线性系统稳定性——非自治系统

万慧颖
东南大学数学学院
220242032@seu.edu.cn

本节主要考虑如下非自治系统：

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad t \geq 0 \tag{1}$$

本节主要内容：

(1) 证明一致渐近稳定线性系统存在**二次型李雅普诺夫函数**；

(2) 基于**矩阵测度**，给出一些简单的稳定性、渐近稳定性和不稳定性的充分条件；

(3) 给出**周期系统**稳定性的充分必要条件。

二次李雅普诺夫方程的存在性

定理5.2.42：

给定矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，以下三个陈述是等价的：

- A 是一个 Hurwitz 矩阵。
- 存在一个正定矩阵 $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$，使得方程 $A^\top P + PA = -Q$ 存在唯一解 P，且该 P 是正定的。
- 对于每一个正定矩阵 $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$，方程 $A^\top P + PA = -Q$ 都存在唯一解 P，且该解是正定的。

$\Downarrow$

线性自治系统 $\dot{x}(t) = Ax(t), t \geq 0$ 的零解指数稳定 $\Rightarrow$ 二次型Lyapunov函数：

$V(x) = x^\top Px$ 正定

$\dot{V}(x) = -x^\top Qx$ 负定

对于零解指数稳定的非自治系统能否存在二次型Lyapunov？

二次李雅普诺夫方程的存在性

引理1

假设 $Q:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$ 是连续且有界的，并且系统 (1)的平衡点 0是一致渐近稳定的。那么，对于每个 $t\geq 0$，矩阵 $P(t)=\int_t^{\infty}\Phi^{\top}(\tau,t)Q(\tau)\Phi(\tau,t)\,d\tau$ 是良定义的；此外,$P(t)$ 作为关于 t 的函数是有界的。

证明：

平衡点 0 是一致渐近稳定的，当且仅当存在常数 $m>0$ 与 $\lambda>0$，使得

$$\|\Phi(t,t_0)\|\leqslant m\,\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)},\quad \forall t\geqslant t_0\geqslant 0.$$

根据定理 (18)，一致渐近稳定的假设实际上意味着平衡点 0 是指数稳定的．因此，存在常数 $m>0$ 和 $\lambda>0$，使得

$$\|\Phi(\tau,t)\|\leqslant m\exp[-\lambda(\tau-t)],\quad \forall\tau\geqslant t\geqslant 0. \tag{2}$$

不等式 (2) 式 与 $Q(\cdot)$ 的有界性共同证明了该引理.

二次李雅普诺夫方程的存在性

证明$P(t)$是良定义的（积分收敛）且有界

1.计算被积函数的范数:

$$\begin{aligned}\|\Phi^T(\tau,t)Q(\tau)\Phi(\tau,t)\| &\leq \|\Phi^T(\tau,t)\|\cdot\|Q(\tau)\|\cdot\|\Phi(\tau,t)\| \quad (\text{范数的相容性})\\ &= \|\Phi(\tau,t)\|\cdot\|Q(\tau)\|\cdot\|\Phi(\tau,t)\| \quad (\text{对于诱导范数，}\ \|A^T\| = \|A\|)\\ &= \|\Phi(\tau,t)\|^2\cdot\|Q(\tau)\|\end{aligned}$$

2.代入指数衰减界和有界性假设:

由(1) 式， $\|\Phi(\tau,t)\| \leqslant m\,\mathrm{e}^{-\lambda(\tau-t)}$.

由引理假设， $Q(\cdot)$ 有界，即存在常数q 使得$\|Q(\tau)\| \leqslant q\ (\forall\,\tau)$.

因此， $\|\Phi^\mathrm{T}(\tau,t)\,Q(\tau)\,\Phi(\tau,t)\| \leqslant \left(m\,\mathrm{e}^{-\lambda(\tau-t)}\right)^2 q = m^2 q\,\mathrm{e}^{-2\lambda(\tau-t)}$.

二次李雅普诺夫方程的存在性

证明$P(t)$是良定义的（积分收敛）且有界

3.证明积分收敛：

现在我们对这个上界从 t 到 ∞ 进行积分：

$$\int_t^\infty \|\Phi^T(\tau,t)Q(\tau)\Phi(\tau,t)\|\,d\tau \leq \int_t^\infty m^2 q e^{-2\lambda(\tau-t)}\,d\tau$$

令 $u=\tau-t$，则 $du=d\tau$，积分变为：

$$m^2 q\int_0^\infty e^{-2\lambda u}\,du = m^2 q\left[\frac{e^{-2\lambda u}}{-2\lambda}\right]_0^\infty = m^2 q\left(0-\frac{1}{-2\lambda}\right)=\frac{m^2 q}{2\lambda}$$

这个结果是**一个有限的常数**，不依赖于 t。

二次李雅普诺夫方程的存在性

引理2 在引理 1 的假设之外，进一步满足以下条件：

1、对每个 $t \geqslant 0$，$Q(t)$ 对称且正定；且存在常数 $\alpha > 0$，使得

$$\alpha x^{\top} x \leqslant x^{\top} Q(t) x, \qquad \forall t \geqslant 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

2、矩阵 $A(\cdot)$ 有界，即

$$m_0 := \sup_{t \geqslant 0} \|A(t)\|_{i2} < \infty.$$

则对矩阵 $P(t)$，有

1、对每个 $t \geqslant 0$，$P(t)$ 正定；

2、存在常数 $\beta > 0$，使得

$$\beta x^{\top} x \leqslant x^{\top} P(t) x, \qquad \forall t \geqslant 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

二次李雅普诺夫方程的存在性

证明：

任取 $x \in \mathbb{R}^n$，考虑二次型 $x^\top P(t)x$

$$x^\top P(t)x = \int_t^\infty x^\top \Phi^\top(\tau,t)Q(\tau)\Phi(\tau,t)x\,d\tau = \int_t^\infty s^\top(\tau;t,x)Q(\tau)s(\tau;t,x)\,d\tau,$$

其中 $s(\tau;t,x)$ 表示系统 (1) 在初始时刻 t 取初始值 x 时于时刻 τ 的解.

$$x^\top P(t)x \geqslant \alpha \int_t^\infty \|s(\tau;t,x)\|_2^2\,d\tau.$$

接下来，根据定理 2.5.1，有

$$\begin{aligned}\|s(\tau;t,x)\|_2 &\geqslant \|x\|_2 \exp\left(-\int_t^\tau \mu_2[-A(\theta)]\,d\theta\right)\\ &\geqslant \|x\|_2 \exp\left(-\int_t^\tau \|A(\theta)\|_{i2}\,d\theta\right)\\ &\geqslant \|x\|_2 \exp\left[-m_0(\tau-t)\right].\end{aligned}$$

对线性系统 $\dot{x}=A(t)x$,

有 $\|s(\tau,t,x)\|_2 \geq \|x\|_2 \exp\left(-\int_t^T \mu_2[-A(\theta)]\,d\theta\right)$,

其中矩阵测度定义为 $\mu_2[M]=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{\|I+hM\|_2-1}{h}$.

已知矩阵测度性质：$\mu_2[-A(\theta)] \leq \|A(\theta)\|_{i2}$

于是，$x^\top P(t)x \geq 2\alpha\int_t^\infty x^\top x\exp[-2m_0(\tau-t)]\,d\tau = \dfrac{\alpha}{2m_0}x^\top x.$

令 $\beta=\dfrac{\alpha}{2m_0}$ 便得结论。

二次李雅普诺夫方程的存在性

定理1

假设$Q(\cdot)$和$A(\cdot)$满足引理 1和 2的假设。那么，对于每一个满足假设的函数 $Q(\cdot)$， 由下式定义的函数

$$V(t,x)=x^{\top}P(t)x$$

是定理 (5.3.45) 意义下的一个李雅普诺夫函数，用于确立平衡点 0 的指数稳定性。

若存在常数 $a,b,c,r>0$，$p\geq 1$， 以及一个 C^1 函数 $V:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$， 使得

$$a\|x\|^p\leq V(t,x)\leq b\|x\|^p,\forall t\geq 0,\ \forall x\in B_r \longrightarrow \text{引理 1 和2}$$

$$\dot V(t,x)\leq -c\|x\|^p,\forall t\geq 0,\ \forall x\in B_r \longrightarrow \text{分析 } \dot V$$

则平衡点 0 是指数稳定的。

二次李雅普诺夫方程的存在性

对于如上定义的 $V(t,x)$ ，我们有 $\dot{V}(t,x(t))=\frac{\mathrm{d}V(t,x(t))}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$

$$\frac{\partial V}{\partial t}=x^{\top}\dot{P}(t)x$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^{\top}\dot{x}=(2P(t)x)^{\top}(A(t)x)=2x^{\top}P(t)^{\top}A(t)x=2x^{\top}P(t)A(t)x$$

于是， $\dot{V}(t,x(t))=x^{\top}\dot{P}(t)x+2x^{\top}P(t)A(t)x.$

提取 $x^{\top}[\cdots]x$ 形式:

$$\boxed{\dot{V}=x^{\top}[\boxed{\dot{P}(t)}+P(t)A(t)+A(t)^{\top}P(t)]x.}$$

注意 $x^{\top}P(t)A(t)x$ 是标量，所以它等于它的转置 $x^{\top}A(t)^{\top}P(t)x$，因此两项合并为 $P(t)A(t)+A(t)^{\top}P(t)$。

二次李雅普诺夫方程的存在性

对 $P(t)=\int_t^{\infty}\Phi^{\top}(\tau,t)Q(\tau)\Phi(\tau,t)\,d\tau$ 式求导

设$F(t,\tau)=\Phi^{\top}(\tau,t)Q(\tau)\Phi(\tau,t)$,

则 $P(t)=\int_t^{\infty}F(t,\tau)\mathrm{d}\tau.$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{a(t)}^{b(t)}f(t,\tau)\,\mathrm{d}\tau=f\big(t,b(t)\big)\,b'(t)-f\big(t,a(t)\big)\,a'(t)+\int_{a(t)}^{b(t)}\frac{\partial f(t,\tau)}{\partial t}\,\mathrm{d}\tau}$$

由求导公式， $\dot{P}(t)=-F(t,t)+\int_t^{\infty}\frac{\partial F(t,\tau)}{\partial t}\mathrm{d}\tau.$

1. 计算 $-F(t,t)$

当$\tau=t$时， $\Phi(t,t)=I$

所以，$F(t,t)=I^{\top}Q(t)\,I=Q(t).$

$-F(t,t)=-Q(t).$

2. 计算 $\int_t^{\infty}\frac{\partial F(t,\tau)}{\partial t}\mathrm{d}\tau.$

$$\frac{\partial F(t,\tau)}{\partial t}=\left(\frac{\partial\Phi(\tau,t)}{\partial t}\right)^{\top}Q(\tau)\Phi(\tau,t)+\Phi^{\top}(\tau,t)Q(\tau)\frac{\partial\Phi(\tau,t)}{\partial t}$$

$$\boxed{\frac{\partial\Phi(\tau,t)}{\partial t}=-\Phi(\tau,t)A(t)}$$

$$=(-\Phi(\tau,t)A(t))^{\top}Q(\tau)\Phi(\tau,t)+\Phi^{\top}(\tau,t)Q(\tau)\,(-\Phi(\tau,t)A(t))$$

$$\int_t^{\infty}\frac{\partial F(t,\tau)}{\partial t}d\tau=-A(t)\int_t^{\infty}\Phi(\tau,t)^{\top}Q(\tau)\Phi(\tau,t)-\left[\int_t^{\infty}\Phi(\tau,t)^{\top}Q(\tau)\Phi(\tau,t)\right]A(t)$$

$$=-A(t)^{\top}P(t)-P(t)A(t)$$

$$\dot{P}(t)=-A^{\top}(t)P(t)-P(t)A(t)-Q(t)$$

带入$\dot{V}$得： $\dot{V}=x^T\left[\dot{P}(t)+P(t)A(t)+A(t)^TP(t)\right]x=-x^TQ(t)x$

二次李雅普诺夫方程的存在性

若存在常数 $a,b,c,r>0$，$p\geq 1$，以及一个 C^1 函数 $V:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，使得

$$a\|x\|^p\leq V(t,x)\leq b\|x\|^p,\forall t\geq 0,\ \forall x\in B_r$$

$$\dot{V}(t,x)\leq -c\|x\|^p,\forall t\geq 0,\ \forall x\in B_r$$

则平衡点 0 是指数稳定的。

引理1得到P(t)有界，于是 $V(t,x)\leq b\|x\|^p$

引理2得到， $a\|x\|^p\leq V(t,x)$

由假设和定理1得， $\dot{V}(t,x)=-x^\top Qx\leq -c\|x\|^p$

定理1 的意义在于：如果一个线性系统是指数稳定的，那么我们一定可以构造一个二次型函数来证明该系统的稳定性。

二次李雅普诺夫方程的存在性

证明：$\boxed{\dfrac{\partial\Phi(\tau,t)}{\partial t}=-\Phi(\tau,t)A(t)}$

已知:

$$\Phi(t,\tau)\,\Phi(\tau,t)=I\quad(\text{互逆性}).$$

固定 τ，对 t 求导:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\Phi(t,\tau)\,\Phi(\tau,t)\right]=0.$$

即:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,\tau)\right]\Phi(\tau,t)+\Phi(t,\tau)\,\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\tau,t)=0.$$

但 $\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,\tau)=A(t)\Phi(t,\tau)$，代入:

$$A(t)\Phi(t,\tau)\,\Phi(\tau,t)+\Phi(t,\tau)\,\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\tau,t)=0.$$

由于 $\Phi(t,\tau)\,\Phi(\tau,t)=I$，第一项就是 $A(t)$，所以:

$$A(t)+\Phi(t,\tau)\,\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\tau,t)=0.$$

于是:

$$\Phi(t,\tau)\,\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\tau,t)=-A(t).$$

左乘 $\Phi(\tau,t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\tau,t)=-\Phi(\tau,t)A(t).$$

基于矩阵测度的条件

接下来，我们提出一些基于矩阵测度的稳定性和不稳定性条件。

引理3

对于系统 (1)，以下不等式成立：

$$\exp\left(\int_{t_0}^{t} -\mu[-A(\tau)]\,d\tau\right) \le \|\Phi(t,t_0)\|_i \le \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mu[A(\tau)]\,d\tau\right),\quad \forall t \ge t_0 \ge 0$$

$$x(t) = \Phi(t,t_0)\,x(t_0)$$

考虑微分方程 $\dot{x}(t) = A(t)x(t),\ t \ge 0$ 其中 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ，且 $A(t)$为连续的$n \times n$矩阵值函数。设 $\|\cdot\|$为 $\mathbb{R}^n$ 上的某一范数，$\|\cdot\|_i$与 $\mu(\cdot)$分别表示对应的诱导矩阵范数与矩阵测度。则对任意 ，有 $t \ge t_0 \ge 0$

$$\|x(t_0)\|\exp\left(\int_{t_0}^{t} -\mu[-A(\tau)]\,d\tau\right) \le \|x(t)\| \le \|x(t_0)\|\exp\left(\int_{t_0}^{t} \mu[A(\tau)]\,d\tau\right).$$

基于矩阵测度的条件

已知：

$$x(t) = \Phi(t, t_0)\, x(t_0)$$

矩阵范数定义为：

$$\|\Phi(t, t_0)\| = \overset{i}{\sup_{x(t_0)\neq 0}} \frac{\|\Phi(t, t_0)x(t_0)\|}{\|x(t_0)\|} = \sup_{x(t_0)\neq 0} \frac{\|x(t)\|}{\|x(t_0)\|}$$

上界推导：

对任意 $x(t_0)$

$$\frac{\|x(t)\|}{\|x(t_0)\|} \leq \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mu[A(\tau)]\, d\tau\right)$$

取上确界 over $x(t_0) \neq 0$：

$$\|\Phi(t, t_0)\| \overset{i}{\leq} \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mu[A(\tau)]\, d\tau\right)$$

下界推导：

对任意 $x(t_0) \neq 0$，有

$$\frac{\|x(t)\|}{\|x(t_0)\|} \geq \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \mu[-A(\tau)]\, d\tau\right)$$

那么其上确界（即 $\|\Phi(t, t_0)\|$）必然也满足：

$$\|\Phi(t, t_0)\| \geq \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \mu[-A(\tau)]\, d\tau\right)$$

基于矩阵测度的条件

引理4:

若对任意固定的 $t_0 \geq 0$，存在有限常数 $m(t_0)$，使得

$$\int_{t_0}^{t} \mu[A(\tau)]\, d\tau \leq m(t_0), \qquad \forall t \geq t_0 \geq 0,$$

则平衡点 0 **稳定**。

若存在有限常数 m_0，使得

$$\int_{t_0}^{t} \mu[A(\tau)]\, d\tau \leq m_0, \qquad \forall t \geq t_0 \geq 0$$

则平衡点 0 **一致稳定**。

定理5.1.5

平衡点 0是**稳定的**，当且仅当对于每个 $t_0 \geq 0$，都有：$\sup\limits_{t \geq t_0} \|\Phi(t,t_0)\|_i =: m(t_0) < \infty$ 。

平衡点 0是**一致稳定的**，当且仅当对于每个 $t_0 \geq 0$，都有：

$$m_0 := \sup_{t_0 \geq 0} m(t_0) = \sup_{t_0 \geq 0} \sup_{t \geq t_0} \|\Phi(t,t_0)\|_i < \infty.$$

基于矩阵测度的条件

引理5：

若

$$\int_{t_0}^{t}\mu[A(\tau)]\,d\tau \to -\infty \quad (t\to\infty), \qquad \forall t_0 \ge 0$$

则平衡点 0 渐近稳定。

若上述收敛关于 t_0 一致，即对任意 $m>0$，存在 $T>0$ ，使得

$$\int_{t_0}^{t}\mu[A(\tau)]\,d\tau < -m, \qquad \forall t \ge T,\ \forall t_0 \ge 0$$

则平衡点 0 一致渐近稳定。

渐近稳定=稳定+吸引

稳定：

$$\int_{t_0}^{t}\mu[A(\tau)]\,d\tau \to -\infty \quad (t\to\infty), \qquad \forall t_0 \ge 0$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{t_0}^{t}\mu[A(\tau)]\,d\tau \le m(t_0), \qquad \forall t \ge t_0 \ge 0,$$

吸引：

对每个 t_0，由已知条件，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $T(t_0,\varepsilon)$ 使得当 $t\ge t_0+T(t_0,\varepsilon)$ 时

$$\int_{t_0}^{t}\mu[A(\tau)]\,d\tau < \ln(\varepsilon)$$

于是

$$\|\Phi(t,t_0)\|_i \le \varepsilon$$

因此 $\lim_{t\to\infty}\|\Phi(t,t_0)\|_i = 0$。

基于矩阵测度的条件

平衡点 0 是（全局）一致渐近稳定的 $\Longleftrightarrow$ $\boxed{\sup_{t_0\geq 0}\sup_{t\geq t_0}\|\Phi(t,t_0)\|_i<\infty}$ 一致稳定性条件

$\|\Phi(t_0+t,t_0)\|_i\to 0$ 当 $t\to\infty$，对 t_0 一致

已知一致条件：对任意 $m>0$，存在 $T>0$，使得

$$\int_{t_0}^{t}\mu[A(\tau)]\,d\tau<-m,\quad \forall t\geq t_0+T,\ \forall t_0\geq 0$$

由引理3上界：

$$\|\Phi(t,t_0)\|_i\leq \exp\left(\int_{t_0}^{t}\mu[A(\tau)]\,d\tau\right)$$

所以当 $t\geq t_0+T$ 时：

$$\|\Phi(t,t_0)\|_i\leq e^{-m}$$

令 $\tau=t-t_0$，则当 $\tau\geq T$ 时：

$$\|\Phi(t_0+\tau,t_0)\|_i\leq e^{-m},\quad \forall t_0\geq 0$$

由于 m 任意，这说明 $\|\Phi(t_0+\tau,t_0)\|_i\to 0$ 当 $\tau\to\infty$，对 t_0 一致。

基于矩阵测度的条件

引理6：

若存在某个 $t_0 \geq 0$ ，使得

$$\int_{t_0}^{t} \mu[-A(\tau)]\, d\tau \to -\infty \quad (t \to \infty),$$

则平衡点 0 不稳定。

由：
$$\|\Phi(t,t_0)\|_i \geq \exp\left(\int_{t_0}^{t} -\mu[-A(\tau)]\, d\tau\right)$$

已知：
$$\int_{t_0}^{t} \mu[-A(\tau)]\, d\tau \to -\infty \quad (t \to \infty)$$

那么：
$$-\int_{t_0}^{t} \mu[-A(\tau)]\, d\tau \to +\infty$$

$$\exp\left(\int_{t_0}^{t} -\mu[-A(\tau)]\, d\tau\right) \to +\infty$$

$$\|\Phi(t,t_0)\|_i \to +\infty \quad (t \to \infty)$$

周期系统

引理7：

设系统 (1) 中的矩阵 $A(\cdot)$ 为周期矩阵，即存在常数 $T>0$ 使得

$$A(t+T)=A(t), \qquad \forall t\geq 0$$

则对应的状态转移矩阵 $\Phi(t,t_0)$ 可分解为

$$\Phi(t,t_0)=\Psi(t,t_0)\exp[M(t-t_0)],$$

其中 M 为常数矩阵，且 Ψ 关于时间周期：

$$\Psi(t+T,t_0)=\Psi(t,t_0), \qquad \forall t\geq 0.$$

证明：

思路：构造M，从而得到 Ψ 的形式，验证 Ψ 满足周期性。

令 $R:=\Phi(t_0+T,t_0)$，
并选取常数矩阵 M 满足 $R=\exp(MT)$
由于 R 非奇异，这样的 M 必然存在。定义
$\Psi(t,t_0):=\Phi(t,t_0)\exp[-M(t-t_0)]$，
下证 Ψ 满足周期性。计算得

$$\Psi(t+T,t_0)=\Phi(t+T,t_0)\exp[-M(t+T-t_0)]$$
$$=\Phi(t+T,t_0+T)\Phi(t_0+T,t_0)\exp(-MT)\exp[-M(t-t_0)].$$

由 $A(\cdot)$ 的周期性可知 $\Phi(t+T,t_0+T)=\Phi(t,t_0)$，

$$\Psi(t+T,t_0)=\Phi(t,t_0)R\exp(-MT)\exp[-M(t-t_0)]$$
$$=\Phi(t,t_0)\exp[-M(t-t_0)]$$
$$=\Psi(t,t_0)$$

Ψ 的周期性得证。

意义：可以用矩阵M的性质来判断系统的稳定性。

矩阵对数

定义：

给定一个可逆矩阵 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，矩阵对数是指所有满足 $e^X=A$ 的 $X\in\mathbb{C}^{n\times n}$，其中：

$$e^X=I+X+\frac{X^2}{2!}+\frac{X^3}{3!}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{X^k}{k!}$$

计算方法：

1. 矩阵对角化

若 $A=P\Lambda P^{-1}$，其中 $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ ，则

$$\log(A)=P\,\mathrm{diag}(\log\lambda_1,\ldots,\log\lambda_n)P^{-1}$$

其中 $\log\lambda_i$ 取相应的复对数分支。

2. Jordan 分解

若 $A=PJP^{-1}$，其中 J 为 Jordan 标准形，则每个块 $J_s(\lambda)=\lambda(I+N)$：

$$\log(J_s(\lambda))=\log(\lambda I+N)=(\log\lambda)I+\log(I+\frac{N}{\lambda})=\log(\lambda)I+\sum_{m=1}^{k-1}\frac{(-1)^{m+1}}{m}N^m$$

$$\boxed{\log(I+X)=X-\frac{X^2}{2}+\frac{X^3}{3}-\cdots}$$

矩阵对数

计算方法：

3. 数值方法

在 MATLAB、NumPy、SciPy 等中(logm函数)，一般使用 Schur 分解来计算：

$$A = QTQ^{-1}$$

其中T为上三角矩阵，然后计算 $\log(T)$（通过幂级数或逐块算法），再反变换：

$$\log(A) = Q\log(T)Q^{-1}$$

周期系统

定理2：

考虑系统 (1)，设矩阵 $A(\cdot)$ 为周期矩阵。则

- 平衡点 0一致渐近稳定 $\Longleftrightarrow$ 矩阵 $\Phi(T,0)$ 的所有特征值模均小于 1；
- 平衡点 0 一致稳定 $\Longleftrightarrow$ 矩阵 $\Phi(T,0)$的所有特征值模不超过 1，且模为 1 的特征值均为其最小多项式的单根。

周期系统一致稳定 $\Longleftrightarrow$ 稳定 $\Longleftrightarrow$ 定理5.4.5 $\sup\limits_{t\geq t_0}\|\Phi(t,0)\|_i=:m(t_0)<\infty$

$\underset{\text{引理7}}{\Longleftrightarrow}$ $\sup\limits_{t\geq t_0}\|\Psi(t,0)\exp[M(t)]\|_i=m(t_0)<\infty,$ $\Longleftrightarrow$ $\sup\limits_{t\geq t_0}\|\exp[Mt]\|_i<\infty,$

$\Psi(t,t_0)$是周期的，所以有界

$\underset{\text{定理29}}{\Longleftrightarrow}$ 矩阵 M 的所有特征值实部非正，且实部为 0的特征值均为其最小多项式的单根。

$\Longleftrightarrow$ $\varPhi(T,0)$ 的所有特征值模不超过 1，且模为 1的特征值均为其最小多项式的单根。

由M定义，$\varPhi(T,0)=e^{MT}$

若 $Mv=\lambda v$，则

$$\Phi(T,0)v=e^{MT}v=e^{\lambda T}v$$

所以 $e^{\lambda T}$ 是 $\Phi(T,0)$ 的特征值。

反之，若 $\Phi(T,0)w=\mu w$，则 μ 是 e^{MT} 的特征值，那么存在 M 的某个特征值 λ 使得 $\mu=e^{\lambda T}$

周期系统

定理2:

考虑系统 (1)，设矩阵 $A(\cdot)$ 为周期矩阵。则

- 平衡点 0一致渐近稳定 $\Longleftrightarrow$ 矩阵 $\Phi(T,0)$ 的所有特征值模均小于 1;
- 平衡点 0 一致稳定 $\Longleftrightarrow$ 矩阵 $\Phi(T,0)$的所有特征值模不超过 1，且模为 1 的特征值均为其最小多项式的单根。

周期系统一致渐近稳定$\Longleftrightarrow$ 渐近稳定 $\Longleftrightarrow$ 定理5.4.14 $\sup\limits_{t_0\geq 0}\sup\limits_{t\geq t_0}\|\Phi(t,t_0)\|_i<\infty$

$\|\Phi(t_0+t,t_0)\|_i\to 0$ 当 $t\to\infty$,对t_0一致

$\underset{\text{引理7}}{\Longleftrightarrow}$ $\sup\limits_{t\geq t_0}\|\exp[Mt]\|_i=<\infty$,

$\|\exp[Mt]\|_i\to 0$,当$t\to\infty$,对t_0一致 $\underset{\text{定理29}}{\Longleftrightarrow}$ 矩阵 M 的所有特征值实部均为负

$\Longleftrightarrow$ $\varPhi(T,0)$ 的所有特征值模均小于 1 。

周期系统

以下例子主要说明：对于时变系统，不能仅仅通过观察 A(t) 在每个固定时刻 t 的特征值来判断系统稳定性。

系统矩阵为：

$$A(t) = \begin{bmatrix} -1 + a\cos^2 t & 1 - a\sin t\cos t \\ -1 - a\sin t\cos t & -1 + a\sin^2 t \end{bmatrix}$$

这是一个**周期为** $T = 2\pi$ 的周期系统。

特征方程为： $\lambda^2 + (2-a)\lambda + (2-a) = 0$

特征值为： $\lambda = \dfrac{-(2-a) \pm \sqrt{(2-a)^2 - 4(2-a)}}{2}$

$a < 2$时，$A(t)$特征值的实部为负 $\Rightarrow$ 系统稳定?

NO！！

周期系统

应用定理2:

实际的状态转移矩阵是:

$$\Phi(t,0)=\begin{bmatrix} e^{(a-1)t}\cos t & e^{-t}\sin t \\ -e^{(a-1)t}\sin t & e^{-t}\cos t \end{bmatrix}$$

$a>1$时，$e^{(a-1)t}$指数增长，系统状态发散。

进一步 $T=2\pi$时 ，

$$\Phi(2\pi,0)=\begin{bmatrix} e^{2(a-1)\pi} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi} \end{bmatrix}$$

$\lambda_1=e^{2(a-1)\pi}$,$\lambda_2=e^{-2\pi}$

$a>1$时，$\lambda_1>1$　　根据定理2，系统不稳定。

感谢聆听！

万慧颖
东南大学数学学院
220242032@seu.edu.cn