概率论 & 数理统计

Probability and Mathematical Statistics

易鹏 关舒文

Latest Update : 2020 年 9 月 27 日

符号说明

Color #0097e6

Color #7158e2

Color #007500

Color #ED4C67

Color #EA7500

Color #1289A7

Color #EA2027

Color #bf0040

Color #833471

Color #006266

Color #5758BB

目录

第 1 章 静力学基础

1.1 静力学基础

1.1.1 力及其性质

定义 1.1.1 力的定义

力是物体间的**相互机械作用**, 具有两种 作用效应 :

- 外效应 (运动效应): 改变物体的运动状态;
- 内效应 (变形效应): 使物体的几何形状或尺寸发生改变.

定义 1.1.2 力的三要素

我们常用一个矢量 $\boldsymbol{F}$ 来表示一个力. 其中力的三要素: 大小, 方向, 作用点. 我们分别用适量的比例长度来表示力的大小, 矢量方向表示力的方向, 矢量的始端作为作用点.

定义 1.1.3 力系的概念

力系: 作用在物体上的一群力; 平衡力系: 物体在力系作用下处于平衡; 刚体: 在力的作用下, 形状大小和尺寸变化都可以忽略的物体; 平衡: 物体处于静止或匀速运动状态.

定理 1.1.1

公理作用在物体上同一点的两个力, 可以合成为一个力, 合力作用在同一点, 其大小由以这两个力为边的平行四边形的对角线来确定. 即合力矢等于这两个力的矢量和, 即

$$\boldsymbol{F}_R = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$$

, 如图所示

复杂力系简化的理论基础

推论 1.1.1 力的多边形法则

作用于物体上同一点的多个力 (汇交力系), 可以合成为一个合力, 合力作用在该汇交点上, 其大小和方向等于各力的矢量和:

$$\boldsymbol{F}_r = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \cdots + \boldsymbol{F}_n = \sum \boldsymbol{F}_i$$

定理 1.1.2 二力平衡条件

作用在刚体上的两个力, 使物体平衡有以下充要条件:

$$\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2.$$

这表明两个力

1. 大小相等
2. 方向相反
3. 作用在同一直线上

注意: 对于刚体来说, 上面的条件为充要条件, 但是对于变形体和多体, 只是必要条件.

定义 1.1.4 二力构件

只在两个力的作用下平衡的构件称为**二力构件**

定理 1.1.3 加减平衡力系原理

在已知力系上加上或减去任意一个平衡力系, 并不改变原力系对刚体的作用效应

推论 1.1.2 刚体力的可传性

定理 1.1.4 作用力和反作用力定律

作用力与反作用力总是同时存在, 大小相等, 方向相反, 沿着同一条直线, 分别作用在 两个相互作用的的物体 上

定理 1.1.5 刚化原理

变形体在某一力作用下处于平衡, 如将此变形体刚化为刚体, 其平衡状态保持不变刚体平衡条件使变形体刚化为刚体的必要非充分条件, 研究变形体的平衡问题, 可用刚体静力学的平衡理论.

第 2 章 扭转

2.1 扭转的概念

定义 2.1.1 扭转变形

扭转变形是杆件受到大小相等, 方向相反且作用平面垂直于杆件轴线的力偶作用, 使杆件的横截面绕轴线产生转动。

- 受力特点

  杆件的两端作用两个 大小相等、 方向相反、且 作用面垂直于杆件轴线 的力偶.

- 变形特点

  杆件的任意两个横截面都发生绕轴线的相对转动.

2.2 外力偶矩的计算

定理 2.2.1 外力偶矩

工程中有许多传递功率的轴, 需要根据它的转速 n 和传递的功率 N_p 计算出外力偶矩。力偶在单位时间内所作之功就是功率, 它等于:

$$N_p = M_n \omega \tag{2.2.1}$$

N_p 常用 kw(千瓦) 表示, 而 w 常用 rpm(转/分) 表示. 即

$$M_e = 9549 \frac{P}{n} \tag{2.2.2}$$

M_e 外力偶矩 (N/m)
P 功率 (kw)
n 转速 (r/min)

2.3 扭矩和扭矩图

2.3.1 扭矩的计算

截面法 求内力时, 在 $n-n$ 截面处假想将轴截开取左侧为研究对象, 由

$$\sum M_x = 0$$

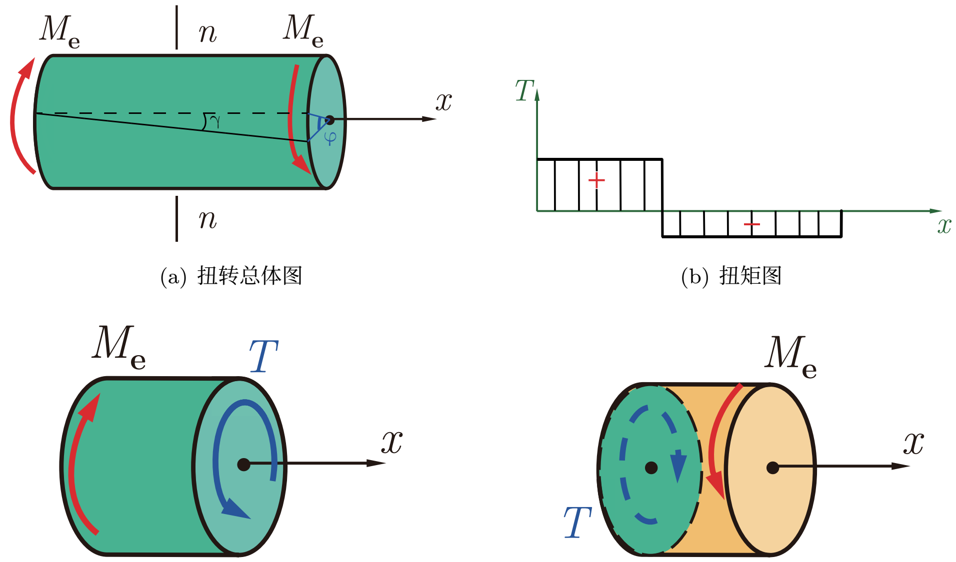
可以得到

$$T = M_e \tag{2.3.1}$$

其中 T 就称为 扭矩 .(参看图2.1(a)和图2.1(c))

2.3.2 扭矩的符号规定

采用右手螺旋法则, 当力偶矩矢的指向背离截面时扭矩为正, 反之为负.



(a) 扭转总体图　　(b) 扭矩图

(c) 截面左侧　　(d) 截面右侧

图 2.1: 扭矩与扭矩图

2.3.3　扭矩图

用平行于杆轴线的坐标 x 表示横截面的位置; 用垂直于杆轴线的坐标 T 表示横截面上的扭矩, 正的扭矩画在 x 轴上方, 负的扭矩画在 x 轴下方.(参看图2.1(b))

2.4　纯剪切

2.4.1　薄壁圆筒扭转

受力特点

- 横截面上无正应力, 只有切应力;
- 切应力方向垂直半径或与圆周相切.

圆周各点处切应力的方向于圆周相切, 且数值相等, 近似的认为沿壁厚方向各点处切应力的数值无变化.

定理 2.4.1　薄壁圆筒扭转时的切应力

由扭矩 T 的定义, 有

T　扭矩 (N/m)
τ　切应变 (Pa)
r　圆筒半径 (m)
δ　圆筒厚度 (m)

$$T=\int_A \tau\ \mathrm{d}A\cdot r=\tau\cdot r\int_A\ \mathrm{d}A=\tau\cdot r(2\pi\cdot r\cdot\delta)$$

即

$$\tau=\frac{T}{2\pi r^2\cdot\delta} \tag{2.4.1}$$

式(2.4.1)为薄壁圆筒扭转时横截面上切应力的计算公式. 薄壁筒扭转时横截面上的切应力均匀分布, 与半径垂直, 指向与扭矩的转向一致.

2.4.2　切应力互等定理

定理 2.4.2　切应力互等定理

在单元体左、右面 (杆的横截面) 只有切应力, 其方向于 y 轴平行. 由平衡方程

$$\sum F_y=0$$

可知两侧面的内力元素 $\tau\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$ 大小相等, 方向相反, 它们组成力偶, 其矩为 $(\tau\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z)\ \mathrm{d}x$
又由平衡方程

$$\sum F_y = 0 \qquad \sum M_z = 0$$

可知在单元体的上、下两平面上必有大小相等, 指向相反的一对内力元素 $\tau'\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$.
它们组成力偶, 其矩为 $(\tau'\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y)\ \mathrm{d}z$. 即

$$(\tau\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z)\ \mathrm{d}x = (\tau'\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y)\ \mathrm{d}z$$

即

$$\tau = \tau' \tag{2.4.2}$$

单元体两个相互垂直平面上的切应力同时存在, 且大小相等, 都指相 (或背离) 该两平面的交线.

定义 2.4.1　纯剪切单元体

单元体平面上只有切应力而无正应力, 则称为纯剪切单元体.

2.4.3　剪切胡可定律

定理 2.4.3　剪切胡可定律

由几何关系得到

$$\gamma = \frac{r\varphi}{l}$$

γ　纵向线变形后的倾角
φ　圆筒两端的相对扭转角
r　圆筒外半径
l　圆筒长度 (m)

薄壁圆筒的扭转试验发现, 当外力偶 M_e 在某一范围内 (比例极限内) 时, 与 M_e (在数值上等于 T) 成正比. 从 T 与 φ 之间的线性关系, 可推出 τ 与 γ 间的线性关系.
即

$$\tau = G\gamma \tag{2.4.3}$$

式(2.4.3)称为材料的剪切胡克定律.
其中 G 称为切变模量, 三个弹性常数的关系如下:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \tag{2.4.4}$$

E　弹性模量
G　切变模量
μ　泊松比