Problème. Fonction $x \mapsto \dfrac{\arcsin x}{x^2}$ et suite récurrente associée.

1. (a) La fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est dérivable sur $]-1,1[$ comme composée et sa dérivée y est continue (voir son expression dans la question suivante). Puisqu'elle ne s'y annule pas, par quotient, $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$. La fonction arcsin est elle aussi dérivable sur $]-1,1[$. Par somme et restriction, la fonction g est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$.
Dans l'expression de $g(x)$ le premier terme tend vers $+\infty$ en 1 et le second vers $-2\arcsin(1) = -\pi$ (arcsin étant continue en 1).
Par somme, $\boxed{\lim_{x\to 1} g(x) = +\infty}$.

(b) $g'(x) = \dfrac{2x^2-1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$, d'où le tableau

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
g	0	$\searrow$	$1-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

(c) D'après l'étude précédente, g est strictement décroissante entre 0 et $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Et comme elle s'annule en 0, elle ne s'annule pas sur $]0,\frac{\sqrt{2}}{2}[$.
La fonction g est <u>continue</u> et <u>strictement croissante</u> sur $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right[$, donc induit une bijection de $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right[$ sur $\left[1-\frac{\pi}{2},+\infty\right[$. Puisque $0 \in \left[1-\frac{\pi}{2},+\infty\right[$, la fonction g s'annule une et une seule fois sur $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right[$.
En conclusion, il existe un unique $\alpha \in]0,1[$ tel que $g(\alpha)=0$.
On a de plus
$$\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2} < \alpha < 1}.$$

(d)

x	0		α		1
$g(x)$		$-$	0	$+$	

2. Soit f la fonction à valeurs réelles définie par $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{x^2}$.

(a) La fonction f est définie sur $[-1,1]\setminus\{0\}$.
Puisque arcsin est continue sur $[-1,1]$, f l'est sur les deux intervalles $[-1,0[$ et $]0,1]$.
De plus, $f(1) = \frac{\pi}{2} = -f(-1)$.

(b) Soit $x \in [-1,1]\setminus\{0\}$. La fonction arcsin étant dérivable en 0, on a
$$\frac{\arcsin x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \arcsin'(0) = 1.$$
En écrivant $f(x) = \frac{1}{x}\cdot\frac{\arcsin(x)}{x}$, on en déduit
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -\infty.$$
Ces limites n'étant pas finies, la fonction f <u>ne se prolonge pas par continuité</u> en 0.

(c) arcsin étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$, par quotient, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,0[\cup]0,1[$.
Pour $x \in]0,1[$, on a $\boxed{\forall x \in]0,1[\quad f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}}$.
Puisque $\lim_{x\to 1} g(x) = +\infty$, on a $\lim_{x\to 1} f'(x) = +\infty$. On sait donc que :
$$\begin{cases} f \text{ est continue sur }]0,1] \\ f \text{ est dérivable sur }]0,1[\\ \lim_{x\to 1} f'(x) = +\infty. \end{cases}.$$
Le théorème de la limite de la dérivée (cas de la limite infinie) montre alors que $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$. On conclut que $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } 1}$ mais y présente une tangente verticale.

(d)

x	-1		$-\alpha$		0		α		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

3. On rappelle que α est l'unique réel de $\left]\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

On pose $\beta = \arcsin \alpha$.

(a) • On sait que $\frac{\sqrt{2}}{2} < \alpha < 1$ et que la fonction arcsin est strictement croissante sur $[-1, 1]$. Donc

$$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} < \beta < \arcsin 1 \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{\pi}{4} < \beta < \frac{\pi}{2}}.$$

• De $g(\alpha) = 0$ on déduit

$$2 \arcsin \alpha = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \quad \text{donc} \quad f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha\sqrt{1 - \alpha^2}}.$$

Or $\alpha = \sin \beta$, donc $\sqrt{1 - \alpha^2} = \sqrt{\cos^2 \beta} = \cos \beta$.
On a observé que $\cos \beta \geq 0$ car $\beta \in [0, \pi/2]$. Il reste

$$f(\alpha) = \frac{1}{2 \sin \beta \cos \beta} = \boxed{\frac{1}{\sin 2\beta}}.$$

(b) On a vu que $\sin \beta = \alpha$, $\cos \beta = \sqrt{1 - \alpha^2}$ et $\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} = 2 \arcsin \alpha$. Donc

$$\tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}} = 2 \arcsin \alpha = \boxed{2\beta}.$$

• Ayant $\tan \beta = 2\beta$ et (important) $\beta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ on a $\boxed{\beta = \arctan(2\beta)}$.

4. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(n)$ la proposition « $u_n \geq \beta$ ».
• On a $u_0 = 2$ et d'après la question 3(a), $\beta < \frac{\pi}{2} \leq 2$. Par transitivité, $u_0 \geq \beta$ et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
• Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $u_n \geq \beta$. La fonction h étant croissante sur $\mathbb{R}$, on a $h(u_n) \geq h(\beta)$. Par définition, $h(u_n) = u_{n+1}$ et d'après 3(b), $h(\beta) = \beta$. On obtient $u_{n+1} \geq \beta$ et $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.
• D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qu'il fallait démontrer.

(b) La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad h'(x) = \frac{2}{1+4x^2}$. Cette dérivée étant décroissante, on a

$$\forall x \in [\beta, +\infty[\quad |h'(x)| = h'(x) \leq h(\beta) = \frac{2}{1 + 4\beta^2} = k.$$

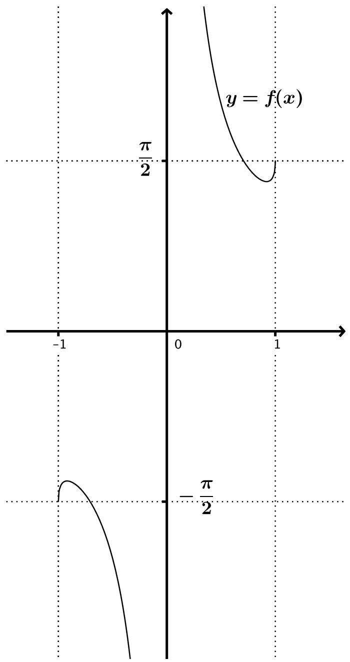
D'après l'inégalité des accroissements finis, h est k-lipschitzienne sur $[\beta, +\infty[$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après (a), on a $u_n \in [\beta, +\infty[$. En utilisant que f est k-lipschitzienne sur ce dernier intervalle, on obtient

$$|h(u_n) - h(\beta)| \leq k|u_n - \beta| \quad \text{soit} \quad \boxed{|u_{n+1} - \beta| \leq k|u_n - \beta|}.$$

(d) Par récurrence facile, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \beta| \leq k^n |u_0 - \beta|$.
Or, l'énoncé nous donne que $\beta > 1$ et nous savons d'après la question 3(a) que $\beta < \frac{\pi}{2}$. Ainsi, $|u_0 - \beta| \leq 1$. De plus, $k = \frac{2}{1+4\beta^2} \leq \frac{2}{1+4\cdot 1^2} = \frac{2}{5}$. On a bien montré que $\boxed{|u_n - \beta| \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n}$.

u_n sera une valeur approchée de β à 10^{-1000} dès que $\left(\frac{2}{5}\right)^n < 10^{-3}$, ce qui équivaut à $n > 1000\frac{\ln 10}{\ln(5/2)}$. Puisque n est entier cela laisse $\boxed{n \geq 2513}$.



Exercice 1. Une preuve du théorème de Darboux.

1. Si f est supposée de classe $\mathcal{C}^1$, alors on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à f', qui est continue : puisque y est entre $f'(a)$ et $f'(b)$, il possède bien un antécédent par f' entre a et b.

2. La fonction f est dérivable en a donc φ, taux d'accroissement de f en a, tend vers $f'(a)$ en a. De même, ψ, taux d'accroissement de f en b, tend vers $f'(b)$ en b.
Les fonctions φ et ψ ont des limites finies en a et b : elles sont bien prolongeables par continuité : il suffit de poser $\varphi(a) = f'(a)$ et $\varphi(b) = f'(b)$.

3. On suppose dans cette question que y est entre $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$.
   (a) La fonction φ était continue sur $]a, b]$ comme quotient de fonctions continues et elle a été prolongée en une fonction continue sur $[a, b]$. Puisque y est entre $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$, Le théorème des valeurs intermédiaires garantit donc que y possède un antécédent dans $[a, b]$. On note γ un tel antécédent.
   (b) Dans le cas où $\gamma = a$, on a $y = \varphi(a) = f'(a)$ et on a bien obtenu un antécédent c de y par f' dans $[a, b]$: ici $c = a$.
   (c) Supposons $\gamma > a$. La fonction f est continue sur $[a, \gamma]$ car elle l'est sur $[a, b]$, et elle est dérivable sur $]a, \gamma[$ car elle l'est sur $]a, b[$. D'après le théorème (égalité) des accroissements finis,
   $$\exists c \in]a, b[\quad \frac{f(\gamma) - f(a)}{\gamma - a} = f'(c).$$
   Or, $y = \varphi(\gamma) = \frac{f(\gamma)-f(a)}{\gamma-a}$. On a donc bien démontré l'existence de $c \in [a, b]$ tel que $y = f'(c)$.

4. On suppose dans cette question que y n'est pas entre $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$, c'est-à-dire n'est pas entre $f'(a)$ et $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. On a $\varphi(b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \psi(a)$. Or, y est entre $f'(a) = \varphi(a)$ et $f'(b) = \psi(b)$. Le nombre y est donc entre $\psi(a)$ et $\psi(b)$.
On peut alors raisonner comme en question 2 : y possède par le TVI un antécédent δ par la fonction φ dans $[a, b]$. Si $\delta = b$, alors $y = f'(b)$ et c'est bien. Sinon, les accroissements finis entre δ et b apporteront l'antécédent cherché.

5. • Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que $\forall x \in \mathbb{R}\ f'(x) = \lfloor f(x) \rfloor$.
La fonction f' ne prend donc que des valeurs entières sur $\mathbb{R}$.
Supposons que $f'(\mathbb{R})$ contient deux entiers différents, alors le théorème de Darboux assure que tous les réels entre ces deux entiers ont un antécédent par f'. Certains de ces réels ne sont pas des entiers, il y a contradiction. Ceci démontre que f' est constante et donc que f est affine sur $\mathbb{R}$. La pente ne peut être que nulle, faute de quoi $x \mapsto f(x)\rfloor$ ne sera pas constante comme il est nécessaire. La fonction f est donc constante, disons à c. On a donc $f' = 0$ puis $\forall x \in \mathbb{R}\ \lfloor f(x) \rfloor = 0$. Ceci laisse que $\lfloor c \rfloor = 0$ et donc que $c \in [0, 1[$.
• Réciproquement, les fonctions constantes, égales à un réel de $[0, 1[$ sont dérivables et solutions de cette équation différentielle d'un genre particulier.
• Les solutions du problème sont les fonctions constantes égales à un réel de $[0, 1[$.

Exercice 2.

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

1. Suivant l'indication de l'énoncé, on va dériver l'égalité
$$\mathrm{id} \times f = \sin .$$
On fixe $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Les fonctions id et f sont de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$.
La formule de Leibniz donne
$$(\mathrm{id} \times f)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \mathrm{id}^{(k)} f^{(n+1-k)}.$$
On ne va garder que les termes $k = 0$ et $k = 1$ dans cette somme puisque $\mathrm{id}^{(k)} = 0$ pour tout $k \geq 2$. Il reste donc
$$(\mathrm{id} \times f)^{(n+1)}(x) = \binom{n+1}{0} x f^{(n+1)}(x) + \binom{n+1}{1} 1 f^{(n)}(x) = x f^{(n+1)}(x) + (n+1) f^{(n)}(x).$$
D'autre part, en écrivant $\sin(x) = \mathrm{Im}\left(e^{ix}\right)$, on obtient
$$\sin^{(n+1)}(x) = \mathrm{Im}\left(i^{n+1} e^{ix}\right).$$
Or, $i^{n+1} e^{ix} = e^{i(n+1)\frac{\pi}{2}} e^{ix} = e^{i(x+(n+1)\frac{\pi}{2})}$.
En passant à la partie imaginaire, on obtient
$$\sin^{(n+1)}(x) = \sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Les deux dérivées $n+1$èmes que nous avons calculées sont égales : ceci laisse comme attendu

$$\boxed{xf^{(n+1)}(x)+(n+1)f^{(n)}(x)=\sin\left(x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)}$$

2. On peut évaluer en 0 la relation prouvée à la question 1 : ceci donne

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad 0\times f^{(n+1)}(0)+(n+1)f^{(n)}(0)=\sin\left((n+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Si n est impair, $\sin\left((n+1)\frac{\pi}{2}\right)$ est nul.
Si n est pair, il vaut ± 1.
Ceci donne

$$\boxed{|f^{(n)}(0)|=\begin{cases}0 & \text{si } n \text{ est impair,}\\ \frac{1}{n+1} & \text{si } n \text{ est pair.}\end{cases}}$$

3. Pour $n\in\mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}_n$ l'assertion

« $f^{(n)}(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $\pm\infty$. »

• Pour $n=0$, on peut écrire que pour $x\neq 0$, on a

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right|\leq\frac{1}{|x|}.$$

Or, $\frac{1}{|x|}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. Le théorème des gendarmes garantit donc que $f(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $\pm\infty$: $\mathcal{P}_0$ est vraie.

• Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$. D'après la question 1, on a pour tout $x\in\mathbb{R}^*$

$$f^{(n+1)}(x)=\frac{1}{x}\left(\sin\left(x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)-(n+1)f^{(n)}(x)\right).$$

L'inverse de x tend vers 0 en $\pm\infty$ et les fonctions sin et $f^{(n)}$ sont bornées sur aux voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ (sin est bornée sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n)}$ tend vers 0 d'après $\mathcal{P}_n$). Par produit, ceci établit que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

• Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ est vraie, d'après le principe de récurrence.

4. La fonction f prend des valeurs strictement positives et strictement négatives car c'est le cas de sin. On ne détaillera pas plus ce cas $n=0$.
Prenons un entier $n\in\mathbb{N}^*$. En utilisant la relation de la question 1 écrite avec n et $n-1$, on obtient

$$\forall x\in\mathbb{R}^*\quad f^{(n)}(x)=\frac{1}{x}\left[\sin(x+n\frac{\pi}{2})-nf^{(n-1)}(x)\right].$$

Posons $x_k=(4k+1-n)\frac{\pi}{2}$. On a

$$f^{(n)}(x_k)=\frac{1}{x_k}\left[1-nf^{(n-1)}(x_k)\right].$$

Or, x_k tend vers $+\infty$ lorsque k tend vers l'infini, donc $f^{(n-1)}(x_k)\to 0$.
Ainsi, $f^{(n)}(x_k)$ est strictement positive à partir d'un certain rang.
En posant maintenant $y_k=(4k+3-n)\frac{\pi}{2}$, on obtient

$$f^{(n)}(y_k)=\frac{1}{y_k}\left[-1-nf^{(n-1)}(y_k)\right].$$

Celle-ci est strictement négative à.p.d.c.r.

5. Soit a et b deux réels tels que $f^{(n)}(a)<0$ et $f^{(n)}(b)>0$ (on a montré qu'il existait de tels réels à la question précédente).

Puisque $f^{(n)}(x)$ tend vers 0 en $-\infty$, il existe $A<0$ tel que

$$\forall x\in]-\infty,A]\quad f^{(n)}(a)\leq f(x)\leq f^{(n)}(b).$$

Puisque $f^{(n)}(x)$ tend vers 0 en $+\infty$, il existe $B>0$ tel que

$$\forall x\in[B,+\infty[\quad f^{(n)}(a)\leq f(x)\leq f^{(n)}(b).$$

En particulier, les valeurs a et b sont nécessairement dans $[A,B]$, puisqu'en dehors de cet intervalle, $f^{(n)}$ ne peut pas prendre les valeurs de $f^{(n)}(a)$ et de $f^{(n)}(b)$.

Sur le segment $[A,B]$, la fonction continue $f^{(n)}$ est bornée et y atteint ses bornes : notons c un endroit où elle atteint son maximum et d un endroit où elle atteint son minimum. Puisque a et b sont dans $[A,B]$,

$$f^{(n)}(d)\leq f^{(n)}(a)<0<f^{(n)}(b)\leq f^{(n)}(c).$$

En utilisant les encadrements sur $]-\infty, A]$ et sur $[B, +\infty[$, on obtient que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n)}(d) \leq f^{(n)}(x) \leq f^{(n)}(c).$$

On a bien établi que $\boxed{f \text{ admet un maximum et un minimum global}}$.

6. Reprenons la notation c, pour un des points où le maximum de $f^{(n)}$ sur $\mathbb{R}$ est atteint. Le point c est dans l'intervalle ouvert $\mathbb{R}$, et la fonction $f^{(n)}$ y est dérivable et y admet un extremum global donc local : d'après un résultat du cours, c est un point critique pour $f^{(n)}$, c'est-à-dire que $f^{(n+1)}(c) = 0$.
En utilisant l'égalité de la question 1 évaluée en c, on obtient

$$0 + (n+1)f^{(n)}(c) = \sin(c + (n+1)\frac{\pi}{2}).$$

On passe à la valeur absolue et on divise par $n+1$:

$$|f^{(n)}(c)| \leq \frac{1}{n+1}.$$

On peut raisonner de la même façon au point d et obtenir que $|f^{(n)}(d)| \leq \frac{1}{n+1}$. On peut conclure maintenant : on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad -\frac{1}{n+1} \leq f^{(n)}(d) \leq f^{(n)}(x) \leq f^{(n)}(c) \leq \frac{1}{n+1}.$$

Ceci donne bien

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \left|f^{(n)}(x)\right| \leq \frac{1}{n+1}.$$

7. On va procéder par récurrence et utiliser le théorème de la limite de la dérivée. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$\mathcal{P}_n : \text{« } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^n \text{ sur } \mathbb{R} \text{ »}$$

• La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$. On sait que $\frac{\sin x}{x} \underset{x\to 0}{\to} 1$ et donc que $f(x) \underset{x\to 0}{\to} f(0)$: la fonction f est continue en 0. Ceci achève de prouver que $\mathcal{P}_0$ est vraie.
• Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Puisque la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions l'étant, elle est en particulier de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}^*$: elle est dérivable $n+1$ fois sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée y est continue.
Reste à régler le problème en 0. D'après la question 1,

$$(n+2)f^{(n+1)}(x) \underset{x\to 0}{\to} \sin\left((n+2)\frac{\pi}{2}\right).$$

La fonction $f^{(n+1)}$ a donc une limite finie en 0. Puisque $f^{(n)}$ est continue en 0, le théorème de la limite de la dérivée s'applique et nous donne que $f^{(n)}$ est dérivable en 0, de dérivée égale à la limite de $f^{(n+1)}$ en 0. Ceci achève de démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$.
• Le principe de récurrence nous donne alors que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et ce pour tout n : f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

En guise de complément, voici un théorème qui était encore dans la version précédente du programme de sup jusqu'en 2021 :

Théorème (classe $\mathcal{C}^n$ par prolongement)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in I$ et $f\colon I \setminus \{a\} \to \mathbb{K}$. On suppose que

— f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I \setminus \{a\}$.
— Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f^{(k)}(x) \underset{x\to a}{\to} \ell_k \in \mathbb{K}$ (finie).

Alors la fonction

$$\tilde{f} : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \ell_0 & \text{si } x = a \end{cases} \end{array} \right.$$

est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I. On a

$$\forall k \in [\![0, n]\!] \quad : \quad \tilde{f}^{(k)}(a) = \ell_k.$$