



# 微积分 重要公式

## The Important Equations of Calculus

关舒文  
华南理工大学

Latest Update : 2020 年 6 月 16 日

## 目录

<b>1</b>	<b>常用三角函数公式</b>	<b>1</b>
1.1	积化和差公式 . . . . .	1
1.2	和差化积公式 . . . . .	1
1.3	归一化公式 . . . . .	1
1.4	倍 (半) 角公式 降 (升) 幂公式 . . . . .	1
1.5	万能公式 . . . . .	2
<b>2</b>	<b>常用的佩亚诺型余项泰勒公式</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>基本求导公式</b>	<b>2</b>
<b>4</b>	<b>函数图形描述中涉及到的重要公式</b>	<b>3</b>
4.1	常用曲率计算公式 . . . . .	3
4.2	曲线的渐近线 . . . . .	3
<b>5</b>	<b>基本积分公式</b>	<b>3</b>
<b>6</b>	<b>基本积分方法</b>	<b>4</b>
6.1	第一类换元法 . . . . .	5
6.1.1	三角函数之积的积分 . . . . .	5
6.1.2	常见的凑微分类型 . . . . .	5
6.2	有理函数的积分 . . . . .	5
6.2.1	部分分式 . . . . .	5
6.2.2	三角函数的特殊定积分 . . . . .	6
<b>7</b>	<b>多元函数微分</b>	<b>6</b>
7.1	偏导数 . . . . .	6
7.1.1	偏导数记法 . . . . .	6
7.2	全微分 . . . . .	6
<b>8</b>	<b>微分方程 (该部分将会采用详细的讲义样式)</b>	<b>6</b>
8.1	微分方程的基本概念 . . . . .	6
<b>9</b>	<b>可分离变量的微分方程</b>	<b>7</b>

## 1 常用三角函数公式

### 1.1 积化和差公式

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] \quad (1.1.1)$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)] \quad (1.1.2)$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \quad (1.1.3)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)] \quad (1.1.4)$$

### 1.2 和差化积公式

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (1.2.1)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (1.2.2)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (1.2.3)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (1.2.4)$$

$$\tan \alpha + \tan \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} \quad (1.2.5)$$

### 1.3 归一化公式

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (1.3.1)$$

$$\sec^2 x - \tan^2 x = 1 \quad (1.3.2)$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad (1.3.3)$$

### 1.4 倍 (半) 角公式 降 (升) 幂公式

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) \quad (1.4.1)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) \quad (1.4.2)$$

$$\tan^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} \quad (1.4.3)$$

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \quad (1.4.4)$$

$$\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \quad (1.4.5)$$

$$\tan x = \frac{2 \tan(x/2)}{1 - \tan^2(x/2)} \quad (1.4.6)$$

## 1.5 万能公式

令  $u = \tan \frac{x}{2}$  则

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2} \quad (1.5.1)$$

$$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad (1.5.2)$$

## 2 常用的佩亚诺型余项泰勒公式

**泰勒公式** ( $\xi$  在  $x_0$  与  $x$  之间):

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o[(x-x_0)^n]$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

由此可得常用的泰勒公式

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n) \quad (2.0.1)$$

$$\ln(x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + o(x^n) \quad (2.0.2)$$

令  $n = 2m$  有,

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots + (-1)^{m-1}\frac{1}{(2m-1)!}x^{2m-1} + o(x^{2m}) \quad (2.0.3)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \cdots + (-1)^m\frac{1}{(2m)!}x^{2m} + o(x^{2m+1}) \quad (2.0.4)$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots + o(x^{2m-1}) \quad (2.0.5)$$

此处考虑到  $\tan$  的泰勒公式其通项公式会出现伯努利数故此处略去其通项

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots + o(x^{2m}) \quad (2.0.6)$$

常用于近似计算的泰勒公式

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n) \quad (2.0.7)$$

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= \sum_{i=0}^n \frac{\prod_{j=0}^{i-1} (\alpha-j)}{i!} x^i + o(x^n) \\ &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + o(x^n) \end{aligned} \quad (2.0.8)$$

$$\begin{aligned} \alpha^x &= \sum_{i=0}^n \frac{\ln^i \alpha}{i!} x^i + o(x^n) \\ &= 1 + x \ln \alpha + \frac{\ln^2 \alpha}{2} x^2 + \cdots + \frac{\ln^n \alpha}{n!} x^n + o(x^n) \end{aligned} \quad (2.0.9)$$

## 3 基本求导公式

$$(\csc x)' = -\csc x \cdot \tan x \quad (3.0.8)$$

$$(C)' = 0 \quad (3.0.1) \quad (a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0, a \neq 1) \quad (3.0.9)$$

$$(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1} \quad (3.0.2) \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a} \quad (a > 0, a \neq 1) \quad (3.0.10)$$

$$(\sin x)' = \cos x \quad (3.0.3) \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (3.0.11)$$

$$(\cos x)' = -\sin x \quad (3.0.4) \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (3.0.12)$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x \quad (3.0.5) \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (3.0.13)$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x \quad (3.0.6) \quad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \quad (3.0.14)$$

$$(\sec x)' = \sec x \cdot \tan x \quad (3.0.7)$$

## 4 函数图形描述中涉及到的重要公式

### 4.1 常用曲率计算公式

$$\text{曲率的定义式 } K = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right|$$

由定义式我们可以推得

1. 直角坐标系中的曲线  $y = y(x)$  有曲率表达式

$$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}; \quad (4.1.1)$$

2. 参数方程表示的曲线  $x = \varphi(t), y = \psi(t)$  有曲率表达式

$$K = \frac{|\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)|}{[\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)]^{3/2}}; \quad (4.1.2)$$

3. 极坐标表示的的曲线  $y = y(x)$  有曲率表达式

$$K = \frac{|r^2 + 2r'^2 - r \cdot r''|}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}; \quad (4.1.3)$$

4. 曲线在对应点  $M(x, y)$  的曲率中心  $D(\alpha, \beta)$  的坐标为

$$\begin{cases} \alpha = x - \frac{y'(1+y'^2)^3}{y''^2} \\ \beta = y + \frac{1+y'^2}{y''} \end{cases} \quad (4.1.4)$$

### 4.2 曲线的渐近线

1. 若  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ , 则称  $y = b$  为曲线  $f(x)$  的水平渐近线

2. 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ , 则称  $x = x_0$  为曲线  $f(x)$  的垂直渐近线

3. 若  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ , 其中  $\begin{cases} a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \\ b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] \end{cases}$  则称  $y = ax + b$  为曲线  $f(x)$  的斜渐近线

## 5 基本积分公式

$$\int k dx = kx + C \quad (\text{其中 } k \text{ 为常数}) \quad (5.0.1)$$

$$\int x^{\mu} dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1) \quad (5.0.2)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C \quad (5.0.3)$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C \quad (5.0.4)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C_1 = -\arccos x + C_2 \quad (5.0.5)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \quad (5.0.6)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C \quad (5.0.7)$$

$$\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C \quad (5.0.8)$$

$$\int \cot x dx = \ln |\sin x| + C \quad (5.0.9)$$

$$\int \csc x dx = \int \frac{1}{\sin x} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-\cos x}{1+\cos x} \right| + C = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C = \ln |\csc x - \cot x| + C \quad (5.0.10)$$

$$\int \sec x dx = \int \frac{1}{\cos x} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| + C = \ln |\sec x + \tan x| + C \quad (5.0.11)$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C \quad (5.0.12)$$

$$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C \quad (5.0.13)$$

$$\int \sec x \cdot \tan x dx = \sec x + C \quad (5.0.14)$$

$$\int \csc x \cdot \cot x dx = -\csc x + C \quad (5.0.15)$$

$$\int e^x dx = e^x + C \quad (5.0.16)$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (5.0.17)$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + C \quad (5.0.18)$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + C \quad (5.0.19)$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \quad (5.0.20)$$

$$\int \frac{1}{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C \quad (5.0.21)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (5.0.22)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C \quad (5.0.23)$$

## 6 基本积分方法

## 6.1 第一类换元法

### 6.1.1 三角函数之积的积分

1. 一般地, 对于  $\sin^{2k+1} x \cos^n x$  或  $\sin^n x \cos^{2k+1} x$  (其中  $k \in \mathbb{N}$ ) 型函数的积分, 总可依次作变换  $u = \cos x$  或  $u = \sin x$ , 从而求得结果;
2. 一般地, 对于  $\sin^{2k} x \cos^{2l} x$  或 (其中  $k, l \in \mathbb{N}$ ) 型函数的积分, 总是利用降幂公式  $\sin^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ ,  $\cos^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$  化成  $\cos 2x$  的多项式, 从而求得结果;
3. 一般地, 对于  $\tan^n x \sec^{2k} x$  或  $\tan^{2k-1} x \sec^n x$  (其中  $n, k \in \mathbb{N}_+$ ) 型函数的积分, 总可依次作变换  $u = \tan x$  或  $u = \sec x$ , 从而求得结果;

### 6.1.2 常见的凑微分类型

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} \int f(ax+b)d(ax+b) \quad (a \neq 0) \quad (6.1.1)$$

$$\int f(ax^{m+1}+b)x^m dx = \frac{1}{a(m+1)} \int f(ax^{m+1}+b)d(ax^{m+1}+b) \quad (6.1.2)$$

$$\int f\left(\frac{1}{x}\right) \frac{dx}{x^2} = - \int f\left(\frac{1}{x}\right) d\left(\frac{1}{x}\right) \quad (6.1.3)$$

$$\int f(\ln x) \frac{1}{x} dx = \int f(\ln x) d(\ln x) \quad (6.1.4)$$

$$\int f(e^x) e^x dx = \int f(e^x) d(e^x) \quad (6.1.5)$$

$$\int f(\sqrt{x}) \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \int f(\sqrt{x}) d(\sqrt{x}) \quad (6.1.6)$$

$$\int f(\sin x) \cos x dx = \int f(\sin x) d \sin x \quad (6.1.7)$$

$$\int f(\cos x) \sin x dx = - \int f(\cos x) d \cos x \quad (6.1.8)$$

$$\int f(\tan x) \sec^2 x dx = \int f(\tan x) d \tan x \quad (6.1.9)$$

$$\int f(\cot x) \csc^2 x dx = - \int f(\cot x) d \cot x \quad (6.1.10)$$

$$\int f(\arcsin x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int f(\arcsin x) d \arcsin x \quad (6.1.11)$$

$$\int f(\arctan x) \frac{1}{1+x^2} dx = \int f(\arctan x) d \arctan x \quad (6.1.12)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln |f(x)| + C \quad (6.1.13)$$

## 6.2 有理函数的积分

### 6.2.1 部分分式

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_\alpha}{x-a} + \\ & \frac{B_1}{(x-b)^\beta} + \frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{B_\beta}{x-b} + \end{aligned}$$

$$\frac{M_1x + N_1}{(x^2 + px + q)^\lambda} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + px + q)^{\lambda-1}} + \cdots + \frac{M_\lambda x + N_\lambda}{x^2 + px + q} + \cdots \quad (6.2.1)$$

## 6.2.2 三角函数的特殊定积分

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx \\ I_n &= \frac{n-1}{n} I_{n-2} \\ &= \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} & (n \text{ 为大于1的正奇数}), I_1 = 1 \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} & (n \text{ 为正偶数}), I_0 = \frac{\pi}{2} \end{cases} \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

## 7 多元函数微分

### 7.1 偏导数

#### 7.1.1 偏导数记法

设函数  $z = f(x, y)$  在区域  $D$  内有偏导数:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f_y(x, y)$$

他们的偏导数若存在, 那么称其偏导数为  $z = f(x, y)$  的 **二阶偏导数**. 按照对变量求导次序不同, 有如下四个二阶偏导数:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y) & \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x, y) & \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y). \end{aligned}$$

### 7.2 全微分

## 8 微分方程 (该部分将会采用详细的讲义样式)

### 8.1 微分方程的基本概念

#### 定义 8.1 微分方程的定义

一般地, 凡表示 **未知函数**, **未知函数的导数** 与 **自变量之间的关系** 的 **方程**, 称为 **微分方程**. 其中未知函数的最高阶导数的阶数, 称为 **微分方程的阶**. 一般地,  $n$  阶微分方程的形式是:

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

#### 定义 8.2 微分方程的解

设函数  $y = \varphi(x)$  在区间  $I$  上有  $n$  阶连续导数, 如果在区间  $I$  上有:

$$F[x, \varphi(x), \varphi'(x), \cdots, \varphi^{(n)}(x)] \equiv 0,$$

那么函数  $y = \varphi(x)$  称为 **微分方程**  $F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$  在区间  $I$  上的 **解**. 特别地, 如果微分方程的解 **含有任意常数**<sup>1</sup>, 且任意常数的个数与微分方程的阶数相同, 这样的解称为 **微分方程的通解**.

<sup>1</sup>此处的任意常数必须是相互独立的, 或者说他们线性无关.



通解中时常含有任意常数, 所以它还不能完全确定地反映某一客观事物的规律性. 所以为了完全确定地反映客观事物的规律性, 必须确定这些常数的值. 为此要根据问题的实际情况, 提出确定这些常数的条件. 例如设一阶微分方程中的未知函数为  $y = \varphi(x)$ , 通常给出的条件为  $x = x_0, y = y_0$ , 也记为  $y|_{x=x_0} = y_0$ .

因此我们定义, 在实际问题中所给定的能够确定这些常数的条件称为**初值条件**. 由初值条件确定了常数的值进而可以得到微分方程的**特解**.

## 9 可分离变量的微分方程

本节我们将讨论一阶微分方程  $y' = f(x, y)$