

# Лабораторная работа № 3.1.3 "Измерение магнитного поля Земли"

Кирилл Шевцов Б03-402

8.09.2025

## Цель работы

Исследовать свойства постоянных неодимовых магнитов, с их помощью измерить горизонтальную и вертикальную составляющую индукции магнитного поля Земли и наклонение.

## Оборудование

Неодимовые магниты, тонкая нить для изготовления крутильного маятника, медная проволока, электронные весы, секундомер, измеритель магнитной индукции, штангенциркуль.

## Экспериментальная установка

Следующие установки помогут измерить: период крутильных колебаний (а), силу отрыва цепочки шариков (б), магнитный момент для двух шариков (с).

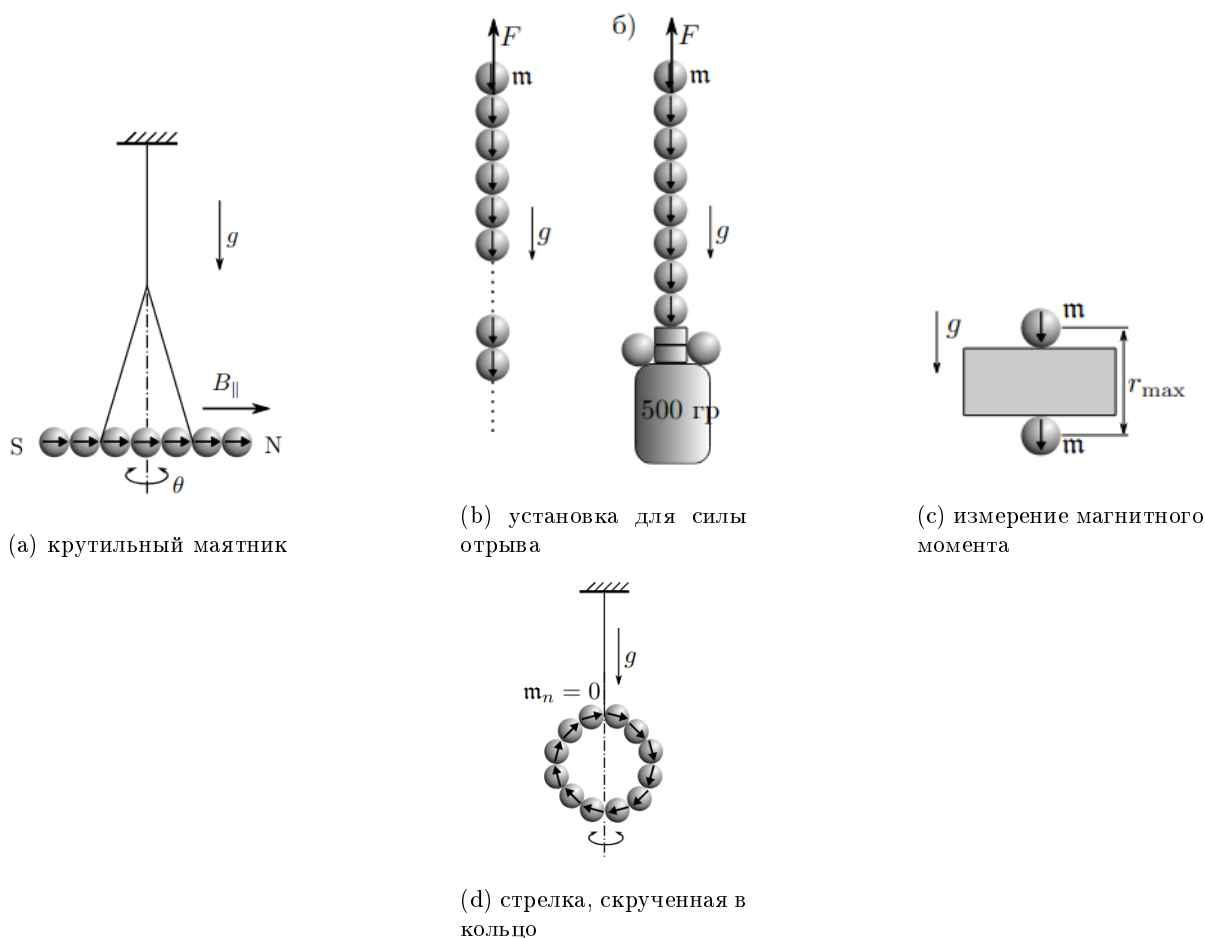


Рис. 1: экспериментальные установки

Установки б и с дают один результат для измерения магнитного момента. Можно скрутить магнитную стрелку в кольцо, и показать, что упругость нити при вычислении периода колебаний стрелки можно не учитывать (см. рис. d).

## Необходимые формулы и теория

Простейший магнитный диполь может быть образован витком с током или постоянным магнитом. Магнитное поле точечного диполя вычисляется подобно формуле напряженности электрического поля этого диполя:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right) \quad (1)$$

Здесь  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м - магнитная постоянная,  $\mathbf{m}$  - магнитный момент точечного диполя,  $\mathbf{r}$  - радиус вектор, направленный от диполя в рассматриваемую точку.

Во внешнем магнитном поле с индукцией  $\mathbf{B}$  на точечный магнитный диполь  $\mathbf{m}$  действует механический момент сил:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{m} \times \mathbf{B}] \quad (2)$$

В неоднородном магнитном поле на точечный диполь действует сила:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{B} \quad (3)$$

В частности, проекция силы на ось  $Ox$ :

$$F_x = m_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + m_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + m_z \frac{\partial B_x}{\partial z} \quad (4)$$

Формулы (2) и (3) помогают рассчитать силу взаимодействия магнитов с моментами  $\mathbf{m}_1$  и  $\mathbf{m}_2$  в рамках точечных диполей:

$$F_{12} = m_1 \frac{\partial B_2}{\partial r} = m_1 \frac{\partial(2m_2/r^3)}{\partial r} = -6 \frac{m_1 m_2}{r^4} \quad (5)$$

Для расчета магнитного поля Земли есть несколько методов:

1. Определить магнитный момент  $\mathbf{m}$  двух из шариков, определив наибольшее расстояние  $r_{max}$ , на котором они смогут удерживать друг друга в поле тяжести. По величине  $\mathbf{m}$  с помощью (1) рассчитать величину индукции вблизи любой точки на поверхности шара радиусом  $R$ .

$$m = \sqrt{\frac{m g r_{max}^4}{6}} \quad (6)$$

Учтем, что здесь магнитный момент представлен вычислением в единицах СГС.

2. Величину магнитного поля можно определить с помощью силы сцепления намагниченных шариков. Определим ее, как необходимую силу для разрыва двух сцепившихся шариков. Сила сцепления (5) равна:

$$F_0 = \frac{6m^2}{(2R)^4} = \frac{3m^2}{8R^4} \quad (7)$$

Минимальный вес цепочки, при которой она оторвется от верхнего шарика, равна:

$$F = F_0 \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^4} \right) \approx 1,08 F_0 \quad (8)$$

Учтём, что сила сцепления шариков при их отрывании убывает как  $1/r^4$ .

3. Рассчитать магнитное поле Земли можно с помощью составляющих: вертикальной и горизонтальной, ведь:

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}_{||} + \vec{\mathbf{B}}_{\perp} \quad (9)$$

Горизонтальную составляющую поля можно рассчитать с помощью измерения периода крутильных колебаний "магнитной стрелки" вокруг своей оси:

$$T_n = 2\pi \sqrt{\frac{m R^2}{3m B_{||}}} \cdot n \quad (10)$$

По зависимости  $T(n) = f(n)$ , а это прямая, можно определить коэффициент наклона и по нему найти модуль горизонтальной составляющей поля.

Рассчитать вертикальную составляющую поля можно при помощи той же магнитной стрелки. При отклонении стрелки возникает момент силы натяжения нити. Поэтому, можно выровнять положение стрелки, подвесив на некоторое ее расстояние  $x$  груз массой  $m_x$ . Отсюда получим выражение для вертикальной составляющей магнитного поля:

$$m_x g x = n m B_{\perp} \iff B_{\perp} = \frac{m_x g x}{n m} \quad (11)$$

Теперь, зная составляющие магнитного поля, можно рассчитать магнитное поле Земли согласно (9).

Масса шарика, г	Диаметр шарика, см
$0.841 \pm 0.001$	$0.59 \pm 0.01$

## Выполнение работы

1. Измерим массу шарика с помощью весов и его диаметр с помощью штангенциркуля.
2. Рассчитаем величину магнитного момента магнетика с помощью установки (с), максимальное расстояние, при котором шарики перестают взаимодействовать,  $r_{max} = 2.2$  см

$$m = \sqrt{\frac{0.841 \cdot 980 \cdot 2.2^4}{6}} \approx 56.73 \text{ Единиц СГС}$$

$$\Delta m = \frac{m}{2} \cdot \left( \frac{\Delta m}{m} + \frac{8\Delta r_{max}}{r_{max}} \right) \approx 10.34 \text{ Единиц СГС}$$

3. Рассчитаем величину намагниченности материала шариков и остаточную индукцию поля.

$$M = \frac{m}{V} = \frac{3m}{4\pi R^3} \approx 527.5 \text{ Единиц СГС}$$

$$B_r = 4\pi M \approx 6628.7 \text{ Единиц СГС} = 662.87 \text{ мТл}$$

4. Исследуем зависимость периода крутильных колебаний от количества шариков, составляющих стрелку:

Количество шариков $n$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Время $t$ , с	10.67	14.18	16.00	23.41	26.78	28.34	34.50	42.34	50.03	53.50
$\Delta t$ , с	0.01									
Число оборотов $N$	10									
Период $t/N$ , с	1.067	1.418	1.600	2.341	2.678	2.834	3.450	4.234	5.003	5.350
$\Delta T$ , с	0.001									

Коэффициент регрессии графика  $T(n)$  равен  $k = 0.451 \pm 0.028$  (см. рисунок 2).

5. Скрутим магнитную стрелку в виде кольца, измерим модуль кручения нити:

$$f = \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 \frac{12mR^2}{2} = \left( \frac{2\pi}{1.925} \right)^2 \frac{3 \cdot 0.841 \cdot 0.59^2}{2} \approx 1.433 \times 10^{-7} \text{ Единиц СИ}$$

Из-за малого порядка измеренной величины упругостью нити можно пренебречь.

6. Исследуем зависимость момента силы тяжести  $\mathcal{M}(n)$  от количества шариков в цепочке. Подвесим стрелку в положение равновесия, уравнием её дополнительным грузом. Используем четное число шариков в цепочке:

Число шариков	4	6	8	10	12
Масса $m_x$ , г	0.41	0.20	0.23	0.20	0.16
$\Delta m$ , г	0.01				
Длина плеча $l_x$ , см	0.59	1.18	1.77	2.36	2.95
$\Delta l_x$ , см	0.01				
$\mathcal{M}_n$ , СГС	462.2	462.9	399.6	335.6	273.0
$\Delta \mathcal{M}_n$ , СГС	3.3	3.0	2.8	3.1	4.1

Таблица 1: дополнительный груз для магнитной стрелки

Коэффициент регрессии графика  $\mathcal{M}(n)$  равен  $k = 36.17 \pm 13.30$  (см. рисунок 2)

7. Рассчитаем горизонтальную составляющую магнитного поля:

$$B_{||} = \frac{4\pi^2 m R^2}{3mk^2} \approx 0.083 \text{ Единиц СГС}$$

$$\Delta B_{||} = B_{||} \left( \frac{\Delta m}{m} + \frac{2\Delta R}{R} - \frac{2\Delta k}{k} - \frac{\Delta m}{m} \right) \approx 1.346 \cdot 10^{-3} \text{ Единиц СГС}$$

8. Рассчитаем вертикальную составляющую магнитного поля:

$$B_{\perp} = \frac{k}{m} \approx 0.63 \text{ Единиц СГС}$$

$$\Delta B_{\perp} = B_{\perp} \left( \frac{\Delta k}{k} - \frac{\Delta m}{m} \right) \approx 0.22 \text{ Единиц СГС}$$

9. Рассчитаем величину магнитного наклона и величину полного магнитного поля:

$$\beta = \arctan \frac{\mathbf{B}_{\perp}}{\mathbf{B}_{\parallel}} \approx 82^{\circ}$$

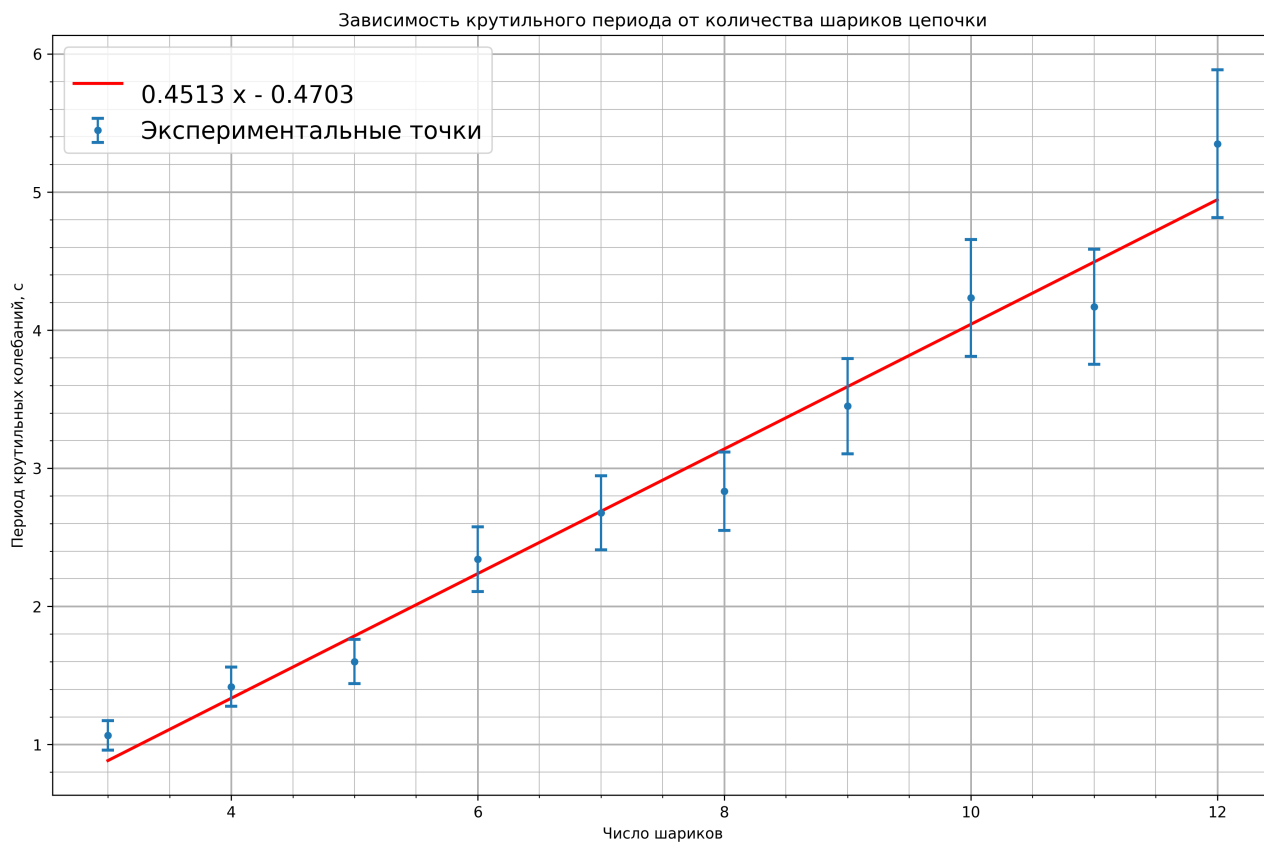
$$\mathbf{B} = \sqrt{\mathbf{B}_{\parallel}^2 + \mathbf{B}_{\perp}^2} \approx 0.635 \text{ ГГс} = 6.35 \cdot 10^{-5} \text{ Тл}$$

$$\Delta \mathbf{B} = \mathbf{B} \sqrt{\left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{B}_{\parallel}} \Delta \mathbf{B}_{\parallel} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{B}_{\perp}} \Delta \mathbf{B}_{\perp} \right)^2} \approx 0.22 \text{ Единиц ГГс}$$

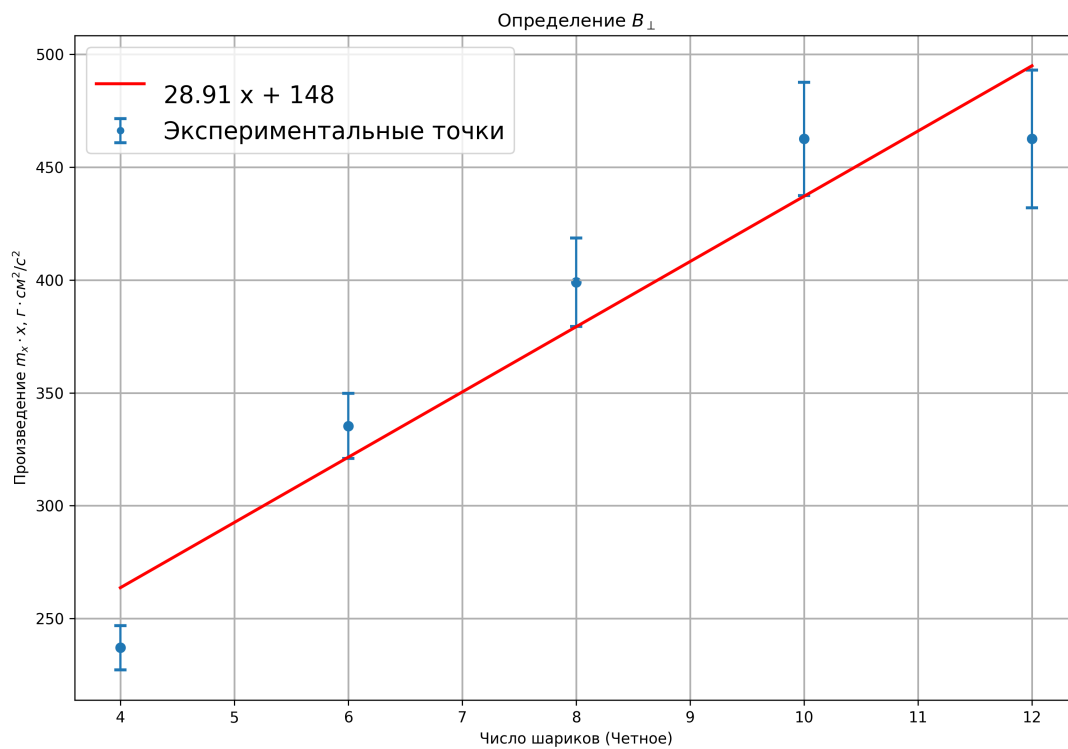
## Вывод

В работе были изучены свойства неодимовых магнитов, было измерено магнитное поле Земли, магнитное наклонение на широте Долгопрудного.

1. Неодимовые магниты хорошо подходят для изучения магнитных явлений, поскольку они обладают хорошей намагниченностью: даже самые маленькие кусочки обладают большой силой и магнитной энергией.
2. Измеренное магнитное поле Земли измерение до порядка  $10^{-5}$ , что соответствует порядку табличного значения.
3. Измеренное магнитное наклонение отличается от табличного на  $10^{\circ}$ , это может быть связано с наличием внешнего поля, неточностью измерения составляющих поля.
4. Вертикальная составляющая больше горизонтальной, что соответствует географическому положению Московского региона.
5. Лабораторные установки подходят для измерения составляющих магнитного поля.



(a) график крутильных колебаний стрелки



(b) зависимость момента силы тяжести от числа шариков

Рис. 2: графики  $T(n)$  и  $\mathcal{M}(n)$