

# Лабораторная работа № 3.1.3 "Измерение магнитного поля Земли"

Кирилл Шевцов Б03-402

8.09.2025

## Цель работы

Исследовать свойства постоянных неодимовых магнитов, с их помощью измерить горизонтальную и вертикальную составляющую индукции магнитного поля Земли и наклонение.

## Оборудование

Неодимовые магниты, тонкая нить для изготовления крутильного маятника, медная проволока, электронные весы, секундомер, измеритель магнитной индукции, штангенциркуль.

## Экспериментальная установка

Следующие установки помогут измерить: период крутильных колебаний (а), силу отрыва цепочки шариков (б), магнитный момент для двух шариков (с).

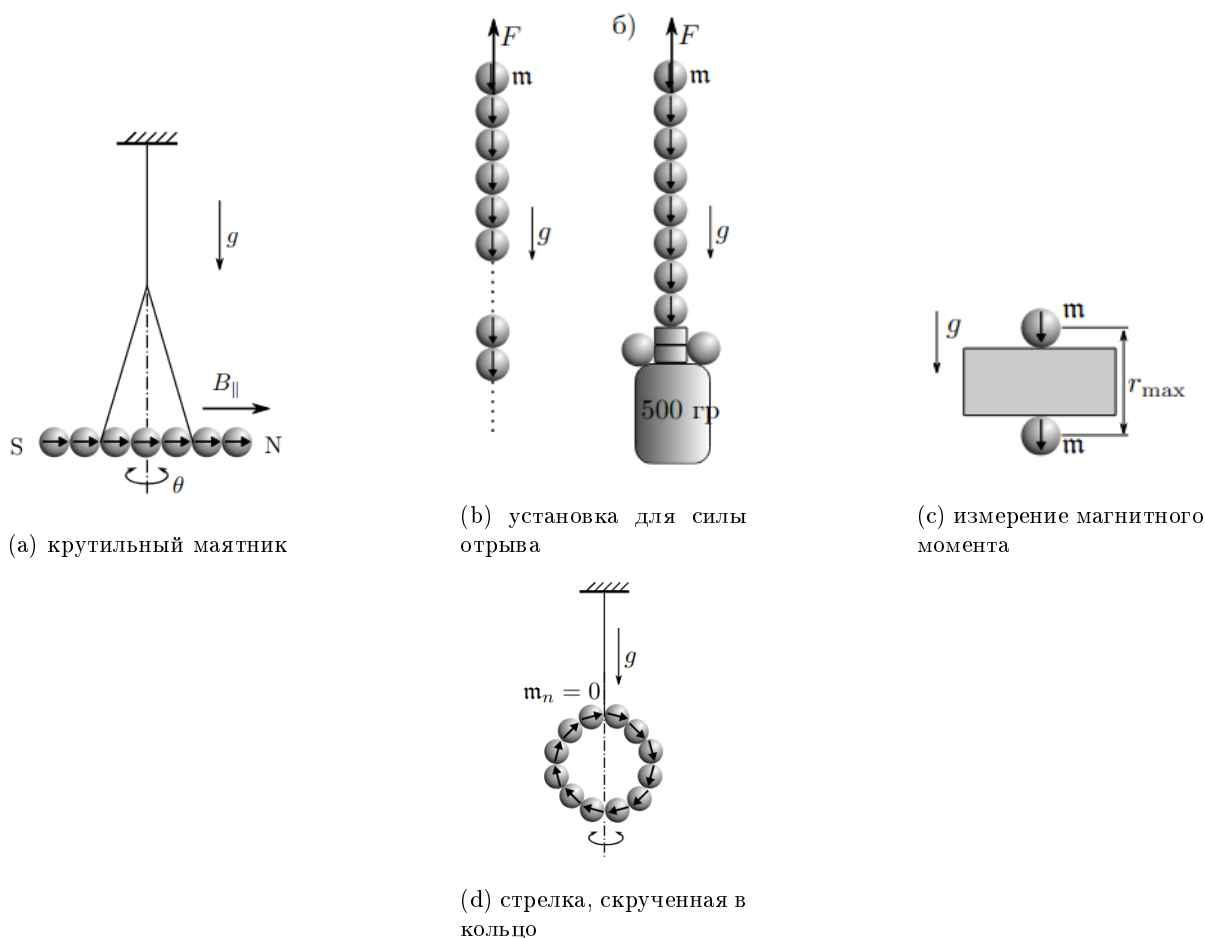


Рис. 1: экспериментальные установки

Установки б и с дают один результат для измерения магнитного момента. Можно скрутить магнитную стрелку в кольцо, и показать, что упругость нити при вычислении периода колебаний стрелки можно не учитывать (см. рис. d).

## Необходимые формулы и теория

Простейший магнитный диполь может быть образован витком с током или постоянным магнитом.

Магнитное поле точечного диполя вычисляется подобно формуле напряженности электрического поля этого диполя:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right) \quad (1)$$

Здесь  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м - магнитная постоянная,  $\mathbf{m}$  - магнитный момент точечного диполя,  $\mathbf{r}$  - радиус вектор, направленный от диполя в рассматриваемую точку.

Во внешнем магнитном поле с индукцией  $\mathbf{B}$  на точечный магнитный диполь  $\mathbf{m}$  действует механический момент сил:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{m} \times \mathbf{B}] \quad (2)$$

В неоднородном магнитном поле на точечный диполь действует сила:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{B} \quad (3)$$

В частности, проекция силы на ось  $Ox$ :

$$F_x = m_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + m_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + m_z \frac{\partial B_x}{\partial z} \quad (4)$$

Формулы (2) и (3) помогают рассчитать силу взаимодействия магнитов с моментами  $\mathbf{m}_1$  и  $\mathbf{m}_2$  в рамках точечных диполей:

$$F_{12} = \mathbf{m}_1 \frac{\partial B_2}{\partial r} = \mathbf{m}_1 \frac{\partial (2\mathbf{m}_2/r^3)}{\partial r} = -6 \frac{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2}{r^4} \quad (5)$$

Еще одной характеристикой магнитов является намагниченность, равная объёмной плотности магнитного момента:

$$\mathbf{M} = \mathbf{m}/V \quad (6)$$

Вf

Для расчета магнитного поля Земли есть несколько методов:

1. Определить магнитный момент  $\mathbf{m}$  двух из шариков, определив наибольшее расстояние  $r_{max}$ , на котором они смогут удерживать друг друга в поле тяжести. По величине  $\mathbf{m}$  с помощью (1) рассчитать величину индукции вблизи любой точки на поверхности шара радиусом  $R$ .

$$\mathbf{m} = \sqrt{\frac{mgr_{max}^4}{6}} \quad (7)$$

Учтем, что здесь магнитный момент представлен вычислением в единицах СГС.

2. Величину магнитного поля можно определить с помощью силы сцепления намагниченных шариков. Определим ее, как необходимую силу для разрыва двух сцепившихся шариков. Сила сцепления (5) равна:

$$F_0 = \frac{6\mathbf{m}^2}{(2R)^4} = \frac{3\mathbf{m}^2}{8R^4} \quad (8)$$

Минимальный вес цепочки, при которой она оторвется от верхнего шарика, равна:

$$F = F_0 \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^4} \right) \approx 1,08 F_0 \quad (9)$$

Учтём, что сила сцепления шариков при их отрывании убывает как  $1/r^4$ .

3. Рассчитать магнитное поле Земли можно с помощью составляющих: вертикальной и горизонтальной, ведь:

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}_{||} + \vec{\mathbf{B}}_{\perp} \quad (10)$$

Горизонтальную составляющую поля можно рассчитать с помощью измерения периода крутильных колебаний "магнитной стрелки" вокруг своей оси:

$$T_n = 2\pi \sqrt{\frac{mR^2}{3\mathbf{m}B_{||}}} \cdot n \quad (11)$$

По зависимости  $T(n) = f(n)$ , а это прямая, можно определить коэффициент наклона и по нему найти модуль горизонтальной составляющей поля.

Вертикальная составляющая: из-за возникающего момента силы натяжения нити необходимо выровнять положение стрелки, подвесив на некоторое ее расстояние  $x$  груз массой  $m_x$ . Отсюда получим выражение для вертикальной составляющей магнитного поля:

$$m_x g x = n \mathbf{m} B_{\perp} \iff B_{\perp} = \frac{m_x g x}{n \mathbf{m}} \quad (12)$$

## Выполнение работы

- Измерим массу одного шарика с помощью весов и его диаметр с помощью штангенциркуля (погрешности измерений массы и диаметра  $\Delta m$ ,  $\Delta d$ ), вычислим его объем:

Масса шарика, г	Диаметр шарика, см	$\Delta m$ , г	$\Delta d$ , см	$V$ , $cm^3$	$\Delta V$ , $cm^3$
$0.841 \pm 0.001$	$0.59 \pm 0.01$	0.001	0.01	0.022	$2.23 \cdot 10^{-3}$

$$V = \frac{1}{6}\pi D^3 = 0.022 \pm cm^3 \quad \Delta V = \frac{6V\Delta D}{D} = 2.23 \cdot 10^{-3} cm^3$$

- Измерим магнитное поле на полюсах шарика с помощью магнитометра:  $B_p = 420 \pm 1$  мТл. Магнитное поле неодимового магнита больше всего на его полюсах, где ориентирован магнитный момент.
- Рассчитаем величину магнитного момента одного шарика с помощью установки (с). Максимальное расстояние, при котором шарики перестают взаимодействовать равно  $r_{max} = 2.20 \pm 0.05$  см

$$m = \sqrt{\frac{0.841 \cdot 980.67 \cdot 2.20^4}{6}} = 56.74 \pm 0.85 \text{ эрг/Гс} \quad \Delta m = m \cdot \left( \frac{\Delta m}{m} + \frac{2\Delta r_{max}}{r_{max}} + \frac{\Delta g}{2g} \right) = 0.85 \text{ эрг/Гс}$$

- Рассчитаем величину намагниченности  $M$  материала шариков и остаточную индукцию поля  $B_r$  по формуле (6).

$$M = \frac{m}{V} = \frac{3m}{4\pi R^3} = 527.64 \pm 61.39 \text{ Гс} \quad \Delta M = M \left( \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta V}{V} \right) = 61.39 \text{ Гс}$$

$$B_r = 4\pi M = 6630.47 \pm 771.44 \text{ Гс} \quad \Delta B_r = \frac{B_r \Delta M}{M} = 771.44 \text{ Гс}$$

- Остаточная индукция и индукция на полюсах магнита связаны соотношением:  $B_p = \frac{2}{3}B_r$ . Тогда  $B_r = 630 \pm 1$  мТл = 6300 Гс, ошибка рассчитанного в предыдущем пункте значения индукции относительно измеренного магнитометром:  $\varepsilon \sim 10^{-2}$ . Это говорит о том, что поле на полюсах шарика было измерено верно (то есть там, где ориентирован магнитный момент) и предложенный магнитометр в работе подходит для изучения магнитных свойств неодимового магнита.
- Скрутим магнитную стрелку в виде кольца, необходимо возбудить малые колебания колечки, период малых колебаний  $T = 50 \pm 1$  с. Покажем, что при расчетах составляющих поля упругостью нити можно пренебречь:

$$f = \frac{(4\pi)^2 I}{T^2} = \frac{16\pi^2}{2500} \cdot 6mR^2 = 2.77 \cdot 10^{-5} \text{ Нм/рад} \quad \Delta f = f \left( \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta D}{D} + \frac{2\Delta T}{T} \right) = 6.30 \cdot 10^{-6} \text{ Нм/рад}$$

Поэтому жесткостью нити при колебаниях магнитной стрелки можно пренебречь.

- Исследуем зависимость периода крутильных колебаний от количества шариков, составляющих стрелку:

Количество шариков $n$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Время $t$ , с	10.67	14.18	16.00	23.41	26.78	28.34	34.50	42.34	50.03	53.50
Период $T = t/N$ , с	1.067	1.418	1.600	2.341	2.678	2.834	3.450	4.234	5.003	5.350
Число оборотов $N$	10									
$\Delta t$ , с	0.01									
$\Delta T$ , с	0.001									

Коэффициент регрессии графика  $T(n)$  равен  $k = 0.487 \pm$  (см. рисунок 2).

- Исследуем зависимость момента силы тяжести  $M(n)$  от количества шариков в цепочке. Подвесим стрелку в положение равновесия, уравниваем её дополнительным грузом. Используем четное число шариков в цепочке:

Число шариков	4	6	8	10	12
Масса $m_x$ , г	0.41	0.20	0.23	0.20	0.16
Длина плеча $l_x$ , см	0.59	1.18	1.77	2.36	2.95
$M_n$ , г*см <sup>2</sup> /с <sup>2</sup>	462.2	462.9	399.6	335.6	273.0
$\Delta M_n$ , г*см <sup>2</sup> /с <sup>2</sup>	3.3	3.0	2.8	3.1	4.1
$\Delta l_x$ , см	0.01				
$\Delta m$ , г	0.01				

Коэффициент регрессии графика  $M(n)$  равен  $k = 36.17 \pm 13.30$  (см. рисунок 2)

9. Рассчитаем горизонтальную составляющую магнитного поля:

$$\mathbf{B}_{||} = \frac{4\pi^2 m R^2}{3mk^2} = 0.083 \quad \Delta \mathbf{B}_{||} = \mathbf{B}_{||} \left( \frac{\Delta m}{m} + \frac{2\Delta R}{R} - \frac{2\Delta k}{k} - \frac{\Delta m}{m} \right) = 1.346 \cdot 10^{-3}$$

10. Рассчитаем вертикальную составляющую магнитного поля:

$$\mathbf{B}_{\perp} = \frac{k}{m} = 0.63 \quad \Delta \mathbf{B}_{\perp} = \mathbf{B}_{\perp} \left( \frac{\Delta k}{k} - \frac{\Delta m}{m} \right) = 0.22$$

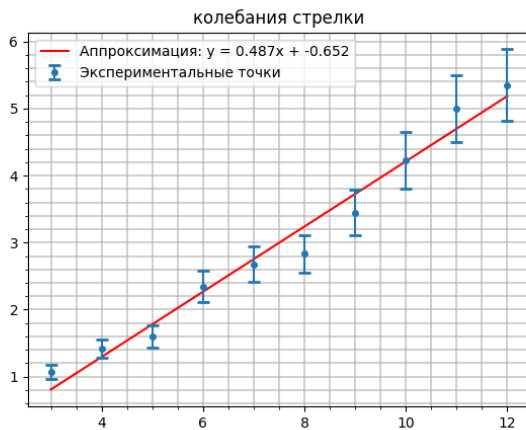
11. Рассчитаем величину магнитного наклона  $\beta$ :

$$\beta = \arctan \frac{\mathbf{B}_{\perp}}{\mathbf{B}_{||}} = 82^{\circ}$$

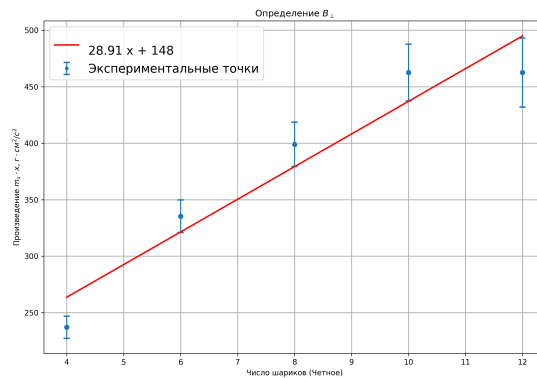
12. Рассчитаем полную величину магнитного поля  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{B} = \sqrt{\mathbf{B}_{||}^2 + \mathbf{B}_{\perp}^2} = 0.635 \text{ ГС} = 6.35 \cdot 10^{-5} \quad \Delta \mathbf{B} = \mathbf{B} \sqrt{\left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{B}_{||}} \Delta \mathbf{B}_{||} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{B}_{\perp}} \Delta \mathbf{B}_{\perp} \right)^2} = 0.22$$

## Графики для измеренных данных



(а) график крутильных колебаний стрелки



(б) зависимость момента силы тяжести от числа шариков

Рис. 2: графики  $T(n)$  и  $M(n)$

## Вывод

В работе были изучены свойства неодимовых магнитов, было измерено магнитное поле Земли, магнитное наклонение на широте Долгопрудного.

1. Неодимовые магниты хорошо подходят для изучения магнитных явлений, поскольку они обладают хорошей намагниченностью: даже самые маленькие кусочки обладают большой силой и магнитной энергией.
2. Измеренное магнитное поле Земли измерение до порядка  $10^{-5}$ , что соответствует порядку табличного значения.
3. Измеренное магнитное наклонение отличается от табличного на  $10^{\circ}$ , это может быть связано с наличием внешнего поля, неточностью измерения составляющих поля.
4. Вертикальная составляющая больше горизонтальной, что соответствует географическому положению Московского региона.
5. Лабораторные установки подходят для измерения составляющих магнитного поля.