

Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Лабораторний практикум

“Реалізація МСЕ для аналізу тривимірних задач теорії пружності”

для студентів факультету
прикладної математики та інформатики

Львів-2017
Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка

Рекомендовано до друку
науково-методичною радою
факультету прикладної мате-
матики та інформатики
Протокол № від ..2017

Уклали: Володимир Дмитрович Вовк,
Олександр Володимирович Вовк,
Віталій Михайлович Горlach,
Георгій Андрійович Шинкаренко

Рецензент
Редактор
Коректор

Лабораторний практикум

“ Реалізація МСЕ для аналізу тривимірних задач
теорії пружності ”

для студентів факультету
прикладної математики та інформатики

Підп. до друку . Формат 60x84/16. Папір друк. Друк на різогр. Умовн.
друк. арк. 1,4. Обл.–вид. арк. 1,5. Тираж 100. Зам.

Видавничий центр Львівського національного університету
імені Івана Франка. 79000, Львів, вул. Дорошенка, 41.

ВСТУП

Лабораторний практикум як різновид практичного заняття є ефективною процедурою опанування інструментарію математичного моделювання. Збалансовані реальними прикладними застосуваннями математичні абстракції швидше і глибше засвоюються слухачами, оскільки приводять до видимих практично значимих результатів.

Цей практикум має за мету підтримку освоєння теоретичного матеріалу з вивчення числових схем методу скінчених елементів (МСЕ). Його суть полягає у самостійному виконанні наукоємного програмного проекту у сфері аналізу міцності механічних конструкцій. Вибрана тематика лабораторних занять враховує недостатність для роботи над проектом аудиторних годин перенесенням лівової частки запланованих робіт на домашнє виконання. Тому, для збільшення впевненості студента в кінцевому успіху проекту, а також для самоконтролю, у тексті виписано всі потрібні для роботи ключові співвідношення. Окремою ціллю була структуризація занять з метою рівномірного розподілу у часі теоретичної, практичної та програмної складових навантаження на слухача.

З метою зниження часових витрат на розробку програмного забезпечення тривимірної просторової дискретизації конструкції за фізичний об'єкт дослідження вибрано паралелепіпед. Математичну модель від рівнянь теорії пружності деформівного твердого тіла з допомогою узагальненої схеми Гальоркіна приведено до варіаційного формулювання. Далі послідовно, заняття за заняттям, розглядаються окремі етапи застосування схеми МСЕ з достатньою для програмної реалізації деталізацією усіх процедур та співвідношень.

Паралельно до роз'яснювально-демонстраційних викладок практикум містить низку практичних рекомендацій з організації, розробки та відлагодження програмного забезпечення, які є наслідком чималого досвіду авторів у цій сфері.

Заняття 1

1. Постановка задачі.

Адекватне моделювання поведінки механічних конструкцій в умовах функціонального навантаження є потужним засобом забезпечення надійності їхньої експлуатації. Центральним етапом цього процесу є аналіз напружено-деформованого стану досліджуваного об'єкта. Постійне зростання складності сучасних інженерних конструкцій потребує розробки щораз ефективніших алгоритмів числового моделювання із застосуванням все більш потужної обчислювальної техніки.

Поставимо за мету створення на основі МСЕ програмного забезпечення числового аналізу напружено-деформованого стану тривимірного об'єкта в умовах силового навантаження.

2. Фізична модель.

Розглядуваний у лекційному курсі алгоритм МСЕ практично не чутливий ані до складності геометрії досліджуваних об'єктів, ані до способу їхнього закріплення чи навантаження. Це ж стосується і багатокомпонентності конструкції та анізотропії матеріалу. Достатньо лише вміти подати досліджувану область у вигляді набору скінчених елементів (у нашому випадку криволінійних шестигранників). Для економії часу в нашому проекті ми винесемо за дужки питання розробки алгоритмів (на практиці часто доволі складних) просторової дискретизації досліджуваного об'єкта і зупинимось на розгляді твердого деформівного однорідного ізотропного прямокутного паралелепіпеда з розмірами $a \times b \times c$, нижня грань якого жорстко закріплена, а на верхній грані задано нормальне до неї навантаження інтенсивності P . Побудова сітки скінчених елементів для такого об'єкта, врахування закріплення та умов його навантаження є достатньо простим технічним питанням.

3. Математична модель.

Для моделювання напружено-деформованого стану твердого тіла в умовах силового навантаження використаємо рівняння статичної теорії пружності. При цьому, зважаючи на неосесиметричний характер навантаження - у тривимірному варіанті.

Нехай досліджуваний об'єкт займає зв'язну область Ω з кусково-гладкою границею Γ . Внаслідок рівноваги тіла у кожній його точці компоненти сумарного вектора внутрішніх зусиль $\sigma = \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ дорівнюють нулю. В цьому випадку замкнута система співвідношень статичної теорії пружності містить:

a) рівняння рівноваги

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0 \\ \sigma_y = \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0 \\ \sigma_z = \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad \text{в } \Omega \quad (1)$$

b) закон Гука для ізотропного тіла

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \lambda \left[1 - \nu \frac{\partial u_x}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] \\ \sigma_{yy} = \lambda \left[1 - \nu \frac{\partial u_y}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] \\ \sigma_{zz} = \lambda \left[1 - \nu \frac{\partial u_z}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \right] \\ \sigma_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\ \sigma_{yz} = \mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \sigma_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \end{cases} \quad \text{в } \Omega \quad (2)$$

а також:

с) *крайові умови на напруження*

$$\begin{cases} \sigma_{xx} \cos n, x + \sigma_{xy} \cos n, y + \sigma_{xz} \cos n, z = P_x \\ \sigma_{xy} \cos n, x + \sigma_{yy} \cos n, y + \sigma_{yz} \cos n, z = P_y \text{ на } \Gamma_\sigma \\ \sigma_{xz} \cos n, x + \sigma_{yz} \cos n, y + \sigma_{zz} \cos n, z = P_z \end{cases} \quad (3)$$

та переміщення

$$u_x = 0; \quad u_y = 0; \quad u_z = 0 \quad \text{на } \Gamma_u \quad (4)$$

Тут використано наступні позначення:

$$\sigma^T = [\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}] \quad - \text{тензор напружень}$$

$$\mathbf{u} = u_x, u_y, u_z \quad - \text{вектор переміщень} \quad (5)$$

$$\mathbf{P} = P_x, P_y, P_z \quad - \text{вектор навантаження}$$

\mathbf{n} - нормаль то поверхні

$$E, \nu \quad - \text{модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу} \quad (6)$$

$$\lambda = \frac{E}{1+\nu} \frac{1}{1-2\nu}; \quad \mu = \frac{E}{2} \frac{1}{1+\nu} \quad - \text{коефіцієнти Ляме}$$

$$\Gamma = \Gamma_\sigma \cup \Gamma_u \quad \Gamma_\sigma \cap \Gamma_u = \emptyset$$

Домашнє завдання.

4. Тріангуляція досліджуваної області.

Для пришвидшення старту практичної роботи над проектом ще до конкретизації у лекційному курсі обчислювальних схем МСЕ пропонуємо створити програмне забезпечення одного з необхідних елементів майбутнього загального алгоритму вирішення задачі.

Методика аналізу моделі (1) передбачає поділ досліджуваної області Ω (для нашої фізичної моделі - паралелепіпеда) на окремі скінчені елементи (далі СЕ) для попереднього розв'язування задачі на кожному з них та подальшого об'єднання результатів у єдиний

розв'язок. Отож, важливою компонентою майбутнього програмного комплексу має стати програмний код, який вирішує наступну задачу:

паралелепіпед із заданими розмірами $a_x \times a_y \times a_z$, паралельними координатним осям січеннями, слід поділити на $n_x \times n_y \times n_z$ однакових СЕ (рис. 1а). Геометрія кожного такого

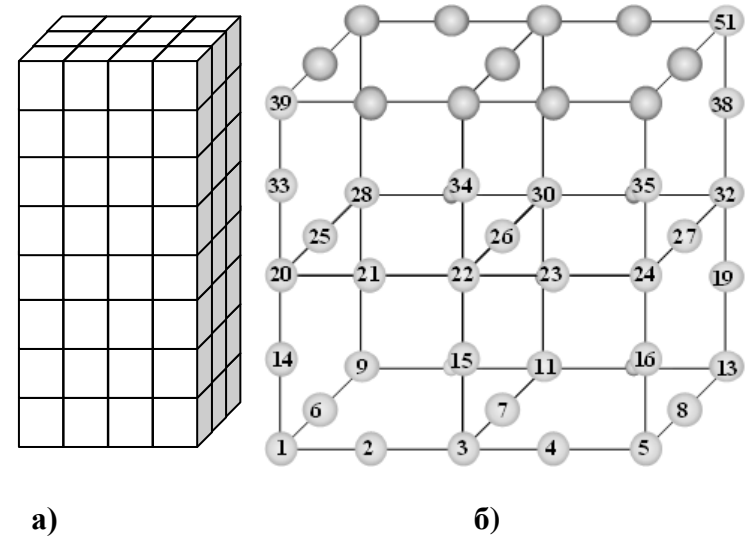


Рис. 1 . а) Поділ досліджуваної області на елементи.
б) Глобальна нумерація вузлів сітки.

елемента задається системою з 20-ти вузлів¹ (в кутових точках та на середині ребер). Геометрія ж об'єкта в цілому визначається об'єднанням вузлів усіх СЕ у єдину сітку². На (рис.1.б). на прикладі поділу області $n_x = 2$, $n_y = 1$, $n_z = 2$ запропоновано одне з можливих правил глобальної нумерації вузлів.

Отож, програмна компонента має містити інтерфейс користувача для вводу розмірів об'єкта та параметрів його поділу і в

¹ З огляду на потенційну складність геометрії об'єкта дослідження.

² Спільні вузли вважаються одним вузлом.

результаті обчислень на виході давати масив координат вузлів сітки СЕ:

$$AKT\ 3, nqr, \quad (7)$$

де перший індекс визначає x, y або z координату, а другий – номер вузла згідно рис. 1б). Через nqr надалі позначатимемо загальну кількість вузлів досліджуваного об'єкта.

Заняття 2

5. Варіаційне формулювання задачі.

Використаємо узагальнену методику Гальоркіна. Введемо простір кінематично допустимих переміщень тіла:

$$V = \mathbf{v} = v_x, v_y, v_z : \mathbf{v} = 0 \text{ на } \Gamma_u ; \quad \mathbf{v} \in [H^1 \Omega]^2 \quad (8)$$

В силу рівності нулю лівих частин рівнянь системи (1) помножимо кожне з них на відповідні компоненти функції $\mathbf{v} \in V$ та зінтегруємо по області Ω :

$$\left[\begin{aligned} & \int_{\Omega} v_x \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) d\Omega \\ & \int_{\Omega} v_y \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \right) d\Omega \\ & \int_{\Omega} v_z \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) d\Omega \end{aligned} \right] = 0,$$

де, зрозуміло, $d\Omega = dx dy dz$

Інтегрування за частинами (формула Гауса-Остроградського) дає:

$$\left[\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \sigma_{xx} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \sigma_{xy} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \sigma_{xz} \right) d\Omega - \int_{\Gamma} v_x \sigma_{xx} c_x + \sigma_{xy} c_y + \sigma_{xz} c_z d\Gamma \\ & \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} \sigma_{xy} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \sigma_{yy} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \sigma_{yz} \right) d\Omega - \int_{\Gamma} v_y \sigma_{xy} c_x + \sigma_{yy} c_y + \sigma_{yz} c_z d\Gamma \\ & \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} \sigma_{xz} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \sigma_{yz} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \sigma_{zz} \right) d\Omega - \int_{\Gamma} v_z \sigma_{xz} c_x + \sigma_{yz} c_y + \sigma_{zz} c_z d\Gamma \end{aligned} \right] = 0$$

де $c_x = \cos(n, x)$; $c_y = \cos(n, y)$; $c_z = \cos(n, z)$,

\mathbf{n} — нормаль до границі Γ .

Врахування крайових умов (3) на навантаженій частині границі дає:

$$\left[\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \sigma_{xx} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \sigma_{xy} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \sigma_{xz} \right) d\Omega \\ & \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} \sigma_{xy} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \sigma_{yy} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \sigma_{yz} \right) d\Omega \\ & \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} \sigma_{xz} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \sigma_{yz} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \sigma_{zz} \right) d\Omega \end{aligned} \right] = \left[\begin{aligned} & \int_{\Gamma_{\sigma}} v_x P_x d\Gamma \\ & \int_{\Gamma_{\sigma}} v_y P_y d\Gamma \\ & \int_{\Gamma_{\sigma}} v_z P_z d\Gamma \end{aligned} \right] \quad (9)$$

З допомогою співвідношень закону Гука (2) від постановки задачі в напруженнях перейдемо до деформацій. Почнемо з першої компоненти лівого вектора:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial x} \sigma_{11} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \sigma_{12} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \sigma_{13} &= \frac{\partial v_x}{\partial x} \lambda \left[1 - \nu \frac{\partial u_x}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] + \\ & \frac{\partial v_x}{\partial y} \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial v_x}{\partial z} \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

Таку ж підстановку неважко виконати і для двох інших компонент.

Групуванням елементів отриманих виразів за різними комбінаціями добутків компонент векторів $\mathbf{v} = v_x, v_y, v_z$ та

$\mathbf{u} = u_x, u_y, u_z$ (9) можна подати у вигляді:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle l, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad (10)$$

де

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \iiint_{\Omega} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{22} & a_{23} \\ \text{сум.} & & a_{33} \end{bmatrix} d\Omega \quad (11)$$

$$\langle l, \mathbf{v} \rangle = \iint_{\Gamma_o} \begin{bmatrix} P_x v_x \\ P_y v_y \\ P_z v_z \end{bmatrix} d\Gamma = \iint_{\Gamma_o} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} d\Gamma$$

$$a_{11} = \lambda \left(1 - \nu \right) \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)$$

$$a_{22} = \lambda \left(1 - \nu \right) \frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \frac{\partial u_y}{\partial z} \right)$$

$$a_{33} = \lambda \left(1 - \nu \right) \frac{\partial v_z}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)$$

$$a_{12} = \lambda \nu \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial x}; \quad a_{13} = \lambda \nu \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \mu \frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial x}$$

$$a_{23} = \lambda \nu \frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \mu \frac{\partial v_y}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial y}$$

Домашнє завдання.

Використовуючи матеріал курсу «Обчислювальна геометрія та комп'ютерна графіка» доповнити розроблену згідно з попереднім домашнім завданням програмну компоненту засобами OpenGL для зображення на екрані побудованої системи вузлів сітки елементів. Задіяння потужностей OpenGL різнопланового подання графічної інформації (масштабування, повороти, освітлення, тощо) дасть змогу у подальшому зручно контролювати результати розв'язування задачі.

Заняття 3

6. Метод скінчених елементів.

Поділимо область Ω на СЕ, що не перетинаються і $\Omega = \bigcup \Omega_e$,

звідки,
$$\int_{\Omega} \dots d\Omega \equiv \iiint_{\Omega} \dots d\Omega = \sum_e \iiint_{\Omega_e} \dots d\Omega$$

За СЕ візьмемо криволінійний шестигранник серендипового типу з 20-ма вузлами та локальною нумерацією, як це зображено на рис.2.

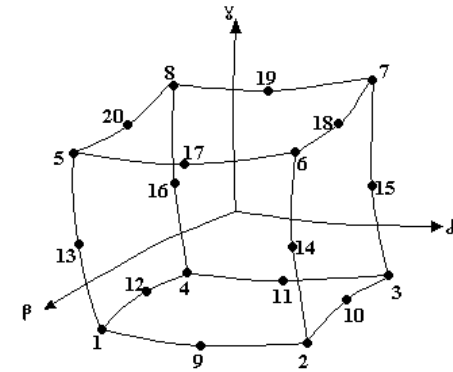


Рис. 2 Локальна нумерація вузлів СЕ

На кожному СЕ розглядатимемо власну систему з 20-ти базисних функцій

$$[\varphi_1^e \ x, y, z, \dots, \varphi_{20}^e \ x, y, z],$$

з використанням яких апроксимацію компонент шуканого вектора переміщень можна подати як:

$$u \ x, y, z = \sum_{i=1}^{20} u^i \varphi_i \ x, y, z, \quad (12)$$

або у матричному вигляді:

$$u \ x, y, z = \varphi_1 \dots \varphi_{20} \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^{20} \end{pmatrix} \quad \text{дали:} \quad \varphi_j u^i \quad i, j = 1, 20 \quad (13)$$

Згідно з алгоритмом МСЕ базисні функції φ_i слід вибирати у такий спосіб, щоб кожна з них дорівнювала 1 у вузлі з однаковим з нею номером та 0 у всіх решта вузлах. У цьому випадку коефіцієнти u_i отримують зміст значень апроксимованих функцій у вузлах елемента. Відповідно до (12) диференціювання шуканих величин на елементі переноситься на базисні функції, наприклад:

$$\frac{\partial u_y}{\partial z} x, y, z = \sum_{i=1}^{20} u_{yi} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} x, y, z \equiv \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} u_y^j \quad i, j = 1, 20 \quad (14)$$

Позаяк вигляд функції допустимих переміщень $\mathbf{v} = v_x, v_y, v_z \in V$ обмежується лише умовами (8), то функції базису φ_i цілком придатні для подання кожної з її компонент:

$$v_x = v_y = v_z = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_{20} \end{pmatrix}$$

Таким чином, різноманітні добутки похідних в елементах (11) можна подати у матричному вигляді, наприклад:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial u_z}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi_{20}}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial \varphi_{20}}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_z^1 \\ \vdots \\ u_z^{20} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{20}}{\partial x} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_{20}}{\partial y} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial \varphi_{20}}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{20}}{\partial x} \end{pmatrix} \equiv \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} u_z^i \quad [j = 1, 20]$$

Подаючи ліву частину (11) у вигляді суми по скінчених елементах, та з врахуванням уведених апроксимацій маємо:

$$\iiint_{\Omega} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} \\ & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} \\ сум. & & \mathbf{a}_{33} \end{bmatrix} d\Omega = \sum_e \iiint_{\Omega_e} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11}^e & \mathbf{a}_{12}^e & \mathbf{a}_{13}^e \\ & \mathbf{a}_{22}^e & \mathbf{a}_{23}^e \\ сум. & & \mathbf{a}_{33}^e \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_x^e \\ \mathbf{u}_y^e \\ \mathbf{u}_z^e \end{pmatrix} d\Omega ,$$

де

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{a}_{11}^e &= \lambda \left(1 - \nu \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right) + \mu \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \right) \\ \mathbf{a}_{22}^e &= \lambda \left(1 - \nu \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \right) \\ \mathbf{a}_{33}^e &= \lambda \left(1 - \nu \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right) \\ \mathbf{a}_{12}^e &= \lambda \nu \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} + \mu \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}; \quad i, j = 1..20 \\ \mathbf{a}_{13}^e &= \lambda \nu \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} + \mu \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \\ \mathbf{a}_{23}^e &= \lambda \nu \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} + \mu \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}; \end{aligned} \right. \quad (15)$$

Аналогічно у вигляді суми по СЕ подамо і праву частину рівняння варіаційної задачі (10)

$$\langle l, \mathbf{v} \rangle = \iint_{\Gamma_o} \begin{bmatrix} P_x v_x \\ P_y v_y \\ P_z v_z \end{bmatrix} d\Gamma = \sum_e \iint_{\Gamma_{oe}} \begin{bmatrix} P_x \varphi_i \\ P_y \varphi_i \\ P_z \varphi_i \end{bmatrix} d\Gamma; \quad i = 1, \dots, 20 \quad (16)$$

Переносячи інтегрування на елементи матриці приходимо до системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР):

$$\sum_e \mathbf{K}_e [\mathbf{u}^e] = \sum_e \mathbf{F}_e, \quad (17)$$

де \mathbf{K}_e - матриця жорсткості е-го СЕ розміру 60×60 з коефіцієнтами (див.(15)) на кшталт:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{a}}_{11}^e &= \iiint_{\Omega_e} \left[\lambda (1-\nu) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \right. \\ &\quad \left. \mu \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \right) \right] d\Omega \quad i, j = 1, \dots, 20 \\ &\dots \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{a}}_{13}^e &= \iiint_{\Omega_e} \left[\lambda \nu \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} + \mu \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right] d\Omega \\ &\dots \end{aligned}$$

\mathbf{F}_e - вектор навантаження на елемент з 60-и коефіцієнтів виду:

$$\begin{aligned} \underline{f}_1^e &= \iint_{\Gamma_{\sigma_e}} P_x \varphi_i d\Gamma; \quad i = 1, \dots, 20, \\ &\dots \end{aligned} \quad (19)$$

$$\mathbf{u}^e = u_x^1, \dots, u_x^{20}, u_y^1, \dots, u_y^{20}, u_z^1, \dots, u_z^{20}{}^T \quad (20)$$

вектор (стовпчик) шуканих компонент переміщень у вузлах СЕ.

Домашнє завдання.

7. Зв'язок між локальною та глобальною нумераціями вузлів.

В майбутніх обчисленнях буде широко використовуватися зв'язок між локальною (рис. 2) та глобальною (рис.1.б) нумераціями вузлів. Для цього програмну компоненту слід доповнити блоком обчислення коефіцієнтів матриці зв'язності (інцидентності):

$$NT_{20, nel}, \quad (21)$$

де $NT\ i, j$ - містить глобальний номер i -го локального вузла j -го СЕ, nel - загальна кількість елементів області.

Специфікою МСЕ є стрічковий вигляд матриці результуючої СЛАР, що дає змогу зберігати у пам'яті лише придіагональні коефіцієнти. Звідси виникає потреба у розробці програмного блоку, який обчислює півширину³ стрічки матриці:

$$ng = 3 \times \left[\max_{e=1, nel} N_{max}^e - N_{min}^e + 1 \right], \quad (22)$$

де N_{max}^e, N_{min}^e - максимальний та мінімальний глобальні номери вузла на СЕ з номером e .

Заняття 4

8. Локальна система координат.

На кожному СЕ задаймося локальною системою координат α, β, γ та розглянемо у ній куб $-1 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 1$. Вершини і середини ребр куба утворюють топологічно схожу до скінченного елемента систему з 20-ти вузлів. Визначимо перехід від локальних координат α, β, γ до глобальних x, y, z у такий спосіб, щоб кожен вузол куба переходив у відповідний вузол СЕ:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{20} \mathbf{x}_i \varphi_i \quad \alpha, \beta, \gamma, \quad (23)$$

де

³ Внаслідок симетричності матриці СЛАР достатньо зберігали лише наддіагональні коефіцієнти.

$$\varphi_i = \frac{1}{8} (1 + \alpha\alpha_i) (1 + \beta\beta_i) (1 + \gamma\gamma_i) \times$$

$$\alpha\alpha_i + \beta\beta_i + \gamma\gamma_i - 2 \quad i=1,\dots,8$$

$$\varphi_i = \frac{1}{4} (1 + \alpha\alpha_i) (1 + \beta\beta_i) (1 + \gamma\gamma_i) \times$$

$$1 - \alpha\beta_i\gamma_i^2 - \beta\alpha_i\gamma_i^2 - \gamma\alpha_i\beta_i^2 \quad i=9,\dots,20$$
(24)

Тут $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ - локальні координати вузлів куба, а $\mathbf{X}_i = x_i, y_i, z_i$ - глобальні координати відповідних вузлів СЕ. З допомогою (23) для будь-якої точки α, β, γ в кубі можна знайти відповідну їй у глобальній системі координат x, y, z .

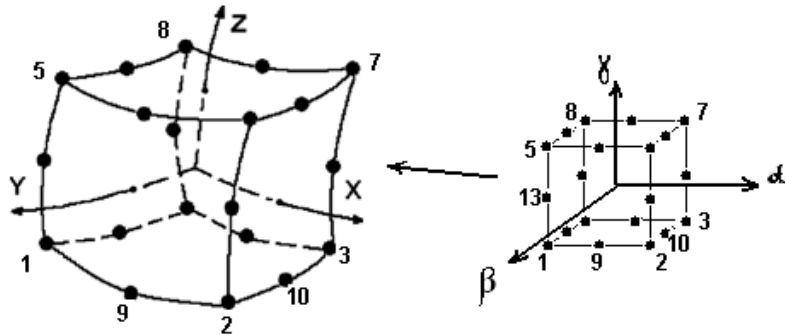


Рис. 3 Локальна система координат

З урахуванням того, що куб $-1 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 1$ є однаковим у локальних координатах усіх СЕ далі ми називатимемо його «стандартним» елементом.

Неважко переконатись, що кожна з функцій (24) дорівнює 1 у вузлі з відповідним їй номером і перетворюється в нуль у всіх інших. Будучи лінійно-незалежними вони утворюють притаманний методу скінчених елементів базис для апроксимації на елементі не тільки координат, а й шуканих функцій:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \sum_{i=1}^{20} \mathbf{u}_i \varphi_i(\alpha, \beta, \gamma), \quad (25)$$

де $\mathbf{u} = u_x, u_y, u_z$, а $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_x^i, \mathbf{u}_y^i, \mathbf{u}_z^i$ $i = 1..20$ - невідомі

переміщення у вузлах СЕ.

Перехід до локальної системи координат означає заміну інтегрування по СЕ інтегруванням по «стандартному» елементу. Зокрема, для згаданої в (18) частини коефіцієнтів матриці жорсткості елемента:

$$\mathbf{a}_{11}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\lambda (1-\nu) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \right) \right] \cdot \Delta \cdot d\alpha d\beta d\gamma \quad i, j = 1, \dots, 20 \quad (26)$$

де

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial z}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial x}{\partial \beta} & \frac{\partial y}{\partial \beta} & \frac{\partial z}{\partial \beta} \\ \frac{\partial x}{\partial \gamma} & \frac{\partial y}{\partial \gamma} & \frac{\partial z}{\partial \gamma} \end{vmatrix} \quad (27)$$

є якобіаном переходу від глобальної до локальної системи координат. Для обчислення елементів якобіана скористуємося співвідношенням (23), звідки, наприклад,

$$\frac{\partial z}{\partial \beta} \alpha, \beta, \gamma = \sum_{i=1}^{20} z_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial \beta} \alpha, \beta, \gamma \quad (28)$$

Вигляд похідних від апроксимуючих функцій по локальних координатах аналітичним диференціюванням легко знайти з (24).

В інтегралах на кшталт (26) залишається неясною лише методика обчислення похідних від апроксимуючих функцій по глобальних

координатах $\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \right)$ $i = 1, \dots, 20$. Неважко побачити, що

вони є розв'язками системи алгебраїчних рівнянь:

$$\Delta \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial \gamma} \end{pmatrix}, \quad (29)$$

елементи матриці якої є елементами якобіана (27), а вектор правих частин легко знайти з (24).

Домашнє завдання.

8. Дані про крайові умови.

Геометрію вихідної задачі моделює сітка СЕ з координатами вузлів у масиві *AKT* (7) та інформацією у про їхню належність тим чи іншим СЕ у масиві *NT* (21). Далі нам також потрібною буде інформація про проекцію крайових умов задачі на побудовану скінчено-елементну модель. В частині умов на переміщення (4) сформуємо масив

$$ZU_{nzu}, \quad (30)$$

який містить глобальні номери всіх *nzu* закріплених вузлів.

Для задавання зовнішнього нормального навантаження сформуємо масив:

$$ZP_{per,3}, \quad (31)$$

де *ZP i,1* містить номер навантаженого елемента, *ZP i,2* - номер навантаженої сторони (нумерацію сторін на «стандартному» елементі можна ввести довільну), *ZP i,3* - величина навантаження, *per* - загальна кількість навантажених сторін СЕ.

Заняття 5

9. Локальна система координат на гранях СЕ.

Для обчислення поверхневих інтегралів (16) на кожній поверхні (грані) навантаженого скінченного елемента введемо власну локальну двовимірну систему координат η, τ таку, що вузли елемента лежать

на границі квадрата $-1 \leq \eta, \tau \leq 1$ (у його кутових точках та на серединах сторін). Позаяк такий квадрат буде однаковим для всіх навантажених сторін СЕ, то, подібно випадку «стандартного» куба, назвемо його «стандартним» квадратом. Визначимо перехід від локальної системи координат η, τ до глобальної x, y, z у такий спосіб, щоб вузли «стандартного» квадрата переходили у вузли навантаженої грані скінченного елемента:

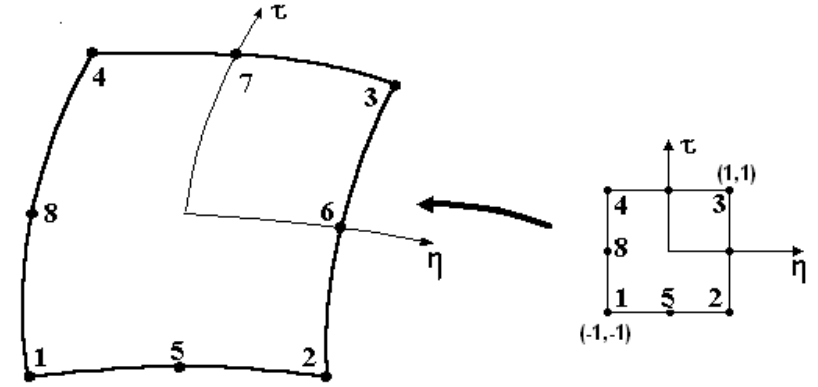


Рис. 4 Локальна система координат на грані СЕ

$$\mathbf{u}_{x,y,z} = \sum_{i=1}^8 \mathbf{u}_i \psi_i(\eta, \tau), \quad (32)$$

де

$$\begin{aligned} \psi_i &= \frac{1}{4} (1 + \eta\eta_i)(1 + \tau\tau_i)(\eta\eta_i + \tau\tau_i - 1) \quad i \leq 4 \\ \psi_i &= \frac{1}{2} (1 - \eta^2)(1 + \tau\tau_i) \quad i = 5, 7; \\ \psi_i &= \frac{1}{2} (1 - \tau^2)(1 + \eta\eta_i) \quad i = 6, 8 \end{aligned} \quad (33)$$

Тут $\eta_i, \tau_i \in -1, 0, 1$ - локальні координати i -го вузла «стандартного» квадрата, $\mathbf{u} = u_x, u_y, u_z$, а $\mathbf{u}_i = u_x^i, u_y^i, u_z^i$ - невідомі переміщення у вузлах навантаженої сторони скінченного елемента.

Із врахуванням апроксимації (32), та виконанням умови задачі про нормальність вектора навантаження \mathbf{P}_n до поверхні прикладання для (16) маємо:

$$\begin{aligned} \langle l, \mathbf{v} \rangle &= \sum_e \iint_{\Gamma_{\sigma_e}} \begin{bmatrix} P_x \varphi_i \\ P_y \varphi_i \\ P_z \varphi_i \end{bmatrix} d\Gamma = \quad i = 1..8 \\ &= \sum_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} P_n \cos(n, x) \psi_i \\ P_n \cos(n, y) \psi_i \\ P_n \cos(n, z) \psi_i \end{bmatrix} \Lambda d\eta d\tau \end{aligned} \quad , \quad (34)$$

де

$$\begin{aligned} \cos(n, x) &= \frac{1}{\Lambda} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \tau} - \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \tau} \right) \\ \cos(n, y) &= \frac{1}{\Lambda} \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \tau} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \tau} \right) , \\ \cos(n, z) &= \frac{1}{\Lambda} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \tau} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \tau} \right) \end{aligned} \quad (35)$$

через що в обчисленні значення якобіана Λ переходу до локальної системи координат потреби немає. Визначення потрібних похідних глобальних координат виконуються за формулами на кшталт:

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^8 \mathbf{z}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial \eta} \quad (36)$$

Заняття 6

10. Чисельне інтегрування.

Обчислення коефіцієнтів матриць жорсткості елементів та векторів навантажень виконуватимемо числовим інтегруванням у формулах виду (26) та (34). Для цього використаємо підхід Гауса, згідно якого:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 f(x) dx &\approx \sum_{i=1}^n c_i f(x_i^G) \\
\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) dx dy &\approx \sum_{i=1}^n c_i \sum_{j=1}^n c_j f(x_i^G, x_j^G) \\
\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y, z) dx dy dz &\approx \sum_{i=1}^n c_i \sum_{j=1}^n c_j \sum_{k=1}^n c_k f(x_i^G, x_j^G, x_k^G)
\end{aligned} \quad , \quad (37)$$

де n - кількість вузлів Гауса, x_i - їхні координати, c_i - константи Гауса. Зважаючи на вигляд функцій (24), з комбінацій яких складаються підінтегральні вирази, обмежимося трьома вузлами Гауса у напрямку кожної координати. У цьому випадку:

$$c_{1,3} = \frac{5}{9}; \quad c_2 = \frac{8}{9}; \quad x_{1,3}^G = \pm\sqrt{0.6}; \quad x_2^G = 0;$$

Отож, наближене обчислення інтегралів виду (26) зводиться до зваженого підсумовування значень підінтегрального виразу в $3 \times 3 \times 3 = 27$ вузлах Гауса:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_{11}^e &= \sum_{m=1}^3 c_m \sum_{n=1}^3 c_n \sum_{k=1}^3 c_k \left[\lambda \quad 1 - \nu \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \quad \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \right. \\
&\quad \left. \mu \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \right) \right] \cdot \Delta \quad i, j = 1..20
\end{aligned} \quad (38)$$

Найбільш затребуваними величинами у таких обчисленнях є похідні від апроксимуючих функцій по локальних координатах

$$\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial \beta}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial \gamma} \right) \quad i = 1..20 \quad (\text{див. (28), (29)}). \quad \text{Більше того, оскільки}$$

їхні значення у вузлах Гауса не залежать від геометрії скінченного елемента, тому є сенс один раз їх порахувати і зберегти у робочому масиві:

$$DFIABG \ 27, 3, 20, \quad (39)$$

де перший індекс відповідає за номер вузла Гауса, другий - по якій локальній координаті бралася похідна, третій – номер апроксимуючої функції.

Домашнє завдання.

11. Формування матриці жорсткості елемента.

Обчислення коефіцієнтів матриці жорсткості елемента зручно оформити в окрему процедуру з наступною послідовністю дій:

- з допомогою (28) формуємо масив похідних глобальних координат по локальних у вузлах Гауса:

$$DXYZABG \ 3,3,27 \quad (40),$$

де $DXYZABG \ i,j,k$ - похідна від i - ої глобальної координати по j - ій локальній у k -ому вузлі Гауса.

- Зі значень $DXYZABG \ i,j,k$ формуємо масив значень якобіана у вузлах Гауса елемента

$$DJ \ 27 \quad (41)$$

- Розв'язуванням систем (29) формуємо масив похідних від апроксимуючих функцій по глобальних координатах

$$\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \right) \ i = 1..20 \text{ у вузлах Гаусса}$$

$$DFIXYZ \ 27,20,3 \quad (42)$$

де перший індекс – вузол Гауса, другий – номер функції, третій номер глобальної координати.

- Формуємо матрицю жорсткості елемента

$$MGE \ 60,60, \quad (43)$$

перший блок коефіцієнтів якої поданий в (38) (для решти див. (15)). Неважко показати, що MGE є симетричною, тому для зменшення кількості обчислень достатньо сформувати її, наприклад, наддіагональну частину.

Заняття 7

12. Формування вектора навантаження елемента.

Згідно з (34) та (35) коефіцієнти вектора навантаження на елемент обчислюватимемо за формулою:

$$\mathbf{F}_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} P_n \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \tau} - \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \tau} \right) \psi_i \\ P_n \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \tau} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \tau} \right) \psi_i \\ P_n \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \tau} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \tau} \right) \psi_i \end{bmatrix} d\eta d\tau = \begin{bmatrix} \underline{f}_1^e \\ \underline{f}_2^e \\ \underline{f}_3^e \end{bmatrix} \quad i = 1..8 \quad (44)$$

Відповідно до (37) в інтегруванні по «стандартному» квадрату беруть участь значення підінтегральної функції у 9-ти вузлах Гауса. Отож, наприклад, для першого блоку коефіцієнтів:

$$\underline{f}_1^e = \sum_{m=1}^3 c_m \sum_{n=1}^3 c_n \left[P_n \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \tau} - \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \tau} \right) \psi_i \right] \quad i = 1..8, \quad (45)$$

де похідні у вузлах Гауса обчислюємо за допомогою (36).

Згідно з (17) довжина вектора навантаження елемента має відповідати розміру матриці жорсткості, тобто складатися з 60-ти коефіцієнтів. У той же час (44) містить $8 \times 3 = 24$ значень, оскільки описує навантаження лише на 8 з 20 вузлів елемента, що належать одній з його граней. Це слід враховувати при формуванні масиву вектора навантаження на елемент *FE 60*, ставлячи знайдені за (44) значення на відповідні їм за локальною нумерацією вузлів елемента місця. Решта ж коефіцієнтів *FE*, які відповідають ненавантаженим вузлам, зрозуміло, мають дорівнювати нулю (якщо елемент не має інших навантажених сторін).

Як і у випадку матриці жорсткості формування вектора *FE 60* також зручно оформити в окрему процедуру.

Домашнє завдання.

Зауважимо, що значення апроксимуючих функцій ψ_i у вузлах «стандартного» квадрата не залежать від форми граней скінченного елемента. Тому, подібно до (39) їх достатньо обчислити лише раз і для багатократного використання зберегти у масиві

$$DPSITE \ 9,2,8, \quad (46)$$

де перший індекс відповідає за номер вузла Гауса, другий - по якій локальній координаті бралася похідна, третій – за номер апроксимуючої функції.

Заняття 8

13. Формування глобальних матриць жорсткості та вектора навантаження.

Згідно з (17) матриці жорсткості, вузлові значення шуканих переміщень та вектори навантаження окремих скінчених елементів, мають бути об'єднані у єдину систему алгебраїчних рівнянь. За основу такого об'єднання візьмемо глобальну нумерацію вузлів (див. Рис. 1а). Відповідно їй глобальний вектор шуканих невідомих подамо у вигляді:

$$\mathbf{U} = u_x^1, u_y^1, u_z^1, u_x^2, u_y^2, u_z^2, \dots, u_x^{nqr}, u_y^{nqr}, u_z^{nqr}^T, \quad (47)$$

де верхній індекс означає глобальний номер вузла, а нижній – номер компоненти вектора переміщення. Під цей вектор виділимо одинірний масив у пам'яті комп'ютера $\mathbf{U} \ 3 \times nqr$.

Звернемо тепер увагу на прийняте в (20) розташування вузлових невідомих відповідно локальній нумерації вузлів на скінченому елементі:

$$\mathbf{u}^e = u_x^1, \dots, u_x^{20}, u_y^1, \dots, u_y^{20}, u_z^1, \dots, u_z^{20}^T.$$

За таким же порядком формувались матриці жорсткості елементів (43). Зрозуміло, що кожний елемент вектора (20) має своє місце у векторі (47). Для встановлення такої відповідності раніше нами і був сформований масив зв'язності NT (див. (21)). Для прикладу в умовах

Рис. 1а) $NT \ 17, 2 = 23$, отож $\dots, u_x^{17}, \dots, u_y^{17}, \dots, u_z^{17}, \dots^T$ вектора

вузлових переміщень другого елемента \mathbf{u}^2 є компонентами $\dots, u_x^{23}, u_y^{23}, u_z^{23}, \dots^T$ глобального вектора невідомих \mathbf{U} . З цих же

міркувань формуватимемо глобальні матриці жорсткості $MG \ 3 \times nqr, 3 \times nqr$ та вектор навантаження $F \ 3 \times nqr$ всієї системи.

Фізичний зміст коефіцієнта $MGE\ i, j$ полягає у величині жорсткості зв'язку між i -ю та j -ю компонентами вектора переміщень (20). Для прикладу $a_{17,39}$ в MGE описує жорсткість зв'язку між u_x^{17} та u_y^{19} – 17-им та 39-м коефіцієнтами в (20)). Оскільки локальний 17-й вузол другого елемента є 23 вузлом, а 19-й відповідно 31-м у глобальній нумерації, то $a_{17,39}$ має перейти у

$$3 \times \left(\begin{matrix} NT & 17,2 & -1 \\ \Downarrow & & \\ & 23 & \end{matrix} \right) + \begin{matrix} 1 \\ \Downarrow \\ u_x \end{matrix} = 3 \times 22 + 1 = 67 \quad \text{рядок} \quad \text{і} \quad 3 \times 30 + 2$$

стовпчик MG , тобто стати $a_{67,92}$ її елементом. За таким принципом кожен коефіцієнт матриці MGE має бути розміщений на своєму місці в матриці MG .

Звернемо ще раз увагу на Рис. 1 б). Згаданий вище 23-й вузол глобальної нумерації належить не тільки 2-ому скінченному елементові, а й 4-ому. А 22-й вузол входить у склад вже 4-х елементів. Можливий варіант належності вузла відразу 8-ом елементам. Це означає, що на одне місце в матриці глобальної системи рівнянь претендують коефіцієнти матриць жорсткості кількох елементів. Втім, проблеми тут немає, оскільки згідно з (17) вони мають бути просто підсумовані.

Домашнє завдання.

За схожим сценарієм з векторів навантажень скінчених елементів $FE\ 60$ формуємо праву частину $F\ 3 \times nqr$ результуючої системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Заняття 9

14. Врахування стрічкової структури MG

Згадана вище симетричність матриць жорсткості скінчених елементів переноситься і на результуючу матрицю, що дає змогу формувати і зберігати лише її наддіагональну частину. Втім, специфіка МСЕ дає ще одну важливу перевагу, котра також істотно зменшує потреби в оперативній пам'яті комп'ютера.

Як уже було зазначено вище, коефіцієнти MG визначають ступінь жорсткості між відповідними компонентами переміщень різних пар вузлів сітки. Оскільки кожен вузол сітки взаємодіє з іншими вузлами лише тих елементів, до яких сам належить, то ненульові коефіцієнти MG будуть групуватися навколо її діагоналі у вигляді стрічки, півширина ng якої визначена нами раніше в (22). Все це разом дає змогу втиснути корисну інформацію з $MG_{3 \times nqr, 3 \times nqr}$ у не порівняно меншу матрицю $MG_{ng, 3 \times nqr}$, у яку і слід розносити коефіцієнти матриць елементів.

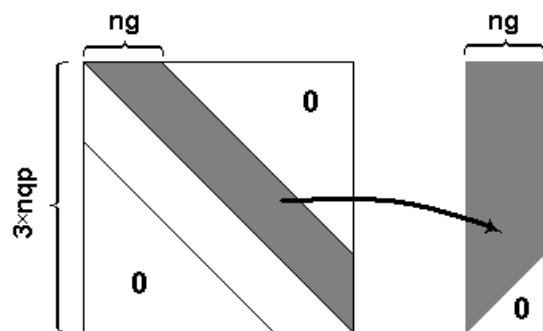


Рис. 5 Оптимізація розмірів матриці жорсткості системи

Домашнє завдання.

Написати функції переходу індексів нумерації коефіцієнтів розрідженої матриці жорсткості до їхньої нумерації у «стрічковому» варіанті зберігання (і навпаки).

Заняття 10

15. Забезпечення виконання крайових умов.

Без модифікації під виконання крайових умов задачі сформована нами система алгебраїчних рівнянь є виродженою, оскільки для отримання скінчених переміщень навантажений об'єкт має бути у той, чи інший спосіб закріплений. В скінчено-елементній моделі це означає, що переміщення частини вузлів на границі області наперед визначені умовами задачі. Зокрема, у випадку нашої задачі в

силу (4) кожна з трьох компонент вектора переміщень у всіх вузлах нижньої грані паралелепіпеда має дорівнювати нулю, тобто $u_x^i = 0, u_y^i = 0, u_z^i = 0; i \leq 13$. Отож, матрицю системи рівнянь та вектор правої частини слід так підправити, щоб заданих значень дотриматися. Цього можна досягти двома способами.

1-й спосіб – пряма підстановка відомих розв’язків у систему рівнянь. У цьому випадку рядки і стовбці з відповідними номерами з матриці системи вилучаються, а вектор правої частини змінюється згідно підставленим розв’язкам. Для прикладу, розглянемо задоволення умови $u_y^6 = 0$. Підстановка такої компоненти розв’язку

у систему рівнянь означає, що $3 \times 6 - 1 + 2 = 17$ -е рівняння з неї слід вилучити. Стовбець з таким же номером також має бути вилучений з матриці за рахунок перенесення його перемноженням на відомий розв’язок у праву частину F . Однак, у випадку підстановки нуля змін в останній немає. Дану процедуру необхідно повторити для всіх заданих крайовими умовами компонент вузлових переміщень. Втім, попри видиму логічність такого підходу технічно він є доволі незручним, оскільки вимагає або значних перетасовок у матриці системи, або додаткових операцій із запам’ятовуванням номерів видалених рядків та стовбців. Тому, підемо простішим шляхом.

2-й спосіб. Для задоволення згаданої вище умови $u_y^6 = 0$ значення діагонального коефіцієнта 17-го рядка слід встановити достатньо великим, наприклад, $a_{17,17} = 10^{50}$. У цьому випадку вплив інших коефіцієнтів рядка на 17-у компоненту розв’язку буде знівельовано і розв’язком системи автоматично стане близька до нуля $\sim 10^{-50}$ величина u_y^6 . Зрозуміло, що за потреби встановити відмінне від нуля значення розв’язку, наприклад, $u_y^6 = a$, додатково у векторі правої частини слід підправити $f_{17} = a \cdot 10^{50}$.

Заняття 11

16. Розв’язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Особливостями сформованої нами СЛАР є:

- велика кількість рівнянь
- апріорі добра обумовленість матриці жорсткості
- стрічковий характер матриці системи
- симетричність матриці системи
- специфічний (подіагональний) спосіб зберігання коефіцієнтів у масиві

В мережі Internet можна знайти багато готового програмного коду для розв'язування різних видів СЛАР. Втім, пошуки спеціально налаштованого під вибраний нами формат зберігання коефіцієнтів може зайняти більше часу, ніж написання власного. Пропонуємо з використанням класичної схеми методу Гауса створити власний варіант програми розв'язування СЛАР під перераховані вище її особливості.

Заняття 12

17. Знаходження компонент тензора напружень.

За знайденими після розв'язування СЛАР вузловими значеннями компонент вектора переміщень з допомогою (2) обчислимо вузлові значення компонент тензора напружень. Для цього, використовуючи ще раз введену на «стандартному» елементі апроксимацію (24), маємо:

$$\frac{\partial u_z}{\partial x}(x_k, y_k, z_k) = \sum_{i=1}^{20} \mathbf{u}_z^i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k), \quad (48)$$

де $(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k)$ - локальні координати вузла СЕ з глобальними координатами (x_k, y_k, z_k) . Звертаємо увагу на те, що в обчисленнях інтегралів значення підінтегральних функцій ми рахували у вузлах Гауса. Для пошуку ж вузлових напружень числове диференціювання ми виконуємо за значеннями похідних у вузлах СЕ. Для обчислення похідних від апроксимуючих функцій за глобальними координатами зручно повторно скористатись технікою (28), рахуючи величини локальних похідних від цих функцій та якобіана у вузлах «стандартного» СЕ.

Оскільки кожен вузол, у якому ми обчислюємо компоненти тензора напружень може належати одночасно декільком СЕ, то розрахунки напружень варто виконати на кожному з них і остаточне значення взяти як середнє арифметичне по цих елементах.

У кожній точці тіла є три взаємно перпендикулярні напрямки, у яких внутрішні зусилля є екстремальними, а, отже, й найбільш небезпечними (через що вони називаються головними напруженнями). Їхні величини можна знайти з кубічного рівняння:

$$\sigma^3 - J_1\sigma^2 + J_2\sigma - J_3 = 0, \quad (49)$$

де

$$J_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz},$$

$$J_2 = \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{xx}\sigma_{zz} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} - (\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2),$$

$$J_3 = \sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} + 2\sigma_{xy}\sigma_{xz}\sigma_{yz} - (\sigma_{xx}\sigma_{yz}^2 + \sigma_{yy}\sigma_{xz}^2 + \sigma_{zz}\sigma_{xy}^2)$$

Саме головні напруження в конструкціях є основними характеристиками, які впливають на їхню міцність.

Заняття 13

18. Зведений алгоритм МСЕ

Прийшов час об'єднати окремі компоненти схеми МСЕ у єдиний алгоритм розв'язування задач.

1) Формування сітки СЕ.

а) Обчислення (за вихідними значеннями $a_x, a_y, a_z; n_x, n_y, n_z$) масивів AKT (7) та NT (21)

б) Формування інформації про крайові умови в масивах ZU (30) та ZP (31)

2) Обчислення на «стандартних» елементах. Формування масивів похідних у вузлах Гауса $DFIABG$ (39), $DPSITE$ (46)

3) Цикл по скінчених елементах.

а) Обчислення $DXYZABG$ (40), DJ (41), $DFIXYZ$ (42)

б) Формування матриці жорсткості елемента MGE (38)

в) Формування вектора навантаження FE (45)

г) Розсилання коефіцієнтів MGE та FE у матриці MG та F

- 4) Модифікація MG та F для виконання крайових умов
- 5) Розв'язування СЛАУ
- 6) Знаходження компонент тензора напружень.
- 7) Демонстрація результатів роботи програми.

19. Налаштування програми.

Малоймовірно, що після ліквідації синтаксичних помилок у програмному коді всіх необхідних процедур програма відразу почне видавати правильні результати. Найпростішими у цьому плані є етапи побудови сітки СЕ та представлення результатів роботи на екран монітора, на яких контроль правильності роботи створеного програмного забезпечення можна виконувати порівнянням отримуваних результатів з очікуваними для простих сіток. В пригоді стане і створена з допомогою OpenGL програмна компонента. Що ж стосується решти алгоритмів реалізації числових схем МСЕ, то з досвіду розробки схожого програмного забезпечення пропонуємо кілька рекомендацій та маркерів:

1. Перед реалізацією окремих числових процедур настійно радимо самостійно «перевіряти правильність» наведених вище відповідних математичних викладок. Це не тільки «несподівано» спростить процес написання і налагодження коду, а й значно підвищить його ефективність.

2. З метою уникнення типових для даного виду програмного забезпечення проблем (особливо у випадку роботи з вказівниками) виділення оперативної пам'яті під потрібні масиви необхідно виконувати динамічно після обчислення необхідного її обсягу. Наприклад, для створення масиву координат (7) слід попередньо вирахувати значення nqr .

3. Для перевірки правильності роботи блоку розв'язування СЛАР достатньо у кожному компоненту вектора правої частини підставити суму елементів відповідного рядка матриці. Зрозуміло, що у цьому випадку вектор розв'язків системи буде одиничним.

4. В силу лінійності задачі зміна величини прикладеного навантаження, наприклад удвічі, дає таку ж зміну шуканих переміщень. Збільшення ж модуля Юнга (жорсткості системи) у стільки ж разів зменшує переміщення, але не впливає на величину напружень.

5. Маленькі «хитрощі»:
 - а. Діагональні елементи матриць жорсткості елементів (і системи) мають бути додатними та за величиною переважати недіагональні.
 - б. Значення якобіана переходу до локальної системи координат на скінченному елементі є відношенням його об'єму до об'єму «стандартного» СЕ, який дорівнює 8.

Заняття 14

20. Інтерфейс користувача.

Інтерфейсна частина програми має виконувати наступні основні функції:

1. Ввід даних про:
 - i) геометрію області;
 - ii) навантаження;
 - iii) закріплення;
 - iv) характеристики матеріалу;
 - v) параметри сітки СЕ.
2. Демонстрація результатів тріангуляції області засобами OpenGL з можливістю:
 - vi) подання сітки вузлів під різними кутами огляду, масштабування, повороти, тощо;
 - vii) динамічного внесення коректив у геометрію конструкції та параметри тріангуляції.
3. Контроль а ходом обчислень:
 - viii) демонстрація вмісту робочих масивів;
 - ix) індикатор відсотків виконання обчислень;
4. Подання результатів числового аналізу:
 - x) табличні значення переміщень та головних напружень у вулах сітки СЕ;
 - xi) OpenGL зображення деформацій конструкції під навантаженням;
 - xii) подання кольором у двох вертикальних перпендикулярних січеннях конструкції OpenGL інтерполяції поля напружень за його вузовими значеннями.

Зміст

ВСТУП.....	3
ЗАНЯТТЯ 1	4
ЗАНЯТТЯ 2	8
ЗАНЯТТЯ 3	11
ЗАНЯТТЯ 4	15
ЗАНЯТТЯ 5	18
ЗАНЯТТЯ 6	20
ЗАНЯТТЯ 7	22
ЗАНЯТТЯ 8	24
ЗАНЯТТЯ 9	25
ЗАНЯТТЯ 10	26
ЗАНЯТТЯ 11	27
ЗАНЯТТЯ 12	28
ЗАНЯТТЯ 13	29
ЗАНЯТТЯ 14	31