



# 概率论 & 数理统计













Probability and Mathematical Statistics

易鹏 关舒文

Latest Update : 2020 年 10 月 27 日



# 符号说明

	Color #0097e6
	Color #7158e2
	Color #007500
	Color #ED4C67
	Color #EA7500
	Color #1289A7
	Color #EA2027
	Color #bf0040
	Color #833471
	Color #006266
	Color #5758BB
	Color #F8FF00



# 目录

符号说明	i
第 1 章 静力学基础	1
1.1 静力学基础	1
1.1.1 力及其性质	1
第 2 章 材料力学的基本概念	3
2.1 基本概念与主要研究任务	3
2.1.1 基本概念	3
2.1.2 主要研究任务	3
2.2 基本假设	3
2.3 内力的求法	4
2.4 应变	4
2.5 杆件变形的基本形式	4
第 3 章 拉伸与压缩	5
3.1 轴向拉伸与压缩的概念	5
3.1.1 变形特点和受力特点	5
3.1.2 截面法求内力	5
3.2 轴向拉伸或压缩时横截面上的内力和应力	5
第 4 章 扭转	7
4.1 扭转的概念	7
4.2 外力偶矩的计算	7
4.3 扭矩和扭矩图	7
4.3.1 扭矩的计算	7
4.3.2 扭矩的符号规定	7
4.3.3 扭矩图	8
4.4 纯剪切	8
4.4.1 薄壁圆筒扭转	8
4.4.2 切应力互等定理	8
4.4.3 剪切胡可定律	9

第 5 章 公式总结 .....	11
5.1 轴向拉压 .....	11
5.1.1 基本公式 .....	11
附录 .....	12
a. 索引 .....	12



# 第 1 章 静力学基础

## 1.1 静力学基础

### 1.1.1 力及其性质

#### 定义 1.1.1 力的定义

力是物体间的**相互机械作用**, 具有两种 **作用效应**:

- 外效应 (运动效应): 改变物体的运动状态;
- 内效应 (变形效应): 使物体的几何形状或尺寸发生改变.

#### 定义 1.1.2 力的三要素

我们常用一个矢量  $\boldsymbol{F}$  来表示一个力. 其中力的三要素: 大小, 方向, 作用点. 我们分别用适量的比例长度来表示力的大小, 矢量方向表示力的方向, 矢量的始端作为作用点.

#### 定义 1.1.3 力系的概念

力系: 作用在物体上的一群力; 平衡力系: 物体在力系作用下处于平衡; 刚体: 在力的作用下, 形状大小和尺寸变化都可以忽略的物体; 平衡: 物体处于静止或匀速运动状态.

#### 定理 1.1.1

公理作用在物体上同一点的两个力, 可以合成为一个力, 合力作用在同一点, 其大小由以这两个力为边的平行四边形的对角线来确定. 即合力矢等于这两个力的矢量和, 即

$$\boldsymbol{F}_R = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$$

, 如图所示

复杂力系简化的理论基础

#### 推论 1.1.1 力的多边形法则

作用于物体上同一点的多个力 (汇交力系), 可以合成为一个合力, 合力作用在该汇交点上, 其大小和方向等于各力的矢量和:

$$\boldsymbol{F}_r = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \cdots + \boldsymbol{F}_n = \sum \boldsymbol{F}_i$$

**定理 1.1.2 二力平衡条件**

作用在刚体上的两个力, 使物体平衡有以下充要条件:

$$\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2.$$

这表明两个力

1. 大小相等
2. 方向相反
3. 作用在同一直线上

注意: 对于刚体来说, 上面的条件为充要条件, 但是对于变形体和多体, 只是必要条件.

**定义 1.1.4 二力构件**

只在两个力的作用下平衡的构件称为**二力构件**

**定理 1.1.3 加减平衡力系原理**

在已知力系上加上或减去任意一个平衡力系, 并不改变原力系对刚体的作用效应

**推论 1.1.2 刚体力的可传性****定理 1.1.4 作用力和反作用力定律**

作用力与反作用力总是同时存在, 大小相等, 方向相反, 沿着同一条直线, 分别作用在 **两个相互作用的物体** 上

**定理 1.1.5 刚化原理**

变形体在某一力作用下处于平衡, 如将此变形体刚化为刚体, 其平衡状态保持不变刚体平衡条件使变形体刚化为刚体的必要非充分条件, 研究变形体的平衡问题, 可用刚体静力学的平衡理论.





## 第 2 章 材料力学的基本概念

### 2.1 基本概念与主要研究任务

#### 2.1.1 基本概念

**构件** 组成结构物和机械的最基本的部件.

**失效** 工程构件在外力作用下丧失正常功能的现象称为失效或破坏.

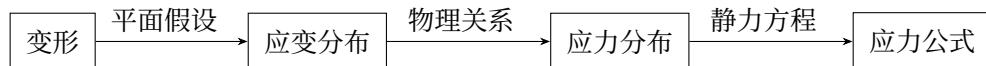
- 强度失效 构件在外力作用下发生不可恢复的塑性变形或发生断裂.
- 稳定性失效 构件在外力作用下其平衡形式发生突然转变.(压缩载荷大于某值)
- 刚度失效 构件在外力作用下产生过量的弹性变形。

#### 2.1.2 主要研究任务

##### 1. 四方面要求

- 强度要求 杆件在外力作用下绝对不能发生破坏, 以避免经济损失和事故发生.  
在外力作用下构件抵抗破坏的能力.
- 刚度要求 杆件在外力作用下不发生过分变形, 以保证结构或机器正常工作.  
在外力作用下构件抵抗变形的能力.
- 稳定性要求 杆件在外力作用下不发生过分变形, 以保证结构或机器正常工作.  
在外力作用下保持其原有的平衡状态的能力.
- 经济要求 在符合安全性要求 (前面三条) 的情况下尽可能的节省材料.

##### 2. 主要思路



注意: 与静力学不同的是, 由于力的位置对材料的变形有影响, 导致内力的变化. 因此, 在材料力学中, 力不可以随意移动.

### 2.2 基本假设

#### 连续性假设

认为整个物体体积内毫无空隙地充满物质.

#### 均匀性假设

认为物体内的任何部分, 其力学性能相同.

#### 各向同性假设

认为在物体内各个不同方向的力学性能相同

**小变形假设**

变形与本身的尺寸相比很小, 可忽略不计.

**线弹性假设**

外力与变形成正比.

**2.3 内力的求法****2.4 应变****定义 2.4.1 应力**

单位面积上的内力, 即某截面处内力的密集程度.

**平均应力**

$F$  总内力大小 (N)  
 $A$  截面的面积 ( $\text{m}^2$ )  
 $p$  截面的应力 (Pa)

$$p_m = \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad (2.4.1)$$

**单点应力**

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{\text{d}F}{\text{d}A} \quad (2.4.2)$$

**定义 2.4.2 变形**

构件受力以后, 形状和尺寸的变化.

**线变形 (线应变)**

$l_1$  变形后长度 (m)  
 $l_0$  变形前长度 (m)  
 $\varepsilon$  线应变 (无量纲)  
 $\alpha$  变形后角度 (rad)  
 $\gamma$  切应变 (无量纲)

$$\varepsilon = \frac{l_1 - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (2.4.3)$$

**角变形 (角应变, 切应变)**

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad (2.4.4)$$

**2.5 杆件变形的基本形式****二力杆**

特点: 大小相等, 方向相反, 作用线与杆重合的力.

**剪切**

特点: 大小相等, 方向相反, 相互平行的力.

**扭转**

特点: 大小相等, 方向相反, 作用面都垂直于杆件轴线的两个力偶

**弯曲**

特点: 垂直于杆件轴线的纵向平面内的一对大小相等, 方向相反的力偶.



## 第 3 章 拉伸与压缩

### 3.1 轴向拉伸与压缩的概念

#### 3.1.1 变形特点和受力特点

作用于杆件两端的外力合力的作用线与杆件轴线重合, 杆件变形是沿轴线方向的伸长或缩短.

#### 3.1.2 截面法求内力

##### 方法 3.1.1 截面法求内力

- 假想沿  $m - m$  截面截开.
- 留下左半段或右半段.
- 将弃去部分对留下部分的作用用内力代替
- 对留下部分写力平衡方程, 求出内力的值.

##### 定义 3.1.1 轴力

由于外力作用线与杆件轴线重合, 内力的作用线也与杆件的轴线重合.

轴力的正负性:

拉  $\rightarrow$  正, 压  $\rightarrow$  负

##### 定义 3.1.2 轴力图

轴力沿杆件轴线的变化.

### 3.2 轴向拉伸或压缩时横截面上的内力和应力

杆件的强度不仅与轴力有关, 还与横截面面积有关. 必须用应力来比较和判断杆件的强度. 在拉 (压) 杆的横截面上, 与轴力  $F_N$  对应的应力是正应力  $\sigma$ . 根据连续性假设, 横截面上到处都存在着内力. 于是得静力关系:





## 第 4 章 扭转

### 4.1 扭转的概念

#### 定义 4.1.1 扭转变形

扭转变形是杆件受到大小相等, 方向相反且作用平面垂直于杆件轴线的力偶作用, 使杆件的横截面绕轴线产生转动。

- 受力特点

杆件的两端作用两个 **大小相等**、**方向相反**、且 **作用面垂直于杆件轴线** 的力偶。

- 变形特点

杆件的任意两个横截面都发生绕轴线的相对转动。

### 4.2 外力偶矩的计算

#### 定理 4.2.1 外力偶矩

工程中有许多传递功率的轴, 需要根据它的转速  $n$  和传递的功率  $N_p$  计算出外力偶矩。力偶在单位时间内所作之功就是功率, 它等于:

$$N_p = M_n \omega \quad (4.2.1)$$

$N_p$  常用 kw(千瓦) 表示, 而  $w$  常用 rpm(转/分) 表示. 即

$$M_e = 9549 \frac{P}{n} \quad (4.2.2)$$

$M_e$  外力偶矩 (N/m)  
 $P$  功率 (kw)  
 $n$  转速 (r/min)

### 4.3 扭矩和扭矩图

#### 4.3.1 扭矩的计算

##### 截面法

求内力时, 在  $n-n$  截面处假想将轴截开取左侧为研究对象, 由

$$\sum M_x = 0$$

可以得到

$$T = M_e \quad (4.3.1)$$

其中  $T$  就称为 **扭矩**。(参看图4.1(a)和图4.1(c))

#### 4.3.2 扭矩的符号规定

采用右手螺旋法则, 当力偶矩矢的指向背离截面时扭矩为正, 反之为负。

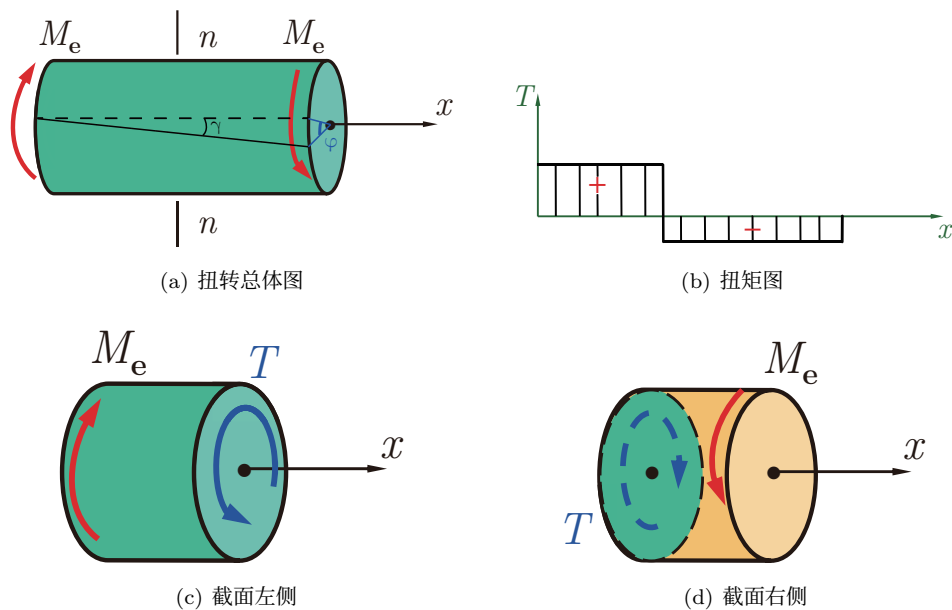


图 4.1: 扭矩与扭矩图

### 4.3.3 扭矩图

用平行于杆轴线的坐标  $x$  表示横截面的位置;用垂直于杆轴线的坐标  $T$  表示横截面上的扭矩, 正的扭矩画在  $x$  轴上方, 负的扭矩画在  $x$  轴下方.(参看图4.1(b))

## 4.4 纯剪切

### 4.4.1 薄壁圆筒扭转

#### 受力特点

- 横截面上无正应力, 只有切应力;
- 切应力方向垂直半径或与圆周相切.

圆周各点处切应力的方向于圆周相切, 且数值相等, 近似的认为沿壁厚方向各点处切应力的数值无变化.

#### 定理 4.4.1 薄壁圆筒扭转时的切应力

由扭矩  $T$  的定义, 有

$$T = \int_A \tau \, dA \cdot r = \tau \cdot r \int_A dA = \tau \cdot r (2\pi \cdot r \cdot \delta)$$

即

$$\tau = \frac{T}{2\pi r^2 \cdot \delta} \quad (4.4.1)$$

式(4.4.1)为薄壁圆筒扭转时横截面上切应力的计算公式. 薄壁筒扭转时横截面上的切应力均匀分布, 与半径垂直, 指向与扭矩的转向一致.

### 4.4.2 切应力互等定理

#### 定理 4.4.2 切应力互等定理

在单元体左、右面 (杆的横截面) 只有切应力, 其方向于  $y$  轴平行. 由平衡方程

$$\sum F_y = 0$$

$T$  扭矩 (N/m)  
 $\tau$  切应变 (Pa)  
 $r$  圆筒半径 (m)  
 $\delta$  圆筒厚度 (m)

可知两侧面的内力元素  $\tau \, dy \, dz$  大小相等, 方向相反, 它们组成为力偶, 其矩为  $(\tau \, dy \, dz) \, dx$   
 又由平衡方程

$$\sum F_y = 0 \quad \sum M_z = 0$$

可知在单元体的上、下两平面上必有大小相等, 指向相反的一对内力元素  $\tau' \, dx \, dy$ .  
 它们组成为力偶, 其矩为  $(\tau' \, dx \, dy) \, dz$ . 即

$$(\tau \, dy \, dz) \, dx = (\tau' \, dx \, dy) \, dz$$

即

$$\tau = \tau' \quad (4.4.2)$$

单元体两个相互垂直平面上的切应力同时存在, 且大小相等, 都指相 (或背离) 该两平面的交线.

#### 定义 4.4.1 纯剪切单元体

单元体平面上只有切应力而无正应力, 则称为 **纯剪切单元体**.

### 4.4.3 剪切胡可定律

#### 定理 4.4.3 剪切胡可定律

由几何关系得到

$$\gamma = \frac{r\varphi}{l}$$

薄壁圆筒的扭转试验发现, 当外力偶  $M_e$  在某一范围内 (比例极限内) 时, 与  $M_e$  (在数值上等于  $T$ ) 成正比. 从  $T$  与  $\varphi$  之间的线性关系, 可推出  $\tau$  与  $\gamma$  间的线性关系.  
 即

$$\tau = G\gamma \quad (4.4.3)$$

式(4.4.3)称为材料的 **剪切胡克定律**.

其中  $G$  称为 **切变模量**, 三个弹性常数的关系如下:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

$$(4.4.4) \quad \begin{array}{ll} E & \text{弹性模量} \\ G & \text{切变模量} \\ \mu & \text{泊松比} \end{array}$$

$\gamma$  纵向线变形后的倾角  
 $\varphi$  圆筒两端的相对扭转角  
 $r$  圆筒外半径  
 $l$  圆筒长度 (m)







## 第 5 章 公式总结

### 5.1 轴向拉压

#### 5.1.1 基本公式

类别	公式	
应力	$\sigma = \frac{F_N}{A} = \frac{F}{A}$	$A$ 杆的横截面积
变形	$\Delta l = \frac{F_N l}{EA} = \frac{F l}{EA}$	
线应变	$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{F}{EA} = \frac{\sigma}{E}$	
应变能	$V_\varepsilon = \frac{F^2 l}{2EA}$	
单位应变能	$v_\varepsilon = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon = \frac{E \varepsilon^2}{2} = \frac{\sigma^2}{2E}$	
强度条件	$\sigma_{\max} \leq [\sigma]$	
刚度条件	$\varepsilon_{\max} \leq [\varepsilon]$	

# 索引

## B

变形, 4

## C

纯剪切单元体, 9

## E

二力杆, 4

## G

刚度, 3

构件, 3

各向同性假设, 3

## J

截面法, 5, 7

剪切, 4

剪切胡克定律, 9

角应变, 4

均匀性假设, 3

## L

连续性假设, 3

## N

扭转, 4, 7

扭矩图, 8

## Q

切变模量, 9

强度, 3

切应变, 4

切应力互等定理, 8

## S

失效, 3

刚度失效, 3

强度失效, 3

稳定性失效, 3

## W

稳定性, 3

外力偶矩, 7

弯曲, 4

## X

小变形假设, 4

线弹性假设, 4

线应变, 4

## Y

应力, 4

## Z

轴力, 5

轴力图, 5