МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Отчет по практическому заданию №2

Основы математического моделирования

Автор работы:
студент группы 325
Шевченко Даниил Александрович

Москва – 2023

Содержание

1 Постановка задачи

Используя метод переменных направлений, решите краевую задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + xt^2 \sin y, 0 < x < 1, 0 < y < \pi/2, t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=1} = 0, \\ u|_{y=0} = \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=\pi/2} = 0, \\ u|_{t=0} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

2 Аналитическое решение задачи

1. Решим вспомогательную задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} \Delta v + \lambda v = 0 \\ v_x|_{x=0} = v_x|_{x=1} = 0 \\ v|_{y=0} = v_y|_{y=\pi/2} = 0 \end{cases}$$

Получим:

$$\begin{cases} v_{nm}(x, y) = \cos(\pi n x) \sin\left(2\left(m - \dfrac{1}{2}\right) y\right), n = 0, 1, 2, ..., m = 1, 2, ... \\ \lambda_{nm} = (\pi n)^2 + \left(2\left(m - \dfrac{1}{2}\right)\right)^2 \\ ||v_{nm}||^2 = \dfrac{\pi}{8}(1 + \delta_{n0}) \end{cases}$$

2. Разложим неоднородность $f(x, y, t) = xt^2 \sin y$ в ряд по v_{nm}:

$$f(x, y, t) = \sum_{n}^{\infty} \sum_{m}^{\infty} f_{nm}(t) v_{nm}(x, y),$$

где

$$f_{nm}(t) = \frac{1}{||v_{nm}||^2} \int_0^1 dx \int_0^{\pi/2} dy f(x, y, t) v_{nm}(x, y)$$

Получим, что

$$\begin{cases} f_{01} = \dfrac{t^2}{2} \\ f_{0m} = 0, m = 2, 3, ... \\ f_{n1} = \dfrac{-4t^2}{\pi^2 n^2}, n = 2k + 1, k = 0, 1, 2, ... \\ f_{nm} = 0, m = 2, 3, ... \end{cases}$$

3. Будем искать решение задачи 1 в виде ряда:

$$u(x, y, t) = \sum_{n}^{\infty} \sum_{m}^{\infty} T_{nm}(t) v_{nm}(x, y)$$

Подставим этот вид в исходную задачу:

$$\begin{cases} \sum\limits_{n,m} T'_{nm}(t) v_{nm} = \sum\limits_{n,m} T_{nm}(t) \Delta v_{nm} + \sum\limits_{n,m} f_{nm}(t) v_{nm} \\ \sum\limits_{n,m} T_{nm}(0) v_{nm} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Заметим, что $\Delta v_{nm} = -\lambda_{nm} v_{nm}$, тогда в 2 можно сократить множители v_{nm}. Получим:

$$\begin{cases} T'_{nm}(t) + \lambda_{nm} T_{nm}(t) = f_{nm}(t) \\ T_{nm}(0) = 0 \end{cases}$$

Это задача Коши для ОДУ первого порядка. Ее решение можно записать в виде:

$$T_{nm} = \int\limits_0^t e^{-\lambda_{nm}(t-\tau)} f_{nm}(\tau) d\tau$$

Итоговые выражения для T_{nm} примут вид:

$$\begin{cases} T_{01} = -e^{-t} + \dfrac{t^2}{2} - t + 1 \\ T_{n1} = \dfrac{-4t^2}{\pi^2 n^2 (\pi^2 n^2 + 1)} + \dfrac{8t}{\pi^2 n^2 (\pi^2 n^2 + 1)^2} - \dfrac{8}{\pi^2 n^2 (\pi^2 n^2 + 1)^3} \left(1 - e^{-(\pi^2 n^2 + 1)t}\right), n = 2k+1, k = 0, 1, 2, ... \\ T_{nm} = 0, m = 2, 3, ... \end{cases}$$

Аналитическое решение задачи 1 выглядит следующим образом:

$$u(x, y, t) = T_{01} \sin y + \sin y \sum_{k=0}^{\infty} T_{2k+1,1} \cos \pi x (2k+1) \tag{3}$$

На Рис. 1 представлено решение, полученное из выражения 3 в момент времени $t = 1$.

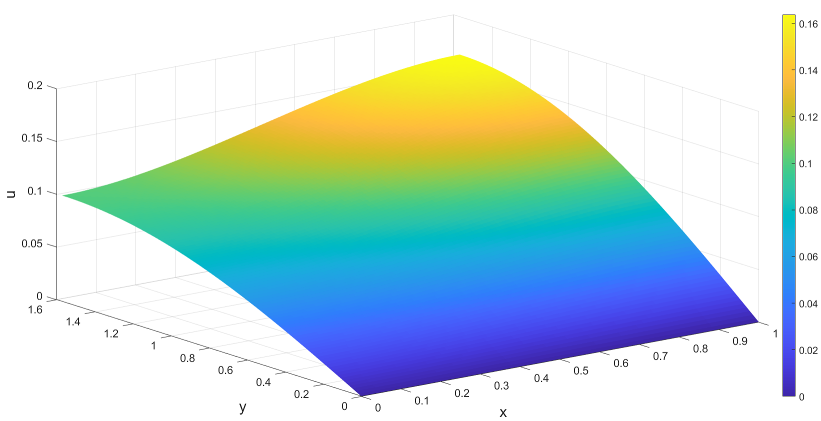


Рис. 1: Аналитическое решение задачи при $t = 1$

3 Численное решение

3.1 Построение разностной схемы

Введем в области рассмотрения $\Omega = \left\{(x, y, t) : 0 < x < 1, 0 < y < \frac{\pi}{2}, 0 < t < T\right\}$ равномерную сетку, на которой будем строить разностную схему:

$$\omega_{h\tau} = \begin{cases} x_n = n h_x, n = 0, ..., N, h_x = \frac{1}{N}, \\ y_k = k h_y, k = 0, ..., K, h_y = \frac{\pi}{2K}, \\ t_m = m\tau, m = 0, ..., M, \tau = \frac{T}{M} \end{cases}$$

где h_x – шаг по координате x, h_y – шаг по координате y, τ – шаг по времени. На сетке $\omega_{h\tau}$ будем рассматривать сеточную функцию $u^m_{nk} = u(x_n, y_k, t_m)$.
Оператор Лапласа аппроксимируем разностным оператором:

$$\Lambda u = \Lambda_1 u + \Lambda_2 u$$

$$\Lambda_1 u = \frac{u_{n+1,k} - 2u_{n,k} + u_{n-1,k}}{h_x^2}$$

$$\Lambda_2 u = \frac{u_{n,k+1} - 2u_{n,k} + u_{n,k-1}}{h_y^2}$$

Временной индекс для краткости опущен. Тогда уравнение для сеточной функции u^m_{nk} примет вид:

$$\frac{u^{m+1} - u^m}{\tau} = \Lambda\left(\sigma u^{m+1} + (1-\sigma)u^m\right) + f(x_n, y_k, t_{m+1}),$$

где $f(x_n, y_k, t_{m+1})$ – неоднородность нашей задачи.
Начальное условие для сеточной функции запишем в виде:

$$u^0_{nk} = 0, n = 0, ...N, k = 0, ..., K$$

Граничные условия при $y = 0$ аппроксимируются точно:

$$u_{n,0} = 0, n = 0, ...N$$

Граничные условия в остальных точках могут быть аппроксимированы с помощью односторонней разностной производной:

$$\frac{u_{1,k} - u_{0,k}}{h_x} = \frac{u_{N,k} - u_{N-1,k}}{h_x} = \frac{u_{n,K} - u_{n,K-1}}{h_y} = 0$$

При решении многомерной задачи методом сеток важен объем вычислений, то есть число арифметических действий для решения задачи с требуемой точностью. Рассмотрим различные варианты выбора параметра σ, то есть различные вариации схемы:
1) Явная схема ($\sigma = 0$) – условно устойчива. Число операций, необходимых для перехода на новый слой u^{m+1} пропорционально числу узлов сетки:

$$Q_{\text{яв}} = O\left(\frac{1}{h_x h_y}\right)$$

2) Неявная схема ($\sigma = 1$) – безусловно устойчива. В данном случае число операций, необходимых для перехода на новый слой u^{m+1} пропорционально кубу числа узлов сетки:

$$Q_{\text{неяв}} = O\left(\frac{1}{(h_x h_y)^3}\right)$$

3) Схема переменных направлений – безусловно устойчива. Число операций, требуемое для перехода на новый слой, пропорционально числу узлов сетки. То есть схема переменных направлений сочетает в себе достоинства явной и неявной схем. Такая схема является экономичной, так как на нахождение одной неизвестной в ней требуется фиксированное число действий.

В схеме переменных направлений переход со слоя на слой осуществляется в два этапа с помощью вычисления промежуточного временного слоя $m + \frac{1}{2}$. Разностная аппроксимация уравнения имеет вид:

$$\frac{u^{m+\frac{1}{2}} - u^m}{\frac{1}{2}\tau} = \Lambda_1 u^{m+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 u^m + f^{m+\frac{1}{2}}$$

$$\frac{u^{m+1} - u^{m+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\tau} = \Lambda_1 u^{m+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 u^{m+1} + f^{m+\frac{1}{2}}$$

Переход со слоя m к слою $m+1$ осуществляется в два этапа с шагом $\frac{\tau}{2}$. Сначала решается первое уравнение, являющееся неявным по направлению x и явным по направлению y, а затем второе

уравнение, которое является явным по направлению x и неявным по направлению y. При решении в обоих случаях используется метод прогонки. Значение сеточной функции на промежуточном слое играет вспомогательную роль. схема переменных направлений безусловно устойчива при любых шагах h_x, h_y, τ.
Рассмотрим переход со слоя m на промежуточный слой $m+\frac{1}{2}$:

$$\frac{u_{n,k}^{m+\frac{1}{2}} - u_{n,k}^{m}}{\frac{1}{2}\tau} = \frac{u_{n+1,k}^{m+\frac{1}{2}} - 2u_{n,k}^{m+\frac{1}{2}} + u_{n-1,k}^{m+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + \frac{u_{n,k+1}^{m} - 2u_{n,k}^{m} + u_{n,k-1}^{m}}{h_y^2} + f_{n,k}^{m+\frac{1}{2}}$$

Перепишем в более удобном виде:

$$\begin{cases} \dfrac{0.5\tau}{h_x^2} u_{n+1,k}^{m+\frac{1}{2}} - \left(1 + \dfrac{\tau}{h_x^2}\right) u_{n,k}^{m+\frac{1}{2}} + \dfrac{0.5\tau}{h_x^2} u_{n-1,k}^{m+\frac{1}{2}} = -F_{n,k}^{m+\frac{1}{2}} \\ F_{n,k}^{m+\frac{1}{2}} = \dfrac{0.5\tau}{h_y^2}\left(u_{n,k-1}^{m} + u_{n,k+1}^{m}\right) + \left(1 - \dfrac{\tau}{h_y^2}\right) u_{n,k}^{m} + 0.5\tau f_{n,k}^{m+\frac{1}{2}} \\ \dfrac{u_{1,k} - u_{0,k}}{h_x} = \dfrac{u_{N,k} - u_{N-1,k}}{h_x} = 0 \end{cases}$$

Подобная система решается методом прогонки при каждом фиксированном $k = 1...K-1$. При $k = 0$ и $k = K$ значение функции находим из включенных в задачу граничных условий. В результате получаем значение рассматриваемой функции на $m+\frac{1}{2}$ вспомогательном слое.
Чтобы осуществить переход на $m+1$ слой, аналогично рассмотрим:

$$\frac{u_{n,k}^{m+1} - u_{n,k}^{m+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\tau} = \frac{u_{n+1,k}^{m+\frac{1}{2}} - 2u_{n,k}^{m+\frac{1}{2}} + u_{n-1,k}^{m+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + \frac{u_{n,k+1}^{m+1} - 2u_{n,k}^{m+1} + u_{n,k-1}^{m+1}}{h_y^2} + f_{n,k}^{m+\frac{1}{2}}$$

Перепишем в более удобном виде:

$$\begin{cases} \dfrac{0.5\tau}{h_y^2} u_{n,k+1}^{m+1} - \left(1 + \dfrac{\tau}{h_y^2}\right) u_{n,k}^{m+1} + \dfrac{0.5\tau}{h_y^2} u_{n,k-1}^{m+1} = -F_{n,k}^{m+1} \\ F_{n,k}^{m+1} = \dfrac{0.5\tau}{h_x^2}\left(u_{n-1,k}^{m+\frac{1}{2}} + u_{n+1,k}^{m+\frac{1}{2}}\right) + \left(1 - \dfrac{\tau}{h_x^2}\right) u_{n,k}^{m+\frac{1}{2}} + 0.5\tau f_{n,k}^{m+\frac{1}{2}} \\ u_{n,0} = \dfrac{u_{n,K} - u_{n,K-1}}{h_y} = 0 \end{cases}$$

Эта система также решается методом прогонки, но уже при фиксированном $n = 1...N-1$, при $n = 0$ и $n = N$ значение функции находим из граничных условий. В результате получаем значение функции на интересующем нас $m+1$ временном слое. Полученные системы образуют задачу, которая решается методом прогонки. При переходе от слоя $m+1$ к $m+2$ процедура повторяется.

3.2 Метод прогонки

Рассмотрим первый полуслой и будем решать задачу методом прогонки, который в данной задаче основывается на решении линейных систем с трехдиагональной матрицей. Пусть имеется уравнение с начальными и граничными условиями:

$$\begin{cases} A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i \\ y_0 = \alpha_1 y_1 + \beta_1 \\ y_N = \alpha_2 y_{N-1} + \beta_2 \end{cases}$$

где $|C_i| > |A_i| + |B_i|, 0 < \alpha_{1,2} < 1, i = 1...N$.
В нашем случае считаем, что:

$$A_i = \frac{0.5\tau}{h_x^2}, C_i = \left(1 + \frac{\tau}{h_x^2}\right), B_i = \frac{0.5\tau}{h_x^2}$$

$$y_{i-1} = u_{n-1,k}^{m+\frac{1}{2}}, y_i = u_{n,k}^{m+\frac{1}{2}}, y_{i+1} = u_{n+1,k}^{m+\frac{1}{2}}$$

Пусть значения исходной функции в двух соседних точках связаны следующим соотношением, т.е. вид решения:

$$y_i = \mu_{i+1} y_{i+1} + \nu_{i+1}$$

Тогда:

$$y_{i-1} = \mu_i y_i + \nu_i = \mu_i \mu_{i+1} y_{i+1} + \mu_i \nu_{i+1} + \nu_i$$

Используем метод прямой прогонки. Подставим это равенство в равенство выше. Получим:

$$A_i(\mu_i \mu_{i+1} y_{i+1} + \mu_i \nu_{i+1} + \nu_i) - C_i(\mu_{i+1} y_{i+1} + \nu_{i+1}) + B_i y_{i+1} = -F_i$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях y_{i+1} находим коэффициенты прогонки с помощью следующих рекуррентных формул:

$$(A_i \mu_i - C_i)\mu_{i+1} + B_i = 0 \Rightarrow \mu_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i \mu_i}$$

$$-F_i + (C_i - A_i \mu_i)\nu_{i+1} - A_i \nu_i = 0 \Rightarrow \nu_{i+1} = \frac{F_i + A_i \nu_i}{C_i - A_i \mu_i}$$

Из граничного условия при $y = 0$ находим:

$$\mu_1 = \alpha_1 = 0, \beta_1 = \nu_1 = 0$$

Используя эти значения, совершим прогонку в направлении возрастания индекса, последовательно определяя значения коэффициентов μ_i, ν_i для $i = 1...N$.
Из второго граничного условия:

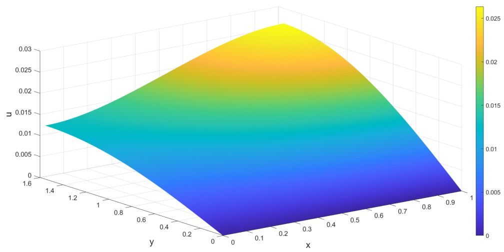
$$\begin{cases} y_N = \alpha_2 y_{N-1} + \beta_2 \\ y_{N-1} = \mu_N y_N + \nu_N \end{cases} \Rightarrow y_N = \frac{\alpha_2 \nu_N + \beta_2}{1 - \alpha_2 \mu_N}$$

где $\alpha_2 = 1, \beta_2 = 0$ (из граничных условий при $y = \frac{\pi}{2}$).
Используя найденное значение y_N и коэффициенты μ_i, ν_i, делаем обратную прогонку в сторону уменьшения значения индекса, последовательно определяя все значения $y_i (i = 2...N-1)$ по формуле:

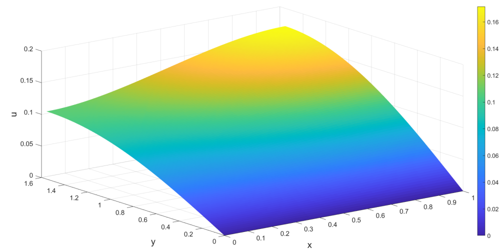
$$y_i = \mu_{i+1} y_{i+1} + \nu_{i+1}$$

4 Построение численного решения

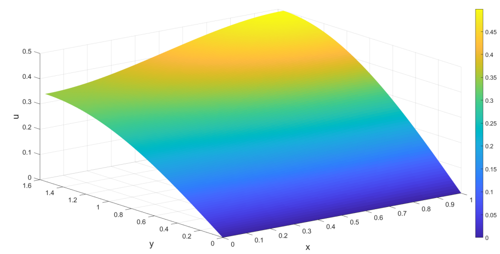
Программа, реализующая решение задачи, написана на языке Matlab в одноименном пакете программ. На Рис. 2 представлены графические изображения решения в фиксированные моменты времени. Также к отчету прилагается файл формата gif, который демонстрирует динамику решения с течением времени.



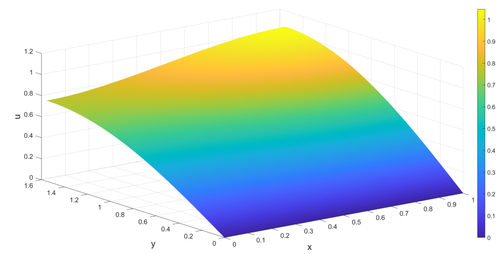
(а) При $t = 0.5$



(б) При $t = 1$



(в) При $t = 1.5$

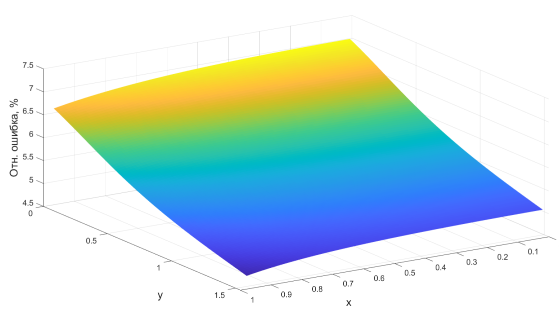


(г) При $t = 2$

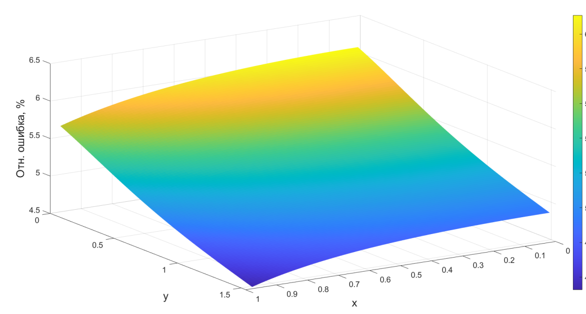
Рис. 2: Численное решение в виде 3D графиков

5 Верификация работы программы

Для того, чтобы убедиться в правильности работы программы, сравним численное решение с аналитическим в фиксированные моменты t. На Рис. 3 представлены графики относительной ошибки в моменты времени $t = 1$ и $t = 2$, при числе точек сетки $N = 100$, $K = 100$ и $M = 50$. Видим, что максимальная ошибка не превышает 7.5%.



(а) При $t = 1$



(б) При $t = 2$

Рис. 3: Относительная ошибка численного решения по отношению к аналитическому

Попробуем увеличить число узлов сетки. На Рис. 4 представлен график зависимости максимальной относительной ошибки от количества узлов сетки (произведения $N \cdot K \cdot M$). Видим, что при $N = 300, K = 300$ и $M = 400$ ошибка стала меньше 1%.

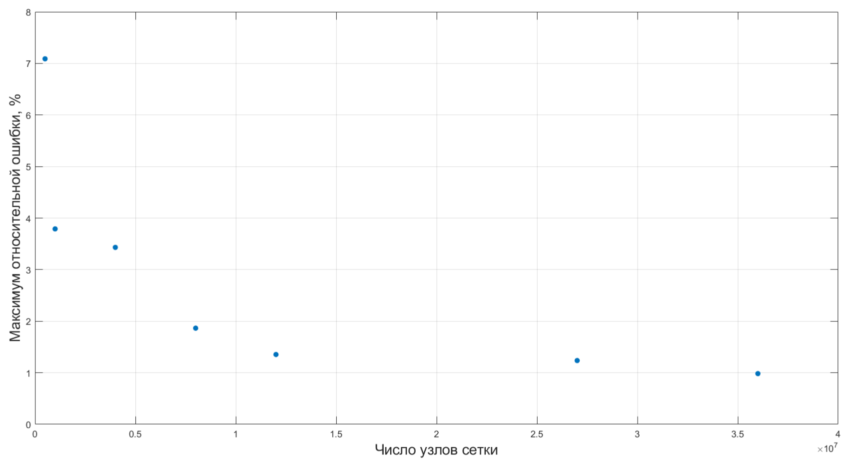


Рис. 4: Зависимость максимальной относительной ошибки от числа узлов сетки

6 Заключение

В настоящей работе было проведено численное решение начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности с использованием схемы переменных направлений и метода прогонки. Перед выполнением численных расчетов было проведено аналитическое решение поставленной задачи. Для поиска решения в области $0 < x < 1, 0 < y < \frac{\pi}{2}, 0 < t < T$ была введена равномерная сетка с шагом h_x по x, h_y по y и τ по t.
Программа была написана на языке Matlab в одноименном пакете программ (без использования встроенных функций). Количество точек по осям x и y было выбрано равным 100. Полный код программы содержится в Приложении. Далее была проведена проверка результатов вычислений. Для этого было проведено сравнение численного решения с аналитическим и посчитана относительная ошибка. Построили зависимость максимальной относительной ошибки от числа узлов сетки. Получили, что при числе точек $N = 300, K = 300$ и $M = 400$ ошибка становится меньше 1%.

7 Приложение

Программа, реализующая численное решение

```
N_x = 100;
N_y = 100;
N_t = 50;
t_max = 2;
h_x = 1/(N_x-1);
h_y = 0.5*pi/(N_y-1);
tau = t_max/(N_t - 1);
x = 0:h_x:1;
y = 0:h_y:0.5*pi;
t = 0:tau:t_max;
gamma_x = tau/(h_x^2);
gamma_y = tau/(h_y^2);
u = zeros(N_x, N_y, 2*N_t+1);


u(:, :, 1) = 0;     %начальное условие
d_x = zeros(1 ,N_x);
sigma_x = zeros(1, N_x);
```

```
d_y = zeros(1, N_y);
sigma_y = zeros(1, N_y);


for j=2:2:2*N_t
    for i2=2:N_y-1
        d_x(2)= 1;          % из граничных условий в x=0
        sigma_x(2) = 0;     % из граничных условий в x=0
        A = 0.5*gamma_x;
        B = 1 + gamma_x;
        C= 0.5*gamma_x;
        for m=2:N_x-1
            F_m_x =  -(0.5.*gamma_y .* (u(m, i2-1, j-1) + u(m,
            i2+1, j-1))+ (1 - gamma_y) .* u(m, i2, j-1) + 0.5 .*
            tau.* x(m)*((tau.*(j + 1)./2).^2) .* sin(y(i2)));
            d_x(m+1) = C./(B-A.*d_x(m));
            sigma_x(m+1) = (F_m_x - A .* sigma_x(m))./(A .* d_x(m) - B);
        end
        d_x(2)= 1;
        sigma_x(2) = 0;
        u(N_x, i2, j) = sigma_x(N_x)./(1 - d_x(N_x));           % из граничных условий в x=1
        for m=N_x:-1:2
            u(m-1, i2, j) = d_x(m) .* u(m, i2, j) + sigma_x(m);
        end
    end


    for i1=2:N_x-1
        d_y(2) = 0;             % из граничных условий в y=0
        sigma_y(2) = 0;         % из граничных условий s y=0
        A =  0.5*gamma_y;
        B = 1 + gamma_y;
        C =  0.5*gamma_y;
        for m=2:N_y-1
            F_m_y =  -(0.5.*gamma_x.*(u(i1-1, m, j) + u(i1+1, m,
            j))+ (1 - gamma_x).*u(i1, m, j) + 0.5.*tau.*x(i1).*
            ((tau*(j-1)./2).^2) .* sin(y(m)));
            d_y(m+1) = C ./(B - A .* d_y(m));
            sigma_y(m+1) = (F_m_y - A .* sigma_y(m))./(A .* d_y(m) - B);
        end

        u(i1, N_y, j+1) = sigma_y(N_y)./(1 - d_y(N_y));           % из граничных условий в y=pi/2
        for m=N_y:-1:2
            u(i1, m-1, j+1) = d_y(m).*u(i1, m, j+1) + sigma_y(m);
        end

    end
end


figure(1)
    surf(x, y(1:N_y-1), u(:, 1:N_y-1, 100)', EdgeColor='none')
    set(findall(figure(1),'type','axes'),'fontsize',13)
    xlabel('x', 'FontSize',18)
    ylabel('y', 'FontSize',18)
    zlabel('u', 'FontSize',18)
```

```
colorbar
grid on
```