3 Exponentielle, logarithmes, puissances

1 Fonction exponentielle.

Définition 1.

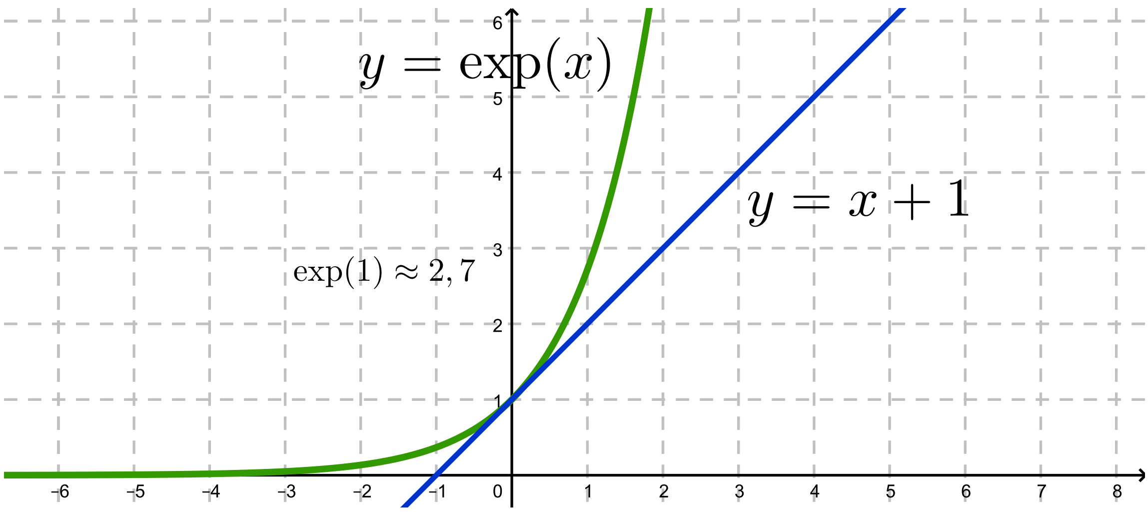
La fonction **exponentielle** est l'unique fonction $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que

$$\exp(0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \exp'(x) = \exp(x).$$

Remarque. L'*unicité* de la fonction exponentielle comme solution du problème posé est un exercice de TD. Pour ce qui concerne l'*existence*, il faudra attendre. Le nombre $\exp(x)$ pour x réel sera défini un jour par

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Pour l'instant, cette somme infinie... c'est de la science-fiction !



Proposition 2 (Faits)**.**

1. La fonction exp prend ses valeurs dans $]0, +\infty[$.
2. Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Le graphe de l'exponentielle a une tangente en 0 d'équation $y = x + 1$. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(x) \geq x + 1.$$

Théorème 3 (Propriété de morphisme de l'exponentielle)**.**

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad \exp(x + y) = \exp(x)\exp(y),}$$

Il découle de cette propriété que

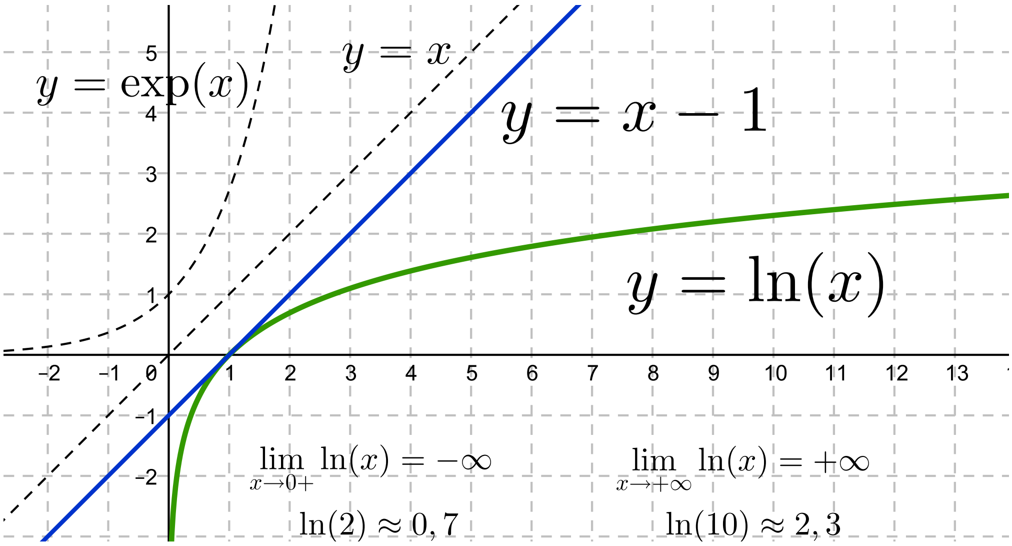
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad \exp(x - y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$
- $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall p \in \mathbb{Z} \quad \exp(px) = \exp(x)^p$.

2 Logarithme népérien.

La fonction exp est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[$. Plus précisément, tout élément $y \in \mathbb{R}_+^*$ possède un unique antécédent par exp dans $\mathbb{R}$, que l'on va noter $\ln(y)$.

Définition 4.

On appelle **logarithme népérien** la fonction $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, réciproque de l'exponentielle.



La réciprocité de ln et de exp implique notamment

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \ln(\exp(x)) = x} \quad \text{et} \quad \boxed{\forall y \in \mathbb{R}_+^* \quad \exp(\ln(y)) = y}.$$

Proposition 5.

La fonction ln est dérivable sur $]0, +\infty[$ de dérivée la fonction inverse : $\forall y \in]0, +\infty[\; \ln'(y) = \frac{1}{y}$.
Le graphe de ln a une tangente en 1 d'équation $y = x - 1$. De plus,

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad \ln(x) \leq x - 1.$$

Proposition 6 (Propriété de morphisme du logarithme)**.**

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \; \forall y \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

Il découle de cette propriété que

- $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \; \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.
- $\forall p \in \mathbb{Z} \; \forall x \in \mathbb{R}_+^* \; \ln(x^p) = p\ln(x)$.

Exemple 7.

Le logarithme de dix milliards, c'est grand comment ?

Définition 8.

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. La fonction **logarithme en base** a, notée $\log_a$, est définie par

$$\log_a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \log_a(x) := \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{array} \right. .$$

Proposition 9 (sa raison d'être)**.**

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} \quad \forall N \in \mathbb{N} \qquad \log_a\left(a^N\right) = N.$$

En informatique, on pourra apprécier le logarithme en base 2.

En physique et en SI, le logarithme en base 10.

3 Puissances.

3.1 Fonctions $x \mapsto x^p$, où p est entier.

• Exposants entiers positifs.

Soit n un entier naturel non nul et x un nombre réel. Le nombre x^n « x puissance n » est défini par

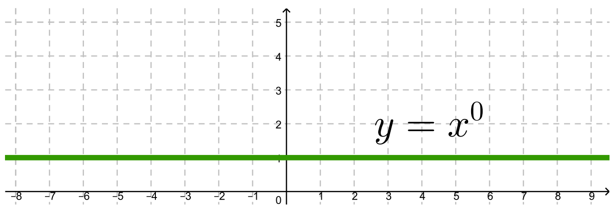
$$x^n := x \times x \times \ldots \times x. \qquad \text{(facteur } x \text{ présent } n \text{ fois).}$$

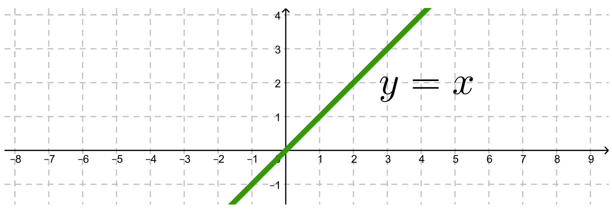
Il vient immédiatement $\boxed{\forall m, n \in \mathbb{N}^* \quad x^m \cdot x^n = x^{m+n}}$.
Quel sens donner alors à l'écriture x^0 ? Si on veut que la relation $x^0 \cdot x^n = x^{0+n}$ soit vraie pour tout entier naturel n, on posera

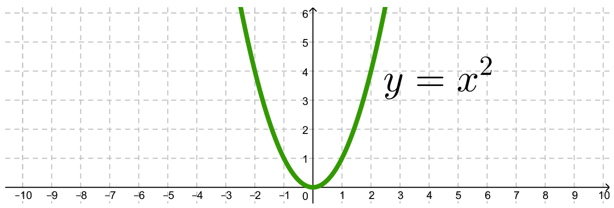
$$x^0 := 1.$$

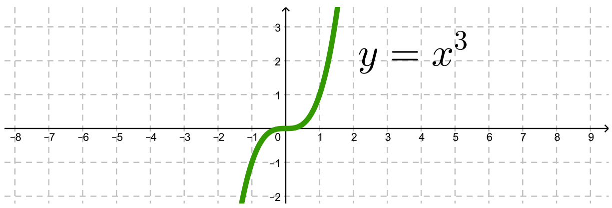
Définition 10.

Si n est un entier naturel, la fonction $x \mapsto x^n$, est définie sur $\mathbb{R}$.





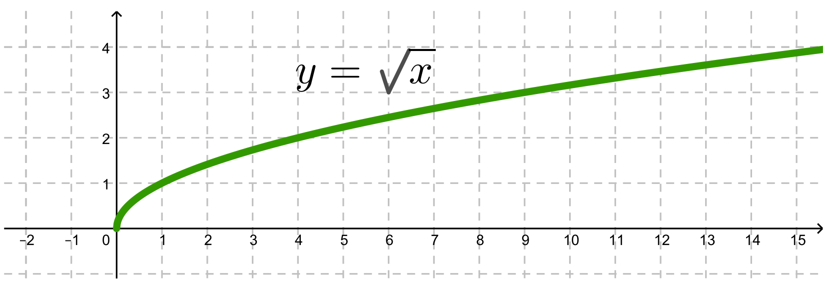




Définition 11.

Soit a un réel positif. L'équation $x^2 = a$ possède deux solutions dans $\mathbb{R}$ qui sont de signes opposés.
La solution positive de cette équation est appelée **racine carrée** de a et notée $\sqrt{a}$.
Dans le cas de l'équation $x^2 = 0$, les deux solutions sont confondues et $\sqrt{0} = 0$.

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$.



On peut démontrer à partir de cette définition que si x et y sont deux réels positifs,

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y} \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \quad (y \neq 0).$$

Proposition 12.

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \sqrt{a^2} = |a|\,.$$

• Exposants entiers négatifs.

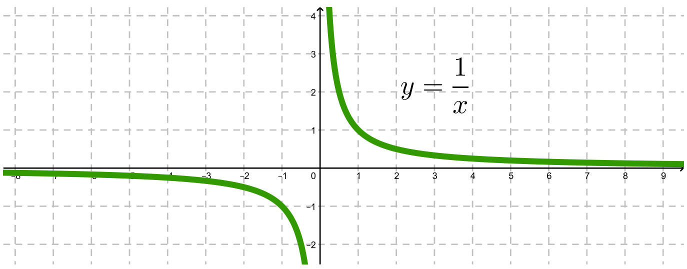
Soit x un nombre réel non nul et $n \in \mathbb{N}^*$, de sorte que $-n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. Le nombre x^n, non nul, possède un inverse : on peut poser :

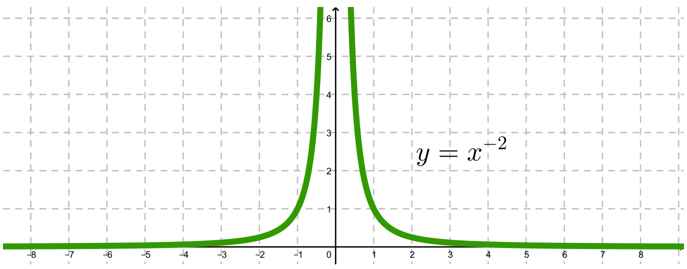
$$x^{-n} := \frac{1}{x^n}.$$

On peut alors prouver (laissé au lecteur) que $\boxed{\forall p, q \in \mathbb{Z} \quad x^p \cdot x^q = x^{p+q}}$.

Définition 13.

Si p est un entier strictement négatif ($p \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$), la fonction $x \mapsto x^p$, est définie sur $\mathbb{R}^*$.





3.2 Puissances d'exposant réel.

On souhaite maintenant donner un sens à l'écriture x^a, avec a un réel quelconque, *non forcément entier*. Pour cela, remarquons que si p est un entier relatif, et si $x \in \mathbb{R}_+^*$, en utilisant la propriété de morphisme,

$$x^p = (\exp(\ln(x)))^p \underset{(*)}{=} \exp(p \ln(x))\,.$$

Définition 14.

Pour $\boxed{x > 0}$ et $a \in \mathbb{R}$, on définit le réel x^a (« x puissance a ») par

$$\boxed{x^a = \exp(a \ln(x)).}$$

Exemple. L'écriture π^3 a toujours eu un sens pour nous : $\pi \times \pi \times \pi$.
En revanche, l'écriture 3^π n'en avait pas. Désormais si ! il s'agit de $\exp(\pi \ln(3))$.

Remarque. Si $p \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, $(*)$ montre que la "nouvelle" définition de x^p est cohérente avec l'ancienne. On peut donc dire que l'on a *étendu* la définition de x^a des puissances au cas d'un exposant a réel (au prix d'une contrainte de stricte positivité pour x).

Proposition 15 (Notation puissance pour exp)**.**

Notons e le nombre $\exp(1)$. Ce nombre vaut environ $2,71$ et il est tel que $\ln(e) = 1$. On a

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(x) = e^x.}$$

La propriété de morphisme se récrit

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad e^{x+y} = e^x e^y.$$

De plus,

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^* \qquad (e^x)^a = e^{ax} \quad \text{et} \quad \ln(y^a) = a\ln(y).$$

Proposition 16.

Pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \mathbb{R}_+^*$,

$$x^{a+b} = x^a x^b \qquad x^{-a} = \frac{1}{x^a} \qquad (xy)^a = x^a y^a.$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a} \qquad (x^a)^b = x^{ab}.$$

Corollaire 17.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \sqrt{x} = x^{1/2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}.$$

Proposition 18 (Comparer deux puissances)**.**

Soient a, b deux réels. On a

$$\forall x \in]0,1[\qquad a \leq b \iff x^a \geq x^b$$

$$\forall x \in]1,+\infty[\qquad a \leq b \iff x^a \leq x^b$$

Remarque. Par exemple, l'inégalité $x^2 \leq x^3$ est fausse lorsque $0 < x < 1$!
On l'écrit en remarque car cette erreur grossière demeure assez fréquente. Voir le graphe de comparaison dans la proposition 24

Exemple 19.

Domaine de définition et simplification de $x \mapsto x^{\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}}$.

3.3 Fonctions $x \mapsto x^a$, où a est réel.

Définition 20.

Pour un réel a quelconque, la fonction $x \mapsto x^a$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Comme on va le voir ci-dessous, lorsque $\underline{a > 0}$, cette fonction peut être prolongée en 0 en une fonction continue, en posant $0^a := 0$.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Dans la suite, on notera f_a la fonction $f_a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^a \end{array} \right.$.

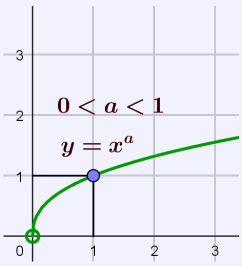
Proposition 21.

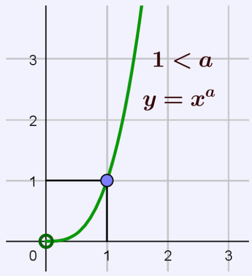
La fonction f_a est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $f_a'(x) = a x^{a-1}$.

Proposition 22 (cas $a > 0$).

Soit $a > 0$. Alors f_a est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\lim_{x \to 0} x^a = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} x^a = +\infty$$

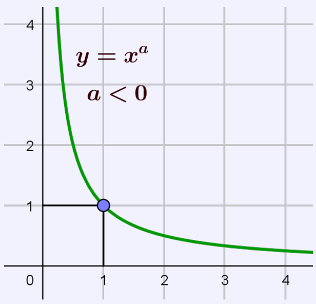




Proposition 23 (cas $a < 0$).

Soit $a < 0$. Alors f_a est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et

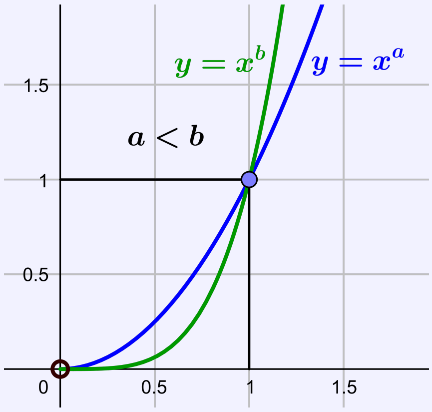
$$\lim_{x \to 0} x^a = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^a = 0$$



Proposition 24 (comparaison)**.**

Si $a < b$, alors

$$\begin{array}{rcl} \forall x \in]0,1] & : & x^b \leq x^a \\ \forall x \in [1,+\infty[& : & x^a \leq x^b. \end{array}$$



Proposition 25.

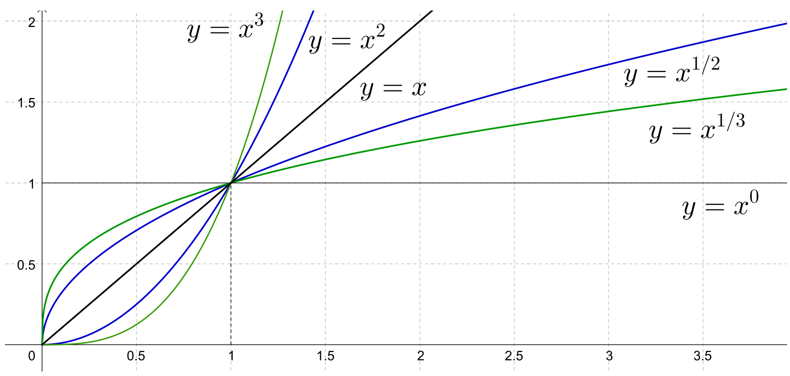
Soit a un réel non nul. Pour tout réel strictement positif y, le nombre $y^{\frac{1}{a}}$ est l'unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation $x^a = y$.

La fonction $f_a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & x^a \end{array} \right.$ est donc bijective, et sa réciproque est la fonction $x \mapsto x^{1/a}$.

Notation.

Mentionnons que la puissance d'exposant $1/n$, peut être notée avec un symbole radical :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \sqrt[n]{x} := x^{1/n}.$$



Fonctions puissances d'exposant positif.

3.4 Croissances comparées.

On compare les fonctions puissances avec les fonctions exponentielle et logarithme, et ce du point de vue *asymptotique* (celui des limites).

Lemme 26.

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe une constante $C_a \in \mathbb{R}_+$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \frac{x^a}{e^x} \leq C_a x^{-a}$.

Théorème 27 (Croissances comparées)**.**

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On a les limites suivantes.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0; \quad \lim_{x\to-\infty} |x|^a e^x = 0; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^a} = 0; \quad \lim_{x\to 0_+} x^a \ln(x) = 0.$$

Exemple 28.

Donner les limites suivantes (en précisant lorsque vous utilisez les croissances comparées)

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}, \qquad \lim_{x\to-\infty} xe^{-x}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}, \qquad \lim_{x\to 0_+} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}.$$

Pour se ramener à une limite connue, il faut parfois **factoriser par le terme prépondérant** dans une somme, comme dans l'exemple suivant.

Exemple 29.

Calculer

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\ln(x^2)}{\sqrt{x^2+1}} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{x+\ln(x^2)}{\sqrt{x^2+1}}$$

Exercices

$\boxed{\textbf{3.1}}$ **[♦◇◇]** Résoudre $2\ln\left(\frac{x+3}{2}\right) = \ln(x) + \ln(3)$, sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\boxed{\textbf{3.2}}$ **[♦◇◇]** Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$.

$\boxed{\textbf{3.3}}$ **[♦♦◇]** Sans calculatrice, comparer π^e et e^π.

$\boxed{\textbf{3.4}}$ **[♦◇◇]** Donner le tableau de variations complet de

$$f : x \mapsto x^{\frac{1}{x}}.$$

Nécessite de se souvenir comment on dérive une composée.

$\boxed{\textbf{3.5}}$ **[♦♦◇]** Donner le tableau de variations complet de

$$f : x \mapsto x^{x\ln(x)}.$$

Nécessite de se souvenir comment on dérive une composée.

$\boxed{\textbf{3.6}}$ **[♦♦◇]** Calcul de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{\sqrt{x}}$ et de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^x+x)}{\sqrt{x}}$.

$\boxed{\textbf{3.7}}$ **[♦♦♦]**

1. Étudier les variations de $f : x \mapsto \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+1}$.
2. Des deux nombres $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ et $\sqrt[3]{24}$, lequel est le plus grand ?

$\boxed{\textbf{3.8}}$ **[♦♦◇]**

1. Soit α un réel et $x > -1$. Comparer $(1+x)^\alpha$ et $1 + \alpha x$ (on discutera selon les valeurs de α).
2. Soit $\alpha \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\alpha}{k}\right) \geq (n+1)^\alpha.$$

$\boxed{\textbf{3.9}}$ **[♦♦◇]** [Unicité de la fonction exponentielle comme solution d'un problème de Cauchy]

On dit qu'une fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfait le problème $(*)$ si

$$y \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}, \qquad y(0) = 1, \qquad \forall x \in \mathbb{R}\ \ y'(x) = y(x).$$

1. Soit f une fonction satisfaisant le problème $(*)$ et $u : x \mapsto f(x)f(-x)$.
   Démontrer que u est constante sur $\mathbb{R}$. En déduire que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
2. Soient f et g deux fonctions satisfaisant le problème $(*)$.
   En considérant le quotient des deux fonctions, démontrer que $f = g$.
