稳定性理论

5.3 线性系统的稳定性

5.3.1 稳定性和状态转移矩阵

5.3.2 线性自治系统

5.3 线性系统的稳定性

5.3.1 稳定性和状态转移矩阵

线性系统

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \qquad t \geq 0. \tag{1}$$

Remark 1. 系统(1)的解可以表示为

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0), \tag{2}$$

其中$\Phi(\cdot,\cdot)$为状态转移矩阵，满足下列两个方程：

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0), \forall t \geq t_0 \geq 0. \tag{3}$$

$$\Phi(t_0, t_0) = I, \forall t_0 \geq 0. \tag{4}$$

Proof. (1)的通解为$x(t)=\psi(t)C$, 其中$\psi(t)$为基解矩阵. 由

$x(t_0)=\psi(t_0)C$, 得$C=\psi^{-1}(t_0)x(t_0)$, 从而

$$x(t)=\psi(t)\psi^{-1}(t_0)x(t_0)=\Phi(t,t_0)x(t_0).$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Phi(t,t_0)&=\frac{d}{dt}\psi(t)\psi^{-1}(t_0)=A(t)\psi(t)\psi^{-1}(t_0)\\&=A(t)\Phi(t,t_0),\end{aligned}$$

$$\Phi(t_0,t_0)=\psi(t_0)\psi^{-1}(t_0)=I.$$

Theorem 1. 零解在t_0处稳定 $\Leftrightarrow \sup_{t\geq t_0}\|\Phi(t,t_0)\|_i \triangleq m(t_0) < \infty$.

Proof. "$\Leftarrow$" $\forall \epsilon > 0, \exists\, \delta = \frac{\epsilon}{m(t_0)}$, 当$\|x(t_0)\| < \delta$时,

$$\|x(t)\| = \|\Phi(t,t_0)x(t_0)\| \leq \|\Phi(t,t_0)\|_i \cdot \|x(t_0)\|$$
$$< m(t_0)\frac{\epsilon}{m(t_0)} = \epsilon.$$

$\Rightarrow$ 零解在t_0处稳定.

"$\Rightarrow$" (反证法) 若$\|\Phi(\cdot,t_0)\|_i$无界, 下证零解在t_0处是不稳定的, 即证$\exists\, \epsilon_0 > 0$, 对$\forall\delta > 0, \exists\|x(t_0)\| < \delta$和$t_1$, 使得
$\|x(t_1;t_0,x(t_0))\| \geq \epsilon_0$.

取$0 < \delta_1 < \delta$, 由于$\|\Phi(\cdot, t_0)\|_i$为无界函数，存在$t_1 \geq t_0$, 使得

$\|\Phi(t_1, t_0)\|_i > \frac{\epsilon_0}{\delta_1}$. 选取向量$v$, $\|v\| = 1$, 满足$\|\Phi(t_1, t_0)v\| =$

$\|\Phi(t_1, t_0)\|_i$. 令$x(t_0) = \delta_1 v$, 则$\|x(t_0)\| = \delta_1 < \delta$, 且

$$\begin{aligned}\|x(t_1)\| = \|\Phi(t_1, t_0)x(t_0)\| = \|\delta_1 \Phi(t_1, t_0)v\| \\ = \delta_1 \|\Phi(t_1, t_0)\|_i > \epsilon_0,\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$零解在t_0处是不稳定.

Theorem 2. 下面两个结论是等价的：

(i) 零解在t_0处是稳定的；

(ii) 零解在t_1处是稳定的, $\forall t_1 \geq t_0$.

Proof. “(ii) $\Longrightarrow$(i)”, 显然成立.

“(i) $\Longrightarrow$(ii)”, 由Th1, 有$\sup\limits_{t\geq t_0}\|\Phi(t,t_0)\|_i < \infty$.

对$\forall t_1 \geq t_0$, 有

$$\Phi(t,t_0)\cdot[\Phi(t_1,t_0)]^{-1} = \psi(t)\psi^{-1}(t_0)\cdot[\psi(t_1)\psi^{-1}(t_0)]^{-1}$$

$$= \psi(t)\psi^{-1}(t_0)\cdot\psi(t_0)\cdot\psi^{-1}(t_1) = \psi(t)\psi^{-1}(t_1) = \Phi(t,t_1).$$

$$\Rightarrow \|\Phi(t,t_1)\|_i \le \|\Phi(t,t_0)\|_i \cdot \|[\Phi(t_1,t_0)]^{-1}\|_i,$$

$\Rightarrow \sup_{t\ge t_1}\|\Phi(t,t_1)\|_i < \infty \Rightarrow$ 零解在t_1处是稳定的.

Theorem 3. 下面三个结论是等价的：

(i) 零解在t_0处是渐近稳定的；

(ii) 零解在t_0处是全局渐近稳定的；

(iii) $\lim_{t\to\infty}\|\Phi(t,t_0)\|_i = 0.$

Proof: “(ii)⟹(i)” 显然成立,

“(iii)⟹(ii)”. 由 $\lim_{t\to\infty}\|\Phi(t,t_0)\|_i = 0$ 及$\|\Phi(t,t_0)\|_i$的连续性, 知

$\|\Phi(t,t_0)\|_i$ 在 $[t_0,\infty)$上有界. $\overset{Th1}{\Longrightarrow}$ 零解稳定. $\forall x(t_0)\in R^n$, 有

$\|x(t)\| \le \|\Phi(t,t_0)\|_i \cdot \|x(t_0)\| \to 0(t\to\infty). \Rightarrow \lim_{t\to\infty} x(t) = 0 \Longrightarrow$

零解是全局吸引.

“(i)⟹(iii)”. 若 (iii) 不成立, 则存在 $\Phi(t,t_0)$ 的分量 $\Phi_{ij}(t,t_0)$,

使得 $\lim_{t\to\infty}\Phi_{ij}(t,t_0) \nrightarrow 0$. 令 $x(t_0) = \delta e_j = (0,\cdots,\delta,\cdots,0)^T$.

注意到

$$x(t)=\Phi(t,t_0)x(t_0)=\delta(\Phi_{1j}(t,t_0),\cdots,\Phi_{ij}(t,t_0),\cdots,\Phi_{nj}(t,t_0))^T.$$

$$\lim_{t\to\infty}x_i(t)=\delta\lim_{t\to\infty}\Phi_{ij}(t,t_0)\nrightarrow 0.\Rightarrow$$ 零解不吸引. 矛盾.

Theorem 4. 零解是一致稳定 $\Leftrightarrow$ $m_0\triangleq\sup\limits_{t_0\geq 0}m(t_0)=$

$$\sup_{t_0\geq 0}\sup_{t\geq t_0}\|\Phi(t,t_0)\|_i<\infty.$$

Proof: "$\Leftarrow$" $\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\dfrac{\varepsilon}{m_0}$, 当 $\|x(t_0)\|<\delta$ 时, 有

$$\|x(t)\| < \|\Phi(t,t_0)\|_i \cdot \|x(t_0)\| < m_0 \cdot \frac{\varepsilon}{m_0} = \varepsilon.$$

“ $\Rightarrow$ ”(反证法)假设$m(t_0)$为关于 t_0 的一个无界函数.

下证零解不是一致稳定. 则存在$\Phi(t,t_0)$ 的一个分量$\Phi_{ij}(t,t_0)$, 使得

$\sup\limits_{t\geq t_0}\left|\Phi_{ij}(t,t_0)\right|$ 为关于t_0 的一个无界函数. 令$x(t_0)=e_j$,则

$\frac{\|x(t)\|}{\|x(t_0)\|}=\frac{\|\Phi(t,t_0)x(t_0)\|}{\|x(t_0)\|}=\sum_{i=1}^{n}\left|\Phi_{ij}(t,t_0)\right|$ 不是一个与 t_0 无关的有界量

$\Rightarrow$ 零解不是一致稳定.

Theorem 5. 零解是(全局)一致渐近稳定 $\Leftrightarrow$

(i) $\sup\limits_{t_0\geq 0}\sup\limits_{t\geq t_0}\|\Phi(t,t_0)\|_i < \infty$;

(ii) $\|\Phi(t,t_0)\|_i \to 0(t\to\infty)$, 关于$t_0$ 一致;

$(\forall \varepsilon > 0, \exists T = T(\varepsilon), s.t. \|\Phi(t,t_0)\|_i < \varepsilon,$ 对 $\forall\, t \geq\ t_0 + T, \forall t_0 \geq 0.\ )$

Theorem 6. 零解是一致渐近稳定 $\Leftrightarrow$ 存在两个正常数 m 和 λ 使得

$$\|\Phi(t,t_0)\|_i \leq m\exp[-\lambda(t-t_0)], \forall\, t \geq\ t_0 \geq 0. \tag{5}$$

Remark 2. Th6表明: 对线性系统, 一致渐近稳定性 $\Leftrightarrow$ 指数稳定性.

Proof: " $\Leftarrow$ ". 若 (5) 成立, 则 $Th5$ 中的(i),(ii) 均成立;

" $\Rightarrow$ ". 存在两个常数 μ 和 T 使得,

$$\|\Phi(t,t_0)\|_i \le \mu, \forall\, t \ge\ t_0 \ge 0. \tag{6}$$

$$\|\Phi(t_0+t,t_0)\|_i \le \frac{1}{2}, \forall\, t \ge T,\ \forall t_0 \ge 0. \tag{7}$$

特别, 由 (7) 得到 $\|\Phi(t_0+T,t_0)\|_i \le \frac{1}{2}, \forall t_0 \ge 0.$

给定任意的 t_0 和 $t \ge t_0$, 选取一个整数 k 使得 $t_0 + kT \le t < t_0 + (k+1)\,T$. 则有

$$\Phi(t,t_0)=\Phi(t,t_0+kT)\Phi(t_0+kT,t_0+kT-T)\cdots\Phi(t_0+T,t_0)$$

$$\Rightarrow \|\Phi(t,t_0)\|_i \le \|\Phi(t,t_0+kT)\|_i \cdot \prod_{j=1}^{k} \|\Phi(t_0+jT,t_0+jT-T)\|_i$$

$$\le \mu\left(\frac{1}{2}\right)^k \le (2\mu)2^{-(t-t_0)/T}.$$

取 $m=2\mu,\lambda=\dfrac{ln2}{T}$,则 (5)满足.

5.3.2 线性自治系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \tag{8}$$

Theorem 7 考虑线性自治系统(8)，有

①零解是渐近稳定 $\Leftrightarrow$ A的全部特征根都有负实部；

②零解是稳定 $\Leftrightarrow$ A的全部特征根都有非正实部，且具有零实部的特征根仅对应单重初等因子(即此特征根所对应的若当块是一阶的)；

③零解是不稳定 $\Leftrightarrow$ 或 A有正实部的特征根，或者有零实部的特征根对应多重初等因子(即此特征根所对应的若当块是高于一阶的).

Proof $x = x(t; t_0, x_0) = e^{A(t-t_0)}x_0$

由线性代数理论，存在非奇异矩阵Q，使得$A = QJQ^{-1}$，其中

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & & \\ 0 & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{pmatrix}, J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & \lambda_k \end{pmatrix},$$

J_k为对应与特征根λ_k的Jordan块$(k = 1,2,\cdots,r)$.

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 = e^{QJQ^{-1}(t-t_0)}x_0 = e^{J(t-t_0)}x_0$$

$$e^{J(t-t_0)} = \begin{pmatrix} e^{J_1(t-t_0)} & 0 & & \\ 0 & e^{J_2(t-t_0)} & & \\ & & \ddots & 0 \\ & & 0 & e^{J_r(t-t_0)} \end{pmatrix},$$

$$e^{J_k(t-t_0)} = e^{\lambda_k(t-t_0)} = \begin{pmatrix} 1 & t-t_0 & \frac{(t-t_0)^2}{2!} & \cdots & \frac{(t-t_0)^{n_k-1}}{(n_k-1)!} \\ 0 & 1 & t-t_0 & \cdots & \frac{(t-t_0)^{n_k-2}}{(n_k-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t-t_0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

其中n_k为特征根λ_k的重数。

取$V(x) = x^T P x$，P为实对称矩阵，则

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T A^T P x + x^T P A x$$

$$= x^T (A^T P + PA) x = -x^T Q x$$

其中$A^T P + PA = -Q.$ (9)

Theorem 8.若A的特征值λ_i均满足$\lambda_i + \lambda_j \neq 0\ (i, j = 1,2,\cdots,n)$，则对任意实对称矩阵$Q$，都有唯一的实对称矩阵$P$满足$A^T P + PA = -Q$.

Remark 3. 若A的所有特征值均具有负实部，则$\lambda_i + \lambda_j \neq 0$ $(i,j = 1,2,\cdots,n)$满足.

Definition 1. 称A为Hurwitz矩阵，若A的所有特征值均具有负实部.

Lemma 1. 若A为Hurwitz矩阵，则对任意给定的实对称矩阵Q, 方程(9)的唯一解$P = \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt$.

Proof. 由Th8可知, 若A为Hurwitz矩阵，则方程(9)的解P是唯一存在的. 令$M = \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt$, 下证$A^T M + MA = -Q$, 则由解的唯一性可得$P = \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt$.

$$A^T M + MA = \int_0^\infty \left[A^T e^{A^T t} Q e^{At} + e^{A^T t} Q e^{At} A\right] dt$$

$$= \int_0^\infty d\left[e^{A^T t} Q e^{At}\right] = -Q.$$

Theorem 9 给定一个矩阵$A \in R^{n\times n}$, 下面三个结论是等价的:

(i) A为Hurwitz矩阵;

(ii)存在某个正定矩阵$Q \in R^{n\times n}$, 使得(9)有唯一解矩阵P, 且P为正定阵;

(iii)对每一个正定矩阵$Q \in R^{n\times n}$, (9)都有唯一解矩阵P, 且P为正定阵;

Proof. “(iii) ⇒(ii)” 显然成立；

“(ii) ⇒(i)”,取$V(x) = x^T Px$, 则$\dot{V} = -x^T Qx$.

$\Rightarrow$ 零解是渐近稳定 $\overset{Th7}{\Longrightarrow}$ A为Hurwitz矩阵.

“(i) ⇒(iii)”,由Lemma1,若A为Hurwitz矩阵,则对每一个矩阵$Q \in R^{n\times n}$, (9)都有唯一解$P = \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt$.

下面只需证明：当Q为正定矩阵时, P也为正定矩阵. 由于Q为正定矩阵,存在非奇异矩阵$M \in R^{n\times n}$,使得$Q = M^T M$,从而

$x^TPx = x^T\int_0^\infty e^{A^Tt}M^TMe^{At}dt\ x = \int_0^\infty \|Me^{At}x\|^2\,dt \geq 0$, 且

$x^TPx = 0 \Rightarrow Me^{At}x \equiv 0$, 对$\forall t \geq 0 \Rightarrow Mx = 0 \Rightarrow x = 0$.

因此, P为正定矩阵.

例1 令$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

由$A^TP + PA = -Q$可解得$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}$,不是正定矩阵.

由Th9可得,A的所有特征值并不是都具有负实部.

例2 令$A=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}, Q=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

由$A^TP+PA=-Q$无法解得矩阵P

$\Rightarrow$ 并不是A的所有特征值都具有负实部.

例3 令$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 4 & -3\end{pmatrix}, Q=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

由$A^TP+PA=-Q$可解得$P=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}42 & -11\\ -11 & 5\end{pmatrix}$,为正定矩阵.

由Th9可得,A的所有特征值都具有负实部.

Theorem 10. 考虑$A^T P + PA = -Q$,假定$\lambda_i + \lambda_j \neq 0(i,j = 1,2,\cdots n)$成立.如果$Q$为正定矩阵,则矩阵$P$具有的负特征值的数目与矩阵$A$具有的正实部特征值的数目相等.

Remark 4 Th10表明,若一个线性自治系统是由于A具有正实部的特征值而导致的不稳定性,则可由Lyapunov函数法来判断零解的不稳定性,取$V(x) = -x^T Px, \dot{V} = x^T Qx$.