“Optimization”

Shervin Halat

98131018

Homework #2

1.

برای اثبات معادل بودن دو مسئله بهینه‌سازی کافیست ثابت کنیم که هر feasible point از یکی از مسائل دارای یک feasible point متناظر در مسئله دیگر است به طوری که هر دو در تابع هدف مربوط اشان به یک مقدار منتهی شوند.

در نتیجه:

I) ابتدا فرض می‌کنیم $\underline{x}$ نقطه‌ای feasible در مسئله اول باشد، می‌خواهیم نشان دهیم که نقطه متناظری به صورت $t = 1/(c^T x + d)$ و $y = x/(c^T x + d)$ دارد که برای مسئله دوم feasible بوده و البته مقادیر تابع هدف هر یک نیز با هم برابر باشند.

$$x \to \text{feasible} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f_i(x) \le 0 \\ Ax = b \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} Ax = b \to A\frac{y}{t} = b \to Ay = bt \checkmark \\ f_i(x) \le 0 \Rightarrow f_i(\frac{y}{t}) \le 0 \xRightarrow{\times t} \frac{1}{t} f_i(\frac{y}{t}) \le 0 \\ \Rightarrow g_i(y, t) \le 0 \checkmark \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = x/(c^T x + d) \\ t = 1/(c^T x + d) \end{array}\right\} \to x = y/t$$

$$c^T x + d = c^T x + d \Rightarrow c^T x + d = \frac{1}{t} \Rightarrow c^T \underbrace{xt}_{y} + dt = 1 \Rightarrow c^T y + dt = 1 \checkmark$$

⟸ تا اینجا نشان دادیم 2 نقطه feasible متناظر هستند. حال باید نشان دهیم که هر دو دارای مقدار تابع هدف یکسان هستند. یعنی $g_0(y, t) = \frac{f_0(x)}{c^T x + d}$

$$g_0(y, t) = t f_0(y/t) = \frac{1}{c^T x + d} \times f_0(x) \checkmark$$

⟸ تا اینجا نشان دادیم از مسئله اول به دوم رسیدیم.

حال در جهت عکس اثبات را پیش می‌بریم یعنی از مسئله‌ی دوم به مسئله‌ی اول می‌رسیم:

II) حال فرض می‌کنیم که (y, t) نقطه‌ی feasible مسئله‌ی دوم است و سعی می‌کنیم به نقطه‌ی متناظر در مسئله‌ی اول برسیم. اگر داشته باشیم $x = \frac{y}{t}$، می‌خواهیم نشان دهیم که x نقطه‌ی feasible برای مسئله‌ی اول است به طوری که متناظر (y, t) می‌باشد.

$$\left.\begin{array}{l} (y, t) \text{ feasible} \\ t > 0 \\ x = y/t \end{array}\right\} \rightsquigarrow \begin{array}{l} Ay = bt \xrightarrow[t>0]{\div t} A(y/t) = b \Longrightarrow Ax = b \checkmark \ (\mathrm{I}) \\ c^T y + dt = 1 \xrightarrow[(t>0)]{\div t} c^T(y/t) + d = \frac{1}{t} \Rightarrow c^T x + d = \frac{1}{t} \rightsquigarrow \boxed{t = \frac{1}{c^T x + d}} \checkmark \ (\mathrm{II}) \\ g_i(y, t) \le 0 \Longrightarrow t\, f_i(y/t) \le 0 \xrightarrow[t>0]{\div t} f_i(x) \le 0 \checkmark \ (\mathrm{III}) \end{array}$$

از (I) و (III) نتیجه می‌گیریم که در صورت feasible بودن (y, t) در مسئله‌ی دوم، $x = y/t$ نیز نقطه‌ای feasible برای مسئله‌ی اول خواهد بود. حال به بررسی $g_0(y,t) \stackrel{?}{=} \frac{f_0(x)}{c^T x + d}$ می‌پردازیم:

$$g_0(y,t) = t\, f_0(y/t) \stackrel{(\mathrm{II})}{=\!=} \frac{1}{c^T x + d} \times f_0(x) = \boxed{\frac{f_0(x)}{c^T x + d} = f_0(y, t)} \checkmark$$

پس نشان دادیم در حالت معکوس نیز دو نقطه‌ی feasible متناظر به مقادیر تابع هدف یکسانی منتهی می‌شوند. پس دو مسئله‌ی مورد نظر معادل می‌باشند ✓.

2.

با توجه به روابط مسئله‌ی مورد نظر در صورت اثبات اینکه محدودیت نامساوی $\text{Prob}(c^T x \geq \beta) \leq \alpha$ مربوط به یک تابع Convex است، با توجه به اینکه بقیه‌ی روابط همگی Affine هستند، محدب بودن مسئله اثبات می‌گردد.

از روابط آماری داریم: $F_x(x) = P(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{|\Sigma^{1/2}x|}\right)$ (I) تابع CDF توزیع نرمال

همچنین داریم: $\bar{\Phi}(t) = P(X \geq t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^{\infty} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du$ (II)

که تابع (II) یک تابع پیوسته کاهشی می‌باشد. (III)

حال با فرض اینکه μ برابر $c_0^T x$ باشد (میانگین متغیر $c^T x$) و واریانس $c^T x$ نیز برابر $x^T \Sigma x$ باشد، با توجه به رابطه‌ی (I) داریم:

$$\text{Prob}(c^T x \geq \beta) = \bar{\Phi}\left(\frac{\beta - c_0^T x}{\|\Sigma^{1/2} x\|}\right) \Rightarrow \text{Prob}(c^T x \geq \beta) \leq \alpha \Longrightarrow$$

$$(\beta - c_0^T x) / \|\Sigma^{1/2} x\| \geq \bar{\Phi}^{-1}(\alpha) \Longrightarrow \bar{\Phi}^{-1}(\alpha) \|\Sigma^{1/2} x\| + c_0^T x \leq \beta$$

همچنین با توجه به رابطه‌ی (II) در صورتی $\bar{\Phi}^{-1}(\alpha) \geq 0$ می‌شود که $\alpha \leq 0.5$ باشد.

لذا با توجه به اینکه در فرض سؤال $\alpha = 0.01$ است که کوچکتر از 0.5 می‌باشد، پس مسئله‌ی تعریف شده در سؤال یک مسئله‌ی Convex خواهد بود. ✓

3.

با فرض $x, c \in \mathbb{R}^n$ ، با توجه به اینکه به ازای هر x_i ، محدودیت ها مسئله کاملاً مستقل هستند، می توان بجای مسئله minimize کردن $c^T x = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$ هر جمله‌ی $c_i x_i$ را به طور جداگانه minimize کرد. یعنی:

$$\text{minimize } c_i x_i$$
$$\text{s.t. } l_i \le x_i \le u_i$$

که برای این مسئله 3 حالت مختلف ممکن است به وجود آید با توجه به مقدار c_i:

I) $c_i < 0$: در این حالت x_i بهینه برابر u_i خواهد بود.

چراکه $l_i \le x_i \le u_i \xrightarrow{\times c_i} c_i l_i \ge c_i x_i \ge c_i u_i$

$\Rightarrow \min(c_i x_i) = c_i u_i \Rightarrow \boxed{x_i = u_i}$

II) $c_i > 0$: در این حالت x_i بهینه برابر l_i خواهد بود.

چراکه $l_i \le x_i \le u_i \xrightarrow{\times c_i} c_i l_i \le c_i x_i \le c_i u_i$

$\Rightarrow \min(c_i x_i) = c_i l_i \Rightarrow \boxed{x_i = l_i}$

III) $c_i = 0$: در این حالت x_i بهینه یکتا نخواهد بود چراکه در هر صورت $x_i \cdot c_i = 0$ پس تمامی $l_i \le x_i \le u_i$ ها قبول خواهند بود.

در نتیجه برای min کردن $c^T x$ ، مقادیر بهینه x_i ها به قرار زیر اند:

$$x_i^* = \begin{cases} u_i & c_i < 0 \\ \text{don't care} & c_i = 0 \\ l_i & c_i > 0 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\text{optimal value } (p^*) = l^T c^+ + u^T c^- + 0}$$

به طوری که: $c_i^+ = \max\{c_i, 0\}$ $\quad c_i^- = \max\{-c_i, 0\}$

4.

فرض می‌کنیم $y = Ax-b$ و $y, x \in \mathbb{R}^n$

$\rightarrow |Ax-b|_1 = |y|_1$

حال برای min کردن $|y|_1$ یا به عبارتی min کردن جمع مقابل $\sum_{i=1}^{n} |y_i|$ کافیست هر یک از $|y_i|$ ها را min کنیم.

می‌دانیم که مسئله مقابل $\rightarrow$ minimize $|y_i|$

معادل است با مسئله روبرو

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad t_i \\ &\text{s.t.} \quad |y_i| \leq t_i \end{aligned}$$

که به منظور خطی بودن $\underline{LP}$ مسئله بالا، آن را به فرم زیر تغییر می‌دهیم:

$$|y_i| \leq t_i \implies y_i \leq t_i \quad , \quad -y_i \leq t_i$$

$$\implies \begin{aligned} &\text{minimize} \quad t_i \\ &\text{s.t.} \quad y_i \leq t_i \\ &\qquad -y_i \leq t_i \end{aligned} \equiv \begin{aligned} &\text{minimize} \quad t_i \\ &\text{s.t.} \quad a_i x + b_i \leq t_i \\ &\qquad -a_i x - b_i \leq t_i \end{aligned}$$

حال با قرار دادن t_i ها در یک بردار به نام T و در نظر گرفتن فرضیات بالا $\implies$ به مسئله LP معادل زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad 1^T \cdot T \\ &\text{s.t.} \quad Ax+b \leq T \\ &\qquad -(Ax+b) \leq T \end{aligned}$$

همانطور که می‌بینیم تابع هدف و تمامی محدودیت‌های مسئله به فرم Affine هستند. ✓

5.

با توجه به فرضیات در راهنمای سؤال، فرض می‌کنیم که $y_j = x_j^2$ به طوری که $x, y \in \mathbb{R}^n$.
در نتیجه $y_j \geq 0$ همچنین از آنجا که $x_j \geq 0$ در نتیجه رابطه‌ی قبل را به صورت $x_j = y_j^{\frac{1}{2}}$ بازنویسی می‌کنیم. حال با جایگذاری $y_j^{\frac{1}{2}}$ در x_j مسئله‌ی بهینه‌سازی روابط به فرم زیر تغییر می‌یابند:

$$f_i(x) = \frac{1}{2} x^T P_i x + q_i^T x + r_i \qquad P: \text{z-matrix} \ , \ q \leq 0$$

$$= \frac{1}{2} (y^{\frac{1}{2}})^T P_i (y^{\frac{1}{2}}) + q_i^T y^{\frac{1}{2}} + r_i$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{(P_i)_{jj} y_j}_{\mathrm{I}} + \frac{1}{2} \sum_{j \neq k}^{n} \underbrace{(P_i)_{jk} (y_j y_k)^{\frac{1}{2}}}_{\mathrm{II}} + \sum_{j=1}^{n} \underbrace{(q_i)_j y_j^{\frac{1}{2}}}_{\mathrm{III}} + \underbrace{r_i}_{\mathrm{IV}}$$

حال باید بررسی کنیم که $f_i(x)$ ها محدب باشند. برای این کار کافیست نشان دهیم هر یک از ترم‌های رابطه‌ی به دست آمده برحسب y_j به تنهایی محدب باشد:

(I) $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (P_i)_{jj} y_j$: محدب است چرا که رابطه خطی است ✓ (I)

(II) $\frac{1}{2} \sum_{i \neq k}^{n} (P_i)_{jk} (y_j y_k)^{\frac{1}{2}}$: P_{ij} منفی است. برای محدب بودن عبارت مقابل باید ثابت کنیم $(y_j y_k)^{\frac{1}{2}}$ مقعر است که اثبات آن به طور خلاصه در زیر آمده:

$$(y_j y_k)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{\text{ماتریس هسین}} (H) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{به طوری که}} \begin{array}{l} a, d \leq 0 \\ b, c \geq 0 \end{array}$$

با توجه به علامت‌های a، b، c و d می‌بینیم که (−H)، Strictly Diagonally Dominant است پس خود (H)، Negative Semi Definite است پس $(y_j y_k)^{\frac{1}{2}}$ مقعر می‌باشد.
پس رابطه‌ی (II) محدب است. ✓

حال با توجه به اینکه $y_j^{1/2}$ نیز مقعر بوده و q_i ها نیز   8 $\sum_{j=1}^{n} (q_i)_j \, y_j^{1/2}$ (III)

منفی هستند پس رابطه (III) محدب است. ✓

رابطه مقابل نیز به وضوح محدب است. ✓   8 r_i (IV)

پس در نهایت $f_i(x)$ نیز حاصل جمع توابعی محدب بوده و خود

محدب است.

پس مسئله را به مسئله‌ای با تابع هدف و توابع محدودیت نامساوی محدب و

quadratic تبدیل کردیم یعنی QCQP. ✓

6.

با توجه به رابطه مشتق جهتی در α های کوچک داریم:

$$f(x_k+\alpha p) = f(x_k) + \alpha p^T \nabla f_k$$

پس برای نشان دادن جهت کاهشی کافیست $p^T\nabla f_k \le 0$:

$$\Rightarrow x_k = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \quad \nabla f_k = \begin{bmatrix} 2(x_1+x_2^2) \\ 2(x_1+x_2^2)\times 2x_2\end{bmatrix} \quad P=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow p^T\nabla f(x_k) = [-1\ \ 1]\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} = -2 \le 0 \ \checkmark$$

لذا جهت P یک Descent Direction می‌باشد. ✓

حال برای یافتن طول گام بهینه باید به دنبال minimize کردن رابطه زیر باشیم:

$$\phi(\alpha) = f(x+\alpha p) \qquad \alpha>0$$

$$\Rightarrow \phi(\alpha) = f\left(\begin{bmatrix}1-\alpha\\0+\alpha\end{bmatrix}\right) = ((1-\alpha)+\alpha^2)^2 = \underbrace{(\alpha^2-\alpha+1)^2}_{g(h(\alpha))} = \phi(\alpha)$$

به طوری که

$$\text{Convex} \leftarrow \phi(\alpha) \Leftarrow \underbrace{h(\alpha)=\alpha^2-\alpha+1}_{\text{convex}} \ \text{و}\ \underbrace{g'(\alpha)=2\alpha}_{\substack{\text{nondecreasing}\\ \text{for } \alpha>0}} \ \text{و}\ \underbrace{g(\alpha)=\alpha^2}_{\text{convex}}$$

$$\Rightarrow \phi'(\alpha)=0 \Rightarrow 2(\alpha^2-\alpha+1)(2\alpha-1)=0 \Rightarrow 2\alpha-1=0 \Rightarrow \boxed{\alpha=\frac{1}{2}}$$

پس طول گام بهینه برابر $\frac{1}{2}$ می‌باشد. ✓

7.

از روش برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم بردارهای Conjugate مستقل خطی نباشند یعنی

$$\sum_{i=1}^{n} c_i P_i = 0 = c_1P_1 + c_2P_2 + \dots + c_nP_n = 0$$

در نتیجه حداقل یک $i=k$ ای وجود دارد که $c_k \neq 0$ باشد. (I)

حال طرفین تساوی بالا را در $\underbrace{P_k^T A}$ ضرب می‌کنیم. با توجه به خواص بردارهای Conjugate خواهیم داشت:

$$\xrightarrow{\times P_k^T A} \underbrace{c_1 P_k^T A P_1}_{0} + \dots + c_k P_k^T A P_k + \dots + \underbrace{c_n P_k^T A P_n}_{0} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow c_k \underbrace{P_k^T A P_k} = 0 \\ &P_k^T \underline{A} P_k > 0 \\ &\text{Positive Definite} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow c_k = 0 \ \times \quad (II)$$

با فرض مستقل خطی نبودن به تناقض $c_k = 0$ رسیدیم. پس بردارهای Conjugate مستقل خطی هستند.

به طور کلی تعداد جهت‌های Conjugate نمی‌تواند از بُعد فضای مورد بحث بیشتر باشد چراکه حداکثر Rank یک ماتریس $n \times n$ برابر $\underline{n}$ می‌باشد که بیان کننده حداکثر تعداد بردارهای مستقل خطی در یک فضا می‌باشد. اثبات دیگر این امر در زیر آمده است:

فرض کنیم در فضای $\underline{n}$ بعدی، $n+1$ بردار مستقل خطی داریم آنگاه $\leftarrow Ax = 0$ به طوری که $A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_{n+1} \end{bmatrix}$ و A دارای بُعد $n \times (n+1)$ می‌باشد. پس معادله $Ax = 0$ دارای بی‌نهایت جواب می‌باشد که اگر یکی از بی‌شمار جواب‌ها که $\underline{x_i \neq 0}$ برابر با صفر نیست را در نظر بگیریم داریم:

$$Ax_i = 0 \xRightarrow{x_i \neq 0} \sum_{j=1}^{n+1} (x_i)_j v_j = 0 \Longrightarrow \text{بردارها مستقل خطی نیستند} \ \times$$

پس فرض اولیه اشتباه بوده و حداکثر تعداد جهت‌های Conjugate برابر n می‌باشد. ✓

8.

فرض می‌کنیم

$V_k = x_0 - x^*$ (eigenvector برای ماتریس Q)

$$\Rightarrow Q(x_0 - x^*) = \lambda (x_0 - x^*) \quad (\mathrm{I})$$

هم‌چنین چون تابع ما Quadratic Convex است پس داریم:

$$Qx^* = b \quad (\mathrm{II})$$

هم‌چنین برای روش Line Search داریم

$$x_1 = x_0 - \alpha \underbrace{\nabla f(x_0)}$$

$$x_1 = x_0 - \alpha (Qx_0 - b) \xrightarrow{\mathrm{II}} x_1 - x_0 = -\alpha (Qx_0 - Qx^*)$$

$$\Rightarrow x_0 - x_1 = \alpha (Q(x_0 - x^*)) \xrightarrow{\mathrm{I}} x_0 - x_1 = \alpha \lambda (x_0 - x^*)$$

$$\Rightarrow x_0 - x_1 = \alpha' (x_0 - x^*) \quad (\mathrm{III})$$

حال با توجه به اینکه در رابطه (III) بدست آوردیم که از مبدأ x_0، هر دو x_1 و x^* در یک راستا قرار دارند و الگوریتم مورد استفاده Line Search می‌باشد، درنتیجه x_1 می‌بایست با x^* برابر باشد در غیر اینصورت طول گام محاسبه شده بهینه نبوده و این غیرممکن است چراکه تابع مورد نظر Convex بوده و لذا هر خط روی آن نیز Convex است و دارای یک مینیمم سراسری می‌باشد.

لذا $\boxed{x_1 = x^*}$ ✓