Lyapunov稳定性理论

2. Lyapunov直接法 (Lyapunov第二方法)

2.1 稳定性定理

2.2 渐近稳定性定理

2.3 不稳定性定理

2.1 稳定性定理

Theorem 1. 若存在一个连续可微的局部正定函数$V(t,x)$使得

$$\dot{V}(t,x) \leq 0, \qquad \forall t \geq t_0, x \in B_r,$$

则系统(1)的零解在t_0处是稳定的.

Proof. $V(t,x)$为 局部正定函数 $\Longrightarrow \exists\, \alpha(\cdot) \in K$使得

$$V(t,x) \geq \alpha(\|x\|), \qquad \forall\, t \geq t_0, x \in B_s.$$

对$\forall \epsilon > 0$ $(\epsilon < \min\{r,s\})$, 由$V(t_0,0) = 0$及$V(t,x)$的连续性, 知存在$\delta = \delta(\epsilon, t_0)$, 当$\|x_0\| < \delta$时，有$V(t_0,x_0) < \alpha(\epsilon)$. 从而当$\|x_0\| < \delta$时,

$$\alpha(\|x(t)\|) \leq V\big(t, x(t)\big) \leq V(t_0,x_0) < \alpha(\epsilon),$$

$\Longrightarrow$ $\|x(t)\| < \epsilon, \forall t \geq t_0$ $\Longrightarrow$零解是稳定的.

Theorem 2. 若存在一个连续可微的局部正定函数$V(t,x)$, $V(t,x)$具有无穷小上界, 使得

$$\dot{V}(t,x) \leq 0, \qquad \forall t \geq t_0, x \in B_r,$$

则系统(1)的零解在$[t_0,+\infty)$上是一致稳定的.

Proof. $\alpha(\|x\|) \leq V(t,x) \leq \beta(\|x\|), \alpha(\cdot), \beta(\cdot) \in K, \forall t \geq t_0, x \in B_r$.

$\forall \epsilon > 0 (\epsilon < r), \exists \delta = \beta^{-1}(\alpha(\epsilon))$, 当$\|x_0\| < \delta$时, 有

$$\alpha(\|x(t)\|) \leq V\big(t, x(t)\big) \leq V(t_0, x_0) \leq \beta(\|x_0\|),$$

$$\Longrightarrow \|x(t)\| \leq \alpha^{-1}\big(\beta(\|x_0\|)\big) \leq \alpha^{-1}\big(\beta(\delta)\big) = \epsilon \Longrightarrow \text{零解一致稳定.}$$

例1. 考虑单摆$\ddot{\theta} + \sin\theta = 0$.

解. Let $x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta}$, 则

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\sin x_1. \end{cases}$$

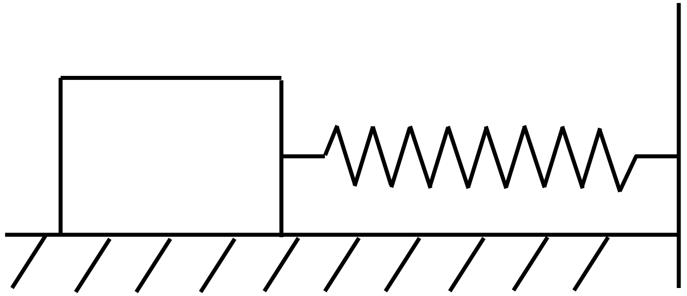
取$V(x_1, x_2) = (1 - \cos x_1) + \frac{x_2^2}{2}$, 则$V$为局部正定函数($|x_1| < 2\pi$).

$$\dot{V}(x_1, x_2) = \sin x_1 \cdot \dot{x}_1 + x_2 \cdot \dot{x}_2 = x_2 \sin x_1 - x_2 \sin x_1 = 0,$$

$\overset{Th\ 1}{\Longrightarrow}$ 零解是稳定的(一致稳定).

例2.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -f(x_2) - g(x_1), \end{cases}$$



其中$f(\cdot), g(\cdot)$均为连续函数, 且满足

(1) $\sigma f(\sigma) \geq 0, \forall \sigma \in [-\sigma_0, \sigma_0]$;

(2) $g(0) = 0, \sigma g(\sigma) > 0, \forall \sigma \neq 0, \sigma \in [-\sigma_0, \sigma_0]$.

解. 取$V(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{2} + \int_0^{x_1} g(\sigma) d\sigma$, 则$V$为 *l.p.d.f.*

$\dot{V}(x_1, x_2) = x_2[-f(x_2) - g(x_1)] + g(x_1)x_2 = -x_2 f(x_2) \leq 0,$

$\xRightarrow{Th1}$ 零解是(一致)稳定.

例3. 考虑$\ddot{y}(t)+\dot{y}(t)+(2+\sin t)y(t)=0.$

解. Let $x_1=y, x_2=\dot{y}$, 则

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2,\\ \dot{x}_2=-(2+\sin t)x_1-x_2,\end{cases}$$

取$V(t,x_1,x_2)=x_1^2+\frac{x_2^2}{2+\sin t}$, 则

$$x_1^2+\frac{x_2^2}{3}\le V(t,x_1,x_2)\le x_1^2+x_2^2.$$

V为具有无穷小上界的正定函数,

$$\dot{V}(t_1, x_1, x_2) = 2x_1\dot{x}_1 + \frac{2x_2\dot{x}_2}{2+\sin t} - x_2^2\frac{\cos t}{(2+\sin t)^2}$$

$$= -x_2^2\frac{4+2\sin t+\cos t}{(2+\sin t)^2} \le 0,$$

$\overset{Th2}{\Longrightarrow}$ 零解是一致稳定的.

例4. $\ddot{y}(t)+p(t)\dot{y}(t)+e^{-t}y(t)=0.$

解. Let $x_1=y, x_2=\dot{y}$, 则

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2,\\ \dot{x}_2=-e^{-t}x_1-p(t)x_2,\end{cases}$$

取$V(t,x_1,x_2)=x_1^2+e^t x_2^2\geq x_1^2+x_2^2, \forall t\geq 0,$

$\Longrightarrow V$为$p.d.f$, 但不具有无穷小上界.

$$\begin{aligned}\dot{V}(t,x_1,x_2)&=2x_1x_2+e^t x_2^2+2e^t x_2[-e^{-t}x_1-p(t)x_2]\\&=e^t x_2^2[1-2p(t)].\end{aligned}$$

当$1-2p(t)\leq 0$, 即$p(t)\geq\frac{1}{2}$时, $\dot{V}\leq 0 \Longrightarrow$ 零解稳定.

2.2 渐近稳定性定理

Theorem 3. 若存在连续可微的局部正定函数$V(t,x)$, 具有无穷小上界, 使得$-\dot{V}(t,x)$为局部正定函数, 则系统(1)的零解在$[t_0,+\infty)$上是一致渐近稳定的.

Proof: 由 Th2 知, 系统 (1) 的零解是一致稳定的. 下面仅需证明零解是一致吸引, 即 $\exists\ \delta_1 > 0$, 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists\ T(\varepsilon)$, s.t. $t > t_0 + T(\varepsilon)$ 时, 有

$$\|s(t;\ t_0, x_0)\| < \varepsilon, \|x_0\| < \delta_1.$$

由定理条件, 存在三个K类函数 $\alpha(\cdot), \beta(\cdot), \gamma(\cdot) \in K$,

$$\alpha(\|x\|) \le V(t, x) \le \beta(\|x\|),$$

$$\dot{V}(t, x) \le -\gamma(\|x\|), \forall t \ge t_0, x \in B_r.$$

$\forall \varepsilon > 0$, 定义 δ_1, δ_2, T:

$$\beta(\delta_1) < \alpha(r),$$

$$\beta(\delta_2) < min\{\alpha(\varepsilon), \beta(\delta_1)\},$$

$$T = \frac{\alpha(r)}{\gamma(\delta_2)} = T(\varepsilon).$$

首先证明, 存在 $t_1 \in [t_0, t_0 + T]$ 满足 $\|s(t_1;\ t_0, x_0)\| < \delta_2$.

(反证法) 否则, $\|s(t;\ t_0, x_0)\| \geq \delta_2,\ \forall t \in [t_0, t_0 + T]$. 则

$0 < \alpha(\delta_2) \leq \alpha(\|s(t_0 + T;\ t_0, x_0)\|) \leq V(t_0 + T, s(t_0 + T;\ t_0, x_0))$

$$= V(t_0, x_0) + \int_{t_0}^{t_0+T} \dot{V}(\tau, s(\tau;\ t_0, x_0))\,d\tau$$

$$\leq \beta(\|x_0\|) - \int_{t_0}^{t_0+T} \gamma(\|s(\tau)\|)d\tau$$

$$\leq \beta(\delta_1) - \gamma(\delta_2)T = \beta(\delta_1) - \alpha(r) < 0.$$ 矛盾.

从而, 当 $t \geq t_0 + T$ 时, 有

$$\alpha(\|s(t;\ t_0, x_0)\|) \leq V(t, s(t;\ t_0, x_0)) \leq$$

$$V(t_1, s(t_1;\ t_0, x_0)) \leq \beta(\|s(t_1;\ t_0, x_0)\|) < \beta(\delta_2) < \alpha(\varepsilon).$$

$\Rightarrow \|s(t;\ t_0, x_0)\| < \varepsilon \Rightarrow$零解一致吸引.

Theorem 4. 设 $V(t,x)$连续可微, 正定, 具有无穷小上界, 且

$$\dot{V}(t,x) \le -\gamma(\|x\|), \qquad \forall t \ge t_0, \forall x \in \mathbb{R}^n, \gamma(\cdot) \in K, \tag{2}$$

则系统(1)的零解是全局一致渐近稳定的.

Remark 1. (a) 在Th4中, 无需要求$-\dot{V}$为正定函数.

(b) 条件(2)可用下列条件代替:

存在一个连续函数$W: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$使得

$$\dot{V}(t,x) \le -W(x), \forall t \ge t_0, \forall x \in \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

其中$W(0) = 0, W(x) > 0, \forall x \ne 0$, 且存在 r>0, 使得

$$\inf_{\|x\| \ge r} W(x) > 0.$$

例5. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1({x_1}^2 + {x_2}^2 - 1) - x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2({x_1}^2 + {x_2}^2 - 1). \end{cases}$

解: 取 $V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}({x_1}^2 + {x_2}^2)$, 正定, 有无穷小界.

$$\dot{V}(x_1, x_2)$$

$$= x_1[x_1({x_1}^2 + {x_2}^2 - 1) - x_2] + x_2[x_1 + x_2({x_1}^2 + {x_2}^2 - 1)]$$

$$= ({x_1}^2 + {x_2}^2)({x_1}^2 + {x_2}^2 - 1)$$

$$< -\frac{1}{2}({x_1}^2 + {x_2}^2), \ \left({x_1}^2 + {x_2}^2 < \frac{1}{2}\right).$$

$\Rightarrow$ $-\dot{V}$ 为 $l.p.d.f.$ $\Rightarrow$零解为一致渐近稳定, 但非全局.

例6. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - e^{-2t}x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2. \end{cases}$

解: $V(t, x_1, x_2) = {x_1}^2 + (1 + e^{-2t}){x_2}^2 \geq {x_1}^2 + {x_2}^2$ 为正定函数.

$V(t, x_1, x_2) \leq {x_1}^2 + 2{x_2}^2$ 具有无穷小上界.

$$\dot{V}(t, x_1, x_2)$$

$$= 2x_1[-x_1 - e^{-2t}x_2] - 2e^{-2t}{x_2}^2 + 2(1 + e^{-2t})x_2[x_1 - x_2]$$

$$= -2[{x_1}^2 - x_1x_2 + {x_2}^2(1 + 2e^{-2t})]$$

$$\leq -2[{x_1}^2 - x_1x_2 + {x_2}^2]$$

$$W(x_1,x_2)={x_1}^2-x_1x_2+{x_2}^2=(x_1-\frac{1}{2}x_2)^2+\frac{3}{4}{x_2}^2.$$

$$W(0,0)=0, W(x_1,x_2)>0, \forall(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\text{且}(x_1,x_2)\neq(0,0).$$

$$\overset{Th4}{\Longrightarrow}\text{零解是全局一致渐近稳定.}$$

Definition 1. (正极限集)若存在时间序列$\{t_n\}$: $t_n\to\infty\ (n\to\infty)$使得$\lim\limits_{n\to\infty} s(t_n;\ t_0,x_0)=y$,则称$y$为轨线$s(t;\ t_0,x_0)$的正极限点. 正极限点的全部称为轨线$s(t;\ t_0,x_0)$的正极限集, 记为$\Omega$.

Remark 2. 若 0为系统(1)的全局渐近稳定的平衡点,则系统(1)所有轨线的正极限集均为单点集{0}.

Definition 2. (不变集). $M \subset \mathbb{R}^n$称为系统(1) 的不变集$\Leftrightarrow \forall y \in M$, 有 $s(t;\ t_0, y) \in M, \forall t \geq t_0$.

Lemma 1. 若 $s(t;\ t_0,\ x_0)$ 有界, 则它的正极限集 Ω 是闭集而且也是有界的. 进一步, $s(t;\ t_0,\ x_0) \to \Omega\ (t \to \infty)$,

$i.e$,

$$\inf_{y \in \Omega} \|s(t; t_0, x_0) - y\| \to 0\ (t \to \infty).$$

Lemma 2. 假设系统(1)为周期系统或自治系统，则正极限集Ω为它的不变集。

Lemma 3. 考虑自治系统$\frac{dx}{dt} = f(x)$，令$V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$是连续可微的，对某个正数$c > 0$，集合$D_c = \{x \in \mathbb{R}^n: V(x) \le c\}$是有界的。假设$V(x)$在$D_c$上有下界，且$\dot{V}(x) \le 0$，$\forall x \in D_c$，定义集合$S = \{x \in D_c: \dot{V}(x) = 0\}$，令$M$为包含在$S$中的系统的最大不变集，则对$\forall x_0 \in D_c$，有$s(t; t_0, x_0) \to M (t \to \infty)$。

Proof. 对$\forall x_0 \in D_c$，由$\dot{V}(x) \le 0$，$\forall x \in D_c$得

$$V(s(t;t_0,x_0)) \le V(s(t_0)) = V(x_0) \le c$$

$\Rightarrow s(t;t_0,x_0) \in D_c$，$\forall t \ge t_0$。注意到$V(s(t;t_0,x_0))$在$D_c$上单调递减且有下界，有

$$V(\lim_{t\to\infty} s(t;t_0,x_0)) = \lim_{t\to\infty} V(s(t;t_0,x_0)) = c_0$$

令L为轨线$s(t;t_0,x_0)$的正极限集，下证$L \subseteq S$。则对$\forall\, y \in L$，

$$V(y) = V(\lim_{n\to\infty} s(t_n;t_0,x_0)) = c_0$$

$\Rightarrow \dot{V}(y) = 0 \Rightarrow L \subseteq S$。注意到$L$为不变集，而$M$为$S$中系统的最大不变集，有$L \subseteq M$。由**Lemma 1**，得到$s(t;t_0,x_0) \to L(t \to \infty)$，从而$s(t;t_0,x_0) \to M(t \to \infty)$。

Theorem 5. (LaSalle不变原理) 考虑自治系统$\frac{dx}{dt} = f(x)$，$V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$为连续可微的局部正定函数，$D_c = \{x \in \mathbb{R}^n: V(x) \le c, c > 0\}$为有界集，$V$在$D_c$上有下界，$\dot{V}(x) \le 0$，$\forall x \in D_c$。集合$S = \{x \in D_c: \dot{V}(x) = 0\}$中除了零解不包含系统其他轨线。则系统的零解是渐近稳定的

Proof. 由Th3知，零解是稳定的，只需证零解是吸引的，由**Lemma 3**，对$\forall x_0 \in D_c$，$s(t; t_0, x_0) \to M = \{0\}$。

Theorem 6. (全局渐稳) 考虑自治系统$\frac{dx}{dt}=f(x)$，$V:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$为连续可微的正定函数，$\dot{V}(x)\le 0$，$\forall x\in\mathbb{R}^n$，集合$S=\{x\in\mathbb{R}^n:\dot{V}(x)=0\}$只包含零解，则系统的零解是全局渐近稳定的。

Theorem 7. 假设系统(1)为周期系统，即$f(t+T,x)=f(t,x)$，$\forall t\ge t_0$，$x\in\mathbb{R}^n$。$V(t,x)$为$\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$连续可微的正定函数，且满足$V(t+T,x)=V(t,x)$，$\forall x\in\mathbb{R}^n$，$t\ge t_0$。定义集合$S=\{x\in\mathbb{R}^n:\dot{V}(t,x)=0,\forall t\ge t_0\}$。假设$\dot{V}(t,x)\le 0$，$\forall t\ge t_0$，$x\in\mathbb{R}^n$，集合$S$中只包含系统的零解，则系统的零解是全局渐近稳定的。

例7. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -f(x_2) - g(x_1), \end{cases}$

其中$f(\cdot), g(\cdot)$满足下列条件:

(i)$f, g \in C$; (ii) $f(0) = g(0) = 0, \sigma f(\sigma) > 0, \sigma g(\sigma) > 0,\ \forall \sigma \neq 0$;

(iii) $\int_0^{\sigma} g(s)ds \to +\infty, |\sigma| \to +\infty$.

解. 取$V(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{2} + \int_0^{x_1} g(s)ds$.则$V$为连续可微的正定函数, 且

$\dot{V}(x_1, x_2) = -x_2 f(x_2) \leq 0, \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \dot{V}(x_1, x_2) = 0\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$$
$$= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = x_2 = 0\}.$$

由Th6, 零解是全局渐近稳定的.

例 8. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_2 - (2+\sin t)x_1, \end{cases}$

解 取$V(t,x_1,x_2) = x_1^2 + \frac{x_2^2}{2+\sin t}$，则$V$为连续可微正定函数，且关于$t$以$2\pi$为周期。

$\dot{V}(t,x_1,x_2) = -x_2^2 \frac{4+2\sin t+\cos t}{(2+\sin t)^2} \le 0$，$\forall t \ge t_0$，$(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$。

$S = \{(x_1,x_2): \dot{V} = 0\} = \{(x_1,x_2): x_2 = 0\} = \{(x_1,x_2): x_1 = x_2 = 0\}$。

由Th7，零解是全局渐近稳定的。

2.3 不稳定性定理

Theorem 8. 若存在一个连续可微的 $V(t,x)$ ，具有无穷小上界，且满足: (i) $\dot{V}(t,x)$为局部正定函数(局部负定函数);
(ii) $V(t,0)=0$,且存在任意小的$\bar{x}$，使得 $V(t_0,\bar{x})>0\ (<0)$。
则系统(1)的零解在t_0处是不稳定的。

Proof. 由定理条件，存在$\varphi_1(\cdot),\varphi_2(\cdot)\in k$使得

$$\dot{V}(t,x)\geq\varphi_1(||x||), V(t,x)\leq\varphi_2(||x||),\ \forall t\geq t_0, x\in B_r\ .$$

(反证法)若零解稳定，则$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$||x_0||<\delta$时，$\|x(t;t_0,x_0)\|<\varepsilon,\forall t\geq t_0$.

取$x_0=\bar{x}$,使得$V(t_0,x_0)>0$,则有

$$\varphi_2(\|x(t)\|)\geq V(t,x(t))\geq V(t_0,x_0)$$
$$\Rightarrow\|x(t)\|\geq\varphi_2^{-1}\big(V(t_0,x_0)\big)\triangleq\eta>0$$

$$\Rightarrow\dot{V}(t,x(t))\geq\varphi_1(\|x(t)\|)\geq\varphi_1\ (\eta)\triangleq\lambda>0$$

$$V\big(t,x(t)\big)-V(t_0,x_0)=\int_{t_0}^{t}\dot{V}(\tau,x(\tau))\,\mathrm{d}\tau\geq\lambda(t-t_0\ )$$

$\Rightarrow\lim\limits_{t\to\infty}V(t,x(t))=+\infty$与$V(t,x(t))\leq\varphi_2(\epsilon),\forall t\geq t_0$矛盾.

例9. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 + x_1 x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_2 - {x_2}^2. \end{cases}$

解. 取 $V(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2)^2 - {x_2}^2$,具有无穷小上界,且存在任意小 x_1,使得$V(x_1, 0) > 0$.

$$\dot{V}(x_1, x_2) = 2(2x_1 - x_2)(2\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - 2x_2\dot{x}_2$$

$$= 2[(2x_1 - x_2)^2 + {x_2}^2] + 8{x_1}^2 x_2$$

为局部正定函数.由Th8,零解是不稳定的.

Theorem 9. $V(t,x)$连续可微, 具有无穷小上界， 且满足

(i) $V(t_0,0)=0$,在原点的任意小领域内存在$\bar{x}$,使得$V(t_0,\bar{x})>0$;

(ii) $\dot{V}(t,x)=\lambda V(t,x)+V_1(t,x)$,其中$\lambda>0$, $V_1(t,x)\geq 0, \forall t\geq t_0$,

$x\in \mathrm{B}_r$.

则零解在t_0处是不稳定的.

Proof. $\dot{V}(t,x)\geq \lambda V(t,x)\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[e^{-\lambda t}V\big(t,x(t)\big)\right]\geq 0.$

积分得 $e^{-\lambda t}V\big(t,x(t)\big)-e^{-\lambda t_0}V(t_0,x_0)\geq 0.$

$\Rightarrow V\big(t,x(t)\big)\geq V(t_0,x_0)\,e^{\lambda(t-t_0)}\rightarrow +\infty\ (t\rightarrow +\infty)$

例10. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 2x_2 + x_1 x_2{}^2, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + x_2 - x_1{}^2 x_2. \end{cases}$

解. 取 $V(x_1, x_2) = x_1{}^2 - x_2{}^2$，具有无穷小上界,存在任意小$x_1$，使得$V(x_1, 0) > 0$.

$$\dot{V}(x_1, x_2) = 2x_1\dot{x}_1 - 2x_2\dot{x}_2 = 2(x_1{}^2 - x_2{}^2) + 4x_1{}^2 x_2{}^2$$
$$= 2V(x_1, x_2) + 4x_1{}^2 x_2{}^2.$$

由Th9,零解是不稳定的.

Theorem 10.(切塔耶夫定理) $V(t,x)$连续可微, Ω为一闭集, 0为其内点, 满足下列条件:

(i) 存在开集$\Omega_1 \subseteq \Omega$, 0在其边界上;

(ii) $V(t,x) > 0, \forall t \geq t_0, x \in \Omega_1$;

$V(t,x) = 0, \forall t \geq t_0, x \in \partial\Omega_1 \setminus \Omega$;

(iii) $V(t,x)$在Ω内有上界, 对t一致;

(iv) $\dot{V}(t,x) \geq \gamma\big(V(t,x)\big), \gamma(\cdot) \in k, \forall t \geq t_0, x \in \Omega_1$.

则零解不稳定.

例11. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 + {x_1}^2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_1 x_2. \end{cases}$

解. 取 $V(x_1, x_2) = x_1 x_2$. $\Omega = \{(x_1, x_2): {x_1}^2 + {x_2}^2 \leq 1\}$, $\Omega_1 = \{(x_1, x_2) \in \Omega: x_1 > 0, x_2 > 0\}$.

$\dot{V}(x_1, x_2) = {x_1}^2 + {x_2}^2 + x_1 x_2 + 2{x_1}^2 x_2 \geq x_1 x_2 = V(x_1, x_2)$,

$\forall (x_1, x_2) \in \Omega_1$.

由Th10, 零解不稳定.