Обучение без учителя

Подбираем θ не зная Y.

___

Вероятности.

X -данные (признаки), θ

априорная в-ть

$P(\theta)$ -ожидаемая ~~до того как~~ оценка до того, как пронаб. данные

После наблюд. данных.

$P(X|\theta)$ - ф-я правдоподобия   likelihood

$P(\theta|X)$ - апостериорная в-ть   posterior

Теор. Байеса

$$P(\theta|X) = \frac{P(X|\theta)\,P(\theta)}{P(X)}$$

$P(X)$ — const (X-изв.)

posterior $\underset{(\propto)}{\approx}$ likelihood × prior

$P(X,Y|\theta)$ - ф-я полного правдоподобия (обуч. с учит.)

$P(X,Y|\theta) \xrightarrow[\theta]{} \max$

X_{tr}, Y_{tr} и максимиз. по θ
(Тренир.)

$P(X|\theta) \xrightarrow[\theta]{} \max$

Y неизв.
(обуч. без учит)

___

Что делать?

$P(X|\theta) = \sum\limits_{Y} P(X,Y|\theta)$ ⊖

$P(X,Y|\theta) = \prod\limits_{i=1}^{n} P(x_i, y_i|\theta)$

сложно оптимиз.

Поэтому решают через $\log(\ldots)$

$$(=) \sum_y \prod_{i=1}^n p(x_i, y_i | \theta) = \prod_{i=1}^n \sum_y p(x_i, y_i | \theta)$$

$$\log\left(p(X|\theta)\right) = \sum_{i=1}^n \log \sum_y p(x_i, y_i | \theta)$$

плохо $\left(\exists \text{ теор.} \ldots \log(P(X,Y|\theta)) \text{ вогн.,} \atop \text{max один.} \right.$

$\left. \text{А для суммы} \atop \text{не вытек.} \right)$

$$\log p(X|\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} q(Y) \log p(X|\theta) dy = \int q(Y) \log \frac{P(X,Y|\theta)}{P(Y|X,\theta)} dy$$

$$P(X,Y|\theta) = P(Y|X,\theta) \boxed{P(X|\theta)}$$

$$(=) \int q(Y) \log \frac{P(X,Y|\theta) q(Y)}{P(Y|X,\theta) q(Y)} dy =$$

норм. распр.

HE KL $\boxed{L(q,\theta)}$ $\qquad KL(q(Y)||P(Y|X,\theta))$

$\geqslant 0$

$$= \int q(Y) \log \frac{P(X,Y|\theta)}{q(Y)} dy + \int q(Y) \log \frac{q(Y)}{P(Y|X,\theta)} dy$$

Дивергенция Кульбака-Лейблера.

$$KL(p(X)||q(X)) = \int p(X) \log \frac{p(X)}{q(X)} dx$$

1) $KL(p||q) \geqslant 0$

2) $KL(p||q) = 0 \Leftrightarrow p(X) = q(X)$

3) $KL(p||q) \neq KL(q||p)$

EM-algorythm

Шаг E: оптим. по q

Шаг M: оптимиз. по θ

L - нижн. гран. ф-и , т.к. $KL \geqslant 0$

$\log p(X|\theta)$ не зав. от q

$L \max\limits_{q} \Rightarrow KL \min\limits_{q}$

KL стараемся обнулить

$\max(L)$ единств. (лок.)

E: $q(3) = p(3|X, \theta)$

$\text{argmin } KL \ (q(3) \| p(3|X, \theta_{old}))$

M: θ

$$\int q(3) \log \frac{p(X, 3|\theta)}{q(3)} d3 = \int q(3) \log p(X, 3|\theta) d3 - \underbrace{\int q(3) \log q(3) d3}_{Const}$$

$\int q(3) \log p(X, 3|\theta) d3 = E_{(3|X, \theta)} \log p(X, 3|\theta)$

$\text{argmax}\limits_{\theta} E_{(3|X, \theta)} \log p(X, 3|\theta)$

θ_{new}

лин.комб. вогн.ф-й - вогн.

Картиннкиии! Ууииии!

максим. ф-ю непот.
правдоп.

$L(q, \theta)$

и так пока не сойд.

Схождение монотонно

$\log P(X|\theta)$

θ

θ_0 θ_1
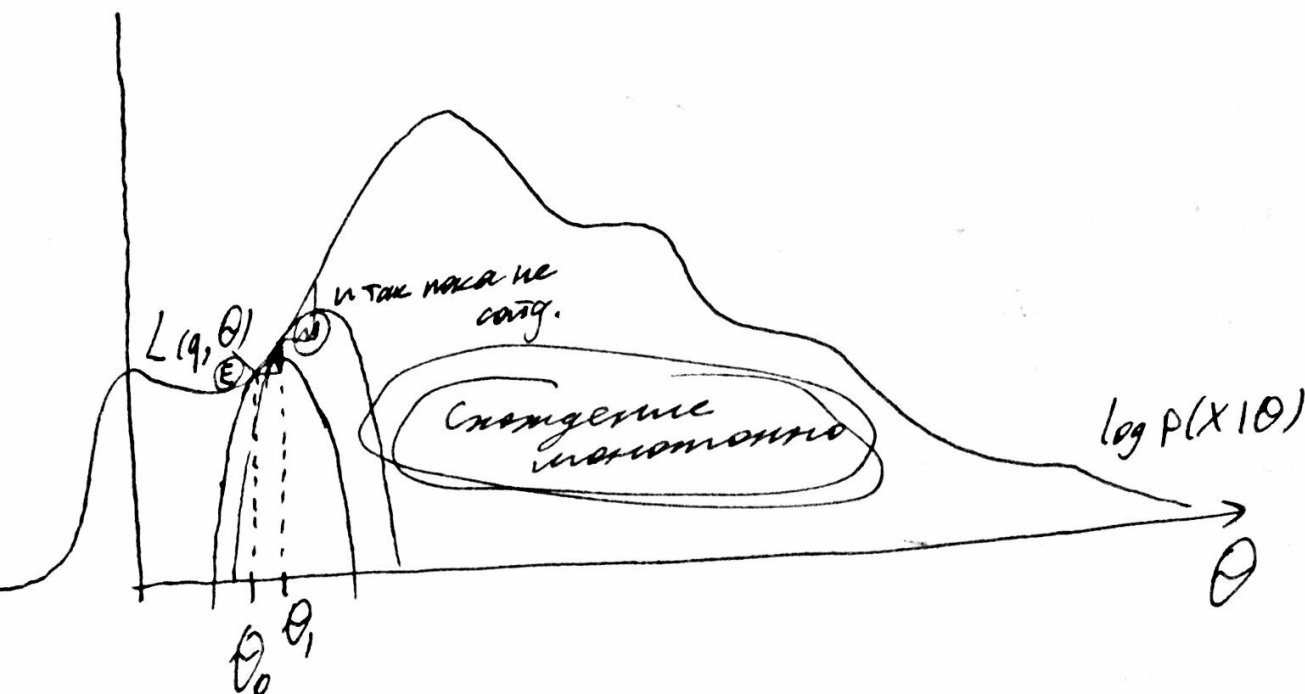
Дома разобрать задачу со стрим. сервисом.