Concours blanc. Épreuve de mathématiques

Documents et matériel électronique interdits

Énoncé de quatre pages

Problème d'algèbre

Préambule

On rappelle que la **base canonique** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est $(E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{nn})$ où E_{ij} désigne la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé en i-ème ligne et j-ème colonne qui vaut 1.

Si $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle **coefficients diagonaux** de A les réels a_{ii} où $i \in [\![1, n]\!]$. On dit que A est une matrice diagonale si on a $a_{ij} = 0$ pour tous $i \neq j$.

L'**homothétie** (de rapport $\lambda \in \mathbb{R}$) sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est l'endomorphisme $\lambda \mathrm{id}_E : x \mapsto \lambda x$.

Partie A : Application φ_A

Dans cette partie, on fixe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on considère l'application φ_A suivante :

$$\varphi_A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM - MA \end{array} \right.$$

1. Montrer que φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que φ_A n'est pas injective.
3. Est-elle surjective ?

Partie B : Exemple

On se place, dans cette partie, dans le cas particulier $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4. (a) Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes sur les coefficients d'une matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, pour qu'elle appartienne au noyau de φ_A.
   (b) Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Ker}(\varphi_A)$.
5. (a) Déterminer la dimension de l'image de φ_A.
   (b) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(\varphi_A)$.
6. Déterminer la matrice qui représente φ_A dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Partie C : Lemme de Schur

On considère un endomorphisme u d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie n.

7. (a) Montrer que si u est une homothétie, alors pour tout $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée.
   (b) Montrer que si pour tout $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée, alors u est une homothétie.

Partie D : Centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

On note $Z_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ AM = MA\}$.

8. Montrer que Z_n est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

9. Dans cette question, on se place dans le cas $n = 2$.

   (a) Montrer l'équivalence $A \in Z_2 \iff \forall (i,j) \in [\![1,2]\!]^2\ AE_{ij} = E_{ij}A$.

   (b) Montrer que Z_2 est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

10. On considère un endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $u \circ v = v \circ u = 0$ pour tout endomorphisme v de $\mathbb{R}^n$.

    (a) Soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Justifier l'existence d'un supplémentaire F de $\mathrm{Vect}(x)$ dans $\mathbb{R}^n$.

    (b) À l'aide de la projection p sur F parallèlement à $\mathrm{Vect}(x)$, montrer que la famille $(x, u(x))$ est liée.

    (c) Déterminer Z_n.

Partie E : Matrices diagonales

11. On suppose dans cette question que A est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale à coefficients diagonaux distincts : $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ avec $\alpha \neq \beta$.

    (a) Montrer que $M \in \mathrm{Ker}(\varphi_A)$ si et seulement si M est diagonale.

    (b) Calculer $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi_A))$ et $\dim(\mathrm{Im}(\varphi_A))$.

    (c) Soit $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que $B \in \mathrm{Im}(\varphi_A)$ si et seulement si ses coefficients diagonaux sont nuls.

12. On suppose dans cette question que $A = (a_{ij})$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale, avec $a_{ii} = \alpha$ pour $1 \leq i \leq p$, et $a_{ii} = \beta$ pour $p+1 \leq i \leq n$, où α et β sont des réels distincts et $p \in [\![1, n-1]\!]$.
    On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A.
    On note $E_\alpha = \mathrm{Ker}(f - \alpha \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})$ et $E_\beta = \mathrm{Ker}(f - \beta \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})$.

    (a) Montrer que E_α et E_β sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

    (b) Déterminer E_α et E_β et donner leurs dimensions.

    (c) Montrer que E_α et E_β sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.

    (d) Montrer que si g est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, on a $f \circ g = g \circ f$ si et seulement si les espaces vectoriels E_α et E_β sont stables par g (i.e. si $x \in E_\alpha$, alors $g(x) \in E_\alpha$, de même pour β).

    (e) Déterminer $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi_A))$.

Partie F : Matrices de trace nulle

13. Montrer que l'ensemble V_n des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont on déterminera la dimension.

14. Déterminer une base de V_2.

15. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de trace nulle.

    (a) Montrer que si $u \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$, il existe un vecteur x de $\mathbb{R}^2$ tel que la famille $(x, u(x))$ est libre.

    (b) Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^2$ telle que la matrice représentative de u dans la base $\mathscr{B}$ a ses deux coefficients diagonaux nuls.

16. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{tr}(M) = 0$ si et seulement si il existe deux matrices A et B dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $M = AB - BA$.
17. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{tr}(M) = 0$ si et seulement si il existe deux matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = AB - BA$.

Problème d'analyse

Préambule

Soit $I =]-\infty, 1[$. On considère la fonction f définie sur $I \setminus \{0\}$ par :

$$\forall x \in I \setminus \{0\} \quad f(x) = \frac{-1}{x} \ln(1-x).$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.

Remarque : les parties B et C sont indépendantes.

Partie A : Étude de f

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer un développement limité de f en 0 à l'ordre n.
   (b) En déduire que f peut se prolonger en une fonction continue sur I. On notera encore f ce prolongement. Préciser la valeur de $f(0)$.
   (c) Justifier que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.
   (d) Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ en 0 et les positions relatives de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{T}$ au voisinage de 0.

2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $I \setminus \{0\}$.

3. (a) Vérifier que f est dérivable sur I et que :

$$\forall x \in I \quad xf'(x) = \frac{1}{1-x} - f(x).$$

   (b) Déterminer le développement limité de f' en 0 à l'ordre 1.
   (c) En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
   (d) En déduire aussi que f est deux fois dérivable en 0 et préciser la valeur de $f''(0)$.

4. (a) Montrer que $\forall t \geq 0 \; t\ln(t) \geq t - 1$.
   (b) En déduire que f est croissante sur I et déterminer les limites de f aux bornes de I.
   (c) Montrer que $\mathscr{C}$ admet une asymptote en $-\infty$ et préciser les positions relatives de $\mathscr{C}$ et de cette asymptote. Tracer sur une même figure l'allure de $\mathscr{C}$ et la tangente $\mathscr{T}$ en 0.

Partie B : Une autre expression de f

5. (a) Soit $h : x \mapsto -\ln(1-x)$.
   Justifier que h est $\mathscr{C}^\infty$ sur I et calculer $h^{(n)}(x)$ pour tout $x \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\quad \left|h^{(n)}(x)\right| \leq 2^n (n-1)!$

   (c) En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction h, montrer que :

$$\forall x \in \left[0, \tfrac{1}{2}\right[\quad f(x) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k+1}.$$

Partie C : Dérivées successives de f

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction φ_n définie sur $I \setminus \{0\}$ par

$$\forall x \in I \setminus \{0\} \quad \varphi_n(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^n} \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k+1} \right).$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Montrer que φ_n possède une limite finie en 0, que l'on calculera.

   (b) Montrer que φ_n est dérivable sur $I \setminus \{0\}$ et montrer que

$$\forall x \in I \setminus \{0\} \quad \varphi_n'(x) = \varphi_{n+1}(x) + \frac{(-1)^n n!}{1-x}.$$

7. (a) En utilisant la question précédente, montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme P_n tel que

$$\forall x \in I \setminus \{0\} \quad f^{(n)}(x) = \varphi_n(x) + \frac{P_n(x)}{(1-x)^n}.$$

   (b) Démontrer l'unicité de la suite (P_n) définie à la question précédente.

   (c) Pour un entier $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n.

   (d) En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.
   Indication : on pourra montrer par récurrence que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$.

8. Déterminer la valeur de $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

fin du sujet