

# Лабораторная работа "Изгиб балки"

Кирилл Шевцов, Насонов Илья, Лобанов Роман Б03-402

18 ноября 2025 г.

## Необходимая теория

Стержень, работающий на изгиб, называется балкой. Будем считать, что балка сделана из однородного материала, она имеет постоянное поперечное сечение и ось симметрии. Пусть внешние силы, приложенные к телу, также лежат в плоскости симметрии балки. Внешние силы могут быть сосредоточенными и непрерывно распределенными, также к балке может быть приложен внешний момент сил.

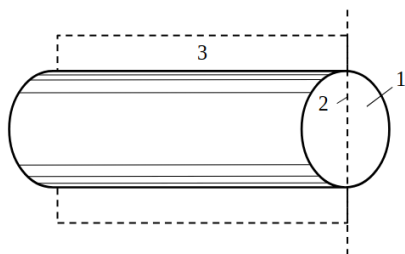


Рис. 1: Балка: 1 - ось симметрии, 2 - ось симметрии сечения, 3 - плоскость симметрии

Вся балка и всякая ее часть находится в равновесии. При действии на балку механического изгибающего момента сил будем придерживаться следующего правила знаков: момент  $M$  считается положительным, если он стремится изогнуть балку выпуклостью вниз, и отрицательным в противном случае.

Для сил: если изгибающая сила  $Q$  стремится осуществить вращение балки по часовой стрелке и отрицательной в противном случае.

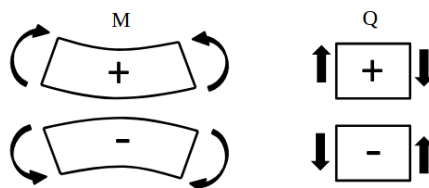


Рис. 2: Правило знаков

Покажем некоторые дифференциальные соотношения для между внутренним изгибающим моментом, внутренней поперечной силой и линейной плотностью внешней распределенной силы. Пусть по всему фрагменту балки распределена некоторая внешняя сила, с линейной плотностью  $\omega = \omega(z)$ , ось  $z$  направим вправо.

Рассмотрим некоторый фрагмент балки  $dz$

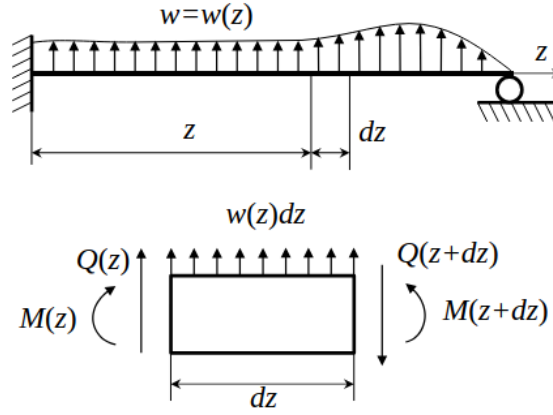


Рис. 3: Распределения сил

Из условия равенства нулю равнодействующих сил и уравнения моментов относительно левого сечения

$$Q(z) + \omega(z)dz - Q(z + dz) = 0 \rightarrow \frac{d}{dz}Q(z) = \omega(z) \quad (1)$$

$$Q(z + dz)dz - M(z + dz) + M(z) - \omega dz(\frac{1}{2}dz) = 0 \rightarrow Q = \frac{d}{dz}M(z) \quad (2)$$

При внимательном взгляде на геометрию изогнутой балки замечаем, что слои (волокна) балки по одну сторону от ее оси удлиняются, а по другую сторону - укорачиваются. Слой, длина которого не изменяется, называется нейтральным. Суммарное действие касательных напряжений дает внутреннюю поперечную силу

$$Q = \oint \tau dS \quad (3)$$

Нормальные напряжения при движении перпендикулярно нейтральному слою стержня, меняют знак, и момент нормальных составляющих сил равен внутреннему изгибающему моменту

$$M_x = \oint \sigma y dS \quad (4)$$

Здесь плечо  $y$  силы  $\sigma dS$  отсчитывается от произвольной оси в плоскости сечения, параллельной нейтральному слою. Можно показать, что нормальные напряжения в сечении балки не зависят от

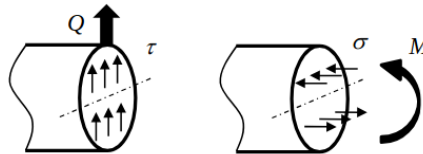


Рис. 4: Качественная картина распределения нормальных и касательных сил

координаты по нейтральной линии сечения и определяют изгибающий момент, равный

$$\sigma(x, y) = E\varepsilon = \frac{E}{r}y \rightarrow M_x = \oint \sigma y dS = \frac{E}{r} \oint y^2 dS = \frac{E}{r}I_x \quad (5)$$

где вводится обозначение  $I_x = \oint y^2 dS$  - момент инерции сечения балки при повороте относительно оси  $x$ . Момент инерции характеризует жесткость балки на изгиб и зависит напрямую от геометрии сечения.

Вот примеры конкретных геометрий сечения - прямоугольное, рельс, двутавр и плоская ферма из круглых сечений

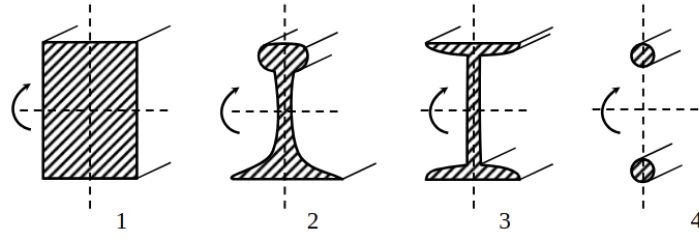


Рис. 5: Виды сечений

Рассчитаем изгибающий момент в сечении балки относительно оси симметрии оси  $y$

$$M_y = \oint \sigma x dS = \frac{E}{r} \oint xy dS = \frac{E}{r} I_{xy} \quad (6)$$

где введем обозначение  $I_{xy} = \oint xy dS$  - центробежный момент инерции сечения. В общем виде, компоненты  $I_{x,y,z}, I_{xy,xz}, \dots$  составляют матрицу тензора моментов инерций.

Выражения для оценок касательных и нормальных напряжений в удаленном сечении балки, при приложенной силе  $f$ , длине  $l$ , с характерным размером сечения  $b$

$$\sigma \sim Pl/b^3 \quad \tau \sim P/b^2 \quad (7)$$

**Теорема Кастильяно.** Перемещение точки приложения сосредоточенной силы вдоль линии ее действия определяется частной производной полной энергии упругой системы по этой силе. Зная энергию балки, и силу, на нее действующую, запишем

$$\delta y = \frac{\partial W}{\partial F} = \frac{1}{EI_x} \int_{z_1}^{z_2} M \frac{\partial M}{\partial F} dz \quad (8)$$

В дальнейшем это будет полезно чтобы вычислить перемещение при изгибе балки. Выражение для силы реакции  $X$  в шарнирной опоре для балки длиной  $l$

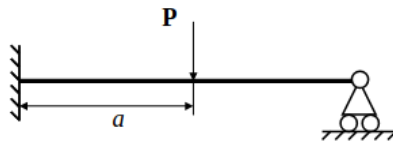


Рис. 6: Реакция в шарнирной опоре

определяется из соотношений равенства нулю сил, моментов и уравнения Кастильяно (8)

$$X = \frac{P}{2} \left( \frac{3(l/a) - 1}{(l/a)^3} \right) \quad (9)$$

Если рассмотреть  $a = l/2$ , то  $X = 5P/16$ . Справедливость этого соотношения необходимо проверить в данной работе.

Дифференциальное уравнение упругой линии балки

$$M_x(z) = \ddot{y} EI_x, \quad 1/r = \frac{\ddot{y}}{(1 + \dot{y}^2)^{3/2}} \approx \ddot{y} \quad (10)$$

# Лабораторный стенд

Лабораторная установка представлена ниже

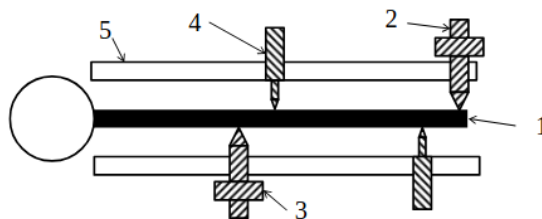


Рис. 7: Установка

Один конец балки прямоугольного сечения свободен, другой жестко закреплен. Вдоль балки на направляющих смонтированы два датчика силы и два датчика перемещения. Все датчики можно переносить вдоль балки и закреплять в нужном месте. Датчики силы откалиброваны в ньютонах, а датчики перемещения – в десятых долях миллиметра. Материал балки - сталь с модулем юнга  $E = 2 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>.

## Выполнение работы

1. Пусть точка приложения силы находится от места жесткого закрепления балки на расстоянии  $a = 30$  см. Длина стержня  $l = 67 \pm 1$  см.
2. Толщина исследуемой балки в разных местах, ее сечение - прямоугольное.

Номер измерения	1	2	3	4
$l$ , мм	24,4	24,4	24,35	24,3
$\langle l \rangle$ , см	24,36			

Таблица 1: Толщина балки в разных местах

Положим среднюю толщину толщиной самой пластины.

3. Проведем серию при постепенном увеличении нагрузки  $P$

Сила приложения $P$ , Н	Смещение $x$ , мм	Реакция $X$ , Н
20,3	0,702	6,5
30,0	0,986	9,0
40,0	1,338	12,1
50,1	1,666	15,1
60,1	1,871	16,9
69,7	2,257	20,6
80,9	2,780	25,5
90,3	3,193	29,3
100,2	3,339	31,6

Таблица 2: Толщина балки в разных местах

4. Проведем серию при постепенном уменьшении нагрузки  $P$

Сила приложения $P$ , Н	Смещение $x$ , мм	Реакция $X$ , Н
91,5	3,041	27,9
85,5	2,859	26,1
80,5	2,716	24,8
75,0	2,716	24,8
70,6	2,250	20,3
65,0	2,137	19,5
60,2	2,058	18,8
55,0	2,016	18,2
50,2	1,887	17,0
45,0	1,568	14,0
40,4	1,543	13,7
35,0	1,341	12,0
30,2	1,185	10,4
25,0	0,982	8,8
20,5	0,679	6,0
15,3	0,574	4,8
10,2	0,438	3,7

Таблица 3: Толщина балки в разных местах

5. График зависимости приложенной силы  $P$  от реакции  $X$

\*\*Тут картинка будет\*\*

6. График зависимости смещения  $x$  от приложенной силы  $P$

\*\*Тут картинка будет\*\*

## Вывод

\*\*будет\*\*