Lyapunov稳定性理论

参考文献

1. 常微分方程定性与稳定性方法，马知恩，周义仓编著，科学出版社；
2. 稳定性的理论、方法和应用，廖晓昕，华中科技大学出版社；
3. Lyapunov(李雅普诺夫) 1892年，博士论文《论运动稳定性的一般问题》。
4. Nonlinear Systems Analysis, M. Vidyasagar, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

1. 稳定性的定义和例子

1.1 稳定性的定义

1.2 正定函数(Positive definite function)

1.1 稳定性的定义

例1. (初值的微小变化对不同系统的影响不同)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax \\ x(0) = x_0 \end{cases} \Longrightarrow x(t) = x_0 e^{at}, t \geq 0.$$

(1) $a > 0$，无论$|x_0|$多么小，只要$|x_0| \neq 0$，有$|x(t)| \to +\infty (t \to +\infty)$；

(2) $a < 0$，$|x(t)| \leq |x_0|$.

考虑

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f\big(t, x(t)\big), \qquad t \geq t_0, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1}$$

其中$x(t) \in \mathbb{R}^n, f: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，满足解的存在、唯一性定理的条件，$x(t; t_0, x_0)$的存在区间为$[t_0, +\infty)$，且

$$f(t, 0) \equiv 0, \qquad \forall t \geq t_0. \tag{2}$$

Definition 1. $x^* \in \mathbb{R}^n$称为(1)的平衡点(equilibrium point) $\Leftrightarrow$ $f(t, x^*) \equiv 0, \forall t \geq t_0$.

Remark 1. 若$\bar{x}(t) = \bar{x}(t; t_0, \bar{x}_0)$是(1)的一个解 (固定解)，$x(t) = x(t; t_0, x_0)$为(1)的另外一个解 (动解).

令$y(t) = x(t) - \bar{x}(t)$，则有

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= f\big(t, x(t)\big) - f\big(t, \bar{x}(t)\big) \\ &= f\big(t, y(t) + \bar{x}(t)\big) - f\big(t, \bar{x}(t)\big) \\ &\triangleq g\big(t, y(t)\big), \qquad g(t, 0) \equiv 0, \forall t \geq t_0.\end{aligned}$$

Definition 2.

- 若$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon, t_0) > 0$，当$\|x_0\| < \delta$时，有 $\|x(t; t_0, x_0)\| < \epsilon, \forall t \geq t_0$，则称(1)的零解在 t_0 处是稳定的，否则称在t_0处是不稳定的.
- 若$\delta = \delta(\epsilon)$与$t_0$无关，则称零解在$[t_0, +\infty)$上是一致稳定.

Definition 2.

- 零解在t_0处是不稳定的$\Leftrightarrow \exists \epsilon_0 > 0$，对$\forall \delta > 0, \exists x_0$满足$\|x_0\| < \delta$和$t_1 \geq t_0$使得$\|x(t_1; t_0, x_0)\| \geq \epsilon_0$.

例2. 考虑Van der Pol (范德堡尔) 振子

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + (1 - x_1^2)x_2, \end{cases}$$

$x_1 = x_2 = 0$为平衡点，不稳定.

Definition 3.

(1) 零解在t_0处是吸引的 (attractive) $\Leftrightarrow \exists \eta(t_0)$，当$\|x_0\| < \eta(t_0)$，有$\|x(t;t_0,x_0)\| \to 0\ (t \to +\infty)$，并称$U = \{x \mid \|x\| < \eta(t_0)\}$为零解的一个吸引域 (attractive region)；

(2) 零解在$[t_0,+\infty)$上是一致吸引的 (uniformly attractive) $\Leftrightarrow$ $\exists \eta > 0$，当$\|x_0\| < \eta$时，有$\|x(t;t_0,x_0)\| \to 0\ (t \to +\infty)$ uniformly in t_0, x_0.

Definition 4.

(1) 零解是渐近稳定的($asymptotically\ stable$) $\Leftrightarrow$ 稳定+吸引；

(2) 零解是一致渐近稳定的

($uniformly\ asymptotically\ stable$) $\Leftrightarrow$ 一致稳定 +一致吸引；

(3) 零解是全局渐近稳定的(globally asymptotically stable) $\Leftrightarrow$

稳定+全局吸引(U= $\mathbb{R}^n$).

例3. 证明$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=-x_2\\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_1\end{cases}$的零解是一致稳定, 但不吸引.

证明：过(t_0,x_{10},x_{20}) 的解为:

$$\begin{cases}x_1(t)=x_{10}\cos(t-t_0)-x_{20}\sin(t-t_0)\\ x_2(t)=x_{10}\sin(t-t_0)+x_{20}\cos(t-t_0)\,.\end{cases}$$

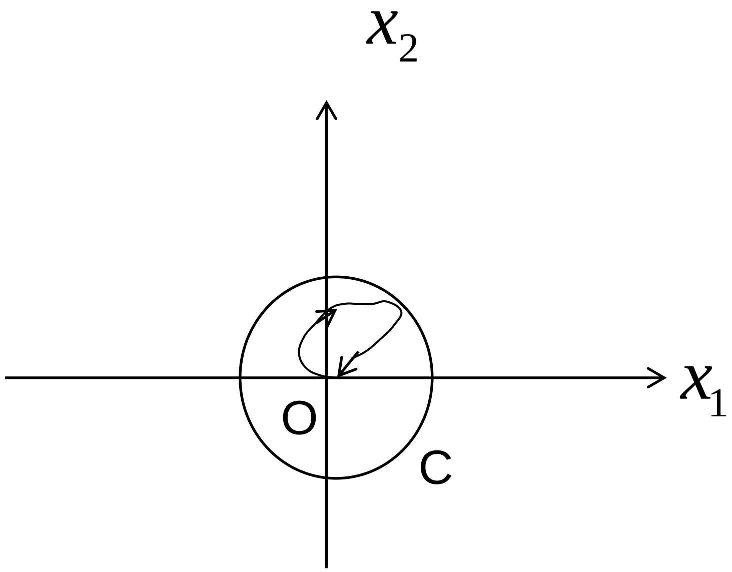
$$\Longrightarrow \|x(t)\|=\sqrt{{x_1}^2(t)+{x_2}^2(t)}=\sqrt{{x_{10}}^2+{x_{20}}^2}=\|x_0\|.$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon$, 当 $\|x_0\| < \delta$ 时, 有 $\|x(t)\| < \varepsilon, t \geq t_0$.

$\Longrightarrow$ 零解一致稳定.

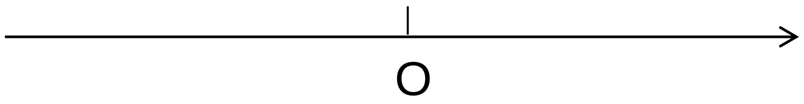
但 $\lim\limits_{t \to +\infty} \|x(t)\| = \lim\limits_{t \to +\infty} \|x_0\| = \|x_0\| > 0$. $\Longrightarrow$ 零解不吸引.

例4. 吸引但不稳定的例子.



例5. 小球在桌面上滚动.

①



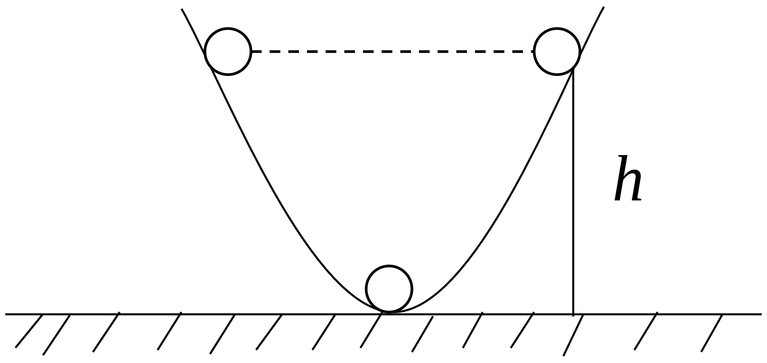
$Position\ r(t)$

平衡点 $r = r_0, \dot{r} = 0$. 定义 $x(t) = \begin{pmatrix} r(t) \\ \dot{r}(t) \end{pmatrix}$, 则

$$\|x(t)\| = \sqrt{r^2(t) + \dot{r}^2(t)} = \sqrt{{r_0}^2 + 0^2} = \|x(0)\|, t \geq 0.$$

$\Rightarrow$ 平衡点 $\begin{pmatrix} r_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是稳定的.

② 无摩擦



平衡点 $r=0, \dot{r}=0$, 稳定但不吸引.

③ 有摩擦

平衡点 $r=0, \dot{r}=0$, 为渐近稳定的.

例6. 证明: $\frac{dx}{dt}=(6t\sin t-2t)x$ 的零解是稳定的, 但不是一致稳定.

证明: 过 $x(t_0)=x_0$ 的解为:

$$x(t)=x(t;t_0,x_0)=x_0\exp\{6\sin t-6t\cos t-t^2-$$
$$6\sin t_0+6t_0\cos t_0+t_0^2\}.$$

$$\Rightarrow |x(t)|\le |x_0|\cdot\exp\{12+6|t_0|+t_0^2\}\cdot\exp\{-t^2+6|t|\}.$$

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-t^2+6|t|} = 0 \Longrightarrow \exists\, M > 0, s.t.\, e^{-t^2+6|t|} \le M(t \ge t_0).$$

$$\Longrightarrow |x(t)| \le M|x_0| \cdot \exp\{12 + 6|t_0| + t_0^2\}.$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon \exp\{-(12 + 6|t_0| + t_0^2)\}/M$, 当$|x_0| < \delta$, 有

$|x(t)| < \varepsilon. \Longrightarrow$ 零解是稳定的.

下证零解不是一致稳定. 取$t_0 = 2n\pi$, $t = (2n+1)\pi$，则

$$x\big((2n+1)\pi; 2n\pi, x_0\big) = x_0 e^{(4n+1)\pi(6-\pi)}.$$

若零解是一致稳定，则对$\epsilon = 1, \exists\delta > 0$, 当$|x_0| < \delta$时，有

$$|x(t; t_0, x_0)| < 1, (t \geq 2n\pi)\ .$$

但$|x((2n+1)\pi; 2n\pi, x_0)| = |x_0| e^{(4n+1)\pi(6-\pi)} \to +\infty (n \to \infty)$,

矛盾.

Definition 5 ① **周期系统：** $\dot{x}(t) = f(t, x)$, 其中

$f(t+T, x) = f(t, x), \forall t \geq t_0, x \in \mathbb{R}^n, T > 0$为常数.

② 自治系统：$\dot{x}(t) = f(x)$.

Theorem 1 若(1)为周期系统，则下列两个结论成立:

(1) 零解是稳定 $\Leftrightarrow$ 零解是一致稳定;

(2) 零解是渐近稳定 $\Leftrightarrow$ 零解是一致渐近稳定.

1.2 正定函数 (positive definite function)

Definition 6 $\alpha(\cdot)$ 为 $\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$的连续函数, 称$\alpha(\cdot) \in K \Leftrightarrow$

(i) $\alpha(\cdot)$单调不减;

(ii) $\alpha(0) = 0$;

(iii) $\alpha(p) > 0, \forall p > 0.$

若进一步, $\lim_{p \to +\infty} \alpha(p) = +\infty$,

则称 $\alpha \in KR$.

Definition 7 ①设 $V(t,x)$ 为 $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ 连续函数,称 $V(t,x)$ 为局部正定函数 **(l.p.d.f)** $\Leftrightarrow$ (i) $V(t,0) = 0, \forall t \geq t_0$; (ii) $V(t,x) \geq \alpha(||x||)$, 其中 $\alpha(\cdot) \in K$, $x \in B_r = \{x| \parallel x \parallel \leq r\}$,$r > 0$.

②若(ii)改为 $V(t,x) \geq \alpha(\parallel x \parallel)$, 其中$\alpha(\cdot) \in KR$, $x \in \mathbb{R}^n$, 则称 $V(t,x)$ 为正定函数**(p.d.f)**.

Lemma 1. 设$W(x)$为 $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ 连续函数.

① $W(x)$为局部正定函数 $\Leftrightarrow$ (i) $W(0)=0$, (ii) $W(x)>0, \forall x \neq 0$ 且$x \in B_r$.

②$W(x)$为正定函数 $\Leftrightarrow$ (i) $W(0)=0$, (ii) $W(x)>0, \forall x \neq 0$,

(iii) $W(x) \to +\infty, \| x \| \to +\infty$.

Proof. ① " $\Rightarrow$ " 成立;

" $\Leftarrow$ " 定义 $\alpha(p)=\inf\limits_{p\le\|x\|\le r} W(x)$，则有 $\alpha(0)=0$, $\alpha(p)>0$, $\forall p>0$, $\alpha(p)$为单调不减 $\Rightarrow \alpha(\cdot)\in K$.

$$\alpha(\| x \|)=\inf_{\|x\|\le\|y\|\le r} W(y)\le W(x).$$

②" $\Rightarrow$ " 显然成立;

" $\Leftarrow$ " 定义 $\alpha(p)=\inf\limits_{p\le\|x\|} W(x)$,则有 $\alpha(0)=0$, $\alpha(p)>0$, $\forall p>0$, $\alpha(p)$为单调不减 ,且 $\lim\limits_{p\to+\infty}\alpha(p)=+\infty$， $\Rightarrow \alpha(\cdot)\in KR$.

$$\alpha(\|x\|)=\inf_{\|x\|\le\|y\|} W(y)\le W(x)$$

Lemma 2. 设 $V(t,x)$ 为 $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ 连续函数, $V(t,0)=0$.

① $V(t,x)$ 为局部正定函数 ⇔存在一个局部正定函数 $W(x): \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$使得$V(t,x) \ \geq W(x), \forall t \geq t_0, x \in B_r$.

② $V(t,x)$ 为正定函数 ⇔ 存在一个正定函数$W(x): \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$使得$V(t,x) \ \geq W(x), \forall t \geq t_0, x \in \mathbb{R}^n$.

Proof. ① “ $\Leftarrow$ ” 由于$W(x)$为局部正定函数,存在$\alpha(\cdot) \in K$,使得 $W(x) \geq \alpha(\| x \|), x \in B_r$,从而$V(t,x) \geq \alpha(\| x \|), \forall t \geq t_0$, $x \in B_r$.

“ $\Rightarrow$ ” 由于$V(t,x)$为局部正定函数,存在$\alpha(\cdot) \in K$,使得 $V(t,x) \geq \alpha(\| x \|), \forall t \geq t_0, x \in B_r$.

取$W(x) = \alpha(\|x\|)$，则 $W(0) = 0$，$W(x) > 0$，$\forall x \in B_r$且$x \neq 0$.
i.e.， $W(x)$为局部正定函数.

Definition 8. 设$V(t,x)$: $R_+ \times R^n \to R$为连续函数，称 $V(t,x)$具有无穷小上界$\Leftrightarrow \exists \beta(\cdot) \in K$，$s.t. V(t,x) \leq \beta(\|x\|)$，$\forall t \geq t_0, x \in B_r$.

例7 (1)$W_1(x_1,x_2)=x_1{}^2+x_2{}^2$ 为正定函数;

(2) $V_1(t,x_1,x_2)=(t+1)(x_1{}^2+x_2{}^2)\geq W_1(x_1,x_2)$,

$\forall t\geq 0$，为正定函数;

(3) $V_2(t,x_1,x_2)=e^{-t}(x_1{}^2+x_2{}^2)\leq x_1{}^2+x_2{}^2$，$\forall t\geq 0$,

具有无穷小上界，但不是正定函数.

(4)$W_2(x_1,x_2)=x_1{}^2+\sin^2 x_2$，是局部正定函数

$(W_2(0,0)=0$，$W_2(x_1,x_2)>0$，$\forall(x_1,x_2)\neq(0,0)$且$|x_2|<\pi)$

但不是正定函数$(W_2(0,\pi)=0)$.

Definition 9 假设$V(t,x)$: $R_+ \times R^n \to R$具有连续偏函数，$V(t,x)$沿着系统(1)的全导数为：

$$\frac{dV\big(t,x(t)\big)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x_1}\cdot\frac{dx_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial V}{\partial x_n}\cdot\frac{dx_n}{dt}$$

$$= \frac{\partial V}{\partial t} + \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial V}{\partial x_n}\right)\cdot\left(\frac{dx_1}{dt}, \cdots, \frac{dx_n}{dt}\right)$$

$$= \frac{\partial V}{\partial t} + \nabla V \cdot f \triangleq \dot{V}(t,x).$$