

УТВЕРЖДЕНА
Советом
механико-математического
факультета БГУ
9 февраля 2010 г., протокол №4

Программа государственного экзамена по математике (с доказательствами излагаются вопросы, выделенные жирным шрифтом)

1 Требования к ответу на экзамене

На государственном экзамене по математике студент должен показать

- знание определений математических понятий, участвующих в формулировках теорем, которые он излагает при ответе по билету,
- знание точных формулировок математических теорем, указанных в билете,
- умение применять теорию к решению задач и иллюстрировать определения математических понятий и формулировки теорем простыми примерами,
- умение доказывать теоремы, выделенные в разделе 3 жирным шрифтом,
- знание формулировок лемм и теорем, используемых при доказательствах, и умение проверить выполнимость условий этих теорем.

Члены Государственной экзаменационной комиссии могут предлагать студенту в качестве дополнительных вопросов разбор простых примеров, определения и формулировки теорем из разделов 2 и 3 программы.

2 Основные математические понятия, которыми должен владеть экзаменуемый

2.1 Алгебра

Определение комплексных чисел. Алгебраическая форма комплексного числа. Комплексное сопряжение. Комплексная плоскость. Полярная система координат. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме. Понятие корня из комплексного числа, извлечение корня из комплексного числа.

Понятие многочлена от одной переменной. Степень многочлена. Неприводимые многочлены. Разложение на неприводимые многочлены. Значение многочлена в точке, корень многочлена. Производная многочлена. Кратность корня.

Понятие матрицы. Специальные матрицы: диагональная, нижняя и верхняя треугольные, единичная, нулевая, ступенчатая, вектор-строка, вектор-столбец. Равенство матриц. Сложение матриц, умножение матрицы на скаляр, умножение матриц,

транспонирование. Элементарные преобразования матриц. Обратная матрица. Характеристический и минимальный многочлен матрицы. Жорданова клетка, жорданова нормальная форма матрицы.

Определитель квадратной матрицы произвольного порядка. Миноры и алгебраические дополнения. Определитель Вандермонда.

Системы линейных алгебраических уравнений. Матричная запись системы. Решение системы. Общее и частное решения системы. Эквивалентные системы. Элементарные преобразования системы. Свободные переменные. Однородные системы. Фундаментальная система решений.

Векторные пространства. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис, размерность. Координаты вектора. Матрица перехода от одного базиса к другому. Подпространство. Ранг системы векторов. Ранг матрицы. Сумма и пересечение подпространств. Прямая сумма и дополнение подпространств.

Линейное отображение, его ядро и образ. Ранг и дефект. Матрица линейного оператора. Алгебраические действия над линейными отображениями. Собственные значения и собственные векторы.

Квадратичные формы. Ранг формы. Матрица формы. Канонический вид квадратичной формы. Положительный и отрицательный индекс инерции, сигнатура квадратичной формы. Знакоопределенные квадратичные формы.

Евклидовы и унитарные пространства. Скалярное произведение. Длина вектора. Угол между векторами в евклидовом пространстве. Ортогональные векторы. Ортогональный и ортонормированный базис. Ортогональное дополнение к подпространству. Ортогональная проекция и ортогональная составляющая вектора относительно подпространства. Сопряженный оператор. Унитарные и самосопряженные операторы.

Группа, подгруппа. Циклическая подгруппа. Порядок элемента группы.

Кольцо, поле, подкольцо.

2.2 Геометрия

Понятие вектора в \mathbb{E}^3 .

Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов, базисы и аффинные реперы.

Координаты векторов и точек, скалярное, векторное и смешанное произведения векторов.

Уравнения прямых и плоскостей в \mathbb{E}^2 и \mathbb{E}^3 .

Эллипсы, гиперболы, параболы.

Эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды.

Аффинное пространство \mathbb{A}^n .

Евклидово точечное пространство \mathbb{E}^n .

k -мерная плоскость в \mathbb{A}^n , характеристика пары плоскостей.

Фигуры второго порядка в пространствах \mathbb{A}^n и \mathbb{E}^3 .

2.3 Дифференциальная геометрия

Понятие кривой. Натуральная параметризация кривой.

Репер Френе. Формулы Френе. Кривизна кривой. Кручение кривой.

Понятие поверхности. Первая фундаментальная форма поверхности. Вторая фундаментальная форма поверхности. Нормальная кривизна поверхности. Типы точек поверхности.

2.4 Математический анализ

Понятие вещественных чисел. Точные границы числовых множеств. Различные формы полноты множества вещественных чисел.

Определение предела последовательности. Предел монотонной последовательности. Критерий Коши сходимости последовательности.

Определение предела функции в точке. Определение непрерывности функции в точке. Понятие равномерной непрерывности.

Определение производной и дифференциала функции одной вещественной переменной.

Понятие первообразной и неопределенного интеграла. Определение интеграла Римана. Интегрируемость непрерывной функции. Формула Ньютона-Лейбница.

Понятие числового ряда. Абсолютная и условная сходимость числовых рядов.

Понятие дифференцируемости функций многих переменных. Матрица Якоби.

Теорема о неявной и обратной функции.

Экстремумы функций многих переменных. Необходимое условие, достаточные условия существования экстремума. Условный экстремум функций многих переменных.

Классы поточечной сходимости рядов Фурье.

Определение двойного и тройного интеграла Римана.

Определение криволинейных интегралов 1-го и 2-го рода. Определение поверхностных интегралов 1-го и 2-го рода.

Формула Грина, Стокса и Гаусса-Остроградского.

2.5 Теория функций комплексного переменного

Производная функции комплексного переменного и ее геометрический смысл. Условия Коши-Римана.

Интегральная теорема Коши. Интегральная формула Коши.

Степенной ряд, радиус сходимости, формула Коши-Адамара для радиуса сходимости. Ряд Тейлора.

Ряд Лорана. Изолированные особые точки и их классификация.

Основная теорема о вычетах.

2.6 Функциональный анализ

Кольца, алгебры, σ -алгебры множеств. Мера на кольце множеств. σ -аддитивная мера на кольце множеств. Борелевские множества, продолжение меры по Лебегу. Измеримые множества.

Измеримые функции. Интеграл Лебега.

Сходящаяся последовательность, последовательность Коши в метрических пространствах.

Сходимость функциональных последовательностей: точечная сходимость, сходимость почти всюду, равномерная сходимость.

Отображения: непрерывные, равномерно непрерывные, удовлетворяющие условию Липшица.

Полное метрическое пространство. Сжимающее отображение. Пополнение метрического пространства. Всяду плотное множество.

Норма на векторном пространстве. Банахово пространство. Пространства суммируемых функций $L^p(T, \mu)$.

Линейный ограниченный оператор. Норма линейного ограниченного оператора. Линейные интегральные операторы.

Образ, ядро, график линейного оператора. Обратимый оператор.

Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Спектр линейного оператора.

Скалярное произведение. Гильбертово пространство. Ортогональные векторы. Проекция вектора.

Базис в нормированном векторном пространстве, в гильбертовом пространстве.

Ряд Фурье по ортонормированной системе в гильбертовом пространстве.

Линейный ограниченный функционал. Пространство, сопряженное к нормированному векторному пространству. Сопряженный оператор к линейному ограниченному оператору.

Предкомпактные, компактные множества в метрическом пространстве. Компактные операторы.

2.7 Теория вероятностей

Элементарное событие, случайное событие, пространство элементарных событий. Алгебра и σ -алгебра событий.

Вероятностное пространство, вероятность.

Классическое, конечное, дискретное, геометрическое вероятностные пространства.

Условная вероятность, независимость событий. Схема Бернулли.

Случайная величина, ее функция распределения. Дискретные и абсолютно непрерывные распределения, плотность вероятности. σ -алгебра, порожденная случайной величиной. Распределение вероятностей, независимость случайных величин.

Математическое ожидание, дисперсия, коэффициент корреляции.

Характеристическая функция случайной величины.

Центральная предельная теорема, закон больших чисел, усиленный закон больших чисел.

Понятие о случайном процессе, пуассоновский случайный процесс, случайный процесс броуновского движения.

Выборка, вариационный ряд выборки, статистика. Несмещенность, состоятельность, оптимальность, эффективность статистической оценки.

Достаточная статистика, статистическая гипотеза, параметрическая гипотеза, линейная регрессия, метод наименьших квадратов.

2.8 Дифференциальные уравнения

Обыкновенные дифференциальные уравнения, поле направлений, решение, интегральная кривая, задача Коши.

Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными, линейные, Риккати и в полных дифференциалах.

Фундаментальная система решений однородных линейных дифференциальных уравнений n -го порядка.

Метод вариации произвольных постоянных для неоднородные линейных дифференциальных уравнений n -го порядка.

Особые точки автономных систем: узел, седло, фокус, центр. Устойчивость решений по Ляпунову, функции Ляпунова.

2.9 Уравнения математической физики

Уравнения в частных производных. Классификация линейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка.

Уравнение малых поперечных колебаний струны.

Уравнение теплопроводности.

Гармонические функции.

Задача Коши.

Смешанные задачи.

2.10 Вычислительная математика

Понятие погрешности.

Методы приближения функций.

Приближенное вычисление интегралов.

Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Методы решения проблемы собственных значений.

Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений.

Методы численного решения систем нелинейных уравнений. Линейная и квадратичная скорость сходимости.

Основные понятия теории разностных схем (сетка, устойчивость, сходимость, аппроксимация).

Разностные схемы для уравнений в частных производных.

2.11 Математическая логика

Формулы, аксиомы, правила вывода. Вывод из гипотез.

2.12 Дискретная математика

Булевы функции. Формулы. ДНФ и КНФ. Графы. Контактные схемы. Замкнутые классы алгебры логики.

2.13 Исследование операций

Игра в нормальной форме, игра с нулевой суммой, матричная игра, цена игры, седловая точка.

2.14 Методы оптимизации

Экстремум, локальный экстремум, условный экстремум функции. Функция Лагранжа.

Вариационная задача.

Производные в векторных пространствах: производная по направлению, производные Гато, Фреше, вариация по Лагранжу.

Выпуклые множества, выпуклые функции, выпуклые экстремальные задачи. Седловая точка.

Линейная задача, двойственная задача

3 Вопросы экзаменационных билетов

Вопросы, выделенные жирным шрифтом, излагаются с доказательствами.

3.1 Алгебра

- Поле комплексных чисел. Алгебраическая и тригонометрическая форма комплексного числа. **Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме, формула Муавра.** Извлечение корней из комплексных чисел.
- Кольцо многочленов от одной переменной. Корень многочлена, теорема Безу, кратность корня. Неприводимые многочлены над \mathbb{R} и \mathbb{C} . Теорема о разложении многочлена в произведение неприводимых многочленов.
- Матрицы и алгебраические операции над ними. Ранг матрицы и его основные свойства. Обратная матрица, критерий существования и методы ее вычисления. Жорданова нормальная форма матрицы.
- Определители, их основные свойства. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема Лапласа. Разложение определителя по элементам строки (столбца). Определитель произведения квадратных матриц.
- Системы линейных алгебраических уравнений. Критерий совместности. Методы Гаусса и Крамера. Размерность и базис пространства всех решений однородной системы линейных уравнений.
- Векторные пространства. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис, размерность. Координаты вектора, их изменение при изменении базиса. Подпространства и операции над ними: пересечение, сумма, прямая сумма.
- Линейное отображение векторных пространств, его ядро и образ. Матрица линейного оператора. Матрица суммы и композиции линейных операторов. Теорема о сумме ранга и дефекта линейного оператора. Собственные значения и собственные векторы.

- Квадратичные формы. **Приведение квадратичной формы к каноническому виду.** Нормальный вид над \mathbb{R} и \mathbb{C} . Знакоопределенные квадратичные формы, критерий Сильвестра.
- Понятие группы, подгруппы, примеры.
- Понятие кольца, поля, подкольца, подполя, примеры.

3.2 Геометрия

- Свободные векторы в \mathbb{E}^3 , скалярное, векторное и смешанное произведения.
- Различные виды уравнений прямой и плоскости в \mathbb{E}^2 и в \mathbb{E}^3 .
- **Эллипс, гипербола, парабола, их уравнения и свойства.** Классификация кривых второго порядка в \mathbb{E}^2 .
- Аффинные пространства \mathbf{A}^n . Плоскости в \mathbf{A}^n и их уравнения. Взаимное расположение двух плоскостей.
- Евклидовы точечные пространства \mathbb{E}^n . Ортогональность плоскостей в \mathbb{E}^n . Расстояние от точки до плоскости в \mathbb{E}^n .

3.3 Дифференциальная геометрия

- Кривые в \mathbb{E}^2 и \mathbb{E}^3 и способы их задания. Натуральная параметризация кривой.
- Кривизна и кручение кривой, их геометрический смысл. **Формулы Френе.**
- Поверхности в \mathbb{E}^3 и способы их задания. Первая фундаментальная форма поверхности и задачи, решаемые с ее помощью.
- Нормальная кривизна поверхности. Вторая фундаментальная форма поверхности. Полная (гауссова) кривизна.

3.4 Математический анализ

- Вещественные числа и их основные свойства. Поле вещественных чисел. Важнейшие подмножества в \mathbb{R} и их мощность. Теорема Кантора о несчетности множества вещественных чисел.
- Числовые множества и их границы. Теорема о существовании точных границ.
- Предел последовательности и его свойства (единственность, операции над последовательностями, предельный переход в неравенствах). **Теорема о пределе монотонной последовательности. Число e .**
- Критерий Коши сходимости последовательности. Предельная точка множества в \mathbb{R} , лемма Больцано-Вейерштрасса о существовании предельной точки.
- **Лемма Бореля-Лебега о покрытиях отрезка интервалами.** Теорема о стягивающейся последовательности отрезков.

- Теоремы Ферма, Ролля, **Лагранжа (о конечных приращениях)**, Коши (об отношении приращений).
- **Правила Лопиталя раскрытия неопределенностей.**
- Формула Тейлора, остаточные члены в форме Пеано, Лагранжа, Коши.
- Определение интеграла Римана для функций одной переменной. Необходимое условие интегрируемости. Суммы Дарбу и их свойства. Критерий интегрируемости в терминах сумм Дарбу, критерий Лебега интегрируемости. Классы интегрируемых функций.
- Дифференцируемость интеграла с переменным верхним пределом. **Существование первообразной для непрерывной функции, формула Ньютона-Лейбница.** Интегрирование по частям и замена переменных в определенном интеграле.
- Понятие числового ряда, сходящиеся и расходящиеся ряды. Критерий Коши сходимости числовых рядов. Признаки сходимости положительных рядов. (Коши с корнем, Даламбера, Гаусса).
- Абсолютная и условная сходимость числовых рядов. **Признаки Дирихле и Абеля.**
- Функциональные ряды и последовательности. Равномерная сходимость. Критерий Коши равномерной сходимости. Признаки Вейерштрасса, Абеля и Дирихле для равномерной сходимости.
- **Интегральные представления частичных сумм тригонометрического ряда Фурье.** Лемма Римана-Лебега. Принцип локализации. Классы поточечной сходимости рядов Фурье.
- Локальные экстремумы функций одной и многих переменных. Необходимые и достаточные условия локального экстремума функции.
- Условный экстремум. Необходимые, достаточные условия. Метод множителей Лагранжа.
- Криволинейные интегралы и их основные свойства. Формула Грина.
- Поверхностные интегралы, формула Стокса, формула Гаусса-Остроградского.

3.5 Теория функций комплексного переменного

- Производная от функции комплексного переменного и ее геометрический смысл. Условия Коши-Римана.
- Интегральная теорема Коши. **Интегральная формула Коши.**
- Степенные ряды. Формула Коши-Адамара. Разложение аналитической функции в ряд Тейлора. Свойства аналитических функций.

- **Разложение аналитической функции в ряд Лорана.** Изолированные особые точки и их классификация. Основная теорема о вычетах. Приложения вычетов.
- Понятие конформного отображения и его связь со свойством аналитичности. Теорема Римана о конформных отображениях. Принцип соответствия границ.

3.6 Функциональный анализ

- Продолжение меры по Лебегу. Меры Лебега и Лебега-Стилтьеса на \mathbb{R} .
- **Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла Лебега.**
- Пространства со скалярным произведением, гильбертово пространство. Неравенство Коши-Буняковского.
- Пространства $L^p(T, \mu)$, неравенства Гёльдера, Минковского, полнота.
- **Теорема Банаха (принцип сжимающих отображений)** и его применения к интегральным уравнениям.
- Разложение по ортонормированным системам векторов в гильбертовом пространстве.
- Линейные непрерывные операторы. Норма оператора. Примеры.
- **Теорема о замыкании образа линейного непрерывного оператора.** Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений.
- Теорема Хана—Банаха о продолжении функционалов.

3.7 Теория вероятностей

- Аксиоматика Колмогорова. Условные вероятности.
- Числовые характеристики случайных величин — математическое ожидание, дисперсия, коэффициент корреляции и их свойства.
- **Критерии независимости случайных величин (дискретный, абсолютно непрерывный).**
- **Центральная предельная теорема для одинаково распределенных слагаемых.**
- Законы больших чисел. Неравенство и теоремы Колмогорова.

3.8 Дифференциальные уравнения

- Теорема Пикара о существовании и единственности решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения.
- **Линейные неоднородные дифференциальные уравнения и основные теоремы об их решениях. Метод вариации произвольных постоянных.**
- Теорема Коши о существовании и единственности решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения.
- Линейные однородные дифференциальные уравнения n -го порядка и основные теоремы об их решениях.
- Устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Теоремы Ляпунова.

3.9 Уравнения математической физики

- Основные краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона. Свойства гармонических функций. Теорема единственности для решений краевых задач
- Принцип максимума и теорема единственности для решений первой краевой задачи и задачи Коши для уравнения теплопроводности.
- **Метод Фурье решения смешанных задач для уравнения теплопроводности.**
- Метод Фурье решения смешанных задач для уравнения колебаний струны.
- **Формула Даламбера для решения задачи Коши для уравнения колебаний струны.**

3.10 Вычислительная математика

- Основные вычислительные схемы метода Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений.
- Метод итераций и общий неявный метод итераций для систем линейных алгебраических уравнений, теорема о сходимости.
- **Метод итераций для систем нелинейных уравнений, теорема о сходимости.** Метод Ньютона для операторных уравнений, теорема о сходимости.
- Метод Эйлера для решения задачи Коши в случае системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, сходимость метода. Метод Рунге-Кутты для решения задачи Коши в случае дифференциального уравнения первого порядка, четырехточечное правило.
- Основные понятия теории разностных схем: аппроксимация, устойчивость, сходимость. **Теорема о связи аппроксимации и устойчивости со сходимостью.**

- Явная и неявная двухслойная четырехточечная разностная схема для уравнения теплопроводности, условия устойчивости.

3.11 Математическая логика

- Исчисление высказываний. Формулы, аксиомы, правило вывода. Вывод из гипотез. **Теорема о дедукции в исчислении высказываний.**
- Логика предикатов. Язык логики предикатов, термы, формулы. Интерпретация формул логики предикатов. Выполнимость и общезначимость формул логики предикатов.
- Исчисление предикатов. Аксиомы, правила вывода. Вывод в исчислении предикатов. Теорема о дедукции в исчислении предикатов.

3.12 Дискретная математика

- Алгебра логики. n -мерный булев куб. Булевы функции. Формулы. Реализуемость функций формулами. Равносильность формул. Элементарные равносильности.
- Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы. Сокращенные, тупиковые и минимальные ДНФ и КНФ.
- **Критерий полноты Поста** и следствия из нее.

3.13 Исследование операций

- Теорема о разложении положительного потока.
- Потоки минимальной стоимости. Алгоритм Басакера-Гоуэна.
- Матричные игры. Цена. Седловая точка. Нахождение цены и седловой точки.

3.14 Методы оптимизации

- Теорема Куна-Таккера.
- Необходимое условие экстремума в классической вариационной задаче (уравнение Эйлера-Лагранжа).
- Метод множителей Лагранжа.
- Производные в векторных пространствах (вариация по Лагранжу, Гато, Фреше).
- Теорема двойственности в линейных задачах.