به نام خدا

تمرین سری **دوم** درس **بهینه‌سازی**

(نیمسال دوم ۱۳۹۹-۱۴۰۰)

۱- مساله‌ی بهینه‌سازی به فرم زیر مفروض است.

$$\begin{array}{ll} minimize & \dfrac{f_0(x)}{c^T x + d} \\ subject\ to & f_i(x) \le 0, i = 1, \dots, m \\ & Ax = b \end{array}$$

که در آن $f_0, f_1, \dots, f_m$ توابعی محدب هستند و دامنه‌ی تابع هدف نیز به‌صورت $\{x \in \boldsymbol{dom}\, f_0 \mid c^T x + d > 0\}$ تعریف می‌شود.

نشان دهید که مساله‌ی بهینه‌سازی فوق معادل با مساله‌ای است که در ادامه آورده شده است.

$$\begin{array}{ll} minimize & g_0(y, t) \\ subject\ to & g_i(y, t) \le 0, i = 1, \dots, m \\ & Ay = bt \\ & c^T y + dt = 1 \end{array}$$

در این مساله g_i نشان‌دهنده‌ی perspective تابع f_i است. همچنین $y \in \mathbb{R}^n$ و $t \in \mathbb{R}$ است.

یادآوری: اگر تابع f به‌صورت $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ باشد آن‌گاه perspective تابع f تابعی به فرم $g: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ است و مطابق با رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود.

$$g(x, t) = tf(\frac{x}{t})$$

دامنه‌ی این تابع نیز به فرم زیر است (برای جزئیات بیشتر به بخش 3.2.6 از کتاب بوید مراجعه شود).

$$\boldsymbol{dom}\, g = \left\{(x, t) \middle| \frac{x}{t} \in \boldsymbol{dom}\, f, t > 0\right\}$$

۲- مساله‌ی LP زیر را درنظر بگیرید.

$$\begin{array}{ll} minimize & c^T x \\ subject\ to & Ax \preccurlyeq b \end{array}$$

در این مساله، بردار هزینه‌ی c، یک بردار تصادفی با توزیع نرمال است که میانگین آن $\boldsymbol{E}c = c_0$ و کواریانس آن $\boldsymbol{E}(c - c_0)(c - c_0)^T = \Sigma$ است (ماتریس A و بردارهای b و x قطعی هستند). براساس این تعریف، برای بردار مفروض $x \in \mathbb{R}^n$، مقداری که هزینه‌ی $c^T x$ به‌دست می‌دهد یک متغیر تصادفی گوسی است.

یک روش برای مواجهه با تصادفی بودن $c^T x$، فرموله کردن مساله به‌صورت زیر است.

$$\begin{array}{ll} minimize & \beta \\ subject\ to & \boldsymbol{prob}(c^T x \geq \beta) \leq \alpha \\ & Ax \preccurlyeq b \end{array}$$

در این مساله، α یک پارامتر با مقدار ثابت است که معمولا مقدار 0.01 برای آن درنظر گرفته می‌شود. آیا این مساله، یک مساله‌ی بهینه‌سازی محدب است؟ توضیح دهید.

۳- پاسخی تحلیلی برای مساله‌ی LP زیر ارائه دهید.

$$\begin{array}{ll} minimize & c^T x \\ subject\ to & l \preccurlyeq x \preccurlyeq u \end{array}$$

لازم به‌ذکر است در مساله‌ی فوق همواره $l \preccurlyeq u$ برقرار است.

۴- مساله‌ی زیر را به فرم LP بازنویسی نمایید.

$$minimize\ \|Ax - b\|_1$$

۵- مساله QCQP زیر را در نظر بگیرید که در آن متغیر $x \in \mathbb{R}^n$، مقادیر نامنفی دارد.

$$\begin{array}{ll} minimize & f_0(x) \\ subject\ to & f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m \\ & x \succcurlyeq 0 \end{array}$$

در این مساله $f_i(x) = \left(\frac{1}{2}\right) x^T P_i x + q_i^T x + r_i$ است که در آن $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$، یک ماتریس متقارن است. همچنین $q_i \in \mathbb{R}^n$ و $r_i \in \mathbb{R}$ هستند. متغیر i نیز می‌تواند مقادیر $0, \dots, m$ را اتخاذ کند ($i = 0, \dots, m$). در این مساله فرض مثبت معین بودن ماتریس P_i وجود ندارد و بنابراین مساله فوق الزاما محدب نخواهد بود.

فرض کنید $q_i \preccurlyeq 0$ باشد و درایه‌هایی که در قطر اصلی ماتریس P_i قرار ندارند مقادیر نامثبت داشته باشند[1] به این معنا که:

$$(P_i)_{jk} \leq 0, j \neq k, j, k = 1, \dots, n, i = 0, \dots, m.$$

با فرض برقرار بودن شرایط فوق، توضیح دهید که چگونه می‌توان مساله‌ی بهینه‌سازی مطرح شده را به‌صورت یک مساله بهینه‌سازی محدب بازنویسی کرد؟ (راهنمایی: می‌توان از تغییر متغیر $y_j = \phi(x_j)$ کمک گرفت که در آن ϕ یک تابع است که بر متغیر x_j اعمال می‌شود.)

۶- تابع $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2^2)^2$ را درنظر بگیرید. هدف یافت min این تابع با استفاده از یک روش line search است. اگر در یک گام در نقطه‌ی $x_k = (1,0)^T$ قرار داشته باشیم، نشان دهید در این نقطه جهت $p_k = (-1,1)^T$ یک جهت کاهشی است. اگر قصد حرکت در جهت مشخص شده را داشته باشیم طول گام بهینه را مشخص کنید.

۷- نشان دهید که اگر بردارهای غیرصفر $p_0, p_1, \dots, p_l$ در رابطه‌ی زیر صدق می‌کنند، آنگاه این بردارها نسبت به‌یکدیگر مستقل خطی خواهند بود.

$$p_i^T A p_j = 0, for\ all\ i \neq j$$

در این رابطه A نشان‌دهنده‌ی یک ماتریس متقارن مثبت معین است. از این مساله چه نتیجه‌ای در مورد تعداد جهت‌های کانجوگیت ماتریس A می‌توان گرفت؟

۸- فرض کنید الگوریتم steepest descent با یک روش line search به تابع کوادراتیک محدب زیر اعمال شده است. نشان دهید که اگر نقطه‌ی شروع اولیه طوری باشد که بردار $x_0 - x^*$ موازی یکی از بردارهای ویژه‌ی ماتریس Q باشد، آنگاه روش steepest descent تنها در یک گام پاسخ این مساله را پیدا خواهد کرد.

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x - b^T x$$

[1] به ماتریس‌هایی که این خاصیت برای آن‌ها برقرار باشد Z-matrix گفته می‌شود.

تمرین‌های پیاده سازی:

۹- مساله‌ی minimum fuel optimal control را که در تمرین 4.16 کتاب Convex Optimization آورده شده است، به ازای مقادیر زیر حل کنید.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0.4 & 0.8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0.3 \end{bmatrix}, \quad x_{des} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}, \quad N = 30$$

نمودار سیگنال $u(t)$ را برحسب t رسم نمایید.

۱۰- مساله‌ی $\min_x \frac{1}{2} x^T A_i x - b^T x$ را که در آن $i \in \{1,2\}$ است را در نظر بگیرید که در آن $b \in \mathbb{R}^n$ برداری است که تمام عناصر آن مقدار ۱ دارد و A_i به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$A_1 = tridiag(-1,4,-1)_{n\times n} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 4 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

$$A_2 = hilb(n) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \ddots & \ddots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \dots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

a. الگوریتم روش گرادیان مزدوج را برای حل مساله‌ی بهینه‌سازی داده شده برای $i = 1,2$ و همچنین $n = 100, 400, 1600$ پیاده‌سازی کنید و برای هرکدام زمان حل مساله و مقدار $\|A_i x^* - b\|_2$ را محاسبه کنید و در جدولی نمایش دهید (x^* پاسخ بهینه‌ای است که برای مساله به‌دست آمده است).

b. مساله‌ی فوق را برای ماتریس‌های $\hat{A}_i = A_i + \epsilon, i = 1,2$ به ازای $n = 100, 400, 1600$ حل کنید و برای هرکدام $\|\hat{A}_i \hat{x}^* - b\|_2$، $\|A_i - \hat{A}_i\|_2$ و $\|x^* - \hat{x}^*\|_2$ را در جدولی نمایش

دهید. در اینجا $\hat{x}^*$ پاسخ بهینه‌ای است که پس از حل مساله به‌دست می‌آید و x^* پاسخ بهینه‌ای است که از حل مساله‌ی نظیر در بخش a محاسبه شده است. (فرض کنید $\epsilon = 1 \times 10^{-6}$ باشد)

c. تحلیل خود را از نتایج به‌دست آمده از قسمت‌های a و b ارائه دهید.