Лабораторная работа 3.2.4-5 "Свободные и вынужденные колебания"

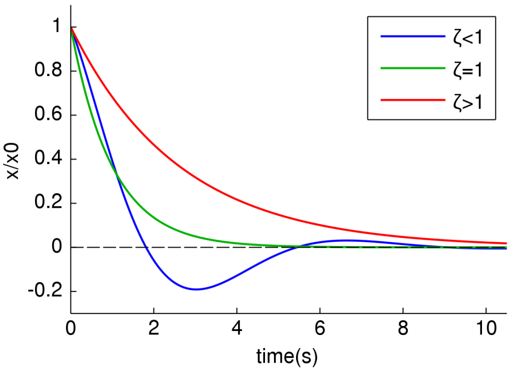
Шевцов Кирилл Б03-402

16 декабря 2025 г.

1 Свободные колебания

Рассмотрим колебательный контур, состоящий из конденстатора и катушки индуктивностью L. Согласно второму правилу Кирхгофа. Уравнение вида

$$L\frac{dJ}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0 \tag{1}$$



Описывает свободные гармонические колебания в LC-контуре. Решение этого уравнения

$$q(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \tag{2}$$

Где константы A, B определяются начальными условиями: $q(0) = q_0,\ q'(0) = J_0$. Теперь рассмотрим электрический контур, состоящий из последовательно соединённых конденстора C, катушки индуктивности L и резистора R. Обозначим разность потенциалов на конденсаторе U_C, а ток, текущий в контуре, через I. Второе правило Кирхгофа:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \tag{3}$$

Вводя обозначения $\gamma = \dfrac{R}{2L}$, $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$, получим уравнение

$$\ddot{I} + 2\gamma\dot{I} + \omega_0^2 I = 0. \tag{4}$$

Решения этого уравнения полезно исследовать.

2 Затухающие колебания

Рассмотрим уравнение затухающих колебаний. Его характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0 = 0 \Rightarrow \sqrt{D} = 2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \tag{5}$$

В случае, когда $\gamma < \omega_0$, имеем $\kappa = i\omega$, где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ - частоты свободных (собственных) колебаний. Тогда ток ($\lambda = \gamma \pm \omega i$)

$$J(t) = J_0 \exp(-\gamma t)\left[A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)\right] \tag{6}$$

затухает и имеет колебательный характер. Величина γ определяет характеристическое время затухания колебаний: $\gamma = \dfrac{1}{\tau}$, где τ - время затухание амплитуды в e раз.

3 Апериодические колебания

В случае $\gamma > \omega_0$ режим колебаний называется апериодическим. Решение дифференциального уравнения:

$$q(t) = A\exp^{\lambda_1 t} + B\exp^{\lambda_2 t} \tag{7}$$

Процесс в этом случае не является колебательным. Режим, соответствующий $\gamma = \omega_0$, называются критическим. В этом случае предельный переход $\omega \to 0$ в (5) даст

$$R_{\text{кр}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{8}$$

называется критическим сопротивлением контура.
Добротностью контура по определению называют

$$Q = \frac{\pi}{\Theta} \tag{9}$$

где Θ - логарифмический декремент затухания. В таком случае, если $\gamma \ll \omega_0$, то несколько преобразований

$$\frac{dW}{dt} = \frac{|\delta W|}{T} = 2\gamma W \Rightarrow \frac{W}{|\delta W|} = \frac{1}{2\gamma T} = \frac{1}{2\Theta} = \frac{Q}{2\pi} \Rightarrow Q = 2\pi\frac{W}{|\delta W|} \tag{10}$$

дают энергетический смысл добротности - отношение запасенной энергии к убыли энергии за период.

4 Вынужденные колебания

При наличии источника, который настроен на подачу сигнала с частотой Ω, уравнение колебаний запишется в виде

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = U_0\sin(\Omega t). \tag{11}$$

Его решение получается методом комплесных амплитуд. Для этого пишется напряжение на конденсаторе в виде U_C. Пусть $U_C = U_0\exp(i\Omega t + \varphi)$, $U(t) = U_0\exp(i\Omega t)$ а затем решаются аналогично предыдущим пунктам.

5 Выполнение работы

5.1 Измерение периодов свободных колебаний

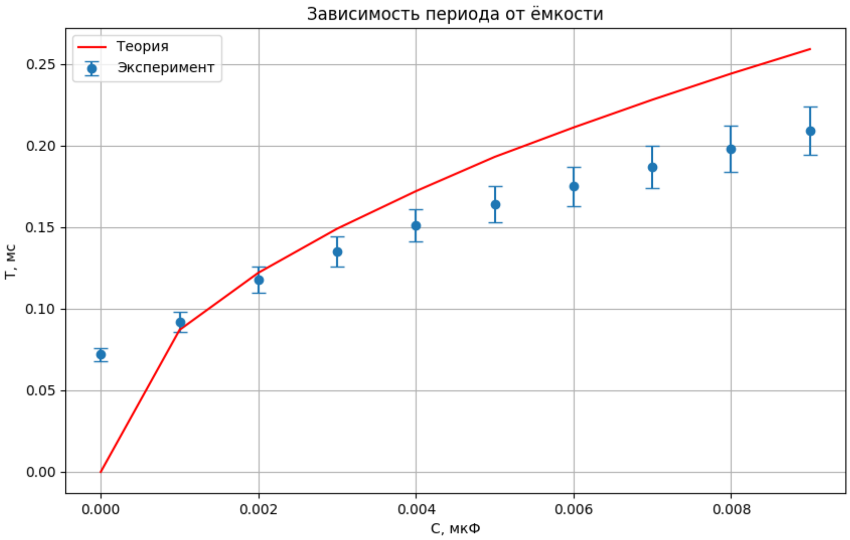
Измерим индуктивность L и сопротивление катушки R_L в зависимости от частоты. Получим $L = 200 \pm 0,2$ мГн.

ν, Гц	L, мГн	R_L, Ом
50	200,4	11,1
1000	200,1	18,8
5000	200,4	41,2

Теперь изменяя ёмкость в диапазоне $0,00 - 0,09$ мкФ проведем измерения периодов свободных колебаний $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

C, мкФ	$T_{эксп}$, мс	$\sigma_{T эксп}$, мс	$T_{теор}$, мс	$\sigma_{T теор}$, мс
0.000	0.072	0.004	0.000	0.000
0.001	0.092	0.006	0.087	0.005
0.002	0.118	0.008	0.122	0.008
0.003	0.135	0.009	0.149	0.010
0.004	0.151	0.010	0.172	0.012
0.005	0.164	0.011	0.193	0.013
0.006	0.175	0.012	0.211	0.015
0.007	0.187	0.013	0.228	0.016
0.008	0.198	0.014	0.244	0.017
0.009	0.209	0.015	0.259	0.018

Зависимость периода свободных колебаний от емкости.



Полученные данные соответствуют теоретической зависимости $T(C)$

5.2 Измерение критического сопротивления и декремента затухания

Ёмкость, при которой частота собственных колебаний контура будет равна $\nu_0 = 6.5$ кГц.

$$C = \frac{1}{4\pi^2\nu_0^2 L} \approx 5 \text{ нФ} \tag{12}$$

И для значений L и C рассчитаем $R_{кр}$

$$R_{кр} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{C}} \approx 8164.97 \text{ Ом} \tag{13}$$

Для этих значений L и C рассчитаем декремент затухания для каждого сопротивления из интервала $(0,1 - 0,3)R_{crit}$. Из этих данных по формуле находим $R_{кр}$

$$R_{кр} = R_\Sigma \sqrt{\left[\frac{2\pi}{\theta}\right]^2 + 1} \tag{14}$$

Посчитаем логарифмический декремент затуханий и запишем его в таблицу: $R_{кр\ эксп} = 8051.32$ Ом.

Параметр	Значение	Единица измерения
ν_0	6.5	кГц
L	100	мГн
C^*	0.006	мкФ
R_{kr}	8164.97	Ом
$R \approx 0.05 R_{kr}$	408.24	Ом

n	$R = n \times R_{kr}$, Ом	U_1, В	U_2, В	Θ
0.05	408.25	7.0	6.7	0.469
0.09	734.85	7.0	5.1	0.364
0.13	1061.45	6.5	4.3	0.349
0.17	1388.04	6.0	3.5	0.327
0.21	1714.64	5.3	3.0	0.298
0.25	2041.24	5.3	2.5	0.280

5.3 Свободные колебания на фазовой плоскости

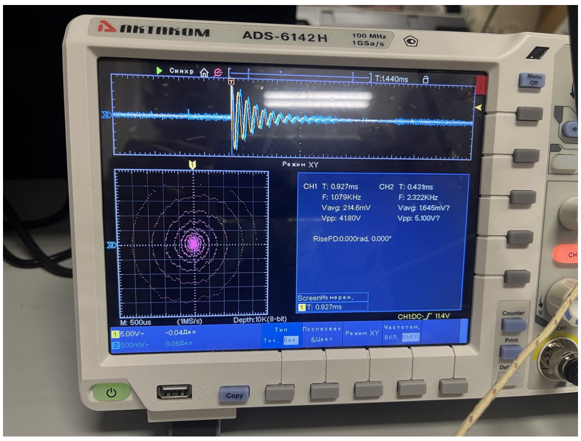
Рассмотрим свободные колебания на фазовой плоскости, для этого подключим место соединения катушки индуктивности и магазина сопротивлений к выходу X и включим на осциллографе канал $X - Y$.

Параметр	Значение	Единица измерения
R	408.25	Ом
ν_0	100	кГц
L	100	мГн
C^*	0.006	мкФ
R_{kr}	8164.97	Ом

Посчитаем логарифмический декремент по фазовой плоскости:

n	$R = n \times R_{kr}$, Ом	U_1/U_2	Θ
0.05	408.25	1.27	0.480
0.09	734.85	1.66	0.367
0.13	1061.45	2.35	0.357
0.17	1388.04	2.88	0.325
0.21	1714.64	3.75	0.310
0.25	2041.24	4.33	0.280

График колебаний на фазовой плоскости.



5.4 Добротность свободных колебаний в контуре

Найдем ее для $R_{max} = 3$ кОм и для $R_{min} = 1,8$ кОм из графика и фазовой диаграммы.

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">L, мГн</th><th colspan="3">$R_{кр}$, кОм</th><th colspan="3">Q</th></tr>
<tr><th>Теор.</th><th>Подбор</th><th>Граф.</th><th>Теор.</th><th>Граф.</th><th>Спираль</th></tr>
<tr><td>R_{min}</td><td rowspan="2">100</td><td rowspan="2">8,2</td><td rowspan="2">8</td><td>$8.1 \pm 0,1$</td><td>0.7</td><td>$0.71 \pm 0,01$</td><td>$0.68 \pm 0,01$</td></tr>
<tr><td>R_{max}</td><td>$8,0 \pm 0,1$</td><td>1,3</td><td>$1,23 \pm 0,01$</td><td>$1,12 \pm 0,01$</td></tr>
</table>

6 Вывод

В ходе лабораторной работы были исследованы свободные и вынужденные колебания в RLC-контуре.