Corrigé du DS 3

Exercice 1. Applications, relations.

1. • Soient n et p deux entiers naturels tels que $f(n) = f(p)$.
L'égalité $2n+1 = 2p+1$ entraîne l'égalité $n = p$: la fonction f est injective.
• L'image d'un entier par la fonction f étant un entier impair, les entiers pairs n'ont pas d'antécédent : la fonction f n'est pas surjective.

---

2. • Considérons que u est la suite nulle et v la suite dont les deux premiers termes sont nuls et les suivants égaux à 1. On a $F(u) = (0,0) = F(v)$ alors que $u \neq v$, donc F n'est pas injective.
• Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Il est facile de définir un antécédent de (a,b) par F : il suffit de poser $u_0 = a$, $u_1 = b$ et $\forall k \geq 2\ u_k = 0$ par exemple. La fonction F est surjective.

---

3. • Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a $\frac{x}{x} = 1$ donc $x \sim x$. La relation $\sim$ est réflexive.
• Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Supposons que $x \sim y$. Alors $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$. On peut passer à l'inverse car le nombre est non nul : on obtient $\frac{y}{x} \in \mathbb{Q}$ car $\mathbb{Q}$ est stable par quotient. Ainsi, $y \sim x$. La relation $\sim$ est symétrique.
• Soit $(x,y,z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$. Supposons que $x \sim y$ et $y \sim z$. Alors $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ et $\frac{y}{z} \in \mathbb{Q}$.
Le produit des deux quotients vaut $\frac{x}{z}$. Or, $\mathbb{Q}$ est stable par produit, donc $\frac{x}{z} \in \mathbb{Q}$. On a $x \sim z$. La relation $\sim$ est transitive.

---

4. • Soit $x \in E$. On a $f(x) \leq f(x)$ donc $x\mathcal{R}x$. La relation $\mathcal{R}$ est réflexive.
• Soit $(x,y) \in E^2$. Supposons $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$. Alors $f(x) \leq f(y)$ et $f(y) \leq f(x)$. Puisque $\leq$ est antisymétrique, on obtient $f(x) = f(y)$. Or, f est injective, donc $x = y$. La relation $\mathcal{R}$ est antisymétrique.
• Soit $(x,y,z) \in E^3$. Supposons $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. Alors $f(x) \leq f(y)$ et $f(y) \leq f(z)$. Par transitivité de $\leq$, on obtient $f(x) \leq f(z)$, c'est-à-dire $x\mathcal{R}z$. La relation $\mathcal{R}$ est transitive.
• La relation d'ordre $\mathcal{R}$ est totale car tous les éléments de E peuvent être comparés. En effet, si x et y sont deux éléments de E, on a $f(x) \leq f(y)$ ou $f(y) \leq f(x)$ (puisque $\leq$ est un ordre total !). Ainsi, $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$.

---

5. a) Que signifiait le mot « comparer » ici ? Il fallait bien sûr le comprendre au sens de la seule relation d'ordre connue sur $\mathcal{P}(E)$: l'inclusion.
Soit $x \in A$. Par réflexivité, $x \in [x]$ et donc $x \in \bigcup_{a \in A} [a]$.
On a donc $x \in s(A)$, ce qui prouve que $\boxed{A \subset s(A)}$.

b) L'inclusion de la question a) a été prouvée pour toute partie A. On peut donc appliquer le résultat pour la partie $s(A)$ et obtenir $s(A) \subset s(s(A))$.
Réciproquement, considérons $x \in s(s(A)) = \bigcup_{y \in s(A)} [y]$. Il existe $y \in s(A)$ tel que $x \in [y]$, c'est-à-dire $x \sim y$. Or, puisque $y \in s(A)$ et que $s(A) = \bigcup_{z \in A} [z]$, il existe $z \in A$ tel que $y \in [z]$, c'est-à-dire $y \sim z$. Par transitivité, $x \sim z$ et donc $x \in [z]$, soit $x \in \bigcup_{z \in A} [z]$. On a prouvé que $x \in s(A)$, ce qui achève de prouver que $s(s(A)) \subset s(A)$. Par double inclusion, $\boxed{s(s(A)) = s(A)}$.

Problème. Autour de la série harmonique et de sa version alternée.

Partie A. Un développement asymptotique de (H_n).

1. Soit $x > 0$. On a
$$\ln(x+1) - \ln(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$
Nous savons que pour tout $a > 0$, $\ln(a) \leq a - 1$, c'est une inégalité du cours, elle se démontre par exemple en étudiant la différence $x \mapsto \ln(x) - (x-1)$.

Puisque $1 + \frac{1}{x} > 0$, on a
$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1 \leq \frac{1}{x},$$
Ce qu'il fallait démontrer.

2. Plus difficile ! Soit $x > 0$. On a
$$\ln(x+1) - \ln(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = -\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = -\ln\left(1 - \frac{1}{x+1}\right).$$
Or, en utilisant à nouveau que $\ln(a) \leq a - 1$ pour tout $a > 0$, on obtient
$$\ln\left(1 - \frac{1}{x+1}\right) \leq -\frac{1}{x+1}.$$
Reste à multiplier par -1 pour obtenir
$$\ln(x+1) - \ln(x) \geq \frac{1}{1+x}.$$

3. Soit un entier k supérieur à 2. La question 1 (avec "$x = k$) nous donne l'inégalité

$$\ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

On peut alors utiliser la question 2 avec "$x = k-1$" (qui est bien strictement positif) et obtenir

$$\ln(k) - \ln(k-1) \leq \frac{1}{(k-1)+1}$$

On a bien prouvé l'encadrement

$$\ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)$$

4. Soit $n \geq 2$. Pour obtenir un encadrement de H_n, sommons l'encadrement de la question précédente ! Puisqu'il est valable seulement pour $k \geq 2$... eh bien on somme à partir de 2.

$$\sum_{k=2}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^{n} (\ln(k) - \ln(k-1)) .$$

Sur les bords, un télescopage nous permet de simplifier. Au centre, on reconnaît la somme H_n moins son premier terme :

$$\ln(n+1) - \ln(2) \leq H_n - 1 \leq \ln(n) - \ln(1).$$

On obtient donc l'encadrement

$$\ln(n+1) + 1 - \ln(2) \leq H_n \leq \ln(n) + 1 \qquad (1).$$

Puisque $\ln(n+1) \to +\infty$, on obtient par minoration que $\boxed{H_n \longrightarrow +\infty}$.

De plus, on a

$$\frac{\ln(n+1) + 1 - \ln(2)}{\ln(n)} \leq \frac{H_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)} \qquad (2).$$

Le membre de droite dans l'inégalité tend vers 1. C'est aussi le cas du membre de gauche. En effet,

$$\ln(n+1) = \ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Puisque $\ln(1+\frac{1}{n}) \to 0$, on obtient que $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \to 1$.
L'encadrement (2) ainsi que le théorème des gendarmes amènent

$$\boxed{\frac{H_n}{\ln(n)} \longrightarrow 1}$$

Ce résultat nous donne que H_n et $\ln(n)$ ont en un certain sens le même comportement en $+\infty$. On écrira un jour que $H_n \sim \ln(n)$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On calcule

$$d_{n+1} - d_n = H_{n+1} - \ln(n+1) - (H_n - \ln(n)) = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n)) .$$

La question 2 nous donne que cette différence est négative : la suite d est décroissante.

Pour ce qui concerne la minoration, on va la chercher à la question précédente : l'encadrement (1) de H_n donne que pour $n \geq 2$, $H_n \geq \ln(n+1) + 1 - \ln(2)$, ce qui donne $d_n \leq \ln(n+1) - \ln(n) + 1 - \ln(2) \geq 1 - \ln(2)$. Puisque c'est encore vrai pour $n = 1$, on obtient que $1 - \ln(2)$ est un minorant de d (tout comme 0, par conséquent).

6. La suite (d_n) étant décroissate et minorée, elle est convergente d'après le théorème de la limite monotone. Notons γ sa limite. Puisque d est minorée par $1 - \ln(2)$ et majorée par son premier terme 1, nous savons que cette constante se trouve entre $0,3$ et 1.

Notons $\varepsilon_n = d_n - \gamma$ pour $n \geq 1$. On a bien

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad H_n = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_n \to 0.}$$

Partie B. Une somme alternée.

Dans cette partie B, on va étudier la somme

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} \qquad (n \in \mathbb{N}^*).$$

On peut appeler cette somme la somme harmonique alternée (harmonique à cause du $\frac{1}{k}$ et alternée à cause du $(-1)^k$).

7. En tapant ce corrigé, je me dis : là ils vont faire une récurrence. Ca tombe bien : ça marche parfaitement. Je propose un calcul direct ci-dessous. C'est le type de calcul à savoir faire : il est un peu supérieur, mathématiquement, à la récurrence, car on n'a pas besoin que l'énoncé nous donne la formule à prouver.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En faisant un tri pair-impair, on a

$$\begin{aligned} A_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{2j}}{2j} \; + \; \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{2j-1}}{2j-1} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2j} - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2j-1} \\ &= \frac{1}{2}H_n - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2j-1} \end{aligned}$$

   Dans la dernière égalité, la somme est celle des termes impairs de H_{2n}. On peut donc faire apparaître H_{2n} en ajoutant les termes d'indice pair : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2j}$, soit $\frac{1}{2}H_n$:

$$A_{2n} = \frac{1}{2}H_n - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2j-1} = \frac{1}{2}H_n + \frac{1}{2}H_n - \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2j} + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2j-1} \right) = H_n - H_{2n}.$$

8. • Utilisons d'abord le résultat de la partie A pour obtenir la convergence de (A_{2n}). On a

$$\begin{aligned} A_{2n} &= H_n - H_{2n} \\ &= (\ln(n) + \gamma + \varepsilon_n) - (\ln(2n) + \gamma + \varepsilon_{2n}) \\ &= \cancel{\ln(n)} - \cancel{\ln(n)} - \ln(2) + \varepsilon_n - \varepsilon_{2n}. \end{aligned}$$

   Or, $\varepsilon_n \to 0$ et $\varepsilon_{2n} \to 0$. On en déduit que (A_{2n}) a pour limite $-\ln(2)$.

   Pour $n \geq 1$, on a

$$A_{2n+1} = A_{2n} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} \to -\ln(2) + 0.$$

   Puisque les suites extraites (A_{2n}) et (A_{2n+1}) convergent toutes les deux vers $-\ln(2)$, on peut en conclure que

$$\boxed{A_n \to -\ln(2).}$$

Partie C. Un réarrangement de la somme alternée.

9. Cette fois, contrairement à la question 7, je ne vais pas couper les cheveux en 3 et je vais faire une récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}_n$ l'égalité $B_{3n} = \frac{1}{2}A_{2n}$.

   • On calcule

$$B_3 = a_{\sigma(1)} + a_{\sigma(2)} + a_{\sigma(3)} = a_1 + a_2 + a_4 = -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}.$$

   D'autre part

$$\frac{1}{2}A_2 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2) = \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}.$$

   $\mathcal{P}_1$ est vraie.

   • Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}_n$. Montrons $\mathcal{P}_{n+1}$ et pour cela calculons

$$\begin{aligned} B_{3(n+1)} &= \sum_{k=1}^{3n+3} a_{\sigma(k)} \\ &= \sum_{k=1}^{3n} a_{\sigma(k)} + a_{\sigma(3n+1)} + a_{\sigma(3n+2)} + a_{\sigma(3n+3)} \\ &= B_{3n} + a_{2n+1} + a_{4n+2} + a_{4n+4} \\ &= \frac{1}{2}A_{2n} + \left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{4n+2} + \frac{1}{4n+4} \right) \\ &= \frac{1}{2}A_{2n} - \frac{1}{4n+2} + \frac{1}{4n+4} \end{aligned}$$

   (à la dernière ligne, on a juste remarqué que $\frac{1}{4n+2}$ est la moitié de $\frac{1}{2n+1}$).

   Pour terminer le travail, calculons $\frac{1}{2}A_{2(n+1)}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}A_{2n+2} &= \frac{1}{2}\left(A_{2n} + a_{2n+1} + a_{2n+2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(A_{2n} - \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}\right) \\ &= \frac{1}{2}A_{2n} - \frac{1}{4n+2} + \frac{1}{4n+4}. \end{aligned}$$

On a bien égalité entre $B_{3(n+1)}$ et $\frac{1}{2}A_{2(n+1)}$: $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

• Par récurrence, l'égalité $B_{3n} = \frac{1}{2}A_{2n}$ est vraie pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$.

10. À la question précédente, on a prouvé que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad B_{3n} = \frac{1}{2}A_{2n}$.
Or, nous avons démontré en partie B que $A_{2n} \to -\ln(2)$.
On obtient donc que $B_{3n} \to -\frac{\ln(2)}{2}$.
On en déduit que

$$B_{3n+1} = B_{3n} + a_{\sigma(3n+1)} = B_{3n} + a_{4n+2} = B_{3n} + \frac{1}{4n+2} \longrightarrow -\frac{\ln(2)}{2} + 0,$$

et

$$B_{3n+2} = B_{3n+1} + a_{\sigma(3n+2)} = B_{3n+1} + a_{4n+4} = B_{3n+1} + \frac{1}{4n+4} \longrightarrow -\frac{\ln(2)}{2} + 0.$$

Puisque (B_{3n}), (B_{3n+1}) et (B_{3n+2}) convergent vers une même limite $-\ln(2)/2$, on en déduit que

$$\boxed{B_n \to -\frac{\ln(2)}{2}}$$

Ce résultat sur les trois suites extraites n'est pas à proprement parler un résultat du cours. Il faudrait donc en toute rigueur ressortir ε du placard où on venait de le ranger, mais on s'abstiendra.

11. Injectivité Soient m et n deux entiers naturels. On suppose que $\sigma(m) = \sigma(n)$.

— Premier cas : $\sigma(m)$ est impair. Il existe donc un entier naturel p tel que $\sigma(m) = 2p+1$. Par définition de σ, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $m = 3q+1$. Or, $\sigma(3q+1) = 2q+1$ ce qui donne $3q+1 = 3p+1$ et donc $q = p$: $m = 3p+1$. Le même raisonnement avec n amène $n = 3p+1$. On a prouvé que $m = n$.

— Second cas : $\sigma(m)$ est pair. Il s'écrit alors $4p+2$ ou $4p+4$, selon que 4 divise $\sigma(m)$ ou pas. Dans le premier sous-cas, on prouve en raisonnant comme au-dessus que $m = n = 3p+2$ et dans le deuxième sous-cas, on prouve que $m = n = 3p+3$.

Dans tous les cas, $m = n$. On a donc que σ est injective.

Surjectivité Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

— Premier cas : n est impair. Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p+1$. Alors $3p+1$ est un antécédent de n.

— Second cas : n est pair. Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 4p+2$ ou $n = 4p+4$. Alors $3p+2$ ou $3p+3$ est un antécédent de n.

$$\boxed{\sigma \text{ est bien une bijection de } \mathbb{N}^* \text{ vers lui-même.}}$$

12. Nous avons prouvé que la suite A, c'est-à-dire $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $-\ln(2)$.
On va noter comme une somme infinie la limite de cette suite de sommes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = -\ln(2).$$

Nous avons aussi prouvé que la suite B c'est-à-dire $\left(\sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $-\ln(2)/2$, ce qu'on note

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = -\frac{\ln(2)}{2}.$$

On a donc bien

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\sigma(n)} \neq \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

Ce résultat peut surprendre car il existe une bijection entre les termes de la première somme et ceux de la deuxième ! On pourra être étonné de ne pas trouver la même somme en sommant pourtant les mêmes termes...

Il semblerait donc que pour ce type de sommes infinies, l'ordre de sommation ait une importance capitale, ce qui n'est pas intuitif car pour les sommes finies, il n'en a aucun.

Le théorème énoncé ci-après est plus général et plus surprenant encore : il nous apprend qu'on peut réarranger les termes d'une telle somme de manière à tendre vers... n'importe quelle limite préalablement fixée !!!

Théorème (de réarrangement de Riemann).
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite telle que $\sum_{k=1}^{n} |a_k| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.
Pour tout réel α, il existe une bijection σ de $\mathbb{N}^*$ vers $\mathbb{N}^*$ telle que

$$\sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha.$$

Exercice 2.

1. C'est vrai pour $p=1$.
   Soit $p \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $a_p^{[n]} = \sqrt{p \times n}$.
   $$a_{p+1}^{[n]} = \sqrt{n + a_p^{[n]}} \leq \sqrt{n + \sqrt{p \times n}}$$
   mais, pour tout $x \geq 1$, $\sqrt{x} \leq x$, donc,
   $$a_{p+1}^{[n]} \leq \sqrt{n + p \times n} = \sqrt{(p+1) \times n}$$
   d'où, pour tout $p \geq 1$, $a_p^{[n]} = \sqrt{p \times n}$

2. On va prouver cette convergence en *encadrant* $\dfrac{u_n}{\sqrt{n}}$. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$.

   On remarque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$u_n = a_n^{[n]} = \sqrt{n + a_{n-1}^{[n]}}.$$
   Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $a_p^{[n]} \geq 0$ donc, $\sqrt{n + a_{n-1}^{[n]}} \geq \sqrt{n}$ donc $\boxed{u_n \geq \sqrt{n}}$

   On remarque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$u_n = a_n^{[n]} = \sqrt{n + a_{n-1}^{[n]}} = \sqrt{n + \sqrt{n + a_{n-2}^{[n]}}}.$$
   De plus, $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n + a_{n-2}^{[n]}}} \leq \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{(n-2) \times n}}}$

   donc $\boxed{u_n \leq \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{(n-2) \times n}}}}$

   ainsi, pour tout $n \geq 1$,
   $$\sqrt{n} \leq u_n \leq \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{(n-2) \times n}}}$$
   ainsi, pour tout $n \geq 1$,
   $$1 \leq \frac{u_n}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{(n-2) \times n}}}}{\sqrt{n}}$$
   or
   $$\frac{\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{(n-2) \times n}}}}{\sqrt{n}} = \sqrt{1 + \frac{\sqrt{n + \sqrt{(n-2) \times n}}}{n}}$$
   $$= \sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{n} + \sqrt{\frac{(n-2) \times n}{n^4}}}} \quad \longrightarrow 1 \ (n \to +\infty)$$
   D'après le théorème d'encadrement,
   $$\boxed{\frac{u_n}{\sqrt{n}} \longrightarrow 1}$$
   Comme dans le problème précédent pour (H_n), on vient d'obtenir un "équivalent" de (u_n). On notera un jour : $u_n \sim \sqrt{n}$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$u_n^2 - n = \left(a_n^{[n]}\right)^2 - n = (a_n^{[n]} - \sqrt{n}) \times (a_n^{[n]} + \sqrt{n})$$
   D'autre part,
   $$u_n^2 = n + a_{n-1}^{[n]}.$$
   On obtient donc
   $$a_{n-1}^{[n]} = (a_n^{[n]} - \sqrt{n}) \times (a_n^{[n]} + \sqrt{n})$$
   On divise le tout par $\sqrt{n}$:
   $$\frac{a_{n-1}^{[n]}}{\sqrt{n}} = (u_n - \sqrt{n}) \times \left(\frac{a_n^{[n]}}{\sqrt{n}} + 1\right)$$
   On a montré en question 2 que
   $$\frac{a_n^{[n]}}{\sqrt{n}} \to 1.$$
   On peut obtenir exactement de la même façon que
   $$\frac{a_{n-1}^{[n]}}{\sqrt{n}} \to 1.$$
   Ceci conduit par produit de limites à
   $$\boxed{u_n - \sqrt{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.}$$