МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Отчет по практическому заданию №1

Основы математического моделирования

Решение квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка с использованием схемы бегущего счета и итерационных методов

Автор работы:
студент группы 325
Шевченко Даниил Александрович

Москва – 2023

Содержание

1 Постановка задачи

Используя схему бегущего счета и итерационные методы, решить задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{2+\cos u}{1+(2u+1+\sin u)^2}\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, -1 \le x < 0 \\ u(x,0) = \cos\dfrac{\pi x}{2} \\ u(0,t) = 1 + \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} t \end{cases} \tag{1}$$

2 Аналитическое решение задачи

Для получения аналитического решения данного уравнения будем использовать метод характеристик. Пусть $\exists V(x,t,u) = 0$– решение уравнения в неявном виде, где V – дифференцируемая функция своих переменных, причем $\frac{\partial V}{\partial u} \neq 0$. Тогда верно, что

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial V/\partial t}{\partial V/\partial u}, \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial V/\partial x}{\partial V/\partial u},$$

В результате чего квазилинейное уравнение вида

$$a(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial t} + b(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,t,u)$$

можно записать в виде линейного однородного уравнения в частных производных для функции $V(x,t,u)$:

$$a(x,t,u)\frac{\partial V}{\partial t} + b(x,t,u)\frac{\partial V}{\partial x} + f(x,t,u)\frac{\partial V}{\partial u} = 0.$$

Введем характеристики как линии в пространстве (x,t,u), касательные к которым в каждой точке параллельны вектору $\mathbf{A}(x,t,u) = \{a(x,t,u), b(x,t,u), f(x,t,u)\}$ в той же точке:

$$\begin{cases} t = t(\tau) \\ x = x(\tau) \\ u = u(\tau) \end{cases} => \begin{cases} \frac{dt}{d\tau} = a \\ \frac{dx}{d\tau} = b \\ \frac{du}{d\tau} = f \end{cases}$$

Тогда можно записать характеристическое уравнение в общем виде: $\frac{dt}{a} = \frac{dx}{b} = \frac{du}{f}$.
В нашем случае $a(x,t,u) = 1, b(x,t,u) = -\frac{2+\cos u}{1+(2u+1+\sin u)^2}, f(x,t,u) = 0$, поэтому характеристическое уравнение принимает вид:

$$\frac{dt}{1} = -\frac{1+(2u+1+\sin u)^2}{2+\cos u}dx = \frac{du}{0}$$

Решая его, получим первые интегралы:

$$\begin{cases} u = C_1 \\ t + \frac{1+(2u+1+\sin u)^2}{2+\cos u}x = C_2 \end{cases}$$

где C_1, C_2 – произвольные константы. Общее решение можно записать в виде: $V(x,t,u) = V(C_1,C_2) = 0$.
Заметим, что начальные и граничные условия согласуются: $u(x,0)|_{x=0} = u(0,t)|_{t=0} = 1$.

Подставим начальные условия:

$$\begin{cases} u(x,0) = \cos\frac{\pi x}{2} = C_1 \\ \frac{1+(2u+1+\sin u)^2}{2+\cos u}\left(-\frac{2}{\pi}\arccos C_1\right) = C_2 \end{cases}$$

Минус перед $\frac{2}{\pi}\arccos C_1$ стоит потому, что $-1 \le x < 0$. По той же причине можно сказать, что $C_1 = \cos\frac{\pi x}{2} = u \in [-1, 0)$. Тогда получаем:

$$-\frac{1+(2u+1+\sin u)^2}{2+\cos u}\frac{2}{\pi}\arccos u = t + \frac{1+(2u+1+\sin u)^2}{2+\cos u}x =>$$

$$t+\frac{1+(2u+1+\sin u)^2}{2+\cos u}\left(x+\frac{2}{\pi}\arccos u\right)=0, u\in[0,1)$$

Теперь подставим граничные условия:

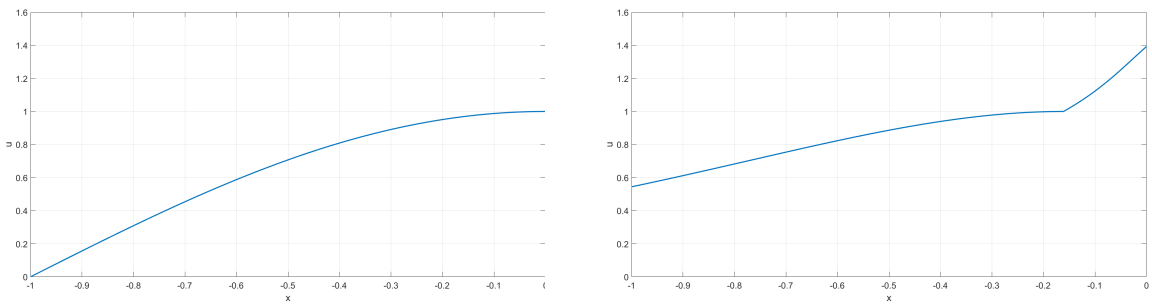
$$\begin{cases} u(0,t)=1+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} t=C_1 \\ t=C_2 \end{cases}$$

Так как $t\geq 0$, то $\operatorname{arctg} t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, т.е. здесь $C_1=u\geq 1$. Отсюда имеем, что $C_1=1+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} C_2$, и учитывая, что $u=C_1$, получим:

$$u=1+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(t+\frac{1+(2u+1+\sin u)^2}{2+\cos u}x\right)$$

Таким образом получаем решение исходной начально-краевой задачи для квазилинейного уравнения переноса в виде неявной функции:

$$\begin{cases} t+\frac{1+(2u+1+\sin u)^2}{2+\cos u}\left(x+\frac{2}{\pi}\arccos u\right)=0, u\in[0,1) \\ u-1-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(t+\frac{1+(2u+1+\sin u)^2}{2+\cos u}x\right)=0, u\geq 1 \end{cases}$$



(а) При $t=0$ (б) При $t=1$

Рис. 1: Аналитическое решение задачи

3 Построение характеристик

Чтобы определить существует разрыв решения или нет, составим уравнение характеристик, решим его и построим. Если пересечения характеристик на промежутке рассмотрения не будет, то не будет и разрыва решения. Вернемся к уравнению характеристик:

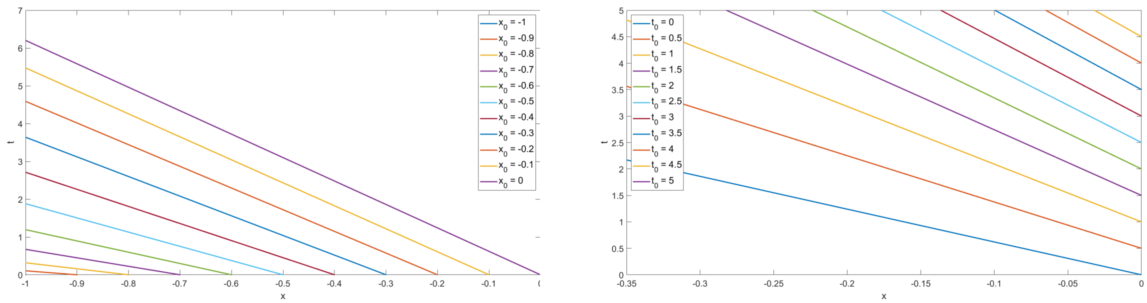
$$\frac{dt}{1}=-\frac{1+(2u+1+\sin u)^2}{2+\cos u}dx=\frac{du}{0}$$

Решая уравнение, получаем:

$$\begin{cases} u=u_0 \\ \int\limits_{t_0}^{t} d\tilde{t}=\int\limits_{x_0}^{x}-\frac{1+(2u+1+\sin u)^2}{2+\cos u}d\tilde{x} \end{cases} \quad =>$$

$$\begin{cases} u=u_0 \\ t-t_0=-\frac{1+(2u+1+\sin u)^2}{2+\cos u}(x-x_0) \end{cases}$$

Точку (x_0,t_0,u_0) выбираем или на луче $x=0$, или на луче $t=0$, т.е. там, где решение известно из начальных или граничных условий. Нужно понять, какой из этих лучей пересекает проекция соответствующей характеристики на плоскость (x,t), соответствующая точке, и какими из дополнительных условий(начальными или граничными) определяется значение $u(x,t)$ в этой точке.



(а) При $t_0 = 0$

(б) При $x_0 = 0$

Рис. 2: Проекции характеристик на плоскость (x, t)

1. Пусть $t_0 = 0, -1 \leq x_0 < 0$. Тогда $u_0 = \cos\frac{\pi x_0}{2}$, и получаем уравнение проекций характеристик на плоскость (x, t):

$$t = -\frac{1 + (2u_0 + 1 + \sin u_0)^2}{2 + \cos u_0}(x - x_0)$$

2. Пусть $x_0 = 0, t_0 \geq 0$. Тогда $u_0 = 1 + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t_0$, и получаем уравнение проекций характеристик на плоскость (x, t):

$$x = -\frac{2 + \cos u_0}{1 + (2u_0 + 1 + \sin u_0)^2}(t - t_0)$$

Как видно из построенных графиков, характеристики не пересекаются в области $x \in [-1, 0), t \in (0, \infty)$, значит, в этой области решение определено однозначно. При $t_0 = 0$ решение определяется начальным условием, при $x_0 = 0$ – граничным. Тогда можем выбрать $t = 5$ в качестве верхней границы временного отрезка, будем решать задачу в этой области.

4 Численное решение

Заметим, что граничные условия заданы на правой границе. Для реализации разностной схемы требуется сделать такую замену, что граничные условия были бы заданы на левой границе. Сделаем замену $\xi = -x$. Тогда $\frac{\partial}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial \xi}$ и $u(x) = u(-\xi) = \tilde{u}(\xi)$. Тогда задача 1 запишется в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \dfrac{2 + \cos\tilde{u}}{1 + (2\tilde{u} + 1 + \sin\tilde{u})^2}\dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} = 0, 0 \leq \xi < 1 \\ \tilde{u}(\xi, 0) = \cos\dfrac{\pi\xi}{2} \\ \tilde{u}(0, t) = 1 + \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} t \end{cases} \tag{2}$$

Теперь у нашей задачи граничные условия заданы на левой границе, и мы можем применить разностную схему для ее решения.

Введем в области рассмотрения $\Omega = \{(\xi, t) : 0 < \xi \leq 1, 0 \leq t \leq 5\}$ равномерную сетку, на которой будем строить разностную схему:

$$\omega_{h\tau} = \left\{\xi = nh, n = 0, ..., N, h = \frac{1}{N}, t_m = m\tau, m = 0, ..., M\right\},$$

где N – число узлов вдоль оси ξ, M – число узлов вдоль оси t, h – шаг по ξ, τ – шаг по времени. На сетке $\omega_{h\tau}$ будем рассматривать сеточную функцию $\tilde{u}_n^m = \tilde{u}(\xi_n, t_m)$. Перепишем уравнение в 2, выделив производную сложной функции:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \frac{2 + \cos\tilde{u}}{1 + (2\tilde{u} + 1 + \sin\tilde{u})^2}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \frac{\partial \operatorname{arctg}(2\tilde{u} + 1 + \sin\tilde{u})}{\partial \xi} = 0$$

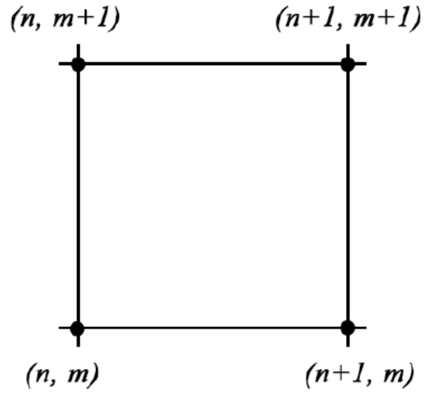


Рис. 3: Четырехточечный шаблон, используемый для аппроксимации

Обозначим $U(\tilde{u}) = \operatorname{arctg}(2\tilde{u}+1+\sin\tilde{u}), U_n^m = U(u_n^m)$ – вспомогательная функция. Для построения разностной схемы (схемы бегущего счета) рассмотрим аппроксимацию с помощью четырехточечного шаблона: Тогда аппроксимация для первого уравнения системы имеет вид:

$$\frac{\tilde{u}_n^{m+1} - \tilde{u}_n^m + \tilde{u}_{n+1}^{m+1} - \tilde{u}_{n+1}^m}{2\tau} + \frac{U_{m+1}^{n+1} - U_{m+1}^n + U_m^{n+1} - U_m^n}{2h} = 0,$$

$$n = 0, ..., N-1, m = 0, ..., M-1$$

Для начального и граничного условий:

$$\begin{cases} \tilde{u}_n^0 = \cos\frac{\pi\xi_n}{2} \\ \tilde{u}_0^m = 1 + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t_m \end{cases}$$

Тогда разностная схема имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\tilde{u}_n^{m+1} - \tilde{u}_n^m + \tilde{u}_{n+1}^{m+1} - \tilde{u}_{n+1}^m}{2\tau} + \frac{U_{m+1}^{n+1} - U_{m+1}^n + U_m^{n+1} - U_m^n}{2h} = 0 \\ U_n^m = \operatorname{arctg} 2\tilde{u}_n^m + 1 + \sin\tilde{u}_n^m \\ \tilde{u}_n^0 = \cos\frac{\pi\xi_n}{2} \\ \tilde{u}_0^m = 1 + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t_m \end{cases}$$

Полученную задачу будем решать при помощи схемы бегущего счета и итерационного метода Ньютона. Зная значение сеточной функции для некоторого t_m, вычислим значение функции для t_{m+1} при n, пробегающем все допустимые значения, и учитывая, что $\tilde{u}_0^{m+1}$ известно из граничного условия. Выпишем уравнение при $n = 0$:

$$f\left(\tilde{u}_1^{m+1}\right) = \frac{\tilde{u}_n^{m+1} - \tilde{u}_n^m + \tilde{u}_{n+1}^{m+1} - \tilde{u}_{n+1}^m}{2\tau} + \frac{U_{m+1}^{n+1} - U_{m+1}^n + U_m^{n+1} - U_m^n}{2h} = 0,$$

$$f'\left(\tilde{u}_1^{m+1}\right) = \frac{1}{2\tau} + \frac{2 + \cos\tilde{u}_1^{m+1}}{1 + \left(2\tilde{u}_2^{m+1} + 1 + \sin\tilde{u}_1^{m+1}\right)^2}\frac{1}{2h}$$

Пусть $\tilde{u}_1^m$ – приближение к корню $\tilde{u}_1^{m+1}$. Тогда, используя метод Ньютона, получим:

$$\tilde{u}_1^{m+1} = \tilde{u}_1^m - \frac{f\left(\tilde{u}_1^m\right)}{f'\left(\tilde{u}_1^m\right)}$$

Процесс останавливается при $|\tilde{u}_1^{m+1} - \tilde{u}_1^m| < \epsilon$, где ϵ – заданная точность.

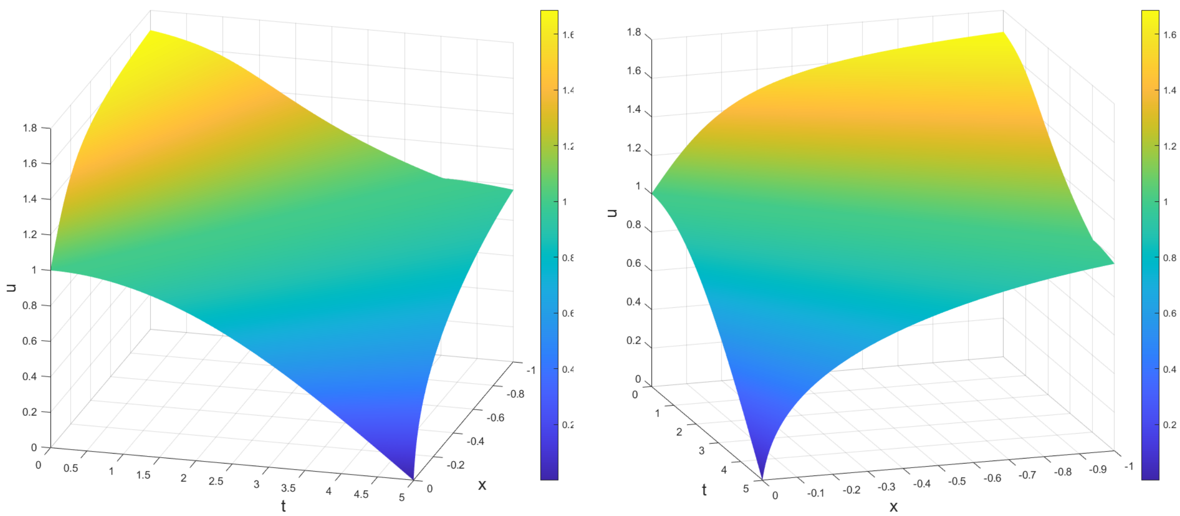
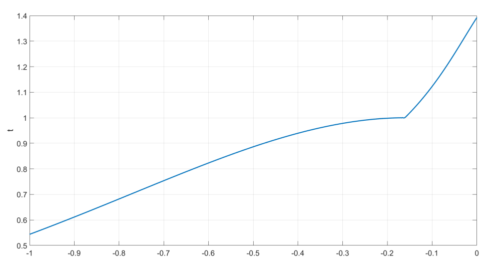


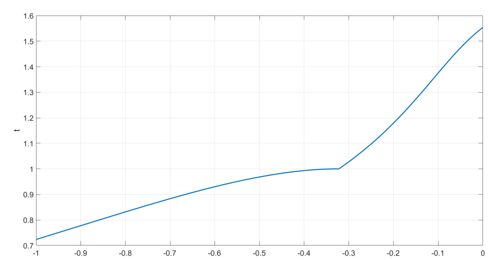
Рис. 4: Численное решение в виде 3D графика(для сетки с $N = M = 1000$)

5 Построение численного решения

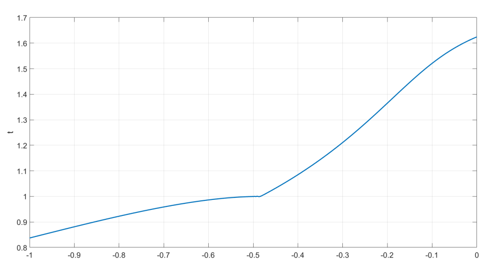
Программа, реализующая решение задачи, написана на языке Matlab в одноименном пакете программ(без использования встроенных функций, способных облегчить решение задачи). На Рис. 4 представлено графическое изображение решения исходной системы, полученное с помощью четырехточечного шаблона. Так же для наглядности на Рис. 5 изображены зависимости $u(x)$ в фиксированные моменты t ($t = 1, t = 2, t = 3, t = 4$).



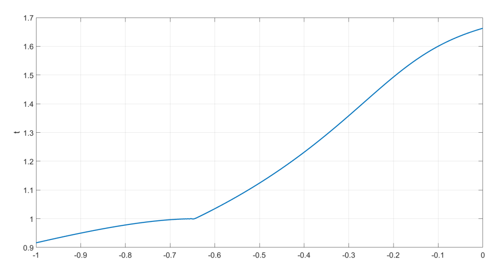
(а) При $t = 1$



(б) При $t = 2$



(в) При $t = 3$

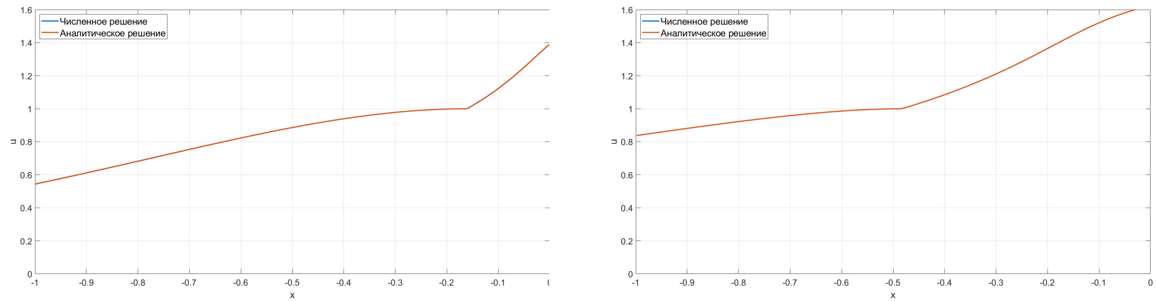


(г) При $t = 4$

Рис. 5: Численное решение в виде 2D графиков

6 Верификация работы программы

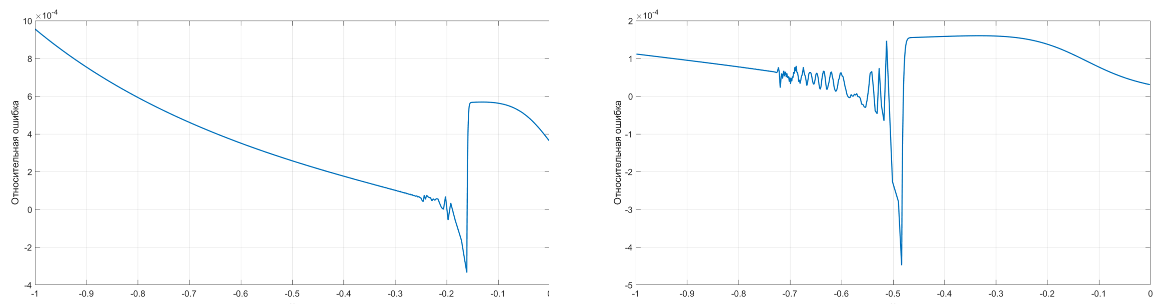
Для того, чтобы убедиться в правильности работы программы, сравним численное решение с аналитическим в фиксированные моменты t. На Рис. 6 представлены графики аналитического и численного решений в моменты времени $t = 1$ и $t = 3$.



(а) При $t = 1$ (б) При $t = 3$

Рис. 6: Сравнение численного и аналитического решений

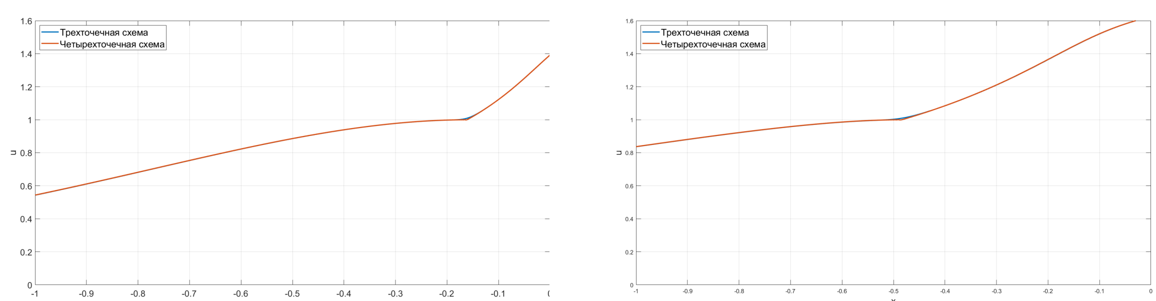
Видим, что ошибка минимальна. Построим относительную ошибку для обоих представленных случаев (Рис. 7). Из графиков видно, что относительная ошибка не превышает 0.1%.



(а) При $t = 1$ (б) При $t = 3$

Рис. 7: Относительная ошибка численного решения по отношению к аналитическому

Еще одним способом проверки корректности работы программы является сравнение численного решения с другим численным решением, но использующим другой шаблон. На Рис. 8 представлены численные решения в моменты времени $t = 1$ и $t = 3$, полученные с помощью четырехточечной и трехточечной схем. Отличия видны лишь в точке излома $u = 1$.



(а) При $t = 1$ (б) При $t = 3$

Рис. 8: Сравнение численных решений, полученных разными схемами

7 Заключение

В настоящей работе было проведено численное решение начально-краевой задачи для квазилинейного уравнения переноса с использованием схемы бегущего счета и итерационных методов.
Перед выполнением численных расчетов было проведено аналитическое решение поставленной задачи и исследование поведения проекций характеристик на плоскость (x, t). Отсутствие их пересечений на области рассмотрения говорит о том, что решение определено однозначно. Для поиска решения в области $-1 \leq x < 0, 0 < t \leq 5$ была введена равномерная сетка с шагом h по x и шагом τ по t. Шаблон используемой схемы бегущего счета представлен на Рис. 3. Для решения трансцендентного уравнения относительно искомого значения сеточной функции на каждом шаге использовался итерационный метод Ньютона.
Программа была написана на языке Matlab в одноименном пакете программ (без использования встроенных функций). Количество точек по осям t и x было выбрано равным 1000 с шагами $\tau = 0.0025$ и $h = 0.001$ соответственно. Полный код программы содержится в Приложении.
Далее была проведена проверка результатов вычислений. Для этого было проведено сравнение численного решения с аналитическим и посчитана относительная ошибка. Полученное решение имеет несущественные отличия (до 0.1%) от аналитического. Также было проведено сравнение двух численных решений, полученных четрехточечным и трехточечным схемами. Отличие этих решений заметно ли в точке излома $u = 1$.

8 Приложение

Программа, реализующая численное решение

```
% задаем двумерную сетку
N_t = 1000;                       % количество точек по времени
N_x = 1000;                       % количество точек по x
epsilon = 0.001;                  % точность для метода Ньютона
h = 1/(N_x - 1);                  % шаг по x
tau = 5/(N_t - 1);                % шаг по времени
x=(-1:h:0);                       % сетка по x
t = 0:tau:5;                      % сетка по времени
ksi = (0:h:1);
% задаем массив для неизвестной функции
u = zeros(N_x, N_t);
u(1, :) = 1 + 0.5*atan(t);          % граничное условие
u(:, 1) = cos(0.5*pi*ksi);          % начальное условие

for i = 2:N_x
   for j = 2:N_t
   u(i, j) = newton(u(i-1, j), u(i-1, j-1), u(i, j-1), epsilon, tau, h);
   end
end

figure(30)
    surf(-ksi, t, u, EdgeColor='none');
    xlabel('x', 'FontSize',16)
    ylabel('t', 'FontSize',16)
    zlabel('u', 'FontSize',16)
    colorbar;
    grid on
%2D графики
figure(31)
    plot(-ksi, u(:, 2000), 'LineWidth', 2)
    xlim([-1 0])
    grid on
    xlabel('x', 'FontSize',16)
```

```
    ylabel('t', 'FontSize',16)
    set(findall(figure(31),'type','axes'),'fontsize',15)

function U = U_func(x)
% Функция, стоящая под знаком частной производной по x
    U = atan(2*x + 1 + sin(x));
end

function DU = DU_func(x)
% производная функции U
    DU = (2 + cos(x))/(1 + (2*x + 1 + sin(x))^2);
end

function f = f_func(x, a, b, c, tau, h)
    %f = (x - a)/tau + (U_func(x) - U_func(b))/h;
    f = (a-b+x-c)/(2*tau) + (U_func(x) - U_func(a) + U_func(c) - U_func(b))/(2*h);
end

function Df = Df_func(x, tau, h)
    Df = 1/(2*tau) + DU_func(x)/(2*h);
end

function n = newton(a, b, c, epsilon, tau, h)
    n = b;
    du = epsilon + 1;
    while du > epsilon
        u = n;
        n = u - f_func(u, a, b, c, tau, h)/Df_func(u, tau, h);
        du = abs(u - n);
    end
end
```