

Курсовая работа

**Исследование движения заряда вокруг неподвижного  
центра**

Автор работы:

студент группы 218

Шевченко Даниил Александрович

Руководитель:

к.ф.-м.н.

Дергачев Александр Александрович

# Содержание

1. Введение	3
2. Математическая модель	3
3. Исследование модели численным методом	4
4. Исследование динамики частицы	7
5. Итоги работы и выводы	8

# 1. Введение

В данной работе анализируется движение заряженной частицы вокруг неподвижного заряженного центра, обладающего дипольным моментом. Для исследования разработана программа на языке C++ с использованием графического фреймворка Qt [1], которая решает задачу Коши численным методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности. Для визуализации расчетов в реальном времени используется библиотека QtDataVisualization.

## 2. Математическая модель

### 2.1. Движение заряда в электрическом поле

В данной задаче моделируется динамика заряженной частицы в потенциальном поле, которое является суперпозицией полей точечного заряда и диполя, находящихся в одной точке. Влияние гравитационных взаимодействий не учитывается. Суммарную напряженность поля можно записать в виде:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_p + \mathbf{E}_q, \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{E}_p$  – напряженность поля диполя,  $\mathbf{E}_q$  – напряженность поля заряда. Поле определяется следующим образом:

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\phi, \quad (2.2)$$

где  $\phi$  – потенциал поля. Потенциалы полей заряда и диполя определяются выражениями [2]:

$$\phi_q(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}; \quad (2.3)$$

$$\phi_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}, \quad (2.4)$$

где  $Q$  – заряд источника поля,  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор точки, в которой считается потенциал,  $\mathbf{p}$  – дипольный момент.

Подставив 2.3 и 2.4 в 2.2, найдем напряженности  $\mathbf{E}_q$   $\mathbf{E}_p$ , которые подставляем в 2.1 и получаем выражение для суммарной напряженности поля:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3(\mathbf{p}\mathbf{r}) + Qr^2}{r^5} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right] \quad (2.5)$$

Сила, действующая на заряд  $q$  в поле  $\mathbf{E}$  равна:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \quad (2.6)$$

По второму закону Ньютона:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (2.7)$$

Подставим 2.6 и 2.5 в 2.7, запишем  $\mathbf{a}$  как  $\ddot{\mathbf{r}}$  и введем удельный заряд  $\gamma = \frac{q}{m}$ . Тогда получим

дифференциальное уравнение относительно  $\mathbf{r}$ :

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{\gamma}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3(\mathbf{p}\mathbf{r}) + Qr^2}{r^5} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right] \quad (2.8)$$

## 2.2. Построение задачи Коши

Выше мы получили дифференциальное уравнение второго порядка, которое описывает поведение нашей системы. Для реализации численного решения преобразуем это уравнение в систему дифференциальных уравнений первого порядка. Дополнив систему начальными условиями, получим задачу Коши:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = \frac{\gamma}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3(\mathbf{p}\mathbf{r}) + Qr^2}{r^5} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right] \\ \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{u} \\ \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \end{cases} \quad (2.9)$$

## 3. Исследование модели численным методом

### 3.1. Метод Рунге-Кутты четвертого порядка

Нам нужно решить задачу Коши, которая в общем виде выглядит так:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

где  $\mathbf{y}, \mathbf{f} \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$ . У нашей задачи нет ограничения по интервалу времени, поэтому шаг по временной сетке будем выбирать из следующих соображений:  $|\mathbf{y}_{i+1} - \mathbf{y}_i| \leq \epsilon$ , где  $\epsilon$  подбирается в соответствии со значениями в конкретной задаче. Пусть шаг по временной сетке равен  $\tau$ , тогда приближенное значение решения задачи в следующих узлах сетки вычисляется по итерационной формуле:

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + \frac{\tau}{6} (\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4), \quad (3.2)$$

где  $\mathbf{k}_j, j = \overline{1, 4}$  вычисляется следующим образом:

$$\begin{cases} \mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(t_i, \mathbf{y}_i) \\ \mathbf{k}_2 = \mathbf{f}(t_i + \tau/2, \mathbf{y}_i + \tau\mathbf{k}_1/2) \\ \mathbf{k}_3 = \mathbf{f}(t_i + \tau/2, \mathbf{y}_i + \tau\mathbf{k}_2/2) \\ \mathbf{k}_4 = \mathbf{f}(t_i + \tau, \mathbf{y}_i + \tau\mathbf{k}_3) \end{cases} \quad (3.3)$$

Данный метод имеет четвертый порядок точности, то есть суммарная ошибка имеет порядок  $O(\tau^4)$ .

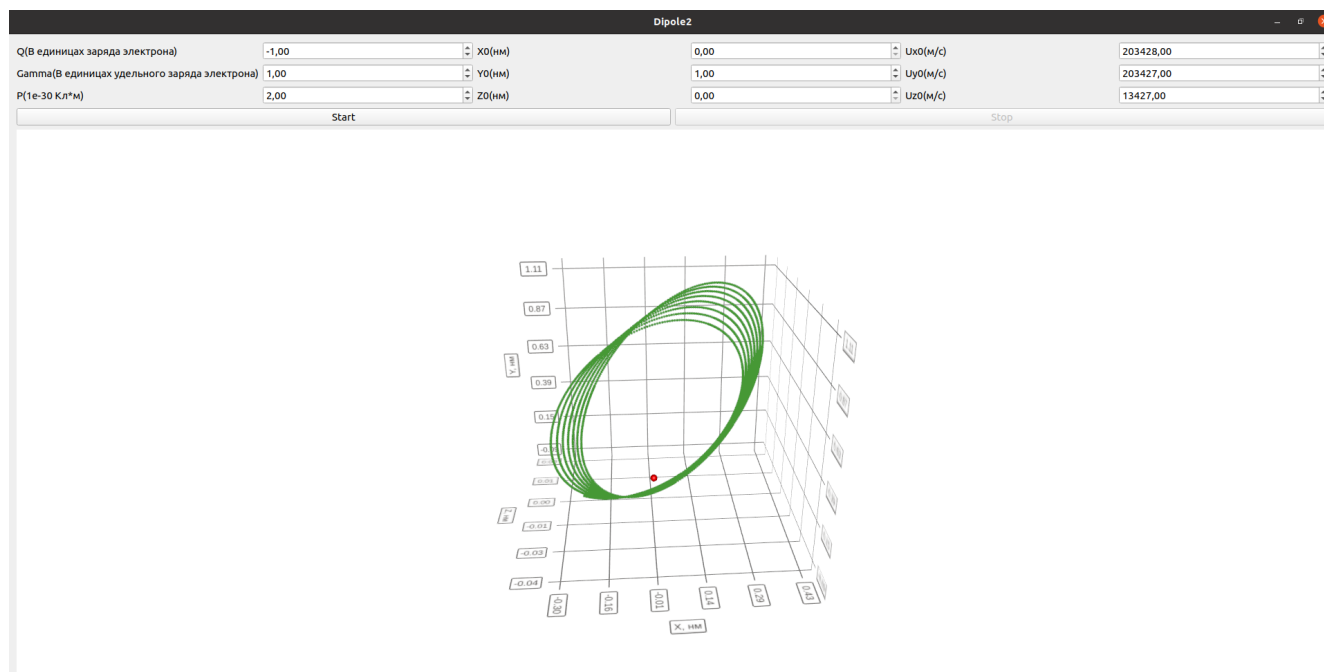


Рис. 3.1. Интерфейс разработанной программы

### 3.2. Описание работы программы

Программа разработана на языке C++ с использованием графического фреймворка Qt. Для визуализации численных расчетов в реальном времени использовалась библиотека QtDataVisualization.

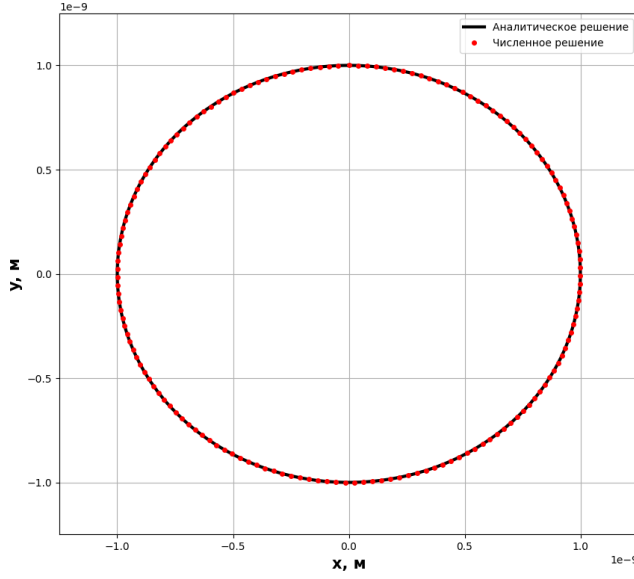
При запуске программы перед пользователем появляется окно с 2 областями (Рис. 3.1). Верхняя часть – область ввода параметров, которые будут использоваться при выполнении расчетов. В нижней области строится траектория заряженной частицы. График интерактивный, то есть пользователь может взаимодействовать с ним: приблизить, отдалить и узнать координату определенной точки. После остановки расчетов программа предлагает сохранить файл с результатами вычислений.

### 3.3. Верификация работы программы

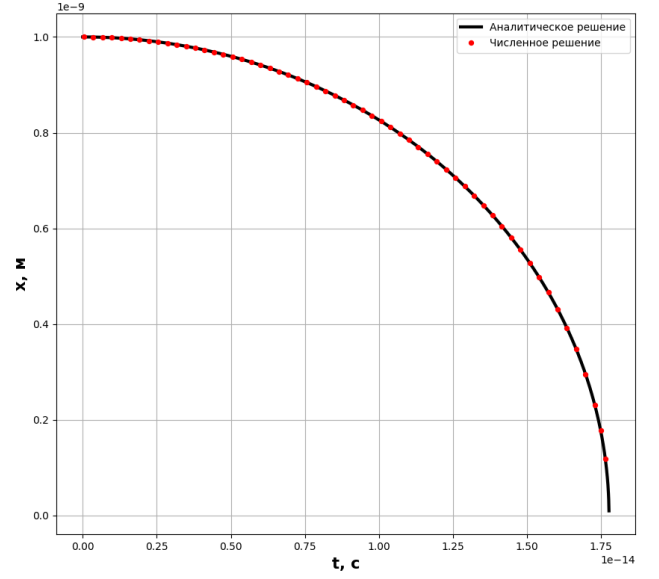
Для проверки правильности работы программы нужно провести численные расчеты при таких параметрах, при которых существуют аналитические решения этой задачи. Мы рассмотрим два подобных случая: первый –  $p = 0$ , второй –  $Q = 0$ . В первом случае на частицу будет влиять только поле точечного заряда, тогда 2.9 запишется в виде:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = \frac{\gamma Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r} \\ \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{u} \\ \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Если  $r_0 = 1$  нм,  $u_0 = 503428$  м/с (первая космическая скорость),  $\gamma = -1.76 \cdot 10^{11}$  Кл/кг,  $Q = 1.6 \cdot 10^{-19}$  Кл, то частица будет двигаться по окружности, центр которой совпадает с



(а) случай  $p = 0$



(б) случай  $Q = 0$

Рис. 3.2. Сравнение аналитического и численного решений выделенных случаев

положением неподвижного заряда.

Во втором случае на частицу действует только поле диполя. Для упрощения аналитического решения будем рассматривать одномерный случай движения вдоль оси ОХ, причем дипольный момент ориентирован вдоль положительного направления ОХ. Тогда 2.9 примет вид:

$$\begin{cases} \dot{u}_x = \frac{2p\gamma}{4\pi\epsilon_0 x^3} \\ \dot{x} = u_x \\ x(0) = x_0, u_x(0) = u_{x0} \end{cases} \quad (3.5)$$

Будем решать эту задачу Коши при начальных условиях  $x(0) = x_0, u_x(0) = 0$ . Воспользовавшись системой компьютерной алгебры Wolfram Mathematica, нашли решение 3.5. Для координаты  $x$  оно выглядит следующим образом:

$$x = \sqrt{\frac{2pk\gamma t^2 + x_0^4}{x_0^2}}, \quad (3.6)$$

где  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ . Проводить вычисления будем при следующих значениях параметров:

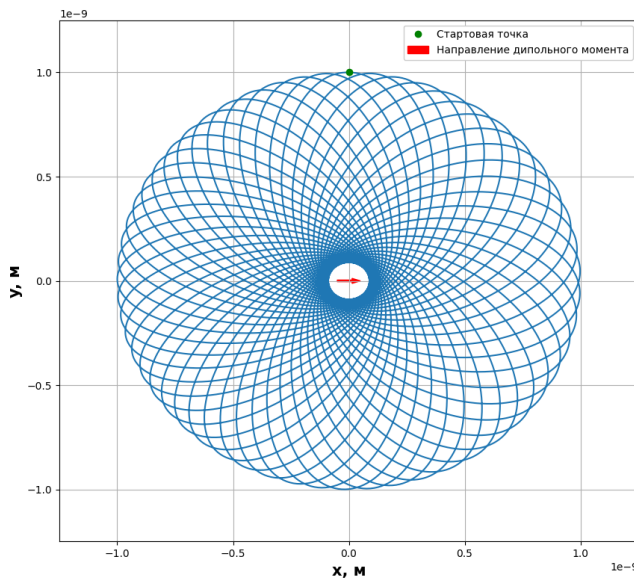
$p = 10^{-30}$  Кл·м,  $\gamma = -1.76 \cdot 10^{11}$  Кл/кг,  $x_0 = 10^{-9}$  м. Значение параметра  $p$  выбиралось в соответствии со значением дипольного момента для молекулы воды ( $p_{H_2O} = 3.3 \cdot 10^{-30}$  Кл·м).

На Рис. 3.2 видно, что оба численных решения идентичны аналитическим, что говорит о корректной работе разработанной программы.

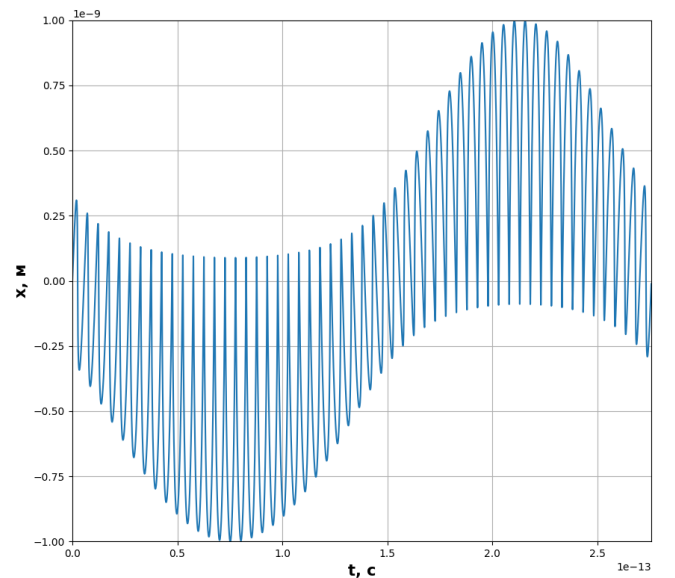
## 4. Исследование динамики частицы

### 4.1. Движение в плоскости

Теперь будем рассматривать движение частицы в суммарном поле и заряда, и диполя. Исследование будем проводить при следующих параметрах:  $p = 4 \cdot 10^{-30}$  Кл·м,  $\gamma = -1.76 \cdot 10^{11}$  Кл/кг,  $Q = 1.6 \cdot 10^{-19}$  Кл,  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 10^{-9}$  м,  $z_0 = 0$ ,  $U_{x0} = 203428$  м/с,  $U_{y0} = 0$  м/с,  $U_{z0} = 0$  м/с. При таких параметрах движение будет происходить в плоскости ХоУ, а траектория будет почти замкнутой (Рис. 4.1 (а)). Она представляет собой эллипс, который поворачивается со временем. Используя данные, полученные в результате работы программы, можно посчитать скорость поворота эллипса. Для этого построим зависимость координаты  $x$  частицы от времени  $t$  (Рис 4.1 (б)). Минимум и максимум огибающей соответствуют повороту траектории на угол  $\pi/2$  и  $3\pi/2$  соответственно. Поворотам на углы  $\pi/2$ ,  $3\pi/2$  и  $2\pi$  соответствуют моменты времени  $t_1 = 7.52101 \cdot 10^{-14}$  с,  $t_2 = 2.15661 \cdot 10^{-13}$  с,  $t_3 = 2.75745 \cdot 10^{-13}$  с. Если теперь посчитать значения угловых скоростей, то получим:  $\omega_1 = 2.09 \cdot 10^{13}$  рад/с,  $\omega_2 = 2.19 \cdot 10^{13}$  рад/с,  $\omega_3 = 2.28 \cdot 10^{13}$  рад/с. Можно предположить, что имеет место угловое ускорение, то есть скорость поворота траектории растет. Однако, если провести расчеты угловых скоростей после первого оборота, то получим следующие значения:  $\omega'_1 = 2.09 \cdot 10^{13}$  рад/с,  $\omega'_2 = 2.19 \cdot 10^{13}$  рад/с,  $\omega'_3 = 2.28 \cdot 10^{13}$  рад/с. Видим, что значения не понялись (с точностью до первых двух знаков после запятой). Тогда можно сделать вывод, что углового ускорения нет, а изменение угловой скорости происходит из-за различия знаков заряда диполя на его концах.

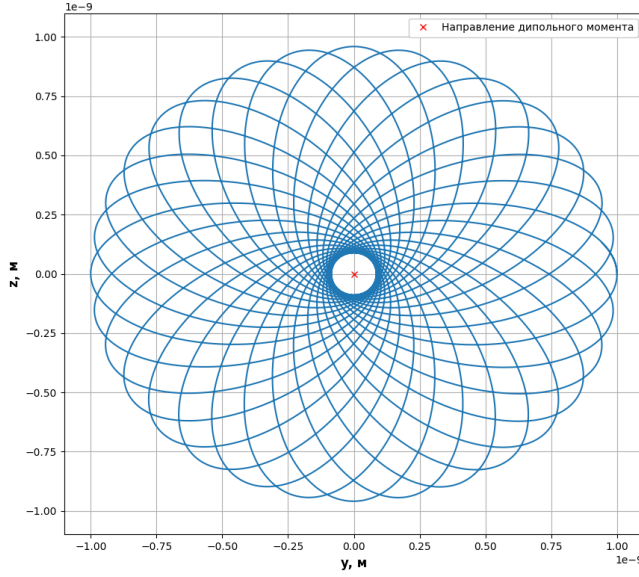


(а) траектория частицы

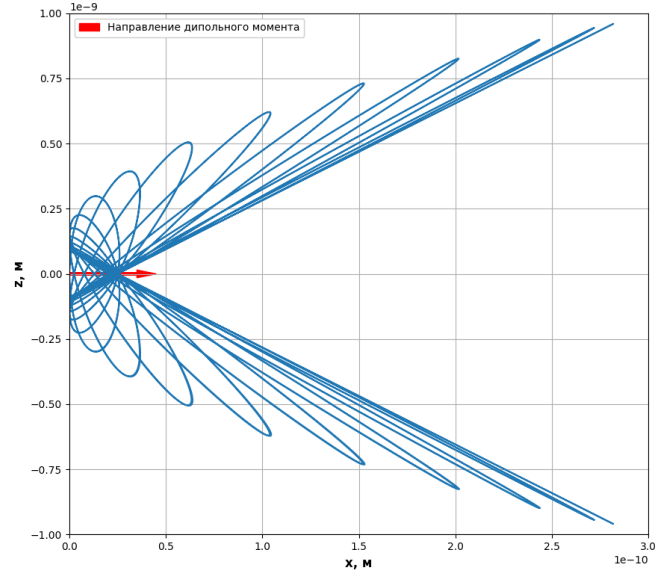


(б) зависимость координаты  $x$  от времени

Рис. 4.1. Движение частицы в суммарном поле диполя и заряда



(а) проекция на YoZ



(б) проекция на XoZ

Рис. 4.2. Проекция траектории движения частицы в пространстве

## 4.2. Движение в пространстве

Теперь рассмотрим динамику частицы в пространстве. Для этого немного изменим начальные условия:  $U_{x0} = 0$  м/с,  $U_{z0} = 203428$  м/с, остальные параметры остаются без изменений. Проекция траектории движения показаны на рисунке 4.2. Теперь эллипс вращается в плоскости YoZ и наклоняется относительно этой плоскости на некоторый максимальный угол  $\alpha$ . Найдем этот угол. Для  $\alpha$  справедливо соотношение:

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{z_a - z_p}{x_a}, \quad (4.1)$$

где  $z_a, z_p, x_a$  – координаты афелия и перигелия соответственно наклоненного эллипса. Тогда выражение для  $\alpha$  примет вид:

$$\alpha = \text{arccctg}\left(\frac{z_a - z_p}{x_a}\right) \quad (4.2)$$

Используя данные численного решения, получим значение для угла  $\alpha = 15.05^\circ$

## 5. Итоги работы и выводы

В ходе выполнения данной задачи была разработана математическая модель динамики частицы в поле электрического заряда и диполя. Также была разработана программа, производящая расчеты данной модели методом Рунге-Кутты четвертого порядка и визуализирующая в реальном времени результаты вычислений. Корректность работы программы была верифицирована на двух случаях, для которых существуют аналитические решения. Вычисления обоими способами сошлись, что говорит о верной реализации модели и числен-



ного метода. Было исследовано движение частицы в суммарном поле диполя и неподвижного заряда, определена роль различных параметров системы в формировании траектории движения частицы.

Таким образом, было установлено, что эллиптическая траектория частицы при наличии дипольного момента вращается. Была найдена средняя угловая скорость за один оборот:  $\omega = 2.28 \cdot 10^{13}$  рад/с. Также было обнаружено, что скорость вращения немного изменяется в зависимости от положения частицы относительно диполя. При движении частицы в пространстве ее эллиптическая траектория не только вращается, но и отклоняется от плоскости вращения на некоторый угол  $\alpha$ . Для параметров, приведенных выше значение этого угла составляет  $\alpha = 15.05^\circ$ .

## Список литературы

1. Qt / Cross-platform software development for embedded and desktop. URL: <https://www.qt.io/>
2. А.Н.Матвеев. *Электричество и магнетизм*. Мир и образование, 2005. ISBN:5-94666-205-8