Corrigé du DS 7 version B

Exercice. Un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Tout d'abord, remarquons que si P est dans $\mathbb{R}_n[X]$, il en va de même pour $P(2X)$ puis pour $P(2X) - P$. Ceci montre que $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
   Pour établir la linéarité de f, considérons P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ et λ, μ deux réels. On a
$$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)(2X) - (\lambda P + \mu Q) \\ &= \lambda\,(P(2X) - P) + \mu(Q(2X) - Q) \\ &= \lambda f(P) + \mu f(Q). \end{aligned}$$
2. Les images par f de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ nous donnent une famille génératrice de l'image :
$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(f(1), f(X), \dots, f(X^n)).$$
   Pour $k \in [\![0,n]\!]$ $f(X^k) = (2^k - 1)X^k$. Notamment, $f(1) = 0$. On a donc
$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(f(X), \dots, f(X^n)) = \operatorname{Vect}(X, X^2, \dots, X^n).$$
   La famille $(X, X^2, \dots, X^n)$ engendre donc $\operatorname{Im}(f)$ et elle est libre car ces polynômes non nuls ont des degrés deux à deux distincts. C'est donc une base de $\operatorname{Im}(f)$.
3. Appliquons le théorème du rang à f, linéaire et définie sur l'espace vectoriel de dimension finie $\mathbb{R}_n[X]$:
$$\dim \mathbb{R}_n[X] = \dim \operatorname{Ker}(f) + \dim \operatorname{Im}(f).$$
   Or, $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1$ et d'après la question précédente, $\dim \operatorname{Im}(f) = n$.
   On obtient donc que $\boxed{\dim \operatorname{Ker}(f) = 1}$: $\operatorname{Ker}(f)$ est une droite vectorielle.
   On a remarqué plus haut que $1 \in \operatorname{Ker}(f)$.
   Ce vecteur non nul de la droite en est une base : $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}(1)$.
4. Oui : d'après un résultat de notre cours :
$$\mathbb{R}_n[X] = \operatorname{Vect}(1, X, \dots, X^n) = \operatorname{Vect}(1) \oplus \operatorname{Vect}(X, \dots, X^n) = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f).$$
   On pouvait aussi utiliser ici la caractérisation des supplémentaires en dimension finie.

Problème. Équations du second degré dans $\mathscr{L}(E)$.

Partie 1. Le cas où P est scindé à racines simples : lemme des noyaux.

0. Par définition du noyau, on a $f(x) - \lambda x = 0$, soit $\boxed{f(x) = \lambda x}$.
1. On est dans un anneau, on peut développer (plus facile que factoriser ?)
$$(f - \lambda\mathrm{id}) \circ (f - \mu\mathrm{id}) = f^2 - (\lambda + \mu)f + \lambda\mu\mathrm{id} = f^2 + \alpha f + \beta\mathrm{id} = 0.$$
   les relations entre coefficients et racines donnant $\lambda + \mu = -\alpha$ et $\lambda\mu = \beta$.
   Tout est pareil évidemment en échangeant λ et μ.
2. Soit $y \in \operatorname{Im}(f - \lambda\mathrm{id})$. Il existe $x \in E$ tel que $y = (f - \lambda\mathrm{id})(x)$. On a
$$(f - \mu\mathrm{id})(y) = (f - \mu\mathrm{id}) \circ (f - \lambda\mathrm{id})(x) = 0,$$
   ce qui montre bien $\boxed{\operatorname{Im}(f - \lambda\mathrm{id}) \subset \operatorname{Ker}(f - \mu\mathrm{id})}$.
   On peut bien entendu échanger les rôles de λ et μ.
3. Lemme des noyaux (1) : une preuve en dimension finie.
   (a) En passant à la dimension dans l'inégalité de la question 2, on obtient
$$\dim \operatorname{Im}(f - \lambda\mathrm{id}) \leq \dim \operatorname{Ker}(f - \mu\mathrm{id}).$$
   En appliquant le théorème du rang à $f - \lambda\mathrm{id}$, (endomorphisme défini sur E, espace de dimension finie) on obtient
$$\dim E = \dim \operatorname{Ker}(f - \lambda\mathrm{id}) + \dim \operatorname{Im}(f - \lambda\mathrm{id})$$
$$\text{soit} \quad \dim \operatorname{Im}(f - \lambda\mathrm{id}) = n - \dim \operatorname{Ker}(f - \lambda\mathrm{id}).$$
   En injectant dans l'inégalité plus haut, on obtient
$$n \leq \dim \operatorname{Ker}(f - \lambda\mathrm{id}) + \dim \operatorname{Ker}(f - \mu\mathrm{id}) \quad \text{soit} \quad \boxed{n \leq \dim E_\lambda + \dim E_\mu}$$
   (b) Considérons un vecteur dans l'intersection $E_\lambda \cap E_\mu$. On a alors $f(x) = \lambda x$ et $f(x) = \mu x$. Ceci amène $(\lambda - \mu)x = 0$, et puisque $\lambda \neq \mu$, on a $x = 0$. L'intersection est triviale, donc les deux sous-espaces sont en somme directe.
   Puisque $E_\lambda \oplus E_\mu \subset E$, on obtient en passant aux dimensions sur cette somme directe
$$\boxed{\dim E_\lambda + \dim E_\mu \leq n}$$

(c) D'une part, E_λ et E_μ sont en somme directe. D'autre part, en combinant (a) et (b), on obtient que $\dim E_\lambda + \dim E_\mu = \dim E$. La caractérisation des supplémentaires en dimension finie donne alors que

$$\boxed{E = E_\lambda \oplus E_\mu}$$

(d) *Le temps du dessin*
On considère $E = \mathbb{R}^3$, $\lambda = 2$, $\mu = 1$, $\dim E_\lambda = 2$, $\dim E_\mu = 1$.
Faire un dessin représentant E_λ et E_μ.
Représenter aussi un un vecteur x n'appartenant ni à E_λ ni à E_μ.
Enfin, représenter $f(x)$.
Un peu de couleur sera appréciée.

4. Lemme des noyaux (2) : une preuve en dimension quelconque.

Soit $x \in E$.
Analyse. Supposons qu'il existe $\ell \in E_\lambda$ et $m \in E_\mu$ tels que $x = \ell + m$.
En appliquant f linéaire, on obtient $f(x) = \lambda\ell + \mu m$. Puisque $\lambda \neq \mu$, on peut résoudre le système en

$$\ell = \frac{1}{\lambda - \mu}\left(f(x) - \mu x\right) \qquad \text{et} \qquad m = \frac{1}{\mu - \lambda}\left(f(x) - \lambda x\right).$$

Synthèse. On définit les deux vecteurs $\ell = \frac{1}{\lambda-\mu}\left(f(x) - \mu x\right)$ et $m = \frac{1}{\mu-\lambda}\left(f(x) - \lambda x\right)$.
On somme pour vérifier que $\ell + m = x$.
Puisque ℓ appartient à $\mathrm{Im}(f - \mu \mathrm{id})$, il appartient à $\mathrm{Ker}(f - \lambda\mathrm{id})$ d'après 2.
Puisque ℓ appartient à $\mathrm{Im}(f - \lambda \mathrm{id})$, il appartient à $\mathrm{Ker}(f - \mu\mathrm{id})$ d'après 2.
Conclusion. Tout vecteur de E se décompose de manière unique sur la somme de E_λ et E_μ, ce qui redémontre leur $\boxed{\text{supplémentarité}}$ en dimension quelconque.

Partie 2. Cas où $P = X^2 - \lambda X$.

5. On appelle un tel endomorphisme idempotent un $\boxed{\text{projecteur}}$.

6. Supposons que f est un automorphisme de E. En composant par f^{-1} dans l'égalité $f^2 = \lambda f$, on obtient que $f = \lambda\mathrm{id}$: f est alors $\boxed{\text{l'homothétie de rapport } \lambda}$.

7. Puisque dans cette partie, λ et 0 sont les racines de P, avec $\lambda \neq 0$, le lemme des noyaux donne que E_0 et E_λ sont supplémentaires. On a bien :

$$E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f - \lambda\mathrm{id}).$$

8. Soit p le projecteur sur $\mathrm{Ker}(f - \lambda\mathrm{id})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$ et h l'homothétie de rapport λ. Par définition de p, on a

$$x = \underbrace{x - p(x)}_{\in \mathrm{Ker}(f)} + \underbrace{p(x)}_{\in \mathrm{Ker}(f - \lambda\mathrm{id})}.$$

Appliquons f :

$$f(x) = 0_E + f\left(p(x)\right).$$

Puisque $p(x) \in E_\lambda$, on a $f(p(x)) = \lambda p(x)$. Finalement, $f(x) = \lambda p(x) = h \circ p(x)$.
On a bien démontré que

$$\boxed{f = h \circ p}.$$

Une preuve un peu plus abstraite : on définit h comme l'homothétie de rapport λ et on pose $p = h^{-1} \circ f$ (ceci a un sens puisque h est inversible : sa réciproque est l'homothétie de rapport $\frac{1}{\lambda}$). Il n'y a qu'à vérifier que p est un projecteur. Comme composée de h^{-1} et f, il s'agit d'un endomorphisme de E. Vérifions qu'il est idempotent :

$$p^2 = (h^{-1}f)^2 = h^{-2}f^2 = h^{-2}hf = h^{-1}f = p,$$

ceci en utilisant que $f^2 = \lambda f = h \circ f$, et que h^{-1} commute avec f (c'est une homothétie).

9. Un exemple.

(a) L'équation caractéristique est $x(x - \lambda) = 0$, avec deux racines distinctes 0 et λ. Nous savons alors que l'équation a pour ensemble de solutions

$$S_0 = \{x \mapsto A + Be^{\lambda x} \mid (A, B) \in \mathbb{K}^2\}.$$

Notons $u : x \mapsto 1$ et $v : x \mapsto e^{\lambda x}$. On a $S_0 = \mathrm{Vect}(u, v)$.
La famille (u, v) est libre, c'est facile à vérifier, donc c'est une base de S_0.

$$\boxed{S_0 \text{ est un plan vectoriel (dimension 2) de base } (u, v).}$$

(b) Notons E l'espace vectoriel S_0 ci-dessus, sous-espace de l'espace $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.
Sur cet espace, nous considérons $D : y \mapsto y'$, la dérivation, notoirement linéaire.
On calcule $D(u) = 0$ et $D(v) = \lambda v$. Puisque les vecteurs de la base (u, v) ont leur image dans E, tous les vecteurs de E ont leur image dans E par linéarité, ce qui justifie que $D \in \mathscr{L}(E)$. Par définition de E, on a

$$\forall y \in E \quad y'' - \lambda y' = 0 \quad \text{soit} \quad D^2(y) - \lambda D(y) = 0.$$

On a donc bien $D^2 = \lambda D$. Il est clair que D n'est pas une homothétie : si elle l'était, elle serait de rapport 0 puisqu'elle envoie u sur 0. Mais ce n'est pas le cas puisque $f(v) = \lambda v$ et que $\lambda \neq 0$.

Partie 3. Cas où $P = X^2 - \gamma$.

10. On appelle un tel endomorphisme idempotent une $\boxed{\text{symétrie vectorielle}}$.

11. Posons $g = \frac{1}{\gamma} f$. On a $g \circ f = f \circ g = \mathrm{id}$ donc

$$\boxed{f \text{ est un automorphisme de réciproque } \frac{1}{\gamma} f.}$$

12. Supposons que γ possède une racine carrée ρ dans $\mathbb{K}$. Elle en a alors deux : ρ et $-\rho$, qui sont distinctes puisque $\gamma \neq 0$. Puisque P est scindé à racines simples, le lemme des noyaux donne que E_ρ et $E_{-\rho}$ sont supplémentaires. On a bien :

$$E = \mathrm{Ker}(f - \rho \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(f + \rho \mathrm{id}).$$

Posons h l'homothétie de rapport ρ et $s = h^{-1} \circ f$. Puisque h^{-1} et f commutent (h est l'homothétie de rapport ρ^{-1}) on a

$$s^2 = h^{-1} f h^{-1} f = h^{-2} f^2 = (\rho^{-2} \mathrm{id}) \circ (\gamma \mathrm{id}) = (\rho^{-2} \gamma) \mathrm{id} = \mathrm{id}.$$

Puisque s est un endomorphisme involutif, c'est une bien une symétrie.

13. Un exemple. Dans cette question, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
   (a) L'équation caractéristique est $x^2 - \gamma = 0$.

   Premier cas. $\gamma > 0$. Alors l'équation a deux racines réelles distinctes $\sqrt{\gamma}$ et $-\sqrt{\gamma}$. L'ensemble des solutions, notons-le S_0, est un plan vectoriel : on peut proposer les bases

$$\left(x \mapsto e^{\sqrt{\gamma} x}, x \mapsto e^{-\sqrt{\gamma} x}\right) \quad \text{ou} \quad \left(x \mapsto \mathrm{ch}(\sqrt{\gamma} x), x \mapsto \mathrm{sh}(\sqrt{\gamma} x)\right).$$

   Second cas. $\gamma < 0$. Alors l'équation a deux racines distinctes $i\omega$ et $-i\omega$, en notant $\omega = \sqrt{-\gamma}$. L'ensemble des solutions, notons-le S_0, est un plan vectoriel dont une base est

$$\left(x \mapsto \cos(\omega x), x \mapsto \sin(\omega x)\right).$$

   (b) Notons E l'espace vectoriel S_0 ci-dessus, sous-espace de l'espace $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$. On vérifie comme en question 9 que la dérivation est bien un endomorphisme de E qui convient. En particulier, il faut vérifier que E est stable par dérivation, et cela se fait bien en dérivant les vecteurs d'une des bases proposées.

Partie 4. Cas où $P = X^2 + 1$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et en dimension finie.

14. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda u + \mu f(u) = 0$.
En appliquant f (linéaire) on obtient $\lambda f(u) + \mu f^2(u) = 0$, soit $\lambda f(u) - \mu u = 0$.
Le système $\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda u + \mu f(u) & = & 0 \\ -\mu u + \lambda f(u) & = & 0 \end{array} \right.$ est de Cramer.
En faisant $\lambda L_1 + \mu L_2$, on obtient

$$(\lambda^2 + \mu^2) u = 0.$$

Puisque u est non nul, on a $\lambda^2 + \mu^2 = 0$ et donc $\lambda = \mu = 0$, puisque λ^2 et μ^2 sont deux réels positifs qui somment à 0.

$$\boxed{(u, f(u)) \text{ est bien une famille libre}}$$

15. • Clair : V_u est un sous-espace vectoriel. Est-il stable par f ? Oui car $f(u) \in V_u$ et $f(f(u)) = f^2(u) = -u \in V_u$. Par linéarité, tout vecteur de V_u a son image dans V_u.
• Soit F un sous-espace vectoriel de E contenant u et stable par f.
En particulier, $u \in F$ et $f(u) \in F$ par stabilité. Ainsi, $\mathrm{Vect}(u, f(u)) \subset F$ puisque $\mathrm{Vect}(u, f(u))$ est le plus petit sous-espace de E qui contient u et $f(u)$. On a bien prouvé $V_u \subset F$.

$$\boxed{V_u \text{ est le plus petit sous-espace de } E \text{ contenant } u \text{ et stable par } f.}$$

16. Soit $a \in V_u$ un vecteur non nul.
• $a \in V_u$ et V_u est stable par f donc $f(a) \in V_u$. Ainsi, $\mathrm{Vect}(a, f(a)) \subset V_u$ soit $V_a \subset V_u$.
• Puisque $(a, f(a))$ et $(u, f(u))$ sont libres d'après 14, ce sont des bases respectives de V_a et de V_u qu'elles engendrent. Ainsi, V_a et V_u sont deux plans vectoriels.
L'inclusion ci-dessus et l'égalité des dimensions permet de conclure que $\boxed{V_a = V_u}$.

17. Soit $x \in F \cap V_u$. Il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x = \lambda u + \mu f(u)$.
En appliquant f, on obtient $f(x) = \lambda f(u) - \mu u$.

Le système $\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda u + \mu f(u) & = & x \\ -\mu u + \lambda f(u) & = & f(x) \end{array} \right.$ En faisant $\lambda L_1 + \mu L_2$, on obtient

$$(\lambda^2 + \mu^2) u = \lambda x + \mu f(x).$$

Puisque F contient x et est stable par f, il contient aussi $f(x)$ et donc $\lambda x + \mu f(x)$.
Supposons que $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$; en multipliant par l'inverse, on obtient $u \in F$, ce qui

n'est pas. Ainsi a-t-on $\lambda^2+\mu^2=0$ et donc $\lambda=\mu=0$ puisque λ^2 et μ^2 sont des réels positifs sommant à 0. Ceci amène enfin que $x=0$: $\boxed{F\cap V_u=\{0\}}$.
La stabilité de $F\oplus V_u$ par f est facile. Tout vecteur x de cet espace s'écrit $x=\varphi+v$ avec $\varphi\in F$ et $v\in V_u$. On calcule $f(x)=f(\varphi)+f(v)$. Puisque F et V_u sont stables par f, on a $f(\varphi)\in F$ et $f(v)\in V_u$. D'où $f(x)\in F\oplus V_u$: $\boxed{F\oplus V_u \text{ est stable par } f}$.

18. L'espace E n'est pas réduit à $\{0\}$ on peut considérer u_1 non nul dans E.
Alors $(u_1,f(u_1))$ est libre d'après 14.
Si c'est une base de E, on a répondu à la question avec $p=1$.
Sinon, on pose $F=V_{u_1}$ et $u_2\in E\setminus F$. Le sous-espace F est stable par f d'après 15 et il ne contient pas u_2. D'après 17, F et V_{u_2} sont en somme directe (et il est donc facile de prouver que $(u_1,f(u_1),u_2,f(u_2))$ est une base de $F\oplus V_{u_2}$ et donc une famille libre. Si $V_{u_1}\oplus=E$, on a répondu à la question avec $p=2$.
Sinon, on pose $F=V_{u_1}\oplus V_{u_2}$ et $u_3\in E\setminus F$. Le sous-espace F est stable par f d'après 17 et ne contient pas u_3 : il est en somme directe avec V_{u_3} et on peut itérer.
Après k étapes, on dispose d'une famille libre
$$(u_1,f(u_1),u_2,f(u_2),\cdots,u_k,f(u_k))$$
dont le cardinal $2k$ est majoré par la dimension de l'espace.
Ceci permet de définir p le nombre de vecteurs maximal pouvant être ajoutés par ce procédé. Si p est maximal, c'est qu'on ne peut plus considérer de vecteur u dans $E\setminus\mathrm{Vect}(u_1,f(u_1),\cdots,u_p,f(u_p))$: c'est que la famille $(u_1,f(u_1),\cdots,u_p,f(u_p))$ engendre E. C'est une $\boxed{\text{base}}$ de E.
En particulier, la dimension de E (qui est le cardinal de cette base) est $\boxed{\text{paire}}$.

19. En lien avec f, on a créé dans la question précédente une base de E
$$(u_1,f(u_1),\cdots,u_p,f(u_p)).$$
L'énoncé nous donne $g\in\mathscr{L}(E)$ tel que $g^2=-\mathrm{id}$.
On peut donc créer en lien avec g une base de E
$$(v_1,g(v_1),\cdots,v_p,g(v_p)).$$
(elle a le même cardinal, bien sûr, puisque c'est la dimension de l'espace).
Nous allons définir notre automorphisme θ sur la seconde base ci-dessus en posant
$$\forall k\in[\![1,p]\!]\quad \theta(v_k)=u_k\quad\text{ et }\quad\theta(g(v_k))=f(u_k).$$
Nous savons en effet par théorème qu'il existe une (unique) application linéaire envoyant une base donnée sur une famille fixée. Puisque θ envoie par construction une base de E sur une autre base de E, il s'agit d'un automorphisme de E.
On va prouver l'égalité Pour prouver que $g=\theta^{-1}\circ f\circ\theta$, c'est-à-dire que $\theta\circ g=f\circ\theta$, il suffit de vérifier que ces deux endomorphismes coïncident sur une base. Pour $k\in[\![1,p]\!]$, on calcule
$$f\circ\theta(v_k)=f(u_k)=\theta(g(v_k))=\theta\circ g(v_k),$$
et
$$f\circ\theta(g(v_k))=f\left(f(u_k)\right)=-u_k=-\theta(v_k)=-\theta(-g^2(v_k))=\theta\circ g\left(g(v_k)\right).$$

20. Supposons que E est de dimension paire égale à $2p$ et considérons $(e_1,e_1',e_2,e_2',\cdots,e_p,e_p')$ une base de E. On peut définir un endomorphisme f en prescrivant l'image de cette base. On décide que
$$\forall k\in[\![1,p]\!]\quad f(e_k)=e_k'\quad\text{ et }\quad f(e_k')=-e_k.$$
Pour $k\in[\![1,p]\!]$, on a $f^2(e_k)=f(e_k')=-e_k$ et $f^2(e_k')=f(-e_k)=-f(e_k)=-e_k'$.
Puisque f^2 et $-\mathrm{id}$ coïncident sur une base, ils sont égaux.