

# Левитирующая лягушка Андре Гейма

Шевцов Кирилл Б03-402

10 января 2026 г.

## 1 Общее о магнетиках

В природе есть вещества, свойства которых проявляются при попадании их во внешнее магнитное поле. Такие вещества могут усиливать магнитное поле, либо ослаблять его, иные свойства могут проявиться при всяком изменении этого магнитного поля. Имя этих уникальных веществ - магнетики. Магнетики разделяют на 3 основные группы: диамагнетики, парамагнетики и ферромагнетики.

## 2 Модель и математический аппарат

Для качественного описания свойства магнетиков была предложена особая модель строения вещества, а именно, что оно состоит из частиц, в которых электрон с зарядом  $e$  вращается вокруг ядра. Круговое движение электрона эквивалентно круговому току  $I$ , который циркулирует вдоль замкнутого контура, на который «натянута» поверхность площадью  $S$ . Для описания свойств кругового тока физики ввели величину, называемую магнитным моментом:

$$\vec{m} = \frac{1}{c} I \vec{S} = \frac{1}{c} I S \vec{n} \quad (1)$$

Магнитный момент аналогичен силе, которая стремится ориентировать магнитный диполь по линии внешнего магнитного поля - либо по его направлению, либо против.

Для магнетиков вводится величина объемного магнитного момента - вектора намагниченности:

$$\vec{M} = \frac{\sum_{i=0}^N \vec{m}_i}{V} = n \langle \vec{m} \rangle \quad (2)$$

Намагниченность показывает, насколько сильно вещество может вести себя как магнит. Про вещество с ненулевым вектором намагниченности говорят, что оно намагничено. Парамагнетики обладают собственной намагниченностью, диамагнетики без внешнего поля - нет.

Также, как и в теории электричества, в магнетизме физики ввели вектор напряженности магнитного поля  $\vec{H}$ . Если магнитное поле внутри магнетика равно  $\vec{B}$ , то:

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{M} \quad (3)$$

Вектор напряженности введен физиками, чтобы не учитывать токи проводимости в веществе, а брать во внимание только свободные токи. Это подобно тому, как вектор электрической индукции  $\vec{D}$  зависит только от наличия свободных зарядов в проводнике.

Магнитная восприимчивость и магнитная проницаемость вещества связаны соотношением:

$$\mu = 1 + 4\pi \chi \quad (4)$$

Соотношение для взаимосвязи напряженности поля и магнитного поля (одно из материальных уравнений в системе уравнений Максвелла):

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (5)$$

Это полезные характеристики для описания диамагнетиков и парамагнетиков. Для ферромагнетиков зависимости намагниченности от внешнего поля, зависимости внешнего магнитного поля от напряженности - нелинейные.

### 3 Явление диамагнетизма

Диамагнетиками являются вещества, которые не обладают магнитным моментом в отсутствии внешнего магнитного поля. Без внешнего магнитного поля на электрон в атоме действует только сила со стороны атомного ядра и других электронов. Поэтому, если диамагнетик не помещается в магнитное поле, он не будет намагничен. Для диамагнетика с хорошей точностью выполняются связь между намагниченностью и напряженностью поля:

$$\vec{M} = \chi \vec{H} \quad (6)$$

При помещении диамагнетического образца в постоянное поле  $B_0$  на движущийся электрон будет действовать сила Лоренца:

$$\vec{f}_B = -\frac{e}{c} [\vec{v} \times \vec{B}] \quad (7)$$

Рассмотрим движение электрона в системе отсчета, которая вращается вокруг направления магнитного поля с угловой скоростью  $\vec{\Omega}$ , причем  $\Omega \ll \omega_e$ , где  $\omega_e$  - угловая скорость электрона. Во вращающейся системе отсчета к действующим на электрон силам добавятся сила Кориолиса  $\vec{f}_k$  и центробежная сила  $\vec{f}_c$ :

$$\vec{f}_k = 2m_e [\vec{v}_r \times \vec{\Omega}]$$

$$\vec{f}_c = m_e \vec{\Omega} \times [\vec{\Omega} \times \vec{r}] \quad (9)$$

Центробежной силой, модуль которой пропорционален  $\Omega^2$ , пренебрежем. Абсолютная скорость электрона (скорость с индексом  $r$  относительная,  $p$  - переносная):

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_p = \vec{v}_r + [\vec{\Omega} \times \vec{r}] \quad (10)$$

Подставим полученную скорость в формулу Кориолиса (это допустимая замена для приближения  $\Omega \ll \omega_e$ ):

$$\vec{f}_{1k} = \vec{f}_k + 2m_e [\vec{\Omega} \times \vec{r}] \times \vec{\Omega} = \vec{f}_k - \frac{1}{2} \vec{f}_c \approx \vec{f}_k \quad (11)$$

Теперь, угловая скорость, с которой вращается выбранная система отсчета, может быть выбрана так, чтобы уравнивать силы Кориолиса и Лоренца:

$$2m_e [\vec{v} \times \vec{\Omega}] - \frac{e}{c} [\vec{v} \times \vec{B}] = \vec{0} \Rightarrow \vec{\Omega} = \frac{e}{2m_e c} \vec{B} \quad (12)$$

В такой вращающейся системе отсчета никаких новых сил, действующих на электрон нет. Частота из соотношения (12) называется ларморовской. При постоянном внешнем магнитном поле движения электрона остается неизменным, но атом в целом получает дополнительное вращение с частотой  $\Omega$ . (Теорема Лармора).

С ларморовской частотой электрон имеет момент импульса  $L = m_e \Omega r^2$ , и обладает магнитным моментом:

$$\vec{m} = \frac{1}{c} I S \vec{n} = -\frac{e\pi r^2}{2c\pi} \vec{\Omega} = -\frac{er^2}{2c} \vec{\Omega} = -e^2 \frac{\vec{B} r^2}{4m_e c^2} \quad (13)$$

Ось  $Z$  перпендикулярна плоскости движения электрона, и  $r^2 = x^2 + y^2$ . Три направления осей координат являются равновероятными:

$$\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \langle z^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle \rho^2 \rangle \quad (14)$$

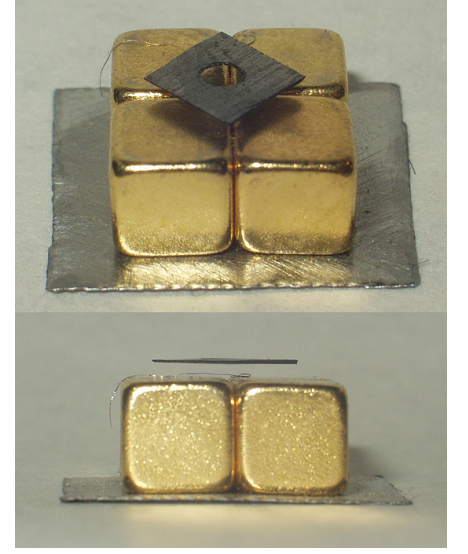


Рис. 1: Пиролитический уголь, парящий над недымовым магнитом

Средний магнитный момент, с учетом, что атом содержит  $Z$  электронов:

$$\langle \vec{m} \rangle = -e^2 \frac{Z \langle \rho^2 \rangle \vec{B}}{6m_e c^2} \quad (15)$$

Вектор намагниченности в таком случае:

$$\vec{M} = n \langle \vec{m} \rangle = -e^2 \frac{nZ \langle \rho^2 \rangle \vec{B}}{6m_e c^2} = \chi \vec{B}, \quad \chi < 0 \quad (16)$$

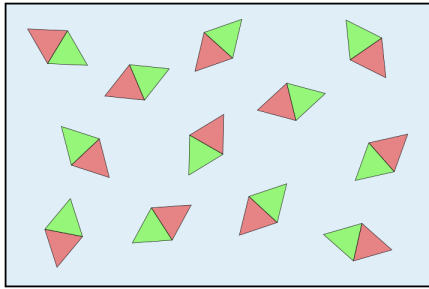
Средний магнитный момент направлен против направления внешнего магнитного поля - это создает в диамагнетике намагниченность, также противонаправленную с магнитным полем. Диамагнетик будет выталкиваться из области сильного магнитного поля. В этом и заключается диамагнетизм. Магнитные восприимчивости для некоторых диамагнетиков: Самая рекордная из них - восприимчи-

Вещество	Магнитная восприимчивость $\chi \times 10^{-6}$
Вода (жидкая)	-13,0
Нафталин	-91,8
Висмут (металл)	-284,0
Графит	-600

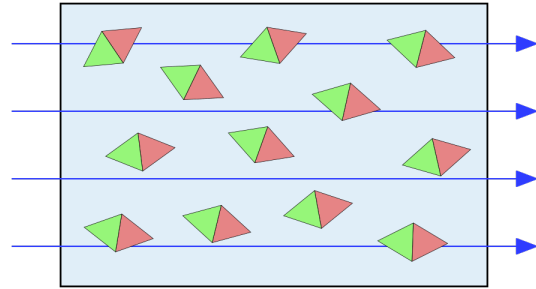
вость графита, открыта Андре Геймом. Во внешнем магнитном поле допустимого порядка человек себя проявляет себя как диамагнетик, поскольку он на 80% состоит из воды.

## 4 Явление парамагнетизма

При выводе соотношений для диамагнитного материала важно, что магнитная восприимчивость  $\chi$  не зависит от величины магнитного поля и температуры образца. При наличии этих зависимостей диамагнитные явления перекрываются так называемым парамагнитным эффектом. Парамагнетики



(а) Парамагнетик вне магнитного поля



(б) Парамагнетик в магнитном поле

- это вещества, которые обладают собственным магнитным моментом. Для парамагнетиков, как и диамагнетиков, выполняется соотношение (6). При отсутствии магнитного поля - все электроны в атомах движутся беспорядочно, их магнитные моменты ориентированы хаотично. Пусть до внесения парамагнитного образца во внешнее магнитное поле электрон имеет скорость  $\vec{v}_0$ . После внесения образца в магнитное поле электрон приобретает дополнительную скорость:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_0 + \vec{v}_1 = \vec{v}_0 + [\vec{\Omega} \times \vec{r}] \quad (17)$$

Тогда выражение для кинетической энергии электрона примет вид:

$$E = \frac{m_e v_i^2}{2} = \frac{m_e v_0^2}{2} + (m_e \vec{v}_0, \vec{\Omega}, \vec{r}) + m_e \Omega^2 r^2 \quad (18)$$

Приращение энергии электрона будет равным:

$$\Delta E \approx m_e \left( \vec{v}_0, \vec{\Omega}, \vec{r} \right) = \left( \vec{\Omega}, \vec{L} \right) = - \left( \vec{m}, \vec{B}_0 \right) \quad (19)$$

Что соответствует потенциальной энергии магнитного диполя. Его энергия будет максимальна только в том случае, когда магнитный момент противоположен магнитному полю и минимальна, если он сонаправлен с ним. В таком случае, в статистическом равновесии больше векторов магнитного момента будет сонаправлено с вектором внешнего магнитного поля. Это и есть парамагнетизм. Вектор намагниченности имеет вид:

$$\vec{M} = \frac{nm^2}{3kT} \vec{H} = \chi \vec{H}, \quad \chi > 0 \quad (20)$$

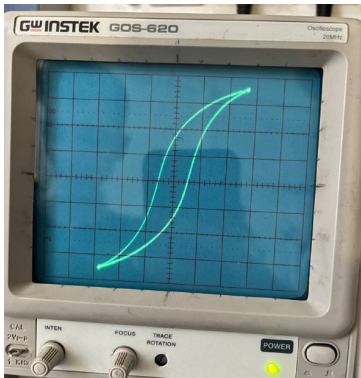
Восприимчивость для парамагнетика - положительная величина. Восприимчивости для некоторых парамагнетиков.

Вещество	Магнитная восприимчивость $\chi \times 10^{-5}$
Вольфрам	7,8
Цезий	6,1
Алюминий	3,2
Литий	2,4

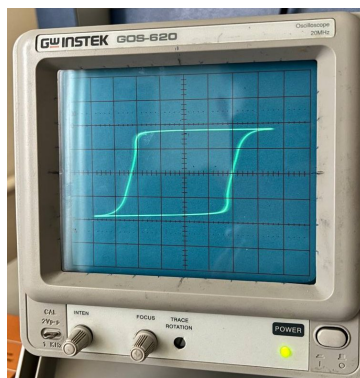
## 5 Ферромагнетизм и петля гистерезиса

Ферромагнетики - это вещества, которые могут усиливать магнитное поле, в которое они помещаются. Без отсутствия магнитного поля магнитные моменты ориентированы хаотично, и могут образовывать упорядоченные структуры - домены. В отличие от парамагнетиков, к силе, которая действует на атом со стороны внешнего поля, добавится сила, действующая со стороны поля других атомов.

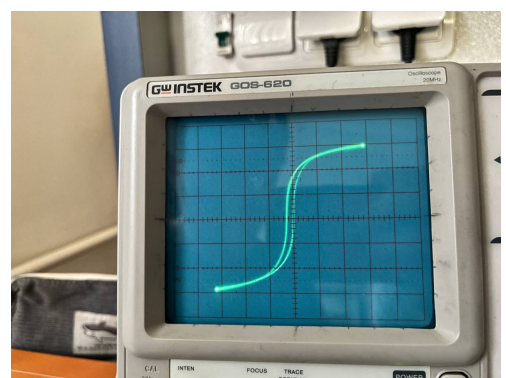
Зависимости (5) и (6) нелинейны в общем случае из-за кристаллической решетки ферромагнетика. Ферромагнетикам свойственна красивая петля гистерезиса. Причем образование петли происходит



(а) Пермаллой



(b) Кремнистое железо



(с) Феррит

Рис. 3: Петли гистерезиса для различных веществ на экране осциллографа

в несколько этапов: намагничивание и достижения  $B_s$  и  $M_s$ , размагничивание образца и проявление остаточной индукции, новое намагничивание петлю гистерезиса. По петлям гистерезиса, снятым с осциллографа, можно определить величины остаточной индукции, и коэрцитивную силу - силу, необходимую для намагничивания образца ферромагнетика. Для кривых намагничивания и зависимостей поля от напряженности, введены характеристики дифференциальной восприимчивости и проницаемости:

$$\mu_{\text{диф}} = \frac{dB}{dH}, \quad \chi_{\text{диф}} = \frac{dM}{dH} \quad (21)$$

Это означает, что при малейшем изменении поля или намагниченности коэффициенты также меняются, что ожидаемо для структуры ферромагнетика. Из таблицы ниже, кремнистое железо - жест-

Таблица 1: Коэрцитивные силы и индукции насыщения для некоторых ферромагнетиков

Материал	Параметр	Значения, вычисленные с лабораторной работы
Пермаллой	$H_c$ , А/м	$9,67 \pm 1,00$
	$B_s$ , Тл	$1,01 \pm 0,01$
Кремнистое железо	$H_c$ , А/м	$826,4 \pm 1,0$
	$B_s$ , Тл	$0,20 \pm 0,01$
Феррит	$H_c$ , А/м	$16,3 \pm 1,0$
	$B_s$ , Тл	$0,067 \pm 0,001$

коупругий ферромагнетик, пермаллой и феррит - мягкоупругие ферромагнетики.

## 6 Опыт с левитирующей лягушкой

Лягушка *Paedophryne amauensis* - самое маленькое позвоночное животное на Земле. Ученые Андре Гейм и Майкл Берри смогли провести уникальный эксперимент, в котором заставили ее левитировать во внешнем магнитном поле. Этот опыт вызывает ряд интересных вопросов, ответы на которые будут ниже.

Рассмотрим длинный соленоид, у которого  $N/l = n = 10$  плотность обмотки, радиус  $R = 1$  см, длина  $l = 15$  см, массу лягушки обозначим  $m = 15$  мг, лягушка находится в поле тяжести  $g = 980$  см/с<sup>2</sup>. Оценим ток  $I$ , который необходимо пускать по виткам соленоида для того, чтобы лягушка левитировала. Оценим величину магнитного поля, возникающего при пропускании тока через соленоид.

1. Уравнение левитации лягушки:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_B + m\vec{g} = (\vec{m}, \nabla) \vec{B} + m\vec{g} = \vec{0} \quad (22)$$

Магнитное поле, создаваемое соленоидом с радиусом  $R$  (ноль оси  $z$  - середина соленоида):

$$B(z) = \frac{2\pi In}{c} \left( \frac{z + l/2}{\sqrt{R^2 + (z + l/2)^2}} - \frac{z - l/2}{\sqrt{R^2 + (z - l/2)^2}} \right) \quad (23)$$

2. Лягушку в приближении будем считать магнетическим шариком радиусом  $r = 1,5$  мм с проницаемостью  $\mu$ . В поле соленоида этот шарик приобретает магнитный момент:

$$\vec{m} = r^3 \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \vec{B} \quad (24)$$

3. Подстановка в уравнение (22) дает соотношение:

$$r^3 \frac{\mu - 1}{\mu + 2} (\vec{B}, \nabla) \vec{B} + m\vec{g} = m\ddot{\vec{r}} \quad (25)$$

4. Операторное соотношение в уравнении преобразуется с учетом  $\vec{B} = B(\vec{z})$ :

$$(\vec{B}, \nabla) \vec{B} = B_x \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} + B_y \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} + B_z \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} = B_z \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \quad (26)$$

5. Уравнение в проекции на вертикальную ось:

$$r^3 \frac{\mu - 1}{\mu + 2} B_z \frac{\partial B(z)}{\partial z} = mg \quad (27)$$

6.  $B(z)$  можно оценить как поле на торце очень длинного соленоида:  $B_z \sim \frac{2\pi In}{c}$ , производная:

$$B'_z = \frac{2\pi In}{c} \left( \frac{R^2 + (z + l/2)^2 - z - l/2}{[R^2 + (z + l/2)^2]^{3/2}} - \frac{R^2 + (z - l/2)^2 - z + l/2}{[R^2 + (z - l/2)^2]^{3/2}} \right) \approx -B(z) = -\frac{2\pi In}{c} \quad (28)$$

7. Сила тока  $I$ , которую необходимо пускать по соленоиду для левитации лягушки:

$$I \approx \frac{c}{2\pi n} \sqrt{\frac{\mu + 2}{1 - \mu} \frac{1}{r^3} mg} \approx 5753 \text{ A} \propto 10^3 \text{ A} \quad (29)$$

8. Магнитное поле, которое порождает такой ток, текущий через соленоид:

$$B \approx \frac{2\pi In}{c} = \frac{2\pi n}{c} \frac{c}{2\pi n} \sqrt{\frac{\mu + 2}{1 - \mu} \frac{1}{r^3} mg} \approx 3,6 \text{ Тл} \propto 10 \text{ Тл} \quad (30)$$

Токи и поля - гигантские по сравнению с током в лабораторных установках и магнитным полем Земли. В реальности Андре Гейм использовал сверхпроводник, чтобы добиться таких значений полей и токов. Тогда лягушка и могла левитировать в воздухе. Оценки тока и поля - оценочные, поскольку



Рис. 4: Лягушонок, левитирующий в воздухе над соленоидом с током

учет реальной формы лягушки это сложное интегрирование, поэтому замена ее шариком в этой задаче удобна. Наконец, покажем некоторые интересные факты из этого опыта.

Для вектора магнитного поля  $\vec{B}$  справедливо соотношение:

$$(\vec{B}, \nabla) \vec{B} = \nabla \left( \frac{B^2}{2} \right) + \vec{B} \times \text{rot } \vec{B} \quad (31)$$

По уравнению Максвелла  $\text{div } \vec{B} = 0$ , тогда:

$$\vec{B} \times \text{rot } \vec{B} = \nabla (\vec{B}, \vec{B}) - \vec{B} \text{div } \vec{B} = \nabla (B^2) \quad (32)$$

Сила со стороны поля с торца соленоида имеет свой градиент в таком случае:

$$\vec{F}_B = r^3 \frac{\mu - 1}{\mu + 2} (\vec{B}, \nabla) \vec{B} = -\nabla (CB^2), \quad C = r^3 \frac{3}{2} \left( \frac{1 - \mu}{\mu + 2} \right) \quad (33)$$

Вектор магнитной силы является градиентом функции со знаком минус. По направлению силы (она направлена по направлению  $z$ ) энергия  $W = CB^2$  будет уменьшаться. Будем считать соленоид очень длинным, тогда:

$$B(z') = \frac{2\pi In}{c} \left( \frac{z'}{\sqrt{R^2 + z'^2}} - 1 \right) \quad (34)$$

Где координата  $z'$  отсчитывается от верхнего торца соленоида. Уравнение для нахождения высоты левитирующей лягушки:

$$C (B^2(0) - B^2(h)) = mgh \quad (35)$$

Что эквивалентно уравнению:

$$C \left( \frac{2\pi In}{c} \right)^2 \left[ 1 - \left( \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}} - 1 \right)^2 \right] = mgh \quad (36)$$

Расчетный коэффициент из полученных данных  $S = \frac{mg}{C \left( \frac{2\pi In}{c} \right)^2} = 0,68$ , тогда, можно получить высоту взлета лягушки:  $h \approx 1,42$  см. Для лягушки такого размера и массы - вполне естественный результат. Оценим силу, с которой поле действует на лягушку:

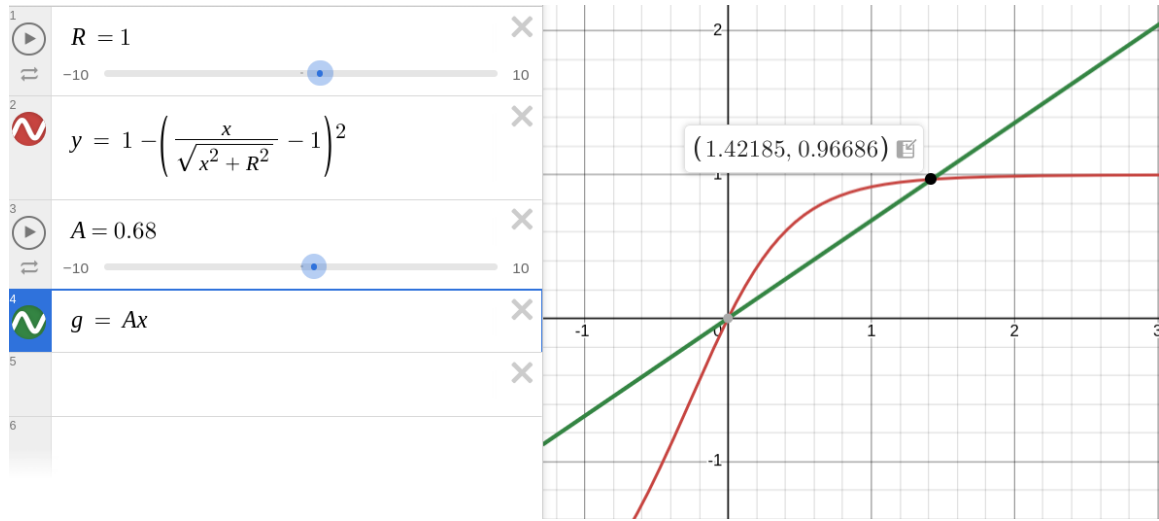


Рис. 5: Расчет высоты для парящего лягушонка

$$|F_B| = r^3 \frac{\mu - 1}{\mu + 2} B_z \frac{\partial B(z)}{\partial z} \approx r^3 \frac{1 - \mu}{2 + \mu} B_z^2 \approx 1,45 \times 10^{-5} \text{ дин} \propto 10^{-5} \text{ дин} \quad (37)$$

Видно, что сила - действующая на диамагнетик очень маленькая по модулю. Поэтому лягушку не смогло бы «разорвать на части» при таком огромном токе и магнитном поле. Согласно одной из статей, лягушка в этом опыте чувствовала себя отлично, по мнению ученых, и даже «спокойно упрыгала» после его завершения. В этом опыте показана красота и изящность природы магнетиков.