Correction par pair

$\boxed{\text{A}}$ Q2 : avoir introduit le matériel : P, Q dans E_n puis λ, μ dans $\mathbb{Z}$ puis avoir introduit $n+1$ coefficients dans $\mathbb{Z}$ pour P et pour Q. Avoir introduit enfin un réel x et calculé $\lambda P(x) + \mu Q(x)$.

$\boxed{\text{B}}$ Q3-(a) : on contrôlera la première intégration par parties effectuée : est-elle correcte ?

$\boxed{\text{C}}$ Q3-(b) : le « en déduire ».
Il suffisait ici de multiplier l'égalité précédente par x^{2n-1} : voit-on clairement comment apparaissent les expressions $J_{n-1}(x)$ et $J_{n-2}(x)$?

$\boxed{\text{D}}$ Q4 : On vient de démontrer en Q3 une relation de récurrence d'ordre 2. Votre camarade a-t-il pensé à commencer une récurrence "double" ?

$\boxed{\text{E}}$ Si oui, est-elle logiquement bien rédigée ?

Problème. Une preuve de l'irrationalité de π.

Partie A. Préliminaires techniques.

1. Un calcul de limite.

   (a) Puisque $|x| < \lfloor |x| \rfloor + 1$, l'entier $n_0 = \lfloor |x| \rfloor + 1$ convient.

   (b) Soit n supérieur à n_0. On a
   $$\left|\frac{x^n}{n!}\right| = \prod_{k=1}^{n} \frac{|x|}{k} = \left(\prod_{k=1}^{n_0-1} \frac{|x|}{k}\right) \cdot \left(\prod_{k=n_0}^{n} \frac{|x|}{k}\right).$$
   Or, pour $k \geq n$, on a $\frac{|x|}{k} \leq \frac{|x|}{n_0}$.
   En faisant un produit d'inégalités à membres positifs,
   $$\prod_{k=n_0}^{n} \frac{|x|}{k} \leq \left(\frac{|x|}{n_0}\right)^{n-n_0+1} \qquad n-n_0+1 : \text{nombre de facteurs dans le produit.}$$
   Ceci amène
   $$\left|\frac{x^n}{n!}\right| \leq \left(\prod_{k=1}^{n_0-1} \frac{|x|}{k}\right) \cdot \left(\frac{|x|}{n_0}\right)^{n-n_0+1}.$$

   (c) Posons $C = \left(\prod_{k=1}^{n_0-1} \frac{|x|}{k}\right)$ (constante indépendante de n) et $q = \frac{|x|}{n_0}$.
   On a prouvé
   $$\forall n \geq n_0 \quad \left|\frac{x^n}{n!}\right| \leq C q^{n-n_0+1}.$$
   Or, $|q| < 1$: on a donc $q^n \to 0$.
   Par encadrement, on a bien démontré que
   $$\boxed{\frac{x^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}.$$

2. Fonctions polynomiales à coefficients entiers.

(a) Soit un couple de fonctions (P,Q) dans E_n^2 et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{Z}^2$.
Traduisons l'appartenance de P et Q à E_n :

$$\exists(a_0,\dots,a_n)\in\mathbb{Z}^{n+1}\quad\forall x\in\mathbb{R}\quad P(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k.$$

$$\exists(b_0,\dots,b_n)\in\mathbb{Z}^{n+1}\quad\forall x\in\mathbb{R}\quad Q(x)=\sum_{k=0}^{n}b_kx^k.$$

On peut alors calculer, pour $x\in\mathbb{R}$,

$$\lambda P(x)+\mu Q(x)=\lambda\sum_{k=0}^{n}a_kx^k+\mu\sum_{k=0}^{n}b_kx^k=\sum_{k=0}^{n}(\lambda a_k+\mu b_k)\,x^k.$$

Pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $\lambda a_k+\mu b_k\in\mathbb{Z}$, l'ensemble $\mathbb{Z}$ étant stable par somme et produit.

(b) La fonction P a été supposée dans E_n :

$$\exists(a_0,\dots,a_n)\in\mathbb{Z}^{n+1}\quad\forall x\in\mathbb{R}\quad P(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k.$$

En posant $a_{n+1}=0$ (c'est un entier), on a $\forall x\in\mathbb{R}\quad P(x)=\sum\limits_{k=0}^{n+1}a_kx^k$, ce qui montre que $P\in E_{n+1}$. Pour $x\in\mathbb{R}$, on a

$$Q(x)=xP(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^{k+1}=\sum_{j=1}^{n+1}a_{j-1}x^j.$$

Posons $b_0=0$ et pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $b_k=a_{k-1}$.

Il est clair que $(b_0,\dots,b_n)\in\mathbb{Z}^{n+1}$ et on a $\forall x\in\mathbb{R}\ \ Q(x)=\sum\limits_{k=1}^{n+1}b_kx^k$:

$$\boxed{Q\in E_{n-1}}$$

Partie B. Preuve de Cartwright.

3. (a) On fait une première intégration par partie en dérivant $u:t\mapsto(1-t^2)^n$.
On a $u'(t)=-2t(1-t^2)^{n-1}$.
On intègre $v':t\mapsto x^2\cos(xt)$ en $v:t\mapsto x\sin(xt)$.

$$\begin{aligned}x^2I_n(x)&=\int_{-1}^{1}(1-t^2)^nx^2\cos(xt)\mathrm{d}t\\&=\cancel{\left[(1-t^2)^nx\sin(xt)\right]_{-1}^{1}}-\int_{-1}^{1}n(-2t)(1-t^2)^{n-1}x\sin(xt)\mathrm{d}t\\&=2n\int_{-1}^{1}t(1-t^2)^{n-1}x\sin(xt)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Le crochet est nul car $(1-t^2)^n$ est nul pour $t=\pm1$ puisque $n\geq1$.

On fait une seconde IPP en dérivant $u:t\mapsto t(1-t^2)^{n-1}$.
On a $u'(t)=(1-t^2)^{n-1}-2t^2(n-1)(1-t^2)^{n-2}$.
On intègre $v':t\mapsto x\sin(xt)$ en $v:t\mapsto-\cos(xt)$.

$$\begin{aligned}x^2I_n(x)&=2n\cancel{\left[-t(1-t^2)^{n-1}\cos(xt)\right]_{-1}^{1}}\\&\quad+2n\int_{-1}^{1}\left((1-t^2)^{n-1}-2t^2(n-1)(1-t^2)^{n-2}\right)\cos(xt)\mathrm{d}t\\&=2n\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n-1}\cos(xt)\mathrm{d}t-4n(n-1)\int_{-1}^{1}t^2(1-t^2)^{n-2}\cos(xt)\mathrm{d}t\\&=2nI_{n-1}(x)-4n(n-1)\int_{-1}^{1}t^2(1-t^2)^{n-2}\cos(xt)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Le crochet est nul car $(1-t^2)^n$ est nul pour $t=\pm1$ puisque $n-1\geq1$.
En écrivant $t^2=1-(1-t^2)$, on a

$$-t^2(1-t^2)^{n-2}=(1-t^2)^{n-1}-(1-t^2)^{n-2}.$$

On a donc

$$x^2 I_n(x) = 2nI_{n-1}(x) + 4n(n-1)\left(I_{n-1}(x) - I_{n-2}(x)\right).$$

$$\boxed{x^2 I_n(x) = 2n(2n-1)I_{n-1}(x) - 4n(n-1)I_{n-2}(x)}$$

(b) On multiplie l'égalité précédente par x^{2n-1} :

$$x^{2n+1} I_n(x) = 2n \underbrace{x^{2n-1}}_{x^{2(n-1)+1}} I_{n-1}(x) - 4n(n-1) \underbrace{x^{2n-1}}_{x^2 \cdot x^{2(n-2)+1}} I_{n-2}(x).$$

Ceci donne bien ;

$$\boxed{J_n(x) = 2n(2n-1)J_{n-1}(x) - 4n(n-1)x^2 J_{n-2}(x)}.$$

4. On va utiliser la notation E_n de la partie A pour désigner l'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur à en entier n donné et à coefficients entiers. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$\mathcal{A}_n : \text{« } \exists (P,Q) \in E_n^2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad J_n(x) = n!\big(P_n(x)\sin(x) + Q_n(x)\cos(x)\big). \text{ »}$$

Puisqu'on dispose d'une relation de récurrence d'ordre 2 sur les J_n, on va faire une récurrence double :

• On calcule, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$J_0(x) = x^{2\cdot 0+1} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^0 \cos(xt)\mathrm{d}t = [\sin(xt)]_{-1}^{1} = 2\sin(x).$$

$$\begin{aligned}
J_1(x) &= x^{2\cdot 1+1} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^1 \cos(xt)\mathrm{d}t \\
&\underset{IPP}{=} \cancel{\left[(1-t^2)x^2 \sin(xt)\right]_{-1}^{1}} - \int_{-1}^{1} (-2t)x^2 \sin(xt)\mathrm{d}t \\
&\underset{IPP}{=} [-2tx\cos(xt)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} 2(-x\cos(xt))\mathrm{d}t \\
&= -4x\cos(x) + 2\int_{-1}^{1} x\cos(xt)\mathrm{d}t \\
&= -4x\cos(x) + 2\,[\sin(xt)]_{-1}^{1} \\
&= 4\sin(x) - 4x\cos(x)
\end{aligned}$$

Les propriétés $\mathcal{A}_0$ et $\mathcal{A}_1$ sont donc vraies : il suffit de poser

$$P_0 : x \mapsto 2; \quad Q_0 : x \mapsto 0; \quad P_1 : x \mapsto 4; \quad Q_1 : x \mapsto -4x.$$

Les fonctions P_0 et Q_0 sont bien dans E_0, et les fonctions P_1 et Q_1 dans E_1.

• Soit $n \geq 2$. Supposons que $\mathcal{A}_{n-1}$ et $\mathcal{A}_{n-2}$ sont vraies. Montrons $\mathcal{A}_n$.
Par hypothèse, il existe (P_{n-1}, Q_{n-1}) dans E_{n-1}^2 et (P_{n-2}, Q_{n-2}) dans E_{n-2}^2 tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad J_{n-1}(x) = (n-1)!\,(P_{n-1}(x)\sin x + Q_{n-1}(x)\cos x).$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad J_{n-2}(x) = (n-2)!\,(P_{n-2}(x)\sin x + Q_{n-2}(x)\cos x).$$

Utilisons la relation de récurrence pour exprimer J_n : pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
J_n(x) &= 2n(2n-1)J_{n-1}(x) - 4n(n-1)x^2 J_{n-2}(x) \\
&= 2n(2n-1)(n-1)!\,(P_{n-1}(x)\sin x + Q_{n-1}(x)\cos x) \\
&\qquad - 4n(n-1)x^2(n-2)!\,(P_{n-2}(x)\sin x + Q_{n-2}(x)\cos x) \\
&= n!\,\big(2(2n-1)P_{n-1}(x) - 4x^2 P_{n-2}(x)\big)\sin x \\
&\qquad + \; n!\,\big(2(2n-1)Q_{n-1}(x) - 4x^2 Q_{n-2}(x)\big)\cos x \\
&= n!\,(P_n(x)\sin x + Q_n(x)\cos x)
\end{aligned}$$

en posant

$$P_n : x \mapsto 2(2n-1)P_{n-1}(x) - 4x^2 P_{n-2}(x),$$

$$Q_n : x \mapsto 2(2n-1)Q_{n-1}(x) - 4x^2 Q_{n-2}(x).$$

Il reste à vérifier que P_n et Q_n sont tous deux dans E_n.
Puisque $P_{n-1} \in E_{n-1}$, on a aussi $P_{n-1} \in E_n$ (question 2-(b)). La même question donne que $x \mapsto xP_{n-2}(x)$ appartient à E_{n-1} puis que $x \mapsto x^2 P_{n-2}(x)$ appartient à E_n. Puisque P_n est une combinaison linéaire (à scalaires entiers) de deux polynômes de E_n, c'est aussi un polynôme de E_n d'après 2-(a) : $\underline{P_n \in E_n}$.
On montre de même que $\underline{Q_n \in E_n}$. Ceci achève de prouver $\mathcal{A}_n$.

• Le principe de récurrence donne que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \mathcal{A}_n \text{ est vraie}}$.

5. *Supposons que π est rationnel.* Soient deux entiers a et b tels que $\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{a}{b}$.

(a) Pour démontrer que cette suite tend vers 0, on commence par majorer sa valeur absolue : pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\frac{a^{2n+1}}{n!} I_n\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| \leq \frac{|a|^{2n+1}}{n!} \cdot \left|I_n\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|.$$

En appliquant l'inégalité triangulaire, on a

$$\left|I_n\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| \leq \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n |\cos(xt)| \mathrm{d}t \leq \int_{-1}^{1} 1 \mathrm{d}t \leq 2.$$

De plus, d'après la question 1,

$$\frac{|a|^{2n+1}}{n!} = |a| \cdot \frac{(a^2)^n}{n!} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par comparaison, $\boxed{\dfrac{a^{2n+1}}{n!} I_n\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0}$.

(b) On a

$$I_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \cos(\tfrac{\pi}{2} t) \mathrm{d}t.$$

La fonction $u_n : t \mapsto (1-t^2)^n \cos(\frac{\pi}{2} t)$ est continue, positive et non nulle. Son intégrale sur $[-1, 1]$ est donc non nulle : l'aire sous la courbe est strictement positive (on aura un argument rigoureux en fin d'année).

$$\boxed{I_n\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 0}.$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque P_n est une fonction polynomiale de degré inférieur à n et à coefficients entiers, il existe $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

On a donc ,

$$b^{2n+1} P_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = b^{2n+1} P_n\left(\frac{a}{b}\right) = b^{2n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\frac{a}{b}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k a^k b^{2n+1-k}.$$

Ceci est un entier relatif car $\mathbb{Z}$ est stable par somme et produit :

$$\boxed{b^{2n+1} P_n\left(\frac{\pi}{2}\right) \in \mathbb{Z}}$$

(d) On a d'une part,

$$J_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^{2n+1} I_n\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

D'autre part,

$$J_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = n!\left(P_n\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot 1 + Q_n\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot 0\right) = n! P_n\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

En égalisant les deux expressions, on obtient $\left(\frac{a}{b}\right)^{2n+1} I_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = n! P_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$$\text{et donc} \quad \left|\frac{a^{2n+1}}{n!} I_n\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = \left|b^{2n+1} P_n\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|.$$

Puisque le membre de droite est un entier positif et non nul d'après b) et c), il est supérieur à 1. On a donc

$$\left|\frac{a^{2n+1}}{n!} I_n\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| \geq 1.$$

Ceci est absurde car a) nous dit que la suite qu'on vient de minorer par 1 tend vers 0.

$$\boxed{\boxed{\pi \notin \mathbb{Q}}}$$