

Лабораторная работа № 3.1.3 "Измерение магнитного поля Земли"

Кирилл Шевцов Б03-402

8.09.2025

Цель работы

Исследовать свойства постоянных неодимовых магнитов, с их помощью измерить горизонтальную и вертикальную составляющую индукции магнитного поля Земли и наклонение.

Оборудование

Неодимовые магниты, тонкая нить для изготовления крутильного маятника, медная проволока, электронные весы, секундомер, измеритель магнитной индукции, штангенциркуль.

Экспериментальная установка

Следующие установки помогут измерить: период крутильных колебаний (а), силу отрыва цепочки шариков (б), магнитный момент для двух шариков (с).

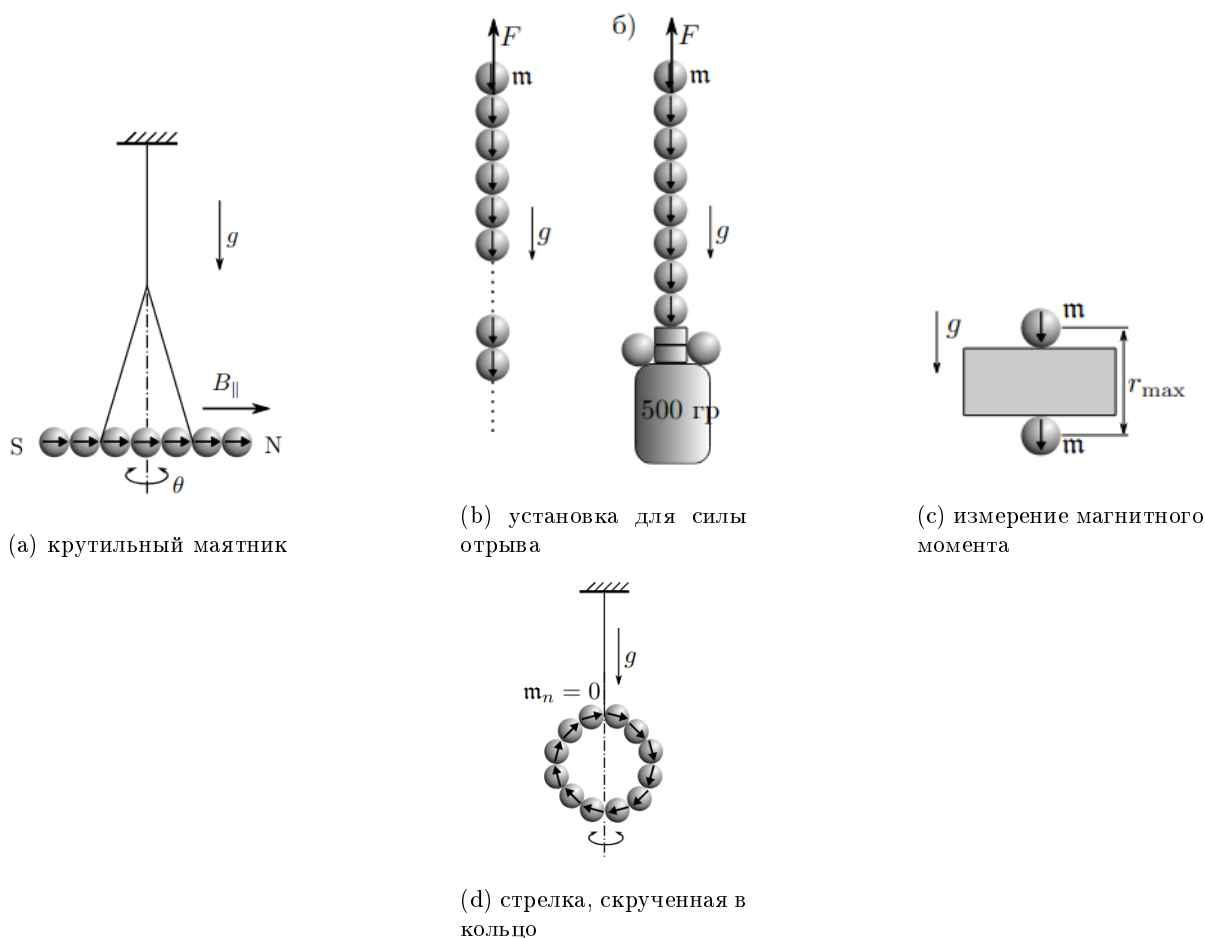


Рис. 1: экспериментальные установки

Установки б и с дают один результат для измерения магнитного момента. Можно скрутить магнитную стрелку в кольцо, и показать, что упругость нити при вычислении периода колебаний стрелки можно не учитывать (см. рис. d).

Необходимые формулы и теория

Простейший магнитный диполь может быть образован витком с током или постоянным магнитом.

Магнитное поле точечного диполя вычисляется подобно формуле напряженности электрического поля этого диполя:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right) \quad (1)$$

Здесь $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м - магнитная постоянная, \mathbf{m} - магнитный момент точечного диполя, \mathbf{r} - радиус вектор, направленный от диполя в рассматриваемую точку.

Во внешнем магнитном поле с индукцией \mathbf{B} на точечный магнитный диполь \mathbf{m} действует механический момент сил:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{m} \times \mathbf{B}] \quad (2)$$

В неоднородном магнитном поле на точечный диполь действует сила:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{B} \quad (3)$$

В частности, проекция силы на ось Ox :

$$F_x = m_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + m_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + m_z \frac{\partial B_x}{\partial z} \quad (4)$$

Формулы (2) и (3) помогают рассчитать силу взаимодействия магнитов с моментами \mathbf{m}_1 и \mathbf{m}_2 в рамках точечных диполей:

$$F_{12} = \mathbf{m}_1 \frac{\partial B_2}{\partial r} = \mathbf{m}_1 \frac{\partial (2\mathbf{m}_2/r^3)}{\partial r} = -6 \frac{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2}{r^4} \quad (5)$$

Еще одной характеристикой магнитов является намагниченность, равная объёмной плотности магнитного момента:

$$\mathbf{M} = \mathbf{m}/V \quad (6)$$

Вf

Для расчета магнитного поля Земли есть несколько методов:

1. Определить магнитный момент \mathbf{m} двух из шариков, определив наибольшее расстояние r_{max} , на котором они смогут удерживать друг друга в поле тяжести. По величине \mathbf{m} с помощью (1) рассчитать величину индукции вблизи любой точки на поверхности шара радиусом R .

$$\mathbf{m} = \sqrt{\frac{mgr_{max}^4}{6}} \quad (7)$$

Учтем, что здесь магнитный момент представлен вычислением в единицах СГС.

2. Величину магнитного поля можно определить с помощью силы сцепления намагниченных шариков. Определим ее, как необходимую силу для разрыва двух сцепившихся шариков. Сила сцепления (5) равна:

$$F_0 = \frac{6\mathbf{m}^2}{(2R)^4} = \frac{3\mathbf{m}^2}{8R^4} \quad (8)$$

Минимальный вес цепочки, при которой она оторвется от верхнего шарика, равна:

$$F = F_0 \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^4} \right) \approx 1,08 F_0 \quad (9)$$

Учтём, что сила сцепления шариков при их отрывании убывает как $1/r^4$.

3. Рассчитать магнитное поле Земли можно с помощью составляющих: вертикальной и горизонтальной, ведь:

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}_{||} + \vec{\mathbf{B}}_{\perp} \quad (10)$$

Горизонтальную составляющую поля можно рассчитать с помощью измерения периода крутильных колебаний "магнитной стрелки" вокруг своей оси:

$$T_n = 2\pi \sqrt{\frac{mR^2}{3\mathbf{m}B_{||}}} \cdot n \quad (11)$$

По зависимости $T(n) = f(n)$, а это прямая, можно определить коэффициент наклона и по нему найти модуль горизонтальной составляющей поля.

Вертикальная составляющая: из-за возникающего момента силы натяжения нити необходимо выровнять положение стрелки, подвесив на некоторое ее расстояние x груз массой m_x . Отсюда получим выражение для вертикальной составляющей магнитного поля:

$$m_x g x = n \mathbf{m} B_{\perp} \iff B_{\perp} = \frac{m_x g x}{n \mathbf{m}} \quad (12)$$

Выполнение работы

1. Измерим массу одного шарика с помощью весов и его диаметр с помощью штангенциркуля (погрешности измерений массы и диаметра Δm , Δd), вычислим его объем:

Масса шарика, г	Диаметр шарика, см	Δm , г	Δd , см	V , cm^3	ΔV , cm^3
0.841 ± 0.001	0.59 ± 0.01	0.001	0.01	0.022	$2.23 \cdot 10^{-3}$

$$V = \frac{1}{6}\pi D^3 = 0.022 \pm cm^3 \quad \Delta V = \frac{6V\Delta D}{D} = 2.23 \cdot 10^{-3} cm^3$$

2. Измерим магнитное поле на полюсах шарика с помощью магнитометра: $B_p = 420 \pm 1$ мТл. Магнитное поле неодимового магнита больше всего на его полюсах, где ориентирован магнитный момент.
3. Рассчитаем величину магнитного момента одного шарика с помощью установки (с). Максимальное расстояние, при котором шарики перестают взаимодействовать равно $r_{max} = 2.20 \pm 0.05$ см

$$m = \sqrt{\frac{0.841 \cdot 980.67 \cdot 2.20^4}{6}} = 56.74 \pm 0.85 \text{ эрг/Гс} \quad \Delta m = m \cdot \left(\frac{\Delta m}{m} + \frac{2\Delta r_{max}}{r_{max}} + \frac{\Delta g}{2g} \right) = 0.85 \text{ эрг/Гс}$$

4. Рассчитаем величину намагниченности M материала шариков и остаточную индукцию поля B_r по формуле (6).

$$M = \frac{m}{V} = \frac{3m}{4\pi R^3} = 527.64 \pm 61.39 \text{ Гс} \quad \Delta M = M \left(\frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta V}{V} \right) = 61.39 \text{ Гс}$$

$$B_r = 4\pi M = 6630.47 \pm 771.44 \text{ Гс} \quad \Delta B_r = \frac{B_r \Delta M}{M} = 771.44 \text{ Гс}$$

5. Остаточная индукция и индукция на полюсах магнита связаны соотношением: $B_p = \frac{2}{3} B_r$. Тогда $B_r = 630 \pm 1$ мТл = 6300 Гс, ошибка рассчитанного в предыдущем пункте значения индукции относительно измеренного магнитометром: $\varepsilon \sim 10^{-2}$. Это говорит о том, что поле на полюсах шарика было измерено верно (то есть там, где ориентирован магнитный момент) и предложенный магнитометр в работе подходит для изучения магнитных свойств неодимового магнита.
6. Скрутим магнитную стрелку в виде кольца, необходимо возбудить малые колебания колечки, период малых колебаний $T = 50 \pm 1$ с. Покажем, что при расчетах составляющих поля упругостью нити можно пренебречь:

$$f = \frac{(4\pi)^2 I}{T^2} = \frac{16\pi^2}{2500} \cdot 6mR^2 = 2.77 \cdot 10^{-5} \text{ Нм/рад} \quad \Delta f = f \left(\frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta D}{D} + \frac{2\Delta T}{T} \right) = 6.30 \cdot 10^{-6} \text{ Нм/рад}$$

Поэтому жесткостью нити при колебаниях магнитной стрелки можно пренебречь.

7. Исследуем зависимость периода крутильных колебаний от количества шариков, составляющих стрелку:

Количество шариков n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Время t , с	10.67	14.18	16.00	23.41	26.78	28.34	34.50	42.34	50.03	53.50
Период $T = t/N$, с	1.067	1.418	1.600	2.341	2.678	2.834	3.450	4.234	5.003	5.350
Число оборотов N	10									
Δt , с	0.01									
ΔT , с	0.001									

Коэффициент регрессии графика $T(n)$ равен $k = 0.433 \pm 0.029$ (см. рисунок 2).

8. Исследуем зависимость момента силы тяжести $M(n)$ от количества шариков в цепочке. Подвесим стрелку в положение равновесия, уравниваем её дополнительным грузом. Используем четное число шариков в цепочке:

Число шариков	4	6	8	10	12
Масса m_x , г	0.41	0.20	0.23	0.20	0.16
Длина плеча l_x , см	0.59	1.18	1.77	2.36	2.95
M_n , $г*см^2/с^2$	462.2	462.9	399.6	335.6	273.0
ΔM_n , $г*см^2/с^2$	3.3	3.0	2.8	3.1	4.1
Δl_x , см	0.01				
Δm , г	0.01				

Коэффициент регрессии графика $M(n)$ равен $k = 28.914 \pm 4.624$ (см. рисунок 2)

9. Рассчитаем горизонтальную составляющую магнитного поля по полученному коэффициенту регрессии:

$$k = 2\pi\sqrt{\frac{mR^2}{3mB_{||}}} \rightarrow B_{||} = \frac{4\pi^2 mR^2}{3mk^2} = \Gamma_{\text{с}} = \text{мТл}$$

$$\Delta B_{||} = B_{||} \left(\frac{\Delta m}{m} + \frac{2\Delta R}{R} - \frac{2\Delta k}{k} - \frac{\Delta m}{m} \right) = \Gamma_{\text{с}} = \text{мТл}$$

10. Рассчитаем вертикальную составляющую магнитного поля:

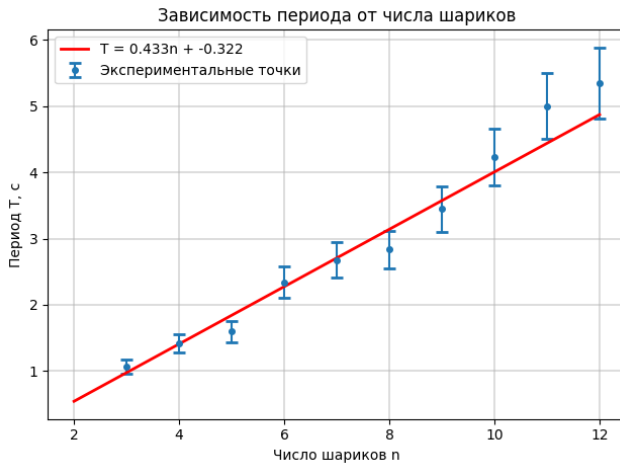
11. Рассчитаем величину магнитного наклона: $\beta = \arctan \frac{B_{\perp}}{B_{||}} = 82^\circ$

12. Рассчитаем полную величину магнитного поля B :

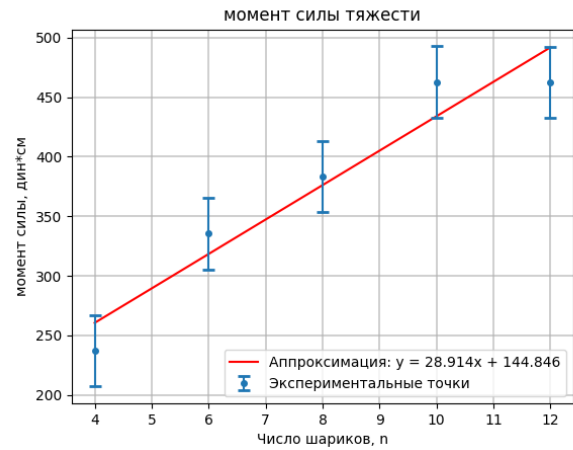
$$B = \sqrt{B_{||}^2 + B_{\perp}^2} = \Gamma_{\text{с}} = \text{мТл}$$

$$\Delta B = B \sqrt{\left(\frac{\partial B}{\partial B_{||}} \Delta B_{||} \right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial B_{\perp}} \Delta B_{\perp} \right)^2} = \Gamma_{\text{с}} = \text{мТл}$$

Графики для измеренных данных



(а) график крутильных колебаний стрелки



(б) зависимость момента силы тяжести от числа шариков

Рис. 2: графики $T(n)$ и $M(n)$

Вывод

В работе были изучены свойства неодимовых магнитов, было измерено магнитное поле Земли, магнитное наклонение на широте Долгопрудного.

1. Неодимовые магниты хорошо подходят для изучения магнитных явлений, поскольку они обладают хорошей намагниченностью: даже самые маленькие кусочки обладают большой силой и магнитной энергией.
2. Измеренное магнитное поле Земли измерение до порядка 10^{-5} , что соответствует порядку табличного значения.
3. Измеренное магнитное наклонение отличается от табличного на 10° , это может быть связано с наличием внешнего поля, неточностью измерения составляющих поля.
4. Вертикальная составляющая больше горизонтальной, что соответствует географическому положению Московского региона.
5. Лабораторные установки подходят для измерения составляющих магнитного поля.