

# **РАЗРАБОТКА ПРОГРАММЫ ОЦЕНКИ ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА**

**Выполнил: Шевелева Анна Михайловна, гр. 6381**

**Руководитель: Беляев Сергей Алексеевич, к.т.н., доцент**

**Санкт-Петербург, 2020**

## Актуальность

Любую NP-полную задачу можно привести к любой другой NP-полной задаче

За счет алгоритмов приведения можно решать одну задачу, а решение получать в другой задаче, упрощая тем самым само решение

Существующие алгоритмы приведения не позволяют упростить решение данных задач

Приведение NP-полных задач к задаче коммивояжера может решить эту проблему

Задача коммивояжера (ЗК) - NP-полная задача, ее полиномиального решения пока не существует

Оценка длины пути в асимметричной ЗК позволит находить решение, близкое к оптимальному, тем самым упрощая решения других NP-полных задач

## Цель и задачи работы

### Цель:

Разработка алгоритма для оценки точного решения задачи коммивояжера

### Задачи:

- проанализировать существующие точные и эвристические алгоритмы решения ЗК;
- описать математическую модель оценки длины пути;
- реализовать алгоритмы решения пр-полных задач и их приведение к ЗК;
- протестировать корректность полученных алгоритмов;
- проанализировать работу математической модели на пр-полных задачах и на матрицах со случайными значениями.

# Сравнение существующих решений задачи коммивояжера

Названия алгоритмов	Точность алгоритма <sup>1</sup> не более, %	Вычислительная сложность	Задачи
Алгоритм дерева	50	$O(n^2 \log(n))$	симметричная
Алгоритм Кристофидеса-Сердюкова	67	$O(n^3)$	метрическая
«Антижадный алгоритм»	77 <sup>2</sup>	экспоненциальная	евклидова
Алгоритм Лина-Кернигана	90 <sup>2</sup>	$O(n^{2.2})$	симметричная
Нижняя граница Хелд-Карпа	67	$O(n^2)$	евклидова
Жадный алгоритм	47 <sup>3</sup>	$O(n^2)$	любая
Полный перебор	100	$O(n!)$	любая
Алгоритм Беллмана-Хелда-Карпа	100	$O(n^2 2^n)$	любая

- 1 – Процентное соотношение оценки длины пути к оптимальному решению  
 2 – Максимальная оценка точности получена экспериментальными данными  
 3 – Средняя оценка точности получена экспериментальными данными

# Математическая модель оценки длины пути

Имеется матрица весов  $A\{a_{ij}\}; i, j \in [1, n], i \neq j$ , значения определены на  $[a, b]$ .

Матрица  $B\{b_{ij}\}; i, j \in [0, 1], i \neq j$ , получается из матрицы  $A$  нормированием.

Решение ЗК для матрицы  $B$ : 
$$S_B = \sum_{i=1}^n b_{S_i, S_{i+1}}. \quad (1)$$

Тогда решение ЗК для матрицы  $A$ : 
$$S_A = \sum_{i=1}^{n-1} a_{S_i, S_{i+1}} + a_{S_n, S_1} = a * n + (b - a) * S_B. \quad (2)$$

При первой производной линейной регрессии  $b > 0$  ребра решения распределены по закону распределения Релея, при  $b \leq 0$  по закону  $\gamma$ -распределения.

Математическое ожидание: 
$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x) dx, \quad (3)$$

где  $f_x(x)$  – плотность распределения

Для распределения Релея дисперсия и пороговое значение  $k$  равны:

$$k = MX / 0.512, \quad DX = 0.0716 * k^2. \quad (4.1)$$

где  $k$  – граничный вес, при котором веса более  $k$  не участвуют в вычислении веса оптимального решения с вероятностью 95%.

Для  $\gamma$ -распределения:  $k = MX / 0.39667, \quad DX = 0.1045 * k^2. \quad (4.2)$

Оценка длины пути для весовой матрицы  $A$ : 
$$MS_A = a * n + (b - a) * n * MX \quad (5)$$

Относительная погрешность: 
$$\sigma_{S_A} = \sqrt{DS_A} = (b - a) * \sqrt{n * DX} \quad (6)$$

# Алгоритм приведения задачи гамильтонова цикла (ГЦ)

```
кол-во_вершин=получить_кол-во_вершин(из гамильтонова графа)
tsp_граф = создать_полный_граф(кол-во_вершин)
Цикл по ребрам в tsp_графе
    если принадлежность_ребра_графу(ребро, гамильтонов_граф)
    тогда изменить_вес_ребра (ребро, 1)
    иначе изменить_вес_ребра(ребро, кол-во_вершин+1)
    конец условия
конец цикла
вернуть (tsp_граф)
```

# Алгоритм приведения задачи вершинного покрытия (ВП)

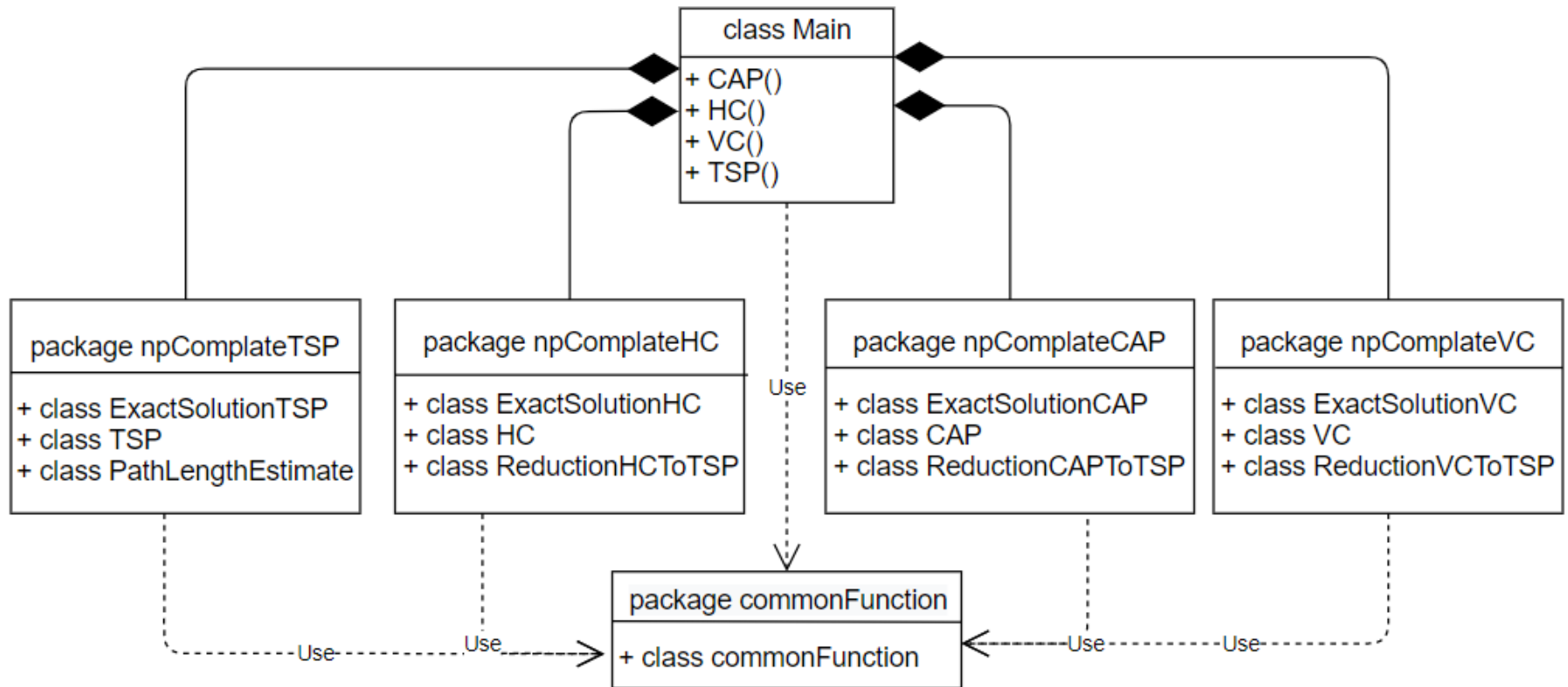
```
кол-во_вершин = получить_кол-во_вершин (граф_ВП)
кол-во_ребер = получить_кол-во_ребер (граф_ВП)
покрытие = получить_покрытие (граф_ВП)
tsp_граф = создать_граф (покрытие+4*кол-во_вершин, INF)
цикл по кол-во_ребер в графе_ВП
изменить значение ребер (0,1), (1,0), (1,2), (2,3), (3,0), (3,2) на 1
    в матрицах (4*кол-во_вершин x 4*кол-во_вершин)
конец цикла
цикл по покрытию in гамильтон_графе
    цикл по кол-во_ребер-покрытие = N в графе_ВП
        если (odd edge) тогда
            изменить_ребро (N, покрытие+4*кол-во_вершин, 1)
            изменить_ребро (покрытие+4* кол-во_вершин, N, 1)
        конец условия
    конец цикла
конец цикла
цикл по кол-во_вершин X в tsp_графе
    цикл по кол-во_ребер в tsp_графе
        Находим 1 вершину X, запоминаем намер
        Находим 2 вершину X, изменяем ребра (1,2), (2,1) на 1
        Запоминаем новую 1 вершину X равную 2
    конец цикла
конец цикла
вернуть (tsp_граф)
```

## Алгоритм приведения двухуровневой задачи о назначениях (2-3ОН)

```
TSP_граф = создать_граф (n(xi=1)+m, inf)
Цикл по вершинам_m в TSP_графе
    Цикл по вершинам_n в TSP_графе
        изменить_вес_ребра (ребро,  $c_{nm} - 1 / (10 * d_{nm})$ )
    конец цикла
конец цикла
Цикл по вершинам_n в TSP_графе
    Цикл по вершинам_m в TSP_графе
        изменить_вес_ребра (ребро, 0)
    конец цикла
конец цикла
вернуть (TSP_граф)
```



# Диаграмма используемых классов



# Тестирование корректности алгоритмов приведения

Для проверки корректности алгоритмов приведения:

- Для 2-ЗОН были сгенерированы по 10 различных графов размерности 6-10.
- Для задачи о ГЦ были созданы по 10 различных графов с задачами, когда нет ГЦ, когда он есть и единственный, и когда ГЦ несколько.
- Для задачи о ВП создавались графы с различным количеством ВП (2-5).

Корректность алгоритмов оценивалась при помощи точного решения ЗКи точных решений заданных NP-полных задач

## Анализ работы математической модели

Для 2-ЗОН в среднем процентное отношение оценки длины пути к оптимальному пути без учета погрешности равно 78.7%, с учетом погрешности 85.3%. Среднее количество распознающихся ребер оптимального пути 79.5%. Учитывать погрешность целесообразно в 77% случаев.

Для задачи о ГЦ и ВП математическая модель не работает

Для полных асимметричных матриц со случайными значениями оценка длины пути не зависит от алфавита (количества различных чисел в матрице) при алфавите большем 10. Средняя оценка длины пути без учета погрешности 83.8%, ребер – 82.5%. Учитывать погрешность нецелесообразно.

Для разреженных ассиметричных матриц точность оценки уменьшается с увеличением разреженности. Целесообразно использовать метод с заполненностью не менее 50%. Средняя оценка длины пути с учетом погрешности 75.5%. Учитывать погрешность целесообразно в 93.75% случаев.

Точность оценки для ассиметричных матриц повышается при увеличении кол-ва ребер в графе. Средняя оценка длины пути с учетом погрешности 74.34%.

## Заключение

- Разработаны и протестированы алгоритмы приведения задачи о ГЦ, ВП и 2-ЗОН к задаче коммивояжера
- Описана математическая модель оценки точного решения ЗК
- Проведены тесты на соответствие данной модели приведенным выше NP-полным задачам
- Проведено исследование на соответствие модели к ассиметричной ЗК с различным алфавитом и разреженностью матрицы
- Проведено исследование на соответствие модели к ассиметричной ЗК с различным количеством ребер в графе при разреженности графа не более 50%
- В дальнейшем планируется разработать алгоритмы приведения других np-полных задач к ЗК и проверить соответствие данной математической модели к ним
- Найти зависимость процента попадания ребер оптимального решения от различных асимметричных задач и увеличить данный процент до 95%, путем видоизменения графа или внесения корректив в алгоритм нахождения оценки
- На основе данного алгоритма создать другой алгоритм оценки оптимального длины пути, путем удаления ребер, предположительно не участвующих в оценке, и сравнить результаты

# Апробация работы

«Исследование приведения двухуровневой кооперативной задачи о назначениях к задаче коммивояжера» // Конференция ППС СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2020

Репозиторий проекта

<https://github.com/ShevelevaAnna/TSP>

**СПАСИБО  
ЗА  
ВНИМАНИЕ!**

# Исследование двухуровневой задачи о назначениях

Для исследования двухуровневой задачи о назначениях, было создано по 20 тестов для задач размерности от 6 до 10, использовался закон распределения Релея

В таблице представлена общая картина по данному исследованию. Для каждой размерности и для всех задач в целом были найдены нижняя граница, средняя и верхняя граница оценки длины пути, а также нижняя граница, средняя и верхняя граница количества ребер. Для оценки было найдено значение без(с) погрешности(ью).

	Нижняя граница оценки	Средняя оценка	Верхняя граница оценки	Нижняя граница кол-ва ребер	Среднее кол-во ребер	Верхняя граница кол-ва ребер
100	52/57	79,6/86,1	98/99,8	65	80	90
81	55/61	74,7/80,6	98/97	61	81,4	94
64	56/62	77,8/85,2	99,5/99,3	56	79,7	93
49	68/73	83,7/89,3	99/99,5	64	76,6	92
36	48/55	77,6/85,3	95/99,5	66	79,8	91
all	48/55	78.68/85.3	99.5/99.8	56	79.5	90

# Исследование двухуровневой задачи о назначениях

В таблице представлено процентное отношение количества значений, где оптимальная длина пути меньше оценки, к общему количеству значений

N	Кол-во значений оптимальной длины пути < оценки
100	16 (80%)
81	15 (75%)
64	14 (50%)
49	16 (80%)
36	16 (80%)
all	77 (77%)



# Исследование соответствия метода на разреженность и различный алфавит

Теперь исследуем данный метод на сгенерированной случайным образом задаче коммивояжера. Проверим метод на графах различной разреженности (100%, 80%, 63%, 50%, 40% заполненности графа) и на различном алфавите задачи (для разреженных графов 10 и 100 чисел, для полного графа 10, 100, 500 и 1000 чисел). Использовался закон распределения Релея. Для оценки было найдено значение без(с) погрешности(ью).

% заполнен ности	алфавит	Нижняя граница оценки	Средняя оценка	Верхняя граница оценка	Нижняя граница кол-ва ребер	Среднее кол-во ребер	Верхняя граница кол-ва ребер
100%	1000	47/57	84,1/89,7	98/99,3	70	88	100
	500	63/73	79,7/87,7	99,9/99	70	81	100
	100	67/77	85,9/89,9	99/99	70	87	100
	10	75/81	85,4/91,1	96/97	50	74	100
all		47/57	83.8/89.6	99.9/99.3	50	82.5	100

# Исследование соответствия метода на разряженность и различный алфавит

Продолжение таблицы

% заполнен ности	алфавит	Нижняя граница оценки	Средняя оценка	Верхняя граница оценки	Нижняя граница кол-ва ребер	Среднее кол-во ребер	Верхняя граница кол-ва ребер
80%	100	63/70	79,7/87,1	95/99.97	60	75	90
	10	44/45	76,9/81,2	97/99.9	20	65	90
63%	100	40/46	54,8/77,7	90/96	40	66	90
	10	53/56	77.3/81.6	97/99	20	62	90
50%	100	32/37	57.5/66	80/92	20	49	70
	10	51/63	68.1/73.8	88/96	30	60	90
40%	100	43/49	59.1/67.4	79/92	50	50	80
	10	45/48	63.1/68.8	77/86	40	40	70
all		32/37	67.1/75.5	97/99.97	20	58.4	90

# Исследование соответствия метода на разряженность и различный алфавит

В таблице представлено процентное отношение количества значений, где оптимальная длина пути меньше оценки, к общему количеству значений

% заполненности	алфавит	Кол-во значений оптимальной длины пути < оценки
100%	1000	6 (60%)
	500	5 (50%)
	100	5 (50%)
	10	3 (30%)
all		19 (47.5%)

# Исследование соответствия метода на разряженность и различный алфавит

В таблице представлено процентное отношение количества значений, где оптимальная длина пути меньше оценки, к общему количеству значений

% заполненности	алфавит	Кол-во значений оптимальной длины пути < оценки
80%	100	1 (10%)
	10	2 (20%)
63%	100	1 (10%)
	10	1 (10%)
50%	100	0 (0%)
	10	0 (0%)
40%	100	0 (0%)
	10	0 (0%)
all		5 (6.25%)

# Исследование на зависимость метода от кол-ва ребер в графе

В заключительном исследовании проверим на зависимость метода от количества ребер в графе. Сгенерируем графы с заполненностью не меньше 50% и количеством ребер примерно от 50 до 250. Использовался закон распределения Релея. Для оценки было найдено значение без(с) погрешности(ью).

N	Нижняя граница оценки	Средняя оценка	Верхняя граница оценки	Нижняя граница кол-ва ребер	Среднее кол-во ребер	Верхняя граница кол-ва ребер
200-250	58 / 70	76.7 / 83.9	95 / 99	66	76.9	95
150-200	49 / 54	74.4 / 76.8	98 / 98	45	69.8	94
100-150	53 / 59	68.9 / 74.8	99 / 92	50	66.3	86
50-100	42 / 46	62 / 69.7	86 / 97	41	61.1	85
0-50	29 / 32	54.9 / 66.5	82 / 94	30	50.6	75
all	29 / 32	67.38 / 74.34	99 / 99	30	64.9	95

# Исследование на зависимость метода от кол-ва ребер в графе

В таблице представлено процентное отношение количества значений, где оптимальная длина пути меньше оценки, к общему количеству значений

N	Кол-во значений оптимальной длины пути < оценки
200-250	1 (5.5%)
150-200	3 (25%)
100-150	0 (0%)
50-100	0 (0%)
0-50	0 (0%)
all	4 (4.7%)

# Список литературы

**Алгоритм дерева** – Н. Н. Кузюрин, Сложность комбинаторных задач, лекционный материал, 2003 г.

**Алгоритм Кристофидеса-Сердюкова** – А.В. Кононов, П.А. Кононова. «Приближенные алгоритмы для NP-трудных задач» Учебно-методическое пособие, 2014

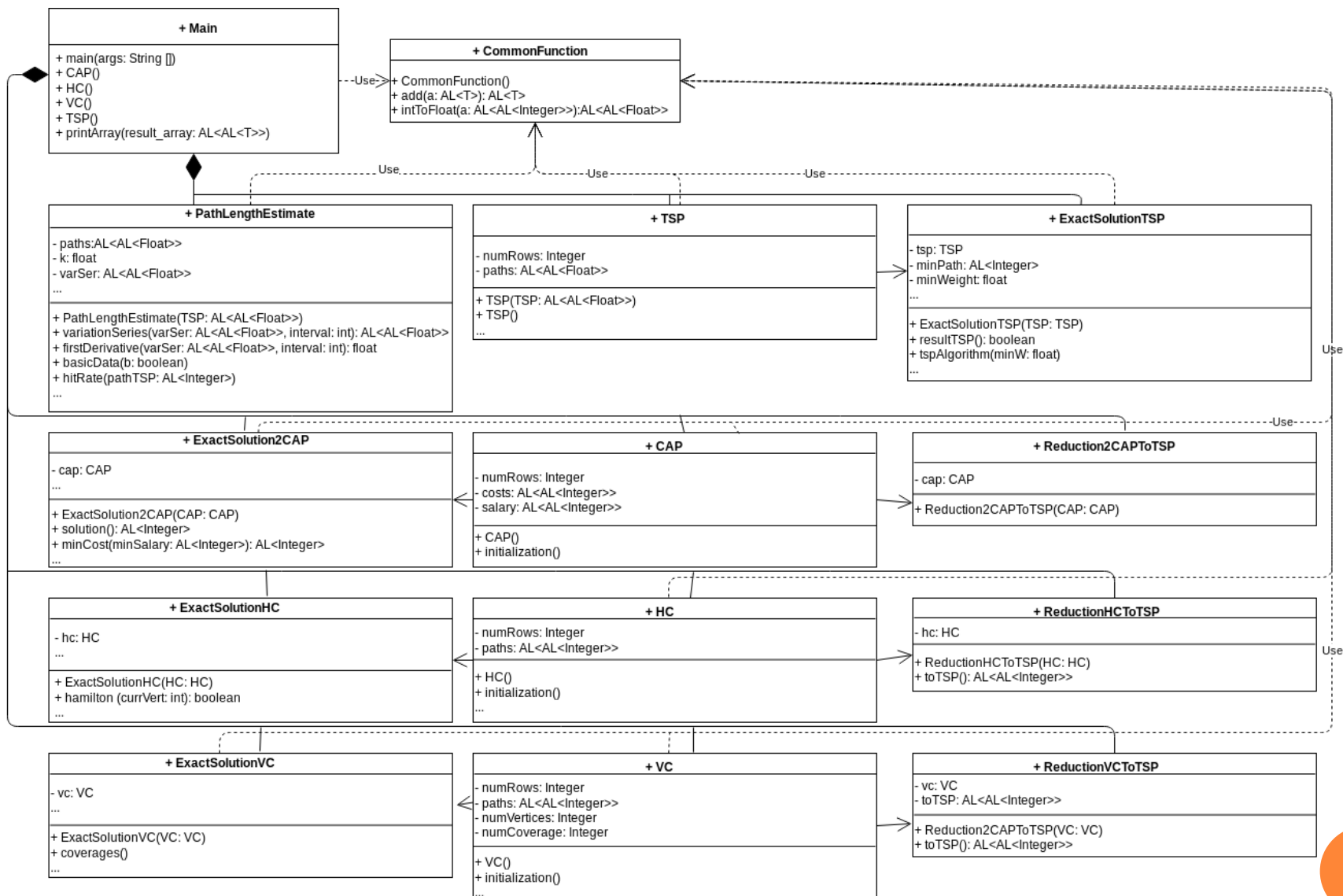
**«Антижадный» алгоритм** – А.А. Чусовлянкин, В.В. Морозенко Анализ точности и времени решения задачи коммивояжера с помощью «антижадного» алгоритма. Вестник пермского университета, 2016

**Алгоритм Лина-Кернигана** – Lin S., Kernighan B.W. (1973) An effective heuristic algorithm for the traveling-salesman problem. Operations Research, vol. 21, no. 2, pp. 498–516.

**Нижняя граница Хелд-Карпа** – Shmoys, D. B., and Williamson, D. P. (1990), "Analyzing the Held-Karp TSP Bound: A Monotonicity Property with Application", Information Processing Letters. 35:281-285.

**Жадный алгоритм** – Alsalibi B.A., Jelodar M.B., Venkat I. A Comparative Study between the Nearest Neighbor and Genetic Algorithms: A revisit to the Traveling Salesman Problem // International Journal of Computer Science and Electronics Engineering (IJCSEE), 2013. Vol. 1, Issue 1.

# Диаграмма используемых классов





Первая производная линейной регрессии:

$$b = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i} \quad (3)$$