

باسمه تعالی  
مجموعه تمرینات درس بهینه‌سازی

شماره تمرین: ۱  
تاریخ تحویل: ۲۵ فروردین



## تمرینات تشریحی

- ۱ نشان دهید یک مجموعه محدب است اگر و تنها اگر اشتراک آن با هر خطی محدب باشد.
- ۲ دو نقطه  $a$  و  $b$  را در فضای  $\mathbb{R}^N$  در نظر بگیرید. نشان دهید مجموعه نقاطی که به  $a$  نسبت به  $b$  نزدیک تر اند یک half space تشکیل می دهند.
- ۳  $C \subset \mathbb{R}^N$  در نظر بگیرید که به فرم زیر تعریف می گردد.

$$C = \{x \in \mathbb{R}^N | x^T A x + b^T x + c \leq 0\} \quad (۱)$$

که  $A \in \mathbb{S}^N$  و  $b \in \mathbb{R}^N$  و  $C \in \mathbb{R}$  است.

- (آ) نشان دهید  $C$  محدب است اگر  $A \succcurlyeq 0$
- (ب) نشان دهید اشتراک  $C$  و  $g^T x + h$  اگر  $g$  ناصفر باشد، محدب است اگر داشته باشیم  $A + \lambda g g^T \succcurlyeq 0$  برای بعضی از  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
- (ج) آیا معکوس گزاره (آ) برقرار است؟

- ۴ نشان دهید مجموعه هذلولوی  $\{x \in \mathbb{R}_+^N | x_1 x_2 \geq 1\}$  محدب است. راهنمایی: از نامساوی  $a^\theta b^{1-\theta} \leq \theta a + (1-\theta)b$  به ازای  $0 \leq \theta \leq 1$  و  $\{a \geq 0, b \geq 0\}$  استفاده کنید.

- ۵ مشخص کنید کدام یک از توابع زیر convex، quasi convex، concave یا quasi concave هستند.

$$f(x) = \frac{x_1}{x_2}, x \in \mathbb{R}_{++}^2 \quad (آ)$$

$$f(x) = \frac{1}{x_1 x_2}, x \in \mathbb{R}_{++}^2 \quad (ب)$$

$$f(x) = \max_{i=1,2,3,\dots,k} \|A^{(i)}x - b^{(i)}\|_p, p > 0, x \in \mathbb{R}^m, b \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (ج)$$

- ۶ نشان دهید تابع  $f$  با دامنه و برد اعداد حقیقی، محدب است اگر و تنها اگر دامنه  $f$  محدب باشد و نامساوی زیر به ازای  $x, y, z \in \text{Domain}(f), x < y < z$  برقرار باشد.

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ f(x) & f(y) & f(z) \end{bmatrix} \geq 0 \quad (۲)$$

- ۷ فرض کنید تابع محدب  $f$  با دامنه و برد اعداد حقیقی است و نامنفی است. همچنین تابع مقعر  $g$  مثبت با دامنه و برد اعداد حقیقی می باشد. ثابت کنید تابع  $\frac{f^2}{g}$  بر روی دامنه مشترک دو تابع  $f, g$  محدب می باشد.

۸ تابع  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  با ضابطه  $f(x) = \frac{a^T x + b}{c^T x + d}$  و با دامنه  $\text{dom } f = \{x \mid c^T x + d > 0\}$  مفروض است. این تابع تحت چه شرایطی quasi convex و تحت چه شرایطی convex می باشد؟

## پیاده سازی

در اینجا لینک تعدادی ابزار بهینه سازی محدب آورده شده است. **cvx**، **cvxpy**، **cvxOPT** یکی از ابزار های ذکر شده را انتخاب نمایید و با استفاده از آن مساله بهینه سازی زیر را حل نمایید.

$$\begin{aligned} \min f(x) &= x_1 + 3x_2 \\ -x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_1 + x_2 &\geq 2 \\ x_2 &\geq 0 \\ 2x_1 - 3x_2 &\leq 5 \end{aligned}$$

## چند نکته در رابطه با تحویل تمرین

- در صورتی که سوالی در رابطه با تمرین اول دارید لطفا با ایمیل [arian.morteza@aut.ac.ir](mailto:arian.morteza@aut.ac.ir) ، [b.roshanfekr@aut.ac.ir](mailto:b.roshanfekr@aut.ac.ir) در ارتباط باشید.
- عنوان ایمیل سوالات لطفا با ساختار اسمی `OPTquestion_FullName_StudentId_HwNumber` ارسال نمایید.
- لطفا گزارش را با فرمت pdf و با ساختار اسمی `FullName_StudentId_HwNumber.pdf` در مودل آپلود نمایید.
- در صورتی که به صورت دستنویس تمرینات را حل می کنید، لطفا فایل عکس نهایی را با کیفیت مناسب و خوانا تهیه نمایید.
- نمره تمرینات مشابه ( اعم از کد و گزارش و ...) برای تمامی طرفین درگیر تقسیم می گردد.
- شما برای تمرینات پیاده سازی در مجموع می توانید ۷ روز تاخیر داشته باشید (برای کل تمرینات جمع تاخیر های شما نباید از ۷ روز بیشتر شود) و در صورت تاخیر بیشتر از ۷ روز کسر ۵ درصد نمره از نمره کل تمرینات پیاده سازی به ازای هر روز تاخیر مد نظر قرار خواهد گرفت.