Exercice 0. Je connais mon cours.

Écrire le coefficient au rang n (celui "devant" x^n) dans le DL à l'ordre n en 0 de $\sqrt{1+x}$ et exprimer ce nombre de façon compacte en utilisant des factorielles.

Exercice 1. Le retour des nombres de Bernoulli.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{t}{e^t - 1} \end{array} \right.$$

1. (a) Démontrer qu'on a pour f le développement limité suivant au voisinage de 0 :
$$f(t) \underset{0}{=} 1 - \frac{1}{2}t + o(t).$$
   (b) Justifier que f est prolongeable par continuité en 0. Que vaut alors $f(0)$? Justifier que ce prolongement est dérivable en 0. Que vaut $f'(0)$?

On admet que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

On note alors, pour $n \in \mathbb{N}$, $b_n = f^{(n)}(0)$. (Les b_n sont les *nombres de Bernoulli.*)

2. (a) Montrer que la fonction $g : t \mapsto f(t) + \frac{1}{2}t$ est paire.
   (b) Pour $k \geq 1$, montrer que $b_{2k+1} = 0$.
3. (a) En remarquant que $t = f(t)(e^t - 1)$, montrer que pour tout $n \geq 2$:
$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b_k = 0.$$
   (b) Calculer b_k pour $k \in [\![0, 3]\!]$.

Exercice 2. Des calculs d'équivalent.

Ci dessous, on décrit le terme général d'une suite u.
Dans chaque cas, donner un équivalent de u_n.
On mobilisera (ou pas) les développements limités.
Les lettres a et b sont des paramètres réels.
On devra généralement discuter sur leurs valeurs pour répondre.

1. u_n est le terme au rang n de la suite u définie par
$$u_0 = -2; \quad u_1 = 2; \quad \text{puis} \quad \forall n \geq 0 \ \ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n.$$
2. $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$.
3. $u_n = (n+1)^a - n^a$.
4. $u_n = \left(\dfrac{n}{n+a}\right)^{n\ln(n)}$.
5. $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$.
6. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$.
7. $u_n = \ln\left[\binom{3n}{n}\right]$.

Exercice 3. (*) Suite définie implicitement et calcul d'équivalent.

Soit λ un réel strictement positif.

1. Justifier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'existence et l'unicité d'un réel $x_n > 0$ solution de l'équation $x\ln(x) - \lambda x = \ln(n)$.

2. Prouver que $x_n \to +\infty$ puis que $x_n \sim \dfrac{\ln(n)}{\ln(\ln(n))}$.

Exercice 4. (**)

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$u_n = \sqrt{n + ...\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}}} \qquad (n \text{ écrit } n \text{ fois.})$$

Montrer que lorsque $n \longrightarrow +\infty$:

$$u_n = \sqrt{n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$