

# **ANÁLISIS DE UN PROBLEMA DE COLISIÓN ENTRE DOS MASAS PUNTUALES EN DOS DIMENSIONES**

**SHERYL KARINA AVENDAÑO PÉREZ**  
**Instituto de Física**  
**Universidad de Antioquia**

**Anteproyecto**  
**Fundamentos de Programación**

**Presentado a**

**SHERYL K. AVENDAÑO PÉREZ**  
**Instituto de Física**  
**Universidad de Antioquia**



**Noviembre 2019**

# Índice general

Índice general	I
<b>1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA</b>	<b>1</b>
<b>2 JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA</b>	<b>3</b>
<b>3 OBJETIVOS</b>	<b>4</b>
3.1 Objetivo General . . . . .	4
3.2 Objetivos Específicos . . . . .	4
<b>4 MARCO TEÓRICO</b>	<b>5</b>
4.0.1 Movimiento Rectilíneo Uniforme . . . . .	6
4.0.2 Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado . . . . .	6
4.0.3 Movimiento en dos dimensiones . . . . .	6
4.0.4 Movimiento Parabólico . . . . .	7
4.0.5 Conservación de la Energía y el Momentum . . . . .	7
4.0.6 Centro de masa . . . . .	8
<b>5 METODOLOGÍA Y DESARROLLO</b>	<b>9</b>
5.1 Análisis físico del problema . . . . .	9
5.1.1 Resolviendo el sistema . . . . .	11
5.1.2 Restricciones de la solución . . . . .	14
5.1.3 Resultados esperados . . . . .	17
5.1.4 Parámetros de entrada . . . . .	18
5.2 Algoritmos . . . . .	19
5.2.1 Módulos auxiliares . . . . .	19
5.2.2 Algoritmo Informal. Modelador . . . . .	22
5.2.3 Algoritmo informal. Revisor . . . . .	22
5.3 Pruebas y evaluación . . . . .	23
5.3.1 Pruebas modelo . . . . .	24
5.3.2 Evaluación pruebas modelo . . . . .	24

5.3.3	Pruebas revisor . . . . .	24
5.3.4	Evaluación pruebas revisor . . . . .	25
5.4	Cronograma de actividades . . . . .	25
<b>Bibliografía</b>		<b>26</b>

# PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En un diseño de laboratorio para estudiar el choque bidimensional se tiene el siguiente problema: una masa  $m_1$  y de radio  $R_1$  es colocada en el punto #1 y lanzada en caída libre sobre un riel curvo desde una altura  $h$  desde la superficie de la mesa, en el punto #2 le espera una masa  $m_2$  de radio  $R_2$  ubicada a una altura  $H$  desde el suelo, tal cómo se muestra en la siguiente figura:

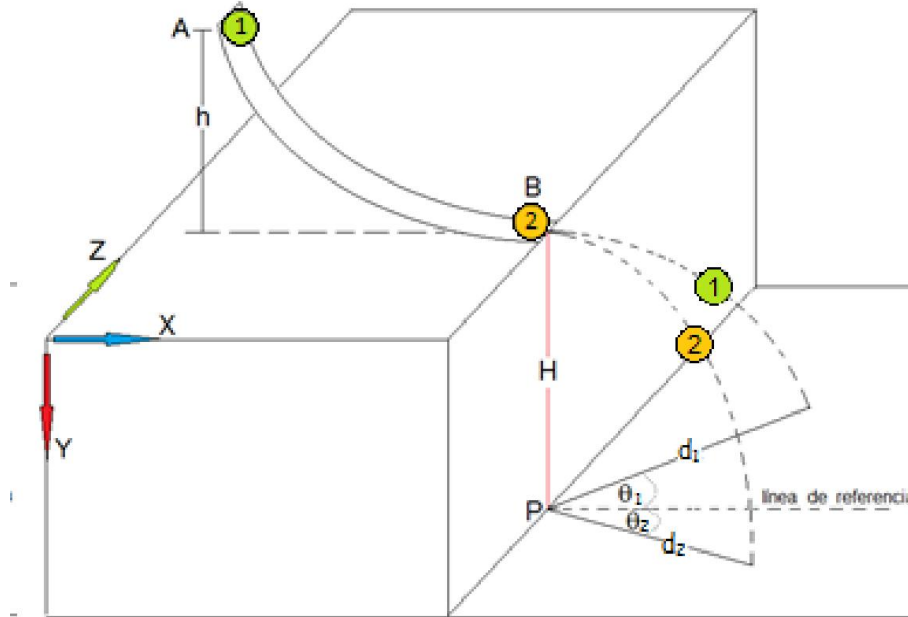


Figura 1.1: Esquema del problema. Imagen sacada de [1]

Al chocar las dos masas, habiendo una distancia entre los centros de masa de los objetos, que llamaremos  $b$  (parámetro de impacto), como se ve en la figura 1.2, éstas se separarán en trayectorias parabólicas sobre un eje de acción que está a un ángulo,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ , de la línea de referencia, al llegar al suelo cada una habrá recorrido una distancia,  $d_1$  y  $d_2$ .

Se desea usar un algoritmo computacional para hallar los valores para los ángulos  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ , conociendo los valores de  $h$ ,  $H$ ,  $g$ , las masas  $m_1$  y  $m_2$  con sus respectivos radios  $R_1$ ,  $R_2$  y el parámetro de impacto  $b$ ,

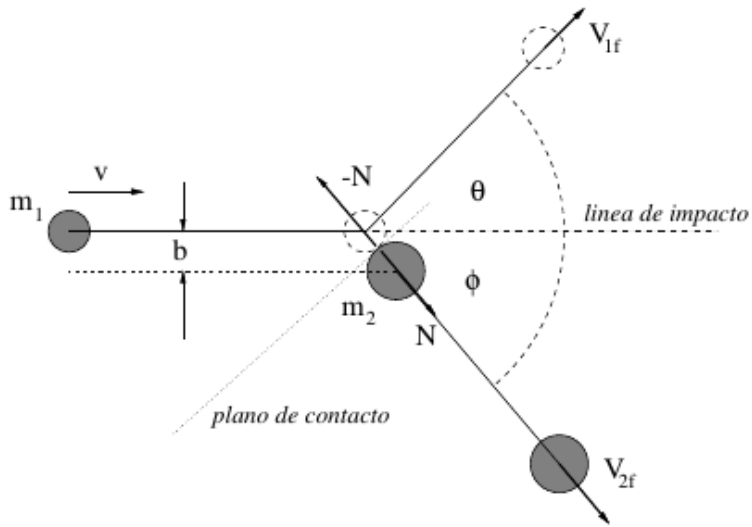


Figura 1.2: Esquema del impacto. Imagen sacada de [9]

Además de realizar una gráfica 3D, similar a la figura 1.1, con los valores de la apertura y el alcance máximo para un problema puntual y unas gráficas 2D de comparación entre los valores  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $d_1$  y  $d_2$  vs  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $b$ ,  $h$  y  $H$ . El problema será resuelto usando un notebook de Jupyter, python 3.7 y sus distintos módulos, talq ue se pueda consignar los resultados en un documento interactivo.

# JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA

Este esquema de laboratorio está planteado en varias guías de Laboratorio de física mecánica, como puede comprobarse en los recursos online citados es [1],[6],[2] y [5]. Este tipo de montaje es común para estudiar el tema de colisiones en dos dimensiones y los principios de conservación, pero puede ser difícil de desarrollar dada la complejidad de los cálculos implicados.

Sin embargo el estudio de este tipo de temas en el laboratorio de mecánica es importante para la formación completa de los estudiantes que cursan materias de Física I, Física Básica o Física Mecánica, como podemos ver en distintas bibliografías, tales como [7], [12], [9] y cursos oficiales [3], [4] y [14] es un tema siempre presente, que se trabaja con varios conocimientos físicos propios de la materia como la conservación del momentum, la energía, fuerzas en centros de masas, además de los movimientos rectilíneos y movimiento en dos dimensiones.

Dado a las nuevas tecnologías y la implementación de conocimientos básicos de la computación y el uso de la herramienta Jupyter para crear libros/notebooks para compartir información [11], [8] , es posible para nosotros crear un documento que no sólo tenga información ordenada del desarrollo físico y matemático de este problema, sino que permita la generación (y si se desea la distribución) de códigos simuladores que permitan un acercamiento a este tipo de montajes como podemos observar en [13] .

# OBJETIVOS

## Objetivo General

El objetivo de este trabajo es crear un documento interactivo, en donde se consigne una solución física para el problema planteado en la sección 1, tal que se encuentre un sistema de ecuaciones que nos permita hallar los valores para los ángulos  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $d_1$  y  $d_2$  en función de los valores conocidos  $h$ ,  $H$ ,  $g$ , las masas  $m_1$  y  $m_2$  con sus respectivos radios  $R_1$ ,  $R_2$  y el parámetro de impacto  $b$ , la distancia entre los centros de masa de los objetos. Usando este sistema de ecuaciones, se creará conjunto de funciones en Python 3.7 para agilizar el calculo de estos valores y que permita obtener una imagen 3D de la solución similar a la figura 1.1 y unas gráficas 2D de comparación entre  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $d_1$  y  $d_2$  vs  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $b$ ,  $h$  y  $H$ .

## Objetivos Específicos

- Proponer una solución física para el problema planteado en la sección 1 y encontrar un sistema de ecuaciones para hallar los valores para los ángulos  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $d_1$  y  $d_2$  en función de los valores conocidos  $h$ ,  $H$ ,  $g$ , las masas  $m_1$  y  $m_2$  con sus respectivos radios  $R_1$ ,  $R_2$  y el parámetro de impacto  $b$ .
- Definir restricciones tanto física, numéricas y computacionales según en sistema de ecuaciones hallado.
- Crear las funciones en Python 3.7 usando el sistema de ecuaciones encontrado junto con las restricciones.
- Obtener los valores para los ángulos  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y las distancias  $d_1$  y  $d_2$  y una imagen 3D de la solución para masas iguales  $m_1 = m_2 = 1$ , para variaciones de masa  $m_1 \neq m_2$ , de radio  $R_1 \neq R_2$ , de altura  $h \neq H$  y valores del mínimos y máximos del parámetro de impacto  $b \approx 0,0$  y  $b \approx R_1 + R_2$  y para choques frontales  $b = 0,0$ .
- Obtener los valores para los ángulos  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y las distancias  $d_1$  y  $d_2$  para variaciones de  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $b$ ,  $h$  y  $H$ , dejando las demás variables fijas y una gráfica 2D para cada  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $d_1$  y  $d_2$  vs  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $b$ ,  $h$  y  $H$ .

# MARCO TEÓRICO

En mecánica clásica se conoce como *cinemática* a todo aquello relacionado con la física del movimiento sin tener en cuenta la dinámica o interacción entre los cuerpos. El movimiento en una dimensión se puede clasificar en movimientos rectilíneos y movimientos circulares. En cambio cuando se habla de la interacción entre los cuerpos, donde contamos con la masa y las interacciones con el movimiento, estamos hablando de *dinámica y estática* [6], [2].

Los movimientos pueden ser uniforme o acelerado. Las variables físicas que se usan para describir estos movimientos son [6]:

- Tiempo  $t$  el cual tiene unidades (mks) de segundos  $[s]$ .
- Desplazamiento  $x$  la cual tiene unidades (mks) de metros  $[m]$ .
- Velocidad  $v = \frac{dx}{dt}$  la cual tiene unidades (mks) de metros sobre segundo  $\left[\frac{m}{s}\right]$ .
- Aceleración  $a = \frac{dv}{dt}$  la cual tiene unidades (mks) de metros sobre segundo cuadrado  $\left[\frac{m}{s^2}\right]$ .

Aunque el movimiento sea en una dimensión, las magnitudes conservan su característica vectorial como por ejemplo el desplazamiento el cual en su forma general se representa como  $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ , donde  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  son los vectores unitarios del plano cartesiano  $\mathbf{R}^3$ .

En la dinámica las variables físicas más sobresalientes son para describir las causas del movimiento de un cuerpo son [6]:

- Masa  $m$  la cual tiene unidades (mks) de kilogramos  $[Kg]$ .
- Momentum Lineal  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  el cual tiene unidades (mks) de kilogramos por metro sobre segundo  $\left[Kg\frac{m}{s}\right]$ .
- Fuerza  $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$  la cual tiene unidades (mks) de Newton  $[N]$ .
- Trabajo  $W_{AB} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  el cual tiene unidades (mks) de Julios  $[J]$ .



- Energía Cinética  $E_c = \frac{1}{2}mv^2$  la cual tiene unidades (mks) de Julios  $[J]$ .
- Energía Potencial  $E_p = mgy$  la cual tiene unidades (mks) de de Julios  $[J]$ .

## Movimiento Rectilíneo Uniforme

El movimiento rectilíneo uniforme es aquel en donde la aceleración es cero, es decir la velocidad no varía en el tiempo. El sistema en  $\mathbb{R}^3$  que lo representa es [6], [2], [5]:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}t & [m], \\ \mathbf{v} &= v\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} & \left[\frac{m}{s}\right], \\ \mathbf{a} &= 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} & \left[\frac{m}{s^2}\right]. \end{aligned} \quad (4.1)$$

## Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado

El movimiento rectilíneo uniforme es aquel en donde la aceleración no es cero y es constante, es decir la velocidad varía en el tiempo. El sistema en  $\mathbb{R}^3$  que lo representa es:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2 & [m], \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t & \left[\frac{m}{s}\right], \\ \mathbf{a} &= a\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} & \left[\frac{m}{s^2}\right]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

## Movimiento en dos dimensiones

El movimiento en dos dimensiones en  $\mathbb{R}^3$  es representado por [6], [2], [5]:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} & [m], \\ \mathbf{v} &= v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} & \left[\frac{m}{s}\right], \\ \mathbf{a} &= a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} & \left[\frac{m}{s^2}\right]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Donde cada coordenada puede seguir un movimiento rectilíneo y obedecer el sistema de ecuaciones 4.1 y 4.2.

## Movimiento Parabólico

Este es un caso particular del movimiento de dos dimensiones, en donde un objeto tiene un movimiento acelerado por la gravedad en  $y$  y una rectilíneo en  $x$ . El sistema de ecuaciones que obedece el movimiento en el eje vertical es [6], [2], [5]:

$$\begin{aligned}y &= y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 & [m], \\v_y &= v_{0y} - gt & \left[\frac{m}{s}\right], \\g &= 9,8 \left[\frac{m}{s^2}\right].\end{aligned}\tag{4.4}$$

Y el sistema de ecuaciones que obedece el movimiento en el eje horizontal es:

$$\begin{aligned}x &= x_0 + v_{0x}t & [m], \\v_x &= v_{0x} & \left[\frac{m}{s}\right].\end{aligned}\tag{4.5}$$

## Conservación de la Energía y el Momentum

La energía es una cantidad física escalar muy importante y es definida como la capacidad para realizar un trabajo. El trabajo es un cantidad física relacionada con las Fuerzas y el movimiento. En física clásica la ley de conservación de la energía indica que la energía ligada a un sistema aislado permanece constante en el tiempo [6], [2], [5].

$$\begin{aligned}E_A &= E_{cA} + E_{pA} & [J], \\E_B &= E_{cB} + E_{pB} & [J], \\E_B &= E_A & [J].\end{aligned}\tag{4.6}$$

Por otro lado el momentum es una magnitud física fundamental de tipo vectorial que describe el movimiento de un cuerpo en cualquier teoría mecánica, como la energía también obedece una ley de conservación lo cual significa que la cantidad de movimiento total de todo sistema cerrado, sin fuerzas externas o disipación en su interior, no puede ser cambiada y permanece constante en el tiempo. El momentum  $p$  es el momentum antes de la colisión y el momentum  $p'$  después de de la colisión.

$$\begin{aligned}\mathbf{p} &= m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 & \left[Kg\frac{m}{s}\right], \\ \mathbf{p}' &= m_1\mathbf{v}'_1 + m_2\mathbf{v}'_2 & \left[Kg\frac{m}{s}\right], \\ \mathbf{p} &= \mathbf{p}' & \left[Kg\frac{m}{s}\right].\end{aligned}\tag{4.7}$$

## Centro de masa

El centro de masas de un sistema discreto o continuo es un punto geométrico tal que se puede emular el comportamiento de una masa puntual bajo la resultante de las fuerzas externas al sistema, en donde también se asume está toda la masa concentrada tal que se convierte en un sistema equivalente al original. Generalmente se define como [6], [2], [5]:

Centro de Masa para un sistema discreto por  $i$  partículas en posiciones  $\mathbf{r}_i$  es igual a:

$$\mathbf{r}_{\text{cm}} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i}. \quad (4.8)$$

Centro de Masa para un sistema continuo de volumen  $V$  es igual a:

$$\mathbf{r}_{\text{cm}} = \frac{\int_V \mathbf{r} dm}{\int_V dm}. \quad (4.9)$$

El centro de masa para una esfera o disco sólido con densidad homogénea es su propio centro geométrico [9].

# METODOLOGÍA Y DESARROLLO

Para lograr los objetivos planteados usaremos el razonamiento deductivo [10] cómo metodología principal. Partiendo desde principios físicos y particularizando según el problema planteado definido en el capítulo 1 obtendremos un modelo cuyos parámetros son las alturas  $h$ ,  $H$ , la gravedad  $g$ , las masas  $m_1$  y  $m_2$  con sus respectivos radios  $R_1$ ,  $R_2$  y el parámetro de impacto  $b$ .

Este paso se realizará usando los principios de conservación de energía, momento lineal y movimiento parabólico; usando las ecuaciones 4.4, 4.5, 4.6 y 4.7 se creará un sistema de ecuaciones de 4 ecuaciones, ya que debemos despejar 4 incógnitas  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $d_1$  y  $d_2$ . Toda la información obtenida se consignará en un notebook de Jupyter.

Luego ejecutaremos un modelo propuesto usando funciones definidas en Python 3.7, con cada parámetro establecido en un intervalo. El objetivo final es realizar un número determinado de pruebas con las funciones creadas y recrear los datos esperados según la teoría. Un resumen completo se encuentra en el diagrama de flujo referido en la figura 5.1.

## Análisis físico del problema

Las variables para cada esfera antes y después de la colisión serán:

- ✓ Masa para la esfera 1,  $m_1$ .
- ✓ Masa para la esfera 2,  $m_2$ .
- ✓ La velocidad para la esfera 1, antes de la colisión,  $v_1$ .
- ✓ La velocidad para la esfera 2, antes de la colisión,  $v_2$ .
- ✓ La velocidad para la esfera 1, después de la colisión,  $v'_1$ .
- ✓ La velocidad para la esfera 2, después de la colisión,  $v'_2$ .

Para resolver el problema planteado debemos analizar paso por paso la gráfica 1.1. En ella vemos que tenemos 3 puntos importantes:

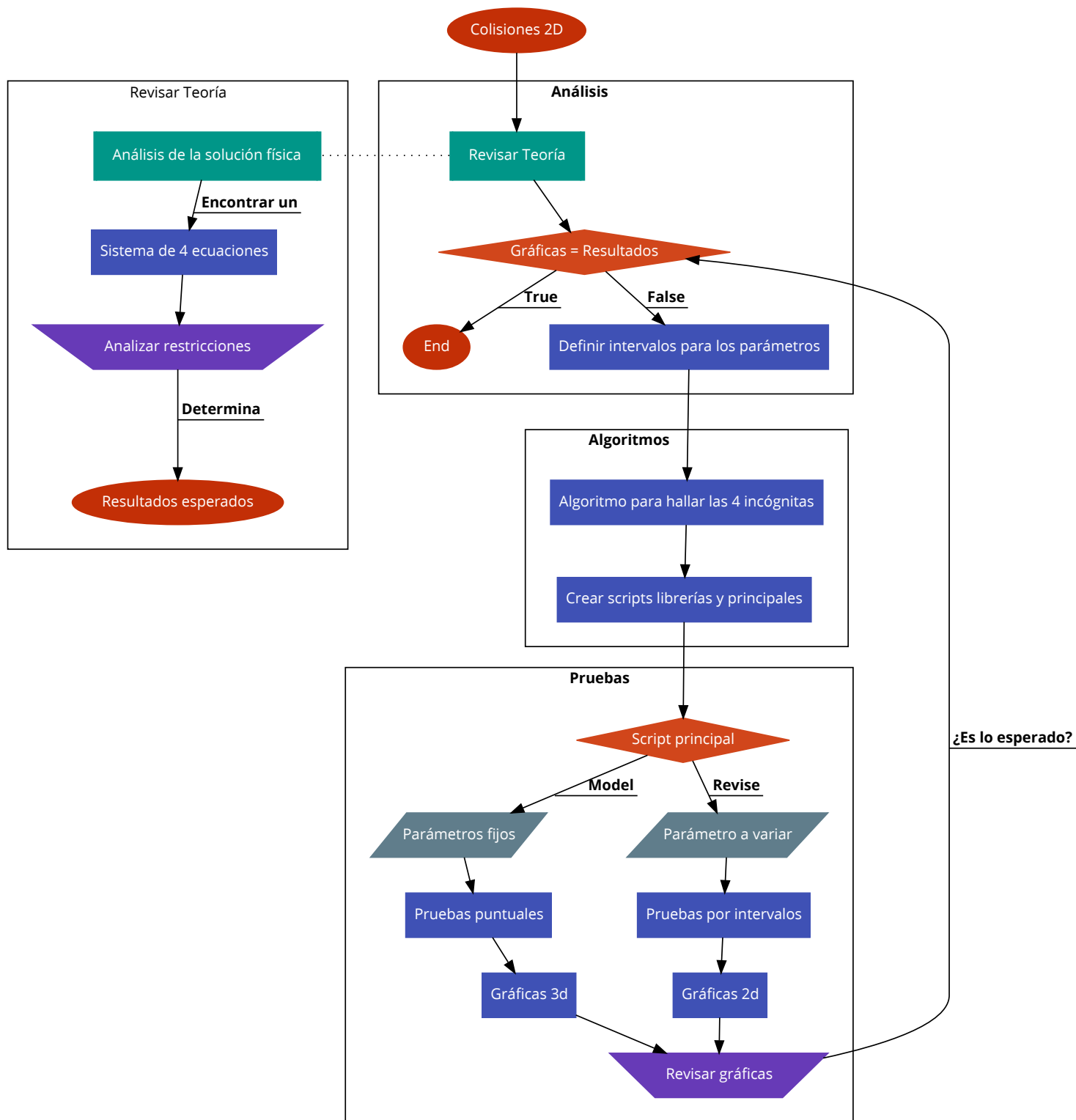


Figura 5.1: Diagrama de flujo de la metodología

- El punto A en la cima del carril curvo.
- El punto B justo antes de salir del carril curvo hacia el suelo.
- El punto P en el suelo.

Las masas  $m_1$  y  $m_2$  no cambian en todo el sistema, el choque se define elástico por lo tanto no hay pérdidas de energía ni de momentum.

## Resolviendo el sistema

El punto B es donde suceden las colisiones por lo tanto en ese punto tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= m_1 \mathbf{v}_1 \quad \left[ Kg \frac{m}{s} \right], \\ \mathbf{p}' &= m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2 \quad \left[ Kg \frac{m}{s} \right]. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Donde  $\mathbf{p}$  es el momento lineal antes de la colisión y  $\mathbf{p}'$  después de la colisión. La esfera 2 está quieta por lo tanto su velocidad es cero antes de la colisión, tenemos, por conservación de momentum lineal la ecuación

$$m_1 \mathbf{v}_1 = m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2. \quad (5.2)$$

Siendo que el choque es elástico (asumimos no deformación de la masas ni pérdidas de energía considerable) tenemos que la energía antes y después del choque se conserva:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 (v'_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (v'_2)^2. \quad (5.3)$$

Ahora tenemos dos ecuaciones y conocemos las masas  $m_1$  y  $m_2$ . Para determinar las velocidades después de la colisión necesitamos saber la magnitud de la velocidad de la esfera 1 antes del choque,  $v_1$ . Podemos observar que la esfera 1 es arrojada desde una altura  $h$  [m] con velocidad cero y llega al nivel de la mesa con una velocidad.

Esto puede ser resuelto por varias maneras, por un movimiento en dos dimensiones o por conservación de energía. Asumiendo que la fricción en el carril curvo es despreciable podemos decir que la energía total en el punto A,  $E_A$ , es igual a la energía potencial a una altura desde el suelo de  $h + H$  [m] y esta se transforma en energía cinética más la potencial por la altura  $H$  [m], que sería la energía total en el punto B, ( $E_B$ ):

$$\begin{aligned}
E_A &= m_1 g(h + H) \quad [J], \\
E_B &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + m_1 g(H) \quad [J], \\
E_B &= E_A \quad [J].
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Gracias a esto podemos decir que la velocidad en el punto B para el objeto 1 es:

$$v_1 = \sqrt{2hg} \quad \left[ \frac{m}{s} \right]. \tag{5.5}$$

Ahora tenemos la magnitud de la velocidad de la esfera 1, la cual es en su forma vectorial a  $v_1 \mathbf{i} + 0 \mathbf{j} + 0 \mathbf{k}$ . Descomponiendo por vectores tenemos que la ecuación 5.2 es:

$$\begin{aligned}
\text{En } \mathbf{i} \quad m_1 v_1 &= m_1 v'_1 \cos(\theta_1) + m_2 v'_2 \cos(\theta_2) \quad \left[ Kg \frac{m}{s} \right], \\
\text{En } \mathbf{k} \quad 0 &= m_1 v'_1 \sin(\theta_1) - m_2 v'_2 \sin(\theta_2) \quad \left[ Kg \frac{m}{s} \right].
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Y usando 5.3 tendríamos 3 ecuaciones pero 4 incógnitas. Para completar nuestro sistema de ecuaciones debemos recordar que los choques que producen este tipo de movimiento en dos dimensiones son aquellos que nos son frontales, es decir que los centros del masa de los objetos no se encuentran en la misma línea de referencia tal y como se ve en la figura 1.2.

Las fuerzas que actúan en objetos circulares son fáciles de descomponer como se muestra en la siguiente gráfica:

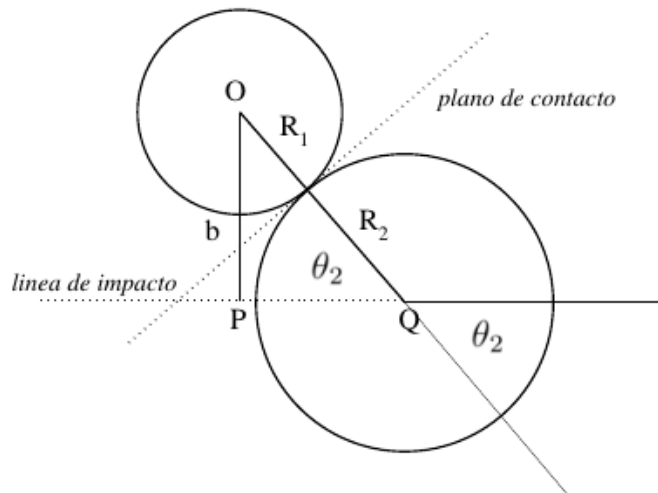


Figura 5.2: Diagrama de fuerzas. Imagen sacada de [9]

El ángulo  $\theta_2$  es el ángulo al cual la fuerza Normal interna producida por el choque mandará nuestro segundo objeto. La fuerza Normal es una fuerza que se presenta cuando dos objetos están en contacto, en el punto de choque se supone que la Fuerza actúa en ambos objetos siguiendo la tercera ley de Newton, ambos sienten la misma fuerza pero en sentidos contrarios y normal a la superficie. Como el objeto es una esfera la normal a su superficie es un radio por lo cual por simple geometría podemos decir que el ángulo  $\theta_2$  puede ser calculado [9]:

$$\sin \theta_2 = \frac{b}{R_1 + R_2}. \quad (5.7)$$

Con esto tenemos 4 ecuaciones y 4 incógnitas, usando las ecuaciones de 5.6 podemos despejar  $\theta_1$

$$\begin{aligned} m_1 v'_1 \cos(\theta_1) &= m_1 v_1 - m_2 v'_2 \cos(\theta_2) \\ m_1 v'_1 \sin(\theta_1) &= m_2 v'_2 \sin(\theta_2) \\ \tan \theta_1 &= \frac{m_2 v'_2 \sin(\theta_2)}{m_1 v_1 - m_2 v'_2 \cos(\theta_2)}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Y usando sus cuadrados y sumando tenemos:

$$\begin{aligned} (m_1 v'_1 \cos(\theta_1))^2 &= (m_1 v_1 - m_2 v'_2 \cos(\theta_2))^2 \\ (m_1 v'_1 \sin(\theta_1))^2 &= (m_2 v'_2 \sin(\theta_2))^2 \\ (m_1 v'_1)^2 &= (m_1 v_1)^2 + (m_2 v'_2)^2 - 2m_1 v_1 m_2 v'_2 \cos(\theta_2). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Ahora usando la ecuación 5.3 multiplicando por  $m_1$  e igualando con 5.9 tenemos

$$\begin{aligned} (m_1 v_1)^2 &= (m_1 v'_1)^2 + m_1 m_2 (v'_2)^2 \\ (m_1 v'_1)^2 &= (m_1 v_1)^2 - m_1 m_2 (v'_2)^2 \\ \cancel{(m_1 v_1)^2} - m_1 m_2 (v'_2)^2 &= \cancel{(m_1 v_1)^2} + m_2^2 (v'_2)^2 - 2m_1 v_1 m_2 v'_2 \cos(\theta_2) \\ 2m_1 v_1 m_2 \cos(\theta_2) &= m_1 m_2 v'_2 + m_2^2 v'_2 \\ v'_2 &= \frac{2m_1 v_1 \cos(\theta_2)}{m_1 + m_2}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Tener en cuenta que una solución de este sistema sería que  $v'_2 = 0$  [m/s] aunque esto es el caso trivial en donde no habría colisión. Con esto ya tendríamos el sistema a resolver completo:

$$\begin{aligned} \sin \theta_2 &= \frac{b}{R_1 + R_2}; & v'_2 &= \frac{2m_1 v_1 \cos(\theta_2)}{m_1 + m_2} \quad \left[ \frac{m}{s} \right]; \\ \tan \theta_1 &= \frac{m_2 v'_2 \sin(\theta_2)}{m_1 v_1 - m_2 v'_2 \cos(\theta_2)}; & v'_1 &= \frac{m_1 v_1 - m_2 v'_2 \cos(\theta_2)}{m_1 \cos(\theta_1)} \quad \left[ \frac{m}{s} \right]. \end{aligned} \quad (5.11)$$



Con este sistema se tienen los ángulos en función de elementos conocidos, estos son hallados en radianes pero pueden darse en grados para mejor visualización. Faltarían entonces los alcances  $d_1$  y  $d_2$ , ambas esferas describen movimientos parabólicos con sus respectivos ejes de acción, las velocidades iniciales son paralelas a estos ejes como vemos en la figura 1.2, por lo cual no hay  $V_{0y}$ , tan sólo nos resta saber cual es el alcance máximo de un movimiento parabólico, lo cual es simple teniendo las ecuaciones 4.4 y 4.5:

$$\begin{aligned} 0 &= H - \frac{1}{2}gt^2 & [m] \\ t_v &= \sqrt{\frac{2H}{g}} & [s] \\ x &= v_0 t_v + x_0 & [m] \\ g &= 9,8 & \left[\frac{m}{s^2}\right] \end{aligned} \quad (5.12)$$

Donde  $v_0$  es la velocidad con la que sale cada esfera de la rampa, descritas en 5.11. Con esto las distancias se calcularían con

$$d_1 = v'_1 \sqrt{\frac{2H}{g}} \quad [m]; \quad d_2 = v'_2 \sqrt{\frac{2H}{g}} \quad [m]. \quad (5.13)$$

## Restricciones de la solución

Con el desarrollo anterior tenemos que la solución del problema planteado en la sección 1 se reduce a aplicar las ecuaciones 5.11 y 5.13. Revisemos las condiciones que deben tener los valores de entrada  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $b$ ,  $h$  y  $H$  y los valores de salida  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $d_1$  y  $d_2$ :

1. Todas las entradas deben ser valores positivos, las masas, los radios y la altura de la rampa y de la mesa no pueden ser 0.
2. El valor de  $b$  no debe ser mayor o igual a la suma de radios de las esfera, pues en tal caso no chocarían. Así que  $b < R_1 + R_2$ .
3. La magnitud de velocidad de la esfera 1 antes del choque,  $v_1$ , es hallada usando la ecuación 5.5 y es siempre positiva. Ya que  $h$  es un valor positivo no hay problemas con valores negativos dentro de la raíz. Además, dado a que la función raíz cuadrada del modulo math en Python 3.7 da por default un valor positivo no tendremos problema con este valor, así que podemos decir que  $v_1 > 0$  siempre.
4. Luego según las ecuaciones 5.11  $\sin \theta_2$  es siempre positivo, ya que  $b$ ,  $R_1$  y  $R_2$  son valores positivos por lo tanto su división también es un valor positivo. El valor de la división es menor que 1,0 puesto que  $b < R_1 + R_2$ . Por lo tanto  $\theta_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

5. Según las ecuaciones 5.11, la magnitud de la velocidad de la segunda esfera después del choque,  $v'_2$ , es siempre positiva ya que todos los valores son positivos y el  $\cos(\theta_2)$  para  $\theta_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$  es siempre mayor que 0.
6. Según las ecuaciones 5.11  $\tan \theta_1$  puede ser cero, positivo o negativo, además tiene una asíntota y una indeterminación dependiendo del denominador, el numerador es siempre positivo:

$$\tan \theta_1 = \begin{cases} 0 & : m_1 v_1 \neq m_2 v'_2, & \theta_2 = 0 \\ (0, \infty) & : m_1 v_1 > m_2 v'_2 \cos(\theta_2), & 0 < \theta_2 < \frac{\pi}{2} \\ \rightarrow \infty & : m_1 v_1 = m_2 v'_2 \cos(\theta_2), & 0 < \theta_2 < \frac{\pi}{2} \\ \frac{0}{0} & : m_1 v_1 = m_2 v'_2, & \theta_2 = 0 \\ (-\infty, 0) & : m_1 v_1 < m_2 v'_2 \cos(\theta_2), & 0 < \theta_2 < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Según esto podemos decir de  $\theta_1$  que:

$$\theta_1 = \begin{cases} 0 & : m_1 v_1 > m_2 v'_2, & \theta_2 = 0 \\ \pi & : m_1 v_1 < m_2 v'_2, & \theta_2 = 0 \\ \left(0, \frac{\pi}{2}\right) & : m_1 v_1 > m_2 v'_2 \cos(\theta_2), & 0 < \theta_2 < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & : m_1 v_1 = m_2 v'_2 \cos(\theta_2), & 0 < \theta_2 < \frac{\pi}{2} \\ \rightarrow Ind & : m_1 v_1 = m_2 v'_2, & \theta_2 = 0 \\ \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) & : m_1 v_1 < m_2 v'_2 \cos(\theta_2), & 0 < \theta_2 < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

El punto de indeterminación debe ser revisado, matemáticamente es un desacierto generar un sistema de ecuaciones en un punto de indeterminación, además que computacionalmente se calculan las funciones por expansiones de Taylor y existe un truncamiento de los valores numéricos, así que es posible que nos den valores incoherentes. Para resolver la indeterminación tenemos que reescribir la ecuación 5.8:

$$\begin{aligned} m_1 v'_1 \cos(\theta_1) &= m_1 v_1 - m_2 v'_2 = 0 \\ m_1 v'_1 \sin(\theta_1) &= 0. \end{aligned}$$

La solución para este sistema es que  $\theta_1 = 0$  y/o  $v'_1 = 0$ , lo cual es lógico pues si  $\theta_2$  es 0 significa que es un choque frontal, en este caso todo el momentum lineal es pasado a la esfera 2. También para cumplir tanto la conservación de momento lineal como de energía escritas en la ecuaciones 5.6 y 5.3, la velocidad de la esfera 2 es  $v'_2 = \frac{m_1}{m_2}v_1$ . Además de esto, dado a que el experimento es hecho, generalmente, en un equipo de la forma:



Figura 5.3: Imágenes sacadas de a) [3] y b) [4]

Para cuando  $\theta_1$  posee valores entre  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  lo que va suceder es que habrá cierto retroceso y volverá a caer con un  $\theta_1^{(2)} = 0$  con una velocidad aproximada a  $v_1^{(2)}$ , siendo (2) el identificador para ese tramo de golpear la rampa y devolverse.

7. Según las ecuaciones 5.11  $v'_1$  tendría la forma:

$$v'_1 = \begin{cases} (0, \infty) : \theta_1 = 0 & m_1 v_1 > m_2 v'_2, & \theta_2 = 0 \\ (0, \infty) : \theta_1 = \pi & m_1 v_1 < m_2 v'_2, & \theta_2 = 0 \\ (0, \infty) : \theta_1 = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) & m_1 v_1 > m_2 v'_2 \cos(\theta_2), & 0 < \theta_2 < \frac{\pi}{2} \\ 0 & : \theta_1 = \frac{\pi}{2} & m_1 v_1 = m_2 v'_2 \cos(\theta_2), & 0 < \theta_2 < \frac{\pi}{2} \\ 0 & : \theta_1 = 0 & m_1 v_1 = m_2 v'_2, & \theta_2 = 0 \\ (0, \infty) : \theta_1 = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) & m_1 v_1 < m_2 v'_2 \cos(\theta_2), & 0 < \theta_2 < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Si volvemos a las ecuaciones 5.8 vemos que para el caso  $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} 0 &= m_1 v_1 - m_2 v'_2 \cos(\theta_2) \\ m_1 v'_1 &= m_2 v'_2 \sin(\theta_2), \end{aligned} \tag{5.14}$$

despejando obtenemos que

$$v'_1 = \frac{m_2 v'_2 \sin(\theta_2)}{m_1} \left[ \frac{m}{s} \right]. \quad (5.15)$$

El cual es un valor positivo. Para evitar inexactitudes con las funciones trigonométricas desarrollamos:

$$\begin{aligned} m_1 v_1 &= m_2 v'_2 \cos(\theta_2) \\ m_1 v_1 &= \frac{2m_2 m_1 v_1 \cos^2(\theta_2)}{m_1 + m_2} \\ m_1 + m_2 &= 2m_2 \cos^2(\theta_2) \\ m_1 &= m_2 (2 \cos^2(\theta_2) - 1) \\ m_1 &= m_2 \left( 1 - \frac{2b^2}{(R_1 + R_2)^2} \right) \end{aligned} \quad (5.16)$$

Con esto podremos predecir cuando se presentará la indeterminación.

8. Para finalizar, se calcula  $d_1$  y  $d_2$  con las ecuaciones 5.13 y estos valores son positivos siempre.

## Resultados esperados

En resumen las restricciones para las entradas son:

$$\begin{aligned} m_1 &> 0; & m_2 &> 0; & R_1 &> 0; & R_2 &> 0; \\ h &> 0; & H &> 0; & 0 &\leq b < R_1 + R_2 \end{aligned} \quad (5.17)$$

Lo que nos produce:

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \sin^{-1} \left( \frac{b}{R_1 + R_2} \right) \begin{cases} 0 & : b = 0, \\ \left( 0, \frac{\pi}{2} \right) & : 0 < b < R_1 + R_2, \end{cases} \quad [rad]. \\ v'_2 &= \frac{2m_1 v_1 \cos(\theta_2)}{m_1 + m_2} \begin{cases} \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2} & : b = 0, \\ (0, \infty) & : 0 < b < R_1 + R_2, \end{cases} \quad \left[ \frac{m}{s} \right]. \\ d_2 &= v'_2 \sqrt{\frac{2H}{g}} \Rightarrow (0, \infty) : 0 \leq b < R_1 + R_2 \quad [m]. \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= \tan^{-1} \left( \frac{m_2 v'_2 \sin(\theta_2)}{m_1 v_1 - m_2 v'_2 \cos(\theta_2)} \right) \left\{ \begin{array}{ll} 0 & : m_1 \geq m_2, \quad b = 0 \\ \pi & : m_1 < m_2, \quad b = 0 \\ \left(0, \frac{\pi}{2}\right) & : m_1 > m_2 \left(1 - \frac{2b^2}{(R_1 + R_2)^2}\right), \quad 0 < b < R_1 + R_2 \\ \frac{\pi}{2} & : m_1 = m_2 \left(1 - \frac{2b^2}{(R_1 + R_2)^2}\right), \quad 0 < b < R_1 + R_2 \\ \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) & : m_1 < m_2 \left(1 - \frac{2b^2}{(R_1 + R_2)^2}\right), \quad 0 < b < R_1 + R_2 \end{array} \right. \quad [rad]. \\
v_1 &\left\{ \begin{array}{ll} \frac{m_1 v_1 - m_2 v'_2}{m_1 \cos(\theta_1)} & : m_1 \neq m_2, \quad b = 0 \\ 0 & : m_1 = m_2, \quad b = 0 \\ \frac{m_1 v_1 - m_2 v'_2 \cos(\theta_2)}{m_1 \cos(\theta_1)} & : m_1 \neq m_2 \left(1 - \frac{2b^2}{(R_1 + R_2)^2}\right), \quad 0 < b < R_1 + R_2 \\ \frac{m_2 v'_2 \sin(\theta_2)}{m_1} & : m_1 = m_2 \left(1 - \frac{2b^2}{(R_1 + R_2)^2}\right), \quad 0 < b < R_1 + R_2 \end{array} \right. \quad \left[ \frac{m}{s} \right]. \\
d_1 &= v'_1 \sqrt{\frac{2H}{g}} \Rightarrow (0, \infty) : 0 \leq b < R_1 + R_2 \quad [m]. \quad (5.19)
\end{aligned}$$

Tal que los casos particulares que podemos analizar nos permiten hacer una aproximación de los resultados que debemos obtener según el sistema de ecuaciones que nos permite resolver el problema:

- ✓ Caso de masas iguales  $m_1 = m_2$
- ✓ Casos de choque frontal  $b = 0$
- ✓ Casos alrededor de relación  $m_1 \sim m_2 \left(1 - \frac{2b^2}{(R_1 + R_2)^2}\right)$

## Parámetros de entrada

Los parámetros del modelo, dada a la escala del problema propuesto en la figura 1.1 deberán seguir la siguiente tabla:

	Valor mínimo	Valor máximo
$m_1$ [Kg]	0.01	0.1
$m_2$ [Kg]	0.01	0.1
$R_1$ [cm]	0.50	2.00
$R_2$ [cm]	0.50	2.00
$b$ [cm]	0.00	1.90
$h$ [m]	0.30	1.00
$H$ [m]	1.00	2.00

Cuadro 5.1: Valores máximos y mínimos de los parámetros del modelo

## Algoritmos

Teniendo en cuenta todas las restricciones tanto numéricas como propias del modelo tanto para los parámetros (entradas) como para las incógnitas (salidas) se plantea los pseudo-códigos previo a la creación de las funciones en Python 3.7, que se espera sigan la siguiente estructura:

### → Módulos auxiliares

- col2d
- graf3d
- graf2d
- utils

### → Módulos principales

- model
- revise

Siendo un módulo un conjunto de funciones con un objetivo similar. La estructura general de todos las funciones se entrelazará como se muestra en la figura 5.1

## Módulos auxiliares

Primero se crearán los módulos auxiliares tal que la ecuaciones sean resueltas allí. Primero tenemos el módulo auxiliar llamado col2d, que incluiría las funciones descritas en los algoritmos 1 y 2. Para el manejo de errores y demás necesidades podemos usar el módulo utils, además utilizando los módulos gráficos de python se creará una gráfica 3D similar a la figura 1.1 al resolver un problema puntual, además de resolver el problema entre intervalos y crear las gráficas 2D, estos dos módulos son graf3d y graf2d.

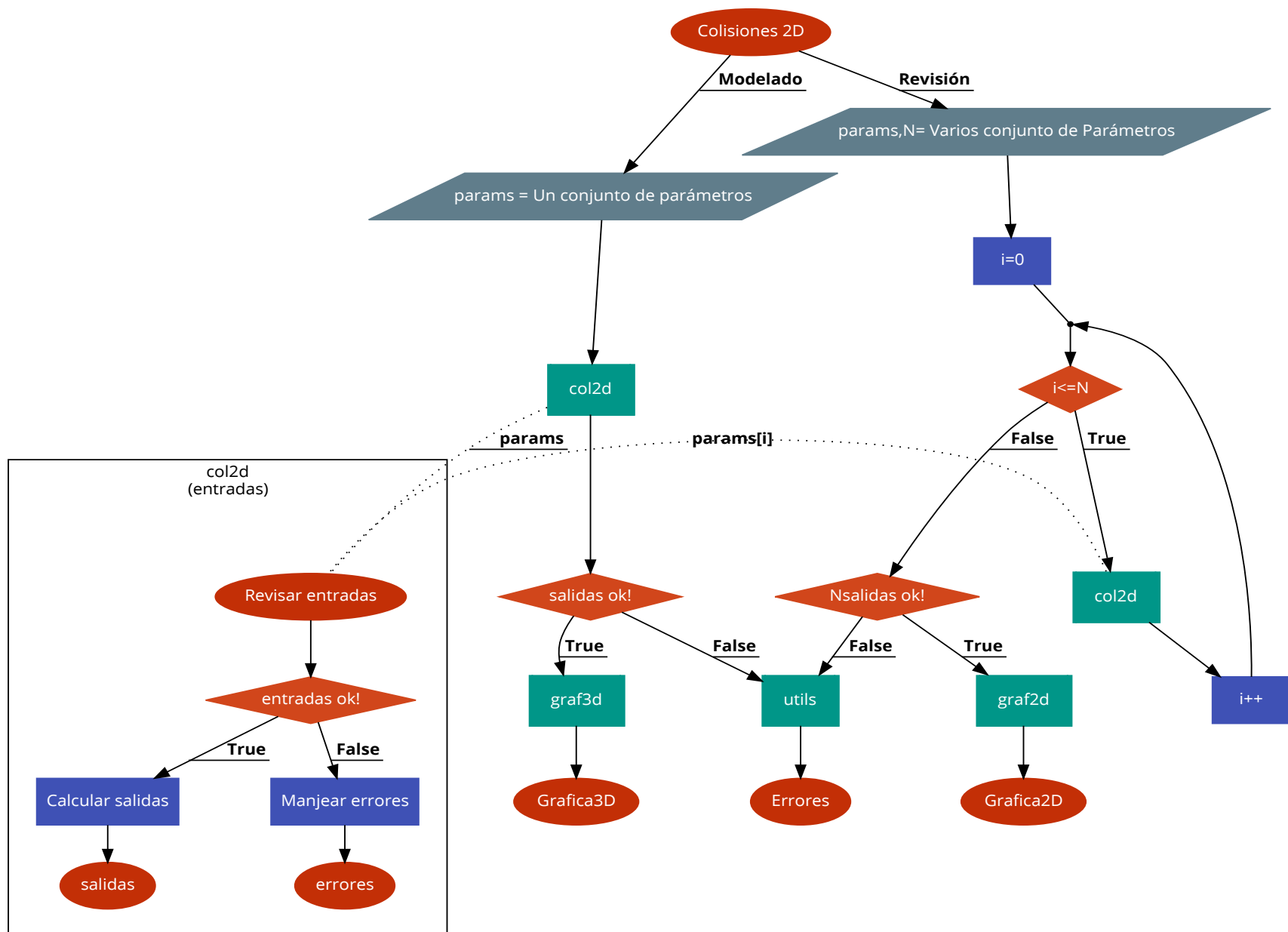


Figura 5.4: Diagrama de flujo de la metodología

---

**Algoritmo 1** Colisión 2d números

---

**Entrada:**  $m_1, m_2, R_1, R_2, b, h$  y  $H$

**Salida:**  $\theta_1, \theta_2, d_1$  y  $d_2$

- 1: Definimos las ecuaciones de 5.18 Y 5.19
  - 2: Revisar que los valores ingresados sean adecuados, según 5.17
  - 3: Calcular si hay o no indeterminación usando la ecuación 5.16
  - 4: **Si** no hay errores en las entradas **Entonces**
  - 5:   Calcular la velocidad inicial 1,  $v_1$ , con la ecuación 5.5.
  - 6:   Calcular la solución del sistema de colisiones hallando  $\theta_1, \theta_2$ , y  $v'_2$ , con las funciones el sistema 5.18 y 5.19.
  - 7:   Revisar el ángulo de salida de la esfera 1,  $\theta_1$ , para el caso que su valor sea mayor que  $\frac{\pi}{2}$  o si hay indeterminación. En ambos casos sin el riel, la masa saldría disparada en esa dirección pero dado a las condiciones de problema asumimos que choca contra el riel y retrocede, volviendo a subir y bajar en ese caso la velocidad de salida es aproximadamente la misma velocidad final calculada (pues gasta su energía cinética en subir y luego la recupera). El resultado en ese caso es un movimiento en la línea de referencia.
  - 8:   Calculamos  $v'_1$  con la ecuación presente en 5.19 siempre que la indeterminación sea falsa, en el caso que sea verdadera usamos el caso adecuado.
  - 9:   Luego se hallan las distancias  $d_1$  y  $d_2$  usando las ecuaciones 5.18 y 5.19.
  - 10:   **return**  $\theta_1, \theta_2, d_1$  y  $d_2$
  - 11: **Si no**
  - 12:   Manejamos el error, dependiendo del caso
  - 13: **Fin Si**
- 

---

**Algoritmo 2** Colisión 2d arreglo

---

**Entrada:** Arreglo con varios  $m_1, m_2, R_1, R_2, b, h$  y  $H$

**Salida:** Arreglo con varios  $\theta_1, \theta_2, d_1$  y  $d_2$

- 1: Revisamos las entradas y tratamos con los errores graves
  - 2: **Si** no hay errores en las entradas **Entonces**
  - 3:   **Para**  $i=0$  hasta Longitud del Arreglo **Hacer**
  - 4:     Calculamos las salidas usando el algoritmo 1
  - 5:     Anexamos a un arreglo
  - 6:   **Fin Para**
  - 7:   **return** Arreglo  $\theta_1, \theta_2, d_1$  y  $d_2$
  - 8: **Si no**
  - 9:   Manejamos el error dependiendo del caso
  - 10: **Fin Si**
- 

Con eso tendríamos las funciones que calculan las salidas, en el caso puntual (un



conjunto de datos) y el caso de un arreglo (varios conjuntos de datos). Para el problema puntual, crearemos un módulo principal para el modelador llamado model y para el problema de intervalos, crearemos un módulo principal al que llamaremos revise.py

## Algoritmo Informal. Modelador

1. El algoritmo modelador tendrá cuatro opciones para el manejo de las entradas:
  - Por asignación random entre los valores mínimos y máximos descritos en la tabla 5.1
  - El ingreso por consola de los datos.
  - El ingreso por archivo de texto de los datos.
  - Un conjunto de valores predeterminados.

Los valores de entrada están en unidades (mks), múltiplos o submúltiplos de estas, los cuales son  $m_1$  [Kg],  $m_2$  [Kg],  $R_1$  [cm],  $R_2$  [cm],  $b$  [cm],  $h$  [m] y  $H$ [m]. Para los radios de las esferas y la separación entre estas se ha escogido trabajar en centímetros ya que el sistema de ecuaciones ha sido resuelto asumiendo masas puntuales que se deslizan en un carril sin fricción, tal que las esferas no tengan radios superiores a los 2 [cm]. Todos los datos deben estar dentro de los intervalos de la tabla 5.1.

2. Se llamarán a las funciones en lib\_col2d.py y lib\_utils.py para el manejo de errores y el calculo de las salidas.
3. Se llamarán a las funciones en lib\_graf3d.py para crear la gráfica 3D, en el cual tenemos que considerar:
  - La gráfica 3D es encerrada en un cubo, para ello necesitamos las medidas de los alcances en el ejes del plano del suelo (en Python 3.7 sería  $x$  y  $y$ , aunque en la gráfica 1.1 sea  $x$  y  $z$ ).
  - La rampa será un cuarto de circulo que obedece la ecuación  $x^2 - (y - h - H)^2 = h^2$
  - El movimiento parabólico en los ejes normales obedecerá reglas geométricas usando los ángulos de apertura. Cada uno siguiendo una ecuación de la forma  $x = d \cos(\theta)$   $y = x \tan \theta + b$   $z = H - \frac{g}{2v^2}(x^2 + (y - b)^2)$

## Algoritmo informal. Revisor

1. El algoritmo revisor necesita 3 entradas:

- La variable escogida entre  $m_1, m_2, R_1, R_2, b, h, H$
- Valores constantes para las demás variables  $m_1, m_2, R_1, R_2, b, h, H$
- El número de puntos  $N$  a tomar entre los valores mínimos y máximos descritos en la tabla 5.1.

2. El algoritmo revisor tendrá cuatro opciones para el manejo de las entradas:

- Por asignación random entre los valores mínimos y máximos descritos en la tabla 5.1
- El ingreso por consola de los datos.
- El ingreso por archivo de texto de los datos.
- Un conjunto de valores predeterminados.

Los valores de entrada están en unidades (mks), múltiplos o submúltiplos de estas, los cuales son  $m_1$  [Kg],  $m_2$  [Kg],  $R_1$  [cm],  $R_2$  [cm],  $b$  [cm],  $h$  [m] y  $H$  [m]. Para los radios de las esferas y la separación entre estas se ha escogido trabajar en centímetros ya que el sistema de ecuaciones ha sido resuelto asumiendo masas puntuales que se deslizan en un carril sin fricción, tal que las esferas no tengan radios superiores a los 2 [cm]. Todos los datos deben estar dentro de los intervalos de la tabla 5.1.

3. Se llamarán a las funciones en `lib_col2d.py` y `lib_utils.py` para el manejo de errores y el calculo de las salidas.
4. Se llamarán a las funciones en `lib_graf2d.py` para crear la gráfica 2D. Todos los valores de salidas son arreglos por el número de puntos que se hallan definido por lo tanto se hace una gráfica 2D con 4 sub-gráficas  $\theta_1$  vs  $V$ ,  $\theta_2$  vs  $V$ ,  $d_1$  vs  $V$  y  $d_2$  vs  $V$ , donde  $V$  sería la variable escogida la cual tiene valores dentro del intervalo  $[v_{min}, v_{max}]$ .

## Pruebas y evaluación

El objetivo principal del modelador es realizar pruebas puntuales para observar el comportamiento en forma de gráfica 3D. Dado a que todo el modelo tiene una matemática muy definida que sigue principios físicos muy generales hay comportamientos esperados que deben reflejarse en el modelo. Uno de ellos por ejemplo es que al usarse masas de la misma magnitud deberían formar, al caer, un ángulo de 90 grados entre los ejes de acción.

Por ende se exploraran distintos casos puntuales para tener una visualización de lo que pasaría en el montaje real, por supuesto todo este desarrollo obedece a estimaciones

muy ideales pero no debería estar muy lejos del montaje real, si este se realiza en un laboratorio adecuado.

Para el caso del revisor, tan sólo veremos la dependencia de las 4 salidas con respecto a las entradas, variando una sola de éstas y dejando las demás constantes. En total, se realizará pruebas 30 pruebas; 16 (model.py) más 14 (revise.py).

## Pruebas modelo

Usando el modelador se realizarán:

- 3 pruebas para masa iguales.
- 2 pruebas con valores para masas diferentes.
- 2 pruebas con valores para radios diferentes.
- 2 pruebas con valores para alturas diferentes.
- 2 pruebas con valores de separación entre centros de masas diferentes.
- 3 pruebas para choque frontal, separación entre centros de masas 0.

## Evaluación pruebas modelo

La evaluación de las gráficas 3D será descriptiva. Si bien, ya que es un modelo obtenido por un método deductivo, no es posible que se salga de los lineamientos esperados tal que ha sido construido desde ellos, pero es posible cometer errores en la creación de los códigos, es importante que todos los casos puntuales reflejen la física de la forma esperada, si no se debería revisar primero las funciones del notebook y en caso que no halla ningún problema la matemática involucrada.

Siempre que el comportamiento sea adecuado se procede a observar cada gráfica y a describir lo sucedido en cada caso. Ya que todos ellos son comparaciones puntuales todas estas pueden ligarse a las pruebas del revisor, que evalúa muchos casos puntuales.

## Pruebas revisor

Usando el revisor se realizarán 2 pruebas por cada variable  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $b$ ,  $h$  y  $H$ , en donde una de ellas esté variando entre según 5.1 y los demás parámetros estén fijos en sus valores máximo y mínimos.

## Evaluación pruebas revisor

Las pruebas del revisor pueden ejecutarse al mismo tiempo que las del modelador, pero se realizarán luego un primer ajuste de éstas. Si el modelador funciona cortacorrante, podemos decir que la física se ha comprobado en el modelado y sólo nos queda evaluar las soluciones cómo funciones matemáticas.

En los sistemas de ecuaciones 5.18 y 5.19 podemos ver el rango y dominio de estas funciones por lo cual será fácil evaluar si los comportamientos son los esperados según ambos sistemas. En este caso la evaluación es más referida y menos descriptiva, puesto que se hace sobre una función matemática ya definida. Por ejemplo es fácil ver que el ángulo  $\theta_2$  será constante en los caso en que  $R_1, R_2$  y  $b$  lo sean o por ejemplo  $v'_2$  será linealmente dependiente de la raíz de  $h$  cuando ésta varíe y las demás estén constantes, por lo tanto algunos resultados son completamente predecibles si el modelador está correcto.

## Cronograma de actividades

Ese proyecto seguirá el siguiente cronograma de actividades:

Fechas	Actividades
2-8 Noviembre	Revisión de temas para presentar propuesta Definición de Metodología Creación de algoritmos y definición de pruebas
9-15 Noviembre	Creación y entrega del anteproyecto
16-22 Noviembre	Revisión de correcciones Creación del notebook (parte documento) usando correcciones Creación de las primeras funciones
25-29 Noviembre	Creación de los códigos y documento final

# Bibliografía

- [1] Universidad de Antioquia. Laboratorio de física i. In Web <http://docencia.udea.edu.co/regionalizacion/irs-306/contenido/lab8.html>, 2001.
- [2] Universidad de Antioquia. Laboratorio de física i. In Web [http://aprendeenlinea.udea.edu.co/lms/moodle/file.php/602/Labs/COLISION\\_EN\\_DOS\\_DIMENSIONES.pdf](http://aprendeenlinea.udea.edu.co/lms/moodle/file.php/602/Labs/COLISION_EN_DOS_DIMENSIONES.pdf), 2001.
- [3] Universidad de Antioquia. Física i. In Web <http://aprendeenlinea.udea.edu.co/lms/moodle/course/view.php?id=801>, 2016.
- [4] Pontificia Universidad Católica de Chile. Capítulo 4. dinámica. In Web [http://www.fis.puc.cl/~rbenguri/cap4\(Dinamica\).pdf](http://www.fis.puc.cl/~rbenguri/cap4(Dinamica).pdf), 2016.
- [5] Universidad de los Andes. Laboratorio de física i. In Web <https://fisicalabspregrado.uniandes.edu.co/F1-Colisiones2D.html>, 2016.
- [6] Nuffield Foundation. Two-dimensional collisions with ball bearings. In Web <http://practicalphysics.org/two-dimensional-collisions-ball-bearings.html>, 2017.
- [7] Roger A. Freedman Hugh D. Young. *Física Universitaria*. 2009.
- [8] Desafío LATAM. Google collaboratory: Jupyter en la nube. In Web <http://blog.desafiolatam.com/google-collaboratory-jupyter/>, 2017.
- [9] Edward J. Finn Marcelo Alonso. *Física (Vol I) Mecánica*. Number v. 1. S.A. ALHAMBRA MEXICANA, 1999.
- [10] Elliott Mendelson. *Introduction to Mathematical Logic*. Number 4. Chapman & Hall, 1997.
- [11] Eduard Pulgarin. Usando jupyter notebook en el aula. In Web <https://speakerdeck.com/cosmoscalibur/usando-jupyter-notebook-en-el-aula?slide=2>, 2017.
- [12] F.W. Sears, A.L. Ford, and R.A. Freedman. *Física universitaria: con física moderna*. Number v. 2. Pearson Educación, 2005.
- [13] SusanCartwright. Jupyter notebooks for phy340/350 professional skills in physics and astronomy. In Web <https://github.com/SusanCartwright/PHY340>, 2017.

- [14] Physics Walker. Momentum in 2 dimension. In Web <https://www.youtube.com/watch?v=Zj-DhNJUPCA>, 2017.