

Лабораторная работа № 3.1.3 "Измерение магнитного поля Земли"

Кирилл Шевцов Б03-402

8.09.2025

Цель работы

Исследовать свойства постоянных неодимовых магнитов, с их помощью измерить горизонтальную и вертикальную составляющую индукции магнитного поля Земли и наклонение.

Оборудование

Неодимовые магниты, тонкая нить для изготовления крутильного маятника, медная проволока, электронные весы, секундомер, измеритель магнитной индукции, штангенциркуль.

Экспериментальная установка

Следующие установки помогут измерить: период крутильных колебаний (а), силу отрыва цепочки шариков (б), магнитный момент для двух шариков (с).

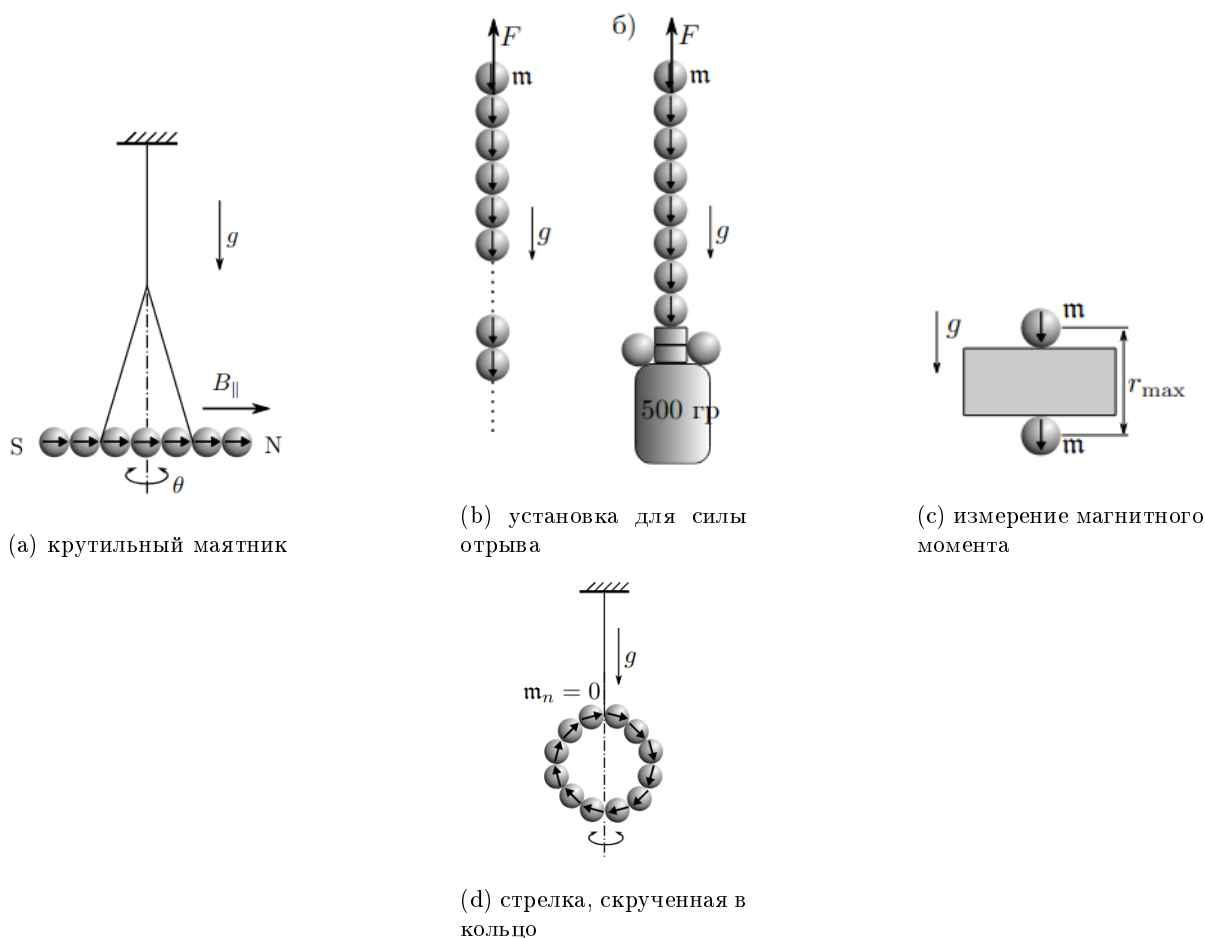


Рис. 1: экспериментальные установки

Установки б и с дают один результат для измерения магнитного момента. Можно скрутить магнитную стрелку в кольцо, и показать, что упругость нити при вычислении периода колебаний стрелки можно не учитывать (см. рис. d).

Необходимые формулы и теория

Простейший магнитный диполь может быть образован витком с током или постоянным магнитом.

Магнитное поле точечного диполя вычисляется подобно формуле напряженности электрического поля этого диполя:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right) \quad (1)$$

Здесь $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м - магнитная постоянная, \mathbf{m} - магнитный момент точечного диполя, \mathbf{r} - радиус вектор, направленный от диполя в рассматриваемую точку.

Во внешнем магнитном поле с индукцией \mathbf{B} на точечный магнитный диполь \mathbf{m} действует механический момент сил:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{m} \times \mathbf{B}] \quad (2)$$

В неоднородном магнитном поле на точечный диполь действует сила:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{B} \quad (3)$$

В частности, проекция силы на ось Ox :

$$F_x = m_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + m_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + m_z \frac{\partial B_x}{\partial z} \quad (4)$$

Формулы (2) и (3) помогают рассчитать силу взаимодействия магнитов с моментами \mathbf{m}_1 и \mathbf{m}_2 в рамках точечных диполей:

$$F_{12} = \mathbf{m}_1 \frac{\partial B_2}{\partial r} = \mathbf{m}_1 \frac{\partial (2\mathbf{m}_2/r^3)}{\partial r} = -6 \frac{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2}{r^4} \quad (5)$$

Еще одной характеристикой магнитов является намагниченность, равная объёмной плотности магнитного момента:

$$\mathbf{M} = \mathbf{m}/V \quad (6)$$

Вf

Для расчета магнитного поля Земли есть несколько методов:

1. Определить магнитный момент \mathbf{m} двух из шариков, определив наибольшее расстояние r_{max} , на котором они смогут удерживать друг друга в поле тяжести. По величине \mathbf{m} с помощью (1) рассчитать величину индукции вблизи любой точки на поверхности шара радиусом R .

$$\mathbf{m} = \sqrt{\frac{mgr_{max}^4}{6}} \quad (7)$$

Учтем, что здесь магнитный момент представлен вычислением в единицах СГС.

2. Величину магнитного поля можно определить с помощью силы сцепления намагниченных шариков. Определим ее, как необходимую силу для разрыва двух сцепившихся шариков. Сила сцепления (5) равна:

$$F_0 = \frac{6\mathbf{m}^2}{(2R)^4} = \frac{3\mathbf{m}^2}{8R^4} \quad (8)$$

Минимальный вес цепочки, при которой она оторвется от верхнего шарика, равна:

$$F = F_0 \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^4} \right) \approx 1,08 F_0 \quad (9)$$

Учтём, что сила сцепления шариков при их отрывании убывает как $1/r^4$.

3. Рассчитать магнитное поле Земли можно с помощью составляющих: вертикальной и горизонтальной, ведь:

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}_{||} + \vec{\mathbf{B}}_{\perp} \quad (10)$$

Горизонтальную составляющую поля можно рассчитать с помощью измерения периода крутильных колебаний "магнитной стрелки" вокруг своей оси:

$$T_n = 2\pi \sqrt{\frac{mR^2}{3\mathbf{m}B_{||}}} \cdot n \quad (11)$$

По зависимости $T(n) = f(n)$, а это прямая, можно определить коэффициент наклона и по нему найти модуль горизонтальной составляющей поля.

Вертикальная составляющая: из-за возникающего момента силы натяжения нити необходимо выровнять положение стрелки, подвесив на некоторое ее расстояние x груз массой m_x . Отсюда получим выражение для вертикальной составляющей магнитного поля:

$$m_x g x = n \mathbf{m} B_{\perp} \iff B_{\perp} = \frac{m_x g x}{n \mathbf{m}} \quad (12)$$

Выполнение работы

1. Измерим массу одного шарика с помощью весов и его диаметр с помощью штангенциркуля (погрешности измерений массы и диаметра Δm , Δd), вычислим его объем:

Масса шарика, г	Диаметр шарика, см	Δm , г	Δd , см	V , cm^3	ΔV , cm^3
0.841 ± 0.001	0.59 ± 0.01	0.001	0.01	0.022	$2.23 \cdot 10^{-3}$

$$V = \frac{1}{6}\pi D^3 = 0.022 \pm cm^3 \quad \Delta V = \frac{6V\Delta D}{D} = 2.23 \cdot 10^{-3} cm^3$$

2. Измерим магнитное поле на полюсах шарика с помощью магнитометра: $B_p = 420 \pm 1$ мТл. Магнитное поле неодимового магнита больше всего на его полюсах, где ориентирован магнитный момент.
3. Рассчитаем величину магнитного момента одного шарика с помощью установки (с). Максимальное расстояние, при котором шарики перестают взаимодействовать равно $r_{max} = 2.20 \pm 0.05$ см

$$m = \sqrt{\frac{0.841 \cdot 980.67 \cdot 2.20^4}{6}} = 56.74 \pm 0.85 \text{ эрг/Гс} \quad \Delta m = m \cdot \left(\frac{\Delta m}{m} + \frac{2\Delta r_{max}}{r_{max}} + \frac{\Delta g}{2g} \right) = 0.85 \text{ эрг/Гс}$$

4. Рассчитаем величину намагниченности M материала шариков и остаточную индукцию поля B_r по формуле (6).

$$M = \frac{m}{V} = \frac{3m}{4\pi R^3} = 527.64 \pm 61.39 \text{ Гс} \quad \Delta M = M \left(\frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta V}{V} \right) = 61.39 \text{ Гс}$$

$$B_r = 4\pi M = 6630.47 \pm 771.44 \text{ Гс} \quad \Delta B_r = \frac{B_r \Delta M}{M} = 771.44 \text{ Гс}$$

5. Остаточная индукция и индукция на полюсах магнита связаны соотношением: $B_p = \frac{2}{3} B_r$. Тогда $B_r = 3/2 B_p = 630 \pm 1$ мТл = 6300 Гс, ошибка рассчитанного в предыдущем пункте значения индукции относительно измеренного магнитометром: $\varepsilon \sim 10^{-2}$. Это говорит о том, что поле на полюсах шарика было измерено верно (то есть там, где ориентирован магнитный момент) и предложенный магнитометр в работе подходит для изучения магнитных свойств неодимового магнита.
6. Скрутим магнитную стрелку в виде кольца, необходимо возбудить малые колебания колечки, период малых колебаний $T = 50 \pm 1$ с. Покажем, что при расчетах составляющих поля упругостью нити можно пренебречь:

$$f = \frac{(4\pi)^2 I}{T^2} = \frac{16\pi^2}{2500} \cdot 6mR^2 = 2.77 \cdot 10^{-5} \text{ Нм/рад} \quad \Delta f = f \left(\frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta D}{D} + \frac{2\Delta T}{T} \right) = 6.30 \cdot 10^{-6} \text{ Нм/рад}$$

Поэтому жесткостью нити при колебаниях магнитной стрелки можно пренебречь.

7. Исследуем зависимость периода крутильных колебаний от количества шариков, составляющих стрелку:

Количество шариков n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Время t , с	10.67	14.18	16.00	23.41	26.78	28.34	34.50	42.34	50.03	53.50
Период $T = t/N$, с	1.067	1.418	1.600	2.341	2.678	2.834	3.450	4.234	5.003	5.350
Число оборотов N	10									
Δt , с	0.01									
ΔT , с	0.001									

Коэффициент регрессии графика $T(n)$ равен $k = 0.433 \pm 0.029$ (см. рисунок 2).

8. Исследуем зависимость момента силы тяжести $M(n)$ от количества шариков в цепочке. Подвесим стрелку в положение равновесия, уравниваем её дополнительным грузом. Используем четное число шариков в цепочке:

Число шариков	4	6	8	10	12
Масса m_x , г	0.41	0.20	0.23	0.20	0.16
Длина плеча l_x , см	0.59	1.18	1.77	2.36	2.95
M_n , $г \cdot cm^2/c^2$	237.06	335.36	383.18	462.65	462.56
ΔM_n , $г \cdot cm^2/c^2$	3.3	3.0	2.8	3.1	4.1
Δl_x , см	0.01				
Δm , г	0.01				

Коэффициент регрессии графика $M(n)$ равен $k = 28.914 \pm 4.624$ (см. рисунок 2)

9. Рассчитаем горизонтальную составляющую магнитного поля по полученному коэффициенту регрессии:

$$k = 2\pi\sqrt{\frac{mR^2}{3mB_{||}}} \rightarrow B_{||} = \frac{4\pi^2 mR^2}{3mk^2} = 0.091 \pm 0.079 \text{ Гс}$$

$$\Delta B_{||} = B_{||} \left(\frac{\Delta m}{m} + \frac{2\Delta R}{R} - \frac{2\Delta k}{k} - \frac{\Delta m}{m} \right) = 0.079 \text{ Гс}$$

10. Рассчитаем вертикальную составляющую магнитного поля по полученному коэффициенту регрессии:

$$B_{\perp} = \frac{k}{m} = 0.50 \pm 0.17 \text{ Гс} \quad \Delta B_{\perp} = B_{\perp} \left(\frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta k}{k} \right) = 0.17 \text{ Гс}$$

11. Рассчитаем величину магнитного наклонения:

$$\beta = \arctan \frac{B_{\perp}}{B_{||}} = 79.68^{\circ} \pm 13.08^{\circ}$$

$$\Delta\beta = \sqrt{\left(\frac{B_{||}}{B_{\perp}^2 + B_{||}^2} \Delta B_{\perp} \right)^2 + \left(\frac{B_{\perp}}{B_{\perp}^2 + B_{||}^2} \Delta B_{||} \right)^2} = 13.08^{\circ}$$

Полученное значение угла соответствует наклонению широты Московского региона (значение варьируется в диапазоне $70^{\circ} - 80^{\circ}$)

12. Рассчитаем полную величину магнитного поля B :

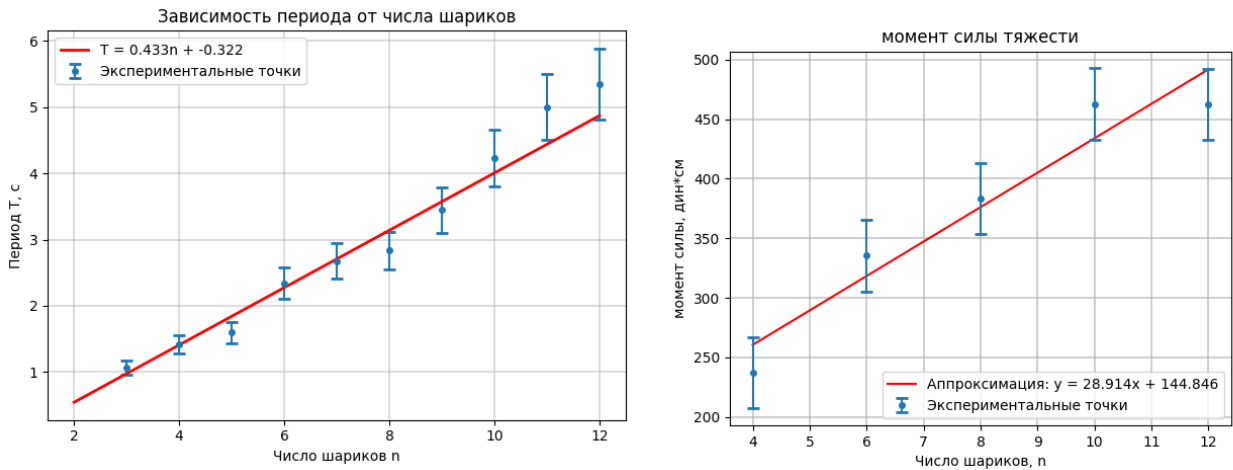
$$B = \sqrt{B_{||}^2 + B_{\perp}^2} = 0.508 \pm 0.187 \text{ Гс}$$

$$\Delta B = B \sqrt{\left(\frac{\partial B}{\partial B_{||}} \Delta B_{||} \right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial B_{\perp}} \Delta B_{\perp} \right)^2} = 0.187 \text{ Гс}$$

Полученное значение магнитного поля соответствует значению магнитного поля Земли (это диапазон значений 0.50-0.60 Гс).

Графики для измеренных данных

Представим визуализацию зависимостей данных, описанных в предыдущем параграфе.



(а) график крутильных колебаний стрелки

(б) зависимость момента силы тяжести от числа шариков

Рис. 2: графики $T(n)$ и $M(n)$

Вывод

В работе были изучены свойства неодимовых магнитов, было измерено магнитное поле Земли, магнитное наклонение на широте Долгопрудного.

1. Неодимовые магниты хорошо подходят для изучения магнитных явлений, поскольку они обладают хорошей намагниченностью, даже самые маленькие кусочки обладают большой силой и магнитной энергией.
2. Измеренное магнитное поле Земли измерено довольно точно к табличному значению, поэтому использовать неодимовые магниты для измерения поля можно.
3. Измеренное магнитное наклонение совпадает с табличным. Москва - это город, который расположен на высокой магнитной широте.
4. Вертикальная составляющая магнитного поля больше горизонтальной, что соответствует географическому положению Московского региона.
5. Лабораторные установки отлично подходят для измерения составляющих магнитного поля.