

باسمه تعالی  
مجموعه تمرینات درس بهینه‌سازی

شماره تمرین: ۳  
تاریخ تحویل:



## تمرینات تشریحی

۱ پاسخ مساله norm approximation زیر برای نرم های ۱ و ۲ و بی نهایت چیست  $(x \in R)$ ؟

$$\min \|x\mathbf{1} - b\| \quad (۱)$$

۲ مساله بهینه سازی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \min \sum_{i=1}^m \phi(r_i) \\ \text{s.t. } r = Ax - b \\ x \in \mathbb{R}^n, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n} \end{aligned} \quad (۲)$$

آ) دوگان مساله را بر حسب تابع کانجوگیت جریمه بنویسید. ب) اگر تابع جریمه  $\phi(x)$  deadzone linear با پهنای  $w = 1$  باشد، مساله دوگان را بیابید.

۳ فرض کنید  $y \in \{0, 1\}$  یک متغیر تصادفی باشد که به فرم زیر تعریف شده است

$$y = \begin{cases} 1 & a^T u + b + v \leq 0 \\ 0 & a^T u + b + v > 0 \end{cases} \quad (۳)$$

در این رابطه  $u \in \mathbb{R}^n$  و  $v \sim N(0, 1)$  تخمین ML را برای یافتن پارامترهای  $a, b$  بنویسید به فرم یک مساله بهینه سازی محدب بنویسید، با فرض اینکه داده های  $u_i, y_i, i = 1, \dots, N$  مشاهده شده باشند.

۴ فرض کنید  $X \in \mathbb{R}^n$  یک بردار تصادفی گوسی همراه با تابع توزیع زیر باشد.

$$p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} (\det S)^{1/2}} \exp(-(x - a)^T S^{-1} (x - a)/2) \quad (۴)$$

توزیع شرطی دو عضو این بردار  $(X_i, X_j) \in \mathbb{R}^2$  به شرط باقی عضو ها نیز توزیع گوسی با ماتریس کوواریانس  $R_{ij}$  دارد که ماتریس کوواریانس شرطی از متمم Schur<sup>۱</sup> زیر-ماتریس دو بعدی زیر بدست می آید.

$$S = \begin{bmatrix} S_{ii} & S_{ij} \\ S_{ij} & S_{jj} \end{bmatrix} \quad (۵)$$

<sup>۱</sup> توضیحات در رابطه با متمم Schur

به دو متغیر انتخاب شده، مستقل شرطی می گویند اگر ماتریس  $R_{ij}$  قطری باشد. مساله زیر را با بهینه سازی محدب مدل نمایید.

فرض کنید  $N$  نمونه  $y_1, \dots, y_N \in \mathbf{R}^n$  از بردار  $X$  مشاهده شده است. همچنین لیست  $\mathcal{N}$  شامل زوج های مستقل شرطی اعضا این بردار  $\mathcal{N} \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$  نیز داده شده است. هدف این است بیشینه درستنمایی پارامترهای  $a, S$  را با توجه به قید استقلال شرطی  $X_i, X_j$  بیان شود و مساله بهینه سازی برای بیشینه کردن این تابع نوشته شود.

۵ مساله زیر را در نظر بگیرید (متغیرها عضو مجموعه اعداد حقیقی هستند).

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & x_1^2 + x_2^2 \\ \text{s. t.} \quad & (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 1 \\ & (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 \leq 1 \end{aligned} \quad (6)$$

آ) feasible set و level set های تابع هدف را تواما با استفاده از یکی از زبان های برنامه نویسی دلخواه رسم کنید مقدار بهینه  $x^*$  و  $p^*$  را بیابید (لطفا علاوه بر شکل - کد را نیز در قسمت جواب این سوال قرار دهید)

ب) آیا ضرایب لاگرانژین  $\lambda_1^*$  و  $\lambda_2^*$  وجود دارد که نشان دهد  $x^*$  بهینه است؟

ج) مساله دوگان را بنویسید و حل کنید. آیا strong duality برقرار است؟

۶ مساله بهینه سازی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \|Ax - b\|_2^2 \\ \text{s. t.} \quad & Gx = h \end{aligned} \quad (7)$$

که  $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$  و  $\text{rank } A = n$ ، و  $G \in \mathbf{R}^{p \times n}$  و  $\text{rank } G = p$

آ) تابع لاگرانژین را تشکیل دهید

ب) primal solution  $x^*$  را بیابید

ج) dual solution  $\nu^*$  را نیز بیابید.

۷ مساله بهینه سازی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \log \det \left( \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2^T & X_3 \end{bmatrix}^{-1} \right) \\ \text{s. t.} \quad & \text{tr } X_1 = \alpha \\ & \text{tr } X_2 = \beta \\ & \text{tr } X_3 = \gamma \end{aligned} \quad (8)$$

نسبت به متغیر زیر میخوایم مساله بالا را حل نماییم

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2^T & X_3 \end{bmatrix} \quad (9)$$

به طوری که  $X_1 \in \mathbf{S}^n$ ,  $X_2 \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $X_3 \in \mathbf{S}^n$  و  $\alpha\gamma > \beta^2, \alpha > 0$

آ) نشان دهید  $\frac{\partial}{\partial X_{ij}} \log \det X^{-1} = -(X^{-1})_{ji}$

ب) مقدار  $X$  بهینه را بیابید

۸ مساله LP زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && c^T x \\ & \text{subject to} && Gx \preceq h \\ & && Ax = b \end{aligned} \quad (10)$$

آ) تابع دوگان مساله را بنویسید

ب) مساله دوگان را بازنویسی نمایید

۹ سوال 10.5 کتاب بوید را حل نمایید

۱۰ فرم کلی یک مساله بهینه سازی محدب را در نظر بگیرید باسخ مساله بهینه سازی زیر central path را نتیجه

می دهد اگر  $x^*(t)$  یک نقطه روی این مسیر باشد

آ) از شرط آخر KKT مساله بالا استفاده کرده و نشان دهید  $\frac{d(f_0(x^*(t)))}{dt} \leq 0$

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && t f_0(x) + \phi(x) \\ & \text{subject to} && Ax = b, \end{aligned} \quad (11)$$

راهنمایی: نشان دهید با افزایش  $t$ ،  $f_0(x^*(t))$  کاهش می یابد.

## پیاده سازی

۱  $N$  جفت نقطه در فضای  $R^n$  به نام های  $x_1, \dots, x_N$  و  $y_1, \dots, y_N$  داده شده است و فاصله این جفت ها از

یکدیگر برابر با  $d_1, \dots, d_N$  می باشد. هدف در اینجا بدست آوردن تخمینی از فاصله های توسط رابطه زیر می باشد که توسط  $P$  پارامتریزه شده است.

$$d(x, y) = ((x - y)^T P (x - y))^{1/2} \quad (12)$$

هدف یافتن  $P \in S_+^n$  می باشد که معیار زیر را کمینه می کنند.

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (d_i - d(x_i, y_i))^2 \quad (13)$$

یک مساله بهینه سازی محدب یا شبه محدب بر حسب  $P$  بدست آورید. همچنین روشی برای حل مساله بدست آمده ارائه دهید. برای تست این روش بدست آمده ۱۵۰ داده دو بعدی از دو توزیع تواما گوسی  $\mathcal{N}(\tilde{\mu}_2 = [\mu_{21}, \mu_{22}], \Sigma_2)$ ،  $\mathcal{N}(\tilde{\mu}_1 = [\mu_{11}, \mu_{12}], \Sigma_1)$  تولید نمایید (پارامترهای توزیع های گوسی را به دلخواه انتخاب نماید) و  $P$  را با روش ارائه شده تخمین بزنید، چه رابطه ای بین  $P$  و  $\Sigma_1, \Sigma_2$  برقرار است؟ تحلیل نمایید.

## چند نکته در رابطه با تحویل تمرین

- در صورتی که سوالی در رابطه با تمرین اول دارید لطفا با ایمیل [arian.morteza@aut.ac.ir](mailto:arian.morteza@aut.ac.ir)، [b.roshanfekr@aut.ac.ir](mailto:b.roshanfekr@aut.ac.ir) در ارتباط باشید.

- عنوان ایمیل سوالات لطفا با ساختار اسمی OPTquestion\_FullName\_StudentId\_HwNumber ارسال نمایید.
- لطفا گزارش را با فرمت pdf و با ساختار اسمی FullName\_StudentId\_HwNumber.pdf در مدل آپلود نمایید.
- در صورتی که به صورت دستنویس تمرینات را حل می کنید، لطفا فایل عکس نهایی را با کیفیت مناسب و خوانا تهیه نمایید.
- نمره تمرینات مشابه ( اعم از کد و گزارش و ...) برای تمامی طرفین درگیر تقسیم می گردد.
- شما برای تمرینات پیاده سازی در مجموع می توانید ۷ روز تاخیر داشته باشید (برای کل تمرینات جمع تاخیر های شما نباید از ۷ روز بیشتر شود) و در صورت تاخیر بیشتر از ۷ روز کسر ۵ درصد نمره از نمره کل تمرینات پیاده سازی به ازای هر روز تاخیر مد نظر قرار خواهد گرفت.