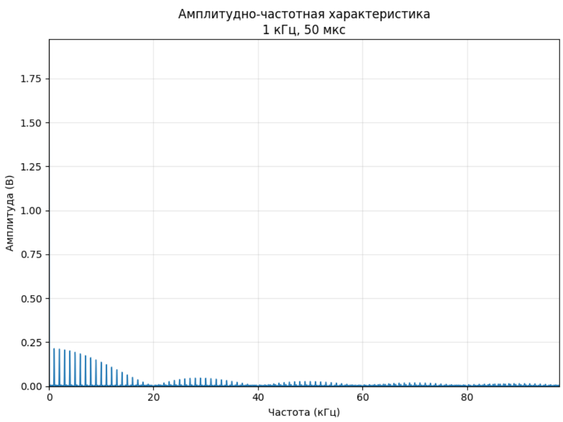
Лабораторная работа № 3.6.1 "Спектральный анализ электрических сигналов"

Кирилл Шевцов Б03-402

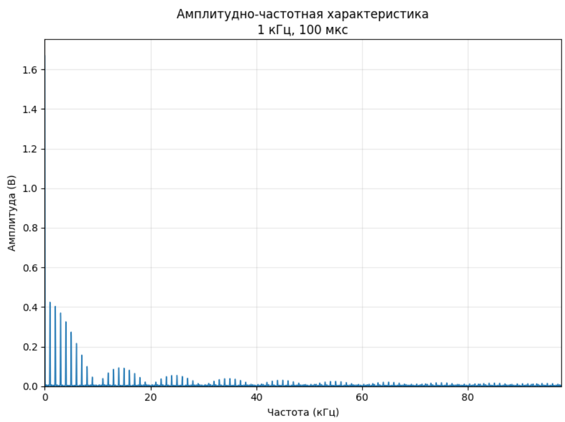
4 декабря 2025 г.

Задача об изучении спектров сигналов сводится к поиску отклика системы $g(t)$ на внешнее воздействие $f(t)$.

1. **Исследование спектра периодических последовательностей импульсов.**
Пусть на вход последовательной RLC-цепочки подается периодическая последовательностей импульсов, с длительностью τ и периодом T. Изобразим спектры этого сигнала, изменяя длительность сигнала в диапазоне $50\mu s - 200\mu s$.



(a) 50 мкс



(b) 100 мкс

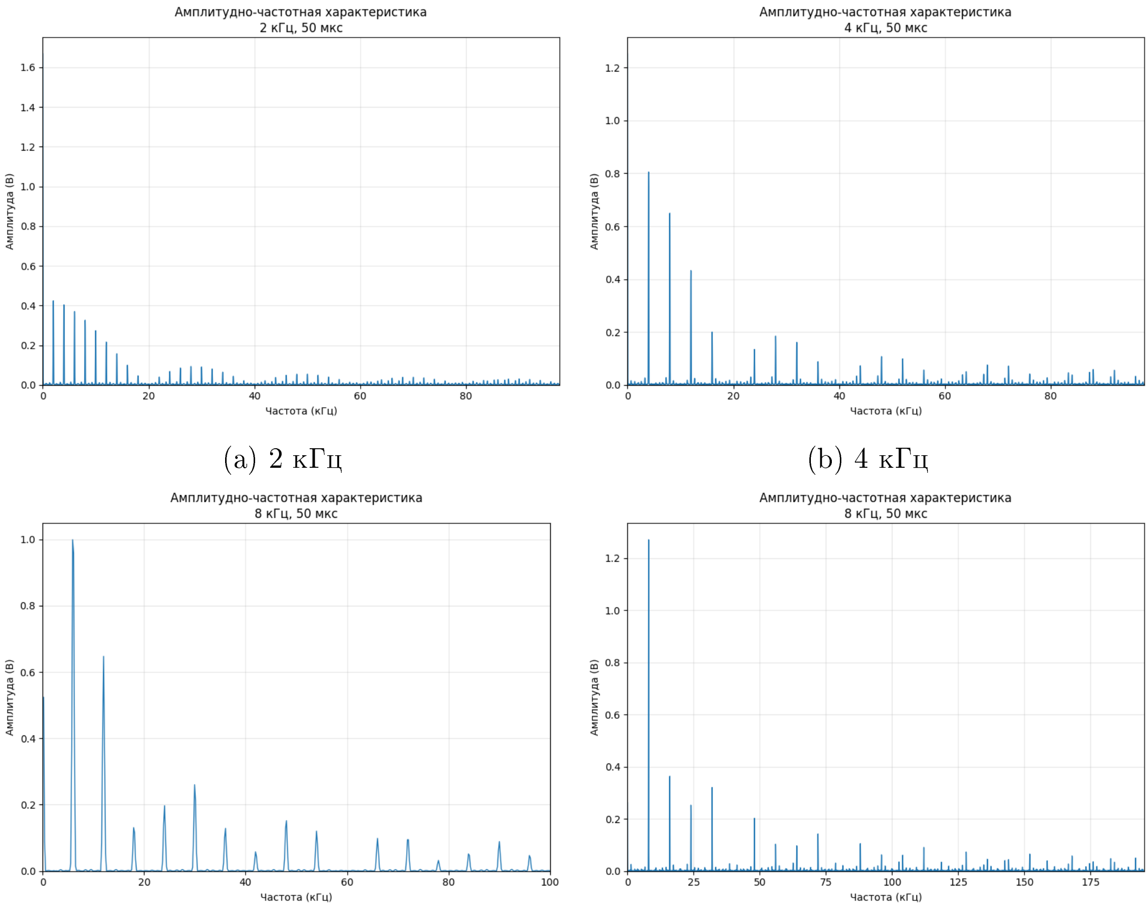
(c) 150 мкс

(d) 200 мкс

Рис. 1: Спектры при переменном τ

Вывод Периодическая последовательность импульсов имеет спектр состоящий из набора полос на частотах $k\Omega$, а ширина этого спектра меняется при изменении длительности сигнала - уменьшается при увеличении времени и уменьшается в противном случае таким образом, что произведение $\tau\Omega \sim 2\pi$

2. **Исследование периодической последовательности цугов гармонических колебаний**
Цуг - это "обрывок"синусоиды / косинусоиды. Получим спектр этого сигнала, изменяя частоту повторения импульсов.



(a) 2 кГц

(b) 4 кГц

(c) 6 кГц

(d) 8 кГц

Рис. 2: Спектры при переменном τ

На фотографиях спектра видно, что ширина цуга неизменна и равна $\nu_0 = 1/\tau = 20$ кГц, частота самого большого пика соответсвует частоте несущей.

3. **Исследование спектров гармонических сигналов, модулированных по амплитуде**
Говорят, что сигнал модулирован по амплитуде, если

$$f(t) = a_0 \left[1 + m\cos(\Omega t)\right] \sin(\omega t) = a(t)\sin(\omega t) \tag{1}$$

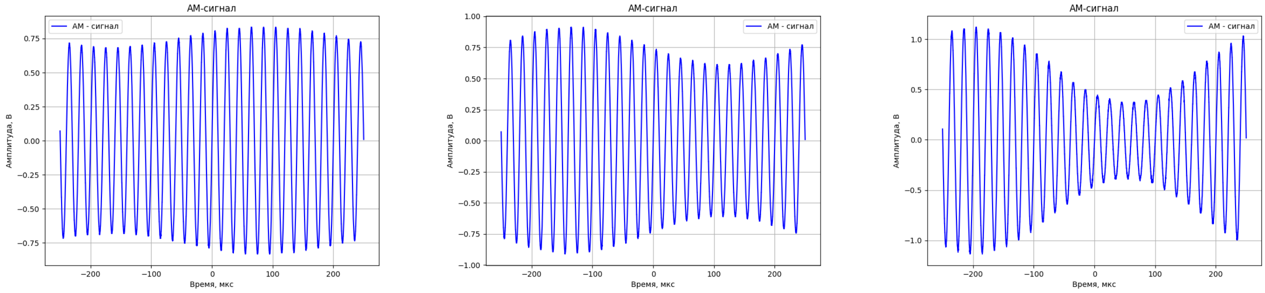
Для амплитудно-модулированного сигнала делают $\Omega \ll \omega$ (так как интересно посмотреть на амплитуды близ лежащих частот), $m \ll 1$. Получим спектр амплитудно модулированного сигнала.

$$f(t) = a_0\sin(\omega t) + a_0 m\cos(\Omega t)\sin(\omega t) = a_0\sin(\omega t) + \frac{a_0 m}{2}\sin((\omega - \Omega)t) + \frac{a_0 m}{2}\sin((\omega + \Omega)t)$$

Аналогичные рассуждения, если модулированный по амплитуде сигнал содержит $\cos(\omega t)$. Сигнал, модулированный по амплитуде, очень сильно осциллирует поэтому его детектируют, усредняя квадрат сигнала, а затем проводят фильтрацию.

$$f^2(t) = a_0^2\left[1 + m\cos(\Omega t)\right]^2 \sin^2(\omega t) = \frac{a^2(t)}{2}\left[1 + 2m\cos(\Omega t)\right] + \Sigma$$

Изобразим ниже модулированные по амплитуде сигналы при разных значениях глубины модуляции. При изменении параметра глубины модуляции отношение амплитуд боковых и центральных частот меняется по какому-то закону.



(a) m = 0.05 (b) m = 0.1 (c) m = 0.25

Рис. 3: АМ-сигналы при разной глубине модуляции

Измерим отношение боковой и центральной амплитуды спектра, построим график $a_1/a_2(m)$ Глубина модуляции выбрана $m = 0.5$, несущая частота равна $\nu = 50$ кГц.

Глубина модуляции m	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
$a_1/a_2(m)$	20.12	10.49	7.13	5.31	4.18	3.52	2.95	2.61	2.30	2.075

Таблица 1: Отношение боковой и центральной амплитуд при разных m

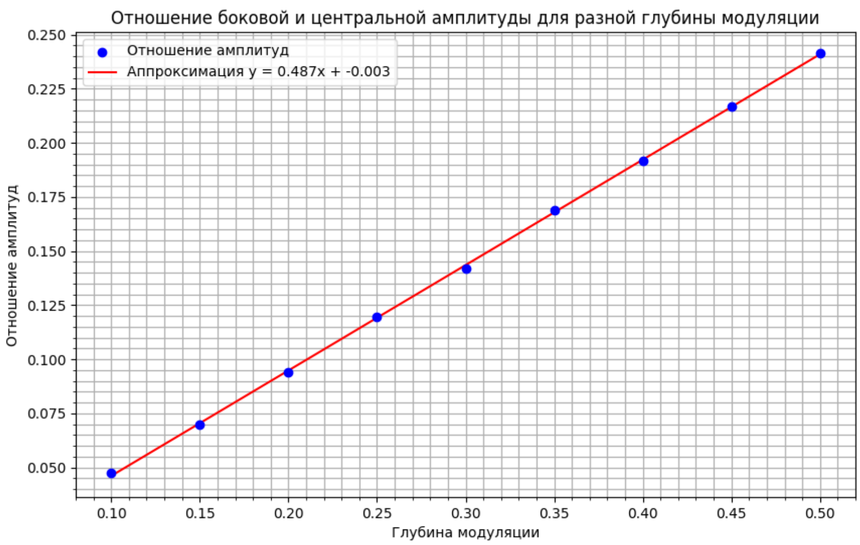


Рис. 4: Зависимость отношения амплитуд от глубины модуляции

Вывод Амплитудно модулированный сигнал имеет в спектре три полагающие частоты: несущую и несущую $\pm$ модулируемую. Детектирование АМ-сигнала происходит по усреднению квадрата этого сигнала, а фильтр помогает извлечь информацию, которую переносил этот сигнал. Отношение боковой и центральной амплитуды спектра (именно в таком порядке) равно величине глубины модуляции.

4. **RC-фильтр**

Фильтры используются, как было сказано ранее, для получения сигнала на основных частотах, и для подавления так называемых нежелательных частот. Для фильтрации используют линейные преобразователи, с помощью которых можно получить функцию отклика системы на какое-либо воздействие. Таковыми, для примера, могут являться: RC-фильтр, и RL-фильтр.
Рассмотрим RC-фильтр. Получим выражение функции отклика системы $\lambda(\Omega)$ для входного

сигнала $f(t)$ для напряжения на конденсаторе.

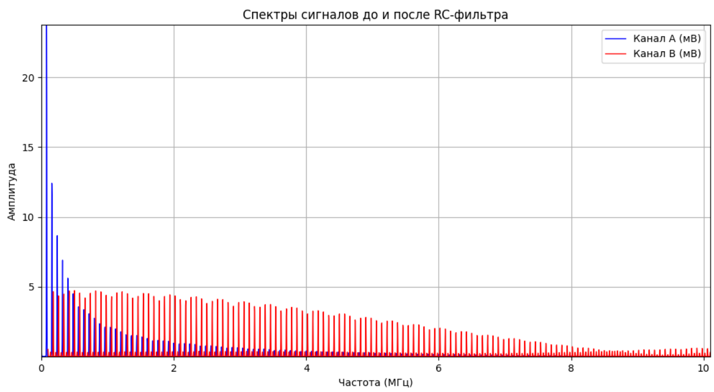
$$\frac{q(t)}{C} + JR = \varepsilon_0 \cos(\Omega t) \to U_c + RC\frac{dU_c}{dt} = \varepsilon_0 \cos(\Omega t)$$

$$\tilde{U}_c + RC\frac{d\tilde{U}_c}{dt} = \varepsilon_0 \exp(j\Omega t) \quad (\tilde{U}_c = \tilde{U}_0 e^{j\Omega t}) \quad \tilde{U}_0 = \frac{\varepsilon_0}{1 + RCj\Omega}$$

Откуда получим выражение для выходного сигнала

$$\tilde{U}_c = \frac{1}{1 + j\Omega RC}\varepsilon_0 \exp(j\Omega t) = \lambda(\Omega)g(t)$$

Отсюда видно, что RC-фильтр является фильтром низких частот, поскольку большие частоты не дают обнаружить $g(t)$. В технике это называется Low-Pass Filter.
Замечание Можно показать, что RL-цепочка - это фильтр высоких частот. Подсоединим RC-фильтр к второму каналу осциллографа, исследуем сигнал исходный и тот, который получается фильтрованием для разный частот. Длительность импульса равна $\tau = 12.5\mu s$, частоты $\nu = 80, 330$ кГц.



(a)

(b)

Вывод RC-фильтр убирает высокие частоты, делая срез, где наблюдается снижение красного спектра. В первом случае фильтр делает срез частоты примерно на 8,6 МГц, на втором графике - примерно на 7 МГц - линии спектра на частотах выше не детектируются сигналом, они лишние. RC- фильтр - действительно фильтр низких частот.

Вывод
В работе были изучены спектры электрических сигналов, таких как периодическая последовательность импульсов, цуги и спектр амплитудно - модулируемого сигнала.