорию ГЛ к изучению сверхпроводящих сплавов, А. А. Абрикосов (1957) создал теорию сверхпроводников второго рода. Оказывается, не всегда у сверхпроводников должно быть $\sigma_{ns} > 0$. Сверхпроводники с $\sigma_{ns} > 0$ — это сверхпроводники первого рода. Большинство сплавов и химических соединений, которые являются сверхпроводниками, имеют $\sigma_{ns} < 0$, и эти сверхпроводники являются сверхпроводниками второго рода. В сверхпроводниках второго рода эффект Мейсснера отсутствует, и магнитное поле проникает внутрь сверхпроводника второго рода, но проникает очень своеобразно — в виде квантованных вихревых нитей (квантовый эффект в макромасштабе!). Сверхпроводимость в таких материалах может существовать до очень больших магнитных полей.

Однако ни теория Лондонов, ни теория ГЛ не давали ответа на вопрос, что же это за «сверхпроводящие электроны», описание поведения которых и были посвящены эти теории. Прошло уже 46 лет с момента открытия сверхпроводимости, а понимания на микроскопическом уровне того, что такое сверхпроводник, все еще не было!

И вот в 1957 г. появилась работа Дж. Бардина, Л. Купера и Дж. Шриффера (теория БКШ), которая ответила и на этот вопрос. Большой вклад в решение этой задачи внес Н. Н. Боголюбов (1958), разработавший математический метод, который сейчас широко используется при изучении сверхпроводимости.

Решающий шаг в понимании микроскопического механизма сверхпроводимости был сделан Л. Купером (1956). Суть дела заключается в следующем. Пусть нормальный металл находится в основном состоянии, т. е. все состояния невзаимодействующих

друг с другом электронов в k -пространстве внутри сферы Ферми заполнены, а все состояния вне этой сферы — пустые. Внесем еще пару электронов и расположим их в ячейках ($k \uparrow$) и ($-k \downarrow$) вблизи сферы Ферми (стрелками показано направление электронных спинов). Оказывается, что если эти два электрона по какой-либо причине притягиваются друг к другу, то как бы ни было слабо это притяжение, они образуют связанное состояние. В пространстве это будет связанный пары электронов — куперовская пара.

В теории БКШ было показано, что учет электрон-фононного взаимодействия может при определенных условиях привести к притяжению между электронами. В результате часть электронов образует куперовские пары. Но такие пары обладают нулевым суммарным спином, и поэтому являются бозе-частицами (т. е. частицами, подчиняющимися статистике Бозе — Эйнштейна). Такие частицы обладают одним замечательным свойством: если температура системы ниже некоторой температуры T_c , они могут скапливаться на самом нижнем энергетическом уровне (в основном состоянии), причем чем больше их там соберется, тем труднее какой-либо из этих частиц выйти из этого состояния. Происходит бозе-конденсация. Все частицы, находящиеся в конденсате, описываются одной волновой функцией от одной пространственной переменной. Понятно, что течение такого конденсата должно быть сверхтекучим, бездисипативным. Действительно, какой-либо из частиц конденсата теперь совсем не просто рассеяется на примесном атоме или каком-нибудь другом дефекте кристаллической решетки металла. Для этого ей нужно преодолеть «сопротивление» этому акту со стороны всех остальных частиц конденсата.

Таким образом, сверхпроводимость можно теперь представить себе так. При $T < T_c$ в сверхпроводнике существует конденсат куперовских пар. Этот конденсат обладает свойством сверхтекучести. Это значит, что электрический ток без сопротивления переносится в сверхпроводнике куперовскими парами, т. е. элементарный носитель тока имеет заряд $2e$.

Дальнейшее развитие микроскопическая теория сверхпроводимости получила в работах Л. П. Горькова (1958), который раз-

работал метод решения модельной задачи БКШ с помощью функций Грина. Этим методом, в частности, ему удалось получить микроскопическую расшифровку всех феноменологических параметров теории ГЛ и указать ее область применимости (см. § 51).

Работами Горькова было закончено построение теории Гинзбурга – Ландау – Абрикосова – Горькова (Теории ГЛАГ), которая в 1966 году была удостоена Ленинской премии.

Новый толчок развитию теории сверхпроводимости дало открытие высокотемпературных сверхпроводников Беднорцем и Мюллером [20] в 1986 году. Последовательная микроскопическая теория ВТСП до сих пор не создана, несмотря на огромное количество работ на эту тему за прошедшие почти 15 лет. Не выяснен окончательно и основной механизм притяжения между электронами, причем есть серьезные основания предполагать, что он не связан с обычным электрон-фононным взаимодействием. Тем не менее, с феноменологической точки зрения макроскопическое поведение ВТСП неплохо описывается теорией ГЛ для сверхпроводников II рода, обобщенной с учетом флуктуационных эффектов (см. §§ 19, 36) и необычной симметрии сверхпроводящей волновой функции (т. наз. *d*-спаривание, см. § 49). Более того, магнитные свойства ВТСП во многих случаях можно описать с помощью лондоновского приближения, в котором состояние сверхпроводника в магнитном поле задается расположением и формой квантованных вихревых нитей. Система вихревых нитей в ВТСП может находиться в различных состояниях — регулярная решетка, жидкость, «стекло»; свойства этих «фаз» и фазовых переходов между ними мы будем обсуждать в §§ 42.

Если открытие ВТСП потребовало обобщения теории сверхпроводимости с учетом сильных тепловых флуктуаций, то развитие технологий микроэлектроники привело к созданию структур из сверхпроводников с размерами существенно меньше 1 мкм, когда становятся существенны т. наз. *макроскопические квантовые явления* — саму волновую функцию $\Psi(\mathbf{r})$ теории ГЛ приходится рассматривать как квантовую переменную. Теорию таких явлений мы рассмотрим в § 23.

ГЛАВА II

ЛИНЕЙНАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА СВЕРХПРОВОДНИКОВ

§ 5. Уравнения Лондонов

Для того чтобы понять, как ведет себя сверхпроводник, помещенный во внешнее электромагнитное поле, воспользуемся так называемой двухжидкостной моделью. Будем считать, что все свободные электроны сверхпроводника разделены на два коллектива: сверхпроводящие с плотностью n_s и нормальные с плотностью n_n . Плотность свободных электронов $n = n_s + n_n$. При изменении температуры от 0 до T_c величина n_s меняется от n до 0.

Начнем систематическое изучение свойств сверхпроводников в электромагнитном поле с самого простого случая. Мы предполагаем, что напряженности электрического и магнитного полей столь малы, что они не оказывают заметного влияния на плотность сверхпроводящих электронов, кроме того, предполагаем, что плотность n_s всюду одинакова, т. е. пренебрегаем пространственным изменением n_s .

Связь между электрическим полем, магнитным полем и током в этом случае линейная и дается уравнениями Ф. и Г. Лондонов [21].

5.1. Первое уравнение Лондонов. Запишем уравнение движения для единичного объема сверхпроводящих электронов, находящихся в электрическом поле:

$$n_s m \frac{d\mathbf{v}_s}{dt} = n_s e \mathbf{E}, \quad (5.1)$$

где m — масса электрона, e — его заряд, \mathbf{v}_s — сверхтекучая скорость.

Учитывая, что плотность сверхтока (часто говорят «сверхпроводящего тока») $\mathbf{j}_s = n_s e \mathbf{v}_s$, имеем

$$\mathbf{E} = \frac{d}{dt} (\Lambda \mathbf{j}_s). \quad (5.2)$$

Введено обозначение

$$\Lambda = m/n_s e^2. \quad (5.3)$$

Уравнение (5.2) — это просто второй закон Ньютона для сверхпроводящих электронов. Из этого уравнения следует, что в стационарном состоянии, когда $d\mathbf{j}_s/dt = 0$, электрического поля в сверхпроводниках нет. Мы здесь, правда, не учтываем возможного пространственного изменения химического потенциала сверхпроводящих электронов. Такой эффект существует, например, в сверхпроводнике вблизи его границы с нормальным металлом, когда через эту границу идет ток. Подробнее об этом см. главу VII.

5.2. Второе уравнение Лондонов. Сейчас будет найдена связь между сверхтоком и магнитным полем в сверхпроводнике.

Обозначим напряженность истинного, микроскопического магнитного поля в данной точке сверхпроводника $\mathbf{H}(\mathbf{r})$. Здесь требуется некоторое разъяснение. В главе I было сказано, что магнитное поле в сверхпроводник первого рода не проникает, что оно там равно нулю. Сейчас мы убедимся, что это верно лишь приблизительно. На небольшую глубину от поверхности тела (порядка $500 \div 1000 \text{ \AA}$) магнитное поле все же проникает.

Наша задача как раз и состоит в том, чтобы выяснить, как меняется в пространстве это поле $\mathbf{H}(\mathbf{r})$.

Пусть свободная энергия сверхпроводника без магнитного поля и тока равна \mathcal{F}_{s0} . Плотность кинетической энергии сверхтока равна

$$W_{\text{кин}} = n_s m v_s^2 / 2 = m j_s^2 / 2n_s e^2. \quad (5.4)$$

Учитывая уравнение Maxwella

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_s, \quad (5.5)$$

приводим выражение для $W_{\text{кин}}$ (5.4) к виду

$$W_{\text{кин}} = \frac{\lambda^2}{8\pi} (\operatorname{rot} \mathbf{H})^2, \quad (5.6)$$

где введено обозначение

$$\lambda^2 = \frac{mc^2}{4\pi n_s e^2}. \quad (5.7)$$

Плотность магнитной энергии в том же месте сверхпроводника равна, как известно, $H^2/8\pi$, поэтому свободная энергия всего сверхпроводника с учетом кинетической энергии сверхтока и энергии магнитного поля равна

$$\mathcal{F}_{sH} = \mathcal{F}_{s0} + \frac{1}{8\pi} \int [\mathbf{H}^2 + \lambda^2 (\operatorname{rot} \mathbf{H})^2] dV. \quad (5.8)$$

Интегрирование ведется по всему объему сверхпроводника.

Решим теперь вариационную задачу: узнаем, какой вид функции $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ будет давать функционалу \mathcal{F}_{sH} минимальное значение. Оговоримся, что правильнее было бы ставить вопрос о минимизации свободной энергии Гиббса. Мы так и поступим при выводе уравнений Гинзбурга – Ландау (см. § 14). Результат, однако, не зависит от того, какой функционал исследуется на минимум: \mathcal{F}_{sH} или \mathcal{G}_{sH} . Поэтому мы будем варьировать \mathcal{F}_{sH} , что делать проще.

Итак, дадим функции $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ малую вариацию $\delta\mathbf{H}(\mathbf{r})$. Изменение \mathcal{F}_{sH} будет равно $\delta\mathcal{F}_{sH}$:

$$\delta\mathcal{F}_{sH} = \frac{1}{8\pi} \int (2\mathbf{H} \delta\mathbf{H} + 2\lambda^2 \operatorname{rot} \mathbf{H} \operatorname{rot} \delta\mathbf{H}) dV. \quad (5.9)$$

Искомая функция $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ — это такая функция, на которой \mathcal{F}_{sH} достигает минимума, т. е.

$$\delta\mathcal{F}_{sH} = 0. \quad (5.10)$$

Воспользовавшись тождеством

$$\mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b} = \mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a} - \operatorname{div}[\mathbf{a}\mathbf{b}], \quad (5.11)$$

преобразуем (5.9) и (5.10) к виду

$$\int [\mathbf{H} + \lambda^2 (\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H})] \delta\mathbf{H} dV - \int \operatorname{div}[\operatorname{rot} \mathbf{H}, \delta\mathbf{H}] dV = 0. \quad (5.12)$$

Последний интеграл, однако, равен нулю. Действительно, воспользовавшись теоремой Гаусса, преобразуем последний интеграл к виду $\oint [\operatorname{rot} \mathbf{H}, \delta\mathbf{H}] d\mathbf{S}$, где интеграл берется по поверхности сверхпроводника. Но поле на поверхности нам задано — это внешнее поле, поэтому там вариация $\delta\mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0$.

Мы пришли к уравнению $\int (\mathbf{H} + \lambda^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H}) \delta\mathbf{H} dV = 0$. При произвольной вариации $\delta\mathbf{H}(\mathbf{r})$ это уравнение может удовлетворяться, только если выражение в скобках равно нулю. Итак, мы получили уравнение для магнитного поля в сверхпроводнике:

$$\mathbf{H} + \lambda^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0. \quad (5.13)$$

Это и есть второе уравнение Лондонов. Его можно записать и по-другому. Используя уравнение Максвелла (5.5) и равенство $\mathbf{H} = -\operatorname{rot} \mathbf{A}$, легко получим из (5.13)

$$\mathbf{j}_s = -\frac{c}{4\pi\lambda^2} \mathbf{A}. \quad (5.14)$$

Перейти от (5.13) к (5.14) можно только при условии, что мы выбираем так называемую лондоновскую калибровку векторного потенциала

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0, \quad (5.15)$$

$$\mathbf{A} \mathbf{n} = 0, \quad (5.16)$$

где \mathbf{n} — вектор нормали к поверхности сверхпроводника.

Уравнение (5.15) совместно с (5.14) дает неразрывность линий сверхтока, отсутствие источников сверхтока, а (5.16) — невозможность сверхтоку течь через поверхность сверхпроводящего тела. Отсутствие внешних цепей и контактов, подводящих токи, конечно, предполагается.

Используя (5.3) и (5.7), уравнение (5.14) можно записать еще и в виде

$$\mathbf{j}_s = -\frac{1}{c\Lambda} \mathbf{A}, \quad (5.17)$$

$$\Lambda = 4\pi\lambda^2/c^2. \quad (5.18)$$

Второе уравнение Лондонов в виде (5.17) будет в дальнейшем нами часто использоваться.

§ 6. Глубина проникновения магнитного поля

Исследуем с помощью уравнений Лондонов вопрос о том, как проникает магнитное поле в сверхпроводник. Рассмотрим сверхпроводящее полупространство $x > 0$. Это значит, что поверхность сверхпроводника совпадает с плоскостью $x = 0$. В направлении оси z наложено внешнее магнитное поле \mathbf{H}_0 . Для решения этой задачи воспользуемся уравнением (5.13). Учитывая, что $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -\nabla^2 \mathbf{H}$, и учитывая симметрию задачи, уравнение (5.13) можно записать в виде

$$d^2 H / dx^2 - \lambda^{-2} H = 0. \quad (6.1)$$

Граничные условия задачи: $H(0) = H_0$, $H(\infty) = 0$. Последнее граничное условие учитывает эффект Мейсснера – Оксенфельда.

Решение этой задачи:

$$H = H_0 e^{-x/\lambda}. \quad (6.2)$$

Из этого решения следует, что магнитное поле убывает в глубину сверхпроводника. Характерная длина, на которой происходит ослабление поля в e раз, есть λ (рис. 6.1). Это и есть физический смысл величины λ , введенной формально формулой (5.7). Эта величина называется лондоновской глубиной проникновения магнитного поля:

$$\lambda = \left(\frac{mc^2}{4\pi n_s e^2} \right)^{1/2}. \quad (6.3)$$

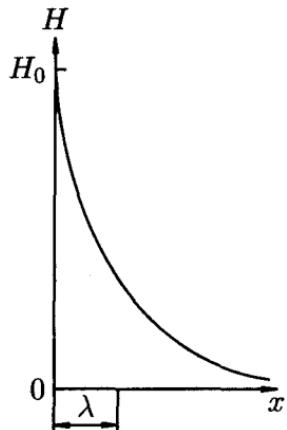


Рис. 6.1. Проникновение магнитного поля в массивный сверхпроводник. Поле на поверхности равно H_0 .

На такую же величину убывает и экранирующий (мейсснеровский) сверхток, текущий по поверхности. Действительно, $j_s = (c/4\pi) \operatorname{rot} \mathbf{H}$, что в нашей плоской геометрии дает $j_s = (c/4\pi) dH/dx$. Подставляя сюда (6.2), получим

$$j_s = \frac{cH_0}{4\pi\lambda} e^{-x/\lambda}. \quad (6.4)$$

Поскольку λ зависит от n_s , она зависит от температуры. Довольно хорошим приближением для температурной зависимости

сти λ является эмпирическая формула

$$\lambda(T) = \frac{\lambda(0)}{(1 - (T/T_c)^4)^{1/2}}. \quad (6.5)$$

Оценим порядок величины $\lambda(0)$. При $T = 0$ все электроны металла — сверхпроводящие, т. е. $n_s = n \simeq 10^{22} \text{ см}^{-3}$. Подставляя в (6.3) это значение, а также $m \sim 10^{-27} \text{ г}$, $c = 3 \cdot 10^{10} \text{ см}/\text{с}$, $e = 4.8 \cdot 10^{-10} \text{ абс. ед.}$, получим $\lambda(0) \sim 600 \text{ \AA}$.

Значения $\lambda(0)$ для некоторых сверхпроводников приведены в табл. 6.1.

Таблица 6.1. Лондоновская глубина проникновения для некоторых сверхпроводников [5].

Элемент	Al	Cd	Hg	In	Nb	Pb	Sn	Tl
$\lambda(0), \text{ \AA}$	500	1300	380 \div 450 (анизотропия)	640	470	390	510	920

§ 7. Нелокальная электродинамика сверхпроводников

То, что говорилось до сих пор об электродинамике сверхпроводников, относилось к так называемой локальной электродинамике. Действительно, уравнение Лондонов (5.17) связывает плотность сверхтока j_s (т. е. скорость движения носителей сверхтока v_s) с векторным потенциалом \mathbf{A} в этой же точке. Поэтому, строго говоря, оно применимо, только если размеры носителей сверхтока существенно меньше характерной длины, на которой происходит изменение векторного потенциала, т. е. глубины проникновения λ . Носители сверхтока — это электронные пары. Обозначим размер пары ξ_0 . Оценка по порядку величины, которую мы проведем в главе VI, покажет, что для чистых металлов $\xi_0 \sim 10^{-4} \text{ см}$. С другой стороны, глубина проникновения $\lambda \sim (10^{-5} \div 10^{-6}) \text{ см}$. Отсюда следует, что локальная лондоновская

электродинамика к чистым сверхпроводникам не применима, потому что на размере ξ_0 магнитное поле должно сильно изменяться.

Поэтому локальное уравнение (5.17) должно быть заменено на нелокальное, устанавливающее связь между скоростью частицы и магнитным полем, которое сильно меняется на размере частицы ξ_0 . Такую нелокальную связь предложил Пиппард [22] еще до появления микроскопической теории сверхпроводимости.

В общем виде нелокальная связь между j_s и A может быть записана в виде

$$j_s(r) = \int \hat{Q}(r - r') A(r') dr', \quad (7.1)$$

где \hat{Q} — некоторый оператор, который, действуя на вектор A , превращает его в вектор $\hat{Q}A$. Радиус действия оператора $\hat{Q}(r - r')$ берется равным ξ_0 , т. е. $\hat{Q}(r - r')$ отличен от нуля только при $|r - r'| \lesssim \xi_0$. Так происходит усреднение действия вектора A на частицу (носитель сверхтока) больших размеров. Если этот размер устремить к нулю, то \hat{Q} превратится в δ -функцию, и мы вернемся к локальной электродинамике.

Пиппард предложил $\hat{Q}A$ выбрать в виде

$$\hat{Q}(r - r') A(r') = -\frac{3n_s e^2}{4\pi m c \xi_0} \frac{(r - r')}{(r - r')^4} (A(r'), r - r') e^{-|r - r'|/\xi_0}. \quad (7.2)$$

В нелокальном случае закон проникновения магнитного поля в сверхпроводник отличается от экспоненциального, однако и в этом случае можно говорить о глубине проникновения магнитного поля, определив ее так:

$$\lambda = \frac{1}{H_0} \int_0^\infty H dx. \quad (7.3)$$

Здесь H_0 — поле на поверхности полубесконечного сверхпроводника. Если поле уменьшается вглубь сверхпроводника экспоненциально, то это определение λ и предыдущие (см. (6.1) и (6.2)) совпадают.

Мы не будем решать нелокальную задачу, а покажем, как можно просто получить правильный ответ по порядку величины [7]. Допустим, что истинную зависимость $H(x)$, т. е. закон проникновения магнитного поля, мы аппроксимируем экспонентой с новой глубиной проникновения. Обозначим эту глубину λ_P (пиппардовская глубина проникновения). Итак, на частицу диаметром ξ_0 векторный потенциал \mathbf{A} действует только на глубину $\lambda_P \ll \xi_0$. В результате частица участвует в создании плотности тока \mathbf{j}_s , но действие \mathbf{A} на частицу в нелокальном случае менее эффективно, ведь только доля частицы λ_P/ξ_0 «чувствует» действие вектор-потенциала \mathbf{A} . Соответственно, и плотность тока будет меньше в ξ_0/λ_P раз. Подставив этот коэффициент в формулу (5.14), получим

$$\mathbf{j}_s = -\frac{c}{4\pi\lambda^2} \frac{\lambda_P}{\xi_0} \mathbf{A}. \quad (7.4)$$

Если это уравнение записать в виде

$$\mathbf{j}_s = -\frac{c}{4\pi\lambda_P^2} \mathbf{A}, \quad (7.5)$$

мы получим, как и хотели, экспоненциальный закон спадания поля на глубине λ_P . Сравнение (7.4) и (7.5) дает $\lambda_P^2 = \lambda^2 \xi_0 / \lambda_P$, откуда оценка λ_P по порядку величины будет

$$\lambda_P \simeq (\lambda^2 \xi_0)^{1/3}. \quad (7.6)$$

Величина λ здесь по-прежнему определяется формулой (5.7). Из формулы (7.6) следует, что в случае $\lambda \ll \xi_0$ имеем $\lambda_P \gg \lambda$, т. е. нелокальная электродинамика предсказывает более глубокое проникновение магнитного поля, чем то, которое следует из локальной электродинамики. При этом, конечно, предполагается, что λ_P тоже удовлетворяет неравенству $\lambda_P \ll \xi_0$. Но так может быть не всегда даже у чистых металлов.

Типичным представителем сверхпроводников, хорошо описываемых нелокальными соотношениями (пиппардовских сверхпроводников), является Al. Наоборот, даже чистый Pb является лондоновским сверхпроводником.

С приближением T к T_c все сверхпроводники становятся лондоновскими, так как λ растет при $T \rightarrow T_c$, а ξ_0 от T не зависит.

Все, что говорилось до сих пор, относится к случаю чистого металла, т. е. такого, у которого длина свободного пробега электрона $l \gg \xi_0$. Если загрязнить металл примесными атомами, то может возникнуть ситуация, когда $l \ll \xi_0$. Такие металлы мы будем называть грязными. Сюда же относятся и сплавы. В очень грязных металлах роль размера электронной пары уже играет величина порядка $(\xi_0 l)^{1/2}$. Микроскопическая теория также показывает, что для грязных сверхпроводников глубина проникновения магнитного поля $\lambda_d \simeq \lambda(\xi_0/l)^{1/2}$ при $l \ll \xi_0$. Таким образом, сплавы хорошо описываются локальными лондоновскими уравнениями. В дальнейшем мы будем пользоваться локальными уравнениями.

§ 8. Квантовое обобщение уравнения Лондонов. Квантование магнитного потока

8.1. Квантовое обобщение уравнения Лондонов. В главе I уже говорилось о том, что элементарным носителем сверхтока является пара электронов, куперовская пара. При этом все пары находятся на одном энергетическом уровне, в одном квантовом состоянии, образуют конденсат. Волновая функция такой конденсатной частицы может быть записана в виде $\Psi(\mathbf{r}) = (n_s/2)^{1/2} e^{i\theta(\mathbf{r})}$, где θ — фаза волновой функции. В нормировке $\Psi(\mathbf{r})$ учтено, что плотность электронных пар равна $n_s/2$, где n_s — плотность сверхпроводящих электронов.

Если частица с массой $2m$ и с зарядом $2e$ движется в магнитном поле, то импульс частицы можно записать в виде

$$\hbar \nabla \theta = 2m \mathbf{v}_s + \frac{2e}{c} \mathbf{A}, \quad (8.1)$$

где \hbar — постоянная Планка. Действительно, в отсутствие магнитного поля плотность потока частиц $n_s \mathbf{v}_s / 2$ можно записать в виде $(i\hbar/4m)(\Psi \nabla \Psi^* - \Psi^* \nabla \Psi)$. Подставляя сюда выражение $\Psi(\mathbf{r}) = (n_s/2)^{1/2} e^{i\theta}$, получим $\hbar \nabla \theta = 2m \mathbf{v}_s$. Если частица движется в

магнитном поле, то полный импульс $\hbar\nabla\theta$ есть сумма $2mv$ -импульса и импульса $\frac{2e}{c}\mathbf{A}$, создаваемого магнитным полем.

Используя выражение для плотности сверхтока в виде

$$\mathbf{j}_s = n_s e \mathbf{v}_s \quad (8.2)$$

и формулы (5.7) и (5.18), легко получим из (8.1) следующее обобщение второго уравнения Лондонов:

$$\mathbf{j}_s = \frac{1}{c\Lambda} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla\theta - \mathbf{A} \right). \quad (8.3)$$

Здесь введено обозначение $\Phi_0 = \pi\hbar c/e$. Эта величина имеет размерность магнитного потока, а с ее физическим смыслом мы познакомимся в следующем пункте.

8.2. Квантование магнитного потока. Мы переходим к изучению очень интересного (и важного для различных технических применений сверхпроводимости) явления — квантования магнитного потока в сверхпроводниках.

Рассмотрим внутри массивного сверхпроводника цилиндрическую полость (рис. 8.1). Пусть сперва $T > T_c$ и сверхпроводник находится в нормальном состоянии. Наложим внешнее поле \mathbf{H}_0 параллельно образующей полости. Понизим температуру так, чтобы сверхпроводник перешел в сверхпроводящее состояние. Теперь поле из тела сверхпроводника будет вытеснено, а в полости будет заморожен некоторый магнитный поток. Этот поток будет создаваться сверхтоком, возникающим на внутренней поверхности полости. Найдем этот замороженный магнитный поток.

Рассмотрим контур C (рис. 8.1), который охватывает полость и проходит всюду внутри сверхпроводника на расстояниях от границы полости, много больших λ . Тогда в любой точке этого контура сверхток $\mathbf{j}_s = 0$, и контурный интеграл уравнения (8.3) по этому контуру сведется к выражению

$$\frac{\Phi_0}{2\pi} \oint_C \nabla\theta \, d\mathbf{l} = \oint_C \mathbf{A} \, d\mathbf{l}. \quad (8.4)$$

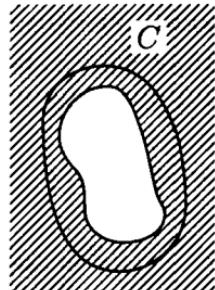


Рис. 8.1. В сплошном сверхпроводнике (заштриховано) имеется цилиндрическая полость. Контуру C проходит всюду внутри сверхпроводника на больших по сравнению с λ расстояниях от границы полости.

Учитывая, что

$$\oint_C \mathbf{A} dl = \Phi, \quad (8.5)$$

имеем

$$\Phi = (\Phi_0/2\pi) \oint_C \nabla \theta dl. \quad (8.6)$$

Здесь Φ — это полный магнитный поток, охватываемый контуром C . Отсюда сразу видно, что θ — многозначная функция; каждый раз при обходе вокруг отверстия она изменяется на некоторую величину. Но волновая функция Ψ должна быть однозначной. Поэтому мы должны потребовать, чтобы изменение θ при обходе вокруг отверстия с магнитным потоком было кратным $2\pi n$, где $n = 0, 1, 2, \dots$. Действительно, добавление к $\theta(\mathbf{r})$ величины $2\pi n$ не изменяет функцию $\Psi(\mathbf{r}) = (n_s/2)^{1/2} e^{i\theta}$, так как $e^{i2\pi n} = 1$. Поэтому $\oint_C \nabla \theta dl = 2\pi n$, и равенство (8.6) можно написать окончательно в виде

$$\Phi = n\Phi_0, \quad (8.7)$$

где

$$\Phi_0 = \frac{\pi \hbar c}{e} = \frac{he}{2e}. \quad (8.8)$$

Из формулы (8.7) следует, что магнитный поток в полости (точнее — магнитный поток, охватываемый контуром C) может

принимать только значения, кратные минимально возможному потоку Φ_0 — кванту потока. Величина Φ_0 определяется формулой (8.8) и равняется

$$\Phi_0 = 2.07 \cdot 10^{-7} \text{ Гс} \cdot \text{см}^2.$$

Физически квантование магнитного потока имеет то же происхождение, что квантование орбит электронов в атоме. Нужно, чтобы волновая функция электронов, вращающихся по некоторому замкнутому контуру, имела целое число длин волн на длине этого контура.

Экспериментально квантование магнитного потока было обнаружено практически одновременно в США (Б. Дивер и В. Фербенк) [11] и в ФРГ (Р. Долл и М. Небауэр) [12] в 1961 г. Интересно отметить, что Ф. Лондон, предсказывая квантование магнитного потока, считал, что квант будет равен hc/e , т. е. предсказывал значение, в два раза большее Φ_0 . Это и понятно, он считал, что элементарный заряд носителя сверхтока равен заряду электрона e . Опыт подтвердил правильность формулы (8.8). Таким образом, результаты опытов по изучению квантования магнитного потока явились прямым доказательством того, что сверхток переносится парами электронов.

Задача 8.1. В массивном сверхпроводнике имеется отверстие диаметром 0.1 мм, в котором захвачено 7 квантов магнитного потока. Определить напряженность магнитного поля в отверстии.

Ответ. $H = 1.84 \cdot 10^{-2}$ Э.

Задача 8.2. В массивном сверхпроводнике имеется цилиндрическое отверстие диаметром 2 см. В нем захвачено магнитное поле с напряженностью $H = 300$ Э. Найти величину векторного потенциала A на расстоянии $R = 2$ см от центра отверстия. Найти градиент фазы $\nabla\theta$ на этом же расстоянии R .

Ответ. $A = 75 \text{ Гс} \cdot \text{см}$, $\nabla\theta = 2.36 \cdot 10^9 \text{ рад}/\text{см}$.

Задача 8.3. Рассматривается тонкая сверхпроводящая пленка толщины $d \ll \lambda$, нанесенная на поверхности диэлектрической нити. Радиус сечения нити равен R . Нить внесена в продольное магнитное поле при комнатной температуре, и затем температура нити опущена ниже T_c . После этого внешнее магнитное поле выключается. Как квантуется магнитный поток, захваченный нитью с пленкой?

Решение. Поскольку $d \ll \lambda$, ток будет распределен по пленке однородно. Поэтому интегрирование выражения (8.3) по замкнутому круговому контуру радиуса R дает

$$\Phi = \Phi_0 n - \frac{2\pi mcR}{n_s e^2} j_s. \quad (8.9)$$

С другой стороны, магнитное поле внутри цилиндра и ток по поверхности цилиндра связаны соотношением

$$H = \frac{4\pi}{c} j_s d,$$

поэтому поток внутри цилиндра $\Phi = (4\pi^2/c)j_s d R^2$. Выражая отсюда j_s и подставляя в (8.9), имеем

$$\Phi = \Phi_0 n \left(1 + \frac{2\lambda^2}{Rd} \right)^{-1}.$$

Замечание. Если $Rd \gg 2\lambda^2$, квантование магнитного потока в тонкостенном цилиндре ($d \ll \lambda$) происходит так же, как и в массивном. В остальных случаях «квант потока» меньше Φ_0 .

Задача 8.4. Найти распределение магнитного поля в условиях предыдущей задачи.

Ответ. См. рис. 8.2.

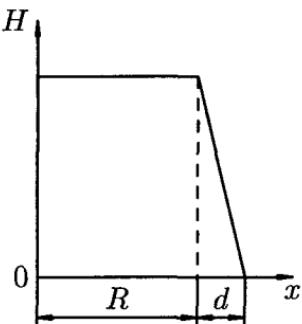


Рис. 8.2. Распределение магнитного поля, захваченного тонкостенным сверхпроводящим цилиндром.

§ 9. Распределение поля и тока в простейших конфигурациях сверхпроводников

9.1. Пластина в параллельном поле. Переходим к рассмотрению распределения поля и тока в некоторых простых конфигурациях. Начнем со случая, когда бесконечная пластина толщины d помещена в однородное параллельное пластине магнитное

поле H_0 . Пусть плоскость $x = 0$ проходит по центру пластины, поверхности пластины совпадают с плоскостями $x = \pm d/2$, магнитное поле направлено вдоль оси z .

Поле внутри пластины должно удовлетворять уравнению (5.13). Учитывая, что по соображениям симметрии поле H внутри пластины должно быть направлено вдоль оси z и зависеть только от x , уравнение (5.13) можно записать в виде

$$d^2H/dx^2 - \lambda^{-2}H = 0 \quad (9.1)$$

с граничными условиями $H(\pm d/2) = H_0$.

Общее решение уравнения (9.1) имеет вид

$$H = H_1 \operatorname{ch}(x/\lambda) + H_2 \operatorname{sh}(x/\lambda), \quad (9.2)$$

где H_1 и H_2 — постоянные интегрирования. Подставляя в (9.2) граничные условия, получим и решим два алгебраических уравнения с двумя неизвестными (H_1 и H_2). В результате имеем окончательно

$$H(x) = H_0 \frac{\operatorname{ch}(x/\lambda)}{\operatorname{ch}(d/2\lambda)}. \quad (9.3)$$

Плотность сверхтока в пластине можно найти, воспользовавшись формулой (9.3) и уравнением Максвелла $\operatorname{rot} \mathbf{H} = (4\pi/c)\mathbf{j}_s$:

$$\mathbf{j}_s = -\frac{c}{4\pi} \frac{d\mathbf{H}}{dx}. \quad (9.4)$$

В результате получим

$$\mathbf{j}_s = -\frac{cH_0}{4\pi\lambda} \frac{\operatorname{sh}(x/\lambda)}{\operatorname{ch}(d/2\lambda)}. \quad (9.5)$$

Из (9.3) и (9.5) следует, что и магнитное поле, и ток проникают в пластину только на глубину порядка λ , если пластина толстая ($d \gg \lambda$). Если же это тонкая пленка ($d \ll \lambda$), то, разлагая гиперболические функции по степеням малых параметров x/λ и $d/2\lambda$, получим в линейном приближении

$$H = H_0, \quad \mathbf{j}_s = cH_0x / (4\pi\lambda^2).$$

Это означает, что магнитное поле полностью проникает в пленку, а плотность сверхтока — линейная функция координаты.

Распределение поля и тока в пластине при $d \sim \lambda$ показано на рис. 9.1.

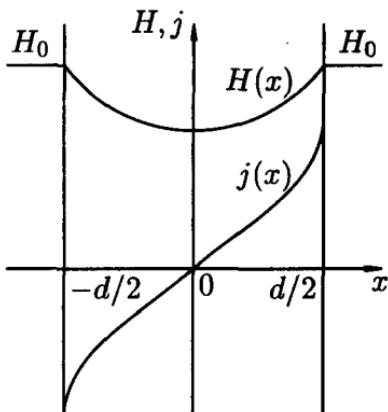


Рис. 9.1. Распределение магнитного поля и тока по сечению тонкой пленки, находящейся в однородном параллельном магнитном поле.

Токи текут по краям пластины так, чтобы созданное ими магнитное поле уничтожало внешнее поле H_0 в глубине пластины.

9.2. Пластина с током. В этом пункте рассмотрим случай, когда по бесконечной пластине течет заданный ток, а внешнее поле отсутствует. Пусть пластина будет такая же, как и в п. 9.1, а заданный ток течет в направлении оси y . При этом, конечно, предполагается, что ток распределен однородно вдоль оси z , т. е. краевые эффекты не учитываются.

Итак, в единичной полосе вдоль оси z течет ток I . На поверхностях пластины ($x = \pm d/2$) он создает магнитное поле $H(\pm d/2) = \mp H_I$. Подставляя эти граничные условия в общее решение (9.2), найдем поле в пластине:

$$H(x) = -H_I \frac{\operatorname{sh}(x/\lambda)}{\operatorname{sh}(d/2\lambda)}, \quad (9.6)$$

где $H_I = 2\pi I/c$.

Снова используя уравнение Максвелла (9.4), найдем распре-

деление тока в пластине:

$$j_s(x) = \frac{cH_I}{4\pi\lambda} \frac{\operatorname{ch}(x/\lambda)}{\operatorname{sh}(d/2\lambda)}. \quad (9.7)$$

Из (9.6) и (9.7) следует, что и в этом случае поле и ток распределены только в поверхностном слое толщины λ , если $d \gg \lambda$. В случае же тонкой пленки ($d \ll \lambda$) ток течет по всему сечению пластины, а поле — линейная функция координат:

$$H = -H_I \cdot 2x/d, \quad j_s = \frac{cH_I}{2\pi d} = \frac{I}{d}.$$

Напомним, что однородный ток в бесконечной пластине создает вне этой пластины неубывающее однородное магнитное поле. Распределение тока и поля в пластине с током показано на рис. 9.2.

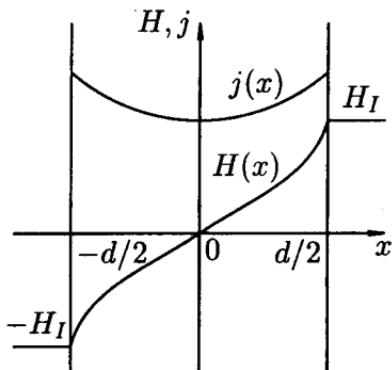


Рис. 9.2. Распределение магнитного поля и тока в тонкой пленке с заданным током.

9.3. Пластина с током в однородном поперечном магнитном поле. Пусть пластина находится в однородном внешнем магнитном поле H_0 , направленном вдоль оси z , как в п. 9.1, и по пластине течет ток в направлении оси y , который однородно распределен вдоль оси z , как в п. 9.2. Полный ток через поперечное сечение единичной высоты равен I , он создает на поверхностях пластины ($x = \pm d/2$) поле $\mp H_I$. Такая суперпозиция условий двух предыдущих задач, в силу линейности уравнений Лондонов, должна привести к суперпозиции их решений.

Рассмотрим частный случай, когда $H_I = H_0$. Это значит, что внешнее поле H_0 будет полностью компенсировать поле тока с одной стороны пластины и удваивать его с другой стороны, что приведет к тому, что ток I теперь будет течь только по одной стороне пластины. Такую ситуацию можно реализовать, создав внешнее поле H_0 посредством второй пластины с таким же током I , но противоположно направленным (рис. 9.3). Поле $H = 2H_0$ между пластинами равно¹⁾ $H = (4\pi/c)I$. Можно считать, что это поле создано обоими токами. Ток I левой пластины создает всюду правее от пластины однородное поле $H_I = 2\pi I/c$, направленное вверх, и такое же поле левее пластины, направленное вниз. Ток правой пластины, наоборот, создает поле H_I , направленное вниз справа от этой пластины и вверх слева от нее. Сложение этих полей приводит к полной компенсации полей справа и слева от пары пластин и к удвоению поля в промежутке между пластинами.

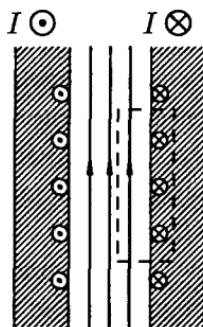


Рис. 9.3. Если в параллельных сверхпроводящих пластинах текут равные и противоположные токи, то магнитное поле этих токов будет «заперто» между пластинами.

9.4. Пленка над экраном. В этом пункте мы рассмотрим очень важный для практики случай: пленка над полубесконечным сверхпроводящим пространством (экраном). Чтобы найти, как распределяется поле в такой системе, когда по пленке течет заданный ток, рассмотрим совсем простой случай.

Пусть над сверхпроводящим полупространством (экраном)

¹⁾По теореме Стокса $\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = (4\pi/c)I$, где I — полный ток, пересекающий поверхность, ограниченную контуром, по которому берется контурный интеграл. Проведя интегрирование по штриховому контуру (рис. 9.3), получим $H = (4\pi/c)I$.

находится прямой проводник с током вдоль оси y на некотором расстоянии a от поверхности экрана. Каково будет магнитное поле над экраном? Если бы экрана не было, то магнитные силовые линии были бы концентрическими окружностями с центром в месте расположения проводника с током.

Поскольку силовые линии проникнуть в сверхпроводник не могут (эффект Мейсснера – Оксенфельда), ясно, что наличие экрана приведет к деформации поля.

Найдем это поле. В области $z > 0$ и вне проводника с током никаких токов нет, поэтому $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$. Это значит, что в этой области поле безвихревое, т. е. здесь можно ввести потенциал магнитного поля, удовлетворяющий уравнению Лапласа. С другой стороны, мы знаем, что магнитное поле на поверхности сверхпроводника всегда касательно к поверхности, т. е. $H_z(z = 0) = 0$. Это граничное условие делает решение уравнения Лапласа однозначным.

Из сказанного следует, что правильное поле в области $z > 0$ можно найти очень просто методом изображений. Это будет поле, созданное двумя прямолинейными токами, равными и противоположными, которые теперь уже текут в пространстве без экрана. Один из токов находится на расстоянии a от плоскости $z = 0$, а именно в точке $(0, a)$, а другой (изображение) — в точке $(0, -a)$. Действительно, в области $z > 0$ и вне провода с током поле по-прежнему удовлетворяет уравнению $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$, а граничное условие $H_z(z = 0) = 0$ выполняется автоматически благодаря симметрии задачи.

Таким образом, мы пришли к методу изображений, который сейчас применим для анализа поля, созданного сверхпроводящей пленкой, расположенной над сверхпроводящим экраном.

Итак, пусть пленка толщины $d > \lambda$ и ширины $w \gg \lambda$ расположена над сверхпроводящим полубесконечным экраном на расстоянии b от него. По пленке идет ток I . Найти распределение тока в пленке и в экране и магнитное поле между пленкой и экраном.

Воспользуемся методом изображений. Заменим действие экрана действием пленки-изображения, отстоящей от нашей пленки на расстояние $2b$. По пленке-изображению тоже течет



Рис. 9.4. Магнитное поле, созданное пленкой с током, расположенной над экраном.

ток, но в противоположном направлении. Таким образом, мы пришли к задаче о распределении тока и поля в случае двух параллельных пленок с противоположными токами. Эта задача была рассмотрена в п. 9.3 (рис. 9.3). Поэтому мы сразу можем дать ответ: между пленкой и экраном возникает однородное магнитное поле $H_I = \frac{4\pi}{c} I/w$. Ток I в пленке будет сосредоточен только на нижней (обращенной к экрану) стороне пленки в слое толщиной порядка λ . Поле H_I между пленкой и экраном согласуется по закону полного тока с током в экране. Этот ток сосредоточен в слое толщиной порядка λ около поверхности экрана, и поверхностная плотность его равна I/w . Направление тока в экране противоположно направлению тока в пленке. Все это схематически изображено на рис. 9.4. Краевые эффекты в этих рассуждениях не учитывались. Точный расчет с учетом краевых эффектов [23] дает распределение магнитных полей, показанное на рис. 9.5.

Полученная картина будет соответствовать действительности в том случае, если реальную пленку, играющую роль экрана, можно аппроксимировать полубесконечным экраном. Приведем пример, когда это сделать нельзя.

Пусть толстая сверхпроводящая пленка (толщина $d \gtrsim \lambda$) ширины w и длины l нанесена на стеклянную подложку, $w \ll l$. После этого пленка покрыта тонким слоем изолятора толщиной b , причем $b \ll w$, а затем нанесена другая сверхпроводящая пленка, тоже ширины w и длины намного большей l . По этой верхней пленке пропускается ток от внешнего источника. В пределах длины l обе пленки параллельны друг другу и располагаются одна над другой. Легко сообразить, что нижняя пленка никакого эффекта экранирования дать не может. Действительно, если по

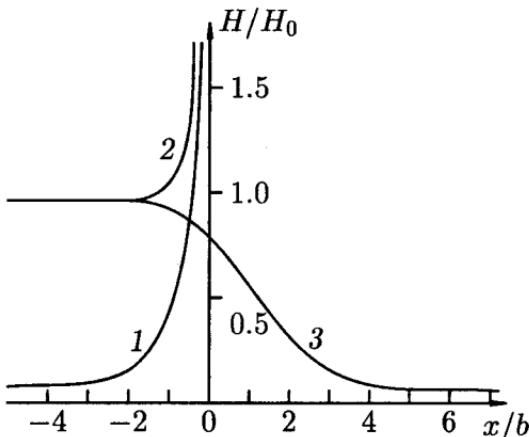
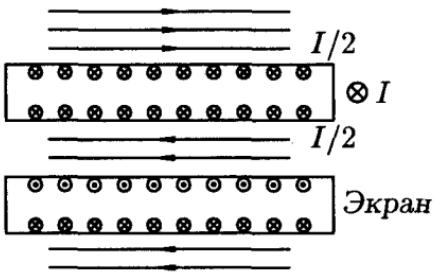


Рис. 9.5. Распределение магнитного поля вблизи края сверхпроводящей пленки с током, расположенной вблизи сверхпроводящего экрана: 1 — поле на верхней поверхности пленки, 2 — поле на нижней поверхности пленки, 3 — поле на поверхности экрана.

верхней пленке течет какой-то ток I , то в пространстве между пленками должно возникнуть магнитное поле. Это значит, что по нижней поверхности верхней пленки и по верхней поверхности нижней пленки должен течь одинаковый по величине поверхностный ток. Но длина нижней пленки конечна, и току, текущему по ее верхней поверхности, придется замкнуться по ее нижней поверхности (см. рис. 9.6). Это значит, что на нижней поверхности появится точно такое же поле, как и в промежутке между пленками. Более того, ток в верхней пленке разделится поровну между верхней и нижней поверхностями, как это показано на рис. 9.6. Таким образом, поле над, между и под нашей системой пленок будет такое же, как и в отсутствие нижней пленки, т. е. никакого эффекта экранирования она не создает.

9.5. Принцип замыкания. В современной сверхпроводниковой электронике, когда создаются сложные многоплановые системы, бывает довольно затруднительно сразу сообразить, как будут течь токи по пленкам и как будут распределены магнитные поля. Большую помощь здесь может оказать так называемый

Рис. 9.6. Распределение поля и токов для случая двух близко и параллельно расположенных пленок. Верхняя пленка несет заданный ток I . В нижней пленке ток не задан.



принцип замыкания [24]. Он применим к толстым пленкам, толщина которых превосходит глубину проникновения, а их длина и ширина существенно превосходят расстояния между пленками.

Сущность принципа сводится к следующему. По двум обращенным друг к другу поверхностям пленок, разделенных тонким слоем диэлектрика, могут течь лишь равные и противоположно направленные токи (действительно, поверхностный ток определяется магнитным полем на поверхности сверхпроводника, а магнитное поле в зазоре между пленками — общее для обеих пленок). Если зазор между пленками мал, то магнитный поток в этом зазоре будет тоже мал, и, выйдя на конце пленок из зазора, он создает пренебрежимо малое магнитное поле. Поэтому, пренебрегая этим краевым эффектом, можно утверждать, что остальные части пленочной системы «не знают» о существовании этого потока и «не заметят», если он пропадет. А пропасть он может в результате замыкания, соприкосновения двух сверхпроводящих поверхностей, обращенных друг к другу и несущих противоположные и равные токи.

Итак, сформулируем принцип замыкания [24]: если закоротить (замкнуть) две обращенные друг к другу поверхности пленок в какой-либо сложной пленочной структуре, то это не повлияет на распределение токов во всех остальных участках структуры, кроме замкнутых поверхностей.

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих этот принцип.

1. Найдем распределение токов в двух толстых одинаковых параллельных пленках, разделенных тонким зазором, если в пер-

вой пленке задан ток I_1 , а во второй — в ту же сторону ток I_2 . Замкнем эти две пленки. Получится одна, но с полным током $I_1 + I_2$, который равномерно распределится по двум наружным поверхностям замкнутых пленок. Итак, по каждой из этих поверхностей течет ток $(I_1 + I_2)/2$. Так мы сразу нашли наружные поверхностные токи нашей пленочной системы. Обозначим теперь ток, текущий по внутренним поверхностям пленок, через i . Поскольку полный ток в первой пленке задан равным I_1 , то $(I_1 + I_2)/2 + i = I_1$, т. е. $i = (I_1 - I_2)/2$. Все поверхностные токи нашей системы теперь полностью определены.

Заметим, что если $I_2 = 0$, то мы сразу получим результат, который показан на рис. 9.6 — отсутствие экранирующего действия пленки.

2. Если изолированный провод с током покрыт сверхпроводящей оболочкой, то оболочка не сможет экранировать поле тока. Действительно, замкнем внутреннюю поверхность оболочки и поверхность провода. Весь ток провода пойдет по наружной поверхности оболочки и создаст магнитное поле в окружающем пространстве.

3. Найдем распределение токов в системе, образованной толстой сверхпроводящей пленкой с током, расположенной над массивным сверхпроводящим телом (рис. 9.7). В результате замыкания нижней поверхности пленки и верхней поверхности массивного бруска возникает система, распределение токов в которой мы можем нарисовать. Действительно, ток из пленки растечется по верхней поверхности сверхпроводящего бруска, но небольшая его доля пойдет вокруг бруска через его нижнюю поверхность. Плотность тока в верхней поверхности пленки резко уменьшится. Используя этот результат, теперь можно сказать, что в исходной (незамкнутой) системе часть пленки, которая находится над бруском, будет нести заданный ток I главным образом по нижней поверхности. Такой же, но противоположно направленный ток пойдет по верхней поверхности бруска, находящейся непосредственно под пленкой. Затем этот ток растечется по верхней поверхности бруска и замкнется, а малая его часть замкнется на пути вокруг бруска.

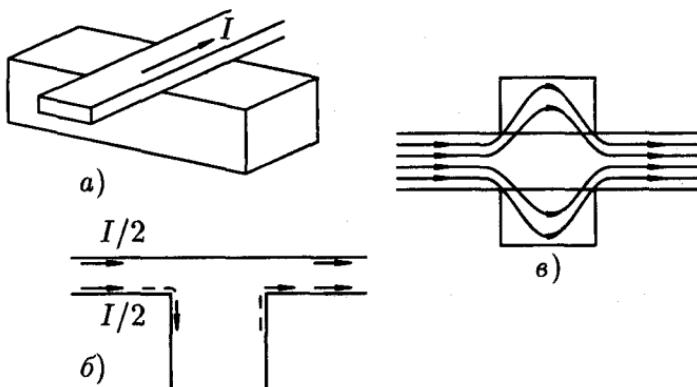


Рис. 9.7. Пленка с током отделена от плоской поверхности массивного сверхпроводника узким зазором: а) общий вид, б) вид сбоку после замыкания, в) вид в плане.

Можно сделать вывод, что роль бруска в этой схеме приближается к роли полубесконечного экрана (см. рис. 9.5).

§ 10. Кинетическая индуктивность

Индуктивность какого-либо участка электрической цепи обычно определяется по величине энергии магнитного поля \mathcal{F}^M , возникающего при протекании заданного тока I по этому участку:

$$\mathcal{F}^M = \frac{1}{8\pi} \int H^2 dV = \frac{1}{2c^2} L^M I^2; \quad (10.1)$$

интеграл берется по всему пространству. Эту индуктивность мы будем называть магнитной, или геометрической. Но при создании в участке цепи тока I часть энергии перешла еще и в кинетическую энергию \mathcal{F}^K носителей тока (электронов). С этой энергией можно ассоциировать так называемую кинетическую индуктивность участка цепи L^K :

$$\mathcal{F}^K = \int n \frac{mv^2}{2} dV = \frac{1}{2c^2} L^K I^2, \quad (10.2)$$

здесь n — концентрация носителей тока, m — масса одного носителя, v — скорость. Интегрирование ведется по объему проводника.

В случае, когда рассматриваемый участок цепи — нормальный, вклад от кинетической индуктивности в полное сопротивление участка очень мал по сравнению с его активным сопротивлением, и им обычно пренебрегают. Учет кинетической индуктивности в нормальных проводниках может оказаться существенным при очень высоких частотах (больших 10^{13} Гц). Наоборот, в сверхпроводниках кинетическая индуктивность играет иногда важную роль.

Итак, плотность сверхтока $j_s = n_s e v_s$. Тогда из формулы (10.2) получим следующее определение кинетической индуктивности сверхпроводника:

$$L^k = c^2 \Lambda \int j_s^2 dV / I^2, \quad (10.3)$$

где интеграл берется по объему сверхпроводника, а I — полный ток, текущий по сверхпроводнику.

Проиллюстрируем понятие кинетической индуктивности на конкретных примерах.

1. Рассмотрим сверхпроводник круглого сечения длины l и радиуса R . Пусть $R \gg \lambda$. Найдем кинетическую индуктивность нашего провода L^k . Если по проводу течет ток I , то он течет по поверхности провода. Плотность тока j_s на расстоянии r от центра провода равна $j_s(x) = j_{s0} e^{-x/\lambda}$, где $x = R - r$, $j_{s0} = j_s(0)$. Полный ток $I = 2\pi R \lambda j_{s0}$. Подставляя эти данные в (10.3) и проводя интегрирование, получим $L^k = l\lambda/R$.

Введем теперь очень полезное для приложений понятие — индуктивность на квадрат: L_\square . Если рассматривается плоский проводник, то индуктивность его (так же, как и сопротивление) тем больше, чем больше его длина, и тем меньше, чем больше его ширина, поэтому индуктивность квадрата всегда одна и та же для данного проводника — будь это 1 км^2 или 1 мм^2 . Поскольку длина окружности поперечного сечения нашего провода равна $2\pi R$, то

кинетическая индуктивность на квадрат будет равна

$$L_{\square}^k = 2\pi\lambda. \quad (10.4)$$

Если воспользоваться выражением (10.1) и найти ту часть магнитной индуктивности, которая связана с магнитным полем, проникшим в сверхпроводник, т. е. в слой толщиной порядка λ у поверхности, то после элементарных расчетов получим то же самое значение:

$$L_{\square}^m = 2\pi\lambda. \quad (10.5)$$

Этот же результат будет справедлив и для плоской поверхности сверхпроводящего полупространства.

Полная индуктивность на квадрат λ -слоя поверхности массивного сверхпроводника равна сумме (10.4) и (10.5):

$$L_{\square} = 4\pi\lambda. \quad (10.6)$$

В СИ эта формула имеет вид $L_{\square} = \mu_0\lambda$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м. Как следует из (10.4) – (10.6), L_{\square} измеряется в см, а в СИ — в Гн, причем $1 \text{ см} = 10^{-9} \text{ Гн} = 1 \text{ нГн}$.

Поскольку L_{\square}^k для полупространства зависит только от глубины проникновения, можно сказать, что λ характеризует инерциальные свойства носителей сверхтока.

Если $\lambda \approx 5 \cdot 10^{-6}$ см, то $L_{\square} = 4\pi\lambda = 6.3 \cdot 10^{-5}$ см = $6.3 \cdot 10^{-14}$ Гн.

2. Рассмотрим кинетическую индуктивность тонкой сверхпроводящей пленки. Пусть толщина пленки $d \ll \lambda$, и поэтому ток в пленке будет распределен по толщине однородно. По ширине пленки рассмотрим малый участок ширины w , на котором ток будем считать распределенным однородно. Ограничим длину рассматриваемого участка тоже величиной w , имеем для кинетической энергии сверхпроводящих электронов в этом участке выражение

$$\mathcal{F}_{\square}^k = \frac{\Lambda}{2} j_s^2 w^2 d.$$

Поскольку ток I по сечению участка предполагается однородным, то $j_s = I/wd$, откуда

$$\mathcal{F}_\square^k = \frac{1}{2d} \Lambda I^2 = \frac{1}{2d} \frac{4\pi\lambda^2}{c^2} I^2 = \frac{1}{2c^2} L_\square^k I^2.$$

Из последнего равенства сразу получим выражение для L_\square^k тонкой пленки:

$$L_\square^k = 4\pi\lambda^2/d. \quad (10.7)$$

Понятно, что в случае $d \ll \lambda$ кинетическая индуктивность может стать значительной.

Так, для тонкой пленки ($d \sim 10^{-6}$ см), имеющей глубину проникновения $\lambda = 3 \cdot 10^{-5}$ см, кинетическая индуктивность на квадрат будет, согласно (10.7), равна $L_\square^k \simeq 10^{-2}$ см = 10^{-11} Гн.

3. Рассмотрим, наконец, случай толстой пленки над массивным сверхпроводящим экраном. Пусть расстояние между пленкой и плоскостью экрана равно b . Если по пленке идет некоторый ток, то в зазоре между пленкой и экраном появится некоторое магнитное поле. Вычисляя энергию этого магнитного поля в зазоре, найдем вклад в индуктивность пленки от этого поля: $L_\square = 4\pi b$. Но магнитное поле будет также проникать на глубину λ_1 в пленку и на глубину λ_2 в экран. Согласно (10.6), это проникновение дает дополнительный вклад в индуктивность всей системы, так что полная индуктивность пленки над экраном равна

$$L_\square = 4\pi(b + \lambda_1 + \lambda_2). \quad (10.8)$$

Отсюда видно, что для снижения индуктивности пленки ее надо располагать как можно ближе к экрану (уменьшать b), но уменьшать b существенно меньше λ_1 или λ_2 нет смысла, так как магнитная и кинетическая индуктивности в слое порядка глубины проникновения останутся и в пленке, и в экране.

§ 11. Комплексная проводимость сверхпроводника

В этом параграфе будет рассмотрена комплексная проводимость сверхпроводника, на плоскую поверхность которого падает электромагнитная волна. При этом мы предполагаем, что

длина свободного пробега электронов l невелика, т. е. справедливо приближение нормального скин-эффекта. Иными словами, l достаточно мала, а частоты не столь велики, и поэтому l меньше глубины проникновения электромагнитного поля. При этом частота соударений электронов $\tau^{-1} = v_F/l \gg \omega$, где ω — частота электромагнитной волны, v_F — скорость электронов на поверхности Ферми.

В изложении этих вопросов мы будем частично следовать книге Ван-Дузера и Тернера [25].

Для вычисления проводимости сверхпроводника в высокочастотном поле воспользуемся двухжидкостной моделью, т. е. будем считать, что существуют нормальные электроны с плотностью n_n и сверхпроводящие с плотностью n_s , причем плотность электронов проводимости $n = n_s + n_n$.

Уравнением движения для сверхпроводящих электронов является первое уравнение Лондонов (5.2)

$$\mathbf{E} = \Lambda d\mathbf{j}_s/dt. \quad (11.1)$$

Для нормальных электронов можно написать

$$e\mathbf{E} - \frac{m}{n_n e} \frac{\mathbf{j}_n}{\tau} = \frac{m}{n_n e} \frac{d\mathbf{j}_n}{dt}. \quad (11.2)$$

Здесь в левой части стоят силы, действующие на нормальные электроны: электрическое поле и усредненная «сила трения» из-за соударений, а справа — произведение массы на ускорение. Этот второй закон Ньютона для нормального электрона можно записать в виде

$$\mathbf{E} = \frac{n_s}{n_n} \Lambda \frac{d\mathbf{j}_n}{dt} + \frac{n_s}{n_n} \Lambda \frac{\mathbf{j}_n}{\tau}. \quad (11.3)$$

Предполагая, что $\mathbf{j}_n \propto e^{i\omega t}$, запишем (11.1) и (11.3) так:

$$\mathbf{j}_s = -i \frac{1}{\Lambda \omega} \mathbf{E}, \quad (11.4)$$

$$\mathbf{j}_n = \frac{n_n}{n_s} \frac{\tau}{\Lambda} \frac{1 - i\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} \mathbf{E}. \quad (11.5)$$

Полная плотность тока $\mathbf{j} = \mathbf{j}_s + \mathbf{j}_n$, и мы имеем окончательно

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad \sigma = \sigma_1 - i\sigma_2, \quad (11.6)$$

$$\sigma_1 = \frac{n_n}{n_s} \frac{\tau}{\Lambda} \frac{1}{1 + (\omega\tau)^2}, \quad (11.7)$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{\Lambda\omega} \left[1 + \frac{n_n}{n_s} \frac{(\omega\tau)^2}{1 + (\omega\tau)^2} \right]. \quad (11.8)$$

Уравнения (11.6) – (11.8) дают комплексную проводимость сверхпроводника в высокочастотном поле.

§ 12. Скин-эффект и поверхностный импеданс

12.1. Нормальный скин-эффект. Известно, что если на поверхность нормального металла падает электромагнитная волна, то поле проникает внутрь на так называемую скин-глубину, или глубину скин-слоя. В этом пункте будет рассмотрен вопрос о проникновении поля вглубь сверхпроводника, на плоскую поверхность которого падает электромагнитная волна. Поверхность сверхпроводника совпадает с плоскостью $x = 0$.

Запишем уравнения Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E}, \quad (12.1)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (12.2)$$

Предполагая, что магнитное поле в сверхпроводнике $\mathbf{H} \propto e^{-i(kx-\omega t)}$ и взяв еще раз ротор от правой и левой частей (12.1), получим

$$-\nabla^2 \mathbf{H} = -\frac{4\pi}{c} \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (12.3)$$

Здесь мы, используя уравнение $\text{div } \mathbf{H} = 0$, воспользовались равенством $\text{rot rot } \mathbf{H} = -\nabla^2 \mathbf{H}$. Подставляя в (12.3) $\mathbf{H} \propto e^{-i(kx-\omega t)}$, получим

$$k^2 = -i \frac{4\pi}{c^2} \sigma \omega, \quad (12.4)$$

откуда

$$k = (1 - i)/\delta, \quad (12.5)$$

где

$$\delta = \left(\frac{c^2}{2\pi\sigma\omega} \right)^{1/2}. \quad (12.6)$$

В принципе поставленная задача решена. Действительно, проникновение поля определяется величиной k , которая, согласно (12.5) и (12.6), выражается через найденную проводимость σ . Проведем некоторые упрощения. Будем считать, что температура не очень близка к T_c , так что выполняется неравенство $(n_n/n_s)(\omega\tau)^2 \ll 1$. Кроме того, конечно, всегда предполагается, что $\omega\tau \ll 1$. Тогда (11.7) и (11.8) дадут

$$\sigma = \frac{n_n}{n_s} \frac{\tau}{\Lambda} - i \frac{1}{\Lambda\omega}. \quad (12.7)$$

Подставив это выражение в (12.6), получим

$$\delta = \frac{\sqrt{2}\lambda}{\left(\frac{n_n}{n_s}\omega\tau - i\right)^{1/2}}. \quad (12.8)$$

Для малых частот, когда $(n_n/n_s)(\omega\tau) \ll 1$, имеем $\delta = \sqrt{2i}\lambda = \lambda(1 + i)$. Подставляя это выражение в (12.5), получим $k = -i/\lambda$, т. е. $H \propto e^{-ikx} = e^{-x/\lambda}$, т. е., как и следовало ожидать, низкочастотное магнитное поле проникает в сверхпроводник, как и стационарное поле — на глубину проникновения λ . В общем же случае проникновение определяется формулами (12.5) и (12.8).

12.2. Поверхностный импеданс. По определению поверхности импеданс равен

$$Z = \frac{4\pi}{c} \frac{E}{H}. \quad (12.9)$$

Это выражение имеет ясный физический смысл. Пусть на поверхности металла существуют переменные электрическое и магнитное поля, причем векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} касательны к поверхности и ортогональны друг к другу. Тогда $c\mathbf{H}/4\pi$ — это поверхностная плотность тока $\mathbf{j}_{\text{пов}}$, поэтому Z в (12.9) — это отношение $E/j_{\text{пов}}$, т. е. импеданс на квадрат поверхности металла.

Найдем теперь поверхностный импеданс сверхпроводника. Записывая снова магнитное поле в виде $\mathbf{H} \propto e^{-i(kx-\omega t)}$, приведем уравнение (12.1) к виду

$$ikH = \frac{4\pi}{c}\sigma E. \quad (12.10)$$

Тогда, согласно (12.9) и (12.5),

$$Z = \frac{ik}{\sigma} = \frac{1+i}{\sigma\delta}. \quad (12.11)$$

Подставляя сюда (12.6) и (12.7), получим

$$Z = R_{\square} + iX_{L\square}, \quad (12.12)$$

$$R_{\square} = \frac{2\pi\omega^2\lambda}{c^2} \frac{n_n}{n_s} \tau, \quad (12.13)$$

$$X_{L\square} = 4\pi\lambda\omega/c^2 = \omega L_{\square}/c^2. \quad (12.14)$$

Вещественная часть импеданса R_{\square} характеризует потери энергии на нагревание, а мнимая часть $X_{L\square}$ является индуктивным сопротивлением.

Выясним, как зависят от температуры R_{\square} и $X_{L\square}$. Воспользуемся для этого эмпирической зависимостью $\lambda \propto (1-t^4)^{-1/2}$, $t = T/T_c$. Поскольку $\lambda \propto n_s^{-1/2}$, имеем $n_s \propto (1-t^4)$, или $n_s = n(1-t^4)$, где n — плотность свободных электронов металла. Тогда $n_n = nt^4$, таким образом,

$$R_{\square} \propto t^4 / (1-t^4)^{3/2}, \quad X_{L\square} \propto (1-t^4)^{-1/2}. \quad (12.15)$$

Эти формулы хорошо (по крайней мере качественно) передают температурную зависимость активной и реактивной составляющих импеданса за исключением области температур около T_c . В этой области формулы (12.13) и (12.14) уже неверны.

Действительно, при их выводе мы использовали формулу (12.7), полученную в предположении $(n_n/n_s)(\omega\tau)^2 \ll 1$, но как бы ни была мала частота, при $T \rightarrow T_c$ плотность $n_s \rightarrow 0$ и неравенство нарушается. Поэтому при $T \rightarrow T_c$ из (11.8) имеем $\sigma = (n_n/n_s)\tau/\Lambda - i(n_n/n_s)(\omega\tau)^2/\Lambda\omega$. Пренебрегая здесь мнимой частью и подставляя это выражение в (12.5) в (12.11), получим

$$Z = \frac{2\pi}{c^2} \left(2\omega\tau \frac{n_s}{n_n} \right)^{1/2} \frac{\lambda}{\tau} (1 + i) = \frac{1 + i}{\sigma_n \delta_n}, \quad (12.16)$$

где σ_n и δ_n — проводимость и глубина скин-слоя нормального металла.

Из этого выражения следует, что R_{\square} и $X_{L\square}$ при $T \rightarrow T_c$ принимают одинаковое значение и теряют свою зависимость от температуры, так как $n_s^{1/2}\lambda = \text{const}$.

Зависимость R_{\square} и $X_{L\square}$ от температуры, даваемая двухжидкостной моделью, представлена на рис. 12.1.

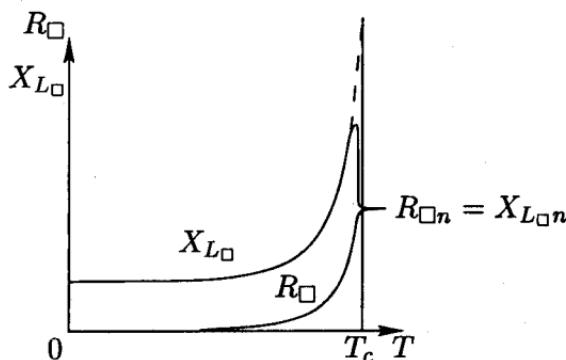


Рис. 12.1. Активная и реактивная части поверхностного импеданса в зависимости от температуры [26].

ГЛАВА III

ТЕОРИЯ СВЕРХПРОВОДИМОСТИ ГИНЗБУРГА – ЛАНДАУ

§ 13. Введение

В теории Лондонов (глава II) не учитывались квантовые эффекты сверхпроводимости. Теория Гинзбурга – Ландау (ГЛ) [27] стала первой квантовой феноменологической теорией сверхпроводимости.

В теории должно было быть учтено то, что сверхпроводящее состояние — более упорядоченное, чем нормальное, и что переход из одного в другое (в отсутствие магнитного поля) — это фазовый переход второго рода. Отсюда следовало, что в сверхпроводнике должен существовать какой-то параметр порядка, который отличен от нуля при $T < T_c$ и обращается в нуль при $T \geq T_c$. С другой стороны, для создания квантовой теории необходимо было ввести какую-то эффективную волновую функцию сверхпроводящих электронов $\Psi(\mathbf{r})$.

В. Л. Гинзбург и Л. Д. Ландау решили объединить эти две величины, решили рассматривать $\Psi(\mathbf{r})$ в качестве параметра порядка. Для этого потребовалась большая научная смелость и проникновенная физическая интуиция. В основу теории ГЛ положена разработанная Л. Д. Ландау теория фазовых переходов второго рода [28].

Согласно этой теории, фазовый переход второго рода — это такой переход, при котором состояние тела меняется непрерывно, а его симметрия — скачком. При этом низкотемпературная фаза — менее симметричная фаза, т. е. фаза, обладающая большим порядком.

К фазовым переходам второго рода относятся переходы порядок — беспорядок в некоторых сплавах, ферромагнитный переход в точке Кюри, переход гелия в сверхтекучее состояние, переход металла в сверхпроводящее состояние.

Поясним теперь, как непрерывное изменение состояния тела может сопровождаться скачкообразным изменением его симметрии. Наиболее наглядно это видно на примере следующего структурного перехода (явления упорядочения). Пусть атомы сортов *A* и *B* расположены в линейной цепочке и при достаточно высокой температуре вероятности заполнения узлов атомами *A* и *B* одинаковы (полный беспорядок, рис. 13.1, *a*). На рис. 13.1, *б* показана вероятность заполнения узлов атомами сорта *A* при $T < T_c$. Теперь атомы расположены в большем порядке — «через один». При прохождении через точку T_c появился и начал увеличиваться с понижением температуры параметр порядка η , а период структуры *a* изменился скачком при $T = T_c$ и стал равным $2a$.

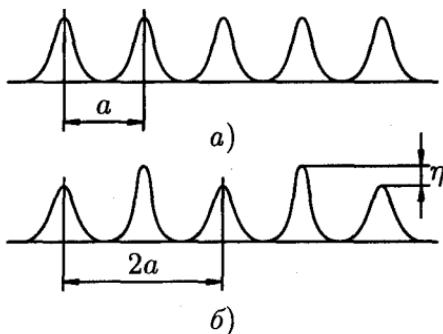


Рис. 13.1. Иллюстрация скачкообразного изменения симметрии при структурном фазовом переходе второго рода: *а*) вероятность найти атом сорта *A* в данной точке кристалла при $T > T_c$; *б*) то же при $T < T_c$.

Возвратимся к сверхпроводимости. В основе теории фазовых переходов второго рода Л. Д. Ландау лежит разложение свободной энергии по степеням параметра порядка, который мал вблизи точки перехода. Поскольку теория ГЛ основана на таком разложении, ясно, что область ее применимости ограничена близостью к критической температуре: $T_c - T \ll T_c$.¹⁾ Более подробно область применимости теории ГЛ дана в § 51 (после изложения микроскопической теории).

Итак, будем считать волновую функцию сверхпроводящих электронов $\Psi(\mathbf{r})$ параметром порядка. Более того, теперь нам понятно, как удобно выбрать нормировку этой волновой функции. Пусть $|\Psi(\mathbf{r})|^2$ будет плотностью электронных куперовских пар, т. е.

$$|\Psi(\mathbf{r})|^2 = n_s/2. \quad (13.1)$$

Рассмотрим сперва самый простой случай — однородный сверхпроводник без внешнего магнитного поля. Тогда Ψ не должна зависеть от \mathbf{r} , и разложение свободной энергии по степеням $|\Psi|^2$ вблизи T_c дает выражение

$$F_{s0} = F_n + \alpha|\Psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\Psi|^4. \quad (13.2)$$

Здесь F_{s0} — плотность свободной энергии сверхпроводника в отсутствие магнитного поля, F_n — плотность свободной энергии тела в нормальном состоянии, α и β — некоторые феноменологические коэффициенты разложения, характеризующие материал.

Найдем то значение $|\Psi|^2$, при котором свободная энергия однородного сверхпроводника F_{s0} достигает минимума. Это значение $|\Psi_0|^2$ будет решением уравнения

$$\frac{dF_{s0}}{d|\Psi|^2} = 0.$$

¹⁾ Применимость теории ГЛ ограничена и со стороны очень малых $T - T_c$ т. наз. флуктуационными эффектами, см. § 19.

Подставляя сюда (13.2), после элементарных вычислений получим

$$|\Psi_0|^2 = -\alpha/\beta. \quad (13.3)$$

Подставляя (13.3) в (13.2), найдем разность

$$F_n - F_{s0} = \alpha^2/2\beta. \quad (13.4)$$

Но, согласно формуле (3.5), эта разность равна $H_{cm}^2/8\pi$, откуда имеем

$$H_{cm}^2 = 4\pi\alpha^2/\beta. \quad (13.5)$$

Обсудим температурную зависимость коэффициентов α и β . Поскольку при $T = T_c$ параметр порядка должен быть равен нулю, а при $T < T_c$ — отличен от нуля, из (13.3) следует, что $\alpha = 0$ при $T = T_c$ и $\alpha < 0$ при $T < T_c$. Поэтому в первом порядке по $(T_c - T)$ можно записать

$$\alpha = \tilde{\alpha}(T - T_c), \quad (13.6)$$

где $\tilde{\alpha}$ не зависит от близости к T_c . Такая температурная зависимость α согласует вблизи T_c формулу (13.5) и эмпирическую формулу (1.1).

Коэффициент β положителен и от температуры не зависит. Действительно, согласно (13.3), при $T < T_c$ и $\alpha < 0$ положительное значение величины $|\Psi_0|^2$ может быть получено только при $\beta > 0$. С другой стороны, если $T > T_c$ и, согласно (13.6), $\alpha > 0$, то при $\beta > 0$ величина F_{s0} достигает минимума при $|\Psi_0|^2 = 0$, т.е., как и должно быть, сверхпроводящее состояние при $T > T_c$ отсутствует. Таким образом, при $T < T_c$ и $T > T_c$ параметр $\beta > 0$. Поэтому мы можем в первом по $(T_c - T)$ приближении считать, что $\beta = \text{const}$.

§ 14. Уравнения теории Гинзбурга – Ландау

14.1. Плотность свободной энергии. Переходим теперь к рассмотрению общего случая неоднородного сверхпроводника, находящегося во внешнем магнитном поле.

Вблизи T_c разложение свободной энергии Гиббса по степеням Ψ можно записать так:

$$G_{sH} = G_n + \alpha|\Psi|^2 + \\ + \frac{\beta}{2}|\Psi|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| -i\hbar\nabla\Psi - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\Psi \right|^2 + \frac{H^2}{8\pi} - \frac{\mathbf{H}\mathbf{H}_0}{4\pi}, \quad (14.1)$$

G_n — плотность свободной энергии сверхпроводника в нормальном состоянии, \mathbf{H}_0 — напряженность внешнего однородного магнитного поля, в котором находится сверхпроводник. Предпоследнее слагаемое в (14.1) представляет собой просто плотность магнитной энергии, где \mathbf{H} — это точное микроскопическое поле в данной точке сверхпроводника. Слагаемое с градиентным членом — это плотность кинетической энергии сверхпроводящих электронов. Рассмотрим это слагаемое более подробно.

Плотность кинетической энергии частицы с массой m в квантовой механике записывается в виде

$$\frac{1}{2m} | -i\hbar\nabla\Psi |^2.$$

В случае, если частица имеет заряд e и движется в поле векторного потенциала \mathbf{A} , в выражении для плотности кинетической энергии оператор $-i\hbar\nabla$ надо изменить:

$$-i\hbar\nabla \rightarrow -i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A} = m\mathbf{v}.$$

Оператор скорости поэтому равен

$$\mathbf{v} = -(i\hbar/m)\nabla - (e/cm)\mathbf{A}.$$

Поскольку в выражение для плотности кинетической энергии входит именно скорость частицы \mathbf{v} , становится понятным выражение (14.1). Остается только сказать, что в этом выражении произведена замена $e \rightarrow 2e$, поскольку элементарный заряд носителя сверхтока равен $2e$. Соответственно, под m^* в (14.1) понимается удвоенная масса свободного электрона.

14.2. Уравнения Гинзбурга – Ландау (ГЛ). Свободная энергия Гиббса всего сверхпроводника, согласно (14.1), равна

$$\mathcal{G}_{sH} = \mathcal{G}_n + \int \left[\alpha |\Psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi|^4 + \frac{1}{4m} \left| -i\hbar \nabla \Psi - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \Psi \right|^2 + \right. \\ \left. + \frac{(\text{rot } \mathbf{A})^2}{8\pi} - \frac{\text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{H}_0}{4\pi} \right] dV, \quad (14.2)$$

где интегрирование ведется по всему объему сверхпроводника. Наша задача — найти такие уравнения относительно функций $\Psi(\mathbf{r})$ и $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, решения которых, будучи подставлены в (14.2), давали бы минимальное значение \mathcal{G}_{sH} .

Для решения этой вариационной задачи будем сперва считать $\Psi(\mathbf{r})$ и $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ неизменными, а проварыирем функцию $\Psi^*(\mathbf{r})$. Итак, решаем вариационную задачу

$$\delta_{\Psi^*} \mathcal{G}_{sH} = 0, \quad (14.3)$$

где

$$\delta_{\Psi^*} \mathcal{G}_{sH} = \int dV \left[\alpha \Psi \delta \Psi^* + \beta \Psi |\Psi|^2 \delta \Psi^* + \right. \\ \left. + \frac{1}{4m} \left(i\hbar \nabla \delta \Psi^* - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \delta \Psi^* \right) \left(-i\hbar \nabla \Psi - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \Psi \right) \right]. \quad (14.4)$$

Вынести $\delta \Psi^*$ за квадратные скобки мешает только член $i\hbar \nabla \delta \Psi^*$. Проделаем такие преобразования. Обозначим

$$\mathbf{v} = \left(-i\hbar \nabla \Psi - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \Psi \right).$$

Используя тождество

$$\nabla(\delta \Psi^* \mathbf{v}) = \mathbf{v} \nabla \delta \Psi^* + \delta \Psi^* \nabla \mathbf{v},$$

имеем

$$\int dV \nabla \delta \Psi^* \mathbf{v} = - \int \delta \Psi^* \nabla \mathbf{v} dV + \int \nabla(\delta \Psi^* \mathbf{v}) dV. \quad (14.5)$$

Последний интеграл в этом равенстве по теореме Гаусса превращается в поверхностный интеграл:

$$\int \nabla(\delta\Psi^* \mathbf{v}) dV = \oint_S \delta\Psi^* \mathbf{v} dS.$$

Подставляя (14.5) в (14.4), а (14.4) в (14.3), получим

$$\begin{aligned} \delta_{\Psi^*} \mathcal{G}_{sH} &= \int dV \left[\alpha\Psi + \beta\Psi|\Psi|^2 + \frac{1}{4m} \left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A} \right)^2 \Psi \right] \delta\Psi^* + \\ &\quad + \oint_S \left[-i\hbar\nabla\Psi - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\Psi \right] \delta\Psi^* dS = 0. \end{aligned}$$

Это выражение может быть равно нулю при произвольной функции $\delta\Psi^*$ только в том случае, если выражения в квадратных скобках равны нулю. Так мы получим первое уравнение теории ГЛ и граничное условие к нему:

$$\begin{aligned} \alpha\Psi + \beta\Psi|\Psi|^2 + \frac{1}{4m} \left(i\hbar\nabla + \frac{2e}{c}\mathbf{A} \right)^2 \Psi &= 0, \\ \left(i\hbar\nabla\Psi + \frac{2e}{c}\mathbf{A}\Psi \right) \mathbf{n} &= 0, \end{aligned} \quad (14.6)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор, нормальный к поверхности сверхпроводника. Легко проверить, что минимизация \mathcal{G}_{sH} по Ψ даст уравнение, комплексно сопряженное уравнению (14.6). Полученное уравнение есть уравнение относительно параметра порядка Ψ . У нас осталось еще одно переменное: \mathbf{A} . Чтобы найти уравнение для \mathbf{A} , минимизируем выражение (14.2) для \mathcal{G}_{sH} по \mathbf{A} :

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbf{A}} \mathcal{G}_{sH} &= \int dV \left\{ \frac{1}{4m} \delta_{\mathbf{A}} \left[\left(i\hbar\nabla\Psi^* - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\Psi^* \right) \times \right. \right. \\ &\quad \times \left. \left. \left(-i\hbar\nabla\Psi - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\Psi \right) \right] + \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{A} \operatorname{rot} \delta\mathbf{A} - \frac{\mathbf{H}_0}{4\pi} \operatorname{rot} \delta\mathbf{A} \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \left\{ \frac{1}{4m} \left(-\frac{2e}{c} \Psi^* \delta \mathbf{A} \right) \left(-i\hbar \nabla \Psi - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \Psi \right) + \right. \\
 &\quad + \frac{1}{4m} \left(i\hbar \nabla \Psi^* - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \Psi^* \right) \left(-\frac{2e}{c} \Psi \delta \mathbf{A} \right) + \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4\pi} (\operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{H}_0) \operatorname{rot} \delta \mathbf{A} \right\} dV. \quad (14.7)
 \end{aligned}$$

Из (14.7) следует, что вынести вариацию $\delta \mathbf{A}$ за фигурную скобку мешает член $(1/4\pi)(\operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{H}_0) \operatorname{rot} \delta \mathbf{A}$. Воспользовавшись тождеством

$$\mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b} = \mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a} - \operatorname{div}[\mathbf{a} \mathbf{b}], \quad (14.8)$$

проинтегрируем последнее слагаемое в (14.7):

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{4\pi} \int dV (\operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{H}_0) \operatorname{rot} \delta \mathbf{A} = \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int dV \delta \mathbf{A} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} - \frac{1}{4\pi} \oint dS [\delta \mathbf{A}, \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{H}_0]. \quad (14.9)
 \end{aligned}$$

При этом мы воспользовались теоремой Гаусса и перешли от объемного интеграла к поверхностному:

$$\int dV \operatorname{div}[\delta \mathbf{A}, \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{H}_0] = \oint dS [\delta \mathbf{A}, \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{H}_0].$$

Но этот поверхностный интеграл равен нулю, так как магнитное поле на поверхности сверхпроводника задано, и поэтому $\delta \mathbf{A}|_S = 0$.

Подставляя теперь (14.9) без последнего члена в (14.7), производя элементарные преобразования и приравнивая вариацию свободной энергии нулю, получим

$$\begin{aligned}
 \delta_{\mathbf{A}} \mathcal{G}_{sH} &= \int dV \left[\frac{i\hbar e}{2mc} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2e^2}{mc^2} \mathbf{A} |\Psi|^2 + \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} \right] \delta \mathbf{A} = 0. \quad (14.10)
 \end{aligned}$$

Этот интеграл может быть равен нулю при любой вариации $\delta \mathbf{A}$ только в том случае, если выражение в квадратных скобках равно нулю. Это требование определяет второе уравнение теории ГЛ относительно векторного потенциала \mathbf{A} :

$$\mathbf{j}_s = -\frac{i\hbar e}{2m}(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) - \frac{2e^2}{mc}|\Psi|^2\mathbf{A}, \quad (14.11)$$

где, согласно уравнению Максвелла, плотность тока \mathbf{j}_s в сверхпроводнике равна

$$\mathbf{j}_s = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (14.12)$$

Перейдем к безразмерной волновой функции $\psi(\mathbf{r})$, обозначив

$$\psi(\mathbf{r}) = \Psi(\mathbf{r})/\Psi_0, \quad (14.13)$$

где $\Psi_0^2 = n_s/2 = |\alpha|/\beta$.

Кроме того, введем следующие обозначения:

$$\xi^2 = \frac{\hbar^2}{4m|\alpha|}, \quad (14.14)$$

$$\lambda^2 = \frac{mc^2}{4\pi n_s e^2} = \frac{mc^2\beta}{8\pi e^2|\alpha|}. \quad (14.15)$$

Тогда уравнения ГЛ можно записать в более компактной и удобной форме:

$$\xi^2 \left(i\nabla + \frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{A} \right)^2 \psi - \psi + \psi|\psi|^2 = 0, \quad (14.16)$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = -i \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2} (\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - \frac{|\psi|^2}{\lambda^2} \mathbf{A}. \quad (14.17)$$

Здесь $\Phi_0 = \pi\hbar c/e$ — квант потока (§ 8).

Представив волновую функцию ψ в виде $\psi = |\psi|e^{i\theta}$, второе уравнение ГЛ можно записать в следующей форме:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \frac{|\psi|^2}{\lambda^2} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla\theta - \mathbf{A} \right). \quad (14.18)$$

Из (14.6) получим граничное условие для ψ . Если сверхпроводник граничит с вакуумом или каким-либо другим диэлектриком, таким условием будет

$$\left(i\nabla + \frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{A} \right) \mathbf{n}\psi = 0, \quad (14.19)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор нормали к поверхности сверхпроводника. Легко проверить с помощью формулы (14.11), что условие (14.19) обеспечивает выполнение естественного физического требования, чтобы сверхток через границу сверхпроводник – диэлектрик равнялся нулю. Однако этому же требованию равенства нулю нормальной компоненты сверхтока на границе удовлетворяет и более общее равенство:

$$\left(i\nabla + \frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{A} \right) \mathbf{n}\psi = ia\psi, \quad (14.20)$$

где a — произвольное вещественное число. С помощью микротеории сверхпроводимости можно показать, что условие (14.20) соответствует случаю, когда сверхпроводник граничит с нормальным металлом.

14.3. Градиентная инвариантность теории ГЛ. В уравнения ГЛ входит векторный потенциал \mathbf{A} . Но хорошо известно, что выбор \mathbf{A} неоднозначен. Действительно, переход к другому полю \mathbf{A}' по формуле

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \nabla\varphi, \quad (14.21)$$

где $\varphi(\mathbf{r})$ — произвольная однозначная скалярная функция, не изменяет величины магнитного поля:

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{A}',$$

так как

$$\text{rot } \nabla\varphi = 0.$$

Для того чтобы результаты теоретических расчетов не зависели от того или иного выбора вектор-потенциала \mathbf{A} , т. е., иначе

говоря, были бы градиентно инвариантными, нужно, чтобы сами уравнения ГЛ удовлетворяли требованию градиентной инвариантности.

Легко проверить, что это требование выполняется в случае, если от переменных \mathbf{A} и ψ перейти к переменным \mathbf{A}' и ψ' по следующим формулам преобразования

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \nabla\varphi, \quad (14.22)$$

$$\psi = \psi' \exp \left[i \frac{2\pi}{\Phi_0} \varphi(\mathbf{r}) \right]. \quad (14.23)$$

Проверим это для формулы (14.18).

Перейдем от \mathbf{A} и ψ к \mathbf{A}' и ψ' по формулам (14.22) и (14.23). Легко видеть, что второе уравнение ГЛ (14.18) останется неизменным:

$$\text{rot rot } \mathbf{A}' = \frac{|\psi'|^2}{\lambda^2} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla \theta' - \mathbf{A}' \right).$$

Аналогичным образом можно убедиться в градиентной инвариантности и первого уравнения ГЛ (14.16).

Из свойства градиентной инвариантности уравнений ГЛ следует один очень важный для будущего вывод: для односвязного сверхпроводника всегда можно выбрать такую калибровку вектор-потенциала \mathbf{A} , чтобы $\psi(\mathbf{r})$ была вещественной функцией.¹⁾

Требование односвязности здесь существенно потому, что в многосвязном сверхпроводнике фаза параметра порядка θ уже не является однозначной функцией, а может меняться на величину, кратную 2π , при обходе вокруг отверстия в сверхпроводнике. Поэтому $\theta(\mathbf{r})$ становится непригодной для соответствующей калибровки \mathbf{A} .

¹⁾Напомним, что под односвязным телом понимается такое тело, в котором можно произвольный замкнутый контур стянуть в точку, не пересекая при этом нигде границ тела. Иначе говоря, в односвязном теле нет сплошных отверстий. Тороид — пример двухсвязного тела.

§ 15. Два характерных масштаба длины в сверхпроводниках. Эффект близости

15.1. Длина когерентности и глубина проникновения.

В предыдущем параграфе была введена чисто формально определенная величина ξ (14.14). Сейчас мы узнаем ее физический смысл.

Рассмотрим такой простой пример. На чистую плоскую поверхность сверхпроводника нанесена пленка нормального металла. Тогда локально около поверхности плотность сверхпроводящих электронов несколько понизится. Иными словами, значение параметра порядка $|\psi|$ на поверхности будет несколько отличаться от его равновесного значения в глубине сверхпроводника, где $|\psi| = 1$. Каков тот характерный масштаб длины, на котором параметр порядка восстановится до единицы?

Направим ось x перпендикулярно к поверхности сверхпроводника (на поверхности $x = 0$). Очевидно, изменение ψ может происходить только вдоль оси x , т. е. $\psi = \psi(x)$. Кроме того, поскольку мы рассматриваем односвязный сверхпроводник, можем считать ψ вещественной функцией (см. § 14). Тогда первое уравнение ГЛ (14.16) примет следующий простой вид:

$$-\xi^2 d^2\psi/dx^2 - \psi + \psi^3 = 0. \quad (15.1)$$

Предположим, что слой нормального металла на поверхности такой тонкий, что значение ψ на поверхности очень мало отличается от единицы, т. е.

$$\psi = 1 - \varepsilon(x), \quad \varepsilon(x) \ll 1.$$

Подставляя это выражение для ψ в (15.1) и оставляя только линейные по $\varepsilon(x)$ члены, получим

$$\xi^2 d^2\varepsilon(x)/dx^2 - 2\varepsilon(x) = 0. \quad (15.2)$$

Учитывая, что при $x \rightarrow \infty$ функция $\psi \rightarrow 1$, имеем $\varepsilon(\infty) = 0$. Решение уравнения (15.2) очевидно:

$$\varepsilon = \varepsilon(0)e^{-\sqrt{2}x/\xi}.$$

Отсюда следует, что ξ — это и есть по порядку величины тот характерный масштаб, на котором происходит изменение параметра порядка ψ .

Эту длину называют длиной когерентности.

Другая величина, введенная в предыдущем параграфе, λ , нам уже известна (§ 6). Это глубина проникновения слабого магнитного поля. Она так же, как и ξ , зависит от температуры;

$$\lambda^2 = mc^2\beta/(8\pi|\alpha|e^2), \quad (15.3)$$

$$\xi^2 = \hbar^2/(4m|\alpha|), \quad (15.4)$$

поскольку вблизи T_c имеем $|\alpha| \propto (T_c - T)$. Таким образом, вблизи T_c

$$\lambda \propto (T_c - T)^{-1/2}, \quad \xi \propto (T_c - T)^{-1/2}. \quad (15.5)$$

Во всем диапазоне температур $\lambda(T)$, как правило, хорошо аппроксимируется формулой (6.5). Значения $\lambda(0)$ для некоторых сверхпроводников были приведены в таблице 6.1. Используя нормировку (13.1) и формулу (13.3), убеждаемся, что глубина проникновения (15.3) совпадает с глубиной проникновения, введенной в (5.7).

С помощью $\lambda(T)$ и $\xi(T)$ можно ввести очень важную величину — параметр теории Гинзбурга — Ландау \varkappa :

$$\varkappa = \lambda/\xi. \quad (15.6)$$

Используя формулы (15.3), (15.4) и (15.6), получим другое выражение для \varkappa :

$$\varkappa = 2\sqrt{2}\frac{e}{\hbar c}\lambda^2 H_{cm}. \quad (15.7)$$

С помощью выражения для кванта магнитного потока $\Phi_0 = \pi\hbar c/e$ легко получим отсюда очень полезную формулу:

$$\sqrt{2}H_{cm} = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda\xi}. \quad (15.8)$$

Обсудим в заключение вопрос о влиянии магнитного поля на параметр порядка и на глубину проникновения.

Пусть $\kappa \ll 1$, т. е. $\lambda \ll \xi$. Сверхпроводящий образец занимает полупространство $x > 0$, а внешнее магнитное поле направлено вдоль оси z . Поскольку по предположению $\lambda \ll \xi$, магнитное поле проникает в образец лишь на небольшую по сравнению с ξ глубину. Это значит, что параметр порядка Ψ оказывается под воздействием магнитного поля лишь на глубине λ , а существенно измениться он может только на расстоянии ξ . Поэтому на основной части длины когерентности параметр порядка «не знает» о существовании магнитного поля и близок к $\Psi_0 = (|\alpha|/\beta)^{1/2}$. Следовательно, мы можем заключить, что в случае $\kappa \ll 1$ параметр порядка мало изменяется магнитным полем.

Отсюда сразу же следует, что и глубина проникновения магнитного поля, которая зависит от $|\Psi|^2$, тоже мало изменяется магнитным полем. Точный расчет показывает, что уменьшение модуля параметра порядка ψ вблизи поверхности образца во внешнем магнитном поле H_0 происходит на величину [27]

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} \kappa \frac{H_0^2}{H_{cm}^2}.$$

Влияние внешнего магнитного поля на параметр порядка в случае $\lambda \gg \xi$ оказывается значительно более сильным и приводит ко многим интересным и качественно новым эффектам. Об этом мы будем подробно говорить в будущем.

Задача 15.1. Свинцовый цилиндр находится при температуре 4.2 К в однородном магнитном поле, параллельном его оси. Поле на поверхности цилиндра равно $H_0 = 300$ Э. Найти плотность w магнитной энергии в свинце на расстоянии $x = 300$ Å от поверхности цилиндра. (Диаметр цилиндра много больше глубины проникновения слабого магнитного поля.)

Решение. Если $\lambda(0) = 390$ Å, то $\lambda(4.2\text{ K}) = 415$ Å. Магнитное поле на расстоянии 300 Å от поверхности будет равно $H = H_0 e^{-x/\lambda} = 145.6$ Э. Тогда $w = H^2/8\pi = 844$ эрг/см³.

Задача 15.2. Критическая температура свинца равна 7.18 К. Во сколько раз глубина проникновения λ при $T = 7.10$ К больше, чем глубина проникновения при $T = 4.2$ К? Оценить плотность сверхпроводящих электронов при $T = 7.10$ К.

Ответ. $\lambda(7.10\text{ K})/\lambda(4.2\text{ K}) = 4.49$; $n_s(7.10\text{ K}) = 8.06 \cdot 10^{20}$ см⁻³.

15.2. Эффект близости. Очень ярко проявляется роль длины когерентности в случае хорошего контакта между нормальным металлом N и сверхпроводником S . Куперовские пары могут проникать из S в N и некоторое время там жить. Это приводит к тому, что какой-то слой нормального металла вблизи границы SN станет сверхпроводящим. Но проникновение пар из S в N приведет к уменьшению их плотности в S , т. е. параметр порядка ψ в сверхпроводнике вблизи NS -границы будет меньше единицы даже в отсутствие магнитного поля.

Это явление называется эффектом близости.

Рассмотрим наиболее простой случай. Пусть хороший контакт осуществлен между двумя сверхпроводниками, критические температуры которых (T_{cn} и T_{cs}) слегка различны: $T_{cs} > T_{cn}$, $T_{cs} - T_{cn} \ll T_{cn}$. Температура образца T выбрана такой, что выполняется неравенство $T_{cn} < T < T_{cs}$, т. е. материал с критической температурой T_{cn} находится в нормальном состоянии. Плоская граница между двумя материалами совпадает с плоскостью $x = 0$. Сверхпроводник занимает полупространство $x > 0$, нормальный металл — соответственно, $x < 0$.

Поведение параметра порядка в S -области ($x > 0$) можно определить, решив первое уравнение ГЛ (14.16) в форме (15.1). Это уравнение интегрируется точно. Действительно, его первый интеграл имеет вид

$$-\xi^2(d\psi/dx)^2 - \psi^2 + \frac{1}{2}\psi^4 = C, \quad (15.9)$$

где C — константа интегрирования. Поскольку при $x \rightarrow \infty$ имеем $(d\psi/dx) \rightarrow 0$, $\psi \rightarrow 1$, то $C = -1/2$. Подставляя это значение C в (15.9) и интегрируя, получим

$$\psi = \operatorname{th}[(x - x_0)/\sqrt{2}\xi]. \quad (15.10)$$

Здесь x_0 — константа интегрирования, которая должна быть определена из граничного условия при $x = 0$. Это условие (14.20) в нашем случае имеет вид

$$\frac{1}{\psi} \frac{d\psi}{dx} = \frac{1}{b}. \quad (15.11)$$

Величина b в общем случае должна быть вычислена с помощью микроскопической теории. Ее геометрический смысл ясен из рис. 15.1.

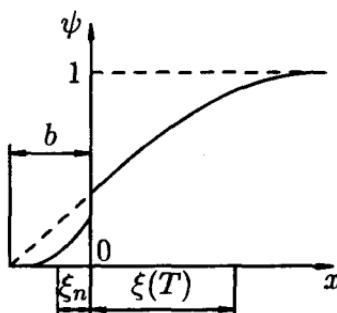


Рис. 15.1. Параметр порядка $\psi(x)$ вблизи границы между сверхпроводником ($x > 0$) и нормальным металлом ($x < 0$).

Подставив (15.10) в (15.11), найдем связь между константой интегрирования x_0 и величиной b :

$$-\operatorname{sh}(\sqrt{2}x_0/\xi) = \sqrt{2}b/\xi.$$

Рассмотрим теперь поведение параметра порядка ψ в нормальной области ($x < 0$). Здесь мы тоже можем использовать (см., например, [29]) первое уравнение ГЛ. Действительно, согласно (13.6), коэффициент $\alpha_n \propto (T - T_{cn})$, т. е. $\alpha_n < 0$ при $T < T_{cn}$ и $\alpha_n > 0$ при $T > T_{cn}$. Поэтому первое уравнение ГЛ (14.6) в нашем случае для N -области и при условии $(T - T_{cn}) \ll T_{cn}$ будет иметь вид

$$-\xi_n^2(d^2\psi/dx^2) + \psi + \psi^3 = 0,$$

где $\xi_n^2 = \hbar^2/4m\alpha_n$.

Параметр порядка в нормальной области мал ($\psi \ll 1$), поэтому можно пренебречь кубическим членом. В результате имеем

$$-\xi_n^2(d^2\psi/dx^2) + \psi = 0.$$

Решение этого уравнения при условии $\psi \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$ будет

$$\psi = \psi_0 e^{-|x|/\xi_n}. \quad (15.12)$$

Отсюда следует, что параметр порядка, экспоненциально затухая, проникает в N -область на глубину ξ_n . Поскольку T_{cn} и T_{cs} близки, можно считать ψ и $d\psi/dx$ непрерывными на NS -границе. Тогда из (15.12) имеем $b = \xi_n$.

В общем случае контакта сверхпроводника с истинно нормальным металлом ($T_{cn} = 0$) применять уравнения ГЛ в нормальной области уже нельзя. Тем не менее, качественно явление сохраняется: параметр порядка проникает на некоторую глубину ξ_n в нормальную область.

Расчет с использованием методов микроскопической теории сверхпроводимости дает следующие результаты [30].

В чистом N -металле, т. е. когда длина свободного пробега электрона $l_n \gg \xi_n$, длина когерентности будет равна

$$\xi_n = \frac{\hbar v_{F_n}}{2\pi k_B T}, \quad (15.13)$$

где v_{F_n} — скорость электрона на поверхности Ферми, k_B — постоянная Больцмана. При этом, однако, надо иметь в виду, что при $T \rightarrow 0$ затухание параметра порядка в глубину N -области становится не экспоненциальным, а значительно более медленным.

В «грязном» N -металле ($l_n \ll \xi_n$) длина когерентности будет

$$\xi_n = \left(\frac{\hbar v_{F_n} l_n}{6\pi k_B T} \right)^{1/2}. \quad (15.14)$$

Оценки по этим формулам дают для ξ_n значения в области $(10^{-5} \div 10^{-4})$ см.

Поведение параметра порядка ψ в общем случае изображено на рис. 15.1. Величина b , согласно [31], в «грязном» случае равна

$$b = \frac{\sigma_s}{\alpha \sigma_n} \xi_n, \quad (15.15)$$

где $\sigma_{s,n}$ — проводимости S - и N -областей, ξ_n определяется формулой (15.14), коэффициент α имеет порядок единицы. Точные значения α для разных ситуаций даны в [31].

Существование эффекта близости надежно подтверждено экспериментом.

Если на поверхность нормального металла нанести пленку сверхпроводника, то ее критическая температура понизится. Так, в работе [32] была исследована система из пленки Al (толщина 4400 \AA , $T_c = 1.2 \text{ K}$), покрытой пленкой Pb. При толщине свинцовой пленки $d(\text{Pb}) = 900 \text{ \AA}$ критическая температура системы T_c близка к критической температуре массивного свинца (7.2 K), но при $d(\text{Pb}) = 600 \text{ \AA}$ величина T_c уже становится равной примерно 5.6 K , а при $d(\text{Pb}) = 200 \text{ \AA}$: $T_c = 1.6 \text{ K}$, т. е. приближается к критической температуре алюминия.

Эффект близости используется для создания джозефсоновских переходов типа *SNS*, когда фазовая когерентность между сверхпроводящими электродами устанавливается через нормальную прослойку, которая может быть достаточно толстой (порядка 1 мкм).

§ 16. Энергия границы раздела между нормальной и сверхпроводящей фазами

Мы уже знаем, что сверхпроводники первого и второго рода могут совершенно по-разному реагировать на внешнее магнитное поле. Это происходит потому, что энергия границы раздела между нормальной и сверхпроводящей фазами σ_{ns} у сверхпроводников первого рода положительна, а у сверхпроводников второго рода отрицательна. Теперь мы можем понять причину этого. Оказывается, что в первом случае $\lambda < \xi$, а во втором случае $\lambda > \xi$. Более точно граница между сверхпроводниками первого и второго рода будет определена ниже. Начнем со сверхпроводника первого рода.

Итак, рассматривается плоская *NS*-граница сверхпроводника, находящегося в промежуточном состоянии. Пусть далеко слева от этой границы наблюдается чисто сверхпроводящее состояние, а далеко справа — нормальное. Граница расположена перпендикулярно оси x , магнитное поле приложено параллельно оси z . Поскольку мы рассматриваем левое сверхпроводящее полустро-

странство, т. е. односвязный сверхпроводник, всегда можно выбрать так калибровку вектор-потенциала \mathbf{A} , что волновая функция теории ГЛ будет вещественной. Кроме того, в силу простой геометрии задачи, все переменные будут зависеть только от x , а вектор \mathbf{A} можно считать параллельным оси y . Начало координат $x = 0$ выбрано в области границы.

Итак, формулируем исходные данные:

- 1) $\mathbf{H} = (0, 0, H(x))$,
- 2) $\psi = \psi(x)$ — вещественная функция,
- 3) $\mathbf{A} = (0, A(x), 0)$.

Учитывая это, исходные уравнения ГЛ (14.16) и (14.18) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} -\xi^2 \frac{d^2\psi}{dx^2} + \left(\frac{2\pi\xi}{\Phi_0} \right)^2 A^2 \psi - \psi + \psi^3 &= 0, \\ d^2A/dx^2 &= (\psi^2/\lambda^2)A. \end{aligned} \quad (16.1)$$

Легко проверить, что первый интеграл этих уравнений будет

$$\begin{aligned} \left[1 - \left(\frac{2\pi\xi A}{\Phi_0} \right)^2 \right] \psi^2 - \frac{1}{2} \psi^4 + \\ + \left(\frac{2\pi\lambda\xi}{\Phi_0} \right)^2 \left(\frac{dA}{dx} \right)^2 + \xi^2 \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 &= C, \end{aligned} \quad (16.2)$$

где C — постоянная интегрирования. Ее мы легко найдем из граничных условий: при $x \rightarrow -\infty$ имеем $\psi \rightarrow 1$, $d\psi/dx \rightarrow 0$, $A \rightarrow 0$.

Действительно, далеко слева, т. е. при $x \rightarrow -\infty$, магнитное поле будет отсутствовать и волновая функция теории ГЛ будет стремиться к единице. Подставляя эти граничные условия в (16.2), получим $C = 1/2$. Отсюда, используя (15.8), окончательно имеем

$$\left[\left(\frac{2\pi\xi A}{\Phi_0} \right)^2 - 1 \right] \psi^2 + \frac{1}{2} \psi^4 = \xi^2 \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 + \frac{H^2}{2H_{cm}^2} - \frac{1}{2}. \quad (16.3)$$

После такой предварительной подготовки перейдем непосредственно к вычислению энергии границы раздела между нормальной и сверхпроводящей фазами, приходящейся на единицу

площади. Но сперва немного физики. Когда мы будем рассматривать сверхпроводящий участок, надо будет точно определить, в каком внешнем магнитном поле он находится. Он является сверхпроводящим участком образца, находящегося в промежуточном состоянии. Следовательно, рядом с ним находится нормальный участок, по которому проходит магнитное поле напряженностью H_{cm} . Напоминаем, что именно эта напряженность автоматически устанавливается в нормальных частях сверхпроводника, находящегося в промежуточном состоянии.

Итак, внешнее поле по отношению к сверхпроводящему участку будет всегда равно H_{cm} . Запишем теперь плотность гибсовской свободной энергии сверхпроводящего участка где-то далеко слева от NS -границы. Согласно формуле (3.15), имеем

$$G_s = F_{s0} - HH_{cm}/4\pi.$$

Поскольку далеко слева от NS -границы $H = 0$, имеем $G_s = F_{s0}$, где F_{s0} — плотность свободной энергии сверхпроводника в отсутствие магнитного поля. Далеко справа от NS -границы, т. е. в нормальном металле, где существует поле H_{cm} , плотность свободной энергии будет равна

$$F = F_n + H_{cm}^2/8\pi,$$

где второе слагаемое просто дает плотность энергии магнитного поля.

Отсюда плотность гибсовской свободной энергии в нормальном слое будет

$$\begin{aligned} G_n &= F - HH_{cm}/4\pi = F_n + H_{cm}^2/8\pi - H_{cm}^2/4\pi = \\ &= F_n - H_{cm}^2/8\pi = F_{s0}. \end{aligned} \quad (16.4)$$

Здесь мы воспользовались условием, что в нормальном слое $H = H_{cm}$, и известным соотношением между F_n и F_{s0} (3.5):

$$F_n - F_{s0} = H_{cm}^2/8\pi.$$

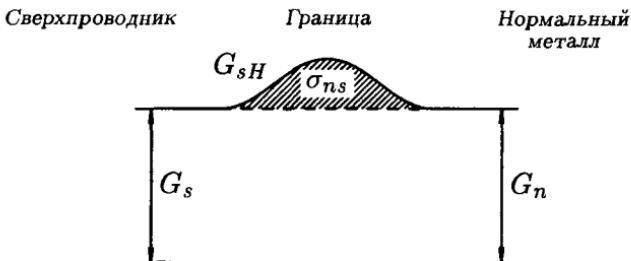


Рис. 16.1. Плотность гиббсовской свободной энергии сверхпроводника G_{sH} в области границы между нормальной и сверхпроводящей фазами.

Таким образом, мы пришли к тому результату, который и следовало ожидать: в условиях равновесия плотность гиббсовской свободной энергии далеко слева от границы равна соответствующей плотности далеко справа от границы.

А что же будет в области границы?

Схематический чертеж на рис. 16.1 дает ответ на этот вопрос.

Плотность гиббсовской свободной энергии может здесь отличаться от уровня G_n . Естественно тогда поверхностную энергию границы раздела σ_{ns} определить так:

$$\sigma_{ns} = \int_{-\infty}^{\infty} (G_{sH} - G_n) dx, \quad (16.5)$$

где

$$G_{sH} = F_{sH} - HH_{cm}/4\pi, \quad (16.6)$$

$$F_{sH} = F + \frac{H_{cm}^2}{4\pi} \left[-|\psi|^2 + \frac{1}{2} |\psi|^4 + \right. \\ \left. + \xi^2 \left| i\nabla\psi + \frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{A}\psi \right|^2 \right] + \frac{H^2}{8\pi}, \quad (16.7)$$

$$G_n = F_n - H_{cm}^2/8\pi. \quad (16.8)$$

Формула (16.6) следует из общей формулы для гиббсовской свободной энергии (Н — напряженность магнитного поля в сверхпроводнике), формула (16.7) является основой для построения теории ГЛ, легко получается из (14.1), формула (16.8) получена ранее (см. (16.4)).

Подставляя (16.6) – (16.8) в (16.5), получим

$$\sigma_{ns} = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{H_{cm}^2}{4\pi} \left[-|\psi|^2 + \frac{1}{2}|\psi|^4 + \xi^2 \left| i\nabla\psi + \frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{A}\psi \right|^2 \right] + \right. \\ \left. + \frac{H^2}{8\pi} - \frac{HH_{cm}}{4\pi} + \frac{H_{cm}^2}{8\pi} \right\} dx.$$

Поскольку $\mathbf{A} = (0, A, 0)$, а ψ — вещественная функция, имеем

$$\sigma_{ns} = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{H_{cm}^2}{4\pi} \left[-\psi^2 + \frac{1}{2}\psi^4 + \xi^2 \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{2\pi\xi A}{\Phi_0} \right)^2 \psi^2 \right] + \right. \\ \left. + \frac{H^2}{8\pi} - \frac{HH_{cm}}{4\pi} + \frac{H_{cm}^2}{8\pi} \right\} dx.$$

Воспользуемся теперь формулой (16.3) и получим окончательно

$$\sigma_{ns} = \frac{H_{cm}^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\xi^2 \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 + \frac{H(H - H_{cm})}{2H_{cm}^2} \right] dx. \quad (16.9)$$

Проанализируем полученный результат. Прежде всего, отметим, что поле, проникшее в сверхпроводящую область, всегда меньше поля на ее границе, т. е. поля H_{cm} , поэтому второе слагаемое в квадратных скобках всегда отрицательно.

Теперь понятно, что в теории Лондонов $\sigma_{ns} < 0$, так как там не учитываются квантовые эффекты и слагаемое $\xi^2(d\psi/dx)^2$ отсутствует.

Из (16.9) следует также, что теория ГЛ снимает эту трудность теории Лондонов. Учет квантовых эффектов приводит к

появлению положительного слагаемого $\xi^2(d\psi/dx)^2$, которое может обеспечить положительность энергии σ_{ns} .

Проведем теперь некоторые оценки. В области перехода от N -к S -фазе параметр порядка меняется от нуля до единицы. Это изменение происходит на расстоянии порядка длины когерентности ξ . Поэтому $d\psi/dx \sim 1/\xi$ и $\xi^2(d\psi/dx)^2 \sim 1$. Это слагаемое отлично от нуля в области границы на длине $x \sim \xi$. Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2(d\psi/dx)^2 dx \sim \xi. \quad (16.10)$$

Слагаемое $H(H - H_{cm})/2H_{cm}^2$ в области перехода достигает значения порядка -1 и обращается в нуль как в S -, так и в N -фазе. Область, где это слагаемое отлично от нуля, простирается на расстояние порядка глубины проникновения магнитного поля λ . Поэтому вклад этого слагаемого в интеграл в (16.9) будет порядка $-\lambda$.

Рассмотрим два предельных случая.

1) Случай $\kappa \ll 1$, т. е. $\lambda \ll \xi$. Тогда, согласно (16.10), главный вклад в интеграл (16.9) дает градиентный член и

$$\sigma_{ns} \sim H_{cm}^2 \xi > 0.$$

Точный расчет интеграла (16.9) по теории ГЛ дает

$$\sigma_{ns} = 1.89 \frac{H_{cm}^2}{8\pi} \xi. \quad (16.11)$$

2) Случай $\kappa \gg 1$, т. е. $\lambda \gg \xi$. Тогда главный вклад в интеграл (16.9) дает слагаемое $H(H - H_{cm})/2H_{cm}^2$ и энергия границы будет

$$\sigma_{ns} \sim -H_{cm}^2 \lambda.$$

Точный расчет дает

$$\sigma_{ns} = -\frac{H_{cm}^2}{8\pi} \lambda. \quad (16.12)$$

Теперь займемся физической интерпретацией полученных результатов.

1) Случай $\kappa \ll 1, \lambda \ll \xi$. На рис. 16.2 показано изменение параметра порядка ψ в области $NS и изменение магнитного поля. Первое происходит на расстоянии ξ , а второе — на расстоянии λ . В этом случае возникает область толщиной порядка ξ , где параметр порядка уже достаточно мал, а магнитное поле отсутствует. Этот участок пользуется «привилегиями» сверхпроводника — свободен от магнитного поля, но по сравнению со сверхпроводником имеет очень малый параметр порядка, что должно увеличить энергию этого участка по сравнению с более далекими влево участками сверхпроводника. Другими словами, энергия этого участка больше энергии сверхпроводящих участков на ту величину энергии, которую нужно было затратить, чтобы разорвать электронные (куперовские) пары в этой области и, тем самым, понизить величину параметра порядка ψ . Плотность этой энергии равна $H_{cm}^2/8\pi$, а энергия участка имеет величину порядка $H_{cm}^2\xi/8\pi$, что хорошо согласуется с формулой (16.11).$

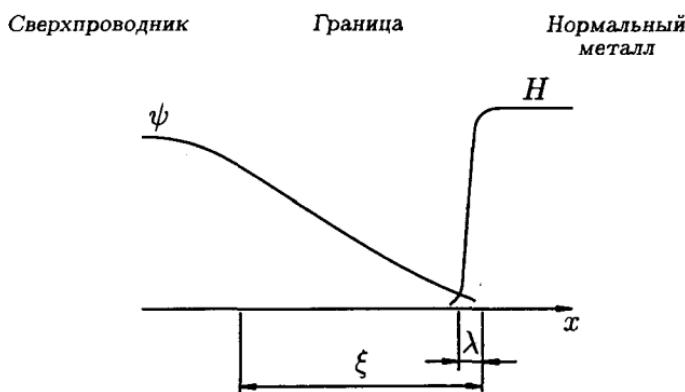


Рис. 16.2. Пространственное изменение параметра порядка ψ и магнитного поля H в области $NS для случая $\kappa \ll 1$.$

Немного по-другому это можно объяснить так. Для образования области с малой величиной ψ (т. е. близкой по энергии к энергии нормального металла) и свободной от магнитного поля

нужно было совершить работу по удалению магнитного поля из этой области. Для этого надо было преодолеть давление магнитного поля $H_{cm}^2/8\pi$ и отодвинуть его границу вправо на расстояние ξ . При этом была совершена работа $(H_{cm}^2/8\pi)\xi$.

2) Случай $\kappa \gg 1$, $\lambda \gg \xi$. Функции $\psi(x)$ и $H(x)$ для этого случая показаны на рис. 16.3. Теперь ψ изменяется значительно быстрее, чем магнитное поле, и возникает область толщиной порядка λ , в которой еще сохраняется и сравнительно высокое магнитное поле, и величина $\psi \sim 1$. Присутствие магнитного поля заставляет сравнивать этот участок с нормальным металлом. В отличие от последнего, электроны в нем соединены в куперовские пары ($\psi \sim 1$) и поэтому его энергия меньше энергии правой нормальной области на эту энергию конденсации. Поскольку размер этой области порядка λ , а плотность энергии конденсации равна $H_{cm}^2/8\pi$, ясно, что $\sigma_{ns} \sim -(H_{cm}^2/8\pi)\lambda$.

Посмотрев с другой точки зрения, можно сказать, что в случае $\kappa \gg 1$ в области NS -границы существует область толщиной порядка λ с $\psi \sim 1$, в которую проникло магнитное поле. Это значит, что энергия всей системы уменьшилась на величину работы, которая была совершена при продвижении поля H_{cm} на расстояние λ .

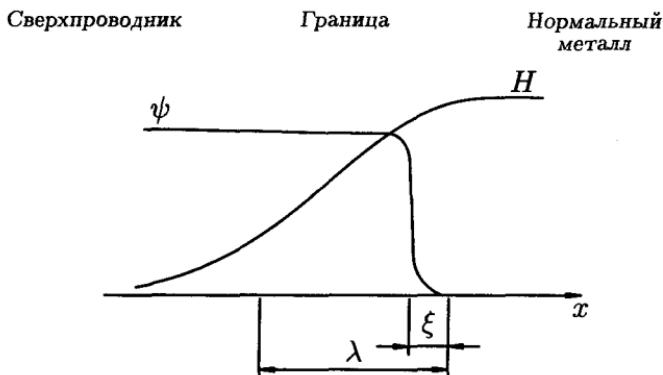


Рис. 16.3. Пространственное изменение параметра порядка ψ и магнитного поля H в области NS -границы для случая $\kappa \gg 1$.

Итак, подведем итог.

Если $\kappa \ll 1$, то $\sigma_{ns} > 0$. Такие материалы называются сверхпроводниками первого рода (СП1).

Если $\kappa \gg 1$, то $\sigma_{ns} < 0$. Такие материалы называются сверхпроводниками второго рода (СП2).

Ясно, что при каком-то значении $\kappa \sim 1$ энергия σ_{ns} должна обратиться в нуль. Точный расчет показывает, что это произойдет при $\kappa = 1/\sqrt{2}$.

Таким образом:

СП1	СП2
$\kappa < 1/\sqrt{2}$	$\kappa > 1/\sqrt{2}$
$\sigma_{ns} > 0$	$\sigma_{ns} < 0$

Задача 16.1. Сверхпроводящее олово при $T = 0.9 T_c$ имеет $\lambda = 8.70 \times 10^{-6}$ см и $\xi = 4.35 \cdot 10^{-5}$ см. Найти энергию границы раздела нормальной и сверхпроводящей фаз σ_{ns} .

Решение. Поскольку $\lambda \ll \xi$, используем формулу (16.11). Находя H_{cm} из формулы (15.8) и подставляя в (16.11), получим $\sigma_{ns} = 1.24 \cdot 10^{-2}$ эрг/см².

§ 17. Критическое поле тонкой пленки

Тонкая сверхпроводящая пленка, толщина которой меньше глубины проникновения, может сохранить сверхпроводимость в параллельном ей магнитном поле, даже если величина этого поля существенно больше H_{cm} . Магнитное поле, при котором ее сверхпроводимость пропадает, обозначим H_k .

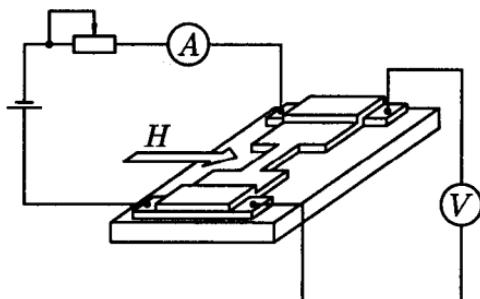


Рис. 17.1. Схема эксперимента по измерению критического магнитного поля пленки.

Схема эксперимента представлена на рис. 17.1. На чистую поверхность стеклянной пластинки производится вакуумное распыление исследуемого материала. Затем к пленке подсоединяются

токовые и потенциометрические провода измерительной схемы. Приготовленный так образец помещается в криостат и ориентируется так, чтобы внешнее магнитное поле было параллельно поверхности образца. Увеличивая внешнее магнитное поле, регистрируют момент появления сопротивления пленки. Это и будет критическое поле пленки. На рис. 17.2 приведены результаты эксперимента. Из вышеизложенного (§ 3) нам уже известно, что массивный сверхпроводник во внешнем магнитном поле, равном H_{cm} , совершает фазовый переход первого рода. Действительно, на толстых пленках, согласно рис. 17.2, обнаружено явление переохлаждения. Это означает, что если пленка была помещена в достаточно сильное магнитное поле так, что она находилась в нормальном состоянии, то при уменьшении поля переход в сверхпроводящее состояние при поле, соответствующем равенству свободных энергий нормальной и сверхпроводящей фаз, может не произойти. Он может задержаться до более слабых полей — полей переохлаждения. Эти поля на рис. 17.2 указаны штриховой линией. Итак, мы видим, что с уменьшением толщины пленки переохлаждение становится все слабее, и, начиная с некоторой толщины, явление переохлаждения пропадает. Естественно предположить, что переход пленок этой и меньшей толщины в сверхпроводящее состояние — фазовый переход второго рода.

Пусть толщина пленки $d \ll \xi, \lambda$. Это значит, что изменением величины ψ пленки можно пренебречь, а поле можно считать почти полностью проникшим в пленку. Мы предполагаем, что поверхности пленки совпадают с поверхностями $x = \pm d/2$. Поскольку пленка — тело односвязное, мы выбираем такую калибровку вектор-потенциала \mathbf{A} , чтобы ψ была вещественным числом. Учитывая все это, запишем первое уравнение ГЛ в следующем виде:

$$-(1 - (2\pi\xi A/\Phi_0)^2)\psi + \psi^3 = 0, \quad (17.1)$$

$$d^2 A / dx^2 = (\psi^2 / \lambda^2) A. \quad (17.2)$$

При этом вектор \mathbf{A} направлен вдоль оси y , на магнитное поле

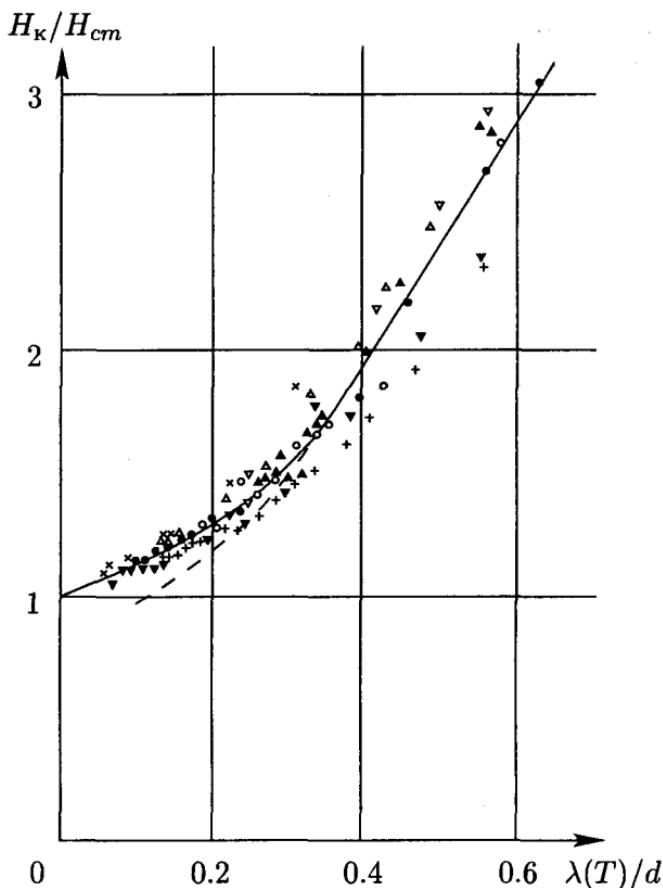


Рис. 17.2. Результаты эксперимента по измерению критического магнитного поля пленок олова различной толщины [33], d — толщина пленки. Сплошная линия — результат теории Гинзбурга — Ландау.

наложены граничные условия

$$H(\pm d/2) = H_0, \quad (17.3)$$

где H_0 — внешнее, параллельное поверхности пленки, магнитное поле. Решаем сперва уравнение (17.2):

$$A = A_1 \operatorname{ch}(\psi x/\lambda) + A_2 \operatorname{sh}(\psi x/\lambda),$$

где A_1 и A_2 — постоянные интегрирования.

Магнитное поле H в нашем случае находится простым дифференцированием A :

$$H = A_1(\psi/\lambda) \operatorname{sh}(\psi x/\lambda) + A_2(\psi/\lambda) \operatorname{ch}(\psi x/\lambda).$$

Учитывая граничные условия (17.3), получаем

$$A_1 = 0, \quad A_2 = \frac{H_0 \lambda}{\psi \operatorname{ch}(\psi d/2\lambda)}.$$

Отсюда имеем

$$H = H_0 \frac{\operatorname{ch}(\psi x/\lambda)}{\operatorname{ch}(\psi d/2\lambda)}, \quad A = \frac{H_0 \lambda}{\psi} \frac{\operatorname{sh}(\psi x/\lambda)}{\operatorname{ch}(\psi d/2\lambda)}. \quad (17.4)$$

Применим теперь эти результаты к тонкой пленке ($d \ll \lambda$). В этом случае $\psi x/\lambda$ и $\psi d/2\lambda$ будут много меньше единицы, и можно воспользоваться формулами разложения гиперболических функций в ряд Тейлора, ограничившись лишь линейными членами:

$$\operatorname{ch}(\psi d/2\lambda) = 1, \quad \operatorname{sh}(\psi x/\lambda) = \psi x/\lambda.$$

Подставляя эти разложения в (17.4), имеем $A = H_0 x$, и из (17.1) получим

$$\psi^2 = 1 - (2\pi\xi/\Phi_0)^2 H_0^2 x^2.$$

Усредним это выражение по толщине пленки (проинтегрируем по x от $-d/2$ до $+d/2$):

$$\psi^2 d = d - H_0^2 \frac{1}{12} d^3 \left(\frac{2\pi\xi}{\Phi_0} \right)^2.$$

Учитывая формулу (15.8), получим окончательно зависимость величины параметра порядка в пленке от приложенного магнитного поля:

$$\psi^2 = 1 - \frac{1}{24} \frac{H_0^2 d^2}{H_{cm}^2 \lambda^2}.$$

Эта зависимость изображена на рис. 17.3. Мы видим, таким образом, что параметр порядка ψ в тонкой пленке сильно зависит от

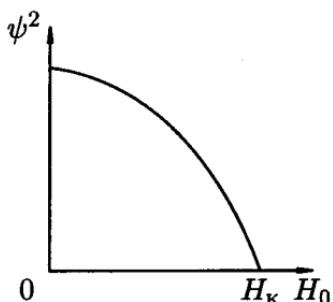


Рис. 17.3. Зависимость параметра порядка от внешнего параллельного магнитного поля H_0 в случае тонкой пленки ($d \ll \lambda$).

приложенного поля H_0 и плавно обращается в нуль при поле, равном $2\sqrt{6}H_{cm}\lambda/d$. Естественно это поле принять за критическое поле пленки H_k . Ясно, что при этом происходит фазовый переход второго рода.

Итак, критическое поле тонкой пленки толщины d в параллельном внешнем поле H_0 равно

$$H_k = 2\sqrt{6}H_{cm}\frac{\lambda}{d}. \quad (17.5)$$

Из этой формулы следует, что с уменьшением толщины пленки ее критическое поле увеличивается. Так, если толщина пленки на порядок меньше ее глубины проникновения, $\lambda/d \sim 10$, а $H_{cm} \sim 10^3 \text{ Э}$, то $H_k \sim 40000 \text{ Э}$. Физически это вполне понятно. Поскольку магнитное поле проникает в пленку, она имеет существенно меньший диамагнитный момент на единицу объема, чем массивный образец. Но малый диамагнитный момент во внешнем поле — это маленькая магнитная стрелка, ориентированная навстречу полю. Такая ситуация энергетически более выгодна, чем в случае большого диамагнитного момента. Поэтому пленка оказывается во внешнем поле гораздо более устойчивой, чем массивный образец, и может сохранить сверхпроводимость в существенно больших полях.

Задача 17.1. На стеклянную подложку нанесена оловянная пленка толщиной $d = 1000 \text{ \AA}$. Пленка внесена во внешнее, параллельное поле, магнитное поле $H_0 = 10 \text{ Э}$ при температуре $T = 0.9 T_c$. Найти поле в центре пленки и диамагнитный момент M_0 , приходящийся на единицу площади поверхности пленки.

Решение. Поскольку $\lambda(T = 0.9T_c) = 870 \text{ \AA}$ (см. условие задачи 16.1), имеем, согласно (17.4), $H(x = 0) = 8.55 \text{ Э}$. Здесь предполагается, что параметр порядка ($\psi = 1$) не изменился под влиянием магнитного поля, которое достаточно мало ($H_0 \ll H_{cm}(T = 0.9 T_c) \simeq 60 \text{ Э}$).

Плотность диамагнитного момента $M(x) = (1/4\pi)(H(x) - H_0)$. Приняв, согласно (17.4), $H(x) = H_0(\operatorname{ch}(x/\lambda))/(\operatorname{ch}(d/2\lambda))$, и интегрируя момент по толщине пленки, находим M_0 :

$$M_0 = \frac{H_0 d}{4\pi} \left(\frac{2\lambda}{d} \operatorname{th} \frac{d}{2\lambda} - 1 \right). \quad (17.6)$$

Из этой формулы следует, что $M_0 = -7.74 \cdot 10^{-7} \text{ Гс} \cdot \text{см.}$

Задача 17.2. Толстая оловянная пленка толщиной 1 мкм находится в параллельном ее поверхности магнитном поле при $T = 0.9T_c$. Найти критическое поле пленки H_k , предполагая, что параметр порядка ψ от поля не зависит и равен единице (фазовый переход первого рода).

Решение. Из формулы (17.6) следует, что средняя плотность диамагнитного момента $\overline{M} = (1/4\pi)H_0[(2\lambda/d)\operatorname{th}(d/2\lambda) - 1]$. Работа, совершенная источником магнитного поля, равна

$$W(H_0) = - \int_0^{H_0} \overline{M} dH_0.$$

Переход в нормальное состояние произойдет, когда эта работа станет равна $F_n - F_{s0} = H_{cm}^2/(8\pi)$. Отсюда

$$H_k = H_{cm} \left(1 - \frac{2\lambda}{d} \operatorname{th} \frac{d}{2\lambda} \right)^{-1/2}.$$

Учитывая, что $\lambda \ll d$, имеем $H_k = H_{cm}(1 + \lambda/d) = 1.087 H_{cm}$.

§ 18. Критический ток тонкой пленки

Теперь рассмотрим случай, когда пленка не находится во внешнем поле, но по ней течет некоторый ток I . При этом мы снова предполагаем, что поверхности пленки совпадают с плоскостями $x = \pm d/2$, ток течет в направлении оси y , и под током I мы понимаем полный ток в пленке, приходящийся на единицу длины вдоль оси z .

Этот ток будет создавать на поверхностях пленки магнитное поле H_I , таким образом, мы имеем следующие граничные условия:

$$H(\pm d/2) = \mp H_I. \quad (18.1)$$

Как и в предыдущем параграфе, мы используем односвязность пленки и выберем такую калибровку **A**, чтобы ψ было вещественным. Кроме того, предполагаем, что пленка тонкая: $d \ll \lambda, \xi$. Тогда изменением параметра порядка по толщине пленки можно пренебречь, и мы приходим к уравнениям ГЛ в виде (17.1) и (17.2). Поэтому мы снова будем анализировать эти уравнения, но уже с граничными условиями (18.1). Общее решение уравнения (17.2) будет

$$A = A_1 \operatorname{ch}(\psi x / \lambda) + A_2 \operatorname{sh}(\psi x / \lambda).$$

Поскольку для нашей задачи $H = dA/dx$, имеем

$$H = (A_1 \psi / \lambda) \operatorname{sh}(\psi x / \lambda) + (A_2 \psi / \lambda) \operatorname{ch}(\psi x / \lambda).$$

Подставляя сюда граничные условия (18.1), получим два уравнения с двумя неизвестными (A_1 и A_2). Их решение будет

$$A_1 = \frac{\lambda H_I}{\psi \operatorname{sh}(\psi d / 2\lambda)}, \quad A_2 = 0.$$

Таким образом, окончательно имеем

$$H = H_I \frac{\operatorname{sh}(\psi x / \lambda)}{\operatorname{sh}(\psi d / 2\lambda)}, \quad A = \frac{\lambda H_I \operatorname{ch}(\psi x / \lambda)}{\psi \operatorname{sh}(\psi d / 2\lambda)}. \quad (18.2)$$

Учтем теперь малость толщины пленки, т. е. $\psi d \ll \lambda$. Это значит, что для **A** в (18.2) мы положим $\operatorname{ch}(\psi x / \lambda) \simeq 1$, $\operatorname{sh}(\psi d / 2\lambda) \simeq \psi d / 2\lambda$, т. е.

$$A = 2\lambda^2 H_I / \psi^2 d.$$

Подставляя это выражение в (17.1) и используя (15.8), получим

$$2\lambda^2 H_I^2 / (d^2 H_{cm}^2) = \psi^4 - \psi^6. \quad (18.3)$$

График зависимости величины H_I^2 от ψ^2 показан на рис. 18.1. «Жирной» линией выделена та часть графика, которая соответствует устойчивым состояниям. Действительно, когда никакого тока в пленке нет, уравнение (18.3) имеет два решения: $\psi = 0$ и

$\psi = 1$. Из общих соображений ясно, что в этом случае сверхпроводящее состояние ($\psi = 1$) является энергетически более выгодным и именно оно и будет реализовываться. Если мы включим очень слабый ток через пленку, то опять будут два решения уравнения (18.3): одно, соответствующее $\psi \lesssim 1$, другое, соответствующее $\psi \ll 1$. Из соображений непрерывности ясно, что именно первое решение соответствует устойчивому сверхпроводящему состоянию.

Какой же максимальный ток может пропустить пленка, находясь в сверхпроводящем состоянии?

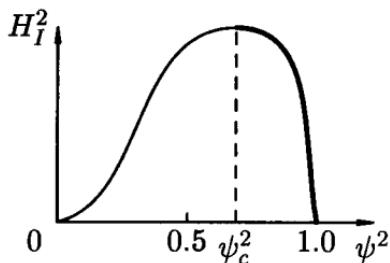


Рис. 18.1. Зависимость параметра порядка в тонкой сверхпроводящей пленке от пропускаемого через пластинку тока. «Жирная» область кривой соответствует устойчивой сверхпроводимости.

Ответ непосредственно следует из графика на рис. 18.1. Это, очевидно, тот ток, который соответствует максимуму на графике. Найдем этот ток. Для этого определим значение ψ_c , соответствующее максимуму величины H_I^2 :

$$\frac{d}{d\psi}(2\lambda^2 H_I^2/d^2 H_{cm}^2) = 4\psi_c^3 - 6\psi_c^5 = 0,$$

отсюда $\psi_c^2 = 2/3$.

Следовательно,

$$H_{Ic} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} H_{cm} \frac{d}{\lambda}. \quad (18.4)$$

Из (18.4) легко получить среднюю по пленке критическую плотность тока j_c , воспользовавшись формулой $2H_{Ic} = (4\pi/c)I_c$, следующей из (18.1) и уравнений Максвелла,

$$j_c = \frac{\sqrt{2}}{6\pi\sqrt{3}} \frac{cH_{cm}}{\lambda}. \quad (18.5)$$

Суммируем главные результаты этого параграфа.

1. Поле, созданное критическим током на поверхности пленки, оказывается пропорциональным ее толщине: $H_{I_c} \propto d$, т. е. падает с уменьшением толщины пленки, в то время как критическое поле пленки $H_k \propto 1/d$, т. е. растет с уменьшением толщины. Так, если $d/\lambda \sim 0.1$, а $H_{cm} = 1000 \text{ Э}$, то $H_k \sim 4 \cdot 10^4 \text{ Э}$, а $H_{I_c} \sim 30 \text{ Э}$. Это значит, что для тонкой пленки разрушение сверхпроводимости током никак нельзя сводить к разрушению сверхпроводимости магнитным полем этого тока.

2. Критическая плотность тока j_c , согласно (18.5), не зависит от толщины пленки. Из этой формулы следует, что j_c просто является характеристикой токонесущей способности данного материала.

3. Отметим, наконец, еще один очень важный момент. Разрушение сверхпроводимости током не сопровождается каким-либо фазовым переходом. При этом мы, конечно, имеем в виду, что пленка с током хорошо омывается жидким гелием и все выделяющееся в ней тепло сразу отводится, т. е. ее температура остается равной температуре гелиевой ванны. В этом случае даже при токе I_c свободная энергия сверхпроводящего состояния все еще остается меньше свободной энергии нормального состояния.

Что же происходит при токе $I = I_c$? Почему по пленке не может течь бездиссипативно ток, больший критического?

Для ответа на эти вопросы воспользуемся анализом, который предложил Дж. Бардин. Поскольку пленка тонкая, можно пренебречь энергией магнитного поля тока и записать плотность свободной энергии пленки в виде

$$F_s = F_n - |\alpha| n_s + \frac{\beta}{2} n_s^2 + n_s \frac{m}{2} v_s^2.$$

Здесь n_s — плотность сверхпроводящих электронов, α и β — известные коэффициенты теории ГЛ, четвертое слагаемое дает кинетическую энергию сверхпроводящих электронов, v_s — скорость их упорядоченного движения, «сверхтекучая» скорость.

Зависимость равновесного значения $n_s(v_s)$ от величины v_s

найдем из условия минимума свободной энергии при равновесии:

$$\partial F_s / \partial n_s = -|\alpha| + \beta n_s + mv_s^2/2 = 0.$$

Отсюда сразу получим

$$n_s = (|\alpha| - mv_s^2/2) / \beta. \quad (18.6)$$

Плотность тока j_s в этом случае определяется известным выражением

$$j_s = n_s e v_s. \quad (18.7)$$

Зависимости $n_s(v_s)$ и $j_s(v_s)$, даваемые формулами (18.6) и (18.7), изображены на рис. 18.2. Снова та часть кривой $j_s(v_s)$, которая соответствует устойчивым состояниям, показана жирной линией. О чём говорит этот график? По мере увеличения плотности сверхпроводящего тока увеличивается скорость электронов. Но это сопровождается уменьшением их плотности $n_s(v_s)$. Происходит разрыв электронных пар. Возникает так называемое распаривание электронов. Наконец, наступает такое состояние, когда дальнейшего увеличения сверхпроводящего тока произойти не может просто потому, что сильно снизилась плотность сверхпроводящих электронов. Не хватает носителей, чтобы перенести заданный ток. Этот критический ток и дается формулой (18.5). Часто его называют критическим током распаривания.

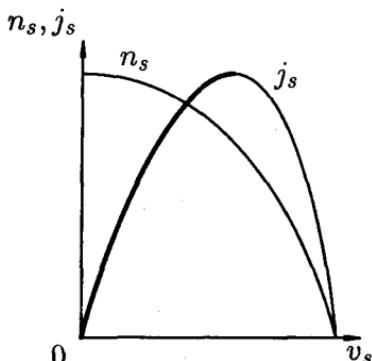


Рис. 18.2. Зависимость плотности сверхпроводящих электронов n_s и плотности сверхтока j_s в тонкой пленке от скорости движения сверхпроводящей компоненты электронной плотности.

Задача 18.1. На стеклянную подложку нанесена свинцовая пленка толщины $d = 200 \text{ \AA}$. Глубина проникновения магнитного поля при $T = 0$ будет $\lambda(0) = 390 \text{ \AA}$, а критическое термодинамическое поле $H_{cm}(0) = 803 \text{ Э}$. Найти напряженность магнитного поля на поверхности пленки, созданного критическим током. Сравнить с продольным критическим полем этой же пленки.

Ответ. $H_{I_c} = 12.5 \text{ Э}$; $H_k = 1015 \text{ Э}$.

Задача 18.2. Найти плотность критического тока пленки из предыдущей задачи.

Ответ. $j_c = 2.30 \cdot 10^8 \text{ А/см}^2$.

Задача 18.3. Тонкая ($d \ll \lambda$) сверхпроводящая пленка индия имеет постоянную теории ГЛ $\kappa = 0.1$. Глубина проникновения $\lambda = 800 \text{ \AA}$. Найти критическую скорость сверхпроводящих электронов.

Решение. Критическая плотность тока определяется формулой (18.5), а критическая скорость — формулой (18.7). Используя (5.7) и (15.7), имеем

$$v_c = \hbar\kappa(3\sqrt{3}m\lambda) = 2.81 \cdot 10^3 \text{ см/с.}$$

Задача 18.4. Сравнить плотность мейсснеровского тока j_M на поверхности массивного сверхпроводника первого рода, когда он находится в критическом внешнем поле H_{cm} , с критической плотностью тока j_c тонкой пленки из того же материала.

Решение. Согласно (6.4), $j_M = cH_{cm}/4\pi\lambda$, откуда $j_M/j_c = 3\sqrt{3}/2\sqrt{2} = 1.837$. Плотность мейсснеровского тока при поле H_{cm} на поверхности оказалась в 1.84 раза больше критического тока распаривания. Это произошло потому, что в формуле (6.4) не учтено уменьшение плотности сверхпроводящих электронов n_s в магнитном поле H_{cm} .

§ 19*. Флуктуационные эффекты вблизи сверхпроводящего перехода

19.1. Оценка ширины флуктуационной области. Теория Гинзбурга – Ландау оперирует с распределением параметра порядка $\Psi(\mathbf{r})$, предполагая, что оно реализует минимум свободной энергии $G(\Psi)$ (при заданных температуре и магнитном поле), т. е. при его определении уже проведено усреднение по всем термодинамическим флуктуациям. Как представить себе такие флуктуации? Самый наглядный пример — критическая точка жидкость – пар: вблизи критической точки плотность пара флуктуирует во времени и пространстве, $n(\mathbf{r}, t) = \bar{n} + \delta n(\mathbf{r}, t)$. Явления вблизи критической точки тоже можно, до известной

степени, представлять себе как аналогичные фазовому переходу II рода; здесь роль параметра порядка играет отклонение Δn средней плотности \bar{n} от ее значения в критической точке n_0 . Таким образом, флуктуации плотности $\delta n(\mathbf{r}, t)$ приводят к появлению «флуктуационных зародышей» жидкости в паре (когда $\Delta n + \delta n(\mathbf{r}, t) > 0$) и наоборот. Чем ближе система к критической точке, тем больше оказывается амплитуда характерных флуктуаций плотности и характерное время t_c существования таких зародышей. Аналогичным образом, выше точки сверхпроводящего перехода возникают и исчезают зародыши сверхпроводящего состояния, т. е. на большое (в микроскопическом масштабе — по сравнению с $\hbar/k_B T_c$) время возникают локально сверхпроводящие области. Параметр порядка, описываемый теорией Гинзбурга – Ландау, возникает после усреднения по всем таким флуктуациям. При этом считается, что можно усреднять по различным флуктуациям независимо, т. е. пренебрегая корреляциями между ними. Такое предположение в любом случае оправдано, пока пространственный размер L рассматриваемых флуктуаций мал по сравнению с корреляционной длиной параметра порядка $\xi(T)$, однако при $L \sim \xi(T)$ оно справедливо лишь при условии $|\delta\Psi(\mathbf{r}, t)| \equiv |\Psi(\mathbf{r}, t) - \Psi| \ll |\Psi|$. Более точно это же условие записывается как

$$\langle \delta\Psi^*(\mathbf{r})\delta\Psi(0) \rangle|_{r \sim \xi(T)} \ll |\Psi^2(T)|. \quad (19.1)$$

В теории Гинзбурга – Ландау предполагается, что условие (19.1) выполнено. Из общей теории фазовых переходов II рода [28], [34] известно, что это предположение становится неверным достаточно близко к точке фазового перехода. Окрестность температуры перехода $(\Delta T)_{\text{флукт}} = T - T_c$, где флуктуации оказываются сильными, называется флуктуационной областью. Поскольку теория Гинзбурга – Ландау строилась для окрестности точки перехода, $|\Delta T| \ll T_c$, область ее применимости существует лишь при условии $(\Delta T)_{\text{флукт}} \ll T_c$, или, иначе говоря, при условии малости так называемого параметра Гинзбурга $G_i \equiv (\Delta T)_{\text{флукт}}/T_c$. Величина параметра Гинзбурга определяется микроскопической природой взаимодействия, приводящего к фазовому переходу

II рода. В некоторых случаях, как, например, при фазовом переходе ${}^4\text{He}$ в сверхтекущее состояние (который с точки зрения феноменологической теории фазовых переходов очень похож на сверхпроводящий фазовый переход), $Gi \sim 1$, и область применимости теории Гинзбурга – Ландау вообще отсутствует. В большинстве сверхпроводников, напротив, флуктуационные эффекты очень слабы в объемных образцах. Исключение составляют ВТСП и некоторые другие сильно анизотропные сверхпроводники, например, NbSe_2 [35]. Кроме того, даже в «обычных» сверхпроводниках величина флуктуаций сильно возрастает при переходе от объемных образцов к тонким пленкам или проволокам. Ниже мы найдем связь между относительной шириной флуктуационной области Gi и микроскопическими параметрами сверхпроводника для различных размерностей $d = 1, 2, 3$ образца.

Начнем с простой качественной оценки: изменение свободной энергии $F_{sn} = F_{s0} - F_n$ вследствие перехода в сверхпроводящее состояние в области размером с длину корреляции $\xi(T)$ имеет порядок $F_{sn}(T) \sim H_{cm}^2(T)\xi^3(T) \sim H_{cm}^2(0)\xi_0^3 \cdot (1 - T/T_c)^{1/2} = F_{sn}(0)(1 - T/T_c)^{1/2}$. Это изменение свободной энергии положительно при $T > T_c$, т. е. сверхпроводящие области возникают лишь флуктуационно; напротив, при $T < T_c$ устойчиво сверхпроводящее состояние, а флуктуации приводят к его временному разрушению, т. е. появлению зародышей нормальной фазы. Вероятность флуктуационного образования зародышей с пространственным масштабом $L \sim \xi(T)$ определяется соотношением $F_{sn}(T)$ и тепловой энергии $k_B T$: если $k_B T \ll F_{sn}(T)$, то зародыши размера порядка $\xi(T)$ образуются экспоненциально редко, и условие (19.1) выполнено. Таким образом, получаем условие

$$\left| 1 - \frac{T}{T_c} \right| \geq \left(\frac{k_B T_c}{H_{cm}^2(0)\xi_0^3} \right)^2 \equiv Gi. \quad (19.2)$$

Убедимся, что величина Gi , определяемая правой частью (19.2), действительно очень мала. Для этого воспользуемся формулой (15.8) для H_{cm} и оценкой $\xi_0 \simeq \hbar v_F / 2\pi k_B T_c$, которая будет обсуждаться ниже. Используя также выражение (6.3) для глубины проникновения $\lambda(0)$ и считая, что плотность сверхпроводящих

электронов n_s порядка полной их плотности $n \sim k_F^3$, окончательно получим

$$G_i \sim (k_F \xi_0)^{-4} \ll 1. \quad (19.3)$$

Во всех известных сверхпроводниках длина когерентности ξ_0 велика по сравнению с межэлектронным расстоянием k_F^{-1} , что связано со слабостью куперовского притяжения; напротив, межатомное взаимодействие в жидком ${}^4\text{He}$ очень сильное, и аналогичная длина когерентности $\xi_{ct}(0)$ для сверхтекущего состояния близка к межатомному расстоянию. Для сверхпроводников наименьшее известное значение параметра $k_F \xi_0 \simeq 10$ относится к ВТСП и некоторым органическим сверхпроводникам [36]. Здесь надо заметить, что формулы (19.2), (19.3) неприменимы непосредственно к упомянутым сильно анизотропным материалам, т. к. были получены для изотропных трехмерных сверхпроводников.¹⁾ В большинстве «классических» сверхпроводников $k_F \xi_0 \geq 100$, так что ширина флюктуационной области G_i пренебрежимо мала. Надо, однако, заметить, что сделанное при выводе оценки (19.3) предположение, что $n_s \sim k_F^3$, применимо (по порядку величины) лишь для чистых сверхпроводников с длиной свободного пробега на примесях $l \gg \xi_0$. В «грязном» пределе $l \ll \xi_0$ (что иначе может быть выражено как условие $k_B T_c \tau / \hbar \ll 1$, где $\tau = l/v_F$ — время свободного пробега) длина когерентности существенно уменьшается: $\xi_{0d} \simeq \sqrt{\xi_0 l} \simeq \sqrt{\hbar D / 2\pi k_B T_c}$, где $D = \frac{1}{3} v_F l$ — коэффициент диффузии в металле с примесями. В то же время термодинамическое критическое поле H_{cm} и температура перехода T_c не зависят (в основном приближении) от концентрации примесей (доказательство этого утверждения, называемого иногда «теоремой Андерсона», мы обсудим в § 45). Приведенные выше оценки для ξ_0 и ξ_{0d} можно понять следующим образом: масштаб времени, соответствующий по соотношению неопределенности энергии связи пары $\Delta \sim k_B T_c$ (см. §§ 44, 45),

¹⁾ Формулу (19.2) можно обобщить с учетом анизотропии, если заменить ξ_0^3 на произведение длин когерентности ($\xi_{0x} \xi_{0y} \xi_{0z}$) по всем трем направлениям.

есть $\tau_p \sim \hbar/\Delta \sim \hbar/k_B T_c$ и по порядку величины определяет время прохождения электроном области размером в длину когерентности. Учитывая независимость Δ от беспорядка, получаем в чистом случае $\xi_0 \sim v_F \tau_p \sim \hbar v_F / k_B T_c$, а в грязном — $\xi_{0d} \sim \sim (D\tau_p)^{1/2} \sim (\hbar D / k_B T_c)^{1/2}$, т. е. $\xi_{0d}^2 \sim \xi_0 l$.

Влияние примесей на ширину флюктуационной области Gi_d в грязном пределе проще всего усмотреть тогда из уравнения (19.2):

$$Gi_d \simeq Gi \left(\frac{\hbar}{k_B T_c \tau} \right)^3 \sim \frac{1}{(k_F^2 \xi_{0d} l)^2}. \quad (19.4)$$

Перейдем теперь к оценке параметра Gi для низкоразмерных сверхпроводников — тонких пленок толщиной d и проволок по-перечным сечением S . Теперь в качестве объема характерного «зародыша» следует брать либо $\xi^2(T)d$, либо $\xi(T)S$; будем также считать, что T_c и ξ_0 не меняются при уменьшении d или S . В результате для чистого сверхпроводника вместо (19.2) получим

$$Gi^{(2D)} = \frac{k_B T_c}{H_{cm}^2(0) \xi_0^2 d} \sim \frac{1}{k_F^2 \xi_0 d}; \quad (19.5)$$

$$Gi^{(1D)} = \left(\frac{k_B T_c}{H_{cm}^2(0) \xi_0 S} \right)^{2/3} \sim (k_F^2 S)^{-2/3}. \quad (19.6)$$

Разумеется, формулы (19.5) и (19.6) имеют смысл постольку, поскольку получающиеся из них значения $Gi^{(2D)}$, $Gi^{(1D)} \gg Gi$. При выводе этих оценок мы предполагали, что толщина пленки d или поперечный размер проволоки $S^{1/2}$ малы по сравнению с длиной корреляции $\xi(T)$ в интересующей нас окрестности вблизи точки перехода — чем и вызвано эффективное уменьшение размерности образца. При этом низкотемпературная длина когерентности ξ_0 может быть и меньше $d, S^{1/2}$, и тогда при низких температурах сверхпроводник эффективно трехмерен. Как правило, низкоразмерные сверхпроводники имеют (по технологии их приготовления) довольно малую длину пробега $l \ll \xi_0$, т. е. реализуется грязный предел. Для оценки ширины флюктуационной области можно

в этом случае использовать первые из равенств (19.5), (19.6), заменив ξ_0 на ξ_{0d} и учитывая независимость H_{cm} от беспорядка. В результате получим

$$Gi_d^{(2D)} \sim (k_F^2 ld)^{-1} \sim g^{-1}; \quad (19.7)$$

$$Gi_d^{(1D)} \sim \left(\frac{\xi_{0d}}{k_F^2 Sl} \right)^{2/3}, \quad (19.8)$$

где $g = \frac{\hbar}{e^2} \sigma_{2d}$ — безразмерная проводимость пленки на квадрат, а σ_{2d} — проводимость пленки на квадрат в нормальном состоянии.²⁾ Интересно, что оценки (19.6) и (19.7) для Gi в одномерном чистом и двумерном грязном случаях оказались не зависящими от ξ или других собственно сверхпроводящих параметров, они определяются чисто металлическими свойствами — числом каналов проводимости $N_{\text{кан}} \sim S/\lambda_F^2 \sim k_F^2 S$ в проволоке, либо безразмерной проводимостью g пленки, соответственно. Для совсем тонких пленок и проволок оценки (19.7), (19.8) должны быть уточнены, т. к. рассеяние электронов на поверхности образца может в этом случае оказаться наиболее сильным источником беспорядка, уменьшающим длину когерентности ξ_0 и тем самым увеличивающим Gi . Наконец, необходимо заметить, что формулы (19.3), (19.5) – (19.8) были получены лишь как порядковые оценки, указывающие на зависимость Gi от параметров, но не содержащие правильных численных коэффициентов; более аккуратное вычисление показывает, например, что $Gi_d^{(2D)} \simeq 0.1g^{-1}$ (см. (19.17)).

19.2. Флуктуационные эффекты в окрестности T_c .

Обсудим теперь, к каким наблюдаемым физическим эффектам приводят флуктуации параметра порядка, причем начнем со

²⁾ Дело в том, что при решении задач по электропереносу вдоль тонких пленок удобно пользоваться величинами *сопротивления на квадрат* R^{2D} и *проводимости на квадрат* σ^{2D} , т. е. величинами для пленки с толщиной d и одинаковыми планарными размерами $L \times L$. Легко видеть, что эти величины от размера квадрата L не зависят и связаны с *удельными сопротивлением* и *проводимостью* соотношениями $R^{2D} = \rho/d$, $\sigma^{2D} = \sigma d$.

случая трехмерного сверхпроводника. Самый универсальный из таких эффектов, присутствующий при всех фазовых переходах II рода — изменение поведения теплоемкости $C(T)$ при $T \simeq T_c$ по сравнению с предсказанием теории Ландау. Например, при сверхтекучем фазовом переходе в ${}^4\text{He}$ (где $G_i \sim 1$) теплоемкость логарифмически расходится в точке перехода, $C(T) \propto -\ln|1 - T/T_c|$, вместо того чтобы испытывать конечный скачок при $T = T_c$. Общая теория фазовых переходов II рода [34] предсказывает, что в непосредственной окрестности T_c поведение системы описывается лишь симметрией параметра порядка и пространственной размерностью. Сверхтекущий фазовый переход в ${}^4\text{He}$, как и обычный сверхпроводящий, описывается комплексным однокомпонентным параметром порядка, поэтому такая же логарифмическая аномалия теплоемкости должна наблюдаться и в сверхпроводниках в узкой окрестности точки перехода $|1 - T/T_c| \leq G_i$. Однако, из-за крайней малости G_i в объемных сверхпроводниках это явление почти никогда не наблюдается. Исключение представляют высокотемпературные сверхпроводники; в частности, на рис. 19.1 приведен график теплоемкости, измеренной вблизи сверхпроводящего перехода в $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ в работе [37]. Вне флюктуационной области (т. е. при $|1 - T/T_c| \geq G_i$) поправки к теплоемкости, обусловленные флюктуациями, малы:

$$\frac{\delta C(T)}{C_0} \sim \begin{cases} \left(\frac{G_i}{|1 - T/T_c|} \right)^{1/2} & \text{при } d = 3, \\ \frac{G_i^{(2D)}}{|1 - T/T_c|} & \text{при } d = 2, \end{cases} \quad (19.9)$$

где $C_0 \equiv C_s - C_n = T_c \tilde{\alpha}^2 / \beta$ — скачок теплоемкости при сверхпроводящем переходе (см. (3.12), (13.5) и (13.6)). Как видно из (19.9), в случае $d = 2$ поправки к теплоемкости растут заметно быстрее с приближением к T_c , однако измерять теплоемкость тонких пленок очень сложно из-за их малого объема. Интересный компромисс обнаруживается, если рассмотреть *квазидвумерный* (слоистый) объемный сверхпроводник с очень слабой связью между слоями (например, ВТСП семейства BiSrCaCuO): с понижением температуры в довольно широкой окрестности T_c взаимодействие

ствие между слоями несущественно и применима вторая из формул (19.9), описывающая «двумерные» флюктуации параметра порядка.

$$C_{\text{полн}}/T, \text{ мДж} \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{К}^{-2}$$

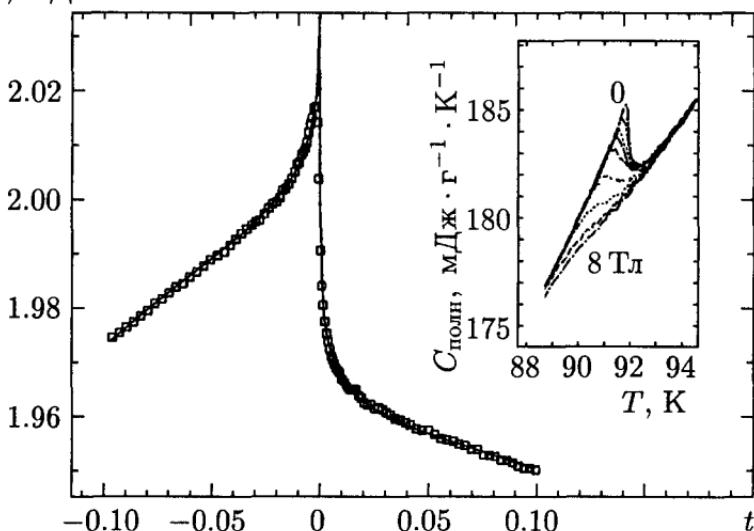


Рис. 19.1. Критическая аномалия теплоемкости монокристалла YBaCuO [37], близкая по форме к « λ -особенности» при сверхтекучем переходе в ${}^4\text{He}$.

Взаимодействие критических флюктуаций меняет в области $(\frac{T}{T_c} - 1) \leq G_i$ вид температурных зависимостей и других величин, помимо теплоемкости. Так, длина корреляции $\xi(T) \propto (T - T_c)^{-\nu}$, а глубина проникновения $\lambda \propto (T - T_c)^{-\nu/2}$, где критический показатель ν близок к $2/3$ для трехмерной системы с комплексным параметром порядка [34].

Другая интересная для наблюдения флюктуационных поправок величина — диамагнитная восприимчивость $\chi(T)$. Действительно, в нормальном металле χ очень мала (обычно $\chi \leq 10^{-5}$); в то же время в сверхпроводнике имеется полный диамагнетизм, $\chi = -(4\pi)^{-1}$, т. е. в узкой окрестности перехода происходит скачок диамагнитной восприимчивости на несколько порядков. Поэтому следует ожидать, что сверхпроводящие флок-

туации будут давать относительно заметный вклад в χ и при $(1 - T/T_c) \gg Gi$. Магнитный момент сверхпроводника $M = -\partial G/\partial H_0$, где G — свободная энергия во внешнем поле H_0 , определяемая согласно общим правилам статистической физики как

$$\exp(-G/k_B T) = \int \mathcal{D}\Psi(\mathbf{r}) \exp(-G[\Psi(\mathbf{r})]/k_B T), \quad (19.10)$$

где значок \mathcal{D} обозначает интегрирование по всем возможным конфигурациям параметра порядка $\Psi(\mathbf{r})$ с весом, определяемым свободной энергией Гинзбурга–Ландау $G[\Psi(\mathbf{r})]$ (см. уравнение (14.1)). При $\left(\frac{T}{T_c} - 1\right) > Gi$ членом $|\Psi|^4$ в (14.1) можно пренебречь, и функциональный интеграл (19.10) сводится к произведению независимых интегралов

$$\exp(-G/k_B T) = \prod_{\mu} da_{\mu} d\bar{a}_{\mu} \exp(-E_{\mu}|a_{\mu}|^2), \quad (19.11)$$

где использовано разложение $\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{\mu} a_{\mu} \psi_{\mu}(\mathbf{r})$ поля параметра порядка по собственным функциям оператора

$$\mathcal{H}_2 = \frac{1}{4m} \left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + \alpha,$$

соответствующего квадратичной части функционала Гинзбурга–Ландау (здесь $\alpha = \tilde{\alpha}(T - T_c)$, где $\tilde{\alpha} = \text{const}$); величины E_{μ} — соответствующие собственные значения. Интеграл по каждой паре переменных a_{μ}, \bar{a}_{μ} дает множитель $\pi k_B T/E_{\mu}$. В результате диамагнитный момент равен

$$M = -\frac{\partial G}{\partial H_0} = -k_B T \sum_{\mu} \frac{\partial \ln E_{\mu}}{\partial H_0}. \quad (19.12)$$

Вычислим флуктуационную диамагнитную восприимчивость для самого простого случая [38] — шарика радиуса $R \ll \xi(T)$, когда в сумме (19.12) достаточно оставить лишь член с наименьшим собственным значением E_0 , соответствующим постоянной по объему

шарика собственной функции $\psi_0 = (4\pi R^3/3)^{-1/2}$ с нормировкой $\int d^3r \psi_0^2(\mathbf{r}) = 1$. Величину E_0 найдем просто как среднее значение оператора \mathcal{H}_2 :

$$E_0 = \alpha + \psi_0^2 \int_{r < R} d^3r \frac{e^2}{mc^2} A^2(\mathbf{r}) = \alpha + \frac{e^2 H_0^2 R^2}{10mc^2}. \quad (19.13)$$

При вычислении интеграла в (19.13) мы выбрали векторный потенциал в виде $\mathbf{A} = \frac{1}{2}[\mathbf{H}_0 \mathbf{r}]$; при этом \mathbf{A} везде перпендикулярен нормали к поверхности шара, что необходимо для удовлетворения граничного условия $(-i\nabla\psi - \frac{2e}{\hbar c}\mathbf{A})_{r=R} = 0$ при $\psi_0 = \text{const}$ внутри шара. Комбинируя уравнения (19.12) и (19.13), получаем

$$M(H_0) = -\frac{e^2 T_c R^2 H_0}{5m^2 c^2 \left(\tilde{\alpha}(T - T_c) + \frac{e^2 H_0^2 R^2}{10mc^2} \right)}. \quad (19.14)$$

Таким образом, линейная часть флюктуационной диамагнитной восприимчивости шарика на единицу его объема равна

$$\chi_{\text{флукт}}(T) = \frac{3e^2 T_c}{20\pi m c^2 R \tilde{\alpha} (T - T_c)}. \quad (19.15)$$

Магнитная восприимчивость металла имеет порядок $\chi_0 \sim \frac{e^2 k_F}{mc^2}$; выражая по порядку величины $\tilde{\alpha}$ через ξ_0 и T_c с помощью (14.14), находим отношение флюктуационного вклада в восприимчивость к нормальному:

$$\frac{\chi_{\text{флукт}}(T)}{\chi_0} \sim \frac{\min(\xi_0, l)}{R} \frac{T_c}{T - T_c}. \quad (19.16)$$

Как видно из (19.16), флюктуационный вклад в восприимчивость не выражается через число G_i , более того, он падает при уменьшении длины когерентности ξ_0 либо (в грязном пределе) примесной длины пробега l , несмотря на то, что число G_i

при этом растет. В случае объемного сверхпроводника отношение $\chi_{\text{флукт}}/\chi_0 \sim \left(\frac{T_c}{T-T_c}\right)^{1/2}$ (вычисление см. в [39]) вообще не зависит от параметров материала. Такое отличие флюктуационных поправок к магнитной восприимчивости (по сравнению с поправками к теплоемкости и проводимости — см. ниже) происходит из-за того, что диамагнитный отклик сверхпроводника нелокален в пространстве; иначе говоря, он определяется экранирующими токами, текущими по его поверхности. Именно поэтому, в частности, в выражение (19.16) входит радиус шарика R .

Флюктуации сверхпроводящего параметра порядка приводят также к росту проводимости металла с понижением температуры к T_c . Этот эффект был предсказан Асламазовым и Ларкиным [40] и надежно подтвержден экспериментально. Мы качественно обсудим происхождение эффекта Асламазова — Ларкина в следующем разделе, а здесь приведем лишь результаты вычислений отношения флюктуационных поправок к нормальной проводимости грязных сверхпроводников различных размерностей d вблизи T_c :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta\sigma_{AL}}{\sigma}\right)^{(1D)} &= \frac{3\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}} \frac{1}{k_F^2 l} \sqrt{\frac{T_c}{D}} \left(\frac{T_c}{T-T_c}\right)^{1/2} = \\ &= \left(\frac{Gi_d}{T/T_c - 1}\right)^{1/2}, \\ \left(\frac{\Delta\sigma_{AL}}{\sigma}\right)^{(2D)} &= \frac{1}{16g} \frac{T_c}{T-T_c} = \frac{Gi_d^{(2D)}}{T/T_c - 1}, \\ \left(\frac{\Delta\sigma_{AL}}{\sigma}\right) &= \left(\frac{\Delta\sigma_{AL}}{\sigma}\right)^{(3D)} = \frac{5.4}{(T_c\tau)^{1/2}} \frac{1}{k_F^2 S} \left(\frac{T_c}{T-T_c}\right)^{3/2} = \\ &= \left(\frac{Gi_d^{(1D)}}{T/T_c - 1}\right)^{3/2}. \end{aligned} \quad (19.17)$$

Параметры Gi_d , $Gi_d^{(2D)}$ и $Gi_d^{(1D)}$, введенные в формулах (19.17), совпадают по порядку величины с оценками (19.4), (19.7) и (19.8);

мы выбрали флюктуационные поправки именно к проводимости, чтобы дать точное определение параметров G_i , поскольку проводимость удобнее всего измерять экспериментально. Микроскопическое вычисление поправок к теплоемкости [40] показывает, что численные коэффициенты в формулах (19.9) порядка единицы, т. е. ширина флюктуационной области, определенная по критическому поведению теплоемкости, такая же, как и при ее определении по проводимости.

19.3. Парапроводимость (эффект Асламазова – Ларкина). Флюктуационный вклад в проводимость металла вблизи сверхпроводящего перехода называют также парапроводимостью. Мы приведем сейчас качественное объяснение этого эффекта (см. также [41]), предсказанного Асламазовым и Ларкиным при помощи микроскопической теории [40]. Начнем с известной формулы Друде для остаточной (низкотемпературной) проводимости металла с примесями:

$$\sigma = \frac{e^2 n_e \tau_{tr}}{m}. \quad (19.18)$$

В этой формуле n_e — плотность электронов проводимости, τ_{tr} — транспортное время свободного пробега электронов на примесях (т. е. время за которое электрон заметно меняет направление своего импульса), m — масса электрона. В окрестности сверхпроводящего перехода в металле имеются флюктуационно возникшие куперовские пары. Их дополнительный вклад в проводимость мы и оценим с помощью формулы типа (19.18). Для этого необходимо понять, чем следует заменить параметры n_e и τ_{tr} в случае переноса заряда флюктуационными парами.

Мы уже знаем, что при $T < T_c$ величина $\langle \Psi \rangle^2$ играет роль плотности куперовских пар. Выше точки перехода эта величина равна нулю, в соответствии с тем, что настоящих пар с бесконечным временем жизни здесь нет. Однако можно рассмотреть величину $n(p) = \langle \psi_p \psi_{-p} \rangle$, которая представляет собой плотность флюктуационных пар, имеющих импульс p . Величине $n_e \tau_{tr}$ в формуле (19.18) будет соответствовать теперь $\int dp n(p) \tau(p)$.

Здесь $\tau(\mathbf{p})$ — время жизни флюктуационной пары с импульсом \mathbf{p} , которое, как мы покажем ниже, сильно зависит от величины импульса $|\mathbf{p}|$. Начнем с оценки зависимости $n(\mathbf{p})$. Для этого надо лишь представить квадратичную часть функционала Гинзбурга — Ландау в виде (19.11), где теперь собственными функциями $\psi_\mu(\mathbf{r})$ являются просто плоские волны $e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}$, а собственные значения $E_p = \hbar^2 p^2 / 4m + \alpha$. Соответственно, для $n(\mathbf{p}) = \langle \psi_{\mathbf{p}} \psi_{-\mathbf{p}} \rangle$ получаем

$$n(\mathbf{p}) = \frac{k_B T}{\alpha + \hbar^2 p^2 / 4m}. \quad (19.19)$$

Займемся теперь оценкой времени $\tau(\mathbf{p})$. В отличие от времени жизни τ_{tr} электрона с заданным импульсом, время жизни флюктуационной пары определяется не рассеянием на примесях, а распадом на отдельные электроны. Это время можно оценить без использования микроскопической теории, если произвести простейшее обобщение уравнений Гинзбурга — Ландау для слабонеравновесной ситуации, когда параметр порядка $\Psi(\mathbf{r})$ не совпадает со своим равновесным значением Ψ_0 . В этом случае вариация функционала ГЛ не равна нулю и определяет скорость возвращения величины параметра порядка к равновесному значению (в данном случае к нулю, т. к. $T > > T_c$):

$$\gamma \frac{\partial \Psi(\mathbf{r})}{\partial t} = -\frac{\delta F[\Psi]}{\delta \Psi(\mathbf{r})} \equiv \frac{\hbar^2}{4m} \nabla^2 \Psi(\mathbf{r}) - \alpha \Psi(\mathbf{r}) - \beta |\Psi(\mathbf{r})|^2 \Psi(\mathbf{r}), \quad (19.20)$$

где γ имеет смысл кинетического коэффициента; порядок величины этого параметра мы определим чуть ниже. Считая флюктуации малыми, пренебрегаем последним членом в (19.20), после чего это уравнение становится линейным. Теперь можно перейти к переменным $\psi(\mathbf{p}) = \int d\mathbf{r} \Psi(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}$, в которых уравнение (19.20) принимает простой вид:

$$\gamma \partial \psi(\mathbf{p}) / \partial t = -(\alpha + \hbar^2 p^2 / 4m) \psi(\mathbf{p}). \quad (19.21)$$

Из уравнения (19.21) видно, что время релаксации флуктуаций параметра порядка с импульсом \mathbf{p} равно

$$\tau(\mathbf{p}) = \frac{\gamma}{\alpha + \hbar^2 p^2 / 4m}. \quad (19.22)$$

В результате, собирая вместе (19.19) и (19.22), получим

$$\sigma_{AL} \sim \frac{e^2}{m} \sum_{\mathbf{p}} \frac{k_B T \gamma}{(\alpha + \hbar^2 p^2 / 4m)^2}. \quad (19.23)$$

Рассмотрим случай тонкой сверхпроводящей пленки (толщина $d \ll \xi$), когда выражение для парапроводимости имеет особенно простой и универсальный вид. Заменяя $\sum_{\mathbf{p}}$ на интеграл $(1/d) \int d^2 p / (2\pi)^2$, получаем для проводимости на квадрат пленки

$$\sigma_{AL}^{2D} = \sigma_{AL} \cdot d \sim \frac{e^2 k_B T_c \gamma}{\alpha \hbar^2} \sim \frac{e^2}{\hbar} \frac{T_c}{T - T_c}. \quad (19.24)$$

Чтобы получить последнее выражение в правой части (19.24), мы учли, что при $(T - T_c) \sim T_c$ время релаксации сверхпроводящего параметра порядка $\tau_0 \sim \gamma / \tilde{\alpha} T_c$ должно быть порядка $\hbar / k_B T_c$, поэтому $\gamma \sim \hbar \tilde{\alpha}$. Таким образом, в двумерном случае вклад в проводимость от флуктуационных пар определяется *только* относительной близостью к точке перехода, и вообще не зависит от параметров сверхпроводника. Микроскопическое вычисление [40] подтверждает качественную оценку (19.24) и определяет численный коэффициент в правой части, равный $1/16$.

Для тонких проволок и массивных сверхпроводников (размерность $d = 1, 3$) оценка, аналогичная (19.24), дает вклад в проводимость

$$\sigma_{AL}^{(d)} \sim \left(\frac{T_c}{T - T_c} \right)^{(4-d)/2}. \quad (19.25)$$

Коэффициент перед этой зависимостью уже не является универсальным; используя выражения из § 51 для параметра $\alpha(T)$

и оценку для γ , можно получить (по порядку величины) формулы (19.17). В заключение заметим, что в отличие от обычного стационарного уравнения Гинзбурга – Ландау, неравновесное его обобщение применимо, строго говоря, только при $T > T_c$. Дело в том, что наличие конечной щели Δ в спектре нормальных возбуждений сверхпроводника при $T < T_c$ (см. § 45) делает неверным предположение о простой релаксационной динамике параметра порядка, использованное в (19.20). Мы обсудим неравновесные процессы в сверхпроводящем состоянии в главе VII.

ГЛАВА IV

СЛАБАЯ СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ

§ 20. Фазовая когерентность и виды слабых связей

В 1962 г. появилась статья [13] никому до этого не известного автора Б. Джозефсона, в которой теоретически предсказывалось существование двух удивительных эффектов. Эти эффекты следовало ожидать в туннельных сверхпроводящих контактах. Первый эффект заключается в том, что через туннельный переход¹⁾ возможно протекание сверхпроводящего (бездиссиативного) тока (сверхтока). Предсказывалось, что критическое значение этого тока будет весьма причудливым образом зависеть от внешнего магнитного поля. Если ток через такой переход станет больше критического тока перехода, то переход станет источником высокочастотного электромагнитного излучения. Это — второй эффект Джозефсона.

Прошло совсем немного времени, и эти эффекты были действительно экспериментально обнаружены [42, 14, 43]. Более того, скоро стало ясно, что эффекты Джозефсона присущи не только туннельным переходам, но и многим другим типам так называемых слабых связей, т. е. участкам сверхпроводящей цепи, в которых критический ток существенно подавлен, а размер участ-

¹⁾ О туннелировании электронов из одного сверхпроводника в другой через тонкий слой изолятора см. § 46.

ка — порядка длины когерентности [24, 44, 45].

В основе природы эффектов слабой сверхпроводимости лежат квантовые свойства сверхпроводящего состояния. Мы уже знаем, что сверхпроводящее состояние металла — это состояние, в котором существует бозе-конденсат, или, иначе, состояние, в котором электронные пары находятся на одном квантовом уровне и описываются общей для всех волновой функцией. Их поведение взаимообусловлено, они когерентны.

Представим себе теперь, что имеются два массивных куска одного и того же сверхпроводника при одной и той же температуре, полностью изолированные друг от друга. Поскольку оба куска находятся в сверхпроводящем состоянии, в каждом из них будет своя волновая функция сверхпроводника. Так как материалы и температуры обоих кусков одинаковы, модули обеих волновых функций должны совпадать. Этого нельзя сказать о фазах, которые могут быть произвольны. Но это так только до тех пор, пока куски изолированы друг от друга. Установим между этими кусками слабый контакт, т. е. сделаем так, чтобы контакт не мог радикально изменить состояния обеих половинок, а сыграл бы роль возмущения. Теперь возникнет единая волновая функция всего сверхпроводника, которую можно рассматривать как результат интерференции волновых функций двух половинок. Мы уже говорили, что амплитуды волновых функций обеих половинок были одинаковы еще до установления слабой связи. Согласование же фаз волновых функций — это уже результат образования слабой связи. Поэтому говорят, что в слабосвязанных сверхпроводниках устанавливается фазовая когерентность.

Здесь уместно отметить, что слабая связь между двумя сверхпроводниками — это просто удобное место для обнаружения интерференционных эффектов. Сами интерференционные эффекты в сверхпроводниках были известны задолго до открытия эффектов Джозефсона. Действительно, наиболее яркий тому пример — квантование магнитного потока в сверхпроводящем кольце. Замороженный в нем магнитный поток принимает квантованные значения потому, что квантуется сверхток, текущий по кольцу и создающий этот магнитный поток. Но квантование

сверхтока в кольце — это типично интерференционный эффект. Ток может принимать только такие значения, при которых на длине кольца может уложиться целое число длин волн волновой функции сверхпроводящих электронов — полная аналогия с квантованием орбит электронов в атоме Бора.

Остановимся теперь на видах слабых связей. Прежде всего, отметим устройства без концентрации тока. Так, в туннельных переходах (рис. 20.1, *a*) (с толщиной изоляционной прослойки до 2 нм) характерная плотность критического тока может иметь величину порядка нескольких сотен А/см², что на много порядков меньше критической плотности тока электродов.

В сэндвичах сверхпроводник — нормальный металл — сверхпроводник толщина нормальной прослойки из чистого металла может достигать величины в несколько микрон (рис. 20.1, *b*). Волновые функции сверхпроводящих электронов проникают в нормальный металл за счет эффекта близости. В области их перекрытия возникает интерференция волновых функций, которая означает установление фазовой когерентности между электродами. Если амплитуда волновой функции сверхпроводника в области слабой связи мала, то и критический ток в этой области будет мал.

Того же эффекта можно добиться, помещая между двумя сверхпроводниками вместо слоя нормального металла слой легированного полупроводника или другого сверхпроводника с малой плотностью критического тока. Перекрытие узкой сверхпроводящей пленки узкой пленкой нормального металла (рис. 20.1, *c*) приводит за счет эффекта близости к уменьшению амплитуды волновой функции сверхпроводящих электронов в пленке в области покрытия ее нормальным металлом. Это приводит к локальному уменьшению плотности критического тока, т. е. к появлению слабой связи.

В устройствах с концентрацией тока плотность критического тока в области слабой связи такая же, как и вне ее, но полный критический ток существенно меньше. К таким устройствам относится пленка с сужением (мостик Дайемса) (рис. 20.1, *г*), если размер сужения будет порядка длины когерентности ξ материала пленки. Мостик переменной толщины, пленочные берега ко-

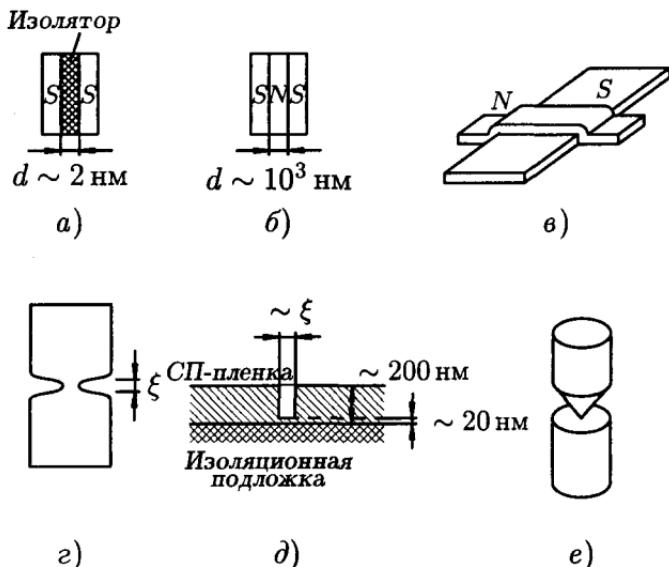


Рис. 20.1. Виды слабых связей: а) туннельный переход; б) сэндвич; в) нормальная пленка N локально понижает параметр порядка сверхпроводящей пленки S ; г) мостик Дайемса, вид в плане; д) мостик переменной толщины, продольный разрез; е) точечный контакт.

торого имеют толщину порядка сотен нм, а пленка собственно мостика — десятки нм (рис. 20.1, δ), и, наконец, точечный контакт, возникающий в результате слабого касания острого конца сверхпроводящей проволоки и плоского участка поверхности другого сверхпроводника (рис. 20.1, e) — тоже примеры слабых связей.

§ 21. Стационарный эффект Джозефсона

Переходим теперь к изучению первого эффекта Джозефсона — стационарного эффекта. Физически он заключается в том, что достаточно слабый ток течет через слабое звено бездиссилиптивно, т. е. при протекании такого тока на слабой связи не возникает падение напряжения. Поскольку рассматривается слабый ток, мы можем пренебречь создаваемым им магнитным полем. Поэтому можно сказать, что его плотность определяется гради-

ентом фазы $\nabla\theta$ волновой функции сверхпроводящих электронов (согласно теории Гинзбурга – Ландау).

Характерное свойство слабой связи как раз заключается в том, что этот градиент очень велик внутри слабой связи по сравнению с величиной градиента фазы в сверхпроводниках, между которыми установлена слабая связь. (Будем называть их в дальнейшем «берегами».) Для туннельного перехода вообще нельзя говорить о градиенте фазы, а надо просто говорить о скачке фазы на переходе. Поэтому в дальнейшем всегда будем интересоваться скачком фазы φ на слабой связи:

$$\varphi = \theta_2 - \theta_1,$$

где θ_1 — фаза волновой функции сверхпроводящих электронов первого берега, а θ_2 — второго берега.

Теперь нам предстоит установить, как связаны между собой ток через слабую связь I_s и разность фаз берегов перехода φ .

Установим некоторые самые общие и почти очевидные соотношения.

1) Если ток через переход отсутствует, $I_s = 0$, то и разность фаз $\varphi = 0$.

2) В силу того что изменение фазы θ одного из берегов на 2π ничего физически не изменяет, ясно, что функция $I_s(\varphi)$ — периодическая с периодом 2π , т. е. $I_s(\varphi) = I_s(\varphi + 2\pi)$.

3) Изменение знака тока должно изменить и знак разности фаз, поэтому $I_s(\varphi) = -I_s(-\varphi)$.

На рис. 21.1 показаны различные токо-фазовые соотношения, удовлетворяющие условиям 1) – 3). Наиболее простым и часто встречающимся является синусоидальное токо-фазовое соотношение, показанное на рис. 21.1, *a*:

$$I_s(\varphi) = I_c \sin \varphi, \quad (21.1)$$

где I_c — максимальный бездиссипативный ток (иначе — критический ток). Такая зависимость $I_s(\varphi)$, как мы покажем ниже, характеризует обычный туннельный джозефсоновский переход при всех температурах, а также и другие типы слабых связей

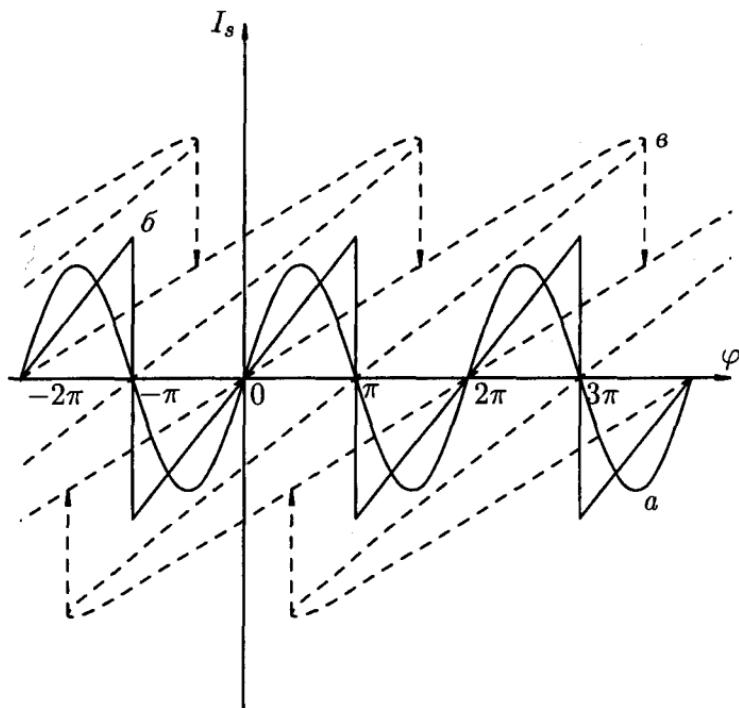


Рис. 21.1. Различные токо-фазовые зависимости: *a* — синусоидальная, *b* — пилообразная, *c* — многозначная.

вблизи T_c , т. е. в области применимости теории Гинзбурга – Ландау.

Пилообразной токо-фазовой зависимостью, рис. 21.1, *b*, обладает при очень низких температурах *SNS*-сэндвич с прослойкой из чистого металла [46, 47, 48]. В этом случае в пределах одного периода (например, от $-\pi$ до π) ток линейно растет с увеличением разности фаз, т. е. прямо пропорционально градиенту фазы θ параметра порядка, наведенного в *N*-слое за счет эффекта близости. Для плотности сверхпроводящего тока тогда имеем

$$j_s(\varphi) = \frac{n_{sN}e}{2m}\hbar\nabla\theta = \frac{n_{sN}e\hbar}{2m}\frac{\varphi}{d_N}, \quad (21.2)$$

где n_{sN} — плотность сверхпроводящих электронов в *N*-слое, а d_N — его толщина. Зависимость (21.2) имеет место для сэндви-

чей с толщиной, удовлетворяющей неравенству $\xi_0 \ll d_N \ll \xi_n$ при температурах $T \ll \hbar v_F / k_B d_N$. При увеличении температуры плотность сверхтока резко падает, см. [48].

Неоднозначная токо-фазовая зависимость типа изображенной на рис. 21.1, в характерна для тонкопленочных сверхпроводящих мостиков с размерами сужения, заметно большими длины когерентности $\xi(T)$ в сверхпроводнике [44]. Срывы с одной ветви многозначной функции на другую, показанные на рис. 21.1, в, соответствуют изменениям разности фаз на 2π (или число, кратное 2π в общем случае) и связаны с проникновением в область мостика квантов магнитного потока, т. е. вихрей Абрикосова (см. следующую главу).

Приведем теперь два доказательства соотношения (21.1).

Но сперва — небольшое напоминание из квантовой механики [49].

Эволюция квантовомеханической системы во времени определяется волновой функцией $\Psi(t)$, которая является решением уравнения Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi, \quad (21.3)$$

где \hat{H} — оператор Гамильтона рассматриваемой системы. Если эта система может находиться только в дискретных состояниях ψ_α (α — набор индексов, характеризующих данное дискретное состояние), то волновую функцию системы можно разложить по полному базису $\{\psi_\alpha\}$:

$$\Psi(t) = \sum_{\alpha} C_{\alpha}(t)\psi_{\alpha}. \quad (21.4)$$

Подстановка этого разложения в формулу (21.3) дает

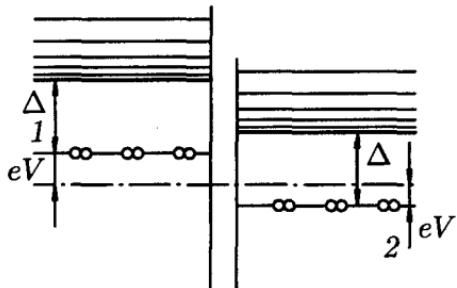
$$i\hbar \frac{dC_{\beta}}{dt} = \sum_{\alpha} H_{\beta\alpha} C_{\alpha}(t). \quad (21.5)$$

Здесь

$$H_{\beta\alpha} = \int \psi_{\beta}^* \hat{H} \psi_{\alpha} dV.$$

При этом $H_{\beta\beta}$ — это энергия системы в состоянии ψ_β , а $H_{\beta\alpha}$ — матричный элемент, характеризующий вероятность перехода системы из состояния ψ_α в состояние ψ_β . Функция $C_\alpha(t)$ представляет собой амплитуду состояния ψ_α , а $|C_\alpha|^2$ — вероятность найти систему в состоянии ψ_α .

Рис. 21.2. Энергетическая схема туннельного джозефсоновского перехода, к которому приложено напряжение V . Уровни 1 и 2 разделены интервалом $2eV$.



Вернемся теперь к джозефсоновскому туннельному переходу. Пусть в общем случае ток через туннельный переход столь велик ($I_s > I_c$), что на переходе возникла разность потенциалов V . Энергетическая схема такого перехода изображена на рис. 21.2 (см. § 46). Будем рассматривать (согласно Фейнману [50]) систему сверхпроводящих электронов (куперовских пар) как двухуровневую квантовомеханическую систему, т. е. положим, что пара может находиться или на уровне 1, или на уровне 2. Ее энергия будет тогда, соответственно, H_{11} или H_{22} , причем $H_{11} = eV$, $H_{22} = -eV$. Переход пары с уровня 1 на уровень 2 определяется величиной матричного элемента $H_{12} = H_{21} = K$. Уравнение (21.5) в этом случае будет иметь вид

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{dC_1}{dt} &= eVC_1(t) + KC_2(t), \\ i\hbar \frac{dC_2}{dt} &= KC_1(t) - eVC_2(t). \end{aligned} \tag{21.5}$$

Здесь C_1 и C_2 — амплитуды состояний пар на уровнях 1 и 2, а $|C_1|^2$ и $|C_2|^2$ нормированы так, что $|C_1|^2 = |C_2|^2 = n_s$, где n_s — плотность сверхпроводящих электронов в сверхпроводящих обкладках перехода. Для простоты предполагаем, что обе обкладки

сделаны из одного и того же материала. Представляя амплитуды C_1 и C_2 в виде

$$C_1 = \sqrt{n_s} e^{i\theta_1}, \quad C_2 = \sqrt{n_s} e^{i\theta_2}$$

и подставляя в уравнения (21.5), получим после разделения вещественной и мнимой частей следующие выражения:

$$\frac{dn_s}{dt} = \frac{2Kn_s}{\hbar} \sin \varphi, \quad (21.6)$$

$$\frac{d\theta_1}{dt} = -\frac{K}{\hbar} \cos \varphi - \frac{eV}{\hbar}, \quad (21.7)$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = -\frac{K}{\hbar} \cos \varphi + \frac{eV}{\hbar}, \quad (21.8)$$

где $\varphi = \theta_2 - \theta_1$.

Ток через тунNELНЫЙ переход пропорционален dn_s/dt . Действительно, при включении тока, в первый момент протекания тока, плотность сверхпроводящих электронов начнет изменяться со скоростью dn_s/dt и возникнет ток $I_s \propto dn_s/dt$. Конечно, этот уход электронов из сверхпроводящей обкладки будет тотчас же компенсирован приходом новых электронов из источника тока, поскольку переход включен в замкнутую электрическую цепь, и концентрация n_s будет оставаться постоянной из-за электронейтральности всей системы. Однако для определения сверхтока достаточно принять, что $I_s \propto dn_s/dt$. Тогда из формулы (21.6) сразу получаем уравнение стационарного эффекта Джозефсона

$$I_s = I_c \sin \varphi. \quad (21.9)$$

Другой вывод этого равенства, применимый к коротким плечочным мостикам, был сделан Асламазовым и Ларкиным [51].

Пусть мостик (рис. 21.3) настолько короткий, что его длина $L \ll \xi$. Применим к такому мостику первое уравнение теории Гинзбурга – Ландау (14.16), которое в отсутствие магнитного поля примет вид

$$-\xi^2 \nabla^2 \psi - \psi + \psi |\psi|^2 = 0. \quad (21.10)$$

В нашем коротком мостике существенное изменение параметра порядка происходит на длине мостика L . Сделаем оценку величины $\nabla^2\psi$ для этого случая:

$$\nabla^2\psi \sim \psi/L^2.$$

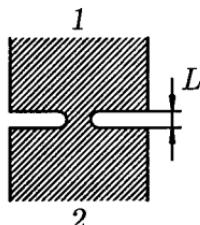


Рис. 21.3. Короткий мостик с длиной $L \ll \xi$ соединяет широкие пленки 1 и 2.

С другой стороны, сама величина параметра порядка $|\psi| \sim \sim 1$. Поэтому первый член в (21.10) будет главным, так как его порядок будет

$$\xi^2/L^2 \gg 1,$$

а все остальные слагаемые порядка единицы. Поэтому уравнение (21.10) можно упростить:

$$\nabla^2\psi = 0. \quad (21.11)$$

Пусть далеко от мостика в пленке 1 параметр порядка ψ равен

$$\psi = \psi_1 e^{i\theta_1},$$

а далеко от мостика в пленке 2

$$\psi = \psi_2 e^{i\theta_2}.$$

Здесь ψ_1 , ψ_2 , θ_1 и θ_2 — постоянные, не зависящие от координат. Ясно, что на самом мостике происходит интерференция этих двух волновых функций; решение уравнения (21.11) ищем в виде

$$\psi = \psi_1 e^{i\theta_1} f(r) + \psi_2 e^{i\theta_2} (1 - f(r)), \quad (21.12)$$

причем $f(r) \rightarrow 1$ в глубине пленки 1 и $f(r) \rightarrow 0$ в глубине пленки 2.

Подставляя (21.12) в (21.11), получим уравнение относительно $f(r)$:

$$\nabla^2 f(r) = 0.$$

Однако нам нет необходимости решать это уравнение. Достаточно знать, что решение существует, и перейти к вычислению сверхтока, который, согласно второму уравнению Гинзбурга – Ландау, можно записать в виде

$$j_s = \frac{|\alpha| \hbar e}{\beta m} \operatorname{Im}(\psi^* \nabla \psi).$$

Подставляя сюда формулу (21.12), получим после простых преобразований выражение для плотности сверхтока через мостик в виде

$$j = j_c \sin \varphi, \quad (21.13)$$

где $\varphi = \theta_1 - \theta_2$.

Таким образом, и для случая мостика мы снова приходим к тому же простому соотношению между сверхтоком и разностью фаз волновых функций сверхпроводников на «берегах» перехода.

В дальнейшем мы будем предполагать, что выполняется синусоидальное токо-фазовое соотношение.

§ 22. Нестационарный эффект Джозефсона. Резистивные характеристики джозефсоновских переходов

Если ток, задаваемый внешним источником, превысит критическое значение I_c , на слабой связи появится напряжение V . К каким это приведет последствиям?

22.1. Джозефсонская генерация. Поведение квантово-механической системы определяется решением уравнения Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi, \quad (22.1)$$

где \hat{H} — гамильтониан системы.

Волновая функция стационарного состояния ψ_1 удовлетворяет уравнению

$$\hat{H}\psi_1 = E\psi_1,$$

где E — энергия этого стационарного состояния, $\psi = \psi_1 e^{i\theta(t)}$, причем ψ_1 не зависит от времени. Подставляя эту волновую функцию в (22.1), получим

$$-\hbar \frac{\partial \theta}{\partial t} = E. \quad (22.2)$$

Если на слабой связи установилась разность потенциалов V , то это означает, что энергии куперовских пар в берегах перехода E_1 и E_2 связаны соотношением

$$E_1 - E_2 = 2eV, \quad (22.3)$$

так как заряд одной пары равен $2e$.

Подставляя (22.3) в (22.2), получим второе фундаментальное соотношение Джозефсона

$$2eV = \hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (22.4)$$

Точно то же самое соотношение получится, если из формулы (21.8) вычесть формулу (21.7).

Что же происходит с джозефсоновским переходом, когда по нему течет заданный извне постоянный ток $I > I_c$? Поскольку сверхток не может быть больше I_c , ясно, что теперь, кроме сверхтока, возникнет ток нормальной компоненты, т. е. возникнет ток одиночных электронов. Это утверждение сразу приводит нас к так называемой резистивной модели, т. е. рассмотрению джозефсоновского перехода как параллельного включения собственно джозефсоновского контакта, пропускающего только сверхток, и нормального участка (рис. 22.1). Полный ток I равен сумме нормального тока V/R и сверхтока $I_s = I_c \sin \varphi$:

$$I = I_c \sin \varphi + \frac{\hbar}{2eR} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (22.5)$$

где R — сопротивление перехода в нормальном состоянии. Это дифференциальное уравнение относительно функции $\varphi(t)$ элементарно интегрируется. Подставляя решение в (22.4), получим напряжение на переходе в виде

$$V(t) = R \frac{I^2 - I_c^2}{I + I_c \cos \omega t}, \quad (22.6)$$

$$\omega = \frac{2e}{\hbar} R \sqrt{I^2 - I_c^2}. \quad (22.7)$$

Так мы обнаруживаем удивительное свойство джозефсоновского перехода. Если заданный извне постоянный ток I больше критического тока перехода, на нем возникает напряжение V , периодически зависящее от времени. Это явление получило название джозефсоновской генерации. Схематическая зависимость $V(t)$ от времени дана на рис. 22.2. Частота колебаний напряжения зависит от того, насколько превышает ток через переход I его критическое значение I_c (см. (22.7)).

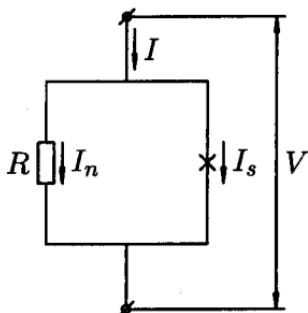


Рис. 22.1. Резистивная модель джозефсоновского перехода. Сверхток через собственно джозефсоновский переход равен $I_s = I_c \sin \varphi$.

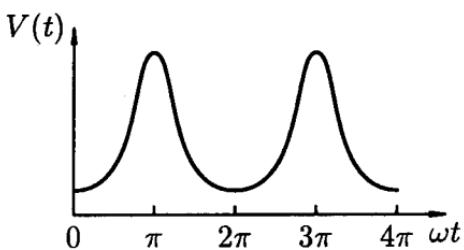


Рис. 22.2. Напряжение на переходе (джозефсоновская генерация).

Вольтметр постоянного тока, подключенный к переходу, покажет, конечно, среднее по периоду значение \bar{V} . Усреднение по

времени формулы (22.6) дает

$$2e\bar{V} = \hbar\omega. \quad (22.8)$$

Эта формула имеет совершенно ясную интерпретацию. Если среднее расстояние по энергиям между уровнями куперовских пар в двух половинках перехода равно $2e\bar{V}$, то при переходе одной пары через область слабой связи такая энергия выделяется в виде кванта электромагнитного излучения.

Вольт-амперная характеристика перехода, которая следует из формул (22.7) и (22.8), показана на рис. 22.3.

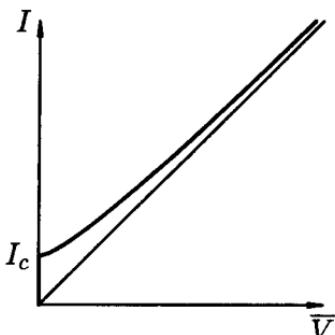


Рис. 22.3. Вольт-амперная характеристика джозефсоновского перехода.

При токе через переход $I = I_s + I_n$, достаточно близком к I_c , значительная его доля протекает в виде сверхпроводящего тока I_s через джозефсоновский элемент на эквивалентной схеме рис. 22.1. При $I \gg I_c$ практически весь постоянный ток течет через резистивный элемент ($I \approx I_n$), и вольт-амперная характеристика на этом участке выходит на характеристику перехода в нормальном состоянии. Чтобы подробнее пояснить такое поведение, представим скорость изменения разности фаз на переходе в таком виде:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2e}{\hbar}V = \frac{2e}{\hbar}R(I - I_s) = \frac{2e}{\hbar}R(I - I_c \sin \varphi). \quad (22.9)$$

Можно заметить, что в течение первого полупериода джозефсоновского тока, когда $I_s = I_c \sin \varphi$ совпадает по направлению с полным током I через переход ($\sin \varphi > 0$), скорость изменения

разности фаз меньше, чем в течение второго полупериода, когда сверхпроводящий ток имеет обратное направление ($\sin \varphi < 0$). Усреднение по полному периоду даст сверхпроводящую компоненту, совпадающую по направлению с I , что обеспечит уменьшение доли нормальной компоненты I_n в полном токе. С увеличением I доля I_s в (22.9), ограниченная I_c , будет уменьшаться, и скорости изменения разности фаз на положительном и отрицательном полупериодах в конце концов сравняются. Это приведет к исчезновению сверхпроводящей компоненты в среднем по времени токе и выходу вольт-амперной характеристики на линейную зависимость $V = RI$.

Здесь необходимо отметить, что соотношения (22.4) и (22.8) являются совершенно фундаментальными и точными. Многочисленные эксперименты подтвердили их с громадной точностью.

Впервые джозефсоновская генерация наблюдалась советскими физиками И. К. Янсоном, В. М. Свистуновым и И. Д. Дмитренко [14] в 1964 г.

При нарастании тока через переход от нуля до величины I_s за время t в переходе запасается некоторая энергия:

$$E_{cb} = \int_0^t I_s V dt. \quad (22.10)$$

Здесь V — это напряжение, возникающее на переходе в процессе нарастания тока согласно общей формуле (22.4). Подставляя сюда $I_s = I_c \sin \varphi$ и (22.4), после элементарного интегрирования получим

$$E_{cb} = E_J(1 - \cos \varphi), \quad (22.11)$$

где

$$E_J = \hbar I_c / 2e = \Phi_0 I_c / 2\pi \quad (22.12)$$

есть максимальная величина понижения энергии перехода за счет наличия слабой связи между сверхпроводящими берегами. Энер-

гию (22.12) мы в дальнейшем будем называть просто *джозефсонской энергией*. Джозефсоновский переход является фактически нелинейной индуктивностью, запасающей энергию при изменении тока через него.

При вычислении полной свободной энергии замкнутой системы, в которую включен джозефсоновский переход, нужно учитывать также энергию, затрачиваемую источником тока:

$$E_{\text{ист}} = \int_0^t IV dt = \frac{\hbar I}{2e} \varphi = \frac{\Phi_0}{2\pi} I \varphi. \quad (22.13)$$

Таким образом, свободная энергия для рассматриваемого случая перехода с заданным током (т. е. потенциальный «рельеф» вдоль угловой координаты φ) определяется соотношением

$$E = E_J(1 - \cos \varphi) - \frac{\Phi_0}{2\pi} I \varphi, \quad (22.14)$$

которое графически изображено на рис. 22.4. С увеличением тока через переход средний наклон изображенного рельефа (часто называемого «стиральной доской») возрастает, а глубина локальных минимумов, расположенных в точках $\varphi_0 = \arcsin(I/I_c) + + 2\pi n$, уменьшается. При $I = I_c$ потенциальные барьеры U_0 на кривой (22.14) исчезают, что соответствует непрерывному изменению фазы и появлению напряжения на переходе.

22.2*. Критический ток и «ток возврата» джозефсонского перехода с емкостью. Механизмы токопереноса в туннельных сверхпроводящих переходах будут подробно рассмотрены в § 46. Покажем здесь, что поведение туннельного джозефсоновского перехода, в котором два сверхпроводящих берега разделены тонкой прослойкой изолятора, как это изображено на рис. 20.1, a, сходно с поведением массивной частицы в потенциале, изображенном на рис. 22.4. Для описания туннельного перехода в рамках резистивной модели необходимо дополнить эквивалентную схему (рис. 22.1) параллельно включенной емкостью C . Ток

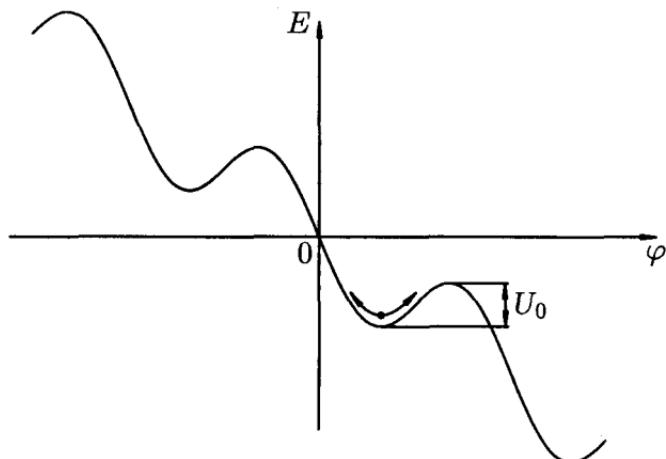


Рис. 22.4. Потенциальный рельеф $E(\varphi)$ джозефсоновского перехода с заданным током.

смещения через емкостной элемент

$$I_D = C \frac{dV}{dt} = \frac{\hbar C}{2e} \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (22.15)$$

должен быть добавлен в соотношение (22.5), которое примет вид

$$\frac{\hbar C}{2e} \ddot{\varphi} + \frac{\hbar}{2eR} \dot{\varphi} + I_c \sin \varphi = I, \quad (22.16)$$

или

$$\left(\frac{\hbar}{2e}\right)^2 C \ddot{\varphi} + \left(\frac{\hbar}{2e}\right)^2 R^{-1} \dot{\varphi} + E_J \sin \varphi = E_J \frac{I}{I_c}, \quad (22.17)$$

где $\ddot{\varphi}$ и $\dot{\varphi}$ означает производные φ по времени второго и первого порядка. Уравнение (22.17) — фактически уравнение движения маятника с моментом инерции $J = \left(\frac{\hbar}{2e}\right)^2 C$, коэффициентом вязкости $\eta = \left(\frac{\hbar}{2e}\right)^2 R^{-1}$, максимальным гравитационным моментом $mgl = E_J$ и приложенным вращающим моментом $E_J(I/I_c)$; $\ddot{\varphi}$ и $\dot{\varphi}$ — угловое ускорение и угловая скорость маятника. Легко видеть, что собственная частота малых колебаний $(mgl/J)^{1/2}$, на-

зывающая в джозефсоновском случае *плазменной частотой перехода*, выражается соотношением

$$\omega_p = \left(\frac{E_J}{J} \right)^{1/2} = \left(\frac{2\pi I_c}{C\Phi_0} \right)^{1/2}. \quad (22.18)$$

Плазменная частота может рассматриваться также как резонансная частота

$$\omega_p = (L_J C)^{-1/2} \quad (22.19)$$

высокочастотного контура с емкостью C и индуктивностью L_J . Сравнение (22.19) и (22.18) дает для собственной индуктивности джозефсоновского перехода следующее значение (для малых изменений φ):

$$L_J = \frac{\Phi_0}{2\pi I_c}. \quad (22.20)$$

Выражение (22.17) часто бывает удобно представлять также как уравнение движения массивной частицы в периодическом потенциале, представленном на рис. 22.4. В этом случае величина $\left(\frac{\hbar}{2e}\right)^2 C$ играет роль массы m частицы. С точностью до замены φ на линейную координату x мы получаем уравнение движения частицы в вязкой среде с $\eta = \left(\frac{\hbar}{2e}\right)^2 R^{-1}$ в одномерном периодическом потенциале $E_J(1 - \cos x)$ под действием приложенной силы $E_J(I/I_c)$. «Масса», определяющая «инерционное» поведение перехода при изменении φ , связана с величиной емкости C . «Кинетическая энергия» $mv^2/2$ такой частицы, пропорциональная m и $\dot{\varphi}^2$, в точности равна электрической энергии $CV^2/2$, запасаемой в переходе при возникновении напряжения $V = \frac{\hbar}{2e}\dot{\varphi}$, пропорционального скорости изменения разности фаз φ на переходе.

Выше мы показали, что массивная частица начинает непрерывно двигаться при наклоне «стиральной доски», соответствующем $I = I_c$. Однако в связи с инерцией частицы остановить ее можно только несколько уменьшив угол наклона по сравнению с критическим, т. е. при некотором «токе возврата» $I_r < I_c$.

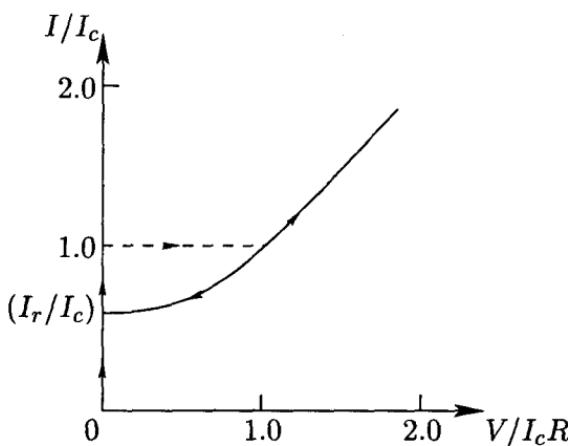


Рис. 22.5. Вольт-амперная характеристика перехода с $\beta_C = 4$.

Ток возврата (или «ток захвата») тем меньше, чем выше емкость («масса») и чем меньше вязкость, т. е. выше сопротивление туннельного перехода. Гистерезисное поведение вольт-амперной характеристики туннельного перехода показано на рис. 22.5. Количественно ток возврата и необратимость резистивных свойств определяются величиной параметра Маккамбера [52]:

$$\beta_C = (2e/\hbar)I_c CR^2. \quad (22.21)$$

Использование параметра β_C и *характерной джозефсоновской частоты* $\omega_c = (2e/\hbar)I_c R$ позволяет упростить (22.17):

$$I/I_c = \beta_C \omega_c^{-2} \ddot{\varphi} + \omega_c^{-1} \dot{\varphi} + \sin \varphi. \quad (22.22)$$

При $\beta_C \leq 1$ можно пренебречь «емкостным» членом в (22.22) и получить снова (22.5). В этом случае вольт-амперная характеристика однозначна и описывается соотношением (22.7) для переходов с непосредственной проводимостью:

$$V = R\sqrt{I^2 - I_c^2}. \quad (22.23)$$

При $\beta_C > 1$ вольт-амперные характеристики приобретают гистерезисный вид, показанный на рис. 22.5. Прямая ветвь представляет собой вертикальную ступеньку тока от 0 до I_c при нулевом

напряжении, после которой следует срыв на возвратную ветвь (называемую также часто «квазичастичной ветвью»). Численные расчеты [52, 53] дают зависимость тока возврата I_r от β_C , показанную на рис. 22.6. Для $\beta_C \rightarrow \infty$ имеем $I_r \rightarrow 0$. Это означает, что возвратная часть вольт-амперной характеристики линейна¹⁾ ($V = RI$), как показано на рис. 22.7, т. е. в эквивалентной схеме резистивной модели, которая представляет собой параллельное включение R , C и собственно джозефсоновского элемента (переносящего сверхпроводящий ток $I_c \sin \varphi$), транспортный ток течет только через нормальное сопротивление. Чтобы объяснить физическую природу изменения поведения обратного хода характеристики при увеличении емкости перехода, представим β_C (см. (22.21)) через проводимость $\omega_c C$ емкостного элемента эквивалентной схемы на характерной джозефсоновской частоте ω_c и проводимости резистивного элемента $G = 1/R$:

$$\beta_C = \omega_c C / G. \quad (22.24)$$

Легко видеть, что при $\beta_C \gg 1$ емкостной элемент полностью шунтирует переменный джозефсоновский ток, зануляя сверхпроводящую часть в полном транспортном токе через джозефсоновский контакт. При малых C среднее по времени значение сверхпроводящей компоненты не равно нулю, поэтому напряжения в интервале от нуля до нескольких $V_c = I_c R$ понижаются по сравнению со случаем нормального туннельного контакта.

Задача 22.1. Два джозефсоновских перехода с критическими токами $I_{c1} = 500 \text{ мкА}$ и $I_{c2} = 700 \text{ мкА}$ включены параллельно в сверхпроводящую цепь. Полный ток через оба перехода равен 1 мА. Чему равны токи в каждом из переходов?

Решение. Поскольку переходы включены параллельно, разности фаз φ_1 и φ_2 на переходах будут равны. Поэтому токи по переходам распределяются пропорционально их критическим токам: $I_1 = 0.417 \text{ мА}$, $I_2 = 0.583 \text{ мА}$.

¹⁾Мы пренебрегаем здесь для простоты щелью в энергетическом спектре нормальных носителей в сверхпроводнике и особенностью в плотности их состояний, которые будут обсуждаться в §§ 45 – 46. Вольт-амперные характеристики с квазичастичными (возвратными) ветвями, рассчитанные с учетом этих особенностей, приведены на рис. 46.7.

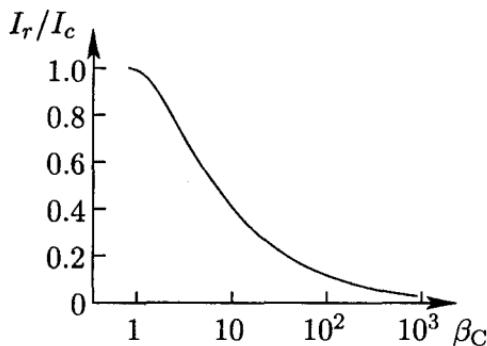


Рис. 22.6. Зависимость тока возврата от величины β_C [52].

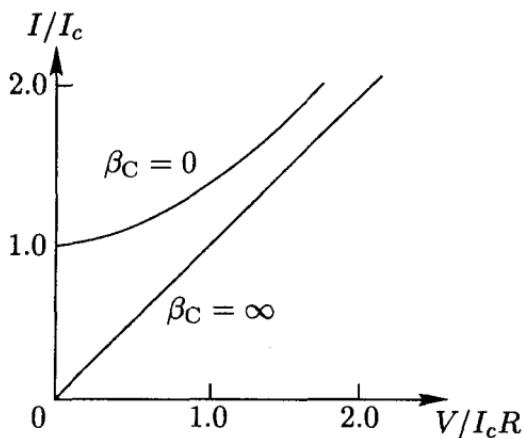


Рис. 22.7. Вольт-амперные характеристики джозефсоновских переходов, рассчитанные в рамках резистивной модели (см. примечание на с. 131) для случаев незначительной ($\beta_C = 0$) и доминирующей ($\beta_C = \infty$) емкостей.

Задача 22.2. Найти разность между максимальным и минимальным значениями V на графике рис. 22.2.

Ответ. $V_{\max} - V_{\min} = 2I_c R$.

Задача 22.3. Точечный контакт имеет критический ток $I_c = 1 \text{ мА}$ и сопротивление в нормальном состоянии $R = 2 \Omega$. Найти величину постоянного напряжения на контакте \bar{V} и частоту джозефсоновой генерации ν , если через контакт течет ток $I = 1.2 \text{ мА}$.

Ответ. $\bar{V} = 1.33 \text{ мВ}$; $\nu = 641 \text{ ГГц}$.

Задача 22.4. Критический ток джозефсоновского перехода равен $I_c = 100 \text{ мкА}$. Через переход пропускается постоянный ток $I_0 = 70 \text{ мкА}$ и слабый переменный ток с амплитудой $I_1 = 2 \text{ мкА}$ и частотой $\nu = 10 \text{ МГц}$, т. е. $I = I_0 + I_1 \sin 2\pi\nu t$. Найти напряжение на переходе, пользуясь СИ.

Решение. Разность фаз на переходе ищем в виде $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$, где φ_0 — разность фаз, создаваемая постоянным током I_0 . Напряжение на переходе $V = (\Phi_0/2\pi)d\varphi/dt = (\Phi_0/2\pi)d\varphi_1/dt$, но $d\varphi_1/dt = (dI/dt)(dI/d\varphi_1)^{-1}$. Подставляя это выражение в выражение для V , получим

$$V = \frac{\Phi_0}{I_c \cos \varphi_0} \nu I_1 \sin(2\pi\nu t + \pi/2).$$

При условиях задачи амплитуда переменного напряжения будет 0.58 нВ .

Замечание. Из решения задачи следует, что напряжение V опережает по фазе ток через переход на угол $\pi/2$. Это значит, что переход ведет себя как индуктивность $L = \Phi_0/(2\pi I_c \cos \varphi_0)$.

§ 23*. Флуктуации критического тока. Макроскопическое квантовое туннелирование

23.1. Тепловые флуктуации критического тока в джозефсоновском переходе. Величина I_c является фундаментальной характеристикой джозефсоновского перехода, определяемой энергией связи E_J (22.12). Мы видели выше, что при токе через переход $I = I_c$ исчезают барьеры (U_0) в потенциальном рельефе $E(\varphi)$. Однако и при несколько более низких токах возможен распад метастабильных состояний джозефсоновского перехода путем преодоления потенциальных барьеров за счет шума в измерительных цепях, за счет тепловых и квантовых флуктуаций фазы. Таким образом, реально наблюдаемый критический ток, выше которого начинается непрерывное изменение фазы во времени и возникает напряжение на переходе, несколько меньше, чем $I_c = \frac{2e}{\hbar} E_J = \frac{2\pi}{\Phi_0} E_J$. Здесь нужно оговориться, что если затухание велико (т. е. величина параметра Маккамбера β_C достаточно мала), то единичная флуктуация «перебросит» переход в состояние, соответствующее следующему локальному минимуму; возникающий короткий импульс напряжения, соответствующий отдельному флуктуационному процессу, зафиксировать практически невозможно. В переходах с малым затуханием ($\beta_C \gg 1$) из-

за большой инерции система не задержится в соседнем минимуме, а будет разгоняться пока $\dot{\varphi}$ (т. е. V) не достигнет стационарного значения за счет возрастания диссипативного члена в (22.17). Этому процессу соответствует скачок на вольт-амперной характеристике, показанный на рис. 22.5.

Рассмотрим термоактивационный распад метастабильного состояния джозефсоновского перехода с током, т. е. термоактивационное преодоление барьера U_0 , изображенного на рис. 22.4. Высота этого барьера при токах чуть ниже критического ($|I - I_c| \ll I_c$) невелика и определяется выражением [54, 55]

$$U_0(I) = \frac{4\sqrt{2}}{3} E_J (1 - I/I_c)^{3/2}. \quad (23.1)$$

Частота собственных колебаний перехода на дне потенциальной ямы есть

$$\omega(I) = \omega_p [1 - (I/I_c)^2]^{1/4}, \quad (23.2)$$

где ω_p — плазменная частота (22.18). Скорость распада состояния пропорциональна частоте попыток (23.2) и Больцмановскому фактору $\exp(-U_0/k_B T)$. Вероятность распада при конечных температурах сильно возрастает с приближением I к I_c ($U_0 \rightarrow 0$). Дополнительные предэкспоненциальные множители, полученные из точных количественных расчетов, подробно обсуждались в работах [56, 57, 55]. На рис. 23.1 представлены расчеты [58] вольт-амперных характеристик для переходов с $\beta_C \geq 1$, учитывающие тепловые флуктуации. (Параметр $\gamma = 2E_J/(k_B T)$.) Эксперименты, проведенные как на переходах со слабым затуханием [54], так и на переходах с сильным затуханием [59], показали хорошее согласие с расчетами. В последней работе переход с сильным затуханием включался в сверхпроводящее кольцо, ток I через переход задавался путем приложения внешнего магнитного поля, а распад метастабильного состояния фиксировался по проникновению магнитного потока в кольцо. Для измерения магнитного потока использовался чувствительный сквид-магнитометр, описаннию работы которого посвящены последние разделы данной главы.

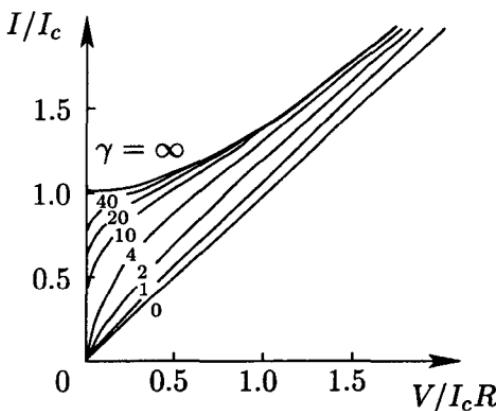


Рис. 23.1. Влияние тепловых флуктуаций на вольт-амперные характеристики джозефсоновских переходов с $\beta_C \geq 1$ ($\gamma = 2E_J/(k_B T)$). Расчеты взяты из работы [58].

23.2. Макроскопические квантовые эффекты. Прежде чем обратиться к процессам квантового распада метастабильных состояний джозефсоновского перехода, рассмотрим условия, при которых джозефсоновский контакт становится по-настоящему квантовым макроскопическим объектом, т. е. одна из макроскопических степеней свободы (сверхпроводящая фаза) становится настоящей квантовомеханической переменной.

Явление сверхпроводимости в целом невозможно описать без привлечения квантовой механики. Эффекты Джозефсона — наиболее яркий пример установления когерентных волновых свойств между двумя массивными слабосвязанными сверхпроводниками. Движение сверхпроводящих электронов является существенно квантовым, и фаза сверхпроводящей волновой функции явно проявляется в различных интерференционных эффектах. Тем не менее, в большинстве случаев изменение фазы во времени может быть достаточно точно описано классической механикой. Мы видели это в предыдущем разделе в случае динамики разности фаз в одиночном туннельном джозефсоновском переходе. При выводе другого важного квантовомеханического эффекта, квантования магнитного потока, мы также фактически пользовались квази-

классическими выражениями и правилами квантования. Главной особенностью квазиклассического приближения, справедливого для макроскопических объектов с огромным числом степеней свободы, является то, что канонически сопряженные переменные могут иметь одновременно точные значения. Однако существуют условия, при которых фаза параметра порядка становится настоящей квантовомеханической переменной. Это приводит к т. наз. *макроскопическим квантовым эффектам* [55].

Вернемся к случаю маятника, уравнение движения которого аналогично уравнению (22.17) для разности фаз в одиночном джозефсоновском тунNELЬНОМ переходе. В случае маятника канонически сопряженными переменными (аналогичными координате и импульсу) являются угловая координата φ и момент импульса M . Если масса маятника стремится к нулю, необходимо учитывать квантовые эффекты в динамике, вообще говоря, макроскопической степени свободы φ . Из соотношения неопределенности

$$\Delta\varphi\Delta M \sim \hbar \quad (23.3)$$

следует, что величины φ и M не могут быть определены точно одновременно. Даже при нулевой температуре центр масс маятника не может находиться в состоянии покоя, поскольку это означало бы, что и φ , и M точно определены ($\varphi = 0, M = 0$). Следовательно, в *квантовом пределе* центр масс маятника должен испытывать, кроме тепловых флуктуаций, флуктуации квантовой природы. Таким образом, если обычные когерентные эффекты — это квантовое когерентное движение микрочастиц (например, электронов в сверхпроводнике), то в макроскопических квантовых эффектах проявляется квантовое поведение макрообъекта в целом [60, 61].

Для перехода к квантовому пределу в джозефсоновском случае к нулю должна стремиться емкость C тунNELЬНОГО контакта, играющая роль массы. Квантовые флуктуации становятся значительными при приближении электрической («кулоновской») энер-

гии перехода

$$E_C = e^2 / 2C \quad (23.4)$$

к джозефсоновской энергии E_J (22.12). Для экспериментального наблюдения квантовых эффектов важно, чтобы тепловые флуктуации были малы, т. е. выполнялось неравенство $k_B T < E_C, E_J$. Необходимые условия достигаются в джозефсоновских туннельных переходах с субмикронными размерами и емкостью, меньшей примерно $10^{-15} \Phi$, при температурах ниже 0.1 К. Напряжению $V \sim 100$ мкВ в таких переходах соответствует разность зарядов на обкладках $Q = CV \sim 10^{-19}$ Кл, т. е. порядка одного заряда электрона.

В нормальном состоянии высокая электрическая энергия e^2/C , возникающая в туннельном переходе в связи с туннелированием одного электрона, приводит к «кулоновской блокаде» туннелирования при напряжениях $V \leq e/C$ [62, 63]. Появление дополнительного кулоновского члена $Q^2/2C$ в энергии джозефсоновского перехода (22.14) также сильно изменяет динамику туннелирования сверхпроводящих пар [64, 65]. На рис. 23.2 приведена экспериментальная вольт-амперная характеристика из [66], полученная при $T < 0.1$ К для джозефсоновского туннельного перехода с площадью 0.01 мкм^2 , емкостью $5 \cdot 10^{-16} \Phi$, джозефсоновской энергией $E_J \simeq 10^{-4}$ эВ и кулоновской энергией $E_C \simeq \simeq 1.6 \cdot 10^{-4}$ эВ. Легко видеть, что «зарядовые эффекты» приводят к исчезновению джозефсоновского критического тока и появлению области кулоновской блокады туннелирования куперовских пар при напряжениях, близких к нулю (от нуля до V_b).

Рассмотрим подробнее, с какими канонически сопряженными *макроскопическими квантовыми* переменными мы имеем дело в случае джозефсоновского перехода. «Момент импульса» перехода $M = J\dot{\phi}$ с учетом того, что $J = (\hbar/2e)^2 C$ (см. обсуждение (22.17)), равен

$$M = J\dot{\phi} = \left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 C \dot{\phi} = \frac{\hbar}{2e} CV = \frac{Q\hbar}{2e}, \quad (23.5)$$

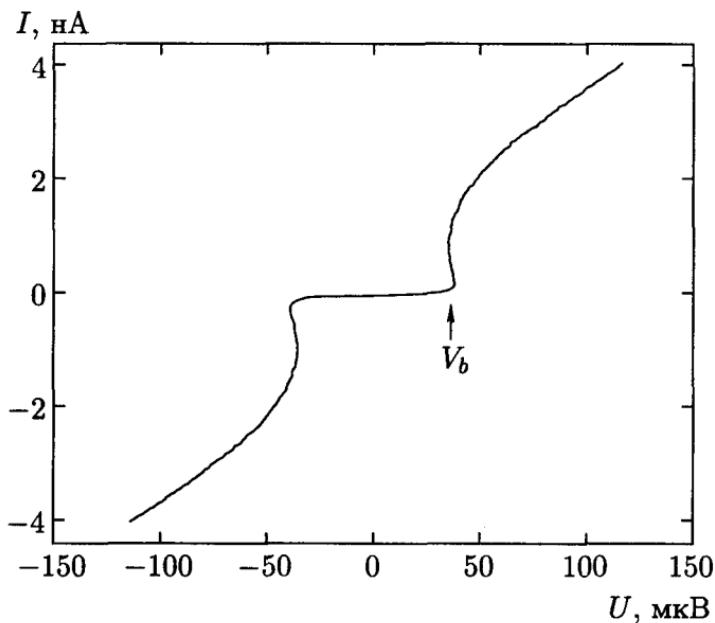


Рис. 23.2. Вольт-амперная характеристика джозефсоновского туннельного перехода с субмикронными размерами [66]; V_b — критическое напряжение «кулоновской блокады».

где Q — электрический заряд на «обкладках» туннельного перехода, индуцированный напряжением V (пропорциональным φ) на переходе. Таким образом, соотношение (23.3) принимает вид

$$\Delta\varphi\Delta Q \sim 2e \quad (23.6)$$

или

$$\Delta\varphi\Delta n \sim 1, \quad (23.7)$$

где $n = Q/2e$ — разбаланс количества сверхпроводящих пар, создающих заряд на обкладках туннельного перехода. В области величин токов и напряжений, где проявляются квантовые эффекты (рис. 23.2), через туннельный переход с $E_J \sim E_C$ проходят единицы электронов, т. е. величина n хорошо определена. Это означает,

что разность фаз φ должна быть сильно размыта квантовыми флуктуациями, что и приводит к почти полному исчезновению критического тока. Подробнее этот вопрос мы рассмотрим в следующем параграфе.

Сильные флуктуации сверхпроводящей фазы могут возникать не только в туннельных переходах с кулоновской блокадой носителей. Локализация заряда возникает и в сверхпроводящих структурах с непосредственной проводимостью с увеличением беспорядка в области слабых связей и при приближении их нормального сопротивления к «квантовому сопротивлению»

$$R_Q \equiv \frac{h}{(2e)^2} \simeq 6.5 \text{ кОм}. \quad (23.8)$$

В этом случае уменьшение подвижности носителей заряда, приводящее к затруднению переноса пар через высокоомную слабую связь, также должно сопровождаться увеличением квантовых флуктуаций сверхпроводящей фазы [67, 68].

23.3. Макроскопическое квантовое туннелирование и когерентность. Если понижать температуру, скорость распада метастабильного состояния в потенциале, изображенном на рис. 22.4, выйдет на константу, которая определяется квантовыми флуктуациями. При таком распаде система в целом (как квантовая частица!) туннелирует под барьером U_0 (рис. 23.3, a). Впервые влияние квантовых флуктуаций на наблюдаемый критический ток туннельных джозефсоновских переходов малых размеров было вычислено в работе [69]. Скорость квантового распада при $T = 0$ можно оценить, полагая, что теперь в роли $k_B T$ в «больцмановском факторе» (ср. с обсуждением после (23.2)) выступает энергия нулевых колебаний, равная по порядку величины $\hbar\omega(I)$:

$$\tau_Q^{-1} = a_q \frac{\omega(I)}{2\pi} \exp\left(-\alpha \frac{U_0}{\hbar\omega(I)}\right). \quad (23.9)$$

Точные вычисления α и предэкспоненциального множителя a_q проведены в [55, 70, 71]. Наличие затухания в системе, $\eta = (\hbar/2e)^2 R^{-1}$, приводит к появлению в (23.9) дополнительного

множителя [72] $\exp(-2\pi U_0/(2eI_cR))$. Таким образом, вероятность квантовых процессов распада действительно должна возрастать с уменьшением емкости джозефсоновского перехода (в связи с возрастанием плазменной частоты перехода) и увеличением его сопротивления (в связи с уменьшением затухания), как это указывалось в предыдущем разделе.

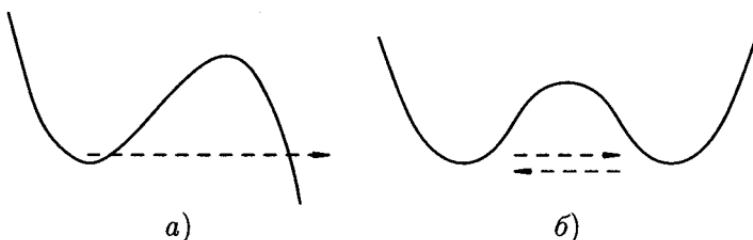


Рис. 23.3. Макроскопическое квантовое туннелирование (а) и макроскопическая квантовая когерентность (б) в джозефсоновских системах.

Первые же эксперименты [73, 74] по измерению времени жизни метастабильного сверхпроводящего состояния малых джозефсоновских туннельных контактов подтвердили теоретические предсказания того, что ширина распределения плотности вероятности перехода в резистивное состояние таких контактов не зависит от температуры при достаточно низких ее значениях, причем температура выхода на квантовый режим преодоления барьера определяется величиной плазменной частоты контакта. Еще одним фактором, влияющим на время жизни метастабильного состояния туннельного перехода с током, является наличие квантованных уровней энергии джозефсоновского перехода [75] в ямах потенциала «стиральной доски» (рис. 23.4). Скорость распада с уровня E_i определяется как вероятностью заселенности данного уровня при конечной температуре, так и шириной потенциального барьера на этом уровне. Скорость распада можно увеличить, прикладывая к образцу высокочастотное электромагнитное поле $\hbar\Omega$, соответствующее расстоянию между уровнями, и, таким образом, увеличивая заселенность вышележащих уровней. Эксперименты [76] прекрасно подтвердили резонансное увеличение скорости распада при совпадении частоты приложен-

ного высокочастотного поля и расстояния между квантованными уровнями энергии в джозефсоновских переходах с малой емкостью.

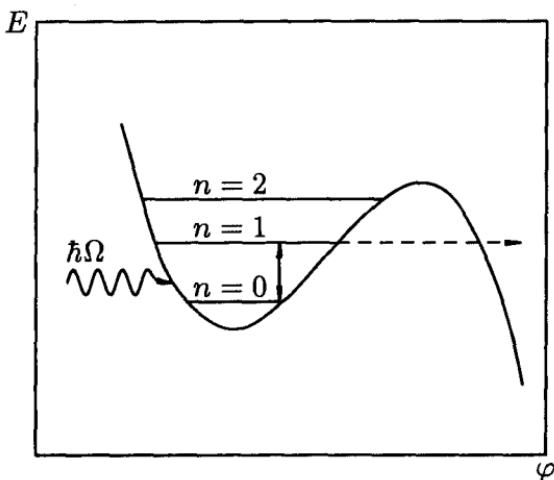


Рис. 23.4. Дискретные энергетические состояния в субмикронных тунNELьных джозефсоновских контактах и переходы между ними под действием высокочастотного электромагнитного поля.

Систематические экспериментальные исследования зависимости квантовых процессов в туннельных контактах от величины их сопротивления выполнены в работах [77, 78, 79]. Обнаружен фазовый переход из сверхпроводящего в диэлектрическое состояние при приближении сопротивления туннельного контакта к квантовому сопротивлению (23.8), который связывается с резким возрастанием флуктуаций сверхпроводящей фазы в контакте за счет макроскопического квантового туннелирования.

Еще одно важное понятие, которое возникло при исследовании структур с джозефсоновскими контактами, находящимися в «квантовом пределе», это понятие о *макроскопической квантовой когерентности*. В таких системах (например, сверхпроводящем кольце с тремя джозефсоновскими переходами во внешнем магнитном поле, равном половине кванта магнитного потока) джозефсоновская энергия может иметь два почти вырожденных

минимума при значениях фазы φ_1 и φ_2 , разделенных потенциальным барьером (рис. 23.3, б).

Если диссипацию в контактах удается сделать очень слабой, становится возможным квантовомеханическое туннельное проникновение фазы из одного минимума в другой (обозначим амплитуду такого процесса T), и правильными собственными состояниями системы являются смеси состояний, локализованных в первой и второй ямах. Иначе говоря, весь джозефсоновский контакт описывается волновой функцией $\Psi(\varphi)$, зависящей от фазы φ : $\Psi(\varphi) = a_1\Psi_1(\varphi) + a_2\Psi_2(\varphi)$, где волновые функции $\Psi_{1,2}(\varphi)$ соответствуют состояниям, локализованным в первой и второй ямах. Состояние с волновой функцией $\Psi(\varphi)$, в котором обе амплитуды $a_{1,2}$ отличны от нуля, является когерентной смесью исходных (локализованных) состояний. Так, если энергии $E_{1,2}$ локализованных состояний 1, 2 точно равны, то правильными собственными состояниями будут симметричное (основное) с $a_1 = a_2$ и возбужденное антисимметричное, $a_1 = -a_2$, а расщепление их энергетических уровней равно $2T$. При увеличении исходного расщепления уровней $|E_1 - E_2|$ до величин, больших T , роль туннелирования падает, а когерентные состояния становятся все более близкими к исходным локализованным. Экспериментальное подтверждение существования макроскопически когерентных состояний в системах джозефсоновских контактов было получено совсем недавно в работах [80, 81].

§ 24. Отклик джозефсоновского перехода на внешнее магнитное поле

В этом параграфе мы ограничимся переходами, в которых нет концентрации тока, т. е. переходами типа сэндвич, или туннельными переходами. Пусть, например, такой переход представляет собой две массивные сверхпроводящие пластинки, разделенные тонким слоем диэлектрика (рис. 24.1). Если такую систему поместить во внешнее магнитное поле, параллельное плоскости перехода, на внешней поверхности пластин возникнет экранирующий сверхток. Этот ток течет в слое порядка лондонов-

ской глубины проникновения λ . Но при этом он должен пересечь плоскость джозефсоновского перехода, а плотность критического тока там очень мала (слабое место!). Поэтому, чтобы сохранить бездиссипативность течения, току приходится растекаться на значительной ширине вглубь перехода. Это и показано на рис. 24.1. Попробуем описать эту ситуацию математически.

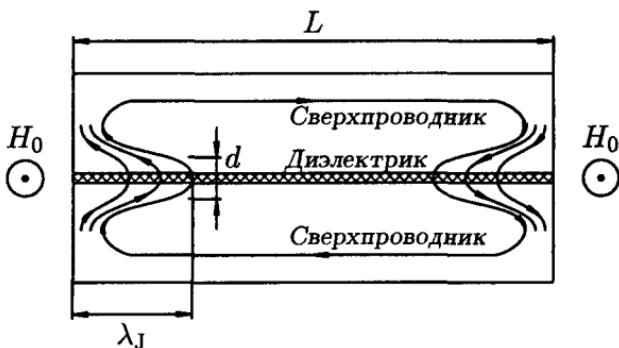


Рис. 24.1. Джозефсоновский туннельный переход, помещенный в магнитное поле H_0 . Показано распределение экранирующего (мейсснеровского) тока.

24.1. Уравнение Феррелла – Прейндана. Пусть ось x лежит в плоскости перехода, а магнитное поле направлено вдоль оси z . Область вдоль оси y , где протекает ток и существует магнитное поле, имеет размер d (см. рис. 24.1), причем $d = 2\lambda + t$. Здесь t — толщина изоляционной прослойки туннельного перехода. Рассмотрим две близкие пары точек (1, 2; 3, 4) на переходе (рис. 24.2). Эти точки выбраны вне области, занятой магнитным полем, а расстояние между ними принято равным dx .

Обобщенный импульс для куперовской пары запишем в виде

$$\hbar \nabla \theta = 2m \mathbf{v}_s + \frac{2e}{c} \mathbf{A}, \quad (24.1)$$

где θ — фаза волновой функции, \mathbf{v}_s — скорость пары, m — масса электрона, e — его заряд, \mathbf{A} — векторный потенциал магнитного поля. Проинтегрируем это уравнение по пунктирным участкам,

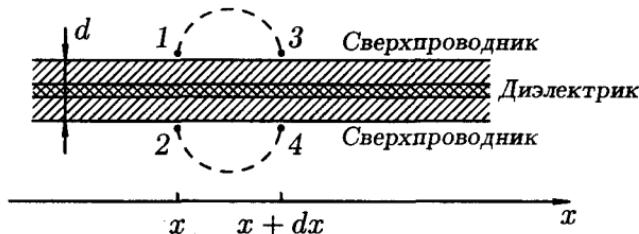


Рис. 24.2. Участок джозефсоновского перехода вблизи края перехода. Заштрихована область с магнитным полем.

показанным на рис. 24.2. Все точки этого контура находятся в области, где нет сверхтока, поэтому там $v_s = 0$:

$$\hbar \left[\int_1^3 \nabla \theta \, dl + \int_4^2 \nabla \theta \, dl \right] = \frac{2e}{c} \left[\int_1^3 \mathbf{A} \, dl + \int_4^2 \mathbf{A} \, dl \right]. \quad (24.2)$$

Расстояние d будем в дальнейшем считать пренебрежимо малым. Тогда правую часть формулы (24.2) можно записать приближенно в виде

$$\frac{2e}{c} \oint \mathbf{A} \, dl = \frac{2e}{c} d\Phi, \quad (24.3)$$

где $d\Phi$ — магнитный поток, охватываемый пунктирным контуром, если этот контур дополнить отрезками 3–4 и 2–1. Теперь, очевидно, после интегрирования левой части в (24.2) получим

$$\hbar(\theta_3 - \theta_1 + \theta_2 - \theta_4) = \frac{2e}{c} d\Phi.$$

Учитывая, что $\theta_3 - \theta_4 = \varphi(x + dx)$, а $\theta_1 - \theta_2 = \varphi(x)$, имеем

$$\varphi(x + dx) - \varphi(x) = \frac{2e}{\hbar c} d\Phi,$$

или

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{2\pi}{\Phi_0} \frac{d\Phi}{dx}, \quad (24.4)$$

поскольку $\Phi_0 = \pi \hbar c / e$.

Учитывая, что $(1/d)d\Phi/dx$ — это напряженность H магнитного поля в переходе в точке x в направлении оси z , имеем

$$H = \frac{\Phi_0}{2\pi d} \frac{d\varphi}{dx}. \quad (24.5)$$

Сверхток через переход в направлении оси y , согласно уравнениям Максвелла, равен

$$j_s = \frac{c}{4\pi} \frac{dH}{dx}.$$

Подставляя сюда (24.5) и учитывая основное джозефсоновское соотношение между током и разностью фаз $j_s = j_c \sin \varphi$, имеем окончательно так называемое уравнение Феррелла – Прейнданжа [82]

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{1}{\lambda_J^2} \sin \varphi, \quad (24.6)$$

где λ_J равно

$$\lambda_J = \left(\frac{c\Phi_0}{8\pi^2 j_c d} \right)^{1/2}. \quad (24.7)$$

Решение $\varphi(x)$ уравнения (24.6) должно описать распределение разности фаз вдоль перехода. Рассмотрим случай очень слабого внешнего поля $H_0 \ll \Phi_0/(2\pi\lambda_J d)$. В этом случае токи через переход тоже будут слабы и мала будет разность фаз φ . Поэтому уравнение (24.6) можно записать в виде

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{1}{\lambda_J^2} \varphi,$$

которое элементарно решается:

$$\varphi(x) = \varphi(0) \exp(-x/\lambda_J). \quad (24.8)$$

Подставляя это решение в (24.5), найдем магнитное поле в переходе:

$$H(x) = H_0 \exp(-x/\lambda_J).$$

Отсюда видно, что величина λ_J , имеющая размерность длины, представляет собой глубину проникновения слабого магнитного поля в джозефсоновский переход.

В практических расчетах величины λ_J удобно пользоваться СИ, поэтому приведем формулу (24.7) также в этой системе:

$$\lambda_J = \left(\frac{\Phi_0}{2\pi\mu_0 j_c d} \right)^{1/2},$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м, $\Phi_0 = 2.07 \cdot 10^{-15}$ Вб, j_c — критическая плотность тока через переход в А/м², d выражено в метрах. Если принять, что $d \sim 10^{-5}$ см, $j_c \sim 10^2$ А/см², то λ_J оказывается порядка 0.1 мм, т. е. вполне макроскопической величиной.

24.2. Проникновение магнитного поля в переход. Джозефсоновские вихри. В предыдущем параграфе мы изучили случай слабого внешнего поля, которое проникает в переход на величину λ_J — джозефсоновскую глубину проникновения. А что будет, если мы начнем увеличивать внешнее поле? Оказывается, что поведение джозефсоновского перехода во внешнем магнитном поле во многом напоминает поведение сверхпроводника второго рода. Здесь тоже, когда внешнее поле превысит некоторое характерное поле перехода H_{c1} , внутрь перехода начнут проникать сверхпроводящие вихри, несущие квант магнитного потока Φ_0 , так называемые джозефсоновские вихри.

Действительно, одно из решений уравнения Феррелла–Прейнджа (24.6) имеет вид

$$\varphi_0(x) = 4 \operatorname{arctg} \exp(x/\lambda_J). \quad (24.9)$$

Прямой подстановкой нетрудно убедиться, что уравнение (24.6) этим решением удовлетворяется. Вид $\varphi_0(x)$, $d\varphi_0/dx \propto H$ и $d^2\varphi_0/dx^2 \propto j_s$ показан на рис. 24.3. Таким образом, джозефсоновский вихрь представляет собой так называемый солитон, уединенное возбуждение широкого джозефсоновского перехода. Вдоль перехода вихрь имеет размер порядка $2\lambda_J$, а поперек перехода (вдоль оси y) — размер $d \ll 2\lambda_J$.

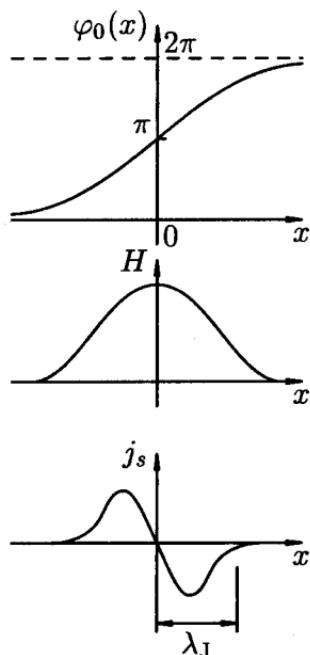


Рис. 24.3. Распределение разности фаз $\varphi_0(x)$, магнитного поля $H(x)$ и сверхтока $j_s(x)$ для джозефсоновского вихря.

Итак, начиная с поля H_{c1} , проникновение джозефсоновских вихрей в переход становится энергетически выгодным. Проникшие вихри образуют линейную цепочку, и контакт переходит в смешанное состояние. Пока — полная аналогия со сверхпроводником второго рода. Но полная ли? Оказывается — нет!

Все дело в том, что джозефсоновский вихрь, в отличие от абрикосовского (см. главу V), не имеет нормальной сердцевины. А второе критическое поле в сверхпроводниках второго рода H_{c2} связано с существованием этой нормальной сердцевины: сверхпроводимость пропадает, когда внешнее поле сжимает вихри настолько, что они начинают соприкасаться своими нормальными сердцевинами. Отсюда понятно, что для джозефсоновского перехода нет второго критического поля, хотя зависимость максимального тока перехода от магнитного поля, как мы вскоре увидим, может быть весьма причудливой.

Найдем теперь первое критическое поле перехода H_{c1} . Для этого надо рассмотреть свободную энергию перехода.

Как мы видели выше, джозефсоновский переход играет роль нелинейной индуктивности, в которой запасается энергия $E_{\text{св}}$ (см. (22.10) – (22.12)). Кроме этой энергии, в переходе еще присутствует магнитная энергия, которая в пересчете на единицу площади перехода будет

$$w_H = \frac{H^2}{8\pi}d. \quad (24.10)$$

Суммируя $E_{\text{св}}$ (в расчете на единицу площади) и w_H и интегрируя вдоль всей длины перехода L (рис. 24.1), получим полную свободную энергию перехода, отнесенную к единице его длины вдоль магнитного поля (вдоль оси z):

$$W = \int_0^L dx \left[\frac{H^2}{8\pi} d + \frac{\hbar}{2e} j_c (1 - \cos \varphi) \right].$$

Подставив сюда выражение для H из (24.5), можно превратить W в функционал относительно функции $\varphi(x)$:

$$W = \int_0^L dx \left[\frac{\Phi_0^2}{32\pi^3 d} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + \frac{\hbar}{2e} j_c (1 - \cos \varphi) \right]. \quad (24.11)$$

Решая вариационную задачу на минимизацию этого функционала, снова приходим к уравнению Феррелла–Прейнджа (24.6).

Используя выражение (24.11), легко найти свободную энергию одиночного джозефсоновского вихря W_0 в бесконечном переходе. Для этого достаточно подставить выражение (24.9) для $\varphi_0(x)$ в (24.11) и проинтегрировать. В результате получим

$$W_0 = \frac{4\Phi_0 j_c}{\pi c} \lambda_J. \quad (24.12)$$

Если на переход наложено внешнее поле H_0 , гиббсовская свободная энергия одного джозефсоновского вихря в переходе будет, согласно (3.15), равна

$$\mathcal{G}_0 = W_0 - \Phi_0 H_0 / 4\pi. \quad (24.13)$$

Из этой формулы видно, что при достаточно слабом внешнем поле $\mathcal{G}_0 > 0$, и существование джозефсоновского вихря внутри перехода энергетически невыгодно. Первое критическое поле H_{c1} — это такое внешнее поле H_0 , при котором \mathcal{G}_0 становится равным нулю и начиная с которого существование вихря в переходе становится энергетически оправданным. Таким образом,

$$H_{c1} = \frac{2}{\pi^2} \frac{\Phi_0}{\lambda_J d}. \quad (24.14)$$

Очевидно, что это поле меньше поля в центре вихря $H(0)$, которое, согласно (24.9) и (24.5), равно

$$H(0) = \frac{\Phi_0}{\pi \lambda_J d}. \quad (24.15)$$

Поле $H(0)$ является полем перегрева мейсснеровского состояния перехода.

24.3. Максимальный бездиссипативный ток джозефсоновского перехода. Сильное магнитное поле. Рассмотрим теперь случай сильных магнитных полей:

$$H_0 \gg \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda_J d}. \quad (24.16)$$

Кроме того, предположим, что размер перехода $L \ll 2\lambda_J$, т. е. мы можем пренебречь собственным магнитным полем сверхтока, текущего через переход, по сравнению с H_0 . Неравенство (24.16) можно интерпретировать как условие того, что цепочка джозефсоновых вихрей в переходе сильно сжата, т. е. расстояние между соседними вихрями много меньше величины λ_J . В этих условиях поле внутри перехода можно считать постоянным и равным внешнему полю H_0 . Тогда из формулы (24.5) следует, что

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{2\pi d}{\Phi_0} H_0,$$

а интегрирование этого выражения дает

$$\varphi(x) = \frac{2\pi d}{\Phi_0} H_0 x + C, \quad (24.17)$$

где C — произвольная постоянная интегрирования. Подставляя (24.17) в джозефсоновское выражение для плотности тока (21.13), получим

$$j_s = j_c \sin \left(\frac{2\pi x}{a} + C \right), \quad (24.18)$$

где введено обозначение

$$a = \Phi_0 / H_0 d. \quad (24.19)$$

Из выражения (24.18) следует, что действительно в рассматриваемом случае в переходе существует плотно сжатая цепочка вихрей. Она схематически изображена на рис. 24.4, а, а распределение туннельного сверхтока — на рис. 24.4, б.

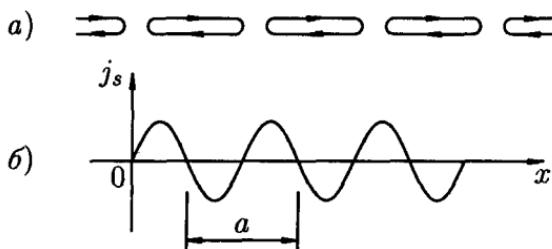


Рис. 24.4. а) Схематическое изображение смешанного состояния джозефсоновского туннельного перехода — плотно сжатая цепочка вихрей; б) распределение туннельного сверхтока через переход, которое при этом возникает.

Полный ток через переход можно найти, проинтегрировав j_s в (24.18) по x вдоль всего перехода:

$$I_s = j_c \int_{-L/2}^{L/2} \sin(2\pi x/a + C) dx.$$

В результате интегрирования имеем

$$I_s = j_c L \frac{\sin(\pi L/a)}{\pi L/a} \sin C. \quad (24.20)$$

Из этой формулы следует, что при заданном магнитном поле изменение полного тока перехода I_s (задаваемого внешним источником) влечет за собой изменение константы C . Она подстраивается под каждое данное значение полного тока. Ясно, что максимальный бездиссипативный полный ток через переход I_{\max} будет равен просто модулю величины, стоящей перед $\sin C$ в формуле (24.20):

$$I_{\max} = I_c \left| \frac{\sin(\pi L/a)}{\pi L/a} \right|, \quad (24.21)$$

где мы обозначили

$$I_c = j_c L.$$

Формуле (24.21) можно придать более удобный вид, если учесть, что, согласно (24.19),

$$\pi L/a = \pi\Phi/\Phi_0, \quad (24.22)$$

где через Φ мы обозначили полный магнитный поток в нашем джозефсоновском переходе:

$$\Phi = H_0 L d.$$

Подставляя (24.22) в формулу (24.21), получим окончательно

$$I_{\max} = I_c \left| \frac{\sin(\pi\Phi/\Phi_0)}{\pi\Phi/\Phi_0} \right|. \quad (24.23)$$

Зависимость I_{\max} от внешнего магнитного поля $H_0 = \Phi/(Ld)$ изображена на рис. 24.5. Из формулы (24.23) и из рисунка следует, что смешанное состояние в переходе совершенно неустойчиво (достаточно ничтожного внешнего тока, чтобы его разрушить), когда в переходе укладывается целое число квантов потока. Наоборот, оно наиболее устойчиво, когда магнитный поток в переходе равен полуцелому числу квантов потока. Формула (24.23) прекрасно подтверждается экспериментом [83] (рис. 24.6).

Задача 24.1. Найти критическое поле проникновения вихря в джозефсонский тунNELНЫЙ переход H_{c1} и поле в центре этого вихря, если переход

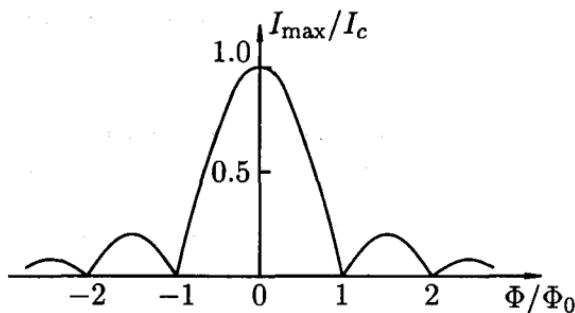


Рис. 24.5. Зависимость максимального бездиссипативного полного тока через джозефсоновский переход от внешнего магнитного поля, параллельного плоскости перехода.

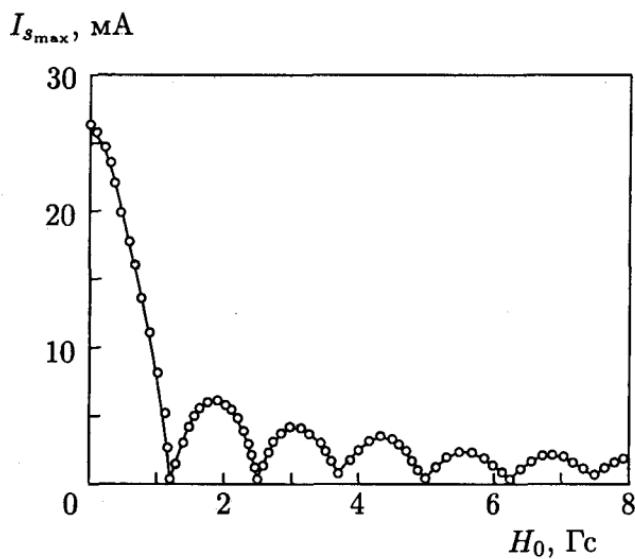


Рис. 24.6. Результаты экспериментального исследования зависимости максимального сверхтока через переход Sn–SnO_x–Sn от магнитного поля [83].

образован двумя свинцовыми пленками. Лондоновская глубина проникновения магнитного поля в свинец $\lambda = 400 \text{ \AA}$, критическая плотность тока перехода равна $j_c = 10 \text{ A/cm}^2$.

Ответ. $H_{c1} = 0.290 \text{ Э}$; $H(0) = 0.455 \text{ Э}$.

Задача 24.2. Пусть длина туннельного перехода, описанного в задаче 24.1, равна $L = 0.2 \text{ мм}$. При каком внешнем поле будут наблюдаться первые два максимума критического тока?

Ответ. Первый максимум будет при поле $H_1 = 1.85 \text{ Э}$, второй — при $H_2 = 3.18 \text{ Э}$.

§ 25. Сверхпроводящие квантовые интерферометры (сквиды)

В этом параграфе мы рассмотрим главные принципы работы так называемых сверхпроводящих квантовых интерферометров — сквидов. Это утвердившееся в русской научной и технической литературе слово возникло от английского сокращения SQUID (Superconducting Quantum Interference Device — сверхпроводящее квантовое интерференционное устройство). Эти чрезвычайно простые по конструкции сверхпроводящие устройства открыли совершенно новые горизонты в технике низкотемпературных измерений. С их помощью можно создать магнетометры с чувствительностью порядка 10^{-11} Гс , вольтметры с чувствительностью порядка 10^{-15} В и другие приборы уникальной чувствительности. Несомненно, что в ближайшие годы сфера применения сквидов будет расширяться.

Итак, что же такое сквид?

Различают два типа сквидов — двухконтактный сквид (сквид на постоянном токе) и одноконтактный (высокочастотный) сквид.

25.1. Двухконтактный сквид. Это устройство представляет собой просто два джозефсоновских перехода, включенных параллельно (рис. 25.1). Включение осуществляется массивными сверхпроводниками, которые вместе с джозефсоновскими переходами a и b образуют замкнутый контур (кольцо). Внутрь этого

кольца введена катушка, создающая магнитный поток. Мы хотим понять, как будет зависеть максимальный бездиссипативный ток I_{\max} через такое устройство от величины полного магнитного потока Φ , заключенного внутри кольца интерферометра. Выделим внутри кольца две пары точек (1, 2) и (3, 4), близких к переходам a и b , и соединим их пунктирным контуром, как показано на рис. 25.1. Проинтегрируем выражение (24.1) для обобщенного импульса куперовской пары от точки 1 до точки 3 и от точки 4 до точки 2. В результате получим¹⁾

$$\theta_3 - \theta_1 + \theta_2 - \theta_4 = \frac{2e}{\hbar} \left(\int_1^3 \mathbf{A} d\mathbf{l} + \int_4^2 \mathbf{A} d\mathbf{l} \right). \quad (25.1)$$

Слагаемое $2mv_s$ при интегрировании опущено, так как все точки пунктирного контура проходят в области сверхпроводника, далекой от края. Там сверхток отсутствует и $v_s = 0$. Поскольку расстояния между точками 1 и 2, так же как и между точками 3 и 4, малы по сравнению с длиной пунктирного контура, а векторный потенциал \mathbf{A} не имеет особенностей около джозефсоновских переходов, можно дополнить правую часть выражения (25.1) еще и интегралом по участкам 3–4 и 2–1. В результате получим

$$\varphi_a - \varphi_b = \frac{2e}{\hbar} \oint \mathbf{A} d\mathbf{l},$$

т. е.

$$\varphi_a - \varphi_b = 2\pi\Phi/\Phi_0, \quad (25.2)$$

где Φ — полный магнитный поток, охватываемый кольцом интерферометра, $\varphi_a = \theta_2 - \theta_1$, $\varphi_b = \theta_4 - \theta_3$, а $\Phi_0 = \pi\hbar/e$ — квант магнитного потока.

Так как согласно (21.1) ток через переход a равен

$$I_a = I_c \sin \varphi_a,$$

¹⁾ В этом параграфе мы будем пользоваться Международной Системой единиц (СИ).

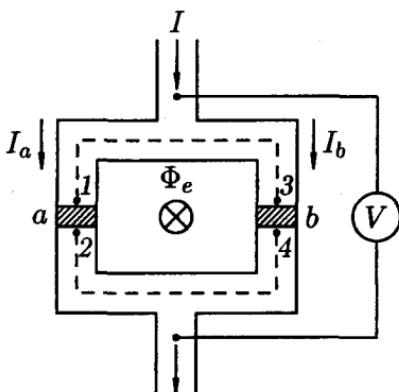


Рис. 25.1. Два джозефсоновских перехода a и b , включенные параллельно — сверхпроводящий интерферометр. В отверстие сквида введен некоторый магнитный поток Φ_e .

а через переход b

$$I_b = I_c \sin \varphi_b$$

(мы предполагаем, что оба перехода одинаковы, с одним и тем же критическим током I_c), полный ток I через интерферометр будет равен сумме токов I_a и I_b :

$$I = I_c (\sin \varphi_a + \sin \varphi_b). \quad (25.3)$$

Учитывая, что $\sin \varphi_a + \sin \varphi_b = 2 \sin[(\varphi_a + \varphi_b)/2] \cos[(\varphi_a - \varphi_b)/2]$, и используя формулу (25.2), преобразуем формулу (25.3) к виду

$$I = 2I_c \cos \frac{\pi \Phi}{\Phi_0} \sin \left(\varphi_b + \frac{\pi \Phi}{\Phi_0} \right). \quad (25.4)$$

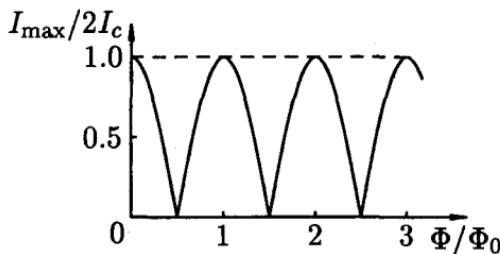


Рис. 25.2. Зависимость максимального тока через двухконтактный интерферометр от полного магнитного потока в его кольце.

При заданном полном магнитном потоке через кольцо интерферометра Φ единственным параметром, который подстраивается под заданный полный ток интерферометра I , является, согласно (25.4), величина φ_0 . Отсюда (как и при выводе формулы (24.21)) следует, что максимальный бездиссипативный ток интерферометра равен

$$I_{\max} = 2I_c |\cos(\pi\Phi/\Phi_0)|. \quad (25.5)$$

Эта зависимость I_{\max} от Φ представлена на рис. 25.2. Видно, что наиболее устойчиво сверхпроводящее состояние кольца по отношению к внешнему току I будет в случаях, когда полный магнитный поток через интерферометр Φ будет равен целому числу квантов потока Φ_0 . Наоборот, случай, когда Φ равно полуцелому числу квантов потока, соответствует неустойчивому сверхпроводящему состоянию: достаточно приложить к интерферометру **ничтожный** ток I , чтобы прибор перешел в резистивное состояние и чтобы вольтметр (см. рис. 25.1) обнаружил напряжение на интерферометре.

Подчеркнем, что Φ — это полный поток в кольце интерферометра. Поток, созданный непосредственно катушкой, введенной в интерферометр, Φ_e , связан с Φ простым соотношением

$$\Phi = \Phi_e - LI_3,$$

где L — индуктивность кольца интерферометра, I_3 — экранирующий ток, текущий по интерферометру. Критический ток интерферометра зависит от Φ_e тоже периодически и тоже с периодом Φ_0 . Эта зависимость показана на рис. 25.3.

Подробный анализ работы двухконтактного сквифа приведен в работе Кларка [84].

Двухконтактный сквид может быть использован как прибор необычайно высокой чувствительности во всех случаях, когда изменение наблюдаемой величины можно преобразовать в изменение магнитного потока. Ограничение чувствительности, определяемое лишь тепловыми шумами джозефсоновских переходов, по теоретическим оценкам может быть порядка нескольких единиц

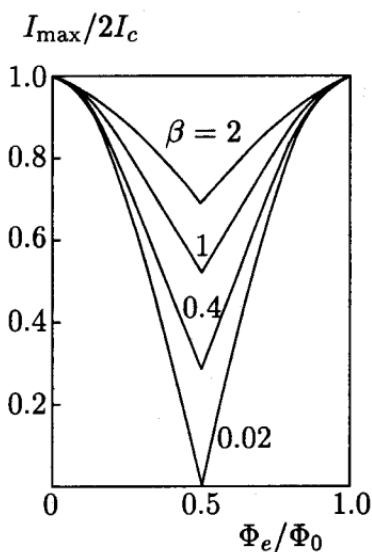


Рис. 25.3. Зависимость критического тока двухконтактного сквида от внешнего потока при разных значениях параметра $\beta = 2LI_c/\Phi_0$ [84].

на $10^{-5} \Phi_0$, если время измерения будет не меньше одной секунды. Это означает, что открывается возможность чувствовать изменения магнитного поля порядка $10^{-10} - 10^{-11}$ Гс. Для сравнения укажем, что магнитное поле Земли имеет величину около 0.5 Гс.

25.2. Одноконтактный сквид. Главным элементом одноконтактного сквида является сверхпроводящее кольцо, замкнутое джозефсоновским переходом. Выделим пару точек (1, 2) вблизи перехода, как показано на рис. 25.4, и соединим их штриховым контуром, все точки которого лежат внутри массивного сверхпроводника и удалены от краев сверхпроводника на расстояния, большие по сравнению с глубиной проникновения λ . Это значит, что в любой точке пунктирного контура сверхток равен нулю, т. е. сверхтекущая скорость v_s отсутствует.

Вернемся теперь снова к выражению для обобщенного им-

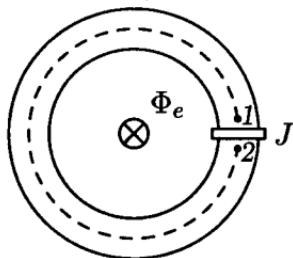


Рис. 25.4. Одноконтактный сквид: сверхпроводящее кольцо, замкнутое джозефсоновским переходом J . Внутрь кольца введена катушка, создающая внешний поток Φ_e .

пульса куперовской пары (24.1) и проинтегрируем его по пунктирному контуру от точки 1 до точки 2. Учитывая, что $v_s = 0$, имеем

$$\hbar(\theta_2 - \theta_1) = 2e \int_1^2 \mathbf{A} d\mathbf{l}. \quad (25.6)$$

Расстояние между точками 1 и 2 через переход значительно меньше расстояния между этими же точками по пунктирному контуру, а векторный потенциал \mathbf{A} никаких особенностей в области J не имеет. Поэтому правая часть формулы (25.6) существенно не изменится, если ее дополнить интегралом $\int_2^1 \mathbf{A} d\mathbf{l}$, проходящим через переход J . Тогда (25.6) можно будет переписать в виде

$$\hbar\varphi = 2e \oint \mathbf{A} d\mathbf{l}, \quad (25.7)$$

где φ — разность фаз на джозефсоновском переходе J . Формула (25.7) легко преобразуется к виду

$$\varphi = 2\pi\Phi/\Phi_0, \quad (25.8)$$

где Φ — полный магнитный поток, охваченный кольцом одноконтактного сквида.

Но полный поток Φ отличается от внешнего потока Φ_e , созданного катушкой в кольце, на величину, которая создается экранирующим током I_3 , текущим по кольцу:

$$\Phi = \Phi_e - LI_3, \quad (25.9)$$

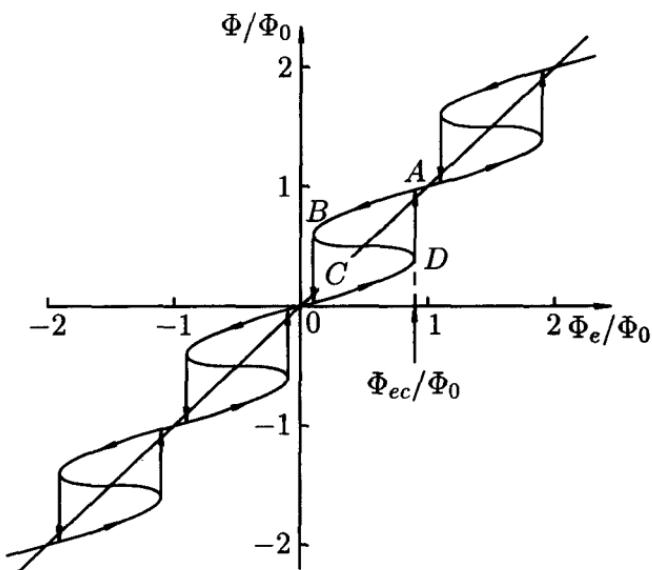


Рис. 25.5. Зависимость полного магнитного потока Φ в кольце одно контактного интерферометра от внешнего потока Φ_e , введенного в это кольцо.

где L — индуктивность кольца. Поскольку этот экранирующий ток проходит по кольцу и по переходу, он связан с разностью фаз волновой функции сверхпроводящих электронов на переходе φ известным соотношением (21.1), которое вместе с (25.8) и (25.9) дает

$$\Phi_e = \Phi + LI_c \sin(2\pi\Phi/\Phi_0). \quad (25.10)$$

Эту формулу можно рассматривать как неявное выражение для зависимости полного потока Φ от внешнего потока Φ_e . Графически эта зависимость изображена на рис. 25.5.

Обсудим теперь физическую сторону дела. Начинаем увеличивать внешний поток Φ_e (т. е. ток в катушке, которая вставлена в кольцо сквида). Немедленно в кольце возникает экранирующий ток I_s , который создает свой собственный поток, частично компенсирующий внешний поток Φ_e . Поэтому полный, результирующий поток Φ будет меньше Φ_e . Почему компенсация только

частичная? Если бы кольцо было сплошным (без слабой связи), компенсация была бы полной и Φ равнялось бы нулю. Это можно представить себе и немного по-другому.

Для задания внешнего потока Φ_e совсем не обязательно вводить катушку с током внутрь кольца интерферометра (это просто практически удобнее). Можно, наоборот, считать, что кольцо внесено во внешнее однородное поле, и тогда Φ_e — это просто произведение магнитной индукции этого внешнего поля на площадь кольца (предполагается, конечно, что плоскость кольца перпендикулярна внешнему магнитному полю). Теперь понятно, что если кольцо сплошное, без слабой связи, то полный поток Φ в нем равен нулю, а наличие слабой связи приводит к появлению такого места в кольце, через которое внешнее магнитное поле частично проникает внутрь кольца. Экранировка оказывается неполной.

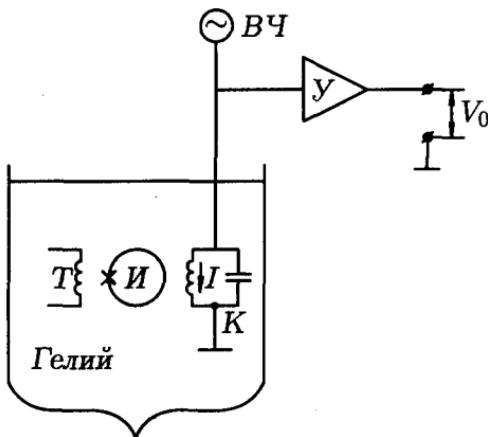


Рис. 25.6. Принципиальная блок-схема ВЧ-сквида. Обозначения: $V\text{Ч}$ — высокочастотный генератор тока (с большим внутренним сопротивлением), Y — усилитель высокой частоты, I — кольцо интерферометра с джозефсоновским переходом, T — вторичная катушка трансформатора потока, K — высокочастотный резонансный контур.

При дальнейшем увеличении внешнего потока Φ_e увеличивается и экранирующий ток. Он достигает критического значения при внешнем потоке Φ_{ec} (рис. 25.5). В этот момент (точка D на рис. 25.5) система становится неустойчивой и скачком пере-

ходит в следующее квантовое состояние (точка A на рис. 25.5). При этом полный магнитный поток кольца оказывается больше внешнего потока, и экранирующий ток изменяет свое направление (т. е. становится намагничивающим). Однако мы видим, что при дальнейшем увеличении Φ_e , когда внешний поток станет равен кванту потока Φ_0 , полный поток тоже станет равен кванту потока, и экранирующий ток исчезнет — ситуация вполне аналогичная случаю, когда $\Phi_e = 0$ (см. рис. 25.5). При дальнейшем увеличении Φ_e с периодичностью Φ_0 все процессы будут повторяться. При уменьшении Φ_e скачки будут происходить из точки B и аналогичных ей точек. Таким образом, циклическое изменение внешнего потока Φ_e может сопровождаться гистерезисным циклом $CDABC$. Площадь этой гистерезисной петли пропорциональна выделившейся в контакте энергии.

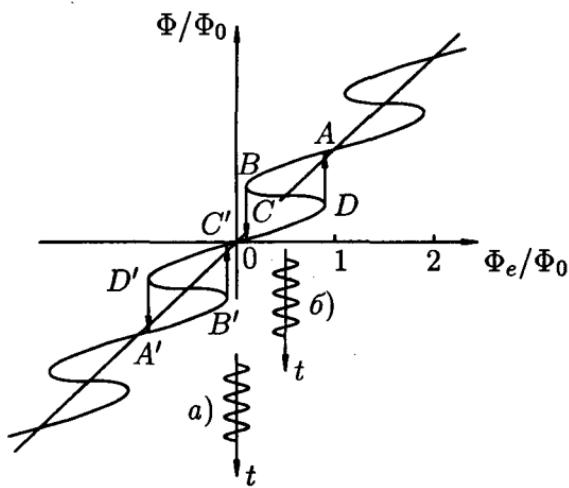


Рис. 25.7. Изменение внешнего потока со временем: а) при нулевом потоке, созданном входной катушкой ($\Phi_T = 0$); б) при $\Phi_T = \Phi_0/2$.

Того, что мы знаем теперь о свойствах сверхпроводящего кольца, замкнутого на джозефсоновский переход, достаточно, чтобы понять, как работает высокочастотный сквид. Его принципиальная блок-схема изображена на рис. 25.6. Высокочастотный генератор с очень большим внутренним сопротивлением (генератор тока) питает током на частоте ν резонансный контур K . (Очень употребительны устройства, в которых $\nu \approx 10 \div 20$ МГц. Однако существуют и значительно более высокочастотные скви-

ды с рабочей частотой в несколько ГГц.) Катушка этого контура индуктивно связана с кольцом интерферометра *И*. Усилитель *У* усиливает ВЧ-напряжение, которое падает на контуре *K*. Это усиленное напряжение V_0 и есть выход прибора. Вход прибора — это катушка *T*, тоже индуктивно связанная с кольцом *И*.

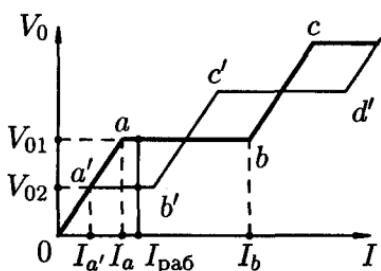
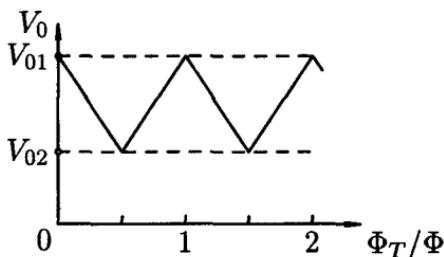


Рис. 25.8. Высокочастотная вольт-амперная характеристика сквида, жирная линия — входной поток $\Phi_T = 0$ (кривая $0abc\dots$), тонкая линия — $\Phi_T = \Phi_0/2$ (кривая $0a'b'c'd'\dots$).

Выясним прежде всего, как зависит выход V_0 от величины тока I через индуктивность контура *K*. Пусть ток входной катушки *T* равен нулю. Тогда внешний поток Φ_e создается только катушкой контура *K* и колеблется с частотой ν . Это показано на рис. 25.7, *a*. Синусоидальное изменение потока Φ_e вызовет соответствующее изменение полного потока Φ (см. рис. 25.7), что приведет в конечном счете к появлению некоторого ВЧ-напряжения V_0 на выходе схемы. Увеличение тока накачки I пропорционально увеличит амплитуду Φ_e и соответственно Φ и V_0 . Таким образом, мы имеем линейную зависимость V_0 от I (начальный участок $0a$ высокочастотной вольт-амперной характеристики, рис. 25.8). Но так будет продолжаться только до тех пор, пока ток контура I не достигнет такой величины, что амплитуда Φ_e станет равной критической величине (см. рис. 25.5). В этот момент произойдет скачок полного потока, на графике зависимости Φ от Φ_e изображающая точка опишет петлю гистерезиса, выделится тепло, пропорциональное площади этой петли, на это потребуется много энергии, которая будет забрана из контура *K*. Амплитуда тока I резко упадет, и в течение сравнительно долгого времени (много периодов ВЧ-колебаний) эта амплитуда будет «дорастать» до своей прежней величины. Увеличение амплитуды тока накачки от ВЧ-генератора теперь не может привести

к увеличению выходного напряжения V_0 , так как все описанные только что процессы будут повторяться. Разница будет лишь в том, что восстановление амплитуды тока контура I будет происходить быстрее, за меньшее число ВЧ-периодов. Это значит, что мы вышли на горизонтальный участок ab вольт-амперной характеристики (рис. 25.8). Наконец, при некотором токе ВЧ-накачки ток контура I достигнет такой величины (I_b), когда за время одного периода ВЧ-генератор восстанавливает энергию контура K , которую этот контур отдал колычу интерферометра для двух гистерезисных циклов $DABC$ и $D'A'B'C'$. Только теперь дальнейшее увеличение амплитуды тока контура I (соответственно — внешнего потока Φ_e) приведет к увеличению полного потока Φ и выходного напряжения V_0 . Это увеличение будет продолжаться до тех пор, пока амплитуда Φ_e не достигнет второго критического значения. Как только это произойдет, вновь возникнут гистерезисные потери и весь описанный выше процесс повторится. На вольт-амперной характеристике появится второе плато.

Рис. 25.9. Зависимость выходного высокочастотного напряжения V_0 от постоянного потока Φ_T , созданного входной катушкой T .



Теперь нам надо рассмотреть случай, когда входная катушка T обтекается током и создает постоянный магнитный поток, равный $\Phi_T = \Phi_0/2$. В этом случае зависимость Φ_e от времени представлена на рис. 25.7, б. Ясно, что критическое значение Φ_{ec} будет теперь достигнуто при значительно меньшем токе контура $I = I_a'$ по сравнению со случаем $\Phi_T = 0$ (в том случае Φ_{ec} достигалось при $I = I_a$, рис. 25.8). Кроме того, теперь и длина первого плато должна быть в два раза меньше, так как теперь генератор должен восстановить энергию контура, ушедшую только на один гистерезисный цикл. Однако последующие плато на вольт-ампер-

ной характеристике вновь будут длинные, так как вновь нужно будет восстанавливать энергию пары гистерезисных циклов.

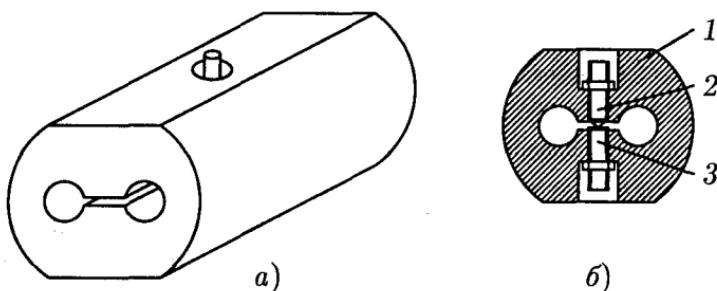


Рис. 25.10. Одноконтактный сквид конструкции Циммермана: а) общий вид; б) разрез по центральной плоскости: 1 — ниобиевый корпус, 2 — заостренный ниобиевый винт, 3 — ниобиевый винт.

Переходим теперь к завершающему этапу анализа работы высокочастотного сквигда. Дадим прибору некоторый высокочастотный ток накачки так, чтобы рабочая точка по току соответствовала величине $I_{\text{раб}}$ (см. рис. 25.8). Если $\Phi_T = 0$, на выходе будет напряжение V_{01} , если $\Phi_T = \Phi_0/2$ — выходное напряжение будет V_{02} . А как будет меняться напряжение V_0 , если мы будем менять входной поток Φ_T от 0 до $\Phi_0/2$? Нетрудно сообразить, что мы будем иметь плавное уменьшение V_0 от V_{01} до V_{02} . Но если $\Phi_T = \Phi_0$, то, согласно рис. 25.7, должна возникнуть ситуация, полностью аналогичная случаю $\Phi_T = 0$, и выход будет снова равен V_{01} . В результате мы приходим к так называемой «треугольной» зависимости выходного напряжения V_0 от входного потока Φ_T (рис. 25.9). Из этого графика следует, что наша схема чувствует изменения измеряемого потока Φ_T с чувствительностью, много лучшей одного кванта потока. Теоретический анализ чувствительности современных ВЧ-сквидов показал, что возможно создание приборов с чувствительностью порядка $10^{-5}\Phi_0$ при времени измерения не меньше одной секунды.

Наиболее практически удобным (и наиболее распространенным) оказался одноконтактный сквид конструкции Циммермана

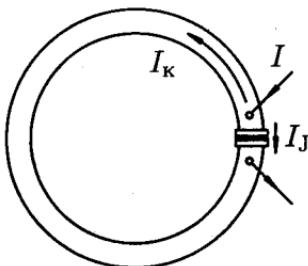


Рис. 25.11. К задаче 25.2. Внешний источник тока задает полный ток I , часть которого I_K идет по кольцу, а часть I_J — через джозефсоновский переход.

(рис. 25.10). Джозефсоновский переход в нем выполнен в виде точечного прижимного контакта. Приемная катушка T и катушка индуктивности контура K (см. рис. 25.6) вводятся в два отверстия сквида.

Задача 25.1. Индуктивность кольца одноконтактного интерферометра равна $2 \cdot 10^{-9}$ Гн. До какой величины нужно уменьшить критический ток перехода, чтобы зависимость Φ от Φ_e стала безгистерезисной?

Ответ. Если критический ток перехода меньше величины $\Phi_0/(2\pi L) = 0.165$ мкА, зависимость Φ от Φ_e будет безгистерезисной.

Задача 25.2. Джозефсоновский SNS -переход с критическим током $I_c = 1$ мкА замыкает сверхпроводящее кольцо с индуктивностью $L = 10^{-9}$ Гн. Внешний источник задает полный ток, часть которого ($I_K = 0.4$ мкА) течет по кольцу, а часть (I_J) — через джозефсоновский переход (рис. 25.11). Найти полный ток I .

Решение. Разность фаз на переходе φ определяет величину тока по кольцу: $\varphi = 2\pi LI_K/\Phi_0$, а ток через переход равен $I_J = I_c \sin \varphi$. Полный ток $I = 1.34$ мкА.

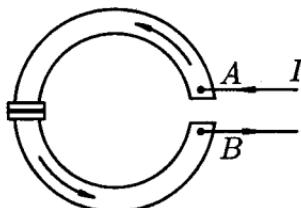


Рис. 25.12. К задаче 25.3.

Задача 25.3. Сверхпроводящее кольцо, индуктивность которого $L = 10^{-9}$ Гн, замкнуто на джозефсоновский SNS -переход с критическим током $I_c = 1$ мкА. На противоположной стороне кольца (см. рис. 25.12) сделан разрез, к которому подключен источник тока, создающий в кольце ток $I = 0.4$ мкА. Чему равна разность фаз волновой функции φ_{AB} между точками A и B ? Построить график зависимости тока от разности фаз φ_{AB} .

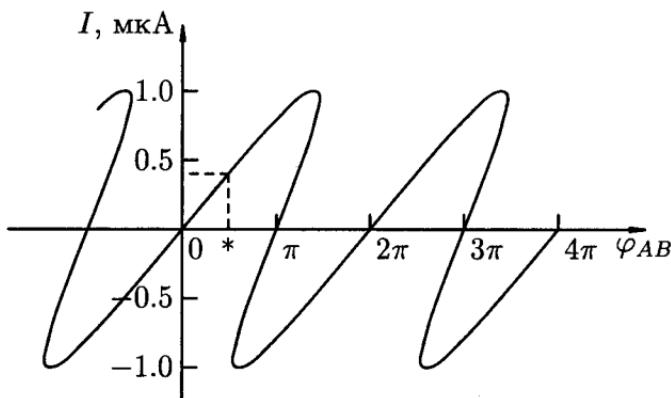


Рис. 25.13. Ответ к задаче 25.3. Зависимость тока от разности фаз точек A и B . Звездочкой отмечена искомая разность фаз $\varphi_{AB} = 1.60$ рад.

Ответ. $\varphi_{AB} = 1.60$ рад, см. рис. 25.13.

§ 26. Применения слабой сверхпроводимости

Рассмотренное в этой главе удивительно красивое физическое явление — слабая сверхпроводимость — нашло множество способов практического использования. Рассмотрим некоторые из них.

Мы уже знаем, что если через джозефсоновский переход пропускать ток, больший критического, напряжение на переходе будет иметь переменную составляющую. Частота этой составляющей будет определяться соотношением (22.8). Нетрудно сообразить, что если теперь переход поместить во внешнее высокочастотное поле, то если частота этого поля совпадает с частотой джозефсоновской генерации, должен возникнуть какой-то резонанс. И действительно, в этом случае вольт-амперная характеристика для усредненных значений тока и напряжения будет иметь вид ступенчатой кривой (рис. 26.1), а расстояния между ступеньками в точности равны $\hbar\omega/2e$. Поскольку измерение частоты может быть произведено с очень высокой точностью, а величины \hbar и e являются мировыми постоянными, расстояние между ступеньками тока на вольт-амперной характеристике может быть

очень точно определено. Это и есть принцип создания единицы электрического напряжения — вольта.

До открытия эффекта Джозефсона и квантового эффекта Холла стандарт частоты (стандарт времени), основанный на квантовомеханических переходах атомов газов, был единственным фундаментально точным стандартом. Эффекты с кулоновской блокадой в сверхмалых сверхпроводящих туннельных переходах (см. п. 23.2) позволяют связать частоту с электрическим током через величину заряда электрона. Создание на этой основе фундаментального эталона электрического тока вместе с калибровкой Ома с помощью квантового эффекта Холла позволяет замкнуть «метрологический треугольник» Вольт – Ампер – Ом и создать совершенную систему электрических стандартов.

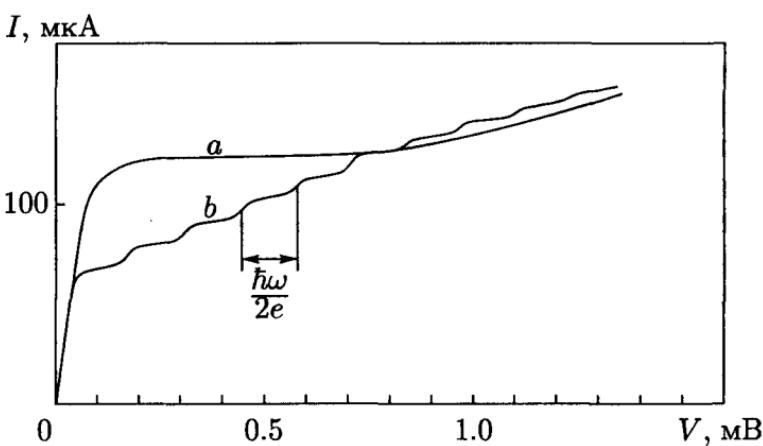


Рис. 26.1. Вольт-амперная характеристика джозефсоновского перехода: *a*) без внешнего высокочастотного электромагнитного поля; *b*) высокочастотное поле включено. Начальный участок вольт-амперной характеристики не совпадает с осью ординат, потому что на самописец подавалось напряжение с джозефсоновского перехода и включенного с ним последовательно участка нормальной пленки [85].

Сверхпроводящие квантовые интерферометры (сквиды) используются прежде всего как магнетометры. Им доступны для

регистрации изменения магнитного поля порядка 10^{-11} Гс при ширине полосы пропускания устройства, равной 1 Гц. Ведется разработка цифровых сквид-магнитометров и сверхмалошумящих сквид-усилителей с шумовой температурой 1.5 К на частоте 750 МГц. Ясно, что использование столь чувствительных приборов открывает совершенно новые возможности в разных областях науки: геологии, геофизике, биофизике и др. Так, например, в последние годы начались исследования магнитных полей сердца и мозга человека — так называемых магнитокардиограмм и магнитоэнцефалограмм. Кардиоэнцефалограммы позволяют исследовать магнитограммы сердца и мозга человека и даже его плода в процессе развития (исследование плода совершенно недоступно электрокардиографии). На очереди создание магнитотомографии, использующей компьютерную обработку сигналов многочисленных датчиков, закрепленных на различных частях тела и фиксирующих биомагнитные поля человека. Магнитотомография способна предоставлять информацию не только о состоянии органов, но и о процессах их жизнедеятельности. Другим примером устройства для визуализации распределения магнитных полей, создаваемых различными физическими и биологическими объектами, является сканирующий сквид-микроскоп с разрешением по магнитной индукции лучше 0.1 Гс и пространственным разрешением лучше 100 мкм.

Использование сквида в качестве нуль-прибора в обычной мостиковой схеме позволяет создать вольтметр с чувствительностью около 10^{-15} В. Такие приборы уже используются в физических лабораториях. Уже сейчас джозефсоновские элементы используются в различного рода СВЧ-приборах для приема и преобразования электромагнитного излучения в микроволновом диапазоне. Криоэлектронные генераторы и приемники излучения миллиметрового и субмиллиметрового диапазона волн, основанные на сверхпроводящих джозефсоновских переходах, необходимы для радиоастрономических исследований и мониторинга окружающей среды, осуществляемых с борта спутников или специальных самолетов. В этом случае вес, размеры и тепловыделение бортовых систем играют решающую

роль, а создание низких температур не составляет проблем. Эти устройства, использующие движение квантов магнитного потока, обладают лучшими шумовыми характеристиками в диапазоне $100 \div 1000$ ГГц. Уровень шумов (шумовая температура) в современных сверхпроводящих тунNELьных приемниках близок к фундаментальному квантовому пределу и составляет около 600 К на частоте 500 ГГц. В частности, существует опыт использования джозефсоновского перехода в качестве чувствительного элемента в радиотелескопе.

Укажем, наконец, на возможность использования джозефсоновских переходов в качестве элементов памяти и логических элементов в электронных вычислительных устройствах и современных телекоммуникационных системах. Их применение открывает путь не только к очередному шагу в миниатюризации электронных элементов, но и к совершенно новым принципам обработки и передачи данных. Информационные технологии в настоящее время встречаются со множеством серьезных проблем, главными из которых являются увеличение интеграции и плотности размещения элементов без ухудшения характеристик, понижение энергопотребления (энерговыделения), обеспечение простых архитектурных решений. Концепции схемного конструирования, используемые в традиционной полупроводниковой технологии, не могут бесконечно воспроизводиться во все меньших масштабах, и использование принципиально новых подходов становится неизбежным. Использование *Быстрой Одноквантовой Логики* (БОК, или в английской транскрипции RSFQ — rapid single flux quantum), основанной на сверхпроводящих контурах, включающих джозефсоновские переходы, позволяет вести обработку сигналов с рекордными тактовыми частотами, превышающими 100 ГГц, при экстремально низком уровне диссипации энергии. Единицей информации, переносимой при каждом переключении, является квант магнитного потока, и, таким образом, БОК-элемент является одновременно и логическим элементом, и элементом памяти. В области телекоммуникационной техники использование криоэлектронных генераторов и приемников, базирующихся на слабосвязанных сверхпроводниковых (джозеф-

соновских) структурах, позволит достичнуть предельно низких уровней шума и энергопотребления при рабочих частотах в тегерцовом (10^{12} Гц) диапазоне.

Длинномасштабная квантовая когерентность, демонстрируемая сверхпроводниками устройствами (см. п. 23.3), открывает качественно новые направления в разработке квантовых логических элементов для будущих поколений суперкомпьютеров. На основе двумерных сеток джозефсоновских переходов может быть создан также новый тип компьютерной памяти, строящийся не на основе традиционной бинарной логики, а использующий ассоциативную, распределенную по всей структуре, систему памяти (по типу нейронных сетей живых организмов). Такая структура будет способна сравнивать поступающее воздействие с наиболее близким аналогом из набора собственных состояний системы, т. е. распознавать образы и принимать оперативные решения без перебора вариантов, например, осуществлять экономическое прогнозирование в реальном времени. Прогресс в области технологий высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП) позволяет надеяться на скорое появление более дешевых и простых в эксплуатации ВТСП-систем. Несомненно, что практическое использование слабой сверхпроводимости будет в ближайшие годы расширяться и вряд ли сейчас можно предсказать, какие удивительные результаты от этого последуют.

ГЛАВА V

СВЕРХПРОВОДНИКИ ВТОРОГО РОДА

§ 27. Введение

Впервые термин «сверхпроводник второго рода» был введен А. А. Абрикосовым [86] в его классической работе (1957), в которой на базе теории ГЛ была дана последовательная феноменологическая теория сверхпроводников второго рода и объяснены их магнитные свойства. Развитие физики сверхпроводников в последующие годы блестяще подтвердило теоретические предсказания.

Здесь мы сталкиваемся со случаем, когда развитие очень мощного направления в физике сверхпроводников было предопределено теоретической работой. Больше того, сначала эта работа была встречена с некоторым недоверием, настолько необычны были ее предсказания. Только через несколько лет, когда оказалось, что сложное поведение в магнитном поле сверхпроводящих сплавов и химических соединений можно объяснить с единой точки зрения, когда получили объяснение огромные критические поля некоторых сплавов и соединений, теория Абрикосова получила всеобщее признание.

Мы уже знаем, что у сверхпроводников второго рода энергия границы раздела между нормальной и сверхпроводящей фазами $\sigma_{ns} < 0$. Это значит, что при определенных условиях им энергетически выгодно расслоиться в магнитном поле на обла-

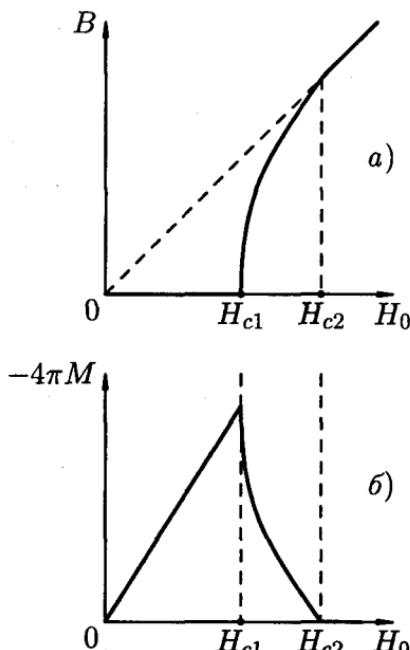


Рис. 27.1. Кривые намагничивания сверхпроводника второго рода: а) зависимость магнитной индукции B от внешнего поля H_0 ; б) зависимость плотности магнитного момента M от H_0 .

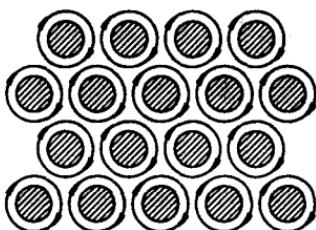
сти нормальной и сверхпроводящей фаз.

Действительно, кривая намагничивания длинного цилиндра из сверхпроводника второго рода в параллельном поле имеет вид, изображенный на рис. 27.1. Пока внешнее поле $H_0 < H_{c1}$, среднее поле внутри образца $B = 0$. Однако при $H_{c1} < H_0 < H_{c2}$ внутри сверхпроводника появляется магнитное поле B , но оно меньше поля H_0 , и сверхпроводимость все еще существует. При поле $H_0 = H_{c2}$ среднее поле B становится равным H_0 и сверхпроводимость в объеме пропадает. Таким образом, у сверхпроводников второго рода отсутствует эффект Мейсснера – Оксенфельда.

Проникновение магнитного поля в сверхпроводник второго рода происходит весьма своеобразно — в виде квантованных вихревых нитей. Каждая такая нить (или вихрь) имеет нормальную сердцевину, которая представляет собой длинный тонкий нормальный цилиндр, вытянутый вдоль направления внешнего магнитного поля. Параметр порядка ψ в нем равен нулю. Радиус этого цилиндра — порядка длины когерентности ξ . Вокруг

этого нормального цилиндра течет незатухающий сверхпроводящий ток (сверхток), ориентированный так, чтобы создаваемое им магнитное поле было направлено вдоль нормальной сердцевины и совпадало по направлению с внешним магнитным полем. Вихревой ток захватывает область радиуса порядка λ — глубины проникновения. Это может быть область, существенно превышающая размер ξ , т. к. у сверхпроводников второго рода может быть $\lambda \gg \xi$.

Рис. 27.2. Смешанное состояние сверхпроводника второго рода. Сверхпроводящие вихри образуют правильную треугольную решетку. Сердцевины вихрей нормальны (заштрихованы).



Один вихрь несет один квант магнитного потока. Проникновение вихрей в сверхпроводник становится энергетически выгодным при $H_0 > H_{c1}$. При этом вихри, проникнув в сверхпроводник, располагаются друг от друга на расстоянии порядка λ , образуя в поперечном сечении правильную треугольную решетку (рис. 27.2).

Возникает смешанное состояние, т. е. состояние, которое можно охарактеризовать частичным проникновением магнитного поля в образец. При этом в образце существуют вихревые нити. Это состояние наблюдается в интервале полей от H_{c1} (первое критическое поле) до H_{c2} (второе критическое поле).

Возникнув при поле H_{c1} , вихревая решетка продолжает существовать и в более сильных полях H_0 . При этом ее период уменьшается, плотность вихрей увеличивается. Наконец, при поле H_{c2} их плотность становится так велика, что расстояние между ближайшими вихрями, т. е. период решетки, становится порядка ξ . Это значит, что вихри соприкасаются своими нормальными сердцевинами и параметр порядка ψ обращается в нуль по всему объему образца. Происходит фазовый переход второго рода в нормальное состояние.

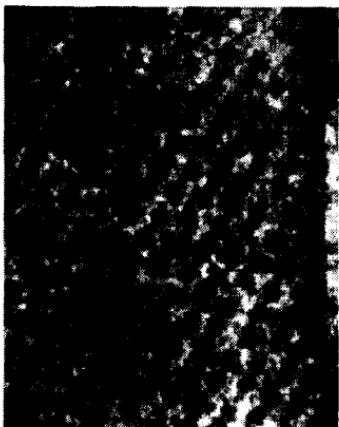


Рис. 27.3. Картина смешанного состояния ниобия, полученная с помощью электронного микроскопа [87].

Существование смешанного состояния в сверхпроводниках второго рода было надежно подтверждено экспериментально. Кроме различных косвенных подтверждений, существуют блестящие прямые эксперименты, поставленные немецкими физиками Эссманом и Тройблом [87]. Они нанесли тонкую органическую пленку на торцевую поверхность сверхпроводящего цилиндра из сверхпроводника второго рода и перевели его в смешанное состояние, наложив магнитное поле. Затем они напылили на торцевую поверхность тонкий слой ферромагнитного порошка. Частицы порошка оседали на поверхность более густо в местах выхода магнитных силовых линий, т. е. в центрах вихрей. Отделив затем органическую пленку от сверхпроводника и поместив ее в электронный микроскоп, они получили возможность любоваться картиной смешанного состояния в сверхпроводнике второго рода (рис. 27.3).

§ 28. Поле одиночного вихря

Переходим к систематическому изучению смешанного состояния. Начнем с наиболее простой задачи — рассмотрим одиночный вихрь.

Итак, одиночный вихрь, помещенный в безграничный сверхпроводник, представляет собой нормальную сердцевину радиуса

порядка ξ и область вихревых токов, простирающуюся на расстояние порядка λ .

Пусть постоянная теории ГЛ $\kappa \gg 1$. Значит, $\lambda \gg \xi$. На расстоянии $r \gg \xi$ имеем $|\psi|^2 = 1$. Будем заниматься именно этой частью вихря.

Уравнение ГЛ для вектора-потенциала (14.18) можно (учитывая, что $|\psi|^2 = 1$) записать в виде

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla \theta - \mathbf{A} \right). \quad (28.1)$$

Учитывая, что $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{H}$, получим из (28.1)

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla \theta - \mathbf{A} \right). \quad (28.2)$$

Взяв ротор от обеих частей этого уравнения, получим

$$\mathbf{H} + \lambda^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\Phi_0}{2\pi} \operatorname{rot} \nabla \theta. \quad (28.3)$$

В любой точке вихря, кроме его центра, $\operatorname{rot} \nabla \theta = 0$, т. к. ротор от градиента любой функции равен нулю. Но в центре вихря находится особая точка. Там $|\nabla \theta| \rightarrow \infty$. Чтобы понять, что такое $\operatorname{rot} \nabla \theta$ в центре вихря, возьмем интеграл от этого выражения по поверхности круга некоторого небольшого радиуса с центром в центре вихря:

$$\int_{\odot} \operatorname{rot} \nabla \theta dS.$$

По теореме Стокса

$$\int_{\odot} \operatorname{rot} \nabla \theta dS = \oint \nabla \theta dl,$$

где контурный интеграл берется по контуру нашего круга. Поскольку при обходе вокруг центра вихря фаза изменяется на 2π

(каждый вихрь несет один квант магнитного потока), имеем равенство

$$\int_{\odot} \operatorname{rot} \nabla \theta dS = 2\pi. \quad (28.4)$$

Итак, $\operatorname{rot} \nabla \theta$ — это такая функция, которая всюду, кроме центра вихря, равна нулю. В центре вихря она равна бесконечности, но ее интеграл, согласно (28.4), равен 2π . Это полностью аналогично поведению δ -функции, и мы можем записать следующее равенство:

$$\operatorname{rot} \nabla \theta = 2\pi \delta(\mathbf{r}) \mathbf{e}_v,$$

где \mathbf{e}_v — единичный вектор, направленный вдоль вихря.

В результате вместо (28.3) мы имеем следующее уравнение:

$$\mathbf{H} + \lambda^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \Phi_0 \delta(\mathbf{r}) \mathbf{e}_v. \quad (28.5)$$

Границное условие для этого уравнения: $H(\infty) = 0$. Решение этого уравнения:

$$H = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} K_0(r/\lambda), \quad (28.6)$$

где K_0 — функция Макдональда, или функция Ганкеля от минимого аргумента.

Напомним асимптотическое поведение этой функции:

$$K_0(z) \propto \begin{cases} \ln(1/z) & \text{при } z \ll 1, \\ e^{-z}/z^{1/2} & \text{при } z \gg 1. \end{cases} \quad (28.7)$$

Таким образом, функция K_0 логарифмически расходится при малых значениях аргумента и экспоненциально стремится к нулю при больших. Из формул (28.6) и (28.7) следует, что в центре вихря магнитное поле стремится к бесконечности. В действительности, однако, это не так, поскольку эти формулы уже не справедливы вблизи нормальной сердцевины вихря (радиуса порядка ξ). Поэтому поле вихря в его центре можно получить

с логарифмической точностью, обрезав логарифмическую расходимость формулы (28.6) на радиусе $r = \xi$:

$$H(0) \simeq \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \ln \varkappa. \quad (28.8)$$

Более точно, учитывая изменение $\psi(r)$ в области сердцевины вихря, величину $H(0)$ можно получить, численно проинтегрировав уравнения ГЛ [88]:

$$H(0) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} (\ln \varkappa - 0.28). \quad (28.9)$$

Поправка малосущественна, так как вообще весь расчет ведется в предложении, что $\varkappa \gg 1$.

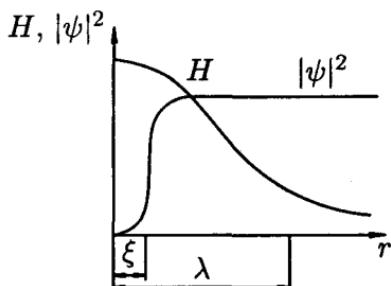


Рис. 28.1. Одиночный вихрь в бесконечном сверхпроводнике. Распределение параметра порядка и создаваемого вихрем магнитного поля.

Графически пространственное изменение поля одиночного вихря изображено на рис. 28.1.

§ 29. Первое критическое поле

Найдем первое критическое поле H_{c1} , т. е. то внешнее поле, при котором впервые становится энергетически выгодным существование вихря внутри сверхпроводника второго рода (иногда его называют также нижним критическим полем).

Для этого надо сперва найти свободную энергию вихря, точнее — свободную энергию сверхпроводника с вихрем ϵ_1 , отсчитанную от свободной энергии сверхпроводника без вихря. Будет рассматриваться случай $\varkappa \gg 1$, т. е. $\lambda \gg \xi$. Это — типично лондоновский случай, когда поправки за счет $\nabla\psi$ несущественны и

поэтому можно воспользоваться лондоновским выражением для свободной энергии (5.8):

$$\epsilon_1 = \frac{1}{8\pi} \int [\mathbf{H}^2 + \lambda^2(\operatorname{rot} \mathbf{H})^2] dV, \quad (29.1)$$

где интеграл берется по пространству между двумя бесконечными параллельными плоскостями, перпендикулярными вихревой нити и отстоящими на единичное расстояние друг от друга. Выражение (29.1) — это просто сумма магнитной и кинетической энергий сверхпроводящих электронов вихря на единицу его длины. Воспользовавшись формулой

$$(\operatorname{rot} \mathbf{H})^2 = \mathbf{H} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \operatorname{div}[\operatorname{rot} \mathbf{H}, \mathbf{H}],$$

имеем

$$\epsilon_1 = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{H}(\mathbf{H} + \lambda^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H}) dV - \lambda^2 \int \operatorname{div}[\operatorname{rot} \mathbf{H}, \mathbf{H}] dV.$$

Воспользовавшись теоремой Гаусса, преобразуем второй интеграл в поверхностный:

$$\int \operatorname{div}[\operatorname{rot} \mathbf{H}, \mathbf{H}] dV = \oint [\operatorname{rot} \mathbf{H}, \mathbf{H}] dS,$$

где поверхностный интеграл берется по бесконечно удаленной поверхности и по плоскостям $z = 0$ и $z = 1$ (предполагается, что вихрь направлен вдоль оси z). Поскольку вектор \mathbf{H} перпендикулярен плоскостям $z = 0$ и $z = 1$, то вектор $[\operatorname{rot} \mathbf{H}, \mathbf{H}]$ лежит в плоскостях $z = 0$ и $z = 1$, а вектор dS им перпендикулярен, поэтому подынтегральное выражение на этих плоскостях равно нулю. С другой стороны, $H \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, поэтому подынтегральное выражение равно нулю и на бесконечно удаленной поверхности. Поэтому

$$\int \operatorname{div}[\operatorname{rot} \mathbf{H}, \mathbf{H}] dV = 0$$

и

$$\epsilon_1 = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{H}(\mathbf{H} + \lambda^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H}) dV.$$

Учитывая, что \mathbf{H} должно удовлетворять уравнению (28.5), имеем

$$\epsilon_1 = \frac{\Phi_0}{8\pi} H(0). \quad (29.2)$$

Подставив сюда (28.8), получим

$$\epsilon_1 = \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \ln \varkappa. \quad (29.3)$$

При выводе этой формулы мы не учли дополнительный малый вклад в энергию вихря, который возникает за счет того, что сердцевина вихря нормальная. Действительно, плотность свободной энергии сердцевины больше плотности энергии окружающей ее среды на величину $F_n - F_{s0} = H_{cm}^2/8\pi$, т. е. на величину энергии конденсации. Поэтому дополнительная, неучтенная в формуле (29.3) энергия равна $(H_{cm}^2/8\pi)\pi\xi^2$, если радиус нормальной сердцевины вихря принять равным ξ . Используя формулу (15.8), нетрудно показать, что эта энергия равна

$$\frac{1}{4} \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \ll \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \ln \varkappa.$$

Более точный учет вклада от энергии конденсации нормальной сердцевины дает следующую окончательную формулу для энергии вихревой нити [88, 89]:

$$\epsilon_1 = \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 (\ln \varkappa + 0.50). \quad (29.3')$$

Итак, из последней формулы следует, что энергия одиночного вихря положительна, т. е. без внешнего поля вихрю энергетически невыгодно оставаться внутри сверхпроводника. Следовательно, если на массивный сверхпроводник второго рода наложить слабое магнитное поле, вихри еще не образуются — невыгодно. Будет обычное мейсснеровское состояние, как и в сверхпроводнике первого рода. Найдем, при каком же поле станет впервые выгодным образование вихрей в сверхпроводнике второго рода.

Мы уже знаем, что для сверхпроводника в заданном внешнем магнитном поле в состоянии равновесия минимальной будет гибсовская свободная энергия \mathcal{G} , которая для единицы длины вихря будет равна

$$\mathcal{G} = \epsilon_1 - \int \frac{\mathbf{B}\mathbf{H}_0}{4\pi} dV, \quad (29.4)$$

где \mathbf{H}_0 — внешнее магнитное поле, а свободная энергия единицы длины вихря равна ϵ_1 .

Действительно, согласно (3.15), плотность гибсовской свободной энергии равна

$$G = F - \mathbf{B}\mathbf{H}_0/4\pi,$$

где F — плотность свободной энергии. Поскольку \mathbf{H}_0 — это внешнее магнитное поле, его можно вынести за знак интеграла в (29.4). Тогда в силу того, что вихрь несет один квант магнитного потока Φ_0 , имеем

$$\mathcal{G} = \epsilon_1 - \Phi_0 H_0 / 4\pi. \quad (29.5)$$

Из этой формулы ясно видно, что для достаточно слабого внешнего поля H_0 имеем $\mathcal{G} > 0$ и образование вихря энергетически невыгодно. Но существует такое поле H_{c1} , начиная с которого \mathcal{G} становится отрицательным, т. е. вихрь становится энергетически выгодным образованием. Из (29.5) следует, что

$$H_{c1} = 4\pi\epsilon_1/\Phi_0. \quad (29.6)$$

Воспользовавшись формулой (29.3'), получим первое критическое поле сверхпроводника второго рода:

$$H_{c1} = \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2} (\ln \kappa + 0.50). \quad (29.7)$$

Сравнивая формулы (29.7) и (28.8), видим, что первое критическое поле примерно в 2 раза меньше поля в центре одиночного

вихря. Учитывая соотношение (15.5) для $\lambda(T)$ вблизи T_c , получаем, что первое критическое поле линейно убывает при $T \rightarrow T_c$,

$$H_{c1}(T \rightarrow T_c) \sim H_{c1}(0)(T_c - T). \quad (29.8)$$

Подчеркнем еще раз, что эти оценки справедливы для сверхпроводников с $\kappa \gg 1$ и имеют логарифмическую точность.

Поле H_{c1} — сравнительно слабое поле. Действительно, пусть $\kappa \sim 100$, $H_{cm} \sim 10^3 \text{ Э}$, тогда $H_{c1} \sim 30 \text{ Э}$.

§ 30. Взаимодействие вихрей

В предыдущем параграфе были рассмотрены свойства одиночного вихря. Но в смешанном состоянии их много и они сильно друг с другом взаимодействуют. Наша задача — понять, как они взаимодействуют.

Для этого рассмотрим пару параллельных вихрей одного направления в безграничном сверхпроводнике. Пусть, как и раньше, $\kappa \gg 1$. Пока расстояние между ними больше λ , они не «чувствуют» друг друга. Но вот расстояние сократилось до величины, меньшей λ . Тогда сердцевина первого вихря оказывается в области сверхтоков другого вихря и наоборот. Эта ситуация изображена на рис. 30.1. Из этого рисунка видно, что скорости сверхтекучей компоненты электронной жидкости справа от первого вихря и слева от второго складываются, а между вихрями — вычитаются. Это значит, что в области, непосредственно примыкающей к сердцевине первого вихря (справа от нее), давление по закону Бернулли меньше, чем слева от сердцевины. Следовательно, на сердцевину первого вихря действует разность бернульиевских давлений слева направо. Проведя аналогичное рассмотрение для второго вихря, увидим, что одноименные параллельные вихри отталкиваются. При этом сила взаимодействия оказывается приложенной только к нормальной сердцевине.

Приведем теперь расчет силы взаимодействия двух вихрей. Пусть координаты сердцевин вихрей 1 и 2 будут соответственно r_1 и r_2 . Согласно (5.8), энергия системы двух вихрей в сверхпроводнике, отсчитанная от энергии этого же сверхпроводника

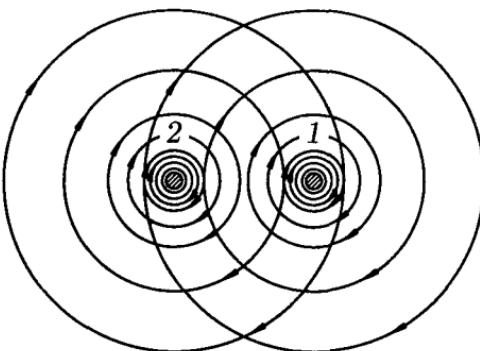


Рис. 30.1. Взаимодействие параллельных одноименных вихрей.

без вихрей, равна

$$\mathcal{F} = \frac{1}{8\pi} \int [\mathbf{H}^2 + \lambda^2(\operatorname{rot} \mathbf{H})^2] dV. \quad (30.1)$$

Здесь \mathbf{H} — полное магнитное поле, созданное системой двух вихрей. Это поле должно удовлетворять уравнению, которое для системы двух вихрей (по аналогии с уравнением (28.5)) будет

$$\mathbf{H} + \lambda^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \Phi_0[\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)]\mathbf{e}_v.$$

Проведя в точности все преобразования предыдущего параграфа, которые были проделаны при выводе энергии одиночного вихря, получим из (30.1) следующее выражение:

$$\mathcal{F} = \frac{\Phi_0}{8\pi}(H(\mathbf{r}_1) + H(\mathbf{r}_2)). \quad (30.2)$$

Поле $H(\mathbf{r}_1)$ — это поле в центре первого вихря. Оно состоит из поля, созданного в этом центре самим первым вихрем, и из поля $H_{12}(x)$, созданного там вторым вихрем, отстоящим от первого на расстояние $x = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$. То же можно сказать и о поле $H(\mathbf{r}_2)$.

Тогда из (30.2) следует, что

$$\mathcal{F} = 2\epsilon_1 + \frac{\Phi_0}{8\pi} 2H_{12}(x), \quad (30.3)$$

где ϵ_1 — энергия одиночного вихря, определяемая формулой (29.3').

Смысъл формулы (30.3) очевиден: первое слагаемое — энергия двух невзаимодействующих вихрей, второе слагаемое — энергия их взаимодействия. Обозначим ее через $U(x)$:

$$U(x) = \frac{\Phi_0 H_{12}(x)}{4\pi} = \frac{\Phi_0^2}{8\pi^2 \lambda^2} K_0\left(\frac{x}{\lambda}\right) \quad (30.4)$$

(мы использовали формулу (28.6)).

Сила взаимодействия двух вихрей, приходящаяся на единицу их длины, очевидно, равна

$$f = -\frac{dU}{dx} = -\frac{\Phi_0}{4\pi} \frac{dH_{12}}{dx}.$$

Учитывая, что для двух параллельных вихрей, согласно уравнениям Максвелла,

$$\frac{dH_{12}}{dx} = \frac{4\pi}{c} j_{12}(x),$$

где $j_{12}(x)$ — плотность тока, наведенного первым вихрем в точке, где находится сердцевина второго вихря (или наоборот), имеем

$$|f| = \frac{1}{c} j_{12} \Phi_0. \quad (30.5)$$

Эта формула справедлива и в значительно более общем случае: если вихрь обтекается каким-то сторонним током j , то на единицу длины его сердцевины действует сила (ее часто называют «силой Лоренца»)

$$\mathbf{f}_L = \frac{1}{c} [\mathbf{j} \Phi_0], \quad (30.6)$$

где \mathbf{j} — плотность стороннего тока в месте, где расположена сердцевина вихря, $\Phi_0 = \mathbf{e}_v \Phi_0$.

Задача 30.1. Два параллельных сверхпроводящих вихря закреплены в точках a и b в безграничном сверхпроводнике на расстоянии d друг от друга (рис. 30.2). Третий вихрь того же знака может двигаться вдоль штриховой

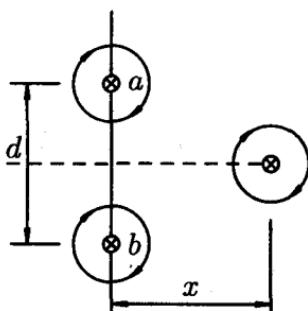


Рис. 30.2. К задаче 30.1. Два вихря закреплены на расстоянии d . Третий вихрь может двигаться вдоль штриховой линии.

линии, проведенной перпендикулярно отрезку ab через его середину. Найти силу, действующую на этот вихрь, когда он находится на расстоянии x от линии ab . Все расстояния между вихрями значительно меньше λ , а $\kappa \gg 1$.

Решение. Поскольку магнитное поле, созданное одним вихрем на расстоянии r ($r \ll \lambda$) от него, равно, согласно (28.6) и (28.7),

$$H = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \ln \frac{\lambda}{r},$$

плотность созданного этим вихрем тока в точке на расстоянии r от центра будет

$$j = \frac{c}{4\pi} \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2 r}.$$

Используя теперь (30.6), получим окончательно, что вихрь будет отталкиваться от линии ab с силой

$$f = \frac{\Phi_0^2}{4\pi^2\lambda^2} \frac{x}{x^2 + (d/2)^2},$$

направленной вдоль штриховой линии.

§ 31. Второе критическое поле

В однородном сверхпроводнике второго рода смешанное состояние характеризуется правильной, обычно треугольной, вихревой решеткой. По мере увеличения внешнего поля период решетки уменьшается, и когда он уменьшается до величины порядка длины когерентности ξ , происходит фазовый переход второго рода из смешанного состояния в нормальное. Это происходит, когда внешнее поле достигает значения второго критического поля H_{c2} (его также называют верхним критическим полем).

Не проводя точного расчета, мы можем оценить порядок величины H_{c2} на основании следующих соображений. Для двух рядом расположенных вихрей, находящихся на расстоянии ξ друг от друга, это расстояние ξ будет шириной сверхпроводящего межутка между двумя нормальными сердцевинами. Грубо говоря — это тонкая пленка толщины ξ . Но в § 17 было показано, что тонкая пленка во внешнем параллельном магнитном поле совершаает фазовый переход второго рода в нормальное состояние при поле $H_k \sim H_{cm}\lambda/d$, где d — толщина пленки. Если же, как в нашем случае, пленка имеет толщину ξ , то можно ожидать, что переход в нормальное состояние произойдет при внешнем поле, равном по порядку величины $H_{cm}\lambda/\xi$. Это и есть простая оценка второго критического поля:

$$H_{c2} \sim \kappa H_{cm}. \quad (31.1)$$

Точный расчет добавляет только численный коэффициент $\sqrt{2}$ [86]:

$$H_{c2} = \sqrt{2}\kappa H_{cm}. \quad (31.2)$$

Второе критическое поле может достигать значительных величин. Так, при $\kappa \sim 100$ и $H_{cm} \sim 10^3$ Э имеем $H_{c2} \sim 10^5$ Э.

Используя формулу (15.8) $\sqrt{2}H_{cm} = \Phi_0/2\pi\lambda\xi$, формулу (31.2) и выражение для $\kappa = \lambda/\xi$, легко получим

$$\Phi_0 = 2\pi\xi^2 H_{c2}. \quad (31.3)$$

Эта формула очень удобна для определения длины когерентности ξ . Действительно, формула связывает ξ с легко экспериментально измеряемой величиной — вторым критическим полем.

Соотношение (31.3) выражает собой уже упомянутый факт — при поле $B \sim H_{c2}$ расстояние между вихрями $\sqrt{\Phi_0/B}$ порядка длины когерентности ξ . Учитывая также (15.5), находим, что вблизи T_c второе критическое поле обращается в нуль линейным образом, $H_{c2}(T) \propto (T_c - T)$, так же, как и $H_{c1}(T)$.

Покажем теперь, как вывести (31.3) для температур вблизи T_c , где можно пользоваться теорией Гинзбурга - Ландау. Рассмотрим уравнение (14.16) — мы ожидаем, что его решение с отличным от нуля ψ появляется непрерывным образом, т. е. около линии перехода $B = H_{c2}$ величина ψ очень мала, и $\psi|\psi|^2 \ll \psi$. Тогда решение этого уравнения с $\psi \neq 0$ может существовать, если найдется такая функция $\psi_0(\mathbf{r})$, что

$$\xi^2 \left(i\nabla + \frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{A} \right)^2 \psi_0 = (1 + E_0) \psi_0 \quad (31.4)$$

с «собственным числом» $E_0 < 0$. Но уравнение (31.4) формально совпадает с уравнением Шредингера для частицы с зарядом $e' = 2e$ и массой $m' = \hbar^2/2\xi^2$, находящейся в магнитном поле B . Наинизший энергетический уровень такой частицы есть $\hbar e' B / 2m' c = 2eB\xi^2/\hbar c$, так что условие $E_0 < 0$ выполнено как раз при $B < H_{c2}$ (где H_{c2} определяется соотношением (31.3)). С приближением B к H_{c2} квадрат модуля параметра порядка убывает как $|\psi|^2 \sim -E_0 = 1 - B/H_{c2}$.

Задача 31.1. Второе критическое поле сверхпроводящего сплава равно 30 кЭ, а его критическое термодинамическое поле равно 1500 Э. Чему равна глубина проникновения магнитного поля у этого сплава?

$$\text{Ответ. } \lambda = \frac{1}{H_{cm}} \sqrt{\frac{\Phi_0 H_{c2}}{4\pi}} = 1.48 \cdot 10^{-5} \text{ см.}$$

Задача 31.2. Сверхпроводящий сплав ниобий - тантал имеет $H_{c2} = 4000$ Э и $\kappa = 3$. Оценить первое критическое поле.

$$\text{Ответ. } H_{c1} = 244 \text{ Э.}$$

Задача 31.3. Найти плотность вихревого тока на расстоянии $r = \xi$ от центра одиночного вихря в сверхпроводнике с $\kappa \gg 1$.

Решение. Поскольку $\xi \ll \lambda$, поле на расстоянии $r \sim \xi$, согласно (28.6) и (15.8), равно

$$H(r) = \frac{\sqrt{2} H_{cm}}{\kappa} K_0 \left(\frac{r}{\lambda} \right).$$

Тогда плотность тока будет $j = (c/4\pi)dH/dr$. Это дает

$$|j| = \frac{\sqrt{2}}{4\pi} \frac{c H_{cm}}{\lambda}.$$

Замечание. Из этого результата следует, что плотность тока на расстоянии ξ от центра вихря имеет порядок тока распаривания (ср. с (18.5)).

Задача 31.4. Сверхпроводящий сплав имеет $H_{c2} = 150$ кЭ, $\kappa = 96$. Найти энергию одиночного вихря. Сравнить с энергией конденсации в сердцевине вихря.

Решение. Зная H_{c2} , находим $\xi = 4.69 \cdot 10^{-7}$ см. Отсюда, зная κ , находим $\lambda = 4.50 \cdot 10^{-5}$ см. Теперь, используя (29.3), имеем $\epsilon_1 = 6.12 \cdot 10^{-7}$ эрг/см. Сердцевина вихря нормальная, поэтому плотность ее энергии больше плотности энергии окружающей среды на величину $H_{cm}^2/8\pi$. Поэтому энергия сердцевины равна $H_{cm}^2\xi^2/8$, если считать радиус сердцевины равным ξ . Эта энергия в нашей задаче равна $3.33 \cdot 10^{-8}$ эрг/см, т. е. во много раз меньше электромагнитной энергии вихря ϵ_1 .

§ 32. Обратимый магнитный момент сверхпроводника второго рода

Найдем выражение для магнитного момента единицы объема сверхпроводника второго рода, когда он находится в смешанном состоянии и когда внешнее поле $H_0 \gg H_{c1}$. Иными словами, мы будем искать зависимость $M(H_0)$.

Эту задачу, конечно, можно было бы решать обычным способом, варьируя энергию системы и находя равновесное значение магнитного момента. Но мы применим один несколько искусственный прием, который позволит нам существенно сократить выкладки.

Пусть массивный цилиндр из сверхпроводника второго рода, образующая которого параллельна оси z , помещен в продольное магнитное поле H_0 . Пусть длина когерентности ξ зависит от координаты x и пусть (для определенности) она монотонно возрастает с увеличением x . Глубина проникновения λ от x не зависит. Это значит, что H_{c2} станет тоже зависеть от x и будет уменьшаться с увеличением x . При таких условиях плотность магнитного потока (или индукция) B тоже станет функцией x , а это значит, что по объему образца пойдет ток в направлении оси y :

$$j = \frac{c}{4\pi} \frac{dB}{dx}.$$

Но $B = H_0 + 4\pi M$, поэтому ясно, что $M = M(x)$, т. е.

$$j = c dM/dx.$$

Но тогда на каждый вихрь действует сила Лоренца

$$f_L = \frac{1}{c} j \Phi_0 = \Phi_0 \frac{dM}{dx}. \quad (32.1)$$

С другой стороны, ясно, что система вихрей находится в равновесии, поэтому сила f_L должна быть уравновешена какой-то другой силой. Происхождение этой второй силы совершенно понятно: если $\xi = \xi(x)$, то и собственная энергия вихря ϵ_1 тоже становится функцией x , но тогда ясно, что на вихрь будет действовать сила $-\nabla \epsilon_1$, где (см. (29.3))

$$\epsilon_1 = \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \ln \kappa = \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \ln \frac{\lambda}{\xi}. \quad (32.2)$$

Дифференцируя (32.2) и приравнивая правой части (32.1) получим условие равновесия:

$$\Phi_0 \frac{dM}{dx} = \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \frac{1}{\xi} \frac{d\xi}{dx}.$$

Интегрирование этого выражения дает

$$M = \frac{\Phi_0}{16\pi^2\lambda^2} \ln \frac{\xi}{l}, \quad (32.3)$$

где l — константа интегрирования, имеющая размерность длины.

Мы ищем зависимость $M(H_0)$. В (32.3) единственная величина, зависящая от H_0 , — это l . Найдем эту зависимость так. Поскольку ξ монотонно возрастает с увеличением x , а H_{c2} монотонно падает, то ясно, что в некоторой точке x_0 поле H_{c2} станет равным внешнему полю H_0 . Это значит, что в этом месте $M(x_0) = 0$, т. е. $l = \xi(x_0)$. С другой стороны, нам известна формула, связывающая ξ и H_{c2} (31.3). Применяя ее к точке x_0 , имеем

$$2\pi l^2 H_0 = \Phi_0,$$

откуда легко находим отношение ξ/l :

$$\xi/l = (H_0/H_{c2})^{1/2}. \quad (32.4)$$

Подставляя (32.4) в (32.3), имеем

$$M = -\frac{\Phi_0}{16\pi^2\lambda^2} \ln \left(\frac{H_{c2}}{H_0} \right)^{1/2},$$

или

$$M = -\frac{\Phi_0}{32\pi^2\lambda^2} \ln \frac{H_{c2}}{H_0}. \quad (32.5)$$

Отсюда можно получить зависимость $B(H_0)$:

$$B = H_0 - \frac{\Phi_0}{8\pi\lambda^2} \ln \frac{H_{c2}}{H_0}. \quad (32.6)$$

Полученные формулы справедливы при условии $\kappa \gg 1$ и верны с логарифмической точностью. Используем эти формулы, чтобы рассмотреть зависимость $M(H_0)$ для полей H_0 , близких к H_{c2} . Представив H_{c2}/H_0 в виде

$$\frac{H_{c2} - H_0}{H_0} + 1,$$

получим вместо (32.5)

$$M = -\frac{\Phi_0}{32\pi^2\lambda^2} \ln \left(1 + \frac{H_{c2} - H_0}{H_0} \right) \simeq -\frac{\Phi_0}{32\pi^2\lambda^2} \frac{H_{c2} - H_0}{H_0}.$$

Используя (31.3), имеем

$$-4\pi M = \frac{H_{c2} - H_0}{4\kappa^2}. \quad (32.7)$$

Таким образом, получено линейное уменьшение $|M|$ при $H_0 \rightarrow H_{c2}$. А. А. Абрикосовым [86] был проведен точный расчет $M(H_0)$ для этой области полей и получен следующий результат:

$$-4\pi M = \frac{H_{c2} - H_0}{1.16(2\kappa^2 - 1)}. \quad (32.8)$$

Легко видеть, что при $\kappa \gg 1$ можно пренебречь единицей в круглых скобках и тогда точная формула (32.8) отличается от приближенной (32.7) только коэффициентом порядка единицы.

Разъясним вопрос, который может вызвать недоумение. Что такое H_{cm} для сверхпроводника второго рода? В сверхпроводнике первого рода это критическое поле массивного материала. В этом поле сверхпроводник переходит в нормальное состояние. А что же происходит со сверхпроводником второго рода в поле H_{cm} ? Ответ состоит в том, что ничего особенного со сверхпроводником второго рода в поле H_{cm} не происходит. На кривой намагничивания точка $H_0 = H_{cm}$ никак не выделена. Для сверхпроводника второго рода величину H_{cm} надо рассматривать просто как меру выгодности сверхпроводящего состояния по сравнению с нормальным для данного материала в отсутствие магнитного поля:

$$F_n - F_{s0} = H_{cm}^2 / 8\pi.$$

Эту же мысль можно пояснить по-другому. Переход сверхпроводника второго рода в нормальное состояние произойдет тогда, когда на его намагничивание будет затрачена работа, равная $F_n - F_{s0}$:

$$-\int_0^{H_{c2}} M dH_0 = H_{cm}^2 / 8\pi.$$

Отсюда получим следующее определение H_{cm} для сверхпроводника второго рода:

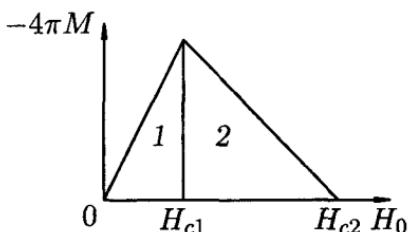
$$H_{cm}^2 = 2 \int_0^{H_{c2}} (H_0 - B(H_0)) dH_0. \quad (32.9)$$

Задача 32.1. Сверхпроводящий сплав имеет $H_{c2} = 50$ кЭ, $\kappa = 60$. Вычислить магнитный момент единицы объема M при внешнем поле $H_0 = 10$ кЭ.

Ответ. $M = -0.445$ Гс.

Задача 32.2. Второе критическое поле сверхпроводящего сплава никобий–тантал равно 4000 Э, а $\kappa = 3$. Аппроксимируя кривую намагничивания сплава $-4\pi M(H_0)$ двумя треугольниками, как показано на рис. 32.1, оценить первое критическое поле H_{c1} , критическое термодинамическое поле H_{cm} . Сравнить H_{c1} с ответом задачи 31.2, а H_{cm} с точным значением этой величины.

Рис. 32.1. Приближение кривой намагничивания двумя треугольниками. Треугольник (1) определен равенством $-4\pi M = H_0$, треугольник (2) равенством $-4\pi M = (H_{c2} - H_0)/[1.16(2\kappa^2 - 1)]$.



Решение. Из рис. 32.1 ясно, что H_{c1} является решением уравнения $H_{c1} = k(H_{c2} - H_{c1})$, где $k^{-1} = 1.16(2\kappa^2 - 1)$. Отсюда $H_{c1} = 193 \text{ Э}$. Из формулы (32.9) следует возможность оценить H_{cm} по площади под кривой намагничивания. Такая оценка дает $H_{cm} = [k/(1+k)]^{1/2} H_{c2} = 879 \text{ Э}$. Точное значение находится по формуле (31.2): $H_{cm} = 942 \text{ Э}$.

§ 33. Поверхностная сверхпроводимость. Третье критическое поле

Если внешнее магнитное поле H_0 уменьшается от значения $H_0 > H_{c2}$, то в тот момент, когда H_0 становится чуть меньшим H_{c2} , во всем объеме сверхпроводника второго рода возникают зародыши сверхпроводимости, появляется плотно упакованная решетка вихрей. При этом параметр порядка ψ мал ($|\psi| \ll 1$). Происходит фазовый переход второго рода из нормального состояния ($H_0 > H_{c2}$) в смешанное состояние ($H_0 \lesssim H_{c2}$).

Рассмотрим зародыш сверхпроводимости, о котором только что говорилось. Это участок ширины порядка $2\xi(T)$ между двумя нормальными сердцевинами двух соседних вихрей. Действительно, если радиус нормальной сердцевины мы принимаем равным ξ , то при плотной упаковке вихрей расстояние между их центрами будет порядка 2ξ . Зависимость параметра порядка от координаты на линии, соединяющей центры вихрей, схематично показана на рис. 33.1, а. В этом сечении зародыш имеет вид колоколообразной кривой. Так будет возникать сверхпроводимость при поле H_{c2} в объеме сверхпроводника второго рода.

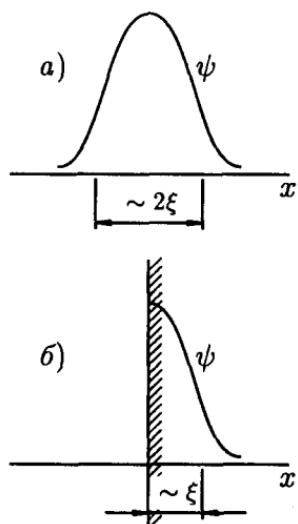


Рис. 33.1. Волновая функция ψ зародыша сверхпроводящего состояния
а) в неограниченном сверхпроводнике, размер зародыша порядка 2ξ ; б) в сверхпроводящем полупространстве, размер зародыша порядка ξ .

Оказывается, однако, что на поверхности сверхпроводника, там где она параллельна внешнему полю, сверхпроводимость может существовать и при более высоких полях.

Итак, рассматривается полубесконечное сверхпроводящее пространство, занимающее область $x > 0$. Таким образом, плоскость $x = 0$ является границей нашего сверхпроводника. Внешнее магнитное поле H_0 параллельно оси z . В сверхпроводнике с поверхностью на плоскости $x = 0$ можно ожидать, что зародыш, образовавшийся вблизи поверхности, будет иметь эффективную ширину порядка $\xi(T)$, т. к. на поверхности $d\psi/dx = 0$. На рис. 33.1, б схематически изображен зародыш вблизи поверхности. Но из формулы (17.5) для критического поля тонкой пленки известно, что уменьшение размеров пленки увеличивает ее критическое поле. Поэтому во втором случае — зародыша вблизи поверхности — можно ожидать большего критического поля образования такого зародыша (приблизительно в два раза). Это новое критическое поле мы будем называть третьим критическим полем, или критическим полем поверхностной сверхпроводимости и будем обозначать H_{c3} . В рамках теории ГЛ величина H_{c3} может быть определена с помощью того же уравнения (31.4), использованного ранее для нахождения H_{c2} , вместе

с условием $d\psi/dx = 0$ на поверхности (см. [7], с. 199). Машинный расчет показал [90], что

$$H_{c3} = 1.69 H_{c2}. \quad (33.1)$$

Итак, подведем некоторые итоги. Из проведенных рассуждений следует, что при уменьшении внешнего магнитного поля, когда оно достигает значения H_{c3} , на поверхности сверхпроводника возникает тонкий сверхпроводящий слой. Толщина этого

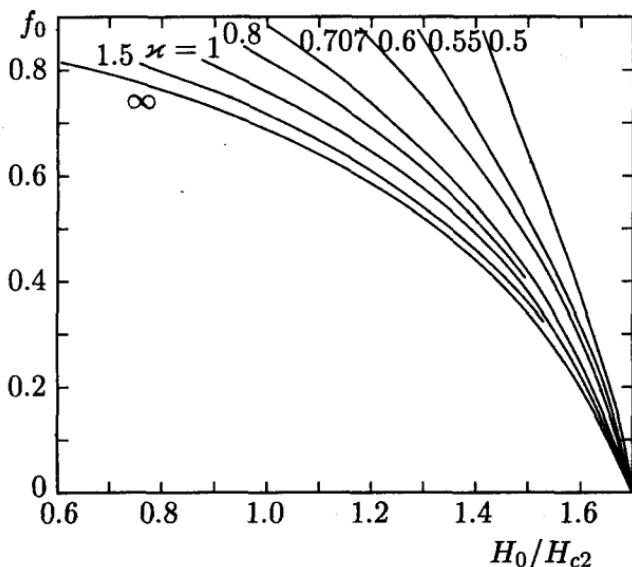


Рис. 33.2. Зависимость модуля параметра порядка f_0 на поверхности сверхпроводника от внешнего магнитного поля при различных значениях κ [91].

слоя имеет порядок $\xi(T)$. Внутри сверхпроводника сохраняется нормальное состояние и магнитное поле, равное внешнему полю. В поверхностном сверхпроводящем слое магнитное поле будет несколько ослаблено, как это бывает у тонких сверхпроводящих пленок во внешнем параллельном поле. Это означает, что по внешней и внутренней поверхностям сверхпроводящего слоя текут токи в противоположных направлениях.

Что будет происходить с поверхностным сверхпроводящим слоем по мере дальнейшего уменьшения внешнего поля ниже H_{c3} ? Расчеты показали, что по мере уменьшения поля будут увеличиваться модуль параметра порядка и ширина сверхпроводящего слоя Δ . На рисунках 33.2 и 33.3 показаны полевые зависимости модуля параметра порядка f_0 на поверхности сверхпроводника и ширины сверхпроводящего поверхностного слоя Δ при разных значениях параметра κ .

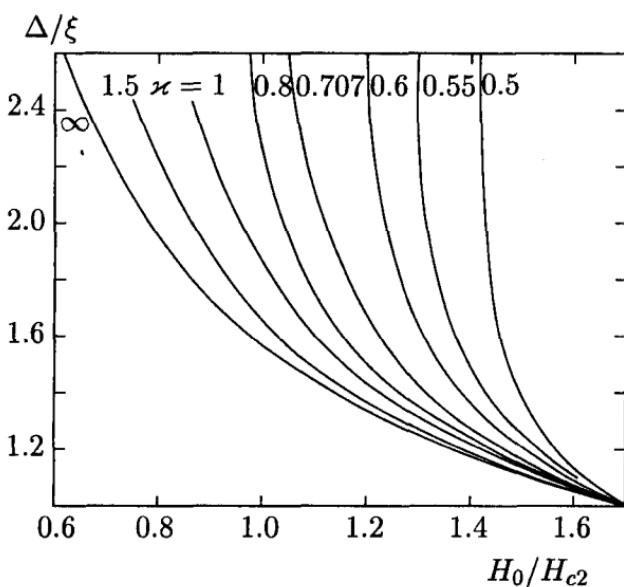


Рис. 33.3. Зависимость ширины сверхпроводящего слоя Δ от внешнего магнитного поля при различных значениях κ [91].

Покрытие поверхности сверхпроводника нормальным металлом снижает H_{c3} до величины, очень близкой к H_{c2} .

Интересно отметить, что явление поверхностной сверхпроводимости может наблюдаться и у некоторых сверхпроводников первого рода. Действительно, во всех наших рассуждениях нигде не предполагалось, что $\kappa > 1/\sqrt{2}$, и при этом получилось, что $H_{c3} = 1.69H_{c2} = 1.69\sqrt{2}\kappa H_{cm}$. Поверхностная сверхпроводи-

мость возникает в том случае, если H_{c3} будет больше H_{cm} , т. е. если

$$1.69\sqrt{2}\kappa H_{cm} > H_{cm}. \quad (33.2)$$

Таким образом, поверхностная сверхпроводимость может возникнуть у сверхпроводника первого рода, если

$$\kappa > 1/1.69\sqrt{2} = 0.42.$$

Задача 33.1. Найти третье критическое поле сверхпроводящего сплава, имеющего критическое термодинамическое поле $H_{cm} = 900$ Э и глубину проникновения $\lambda = 2500$ Å.

Ответ. $H_{c3} = 51\,900$ Э.

Задача 33.2. Найти третье критическое поле сверхпроводника, имеющего длину когерентности $\xi = 90$ Å.

Ответ. $H_{c3} = 68\,700$ Э.

§ 34. Поверхностный барьер. Перегрев мейсснеровского состояния

До сих пор мы рассматривали термодинамически равновесные ситуации. Так, например, считалось, что если при первом критическом поле становится энергетически выгодным проникновение вихрей в сверхпроводник второго рода, то вихри действительно туда проникают при этом поле.

Однако более внимательный анализ показывает, что для проникновения вихрей внутрь им нужно преодолеть некоторый энергетический барьер у поверхности сверхпроводника.

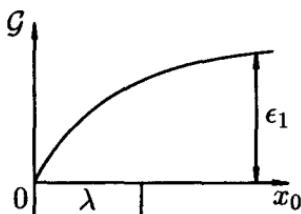


Рис. 34.1. Зависимость гиббсовской свободной энергии сверхпроводника с вихрем от расстояния между вихрем и поверхностью.

Рассмотрим плоскую идеально гладкую поверхность сверхпроводника и одиночный вихрь внутри образца, параллельный

этой поверхности. Для удобства расчетов будем предполагать, что $\kappa \gg 1$. Внешнее поле предположим пока равным нулю. Гиббсовская свободная энергия \mathcal{G} такого сверхпроводника с вихрем изображена на рис. 34.1 как функция расстояния x_0 от сердцевины вихря до поверхности. Из этого рисунка следует прежде всего, что такой одиночный вихрь без внешнего поля, как и следовало ожидать, будет неустойчивым и что на достаточно больших расстояниях от поверхности \mathcal{G} будет просто равна свободной энергии одиночного вихря ϵ_1 . Здесь и ниже энергия сверхпроводника с вихрем отсчитывается от энергии сверхпроводника без вихря.

Поясним теперь, почему функция $\mathcal{G}(x_0)$ имеет такой вид. Если $x_0 < \lambda$, то линии токов вихря можно изобразить так, как показано на рис. 34.2, откуда видно, что слева от сердцевины сверхтекучая скорость больше, чем справа, поэтому на сердцевину вихря будет действовать разность бернульиевских давлений. Это приведет к появлению силы, действующей на вихрь в сторону к поверхности. Итак, взаимодействие вихря с поверхностью приводит к его притяжению к поверхности. Ясно, что ту же силу $f(x_0)$ можно было бы получить, просто взяв производную

$$f = -d\mathcal{G}/dx_0. \quad (34.1)$$

Этим и объясняется та форма зависимости $\mathcal{G}(x_0)$, которая изображена на рис. 34.1.

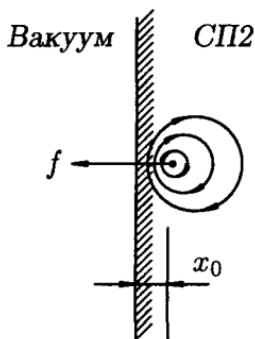


Рис. 34.2. Линии тока вихря вблизи поверхности сверхпроводника.

Для нахождения силы притяжения вихря к поверхности мы воспользуемся так называемым методом изображений. Посколь-

ку предполагается, что $\kappa \gg 1$, поле, созданное вихрем, удовлетворяет линейному уравнению (28.5). При этом поле, созданное вихрем на поверхности сверхпроводника, всегда равно нулю (это можно доказать точно так же, как доказывается равенство нулю поля длинного соленоида вне этого соленоида). Таким образом, мы стоим перед линейным уравнением (28.5) с нулевым граничным условием на поверхности. Для линейных задач можно применять принцип суперпозиции. Заменим поэтому нашу задачу другой, ей эквивалентной. Рассмотрим безграничный сверхпроводник с двумя вихрями противоположного знака, расположенными в точках $\pm x_0$. Ясно, что в силу симметрии задачи поле на поверхности $x = 0$ всюду равно нулю, а при $x > 0$ должно выполняться уравнение (28.5). В силу однозначности решения дифференциального уравнения, поле, созданное этими двумя вихрями в полу-пространстве $x > 0$, в точности равно полю, созданному одним вихрем, находящимся в точке x_0 , когда он расположен вблизи реальной поверхности сверхпроводника, совпадающей с плоскостью $x = 0$.

Теперь легко понять, что взаимодействие вихря с поверхностью (притяжение) можно трактовать и как взаимодействие вихря со своим изображением (притяжение, так как вихрь-изображение имеет противоположный знак).

Включим теперь внешнее поле H_0 параллельно поверхности сверхпроводника, как это показано на рис. 34.3. Сразу по поверхности пойдет мейсснеровский ток, который, взаимодействуя с вихрем, начнет отталкивать его от поверхности. В результате, с одной стороны, вихрь притягивается к поверхности своим собственным изображением, с другой стороны — отталкивается от поверхности мейсснеровским током. Вид гиббсовой свободной энергии вихря в этом случае показан на рис. 34.4. Видно, что при $H_0 < H_{c1}$ возможно метастабильное состояние вихря в сверхпроводнике, когда вихрю пребывать в сверхпроводнике энергетически невыгодно, но для выхода надо преодолеть энергетический барьер. По имени физиков, впервые рассмотревших такой барьер, он носит название барьера Вина — Ливингстона [92].

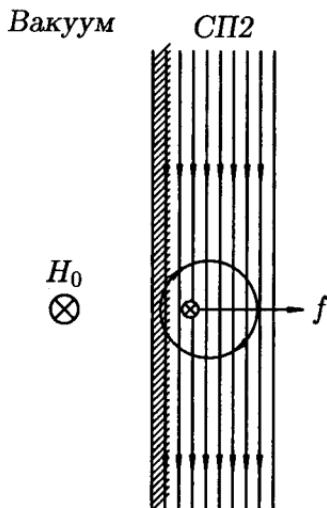


Рис. 34.3. Мейсснеровский ток, созданный внешним полем H_0 , отталкивает вихрь от поверхности.

При $H_0 = H_{c1}$ (см. рис. 34.4) вихрю впервые при увеличении поля становится энергетически выгодно существовать в сверхпроводнике, но проникновению вихря в сверхпроводник мешает барьер Бина – Ливингстона. Продолжаем увеличивать поле H_0 . Барьер понижается, но все еще существует, вихрь все еще не может проникнуть в сверхпроводник, по-прежнему (уже теперь metastабильно) существует мейсснеровское состояние. В этом случае говорят о перегреве мейсснеровского состояния.

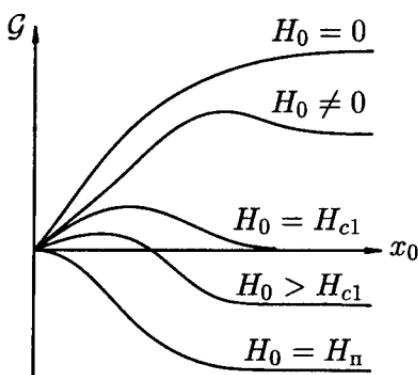


Рис. 34.4. Гиббсовская свободная энергия одиночного вихря как функция его расстояния до поверхности при разных значениях H_0 .

Барьер пропадает лишь при некотором поле $H_0 = H_n$, которое называется полем перегрева мейсснеровского состояния.

Рассчитаем это поле перегрева. Пусть сердцевина вихря находится в точке x_0 . Сила, которая притягивает его к поверхности — это сила изображения, т. е. сила взаимодействия между вихрем и током, создаваемым изображением. Согласно (30.6), имеем

$$f_{\text{изобр}} = \frac{1}{c} \frac{c}{4\pi} \frac{dH_v}{dx} \Phi_0, \quad (34.2)$$

где H_v — поле, создаваемое вихрем-изображением, а $(c/4\pi)(dH_v/dx)$ — ток изображения в точке $x = x_0$. Сила взаимодействия между вихрем и мейсснеровским током равна

$$f_M = \frac{1}{c} \frac{c}{4\pi} \frac{H_0}{\lambda} e^{-x/\lambda} \Phi_0, \quad (34.3)$$

поскольку $(c/4\pi)(H_0/\lambda)e^{-x/\lambda}$ — это плотность тока в мейсснеровском состоянии.

Гиббсовская свободная энергия

$$\mathcal{G} = - \int f dx, \quad (34.4)$$

где $f = f_M + f_{\text{изобр}}$ — полная сила, действующая на вихрь.

Подставляя (34.2) и (34.3) в (34.4) и интегрируя, получим

$$\mathcal{G}(x_0) = - \frac{\Phi_0}{4\pi} H_v(2x_0) + \frac{\Phi_0}{4\pi} H_0 e^{-x_0/\lambda} + \text{const.} \quad (34.5)$$

В этой формуле стоит $H_v(2x_0)$, так как это поле, созданное в точке x_0 вихрем-изображением, удаленным от этой точки на расстояние $2x_0$. Остается определить константу интегрирования. При $x_0 \rightarrow \infty$ первые два члена в (34.5) обращаются в нуль. С другой стороны, при $x_0 \rightarrow \infty$ величина \mathcal{G} становится просто гиббсовой свободной энергией одиночного вихря в безграничном сверхпроводнике, которая определяется выражением (29.5). Используя формулы (29.5) и (29.6), получим выражение для константы интегрирования в (34.5) в виде

$$\text{const} = \mathcal{G}(\infty) = \frac{\Phi_0}{4\pi} (H_{cl} - H_0),$$

откуда

$$\mathcal{G} = \frac{\Phi_0}{4\pi} [H_0 e^{-x_0/\lambda} - H_v(2x_0) + H_{c1} - H_0]. \quad (34.6)$$

Нетрудно проверить, что эта формула дает ту серию кривых $\mathcal{G}(x_0)$ при разных значениях H_0 , которая изображена на рис. 34.4.

Поле перегрева мейсснеровского состояния $H_{\text{п}}$ можно определить из условия, очевидного из рис. 34.4:

$$d\mathcal{G}/dx_0 |_{x_0=0} = 0. \quad (34.7)$$

Подставляя в это уравнение выражение для \mathcal{G} (34.6) и используя формулы (28.6) и (28.7), получим

$$H_{\text{п}} \simeq H_{cm}. \quad (34.8)$$

В процессе получения этой формулы при дифференцировании $H_v(2x_0)$ возникает расходимость в точке $x_0 = 0$. Это происходит потому, что при $x_0 = 0$ все рассмотрение становится неверным, так как мы не учитывали пространственные изменения параметра порядка ψ . Обойти эту трудность можно, считая, что вихрь выходит на поверхность не при $x_0 = 0$, а при $x_0 = \xi$, когда вихрь выйдет на поверхность своей сердцевиной. В этом предположении и получена формула (34.8). Точный расчет, проведенный Де Женом, подтвердил эту оценку:

$$H_{\text{п}} = H_{cm}. \quad (34.9)$$

Существование барьера Бина – Ливингстона доказано экспериментально. Прежде всего, этот барьер проявляется в небольшом гистерезисе кривой намагничивания однородного сверхпроводника второго рода вблизи H_{c1} . Схематический пример такой кривой показан на рис. 34.5. От этого гистерезиса не удается освободиться никакими мерами по улучшению объемной однородности сверхпроводника.

Известны также и прямые эксперименты по измерению критического поля перегрева мейсснеровского состояния $H_{\text{п}}$. Так,

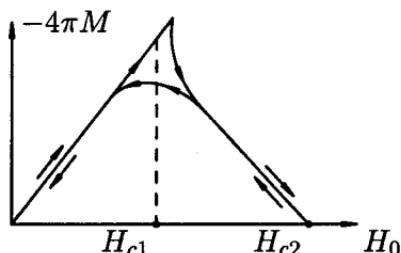


Рис. 34.5. Гистерезис криевой намагничивания, обусловленный поверхностным барьером.

Де Блуа и де Сорбо [93] исследовали образцы ниобия с небольшой примесью кислорода и сплавы ниобий–тантал. Если образцы имели хорошую гладкую поверхность, полученную с помощью электрополировки, то для первого образца были получены следующие данные: $H_{c1} = 580 \text{ Э}, H_{c2} = 7000 \text{ Э}, H_{cm} = 1360 \text{ Э}, H_{\pi} = 1330 \text{ Э}$, а для второго образца $H_{c1} = 110 \text{ Э}, H_{c2} = 1600 \text{ Э}, H_{cm} = 310 \text{ Э}, H_{\pi} = (180 \div 320) \text{ Э}$. Сопоставление этих данных показывает, что формула (34.9) достаточно надежно подтверждается экспериментом.

Во многих случаях, однако, барьер Бина–Ливингстона проявляется слабо. Так, в сверхпроводники с шероховатой поверхностью проникновение вихрей происходит при $H_0 < H_{\pi}$.

Определим теперь величину магнитного потока, создаваемого вихрем, расположенным вблизи и параллельно плоскости поверхности сверхпроводника. Из общей формулы для гиббсовской свободной энергии следует, что гиббсовская свободная энергия сверхпроводника с вихрем равна

$$\mathcal{G} = \mathcal{F} - \Phi H_0 / 4\pi, \quad (34.10)$$

где \mathcal{F} — свободная энергия сверхпроводника с вихрем (не зависящая от внешнего поля H_0), Φ — магнитный поток вихря, расположенного вблизи поверхности. С другой стороны, эта же величина \mathcal{G} дается формулой (34.6). Выделяя в этой формуле члены, зависящие от H_0 , и сравнивая их с (34.10), получим выражение для потока вихря, расположенного около поверхности:

$$\Phi = \Phi_0 (1 - e^{-x_0/\lambda}). \quad (34.11)$$

Из этой формулы следует, что магнитный поток, создаваемый вихрем, стремится к нулю по мере приближения вихря к поверхности сверхпроводника. Это легко понять. Полный магнитный поток вихря можно записать в виде

$$\Phi = \int H dS,$$

где интегрирование ведется по полуплоскости $z = 0, x > 0$, а H — это истинное поле, созданное вихрем. Но это поле можно рассматривать как суперпозицию полей самого вихря и его изображения, а поле изображения имеет противоположное направление. В результате имеем

$$\Phi < \Phi_0.$$

Задача 34.1. Найти силу притяжения вихря к плоской поверхности сверхпроводника, если вихрь параллелен поверхности, находится от нее на расстоянии $l = 500 \text{ \AA}$, а глубина проникновения равна $\lambda = 3000 \text{ \AA}$.

$$\text{Ответ. } f = (\Phi_0 / 4\pi\lambda)^2 / l = 6.03 \cdot 10^{-2} \text{ дин/см}^2.$$

Задача 34.2. Одиночный вихрь помещен вблизи поверхности сверхпроводника, которая образует прямой двугранный угол (рис. 34.6). Найти результирующую силу, действующую на вихрь со стороны поверхности, если $\lambda = 1500 \text{ \AA}$, $x_0 = 400 \text{ \AA}$, $y_0 = 600 \text{ \AA}$.

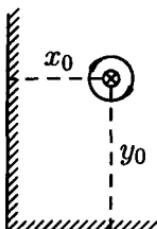


Рис. 34.6. К задаче 34.2.

$$\text{Ответ. } f_x = -2.08 \cdot 10^{-1} \text{ дин/см}, f_y = -6.20 \cdot 10^{-2} \text{ дин/см}.$$

Задача 34.3. Найти силу взаимодействия вихря с мейсснеровским током, если вихрь параллелен плоской поверхности и находится от нее на расстоянии $l = 400 \text{ \AA}$. Сверхпроводник находится во внешнем поле $H_0 = 50 \text{ Э}$, $\lambda = 1000 \text{ \AA}$.

$$\text{Ответ. } f = (\Phi_0 H_0 / 4\pi\lambda) e^{-l/\lambda} = 5.52 \cdot 10^{-2} \text{ дин/см}.$$

Задача 34.4. Найти поле перегрева мейсснеровского состояния, если $\kappa = 24$, $\lambda = 2000 \text{ \AA}$.

$$\text{Ответ. } H_\pi = \Phi_0 \kappa / (2\sqrt{2}\pi\lambda^2) = 1.40 \cdot 10^3 \text{ Э.}$$

§ 35*. Анизотропные сверхпроводники II рода

Очень многие сверхпроводники II рода имеют сильно анизотропную (слоистую) кристаллическую структуру; таковы все представители семейства ВТСП, NbSe₂ и многие другие соединения. Вследствие этого их электронные свойства оказываются анизотропными. Энергия электрона может быть выражена через эффективные электронные массы поперек (m_{\perp}) и вдоль (m_{\parallel}) слоев:

$$E_p = \frac{p_z^2}{2m_{\perp}} + \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m_{\parallel}},$$

причем $m_{\perp} \gg m_{\parallel} \sim m$, где m — обычная электронная масса. В результате оказываются зависящими от направления и параметры, характеризующие сверхпроводящее состояние — длина коherентности, лондоновская глубина проникновения, первое и второе критические поля. Если интересующий нас анизотропный сверхпроводник имеет $\kappa \gg 1$, можно применить простой прием, предложенный в работе [94], чтобы найти все эти угловые зависимости.

Начнем наше рассмотрение со свободной энергии Гинзбурга–Ландау для анизотропного случая:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{sH} = & \mathcal{G}_n + \int \left[\alpha |\Psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi|^4 + \right. \\ & + \frac{1}{4m_{\parallel}} \left| -i\hbar \nabla_{\parallel} \Psi - \frac{2e}{c} \mathbf{A}_{\parallel} \Psi \right|^2 + \frac{1}{4m_{\perp}} \left| -i\hbar \nabla_z \Psi - \frac{2e}{c} \mathbf{A}_z \Psi \right|^2 + \\ & \left. + \frac{(\nabla \times \mathbf{A})^2}{8\pi} - \frac{(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{H}_0}{4\pi} \right] dV. \quad (35.1) \end{aligned}$$

Далее удобно использовать параметр анизотропии ϵ , определенный как $m_{\parallel}/m_{\perp} = \epsilon^2 \ll 1$. Сделаем в выражении (35.1) замену координат и компонент векторного потенциала:

$$x = \tilde{x}, \quad y = \tilde{y}, \quad z = \epsilon \tilde{z}, \quad A_x = \tilde{A}_x, \quad A_y = \tilde{A}_y, \quad A_z = \frac{\tilde{A}_z}{\epsilon}. \quad (35.2)$$

В новых переменных члены в (35.1), содержащие градиенты, станут изотропными, однако анизотропия появится в членах с магнитной энергией. Действительно, преобразования (35.2) для компонент вектора индукции $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ имеют вид

$$B_x = \frac{\tilde{B}_x}{\varepsilon}, \quad B_y = \frac{\tilde{B}_y}{\varepsilon}, \quad B_z = \tilde{B}_z, \quad (35.3)$$

так что магнитная энергия запишется в виде

$$G_M = \frac{1}{8\pi} \int \left[\frac{\tilde{B}_{||}^2}{\varepsilon^2} + \tilde{B}_\perp^2 - 2 \left(\frac{\tilde{\mathbf{B}}_{||} \mathbf{H}_\perp}{\varepsilon} + \tilde{B}_\perp H_\perp \right) \right] dV. \quad (35.4)$$

Для сверхпроводников с очень большим параметром κ магнитную индукцию B можно часто считать постоянной по образцу, в то время как параметр порядка $\Psi(\mathbf{r})$ может быть сильно неоднороден (например, вблизи вихрей). Именно в таких случаях полезно преобразование (35.2): минимизируя G_M по компонентам вектора $\tilde{\mathbf{B}}$, найдем

$$\tilde{\mathbf{B}} = (\varepsilon H_x, \varepsilon H_y, H_z), \quad (35.5)$$

что соответствует равенству $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ для изотропной системы; такое приближение пригодно при $B \gg H_{c1}$. Преобразование (35.2) не меняет длин в плоскости слоев, поэтому мы сохраним обозначения ξ и λ за длиной когерентности в плоскости слоев и глубиной проникновения токов, текущих вдоль них.

В качестве примера найдем с помощью преобразования (35.2) зависимость второго критического поля H_{c2} от угла ϑ между вектором магнитной индукции \mathbf{B} и плоскостью слоев. Введем функцию $\varepsilon(\vartheta) \equiv \varepsilon_\vartheta$, определив ее равенством $\varepsilon_\vartheta^2 = \varepsilon^2 \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta$. Тогда из соотношения (35.5) следует, что магнитное поле \mathbf{H} действует на анизотропный сверхпроводник так же, как поле $\varepsilon_\vartheta H$ на сверхпроводник изотропный. Отсюда немедленно находим:

$$H_{c2}(\vartheta) = \frac{\Phi_0}{2\pi\varepsilon_\vartheta\xi^2}. \quad (35.6)$$

В частном случае, когда поле направлено параллельно слоям, второе критическое поле максимально, $H_{c2}^{\parallel} = \varepsilon^{-1} H_{c2}^{\perp}$. Этот результат можно также выразить как $H_{c2}^{\parallel} = \Phi_0 / (2\pi\xi_{\perp})$, где $\xi_{\perp} = \varepsilon\xi$ — длина когерентности в поперечном к слоям направлении; это соотношение между ξ_{\perp} и ξ следует уже из вида свободной энергии (35.1).

Термодинамическое критическое поле H_{cm} не может зависеть от направления поля (поскольку оно просто определяет плотность энергии, выигранной при переходе в сверхпроводящее состояние, $G_n - G_s = H_{cm}^2 / 8\pi$). С другой стороны, обычно $H_{c1}H_{c2} = H_{cm}^2 \ln(\lambda/\xi)$, т. е. следует ожидать, что первое критическое поле будет зависеть от угла ϑ противоположным (по сравнению с (35.6)) образом. Для определения $H_{c1}(\vartheta)$ метод преобразования (35.2) непригоден, т. к. вблизи первого критического поля распределение $B(r)$ максимально неоднородно. Расчеты [95] в рамках лондоновского приближения дают

$$H_{c1}(\vartheta_H) = \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{\theta_H}} \ln \frac{\lambda}{\xi}, \quad (35.7)$$

где $\theta_H = \pi/2 - \vartheta_H$, а ϑ_H — угол между направлением магнитного поля \mathbf{H} и плоскостью слоев (в полях порядка первого критического направления магнитного поля \mathbf{H} и индукции \mathbf{B} , вообще говоря, отличаются). Первое критическое поле минимально в направлении слоев, что легко понять — плотность экранирующих токов, текущих в направлении поперек слоев, уменьшена по сравнению с токами вдоль слоев, так что длина экранирования возрастает, $\lambda_{\perp} = \varepsilon^{-1}\lambda$.

До сих пор мы подразумевали, начиная с выражения для свободной энергии (35.1), что сверхпроводник может быть описан как непрерывная трехмерная среда, хотя и анизотропная. Для того чтобы это было справедливо, поперечная длина когерентности $\xi_{\perp}(T)$ должна быть велика по сравнению с расстоянием d между сверхпроводящими слоями в слоистой структуре. Если и низкотемпературная длина когерентности $\xi_{0\perp} = \varepsilon\xi_0$ больше d , то сверхпроводник всегда можно считать непрерывным; в случае

$\xi_{0\perp}/d < 1$ непрерывное описание пригодно достаточно близко к T_c , где длины когерентности $\xi(T)$ и $\xi_\perp(T)$ возрастают. В области $\xi_\perp(T)/d < 1$ материал естественно рассматривать как набор тонких сверхпроводящих слоев со слабыми (джозефсоновскими) связями между слоями. К этой категории относятся высокотемпературные сверхпроводники семейства Bi–Sr–Ca–Cu–O, у которых параметр анизотропии $\varepsilon^{-1} > 100$. В первом приближении при рассмотрении такого вещества джозефсоновской связью между слоями можно вовсе пренебречь и рассматривать его как набор двумерных сверхпроводящих слоев, связанных лишь магнитным взаимодействием. Мы не будем здесь останавливаться подробнее на свойствах слоистых квазидвумерных сверхпроводников; их обсуждение можно найти, например, в обзоре [96].

§ 36*. Разрушение сверхпроводимости в тонкой пленке тепловыми вихрями

36.1. Фазовый переход Березинского – Костерлица – Таулеса. В тонких сверхпроводящих пленках (толщиной $d \ll \lambda$) вихри, аналогичные абрикосовским, могут не только рождаться внешним поперечным магнитным полем, но и возникать при $H_0 = 0$ (чисто флюктуационным образом). В этом случае плотности вихрей с положительной и отрицательной циркуляциями совпадают. Однако возникшие из-за тепловых флюктуаций вихри могут сильно влиять на сверхпроводящие свойства пленки; они приводят к ее переходу в нормальное состояние при температуре $T_{\text{ВКТ}}$, более низкой, чем определенная по теории Гинзбурга – Ландау температура перехода T_{c0} . Подобный фазовый переход был впервые предсказан (для целого ряда двумерных систем — магнетиков, кристаллов, сверхтекущих пленок) В. Л. Березинским [97], а затем подробнее исследован в работах [98, 99] и (специально для случая сверхпроводников) в [100]; с тех пор его существование подтверждено многочисленными экспериментами. Мы рассмотрим здесь качественную картину фазового перехода Березинского – Костерлица – Таулеса (сокра-

щенно — БКТ-переход), а в следующем разделе — его наблюдаемые следствия для сверхпроводящих пленок.

В § 30 было показано, что энергия взаимодействия (на единицу длины) двух абрикосовских вихрей на расстоянии $R \ll \lambda$, когда экранировкой можно пренебречь, равна $2q_1 q_2 \epsilon_0 \ln(R/\lambda)$, где $q_{1,2}$ принимают значения +1 для вихрей с положительной и -1 для вихрей с отрицательной циркуляцией соответственно, а $\epsilon_0 = (\Phi_0/4\pi\lambda)^2$. Главный вклад в ϵ_0 дает кинетическая энергия сверхтекущего движения вокруг каждого вихря $E_{\text{кин}} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} m_s v_s^2(r)$, где сверхтекущая скорость $v_s(r) = \frac{\hbar}{2m} \left(\nabla\theta - \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \right) \propto \frac{\hbar}{2mr}$ на малых расстояниях от центров вихрей (где можно пренебречь вкладом векторного потенциала). В случае пленки экранирующий сверхтекущий ток сосредоточен в тонком слое толщины $d \ll \lambda$, в то время как магнитное поле распределено во всем трехмерном пространстве. Поэтому экранировка магнитного поля вихря в пленке оказывается гораздо слабее, чем в объемном сверхпроводнике. Точный расчет, изложенный в книге [7], дает эффективную длину экранировки

$$\lambda_{2d} = \frac{2\lambda^2}{d}. \quad (36.1)$$

Этот результат можно угадать и из сравнения формул (10.4) и (10.7) для кинетических индуктивностей поверхности массивного сверхпроводника и тонкой пленки — обе эти формулы можно записать в виде $L_{\square}^k = 2\pi\lambda_{\text{эфф}}$, где $\lambda_{\text{эфф}}$ равно либо λ , либо λ_{2d} .

При расстояниях между вихрями в пленке $R \ll \lambda_{2d}$ экранировкой можно пренебречь, и полная энергия взаимодействия $U_2(R) = 2q_1 q_2 d \epsilon_0 \ln(R/\lambda_{2d})$, а собственная энергия каждого из вихрей равна $U_1 = d \epsilon_0 \ln(\lambda_{2d}/\xi)$, так что полная энергия пары вихрей противоположных циркуляций равна

$$U_{\text{pair}}(R) = 2\epsilon_0 d \ln \frac{R}{\xi} = \frac{\Phi_0^2}{4\pi^2 \lambda_{2d}} \ln \frac{R}{\xi}. \quad (36.2)$$

В тонких пленках λ_{2d} может достигать макроскопических размеров. Так, при $\lambda = 3 \text{ мкм}$ (что легко достигается в близкой

окрестности T_{c0}) и толщине пленки $d = 50 \text{ \AA}$ получим $\lambda_{2d} \simeq \simeq 3.6 \text{ мм}$. При этом энергия кора вихря, $U_{\text{core}} = d\epsilon_0$, мала: $U_{\text{core}}/k_B \simeq 10 \text{ К}$, в то время как полная энергия гораздо больше, $U_1/k_B \simeq 100 \text{ К}$ (мы выбрали здесь для оценки $\xi \simeq 0.1 \text{ мкм}$). Пусть, для примера, $T_{c0} = 5 \text{ К}$. Тогда вероятность найти (на площади порядка размера кора ξ^2) отдельный вихрь, возникший вследствие тепловой флуктуации в бесконечной пленке, будет очень мала, порядка $e^{-U_1/T} \leq 10^{-8}$. Казалось бы, это значит, что такими вихрями всегда можно пренебречь. Однако в бесконечной пленке и число мест, где может находиться каждый вихрь, бесконечно. Для аккуратного анализа надо рассмотреть случай пленки конечного размера L , где есть порядка $(L/\xi)^2$ возможных «посадочных мест» для вихрей.

Поскольку λ_{2d} может быть очень велико, имеет смысл рассмотреть случай размеров L , малых по сравнению с λ_{2d} (мы обсудим влияние конечности длины λ_{2d} позже, в самом конце этого раздела). Тогда энергия вихря равна $U_1(L) = d\epsilon_0 \ln(L/\xi)$, а среднее число вихрей во всей пленке порядка

$$n(L) \simeq (L/\xi)^2 \exp(-U_1(L)/T) = (L/\xi)^{2-\alpha},$$

где $\alpha = \epsilon_0 d / k_B T = \Phi_0^2 / (8\pi^2 \lambda_{2d} k_B T)$. При достаточно низких температурах $\alpha > 2$ и среднее число вихрей во всей пленке убывает с ростом L ; иначе говоря, в большой системе при $k_B T < \epsilon_0 d / 2$ отдельных флуктуационных вихрей нет. Напротив, при $\alpha < 2$ вероятность найти вихрь растет с L . Этот же результат можно выразить немного иначе, определив свободную энергию одиночного вихря по обычным правилам статистической механики как $F_1 = U_1 - TS_1$, где энтропия $S_1 = k_B \ln(L^2/\xi^2)$ есть просто логарифм числа доступных для вихря мест на пленке. Тогда условие $\alpha < 2$ означает, что свободная энергия в расчете на один вихрь отрицательна, то есть вихрям выгодно рождаться (до тех пор, пока их взаимодействие, пока еще нами не учтенное, не остановит этот процесс). Температура $T_{\text{БКТ}} = \Phi_0^2 / (16\pi^2 k_B \lambda_{2d})$, при которой $\alpha = 2$, называется температурой перехода Березинского – Костерлица – Таулеса.

Но состояние пленки со свободными вихрями уже не является сверхпроводящим! Это можно понять с помощью двух различных рассуждений. Во-первых, фаза параметра порядка $\theta(\mathbf{r}, t)$ в каждой точке сверхпроводника сильно зависит (в каждый данный момент времени) от положений всех вихрей, поскольку фаза меняется на 2π при обходе вокруг каждого вихря. Это означает, что вихри, передвигаясь подобно частицам жидкости, приводят к сильным флуктуациям фазы $\theta(\mathbf{r}, t)$. Нетрудно показать, что в случае двумерной жидкости вихрей флуктуации эти столь велики, что среднее значение $\langle e^{i\theta(\mathbf{r}, t)} \rangle$ обращается в нуль. Поэтому обращается в нуль и сверхпроводящий параметр порядка $\Psi \propto \langle e^{i\theta(\mathbf{r}, t)} \rangle$, так что с позиций теории Гинзбурга – Ландау сверхпроводимость отсутствует. Второе рассуждение имеет более «практический» характер. В том случае, когда вихри индуцируются в сверхпроводнике внешним магнитным полем, они обычно образуют решетку, которая зацепляется за примеси и потому остается неподвижной при достаточно малых токах (подробнее это обсуждается в §§ 38, 39, 41). Транспортный ток с плотностью j , большей критического значения j_c , приводит (как будет объяснено в § 40) к движению вихревой решетки, при котором происходит диссипация энергии. Вихри же, возникающие в тонкой пленке вследствие тепловых флуктуаций, взаимодействуют между собой с энергией порядка тепловой и решетки не образуют. Поэтому они не могут и зацепиться за примеси, т. е. движение тепловых вихрей (и потому диссипация) вызывается сколь угодно малым током. Мы пришли к важному выводу: разрушение сверхпроводящего состояния в тонкой пленке происходит в действительности при более низкой температуре, чем это предсказывается в теории Гинзбурга – Ландау, не учитывающей флуктуаций, причем с приближением к температуре $T_{\text{ВКТ}}$ этого перехода *снизу* лондоновская глубина проникновения $\lambda(T)$ остается конечной:

$$\frac{1}{\lambda_{2d}(T_{\text{ВКТ}})} = \frac{d}{2\lambda^2(T_{\text{ВКТ}})} = \frac{16\pi^2 k_{\text{Б}} T_{\text{ВКТ}}}{\Phi_0^2}. \quad (36.3)$$

Иначе говоря, макроскопическая (с учетом вихрей) сверхтекучая

плотность пленки $n_s^{(2)} = n_s d$ испытывает при повышении температуры скачок от значения $n_s^{(2),\min}$, универсальным образом связанный с температурой перехода:

$$n_s^{(2),\min} = \frac{8mk_B T_{\text{БКТ}}}{\pi\hbar^2}, \quad (36.4)$$

до нуля. Найдем, используя теорию Гинзбурга – Ландау, насколько температура БКТ-перехода отличается от «затравочной» критической температуры T_{c0} . Вблизи T_{c0} сверхтекучая плотность $n_s(T) = \mathcal{A}n_s(0)(1 - T/T_{c0})$, где коэффициент \mathcal{A} равен 2 в чистом пределе и примерно 2.6 — в грязном (см. § 51), так что получаем

$$\frac{T_{c0} - T_{\text{БКТ}}}{T_{c0}} \simeq \frac{32\pi^2\lambda^2(0)k_B T_{c0}}{\mathcal{A}\Phi_0^2 d}, \quad (36.5)$$

где $\lambda(0)$ — глубина проникновения при $T \rightarrow 0$. Оценка (36.5) совпадает (с точностью до численного множителя) с приведенной ранее в § 19 оценкой ширины флюктуационной области в двумерной системе Gi^{2D} . Хотя в § 19 мы использовали совсем другие аргументы, не имеющие отношения к вихрям, результат получился такой же. Фактически $T_{\text{БКТ}}$ всегда близко к T_{c0} даже в тонких пленках грязных сверхпроводников: используя (36.5) и формулы из § 51, для грязного предела получим

$$\frac{T_{c0} - T_{\text{БКТ}}}{T_{c0}} \simeq 3\text{Gi}_d^{(2D)} = \frac{3}{16g}, \quad (36.6)$$

где параметр $\text{Gi}_d^{(2D)}$ определен в (19.17). Правая часть (19.17) может стать порядка 1 лишь при g , заметно меньшем единицы, что происходит лишь в окрестности перехода металл – диэлектрик. Во всех остальных случаях зависимость $n_s(T)$ должна иметь вид, изображенный схематически на рис. 36.1. Этот вывод подтвержден экспериментально — путем измерения кинетической индуктивности тонких пленок [101].

Аргументы, которые мы использовали выше, чтобы найти условие $\alpha = 2$ фазового БКТ-перехода, были не вполне строги, однако последовательная теория приводит к точно такому

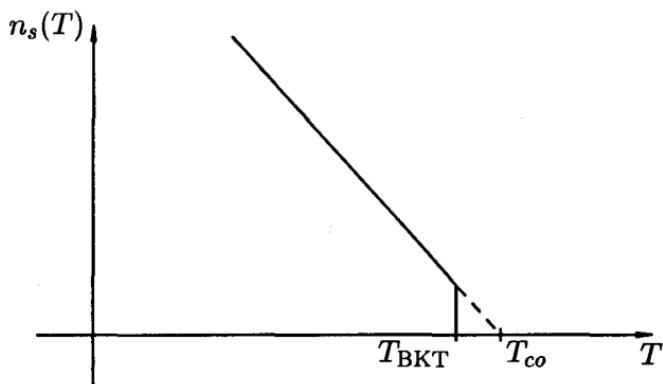


Рис. 36.1. Схематический вид характерной зависимости сверхтекучей плотности от температуры при БКТ-переходе в тонкой сверхпроводящей пленке.

же выводу. Тем не менее, мы сейчас опишем схематически этот более последовательный подход, т. к. эти идеи понадобятся нам ниже при обсуждении вида вольт-амперных характеристик вблизи точки БКТ-перехода.

При $T < T_{\text{БКТ}}$ в системе нет одиночных флюктуационных вихрей, однако существуют пары вихрей с противоположными циркуляциями ($q_1 q_2 = -1$), и вероятность найти такую пару с расстоянием R между вихрями есть $P(R) = \exp(-U_{\text{pair}}(R)/k_B T) \propto \propto (R/\xi)^{-2\alpha}$. Мы можем формально рассматривать вихри как заряженные частицы, а их пары — как нейтральные «вихревые молекулы». Эта аналогия тем более разумна, что в двумерном пространстве обычный кулоновский потенциал точечного заряда (определенный уравнением Гаусса $\epsilon_v \nabla E = -\epsilon_v \nabla^2 \varphi = 2\pi\delta(r)$) логарифмически растет с расстоянием: $\varphi = \epsilon_v^{-1} \ln(r)$. Здесь мы ввели обозначение ϵ_v для «диэлектрической постоянной» газа вихревых молекул. Тогда фазовый переход БКТ можно описать как переход между газом нейтральных вихревых молекул (где величина ϵ_v конечна) и «вихревой плазмой», состоящей из отдельных «заряженных» частиц, где $\epsilon_v \rightarrow \infty$ и «электрическое» поле каждого отдельного «заряда» экранируется другими «зарядами» — вихрями. Начнем с низкотемпературной фазы, где

есть лишь малая плотность вихревых молекул. Они дают вклад в «диэлектрическую восприимчивость» среды $\kappa_v = (\epsilon_v - 1)/2\pi$, пропорциональный среднему квадрату «дипольного момента» вихревой молекулы:

$$\kappa_v \propto \int_{\xi}^L R^2 P(R) 2\pi R dR \propto \int_{\xi}^L \frac{dR}{R^{2\alpha-3}}; \quad \alpha = \frac{\epsilon_0 d}{T \epsilon_v}. \quad (36.7)$$

Как видно из (36.7), при α , стремящемся к 2 сверху, интеграл, определяющий κ_v , начинает логарифмически расходиться как функция размера системы L . Второе равенство в (36.7) учитывает (самосогласованным методом), что параметр α сам зависит от взаимодействия между вихрями (мы здесь подразумеваем, что величина λ , входящая в ϵ_0 , определена в рамках теории Гинзбурга – Ландау и вихрей не учитывает). Самосогласованное уравнение типа (36.7) было выведено в работе Костерлица и Таулеса [98], а его аккуратное решение приведено в последующей работе Костерлица [99] (см. также [34]). Результат этого решения, как можно догадаться уже из (36.7), состоит в том, что $\alpha_{\min} = 2$ сохраняется как точное минимальное значение параметра α при учете всех поправок, что подтверждает универсальность скачка сверхтекущей плотности (36.4). Кроме того, это решение позволяет найти зависимость среднего расстояния между свободными вихрями $R_c(T)$ (т. е. масштаба длины, на котором разрушается сверхпроводимость) при $T > T_{\text{ВКТ}}$:

$$\ln \frac{R_c(T)}{\xi} = b \left(\frac{G_i^{(2D)} T}{T - T_{\text{ВКТ}}} \right)^{1/2}, \quad (36.8)$$

где $\xi(T)$ — обычная сверхпроводящая длина корреляции, определяемая с помощью теории Гинзбурга – Ландау, а b — число порядка единицы. Появление множителя $G_i^{(2D)}$ в правой части (36.8) легко понять: при $\frac{T - T_{\text{ВКТ}}}{T} \geq G_i^{(2D)}$ температура уже столь близка к T_{c0} , что невозможно отличить флюктуационные вихри от обычных флюктуаций, поэтому $R_c(T) \sim \xi(T)$.

Весь предыдущий анализ был основан на логарифмической зависимости энергии пары вихрь – антивихрь от расстояния. На очень больших расстояниях $R \geq \lambda_{2D}$ энергия такой пары перестает расти с R ; иначе говоря, энергия уединенного вихря остается конечной, а потому и отлична от нуля их концентрация при всякой отличной от нуля температуре. Формально говоря, это означает, что двумерный сверхпроводник всегда находится в резистивном состоянии. Однако фактически концентрация вихрей при $T < T_{\text{ВКТ}}$ имеет порядок $e^{-\alpha \ln(\lambda_{2D}/\xi)} < (\xi/\lambda_{2D})^2$, и ею можно пренебречь везде, кроме совсем узкой окрестности $T_{\text{ВКТ}}$, где корреляционный радиус, определяемый уравнением (36.8), мог бы оказаться больше λ_{2D} .

36.2. Вольт-амперные характеристики вблизи БКТ-перехода. В сверхпроводящем состоянии, реализующемся при $T < T_{\text{ВКТ}}$, по определению должно быть равно нулю линейное сопротивление, определяемое как $\rho_{\text{лин}} = (dV/dI)_{I=0}$. Это, однако, не означает, что напряжение должно быть равно нулю при малых токах. В тонкой пленке, как мы сейчас увидим, напряжение при низких температурах растет как высокая степень тока, $V \propto I^{\alpha+1}$. Действительно, рассмотрим «нейтральную» пару вихрей, повернутую перпендикулярно протекающему току с плотностью j , так что сила Лоренца стремится увеличить размер пары R . Полная энергия пары с учетом силы Лоренца равна

$$U_{\text{полн}}(R) = 2\epsilon_0 d \ln \frac{R}{\xi} - jd \frac{\Phi_0}{c} R, \quad (36.9)$$

где j — плотность транспортного тока. При самых больших $R > R^* = (2c\epsilon_0/j\Phi_0)$ второй член в полной энергии всегда больше первого, т. е. внешний ток приводит к разрыву вихревых молекул на отдельные вихри. Иначе говоря, если по пленке протекает транспортный ток, в ней создается ненулевая плотность неспаренных вихрей $n_v(j)$ на единицу площади пленки. Но движение этих вихрей под действием тока приводит к диссипации энергии, т. е. к конечному сопротивлению $\rho(j) \sim n_v(j)\xi^2(T)\rho_n$ (этую оценку легко получить, сравнивая с проведенным в § 40 выводом сопро-

тивления ρ_f в резистивном состоянии). Поэтому нам осталось найти стационарную плотность одиночных вихрей $n_v(j)$ (обоих знаков) при заданной плотности тока j .

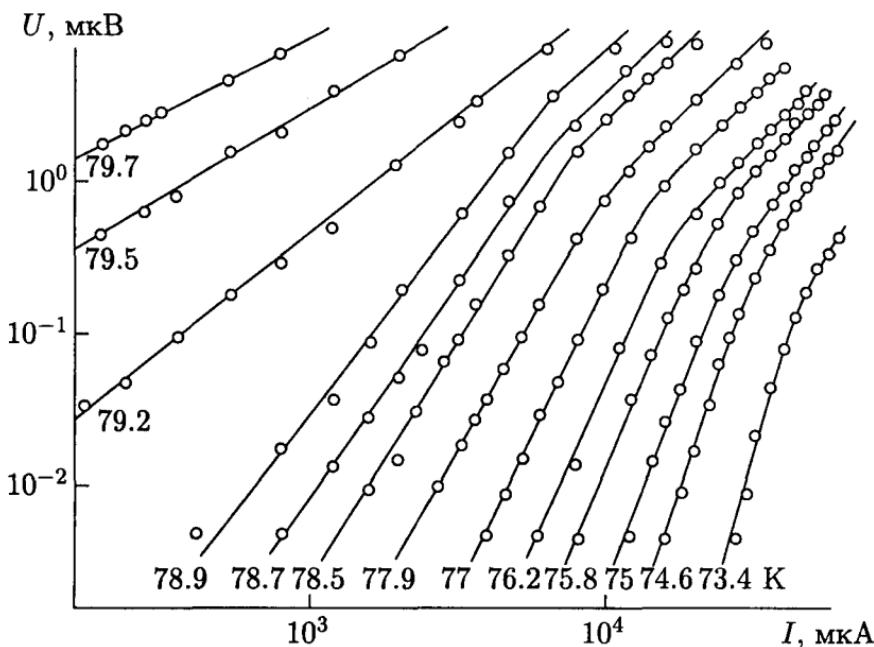


Рис. 36.2. Нелинейные вольт-амперные характеристики монокристалла $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_x$ при различных температурах $T \lesssim T_c$.

Стационарная величина $n_v(j)$ определяется равенством скорости рождения одиночных вихрей Γ_+ из-за разрыва пар током и скорости аннигиляции Γ_- уже имеющихся вихрей противоположных знаков. Величину Γ_+ оценим как вероятность термоактивационного процесса преодоления потенциального барьера $U_{\text{полн}}(R^*) = 2\epsilon_0 d \ln(2\epsilon_0 c / j\Phi_0 \xi)$, определяемого максимумом по R выражения (36.9). Таким образом,

$$\Gamma_+ \sim \Gamma_0 \exp(-U_{\text{полн}}(R^*)/k_B T),$$

где Γ_0 — величина размерности частоты. Величина Γ_- определяется вероятностью (в единицу времени) того, что два вихря про-

тивоположных знаков приближаются на расстояние порядка разме-ра кора $\xi(T)$, после чего аннигилируют. При малой концентрации вихрей, $n_v(j)\xi^2(T) \ll 1$, вероятность такого «столкновения» ви-хрей пропорциональна квадрату их концентрации,

$$\Gamma_- \sim \Gamma_0(n_v(j)\xi^2(T))^2.$$

Таким образом, приравнивая Γ_+ к Γ_- , получаем равновесную концентрацию вихрей

$$n_v(j)\xi^2(T) \sim \exp(-U_{\text{полн}}(R^*)/2k_B T)$$

и для сопротивления получаем

$$\rho(j) \sim \rho_n j \left(\frac{j}{j_T} \right)^\alpha, \quad (36.10)$$

где

$$j_T = \frac{c\Phi_0}{16\pi^2\lambda^2(T)\xi(T)}$$

близко к плотности тока распаривания в теории Гинзбурга – Лан-дау.

Как мы уже знаем, минимальная величина параметра α в низкотемпературной фазе равна 2, так что показатель степени в вольт-амперной характеристики $V(I) \propto I^{1+\alpha}$ испытывает при понижении температуры скачок от 1 к 3. Пример измерения ВАХ, позволившего продемонстрировать существование БКТ-перехода в сильно анизотропном (слоистом) ВТСП монокристалле $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$ [103], показан на рис. 36.2

Зависимость линейного сопротивления от температуры при $T > T_{\text{БКТ}}$ можно определить аналогично выводу (36.10). Выше точки перехода плотность вихрей n_v остается ненулевой при $j \rightarrow -0$: по порядку величины $n_v \sim R_c^{-2}(T)$, где радиус корреляции $R_c(T)$ ведет себя согласно уравнению (36.8). Поэтому для сопро-тивления получаем

$$\rho(T) \sim n_v(T)\xi^2(T)\rho_n \sim \rho_n \exp\left(-2b\left(\frac{\text{Gi}_{2D}T}{T - T_{\text{БКТ}}}\right)\right). \quad (36.11)$$

Зависимость сопротивления вида (36.11) была с хорошей точно-стью подтверждена на эксперименте [102].

§ 37*. Плавление решетки вихрей

В теории Гинзбурга – Ландау – Абрикосова – Горькова фазовый переход в сверхпроводящее состояние в магнитном поле происходит при значении внешнего поля $H_0 = H_{c2}(T)$, когда одновременно появляется сверхпроводящий параметр порядка $\Psi(\mathbf{r}_\perp, z) \neq 0$, периодически зависящий от координат \mathbf{r}_\perp , и возникает решетка вихрей (в центрах которых $\Psi(\mathbf{r}_\perp, z)$ обращается в нуль). С точки зрения изменения симметрии на линии $H_0 = H_{c2}(T)$ одновременно происходят два разных фазовых перехода: нарушается и градиентная инвариантность (параметр порядка Ψ неинвариантен при градиентном преобразовании, см. п. 14.3), и трансляционная инвариантность — поскольку возникает периодическая структура.

В отличие от большинства обычных сверхпроводников, в случае ВТСП тепловыми флуктуациями вблизи фазового перехода пренебрегать нельзя. Даже в отсутствие магнитного поля в $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$ с температурой перехода около 90 К ширина флуктуационной области имеет порядок 1 К, т. е. параметр $G_i \sim \sim 10^{-2}$, и она еще больше в сильно слоистых соединениях типа $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$. Фазовый переход в сверхпроводящее состояние в магнитном поле еще более чувствителен к флуктуационным эффектам: помимо обычных флуктуаций параметра порядка, имеющихся и при $B = 0$, здесь возможны также флуктуации положений вихревых линий в пространстве, которые очень сильно меняют фазу параметра порядка в окрестности каждой такой линии.

Последовательной теории фазового перехода сверхпроводник – металл в магнитном поле, которая учитывала бы флуктуационные эффекты, не создано до сих пор, однако качественную картину происходящего в ВТСП можно понять, рассмотрев решетку вихрей в лондоновском приближении, справедливом при $B \ll H_{c2}(T)$ (подразумевается сверхпроводник с $\kappa \gg 1$, что характерно для ВТСП). В этом случае размер сердцевины вихря ξ мал по сравнению с расстоянием между вихрями $a_0 = \sqrt{\Phi_0/B}$, в большей части сверхпроводника абсолютная величина параметра

порядка $|\Psi|$ близка к ее значению в отсутствие магнитного поля, и решетку вихрей можно рассматривать как аналог обычной кристаллической решетки. Отличие лишь в том, что вихревая решетка состоит из линий (в среднем параллельных направлению z внешнего магнитного поля H_0). Известно, что всякий кристалл плавится при некоторой температуре, когда амплитуда $u_{\text{тепл}} = \sqrt{\langle u^2 \rangle_{\text{тепл}}}$ тепловых флюктуаций атомов (или электронов — если речь идет о вигнеровском кристалле из электронов на поверхности гелия) становится сравнимой с постоянной решетки a_0 . Фактически отношение $u_{\text{тепл}}/a_0$ в точке плавления всегда остается численно малой величиной (называемой постоянной Линдеманна c_L , который и предложил использовать равенство $u_{\text{тепл}} = c_L a_0$ в качестве феноменологического критерия плавления обычных трехмерных кристаллов, где $c_L \simeq 0.1 \div 0.15$). Величину $u_{\text{тепл}}^2$ для вихревой решетки можно вычислить как сумму квадратов амплитуд флюктуаций с определенными волновыми векторами \mathbf{q} — аналогичных обычным фононам. Мы не будем приводить здесь этот вывод (см., например, обзор [96]) и дадим вместо этого простую оценку величины поля плавления решетки $B_m(T)$, качественно справедливую в широком интервале полей, $H_{c1} \ll B \ll H_{c2}$. Чтобы ее получить, приравняем по порядку величины тепловую энергию $k_B T$ и энергию $E_{\text{упр}}$ сильной ($|\delta u| \sim a_0$) деформации вихревой решетки в объеме порядка a_0^3 . Для таких коротковолновых возмущений нет существенного различия между деформациями сжатия и сдвига, и потому $E_{\text{упр}}$ можно оценить просто через характерное значение энергии взаимодействия вихрей на длине порядка постоянной решетки: $E_{\text{упр}} \sim \epsilon_0 a_0$, где $\epsilon_0 = (\Phi_0 / 4\pi\lambda)^2$. Приравнивая полученную таким образом величину $E_{\text{упр}}$ к тепловой энергии, получим для поля плавления решетки

$$B_m(T) \propto \frac{\Phi_0}{(k_B T)^2} \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda} \right)^4 \propto (1 - T/T_c)^2 \quad \text{при } T \rightarrow T_c. \quad (37.1)$$

Мы получили важный и несколько неожиданный результат: поле плавления решетки убывает с повышением температуры быстрее,

чем верхнее (и нижнее) критическое поле, которое ведет себя линейно вблизи температуры перехода, $H_{c2} \propto (1 - T/T_c)$. Вспоминая определение ширины флуктуационной области Gi , данное в § 19, оценку (37.1) для поля плавления решетки можно записать в виде

$$\frac{B_m(T)}{H_{c2}(T)} = \alpha_m \frac{1 - T/T_c}{Gi}, \quad (37.2)$$

где α_m — численный коэффициент. Более аккуратные аналитические [96] и численные [104] расчеты тоже приводят к результату (37.2), а также показывают, что α_m весьма мало, $\alpha_m \sim 2 \cdot 10^{-2}$ (иначе этот результат может быть выражен в виде значения $k_B T_m(B)/\epsilon_0 a_0 \simeq 0.1$). Численные расчеты [104] позволяют определить и величину параметра Линдеманна для плавления вихревой решетки, $c_L \simeq 0.25$. Результат для линии плавления в форме (37.2) остается справедлив и для анизотропных сверхпроводников типа $YBa_2Cu_3O_{7-x}$, когда исходное выражение (37.1) должно быть модифицировано для учета анизотропии (поскольку характерный пространственный масштаб деформаций в направлении вихрей z теперь отличается от a_0 и имеет порядок ϵa_0 , получаем $k_B T_m(B)/\epsilon_0 a_0 \simeq 0.1\epsilon$). Для сильно слоистых соединений типа $Bi_2Sr_2CaCu_2O_8$ оценка для линии $B_m(T)$ несколько отличается от (37.2), но качественно картина остается той же.

Конечно, оценка (37.2) имеет смысл лишь вне области сильных флуктуаций параметра порядка, т. е. при $(1 - T/T_c) \geq Gi$. Кроме того, отношение B_m/H_{c2} должно быть мало, поскольку иначе энергия деформации оказывается [105] существенно меньше, чем использованная оценка $E_{\text{упр}} \sim \epsilon_0 a_0$. Эти два условия оказываются совместны в области температур $Gi \ll (1 - T/T_c) \ll \ll Gi \cdot \alpha_m^{-1}$ в силу малости числа α_m . В результате мы приходим к важному выводу: в некотором интервале температур вблизи T_c смешанное состояние сверхпроводника II рода в форме решетки вихрей неустойчиво по отношению к тепловым флуктуациям — уже при полях B существенно меньших, чем H_{c2} . Обычно плавление кристаллической решетки — фазовый переход I рода (с ненулевым скачком энтропии и плотности). Плотность вихрей пропорциональна магнитной индукции B , поэтому если пла-

вление вихревой решетки — переход I рода, то на линии перехода должен наблюдаться скачок равновесной намагниченности образца. Именно такой результат был получен в очень красивых экспериментах [106, 107], где фазовые переходы плавления вихревой решетки в очень чистых монокристаллах $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$ и $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$ были зарегистрированы по слабым скачкам локального значения равновесной намагниченности $\Delta M_{\text{плавл}}$. В полях $B > B_m(T)$ в смешанном состоянии вихревые линии образуют жидкость. Количественной теории этого нового состояния пока не существует; также не вполне ясно, какой смысл следует придавать верхнему критическому полю H_{c2} , когда оно заметно превышает поле плавления $B_m(T)$. В любом случае, эти вопросы имеют практический смысл почти исключительно для высокотемпературных сверхпроводников — в большинстве остальных материалов величина G_i очень мала и эффекты плавления решетки почти ненаблюдаются. В то же время для ВТСП наблюдаемые следствия плавления вихревой решетки весьма важны, они определяют собой аномальное поведение вольт-амперных характеристик в смешанном состоянии при относительно высоких полях и температурах. Мы рассмотрим эти явления ниже в § 42.

§ 38. Критический ток в сверхпроводниках второго рода. Критическое состояние

Если сверхпроводник второго рода находится в смешанном состоянии и в направлении, перпендикулярном вихрям, идет транспортный ток (т. е. ток, созданный каким-то внешним источником), то на вихри действует сила Лоренца. Если бы сверхпроводник был совершенно однороден, бездефектен, то при любой, сколь угодно малой силе Лоренца, вихри бы начали свое движение под действием этой силы.

В § 40 будет показано, что такое движение сопровождается диссилиацией энергии. Это означает, что у такого абсолютно однородного образца критический ток равен нулю.

В неоднородном сверхпроводнике второго рода, когда существуют разные виды дефектов (границы зерен, включения дру-

гой фазы, дислокационные стенки, скопления дислокаций, поры и т. п.), вихри могут на них закрепиться. Тогда требуется уже конечный транспортный ток для начала движения вихрей. Этот ток создает такую силу Лоренца, действующую на вихри, которой достаточно для отрыва вихрей от дефектов. Эти дефекты часто называются центрами пиннинга, а закрепление на них вихрей — пиннингом.¹⁾ Плотность тока, при котором начинается отрыв вихрей от центров пиннинга, называется критической плотностью тока j_c .

Критическая плотность тока может очень сильно (на несколько порядков) меняться в результате термомеханической обработки материала, так как является чрезвычайно структурно чувствительным свойством. При этом критическая температура T_c и второе критическое поле H_{c2} могут практически не изменяться. У некоторых сверхпроводников, предназначенных для использования в сверхпроводящих магнитах или других сверхпроводящих устройствах, величина критического тока может достигать значений порядка 10^6 A/cm^2 . Такого же порядка величины, до $5 \cdot 10^6 \text{ A/cm}^2$, достигают критические токи в не очень чистых кристаллах $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$ и других ВТСП при низких температурах.

Рассмотрим механизм протекания критического тока через сверхпроводник второго рода, в котором имеется много центров пиннинга. Для того чтобы транспортный ток шел по всему сечению сверхпроводника, необходимо, чтобы существовало неоднородное распределение вихрей. Действительно, плотность полного тока, текущего в данном месте, равна

$$j_{\text{тр}} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{B}, \quad (38.1)$$

но $B = \Phi_0 n$ — среднее поле в данном месте, т. е. напряженность магнитного поля, усредненная по области, размер которой намного больше расстояния между вихрями, n — средняя плотность

¹⁾От английского слова pin — булавка. Дословно pinning — это пришивание.

вихрей в данном месте. Из (38.1) следует, что j_{tr} отличен от нуля в данном месте, если плотность вихрей $n = n(r)$.

Теперь нам надо понять, как возникает такое состояние, когда по всему сечению сверхпроводника устанавливается критическая плотность тока.

Пусть бесконечная пластина толщины d содержит очень много дефектов, на которых сверхпроводящие вихри могут хорошо закрепляться, при этом $d \gg \lambda$. Поверхности пластин совпадают с плоскостями $x = \pm d/2$. Внешнее магнитное поле H_0 пока отсутствует. Начнем пропускать транспортный ток через пластину (в направлении оси y). Сначала, как и у бездефектного сверхпроводника, ток пойдет по поверхности пластины (эффект Мейсснера – Оксенфельда). Когда поле, созданное током на поверхностях, H_I , превысит поле H_{c1} материала пластины, внутрь пластины проникнут вихри. Они будут иметь разные направления на противоположных сторонах. Но далеко внутрь они не проникнут, так как закрепляются на неоднородностях пластины. При этом возникает градиент их плотности. Ясно, что это будет максимально возможный градиент, т. е. такой, который обеспечивает протекание критического тока. Итак, некоторая область вблизи поверхностей пластины будет нести критический ток, а остальная часть пластины вообще тока нести не будет. Это схематически изображено на рис. 38.1, *a*, где показано распределение магнитного поля внутри пластины при токе через пластину, равном I_1 (на единицу высоты пластины вдоль оси z).

Увеличим теперь ток до величины I_2 . Вихри, сохранив критический градиент плотности $(\nabla n)_c$, продвинутся ближе к центру. Теперь только центральная часть пластины свободна от транспортного тока, а остальная часть пластины несет ток, плотность которого равна критической. Если продолжать увеличивать ток через пластину, мы придем к такому току I_c , когда в любой точке пластины плотность тока будет критической. Все это изображено на рис. 38.1, *a*.

Такое состояние, когда в любом месте поперечного сечения пластины течет критический ток, называется критическим состоянием.

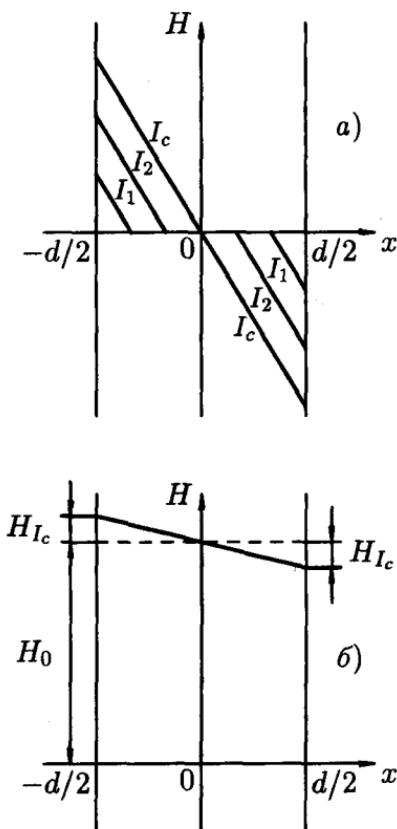


Рис. 38.1. Распределение поля в пластине (толщины d) с центрами пиннинга, когда по пластине течет ток I : а) внешнее поле отсутствует, $I_1 < I_2 < I_c$ — токи в пластине; б) случай пластины с током и во внешнем поле. Показано распределение в критическом состоянии.

Наложим теперь внешнее магнитное поле H_0 , параллельное поверхности пластины и перпендикулярное току, т. е. поле H_0 параллельно оси z . Предположим, что $H_0 \gg H_I$. Тогда распределение тока в пластине в критическом состоянии будет таким, как показано на рис. 38.1, б. Пренебрегая небольшой разницей в полях $H_0 + H_I$ и $H_0 - H_I$, можно считать, что все точки проводника находятся в поле H_0 . Плотность критического тока в поле H_0 меньше, чем в отсутствие поля, поэтому критический градиент плотности вихрей меньше.

Действительно, если сила Лоренца, действующая на единицу длины вихря, равна $f_L = j_{tr}\Phi_0/c$, то сила Лоренца, отнесенная к единице объема, равна $F_L = j_{tr}B/c$, поскольку суммарная длина всех вихрей в единице объема равна $n = B/\Phi_0$. Эта сила уравно-

вешивается в стационарном состоянии силой закрепления вихрей на неоднородностях. Пусть удельная сила закрепления (пиннинга) вихрей в единице объема равна F_p . Тогда критический ток должен удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{c} j_c B = F_p. \quad (38.2)$$

Если предположить, что F_p не зависит от внешнего поля H_0 , то получим $j_c \propto B^{-1}$. Такая зависимость критического тока от внешнего поля наблюдалась во многих экспериментах.

Если дефекты структуры сверхпроводника, т. е. центры пиннинга, распределены хаотично, то абсолютно жесткая решетка вихрей на них не может закрепиться. Чтобы это стало понятно, сдвинем мысленно такую решетку на малое расстояние в направлении действия силы Лоренца. Очевидно, что энергия системы при этом не изменяется, так как новое хаотическое расположение центров пиннинга относительно жесткой вихревой решетки ничем не отличается в принципе от старого. А раз нет изменения энергии, то нет и возвращающей силы, нет и пиннинга.

Совсем другая картина возникает, если предположить, что решетка вихрей — это упругая среда. Тогда вихри каждый раз будут подстраиваться к данному хаотическому распределению центров пиннинга так, чтобы вся система вихрей имела минимум энергии. Поэтому теперь уже будет нужно некоторое усилие, чтобы, сдвинув вихри, превзойти предел возвращающей силы и оторвать их от центров пиннинга. Ясно поэтому, что чем «мягче» решетка вихрей, чем она податливее, тем больше сила пиннинга.

Расчеты [108] показали, что модули упругости вихревой решетки уменьшаются при $H_0 \rightarrow H_{c2}$. Решетка становится мягче, а пиннинг сильнее. Это приводит к довольно часто наблюдаемому пику критического тока при $H_0 \sim H_{c2}$ (рис. 38.2). Подробнее этот вопрос мы рассмотрим в конце § 41.

§ 39. Взаимодействие вихрей с центрами пиннинга

Существует очень много видов дефектов, с которыми взаимодействуют сверхпроводящие вихри, и это взаимодействие обес-

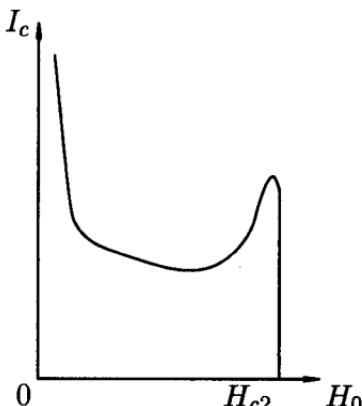


Рис. 38.2. Зависимость критического тока от поперечного магнитного поля. Виден сильный пик-эффект при $H_0 \simeq H_{c2}$.

печивает высокие значения критического тока. В этом параграфе мы познакомимся с простейшими дефектами и рассмотрим физический механизм взаимодействия с ними сверхпроводящих вихрей. Необходимо, однако, учитывать, что не всякие дефекты эффективно взаимодействуют с вихрями. Так, вакансии, одиночные примесные атомы и подобные «мелкие» дефекты неэффективны. Это и понятно, ведь характерный размер вихря — длина когерентности — намного превосходит атомный размер — характерный размер такого «мелкого» дефекта. Вихрь просто «не замечает» такие мелочи.¹⁾ Наоборот, структурные дефекты с размерами порядка ξ и больше являются весьма эффективными и могут обеспечить большие плотности критического тока.

39.1. Взаимодействие вихрей с плоской поверхностью сверхпроводника. Рассмотрим для определенности плоскую идеально однородную пластину из сверхпроводника второго рода толщиной $d \gg \lambda$. Внешнее магнитное поле H_0 направлено параллельно плоскости пластины, причем $\kappa \gg 1$, $H_{c1} \ll H_0 \ll H_{c2}$. Это значит, что в пластине существует треугольная вихревая решетка, причем период решетки $a_0 \ll d$. Подробный расчет

¹⁾Это утверждение не является вполне точным: при достаточно большой концентрации мелкие дефекты могут приводить к пиннингу вихрей, действуя совместно. Это явление называется коллективным пиннингом и рассмотрено в § 41.

показывает, что крайний вихревой ряд находится от края пластины на расстоянии порядка a_0 и что a_0 с достаточно хорошей точностью можно считать постоянным по всей пластине.

При включении слабого транспортного тока вдоль пластины перпендикулярно магнитному полю на одной из сторон пластины возникает магнитное поле $H_0 + H_I$, а на другой — соответственно, $H_0 - H_I$, где H_I — поле, созданное транспортным током. Нам уже известно, что устойчивого состояния с градиентом плотностей вихрей в однородном сверхпроводнике не может быть, поэтому реакцией всей вихревой структуры на такой транспортный ток должно быть жесткое смещение всей структуры как единого целого в направлении силы Лоренца. Поскольку вихри до смещения находились в состоянии устойчивого равновесия, после достаточно малого смещения должна возникнуть возвращающая сила. Вся структура будет упруго смещена на некоторое расстояние, определяемое равенством силы Лоренца и возвращающей силы. Если сила Лоренца сможет вопреки возвращающей силе сдвинуть вихри на расстояние порядка a_0 , то вихри будут двигаться уже непрерывно. Действительно, теперь с одной стороны пластиинки крайний вихревой ряд выходит на край и уничтожается своим изображением, а с другой стороны пластиинки — уходит на расстояние порядка a_0 и оставляет место для вхождения в пластиинку нового вихревого ряда. Этот новый ряд незамедлительно в нее войдет, и вся структура под влиянием того же транспортного тока снова сместится на расстояние порядка a_0 и т. д. Отсюда можно заключить, что транспортный ток, который вызывает смещение структуры на величину порядка a_0 , естественно назвать критическим.

В состоянии термодинамического равновесия по поверхности сверхпроводника протекает ток намагничивания I_M , определяемый разностью между полем H_0 на поверхности и средним полем B внутри:

$$I_M = \frac{c}{4\pi} |B - H_0| = cM.$$

Плотность тока намагничивания можно записать в виде

$$j_M = \frac{c|M|}{\lambda} e^{-x/\lambda}, \quad (39.1)$$

где x — расстояние данной точки от края пластины. На вихрь, находящийся на расстоянии x от края, действует, таким образом, сила Лоренца

$$f_M = \frac{1}{c} j_M \Phi_0 = \frac{|M|\Phi_0}{\lambda} e^{-x/\lambda}.$$

Если вихрь сместился на малое расстояние δx , то f_M изменилась на величину δf_M :

$$|\delta f_M| = \frac{M\Phi_0}{\lambda^2} e^{-x/\lambda} \delta x.$$

Сила f_M действует только на вихри, находящиеся на расстоянии порядка λ от края, поэтому полное изменение силы, действующей на вихри, при смещении их на расстояние δx будет

$$\frac{|M|\Phi_0}{\lambda^2} \delta x \frac{\lambda}{a_0}.$$

Если теперь умножить это выражение на количество вихрей, лежащих на единичном отрезке вдоль направления транспортного тока, т. е. на $1/a_0$, и умножить на 2, чтобы учесть существование другого края пластины, то мы получим окончательное выражение для возвращающей силы $F_{\text{возвр}}$, приходящейся на единицу площади поверхности пластины:

$$F_{\text{возвр}} = \frac{2|M|\Phi_0}{\lambda a_0^2} \delta x. \quad (39.2)$$

Учитывая, что $a_0^2 \simeq \Phi_0/B$, имеем

$$F_{\text{возвр}} = \frac{2|M|B}{\lambda} \delta x. \quad (39.3)$$

Условием равновесия, как мы уже отмечали, будет равенство этой силы силе Лоренца, тоже отнесенной к единице поверхности пластины:

$$\mathcal{F}_L = \frac{1}{c} I_{\text{тр}} B, \quad (39.4)$$

где I_{tr} — транспортный ток, текущий по пластине и отнесенный к единице длины пластины в направлении, перпендикулярном току. Транспортный ток достигает критического значения, когда δx становится равным $a_0 \simeq (\Phi_0/B)^{1/2}$. Подставляя это выражение в (39.3) и приравнивая выражению (39.4), получим

$$I_c = \frac{2c|M|\sqrt{\Phi_0}}{\lambda\sqrt{Bd}}. \quad (39.5)$$

Средняя по сечению пластины плотность критического тока будет

$$j_c = \frac{2c|M|\sqrt{\Phi_0}}{\lambda\sqrt{Bd}}. \quad (39.6)$$

Эта формула хорошо подтверждена экспериментом.

Итак, подведем некоторые итоги. Обрисуем кратко, как мы теперь себе представляем протекание транспортного тока по пластине, находящейся в смешанном состоянии. Если ток меньше критического, то вихревая структура как единое целое упруго смещается на некоторое расстояние $\delta x < a_0$ под действием силы Лоренца. При этом сила Лоренца уравновешивается возникшей возвращающей силой и вихревая решетка становится неподвижной. Период решетки всюду постоянен, поэтому в объеме пластины транспортный ток равен нулю. Следовательно, транспортный ток течет только вдоль поверхностей пластины в слое порядка глубины проникновения λ .

Оценим величину предельного транспортного тока, т. е. критический ток. Пусть $H_{c1} \sim 100 \text{ Э}$, $H_{c2} \sim 10^5 \text{ Э}$, $B \sim 10^4 \text{ Гс}$, $\lambda \sim 10^{-5} \text{ см}$, $d \sim 10^{-4} \text{ см}$. Оценка для $|M|$ дает величину порядка 1 Гс. Подставляя эти значения в формулу (39.6), имеем

$$j_c \sim 10^5 \text{ А/см}^2.$$

Таким образом, даже однородные сверхпроводящие пластины в смешанном состоянии способны нести значительный транспортный ток. А теперь представим себе, что толстая массивная сверхпроводящая пластина представляет собой набор таких тонких

сверхпроводящих пластин, отделенных друг от друга слоем диэлектрика или нормального металла. Теперь транспортный ток может течь по каждой из этих пластин (конечно, каждый раз в слое толщиной порядка λ около краев этих пластин), и в целом по всему сечению нашего композитного сверхпроводника будет идти большой транспортный ток.

Формула (39.6) нашла надежное экспериментальное подтверждение в работе Кемпбелла, Иветса и Дью-Хьюза [109], в которой изучалось взаимодействие вихревых нитей с частицами нормальной фазы в эвтектическом сплаве Pb–Bi.

39.2. Взаимодействие вихря с полостью в сверхпроводнике. Пусть в безграничном сверхпроводнике имеется дефект в виде цилиндрической полости. Как взаимодействует с такой полостью одиничный вихрь, расположенный параллельно полости?

Пусть диаметр полости d удовлетворяет неравенству $d > \xi(T)$. В этом случае оценка энергии взаимодействия проводится совсем просто. Если вихрь находится далеко от полости, то в его сердцевине (диаметра порядка 2ξ) сосредоточена положительная энергия (относительно состояния сверхпроводника без вихря), так как сердцевина вихря нормальна, а свободная энергия нормального состояния больше энергии сверхпроводящего состояния на величину $H_{cm}^2/8\pi$ на каждую единицу объема. Значит, в сердцевине вихря на каждую единицу его длины сосредоточена энергия, по порядку величины равная

$$\frac{H_{cm}^2}{8\pi} \pi \xi^2. \quad (39.7)$$

Если же вихрь проходит через полость, т. е. просто захвачен полостью, то у него нет нормальной сердцевины и, соответственно, энергия всей системы меньше на величину (39.7). Отсюда следует, что вихрь притягивается к полости. Силу взаимодействия на единицу длины f_p легко найдем, если учтем, что энергия меняется на величину (39.7) при смещении вихря около края полости на

расстояние порядка ξ (подробнее см. в статье [110]):

$$f_p \simeq H_{cm}^2 \xi / 8. \quad (39.8)$$

Если в сверхпроводнике имеется не цилиндрическая полость, а пора в виде приблизительно шаровой полости (размер d), то силу закрепления вихря на полости f_{pd} получим из (39.8):

$$f_{pd} \simeq H_{cm}^2 \xi d / 8. \quad (39.9)$$

Чтобы оценить, насколько эта сила велика, найдем, какой ток нужно пропустить перпендикулярно вихрю, чтобы он создал силу Лоренца, которая преодолела бы эту силу f_{pd} .

Сила Лоренца, приходящаяся на единицу длины вихря, как известно, равна $j\Phi_0/c$. Следовательно, на часть длины вихря, которая взаимодействует с дефектом, придется сила $j\Phi_0 d/c$. Приравнивая ее силе f_{pd} (39.9), получим

$$j = \frac{cH_{cm}^2}{8\Phi_0} \xi. \quad (39.10)$$

Поскольку $H_{cm} = \Phi_0/(2\sqrt{2}\pi\lambda\xi)$ (см. (15.8)), легко получим из (39.10)

$$j = \frac{cH_{cm}}{16\sqrt{2}\pi\lambda}.$$

Сравнивая эту формулу с критическим током распаривания, который мы изучали в § 18, мы увидим, что получили величину того же порядка. Таким образом, чтобы оторвать вихрь от поры, нужно пропустить максимально возможный для сверхпроводника ток.

Если внутри сверхпроводника будут присутствовать микроскопические включения диэлектрика, то все предыдущие рассуждения сохранят свою силу. Если же это будут включения другого несверхпроводящего металла, то и в этом случае рассуждения останутся справедливыми (по крайней мере, по порядку величины), если размер включений будет больше ξ . Действительно, так называемый эффект близости существен, грубо говоря, только

на расстояниях порядка ξ от границы. Таким образом, различные нормальные включения являются весьма эффективными центрами закрепления вихрей в сверхпроводнике, т. е. центрами пиннинга. Этим свойством широко пользуются на практике, когда с помощью металлургической обработки добиваются существенного увеличения токонесущей способности сверхпроводящего материала.

Рассмотрим пример сплава Nb – Ti, который используется во многих сверхпроводящих устройствах, где требуются большие критические токи. Закаленную при 800°C проволоку сплава подвергают кратковременному (порядка 30 минут) отжигу при температуре около 400°C . При этом сверхпроводящая матрица β -фазы начинает распадаться с выделением микроскопических включений несверхпроводящей α -фазы. В результате критический ток возрастает на несколько порядков.

Кроме перечисленных дефектов, эффективными центрами пиннинга являются также дислокации, дислокационные ячейки, границы зерен, границы между двумя различными сверхпроводниками.

При исследовании ВТСП часто используется метод облучения сверхпроводящих кристаллов тяжелыми ионами (например, свинца) с энергией в несколько ГэВ. Тяжелые ионы «прошивают» тонкие монокристаллы насеквоздь, создавая т. наз. колончатые («columnar») дефекты — цилиндрические области диаметром порядка 10 нм, в которых материал переведен в несверхпроводящее состояние. Такие дефекты резко увеличивают критический ток ВТСП-материалов, особенно при относительно высоких температурах.

Задача 39.1. Идеально однородная пластинка имеет ширину $l = 5\text{ mm}$ и находится во внешнем магнитном поле $H_0 \approx B = 18\text{ kG}$, параллельном широкой стороне и перпендикулярном току, $H_{c2} = 75\text{ kA}$, $H_{c1} = 130\text{ A}$. Оценить критический ток пластинки.

Решение. Используя формулы (29.7) и (31.3), находим $\kappa = 31$. Из (29.7) находим $\lambda = 2.1 \cdot 10^{-5}\text{ см}$. Аппроксимируя кривую намагничивания $|M|$ двумя треугольниками (рис. 32.1) и используя формулу (39.5), имеем окончательно

$$I_c = \frac{2c\sqrt{\Phi_0 l}}{\lambda\sqrt{B}} \frac{H_{c1}}{4\pi} \frac{H_{c2} - B}{H_{c2} - H_{c1}} \approx 13\text{ A}.$$

§ 40. Резистивное состояние

Рассмотрим теперь, что происходит, когда сила Лоренца, созданная транспортным током, превзойдет силу пиннинга, и вихри придут в движение, т. е. когда начнется течение вихрей по перек транспортного тока.

Мы сейчас покажем, что в этом случае возникнет диссипация энергии, возникнет электрическое сопротивление. Поэтому такое состояние называется резистивным.

Возникшее течение магнитного поля создает по закону электромагнитной индукции Фарадея электрическое поле E . Это поле будет направлено по току.¹⁾ Это значит, что в объеме сверхпроводника возникает диссипация энергии $Ej_{\text{тр}}$. Пусть уставившаяся скорость течения вихрей в направлении силы Лоренца, т. е. перпендикулярно току и магнитному полю, будет v_L . Работа в единицу времени, затраченная внешним источником на это передвижение вихрей, будет равна $F_L v_L$, где F_L — плотность силы Лоренца. Ясно, что это и есть та энергия, которая выделяется в единице объема в единицу времени, т. е.

$$F_L v_L = E j_{\text{тр}}. \quad (40.1)$$

Учитывая, что $F_L = j_{\text{тр}} B / c$, получим

$$E = B v_L / c. \quad (40.2)$$

Удельное сопротивление сверхпроводника, которое возникает при течении магнитного потока в направлении поперек транспортного тока, называется сопротивлением течения потока (flux-flow) и обозначается ρ_f :

$$\rho_f = E / j_{\text{тр}}. \quad (40.3)$$

Поскольку движение вихрей сопровождается, как мы видим, выделением энергии, можно считать, что вихри движутся в вязкой среде, и ввести некоторый коэффициент вязкого трения η по

¹⁾ В этих рассуждениях мы пренебрегли влиянием эффекта Холла.

обычной формуле

$$f_{\text{трения}} = -\eta v_L,$$

где $f_{\text{трения}}$ — это сила трения, которую испытывает один вихрь, движущийся со скоростью v_L . Пренебрегая массой вихря, имеем уравнение движения вихря в виде

$$f_{\text{трения}} + f_L = 0.$$

Переходя к силам, действующим в единице объема, получим

$$\frac{B}{\Phi_0} \eta v_L = \frac{1}{c} B j_{\text{тр}}. \quad (40.4)$$

Используя теперь формулы (40.2) и (40.3), преобразуем (40.4) к виду

$$\rho_f = \Phi_0 B / c^2 \eta. \quad (40.5)$$

Если η не зависит от магнитного поля, то ρ_f будет линейной функцией B . При низких температурах эксперимент действительно дает такую зависимость ρ_f от поля.

Используя результаты эксперимента для $T \rightarrow 0$, имеем

$$\rho_n = \Phi_0 H_{c2} / c^2 \eta,$$

что может служить для определения значения коэффициента вязкости η при низких температурах:

$$\eta = H_{c2}(0) \Phi_0 / c^2 \rho_n. \quad (40.6)$$

Здесь ρ_n — это удельное сопротивление сверхпроводника в нормальном состоянии.

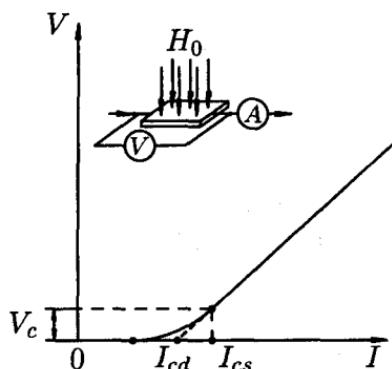
Интересно оценить порядок скорости движения вихрей в реальной экспериментальной ситуации. Пусть в сверхпроводнике, находящемся в резистивном состоянии, возникло электрическое поле $E \sim 10^{-6}$ В/см при индукции $B \sim 10^4$ Гс. Тогда, согласно (40.2), имеем

$$v_L = \frac{cE}{B} = 3 \cdot 10^{10} \frac{10^{-6}}{300} \cdot \frac{1}{10^4} = 10^{-2} \text{ см/с.}$$

Вольт-амперная характеристика сверхпроводника в резистивном состоянии показана на рис. 40.1. Она начинается с некоторого значения тока (критического тока) и при малых напряжениях имеет нелинейный характер. В этой нелинейной области в сверхпроводнике еще нет сплошного установившегося течения вихрей. Они случайным образом перескакивают от одного центра пиннинга к другому, это область ползучести, крипа вихревой структуры.

При больших токах вольт-амперная характеристика становится линейной. Здесь уже имеет место течение вихревой структуры как целого.

Рис. 40.1. Вольт-амперная характеристика сверхпроводника второго рода со структурными дефектами. Показано два разных способа определения критического тока: I_{cs} — статический критический ток, I_{cd} — динамический.



Существуют два определения критического тока. Ток, при котором начинается срыв вихрей с центров пиннинга, т. е. ток I_{cs} , с которого начинается вольт-амперная характеристика, называется статическим критическим током. Его определение зависит от чувствительности того вольтметра, с помощью которого замечают первые признаки напряжения (обычно порядка 10^{-6} В) на образце. Были проведены специальные эксперименты [111], чтобы выяснить, насколько зависит определение критического тока от уровня чувствительности вольтметра. Оказалось, что при внешнем поле $H_0 \ll H_{c2}$ увеличение чувствительности на много порядков очень несущественно изменяет определение критического тока обычных низкотемпературных сверхпроводников. Для ВТСП дело обстоит заметно сложнее, мы обсудим этот вопрос ниже в § 42.

Другое определение критического тока — динамический критический ток I_{cd} . Этот ток определяется по экстраполяции прямолинейного участка вольт-амперной характеристики до пересечения с осью токов.

Отметим в заключение некоторую общность, которую можно усмотреть между джозефсоновским переходом в режиме джозефсоновской генерации и сверхпроводником второго рода в резистивном состоянии [112].

Пусть массивный сверхпроводник второго рода находится в резистивном состоянии со средней индукцией B . Примем для простоты (это никак не ограничивает общность наших рассуждений), что вихри образуют квадратную решетку (рис. 40.2).

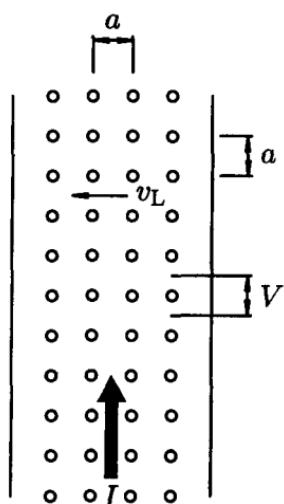


Рис. 40.2. Вихревая структура в сверхпроводнике второго рода движется под действием силы Лоренца со скоростью v_L .

Протекающий транспортный ток I создает силу Лоренца, под влиянием которой вся вихревая структура движется со скоростью v_L .

При этом в сверхпроводнике возникает электрическое поле

$$E = \frac{1}{c} B v_L,$$

а средняя разность потенциалов \bar{V} на длине a_0 периода вихревой

решетки (см. рис. 40.2) будет равна

$$\bar{V} = \frac{a_0}{c} B v_L. \quad (40.7)$$

Ясно, что смещение вихревой решетки трансляционно симметрично с периодом a_0 , поэтому можно ожидать, что в напряжении V будет присутствовать переменная составляющая с частотой

$$\omega = 2\pi \frac{v_L}{a_0}. \quad (40.8)$$

Выражая отсюда v_L и подставляя в (40.7), имеем

$$\bar{V} = \omega B a_0^2 / 2\pi c.$$

Но $B a_0^2$ — это магнитный поток, связанный с одним вихрем, т. е. квант потока Φ_0 ($\Phi_0 = \pi \hbar c / e$). Отсюда

$$\bar{V} = \hbar \omega / 2e,$$

т. е. получается формула (22.8).

В сверхпроводниках второго рода, находящихся в резистивном состоянии, такую генерацию трудно обнаружить потому, что из-за структурных неоднородностей сверхпроводника вихревая решетка движется не как единое целое, ламинарно, а весьма хаотичным образом, турбулентно. Однако если специально позаботиться об упорядочении движения решетки, можно наблюдать явления, характерные для нестационарного эффекта Джозефсона [113].

Задача 40.1. Оценить сопротивление течения потока ρ_f , если внешнее поле $H_0 = 5 \cdot 10^3$ Э, $T_c = 10$ К, $H_{c2}(4.2$ К) = 40 кЭ, остаточное удельное сопротивление образца в нормальном состоянии $\rho_n = 3 \cdot 10^{-5}$ Ом · см.

Решение. Из формул (40.5) и (40.6) следует, что $\rho_f = \rho_n B / H_{c2}(0)$. Принимая приближенно $H_{c2}(T) = H_{c2}(0)(1 - T^2/T_c^2)$ и $B = H_0$, имеем $\rho_f = 3 \times 10^{-6}$ Ом · см.

Задача 40.2. С какой скоростью v_L движутся вихри в проволоке, находящейся в резистивном состоянии, если проволока длиной $l = 8$ см находится в магнитном поле $B = 5$ Тл и при этом на ней падает напряжение $U = 15$ мкВ.

Oтвет. $v_L = U/lB = 3.75 \cdot 10^{-5}$ м/с.

§ 41*. Коллективный пиннинг вихрей слабыми дефектами

41.1. Одиночный вихрь в поле слабых примесей. Как уже упоминалось выше в § 39, дефекты кристаллической решетки с размером порядка атомного очень слабо взаимодействуют с вихрями, поскольку размер кора вихря ξ обычно весьма велик в атомном масштабе. Тем не менее, вихрь может быть эффективно зацеплен и такими дефектами, если их плотность достаточно велика. В таком случае говорят о *коллективном пиннинге* вихрей на многих дефектах одновременно. Такие слабые дефекты — это, например, кислородные вакансии в высокотемпературных сверхпроводниках (ВТСП) и атомные примеси Та (замещающие атомы Nb) в слоистом соединении NbSe₂. Теория коллективного пиннинга была развита в работах Ларкина и др. [114, 115, 96, 116]. В этом параграфе мы опишем качественный подход, позволяющий оценить величину критического тока при коллективном пиннинге.

Начнем с самого простого случая: одна вихревая линия в поле слабых дефектов. Как мы знаем (см. (29.3)), вихрь в изотропном чистом сверхпроводнике обладает определенной энергией на единицу длины, равной $\epsilon_1 = \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda}\right)^2 \ln \kappa \equiv \epsilon_0 \ln \kappa$. Это означает, что если вихревую линию изогнуть, то ее энергия увеличится, т. е. вихрь ведет себя как упругая струна. Добавка к энергии вихря из-за изгиба пропорциональна его удлинению и при плавных изгибах может быть записана как

$$E_{el} = \frac{\epsilon_1}{2} \int dz \left(\frac{du}{dz} \right)^2, \quad (41.1)$$

где u — вектор смещения участка вихря, соответствующего координате z вдоль него. Предположим сначала, что коэффициент линейного натяжения ϵ_1 очень велик, так что можно считать вихрь совершенно прямым, и рассмотрим его взаимодействие с мелкими дефектами. Каждый такой дефект изменяет энергию вихря (если находится вблизи его кора) на величину порядка $e_{\text{прим}}$ и случайную по знаку (поскольку среднее изменение

энергии вихря из-за дефектов не приводит к его зацеплению, мы можем считать, что среднее значение $\delta e_{\text{прим}} = 0$). При концентрации примесей $n_{\text{прим}}$ на длине L вдоль вихря в коре находится примерно $N \sim n_{\text{прим}} \xi^2 L$ дефектов, так что при перемещении вихря в другое положение (на расстояние порядка ξ) энергия взаимодействия с дефектами изменится на величину порядка $E_{\text{пинн}}(L) \simeq e_{\text{прим}} \sqrt{N} \simeq e_{\text{прим}} \xi (n_{\text{прим}} L)^{1/2}$. Заметим здесь, что именно размер коры вихря ξ определяет характерный пространственный масштаб, на котором меняется энергия взаимодействия вихря с мелкими дефектами. Как видно, возможный выигрыш в энергии взаимодействия с дефектами (из-за того, что вихрь перешел в более «подходящее» место) растет с длиной сегмента вихря (если он абсолютно жесткий) как \sqrt{L} . Но сила Лоренца, действующая на тот же сегмент вихря со стороны транспортного тока, пропорциональна его длине: $F_L(L) = \frac{1}{c} \Phi_0 j L$, так что и выигрыш в энергии взаимодействия с этим током растет пропорционально L и при достаточно большой длине всегда превышает $E_{\text{пинн}}(L)$, каким бы слабым ни был ток j .

Казалось бы, мы получили «отрицательный» результат — отсутствие пиннинга, нулевой критический ток. Теперь, однако, надо вспомнить о сделанном в начале предположении, что вихрь можно считать совершенно жестким — оно и привело к такомуциальному результату. В действительности форма вихря определяется конкуренцией между его упругой энергией, возрастающей при изгибе, и выигрышем энергии при помещении его сегментов в наиболее подходящие «потенциальные ямы». Результат этой конкуренции и определяет характерную длину L_p вихревого сегмента, на которой он смещается в поперечном направлении на длину порядка ξ , т. е. «переползает» из одной потенциальной ямы в поле дефектов в другую. Чтобы найти L_p , приравняем по порядку величины упругую энергию $E_{el}(L_p) \epsilon_1 \frac{\xi^2}{L_p}$ и энергию связи с примесями $E_{\text{пинн}}(L_p) = e_{\text{прим}} \xi (n_{\text{прим}} L_p)^{1/2} \equiv (\gamma \xi^2 L_p)^{1/2}$:

$$\epsilon_1 \frac{\xi^2}{L_p} \simeq (\gamma \xi^2 L_p)^{1/2} \quad (41.2)$$

(мы здесь также ввели обозначение $\gamma = n_{\text{прим}} e_{\text{прим}}^2$, которое будет часто использоваться в дальнейшем). Уравнение (41.2) определяет «длину пиннинга» L_p , а с ее помощью и критический ток j_c , задаваемый соотношением $\frac{1}{c} \Phi_0 j_c \simeq E_{\text{пинн}}(L_p)/\xi$ (в правой части здесь стоит характерная сила, действующая на вихрь со стороны ансамбля примесей, расположенных на длине L_p):

$$E_{\text{пинн}}(L_p) \simeq (\gamma \epsilon_1 \xi^4)^{1/3} \simeq H_{cm}^2 \xi^3 \frac{\xi}{L_p}, \quad L_p \simeq \left(\frac{\epsilon_1^2 \xi^2}{\gamma} \right)^{1/3}, \quad (41.3)$$

$$j_c \simeq \frac{c}{\Phi_0} \left(\frac{\gamma}{L_p} \right)^{1/2} \simeq j_0 \left(\frac{\xi}{L_p} \right)^2, \quad (41.4)$$

где j_0 — «ток распаривания», определенный выше в (18.5) как критический ток для тонкой пленки. Все величины, входящие в формулу (41.4), подразумеваются зависящими от температуры, эти зависимости вблизи T_c следуют, как правило, из теории Гинзбурга — Ландау. Оценки (41.4) применимы, по смыслу их вывода, для случая слабого пиннинга, $j_c \ll j_0$, что и соответствует относительно большой длине $L_p \gg \xi$. Более того, буквальный вид формул (41.4), в которые входит параметр «линейного натяжения» вихря ϵ_1 , справедлив лишь при более сильном условии $L_p \geq \lambda$; в противном случае множитель $\ln \kappa = \ln(\lambda/\xi)$ в выражении для ϵ_1 следует заменить на $\ln(L_p/\xi)$. Дело в том, что при коротковолновых ($q > \lambda$) деформациях вихря магнитное поле «не успевает» следовать за изгибом его края и эффективная жесткость вихря уменьшается, $\epsilon(q) = \epsilon_0 \ln(1/q\xi)$.

Длина L_p (называемая далее длиной пиннинга) имеет важный физический смысл — вихрь можно считать упругой струной лишь на масштабах $L \ll L_p$, в то время как на много больших масштабах отдельные сегменты длины L_p зацепляются примесями почти независимо один от другого. В результате полная энергия пиннинга сегмента большой длины $L \gg L_p$ оказывается пропорциональной длине: $E_{\text{пинн}}(L) \propto L (E_{\text{пинн}}(L_p)/L_p)$. Таким образом, пиннинг на слабых дефектах возникает из-за того, что вихрь слегка изгибаётся в поле дефектов, выбирая конфигурации, реализующие локальные минимумы полной энергии. Соот-

ветственно, увеличение линейного натяжения ϵ_1 должно приводить и к увеличению L_p , и к уменьшению критического тока j_c , как и следует из формул (41.4).

41.2. Коллективный пиннинг вихревой решетки. В описанной выше картине шла речь о единичном вихре, т. е. предполагалось, что его взаимодействие с другими вихрями много слабее, чем с дефектами. Легко понять, в каких случаях такое представление справедливо: надо сравнить энергию пиннинга на единицу длины $E_{\text{пинн}}/L_p$ и повышение энергии (тоже на единицу длины) упругого взаимодействия вихрей в вихревой решетке, возникающее при относительном сдвиге соседних вихрей на расстояние порядка пространственного масштаба случайногопотенциала ξ , т. е. $\epsilon_0 (\xi/a_0)^2$, где $a_0 = \sqrt{\Phi_0/B}$. Сравнивая эти две энергии, обнаруживаем, что упругостью вихревой решетки можно пренебречь, если решетка достаточно редкая, $a_0 \gg L_p$. В обратном случае взаимодействие между вихрями сильное и его надо учитывать с самого начала. Это можно сделать аналогично описанному выше случаю одиночного вихря, разница лишь в том, что вместо упругой линии надо теперь рассмотреть трехмерную упругую решетку. Мы будем сначала считать, что постоянная решетки $a_0 \gg \xi$, т. е. среднее магнитное поле $H \ll H_{c2}$, так что можно использовать лондоновское приближение (что имеет смысл для сверхпроводников «сильно II рода», т. е. имеющих параметр Гинзбурга–Ландау $\kappa \gg 1$).

Теперь нам надо исходить из упругой энергии деформации трехмерной вихревой решетки, которую можно записать в виде

$$E_{el}^{3D} = \frac{1}{2} \int d^3r \left[(C_{11} - C_{66})(\nabla \cdot \mathbf{u})^2 + C_{66}(\nabla_a u_b)^2 + C_{44} \left(\frac{du}{dz} \right)^2 \right]. \quad (41.5)$$

Здесь \mathbf{u} — двумерный вектор локального смещения вихревой решетки, имеющий компоненты в плоскости (x, y) , перпендикулярной направлению внешнего поля \mathbf{H} ; постоянные C_{11} , C_{44} , и C_{66} —

упругие модули вихревой решетки, соответствующие деформациям сжатия, изгиба и сдвига, соответственно. Заметим, что в (41.5) написан общий вид упругой энергии для треугольной решетки линий с осью симметрии шестого порядка [117]. Далее нам понадобятся значения всех трех упругих модулей:

$$C_{11} - C_{66} = \frac{B^2}{4\pi} \frac{\partial H}{\partial B}, \quad C_{44} = \frac{BH}{4\pi}, \quad C_{66} = \frac{\Phi_0 B}{(8\pi\lambda)^2}. \quad (41.6)$$

Первые две формулы из (41.6) имеют общий характер и легко выводятся (см. ниже), результат же для модуля сдвига C_{66} приведен для наиболее интересного (при $\lambda \gg 1$) случая $H_{c1} \ll B \ll H_{c2}$, когда вихри все еще сильно взаимодействуют на длинах гораздо больших, чем a_0 , а подавлением параметра порядка из-за близости к H_{c2} еще можно пренебречь. Формулы для C_{11} и C_{44} можно получить из простых макроскопических соображений. Действительно, $\nabla u = \delta B/B$ есть относительное изменение плотности вихрей, поэтому первый член в интегrale (41.5) можно записать как $\frac{1}{2}(C_{11} - C_{66})(\delta B)^2/B^2$, т. е. $B^{-2}(C_{11} - C_{66}) = \partial^2 F/\partial B^2 = = (1/4\pi)\partial H/\partial B$. Чтобы получить второе из равенств (41.6), рассмотрим однородную деформацию вихревой решетки, при которой все вихри наклоняются на малый угол $\theta = \partial u_x / \partial z$ по отношению к исходному направлению поля вдоль оси z . При этом возникает поперечная компонента магнитной индукции $B_\perp = B\theta$ и сохраняется проекция индукции на ось z , т. е. $B_\parallel = B$. В результате полная величина магнитной индукции $B_{\text{полн}} = (B_\parallel^2 + B_\perp^2)^{1/2}$ изменяется на $\delta|B| = \frac{B}{2}(\partial u/\partial z)^2$, а свободная энергия — на величину $(\partial F/\partial B)\delta|B| = \frac{H}{4\pi} \cdot \frac{B}{2}(\partial u/\partial z)^2$. Сравнивая это выражение с соответствующим членом в (41.5), получаем результат для C_{44} из (41.6). Модуль сдвига C_{66} нельзя определить из столь же общих соображений — его необходимо вычислять как некоторую бесконечную сумму по узлам вихревой решетки. Мы здесь не будем останавливаться на этом (в действительности не очень сложном) вычислении [105]; заметим лишь, что малость модуля сдвига C_{66} по сравнению с $C_{11} \approx C_{44}$ (их отношение, как видно

из (41.6), порядка $(n\lambda^2)^{-1} \ll 1$) легко понять: дальнодействующий характер отталкивания между вихрями приводит к очень малой сжимаемости решетки, но слабо влияет на энергию деформаций, не меняющих плотность вихрей; поэтому модуль сдвига можно оценить как энергию взаимодействия ближайших соседей (порядка ϵ_0), умноженную на плотность вихрей $n = B/\Phi_0$, что совпадает по порядку величины с (41.6).

Теперь мы готовы воспроизвести для решетки вихрей оценку силы коллективного пиннинга (по аналогии с (41.2)). Будем считать, что деформация вихревой решетки, вызванная ее подстройкой под случайный потенциал примесей, достаточно мала, так что относительное смещение вихрей $|\mathbf{u}(\mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{r}')|$ достигает величины порядка ξ при $|z-z'| \geq L_p^{3D}$, либо $|\rho-\rho'| \geq R_p$ (здесь ρ и z — поперечные и продольная (к полю B) компоненты вектора \mathbf{r}). Характерные длины пиннинга L_p^{3D} и R_p в продольном и поперечном направлениях существенно отличаются вследствие различия порядков величин упругих модулей C_{66} и C_{44} ; кроме того, продольная длина L_p^{3D} отличается и от ранее введенной «одновихревой» длины пиннинга L_p . Для характерной величины энергии взаимодействия с дефектами получим теперь $E_{\text{пинн}}^{3D} \sim (\gamma\xi^2 n V_p)^{1/2}$, где $V_p = L_p^{3D} R_p^2$ — объем области упругого пиннинга. Далее, неравенство $C_{11} \gg C_{66}$ означает, что деформациями сжатия можно пренебречь по сравнению с деформациями сдвига, так что достаточно приравнять по порядку величины энергию взаимодействия с дефектами $E_{\text{пинн}}^{3D}$ и энергию сдвиговых и изгибных деформаций:

$$\frac{C_{44}\xi^2}{(L_p^{3D})^2} V_p \simeq \frac{C_{66}\xi^2}{R_p^2} V_p \simeq (\gamma\xi^2 n V_p)^{1/2}. \quad (41.7)$$

Кроме того, для определения критической плотности тока j_c следует, как и выше, приравнять силу Лоренца $j_c \frac{1}{c} BV_p$ (теперь — действующую на единицу объема вихревой решетки) к максимальной объемной силе пиннинга $\mathcal{F}_{\text{пинн}} \simeq E_{\text{пинн}}^{3D}/\xi$. В результате

получим

$$R_p \simeq \lambda \left(\frac{L_p}{a_0} \right)^3, \quad L_p^{3D} \simeq \frac{\lambda}{a_0} R_p, \quad (41.8)$$

$$E_{\text{пинн}}^{3D} \simeq H_{cm}^2 \xi^3 \frac{\xi}{L_p} \left(\frac{\lambda}{a_0} \right)^2 \left(\frac{L_p}{a_0} \right)^4, \quad (41.9)$$

$$j_c^{3D} \simeq j_c \left(\frac{a_0}{\lambda} \right)^2 \left(\frac{a_0}{L_p} \right)^4 \propto B^{-3}. \quad (41.10)$$

Как видно из (41.9), (41.10), с увеличением магнитного поля (а потому и жесткости вихревой решетки) характерная энергия пиннинга в объеме V_p растет (вместе с самим объемом), в то время как критическая плотность тока падает. Это происходит потому, что энергия $E_{\text{пинн}}^{3D}$ растет с полем медленнее, чем объем, в то время как полная сила Лоренца при заданном токе пропорциональна объему.

Результаты (41.4) и (41.10) не переходят один в другой при $a_0 \sim L_p$, как этого можно было бы ожидать — формулы для коллективного пиннинга решетки (41.8) приводят к большим длинам пиннинга ($R_p \sim \lambda \gg a_0$) и меньшему критическому току $j_c^{3D} \ll \ll j_c$ по сравнению с формулой (41.4) для пиннинга одиночных вихрей. Дело в том, что при выводе оценок (41.8) – (41.10) мы предполагали, что вихревая решетка описывается обычной теорией упругости с постоянными упругими модулями (пока длина волны деформации много больше постоянной решетки). В действительности, это предположение справедливо для вихревой решетки лишь при длинах волн q^{-1} , больших чем лондоновская длина λ . При меньших длинах волн магнитное поле «не успевает» следовать за деформациями вихревых линий (оно не может меняться на длинах меньше λ) и макроскопический подход к выводу C_{11} и C_{44} отказывает. В области $q\lambda \geq 1$ вихревая решетка описывается нелокальной теорией упругости, в рамках которой упругие модули сжатия и изгиба следует рассматривать как функции волнового вектора деформации q (это похоже на ситуацию с нелокальным экранированием токов в пиппардовских сверхпроводниках, см. § 7). В интервале волновых векторов $\lambda^{-1} \leq q \leq a_0^{-1}$

упругие модули $C_{11}(q)$ и $C_{44}(q)$ ведут себя при $B \gg H_{c1}$ одинаково [105, 115]:

$$C_{11}(q) = C_{44}(q) = \frac{B^2}{4\pi} \frac{1}{1 + (q\lambda)^2}. \quad (41.11)$$

Аккуратный расчет [115, 116] с использованием (41.11) показывает, что имеется промежуточная область магнитных полей, в которой длина пиннинга и критический ток экспоненциально резко зависят от поля:

$$R_p \simeq a_0 e^{(B/B^*)^{3/2}-1}, \quad j_c^{3D} \simeq j_c \frac{B}{B^*} e^{-2(B/B^*)^{3/2}+2}, \quad (41.12)$$

где $B^* \simeq (j_c/j_0)H_{c2} < B < B^\dagger$. Результаты же (41.8) – (41.8) справедливы при еще больших полях $B > B^\dagger$, когда длина R_p , определяемая из (41.12), становится больше λ . Как видно из сравнения формул (41.8) – (41.8) и (41.12), величины B^* и B^\dagger всегда довольно близки.

Все полученные выше оценки показывают, что j_c монотонно убывает с ростом внешнего поля B ; однако, как уже упоминалось в конце § 38, в эксперименте часто наблюдается (например, [118, 35]) пик критического тока при $B \simeq H_{c2}$. Дело в том, что использованные нами здесь формулы (41.6) справедливы лишь в области слабых полей, когда коры соседних вихрей не перекрываются между собой (фактически это условие имеет вид $B \leqslant 0.2H_{c2}$). Действительно, поскольку при $B > H_{c2}$ сверхпроводник непрерывно (фазовый переход II рода) переходит в нормальное состояние, где квантованных вихрей вовсе нет, то и упругие модули (41.6), и параметр взаимодействия вихрей с примесями γ уменьшаются при $b = B/H_{c2} \rightarrow 1$. Расчеты [115, 105] показывают, что эффект от «смягчения» решетки сильнее, чем от ослабления связи вихрей с дефектами (так, максимальное значение $C_{66}(b)$ достигается при $b \simeq 0.6$, а затем модуль сдвига убывает пропорционально $(1-b)^2$), поэтому с ростом b критический ток $j_c(b)$ растет, а длина коллективного пиннинга R_p падает вплоть до величины порядка a_0 — т. е. происходит переход к одновихревому пиннингу. В области $a_0 < R_p < \lambda$ существенна пространственная дисперсия упругих модулей (41.11), поэтому рост

критического тока происходит экспоненциально резко. При дальнейшем увеличении b взаимодействие между вихрями становится несущественным и $j_c(b)$ падает из-за ослабления взаимодействия каждого вихря с примесями ($\gamma_{\text{эфф}}(b) \propto (1 - b)^2$). Таким образом, пик критического тока достигается (при слабом коллективном пиннинге) в полях B , близких к H_{c2} .

§ 42*. Крип магнитного потока и нелинейная проводимость в ВТСП

До открытия высокотемпературных сверхпроводников было естественно рассматривать критическое (§ 38) и резистивное (§ 40) состояния вихрей независимо друг от друга. Подразумевалось, что в критическом состоянии плотность тока j , возникшего из-за неоднородного распределения плотности вихрей при их проникновении в образец, равна критическому значению j_c , так что вихри неподвижны — в то время как в резистивном состоянии ток велик по сравнению с j_c , пиннингом вихрей можно вовсе пренебречь, и их движение характеризуется постоянным коэффициентом трения η . Однако ясно, что если потенциальные барьеры для движения вихрей обращаются в нуль при $j = j_c$ непрерывно, то при чуть меньших токах эти барьеры должны быть малы — и преодолимы для тепловых флуктуаций вихрей. Физическая причина, позволяющая провести упомянутое разделение явлений в обычных сверхпроводниках — очень большая при малых токах величина энергетических барьеров U_0 (по сравнению с тепловой энергией $k_B T$). Достаточно иметь плотность тока ниже j_c на малую величину порядка $k_B T/U_0$, чтобы пренебречь вероятностью тепловых перескоков вихрей через барьеры, созданные примесным потенциалом. В высокотемпературных сверхпроводниках характерные значения $k_B T/U_0$ на несколько порядков выше, и область термоактивированного движения (называемого обычно «крип» — от английского «спир», т. е. «переползание») вихрей оказывается широко представленной в эксперименте. Ниже мы рассмотрим с единой точки зрения как релаксацию критического состояния вследствие крипа ви-

хрэй, так и нелинейные вольт-амперные характеристики $V(j)$ в ВТСП.

Вернемся к рассмотренной в § 38 задаче о проникновении магнитного поля в пластину сверхпроводника толщиной d . Теперь мы не будем считать постоянным возникший в пластине (при проникновении в нее вихрей) ток и выведем макроскопическое уравнение, определяющее временную эволюцию плотности тока. Будем считать магнитное поле направленным вдоль оси z , а ток плотности j и возникающее из-за движения вихрей электрическое поле $\mathbf{E} = (1/c)[\mathbf{B}\mathbf{v}]$ — вдоль оси y . Используя уравнения Максвелла $\partial B/\partial t = -c \partial E/\partial x$ и $\partial B/\partial x = -(4\pi/c)j$, получим для скорости релаксации тока

$$\frac{\partial j}{\partial t} = \frac{c}{4\pi} \frac{\partial^2 (vB)}{\partial x^2}. \quad (42.1)$$

В правой части этого уравнения содержится средняя скорость движения вихрей $v \simeq v_0 e^{-U(j)/k_B T}$, где $U(j)$ — соответствующий плотности тока j потенциальный барьер. Для простоты мы рассмотрим сейчас случай, когда величина B мало меняется по толщине пластины (см. рис. 38.1, б), а отношение $k_B T/U(j)$ мало. Тогда распределение плотности тока по пластине оказывается почти однородным, $j(x, t) = j(t) + \delta j(x, t)$, где $\delta j/j \propto k_B T/U(j) \ll \ll 1$, и для величины $j(t)$ можно вывести [96, 119] замкнутое уравнение

$$\frac{\partial j}{\partial t} = - \left(\frac{j_c}{\tau_0} \right) e^{-U(j)/k_B T}, \quad (42.2)$$

где $\tau_0 \sim d^2/c^2 \rho_f$ имеет порядок времени диффузии магнитного поля в состоянии течения потока по толщине образца d . Соответствующий «коэффициент диффузии» для магнитного поля имеет вид $D_B = c^2 \rho_f / 4\pi$, как это видно из уравнения $\dot{B} = (c^2 \rho_f / 4\pi) \nabla^2 B$, которое получается комбинированием уравнений Максвелла с законом Ома $E = \rho_f j$. При большой величине показателя экспоненты уравнение (42.2) можно решить приближенно, как говорят в таких случаях — с логарифмической точ-

ностью:

$$U(j) = k_B T \ln \left(1 + \frac{t}{t_0} \right),$$

$$\text{где } t_0 = \tau_0 \frac{k_B T}{j_c |\partial U / \partial j|} \sim \frac{k_B T}{U_c} \frac{d^2}{c^2 \rho_f}. \quad (42.3)$$

Физический смысл решения (42.3) очевиден — к моменту времени t после начала релаксации (крипа) величина плотности тока в образце устанавливается такой, что соответствующие этому току энергетические барьеры $U(j)$ как раз могут быть преодолены вихрями за время порядка t . Важное и заранее неочевидное обстоятельство состоит в том, что характерное «время попыток» t_0 для крипа оказывается зависящим от размера образца и вполне макроскопическим — в интервале $(10^{-6} \div 10^{-2})$ с.

Для того чтобы извлечь из соотношения (42.3) явную зависимость плотности экранирующих токов от времени, необходимо использовать какую-то оценку для функциональной зависимости $U(j)$. Рассмотрим сначала случай токов, близких к критическому. Тогда естественно предположить, что $U(j \rightarrow j_c) \simeq \simeq U_c (1 - j/j_c)^a$, где a — число порядка единицы. Используя это соотношение вместе с (42.3), находим, что

$$\frac{j(t)}{j_c} = 1 - \left[\frac{k_B T}{U_c} \ln \left(1 + \frac{t}{t_0} \right) \right]^{1/a}. \quad (42.4)$$

Зависимость вида (42.4) с $a = 1$ была впервые получена в работе [120]. В эксперименте обычно измеряется зависимость магнитного момента сверхпроводника в течение длительного времени после включения (или изменения) внешнего магнитного поля, которое вызвало формирование критического состояния. Измеряемый магнитный момент $M(t)$ (пропорциональный протекающему в образце экранирующему току) в обычных сверхпроводниках ведет себя, как правило, логарифмически со временем, что соответствует показателю $a = 1$ и очень малому значению отношения $k_B T/U_c \leqslant 10^{-3}$, так что полное изменение $M(t)$ при экспериментально достижимых временах остается много меньше

исходной величины $M(0)$. Иначе обстоит дело в ВТСП, где характерная величина $k_B T/U_c$ часто бывает порядка 0.1 при $T \sim 0.5T_c$. Поскольку логарифмический множитель в (42.4) имеет порядок $10 \div 20$ при характерных временах релаксационных измерений ($10^2 \div 10^4$) с, ток и намагниченность ВТСП должны релаксировать на величину порядка своих исходных значений, что и наблюдается экспериментально [121], рис. 42.1. Но в таком случае уже нельзя пользоваться формулой (42.4), выведенной в предположении малости изменения тока в процессе релаксации. Другой предельный случай, в котором можно ожидать простой зависимости $U(j)$, — случай малых токов $j \ll j_c$. В случае колективного пиннинга вихревой решетки слабыми примесями (или пиннинга отдельных вихревых линий) удается показать, что эта зависимость должна быть степенной, $U(j) \simeq U_c(j_c/j)^\mu$. Полуколичественная теория, приводящая к такому результату, была развита в работе [122] и называется теорией колективного крипа (см. также [96]). Значение показателя μ в теории колективного крипа зависит от соотношения длины пиннинга R_p , постоянной решетки a_0 и лондоновской длины λ , а также от отношения j/j_c и может меняться от значений порядка 0.1 до больших единицы. Простейшая интерполяционная формула, содержащая в себе и область $j \ll j_c$, и область $j_c - j \ll j_c$, может быть написана в виде

$$U(j) \simeq U_c \left[\left(\frac{j_c}{j} \right)^\mu - 1 \right]. \quad (42.5)$$

Используя формулу (42.5) вместе с (42.3), получаем закон релаксации тока в виде

$$j(t) = j_c \left[1 + \frac{\mu k_B T}{U_c} \ln \left(1 + \frac{t}{t_0} \right) \right]^{-1/\mu}. \quad (42.6)$$

В тех случаях, когда $\mu \ll 1$, как, например, в случае слабо взаимодействующих между собой вихревых линий (т. е. при низких полях и температурах), выражение (42.6) можно приближенно записать в виде $j(t) \simeq j_c \exp[-(k_B T/U_c) \ln(t/t_0)]$, т. е. измеряемый на

некотором масштабе времени t экранирующий ток оказывается экспоненциальной функцией температуры и при этом степенной функцией времени t , что и наблюдалось экспериментально [123].

M , ед. СГСМ

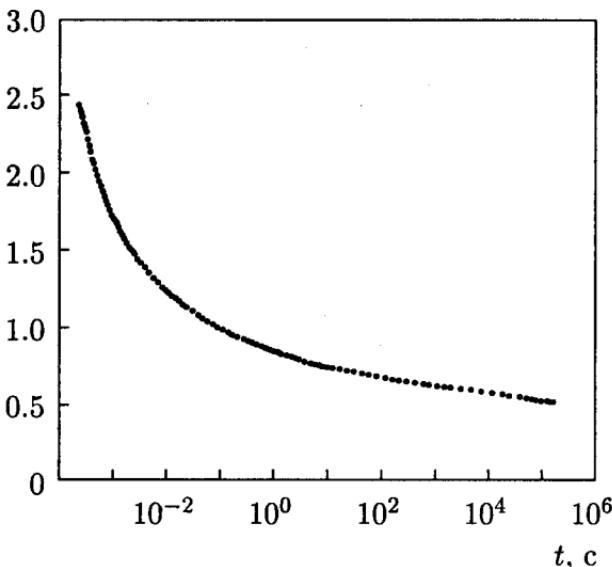


Рис. 42.1. Релаксация остаточной намагниченности в кристалле ВТСП на интервале времени в 9 порядков [121].

В общем случае величина, удобная для анализа экспериментальных данных по релаксации, — логарифмическая производная $S(t) = \partial \ln j(t) / \partial \ln t$. Используя (42.6), получаем предсказание для $S(t)$ в теории коллективного крипа:

$$S(t) = \frac{k_B T}{U_c + \mu k_B T \ln(1 + t/t_0)}. \quad (42.7)$$

Важной чертой зависимости (42.7) является насыщение роста S как функции температуры при больших T и ее уменьшение как функции $\ln(t/t_0)$ в пределе больших времен. Оба эти предсказания, происходящие из картины роста энергетических барьеров крипа по мере «старения» системы и релаксации в ней тока, нашли экспериментальное подтверждение; подробное обсуждение этих экспериментов можно найти в обзоре [124].

В теории коллективного крипа энергетические барьеры $U(j)$ растут при стремлении плотности тока j к нулю неограниченно. Следовательно, скорость движения вихрей $v(j) \propto E(j)$, а дифференциальное сопротивление $dE/dj \propto \rho_f e^{-U(j)/k_B T}$ экспоненциально падает при уменьшении плотности тока. Это свойство очень важно — оно показывает, что равновесное состояние коллективного пиннинга вихревой решетки имеет нулевое линейное сопротивление, т. е. отличается от высокотемпературного состояния с конечной проводимостью качественным образом и потому должно быть отделено от него некоторым фазовым переходом.

Обычный способ нахождения линии перехода $H_{c2}(T)$ в сверхпроводящее состояние состоит в измерении линейного сопротивления $\rho(T, H)$ как функции температуры при различных значениях H : температура перехода $T_c(H)$ определяется по обращению $\rho(T, H)$ в нуль (функция же $H_{c2}(T)$ является обратной к $T_c(H)$). Фактически «нулевым» считается сопротивление ниже некоторой выбранной величины, например, 0.1 (или 0.01) от сопротивления в нормальном состоянии ρ_n , так что положение линии перехода определяется не вполне однозначно. У низкотемпературных сверхпроводников $\rho(T, H)$ очень резко падает с понижением температуры или поля ниже линии перехода, так что неоднозначность в определении $H_{c2}(T)$ очень мала. Совсем иначе дело обстоит в случае ВТСП; характерное семейство кривых $\rho(T, H)$ для $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$ показано на рис. 42.2. С увеличением H температурный интервал, в котором происходит падение сопротивления, очень заметно уширяется (причем верхние части кривых $\rho(T)$ зависят от величины H гораздо слабее, чем нижние), так что различные варианты выбора «нулевого» сопротивления (например, 0.1 или 0.01 от ρ_n) привели бы к существенно различным значениям температуры перехода $T_c(H)$. Поэтому в экспериментах с ВТСП фазовый переход приходится регистрировать по изменению (с температурой или полем) вида вольт-амперных характеристик $V(j)$: измерение ВАХ в широком (несколько порядков) интервале токов и напряжений позволяет надежно определить точку обращения линейного сопротивления в нуль.

На рис. 42.3 приведен в двойной логарифмической шкале на-

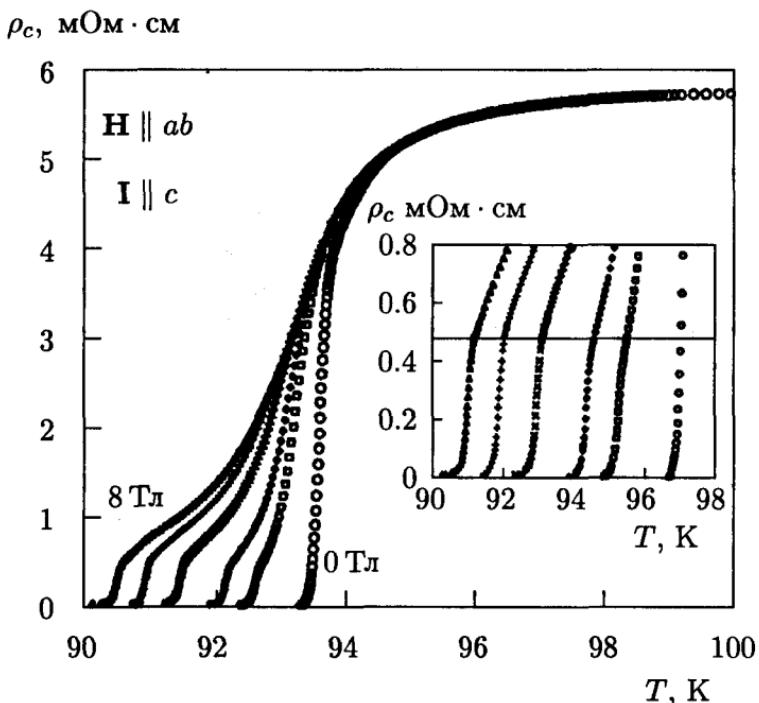


Рис. 42.2. Температурные зависимости сопротивления монокристалла YBaCuO при различных значениях H внешнего магнитного поля [125]. На вставке в более крупном масштабе показаны данные для области низких сопротивлений; участки кривых ниже сплошной линии практически совпадают для различных значений H .

бор вольт-амперных характеристик из эксперимента [126] на тонкой (толщина 0.4 мкм) пленке $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$, соответствующих различным значениям температуры, во внешнем поле $H_0 = 1$ Тл. Весь набор вольт-амперных характеристик делится на две части с качественно различным поведением. На графиках для температур $T < T_g \simeq 84.6$ К видна отрицательная кривизна в области малых токов, т. е. электрическое поле $E(j)$ убывает при $j \rightarrow 0$ по закону более быстрому, чем степенной, что качественно соответствует обсуждавшейся выше зависимости (42.5) энергии активации крипа. С другой стороны, кривые, соответствующие $T > T_g$,

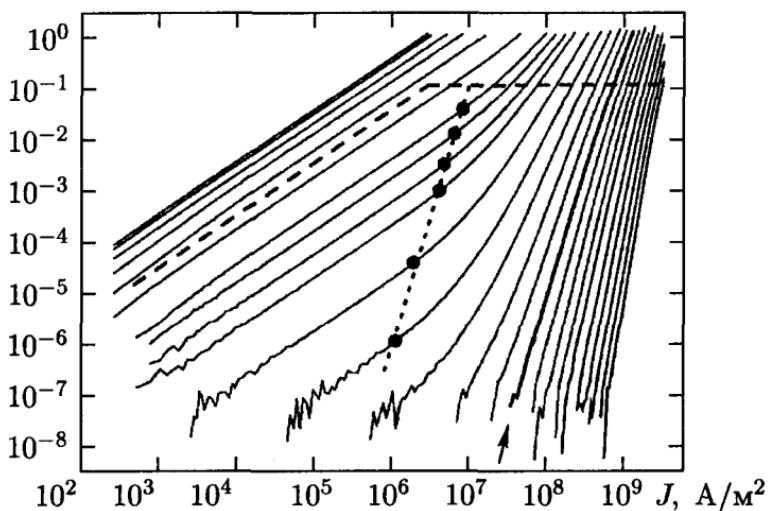
E , В/м

Рис. 42.3. Вольт-амперные характеристики тонкой пленки YBaCuO во внешнем магнитном поле 1 Тл [126] для различных температур в интервале между 80.5 и 91 К. Фазовый переход вихревая жидкость – вихревое стекло происходит при температуре $T_g = 84.6$ К, соответствующая вольт-амперная характеристика помечена стрелкой.

линейны в области малых токов, причем имеют единичный наклон, что означает линейную зависимость $E = \rho_{\text{эфф}} j$ при $j \rightarrow 0$. При этом значения эффективного сопротивления $\rho_{\text{эфф}}$ меняются на несколько порядков в довольно узком интервале температур чуть выше T_g . Наконец, в области не слишком малых токов $j > j_*(T)$ все кривые ведут себя примерно одинаково — линейно с наклоном больше единицы, что соответствует степенной зависимости $E(j) \propto j^{1+\alpha_j}$. С приближением T к T_g характерная величина тока $j_*(T)$ падает, так что сепаратрисе ($T = T_g$) семейства кривых соответствует степенное поведение ВАХ при всех значениях плотности тока. Оказывается возможным [126] представить совокупность всех этих данных единым образом при по-

моши двух безразмерных функций $\mathcal{E}_\pm(x)$, соответствующих областям выше и ниже T_g :

$$\frac{E}{j\rho_f} \sim R \left(\frac{T - T_g}{T_g} \right) \mathcal{E}_\pm \left(\frac{j}{j_*} \right), \quad \text{где } j_* \propto |T - T_g|^{\beta_j}, \quad (42.8)$$

а безразмерные «скейлинговые» функции $\mathcal{E}_\pm(x)$ имеют асимптотики

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\pm(x)|_{x \rightarrow \infty} &\propto x^{\alpha_j}, & \mathcal{E}_+(x \rightarrow 0) &= \text{const}, \\ \mathcal{E}_-(x \rightarrow 0) &\propto e^{-1/x^\mu}. \end{aligned} \quad (42.9)$$

Функция $R(y)$ также ведет себя степенным образом, а показатель степени определяется тем, что ВАХ универсальны (т. е. слабо зависят от $T - T_g$) при относительно больших токах: из условия сокращения зависящих от T множителей в (42.8) при $j \gg j_*$ получаем, учитывая (42.9), что $R(y) \propto y^{\alpha_j \beta_j}$. Анализ ВАХ из эксперимента [126] приводит к значениям показателей $\alpha_j \simeq 4.0$ и $\beta_j \simeq 3.3$.

Масштабно-инвариантное поведение (scaling) описанного выше типа характерно для фазовых переходов II рода с сильно развитыми флуктуациями [28, 34]. Обычно свойства таких фазовых переходов можно описать теоретически как следствие изменения симметрии и появления параметра порядка, характеризующего степень нарушения симметрии в одной из фаз. В данном случае такое описание весьма затруднено, поскольку свойства уже самой низкотемпературной фазы определяются неоднородностями (примесями), приводящими к пиннингу вихревой решетки и, как следствие, к разрушению ее периодичности: корреляции положений вихревых линий пропадают на достаточно больших расстояниях (см. § 41). Иначе говоря, низкотемпературная фаза, сформированная взаимодействием решетки вихрей с примесями, представляет собой «вихревое стекло», находящееся в одном из многих возможных метастабильных состояний, как это характерно вообще для стекол.

Что же представляет собой состояние, реализующееся при $T > T_g$? Как было объяснено в § 37, идеальная (беспримесная)

вихревая решетка плавится при $B = B_m(T) < H_{c2}(T)$, вследствие чего образуется жидкость из вихревых линий. Это фазовый переход I рода, но довольно близкий ко II роду (скачки энтропии и намагниченности малы). Пусть теперь в сверхпроводнике имеются примеси, создающие слабый случайный потенциал. В области на фазовой диаграмме сверхпроводника, достаточно удаленной (вверх) от линии плавления, выигрыш в свободной энергии за счет выгодного расположения вихрей в случайному потенциале меньше, чем разность свободных энергий твердого и жидкого состояний. Поэтому здесь беспорядок не меняет качественно состояния вихревой системы, однако он создает энергетические барьеры для течения вихревой жидкости [127]. Величины этих барьеров конечны при малых токах, $U(j, T, B) \xrightarrow{j \rightarrow 0} U_{\max}(T, B)$.

В таком состоянии имеется ненулевое линейное сопротивление $(dE/dj)|_{j \rightarrow 0} = \rho_f e^{-U_{\max}/k_B T}$. При совсем слабом беспорядке род фазового перехода не может измениться, так что переход из вихревой жидкости в стекло происходит скачком. Именно такая ситуация реализовалась в очень чистых монокристаллах, использованных в экспериментах [106, 128, 107, 129, 125]. При этом величина U_{\max} может существенно превышать $k_B T$, так что сопротивление в таком состоянии (называемом «термоактивированное течение потока», а в англоязычной литературе — «thermally assisted flux flow», или сокращенно — TAFF) хотя и отлично от нуля, но может быть на несколько порядков меньше, чем сопротивление течения потока ρ_f . В особенно широкой области полей и температур термоактивированное течение потока наблюдается в слоистых ВТСП-материалах типа $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$, где зависимости $\rho_{taff}(T, B)$ хорошо описываются как следствие поведения максимального энергетического барьера $U_{\max}(T, B) \propto \propto (T_c - T) \ln(H_{c2}/B)$ (см., например, работу [130]).

В образцах с большим количеством дефектов (особенно в тонких пленках, как в [126]) линия фазового перехода сдвигается по сравнению с линией плавления идеальной решетки, поэтому мы и обозначаем температуру этого перехода $T_g(B)$ новым подстрочным индексом g (от английского «glass» — стекло). Более

того, скачки энтропии и намагниченности «размываются» беспорядком и фазовый переход становится непрерывным. В этом случае величина U_{\max} неограниченно возрастает с приближением к линии перехода сверху, а линейное сопротивление обращается в нуль пропорционально $(T - T_g)^{\alpha_j \beta_j}$, как было объяснено в связи с рис. 42.3. В некоторых случаях при «промежуточном» количестве дефектов фазовый переход принадлежит к I роду при малых B и $(T_c - T)$ и становится непрерывным в более сильных полях, когда относительная роль случайного потенциала увеличивается; фазовая диаграмма такого типа приведена, в частности, в работе [131]. Теоретическое описание таких фазовых переходов еще недостаточно хорошо разработано.

ГЛАВА VI

МИКРОСКОПИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СВЕРХПРОВОДИМОСТИ

§ 43. Введение. Электрон-фононное взаимодействие

Механизм явления сверхпроводимости стал понятен лишь спустя 46 лет после открытия сверхпроводимости, когда Бардин, Купер и Шриффер опубликовали свою теорию (теория БКШ) [132].

Чтобы понять, с какими трудностями столкнулись теоретики, достаточно сделать такие оценки. Разница между свободными энергиями нормального металла и сверхпроводника, приходящаяся на 1 см^3 , равна, как мы знаем, величине $H_{cm}^2/8\pi \sim \sim 10^5 \text{ эрг}/\text{см}^3$, если $H_{cm} \sim 10^3$. В 1 см^3 содержится приблизительно 10^{22} электронов проводимости. Значит, за сверхпроводимость отвечает энергия примерно $10^5/10^{22} = 10^{-17} \text{ эрг}/\text{электрон} \sim \sim 10^{-5} \text{ эВ}/\text{электрон}$. Эту энергию нужно сравнить с кулоновской энергией взаимодействия порядка 1 эВ, пренебрежение которой не мешает прекрасно описать многие свойства металла методами современной квантовой теории металлов. Таким образом, предстояло объяснить упорядоченное поведение электронов, когда соответствующая энергия на много порядков меньше энергии других взаимодействий, которыми обычно пренебрегают.

Первый намек на природу механизма сверхпроводимости был получен с открытием изотоп-эффекта. Явление заключается в том, что разные изотопы одного и того же сверхпроводящего

металла имеют разные критические температуры T_c , причем выполняется такая зависимость:

$$T_c M^a = \text{const.}$$

Степень a оказывается для большинства элементов близкой к 0.5.

Таким образом, стало понятно, что ионная решетка металла активно участвует в создании сверхпроводящего состояния. Теоретический анализ показал, что взаимодействие между электронами и колебаниями кристаллической решетки может вызвать дополнительное взаимодействие между электронами. При определенных условиях это взаимодействие будет давать притяжение между электронами. Если такое притяжение окажется сильнее кулоновского отталкивания, то в металле возникает эффективное притяжение электронов, результатом которого будет сверхпроводящее состояние.

Постараемся понять сперва, как взаимодействуют между собой электроны через колебания решетки. Кванты колебаний кристаллической решетки (фононы) характеризуются энергией $\hbar\omega_q$ и волновым вектором q .

Рассмотрим металл при $T = 0$. Ясно, что никаких фононов при абсолютном нуле нет. Как же тогда происходит взаимодействие между электронами через фононы?

Свободный электрон металла с волновым вектором k_1 распространяется по кристаллу. В какой-то момент времени он возбудил колебание решетки. Иначе это можно сказать так: в какой-то момент времени он испустил фонон (которого до этого момента не существовало) и перешел в какое-то другое состояние k'_1 . Пусть волновой вектор рожденного фона на будет q . При этом должен выполняться закон сохранения импульса

$$k_1 = k'_1 + q.$$

Почти в тот же момент времени этот фонон окажется поглощенным другим электроном k_2 , который в результате такого столкновения перейдет в состояние k'_2 . Что же получилось? Сначала

были два электрона в состояниях \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 , в конце эти электроны оказались в состояниях \mathbf{k}'_1 и \mathbf{k}'_2 . Значит, произошло рассеяние электронов \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 друг на друге, причем

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}'_1 + \mathbf{k}'_2.$$

Но такое рассеяние двух частиц может происходить только в том случае, если они взаимодействуют. Отсюда мы и делаем вывод, что процесс, который мы можем изобразить диаграммой рис. 43.1, описывает эффективное взаимодействие между электронами. Теперь поговорим о знаке этого взаимодействия. В момент, когда электрон переходит из состояния \mathbf{k}_1 в состояние \mathbf{k}'_1 , возникает колебание электронной плотности с частотой $\omega = (\bar{\epsilon}_{\mathbf{k}_1} - \bar{\epsilon}_{\mathbf{k}'_1})/\hbar$, где $\bar{\epsilon}_{\mathbf{k}_1}$ и $\bar{\epsilon}_{\mathbf{k}'_1}$ — соответственно энергии электрона в состояниях \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}'_1 ($\bar{\epsilon}_{\mathbf{k}} = \hbar^2 k^2 / 2m$). Предположим, что в результате такого колебания электронной плотности в данном месте произошло локальное увеличение плотности электронов. Ионы начнут притягиваться к этому месту и, обладая большой массой, даже после того, как скомпенсируют избыток электронов, будут продолжать свое первоначальное движение, и произойдет перекомпенсация. Теперь в этом месте появился уже избыточный положительный заряд. Тогда вторая частица с импульсом \mathbf{k}_2 начинает притягиваться к этому месту с перекомпенсированным локальным увеличением электронной плотности. Так возникает эффективное притяжение между частицами \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 . Из проведенных рассуждений нетрудно сделать вывод, что такое притяжение может возникнуть, только если колебания решетки (рассматриваемые как вынужденные) происходят в фазе с вынуждающей силой (колебаниями электронной плотности с частотой $\omega = (\bar{\epsilon}_{\mathbf{k}_1} - \bar{\epsilon}_{\mathbf{k}_2})/\hbar$). Но это будет только в случае, когда частота вынуждающей силы ω меньше собственной частоты ионной системы. Такой характерной частотой является дебаевская частота ω_D , т. е. максимально возможная,¹⁾ поэтому условие притяжения формулируется так: $\omega < \omega_D$.

¹⁾ Существование предельной частоты колебаний атомов в кристалле лег-

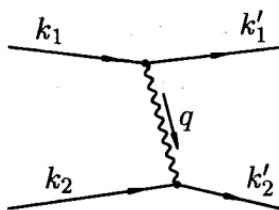


Рис. 43.1. Диаграмма, иллюстрирующая взаимодействие между двумя электронами посредством испускания и поглощения фона на с импульсом $\hbar q$.

Действительно, рассмотрим простой осциллятор с массой m и собственной частотой колебаний ω_0 , который испытывает действие вынуждающей силы $f e^{i\omega t}$. Уравнение движения такой системы будет

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} e^{i\omega t}. \quad (43.1)$$

Ищем решение в виде $x = x_0 e^{i\omega t}$. Подставляя его в (43.1), имеем

$$x_0 = \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Отсюда следует, что пока $\omega^2 < \omega_0^2$, колебания $x = x_0 e^{i\omega t}$ происходят в фазе с вынуждающей силой f . В противном случае колебания будут происходить в противофазе.

Вернемся теперь к нашим электронам. Чтобы электрон мог перейти из состояния k_1 в состояние k'_1 , последнее должно быть свободно (принцип Паули!). Такое возможно лишь вблизи поверхности Ферми, которую мы представляем себе в виде сферы радиуса k_F в k -пространстве.

Вот теперь мы можем сформулировать закон взаимодействия электронов через фононы, который лежит в основе теории БКШ: электроны, энергии которых отличаются от энергии электрона на поверхности Ферми не больше чем на величину $\hbar\omega_D$, притягиваются друг к другу. Энергия их взаимодействия равна $-V$. Все остальные электроны не взаимодействуют.

ко понять: бессмысленно говорить о звуковой волне в кристалле, у которой длина волны меньше периода кристаллической решетки. Таким образом, существование минимальной длины волны очевидно. Отсюда сразу следует существование предельной частоты.

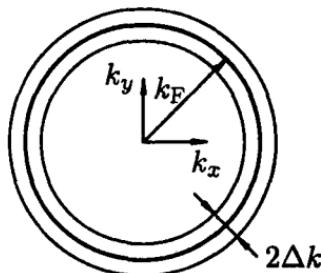


Рис. 43.2. Взаимодействуют через фононы по модели БКШ только электроны, лежащие в слое $2\Delta k$ около поверхности Ферми.

Запишем матричный элемент взаимодействия электронов в виде

$$V_{kk'} = \begin{cases} -V, & |\bar{\varepsilon}_k - \varepsilon_F| \leq \hbar\omega_D, \quad |\bar{\varepsilon}_{k'} - \varepsilon_F| \leq \hbar\omega_D, \\ 0, & |\bar{\varepsilon}_k - \varepsilon_F| > \hbar\omega_D \text{ или } |\bar{\varepsilon}_{k'} - \varepsilon_F| > \hbar\omega_D. \end{cases} \quad (43.2)$$

Таким образом, в модели БКШ притягиваются только электроны, лежащие в узком сферическом слое около поверхности Ферми, толщина которого $2\Delta k$ соответствует дебаевской энергии (рис. 43.2):

$$\Delta k/k_F \sim \hbar\omega_D/\varepsilon_F, \quad \varepsilon_F = \hbar^2 k_F^2 / 2m.$$

§ 44. Основное состояние сверхпроводника

44.1. Распределение электронов в основном состоянии. В этом параграфе мы должны будем понять, в каком состоянии находится сверхпроводник, когда $T = 0$, т. е. найти состояние, соответствующее минимальной энергии сверхпроводника.

Здесь уместно напомнить некоторые основные положения квантовой механики, которые нам в дальнейшем понадобятся. Пусть $\psi_n(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$ — полная система функций, если n пробегает какой-то набор значений, которыми мы нумеруем эти функции. Тогда любую волновую функцию $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$ можно разложить по системе ψ_n :

$$\Psi = \sum_n a_n \psi_n, \quad (44.1)$$

a_n мы будем называть амплитудой состояния ψ_n , а $|a_n|^2$ даст нам вероятность обнаружить систему в состоянии ψ_n .

Пусть теперь оператор Гамильтона \hat{H} равен

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{кин}} + \hat{V}, \quad (44.2)$$

где $\hat{H}_{\text{кин}}$ — оператор кинетической энергии, \hat{V} — оператор энергии взаимодействия. Тогда среднее значение энергии \bar{E} в состоянии Ψ можно записать в виде

$$\bar{E} = \int \Psi^* \hat{H} \Psi d\tau, \quad (44.3)$$

интегрирование ведется по всем N переменным. Подставляя в (44.3) формулы (44.1) и (44.2), имеем

$$\bar{E} = \bar{E}_{\text{кин}} + \bar{V},$$

где

$$\begin{aligned} \bar{V} &= \int \Psi^* \hat{V} \Psi d\tau = \\ &= \int \sum_n a_n^* \psi_n^* \hat{V} \sum_m a_m \psi_m d\tau = \sum_{n,m} a_n^* a_m V_{nm}. \end{aligned} \quad (44.4)$$

Выражение V_{nm} называется матричным элементом перехода из состояния ψ_m в состояние ψ_n :

$$V_{nm} = \int \psi_n^* \hat{V} \psi_m d\tau. \quad (44.5)$$

Возвращаемся к обсуждению основного состояния сверхпроводника. В нормальном металле основное состояние хорошо известно. При $T = 0$ наименьшей энергии соответствует состояние, когда все электроны в импульсном пространстве (k -пространстве) занимают состояния, лежащие внутри поверхности Ферми, а все состояния вне этой поверхности свободны. Действительно, очевидно, что этому соответствует минимальная кинетическая

энергия. А потенциальной энергии в этой модели просто нет. Включим теперь энергию взаимодействия между электронами, которая обсуждалась в предыдущем параграфе. Поскольку она дает эффективное притяжение между электронами, то она будет давать отрицательный вклад и понижать общую энергию системы. Но для этого должна быть обеспечена возможность рассеяния электронов из состояния (k_1, k_2) в состояние (k'_1, k'_2) . Ясно, что такое рассеяние окажется возможным, лишь если состояние (k_1, k_2) будет сначала заполнено, а состояние (k'_1, k'_2) будет сначала пусто.

Поэтому минимальной энергии при $T = 0$ перестает соответствовать полностью заполненная сфера Ферми в k -пространстве.

Природа идет на некоторый проигрыш в кинетической энергии в надежде отыграться на энергии потенциальной. Теперь минимальной полной энергии будет соответствовать состояние с «размазанной» поверхностью Ферми, т. е. состояние, в котором над поверхностью Ферми некоторые ячейки k -пространства заполнены, в то время как некоторые ячейки, лежащие под поверхностью Ферми, оказываются пустыми. При этом, как мы сейчас покажем, заполнение ячеек должно происходить попарно, т. е. если ячейка $k \uparrow$ заполнена, то и ячейка $-k \downarrow$ тоже должна быть заполнена, стрелками обозначены направления электронных спинов. Совершенно то же самое надо сказать о пустых ячейках. Это схематически изображено на рис. 44.1. Объясним теперь, почему наиболее выгодным спариванием электронов будет такое, когда в паре оказываются электроны с противоположными импульсами.

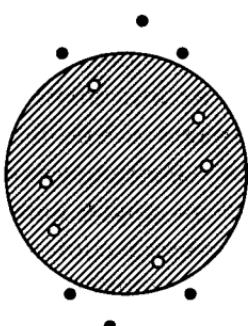


Рис. 44.1. Схематическое изображение состояния, полная энергия которого может оказаться меньше энергии состояния, в котором все ячейки k -пространства под сферой Ферми заняты, а над ней — свободны.

При переходе пары электронов $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \rightarrow (\mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2)$ должен выполняться закон сохранения импульса $\hbar\mathbf{k}_1 + \hbar\mathbf{k}_2 = \hbar\mathbf{k}'_1 + \hbar\mathbf{k}'_2$, а суммирование в формуле (44.4) распространяется на все возможные такие переходы. Ясно, что чем больше окажется таких разрешенных переходов, тем больше должен быть отрицательный вклад \bar{V} в среднюю энергию \bar{E} сверхпроводника. Пусть, например, $\hbar\mathbf{k}_1 + \hbar\mathbf{k}_2 = \hbar\mathbf{q}$, как это изображено на рис. 44.2. Тогда, как это видно из рисунка, участвовать в переходах могут только те электроны, которые занимают ячейки заштрихованного участка \mathbf{k} -пространства. Начнем уменьшать q . Заштрихованная область будет увеличиваться. При $q = 0$ вклад в уменьшение средней энергии будут давать все электроны, состояния которых лежат в полосе шириной порядка $2\hbar\omega_D$ по энергии около поверхности Ферми в \mathbf{k} -пространстве. По принципу Паули электроны с одинаковыми проекциями спинов не могут оказаться в одной точке, поэтому их притяжение из-за обмена фононами обычно гораздо слабее, чем для электронов с противоположными спинами.

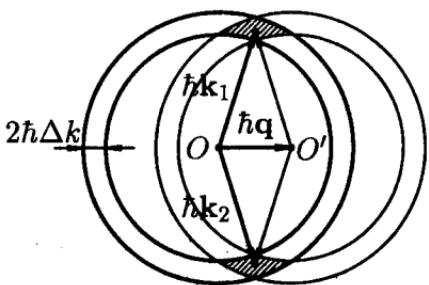


Рис. 44.2. Если спариваются электроны, имеющие суммарный импульс $\hbar\mathbf{q}$, то во взаимодействии участвуют лишь те электроны, которые заполняют заштрихованную часть \mathbf{k} -пространства.

Представим себе теперь всю возможную совокупность состояний, подобных тому, которое изображено на рис. 44.1. Занумеруем их индексом n . Они образуют полную систему функций, по которым можно разложить волновую функцию основного состояния сверхпроводника Ψ . Что означает на этом языке рассеяние друг на друге пары электронов $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$ (спиновые индексы мы опускаем) в состояние $(\mathbf{k}', -\mathbf{k}')$? Это означает переход из состояния ψ_n , в котором ячейки $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$ заняты, а $(\mathbf{k}', -\mathbf{k}')$ свободны, в другое состояние ψ_m , которое полностью подобно состоянию ψ_n .

за двумя только исключениями: в состоянии ψ_m ячейки $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$ свободны, а $(\mathbf{k}', -\mathbf{k}')$ заняты.

Введем теперь в рассмотрение некоторую функцию $v_{\mathbf{k}}^2$ волнового вектора \mathbf{k} . Пусть это будет вероятность того, что пара состояний $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$ занята. Тогда амплитуду состояния, в котором ячейки $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$ заняты, а $(\mathbf{k}', -\mathbf{k}')$ свободны, можно записать в виде

$$a_n = [v_{\mathbf{k}}^2(1 - v_{\mathbf{k}'}^2)]^{1/2} = v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}'}, \quad \text{где } u_{\mathbf{k}}^2 = 1 - v_{\mathbf{k}'}^2.$$

Аналогично амплитуда состояния ψ_m , в котором ячейки $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$ стали пустыми, а ячейки $(\mathbf{k}', -\mathbf{k}')$ заполнились, будет

$$a_m = v_{\mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}}.$$

Используя (44.4), мы можем теперь записать полную энергию сверхпроводника в состоянии, описываемом распределением $v_{\mathbf{k}}^2$, в виде

$$E_s = \sum_{\mathbf{k}} 2\varepsilon_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^2 + \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}. \quad (44.6)$$

Первое слагаемое здесь дает полную кинетическую энергию системы, $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ — энергия электрона в ячейке \mathbf{k} , отсчитанная от энергии Ферми, т. е.

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} = \hbar^2 k^2 / 2m - \hbar^2 k_F^2 / 2m = \bar{\varepsilon}_{\mathbf{k}} - \varepsilon_F.$$

Второе слагаемое, согласно (44.4), есть средняя потенциальная энергия взаимодействия электронов, где матричный элемент $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ определяется формулой (43.2).

Теперь надо найти такую функцию $v_{\mathbf{k}}^2$, которая будет минимизировать полную энергию E_s . Это значит, что $v_{\mathbf{k}}^2$ должна удовлетворять уравнению

$$\partial E_s / \partial v_{\mathbf{k}}^2 = 0.$$

Подставив сюда (44.6) и (43.2), получим

$$2\varepsilon_{\mathbf{k}} - V \frac{1 - 2v_{\mathbf{k}}^2}{v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}} \sum'_{\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}'} = 0,$$

откуда

$$\frac{v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}}{1 - 2v_{\mathbf{k}}^2} = \frac{\Delta_0}{2\varepsilon_{\mathbf{k}}}, \quad (44.7)$$

где

$$\Delta_0 = V \sum'_{\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}'}. \quad (44.8)$$

Штрих при знаке суммы означает, что суммирование ведется только по тем состояниям \mathbf{k} , которые лежат в сферическом слое около поверхности Ферми, где отличен от нуля матричный элемент $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ (43.2).

Выражая $v_{\mathbf{k}}^2$ из (44.7), получаем квадратное уравнение относительно $v_{\mathbf{k}}^2$:

$$v_{\mathbf{k}}^4 - v_{\mathbf{k}}^2 + \Delta_0^2/4E_{\mathbf{k}}^2 = 0,$$

где

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\varepsilon_{\mathbf{k}}^2 + \Delta_0^2}. \quad (44.9)$$

Тогда

$$v_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2}(1 - \varepsilon_{\mathbf{k}}/E_{\mathbf{k}}). \quad (44.10)$$

В этом равенстве мы поставим знак «минус», так как из физических соображений величина $v_{\mathbf{k}}^2$ должна стремиться к единице, а $\varepsilon_{\mathbf{k}} \rightarrow E_{\mathbf{k}}$ при $\mathbf{k} \rightarrow 0$.

График зависимости $v_{\mathbf{k}}^2$ от k изображен на рис. 44.3. Видно, что минимума полная энергия системы достигает тогда, когда распределение электронов около поверхности Ферми «размазано» на некотором интервале энергии порядка $2\Delta_0$. Еще раз подчеркнем, что это происходит при абсолютном нуле температур! Таково основное состояние сверхпроводника.

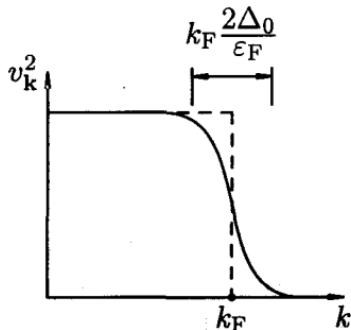


Рис. 44.3. Зависимость $v_{\mathbf{k}}^2$ от k . На уровне Ферми $\varepsilon_{\mathbf{k}} = 0$. Область «размазанности» $v_{\mathbf{k}}^2$ по энергии равна $2\Delta_0$.

44.2. Энергия основного состояния. Найдем теперь энергию основного состояния сверхпроводника. Для этого вычислим сперва величину Δ_0 . Подставим выражение для $v_{\mathbf{k}}^2$ (44.10) в (44.8):

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= V \sum'_{\mathbf{k}'} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} \right) \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} \right) \right]^{1/2} = \\ &= \frac{V}{2} \sum'_{\mathbf{k}'} \left(\frac{E_{\mathbf{k}}^2 - \varepsilon_{\mathbf{k}}^2}{E_{\mathbf{k}}^2} \right)^{1/2} = \frac{V\Delta_0}{2} \sum'_{\mathbf{k}'} (\varepsilon_{\mathbf{k}}^2 + \Delta_0^2)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Здесь мы учли определение $E_{\mathbf{k}}$ (44.9).

Таким образом, мы приходим к уравнению относительно Δ_0 в виде

$$1 = \frac{V}{2} \sum'_{\mathbf{k}} (\varepsilon_{\mathbf{k}}^2 + \Delta_0^2)^{-1/2}. \quad (44.11)$$

Если мы перейдем от суммирования по \mathbf{k} к интегрированию по энергии ε по формуле

$$\sum'_{\mathbf{k}} \dots = \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} \dots N(\varepsilon) d\varepsilon,$$

где $N(\varepsilon)$ — плотность состояний около энергии ε , то уравне-

ние (44.11) превратится в уравнение

$$1 = \frac{N(0)V}{2} \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} (\varepsilon^2 + \Delta_0^2)^{-1/2} d\varepsilon. \quad (44.12)$$

Здесь $N(0)$ — плотность состояний около уровня Ферми (напоминаем, что энергия ε отсчитывается от уровня Ферми).¹⁾ Поскольку подынтегральная функция в (44.12) четная и интегрирование ведется в симметричных пределах, имеем из (44.12)

$$1 = N(0)V \int_0^{\hbar\omega_D} (\varepsilon^2 + \Delta_0^2)^{-1/2} d\varepsilon.$$

Этот интеграл элементарно интегрируется, в результате получаем

$$1/N(0)V = \text{Arsh}(\hbar\omega_D/\Delta_0), \quad (44.13)$$

или

$$\hbar\omega_D/\Delta_0 = \text{sh}(1/N(0)V).$$

Поскольку $N(0)V$ для большинства сверхпроводников имеет величину порядка 0.3 или меньше, можно легко получить приближенное равенство

$$\Delta_0 \simeq 2\hbar\omega_D \exp(-1/N(0)V). \quad (44.14)$$

Оценим величину Δ_0 : дебаевская температура $\hbar\omega_D \sim 100 K$, $N(0)V \sim 0.3$, тогда $\Delta_0 \sim 4 K$. Здесь мы энергии $\hbar\omega_D$ и Δ_0 выражаем в кельвинах.

Перейдем теперь к вычислению энергии основного состояния сверхпроводника. Общее выражение E_s для этой энергии дается

¹⁾При переходе к формуле (44.12) мы учли, что интегрирование ведется по малому интервалу энергий ($2\hbar\omega_D$) по сравнению с фермиевской энергией ε_F . Поэтому можно считать, что плотность состояний $N(\varepsilon)$ мало меняется на этом интервале и равна своему значению на уровне Ферми $N(0)$.

формулой (44.6). Энергия основного состояния образца в нормальном состоянии, когда взаимодействие между электронами выключено и они заполняют все состояния под уровнем Ферми, дается формулой

$$E_n = \sum_{k < k_F} 2\varepsilon_k. \quad (44.15)$$

Здесь суммирование ведется сразу по парам состояний $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$, поэтому и появился коэффициент 2.

Энергию основного состояния сверхпроводника будем теперь отсчитывать от энергии основного состояния нормального металла, т. е. найдем величину

$$W = E_s - E_n.$$

Используя (44.6) и (44.15), имеем

$$W = \sum_{k < k_F} 2\varepsilon_k(v_k^2 - 1) + \sum_{k > k_F} 2\varepsilon_k v_k^2 - V \sum_{kk'}' v_k u_k v_{k'} u_{k'}. \quad (44.16)$$

Штрих у последней суммы означает, что суммирование ведется в \mathbf{k} -пространстве по слою в интервале $\pm \hbar\omega_D$ около поверхности Ферми.

Подставляя сюда выражение для v_k^2 (44.10), после элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned} W &= \sum_{k < k_F} |\varepsilon_k|(1 - |\varepsilon_k|/E_k) + \\ &\quad + \sum_{k > k_F} \varepsilon_k(1 - \varepsilon_k/E_k) - V \sum_{kk'}' v_k u_k v_{k'} u_{k'} = \\ &= 2 \sum_{k > k_F} \varepsilon_k(1 - \varepsilon_k/E_k) - V \sum_{kk'}' v_k u_k v_{k'} u_{k'}. \end{aligned}$$

Учитывая определение Δ_0 (44.8), находим

$$\sum_{kk'}' v_k u_k v_{k'} u_{k'} = \Delta_0^2/V^2.$$

Отсюда легко получаем

$$W = 2 \sum_{k>k_F} \varepsilon_k (1 - \varepsilon_k / E_k) - \Delta_0^2 / V.$$

Переходя от суммирования к интегрированию, имеем

$$W = 2N(0) \int_0^{\hbar\omega_D} \varepsilon \left(1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_0^2}} \right) d\varepsilon - \frac{\Delta_0^2}{V}.$$

После интегрирования получим

$$W = N(0)\Delta_0^2 \left\{ \left(\frac{\hbar\omega_D}{\Delta_0} \right)^2 - \frac{\hbar\omega_D}{\Delta_0} \left[1 + \left(\frac{\hbar\omega_D}{\Delta_0} \right)^2 \right]^{1/2} + \right. \\ \left. + \operatorname{Arsh} \frac{\hbar\omega_D}{\Delta_0} \right\} - \frac{\Delta_0^2}{V}.$$

Используя равенство (44.13) и неравенство $\hbar\omega_D \gg \Delta_0$, имеем окончательно

$$W = -\frac{1}{2}N(0)\Delta_0^2. \quad (44.17)$$

Мы видим, таким образом, что разность W между энергиями сверхпроводящего и нормального состояний при $T = 0$ оказывается отрицательной, т. е. сверхпроводящее состояние энергетически более выгодно. А это значит, что именно такое состояние и будет реализовываться природой.

В самом начале курса было установлено, что разность свободных энергий нормальной и сверхпроводящей фаз равна $H_{cm}^2 / 8\pi$, где H_{cm} — критическое термодинамическое поле. Отсюда сразу следует, что при $T = 0$ должно выполняться следующее соотношение:

$$\frac{H_{cm}^2(0)}{8\pi} = \frac{1}{2}N(0)\Delta_0^2,$$

или

$$H_{cm}(0) = \Delta_0 \sqrt{4\pi N(0)}. \quad (44.18)$$

Мы получили, таким образом, термодинамическое критическое поле при $T = 0$, выраженное через характерные параметры сверхпроводника — параметры его электронного спектра и электрон-фононного взаимодействия.

Проверим, насколько разумными окажутся численные оценки порядков величин, даваемые формулой (44.18). В 1 см³ металла содержится порядка 10^{22} электронов, а зона проводимости имеет ширину порядка $10 \text{ эВ} = 10 \cdot 1.6 \cdot 10^{-12} \text{ эрг}$, следовательно, оценка плотности состояний дает $N(0) \sim 10^{22}/(10 \times 1.6 \cdot 10^{-12}) \text{ эрг}^{-1} \text{ см}^{-3} \sim 10^{33} \text{ эрг}^{-1} \text{ см}^{-3}$. Согласно предыдущим оценкам, $\Delta_0 \sim 10 \text{ К} \sim 10^{-15} \text{ эрг}$. Отсюда сразу получим $H_{cm} \sim \sim 10^{-15} (10^{34})^{1/2} = 100 \text{ Э}$. Это вполне разумная оценка критического поля.

§ 45. Спектр элементарных возбуждений сверхпроводника

45.1. Энергетическая щель. Сейчас мы познакомимся с одним из важнейших понятий микроскопической теории сверхпроводимости — с энергетической щелью в спектре элементарных возбуждений сверхпроводника.

Для этого зафиксируем наше внимание на какой-либо произвольной паре состояний $(\mathbf{q}, -\mathbf{q})$ в импульсном пространстве сверхпроводника, находящегося в основном состоянии. Какой вклад в полную энергию вносит эта пара? Обозначим этот вклад через $w_{\mathbf{q}}$. Из (44.6) сразу видно, что

$$w_{\mathbf{q}} = 2\varepsilon_{\mathbf{q}} v_{\mathbf{q}}^2 - 2V v_{\mathbf{q}} u_{\mathbf{q}} \sum'_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}. \quad (45.1)$$

Действительно, первое слагаемое здесь — кинетическая энергия пары $(\mathbf{q}, -\mathbf{q})$, а второе слагаемое — вклад в отрицательную часть энергии основного состояния, происходящий от того, что рассматриваемая пара участвует во всевозможных процессах взаимодействия, при которых она переходит в любые другие состояния $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$, и наоборот — когда любые другие пары $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$ переходят в наше выделенное для рассмотрения состояние $(\mathbf{q}, -\mathbf{q})$.

Коэффициент 2 во втором слагаемом появился потому, что пара $(\mathbf{q}, -\mathbf{q})$ в сумме (44.6) встретится дважды — один раз при суммировании по \mathbf{k} , другой раз — при суммировании по \mathbf{k}' . Учитывая теперь выражение (44.8) для Δ_0 и формулы (44.9) и (44.10), получим

$$\begin{aligned} w_{\mathbf{q}} &= 2\epsilon_{\mathbf{q}} \frac{1}{2} \left(1 - \epsilon_{\mathbf{q}}/E_{\mathbf{q}}\right) - 2 \left[\frac{1}{4} \left(1 - \epsilon_{\mathbf{q}}^2/E_{\mathbf{q}}^2\right) \right]^{1/2} \Delta_0 = \\ &= \epsilon_{\mathbf{q}} - \epsilon_{\mathbf{q}}^2/E_{\mathbf{q}} - \Delta_0^2/E_{\mathbf{q}} = \epsilon_{\mathbf{q}} - E_{\mathbf{q}}. \end{aligned} \quad (45.2)$$

Воспользуемся теперь полученным выражением. Предположим, что в основном состоянии сверхпроводника пара состояний $(\mathbf{q}, -\mathbf{q})$ заведомо пуста. Введем в такой сверхпроводник один внешний электрон и поместим его в состояние \mathbf{q} . Какова будет теперь энергия системы? Поскольку мы ввели один электрон в состояние \mathbf{q} , то значит теперь пара состояний $(\mathbf{q}, -\mathbf{q})$ не может участвовать в процессах рассеяния, т. е. не может давать вклад в энергию основного состояния сверхпроводника. Этот вклад мы только что вычислили, он равен $w_{\mathbf{q}}$. Следовательно, энергия сверхпроводника с одним «лишним» электроном в состоянии \mathbf{q} будет

$$W_{\mathbf{q}} = W - w_{\mathbf{q}} + \epsilon_{\mathbf{q}}. \quad (45.3)$$

Этот «лишний» неспаренный электрон мы будем называть элементарным возбуждением нашей системы, или квазичастицей. В формуле (45.3) W — энергия основного состояния сверхпроводника, а третье слагаемое учитывает просто кинетическую энергию нашего «лишнего» электрона. Подставляя (45.2) в (45.3), имеем

$$W_{\mathbf{q}} = W + E_{\mathbf{q}}. \quad (45.4)$$

Мы получили очень важную формулу. Поскольку, согласно (44.9),

$$E_{\mathbf{q}} = \sqrt{\epsilon_{\mathbf{q}}^2 + \Delta_0^2},$$

ясно, что добавляя один электрон к сверхпроводнику, находящемуся в основном состоянии, мы повышаем энергию системы как

минимум на величину Δ_0 (в том случае, если $\epsilon_q = 0$, т. е. если состояние q находится на поверхности Ферми). Это значит, что спектр элементарных возбуждений сверхпроводника отделен от энергетического уровня, соответствующего основному состоянию сверхпроводника, энергетической щелью.

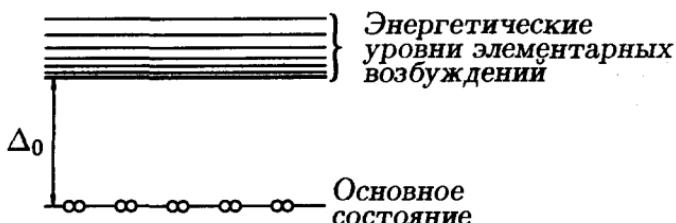


Рис. 45.1. Энергетическая щель Δ_0 отделяет область энергетических уровней элементарных возбуждений от уровня основного состояния (уровня конденсации электронных пар).

Действительно, вновь вернемся к сверхпроводнику в основном состоянии. Пусть в результате какого-то внешнего воздействия один из электронов пары $(q, -q)$ переведен в соседнюю ячейку k -пространства. Напомним, что поскольку рассматривается основное состояние сверхпроводника, первоначально все ячейки в k -пространстве были или попарно заполнены, или попарно пусты. Перевод одного из электронов пары $(q, -q)$ в соседнюю ячейку означает появление двух неспаренных (возбужденных) электронов: один остается в одном из состояний $(q, -q)$, а второй появляется в соседней ячейке и, конечно, не имеет парного себе в противоположной точке k -пространства. Согласно только что приведенному рассуждению, на такой разрыв пары требуется энергия не меньше $2\Delta_0$. Это можно схематически изобразить с помощью диаграммы (рис. 45.1). Все парные состояния сконденсированы на уровне, характеризующем основное состояние сверхпроводника. Лишний электрон на этом уровне оказаться не может и должен занять первый незанятый уровень спектра элементарных возбуждений. При разрыве пары оба электрона пары должны подняться на уровни спектра элементарных возбуждений, и поэтому должна быть затрачена энергия, большая $2\Delta_0$.

Существование энергетической щели является очень важным свойством сверхпроводника и объясняет многие закономерности его поведения.

45.2. Плотность состояний элементарных возбуждений сверхпроводника и длина когерентности. На рис. 45.1 была схематически показана нижняя часть спектра элементарных возбуждений сверхпроводника. Используя формулу (44.9), легко получить выражение для плотности состояний в спектре элементарных возбуждений сверхпроводника. Действительно, $E_{\mathbf{k}}$ — это энергия элементарного возбуждения (см. формулу (45.4)), т. е. это величина, на которую увеличивается энергия системы, если к сверхпроводнику добавляется электрон с импульсом $\hbar\mathbf{k}$, причем

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\varepsilon_{\mathbf{k}}^2 + \Delta_0^2} = \sqrt{(\hbar^2 k^2 / 2m - \hbar^2 k_F^2 / 2m)^2 + \Delta_0^2}.$$

Зависимость $E_{\mathbf{k}}$ от k , которая следует из приведенной выше формулы, изображена на рис. 45.2. Уже из рисунка видно, что уровни элементарных возбуждений сверхпроводника сгущаются при $E_{\mathbf{k}} \rightarrow \Delta_0$. Плотность состояний, или число энергетических уровней, приходящихся на единичный интервал энергии и на 1 см^3 материала, очевидно, равна

$$\rho(E) = d\nu/dE,$$

где $d\nu$ — число уровней в энергетическом интервале dE около уровня E . Но $d\nu/d\varepsilon$ — это плотность состояний около уровня Ферми для металла в нормальном состоянии (в расчете на одну проекцию спина), т. е.

$$d\nu/d\varepsilon = N(0).$$

Поэтому

$$\rho(E) = \frac{d\nu}{d\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dE} = N(0) \frac{E}{\sqrt{E^2 - \Delta_0^2}}. \quad (45.5)$$

Последняя формула показывает, что, действительно, плотность состояний для элементарных возбуждений сверхпроводника $\rho(E) \rightarrow \infty$ при $E \rightarrow \Delta_0$. Эта ситуация изображена на рис. 45.2.

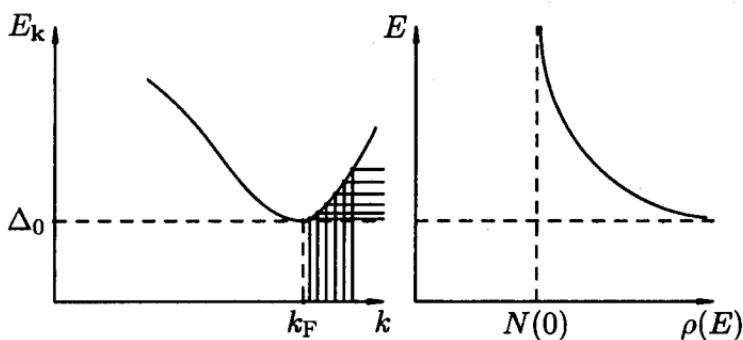


Рис. 45.2. Спектр элементарных возбуждений сверхпроводника E_k и плотность состояний $\rho(E)$.

Рассмотрим теперь, как микроскопическая теория сверхпроводимости позволяет оценить длину когерентности сверхпроводника. Волновая функция основного состояния сверхпроводника нами уже рассматривалась в п. 44.1. Основное состояние может быть изображено распределением спаренных электронов в \mathbf{k} -пространстве, что дается функцией $v_{\mathbf{k}}^2$. График зависимости $v_{\mathbf{k}}^2$ от k представлен на рис. 44.3. Видно, что область \mathbf{k} -пространства, где функция $v_{\mathbf{k}}^2$ испытывает сильные изменения, имеет размер порядка

$$\Delta k \sim 2\Delta_0 \frac{k_F}{\epsilon_F}.$$

Отсюда следует, что область Δx в x -пространстве, где волновая функция основного состояния сверхпроводника будет существенно изменяться, должна определяться соотношением

$$\Delta x \Delta k \sim 1.$$

Отсюда следует, что

$$\Delta x \sim \frac{\epsilon_F}{2\Delta_0 k_F} = \frac{1}{2\Delta_0 k_F} \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} = \frac{\hbar p_F}{4\Delta_0 m} = \frac{\hbar v_F}{4\Delta_0}. \quad (45.6)$$

Здесь p_F — импульс электрона на поверхности Ферми, v_F — фермиевская скорость электрона. Но по самому смыслу Δx — это как раз та величина, которую при изучении теории Гинзбурга — Ландау мы называли длиной когерентности ξ . Поэтому мы теперь можем говорить, что из (45.6) следует оценка для длины когерентности ξ_0 при $T = 0$:

$$\xi_0 \sim \hbar v_F / 4\Delta_0. \quad (45.7)$$

Скоро будет показано, что $\Delta_0 \sim k_B T_c$, где k_B — постоянная Больцмана, T_c — критическая температура. Точный расчет дает

$$\xi_0 = 0.18 \hbar v_F / k_B T_c. \quad (45.8)$$

Эту величину ξ_0 можно также рассматривать как размер электронной пары, для оценки которого можно принять, что $v_F \sim \sim 10^8$ см/с, $T_c \sim 1$ К, тогда

$$\xi_0 \simeq 0.18 \frac{10^{-27} \cdot 10^8}{1.38 \cdot 10^{-16} \cdot 1} \sim 10^{-4} \text{ см.}$$

Это очень большое, вполне макроскопическое расстояние.

Задача 45.1. Во сколько раз плотность состояний в спектре элементарных возбуждений сверхпроводника больше плотности состояний электронов в нормальном металле около уровня Ферми для энергии возбуждений E , равных соответственно $1.01\Delta_0$; $1.5\Delta_0$; $2.0\Delta_0$?

Ответ. $\rho/N(0) = 7.12; 1.34; 1.15$.

45.3. Зависимость величины энергетической щели от температуры. Энергетическая щель Δ уменьшается с повышением температуры (обозначение Δ_0 мы сохраним только для случая $T = 0$). Это можно легко понять. Как мы уже знаем, для разрыва пары и создания двух элементарных возбуждений требуется затратить энергию 2Δ . Если температура сверхпроводника T такова, что $k_B T \sim 2\Delta$, то ясно, что уже много электронных пар будет разорвано под влиянием теплового воздействия и, соответственно, в k -пространстве будет уже много ячеек заполнено элементарными возбуждениями (одиночными электронами).

Но это значит, что эти состояния в \mathbf{k} -пространстве уже не будут участвовать во взаимных переходах пар и, соответственно, не будут участвовать в общем понижении энергии сверхпроводника, т. е. энергия сверхпроводника повысится. Эти же состояния, очевидно, не будут теперь участвовать и в формировании щели (см. (44.8)). Отсюда следует, что чем больше будет разорванных пар, тем больше элементарных возбуждений и тем меньше щель.

Теперь проведем количественный анализ.

Поскольку элементарные возбуждения подчиняются статистике Ферми – Дирака, вероятность заполнения состояния \mathbf{k} одиночным электроном равна

$$f_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\exp(E_{\mathbf{k}}/k_B T) + 1}, \quad (45.9)$$

где $E_{\mathbf{k}}$ — энергия элементарного возбуждения. Легко видеть, что $f_{\mathbf{k}} \ll 1$ при $k_B T \ll E_{\mathbf{k}}$, $f_{\mathbf{k}} \simeq 1/2$ при $k_B T \gg E_{\mathbf{k}}$. Если хотя бы одно из состояний (\mathbf{k}) или ($-\mathbf{k}$) заполнено, то пара состояний ($\mathbf{k}, -\mathbf{k}$) не может участвовать в создании сверхпроводящего состояния. Вероятность этого равна $2f_{\mathbf{k}}$. Отсюда следует, что вероятность того, что пара состояний ($\mathbf{k}, -\mathbf{k}$) может участвовать в рассеяниях, т. е. годится для участия в создании сверхпроводящего состояния, равна $1 - 2f_{\mathbf{k}}$.

Тогда выражение для полной энергии сверхпроводника при $T \neq 0$ может быть записано в виде (см. § 44)

$$W = \sum_{\mathbf{k}} 2|\varepsilon_{\mathbf{k}}|f_{\mathbf{k}} + 2 \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}}(1 - 2f_{\mathbf{k}})v_{\mathbf{k}}^2 - \\ - V \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}' v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}'}' u_{\mathbf{k}'}' (1 - 2f_{\mathbf{k}})(1 - 2f_{\mathbf{k}'}) \quad (45.10)$$

Здесь первое слагаемое — кинетическая энергия элементарных возбуждений, второе слагаемое — кинетическая энергия сверхпроводящих электронов, последний член — энергия взаимодействия сверхпроводящих электронов через фононы, которая и приводит к созданию сверхпроводящего состояния. Последние

два сомножителя учитывают вероятность такого взаимодействия.

Плотность свободной энергии сверхпроводника равна

$$F = W - TS, \quad (45.11)$$

где S — энтропия материала. Функции $v_{\mathbf{k}}^2$, характеризующие распределение сверхпроводящих электронов по импульсам и соответствующие термодинамическому равновесию, определим из условия минимальности плотности свободной энергии F :

$$\partial F / \partial (v_{\mathbf{q}}^2) = 0. \quad (45.12)$$

Подставляя в (45.12) формулы (45.11) и (45.10), получим

$$\frac{v_{\mathbf{q}} u_{\mathbf{q}}}{1 - 2v_{\mathbf{q}}^2} = \frac{\Delta}{2\varepsilon_{\mathbf{q}}}, \quad (45.13)$$

где

$$\Delta = V \sum'_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} (1 - 2f_{\mathbf{k}}). \quad (45.14)$$

Формула (45.14) дает выражение для зависимости щели от температуры. При $T \rightarrow 0$ щель $\Delta \rightarrow \Delta(0)$, где $\Delta(0) = \Delta_0$ — щель при $T = 0$, полученная ранее (44.8).

Из (45.14) находим уравнение для щели. Для этого, как и в (44.10), запишем $v_{\mathbf{q}}^2$ в виде

$$v_{\mathbf{q}}^2 = \frac{1}{2}(1 - \varepsilon_{\mathbf{q}}/E_{\mathbf{q}}),$$

где

$$E_{\mathbf{q}} = \sqrt{\varepsilon_{\mathbf{q}}^2 + \Delta^2(T)}.$$

Тогда уравнение (45.14) примет вид

$$\Delta = V \sum'_{\mathbf{k}} \frac{\Delta}{2E_{\mathbf{k}}} \left(1 - \frac{2}{\exp(E_{\mathbf{k}}/k_B T) + 1} \right).$$

Переходя от суммирования к интегрированию, после несложных преобразований получим

$$\frac{1}{N(0)V} = \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2(T)}} \operatorname{th} \frac{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2(T)}}{2k_B T}. \quad (45.15)$$

Эта формула дает в неявной форме зависимость щели от температуры. Эта зависимость изображена на рис. 45.3. Вблизи T_c зависимость щели от температуры определяется формулой $\Delta \propto (T_c - T)^{1/2}$. Из (45.15) можно теперь найти явное выражение для критической температуры T_c . Действительно, при $T = T_c$ щель $\Delta = 0$, поэтому, если написать в (45.15) T_c вместо T и положить $\Delta = 0$, мы получим уравнение относительно T_c :

$$\frac{1}{N(0)V} = \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \operatorname{th} \frac{\varepsilon}{2k_B T_c}. \quad (45.16)$$

Проведя интегрирование, получим

$$k_B T_c = 1.14 \hbar \omega_D e^{-1/N(0)V}. \quad (45.17)$$

С другой стороны, нам уже известно (44.14), что

$$\Delta_0 = 2 \hbar \omega_D e^{-1/N(0)V}.$$

Отсюда сразу находим

$$2\Delta_0 = 3.52 k_B T_c. \quad (45.18)$$

Эти соотношения находятся в хорошем количественном согласии с многочисленными экспериментами. Обсудим еще раз физический смысл полученных результатов.

Под влиянием тепла некоторые пары разрушаются и возникают неспаренные электроны, или нормальные электроны, или элементарные возбуждения. Это просто разные названия одного и того же физического объекта. Заполняя какие-то ячейки k -пространства, эти одиночные электроны исключают соответствующие ячейки (и парные им) из суммы (44.8), которая определяет

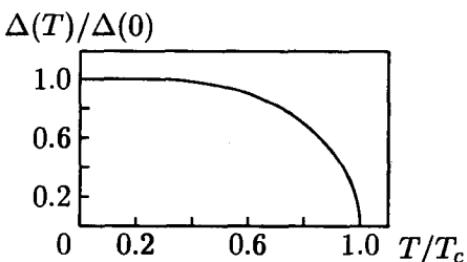


Рис. 45.3. Зависимость энергетической щели от температуры согласно теории БКШ.

щель Δ . В результате щель сужается. Нормальное состояние достигается тогда, когда Δ становится равной нулю. Это позволяет определить критическую температуру согласно (45.17).

Замечательно, что формула (45.17) дает объяснение изотоп-эффекта. Напомним, что изотоп-эффект заключается в том, что критическая температура разных изотопов одного и того же сверхпроводящего элемента определяется эмпирической формулой

$$T_c M^{1/2} = \text{const},$$

где M — масса атома изотопа. Поскольку дебаевская частота

$$\omega_D \propto M^{-1/2},$$

то из (45.17) сразу следует изотоп-эффект.

Остановимся теперь кратко на вопросе о влиянии примесей на спаривание электронов.¹⁾ В присутствии примесей направление импульса электрона не сохраняется, поэтому строить пары из электронов с противоположными импульсами $\hbar k$ и $-\hbar k$, как мы это делали выше, затруднительно. Однако ничто не мешает использовать вместо электронных плоских волн e^{ikr} точные волновые функции $\chi_n(r)$ электронов с учетом потенциала примесей $U(r)$, описывающие диффузионное распространение электронных волн. Точный вид этих функций нам неизвестен, но он и не войдет в окончательные уравнения типа (44.11) и (45.15) на величину щели Δ . Единственное, но важное условие состоит в том, чтобы для всякого электронного состояния n с волновой

¹⁾ Материал, добавленный для 2-го издания.

функцией $\chi_n(\mathbf{r})$ имелось «парное» состояние \bar{n} с волновой функцией $\chi_{\bar{n}}(\mathbf{r}) = \chi_n^*(\mathbf{r})$, отвечающее движению электрона «вспять» по диффузионной траектории, соответствующей состоянию n . Комплексное сопряжение волновых функций в квантовой механике эквивалентно операции обращения времени, поэтому в одном и том же случайному потенциале $U(\mathbf{r})$ существуют одновременно точные состояния $\chi_n(\mathbf{r})$ и $\chi_n^*(\mathbf{r})$, если $U(\mathbf{r})$ не меняется при замене $t \rightarrow -t$. Это условие выполнено для обычных примесей, которые поэтому очень слабо влияют на Δ_0 и другие термодинамические свойства сверхпроводника даже в «грязном» пределе, когда длина свободного пробега $l \ll \xi_0$ (т. наз. «теорема Андерсона», подробнее см. [7]). Совсем иначе обстоит дело, если в сверхпроводнике имеются **магнитные примеси**, непосредственно взаимодействующие со спинами электронов (или если к грязному сверхпроводнику приложено магнитное поле). В этом случае симметрия электронных состояний по отношению к обращению времени нарушается, и температура сверхпроводящего перехода резко падает с концентрацией таких примесей.

Задача 45.2. Определить константу связи $g = N(0)V$ для олова, если $T_c = 3.74$ К, а дебаевская температура равна $\Theta_D = 195$ К.

Решение. Используя формулу (45.17), получим $g = 0.245$.

Задача 45.3. Критическая температура смеси изотопов ртути со средним атомным весом 199.7 г равна 4.161 К. На сколько и в какую сторону изменится критическая температура для смеси со средним атомным весом 200.7 г?

Ответ. Понизится на 0.01 К.

Задача 45.4. Туннельный эксперимент (см. § 46) дал для индия значение энергетической щели $\Delta_0 = 5.3 \cdot 10^{-4}$ эВ. Какой должна быть согласно теории БКШ критическая температура индия? Сравнить с T_c индия 3.37 К.

Ответ. $T_c = 2\Delta_0/(3.52k_B) = 3.49$ К.

§ 46. Туннельные эффекты в сверхпроводниках

Наиболее прямое измерение энергетической щели в сверхпроводниках может быть проведено с помощью туннельных экспериментов. Эту методику разработал Гевер в 1960 г. [133]. В принципе она очень проста (рис. 46.1). На стеклянную пластинку с зара-

нее подготовленными контактами наносится узкая полоска пленки первого металла. Затем эта полоска окисляется так, чтобы пленка оказалась покрытой слоем изолирующего окисла толщиной в несколько десятков ангстрем (барьерный слой). После этого в поперечном направлении наносится узкая полоска пленки второго металла. Место пересечения этих двух полосок (площадью порядка 1 мм^2) и представляет собой туннельный переход. Исследование заключается в изучении вольт-амперной характеристики такого перехода. Физика дела заключается в том, что здесь используется специфическое квантовомеханическое свойство электрона проходить тонкие потенциальные барьеры (в данном случае — слой окисла) посредством так называемого туннельного перехода.

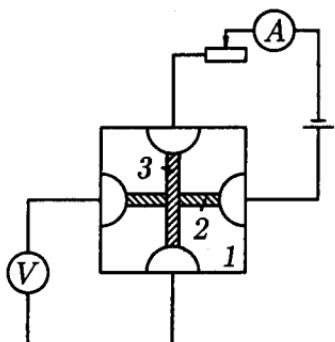


Рис. 46.1. Схема эксперимента для изучения туннельного эффекта: 1 — стеклянная пластина, 2 — пленка первого металла, 3 — пленка второго металла.

46.1. Туннельные характеристики. Обсудим теперь, какой вид будут иметь вольт-амперные характеристики для разных случаев туннельных переходов.

Простейший случай — когда и первый, и второй металлы — нормальные металлы. При установлении контакта между металлами их уровни Ферми уравниваются за счет возникновения контактной разности потенциалов. Энергетическая диаграмма изображена на рис. 46.2, а. Если теперь на туннельный переход подать разность потенциалов V (рис. 46.2, б), то уровни Ферми металлов разойдутся на величину eV , и возникнет туннельный ток. Если предположить, что плотность состояний в интересующей

нас области энергий остается постоянной ($N(0)$), то из рис. 46.2, б ясно, что сила тока будет пропорциональна eV , т. е. будет выполняться закон Ома.

Рассмотрим теперь случай, когда первый металл — нормальный, а второй — сверхпроводник. Мы уже знаем, какой вид имеет спектр элементарных возбуждений сверхпроводника (рис. 45.1 и 45.2). Энергия элементарных возбуждений отсчитывается от уровня основного состояния сверхпроводника. В нормальном металле энергия элементарного возбуждения отсчитывается от уровня Ферми. Поэтому при создании туннельного контакта между нормальным металлом и сверхпроводником за счет контактной разности потенциалов должны уравняться уровень Ферми нормального металла и уровень основного состояния сверхпроводника. Именно это состояние изображено на рис. 46.3, а.

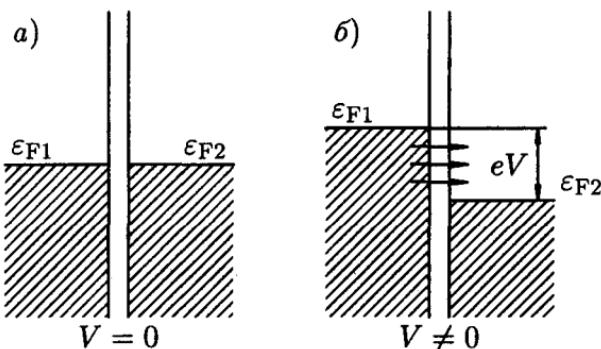


Рис. 46.2. Энергетическая диаграмма для случая контакта двух нормальных металлов: а) $V = 0$; б) $V \neq 0$, идет туннельный ток, пропорциональный eV .

Рассмотрим сперва случай, когда $T = 0$.

Приложим к туннельному переходу некоторую разность потенциалов V . Пусть в результате этого уровень Ферми нормального металла поднялся над уровнем основного состояния сверхпроводника на величину eV . Из рис. 46.3, б ясно, что туннельный ток электронов из N в S может начаться только тогда, когда величина eV станет равной энергетической щели Δ в S или превзойдет ее. Тот же результат получится, если поменять по-

лярность приложенного к переходу напряжения. Теперь туннелирование электрона из S в N будет происходить тогда, когда окажется энергетически допустимым разрыв электронной пары в S , т. е. когда энергия, выделившаяся при туннелировании одного электрона пары, окажется достаточной, чтобы закинуть второй электрон этой пары в область разрешенных энергий для одиночных электронов, т. е. выше щели (см. рис. 46.3, в).

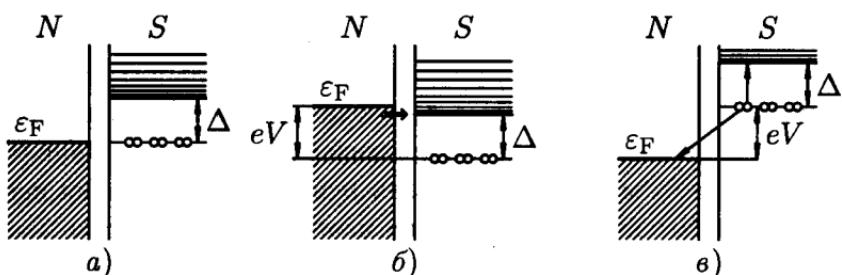


Рис. 46.3. Энергетическая диаграмма для туннельного NS -перехода:
 а) $V = 0$, уровень ϵ_F противостоит уровню основного состояния сверхпроводника; б) $V \neq 0$, $|eV| > \Delta$, идет туннельный ток электронов из N в S ; в) $V \neq 0$, $|eV| > \Delta$, идет туннельный ток электронов из S в N .

Таким образом, вольт-амперная характеристика такого туннельного перехода будет нечетной функцией V . Она изображена на рис. 46.4.

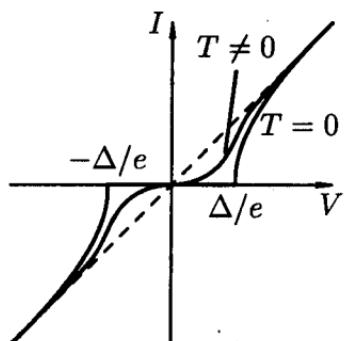


Рис. 46.4. Вольт-амперная характеристика туннельного NIS -перехода.

В случае, если $T \neq 0$, как нетрудно сообразить, вольт-амперная характеристика будет несколько размазанной.

Переходим к рассмотрению туннельных эффектов в S_1IS_2 -переходах, когда оба металла (S_1 и S_2), разделенные туннельным слоем изолятора (I), являются сверхпроводниками.

Сперва рассмотрим случай $T = 0$. Согласно рис. 46.5, туннельный ток может возникнуть только тогда, когда к туннельному переходу будет приложено напряжение $V > (\Delta_1 + \Delta_2)/e$. Действительно, только в этом случае возможен процесс, изображенный на этом рисунке: электронная пара в S_1 разрывается, один из электронов этой пары туннелирует в S_2 с выделением энергии, равной или большей, чем Δ_1 . При этом второй электрон разорванной пары, поглощая эту энергию, возбуждается в состояния спектра квазичастиц S_1 .

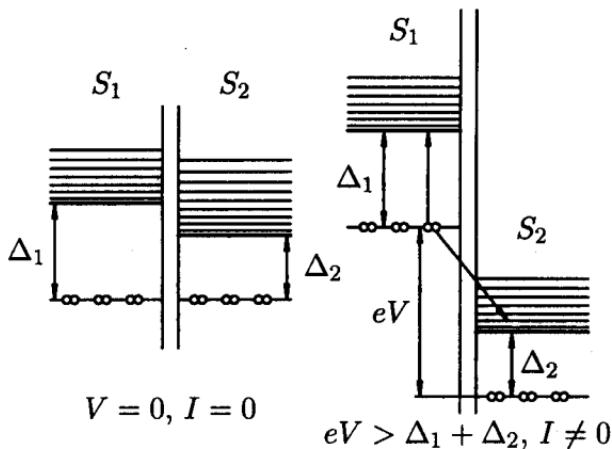


Рис. 46.5. Энергетические диаграммы для туннельного перехода S_1IS_2 , $T = 0$.

Для реального случая, когда $T \neq 0$, картина будет несколько более сложной. Теперь в каждом из сверхпроводников имеется какое-то количество возбужденных одиночных электронов, равновесное количество которых определяется температурой.

Энергетические диаграммы туннельного перехода в этом случае изображены на рис. 46.6. Количество возбуждений в данной области спектра схематично изображается количеством точек на данном энергетическом уровне. Видно, что если $V = 0$

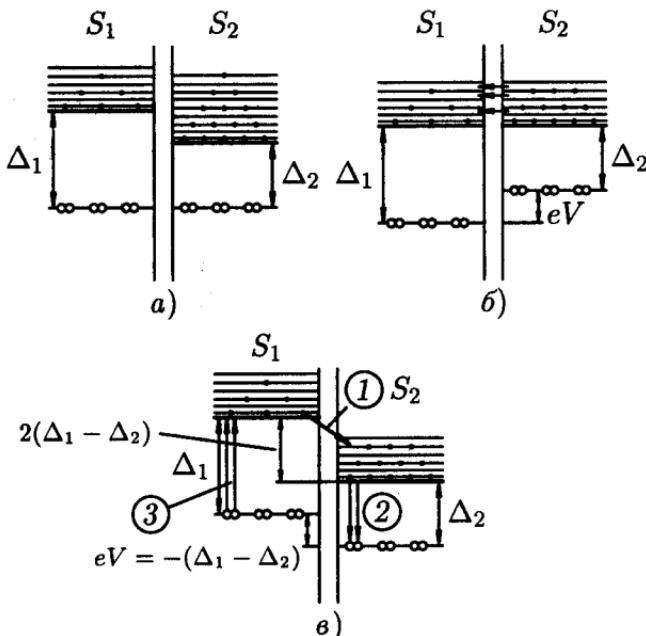


Рис. 46.6. Туннелирование между двумя сверхпроводниками при $T \neq 0$:
 а) $V = 0$, концентрация возбуждений с одинаковой энергией в S_1 и S_2 одинакова, поэтому ток равен нулю; б) $eV = \Delta_1 - \Delta_2$, ток обусловлен переходом возбужденных частиц из S_2 в S_1 ; в) $eV = -(\Delta_1 - \Delta_2)$, возбужденная частица переходит из S_1 в S_2 , (процесс 1), объединившись с электронами в S_2 , она образует пару и попадает на основной уровень (процесс 2), выделившейся энергии $2\Delta_1$ достаточно для разрыва пары в S_1 (процесс 3).

(рис. 46.6, а), то несмотря на то, что щели в S_1 и S_2 разные, количество возбуждений на противостоящих друг другу уровнях в S_1 и S_2 будет одинаково. Поэтому количество частиц, туннелирующих из S_1 в S_2 , будет равно тому же числу частиц, туннелирующих из S_2 в S_1 , т. е. как это и должно быть, в равновесных условиях полный туннельный ток $I = 0$.

Если теперь приложить даже небольшое напряжение V , то равновесие нарушится и возникнет ток квазичастиц из одного сверхпроводника в другой. Не будем, однако, забывать, что плотность состояний квазичастиц в сверхпроводнике имеет особен-

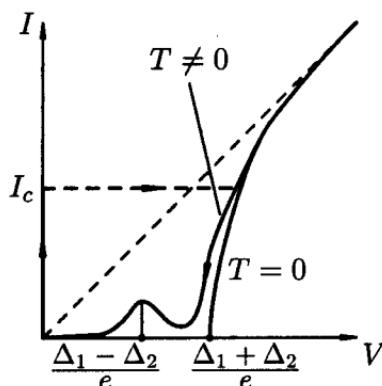


Рис. 46.7. Сверхпроводящие и квазичастичные ветви вольт-амперных характеристик туннельного S_1IS_2 -перехода для $T = 0$ и $T \neq 0$.

ность при $E = \Delta$ (см. (45.5) и рис. 45.2). Поэтому если приложить к переходу разность потенциалов V такую, что $eV = \Delta_1 - \Delta_2$ (рис. 46.6, б), то друг против друга окажутся области с плотностью состояний $\rho = \infty$ и в S_1 , и в S_2 . Естественно, это вызовет большой всплеск туннельного тока. Дальнейшее увеличение V приведет к тому, что уровни с $\rho = \infty$ разойдутся и полный туннельный ток уменьшится. Отсюда можно сделать вывод, что при $V = (\Delta_1 - \Delta_2)/e$ на вольт-амперной характеристике должен наблюдаться максимум тока (рис. 46.7). При изменении знака V возникнет диаграмма, изображенная на рис. 46.6, в. Здесь тоже возникнет всплеск тока при $|V| = (\Delta_1 - \Delta_2)/e$. Таким образом, и в случае контакта двух сверхпроводников вольт-амперная характеристика будет нечетной функцией напряжения V .

В заключение приведем результат туннельного эксперимента Гевера и Мегерле [134] по изучению величины энергетической щели в различных сверхпроводниках и ее зависимости от температуры (рис. 46.8). Штриховой линией показана зависимость, следующая из теории Бардина – Купера – Шриффера.

46.2*. Энергия связи SIS -перехода и температурная зависимость критического тока. Прежде чем приступить к исследованию SIS -перехода мы приведем вычисление проводимости туннельного перехода в нормальном состоянии. Это окажется полезно для дальнейшего, т. к. мы будем сейчас использовать в более простой ситуации тот же самый метод «туннельного

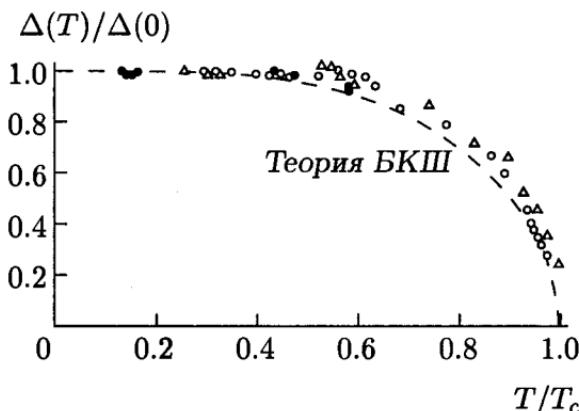


Рис. 46.8. Экспериментальные результаты изучения температурной зависимости энергетической щели в индии (светлые кружки), олове (треугольники) и свинце (черные кружки). Штриховая линия — зависимость $\Delta(T)$ согласно теории БКШ.

гамильтониана», который нам понадобится для решения основной задачи. Рассмотрим два куска нормального металла, разделенных потенциальным барьером из изолятора. Электрон с импульсом $\hbar k$ в 1-м куске металла, подлетающий к барьеру, может протуннелировать под барьером и оказаться во 2-м куске уже с импульсом $\hbar q$. Заметим, что как правило $q \neq k$, поскольку туннельный барьер вовсе не обязан быть однородным. Квантовомеханическую амплитуду этого процесса мы обозначим через $t_{k,q}$. Будем теперь считать, что к 1-му куску металла приложено напряжение V относительно 2-го, и вычислим вероятность перехода электрона в единицу времени из любого занятого состояния 1-го металла в любое свободное состояние 2-го. Для этого мы используем «золотое правило Ферми» для вероятности переходов (в единицу времени) в непрерывном спектре [49]:

$$\Gamma^{\rightarrow}(V) = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{1}{V_1 V_2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}, \sigma} |t_{\mathbf{k}, \mathbf{q}}|^2 \delta(\varepsilon_k - \varepsilon_q - eV) f(\varepsilon_k) (1 - f(\varepsilon_q)), \quad (46.1)$$

где $V_{1,2}$ — объемы двух металлов, $f(\varepsilon) = (e^{\varepsilon/k_B T} + 1)^{-1}$ — фермиевская функция заполнения для электрона с энергией ε , а σ —

проекция электронного спина (подразумевается, что переворота спина при туннелировании не происходит). Переходя от суммирования по импульсам к интегрированию по энергиям электрона в начальном и конечном состояниях и считая туннельные матричные элементы и плотности состояний $N_{1,2}(\varepsilon)$ металлов не зависящими от энергии вблизи ферми-поверхности, получим (суммирование по спину дает лишнюю двойку):

$$\Gamma^{\rightarrow}(V) = \frac{4\pi}{\hbar} N_1(0) N_2(0) \langle |t_{k,q}|^2 \rangle \int d\varepsilon f(\varepsilon) (1 - f(\varepsilon + eV)), \quad (46.2)$$

где $\langle |t_{k,q}|^2 \rangle$ — усредненные по Ферми-поверхности матричные элементы. Для вычисления среднего тока при $T > 0$ надо также написать аналогичное выражение для вероятности перехода $\Gamma^{\leftarrow}(V)$ в обратную сторону, однако в уже сделанном приближении $N(\varepsilon) = N(0)$ результат для туннельной проводимости от температуры не зависит, так что можно ограничиться вычислением интеграла (46.2) при $T = 0$, дающего $I(V) = e\Gamma^{\rightarrow}(V)$. В результате

$$\frac{I(V)}{V} = \frac{1}{R_n} = \frac{4\pi e^2}{\hbar} N_1(0) N_2(0) \langle |t_{k,q}|^2 \rangle. \quad (46.3)$$

Заметим, что мы определили плотности состояний $N(\varepsilon)$ в расчете на одну проекцию спина.

Вернемся к сверхпроводящему туннельному S_1IS_2 -контакту и покажем, что энергетические щели сверхпроводников и значение нормального сопротивления R_n определяют не только поведение квазичастичной (возвратной) ветви вольтамперной характеристики, но и величину ее прямой ветви, т. е. величину критического сверхпроводящего тока I_c (рис. 46.7). Для этого рассмотрим детально процесс парного туннелирования в S_1IS_2 -переходе.

Наличие туннельного взаимодействия между сверхпроводниками S_1 и S_2 приводит к тому, что полная энергия системы оказывается меньше суммы энергий отдельных сверхпроводников на величину энергии связи $E_{\text{св}}$. Мы подробно обсудим вычисление этой величины при $T = 0$. Как и ранее, туннельный барьер можно

рассматривать как источник упругого рассеяния, который переводит электрон из состояния с импульсом \mathbf{k} в сверхпроводнике S_1 в состояние с импульсом \mathbf{q} в сверхпроводнике S_2 . Однако теперь нам удобнее вычислять поправку к энергии системы, связанную с такими переходами, которая может быть определена с помощью второго порядка квантовомеханической теории возмущений [49]:

$$E_{\text{cb}} = \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} \frac{|H_t|_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^2}{E_0 - E_{\mathbf{k}\mathbf{q}}}. \quad (46.4)$$

Здесь H_t — туннельный гамильтониан, описывающий (точно так же, как и в нормальном состоянии) переход $(1, \mathbf{k}) \rightarrow (2, \mathbf{q})$ электрона с импульсом $\hbar\mathbf{k}$ из сверхпроводника S_1 в состояние с импульсом $\hbar\mathbf{q}$ в сверхпроводнике S_2 , а также обратный процесс $(2, \mathbf{q}) \rightarrow (1, \mathbf{k})$; через E_0 и $E_{\mathbf{k}\mathbf{q}}$ обозначены соответственно энергии основного и возбужденного состояний системы. Возбужденное состояние возникает в связи с переходом одного электрона из состояния \mathbf{k} (или $-\mathbf{k}$) в S_1 в состояние \mathbf{q} ($-\mathbf{q}$) в S_2 , т. е. с возникновением возбуждений, по одному в каждом сверхпроводнике. Нужно отметить, что процесс парного туннелирования, по существу, не является двухчастичным, поскольку туннелирование электронов из состояний \mathbf{k} и $-\mathbf{k}$ происходит по одному и определяется одночастичными туннельными матричными элементами, а возбуждения в сверхпроводниках S_1 и S_2 являются виртуальными, т. е. существующим в течение короткого периода между туннелированием первого и второго электронов пары. Следуя [64] (см. также [112]), представим энергию связи (46.4) через матричные элементы одночастичного туннелирования $t_{\mathbf{k}, \mathbf{q}}$ и факторы когерентности $u_{\mathbf{k}}, v_{\mathbf{k}}, u_{\mathbf{q}}, v_{\mathbf{q}}$, смысл которых был подробно рассмотрен в § 44:

$$E_{\text{cb}} = -2 \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} |t_{\mathbf{k}, \mathbf{q}}|^2 \frac{|v_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{q}} + v_{\mathbf{q}}u_{\mathbf{k}}|^2}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{q}}}. \quad (46.5)$$

В (46.5) величина $v_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{q}} + v_{\mathbf{q}}u_{\mathbf{k}}$ — амплитуда вероятности того, что при $T = 0$ состояния $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$ в S_1 заняты, а состояния $(\mathbf{q}, -\mathbf{q})$

в S_2 — свободны или наоборот, а множитель 2 учитывает вырождение виртуальных состояний по спину; наконец, $E_k + E_q$ — суммарная энергия двух виртуальных возбуждений, возникающих в процессе парного туннелирования. Используя формулу (45.13) и следующие из нее соотношения

$$2u_k v_k^* = \frac{\tilde{\Delta}_1}{E_k}, \quad 2u_q v_q^* = \frac{\tilde{\Delta}_2}{E_q}, \quad (46.6)$$

$$|u_k|^2 - |v_k|^2 = \frac{\epsilon_k}{E_k}, \quad |u_q|^2 - |v_q|^2 = \frac{\epsilon_q}{E_q}, \quad (46.7)$$

преобразуем (46.5) к виду

$$E_{cb} = - \sum_{k,q} \frac{|t_{k,q}|^2}{E_k + E_q} \left[1 - \frac{\epsilon_k \epsilon_q}{E_k E_q} + \operatorname{Re} \frac{\tilde{\Delta}_1 \tilde{\Delta}_2^*}{E_k E_q} \right]. \quad (46.8)$$

Здесь Re — действительная часть. При записи соотношений (46.6) и (46.8) учитывалось, что $\tilde{\Delta}_{1,2}$ — комплексные функции, которые, по существу, представляют собой комплексные параметры порядка в сверхпроводниках S_1 и S_2 и могут быть выражены (аналогично тому, как это сделано в § 21 при выводе джозефсонового соотношения для мостика Асламазова — Ларкина) через амплитуду и фазу параметра порядка:

$$\tilde{\Delta}_1 = \Delta_1 e^{i\theta_1}, \quad \tilde{\Delta}_2 = \Delta_2 e^{i\theta_2}, \quad \tilde{\Delta}_2^* = \Delta_2 e^{-i\theta_2}. \quad (46.9)$$

Здесь $\Delta_{1,2}$ — действительные величины, представляющие собой щели в берегах $S_1 IS_2$ -перехода.

Рассмотрим сначала последний член в квадратных скобках в (46.8) — единственный, который зависит от разности фаз $\varphi = \theta_1 - \theta_2$ — и обозначим его через $-E_J \cos \varphi$. Переходя от суммирования по k и q к интегрированию по энергиям электронного спектра в S_1 и S_2 , с учетом (46.3) и (46.9) получим для E_J при $T = 0$:

$$E_J(T = 0) = \frac{\hbar}{4\pi e^2 R_n} \Delta_1 \Delta_2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\epsilon_1 d\epsilon_2}{E_1 E_2 (E_1 + E_2)}. \quad (46.10)$$

Расширение пределов интегрирования в (46.10) до $\pm\infty$ допустимо, поскольку интегралы быстро сходятся при $\varepsilon_{1,2} \sim |\Delta|$. Заменой переменных $\varepsilon_{1,2} = \Delta_{1,2} \operatorname{sh} x_{1,2}$ и несложными выкладками интеграл в выражении (46.10) приводится к эллиптическому, и в результате получаем

$$\begin{aligned} E_J(T=0) &= \frac{\hbar}{e^2 R_n} \frac{\Delta_1 \Delta_2}{\Delta_1 + \Delta_2} K \left(\frac{|\Delta_1 - \Delta_2|}{\Delta_1 + \Delta_2} \right) \simeq \\ &\simeq \frac{\pi \hbar}{2e^2 R_n} \frac{\Delta_1 \Delta_2}{\Delta_1 + \Delta_2}, \quad (46.11) \end{aligned}$$

где последнее равенство приближенно верно, когда Δ_1 и Δ_2 отличаются не более чем в 2–3 раза, и является точным при $\Delta_1 = \Delta_2$.

Второй член в квадратных скобках в уравнении (46.8) обращается в нуль (ввиду нечетности) при интегрировании по ε_k , ε_q , в то время как первый член формально расходится при $|\varepsilon_{k,q}| \rightarrow \infty$. Однако нас интересует только вклад в энергию, связанный с наличием сверхпроводимости в берегах контакта, поэтому мы вычтем из этого расходящегося интеграла его аналог, вычисленный для нормального состояния берегов. Обозначая полученное выражение через $E_1(T=0)$, получаем

$$\begin{aligned} E_1(T=0) &= \\ &= \frac{\hbar}{4\pi e^2 R_n} \Delta_1 \Delta_2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \left(\frac{1}{|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|} - \frac{1}{E_1 + E_2} \right). \quad (46.12) \end{aligned}$$

Легко проверить,¹⁾ что значение интеграла (46.12) совпадает со значением $E_J(T=0)$, определенным в (46.10). Поэтому

¹⁾ Рассмотрим для примера случай одинаковых сверхпроводников, $\Delta_1 = \Delta_2$. Разность $E_1 - E_J$ приводится заменой переменных $\varepsilon_1 = \Delta x$, $\varepsilon_2 = \Delta y$ к выражению, пропорциональному интегралу

$$\int_0^\infty dx dy \left[\frac{1}{x+y} - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2} \sqrt{1+y^2}} \right) \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2}} \right],$$

который равен нулю.

полное выражение для энергии SIS -контакта $E_{\text{св}}(\varphi)$ совпадает с (22.11). Соответственно, величина критического тока туннельного S_1IS_2 -перехода связана со значениями энергетической щели в S_1 и S_2 следующим выражением:

$$I_c(T = 0) \simeq \frac{\pi}{e} \frac{\Delta_1 \Delta_2}{R_n(\Delta_1 + \Delta_2)}. \quad (46.13)$$

При отличных от нуля температурах вычисление $E_J(T)$ изложенным методом весьма усложняется, т. к. приходится учитывать фермиевскую функцию распределения квазичастиц, а также процессы их туннелирования между берегами S_1 и S_2 . Температурная зависимость критического тока SIS -перехода может быть вычислена аналитически для случая одинаковых сверхпроводящих берегов ($\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$). Эта зависимость получена Амбегоакаром и Баратовым [135] (см. [112, 136, 137]):

$$I_c(T) = \frac{\pi \Delta(T)}{2eR_n} \operatorname{th} \left(\frac{\Delta(T)}{2k_B T} \right). \quad (46.14)$$

При стремлении T к нулю выражение (46.14) переходит в (46.13) (с $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$).

При $T \rightarrow T_c$ критический ток джозефсоновского перехода пропорционален $\Delta^2(T) \propto (T_c - T)$. Вывод о том, что вблизи точки перехода энергия связи симметричного перехода $E_J(T) \propto (T_c - T)$, можно было сделать и с помощью свободной энергии Гинзбурга – Ландау: вклад в энергию, связанный с наличием туннелирования между двумя сверхпроводниками, должен быть пропорционален произведению обоих параметров порядка, $E_J(T) \propto \psi_1(T)\psi_2(T)$. В случае одинаковых сверхпроводников получаем, как и выше, $E_J(T) \propto \psi^2(T) \propto (T_c - T)$. В то же время, если берега контакта имеют различные температуры сверхпроводящего перехода T_c , джозефсонская энергия и критический ток стремятся к нулю пропорционально $(T_c^{\min} - T)^{1/2}$. Все эти выводы о поведении вблизи T_c сделаны для случая SIS -перехода, когда туннелирование слабое, и потому мало влияет на параметры порядка обоих сверхпроводников. Иначе дело обстоит с SNS -пере-

ходами, когда параметр порядка вблизи NS -границы может быть сильно подавлен из-за эффекта близости (подробнее см. [136]).

Формулу (23.8) для случая SIS -перехода с одинаковыми сверхпроводящими берегами удобно также записать, используя определение квантового сопротивления, введенное в (23.8),

$$\frac{E_J}{\Delta} = \frac{1}{2} \frac{R_Q}{R_n}. \quad (46.15)$$

§ 47*. Связь сверхпроводников через ферромагнетик

В разд. 15.2 было показано, что сверхпроводящие пары могут проникать через SN -границу в нормальный металл на глубину ξ_N . Более подробно процесс электропереноса в SNS -переходах будет рассмотрен в § 55. Сейчас мы рассмотрим эффект близости в системе сверхпроводник – ферромагнетик (SF) и необычные свойства джозефсоновских SFS -переходов. Но сначала вернемся к эффекту близости в SN -системе и покажем, как оценка длины когерентности ξ_N может быть получена из простых физических соображений. Очевидно, что время жизни τ_p сверхпроводящей пары в несверхпроводящем металле тем меньше, чем больше характерная энергия ΔE процессов, разрушающих пары. Величина τ_p может быть оценена с помощью соотношения неопределенностей:

$$\tau_p \Delta E \sim \hbar. \quad (47.1)$$

В нормальном немагнитном металле распаривание происходит за счет тепловых флуктуаций (характерная энергия $\Delta E = k_B T$), т. е. $\tau_p \sim \hbar/k_B T$. В чистый металл пары могут распространяться на глубину порядка $v_F \tau_p \sim \hbar v_F/k_B T$ (ср. с формулой (15.13) для длины затухания параметра порядка в чистом металле). В «грязный» металл пары проникают на длину диффузии за время τ_p , т. е. длина затухания равна $\xi_N \sim \sqrt{D \tau_p} \sim (\hbar D/k_B T)^{1/2}$ (где $D = l_n v_F / 3$), что с точностью до $\sqrt{2\pi}$ совпадает с (15.14). В случае SF -контакта в ферромагнетике появляется еще один распаривающий фактор — обменное взаимодействие, которое

пытается выстроить спины электроны в одном направлении, т. е. разрушить пару, которая образована из электронов с противоположно направленными спинами. Если температура Кюри ферромагнетика T_C много больше критической температуры T_c сверхпроводника, то средняя обменная энергия в ферромагнетике $E_{ex} \gg k_B T$, и обменное взаимодействие можно считать единственным распаривающим фактором, т. е. $\Delta E \sim E_{ex}$ в (47.1). В этом случае длина затухания параметра порядка в «грязном» ферромагнетике $\sqrt{D\tau_p}$ равна

$$\xi_{F1} = \left(\frac{\hbar D}{E_{ex}} \right)^{1/2}, \quad E_{ex} \gg k_B T. \quad (47.2)$$

Мы присвоили величине ξ_{F1} дополнительный индекс «1», поскольку длина затухания, как будет показано ниже, — только реальная часть комплексной длины когерентности ξ_F куперовских пар в ферромагнетике. Если наведенный в нормальном металле вблизи SN -границы параметр порядка описывается затухающей экспонентой $\Psi_N(x) = \Psi_{N0} e^{-k_N x}$, где $k_N = 1/\xi_N$, то в SF -случае наведенный параметр порядка не только затухает, но и осциллирует:

$$\Psi_F(x) = \Psi_{F0} e^{-k_F x} = \Psi_{F0} e^{-k_{F1} x} e^{-ik_{F2} x}. \quad (47.3)$$

Здесь Ψ_{F0} — параметр порядка в ферромагнетике на SF -границе, а комплексная величина $k_F = 1/\xi_F = k_{F1} + ik_{F2}$. Ее вещественная часть $k_{F1} = 1/\xi_{F1}$, где ξ_{F1} — введенная ранее длина затухания. Мнимая же часть $k_{F2} = 1/\xi_{F2}$ определяет собой длину волны $2\pi\xi_{F2}$ осцилляций параметра порядка в ферромагнетике, см. рис. 47.1. Можно показать, что в случае «грязного» ферромагнетика без спин-орбитального рассеяния и с $E_{ex} \gg k_B T$ величины ξ_{F1} и ξ_{F2} равны и описываются формулой (47.2). Комплексную длину когерентности можно тогда записать в виде

$$\xi_F = \left(\frac{\hbar D}{2iE_{ex}} \right)^{1/2}. \quad (47.4)$$

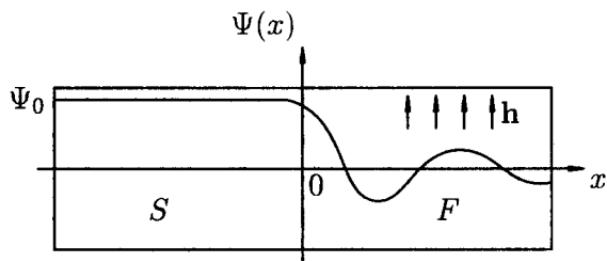


Рис. 47.1. Схематическое изображение поведения параметра порядка вблизи SF -границы; h — обменное поле в ферромагнетике.

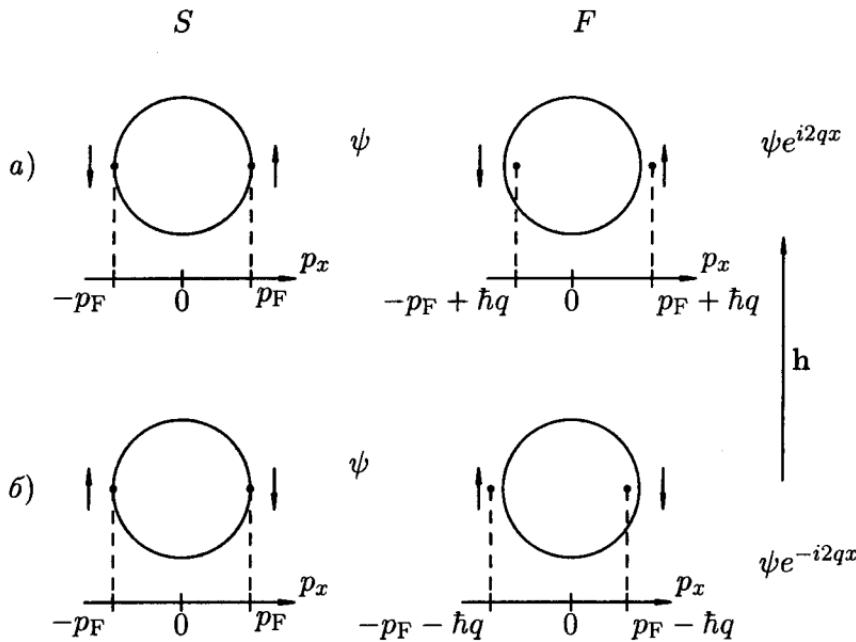


Рис. 47.2. Возникновение ненулевого суммарного импульса пары в ферромагнетике вблизи SF -границы в присутствии обменного поля h . Части $a)$ и $b)$ рисунка соответствуют различным направлениям спинов электронов с положительным и отрицательным импульсами относительно направления обменного поля.

Прежде чем перейти к случаю относительно малых обменных энергий $E_{ex} \geq k_B T$, попробуем понять физические причины возникновения в ферромагнетике знакопеременного параметра порядка $\Psi_F(x)$. В основе этого явления лежит возможность появления пар с ненулевым суммарным импульсом в присутствии обменного поля, предсказанная для магнитных сверхпроводников в 1964 г. в работах Ларкина и Овчинникова [138], а также Фульде и Феррела [139]. Объемные сверхпроводники с таким состоянием параметра порядка (обозначаемым обычно как LOFF-состояние) пока не обнаружены. Однако вполне реализуемой модификацией LOFF-состояния является осциллирующий параметр порядка вблизи SF -границы, предсказанный позднее в работах [140, 141]. Простая физическая картина появления ненулевого суммарного импульса пары в ферромагнетике, предложенная в работе [142], показана на рис. 47.2. Обсудим здесь случай чистых металлов — сверхпроводника и ферромагнетика. Тогда пара образована электронами с противоположными (лежащими на ферми-поверхности) импульсами $\hbar\mathbf{k}$ и $-\hbar\mathbf{k}$, так что суммарный импульс пары $\hbar\mathbf{q} = 0$. В ферромагнитной области произойдет изменение энергий электронов пары за счет обменного взаимодействия: тот электрон (назовем его 1-м), спин которого направлен параллельно обменному полю ферромагнетика, уменьшит свою энергию на E_{ex} , а второй электрон той же пары увеличит свою энергию на E_{ex} . Но энергии электронов, образующих куперовскую пару должны быть равны — казалось бы, это означает немедленное разрушение пары обменным полем! Однако эту проблему можно обойти: увеличим импульс 1-го электрона до величины $\hbar k_1$ такой, что $\hbar^2 k_1^2 / 2m - \hbar^2 k^2 / 2m = E_{ex}$, т. е. $k_1 - k = q_1 \sim E_{ex}/\hbar v_F$, а импульс 2-го электрона уменьшим (по абсолютной величине) на такую же величину, — до $\hbar k_2 = \hbar k - \hbar q_1$. Тогда противоположные по знаку изменения обменной энергии двух электронов будут скомпенсированы изменениями их кинетических энергий, а полные энергии останутся одинаковыми, и пара не будет разрушаться. Но такая пара будет теперь иметь ненулевой полный импульс $\hbar\mathbf{q} = 2\hbar q_1$, так что ее вклад в параметр порядка будет пропорционален $e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}}$. Кроме рассмотренной

конфигурации спинов в паре возможна и такая, где 1-й электрон (со спином вдоль обменного поля) имеет импульс $-\hbar k$, а 2-й — импульс $\hbar k$. Такая пара приобретет полный импульс $-\hbar q$, и полный параметр порядка будет вести себя как

$$\Psi_F(x) = \Psi_{F0}(e^{iqx} + e^{-iqx})/2 = \Psi_{F0} \cos(qx), \quad (47.5)$$

так что длина волны $2\pi\xi_{F2}$ осцилляций параметра порядка равна $2\pi/q \sim \hbar v_F/E_{ex}$. В грязном металле направление импульсов электронов быстро меняется из-за рассеяния на примесях, поэтому зависимость типа (47.5) должна быть усреднена по направлениям вектора q . Аккуратное вычисление [142] показывает, как упоминалось выше, что наряду с осцилляциями параметра порядка появляется и их затухание, причем в грязном пределе $\xi_{F1} = \xi_{F2} = \sqrt{\hbar D/E_{ex}}$.

В связи со знакопеременностью параметра порядка (47.5) естественно ожидать, что в *SFS*-переходе с толщиной ферромагнетика $d_F \simeq \pi\xi_{F2}$ знаки параметра порядка на сверхпроводящих берегах будут разными, т. е. разность фаз на переходе будет равна π в отсутствие внешнего поля и тока (что не противоречит стационарному уравнению Джозефсона (21.1)). Такой джозефсоновский «π-контакт» был впервые предложен в работе [143] и подробно рассмотрен для *SFS*-случая в работе [144]. Другой тип π-контакта, возникающего из-за нетривиальной *d*-волновой симметрии параметра порядка в ВТСП, будет обсуждаться в § 49.

На рис. 47.3 представлен результат расчета [145] распределения параметра порядка в грязной ферромагнитной прослойке для различных соотношений толщины слоя d_F и периода осцилляций параметра порядка $2\pi\xi_{F2}$. На следующем рисунке 47.4 изображены зависимости свободных энергий Гинзбурга — Ландау для состояний *SFS*-перехода с разностями фаз на берегах, равными 0 и π (будем их для краткости называть 0-состояние и π -состояние). Видно, что π -состояние действительно становится более устойчивым при $d_F \simeq \pi\xi_{F2}$, а затем вновь сменяется обычным 0-состоянием при дальнейшем увеличении d_F . На рис. 47.3 показано также (штриховой линией) распределение параметра порядка

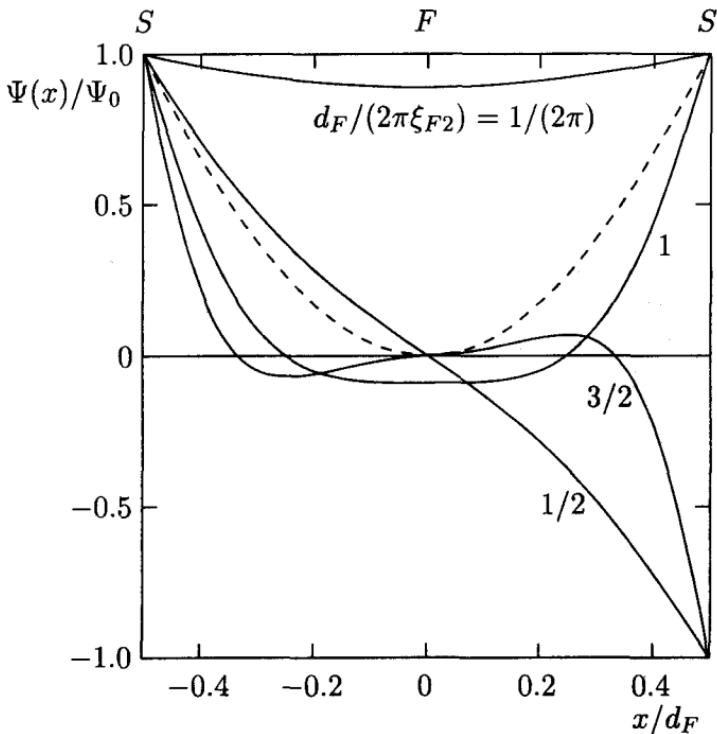


Рис. 47.3. Пространственное распределение параметра порядка в F -слое SFS -перехода, вычисленное [145] для различных значений отношения $d_F/2\pi\xi_{F2}$; для отношений, равных $1/2\pi$ и 1 , наимизшая энергия достигается в 0 -состоянии, а для отношений $1/2$ и $3/2$ более выгодным оказывается π -состояние.

для 0 -состояния при $d_F = \pi\xi_{F2}$, когда оно имеет более высокую энергию, чем π -состояние (как видно из рисунка, средний квадрат градиента параметра порядка в 0 -состоянии выше, чем в π -состоянии, что и повышает энергию первого).

Рассмотрим теперь случай относительно малых обменных энергий $E_{ex} \geq k_B T$, когда в распаривание дают сравнимый вклад как тепловая энергия, так и обменное поле. Из сравнения выражений (15.14) и (47.4) довольно очевидно (и это можно строго показать), что общее выражение для комплексной длины

$F_{\text{ГЛ}}$, отн. ед.

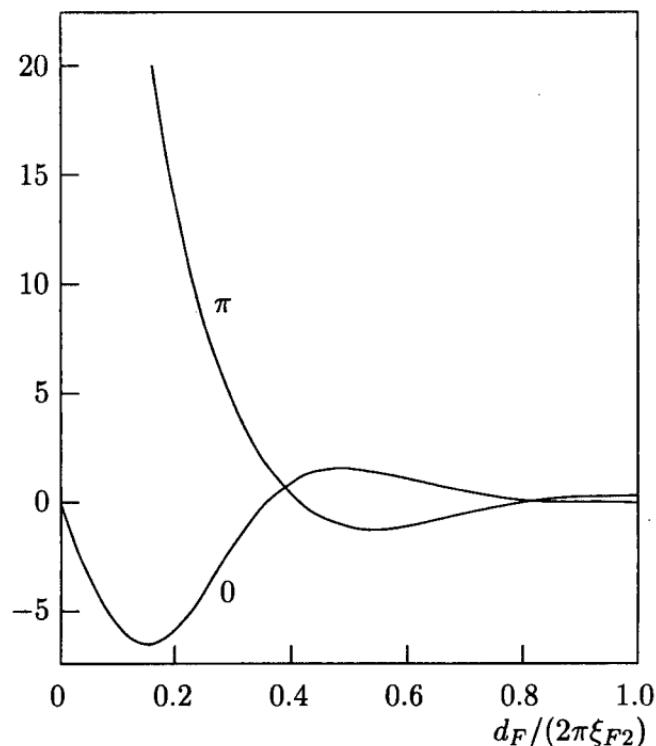


Рис. 47.4. Результат вычислений [145] свободной энергии Гинзбурга – Ландау в F -слое для 0- и π -состояний.

когерентности будет теперь иметь вид

$$\xi_F = \left(\frac{\hbar D}{2(\pi k_B T + iE_{ex})} \right)^{1/2}. \quad (47.6)$$

Выделяя из этого выражения вещественную и мнимую части — для чего удобно записать

$$\pi k_B T + iE_{ex} = \sqrt{(\pi k_B T)^2 + E_{ex}^2} \exp(i \operatorname{arctg}(E_{ex}/\pi k_B T))$$

— получим окончательно

$$\xi_{F1,2} = \sqrt{\frac{\hbar D}{((\pi k_B T)^2 + E_{ex}^2)^{1/2} \pm \pi k_B T}}. \quad (47.7)$$

Это выражение переходит в (47.2) при $E_{ex} \gg k_B T$ и в (15.14) при $E_{ex} = 0$. Важно заметить, что в то время как длина затухания ξ_{F1} растет с понижением температуры (как и для SN -контакта), длина волны осцилляций $2\pi\xi_{F2}$ уменьшается. Это дает возможность наблюдать переход SFS -контакта в π -состояние при понижении температуры. Такой эксперимент представлен в работе [145], где в качестве ферромагнитной прослойки был использован сплав $CuNi$ с температурой Кюри около 20 К. На рис. 47.5 представлено семейство измеренных температурных зависимостей критического тока SFS -переходов $Nb - CuNi - Nb$ с толщиной F -слоя d_F , близкой к $\pi\xi_{F2}$. При наименьшей толщине в 23 нм зависимость $I_c(T)$ не отличается качественно от обычной для SNS -переходов, $I_c \propto e^{-\alpha\sqrt{T}}$. При небольшом увеличении d_F наблюдается насыщение при низких температурах, а потом и немонотонная зависимость $I_c(T)$. Наконец, при толщине $d_F = 27$ нм наблюдается возвратное осциллирующее поведение $I_c(T)$ с обращением в нуль при $T = T_{\text{пер}} \simeq 2$ К. Такое поведение может являться только следствием перехода в π -состояние при $T < T_{\text{пер}}$. В точке этого перехода формальное выражение для $I_c(T)$ проходит через нуль и уходит в отрицательную область. Поскольку в эксперименте измеряется положительно определенная величина критического тока, на зависимости $I_c(T)$ возникает излом в точке $T = T_{\text{пер}}$.

Прямыми доказательством перехода SFS -контактов в π -состояние явилось измерение [146] критического тока интерферометра из пяти SFS -контактов, изображенного на рис. 47.6, в зависимости от приложенного магнитного поля. При переходе контактов в π -состояние в каждой ячейке сетки должен возникнуть набег фазы 3π , что в соответствии с (25.2) эквивалентно приложению к сетке магнитного поля с полуцелым потоком на ячейку. Как и в случае двухконтактного интерферометра, описанного

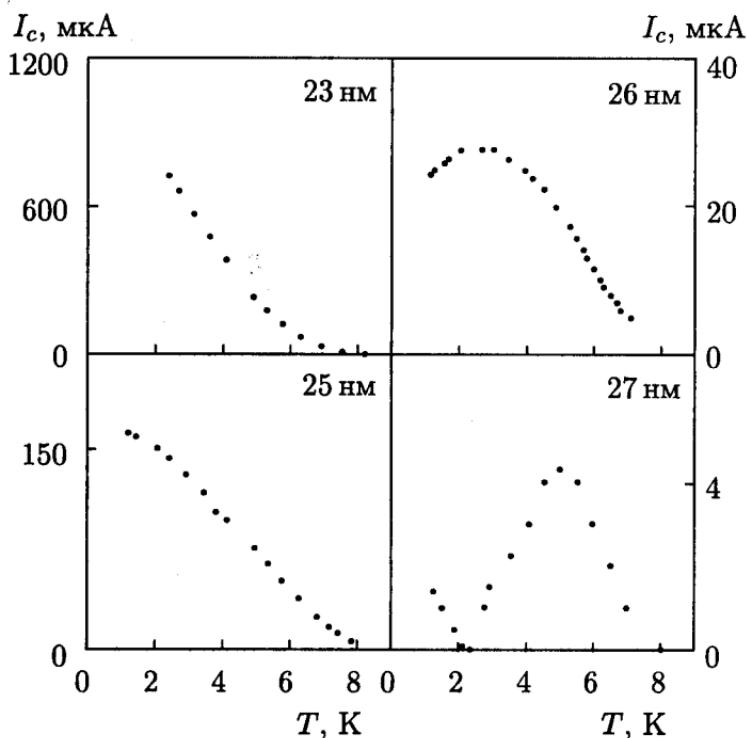


Рис. 47.5. Температурные зависимости критического тока SFS -переходов $Nb - Cu_{0.48}Ni_{0.52} - Nb$ с толщинами ферромагнитного слоя Cu/Ni от 23 до 27 нм [145].

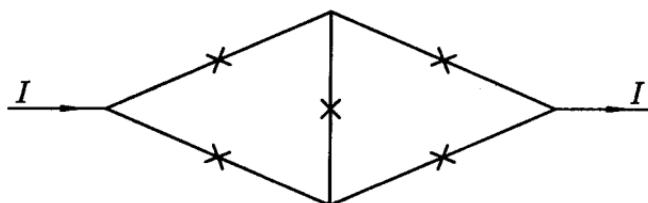


Рис. 47.6. Схематическое изображение треугольной сетки SFS -контактов, состоящей из двух ячеек.

в разд. 25.1, это приведет к смещению зависимости $I_c(H)$ на полпериода. Такой сдвиг, экспериментально обнаруженный при понижении температуры в работе [146], представлен на рис. 47.7.

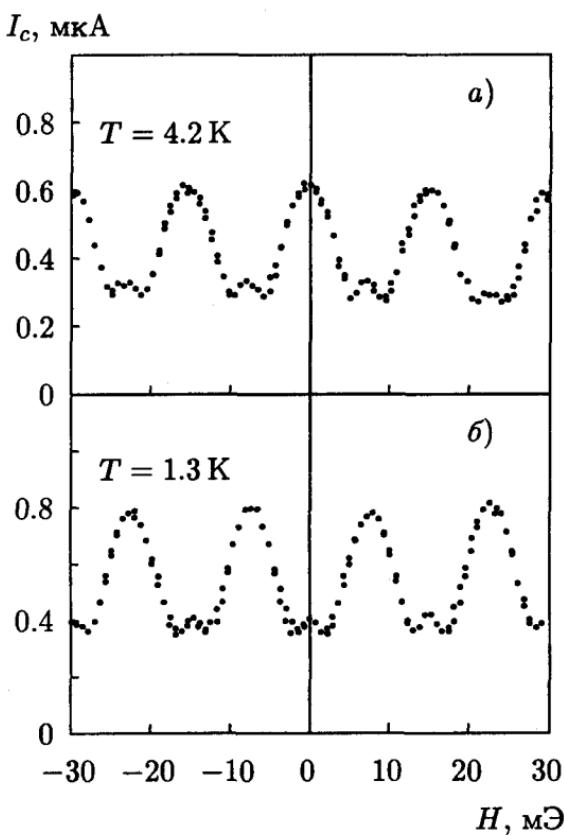


Рис. 47.7. Зависимости $I_c(H)$ двухячеистой сетки SFS -контактов до перехода контактов в π -состояние и после такого перехода ($T_{\text{пер}} = 2.2$ К). Ниже температуры перехода зависимости сдвигаются на полпериода.

§ 48*. Эффект четности в сверхпроводниках

При температурах $T \ll T_c$ большая часть электронов в сверхпроводнике образует куперовские пары и лишь экспоненциально

малая их доля (порядка $e^{-\Delta/k_B T}$) находится в возбужденных состояниях с энергией $E > \Delta$ (это следует из выражения (45.9) для функции распределения f_k). Это означает, что для изолированного островка сверхпроводящего металла имеет смысл вопрос о четности полного числа электронов на нем. Действительно, если число электронов четно, то при $T = 0$ все они образуют пары; в противном случае какой-то электрон остается неспаренным, т. е. энергия всего островка будет выше на величину минимальной энергии возбуждения Δ_0 . Напомним (см. (44.17)), что плотность энергии сверхпроводящего спаривания равна $|W_0| = \frac{1}{2}N(0)\Delta_0^2$, т. е. полное изменение энергии островка объема V из-за сверхпроводящего спаривания состояния имеет порядок $N_{\text{полн}}\Delta_0^2/\varepsilon_F$, где $N_{\text{полн}} \sim N(0)V\varepsilon_F$ — полное число электронов. Таким образом, изменение числа куперовских пар на единицу приводит к изменению энергии лишь на величину Δ_0^2/ε_F , много меньшую, чем Δ_0 . Пренебрегая этой малой поправкой, получаем, что при добавлении к «нечетному» островку еще одного электрона его полная энергия понизится на Δ_0 , т. к. квазичастица (возбуждение) исчезнет и образуется дополнительная куперовская пара (с энергией на уровне Ферми).

Можно ли экспериментально обнаружить периодическое изменение свойств сверхпроводящего островка с периодом $2e$? В работе [147] было впервые продемонстрировано, что это возможно, несмотря на то, что полное число $N_{\text{полн}}$ электронов на островке было порядка 10^9 . Прежде чем описать этот эксперимент, мы выясним, как обобщить приведенное выше простое рассуждение, справедливое при $T = 0$, на случай отличных от нуля температур.

Самое простое соображение таково: полное число квазичастиц на островке есть

$$N_{qp} = \sum_k f_k = N(0)V \int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{\exp(\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2}/k_B T) + 1} \sim N_{\text{эфф}} e^{-\Delta/k_B T}, \quad (48.1)$$

где $N_{\text{эфф}} \approx N(0)V\sqrt{T\Delta}$ близко по порядку величины к числу

электронов на островке, имеющих энергии в полосе порядка Δ_0 вблизи ферми-поверхности (действительно, электроны с энергиями, много большими Δ_0 , в любом случае «ничего не знают» о сверхпроводящем спаривании). Если величина N_{qp} окажется много меньше единицы, то вероятность найти на островке хотя бы одно возбуждение мала и картина такая же, как при $T = 0$; отсюда получается условие $k_B T \ll \Delta_0 / \ln N_{\text{эфф}}$. Более аккуратное рассмотрение необходимо, чтобы понять, что происходит при $k_B T \sim \Delta_0 / \ln N_{\text{эфф}}$. Оно проводится следующим образом: при $T > 0$ вместо энергии неспаренного электрона следует использовать его свободную энергию $F_1(T) = \Delta - TS_1$, где соответствующая энтропия $S_1 = k_B \ln N_{\text{эфф}}$. В таком случае эффект четности имеет место, если появление неспаренного электрона увеличивает свободную энергию островка, т. е. при $F_1(T) > 0$, что имеет место при температурах

$$T < T^* = \frac{\Delta_0}{k_B \ln N_{\text{эфф}}}. \quad (48.2)$$

Таким образом, можно ожидать (при $\ln N_{\text{эфф}} \gg 1$), что эффект четности возникает при определенной температуре, как это бывает при фазовом переходе. В условиях экспериментов по эффекту четности [147] число $N_{\text{эфф}} \sim 10^4$, так что ожидаемое $k_B T^* \simeq 0.1 \Delta_0$, что и было подтверждено экспериментально. Точное вычисление (приведенное, например, в книге [2]) показывает, что полученное выше из качественных соображений выражение для $F_1(T)$ является правильным с точностью до численного коэффициента в выражении для $N_{\text{эфф}}$. Поскольку в ответ входит лишь логарифм $N_{\text{эфф}}$, это отличие малосущественно.

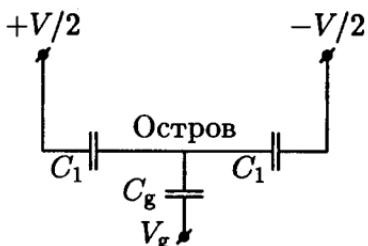


Рис. 48.1. Электрическая схема электрометра с кулоновской блокадой.

Перейдем теперь к описанию проведенных в [147, 148] экспериментов, где был использован прибор, называемый сверхпроводящим одноэлектронным транзистором (СОЭТ). Его электрическая схема изображена на рис. 48.1: алюминиевый островок в виде тонкой пленки (размерами $0.2 \times 0.6 \times 2 \text{ мкм}^3$ в условиях эксперимента [147]) соединялся со включенными в цепь алюминиевыми берегами высокоомными ($R_{1,2} \gg h/e^2 \simeq 26 \text{ кОм}$, смысл этого условия будет прояснен ниже) туннельными контактами с емкостями C_1, C_2 . Кроме того, около островка располагался электрический затвор, позволявший создавать на островке заданный потенциал V_g , от которого зависит электростатическая энергия $U_{el}(n, V_g)$ островка с добавленными на него n электронами:

$$U_{el}(n, V_g) = \frac{(en)^2}{2C} - \frac{ne}{C} C_g V_g, \quad C = C_g + C_1 + C_2 + C_0 \quad (48.3)$$

(здесь C_0 — собственная емкость островка). Пусть $k_B T \ll E_C = e^2/2C$, а островок находится в нормальном состоянии (что достигается, например, приложением магнитного поля $H > H_c$, разрушающего сверхпроводимость). Число электронов на островке определяется из условия минимума энергии $U_{el}(n)$ по n и меняется на единицу при полуцелых значениях $C_g V_g / e = m + 1/2$, когда энергии состояний с $n = m, m + 1$ совпадают. Графически это удобно представлять как точки пересечения парабол $\tilde{U}_{el}(n, V_g) = \frac{(en - C_g V_g)^2}{2C}$, изображенных на рис. 48.2, *a* (добавление не зависящего от n члена $(C_g V_g)^2/2C$ к $U_{el}(n, V_g)$ не меняет результат минимизации энергии по n). Рассмотрим теперь ту же систему в сверхпроводящем состоянии, причем $T < T^*$, так что свободная энергия одного возбуждения велика: $F_1(T) > E_C \gg k_B T$. Теперь все кривые $\tilde{U}_{el}(V_g)$ с нечетными n поднимутся вверх на величину $F_1(T) > e^2/2C$, см. рис. 48.2, *б*, так что минимум электростатической энергии всегда достигается на кривых с четным числом электронов $n = 2k$ и изменение этого числа происходит при $C_g V_g / e = 2m + 1$. Скачок заряда на островке при этих значениях потенциала означает, что эффективная дифференциальная емкость островка по отношению к затвору $C_{\text{эфф}} = d(en)/dV_g$ имеет

резкие пики с периодом $\Delta V_g = 2e/C_g$ (вместо e/C_g в нормальном состоянии). Таким образом, измерение дифференциальной емкости позволяет про наблюдать возникновение эффекта четности как переход от e - к $2e$ -периодичности в зависимости $C_{\text{эфф}}(V_g)$. Этот метод был использован в работе [148].

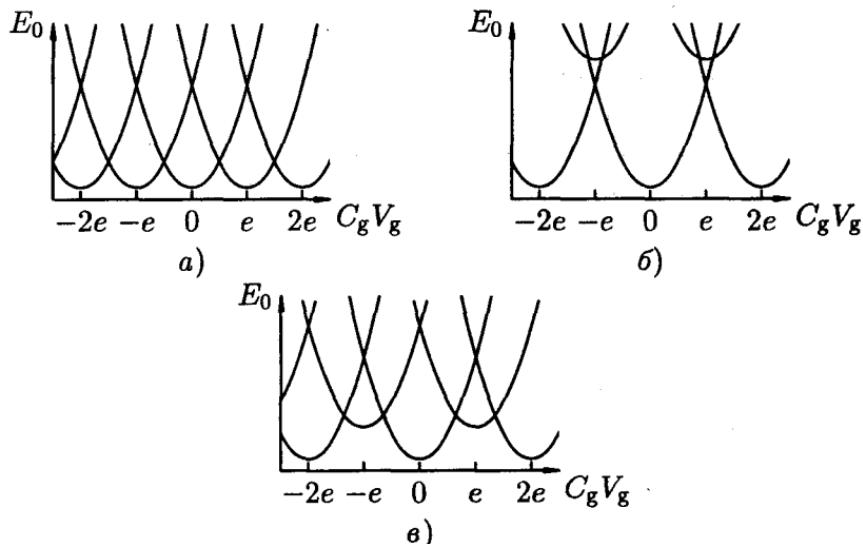


Рис. 48.2. Качественное поведение энергии островка в зависимости от заряда $C_g V_g$ на затворе: а) островок в нормальном состоянии; б) $F_1(T) > E_C \gg k_B T$; в) $E_C > F_1(T) \gg k_B T$.

В работе [147] использовался другой метод — измерялась зависимость критического джозефсоновского тока I_c через островок от V_g . Рассмотрим происхождение этой зависимости для случая $F_1(T) > E_C$, когда реализуются только «четные» состояния на островке. В отличие от обычного джозефсоновского контакта (с прямым туннелированием пар с одного берега на другой), здесь туннелирование куперовской пары с первого берега на второй происходит через промежуточное виртуальное (в квантовомеханическом смысле) состояние островка. Энергия этого промежуточного состояния $U_2(V_g) = U_{el}(n_{\min} + 2) - U_{el}(n_{\min}) = = 4E_C \min_k \left| 2k + 1 - \frac{C_g V_g}{e} \right|$ зависит от $C_g V_g$ периодически с пе-

риодом $2e$. В эксперименте с СОЭТ E_C много больше матричного элемента K туннелирования пары в каждом контакте; предполагая также, что $K \ll U_2(V_g)$, получаем с помощью квантовомеханической теории возмущений энергию джозефсоновской связи между берегами $K^{\text{эфф}} = K^2/U_2(V_g)$ (более подробный вывод, аналогичный фейнмановскому выводу выражения (21.9) для джозефсоновского тока, приведен в книге [2]). Поэтому максимальный джозефсоновский ток через СОЭТ равен

$$I_c(V_g) = \frac{2e}{\hbar} \frac{K^2}{U_2(V_g)}. \quad (48.4)$$

Электростатическая энергия $U_2(V_g)$ зависит от $C_g V_g$ с периодом $2e$, что и приводит к такой же периодичности в $I_c(V_g)$ с резкими максимумами при $V_g = \frac{e}{C_g}(2m + 1)$, где $U_2(V_g)$ обращается в нуль (вблизи этих максимумов $U_2(V_g)$ становится меньше K , так что формула (48.4) там неприменима; критический ток в максимумах имеет порядок $I_c^{\max} \sim (2e/\hbar)K$, см. [149]).

При выводе (48.4) мы подразумевали, что $F_1(T) > E_C \gg k_B T$, так что «нечетные» состояния островка не реализуются ни при каких V_g . С повышением температуры величина $F_1(T)$ становится меньше E_C , и тогда вырожденными по полной энергии $U_{el}(V_g) + F_1(T) \frac{1 - (-1)^n}{2}$ оказываются состояния различной четности (отличающиеся по заряду на e), см. рис. 48.2, в. Это означает, что состояния островка, переходящие друг в друга при туннелировании одной куперовской пары, т. е. отличающиеся на $2e$ по заряду, имеют разность кулоновских энергий порядка E_C при всех V_g . В результате «кулоновский знаменатель» в (48.4) всегда остается величиной порядка E_C , так что максимальное значение критического тока резко падает; при $F_1(T) \ll E_C$ эффектами четности можно полностью пренебречь, и зависимость $I_c(V_g)$ имеет период e с максимумами при $V_g = \frac{e}{2C_g}(2m + 1)$. Последовательный микроскопический вывод зависимостей $I_c(V_g)$ во всех упомянутых случаях приведен в работах [149].

Остановимся в конце на вопросе о том, почему для наблюдения эффекта четности с помощью СОЭТ необходимо иметь

высокоомные контакты островка с берегами, $R \gg h/e^2$. Рассмотрим сначала случай островка в нормальном состоянии, когда время релаксации неравновесного заряда на островке имеет порядок $\tau = RC$. Согласно соотношению неопределенностей, величина $\Delta E \sim h/\tau$ характеризует ширину возбужденного уровня энергии островка (т. е. уровня с неоптимальным значением n). Требование малости этой ширины по сравнению с характерной энергией возбуждения $E_C = e^2/2C$ и приводит к условию $R \gg \gg R_K = h/e^2$. Для сверхпроводящего состояния островка то же самое условие следует из требования малости туннельного матричного элемента: $\Delta > E_C \gg K \simeq \frac{\hbar}{Re^2} \Delta$, где для оценки K использовано соотношение (46.14).

§ 49*. Сверхпроводники с нетривиальным спариванием

При обсуждении куперовского спаривания в §§ 44, 45 мы неявно предполагали, что матричный элемент межэлектронного взаимодействия $V_{k,k'}$, ответственный за спаривание, не зависит от направлений векторов k и k' на поверхности Ферми. В таком случае амплитуда спаривания v_k электронов с импульсами $\hbar k$ и $-\hbar k$ и противоположными спинами также не зависит от направления вектора k . Иначе говоря, два электрона, составляющие пару, находятся в состоянии взаимного движения с орбитальным угловым моментом $L = 0$, называемом также *s*-состоянием (по аналогии с классификацией электронных оболочек в атомах). Поскольку полная волновая функция двух электронов должна быть по принципу Паули антисимметрична при их перестановке, а орбитальное *s*-состояние симметрично, антисимметрия должна быть обеспечена за счет спиновой части волновой функции; поэтому электроны в паре находятся в синглетном по спину состоянии (полный спин куперовской пары $S = 0$) — это более точная формулировка уже упомянутого в § 44 обстоятельства — электроны спариваются с противоположными спинами.

В действительности, синглетное *s*-спаривание — самый распространенный, но не единственный возможный тип куперов-

ских пар. Прежде всего здесь надо напомнить о сверхтекучих фазах ${}^3\text{He}$, изотопа гелия с фермиевской статистикой атомов (из-за полуцелого спина ядра ${}^3\text{He}$). Объединение двух атомов ${}^3\text{He}$ в пару наподобие куперовской происходит аналогично обычному спариванию электронов, описанному в § 44. Однако взаимодействие в ${}^3\text{He}$ устроено так, что в s -состоянии атомы отталкиваются, а притяжение возникает только в p -состоянии (взаимный орбитальный момент пары равен $L = 1$). Волновая функция этого орбитального состояния антисимметрична при перестановке, соответственно, и полный спин пары здесь равен $S = 1$ («спиновый триплет»). Такой вид куперовского состояния называется триплетным p -спариванием. Спаривание такого типа, по-видимому, реализуется и в недавно открытом сверхпроводнике Sr_2RuO_4 (см., например, [150]). Мы не будем здесь обсуждать весьма интересные свойства состояний с p -спариванием (об этом можно прочитать в книге [2]), а остановимся на другом примере, связанном с высокотемпературными сверхпроводниками семейств $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$, $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$ и $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$.

Прежде всего заметим, что при синглетном ($S = 0$) спаривании допустимо не только s -состояние, но и все высшие состояния с четными орбитальными моментами пары, $L = 2k$, поскольку такие волновые функции не меняют знака при повороте на угол 180° , т. е. симметричны при перестановке частиц в паре. Считается экспериментально установленным (мы обсудим соответствующие эксперименты позднее), что спаривание в этих ВТСП-соединениях имеет такую же качественно структуру, какая получается в обобщении простой БКШ-модели на случай синглетного d -спаривания (орбитальный момент $L = 2$). Микроскопический механизм, приводящий к появлению сильного притяжения в ВТСП-соединениях, до сих пор не вполне ясен, и, скорее всего, он сильно отличается от обычного электрон-фононного механизма притяжения. Однако наиболее важные черты спаривания в ВТСП можно понять на примере «минимального обобщения» теории БКШ, которое состоит в постулировании сильно анизотропного потенциала притяжения $V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}$ подходящего вида (он должен соответствовать тетрагональной симметрии кристаллов ВТСП

и приводить к спариванию с моментом $L = 2$). Основные качественные свойства d -спаривания и вытекающие из них методы экспериментального обнаружения таких состояний мы и обсудим далее в этом параграфе.

В d -состоянии амплитуда (волновая функция) пары $v_{\mathbf{k}}$ меняет знак в зависимости от направления вектора \mathbf{k} на поверхности Ферми. Поскольку ВТСП-кристаллы имеют слоистую структуру, в простейшем приближении можно считать поверхность Ферми почти цилиндрической и ограничиться рассмотрением «ферми-линий» — сечения ферми-поверхности плоскостью сильной связи (x, y). Тогда соответствующая d -состоянию угловая зависимость волновой функции¹⁾ пары имеет вид

$$v_{\mathbf{k}} \propto (k_x^2 - k_y^2) \propto \cos 2\theta_{\mathbf{k}}, \quad (49.1)$$

где угол $\theta_{\mathbf{k}}$ отсчитывается от направления кристаллографической оси x . Тем самым, в четырех точках на ферми-линии, задаваемых равенствами $k_x = \pm k_y$, волновая функция пары, а вместе с ней и вероятность $v_{\mathbf{k}}^2$ заполнения ячейки $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$ с такими \mathbf{k} обращается в нуль. Это очень важное свойство d -спаривания — сейчас мы покажем, что и спектр возбуждений в таком состоянии оказывается анизотропным, причем возбуждения с $k_x = \pm k_y$ могут иметь сколь угодно низкую энергию; о такой ситуации говорят как о нулях щели в спектре *на линиях* (линии появляются, если вспомнить о наличии импульса $\hbar k_z$).

Амплитуду спаривания вида (49.1) можно получить, выбрав потенциал притяжения электронов, например, в виде $V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} = -2V_d \cos 2\theta_{\mathbf{k}} \cos 2\theta_{\mathbf{k}'}$. Такой выбор означает, что наиболее сильно притягиваются электроны с импульсами, близкими к осям x и y , в то время как вблизи диагоналей $k_x = \pm k_y$ притяжение отсутствует. Проводя с таким потенциалом вывод, совершенно

¹⁾ В действительности, влияние поля кристаллической решетки в ВТСП столь велико, что ферми-поверхность оказывается сильно анизотропной в плоскости (x, y) , так что классификация состояний пар по угловому моменту вообще отсутствует, и правильнее говорить просто о смене знака волновой функции пары при дискретных поворотах на угол 90° .

аналогичный сделанному в § 44, получим вместо (44.8) – (44.9) следующие уравнения (выражение (44.10) для $v_{\mathbf{k}}^2$ при этом сохраняет свой вид) на спектр при температуре $T = 0$:

$$\Delta_{\mathbf{k}} = 2V_d \cos 2\theta_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}'} \cos 2\theta_{\mathbf{k}'}, \quad (49.2)$$

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\varepsilon_{\mathbf{k}}^2 + \Delta_{\mathbf{k}}^2}. \quad (49.3)$$

Обозначив $\Delta_{\mathbf{k}} = \Delta_0 \cos 2\theta_{\mathbf{k}}$, получим уравнение на Δ_0 почти такого же вида, как (44.12),

$$1 = N(0)V_d \int \frac{d\theta}{2\pi} \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_0 \cos^2 2\theta}}, \quad (49.4)$$

решение которого отличается от (44.14) лишь численным коэффициентом перед экспонентой. Зависимость парной амплитуды $\Delta_{\mathbf{k}}$ от направления вектора \mathbf{k} относительно осей кристалла наглядно изображена на рис. 49.1 в виде «розетки», аналогичной обычной электронной d -орбитали в атоме.

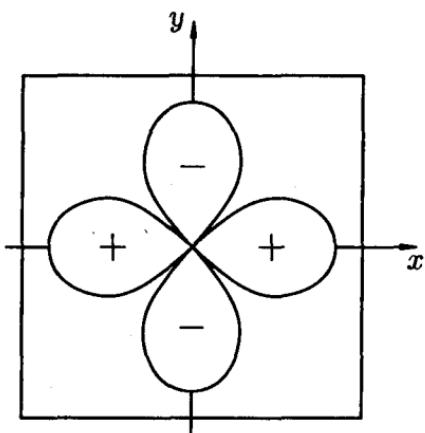


Рис. 49.1. Схематическая зависимость d -волнового параметра порядка $\Delta_{\mathbf{k}}$ от направления импульса пары $\hbar\mathbf{k}$ на ферми-поверхности.

Уравнения (49.2), (49.3) имеет важное следствие, проявляющееся при малых энергиях — плотность квазичастичных состояний $\rho(E)$ нигде не обращается в нуль, а лишь плавно убывает при

$E \rightarrow 0$. Действительно, рассмотрим квазичастичное состояние с $\mathbf{k} = (k_F + q_{\perp}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + q_{\parallel} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$, где обе компоненты вектора \mathbf{q} малы по сравнению с k_F . Согласно (49.3), его энергия равна

$$E_{\mathbf{q}} = \hbar \sqrt{v_F^2 q_{\perp}^2 + \left(\frac{2\Delta_0}{\hbar k_F} \right)^2 q_{\parallel}^2}. \quad (49.5)$$

Как видно из выражения (49.5), энергия возбуждения стремится к нулю при $q \rightarrow 0$, т. е. при импульсе $\hbar \mathbf{k}$ вблизи точки $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$. Всего таких выделенных точек на ферми-линии четыре: $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$.

Найдем теперь плотность состояний $\rho(E)$ при $E \ll \Delta_0$. Вводя вектор $\tilde{\mathbf{q}} = \left(q_{\perp}, q_{\parallel} \frac{2\Delta_0}{v_F k_F} \right)$, запишем энергию возбуждения (49.5) в приведенном к изотропному виде: $E_{\tilde{q}} = \hbar v_F \tilde{q}$. Переписывая элемент фазового объема $d^3 \mathbf{k} / (2\pi)^3$ в виде

$$\frac{dk_z}{2\pi} \frac{dk_x dk_y}{(2\pi)^2} = \frac{dk_z}{2\pi} \frac{dq_{\perp} dq_{\parallel}}{(2\pi)^2} = \frac{v_F k_F}{2\Delta_0} \frac{dk_z}{2\pi} \frac{d^2 \tilde{\mathbf{q}}}{(2\pi)^2} = \frac{k_F}{2v_F \Delta_0} \frac{dk_z}{2\pi} \frac{E dE}{2\pi},$$

сравнивая с выражением для плотности состояний $N(\varepsilon)$ в нормальном металле и умножая на четыре, получаем низкоэнергетическую плотность состояний в сверхпроводнике с d -спариванием:

$$\rho(E) = N(0) \frac{2E}{\Delta_0}. \quad (49.6)$$

Иначе говоря, плотность состояний в d -сверхпроводнике лишь на множитель порядка $E/k_B T_c$ меньше, чем в нормальном металле. Это означает, что число элементарных возбуждений $\nu_{qp}(T)$ при низких температурах не является, в отличие от обычного сверхпроводника (см. (48.1)), экспоненциально малым:

$$\nu_{qp}(T) = \sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} = V \int_0^{\infty} dE \rho(E) f(E) \sim N(0) V \frac{T^2}{\Delta_0}. \quad (49.7)$$

Поэтому условие $\nu_{qp}(T) \ll 1$, необходимое для наблюдения эффекта четности (см. § 48), очень трудно выполнить для d -сверхпроводника — оно требует температур $T < T_d^* \simeq (\Delta_0 \delta E)^{1/2}$, где $\delta E = (N(0)V)^{-1}$ — расстояние между электронными уровнями в образце в нормальном состоянии, имеющее порядок 10^{-4} К в экспериментах по эффекту четности [147]. Более того, при низких температурах $T \ll T_d^*$ связанная с присутствием неспаренного электрона дополнительная свободная энергия $F_1(T)$ очень мала, $F_1(0) \sim \delta E$. Дело в том, что квазичастица может занять ячейку \mathbf{k} -пространства, сколь угодно близкую к одной из четырех точек вырождения. Можно показать (см. [2]), что максимальная величина $F_1^{\max}(T)$ для d -сверхпроводников имеет порядок $k_B T_d^*$ и достигается при $T \simeq T_d^*$. Таким образом, отсутствие (или аномальная слабость) эффекта четности может служить одним из доказательств аномальной природы спаривания.

Другое важное свойство d -сверхпроводника — относительно большая величина низкотемпературной электронной теплоемкости $C_s(T)$. Используя комбинаторное выражение (см. [28]) для энтропии ферми-газа

$$S(f_{\mathbf{k}}) = - \sum_{\mathbf{k}} [(1 - f_{\mathbf{k}}) \ln(1 - f_{\mathbf{k}}) + f_{\mathbf{k}} \ln f_{\mathbf{k}}]$$

и выражения (45.5) и (49.6) для $\rho(E)$, получим теплоемкость сверхпроводника в следующем виде (окончательные выражения написаны для $T \ll T_c$):

$$\begin{aligned} C_s(T) &= T \frac{\partial S}{\partial T} = \sum_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}} \frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial T} = N(0) \int_0^\infty dE \rho(E) \frac{(E/T)^2}{(e^{E/T} + 1)^2} = \\ &= \begin{cases} N(0) \frac{\pi^2 T}{6} \sqrt{\frac{2\pi\Delta_0^5}{T^5}} e^{-\Delta_0/T} & \text{для } s\text{-спаривания,} \\ 0.55 N(0) \frac{T^2}{\Delta_0} & \text{для } d\text{-спаривания.} \end{cases} \quad (49.8) \end{aligned}$$

Отсутствие щели в спектре при d -спаривании приводит к возбуждению большего количества квазичастиц и к существенно более

быстрому, чем при s -спаривании, убыванию параметра спаривания $\Delta_0(T)$ с температурой. Обобщение уравнения (49.4) на ненулевые температуры производится так же, как при выводе (45.15), и имеет вид

$$1 = N(0)V_d \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_0(T) \cos^2 2\theta}} \times \\ \times \operatorname{th} \frac{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_0(T) \cos^2 2\theta}}{2T}. \quad (49.9)$$

Основной вклад в зависимость $\Delta(T)$ при низких температурах дают низколежащие возбуждения с $\varepsilon \sim k_B T$ и $\cos 2\theta \sim k_B T \Delta_0 \ll \ll 1$. Вычисляя приближенно разность интегралов (49.4) и (49.9), получаем

$$\Delta_0 - \Delta_0(T) \simeq \frac{2 \ln 2}{\pi} \frac{T}{\Delta_0}, \quad (49.10)$$

в отличие от экспоненциально малых поправок порядка $e^{-\Delta/T}$ при s -спаривании. В эксперименте бывает удобнее измерять температурную зависимость лондоновской глубины проникновения, которая тоже оказывается линейной [151]: $(\lambda(T)/\lambda(0)-1) \sim T/\Delta_0$. Соответствующие расчеты проведены в работах [152].

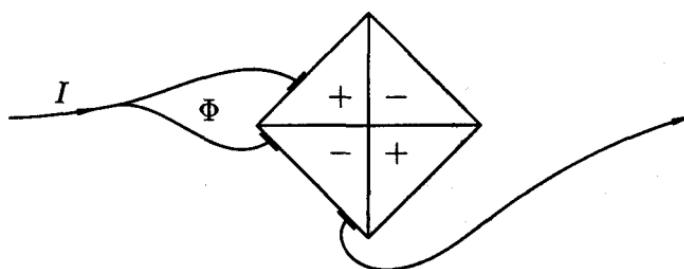


Рис. 49.2. Двухконтактный сквид, подсоединеный к соседним граням тетрагонального кристалла с противоположными знаками параметра порядка.

До сих пор мы обсуждали особые свойства d -сверхпроводника, связанные с наличием в нем бесщелевых возбуждений.

Другая важная черта *d*-спаривания — зависимость знака парной амплитуды Δ_k от направления вектора k относительно кристаллических осей.²⁾ Это свойство и было использовано [153] для доказательства существования *d*-спаривания в $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$. В работе [153] измерялся критический ток двухконтактного сквид-интерферометра с контактами между обычным сверхпроводником (свинец) и двумя соседними гранями монокристалла $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$, см. рис. 49.2. Если спаривание в $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$ имеет вид *d*-волн, типа изображенной на рис. 49.1, то знаки волновых функций куперовских пар, проходящих через контакты *a* и *b*, будут противоположны. Рассмотрим (аналогично § 25) зависимость критического тока сквида $I_{\max}(\Phi)$ от проходящего через его кольцо магнитного потока Φ . Различие знаков Δ_k на гранях *a* и *b* приведет к замене уравнения (25.2) на $\varphi_a - \varphi_b = 2\pi\Phi/\Phi_0 + \pi$, что эквивалентно сдвигу Φ на величину $\Phi_0/2$. Таким образом, *d*-спаривание в $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$ должно приводить к зависимости $I_{\max}(\Phi)$ вида

$$I_{\max}(\Phi) = 2I_c \left| \sin \frac{\pi\Phi}{\Phi_0} \right| \quad (49.11)$$

с максимумами при полуцелых значениях магнитного потока. Именно такая зависимость и была обнаружена в эксперименте [153].

§ 50. Незатухающий ток и эффект Мейсснера — Оксенфельда

В этой главе были изложены основы современных представлений о природе сверхпроводящего состояния. Было описано основное состояние сверхпроводника, исследован спектр элементарных

²⁾По этой причине для сверхпроводников с *d*-спариванием (как и с другими типами нетривиального спаривания) неверна «теорема Андерсона» об отсутствии влияния потенциальных примесей на сверхпроводимость — рассеяние перепутывает состояния с разными направлениями импульса, имеющие теперь разные знаки парных волновых функций, так что спаривание поддается [2].

возбуждений, доказано существование энергетической щели. Но у читателя давно, по-видимому, возник вопрос: «А где доказательство того, что все, что было изложено, имеет хоть какое-то отношение к сверхпроводимости?» Ведь, в конце концов, все, что мы сейчас знаем по микроскопической теории сверхпроводимости, сводится к следующему.

Наличие электрон-фононного взаимодействия в некоторых металлах может привести к эффективному притяжению электронов металла друг к другу. Это приводит к понижению энергии основного состояния, которое теперь представляет собой размазанное около поверхности Ферми распределение электронов в k -пространстве. Спектр элементарных возбуждений такого материала имеет энергетическую щель, т. е. первые разрешенные уровни спектра элементарных возбуждений отделены от уровня основного состояния энергетической щелью. Но мы до сих пор никак не показали, что материал, обладающий этими свойствами, — сверхпроводник.

Сейчас мы покажем, как из существования энергетической щели следует возможность незатухающего тока — основного свойства сверхпроводника. Для того чтобы это лучше понять, обратимся сперва к нормальному металлу. Нас будет интересовать распределение электронов нормального металла в k -пространстве, когда по металлу идет постоянный ток. Если тока нет, то при $T = 0$ все электроны заполняют состояния внутри сферы Ферми, и все состояния вне этой сферы пусты. Создадим в металле электрическое поле (пусть в направлении оси x), тогда электроны начнут ускоряться в этом направлении, а ускоренному движению электронов в x -пространстве будет отвечать равномерное движение с постоянной скоростью электронов в k -пространстве. В результате вся сфера Ферми начнет с постоянной скоростью перемещаться в k -пространстве в направлении оси k_x . Так будет происходить до тех пор, пока мы можем пренебречь процессами соударений электронов с примесями и дефектами кристаллической решетки. Если эти процессы учесть, то окажется, что в результате рассеяния электроны, имеющие максимальное значение компоненты импульса k_x , будут переки-

дываться в свободные ячейки k -пространства и, в конце концов, возникнет динамическое равновесие. Это значит, что, несмотря на электрическое поле и равномерное движение электронов в k -пространстве в направлении оси k_x , рассеяние на дефектах приводит к тому, что в целом распределение электронов в k -пространстве становится стационарным. Сфера Ферми оказывается несколько сдвинутой относительно начала координат, что естественно для токового состояния. Рассеяние электронов приводит к передаче энергии решетке, к разогреву проводника.

Теперь рассмотрим сверхпроводник. Ток в сверхпроводнике (в отсутствие электрического поля!) может возникнуть, если все электронные пары будут иметь один и тот же импульс $\hbar\mathbf{K}$. Пусть ток течет вдоль оси x сверхпроводника, т. е. $\mathbf{K} = (K, 0, 0)$. Это значит, что «размазанная» сфера Ферми будет сдвинута в k -пространстве на величину $K/2$ в направлении оси k_x . Это схематически изображено на рис. 50.1. Проследим за поведением показанной там электронной пары (1, 2), имеющей состояние $(\pm k_F + K/2, 0, 0)$. Электрону 1, имеющему наибольшую кинетическую энергию $(\hbar^2/2m)(k_F + K/2)^2$, конечно, было бы выгодно перейти в свободную ячейку где-нибудь около электрона 2. При этом энергия системы понизится на величину

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left(k_F + \frac{K}{2} \right)^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \left(k_F - \frac{K}{2} \right)^2 = \frac{\hbar^2}{m} k_F K.$$

Но тогда пара (1, 2) будет разрушена и, как мы уже знаем, энергия системы повысится на 2Δ , где Δ — энергетическая щель, m — масса электрона, k_F — радиус сферы Ферми.

Отсюда ясно, что при достаточно маленьких токах (достаточно малых K) выигрыш в энергии $\hbar^2 k_F K / m$ не может скомпенсировать проигрыш 2Δ , и пара разрываться не будет. Конечно, в целом такое состояние энергетически менее выгодно, чем состояние без тока ($K = 0$), но оно может оказаться метастабильным и существовать бесконечно долго. Примером тому служит замкнутое сверхпроводящее кольцо с током. Разрушение такого состояния начнется тогда, когда разрыв пар станет энергетически оправданным. Правильную оценку мы получим, если

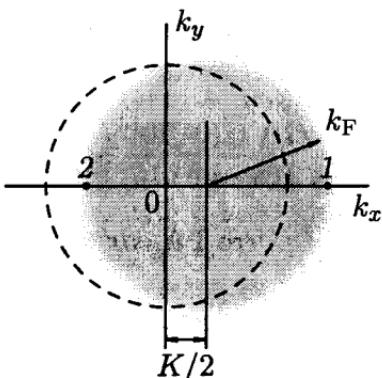


Рис. 50.1. Токовое состояние в сверхпроводнике. Вся «размазанная» сфера Ферми сдвинута на $K/2$.

напишем

$$\hbar^2 k_F K_c / m \simeq 2\Delta,$$

где $\hbar K_c$ — критический импульс пары. Следовательно, критический импульс пары равен

$$P_c = \hbar K_c \simeq 2m\Delta/p_F = 2\Delta/v_F, \quad (50.1)$$

здесь v_F — скорость электрона на поверхности Ферми.

Оценим, какой плотности тока соответствует такой критический импульс. Поскольку критическая скорость пары

$$v_c = P_c / 2m, \quad (50.2)$$

то критическая плотность тока, согласно (50.1) и (50.2), будет

$$j_c = n_s e v_c = n_s e \frac{\Delta}{mv_F}, \quad (50.3)$$

где n_s — плотность сверхпроводящих электронов, которая при $T = 0$ просто равна электронной плотности металла. Выражая n_s через лондоновскую глубину проникновения магнитного поля λ , согласно (5.7), и Δ_0 через длину когерентности ξ_0 , согласно (45.7), получим окончательно плотность критического тока при $T = 0$ в виде

$$j_c = \frac{\hbar c^2}{16\pi e} \frac{1}{\lambda^2 \xi_0}. \quad (50.4)$$

Оценим порядок получившейся величины. Пусть $\lambda \sim 10^{-5}$ см, $\xi_0 \sim 10^{-4}$ см, тогда

$$j_c \sim \frac{10^{-27} (3 \cdot 10^{10})^2}{16\pi \cdot 4.8 \cdot 10^{-10}} \frac{1}{(10^{-5})^2 10^{-4}} \text{абс. ед.} \sim 4 \cdot 10^{15} \text{абс. ед.}$$

Учитывая, что 1 А содержит $3 \cdot 10^9$ абс. ед. силы тока, имеем

$$j_c = \frac{4 \cdot 10^{15}}{3 \cdot 10^9} \text{А/см}^2 \simeq 1.3 \cdot 10^6 \text{А/см}^2.$$

Выразим критическую плотность тока j_c в формуле (50.3) через $H_{cm}(0)$ и λ . Воспользовавшись выражением для плотности состояний у поверхности Ферми $N(0) = k_F m / (\pi^2 \hbar^2)$, формулой (44.18), выражением для электронной плотности $n_s = k_F^3 / 3\pi^2$ и формулой (45.7), получим

$$j_c = \frac{1}{\sqrt{3} 4\pi} \frac{c H_{cm}(0)}{\lambda}. \quad (50.5)$$

Интересно сравнить результат (50.5) с плотностью критического тока, полученной в теории Гинзбурга – Ландау (18.5). С точностью до численного коэффициента эти результаты совпадают (если, конечно, формулу (50.5) проэкстраполировать в область температур, близких к T_c). Расхождение в численном коэффициенте вполне естественно, так как формула (50.5) носит оценочный характер.

Следовательно, мы можем сформулировать теперь важный физический вывод: критический ток (18.5), даваемый теорией Гинзбурга – Ландау, имеет смысл критического тока распаривания, т. е. такого тока, при котором теряется устойчивость электронных пар, образующих сверхпроводящий конденсат.

Обсудим теперь, как существование щели в спектре элементарных возбуждений сверхпроводника объясняет выталкивание слабого магнитного поля, т. е. эффект Мейсснера – Оксенфельда. Существуют строгие расчеты, выходящие за рамки настоящего курса, из которых следует, что существование энергетической щели является достаточным условием для эффекта Мейсснера.

Тем не менее, мы попытаемся все же проинтерпретировать эффект Мейсснера на языке микротеории. Следуя Лондону [154], можно предположить так называемую «жесткость» волновой функции электронов сверхпроводника. Это значит, что наличие энергетической щели, когерентное поведение всего коллектива электронов приводят к тому, что слабое магнитное поле не может сколь-нибудь существенно изменить эту волновую функцию. Но отсюда эффект Мейсснера следует мгновенно.

Действительно, пусть $\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ — волновая функция N электронов сверхпроводника. Заметим, что здесь Ψ — это не эффективная волновая функция сверхпроводящих электронов теории Гинзбурга — Ландау (которая, кстати, зависит только от одной переменной \mathbf{r}), а истинная волновая функция. Тогда из общих соотношений квантовой механики следует такое выражение для тока при наличии магнитного поля:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N \int \dots \int \left\{ \frac{e\hbar}{2im} [\Psi^* \nabla_n \Psi - \Psi \nabla_n \Psi^*] - \right. \\ \left. - \frac{e^2}{mc} \mathbf{A}(\mathbf{r}_n) |\Psi|^2 \right\} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) d^3 \mathbf{r}_1 \dots d^3 \mathbf{r}_N, \quad (50.6)$$

здесь \mathbf{A} — векторный потенциал магнитного поля. Если магнитного поля нет ($\mathbf{A} = 0$), то, конечно, и тока в сверхпроводнике нет, и тогда интеграл от первого слагаемого должен равняться нулю:

$$\sum_{n=1}^N \int \dots \int [\Psi^* \nabla_n \Psi - \Psi \nabla_n \Psi^*] \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) d^3 \mathbf{r}_1 \dots d^3 \mathbf{r}_N = 0. \quad (50.7)$$

Но мы предполагаем «жесткость» волновой функции, т. е. ее неизменность под действием магнитного поля. Это значит, что и при наличии магнитного поля равенство (50.7) сохраняется. Опуская поэтому первое слагаемое в (50.6), получим после элементарного интегрирования

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\text{const} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}). \quad (50.8)$$

А это равенство есть математическое выражение эффекта Мейсснера, поскольку оно является известным уравнением Лондонов (5.17).

Задача 50.1. Найти критический импульс пары электронов K_c для сверхпроводящего олова, если $v_F = 0.65 \cdot 10^8$ см/с, $\Delta_0 = 0.58 \cdot 10^{-3}$ эВ. Сравнить K_c и k_F .

Ответ. $K_c = 2\Delta_0/(\hbar v_F) = 2.61 \cdot 10^4$ см $^{-1}$, $k_F = mv_F/\hbar = 5.6 \cdot 10^7$ см $^{-1}$.

§ 51. Связь микротеории с теорией Гинзбурга – Ландау

Теория Гинзбурга – Ландау (ГЛ), как мы знаем, — феноменологическая теория, т. е. она не содержит расшифровки на микроскопическом уровне входящих в нее коэффициентов. Создание строгой микроскопической теории сверхпроводимости Бардина – Купера – Шриффера позволило дать полную интерпретацию величин, входящих в теорию ГЛ. Эта работа была выполнена Л. П. Горьковым [155]. Приведем окончательные результаты. Они различны для «чистого» и «грязного» сверхпроводников. Все величины, относящиеся к «чистому» сверхпроводнику, будут снабжены индексом p , к «грязному» — d . Чистым считается сверхпроводник, у которого $l \gg \xi_0$, где l — длина свободного пробега электрона. Неравенство $l \ll \xi_0$ характеризует грязный материал.

Как и следовало ожидать, энергетическая щель $\Delta(T)$ представляет собой параметр порядка в сверхпроводнике и поэтому при $T \rightarrow T_c$ должна быть пропорциональна параметру порядка Ψ теории ГЛ. Действительно, точный результат таков:

$$\Psi_p = \left[\frac{7\zeta(3)mv_F^2 N(0)}{2\pi^2 k_B^2 T_c^2} \right]^{1/2} \Delta(T), \quad \zeta(3) \approx 1.202,$$

$$\Psi_d = \left[\frac{\pi m v_F N(0) l}{12\hbar k_B T_c} \right]^{1/2} \Delta(T),$$

здесь $\zeta(x)$ — функция Римана.

При $T \rightarrow T_c$ имеем

$$\Delta(T) = \left(\frac{8\pi^2}{7\zeta(3)} \right)^{1/2} k_B T_c (1 - T/T_c)^{1/2},$$

или

$$\Delta(T) \simeq 3.1k_B T_c (1 - T/T_c)^{1/2}.$$

Длина когерентности и глубина проникновения магнитного поля равны соответственно

$$\begin{aligned}\xi_p &= 0.74\xi_0(1 - T/T_c)^{-1/2}, \\ \xi_d &= 0.85(\xi_0 l)^{1/2}(1 - T/T_c)^{-1/2}, \\ \lambda_p &= \frac{\lambda(0)}{\sqrt{2}}(1 - T/T_c)^{-1/2}, \\ \lambda_d &= 0.615\lambda(0)(\xi_0/l)^{1/2}(1 - T/T_c)^{-1/2}, \\ \lambda^2(0) &= \frac{3c^2}{8\pi e^2 v_F^2 N(0)}.\end{aligned}$$

Коэффициенты α и β разложения свободной энергии по степеням параметра Ψ в теории ГЛ:

$$\begin{aligned}\alpha_p &= 1.83 \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\xi_0^2} \left(\frac{T}{T_c} - 1 \right), \quad \alpha_d = 1.36 \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\xi_0 l} \left(\frac{T}{T_c} - 1 \right), \\ \beta_p &= 0.35 \frac{1}{N(0)} \left(\frac{\hbar^2}{2m\xi_0^2} \right)^2 \frac{1}{(k_B T_c)^2}, \\ \beta_d &= 0.2 \frac{1}{N(0)} \left(\frac{\hbar^2}{2m\xi_0 l} \right)^2 \frac{1}{(k_B T_c)^2}.\end{aligned}$$

Параметр теории ГЛ:

$$\varkappa_p = 0.96\lambda(0)/\xi_0, \quad \varkappa_d = 0.725\lambda(0)/l.$$

Установим теперь область применимости уравнений теории ГЛ. В разложении (14.1) плотности гиббсовской свободной энергии G_{sH} по степеням $|i\hbar\nabla\Psi - (2e/c)\mathbf{A}\Psi|^2$ учтен только первый член. Это означает, что предполагаются медленные изменения Ψ и \mathbf{A} на расстояниях, сравнимых с характерным размером неоднородности в сверхпроводнике, т. е. с размером куперовской пары.

В случае чистого сверхпроводника, когда длина свободного пробега электрона $l \gg \xi_0$, имеем поэтому следующее условие применимости теории ГЛ: $\xi(T), \lambda(T) \gg \xi_0$. Поскольку $\xi(T) = \xi_0(1 - T/T_c)^{-1/2}$, то при $T \sim T_c$ величина $\xi(T)$ всегда больше ξ_0 , и первое условие применимости удовлетворяется автоматически.

Рассмотрим второе условие: $\lambda(T) \gg \xi_0$. Это есть требование справедливости локальной электродинамики, требование того, чтобы сверхпроводник был лондоновским. Поскольку $\lambda(T) = \lambda(0)(1 - T/T_c)^{-1/2}$, а $\kappa \sim \lambda(0)/\xi_0$, условие $\lambda(T) \gg \xi_0$ превращается в условие

$$\kappa^2 \gg 1 - T/T_c. \quad (51.1)$$

Это довольно жесткое условие, поскольку в сверхпроводниках первого рода κ может быть малой величиной. Так, $\kappa(\text{Al}) = 0.01$, $\kappa(\text{Pb}) = 0.23$.

В «грязных» сверхпроводниках ($l \ll \xi_0$) область применимости теории ГЛ значительно шире. Теперь характерный масштаб неоднородности распределения параметра порядка — «грязная» длина когерентности $\xi_d \sim (\xi_0 l)^{1/2}$, так что условия применимости теории ГЛ имеют вид $\xi(T) \gg \xi_d$ и $\lambda(T) \gg \xi_d$. Первое из этих условий выполнено при $(T_c - T) \ll T_c$. Второе же условие приводит к тому же неравенству (51.1) что и в чистом пределе (при выводе надо учесть, что в грязном случае $\lambda(T) \sim \lambda(0)(\xi_0/l)^{1/2}(1 - T/T_c)^{-1/2}$, $\kappa \sim \lambda(0)/l$). Поскольку в грязных сверхпроводниках обычно $\kappa \gg 1$, окончательно находим для них область количественной применимости теории ГЛ в виде $(T_c - T) \ll T_c$. Качественно же она обычно применима для грязных сверхпроводников во всей области температур, сравнимых с T_c , — существенные отклонения возникают лишь при $T \ll T_c$.

ГЛАВА VII

НЕКОТОРЫЕ НЕРАВНОВЕСНЫЕ ЭФФЕКТЫ В СВЕРХПРОВОДНИКАХ

Вопрос о том, что происходит со сверхпроводником, когда он выведен из равновесия, как он релаксирует к равновесному состоянию, обсуждается в очень многих работах последнего времени. Сейчас это, по-видимому, один из самых актуальных вопросов физики сверхпроводников.

В чем же дело? Почему проблема изучения неравновесных свойств сверхпроводников вдруг оказалась столь важной и интересной? Думается, что это произошло, потому что в сверхпроводнике существуют «разные коллективы» электронов: сверхпроводящие электроны, электроноподобные возбуждения, дырки. То, что стало понятно после появления теории БКШ, относилось к случаю, когда эти «коллективы» находились в равновесии друг с другом, да вдобавок еще и с решеткой. Картина становится значительно богаче, если равновесие нарушить. Понимая, как протекает процесс установления равновесия, мы значительно лучше начинаем понимать самые основы теории, вырабатываем более адекватные природе представления. Кроме того, нельзя упускать из виду, что многие успешно работающие устройства криогенной электроники функционируют в условиях, далеких от равновесия, и поэтому изучение неравновесных процессов имеет еще и чисто прикладное значение.

В этой главе мы рассмотрим несколько случаев, когда неравновесное состояние сверхпроводника становится определяющим для протекающих в нем физических процессов.

§ 52. Квазичастицы: электроны и дырки

В главе VI мы уже говорили об элементарных возбуждениях (квазичастицах) в сверхпроводниках. Теперь мы уточним это понятие.

Начнем с нормального металла. Основное состояние (без элементарных возбуждений, при $T = 0$) — это такое, при котором все свободные электроны металла заполняют все ячейки \mathbf{k} -пространства внутри сферы Ферми, а все ячейки вне этой сферы свободны. Введем теперь в нормальный металл один лишний электрон. Он займет какую-то ячейку \mathbf{k} в \mathbf{k} -пространстве ($k > k_F$, где k_F — радиус сферы Ферми), и энергия всей системы электронов увеличится на $\hbar^2(k^2 - k_F^2)/2m$. При этом мы условимся отсчитывать энергию от энергии Ферми $\hbar^2k_F^2/2m$. Это и будет энергия элементарного возбуждения. А импульс всей системы будет равен $\hbar\mathbf{k}$. Это и будет импульс элементарного возбуждения.

Снова рассмотрим основное состояние нормального металла, удалив теперь оттуда один электрон из ячейки \mathbf{k} ($k \ll k_F$). Такое состояние тоже можно рассматривать как элементарное возбуждение системы, так как энергия этого состояния больше энергии основного состояния оставшейся системы электронов на величину $\hbar^2(k_F^2 - k^2)/2m$. Действительно, основное состояние получится, если взять один электрон из ячейки на поверхности Ферми и положить его в пустую ячейку \mathbf{k} . Импульс такого элементарного возбуждения равен импульсу всей системы электронов, т. е. равен $-\hbar\mathbf{k}$. Это элементарное возбуждение (квазичастица) ведет себя подобно положительному заряду и называется дыркой. Энергетический спектр элементарных возбуждений нормального металла показан на рис. 52.1 тонкими прямыми линиями.

В сверхпроводнике все будет несколько сложнее. Мы уже знаем (глава VI), что в сверхпроводнике основное состояние характеризуется функцией $v_{\mathbf{k}}^2$, которая представляет собой ве-

роятность заполнения электронами парных ячеек ($k, -k$). Вид этой функции показан на рис. 44.3. Введем в сверхпроводник один лишний электрон. Он займет ячейку в k -пространстве с вероятностью $u_k^2 = 1 - v_k^2$, поскольку с вероятностью v_k^2 она уже была занята до того. В сверхпроводнике такая ячейка может быть как вне, так и внутри сферы Ферми, поскольку $u_k^2 > 0$ для k как больших, так и меньших k_F .

Однако заполнение ячейки k электроном еще не означает, что возбуждение в сверхпроводнике возникло. Пара состояний ($k, -k$) теперь не может использоваться для перерассеяния динамических куперовских пар, поскольку состояние k занято с вероятностью 1. Это значит, что состояние $-k$ должно с вероятностью 1 оставаться пустым, т. е. с вероятностью v_k^2 должен был произойти процесс удаления электрона из состояния $-k$.

Ясно поэтому, что возбуждение в сверхпроводнике, когда ячейка k занята, а ячейка $-k$ свободна, обладает одновременно свойствами как электрона, так и дырки. Все дело в вероятности заполнения ячеек с данным k , а точнее, в знаке разности $v_k^2 - u_k^2$, который и определяет знак заряда возбуждения в сверхпроводнике, как мы покажем подробнее в следующем параграфе. Однако из сказанного выше следует, что ячейки с импульсом $|k| > k_F$ скорее пусты чем заполнены (поскольку $v_k^2 < 1/2$), и возбуждение является электроноподобным. Наоборот, при $|k| < k_F$ вероятность v_k^2 больше $1/2$, и для создания возбуждения надо в среднем убирать электронный заряд, т. е. возбуждение является дырочноподобным.

Можно сказать, что в сверхпроводнике квазичастица типа электрон (почти в чистом виде) — это квазичастица с импульсом $\hbar k$, если $|k - k_F|/k_F \gg \Delta/\epsilon_F$, $k > k_F$. А почти в чистом виде дырка — это возбуждение с импульсом $\hbar k$, удовлетворяющим тому же неравенству, но при $k < k_F$.

Электронная и дырочная ветви спектра квазичастиц в сверхпроводнике показаны на рис. 52.1.

Остается добавить, что скорость распространения квазичастицы в реальном пространстве — это групповая скорость, кото-

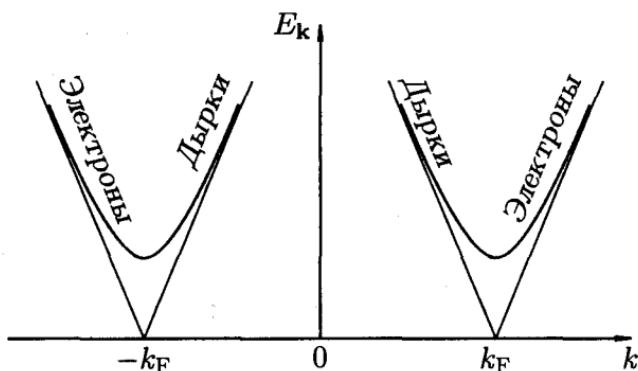


Рис. 52.1. Энергетический спектр частиц в сверхпроводнике. Тонкими прямыми показан спектр нормального металла.

рая, как известно, равна

$$s_k = \frac{dE_k}{dp_k} = \frac{1}{\hbar} \frac{dE_k}{dk}.$$

Поэтому для \$k > 0\$ (см. рис. 52.1) дырки движутся налево, а электроны направо.

§ 53. Заряд квазичастицы в сверхпроводнике

Итак, квазичастица в сверхпроводнике — это элементарное возбуждение, которое является в какой-то степени электроном и в какой-то степени дыркой. Причем если двигаться по кривой спектра элементарных возбуждений, то переход от электрона к дырке будет происходить непрерывно. Уже это рассуждение наводит на мысль, что квазичастице надо приписать дробный электрический заряд. Здесь мы будем следовать работе Петика и Смита [156], которые, по-видимому, первыми пришли к таким представлениям. Мы сейчас увидим, насколько это удобно и как это облегчает качественное рассмотрение неравновесных процессов в сверхпроводниках. Для простоты условимся считать в дальнейшем заряд электрона равным +1. Иными словами, мы в дальнейшем будем все заряды измерять в относительных единицах, приняв за единицу заряда заряд электрона.

Рассмотрим сверхпроводник, находящийся при некоторой конечной температуре, когда имеются как спаренные (сверхпроводящие) электроны, так и элементарные возбуждения. Пусть последние распределены по ячейкам \mathbf{k} -пространства согласно функции распределения $f_{\mathbf{k}}$, т. е. $f_{\mathbf{k}}$ — это вероятность того, что возбужденный электрон заполнит ячейку \mathbf{k} . Поскольку вероятность того, что до этого она была свободна от сверхпроводящего электрона, есть $u_{\mathbf{k}}^2$, то полная вероятность обнаружить в ячейке \mathbf{k} возбужденный электрон равна $f_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{k}}^2$. С другой стороны, эта ячейка может быть заполнена электроном, принадлежащим к сверхпроводящим электронам. Для этого должны быть одновременно выполнены два условия: первое — в этой ячейке нет электрона, создающего возбуждение (вероятность этого равна $1 - f_{\mathbf{k}}$), и второе — здесь есть сверхпроводящий электрон (вероятность равна $v_{\mathbf{k}}^2$). Итак, полная вероятность обнаружить в ячейке электрон, принадлежащий сверхпроводящему коллективу, равна $(1 - f_{\mathbf{k}})v_{\mathbf{k}}^2$. Поэтому полный заряд, находящийся в ячейке \mathbf{k} , равен $f_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{k}}^2 + (1 - f_{\mathbf{k}})v_{\mathbf{k}}^2$. Отсюда полный заряд всех электронов сверхпроводника равен

$$Q_{\text{полн}} = \sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}^2 + \sum_{\mathbf{k}} (1 - f_{\mathbf{k}}) v_{\mathbf{k}}^2. \quad (53.1)$$

Пусть в результате какого-то внешнего воздействия изменилось как распределение квазичастиц (на величину $\delta f_{\mathbf{k}}$), так и распределение сверхпроводящих электронов (на величину $\delta v_{\mathbf{k}}^2$). В результате произошло изменение полного заряда электронов сверхпроводника на величину

$$\delta Q_{\text{полн}} = \sum_{\mathbf{k}} (u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2) \delta f_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}} (1 - 2f_{\mathbf{k}}) \delta v_{\mathbf{k}}^2. \quad (53.2)$$

Первое слагаемое здесь — это, очевидно, изменение полного заряда квазичастиц. Конкретно: вероятность пребывания квазичастицы в ячейке \mathbf{k} изменилась на величину $\delta f_{\mathbf{k}}$. В результате заряд этой ячейки изменился на $(u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2)\delta f_{\mathbf{k}}$. Ясно, что тогда величина

$$q_{\mathbf{k}} = u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2 \quad (53.3)$$

играет роль заряда квазичастицы, имеющей импульс $\hbar\mathbf{k}$. Согласно (44.10),

$$v_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2}(1 - \epsilon_{\mathbf{k}}/E_{\mathbf{k}}). \quad (53.4)$$

Тогда

$$u_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2}(1 + \epsilon_{\mathbf{k}}/E_{\mathbf{k}}), \quad (53.5)$$

откуда

$$q_{\mathbf{k}} = \epsilon_{\mathbf{k}}/E_{\mathbf{k}} = \epsilon_{\mathbf{k}}/(\epsilon_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2)^{1/2}. \quad (53.6)$$

Зависимость $q_{\mathbf{k}}$ от k изображена на рис. 53.1. Таким образом, оказывается, что заряд квазичастицы может принимать любое значение от +1 (чистый электрон) до -1 (чистая дырка). Все зависит от того, в какой ячейке \mathbf{k} -пространства находится квазичастица.

Довольно странный на первый взгляд результат! Внесем в сверхпроводник один лишний электрон и поместим его в ячейку \mathbf{k} .

Сверхпроводник в целом получил заряд +1 (напоминаем, что это и есть, по нашему условию, заряд электрона), а в ячейке \mathbf{k} оказался заряд $q_{\mathbf{k}}$. Куда же девалась разница $1 - q_{\mathbf{k}}$? Ведь полный заряд должен сохраниться! Ответ состоит в том, что заряд $1 - q_{\mathbf{k}}$ ушел к сверхпроводящим электронам, и их заряд при этом увеличился. Этим учитывается такой процесс. Электрон вносится в сверхпроводник. Он забирает парный себе электрон, принадлежащий конденсату,¹⁾ из ячейки $-\mathbf{k}$, и эта пара попадает в

¹⁾Весь коллектив сверхпроводящих электронов, которые описываются единой волновой функцией, мы называем конденсатом. Это, однако, не совсем точно. Оказаться на самом низком энергетическом уровне (т. е. перейти в бозе-конденсат в строгом понимании этого слова) могут не все электронные пары, которые являются бозе-частицами. Часть таких бозе-частиц из-за взаимодействия между собой должна образовать систему надконденсатных частиц. Однако и конденсатные, и надконденсатные частицы все вместе образуют коллектив сверхпроводящих электронов. Надконденсатные частицы ни в коем случае нельзя рассматривать как элементарные возбуждения.

конденсат, но тогда электрон в ячейке k оказывается лишенным партнера, т. е. образуется дырка.

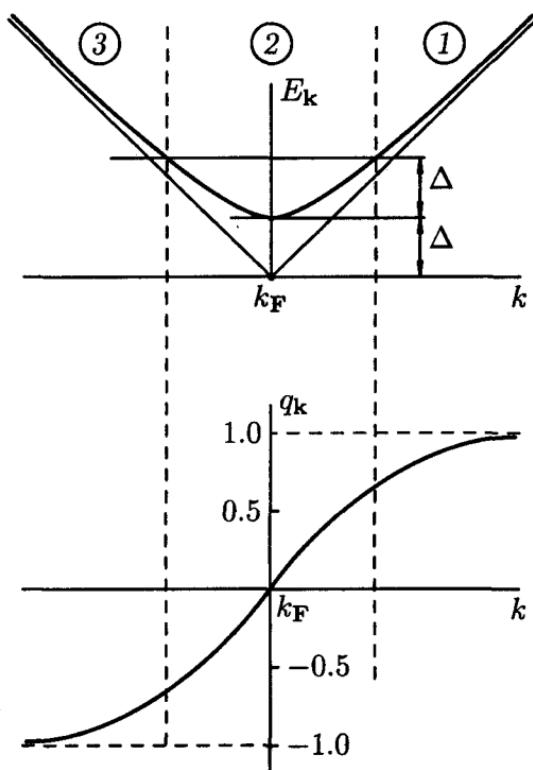


Рис. 53.1. Энергетический спектр квазичастиц в сверхпроводнике E_k и их заряд q_k . В области 1 заряд квазичастиц очень близок к +1, в области 3 — к -1, а в области 2 заряд q_k принимает любые значения от +1 до -1.

Таким образом, между возбуждениями в сверхпроводнике и конденсатом существует теснейшая связь. При установлении равновесия эти две системы нельзя рассматривать как независимые. При переходах возбуждений из одних ячеек k -пространства в другие меняется их заряд q_k , а следовательно, и заряд конденсата, т. е. число электронов в конденсате.

§ 54. Время релаксации заряда квазичастиц

Попытаемся теперь оценить время, в течение которого происходит релаксация заряда квазичастиц, т. е. время установления равновесного заряда в системе квазичастиц, если предварительно какое-то возмущение вывело его из равновесия. На этом этапе мы предполагаем, что полное количество квазичастиц остается неизменным. Тогда элементарным актом релаксации заряда является переход квазичастицы из одной ячейки \mathbf{k} -пространства в другую. Но это должно сопровождаться излучением или поглощением фононов. Пусть время релаксации будет τ_E . Обратная величина τ_E^{-1} представляет собой частоту неупругих столкновений электронов с фононами в металле и не зависит от того, находится металл в нормальном состоянии или сверхпроводящем. Эта частота имеет порядок величины [157]

$$\tau_E^{-1} \sim \frac{k_B T}{\hbar} \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^2,$$

где k_B — постоянная Больцмана, Θ_D — дебаевская температура металла. Пусть температура сверхпроводника близка к T_c . Это значит, что $\Delta \ll k_B T_c$. Возникает вопрос: все ли электрон-фононные столкновения приведут к релаксации заряда? Очевидно — нет. Действительно, если до столкновения электрон находился в области 1 (см. рис. 53.1) и конечное его состояние тоже находится в области 1, то изменения заряда квазичастицы практически не произошло. То же можно сказать относительно области 3. Иное дело — электроны, находящиеся в области 2. Их переходы в результате электрон-фононных столкновений меняют заряд квазичастицы на величину порядка единицы. При температуре T доля возбуждений, лежащих в области 2, по сравнению с общим количеством возбуждений будет иметь порядок $\Delta/k_B T$, так как по определению область 2 — это область, в которой энергия возбуждений $E_{\mathbf{k}}$ лежит в интервале $\Delta \leq E_{\mathbf{k}} \leq 2\Delta$. Поэтому частота переходов, меняющих заряд квазичастиц на величину порядка единицы, равна

$$\tau_Q^{-1} \sim \frac{\Delta}{k_B T} \tau_E^{-1}.$$

Точный расчет времени релаксации заряда квазичастиц при $T \simeq T_c$ [158] дает

$$\tau_Q = \frac{4}{\pi} \frac{k_B T_c}{\Delta} \tau_E. \quad (54.1)$$

Из этой формулы следует, что время релаксации заряда квазичастиц расходится при $T \rightarrow T_c$. Приведем некоторые характерные значения: времена энергетической релаксации τ_E имеют порядок около 10^{-10} с. Так, для олова можно принять $\tau_E = 3 \cdot 10^{-10}$ с, а для свинца $\tau_E = 10^{-11}$ с. Приведенные значения τ_E взяты при критических температурах указанных материалов. Время релаксации заряда квазичастиц может оказаться значительно больше. Все зависит от того, как близко мы подойдем к критической температуре.

Задача 54.1. Найти время релаксации заряда квазичастиц в олове, если температура олова ниже критической температуры (3.8 К) на 0.01 К.

Ответ. Используя выражение для щели (при $T \simeq T_c$) $\Delta(T) = 1.74\Delta(0) \times \times (1 - T/T_c)^{1/2}$, получим для олова $\tau_Q \simeq 2.4 \cdot 10^{-9}$ с.

§ 55. Андреевское отражение. Андреевские уровни в SNS-переходе

Перейдем теперь к изучению того, как происходит переход нормального тока в сверхток. Попробуем разобраться в том, какие процессы происходят на границе нормальный металл – сверхпроводник, как далеко от этой границы происходит процесс преобразования нормального тока в сверхток.

Оговорим прежде всего, что мы понимаем под словом «граница». В наиболее чистом виде это будет граница между нормальной и сверхпроводящей фазами в сверхпроводнике, находящемся в промежуточном состоянии. Параметр порядка — щель — будет иметь максимальное значение $\Delta(T)$ в глубине сверхпроводника и равняться нулю в глубине нормальной области. Переход от одного значения к другому произойдет на длине когерентности $\xi(T)$. Эту переходную область мы и будем называть NS -границей. В случае механического контакта между двумя металлами — нормальным и сверхпроводником — качественно все будет

так же. Если $T \simeq T_c$, то ширина границы ($\xi(T)$) достаточно велика. Тогда мы можем провести следующее рассмотрение. Нас будет интересовать, что произойдет с электроном нормального металла, энергия которого меньше величины энергетической щели сверхпроводника, когда этот электрон налетает на NS -границу со стороны нормального металла. Это схематически изображено на рис. 55.1. По мере приближения к сверхпроводнику электрон нормального металла, находясь в точке x , оказывается уже в сверхпроводящей области, но с малой величиной щели $\Delta(x)$. При этом он становится электроноподобной частицей сверхпроводника и будет занимать ячейку k -пространства, соответствующую его энергии E_k . В следующий момент, оказавшись в другой точке границы, более близкой к сверхпроводящей области, электрон окажется в области сверхпроводника с большей величиной щели, что приведет к его перемещению в новую ячейку k -пространства, более близкую к k_F .

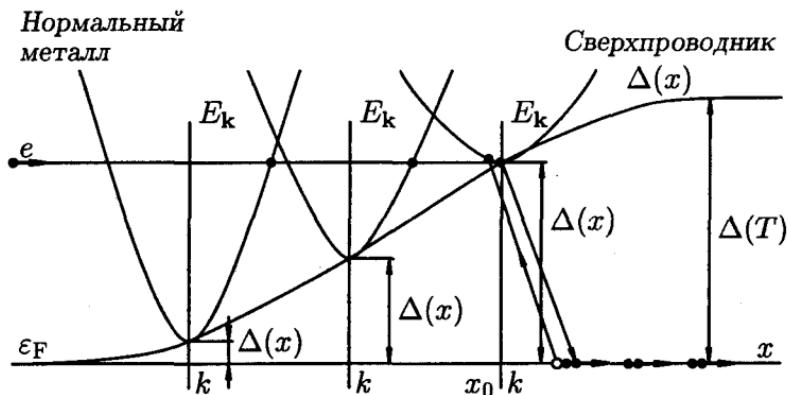


Рис. 55.1. Иллюстрация процесса андреевского отражения. Попав в область NS -границы, квазичастица (электрон) перемещается из одной ячейки k -пространства в другую, постепенно меняя свой заряд по мере приближения к сверхпроводящей области.

Это приводит к уменьшению заряда такой квазичастицы. Итак, электроноподобное возбуждение, налетая из нормального металла на NS -границу, постепенно уменьшает свой заряд. Из рис. 55.1 понятно, что дойдя до точки x_0 , в которой вели-

чина щели равняется энергии квазичастицы, последняя должна будет иметь импульс, равный $\hbar k_F$, нулевую групповую скорость и, согласно (53.6), нулевой заряд ($q_{k_F} = 0$). В этой точке возбуждение отражается от границы и переходит на левую, дырочную ветвь спектра элементарных возбуждений. Его групповая скорость будет теперь направлена влево, т. е. от сверхпроводника к нормальному металлу, а заряд уже будет отрицательный. Но движение отрицательного заряда налево эквивалентно движению положительного заряда направо. Поэтому рассмотренное отражение приводит к переносу заряда из нормального металла в сверхпроводник, т. е. к течению электрического тока.

Этот процесс был впервые теоретически предсказан А. Ф. Андреевым [159] и поэтому называется андреевским отражением.

Уменьшение заряда квазичастицы по мере ее приближения к сверхпроводящей области ясно указывает на то, что и конденсат оказывается вовлеченным в процесс андреевского отражения. Заряд квазичастицы не пропадает, а передается конденсату! А физически это означает, что на границе налетающая квазичастица находит себе парную частицу и вместе с ней переходит в конденсат, а образовавшаяся дырка возвращается в нормальный металл. Так происходит переход через NS -границу той части электрического тока, которая переносится возбуждениями с энергией, меньшей энергии щели $\Delta(T)$.¹⁾ Однако, некоторое изменение энергетического спектра квазичастиц при переходе возбуждения из нормальной области в сверхпроводящую происходит и для квазичастиц с энергиями $E_k > \Delta$. Анализируя рис. 55.1, можно заметить, что замедление движения электроноподобных возбуждений и уменьшение их заряда происходит и для энергий выше щели, пока их спектр отличается от спектра возбуждений в нормальном металле. Это означает, что и при $E_k > \Delta$ только часть заряда переходит в сверхпроводник в виде квазичастичного тока, а оставшаяся часть уходит в конденсат. Иначе говоря, для элек-

¹⁾ Далее до конца параграфа следует материал, добавленный для 2-го издания.

трана с энергией $E_k > \Delta$ вероятность андреевского отражения отлична от нуля, но меньше единицы. Сейчас мы покажем, как вычислить эту вероятность [160, 161].

Пусть электрон с импульсом $\hbar q^+$ и энергией $E > \Delta$ налетает на NS -границу со стороны нормального металла (так что его волновая функция есть $\psi_{\text{пад}} = e^{iq^+x}$) и с вероятностью $a^2 < 1$ отражается в виде дырки. Амплитуда такого процесса равна a , и отраженную волну можно представить в виде $\psi_{\text{отр}} = ae^{iq^-x}$, где $q^\pm = \sqrt{2m(E_F \pm E)/\hbar} \simeq k_F$. Прошедшая с вероятностью $b^2 = 1 - a^2$ в сверхпроводник квазичастица имеет как электронную $\psi_{\text{прош}}^e = bue^{ik^+x}$, так и дырочную ($\psi_{\text{прош}}^h = bv e^{ik^+x}$) компоненты, которые могут быть записаны в виде двухкомпонентного вектора:

$$\Psi_{\text{прош}} = b \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} e^{ik^+x}. \quad (55.1)$$

Происхождение амплитуд состояний bv и bu легко понять, если заметить, что $b^2 v_k^2$ — произведение вероятности прохождения квазичастицы через NS -границу, и вероятности заполнения ячеек $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$ в основном состоянии. В той же двухкомпонентной форме падающая и отраженная волны имеют вид

$$\Psi_{\text{пад}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{iq^+x}; \quad \Psi_{\text{отр}} = a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{iq^-x}. \quad (55.2)$$

Учитывая, что все импульсы близки к $\hbar k_F$, и приравнивая амплитуды электронной и дырочной компонент справа и слева от NS -границы, получим $b = 1/u$ и $a = bv = v/u$. В результате, учитывая обсуждение в начале этого параграфа, получим для вероятности андреевского отражения:

$$A(E) = \begin{cases} a^2 = \left| \frac{v}{u} \right|^2 = \frac{E - \sqrt{E^2 - \Delta^2}}{E + \sqrt{E^2 - \Delta^2}} & \text{при } E \geq \Delta, \\ 1 & \text{при } E < \Delta. \end{cases} \quad (55.3)$$

Преобразование нормального тока в сверхток в процессе андреевского отражения происходит внутри области размером

порядка $\xi(T)$. Совсем по-другому будут себя вести возбуждения с энергией $E > \Delta$, не испытавшие андреевского отражения. Как мы скоро увидим, они могут проникать вглубь сверхпроводника на расстояния, значительно превышающие длину когерентности $\xi(T)$.

Но перед этим рассмотрим процесс андреевского отражения чуть более подробно.

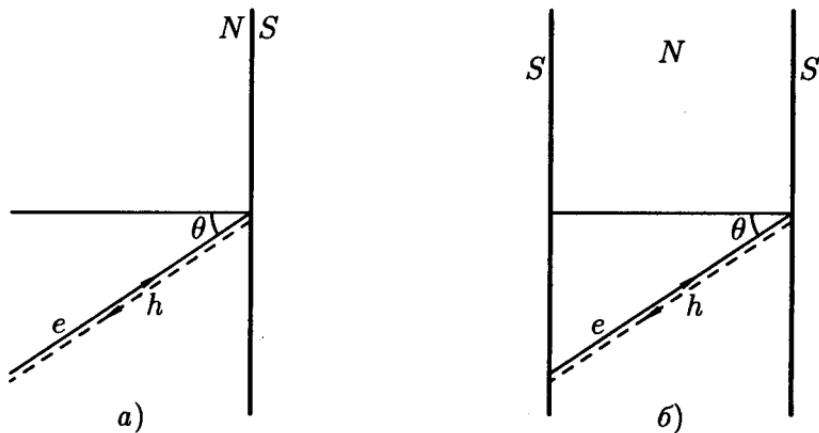


Рис. 55.2. а) Отражение электрона от NS -границы; б) замкнутая электрон-дырочная траектория в SNS -контакте.

Пусть электрон с энергией (относительно уровня Ферми) $E < \Delta$ налетает на NS -границу под углом θ , как показано на рис. 55.2, а). Удивительное свойство андреевского отражения состоит в том, что отраженная дырка вылетает «вспять» по траектории налетавшего электрона — т. е. при отражении меняется не только знак перпендикулярной компоненты скорости v_\perp (как при обычном отражении) но и знаки параллельных компонент v_\parallel ! При этом продольные компоненты импульса частицы p_\parallel не меняются вовсе (система однородна вдоль NS -границы), а поперечная компонента p_\perp изменяется лишь на величину $E/v_F \leq \hbar/\xi_0 \ll p_F$, как следует из приведенной выше на рис. 55.1 картины превращения электрона в дырку. Эта же картина позволяет понять, почему меняют знак все компоненты скорости. Действительно, скорость частицы может быть найдена как производная от ее

энергии по импульсу:

$$\mathbf{v} = \frac{\partial E_p}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial p}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \sqrt{\varepsilon_p^2 + \Delta^2}}{\partial p} = v_F \frac{\mathbf{p}}{p} \frac{\varepsilon_p}{E_p}.$$

Для электронов с $p > p_F$, т. е. с $\varepsilon_p = v_F(p - p_F) > 0$, скорость \mathbf{v} направлена вдоль импульса \mathbf{p} , однако для дырок $\varepsilon_p = v_F(p - -p_F) < 0$, и потому при превращении электрона в дырку все компоненты скорости меняют знаки. Это необычное свойство андреевского отражения имеет важные следствия, одно из которых — существование дискретных энергетических уровней квазичастиц с энергией $|E| < \Delta$, заключенных в нормальной области толщины d между двумя сверхпроводниками (внутри SNS -контакта).²⁾

Как видно из рис. 55.2, б, теперь отраженная от правой NS -границы дырка долетит до левой NS -границы, превратится на ней обратно в электрон, и полетит назад. В результате возникнет замкнутая траектория с периодом движения по ней, равным $t_{\text{пер}} = 2d/v_F |\cos \theta|$. Согласно квантовой механике, такие траектории соответствуют квантованным уровням энергии E_n , причем расстояние между соседними («андреевскими») уровнями равно

$$E_0 = E_{n+1} - E_n = 2\pi\hbar/t_{\text{пер}} = \pi\hbar v_F |\cos \theta|/d. \quad (55.4)$$

При выводе (55.4) мы подразумевали, что время пролета $t_{\text{пер}}$ велико по сравнению со временем \hbar/Δ , за которое происходит каждый процесс андреевского отражения; иначе говоря, соотношение (55.4) верно для длинных SNS -контактов (с $d \gg \xi_0$). При этом характерное расстояние между андреевскими уровнями имеет порядок $\hbar v_F/d \ll \Delta$; подробнее о вычислении спектра андреевских уровней см. в работе [46].³⁾

²⁾Разумеется, уровни энергий электронов, локализованных в области конечного размера, дискретны и в отсутствие сверхпроводника, однако тогда расстояние между ними имеет порядок $1/N(0)V$, где V — объем области локализации. Эта величина столь мала, что ее можно почти всегда пренебречь, в отличие от обсуждаемого сейчас случая андреевского отражения.

³⁾Необходимо отметить, что утверждение об осциллирующей зависимости $I_c(d)$ критического тока от толщины контакта, сделанное в [46], является результатом ошибки; она была позднее исправлена в работе [47].

Особо надо рассмотреть роль «касательных» траекторий квазичастиц, для которых $\cos \theta \ll 1$. Если бы их не было вовсе (как в случае узкой «закоротки» с шириной меньше d), то в спектре возбуждений была бы щель порядка $E_0 = \pi \hbar v_F / d$. Чтобы оценить вклад касательных траекторий в плотность состояний $\rho(E)$, напишем элемент фазового объема, соответствующего уровню с каким-либо номером n , в виде

$$d\Omega_n = S \frac{d^2 p_{||}}{(2\pi\hbar)^2} = S \frac{2\pi p_{||} dp_{||}}{(2\pi\hbar)^2},$$

где S — площадь контакта. Далее, поскольку для состояний с энергией, очень близкой к уровню Ферми, должно быть выполнено равенство $p^2 = p_{||}^2 + p_{\perp}^2 = p_F^2$, имеем $p_{||} dp_{||} = p_{\perp} dp_{\perp} = p_F^2 |\cos \theta| d\cos \theta = p_F^2 (E/E_0) d(E/E_0)$. Вклад в $\rho(E)$ при $E \ll E_0$ происходит от состояний с $n = 1$ и $\cos \theta \ll 1$. Сравнивая элемент фазового объема $d\Omega_n$ с обычным трехмерным, $d\Omega = d^3 p / (2\pi\hbar)^3$, находим плотность состояний в N -области при $E \ll E_0$:

$$\rho(E) \sim N(0) \frac{E}{E_0}. \quad (55.5)$$

Результат (55.5) важен для вычисления теплоемкости сверхпроводника I рода в смешанном состоянии (когда области нормального металла занимают долю B/H_{cm} полного объема) — при самых низких температурах теплоемкость приобретает малый множитель порядка $k_B T/E_0$, что и было обнаружено экспериментально [162].

Если нормальная прослойка состоит из «грязного» металла с длиной пробега $l \ll d$, понятие угла траектории θ теряет смысл — направление импульса квазичастицы быстро меняется. Вместо прямолинейных траекторий теперь следует рассматривать траектории диффузионного характера, показанные на рис. 55.3. Характерное время диффузии в N -области (между последовательными отражениями от правой и левой NS -границ) оказывается теперь порядка $t_{\text{диф}} = d^2/D \gg d/v_F$, где $D = lv_F/3$ — коэффициент диффузии электронов в металле. Спектр андреевских состояний теперь оказывается непрерывным, т. к. есть непрерывный

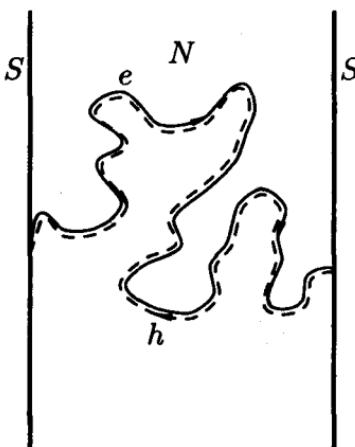


Рис. 55.3. Диффузные траектории электрона в N -области.

набор траекторий с различными периодами движения. У диффузионного движения имеется важное свойство — доля траекторий с периодами много больше $t_{\text{дифф}}$ экспоненциально мала. Соответственно, минимальная энергия квазичастицы оказывается порядка $\hbar/t_{\text{дифф}} = \hbar D/d^2 \equiv E_d$. Эта величина много меньше характерной энергии E_0 для контакта той же толщины из чистого металла, но если в чистом случае имелись (с плотностью (55.5)) состояния с энергией много меньше E_0 , то в грязном пределе уже нет выделенных траекторий, и в спектре возбуждений имеется щель величиной порядка E_d .

При ненулевой разности фаз $\varphi = \theta_L - \theta_R$ между берегами SNS -контакта положения всех андреевских уровней в нем сдвигаются [46], но расстояние между ними (55.4) остается неизменным. Особым является значение $\varphi = \pi$, при котором даже в грязном контакте щель в спектре возбуждений обращается в нуль [163].

При ненулевой разности фаз на переходе φ через него протекает сверхтекущий ток $I(\varphi)$, который представляет собой сумму токов, переносимых отдельными андреевскими уровнями, локализованными в переходе,⁴⁾ и состояниями непрерывного спектра

⁴⁾Обыкновенные локализованные состояния не могут переносить ток именно в силу своей локализации в пространстве. Андреевские состояния отли-

(с энергиями $E > \Delta$). В случае длинного контакта, $d \gg \xi_0$, существенный вклад в $I(\varphi)$ вносят оба типа состояний, соответствующие вычисления проделаны в работах [46, 47, 48]. В противоположном случае короткого контакта вклад непрерывного спектра мал, и для вычисления $I(\varphi)$ достаточно сосчитать сумму токов, переносимых андреевскими уровнями.

Прежде всего заметим, что существует два различных семейства андреевских уровней — с положительными и отрицательными значениями компоненты импульса поперек перехода $p_\perp = \pm p_F \cos \theta$.

Для упрощения дальнейших рассуждений мы вместо интегрирования по углу θ будем сразу считать площадь контакта S конечной, а движение в его плоскости — квантованным — состоящим из большого числа $M \sim k_F^2 S$ независимых волновых мод (их также называют каналами прохождения). Ясно, что полный сверхток через контакт будет пропорционален его площади, или, что эквивалентно, числу каналов M , поэтому достаточно изучить ток для отдельного j -го канала. В каждом канале будет свое семейство андреевских уровней $E_{n,(j)}^\pm$ (в дальнейшем индекс (j) будем иногда опускать).

При разности фаз $\varphi = 0$ (а также $2\pi m$ с любым целым m) энергии положительного и отрицательного уровня совпадают, $E_n^+(0) = E_n^-(0)$. Каждый из уровней несет ток $I_n^\pm = \pm I_n$, где для длинного контакта абсолютная величина $I_n \simeq e v_F / d$. Вклады в ток от «положительных» и «отрицательных» уровней сокращаются, так что полный ток равен нулю, как и должно быть при $\varphi = 0$. При отличной от $2\pi m$ разности фаз φ вырождение уровней $E_n^\pm(\varphi)$ снимается, токи $I_n^\pm(\varphi) = (2e/\hbar)\partial E_n^\pm(\varphi)/\partial\varphi$ перестают сокращаться, и полный ток растет с увеличением φ .

В работе [164] показано, что при $T = 0$ максимальное значение $I_{(j)}^{\max}$ сверхтока в j -м канале чистого контакта произвольной длины достигается при разности фаз $\varphi \rightarrow \pi$. Величину $I_{(j)}^{\max}$ и

чаются тем, что являются когерентной суперпозицией электрона и дырки, движущихся в противоположные стороны, приводя тем самым к суммарному переносу заряда.

полный критический ток контакта $I_c = \mathcal{M} I_{(j)}^{\max}$ также удается найти при произвольном соотношении d и ξ_0 :

$$I_c = \mathcal{M} \frac{e}{d/v_F + \hbar/\Delta}. \quad (55.6)$$

Полный вид ток-фазового соотношения $I(\varphi)$ существенно зависит от типа контакта, соответствующие результаты получены в работах [47, 48, 165, 166, 167, 168].

§ 56*. Проводимость *SIN*-структур при низких температурах. Андреевский интерферометр

В этом параграфе мы рассмотрим удивительные явления, связанные с протеканием тока через «плохую» границу сверхпроводника с неупорядоченным нормальным проводником — т. е. границу, на которой и в нормальном состоянии происходит сильное рассеяние электронов назад. Иначе говоря, коэффициент прохождения электрона, падающего на границу двух металлов, мал (это может быть следствием как наличия изолирующего барьера, так и просто сильного различия скоростей Ферми двух проводников, что случается в контактах металлов с полупроводниками). Будет рассматриваться область температур, низких по сравнению с критической температурой сверхпроводника. Мы также ограничимся областью малых напряжений, $eV \ll \ll \Delta$.

Мы увидим, что в такой системе (см. рис. 56.1, *a*) обычный закон сложения сопротивлений последовательно соединенных проводников нарушается самым возмутительным образом: полная проводимость системы *растет* при увеличении сопротивления нормальной проволоки, контактирующей со сверхпроводником. Кроме того, проводимость *SIN*-структуры резко убывает с ростом температуры или напряжения. Если же нормальный резервуар соединен со сверхпроводником «вилкой» из нормального металла с двумя контактами, как показано на рис. 56.1, *б*, то проводимость оказывается осциллирующей функцией магнитного потока в кольце, как бывает с критическим током в сквидах. Все

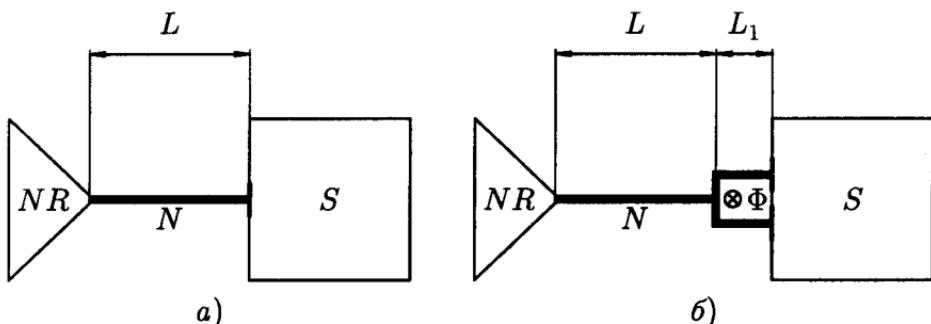


Рис. 56.1. а) Нормальный резервуар NR , соединенный со сверхпроводником S проволокой из неупорядоченного нормального проводника; б) нормальный резервуар NR , соединенный со сверхпроводником S «вилкой» из неупорядоченного нормального проводника.

Эти удивительные явления связаны с двумя обстоятельствами: а) перенос электронов из сверхпроводника в нормальный проводник происходит в результате андреевского отражения, которое можно представлять себе как превращение куперовской пары, вылетевшей из сверхпроводника, в два невзаимодействующих электрона в нормальном проводнике; б) при низких температурах эти электроны в N -области длительное время двигаются квантово-когерентным образом и «помнят» о своем происхождении из куперовской пары.

Начнем с задачи о туннелировании (при $T = 0$) двух электронов из чистого металла через слой диэлектрика в сверхпроводник, где они образуют куперовскую пару. Процесс одноэлектронного туннелирования запрещен законом сохранения энергии (при малых $V \ll \Delta/e$), а квантовомеханическая амплитуда $A(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$ парного туннелирования, при котором два электрона (с импульсами \mathbf{q} и \mathbf{q}') из нормального металла туннелируют в сверхпроводник, появляется во втором порядке теории возмущений по одноэлектронной туннельной амплитуде $t_{\mathbf{k}, q}/\sqrt{\mathcal{V}_1 \mathcal{V}_2}$, см. п. 46.2. Эти два электрона могут образовать пару, занимающую любую из «ячеек» $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$, поэтому полная амплитуда имеет вид суммы по всем \mathbf{k} (общее выражение для амплитуды процесса второго

порядка см. в § 43 книги [49]):

$$A(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = \frac{1}{\mathcal{V}_1 \mathcal{V}_2} \sum_{\mathbf{k}} t_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} t_{-\mathbf{k}, \mathbf{q}'} u_{\mathbf{k}} v_{-\mathbf{k}} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_q - E_k} + \frac{1}{\varepsilon_{q'} - E_k} \right\}. \quad (56.1)$$

Энергетические знаменатели в формуле (56.1) равны разности энергии начального состояния $\varepsilon_q + \varepsilon_{q'}$ и виртуального возбужденного состояния (содержащего одну квазичастицу — с энергией E_k — в сверхпроводнике и один электрон — с энергией ε_q либо $\varepsilon_{q'}$ — в металле). Поскольку состояние сверхпроводника отвечает определенному значению фазы параметра порядка θ , амплитуда (56.1) должна содержать фазовый множитель $e^{i\theta}$; это обеспечивается факторами когерентности $u_{\mathbf{k}} v_{-\mathbf{k}}$.

Вероятность переходов в единицу времени определяется формулой, похожей на (46.1):

$$\Gamma_A = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\mathbf{q}, \mathbf{q}'} |A(\mathbf{q}, \mathbf{q}')|^2 \delta(\varepsilon_q + \varepsilon_{q'} - 2eV). \quad (56.2)$$

Поступая по аналогии с выводом (46.3), получим для «андреевского» сопротивления *SIN*-границы

$$\frac{1}{R_A} = \frac{8\pi e^2}{\hbar} N^2(0) \langle |A(\mathbf{q}, \mathbf{q}')|^2 \rangle_{\mathbf{q}, \mathbf{q}'}, \quad (56.3)$$

где угловые скобки означают усреднение по направлениям импульсов \mathbf{q} и \mathbf{q}' , $N(0)$ — плотность состояний на ферми-поверхности, которую считаем одинаковой для обоих металлов. Наша цель состоит в том, чтобы выразить (по порядку величины) сопротивление R_A через нормальное сопротивление границы R_n , определенное в (46.3):

$$\frac{1}{R_n} = \frac{4\pi e^2}{\hbar} N^2(0) \langle |t_{\mathbf{k}, \mathbf{q}}|^2 \rangle_{\mathbf{q}, \mathbf{k}}. \quad (56.4)$$

Полная проводимость границы $1/R_n$ пропорциональна ее площади S , и имеет размерность e^2/\hbar , поэтому можно написать $1/R_n \sim (e^2/\hbar)TS/\lambda_F^2$, где $\lambda_F = 2\pi/k_F$ — фермиевская длина волны электрона, а $T \ll 1$ — безразмерный коэффициент прохождения через

барьер для падающей волны с заданным импульсом. Величина $\mathcal{M} = S/\lambda_F^2$ играет роль полного числа поперечно-квантованных мод электронных волн (так называемых «поперечных каналов»), которые могут проходить через границу площади S . Для среднего квадрата матричного элемента $t_{\mathbf{k}, \mathbf{q}}$, входящего в (46.3), получается оценка

$$N^2(0)\langle|t_{\mathbf{k}, \mathbf{q}}|^2\rangle \sim \mathcal{T}\mathcal{M}, \quad (56.5)$$

т. е. каждый канал вносит в проводимость вклад порядка $\mathcal{T}e^2/\hbar$. Основное отличие нашего нового выражения (56.3) от формулы (46.3) состоит в том, что в него входит матричный элемент $A(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$, который сам появляется лишь во втором порядке по туннельным матричным элементам $t_{\mathbf{k}, \mathbf{q}}$. Поэтому выражение для $A(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$, аналогичное (56.5), имеет вид

$$N^2(0)\langle|A(\mathbf{q}, \mathbf{q}')|^2\rangle_{\mathbf{q}, \mathbf{q}'} \sim \mathcal{T}^2\mathcal{M}. \quad (56.6)$$

Сравнивая эту оценку с (56.3), (56.4) и (56.5), приходим к выводу, что

$$\frac{1}{R_A} \sim \frac{e^2}{\hbar} \mathcal{T}^2 \mathcal{M} \sim \frac{\hbar}{e^2 R_n^2} \frac{1}{\mathcal{M}}. \quad (56.7)$$

Первая оценка (56.7) показывает, что сопротивление *SIN*-границы для чистого N -металла много больше сопротивления той же туннельной границы в нормальном состоянии, если безразмерный коэффициент прохождения $\mathcal{T} \ll 1$. Вторая из оценок (56.7) означает, что при заданном нормальном сопротивлении границы R_n андреевское сопротивление уменьшается с уменьшением числа независимых каналов \mathcal{M} . Ниже мы увидим, что это сопротивление можно сильно уменьшить, добавляя в чистый нормальный металл примеси. Сравнивая это утверждение с оценками (56.7), видим, что оно эквивалентно тому, что примесное рассеяние в нормальном металле увеличивает эффективный коэффициент прохождения через *SIN*-границу, либо (используя вторую оценку) — что оно уменьшает количество независимых каналов \mathcal{M} .

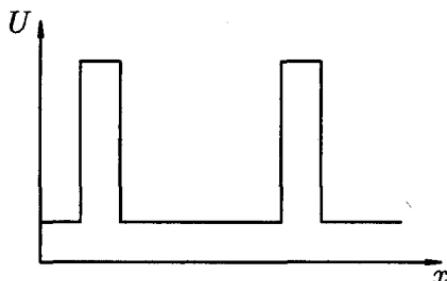


Рис. 56.2. Потенциал с двумя барьераами.

Мы проиллюстрируем происходящее на простом примере, использующем первую из оценок (56.7). Из нее следует, что в SIN -системе каждый из каналов пропускает электрон с вероятностью порядка T^2 , в то время как в нормальном состоянии берегов эта вероятность была $T \gg T^2$. Рассмотрим сначала один из таких каналов и зададимся вопросом из квантовой механики одномерного движения: можно ли увеличить коэффициент прохождения через туннельный барьер, поставив на некотором расстоянии от него еще один такой же барьер, как показано на рис. 56.2. Эту задачу легко решить, считая коэффициент прохождения T через одиночный барьер малым (барьер можно аппроксимировать отталкивающим δ -функциональным потенциалом). Мы сразу приведем ответ для эффективного коэффициента прохождения при энергиях частицы вблизи резонансных значений E_n :

$$\mathcal{T}_{\text{эфф}} \simeq \frac{T^2}{T^2 + (E/E_n - 1)^2}. \quad (56.8)$$

Вдали от резонансов $\mathcal{T}_{\text{эфф}} \sim T^2$. Физический смысл результата (56.8) можно понять так: электрон с почти резонансной энергией $E \simeq E_n$ очень долго (в течение времени порядка $1/T$) находится на квазистационарном уровне между двумя барьерами. Поэтому «число попыток» проникнуть через каждый из барьеров возрастает в $T^{-1} \gg 1$ раз, причем этот множитель относится к амплитуде прохождения через систему двух барьеров, вероятность же умножается на T^{-2} , что полностью компенсирует нерезонансное значение коэффициента прохождения порядка T^2 через два последовательных барьера. Заметим, что если усреднить

(56.8) по большому интервалу энергий, получится $\overline{T_{\text{эфф}}} \sim T$, как при классическом сложении сопротивлений.

Механизм усиления андреевской проводимости рассеянием на примесях в нормальном проводнике по существу схож с описанным выше: при длине свободного пробега $l \ll \sqrt{S}$ из-за примесного рассеяния два электрона, протуннелировавшие из сверхпроводника в нормальный металл, не сразу улетают вглубь нормальной области, а медленно диффундируют (с коэффициентом диффузии $D = v_F l/3$). При этом электроны многократно испытывают отражение от NIS -границы, что и увеличивает эффективный коэффициент прохождения. Качественную оценку величины эффекта можно получить, умножив (56.7) на количество раз \mathcal{N} , которое электрон возвращается к границе со сверхпроводником, прежде чем уйти в нормальный резервуар (обозначенный через NR на рис. 56.1, a). Величину \mathcal{N} оценим как отношение полной длины диффузационной траектории $v_F t_D$, пройденной за время $t_D \sim L^2/D$ движения в проволоке до выхода в нормальный резервуар, к длине проволоки L . Получим фактор усиления проводимости $\mathcal{N} \sim v_F L/D \sim L/l$, так что вместо (56.7) имеем

$$G_A \equiv \frac{1}{R_A} \sim \frac{\hbar}{e^2 R_n^2} \frac{v_F L}{k_F^2 S D} \sim \frac{1}{R_n^2} \frac{L}{\sigma S} = \frac{R_D}{R_n^2}, \quad (56.9)$$

где $\sigma = 2e^2 N(0)D$ — удельная проводимость проволоки, а R_D — ее полное сопротивление; была также использована оценка $N(0) \sim k_F^2/\hbar v_F$ для плотности состояний.

Аккуратный вывод [169, 170] дает для R_A при низких температурах и напряжениях, $\max(eV, k_B T) \ll \hbar D/L^2$, выражение, из которого следует, что формула $G_A = R_D/R_n^2$ является в действительности точной, причем для любой геометрии грязного проводника:

$$G_A = \frac{g_n^2}{2e^2 N(0)} \int d^2 \mathbf{r} d^2 \mathbf{r}' \int_0^\infty dt P(\mathbf{r}, \mathbf{r}' | t), \quad (56.10)$$

где g_n — удельная проводимость границы в нормальном состоянии, интегралы по \mathbf{r} и \mathbf{r}' берутся по площади границы, а функция

$P(\mathbf{r}, \mathbf{r}'|t)$ представляет собой классическую вероятность распространения диффундирующей частицы из \mathbf{r} в \mathbf{r}' за время t . Физически эта частица представляет собой «бывшую» куперовскую пару, вылетевшую в нормальный проводник. Выражение (56.10) применимо в отсутствие магнитного поля (и тока в сверхпроводнике), когда фаза параметра порядка $\theta(\mathbf{r})$ постоянна в пространстве; влияние магнитного поля мы обсудим в конце этого параграфа.

Уравнение диффузии на $P(\mathbf{r}, \mathbf{r}'|t)$ имеет обычный вид $\partial P / \partial t = -D \nabla^2 P$ и решается с начальным условием $P(\mathbf{r}, \mathbf{r}'|0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Кроме того, имеется следующее граничное условие: $P(\mathbf{r}, \mathbf{r}'|t)$ обращается в нуль, когда \mathbf{r}' попадает на границу с нормальным резервуаром. Это условие означает, что электрон, попавший в область нормального резервуара, с подавляющей вероятностью не возвращается назад к SIN -границе. Для одномерной геометрии типа проволоки, показанной на рис. 56.1, *a*, можно сразу заменить интегралы по площади границы умножением на S и написать решение одномерного уравнения диффузии в виде

$$P(x, x'|t) = \frac{2}{SL} \sum_{m=0}^{\infty} \cos(q_m x) \cos(q_m x') e^{-Dq_m^2 t}, \quad (56.11)$$

где $q_m = (\pi/L)(m + 1/2)$. В интеграл (56.10) входит значение ряда (56.11) при $x = x' = 0$:

$$\int_0^\infty dt P(0, 0|t) = \frac{2L}{\pi^2 SD} \sum_{m=0}^{\infty} (m + 1/2)^{-2} = \frac{L}{SD}, \quad (56.12)$$

откуда и следует выражение в правой части (56.9). Заметим, что теперь сопротивление SIN -границы выразилось только через «классические» параметры — сопротивления нормальной границы и проволоки, а специфически квантовые величины типа k_F выпали из ответа.

Обсудим теперь область применимости полученного результата. Ясно, что формула (56.9) не может оставаться справедливой при произвольном увеличении длины проволоки L , иначе

че можно было бы сделать R_A произвольно малым. В действительности результат (56.9) работает, пока $R_D \leq R_n$, т. е. усиление андреевской проводимости за счет интерференции многократных отражений позволяет увеличить проводимость *SIN*-границы до значения нормальной проводимости границы. При $R_D \geq R_n$ полное сопротивление структуры определяется уже величиной R_D , см. [171]. Другое, уже упоминавшееся, условие применимости (56.9) состоит в малости температуры и напряжения, $\max(eV, k_B T) \ll \hbar D/L^2$. Смысл этого условия состоит в том, что интерференция многократных андреевских отражений может происходить до тех пор, пока не разрушена когерентность между электронной и отраженной дырочной волнами, т. е. в течение времени $t_{coh} \sim \hbar/E$, где E — модуль энергии электрона или отраженной дырки. При заданном напряжении и температуре основной вклад в проводимость дают пары с энергией $E \sim \max(eV, k_B T)$ и соответственно со временем когерентности $t_{coh} \sim \min(\hbar/k_B T, \hbar/eV)$. Если t_{coh} становится меньше $t_D = L^2/D$, формулу (56.10) следует обобщить, введя в нее множитель, быстро убывающий при $t \geq t_{coh}$. Для оценки удобно сначала вычислить в (56.11) сумму по q_m , заменив ее интегралом, что дает $P(0, 0|t) \simeq 1/S\sqrt{Dt}$. Подставляя это выражение в (56.10) и интегрируя до t_{coh} , получим

$$\frac{1}{R_A} \simeq \frac{R_{coh}}{R_n^2}, \quad (56.13)$$

где $R_{coh} = L_{coh}/S\sigma$ — сопротивление проволоки на длине когерентности $L_{coh} = \sqrt{\hbar D / \max(eV, k_B T)}$. Формула (56.13) верна и для структур более сложной геометрии, когда сопротивление когерентной области R_{coh} связано с длиной когерентности L_{coh} нелинейным образом. Таким образом, андреевская проводимость падает с ростом температуры и/или напряжения. Этот эффект наблюдался впервые в экспериментах [172] (где в качестве нормального проводника использовалась полупроводниковая гетероструктура на основе арсенида индия) и получил наименование аномалии при нулевом смешении, (в англоязычной литературе — «zero-bias anomaly»).

Описанная картина усиления проводимости наводит на мысль, что проводимость должна быть чувствительна к изменению фазы интерферирующих процессов андреевского отражения. Проще всего проверить это на структурах типа «вилки» (рис. 56.1, б), включив слабое поперечное магнитное поле, не проникающее в сверхпроводник, но создающее поток $\Phi \sim \Phi_0$ в кольце, образованном зубьями вилки и сверхпроводником [173]. В этом случае выражение (56.10) приобретает вид

$$G_A^{\text{вилка}} = \frac{g_n^2}{2e^2 N(0)} \int d^2 r d^2 r' e^{i\theta(r) - i\theta(r')} \int_0^\infty dt P(r, r' | t), \quad (56.14)$$

где $\theta \equiv \theta(r) - \theta(r') = 2\pi\Phi/\Phi_0$, если координаты r и r' относятся к различным туннельным контактам (в противном случае $\theta = 0$). Возникновение фазовых факторов $e^{i\theta(r)}$ отвечает тому обстоятельству, что куперовская пара, распавшаяся на два «нормальных» электрона, пришла из области сверхпроводника с определенным значением фазы параметра порядка. В вероятность процесса входит произведение амплитуды $A(r) \propto e^{i\theta(r)}$ на комплексно сопряженную амплитуду $A^*(r')$, поэтому если точки r и r' совпадают, фазовые факторы сокращаются. Однако в силу диффузионного характера движения электронов в металле обратный процесс превращения двух электронов в куперовскую пару может произойти в другом контакте, и тогда полного сокращения не происходит. Уравнение диффузии для $P(r, r' | t)$ надо теперь решать для всей области «вилки». На временах $t \geq t_{\text{int}} = L_1^2/D$ возникает заметная вероятность того что «частица» (т. е. два электрона, вылетевшие из сверхпроводника), начавшая движение от первого контакта (с фазой параметра порядка θ_1) окажется вблизи второго контакта и перейдет в другую куперовскую пару (с фазой θ_2). Поэтому полная андреевская проводимость будет состоять из трех слагаемых:

$$G_A^{\text{вилка}} = G_A^{(1)} + G_A^{(2)} + G_A^{\text{int}} \cos \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0}. \quad (56.15)$$

В этой сумме $G_A^{(1)}$ описывает прохождение тока через первый контакт, (а $G_A^{(2)}$ — через второй), в то время как третий член соответствует интерференции амплитуд андреевского отражения на обоих контактах. Если время когерентности t_{coh} велико по сравнению с t_{int} , а нормальные сопротивления обоих контактов примерно равны, величина G_A^{int} должна быть порядка $G_A^{(1,2)}$. Именно это и наблюдалось в эксперименте [170], который подтвердил все выводы теории. Иначе говоря, хотя движение электронов в грязном проводнике происходит диффузионно, это не мешает им проявлять волновые свойства, необходимые для интерференции. Структура типа показанной на рис. 56.1, б получила название «андреевский интерферометр» или NS-QUID.

§ 57. Разбаланс заселенностей ветвей спектра элементарных возбуждений и электрическое поле в сверхпроводнике

В условиях равновесия электронная и дырочная ветви спектра элементарных возбуждений сверхпроводника заселены квазичастицами симметрично. Поэтому в равновесном сверхпроводнике число электронных квазичастиц равно числу дырок, и суммарный заряд равен нулю. Кроме того, в равновесном сверхпроводнике функция распределения квазичастиц — это функция распределения Ферми

$$f_k = \frac{1}{\exp(E_k/k_B T) + 1}.$$

В результате каких-либо внешних воздействий равновесное распределение квазичастиц может нарушиться. Если, например, сверхпроводник подвергается электромагнитному облучению, то симметрия в распределении электронов и дырок по ветвям не нарушается. Просто квазичастицы, поглощая электромагнитную энергию, переходят на более высокие энергетические уровни. При этом может измениться величина энергетической щели. Подобные типы неравновесных процессов мы здесь не будем рассматривать.

Равновесие будет также нарушено вблизи границы с нормальным металлом, если оттуда идет поток электронов. Действительно, электроны с энергией $E_k > \Delta(T)$ проникают в сверхпроводник и занимают ячейки k -пространства, принадлежащие электронной ветви спектра. В этом случае возникает разбаланс заселенности двух ветвей. Наша задача теперь — понять, к каким последствиям приводит разбаланс заселеностей, как и на каких характерных расстояниях он релаксирует.

Существование разбаланса заселенностей, очевидно, приводит к появлению конечного заряда квазичастиц Q в данном месте сверхпроводника:

$$Q = \sum_k q_k f_k,$$

где f_k — какая-то (в общем случае — неравновесная) функция распределения электронов по ячейкам k -пространства.

Но суммарный заряд всех электронов сверхпроводника в каждой точке должен быть одинаковым и равным по абсолютной величине заряду ионов кристаллической решетки. Этим обеспечивается электронейтральность материала. Таким образом, если в данном месте заряд квазичастиц увеличился на величину Q , то на такую же величину должен уменьшиться заряд конденсата. Это вызовет изменение функции распределения сверхпроводящих электронов v_k^2 . На рис. 57.1 штриховой линией показано старое распределение v_k^2 , соответствующее равновесному случаю, когда $Q = 0$ и когда химический потенциал сверхпроводящих электронов μ_s совпадает с энергией Ферми металла.¹⁾ Поскольку площадь под кривой v_k^2 пропорциональна числу сверхпроводящих электронов, их уменьшение должно вызвать смещение границы распределения влево, т. е. уменьшение химического потенциала μ_s на величину $\epsilon_F - \mu_s$. Новое распределение v_k^2 показано

¹⁾Функция распределения конденсатных электронов в неравновесном случае тоже будет иметь вид $v_k^2 = (1 - \epsilon_k/E_k)/2$, но $\epsilon_k = \hbar^2 k^2/2m - \mu_s$ и $E_k = (\epsilon_k^2 + \Delta^2)^{1/2}$, т. е. мы считаем, что конденсат успевает подстроиться под данное неравновесное распределение квазичастиц. Легко проследить, что появление разбаланса заселеностей ветвей не изменяет величину энергетической щели.

на рис. 57.1 сплошной линией. Теперь мы можем легко подсчитать количество энергетических уровней, освободившихся от сверхпроводящих электронов: $2N(0)(\varepsilon_F - \mu_s)$, где $N(0)$ — плотность состояний на уровне Ферми, а коэффициент 2 учитывает, что на каждом энергетическом уровне находятся два электрона с противоположными спинами. Отсюда сразу следует, что конденсат потерял заряд

$$Q = 2N(0)(\varepsilon_F - \mu_s), \quad (57.1)$$

который перешел к квазичастицам.

Посмотрим, к каким последствиям это приведет.

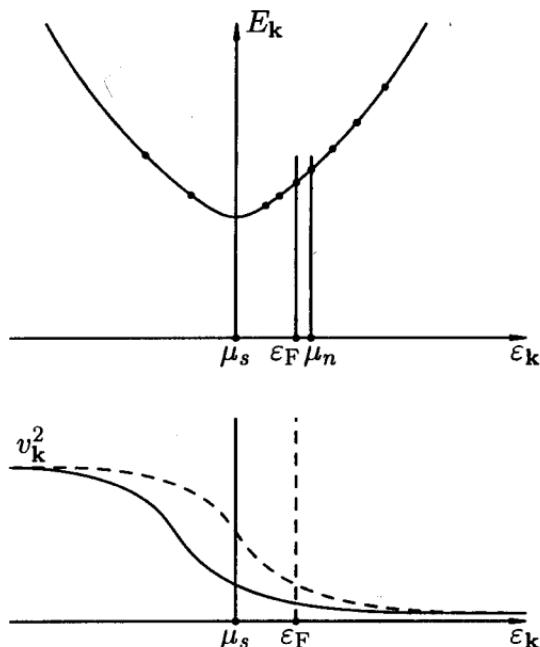


Рис. 57.1. Неравновесное распределение сверхпроводящих электронов v_k^2 и спектр квазичастиц в сверхпроводнике E_k в неравновесном состоянии. Штриховой линией показано равновесное распределение v_k^2 , когда $\mu_s = \varepsilon_F$. Щель Δ сохранила свое значение, химический потенциал μ_n стал больше ε_F .

Поскольку неравновесный заряд квазичастиц Q будет функцией пространственной координаты x , ясно, что и неравновесный

химический потенциал сверхпроводящих электронов μ_s тоже будет, согласно (57.1), функцией x . Но это означает, что в сверхпроводнике возможно существование электрического поля \mathbf{E} , которое, тем не менее, не будет ускорять конденсат. Действительно, в самом общем виде уравнение движения для сверхпроводящего электрона можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}_s) = -\frac{e}{c}\dot{\mathbf{A}} - e\nabla\varphi - \nabla\mu_s. \quad (57.2)$$

Здесь e — заряд электрона, m — его масса, \mathbf{v}_s — сверхтекучая скорость конденсата, φ — электростатический потенциал, \mathbf{A} — векторный потенциал, точка означает дифференцирование по времени. В стационарных условиях $d(m\mathbf{v}_s)/dt = \dot{\mathbf{A}} = 0$, поэтому сверхпроводящие электроны не ускоряются. Но это означает, что в стационарных условиях в сверхпроводнике должен быть постоянным в пространстве электрохимический потенциал сверхпроводящих электронов φ_{ex_s} ,

$$\varphi_{ex_s} = e\varphi + \mu_s = \text{const}. \quad (57.3)$$

Это, однако, не исключает существования электрического поля, которое, согласно (57.3), будет равно

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi = \frac{1}{e}\nabla\mu_s.$$

Используя (57.1), имеем

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{2eN(0)}\nabla Q. \quad (57.4)$$

Итак, мы приходим к выводу, что в неравновесных условиях, при наличии градиента заряда квазичастиц сверхпроводника, в нем возникает электрическое поле, которое, в то же время, не будет ускорять конденсат, так как компенсируется градиентом химического потенциала сверхпроводящих электронов. Подчеркнем еще раз, что на сверхпроводящие электроны действует градиент электрохимического потенциала сверхпроводящих электронов $\nabla\varphi_{ex_s}$, который, согласно (57.3), равен нулю.

Существование в данном месте сверхпроводника стационарного, но неравновесного заряда квазичастиц с плотностью Q означает, что в данное место непрерывно идет поток квазичастиц, приносящих некоторый заряд, который в то же время релаксирует, переходя в конденсат. Это условие выражается простым соотношением:

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_n = -eQ/\tau_Q, \quad (57.5)$$

где \mathbf{j}_n — нормальная компонента полного тока. Это соотношение справедливо приближенно, когда щель мала ($\Delta \ll k_B T_c$), т. е. когда температура близка к критической. Более строго этот вопрос рассматривается в [156]. В этом же приближении, когда $T \simeq T_c$, мы можем пренебречь изменением химического потенциала квазичастиц по сравнению с изменением химического потенциала сверхпроводящих электронов, т. е. $\varepsilon_F - \mu_s \gg \mu_n - \varepsilon_F$ (см. рис. 57.1). Действительно, при $T \simeq T_c$ в конденсате электронов мало, а коллектив нормальных электронов велик. Поэтому удаление некоторого количества электронов из конденсата и перенос их в коллектив нормальных электронов приведет к значительно более сильному изменению свойств конденсата (уменьшение μ_s), чем свойств коллектива нормальных электронов.

Учитывая это, можно написать закон Ома для возбуждений в обычной форме:

$$\mathbf{j}_n = \sigma \mathbf{E},$$

где σ — нормальная проводимость при низких температурах: $\sigma^{-1} = \rho_{\text{ост}}$, где $\rho_{\text{ост}}$ — остаточное удельное сопротивление.²⁾ Беря дивергенцию от правой и левой частей этого равенства и подставляя сюда формулы (57.4) и (57.5), получим

$$\nabla^2 Q = \frac{1}{\lambda_Q^2} Q, \quad (57.6)$$

²⁾ Остаточное удельное сопротивление проводника — это удельное сопротивление, экстраполированное к абсолютному нулю температуры.

где

$$\lambda_Q^2 = \frac{\sigma \tau_Q}{2e^2 N(0)}. \quad (57.7)$$

Поскольку проводимость нормального металла σ можно записать в виде³⁾

$$\sigma = \frac{2}{3} e^2 N(0) l v_F,$$

где l — длина свободного пробега электрона, а v_F — скорость электрона на поверхности Ферми, имеем окончательно

$$\lambda_Q = \left(\frac{l v_F \tau_Q}{3} \right)^{1/2} = (D \tau_Q)^{1/2}, \quad (57.8)$$

где D — коэффициент диффузии для электронов, $D = l v_F / 3$.

Рассмотрим теперь самый простой случай. Пусть образцом будет настолько тонкая проволока, что задачу можно считать одномерной. Направим ось x вдоль проволоки и будем считать материал проволоки нормальным для $x < 0$ и сверхпроводящим для $x > 0$. Пусть по проволоке течет ток в положительном направлении оси x . Тогда уравнение (57.6) примет вид

$$\frac{d^2 Q}{dx^2} = \frac{1}{\lambda_Q^2} Q. \quad (57.9)$$

Ясно, что далеко от границы (при $x \rightarrow \infty$) $Q \rightarrow 0$, так как там будет просто равновесный сверхпроводник без какого-либо заряда квазичастиц. Тогда решением уравнения (57.9) будет функция

$$Q \propto e^{-x/\lambda_Q}. \quad (57.10)$$

Соответственно, в сверхпроводнике возникнет электрическое поле, которое, согласно (57.4), будет равно

$$E = E_0 \exp(-x/\lambda_Q), \quad (57.11)$$

³⁾ См., например, [7].

где E_0 — электрическое поле на границе. Если пренебречь андреевским отражением, а при $T \simeq T_c$ это можно сделать, поле E_0 на границе будет равно электрическому полю в нормальном металле, т. е. при $x < 0$.

Таким образом, λ_Q имеет смысл глубины проникновения электрического поля в сверхпроводник. Согласно (57.11), электрическое поле экспоненциально затухает на расстоянии λ_Q от границы. Оценим глубину проникновения электрического поля. Согласно (57.7), $\lambda_Q \propto \tau_Q^{1/2}$, а τ_Q , согласно (54.1), пропорционально Δ^{-1} . Поскольку $\Delta \propto (1 - T/T_c)^{1/2}$, имеем

$$\lambda_Q \propto (1 - T/T_c)^{-1/4}, \quad (57.12)$$

т. е. λ_Q расходится при $T \rightarrow T_c$. Таким образом, при достаточной близости к критической температуре электрическое поле может проникнуть в сверхпроводник на большое расстояние. Поскольку характерным значением для τ_Q является величина порядка $(10^{-10} \div 10^{-9})$ с, то для $v_F \sim 10^8$ см/с и, скажем, для $l \sim 10^{-5}$ см имеем $\lambda_Q \sim (1 \div 10)$ мкм, т. е. глубина проникновения электрического поля может превзойти все характерные длины сверхпроводника. Если не подходить слишком близко к T_c , то можно получить $\lambda_Q \gg \xi(T)$.

Итак, подведем итоги. Если через границу между нормальным металлом и сверхпроводником течет электрический ток, то в сверхпроводнике возникает электрическое поле. Оно затухает от границы в глубину сверхпроводника на расстоянии λ_Q , которое может быть макроскопически большим. В этой области существует дивергенция нормального тока ∇j_n (см. (57.5)). Но полный ток $j = j_s + j_n$ (где j_s — плотность сверхтока), конечно, в стационарных условиях не имеет дивергенции. Поэтому имеем

$$\nabla j_n = -\nabla j_s,$$

т. е. в области сверхпроводника длиной λ_Q вблизи границы с нормальным металлом происходит преобразование нормального тока в сверхток. Это можно интерпретировать еще и так. Согласно рис. 57.1, в этой «неравновесной» области $\mu_n > \mu_s$. Поэтому можно

сказать, что здесь идет «химическая реакция» по превращению вещества с химическим потенциалом μ_n в вещество с химическим потенциалом μ_s .

Все рассмотрение этого параграфа относится к случаю, когда поток электронов идет из нормального металла в сверхпроводник. Однако вся картина оказывается симметричной при обращении направления тока. Только теперь из нормального металла на сверхпроводник налетают дырки, а отражаются по-андреевски электроноподобные квазичастицы. А разбаланс заряда элементарных возбуждений сверхпроводника в области порядка λ_Q около границы такой, что заселенность дырочной ветви больше, чем электронной.

Задача 57.1. Исходя из требования электронейтральности было получено существование электрического поля E в сверхпроводнике вблизи его границы с нормальным металлом, если через эту границу идет электрический ток. Согласно (57.11), $\operatorname{div} E \neq 0$. Но тогда в области порядка λ_Q около границы должна существовать объемная плотность электрического заряда ρ , определяемая уравнением Пуассона $\operatorname{div} E = 4\pi\rho$. Не противоречит ли это исходному предположению об электронейтральности?

Решение. Покажем, что объемная плотность заряда ρ , которая действительно возникнет в переходной области размером λ_Q , будет на много порядков меньше объемной плотности заряда квазичастиц eQ . Уравнение Пуассона можно написать приближенно в виде $E/\lambda_Q \simeq 4\pi\rho$, или $\rho \simeq E/(4\pi\lambda_Q)$. С другой стороны, согласно (57.5), $Q \simeq j_n\tau_Q/(e\lambda_Q) = \sigma\tau_Q E/(e\lambda_Q)$, откуда $\rho/(eQ) \simeq (4\pi\tau_Q\sigma)^{-1} = (8\pi\tau_Q e^2 N(0) l v_F / 3)^{-1}$. Если принять, что $\tau_Q \sim 10^{-10}$ с, $N(0) \sim 10^{33}$ эрг $^{-1}$ см $^{-3}$, $l \sim 10^{-8}$ см, $v_F \sim 10^8$ см/с, то даже в этом случае будет $\rho/(eQ) \sim 10^{-5}$.

§ 58. Экспериментальное исследование неравновесного состояния сверхпроводника около NS -границы

58.1. Опыты Ю и Мерсеро. В этом разделе будут описаны результаты необычайно изящных экспериментов Ю и Мерсеро [174]. Этими опытами было однозначно показано, что действительно в области сверхпроводника, прилегающей к границе с нормальным металлом, когда через эту границу идет электриче-

ский ток, электрохимические потенциалы сверхпроводящих электронов и нормальных электронов отличаются друг от друга.

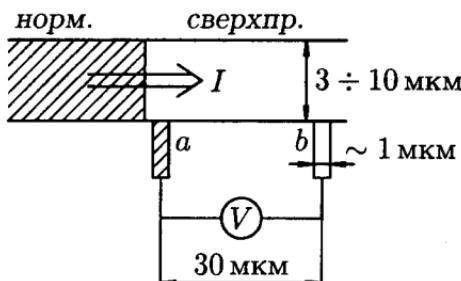


Рис. 58.1. Схема опыта Ю и Мерсеро [174]. Потенциометрические выводы a и b подсоединенны к вольтметру. Если a — нормальный вывод, вольтметр показывает разность электрохимических потенциалов квазичастиц и конденсата. Если a — сверхпроводящий вывод, вольтметр ничего не показывает. Показания вольтметра не зависят от того, является вывод b нормальным или сверхпроводящим.

Пленка тантала толщиной около 250 \AA имеет критическую температуру около 4.1 K . Если часть этой пленки с помощью процесса анодизации сделать более тонкой (около 100 \AA), то критическая температура этой части пленки упадет до 3.5 K . Если температура пленки будет лежать между 3.5 K и 4.1 K , то одна часть пленки будет нормальной, а другая сверхпроводящей. Если теперь пропустить ток через пленку, то, согласно (57.3), электрохимический потенциал сверхпроводящих электронов φ_{ex_s} будет постоянным в пространстве. Поэтому сверхпроводящие потенциометрические выводы a и b (рис. 58.1) подадут на зажимы вольтметра равные электрохимические потенциалы, и вольтметр ничего не покажет. Если, однако, потенциометрический вывод a , непосредственно прилежащий к NS -границе, сделать из нормального металла, то он подаст на левый зажим вольтметра электрохимический потенциал нормальных электронов, который здесь отличается от φ_{ex_s} . Это отличие релаксирует на расстоянии λ_Q от границы. Если расстояние между выводами a и b больше λ_Q , то вывод b подаст на правый зажим вольтметра электрохимический потенциал сверхпроводящих электронов (который здесь, в усло-

виях равновесия, равен электрохимическому потенциалу квазичастиц). В результате вольтметр покажет разность между электрохимическими потенциалами нормальных и сверхпроводящих электронов в непосредственной близости от NS -границы.

Результат эксперимента, когда вывод a — нормальный, показан на рис. 58.2.

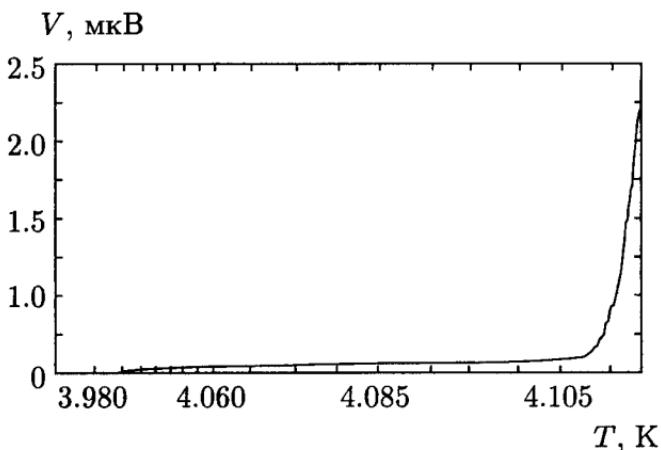


Рис. 58.2. Результат опыта Ю и Мерсеро [174]. Вольтметр измеряет разность электрохимических потенциалов сверхпроводящих и нормальных электронов в области неравновесности.

Однако наиболее элегантным оказался следующий эксперимент тех же авторов. Расположив оба потенциометрических вывода в неравновесной области сверхпроводника близко друг от друга (как показано на рис. 58.3), но так, чтобы к NS -границе прилегал сверхпроводящий вывод b , а нормальный вывод a был бы несколько удален от границы, Ю и Мерсеро наблюдали изменение знака показаний вольтметра при том же направлении тока через пленку.

Результаты этих опытов прекрасно подтверждают основные представления, развитые в предыдущих параграфах.

Действительно, если, как показано на рис. 58.3, ток в пленке течет из S в N , то в неравновесной области сверхпроводника око-

ло границы происходит «химическая реакция»: сверхпроводящие электроны \rightarrow нормальные электроны, т. е. химический потенциал μ_s в этой области больше химического потенциала μ_n . Поэтому ток в вольтметре пойдет от вывода b к выводу a (как показано на рис. 58.3). По этой же причине ток в вольтметре тоже пойдет от b к a , и показания вольтметра изменят знак.

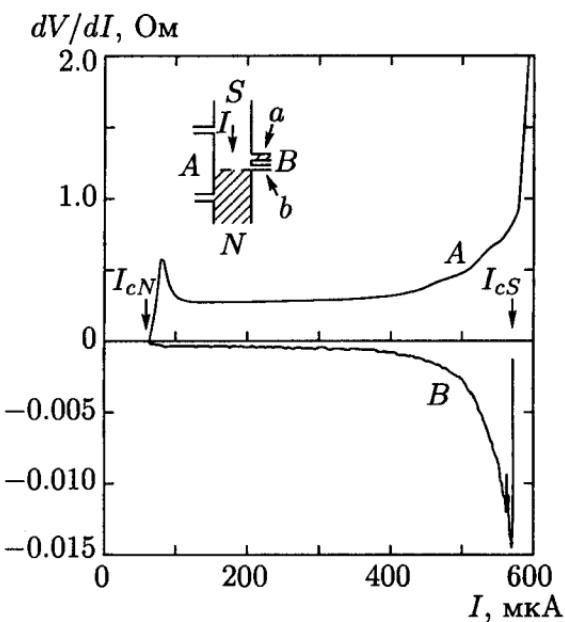


Рис. 58.3. Результаты опыта Ю и Мерсеро [174]: дифференциальное сопротивление как функция тока через пленку. Напряжение между выводами B имеет знак, противоположный знаку напряжения между выводами A . Ток идет от сверхпроводящего вывода к нормальному (заштрихован).

58.2. Избыточное сопротивление NS -границы. Другим интересным проявлением неравновесных процессов, возникающих в сверхпроводнике вблизи NS -границы, когда через эту границу течет ток, является избыточное электрическое сопротивление этой границы. Это очень легко понять физически. Дей-

ствительно, рассмотрим для определенности случай, когда поток электронов идет из нормального металла N в сверхпроводник S . Те электроны в N , энергия которых меньше щели $\Delta(T)$ в S , отразятся по-андреевски, и их ток превратится в ток сверхпроводящих электронных пар. Это произойдет на расстоянии $\xi(T)$ от границы, и никакого вклада в сопротивление этот процесс не даст. Иное дело — те электроны в N , энергия которых больше щели $\Delta(T)$. Они, попадая в S , оказываются на электронной ветви спектра элементарных возбуждений сверхпроводника. Как было показано в предыдущем параграфе, это влечет за собой появление разбаланса заряда квазичастиц Q и появление электрического поля E , которое затухает на расстоянии λ_Q вглубь сверхпроводника. Однако существование электрического поля в области λ_Q сверхпроводника около NS -границы означает, что эта область дает вклад в общее падение напряжения, т. е. в полное сопротивление цепи. Это и будет так называемое избыточное сопротивление NS -границы. Если бы все электроны, переносящие ток, испытывали ускорение под действием этого электрического поля, то избыточное сопротивление было бы просто равно

$$R_{изб} = \rho \lambda_Q / S,$$

где ρ — удельное сопротивление сверхпроводника в нормальном состоянии, а S — площадь его поперечного сечения. Учтем, однако, теперь, что не все электроны ускоряются под действием поля E . Действительно, те электроны, которые находятся в конденсате, как мы уже видели, под действием поля E не ускоряются, так как действие поля E в точности скомпенсировано действием градиента химического потенциала сверхпроводящих электронов $\nabla \mu_s$. Этим свойством будут обладать все электроны, идущие из N в S , с энергией, меньшей энергии щели $\Delta(T)$ (отражающиеся по-андреевски), а также доля квазичастиц с энергией $E_k \geq \Delta(T)$. Эта доля определяется тем обстоятельством, что инжектированный из N в S электрон, оказавшись в S и имея заряд q_k , «потерял» часть заряда $1 - q_k$, которая ушла в конденсат. Эта часть заряда проходит NS -границу по-андреевски. Именно эта

часть заряда $1 - q_k$ и не участвует в создании избыточного сопротивления. Поэтому избыточное сопротивление следует писать в виде

$$R_{изб} = Z(T)\rho\lambda_Q/S,$$

где коэффициент $Z(T)$ учитывает последнее обстоятельство, т. е. это доля всех электронов, которые переходят NS -границу не по-андреевски. Ясно, что при $T \rightarrow 0$ все электроны идут через NS -границу по-андреевски, и $Z(T \rightarrow 0) \rightarrow 0$. Наоборот, при $T \rightarrow T_c$ имеем $\Delta(T) \rightarrow 0$, и подавляющее большинство электронов идет через NS -границу не по-андреевски, т. е. с созданием сопротивления. При этом $Z(T \rightarrow T_c) \rightarrow 1$. Поэтому $R_{изб}(T)$ будет представлять собой монотонную функцию температуры:¹⁾

$$R_{изб}(T \rightarrow 0) = 0, \quad R_{изб}(T \rightarrow T_c) = \rho\lambda_Q/S.$$

Температурная зависимость $R_{изб}$ в последнем случае ($T \rightarrow T_c$) определяется температурной зависимостью λ_Q (57.12):

$$\lambda_Q \propto (1 - T/T_c)^{-1/4}.$$

Этот вывод неплохо согласуется с экспериментом.

В качестве примера на рис. 58.4 приведены результаты опытов с семью разными образцами типа SNS . По оси ординат отложено избыточное сопротивление NS -границы.

58.3. Центры проскальзывания фазы. В предыдущих параграфах этой главы были рассмотрены стационарные неравновесные процессы. Сейчас мы познакомимся с нестационарными неравновесными процессами.

В § 18, где рассматривался критический ток в тонкой пленке, было показано, что при критическом токе распаривания не происходит фазового перехода в нормальное состояние. Было показано, что при $I = I_c$ просто становится недостаточно сверхпроводящих носителей (т. е. куперовских пар), готовых перенести

¹⁾Расчету $Z(T)$ посвящено несколько теоретических работ. См., например, работы [175, 176].

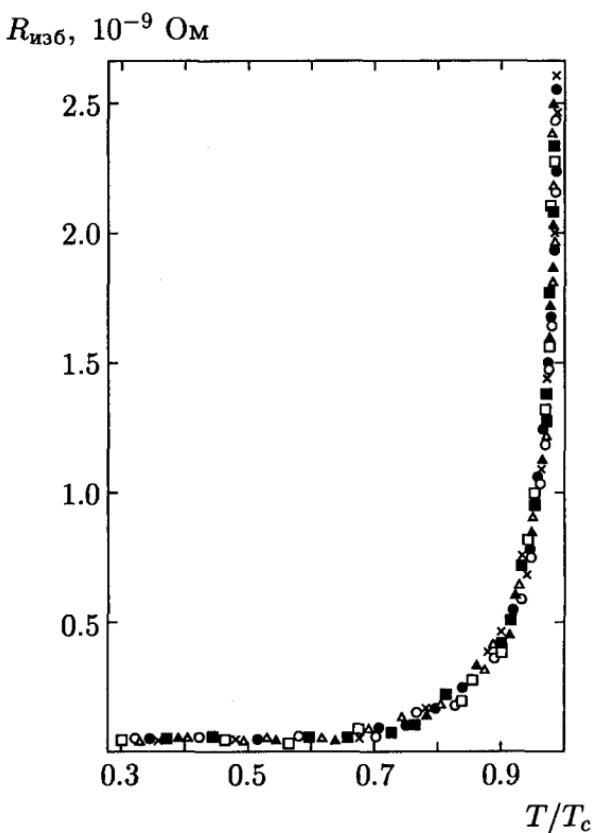


Рис. 58.4. Температурная зависимость избыточного сопротивления NS -границы в сэндвичах $\text{Ta} - \text{Cu} - \text{Ta}$ [177] по семи образцам.

заданный ток I . Значит, при $I > I_c$ возникает какое-то специфическое резистивное состояние, с которым мы сейчас и познакомимся.

Обратимся сперва к результатам эксперимента. Наиболее удобно это резистивное состояние изучать на квазиодномерных объектах, т. е. на тонких длинных сверхпроводящих нитях, диаметр которых $d \leq \xi(T)$. В этом случае размер нити столь мал, что в ней не сможет поместиться абрикосовый вихрь с нормальной сердцевиной (радиуса порядка $\xi(T)$), и изучаемое резистивное

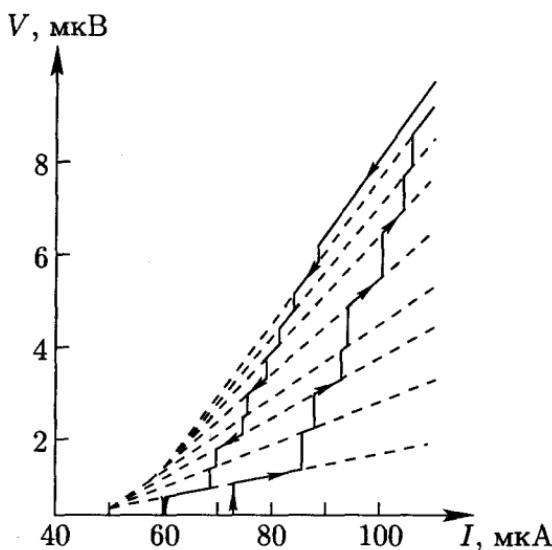


Рис. 58.5. Вольт-амперная характеристика монокристаллической оловянной нити: длина 0.8 мм, площадь поперечного сечения 1.93 мкм² [178].

состояние не будет маскироваться эффектами, характерными для резистивного состояния в сверхпроводниках второго рода. На рис. 58.5 приведена вольт-амперная характеристика тонкого монокристаллического вискера из олова. Видно, что напряжение на проводнике нарастает ступенями, причем после каждого скачка напряжения сопротивление образца (наклон характеристики) увеличивается.

Такое поведение образцов в резистивном режиме объясняется моделью, предложенной Скочполом, Бисли и Тинкхамом [179]. Это так называемая модель центров проскальзывания фазы.

Представим себе, что в каком-то месте нити критический ток немножко меньше, чем в других местах этой нити. Тогда при увеличении тока через нить именно в этом месте будет впервые достигнут критический ток. При дальнейшем увеличении тока

возникает движение нормальных электронов, а это приводит к появлению электрического поля, которое ускорит сверхпроводящие электроны до критической скорости. Пары распадутся, модуль параметра порядка $|\psi|$ в этом месте станет равным нулю, весь ток будет переноситься только нормальной компонентой. Но образование электронных пар по-прежнему выгодно, поэтому снова возникает $|\psi|$, снова часть тока будет переноситься сверхпроводящими электронами, т. е. сверхтоком, и весь процесс будет повторяться. При каждом таком цикле разность фаз волновых функций сверхпроводящих электронов с обеих сторон от рассматриваемого места будет меняться на 2π , и поэтому это место называется центром проскальзывания фазы. Размер этого центра — это, конечно, размер области, в которой происходит пульсация $|\psi|$, т. е. порядка $2\xi(T)$.

В момент, когда $|\psi| = 0$, эта область находится в нормальном состоянии, и поэтому электрическое поле проникает в прилежащие к ней области сверхпроводника на расстояние порядка λ_Q (см. § 57). Поэтому при возникновении одного центра проскальзывания фазы появляется сопротивление $\rho \cdot 2\lambda_Q/S$, где ρ — удельное сопротивление материала нити, S — площадь ее поперечного сечения. Падение напряжения на этом сопротивлении будет давать только нормальная компонента тока $I_n = I - I_s$. Усредним это выражение по времени: I — заданный постоянный ток и от времени не зависит; сверхток I_s пульсирует во времени между I_c и нулем. Примем поэтому, что $\bar{I}_s = \beta I_c$, где $\beta \sim 0.5$. Тогда для среднего напряжения на одном центре проскальзывания фазы имеем

$$\bar{V} = 2\lambda_Q \rho (I - \beta I_c)/S. \quad (58.1)$$

Эта формула, несмотря на свою простоту, хорошо описывает результаты экспериментов.

При дальнейшем увеличении тока появится второй центр проскальзывания фазы, потом третий и т. д. Каждый раз при появлении такого центра будет скачком увеличиваться полное напряжение на нити, и крутизна вольт-амперной характеристики

будет увеличиваться, так как каждый раз будут включаться все новые и новые резистивные участки. Все это можно проследить на рис. 58.5.

§ 59. Неравновесное усиление сверхпроводимости

В этом параграфе будет рассмотрен случай, когда отклонение от равновесной функции распределения является симметричным, т. е. неравновесное распределение квазичастиц на обеих ветвях спектра элементарных возбуждений одинаково. Теперь, в противоположность всем ранее рассмотренным случаям неравновесных процессов, отклонение от равновесия сопровождается изменением энергетической щели Δ .

Создание симметричного неравновесного распределения можно осуществить, скажем, посредством электромагнитного облучения сверхпроводника на частоте $\omega < 2\Delta/\hbar$. Тогда энергии квантов, падающих на сверхпроводник, будет недостаточно для разрыва пар, но хватит, чтобы переместить элементарные возбуждения на более высокие уровни спектра элементарных возбуждений. Такое неравновесное распределение квазичастиц должно привести к увеличению щели и к повышению критической температуры.

Действительно, освобождая нижние уровни спектра элементарных возбуждений, мы открываем возможность электронным парам конденсата совершать переходы в эти состояния k -пространства, и тем самым увеличиваем число слагаемых в сумме (45.14), определяющей энергетическую щель. Существует ряд экспериментальных результатов, подтверждающих эти представления. Так, в работе [180] было обнаружено увеличение критического тока сверхпроводящих мостиков, подвергаемых облучению на сверхвысоких частотах. Теоретическое рассмотрение этих эффектов содержится в работах Элиашберга [181].

§ 60. Продольный термоэлектрический эффект (эффект Зеебека) в сверхпроводниках

Долгое время считалось, что в сверхпроводниках термоэлектрические эффекты отсутствуют. Однако это не так. Чтобы разобраться в этом, рассмотрим сперва продольный термоэлектрический эффект в нормальном металле.

Пусть два конца массивного куска нормального металла имеют разные температуры T_1 и T_2 , т. е. внутри металла существует градиент температуры ∇T . Это значит, что на свободные электроны металла действует сила, стремящаяся переместить электроны от более нагретого конца к более холодному. Но накопление противоположных зарядов на противоположных концах образца приводит к появлению электрического поля внутри образца, которое будет действовать на электроны в противоположном направлении (от холодного конца к нагретому). В стационарных условиях эти силы уравниваются, и между концами образца устанавливается постоянная разность потенциалов V , которая называется термоэлектродвижущей силой (термо-ЭДС):

$$V = \alpha(T_1 - T_2),$$

здесь α — абсолютная дифференциальная термо-ЭДС металла.

Процесс переноса тепла в сверхпроводнике сопровождается совсем другими электронными явлениями.¹⁾ Пусть опять два конца массивного куска металла, на этот раз сверхпроводника, находятся при разных температурах T_1 и T_2 . Снова под действием градиента температуры ∇T нормальные возбуждения сверхпроводника будут испытывать силу, которая создаст ток нормальных возбуждений:

$$\mathbf{j}_n = \sigma \alpha \nabla T, \quad (60.1)$$

где σ — проводимость сверхпроводника в нормальном состоянии. В ответ немедленно возникнет противоток сверхпроводящей

¹⁾ См. обзор [182].

компоненты \mathbf{j}_s , который полностью скомпенсирует нормальный ток \mathbf{j}_n . Действительно, согласно (60.1), ток \mathbf{j}_n — потенциальный ток, т. е. $\text{rot } \mathbf{j}_n = 0$. Это значит, что если полный ток \mathbf{j} равен

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_n + \mathbf{j}_s,$$

то $\text{rot } \mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{j}_s$. Сверхток \mathbf{j}_s должен удовлетворять в стационарных условиях уравнению Лондонов. Взяв ротор от обеих частей (5.17), получим

$$\text{rot } \Lambda \mathbf{j}_s = -\frac{1}{c} \mathbf{H},$$

значит, в нашем случае справедливо уравнение

$$\text{rot } \Lambda \mathbf{j} = -\frac{1}{c} \mathbf{H}. \quad (60.2)$$

Используя теперь уравнения Максвелла $\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$ и $\text{div } \mathbf{H} = 0$, мы приходим к хорошо известному уравнению для магнитного поля:

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{H},$$

из которого следует эффект Мейсснера – Оксенфельда. Таким образом, и при потоке тепла через сверхпроводник полный ток в глубине массивного однородного изотропного сверхпроводника должен равняться нулю:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_n + \mathbf{j}_s = 0,$$

т. е. $\mathbf{j}_n = -\mathbf{j}_s$.

Это значит, что нормальные возбуждения сверхпроводника, гонимые градиентом температуры, подходя к краю сверхпроводника, превращаются в сверхпроводящие носители, т. е. электронные пары, и текут обратно, образуя противоток \mathbf{j}_s . Очень наглядно этот процесс можно изобразить с помощью эквивалентной схемы (рис. 60.1). Будем считать, что нормальные возбуждения испытывают действие электродвижущей силы E_T , созданной разностью температур:

$$E_T = \alpha(T_1 - T_2).$$

Под действием этой ЭДС в цепи возникает ток $I_n = E_T / R_n$, который протекает обратно по сверхпроводящему участку в виде сверхтока I_s . Теперь понятно, что вольтметр, изображенный на рис. 60.1, ничего не покажет, так как он защунтирован сверхтоком. Этим и объясняется, почему долгое время считалось, что в сверхпроводнике термоэлектрические эффекты отсутствуют.

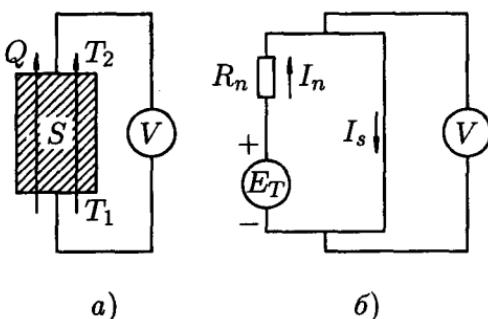


Рис. 60.1. а) Сверхпроводник, через который идет поток тепла Q , $T_1 > T_2$; б) эквивалентная схема сверхпроводника, концы которого имеют разную температуру (R_n — сопротивление образца в нормальном состоянии, E_T — термо-ЭДС, действующая на нормальные возбуждения).

В § 62 мы вернемся к обсуждению продольного термоэлектрического эффекта в сверхпроводниках II рода со слабым пиннимингом и в джозефсоновских переходах, рассмотрев вначале обнаруженный первым в 1974 г. термоэлектрический эффект в биметаллическом сверхпроводящем кольце.

§ 61. Сверхпроводящая «термопара» и магнитный поток, индуцированный потоком тепла

Сейчас мы увидим, что термоэлектрические эффекты в сверхпроводниках все-таки можно наблюдать. Рассмотрим два массивных сверхпроводника из разных материалов, которые приведены в контакт друг с другом и образуют замкнутый контур, как показано на рис. 61.1. Пусть области контактов находятся при разных температурах T_1 и T_2 .

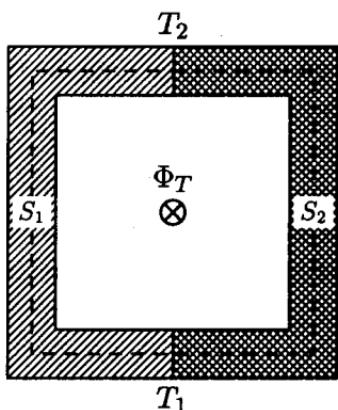


Рис. 61.1. Сверхпроводящая «термопара». Во внутренней полости возникает магнитный поток Φ_T , пропорциональный разности температур ($T_1 - T_2$).

В каждой из половинок S_1 и S_2 возникает свой ток $j_n = \sigma\alpha\nabla T$. Ответный сверхток в глубине сверхпроводника $j_s = -j_n$ и, согласно второму уравнению Гинзбурга – Ландау (14.18), может быть записан в виде

$$\mathbf{j}_s = \frac{\hbar n_s e}{2m} \nabla \theta - \frac{e^2}{mc} n_s \mathbf{A}, \quad (61.1)$$

где n_s — плотность сверхпроводящих электронов, e и m — соответственно заряд и масса свободного электрона, θ — фаза волновой функции теории ГЛ, \mathbf{A} — векторный потенциал.

Учитывая (60.1), имеем

$$\nabla \theta = \frac{2m}{\hbar n_s e} (-\sigma\alpha\nabla T) + \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A}. \quad (61.2)$$

Проинтегрируем теперь это уравнение по штриховому контуру (рис. 61.1), проходящему внутри нашего биметаллического сверхпроводящего кольца далеко (по сравнению с глубиной проникновения λ) от его краев. Требование однозначности волновой функции теории Гинзбурга – Ландау приводит к известному уже равенству:

$$\oint \nabla \theta d\mathbf{l} = 2\pi n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (61.3)$$

Интегрируя правую часть равенства (61.2) и используя (61.3), имеем

$$2\pi n = -\frac{2m}{\hbar e} \int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{\sigma_1 \alpha_1}{n_{s1}} - \frac{\sigma_2 \alpha_2}{n_{s2}} \right) dT + \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0}.$$

Это значит, что полный магнитный поток внутри нашего биметаллического кольца можно представить в виде

$$\Phi = \Phi_0 n + \Phi_T, \quad (61.4)$$

где

$$\Phi_T = \Phi_0 \frac{m}{\pi e \hbar} \int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{\sigma_1 \alpha_1}{n_{s1}} - \frac{\sigma_2 \alpha_2}{n_{s2}} \right) dT. \quad (61.5)$$

Индексы 1 и 2 в подынтегральном выражении относятся соответственно к сверхпроводникам S_1 и S_2 .

Из выражений (61.4) и (61.5) следует, что даже в том случае, когда в биметаллическом кольце нет замороженного магнитного потока, т. е. $n = 0$, все равно при приложении разности температур к местам контактов S_1 и S_2 внутри кольца возникнет индуцированный магнитный поток Φ_T . Этот поток создается сверхтоком, который возникает на внутренней поверхности биметаллического кольца. Если в интервале температур $T_1 < T < T_2$ величины σ , α и n_s можно считать не зависящими от температуры, формула (61.5) упрощается:

$$\Phi_T = \Phi_0 \frac{m}{\pi e \hbar} \left(\frac{\sigma_1 \alpha_1}{n_{s1}} - \frac{\sigma_2 \alpha_2}{n_{s2}} \right) \Delta T,$$

где $\Delta T = T_2 - T_1$.

Если предположить, что $\sigma \sim 10^7 (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}$, $\alpha \sim 10^{-6} \text{ В/К}$, $n_s \sim 10^{28} \text{ м}^{-3}$, то для $\Phi_T / \Delta T$ получим величину порядка $10^{-5} \Phi_0$ на кельвин. Измерение такого потока находится на пределе возможности сквада.

При приближении к T_c эффект будет увеличиваться, так как плотность сверхпроводящих электронов при этом стремится к

нулю. Подобные эксперименты были проведены [183, 184], и, действительно, наблюдался магнитный поток Φ_T , индуцированный градиентом температуры в биметаллическом кольце. Величина его, однако, оказалась существенно больше теоретической оценки. Причины такого расхождения пока неясны.

§ 62. Термоэлектрические эффекты в джозефсоновских переходах и сверхпроводниках II рода со слабым пиннингом

В этом параграфе мы покажем, что индуцирование сверхпроводящего тока потоком тепла может приводить не только к появлению измеримого магнитного потока, но и к возникновению заметного термоэлектрического напряжения. Это напряжение является следствием возбуждения джозефсоновской генерации в мостике слабой связи, или движения магнитного потока в сверхпроводниках со слабым пиннингом. В обоих случаях сверхпроводящая система должна иметь довольно низкий критический ток, чтобы достижимые в эксперименте термоэлектрические токи могли приводить к диссипации, т. е. к изменению во времени сверхпроводящей разности фаз.

62.1. Джозефсоновский *SNS*-переход в потоке тепла.

В джозефсоновских переходах можно наблюдать сильные и интересные термоэлектрические явления. Наиболее ярко они проявляются в переходах типа сверхпроводник – нормальный металл – сверхпроводник (*SNS*). Как будет видно из дальнейшего, это связано с тем, что в таком типе джозефсоновских переходов фазовая когерентность двух сверхпроводящих обкладок может осуществляться через довольно толстый слой нормальной прослойки (толщиной порядка 10 мкм). Такие переходы имеют очень малое значение характерного напряжения V_c и способны переносить за счет нормальных термоэлектрических токов необходимые потоки тепла при малых разностях температур на берегах сэндвича. Эти термоэлектрические процессы мы рассмотрим в данном разделе, а в следующих двух разделах будут обсуждаться термо-

электрические явления в протяженных джозефсоновских переходах и сверхпроводниках II рода в присутствии магнитного поля.

Пусть джозефсоновский переход типа *SNS* помещен в поток тепла (рис. 62.1, *a*). Снова зададимся вопросом: «Что покажет вольтметр, подключенный к такому совершенно автономному переходу?» Эквивалентная схема этого перехода подскажет ответ (рис. 62.1, *б*). Здесь в эквивалентную схему джозефсоновского перехода (рис. 22.1) включен источник термо-ЭДС $E_T = \alpha(T_1 - T_2)$, где α — абсолютная дифференциальная термо-ЭДС материала нормальной прослойки, а T_1 и T_2 — температуры сверхпроводящих обкладок в местах, непосредственно примыкающих к нормальному прослойке. Из рис. 62.1, *б* очевидно, что термо-ЭДС E_T создает в замкнутой цепи ток, который течет по нормальному участку в виде нормального тока I_n , а по собственно джозефсоновскому участку — в виде сверхтока $I_s = I_c \sin \varphi$, где φ — разность фаз волновой функции сверхпроводящих электронов у *S*-обкладок перехода. Здесь I_c — критический ток перехода.

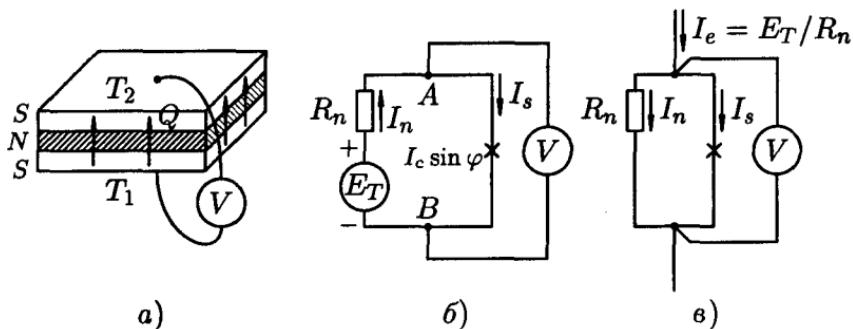


Рис. 62.1. *а*) Джозефсоновский *SNS*-переход в потоке тепла, перепад температур на нормальной прослойке равен $(T_1 - T_2)$; *б*) эквивалентная схема такого перехода, E_T — термо-ЭДС, генерируемая потоком тепла в нормальной прослойке; *в*) схема, соответствующая уравнению (62.5).

Напряжение V_{AB} между точками *A* и *B* (рис. 62.1, *б*) должно удовлетворять уравнению

$$E_T - I_n R_n = V_{AB}, \quad (62.1)$$

где R_n — сопротивление нормального слоя. С другой стороны, для точек A и B должен выполняться первый закон Кирхгофа:

$$I_n = I_s. \quad (62.2)$$

Наконец, для участка цепи с джозефсоновским током должны быть справедливы известные соотношения Джозефсона:

$$I_s = I_c \sin \varphi, \quad (62.3)$$

$$2eV_{AB} = \hbar \frac{d\varphi}{dt}. \quad (62.4)$$

Уравнения (62.1) – (62.4) полностью определяют нашу задачу. Они элементарно сводятся к уравнению

$$\frac{\hbar}{2eR_n} \frac{d\varphi}{dt} + I_c \sin \varphi = \frac{E_T}{R_n}. \quad (62.5)$$

Но это уравнение — хорошо известное нам уравнение джозефсоновского перехода в резистивной модели (рис. 62.1, в), когда в переход вводится от внешнего источника некоторый ток (в данном случае равный E_T/R_n), который распределяется по двум ветвям: собственно джозефсоновской ($I_c \sin \varphi$) и по нормальному участку $\left(\frac{\hbar}{2eR_n} \frac{d\varphi}{dt} \right)$. При этом температуры S -обкладок, конечно, равны. Поведение такой системы хорошо известно (см. § 22). Если внешний ток меньше I_c , он течет только по сверхпроводящему, т. е. джозефсоновскому, участку, и напряжения между точками A и B нет. Вольтметр ничего не покажет. Если же этот ток станет больше I_c , то на переходе возникнет пульсирующее напряжение с частотой $\omega = 2e\bar{V}_{AB}/\hbar$, где \bar{V}_{AB} — постоянная составляющая этого пульсирующего напряжения, которую и показывает вольтметр.

Теперь мы можем полностью описать поведение джозефсонового SNS -перехода, находящегося в потоке тепла. До тех пор пока разность температур на двух сторонах нормальной проложки $\Delta T = T_1 - T_2$ меньше некоторой критической величины

$$\Delta T_c = V_c/\alpha = I_c R_n / \alpha, \quad (62.6)$$

вольтметр, подключенный к сверхпроводящим обкладкам, ничего не покажет. Если же ΔT станет больше ΔT_c , то переход начнет генерировать пульсирующее напряжение, частота которого ω будет равна, согласно (22.7),

$$\omega = \frac{2e}{\hbar} R_n [(\alpha \Delta T / R_n)^2 - I_c^2]^{1/2}. \quad (62.7)$$

Эти термоэлектрические явления были предсказаны в работе Аронова и Гальперина [185].

Из выражения (62.6) ясно, что такие эффекты можно было бы наблюдать, если бы удалось сделать критическую разность температур ΔT_c существенно малой. Но для этого должно быть малым характерное напряжение перехода $V_c = I_c R_n$. Нетрудно сделать *SNS*-переход с $V_c \sim 10^{-13}$ В. Считая $\alpha \sim 10^{-8}$ В/К, имеем $\Delta T_c \sim 10^{-5}$ К. Такую разность температур, конечно, нетрудно получить.

Экспериментальное исследование термоэлектрических эффектов в джозефсоновских *SNS*-переходах [186] полностью подтвердило изложенные выше представления. Экспериментально наблюдалась нелинейная зависимость термоэлектрического напряжения от потока тепла, причем напряжение появлялось выше некоторой критической величины разности температур на переходе $(\delta T)_c$, что полностью аналогично возникновению напряжения на вольт-амперной характеристике джозефсоновского перехода при токе выше критического. Тепловой аналог нестационарного эффекта Джозефсона был также вскоре обнаружен в работе [187], в которой непосредственно наблюдалась джозефсоновская генерация, возникающая в *SNS*-переходе под действием потока тепла. В этой же работе приведены результаты по наблюдению ступенек Шапиро на зависимости термоэлектрического напряжения от потока тепла через *SNS*-переход, помещенный в переменное поле.

62.2. Влияние магнитного поля на термоэлектрические явления в джозефсоновских *SNS*-переходах. Пусть теперь джозефсоновский *SNS*-переход, находящийся в потоке

тепла, помещен в магнитное поле, параллельное его поверхности (плоскость xz). В этом случае мы можем оказаться свидетелями интересных и красивых явлений. Действительно, учтем протяженность перехода, скажем, вдоль оси x . Его размер в этом направлении пусть будет равен w . Тепловой поток направлен перпендикулярно переходу вдоль оси y , а магнитное поле — вдоль оси z . Для распределенного вдоль оси x перехода тоже нетрудно начертить эквивалентную схему (рис. 62.2, a). Здесь L — это суммарная индуктивность обеих сверхпроводящих обкладок перехода, приходящаяся на единицу их площади, I_x — ток, текущий в направлении оси x в полосе единичной ширины. Подобно тому, как от эквивалентной схемы рис. 62.1, b мы перешли к схеме 62.1, c , здесь тоже можно от схемы 62.2, a перейти к эквивалентной схеме, изображенной на рис. 62.2, b , которая представляет собой эквивалентную схему протяженного джозефсоновского перехода с однородной температурой (т. е. без теплового потока), но с однородно введенным в него током от внешнего источника с плотностью $j_e = E_T/R_n$. Здесь R_n — сопротивление нормальной прослойки, приходящееся на единицу ее площади. Поведение такого объекта во внешнем магнитном поле, параллельном оси y , нам хорошо известно (см. § 24). Поэтому сразу можно предсказать [188], что критическая разность температур ΔT_c , при которой появляется напряжение на переходе, будет немонотонно зависеть от магнитного поля. В идеальном случае должна была бы наблюдаваться такая зависимость (см. (24.23)):

$$\Delta T_c = \frac{j_c R_n}{\alpha} \left| \frac{\sin(\pi\Phi/\Phi_0)}{\pi\Phi/\Phi_0} \right|, \quad (62.8)$$

где $\Phi = B_0 w d$. Здесь B_0 — магнитная индукция внешнего поля, w — размер перехода в направлении оси x , d — толщина нормального слоя. Подобные эксперименты были поставлены [189] и полностью подтвердили эти предсказания.

Был изготовлен джозефсоновский SNS -переход тантал — медь — тантал с толщиной медной прослойки около 10^{-3} см. Сопротивление нормального участка было около 10^{-9} Ом, а критический ток перехода — около 10^{-4} А. Таким образом, характер-

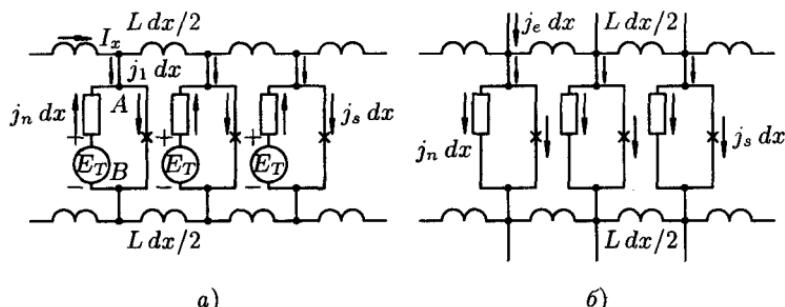


Рис. 62.2. а) Эквивалентная схема протяженного джозефсоновского SNS -перехода, через который идет поток тепла; б) другой вид эквивалентной схемы того же перехода (источник термо-ЭДС E_T заменен равномерно распределенным током j_s).

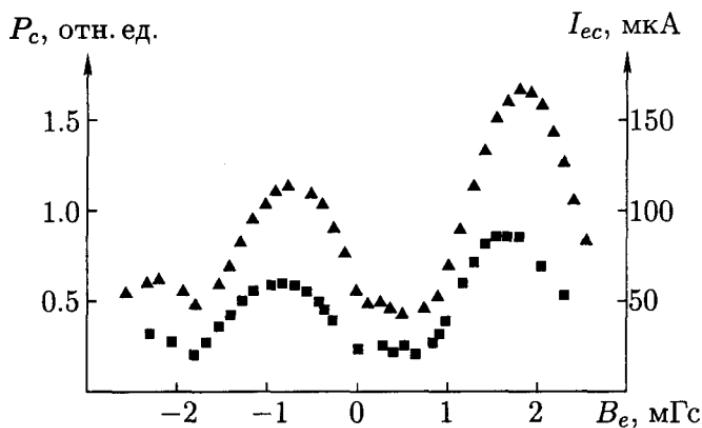


Рис. 62.3. Результат эксперимента [189] по изучению магнитотермоэлектрического эффекта в джозефсоновском переходе типа SNS .

ное напряжение перехода V_c было около 10^{-13} В. Напряжение на переходе измерялось с помощью ВЧ-сквида. Разность температур двух сторон нормального слоя ΔT была, очевидно, пропорциональна установившемуся тепловому потоку через переход, т. е. выделяющейся из нагревателя мощности. Критической разности температур ΔT_c соответствовала критическая мощность нагревателя P_c . На рис. 62.3 показан результат измерения критической мощности P_c в зависимости от внешнего магнитного поля, нало-

женного на переход параллельно его плоскости (верхняя кривая). Нижняя кривая дает зависимость максимального бездиссипативного тока через тот же переход от внешнего магнитного поля, когда все части перехода имеют одну и ту же температуру. Если подобрать масштаб P_c или I_{\max} так, чтобы эти два графика совпали хотя бы в одной точке, то окажется, что они совпадут и во всех остальных точках. Этим доказывается справедливость приведенных выше соображений.

Итак, сформулируем основные результаты.

Напряжение термоэлектрического происхождения появляется на джозефсоновском *SNS*-переходе начиная с некоторого порогового значения потока тепла через переход. Такое критическое значение потока тепла есть немонотонная функция магнитного поля. Это — тепловой аналог стационарного эффекта Джозефсона.

Появление термоэлектрического напряжения на переходе сопровождается возникновением джозефсоновской генерации с частотой, определяемой соотношением (62.7), что служит проявлением теплового аналога нестационарного эффекта Джозефсона.

62.3*. Термоэлектрические эффекты в смешанном состоянии сверхпроводников II рода со слабым пиннингом. Исследования термоэлектрических явлений в высокотемпературных сверхпроводниках в начале 90-х годов привели к обнаружению в ВТСП-кристаллах как продольных (Зеебека и Пельтье) так и поперечных (Нернста и Эттинггаузена) термоэлектрических эффектов [190, 191, 192, 193, 194]. Отсылая читателя за разъяснениями природы других эффектов к работам [192, 195, 196], остановимся здесь на обсуждении эффекта Зеебека в смешанном состоянии сверхпроводников II рода со слабым пиннингом. Этот эффект полностью аналогичен [197] появлению термоэлектрического напряжения в протяженных джозефсоновских контактах в магнитном поле, рассмотренного в предыдущем разделе. В присутствии противотоков нормальной и сверхтекучей компонент, вызванных потоком тепла (рис. 62.4) возникает взаимодействие между абрикосовскими вихрями и сверхпроводящим током (см.

§ 40).¹⁾ Вихри приходят в движение (что сопровождается возникновением напряжения), когда сверхпроводящий ток, индуцированный тепловым потоком, превышает критический ток пиннинга I_c .

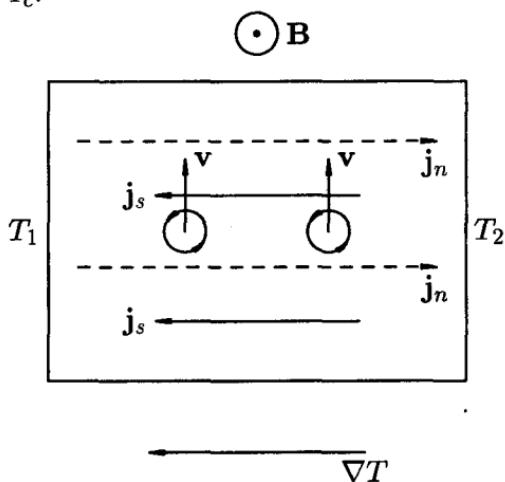


Рис. 62.4. Схематическое изображение возникновения движения вихрей под действием градиента температуры в сверхпроводнике II рода.

Возникает вопрос: почему эффект Зеебека в сверхпроводниках II рода не был обнаружен до открытия ВТСП? Дело в том, что, как это обсуждалось в § 42, в обычных сверхпроводниках величина энергетических барьеров пиннинга очень велика по сравнению с $k_B T$, поэтому всюду, кроме узкой окрестности T_c , необходимы очень большие токи, чтобы сорвать вихри с центров пиннинга. В ВТСП характерные значения $k_B T/U_0$ на порядки больше, поэтому крип потока и обратимые магнитные характеристики наблюдаются в этих материалах (особенно, в семействах на основе Bi и Tl) вплоть до температур, на десятки градусов меньших T_c . Понятно, что в этой области сравнительно небольшие термоэлектрические токи, связанные с разностью температур в несколько градусов на образце, способны вызвать движение вихрей и термоэлектрическое напряжение.

¹⁾ Важно заметить, что нормальная компонента тока I_n не оказывает влияния на движение вихрей. Дело в том, что индуктивное взаимодействие нормального тока с магнитным потоком несущественно, поскольку полный магнитный поток в измерительной цепи остается постоянным (подробнее см. в работе [198]).

Литература

- [1] Schmidt V.V. The Physics of Superconductors. Eds. Muller P., Ustinov A. V. Springer – Verlag, Berlin – Heidelberg, 1997.
- [2] Минеев В.П., Самохин К.В. Введение в теорию необычной сверхпроводимости. М.: Изд-во МФТИ, 1998.
- [3] Tinkham M. Introduction to Superconductivity. McGraw Hill, New York, 2nd edition, 1996.
- [4] Роуз-Инс А., Родерик Е. Введение в физику сверхпроводимости. М.: Мир, 1972.
- [5] Линтон Э. Сверхпроводимость. М.: Мир, 1971.
- [6] Тинкхам М. Введение в сверхпроводимость. М.: Атомиздат, 1980.
- [7] Де Жен П. Сверхпроводимость металлов и сплавов. М.: Мир, 1968.
- [8] Тилли Д.Р., Тилли Дж. Сверхтекучесть и сверхпроводимость. М.: Мир, 1977.
- [9] Kamerlingh Onnes H. *Leiden Comm.*, 1911, **122b**, 124.

- [10] Roberts B.W. *Journ. Phys. Chem. Ref. Data*, 1976, **5**, 581.
- [11] Deaver B.S., Jr., Fairbank W. M. *Phys. Rev. Lett.*, 1961, **7**, 43.
- [12] Doll R., N ä bauer M. *Phys. Rev. Lett.*, 1961, **7**, 51.
- [13] Josephson B.D. *Phys. Lett.*, 1962, **1**, 251.
- [14] Янсон И.К., Свистунов В.М., Дмитренко И.М. *ЖЭТФ*, 1965, **48**, 976.
- [15] Meissner W., Ochsenfeld R. *Naturwiss.*, 1933, **21**, 787.
- [16] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1972.
- [17] Мешковский А.Г., Шальников А.И. *ЖЭТФ*, 1947, **17**, 851.
- [18] Мешковский А.Г. *ЖЭТФ*, 1949, **19**, 55.
- [19] Bodmer A., Essmann V., Tra ü ble H. *Phys. Status Solidi*, 1972, (a) **13**, 471.
- [20] Bednorz J.G., Muller K.A. *Z. Phys.*, 1986, **64**, 189.
- [21] London F., London H. *Proc. Roy. Soc.*, 1935, **A149**, 71.
- [22] Pippard A.B. *Proc. Roy. Soc.*, 1953, **A216**, 547.
- [23] Newhouse V.L., Bremer J.W., Edwards H.H. *Proc. IRE*, 1960, **48**, 1395.
- [24] Лихарев К.К., Ульрих Б.Т. Системы с джозефсоновскими контактами. Основы теории. М.: Изд-во МГУ, 1978.
- [25] Van Duzer T., Turner C.W. Principles of Superconductive Devices and Circuits. Elsevier, New York, 1981.

- [26] Gittleman J.I., Rosenblum B. *Proc. IEEE*, 1964, **52**, 1138.
- [27] Гинзбург В.Л., Ландау Л.Д. *ЖЭТФ*, 1950, **20**, 1064.
- [28] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. 3-е изд., доп., М.: Наука, 1976, ч. I.
- [29] Лихарев К.К., Якобсон Л.А. *ЖТФ*, 1975, **45**, 1503.
- [30] Deutscher G., De Gennes P.G. Superconductivity. Ed. Parks R. D. Marcel Dekker, Inc., New York, 1969, v. 2, 1005.
- [31] Ivanov Z.G., Kupriyanov M.Yu., Likharev K.K., Snigirev O.V. *Journal de Physique*, 1978, **C-6**, 556.
- [32] Hauser J.J., Theuerer H.C. *Phys. Lett.*, 1965, **14**, 270.
- [33] Заварицкий Н.В. *ДАН СССР*, 1951, **78**, 665.
- [34] Паташинский А.З., Покровский В.Л. Флуктуационная теория фазовых переходов. М.: Наука, 1982.
- [35] Bhattacharya S., Higgins M.J. *Phys. Rev. Lett.*, 1993, **70**, 2617.
- [36] Uemura Y.J. et al. *Phys. Rev. Lett.*, 1991, **66**, 2665; Pistolesi F., Strinati G.C. *Phys. Rev.*, 1994, **B49**, 6356.
- [37] Overend et al. *Phys. Rev. Lett.*, 1994, **72**, 3238.
- [38] Шмидт В.В. *Письма в ЖЭТФ*, 1966, **3**, 141; Труды X Международной конференции по физике низких температур [LT-10 Proceedings, **2**, p. 205].
- [39] Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Статистическая физика. Часть II. М.: Наука, 1978.

- [40] Асламазов Л.Г., Ларкин А.И. *ФТТ*, 1968, **10**, 1104.
- [41] Larkin A.I., Varlamov A.A. Chapter “Fluctuation Phenomena in Superconductors” in: The Physics of Conventional and Unconventional Superconductors. Eds. Berman K. H., Ketterson J. B. Springer – Verlag, Berlin – Heidelberg, 2001.
- [42] Andeson P.W., Rowell J.M. *Phys. Rev. Lett.*, 1963, **10**, 230.
- [43] Shapiro S. *Phys. Rev. Lett.*, 1963, **11**, 80.
- [44] Likharev K.K. *Rev. Mod. Phys.*, 1979, **51**, 101.
- [45] Солимар Л. Туннельный эффект в сверхпроводниках и его применение. М.: Мир, 1974.
- [46] Кулик И.О., ЖЭТФ, 1969, **57**, 1745.
- [47] Ishii C., *Progr. of Theor. Phys.*, 1970, **44**, 1525.
- [48] Bardeen J., Johnson J.L. *Phys. Rev.*, 1972, **B5**, 72.
- [49] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1976.
- [50] Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. М.: Мир, 1967, т. 9.
- [51] Асламазов Л.Г., Ларкин А.И. *Письма в ЖЭТФ*, 1965, **48**, 976.
- [52] McCumber D.E. *J. Appl. Phys.*, 1968, **39**, 3113.
- [53] Steward W.C. *Appl. Phys. Lett.*, 1968, **12**, 277.
- [54] Fulton T.A., Dunkleberger L.N. *Phys. Rev.*, 1974, **B9**, 4760.

- [55] Лихарев К.К. УФН, 1983, **139**, 169.
- [56] Ambegaokar V., Halperin B.I. *Phys. Rev. Lett.*, 1969, **22**, 1364.
- [57] Kurkijarvi J. *Phys. Rev.*, 1972, **B6**, 832.
- [58] Falco C.M., Parker W.H., Trullinger S.E., Hansma P.K. *Phys. Rev.*, 1974, **B10**, 1865.
- [59] Jackel L.D., Webb W.W., Lukens J.E., Pei S.S. *Phys. Rev.*, 1974, **B9**, 115.
- [60] Leggett A.J. *Prog. Theor. Phys. (Suppl.)*, 1980, **69**, 80.
- [61] Caldeira A.O., Leggett A.J. *Annals of Physics*, 1980, **149**, 374.
- [62] Кулик И.О., Шехтер Р.И. ЖЭТФ, 1975, **68**, 623.
- [63] Аверин Д.В., Лихарев К.К. ЖЭТФ, 1986, **90**, 733.
- [64] Anderson P.W. "Special Effects in Superconductivity." In: Lectures on Many Body Problem. Ed. Caianiello E.R. Academic Press, New York, 1964, v. 2, 113.
- [65] Аверин Д.В., Зорин А.Б., Лихарев К.К. ЖЭТФ, 1985, **88**, 692.
- [66] Kuzmin L.S., Pashkin Yu.A., Zorin A.B., Claeson T. *Physica*, 1994, **B203**, 376.
- [67] Schmid A. *Phys. Rev. Lett.*, 1983, **51**, 1506.
- [68] Булгадаев С. Письма в ЖЭТФ, 1984, **39**, 264.
- [69] Иванченко Ю.М., Зильберман Л.А. ЖЭТФ, 1968, **55**, 2395.

- [70] Likharev K.K. *Physica B + C*, 1981, **108**, 1079.
- [71] Caldeira A.O., Leggett A.J. *Ann. Phys. (New York)*, 1983, **149**, 374.
- [72] Caldeira A.O., Leggett A.J. *Phys. Rev. Lett.*, 1981, **46**, 211.
- [73] Jackel L.D., Gordon J.P., Hu E.L., Howard R.E., Fetter L.A., Tennant D.M., Epworth R.W., Kurkijarvi J. *Phys. Rev. Lett.*, 1981, **47**, 697.
- [74] Voss R.F., Webb R.A. *Phys. Rev. Lett.*, 1981, **47**, 265.
- [75] Ларкин А.И., Овчинников Ю.Н. *ЖЭТФ*, 1986, **91**, 318.
- [76] Martinis J.M., Devoret M.H., Clarke J. *Phys. Rev. Lett.*, 1985, **55**, 1908.
- [77] Yagi R., Kobayashi S. *J. Phys. Soc. Jap.*, 1997, **66**, 3360.
- [78] Yagi R., Kobayashi S., Ootuka Y. *J. Phys. Soc. Jap.*, 1997, **66**, 3722.
- [79] Penttila J.S., Parts U., Hakonen P.J., Paalanen M.A., Sonin E.B. *Phys. Rev. Lett.*, 1999, **82**, 1004.
- [80] van der Wal C., ter Haar A.C.J., Wilhelm F., Schoeten R.N., Harmans C.J.P.M., Orlando T.P., Lloyd S., Mooij J.E. *Science*, 2000, **290**, 773.
- [81] Freedman J.R., Patel V., Chen W., Tolpygo S., Lukens J.E. *Nature*, 2000, **406**, 43.
- [82] Ferrell R., Prange R. *Phys. Rev. Lett.*, 1963, **10**, 479.

- [83] Langenberg D.N., Scalapino D.J., Taylor B.N. *Proc. IEEE*, 1966, **54**, 560.
- [84] Кларк Дж. В сб.: Слабая сверхпроводимость. Под ред. Б.Б. Шварца и С.Фонера. М.: Мир, 1980, с. 7.
- [85] Hartfuss H.J., Gundlach K.H., Schmidt V.V. *Journ. Appl. Phys.*, 1981, **52**, 5411.
- [86] Абрикосов А.А. *ЖЭТФ*, 1957, **32**, 1442.
- [87] Essmann V., Träuble H. *Phys. Lett.*, 1967, **24A**, 526.
- [88] Hu C.R. *Phys. Rev.*, 1972, **B6**, 1756.
- [89] Clem J.R. *J. Low Temp. Phys.*, 1975, **18**, 427.
- [90] Saint James D., De Gennes P.G. *Phys. Lett.*, 1963, **7**, 306.
- [91] Сан-Жам Д., Сарма Г., Томас Е. Сверхпроводимость второго рода. М.: Мир, 1970.
- [92] Bean C.P., Livingston J.D. *Phys. Rev. Lett.*, 1964, **12**, 14.
- [93] De Blois R.W., De Sorbo W. *Phys. Rev. Lett.*, 1964, **12**, 499.
- [94] Blatter G., Geshkenbein V.B., Larkin A.I. *Phys. Rev. Lett.*, 1992, **68**, 875.
- [95] Балацкий А.В., Бурлачков Л.И., Горьков Л.Р. *ЖЭТФ*, 1986, **90**, 1478.
- [96] Blatter G., Feigel'man M.V., Geshkenbein V.B., Larkin A.I., Vinokur V.M. *Rev. Mod. Phys.*, 1994, **66**, 1125.

- [97] Березинский В.Л. *ЖЭТФ*, 1970, **59**, 907; *ЖЭТФ*, 1971, **61**, 1144.
- [98] Kosterlitz J.M., Thouless D.J. *J. Phys.*, 1973, **C6**, 1181.
- [99] Kosterlitz J.M. *J. Phys.*, 1974, **C7**, 1046.
- [100] Nelson D.R., Kosterlitz J.M. *Phys. Rev. Lett.*, 1977, **39**, 1201.
- [101] Hebard A.F., Fiory A.T. *Phys. Rev. Lett.*, 1980, **44**, 291, *Physica B + C*, 1982, (Amsterdam) **109-110**, 1637; Fiory A.T., Hebard A.F., Glaberson W.I. *Phys. Rev.*, 1983, **B28**, 5075.
- [102] Bancel P., Gray K.E. *Phys. Rev. Lett.*, 1981, **46**, 148.
- [103] Артеменко С.Н., Горлова И.Г., Латышев Ю.И. *Письма в ЖЭТФ*, 1989, **49**, 352, 566.
- [104] Nordborg H., Blatter G. *Phys. Rev.*, 1998, **B58**, 14556; Koshelev A.E., Nordborg H. *Phys. Rev.*, 1999, **B59**, 4358.
- [105] Brandt E.H. *J. Low Temp. Phys.*, 1977, **26**, 709; *J. Low Temp. Phys.*, 1977, **26**, 735.
- [106] Zeldov E., Majer D., Konczykowski M., Geshkenbein V.B., Vinokur V.M., Shtrikman H. *Nature*, 1995, **375**, 373.
- [107] Schilling A. et al. *Nature*, 1996, **382**, 791.
- [108] Brandt E.H. *Journ. of Low Temp. Phys.*, 1977, 709; *Phys. Status Solidi*, 1976, **b77**, 551.
- [109] Campbell A.M., Evetts J.E., Dew-Hughes D. *Phil. Mag.*, 1968, **18**, 313.

- [110] Мкртчан Г.С., Шмидт В.В. *ЖЭТФ*, 1971, **61**, 367.
- [111] Osborn K.E., Rose-Innes A.C. *Phil. Mag.*, 1973, **27**, 683.
- [112] Кулик И.О., Янсон И.К. Эффект Джозефсона в сверхпроводящих туннельных структурах. М.: Наука, 1970.
- [113] Martinoli P. *Phys. Rev.*, 1978, **B17**, 1175.
- [114] Ларкин А.И. *ЖЭТФ*, 1970, **58**, 1466.
- [115] Larkin A.I., Ovchinnikov Yu.N. *J. Low Temp. Phys.*, 1979, **34**, 409.
- [116] Wagner O., Geshkenbein V.B., Larkin A.I., Blatter G. *Phys. Rev.*, 1999, **B59**, 11551.
- [117] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М.: Наука, 1987.
- [118] Wordenweber R., Kes P. *Phys. Rev.*, 1986, **B34**, 494; *Physica*, 1985, **B135**, 136.
- [119] Гешкенбейн В.Б., Ларкин А.И. *ЖЭТФ*, 1989, **95**, 1108.
- [120] Anderson P.W. *Phys. Rev. Lett.*, 1962, **9**, 309; Anderson P.W., Kim Y.B. *Rev. Mod. Phys.*, 1964, **36**, 39.
- [121] Gao L. et al. *Physica*, 1991, **C177**, 438.
- [122] Feigel'man M.V., Geshkenbein V.B., Larkin A.I., Vinokur V.M. *Phys. Rev. Lett.*, 1989, **63**, 2303.
- [123] Senoussi S., Oussena M. et al. *Phys. Rev.*, 1988, **B37**, 9792; McHenry M.E. et al. *Phys. Rev.*, 1991, **B44**, 7614.

- [124] Yeshurun Y., Malozemoff A.P., Shaulov A. *Rev. Mod. Phys.*, 1996, **68**, 911.
- [125] Charalambous M. et al. *Phys. Rev.*, 1992, **B45**, 5091;
- [126] Voss-de Haan P., Jakob G., Adrian H. *Phys. Rev.*, 1999, **B60**, 12443.
- [127] Винокур В.М., Гешкенбейн В.Б., Ларкин А.И., Фейгельман М.В. *ЖЭТФ*, 1991, **100**, 1104.
- [128] Fuchs D.T., Zeldov E., Majer D., Doyle R.A., Tamegai T., Ooi S., Konczykowski M. *Phys. Rev.*, 1996, **B54**, R796.
- [129] Welp U. et al. *Phys. Rev. Lett.*, 1996, **76**, 4809;
- [130] Скворцов М.А., Гешкенбейн В.Б. *ЖЭТФ*, 1994, **105**, 1379.
- [131] Safar H., Gammel P.L., Huse D.A. et al. *Phys. Rev. Lett.*, 1993, **70**, 3800.
- [132] Бардин Дж., Купер Л., Шриффер Дж. В сб.: Теория сверхпроводимости. Под ред. Н. Н. Боголюбова. М.: ИЛ, 1960, с. 103.
- [133] Giaever I. *Phys. Rev. Lett.*, 1960, **5**, 147.
- [134] Giaever I., Megerle K. *Phys. Rev.*, 1961, **122**, 1101.
- [135] Ambegaokar V., Baratoff A. *Phys. Rev. Lett.*, 1963, **10**, 468; erratum, *Phys. Rev. Lett.*, 1963, **11**, 104.
- [136] Бароне А., Патерно Дж. Эффект Джозефсона в сверхпроводящих тунNELьных структурах. М.: Мир, 1984.
- [137] Абрикосов А.А. Введение в теорию металлов, М.: Наука, 1987.

- [138] Ларкин А.И., Овчинников Ю.Н. *ЖЭТФ*, 1964, **47**, 1136.
- [139] Fulde P., Ferrel R.A. *Phys. Rev.*, 1964, **A135**, 550.
- [140] Буздин А.И., Булаевский Л.Н., Панюков С.В. *Письма в ЖЭТФ*, 1982, **35**, 147.
- [141] Буздин А.И., Вуйчич В., Куприянов М.Ю., *ЖЭТФ*, 1992, **101**, 231.
- [142] Demler E.A., Arnold G.B., Beasley M.R. *Phys. Rev.*, 1997, **B55**, 15174.
- [143] Булаевский Л.Н., Кузий В.В., Собянин А.А. *Письма в ЖЭТФ*, 1977, **25**, 314.
- [144] Andreev A.V., Buzdin A.I., Osgood R.M. *Phys. Rev.*, 1991, **B43**, 10124.
- [145] Ryazanov V.V., Oboznov V.A., Rusanov A.Yu., Veretennikov A.V., Golubov A.A., Aarts J. Cond-mat/0008364.
- [146] Ryazanov V.V., Oboznov V.A., Veretennikov A.V., Rusanov A.Yu., Golubov A.A., Aarts J. International Conference “Mesoscopic electron systems – 2”, Chernogolovka, July 9–16, 2000.
- [147] Tuominen M.T., Hergenrother J.M., Tighe T.S., Tinkham M. *Phys. Rev. Lett.*, 1993, **69**, 1997.
- [148] Lafarge P., Joyez P., Esteve D., Urbina C., Devoret M.H. *Phys. Rev. Lett.*, 1993, **70**, 994.
- [149] Matveev K.A., Gissel-falt M., Glazman L.I., Shekhter R.I. *Phys. Rev. Lett.*, 1993, **70**, 2940; Glazman L., Hekking F.W.J., Matveev K.A., Shekhter R.I. *Physica*, 1994, **B203**, 316.

- [150] Maeno Y. et al. *Nature*, 1994, **372**, 532; Rice T.M., Sigrist M. *J. Phys. Cond. Matt.*, 1995, **7**, L643.
- [151] Hardy W.N. et al. *Phys. Rev. Lett.*, 1993, **70**, 3999.
- [152] Annett J., Goldenfeld N. *Phys. Rev.*, 1991, **B43**, 2778; Volovik G.E., *Phys. Rev. Lett.*, 1998, **81**, 4023.
- [153] Wollmann D.A. et al. *Phys. Rev. Lett.*, 1993, **71**, 2134; *Phys. Rev. Lett.*, 1995, **74**, 797.
- [154] London F. *Proc. Roy. Soc.*, 1935, **A512**, 24; *Phys. Rev.*, 1948, **74**, 562.
- [155] Горьков Л.П. *ЖЭТФ*, 1959, **36**, 1918.
- [156] Pethick C.J., Smith H. *Annals of Physics*, 1979, **119**, 133.
- [157] Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979, с. 413.
- [158] Schmid A., Schön G. *Journ. of Low Temp. Phys.*, 1975, **20**, 207.
- [159] Андреев А.Ф. *ЖЭТФ*, 1964, **46**, 1823.
- [160] Klapwijk T.M., Blonder G.E., Tinkham M., *Physica*, 1982, **B109 – 110** 1657 (1982).
- [161] Blonder G.E., Tinkham M., Klapwijk T.M. *Phys. Rev.*, 1982, **B25**, 4515.
- [162] Заварницкий Н.В., *Письма в ЖЭТФ*, 1965, **2**, 168.
- [163] Zhou F., Charlat P., Spivak B.Z., Pannetier B. *J. Low Temp. Phys.*, 1998, **110**, 841.

- [164] Shtchelkachev N.M., Lesovik G.B., Blatter G. *Phys. Rev.*, 2000, **B62**, 3559.
- [165] Кулик И.О., Омельянчук А.Н. *Письма в ЖЭТФ*, 1975, **21**, 216.
- [166] Кулик И.О., Омельянчук А.Н. *ФНТ*, 1977, **3**, 945.
- [167] Beenakker C.W.J., van Houten H. *Phys. Rev. Lett.*, 1991, **66**, 3056.
- [168] Beenakker C.W.J. *Phys. Rev. Lett.*, 1991, **67**, 3836.
- [169] Hekking F.W.J., Nazarov Yu.V. *Phys. Rev.*, 1994, **B49**, 6847.
- [170] Pothier H., Gueron S., Esteve D., Devoret M. *Phys. Rev. Lett.*, 1994, **73**, 2488; *Physica*, 1994, **B203**, 226.
- [171] Nazarov Yu.V. *Phys. Rev. Lett.*, 1994, **73**, 1420.
- [172] Kastalsky A., Green L.H., Barner J.B., Bhat R. *Phys. Rev. Lett.*, 1990, **64**, 958; Kastalsky A. et al. *Phys. Rev. Lett.*, 1991, **67**, 3026.
- [173] Hekking F.W.J., Nazarov Yu.V. *Phys. Rev. Lett.*, 1993, **71**, 1625.
- [174] Yu M.L., Mercereau J.E. *Phys. Rev.*, 1975, **B12**, 4909.
- [175] Артеменко С.Н., Волков А.Ф. *УФН*, 1979, **128**, 3.
- [176] Hsiang T.Y., Clarke J. *Phys. Rev.*, 1980, **B21**, 945.
- [177] Ryazanov V.V., Ermolaeva L.A., Schmidt V.V. *Journ. of Low Temp. Phys.*, 1981, **45**, № 5/6.
- [178] Meyer J., v. Minnigerode G. *Phys. Lett.*, 1972, **38A**, 529.

- [179] Skocpol W.J., Beasley M.R., Tinkham M. *Journ. of Low Temp. Phys.*, 1974, **16**, 145.
- [180] Wyatt A.F.G., Dmitriev V.M., Moore W.S., Sheard F.W. *Phys. Rev. Lett.*, 1966, **16**, 1166.
- [181] Eliashberg G.M. *Journ. of Low Temp. Phys.*, 1973, **10**, 449.
- [182] Гинзбург В.Л., Жарков Г.Ф. УФН, 1978, **125**, 19.
- [183] Заварицкий Н.В. *Письма в ЖЭТФ*, 1974, **19**, 205.
- [184] Van Harlingen D.J., Heidel D.F., Garland J.C. *Phys. Rev.*, 1980, **B21**, 1842.
- [185] Аронов А.Г., Гальперин Ю.М. *Письма в ЖЭТФ*, 1974, **19**, 281.
- [186] Карцовник М.В., Рязанов В.В., Шмидт В.В. *Письма в ЖЭТФ*, 1981, **33**, 373.
- [187] Panaitov G.I., Ryazanov V.V., Ustinov A.V., Schmidt V.V. *Phys. Lett.*, 1984, **A100**, 301.
- [188] Шмидт В.В. *Письма в ЖЭТФ*, 1981, **33**, 104.
- [189] Ryazanov V.V., Schmidt V.V. *Solid State Commun.*, 1981, **40**, 1055.
- [190] Galffy M., Freimuth A., Murek U. *Phys. Rev.*, 1990, **B41**, 11029.
- [191] Ri H.-C., Kober F., Gross R., Huebener R.P., Gupta A. *Phys. Rev.*, 1991, **B43**, 13739.
- [192] Logvenov G.Yu., Hartmann M., Huebener R.P. *Phys. Rev.*, 1992, **B46**, 11102.

- [193] Zeh M., Ri H.-C., Kober F., Huebener R.P., Ustinov A.V. et al. *Phys. Rev. Lett.*, 1990, **64**, 3195.
- [194] Palstra T.T.M., Battlog B., Schneemeyer L.F., Waszczak J.V. *Phys. Rev. Lett.*, 1990, **64**, 3090.
- [195] Huebener R.P. *Physica*, 1990, **C168**, 605.
- [196] Logvenov G.Yu., Ryazanov V.V., Ustinov A.V., Huebener R.P. *Physica*, 1991, **C175**, 179.
- [197] Huebener R.P., Ustinov A.V., Kaplunenko V.K. *Phys. Rev.*, 1990, **B42**, 4831.
- [198] Каплуненко В.К., Москвин С.И., Шмидт В.В. *ФНТ*, 1985, **11**, 846.

Предметный указатель

Андреевское отражение 331

Анизотропия критических полей 204

— сверхпроводящих свойств 18

Асламазова–Ларкина
эффект 107

Березинского–Костерлица–
Таулеса переход 206

Бозе-конденсат 28, 113, 328

Бозе-конденсация 28

Бозе-частицы 328

Взаимодействие вихрей 181

Вихревая решетка 173

Вихри в сверхпроводнике
второго рода 173

— флуктуационные 206

Время релаксации заряда
квазичастиц 330

— энергетической
релаксации τ_E 331

Гинзбурга параметр 98

Глубина проникновения

магнитного поля

(лондоновская) 35, 74

— (пиппардовская) 38

— электрического поля 355

Джозефсоновская
генерация 124

— частота 130

— энергия 127

Джозефсоновские вихри 146

Диамагнетизм

— флуктуационный 104

Длина когерентности 74, 272

Жидкость вихревая 219

Заряд квазичастиц 328,
350, 352

Зеебека эффект в
джозефсоновских
переходах 371

— в сверхпроводниках 366

Избыточное сопротивление 359

Изотоп-эффект 255, 278

- Интерференционные эффекты в сверхпроводниках 113
- Квазичастицы** (электроны и дырки) 324
—, заряд 328, 350, 352
—, спектр 324
- Квант магнитного потока 5, 42
- Квантование магнитного потока 4, 40, 113
- Квантованная вихревая нить 172
- Квантовое сопротивление 139
- Кинетическая индуктивность 53
— тонкой сверхпроводящей пленки 55
- Когерентность сверхпроводящих электронов 26
- Комплексная проводимость сверхпроводника 56
- Конденсат 28, 328
- Критическая плотность тока 94, 220, 227
— температура 3, 277
- Критический ток возврата джозефсоновского перехода 129
— сверхпроводника второго рода динамический 234
— статический 233
— тонкой пленки 92
- Критическое магнитное поле 3
— массивного материала 18, 190
— сверхпроводника второго рода (второе) 173, 184
— (первое) 173, 177, 180
- Критическое магнитное поле термодинамическое 18, 190
— тонкой пленки 87, 91
— третье (поверхностной сверхпроводимости) 192
— состояние 221
- Куперовская электронная пара 28, 328
- Магнитное поле одиночного вихря 174
- Магнитный момент сверхпроводника второго рода 187
- Магнитный поток вихря 201
—, индуцированный потоком тепла 368
- Маккамбера параметр 130
- Метод изображений 48
- Надконденсатные частицы 328
- Незатухающий ток в сверхпроводнике 315
- Нелокальная электродинамика сверхпроводников 36
- Опыты Ю и Мерсеро 356
- Основное состояние сверхпроводника 259
—, распределение электронов 259
—, энергия 265
- Параметр теории Гинзбурга — Ландау 74
- Парапроводимость флюктуационная 108
- Первое критическое поле джозефсоновского перехода 147

- Пиннинг 220
 Пленка сверхпроводящая над сверхпроводящим экраном 47
 Плотность состояний сверхпроводника 272
 Поверхностная сверхпроводимость 191
 ——, критическое поле 192
 Поверхностный импеданс сверхпроводника 59
 — сверхток 10
 — энергетический барьер (Бина – Ливингстона) 197
 Поле перегрева мейсснеровского состояния 198
 Принцип замыкания 50
 Промежуточное состояние 12, 13
 ——, в проволоке с током 16
 ——, структура 15
 Разбаланс заселенностей спектра возбуждений сверхпроводника 349
 Размагничивающий фактор 13
 Резистивное состояние 231
 Сверхпроводники второго рода 9, 171
 — первого рода 9
 Сверхпроводящая «термопара» 368
 Свободная энергия вихря 177
 — Гельмгольца 23
 — Гиббса 23
 Сила Лоренца взаимодействия вихря с током 183
 Сквид (сверхпроводящий квантовый интерферометр) 153
 — двухконтактный 153
 — одноконтактный 157
 — конструкции Циммермана 164
 Скин-эффект 58
 Слабая сверхпроводимость 5, 166
 Слабая связь 5, 114
 Смешанное состояние 173
 Спектр элементарных возбуждений сверхпроводника 269
 Стекло вихревое 252
 Теория Гинзбурга – Ландау 26, 62
 ——, второе уравнение 70
 ——, градиентная инвариантность 71
 ——, первое уравнение 70
 ——, пределы применимости 321
 ——, связь с микротеорией 320
 Теплоемкость сверхпроводника 21
 Термоэлектрические эффекты в джозефсоновских переходах 371
 Термоэлектрический эффект в сверхпроводниках 366
 Туннельные эффекты 279
 Уравнения Лондонов 30
 Уровни андреевские 336

- Усиление сверхпроводимости 365
- Фазовая когерентность 113–114
- Фазовый переход второго рода 62
- Химический потенциал квазичастиц 353
- сверхпроводящих электронов 350
- Центры пиннинга 220
- проскальзывания фазы 361
- Электронные пары (куперовские) 28, 328
- Элементарные возбуждения сверхпроводника 272, 324–326
- спектр 272
- Энергетическая щель 269, 272
- Энергетическая щель, зависимость от температуры 274
- Энергия границы раздела между нормальной и сверхпроводящей фазами 79
- Энтропия сверхпроводника 19
- Эффект близости 73
- Джозефсона
- нестационарный 6, 122
- стационарный 6, 115
- Мейсснера–Оксенфельда 6, 314, 318
- Эффективное взаимодействие электронов через фононы 257, 258
- Эффекты Джозефсона 5, 112
- d*-спаривание 309
- SFS*-переход 292
- SNS*-переход 79, 336

Вадим Васильевич Шмидт
ВВЕДЕНИЕ В ФИЗИКУ СВЕРХПРОВОДНИКОВ
Издание второе, исправленное и дополненное
В. В. Рязановым и М. В. Фейгельманом

Директор издательского проекта И. В. Ященко
Компьютерный набор И. Вьюгин, М. Вьюгин,
К. Горбунов, Т. Михайлова, Е. Стальгорова, Н. Теннова
Верстка В. Кондратьев

Рисунки (с использованием системы **МЕТАPOST**) В. Кондратьев
Рисунки (с использованием системы **XFig**) В. Кондратьев, О. Урюпина

Издательство Московского Центра
непрерывного математического образования

Лицензия ИД № 01335 от 24.03.2000 г.
Подписано к печати 13.12.00 г. Формат 60 × 90/16
Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Печ. л. 26
Тираж 2000. Заказ № 970

МЦНМО
121002, Москва, Б. Власьевский пер. 11

Отпечатано с готовых диапозитивов в ППП «Типография «Наука»»
121099, Москва, Шубинский пер. 6