



## Курс «Теория финансов» Семинар №16

# Ценообразование опционов



20-22 декабря 2017

Пахалов Александр,  
научный сотрудник ЭФ МГУ

 [pakhalov@gmail.com](mailto:pakhalov@gmail.com)  
 [vk.com/pakhalov](https://vk.com/pakhalov)

Презентации семинаров доступны здесь: <https://www.econ.msu.ru/departments/lia/staff/pakhalov>

# Подходы к оценке опционов

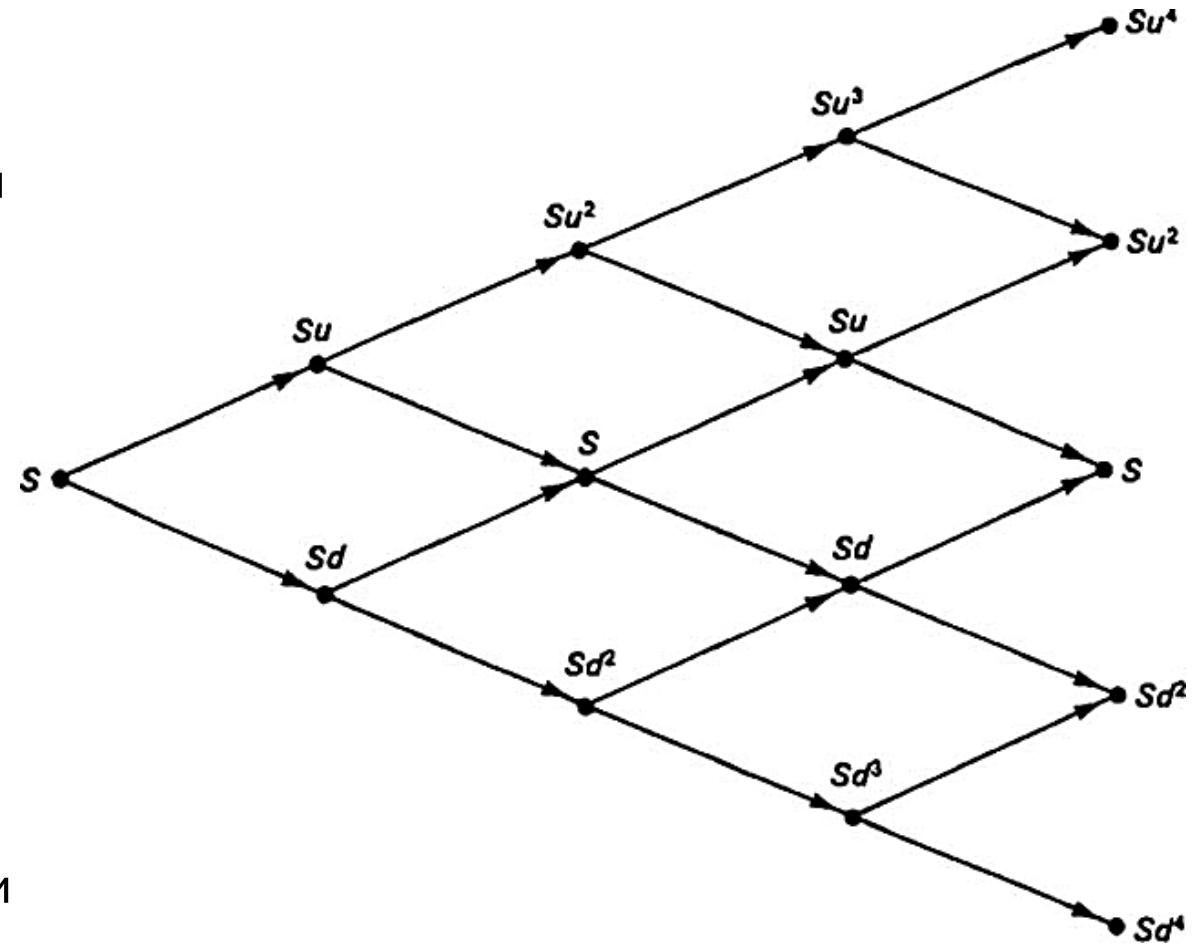


# Биномиальная модель: иллюстрация

**Биномиальная модель** предложена в 1979 году Коксом, Россом и Рубинштейном. Схема модели похожа на метод нейтральности инвестора к риску, однако периодов здесь уже несколько + появляется учет рисков

Предположим, что текущая цена акции равна  $S$ . Через один период она может либо вырасти в  $u$  раз (с вероятностью  $p$ ), либо упасть в  $d$  раз (с вероятностью  $1-p$ ). На графике справа изображена ситуация, которая получится, если рассмотреть несколько периодов

В реальности цена базового актива меняется не просто несколько раз в течение года, а практически ежесекундно. В предельном случае биномиальная модель превратится в **модель Блэка-Шоулза** (Блэка-Шоулза-Мертон)



# Модель Блэка-Шоулза для опциона колл

$$C = S_0 \cdot N(d_1) - X \cdot e^{-r_f \cdot T} \cdot N(d_2)$$

Обозначения в этой формуле:

$C$  - стоимость опциона колл

$S_0$  - текущая стоимость базового актива

$X$  – цена-страйк (цена исполнения) опциона

$r_f$  - **непрерывно начисляемая** безрисковая процентная ставка

$T$  – время до исполнения опциона (измеряется в годах)

$N(\dots)$  - вероятность того, что случайная величина, распределенная нормально  $N(0;1)$ , окажется ниже, чем значение в скобках

$d_1$  и  $d_2$  - специальные параметры, см. формулы далее

# Модель Блэка-Шоулза для опциона пут

$$P = X \cdot e^{-r_f \cdot T} \cdot (1 - N(d_2)) - S_0 \cdot (1 - N(d_1))$$

Обозначения в этой формуле:

$P$  - стоимость опциона пут

$S_0$  - текущая стоимость базового актива

$X$  – цена-страйк (цена исполнения) опциона

$r_f$  - **непрерывно начисляемая** безрисковая процентная ставка

$T$  – время до исполнения опциона (измеряется в годах)

$N(\dots)$  - вероятность того, что случайная величина, распределенная нормально  $N(0;1)$ , окажется ниже, чем значение в скобках

$d_1$  и  $d_2$  - специальные параметры, см. формулы далее

# Модель Блэка-Шоулза: параметры d1 и d2

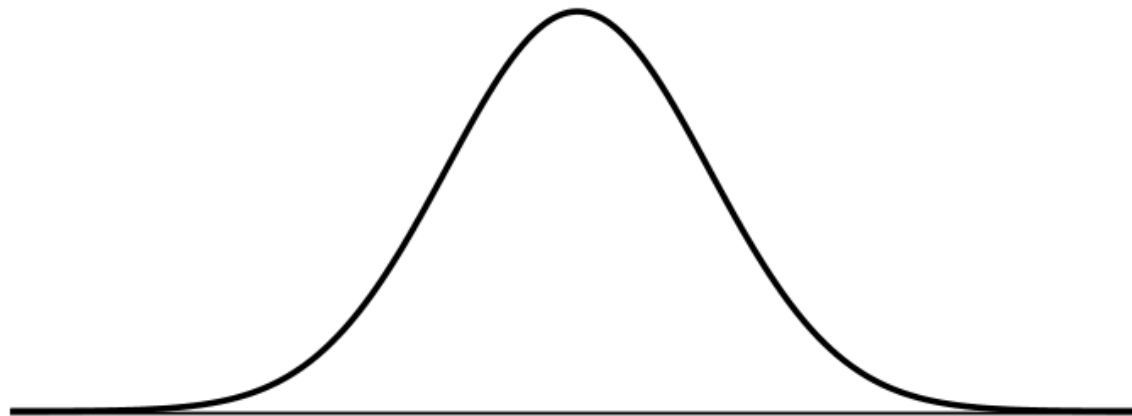
$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + T \cdot (r_f + 0,5 \cdot \sigma^2)}{\sigma \cdot \sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \cdot \sqrt{T}$$

$\sigma$  – волатильность / стандартное отклонение базового актива  
остальные обозначения такие же, как в предыдущих формулах

# Модель Блэка-Шоулза: применение нормального распределения

Для определения  $N(d)$  можно использовать таблицу нормального стандартного распределения или Excel-функцию **НОРМСТРАСП**(х) – эта функция возвращает стандартное нормальное интегральное распределение, которое имеет среднее, равное нулю, и стандартное отклонение, равное единице



# Модель Блэка-Шоулза: пример

Рассмотрим акцию компании «Harry panda», которая продается сейчас по цене 100 рублей за штуку. Ее стандартное отклонение равно 98%. Есть опцион колл со страйком 125 рублей и сроком исполнения через год. Безрисковая дискретная ставка на год равна 8%. Оценить такой опцион.

## Решение:

Первый шаг решения – перевод дискретной безрисковой ставки в непрерывное измерение:

$$r_f^{\text{непрерывная}} = \ln(1 + r_f^{\text{дискретная}}) = \ln 1,08 = 0,077$$

Далее считаем технические параметры  $d_1$  и  $d_2$ :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{100}{125}\right) + 1 \cdot (0,077 + 0,5 \cdot 0,9604)}{0,98 \cdot \sqrt{1}} = 0,3409; \quad d_2 = 0,3409 - 0,98 = -0,6391$$

С помощью функции Excel **НОРМСТРАСП**(х) находим  $N(0,3409)=0,6334$  и  $N(-0,6391)=0,2614$

Теперь можно определить стоимость опциона колл:

$$C = 100 \cdot 0,6334 - 125 \cdot e^{-0,077} \cdot 0,2614 = 33,09$$



## Семинар 16, задание 1: условие

Цена акции компании «Рогатый скот» составляет 220 рублей и может вдвое снизиться или удвоиться в каждом шестимесячном периоде (что соответствует 98% годовому стандартному отклонению). Цена исполнения однолетнего опциона «колл» на акции «Рогатого скота» равна 165 рублей. Годовая безрисковая процентная ставка равна 21%.

- а) какова цена опциона «колл» на акции «Рогатого скота»?
- б) сколько сейчас стоит опцион «пут» на эти акции с ценой исполнения 220 рублей?

## Семинар 16, задание 1: ответы

Решение этого задания полностью аналогично примеру. Далее приводятся промежуточные параметры и ответы к заданию

*По коллу:*

- Непрерывно начисляемая ставка процента равна 19,06%
- Промежуточные параметры  $d_1=0,9774$ ;  $d_2=-0,0026$
- Стоимость колла составляет 115,85 рублей

*По путу:*

- Непрерывно начисляемая ставка процента равна 19,06%
- Промежуточные параметры  $d_1=0,6839$ ;  $d_2=-0,2961$
- Стоимость пута составляет 57,73 рублей

***р.с. Обратите внимание на то, что поскольку у колла и пута разные страйки, нужно проводить отдельные расчеты для этих двух опционов, пользоваться пут-колл паритетом некорректно***

## Семинар 16, задание 2: условие

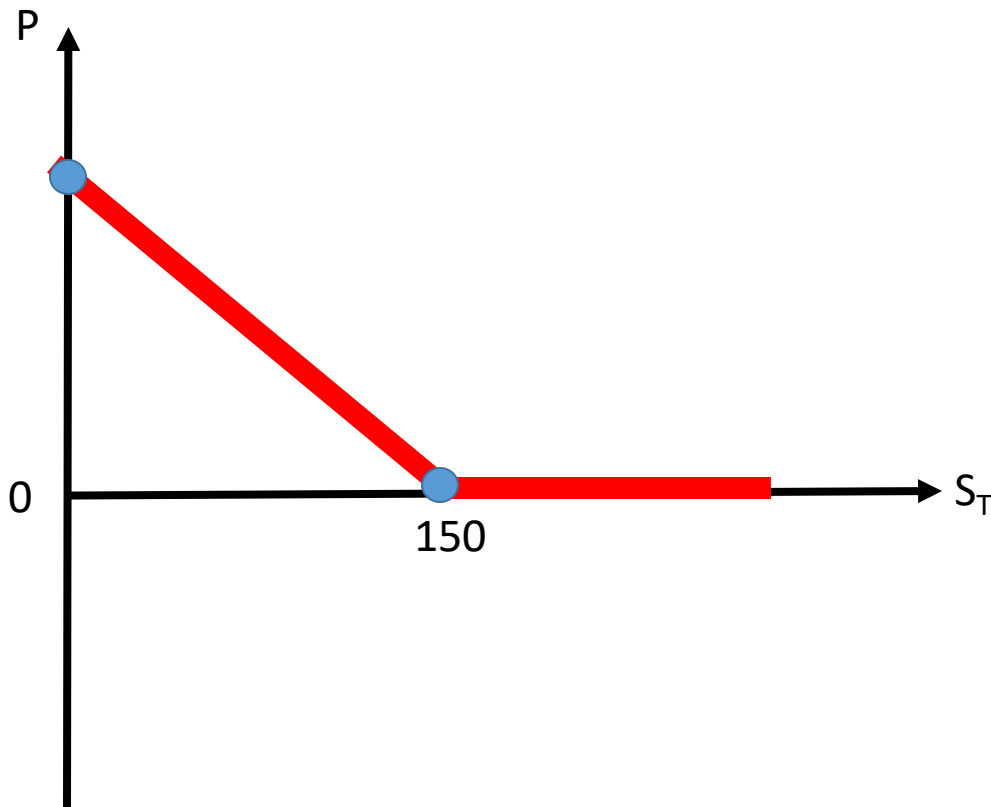
Предположим, г-н Коллеоне взял заем в размере приведенной стоимости 100 дол., купил шестимесячный опцион «пут» на акции Y с ценой исполнения 150 дол. и продал шестимесячный «пут» на акции Y с ценой исполнения 50 дол.

а) Постройте позиционную диаграмму, иллюстрирующую отдачу от исполнения этих опционов.

б) Придумайте еще две комбинации займов, опционов и лежащих в их основе акций, которые принесли бы г-ну Коллеоне такую же отдачу.

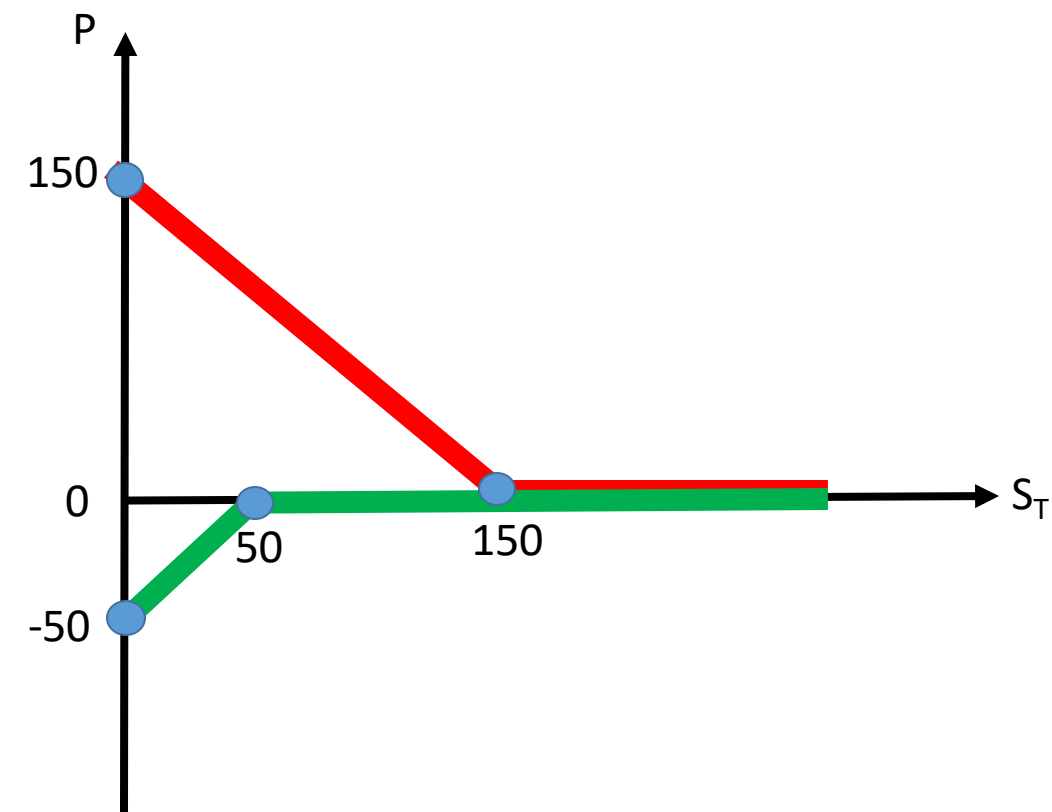
## Семинар 16, задание 2: решение

**Шаг 1.** Мы купили шестимесячный опцион «пут» на акции Y с ценой исполнения 150 долларов. То есть мы держатели опциона «пут» с  $X=150$ , картинка выглядит так:



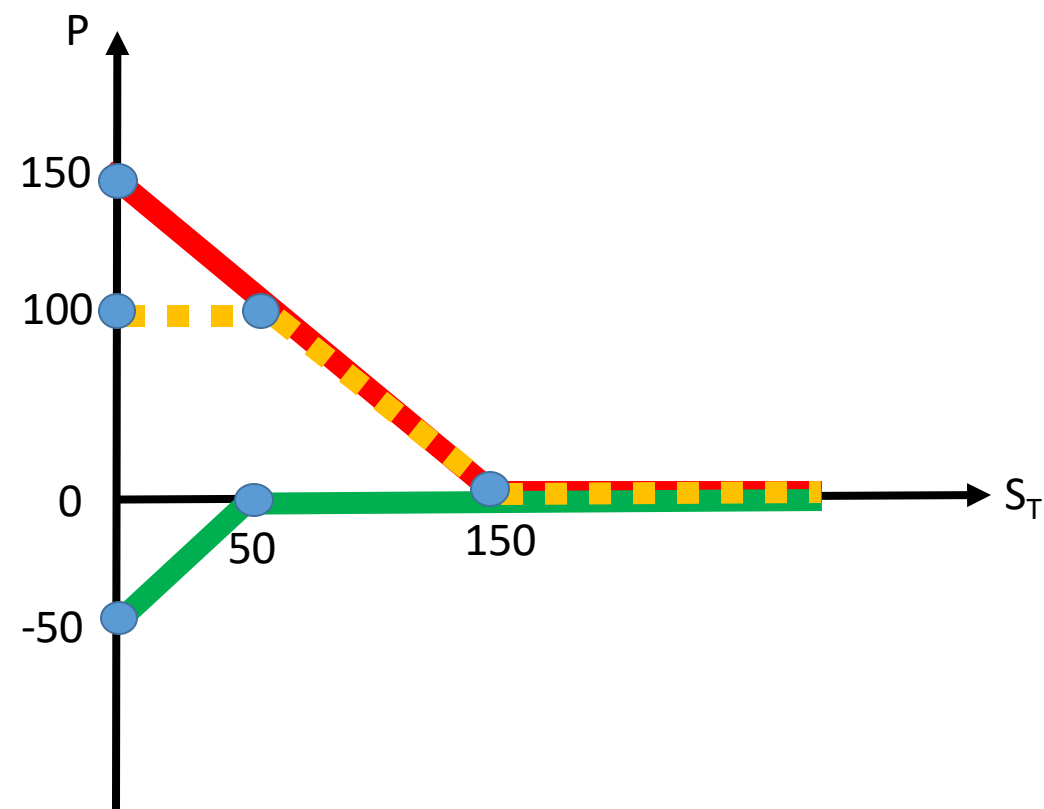
## Семинар 16, задание 2: решение

**Шаг 2.** Мы продали шестимесячный опцион «пут» на акции Y с ценой исполнения 50 долларов. То есть мы выписыватели опциона «пут» с  $X=50$ , картинка выглядит так:



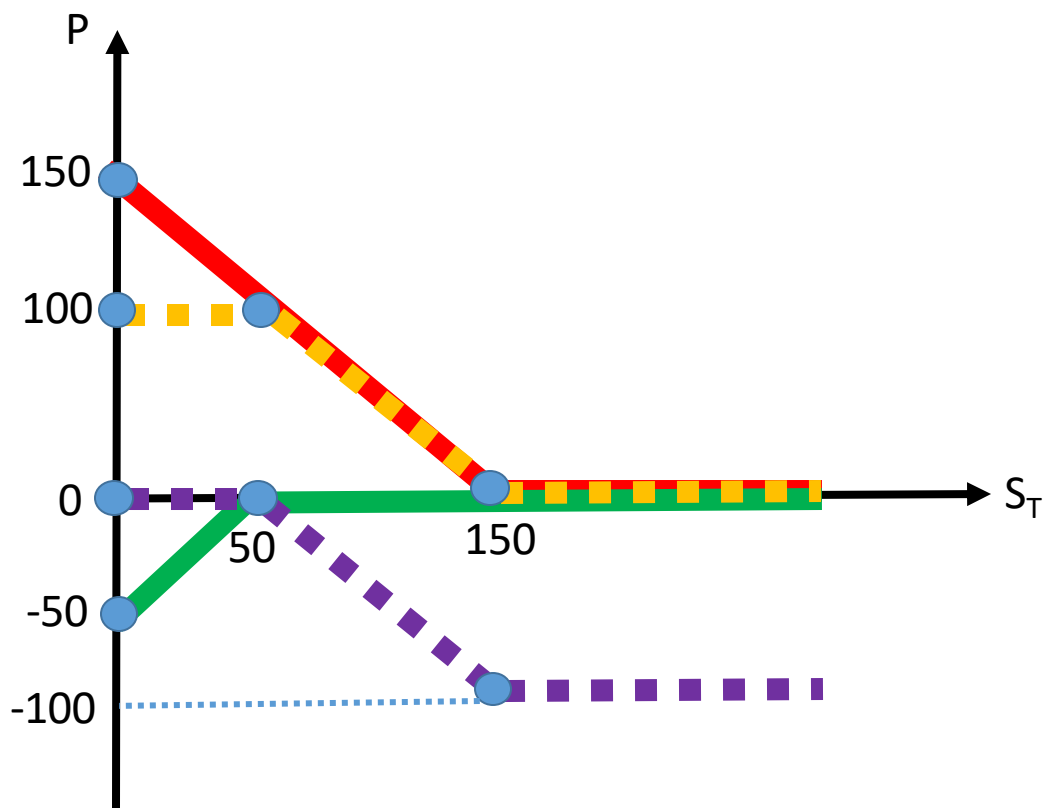
## Семинар 16, задание 2: решение

**Шаг 3.** Складываем графики по двум опционам, получаем наш график выплат по портфелю в целом (оранжевая пунктирная линия):



## Семинар 16, задание 2: решение

**Шаг 4.** Строим график прибыли с помощью параллельного сдвига графика выплат на 100 единиц (это расходы на формирование портфеля), на рисунке это лиловая линия



Насколько хорош портфель опционов, сформированный г-ном Коллеоне?

## Семинар 16, задание 3: условие

В следующем году цена акций компании «Крестовник» может рухнуть до 50 дол. с нынешнего уровня 100 дол. или подняться до 200 дол. Годовая процентная ставка составляет 10%.

- а) Какова дельта опциона у однолетнего «колл» на акции компании с ценой исполнения 100 дол.?
- б) Оцените этот «колл» методом дублирующего портфеля.
- в) Какова вероятность роста акций компании в мире с нейтральным отношением к риску?



## Семинар 16, задание 3: решение

а) Какова дельта опциона у однолетнего «колл» на акции компании с ценой исполнения 100 долларов?

Дельта (коэффициент хеджирования) для опциона колл находится по формуле:

$$\Delta = \frac{C_{high} - C_{low}}{S_1^{high} - S_1^{low}} = \frac{100 - 0}{200 - 50} = \frac{2}{3}$$

## Семинар 16, задание 3: решение

б) Оценка опциона методом дублирующего портфеля делается следующим образом:

Дельта = 2/3	S0=100	S1=200	S1=50
Покупка / продажа дельты акций	-66,67	+133,33	+33,33
Получение / возврат кредиты под залог дельты акций	+30,30	-33,33	-33,33
Итог по портфелю	<b>-36,37</b>	+100	0

в) Вероятность повышения цены в мире, нейтральном к риску, находится с помощью приравнивания текущей цены акции к ее ожидаемому будущему значению, продисконтированному с помощью безрисковой ставки:

$$100 = \frac{200\alpha + 50(1 - \alpha)}{(1 + 0,1)} \rightarrow \alpha = 0,4 \text{ (40\%)}$$

## Семинар 16, задание 4: условие

Цена акции компании «Typhoon» в настоящий момент времени составляет \$64 за акцию. В таблице приведены цены (премии) европейских опционов на эту акцию, их коэффициенты дельта, все опционы истекают через 90 дней.

	Опцион "колл"			Опцион "пут"		
	ITM	ATM	OTM	OTM	ATM	ITM
Цена исполнения	60	65	70	60	65	70
Премия	5,52	2,46	0,84	0,78	2,65	5,97
Дельта	0,79	0,51	0,24	-0,21	-0,49	-0,76

Рассмотрим стратегию А: купить один опцион ITM «колл» и выписать (продать) один опцион OTM «пут».

- Какова общая премия (цена) по данному портфелю?
- Нарисуйте диаграмму выплат по портфелю и диаграмму прибыли по портфелю.
- Чему равняется совокупная дельта портфеля?

Указание: дельта портфеля рассчитывается как средневзвешенная дельт опционов, входящих в портфель, а весами выступает доля по количеству соответствующих опционов в портфеле.

## Семинар 16, задание 4: решение

Цена акции компании «Typhoon» в настоящий момент времени составляет \$64 за акцию. В таблице приведены цены (премии) европейских опционов на эту акцию, их коэффициенты дельта, все опционы истекают через 90 дней.

	Опцион "колл"			Опцион "пут"		
	ITM	ATM	OTM	OTM	ATM	ITM
Цена исполнения	60	65	70	60	65	70
Премия	5,52	2,46	0,84	0,78	2,65	5,97
Дельта	0,79	0,51	0,24	-0,21	-0,49	-0,76

Рассмотрим стратегию А: купить один опцион ITM «колл» и выписать (продать) один опцион OTM «пут».

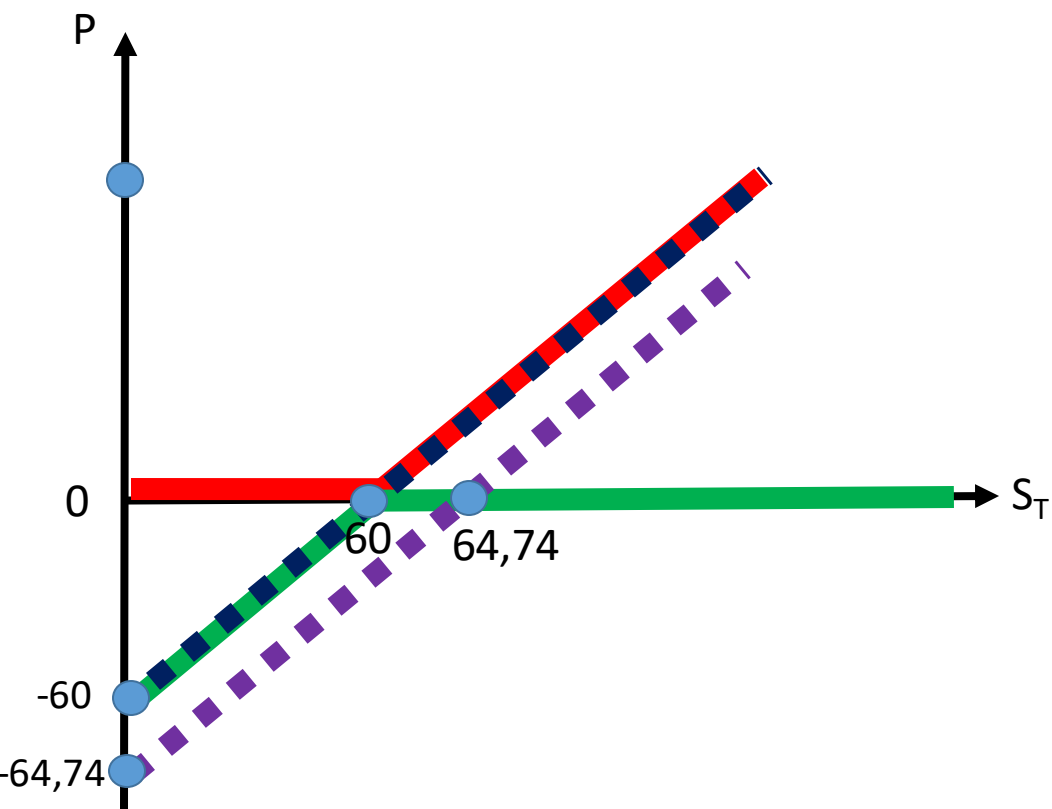
- Какова общая премия (цена) по данному портфелю?

**Решение:** мы продаем один пут OTM за премию 0,78 – это наша выручка, а покупаем один колл ITM за премию 5,52 – это наши издержки. Общая премия по портфелю находится как разница между выручкой и издержками  $= 0,78 - 5,52 = -4,74$  долл.

- Чему равняется совокупная дельта портфеля?

**Решение:** совокупная дельта портфеля находится как средневзвешенная из дельт опционов, в качестве весов используем доли опционов в портфеле. В нашем случае:  $\Delta(\text{портфеля}) = 0,5 * (-0,21) + 0,5 * 0,79 = 0,29$

# Семинар 16, задание 4: решение



Зеленая сплошная линия –  
выплаты по опциону пут,  
который мы выписали

Красная линия – выплаты по  
опциону колл, который мы  
купили

Синяя пунктирная линия –  
выплаты по портфелю из двух  
опционов

Лиловая пунктирная линия –  
прибыль по портфелю из двух  
опционов

## Семинар 16, задание 5: условие

Предположим, что существуют на рынке опционы «пут» и «колл» на один и тот же базовый актив, имеют одинаковый срок исполнения и одинаковую цену исполнения в 75 долларов. Текущая цена базового актива равна 80 долларов. Текущая стоимость опциона «пут» на 6,5 долларов ниже, чем текущая цена опциона «колл». Безрисковая инвестиция, которая заканчивается в момент исполнения опционов, приносит доход в размере 3%. Основываясь на данной информации, ответьте, существует ли возможность создать безрисковый прибыльный портфель (и если да, то укажите его состав)?

## Семинар 16, задание 5: решение

Для годовых опционов «пут» и «колл», выписанных на один и тот же базовый актив с текущей ценой 80 долларов, имеющих одинаковый срок исполнения и одинаковую цену исполнения в 75 долларов должен выполняться пут-колл паритет:

$$C - P = S_0 - \frac{X}{(1 + r_f)^T} = 80 - \frac{75}{1,03} = 7,18$$

То есть по паритету колл должен стоить дороже пута на 7,18 долларов, а в реальности колл дороже пута всего на 6,5 доллара. Поскольку пут-колл паритет не выполнен, у нас есть возможность для создания безрискового прибыльного портфеля

*Но что же будет в этом портфеле?*

# Семинар 16, задание 5: решение

Структура безрискового прибыльного портфеля выглядит так:

Инструмент / операция	Текущие потоки	Будущие потоки при цене акции ниже страйка	Будущие потоки при цене акции выше страйка
Покупка «колл»	$-C$	0	$S_T - 75$
Выписывание «пута»	$+C - 6,5$	$S_T - 75$	0
«Короткая» продажа базового актива	+80	$-S_T$	$-S_T$
Предоставление займа на приведенную стоимость страйка	$-72,82$	+75	+75
<b>Строка сумм</b>	<b>+0,68</b>	<b>0</b>	<b>0</b>



# Семинар 16, задание М2: условие (начало)

Управляющий зарубежным инвестиционным фондом «Emerging Kremlin» в соответствии с рекомендациями аналитиков собирается в ближайшее время предпринять действия по ограничению рисков, связанных с дальнейшим ослаблением российского фондового рынка. Портфель российских акций очень близок по структуре к индексу РТС, что позволяет в целях хеджирования применять опционы на этот индекс. Принимая решение о наилучшей стратегии хеджирования, управляющий фондом руководствуется существующей инвестиционной декларацией, которая вводит следующие ограничения на операции с производными инструментами:

1. Запрещено совершать сделки с опционами, имеющими ненулевую внутреннюю стоимость, так как в этом случае премия опциона содержит лишнюю стоимостную компоненту.
2. Для хеджирования доступны три стратегии:  
Стратегия 1 – покупка опциона со страйком, ближайшим к текущей стоимости базового актива  
Стратегия 2 – покупка опциона со страйком, ближайшим к текущей стоимости базового актива, и одновременная продажа опциона со следующим доступным страйком  
Стратегия 3 – покупка опциона со следующим доступным страйком (относительно страйка из Стратегии 1).
3. Если стоимость стратегии 1 не превосходит доход по соответствующему облигационному портфелю, то реализуется данная стратегия и другие стратегии не рассматриваются. В противном случае реализуется одна из двух оставшихся стратегий (Стратегия 2 или Стратегия 3), при этом выбирается та стратегия, которая дает максимальную отдачу (с учетом издержек) в случае реализации прогноза.

# Семинар 16, задание М2: условие (окончание)

Перед тем как сформулировать окончательное решение о стратегии хеджирования управляющий собирает следующие данные:

Доходность портфеля российских облигаций, %	22,50	Текущая годовая волатильность индекса РТС, %				54,38
Доходность портфеля еврооблигаций, %	5,20	Значение индекса РТС на 22 декабря 2014 г., пункты				797,63
Безрисковая ставка (рубли), %	17,00	Срок действия опционов, дни				91
Безрисковая ставка (доллары), %	0,2750	Прогноз значения индекса РТС на март 2015 г.				758,40
Цена страйк, пункты РТС		750	775	800	825	850
Стоимость опциона CALL	% от текущей	13,76%	*	10,70%	*	8,20%
Стоимость опциона PUT	стоимости актива	7,73%	*	10,93%	*	14,69%

Постройте график прибылей и убытков для выбранной управляющим инвестиционным фондом стратегии хеджирования. Цены опционов, отраженные в таблице (\*), Вы можете (при необходимости) рассчитать с применением любой известной модели ценообразования опционов

# Семинар 16, задание М2: решение (начало)

Для начала сформулируем основные идеи, которые помогут нам решить задачу:

- Индекс РТС считается на долларовой основе (расчет Индекса ММВБ осуществляется на основе цен акций, выраженных в рублях Российской Федерации, а расчет Индекса РТС - на основе цен акций, выраженных в долларах США), поэтому в этой задаче нужно использовать долларовые параметры
- Мы ожидаем снижения цены базового актива (падения рынка) до 758,4 пунктов, поэтому нас интересуют либо опционы пут, которые дадут нам возможность спустя время продать базовый актив по выгодной цене (более 758,4), либо опционы колл, которые дадут возможность купить базовый актив по выгодной цене (менее 758,4)
- Согласно первому пункту инвестиционной декларации, мы не можем использовать опционы при деньгах, так как они имеют ненулевую внутреннюю стоимость, то есть под запрет попадают все опционы пут со страйками более 797,63 пунктов, а также опционы колл со страйками менее 797,63

С учетом двух сформулированных ограничений мы не можем рассматривать многие из доступных опционов (выделены красной заливкой), и все наши стратегии должны быть основаны на двух оставшихся опционах (выделены зеленой заливкой):

Цена страйк, пункты РТС		750	775	800	825	850
Стоимость опциона CALL	% от текущей стоимости актива	13,76%	*	10,70%	*	8,20%
Стоимость опциона PUT		7,73%	*	10,93%	*	14,69%

## Семинар 16, задание М2: решение (продолжение)

- Ближайшим страйком к текущей цене опциона является 775 пунктов, именно опцион пут с этим страйком мы будем использовать в стратегиях 1 и 2
- Следующим доступным страйком является 750 пунктов, этот опцион пут будет участвовать в стратегиях 2 и 3
- Нам придется оценить по модели Блэка-Шоулза стоимость опциона пут со страйком 775 пунктов, потому что он участвует в двух стратегиях, а стоимость его неизвестна.

Находим стоимость по модели Блэка-Шоулза:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + T \cdot (r_f + 0,5 \cdot \sigma^2)}{\sigma \cdot \sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \cdot \sqrt{T}$$

$$P = X \cdot e^{-r_f \cdot T} \cdot (1 - N(d_2)) - S_0 \cdot (1 - N(d_1))$$

Стоимость опциона пут со страйком 775 составляет 73,92 пункта

Стоимость опциона пут со страйком 750 можно тоже перевести в пункты, это будет 61,66 пунктов (=0,0773\*797,63)

<i>T</i>	0,25
<i>S0</i>	797,63
<i>X</i>	775
<i>rf</i> (непрерывная, находится как $\ln(1+rf)$ )	0,0027
<i>sigma</i>	0,5438
d1	0,2443
d2	-0,0276
N(d1)	0,5965
N(d2)	0,4890
<b>P</b>	<b>73,92</b>

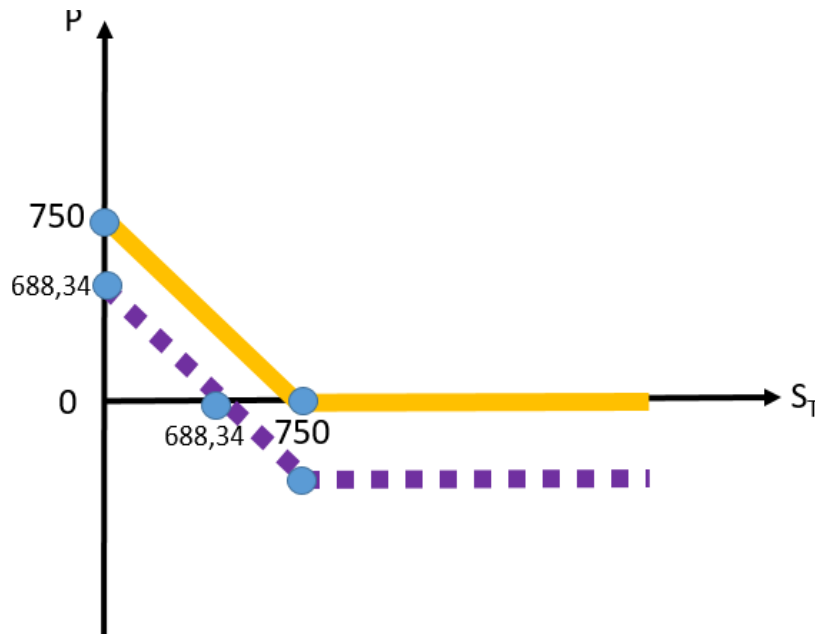
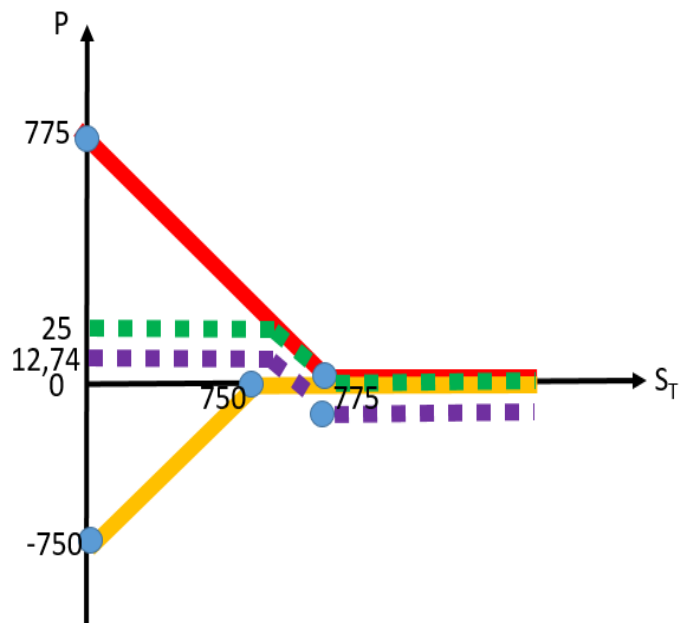
# Семинар 16, задание М2: решение (окончание)

Стратегию 1 мы не принимаем, потому что доход по облигационному портфелю (еврооблигации) ниже стоимости этой стратегии

Стоимость стратегии 2 находится следующим образом  $= +61,66 - 73,92 = -12,26$

Стоимость стратегии 3 составляет  $= -61,66$

Среди стратегий 2 и 3 выбираем стратегию 2, поскольку ожидаемая прибыль по ней в случае реализации прогноза (то есть при значении индекса в 758,4) будет выше. Для иллюстрации – графики прибыли (лиловые линии)



На самом деле, в неудовлетворительности Стратегии 3 можно убедиться и без графических иллюстраций. Мы ведь знаем, что по прогнозу цена базового актива составит 758,4 пунктов. Значит, нет смысла приобретать опцион, который дает нам право продать базовый актив за 750 пунктов (пут  $X=750$ ) – мы все равно его не будем реализовывать

## Семинар 16, задание ЕВз: условие

Есть акция, текущая рыночная цена которой равна 100 рублей. Через год цена этой акции может оказаться либо 103 рубля, либо 98 рублей. Оцените методом дублирующего портфеля стоимость европейского опциона колл на данную акцию, если цена страйк равна 94 рубля, опцион исполняется через год, а безрисковая ставка составляет 10%.

## Семинар 16, задание ЕВз: решение

Дельта (коэффициент хеджирования) для такого опциона колл находится по формуле:

$$\Delta = \frac{C_{high} - C_{low}}{S_1^{high} - S_1^{low}} = \frac{9 - 4}{103 - 98} = 1$$

Оценка опциона методом дублирующего портфеля делается следующим образом:

Дельта = 1	S0=100 (сейчас)	S1=103 (через год в случае роста)	S1=98 (через года в случае снижения)
Покупка / продажа дельты акций	-100	+103	+98
Получение / возврат кредита под залог дельты акций	94/1,1 = 85,45	-94	-94
Итог по портфелю	<b>-14,55</b>	+9	+4

Опцион «колл» должен сейчас стоить **14,55 руб.**

## Семинар 16, задание ЕСз: условие

Известно, что на срочном рынке сложилась такая ситуация, когда годовой опцион пут стоит дешевле на один рубль, чем должен согласно пут-колл паритету. Верно или нет следующее утверждение: «В этом случае можно сформировать арбитражный портфель, который состоит из покупки опциона колл, продажи опциона пут, продажи вкраткую базового актива, займа в размере текущей стоимости страйка, получаемого через год».



## Семинар 16, задание ЕСЗ: решение

Это задание очень похоже на задание 3 из этого же семинара, вот только там опцион пут стоил дороже, чем по пут-колл паритету, а здесь пут стоит дешевле, чем по пут-колл паритету. Значит, все шаги построения арбитражного портфеля в этой задаче будут «зеркальным отражением» шагов из задания 3:

Инструмент / операция	Текущие потоки	Будущие потоки при цене акции ниже страйка	Будущие потоки при цене акции выше страйка
Выписывание «колла»	$+C$	0	$X-ST$
Покупка «пута»	$-P$	$X-ST$	0
Покупка базового актива	$-S_0$	$+ST$	$+ST$
Получение займа на приведенную стоимость страйка	$+X/(1+rf)$	$-X$	$-X$
<b>Строка сумм</b>	<b><math>+1</math></b>	<b>0</b>	<b>0</b>

Сразу видно, что получившийся портфель не соответствует утверждению из условия, которое мы проверяли – следовательно, оно неверное

# Последний слайд (на этот раз действительно последний)

Друзья, большое всем спасибо:

- за активную работу в этом триместре
- за прекрасно (в целом) написанные контрольные
- за вовремя (в большинстве случаев) сданные домашние работы
- за проявленный интерес к курсу в виде круглосуточного потока сообщений с вопросами про кредиты, NPV и дюрацию

***До встречи в 2018 году на экзамене 14 января!***  
***Не забудьте про последнее д/з, которое нужно сдать до 10 января на портале.***  
***Всех с наступающими праздниками!***

