УДК 519.2

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ БЛЭКА-ШОУЛЗА С ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ ВОЛАТИЛЬНОСТИ

А.С. Чернова

В работе получено решение уравнения Блэка-Шоулза для случая, когда функция волатильности представлена в форме многочлена второй степени по времени

Ключевые слова: модель Блэка-Шоулза, функция волатильности, задача Штурма-Лиувилля

В данной работе исследуется модель Блэка-Шоулза[1]:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(t) S^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial S^2} = 0, \qquad (1)$$

где $Y(t,S)$ – значение капитала хеджирующего портфеля в момент времени t,S – рисковый актив, $\sigma^2(t)$ – функция волатильности.

При этом мы не рассматриваем краевые условия, т.к. нас интересуют возможности данной модели как средства описания рынка вторичных ресурсов, в частности рынка ценных бумаг. Обычно модель Блэка-Шоулза используется для принятия управленческих решений по хеджированию активов на рынке вторичных ресурсов. И поэтому большинство работ связанных с этой тематикой направлены на изучение этого уравнения как динамической системы. А в нашем случае мы будем считать функцию волатильности $\sigma^2(t)$ некоторым заданным временным рядом. Используя методы изложенные в работах [2,3,4] сглаживая функцию волатильности придем к многочлену второй степени.

$$\sigma^2(t) = At^2 + Bt + C. \qquad (2)$$

Подставляя соотношение (2) в уравнение (1), получим

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + (At^2 + Bt + C)S^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial S^2} = 0 \qquad (3)$$

Решая уравнение (3) методом разделения переменных, придем к следующему:

$$Y(t,S) = T(t)G(S), \qquad (4)$$

подставляя соотношение (4) в уравнение (3), получим

$$\frac{dT}{dt}G(S) + (At^2 + Bt + C)T(t)S^2 \frac{d^2G}{dS^2} = 0 \qquad (5)$$

$$\frac{dT}{dt}G(S) = -(At^2 + Bt + C)T(t)S^2 \frac{d^2G}{dS^2} \qquad (6)$$

$$\frac{dT}{dt}\frac{(-1)}{T(t)(At^2+Bt+C)} = S^2 \frac{d^2G}{dS^2}\frac{1}{G(S)} = \lambda = const. \qquad (7)$$

Отсюда приходим к следующим уравнениям:

$$\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} = -\lambda(At^2 + Bt + C) \qquad (8)$$

$$\frac{1}{G}\frac{d^2G}{dS^2} = \frac{\lambda}{S^2} \qquad (9)$$

В результате интегрирования уравнения (8), получим:

$$T(t) = T_0 e^{-\lambda[A(t-t_0)^3 + B(t-t_0)^2 + C(t-t_0)]} \qquad (10)$$

Перейдем теперь к уравнению (9):

$$S^2 \frac{d^2G}{dS^2} = \lambda G \qquad (11)$$

Уравнение (11) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение Эйлера. Представляем его решение в виде:

$$G(S) = S^x, \qquad (12)$$

откуда получаем соотношение для определения x (задача Штурма-Лиувилля):

$$x(x-1) = \lambda \qquad (13)$$

Будем различать следующие случаи:

1. Дискриминант (13) положительный

$$1 + 4\lambda > 0 \qquad (14)$$

И решение имеет вид:

Чернова Александра Сергеевна – ВГТУ, магистр, e-mail: alexsandra151@yandex.ru, тел.+7920-440-79-97

$$G(S) = G_1 S^{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{1+4\lambda}}{2}} + G_2 S^{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{1+4\lambda}}{2}}. \quad (15)$$

Здесь G_1, G_2 – константы интегрирования.

2. Дискриминант (13) отрицательный

$$1 + 4\lambda < 0 \quad (16)$$

В этом случае решение имеет вид:

$$G(S) = \sqrt{S}\left[G_1 \cos\frac{\sqrt{|1+4\lambda|}}{2} S + G_2 \sin\frac{\sqrt{|1+4\lambda|}}{2} S\right] \quad (17)$$

Тогда общее решение в случае 1 может быть представлено в виде:

$$Y(t, S) = T_0 e^{-\lambda\left[A(t-t_0)^3 + B(t-t_0)^2 + c(t-t_0)\right]} \sqrt{S}\left(G_1 S^{\frac{\sqrt{1+4\lambda}}{2}} + G_2 S^{\frac{-\sqrt{1+4\lambda}}{2}}\right) \quad (18)$$

А в случае 2 соответственно:

$$Y(t, S) = T_0 e^{-\lambda\left[A(t-t_0)^3 + B(t-t_0)^2 + c(t-t_0)\right]} \sqrt{S}\left[G_1 \cos\frac{\sqrt{|1+4\lambda|}}{2} S + G_2 \sin\frac{\sqrt{|1+4\lambda|}}{2} S\right] \quad (19)$$

Альтернативный метод решения рассмотренной задачи предложен в работах [5,6], где решение представлено в форме ряда по многочленам Лежандра, учитывающим краевые условия задачи.

Соотношения (18),(19) демонстрируют качественно различное поведение решений в зависимости от спектрального параметра λ. В частности соотношение (19) включает волновую составляющую по рисковому активу.

Автор благодарна своему научному руководителю Ю.Я. Аграновичу за постановку задачи и внимание к работе.

Литература

1. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики, том 2., ФАЗИС. М.- 1998. стр.887-882.

2. Агранович Ю.Я., Концевая Н.В., Хацкевич В.Л. Метод многоугольных чисел в процедуре сглаживания временных рядов и приложения к исследованию финансовых рынков//Экономика и математические методы, 2010, том 46, вып.3, с.71-81.

3. Агранович Ю.Я., Концевая Н.В. Метод определения параметров сглаживания временных рядов на основе минимизации невязки в формуле Эйлера-Маклорена//Современная экономика. Проблемы и решения, 2011, №7(18), с. 131-137.

4. Хацкевич В.Л. Решение уравнения Блэка-Шоулза, описывающего формирование цен на опционы, и некоторые свойства полиномов Лежандра//Системы управления и информационные технологии. 2012. Т. 49. № 3. С. 28-32

5. Хацкевич В.Л. Приближенный анализ справедливой цены опциона на основе уравнения Блэка – Шоулза.// Современная экономика. Проблемы и решения, 2012. № 5, стр.159-167.

Воронежский государственный технический университет

THE SOLUTION OF EQUATION BLACK-SCHOLES WITH A PARABOLIC FUNCTION VOLATILITY

A.S. Chernova

In this paper the solution of the Black-Scholes option pricing model, for the case when the function of volatility is in the form of a polynomial of degree over time

Key words: model of the Black-Scholes option pricing model, the function of volatility, the Sturm-Liouville