# Лабораторная работа № 3.1.3 "Измерение магнитного поля Земли"

Кирилл Шевцов Б03-402

8.09.2025

## Цель работы

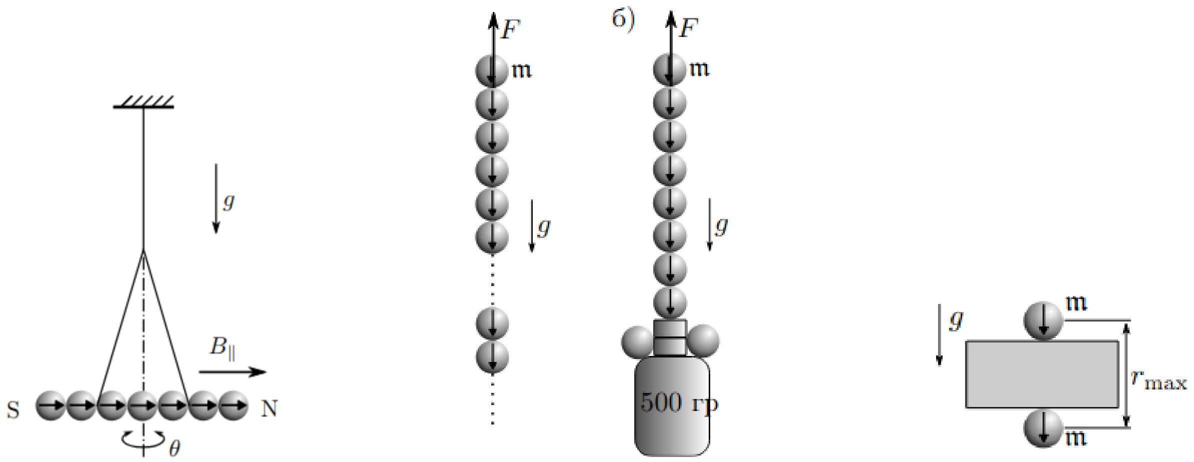
Исследовать свойства постоянных неодимовых магнитов, с их помощью измерить горизональную и вертикальную составляющую индукции магнитного поля Земли и наклонение.

## Оборудование

Неодимовые магниты, тонкая нить для изготовления крутильного маятника, медная проволока, электронные весы, секундомер, измеритель магнитной индукции, штангенциркуль.

## Экспериментальная установка

Следующие установки помогут измерить: период крутильных колебаний (a), силу отрыва цепочки шариков (b), магнитный момент для двух шариков (c).




(a) крутильный маятник

(b) установка для силы отрыва

(c) измерение магнитного момента

Рис. 1: экспериментальные установки

Две последние установки дают один результат для измерения магнитного момента, в работе предлагается выбрать установку самостоятельно.

# Необходимые формулы и теория

Простейший магнитный диполь может быть образован витком с током или постоянным магнитом. Магнитное поле точечного диполя вычисляется подобно формуле напряженности электрического поля этого диполя:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3(\mathfrak{m}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathfrak{m}}{r^3}\right) \tag{1}$$

Здесь $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м - магнитная постоянная, $\mathfrak{m}$ - магнитный момент точечного диполя, $\mathbf{r}$ - радиус вектор, направленный от диполя в рассматриваемую точку.
Во внешнем магнитном поле с индукцией $\mathbf{B}$ на точечный магнитный диполь $\mathfrak{m}$ действует механический момент сил:

$$\mathbf{M} = [\mathfrak{m} \times \mathbf{B}] \tag{2}$$

В неоднородном магнитном поле на точечный диполь действует сила:

$$\mathbf{F} = (\mathfrak{m}\cdot\nabla)\mathbf{B} \tag{3}$$

В частности, проекция силы на ось $Ox$:

$$F_x = \mathfrak{m}_x\frac{\partial B_x}{\partial x} + \mathfrak{m}_y\frac{\partial B_x}{\partial y} + \mathfrak{m}_z\frac{\partial B_x}{\partial z} \tag{4}$$

Формулы (2) и (3) помогают рассчитать силу взаимодействия магнитов с моментами $\mathfrak{m}_1$ и $\mathfrak{m}_2$ в рамках точечных диполей:

$$F_{12} = \mathfrak{m}_1\frac{\partial B_2}{\partial r} = \mathfrak{m}_1\frac{\partial(2\mathfrak{m}_2/r^3)}{\partial r} = -6\frac{\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2}{r^4} \tag{5}$$

Для рассчета магнитного поля Земли есть несколько методов:

1. Определить магнитный момент $\mathfrak{m}$ двух из шариков, определив наибольшее расстояние $r_{max}$, на котором они смогут удерживать друг друга в поле тяжести. По величине $\mathfrak{m}$ с помощью (1) рассчитать величину индукции вблизи любой точки на поверхности шара радиусом $R$.

$$\mathfrak{m} = \sqrt{\frac{mgr_{max}^4}{6}} \tag{6}$$

   Учтем, что здесь магнитный момент представлен вычислением в единицах СГС.

2. Величину магнитного поля можно определить с помощью силы сцепления намагниченных шариков. Определим ее, как необходимую силу для разрыва двух сцепившихся шариков. Сила сцепления (5) равна:

$$F_0 = \frac{6\mathfrak{m}^2}{(2R)^4} = \frac{3\mathfrak{m}^2}{8R^4} \tag{7}$$

   Минимальный вес цепочки, при которой она оторвется от верхнего шарика, равна:

$$F = F_0\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^4}\right) \approx 1,08F_0 \tag{8}$$

   Учтём, что сила сцепления шариков при их отрывании убывает как $1/r^4$.

3. Рассчитать магнитное поле Земли можно с помощью составляющих: вертикальной и горизонтальной, ведь:

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}_{||}} + \vec{\mathbf{B}_{\perp}} \tag{9}$$

Горизонтальную составляющую поля можно рассчитать с помощью измерения периода крутильных колебаний "магнитной стрелки" вокруг своей оси:

$$T_n = 2\pi\sqrt{\frac{mR^2}{3\mathfrak{m}B_{||}}} \cdot n \tag{10}$$

По зависимости $T(n) = f(n)$, а это прямая, можно определить коэффициент наклона и по нему найти модуль горизонтальной составляющей поля.
Рассчитать вертикальную составляющую поля можно при помощи той же магнитной стрелки. При отклонении стрелки возникает момент силы натяжения нити. Поэтому, можно выровнять положение стрелки, подвесив на некоторое ее расстояние $x$ груз массой $m_x$. Отсюда получим выражение для вертикальной составляющей магнитного поля:

$$m_x g x = n\mathfrak{m}B_\perp \iff B_\perp = \frac{m_x g x}{n\mathfrak{m}} \tag{11}$$

Теперь, зная составляющие магнитного поля, можно рассчитать магнитное поле Земли согласно (9).

# Выполнение работы

1. Измерим массу шарика с помощью весов и его диаметр с помощью штангенциркуля.

| Масса шарика, г | Диаметр шарика, см |
|---|---|
| $0.841 \pm 0.001$ | $0.59 \pm 0.01$ |

2. Рассчитаем величину магнитного момента магнитика с помощью установки (с), максимальное расстояние, при котором шарики перестают взаимодействовать, $r_{max} = 2.2$ см

$$\mathfrak{m} = \sqrt{\frac{0.841 \cdot 980 \cdot 2.2^4}{6}} \approx 56.73 \text{ Единиц СГС}$$
$$\Delta\mathfrak{m} = \frac{\mathfrak{m}}{2} \cdot \left(\frac{\Delta m}{m} + \frac{8\Delta r_{max}}{r_{max}}\right) \approx 1.07 \text{ Единиц СГС}$$

3. Рассчитаем величину намагниченности материала шариков и остаточную индукцию поля.

$$\mathbf{M} = \frac{\mathfrak{m}}{V} = \frac{3\mathfrak{m}}{4\pi R^3} \approx 527.5 \text{ Единиц СГС}$$
$$\mathbf{B_r} = 4\pi\mathbf{M} \approx 6628.7 \text{ Единиц СГС}$$

4. Исследуем зависимость периода крутильных колебаний от количества шариков, составляющих стрелку:

| Количество шариков $n$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Время $t$, с | 10.67 | 14.18 | 16.00 | 23.41 | 26.78 | 28.34 | 34.50 | 42.34 | 50.03 | 53.50 |
| Число оборотов $N$ | 10 | | | | | | | | | |
| Период $t/N$, с | 1.067 | 1.418 | 1.600 | 2.341 | 2.678 | 2.834 | 3.450 | 4.234 | 5.003 | 5.350 |

Коэффициент регрессии графика $T(n)$ равен $k = 0.451 \pm 0.028$ (см. рисунок 2).

5. Исследуем зависимость момента силы тяжести $\mathcal{M}(n)$ от количества шариков в цепочке. Подвесим стрелку в положение равновесия, уравняем её дополнительным грузом. Используем четное число шариков в цепочке:
Коэффициент регрессии графика $\mathcal{M}(n)$ равен $k = 36.17 \pm 13.30$ (см. рисунок 2)

| Число шариков | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|
| $m_x$, г | 0.356 | 0.201 | 0.176 | 0.227 | 0.146 |
| $l_x$, см | 0.59 | 1.18 | 1.77 | 2.4 | 2.95 |

6. Рассчитаем горизональную составляющую магнитного поля:

$$\mathbf{B}_{||} = \frac{4\pi^2 m R^2}{3\mathfrak{m} k^2} \approx 0.083 \text{ Единиц СГС}$$

$$\Delta\mathbf{B}_{||} = \mathbf{B}_{||}\left(\frac{\Delta m}{m} + \frac{2\Delta R}{R} - \frac{2\Delta k}{k} - \frac{\Delta\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}}\right) \approx 1.346 \cdot 10^{-3} \text{ Единиц СГС}$$

7. Рассчитаем вертикальную составляющую магнитного поля:

$$\mathbf{B}_{\perp} = \frac{k}{\mathfrak{m}} \approx 0.63 \text{ Единиц СГС}$$

$$\Delta\mathbf{B}_{\perp} = \mathbf{B}_{\perp}\left(\frac{\Delta k}{k} - \frac{\Delta\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}}\right) \approx 0.22 \text{ Единиц СГС}$$

8. Рассчитаем величину магнитного наклонения и величину полного магнитного поля:

$$\beta = \arctan\frac{\mathbf{B}_{\perp}}{\mathbf{B}_{||}} \approx 82^\circ$$

$$\mathbf{B} = \sqrt{{\mathbf{B}_{||}}^2 + {\mathbf{B}_{\perp}}^2} \approx 6.35 \cdot 10^{-5} \text{ Единиц СГС}$$

$$\Delta\mathbf{B} = \mathbf{B}\sqrt{\left(\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial\mathbf{B}_{||}}\Delta\mathbf{B}_{||}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial\mathbf{B}_{\perp}}\Delta\mathbf{B}_{\perp}\right)^2} \approx 0.22 \text{ Единиц СГС}$$

# Вывод

В работе были изучены свойства неодимовых магнитов, было измерено магнитное поле Земли, магнитное наклонение на широте Долгопрудного.

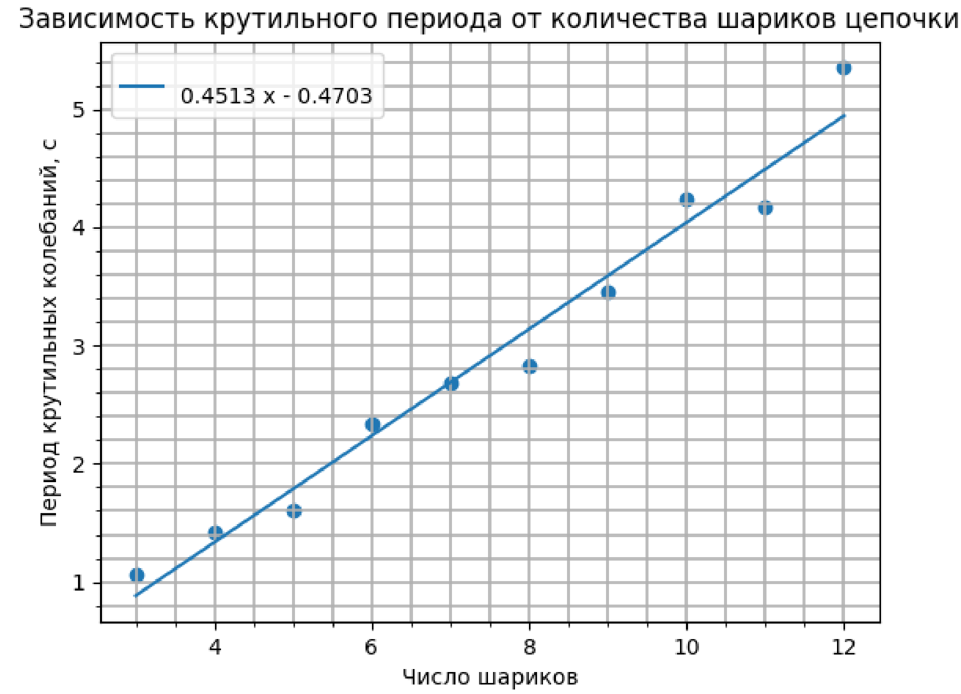
1. Неодимовые магниты хорошо подходят для изучения магнитных явлений, поскольку они обладают хорошей намагниченностью: даже самые маленькие кусочки обладают большой силой и магнитной энергией.

2. Измеренное магнитное поле Земли измерение до порядка $10^{-5}$, что соответсвует порядку табличного значения.

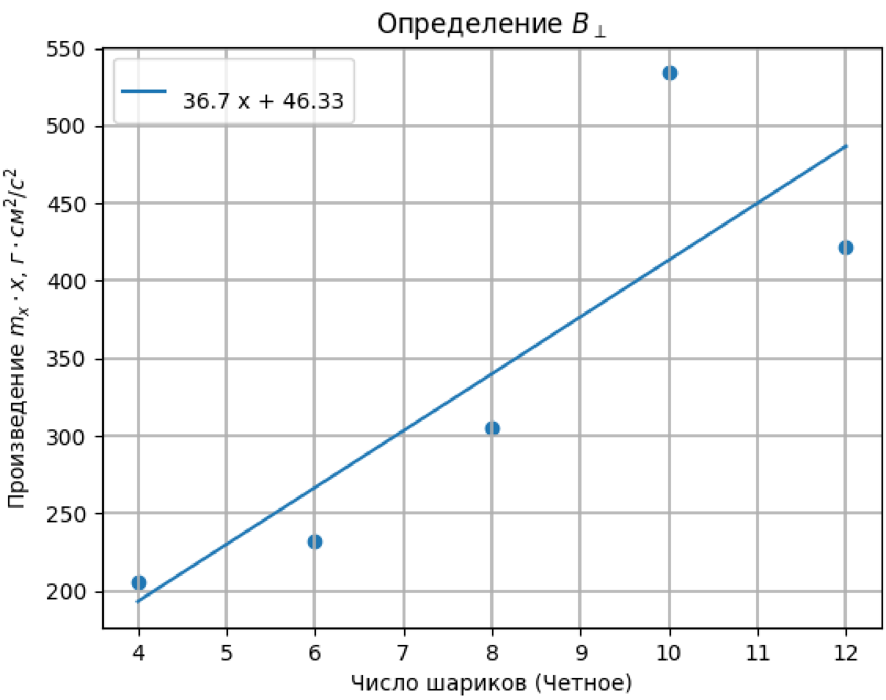
3. Измеренное магнитное наклонение отличается от табличного на $10^\circ$, это может быть связано с наличием внешнего поля, неточностью измерения составляющих поля.

4. Вертикальная составляющая больше горизонтальной, что соответсвует географическому положению Московского региона.

5. Лабораторные установки подходят для измерения составляющих магнитного поля.




(a) график крутильных колебаний стрелки




(b) зависимость момента силы тяжести от числа шариков

Рис. 2: графики $T(n)$ и $\mathcal{M}(n)$