1. Préliminaires.
   (a) C'est le noyau de la trace.
   (b) Pour $k \in [\![1,7]\!]$, posons $\varphi_k : M \mapsto s_k - s_8$. C'est clairement une forme linéaire sur $M_3(\mathbb{R})$ et

$$\mathcal{M} = \bigcap_{k=1}^{7} \operatorname{Ker}(\varphi_k),$$

qui est bien un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ comme intersection de sous-espaces vectoriels.

2. Matrices magiques symétriques.
   (a) On se convainc (oui, il fallait poser le système linéaire) que

$$\mathcal{M} \cap S \cap H = \left\{ \begin{pmatrix} x & -x & 0 \\ -x & 0 & x \\ 0 & x & -x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect}(X), \text{ avec } X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice X étant non nulle, $\mathcal{M} \cap S \cap H$ est une droite.
De même, on a

$$\mathcal{M} \cap A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & y & -y \\ -y & 0 & y \\ y & -y & 0 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect}(Y), \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice Y étant non nulle, $\mathcal{M} \cap A$ est une droite.
   (b) • Puisque la trace de J est non nulle, $J \notin H$, ce qui permet de montrer que $H \cap V = \{0\}$. A fortiori, $(\mathcal{M} \cap S \cap H) \cap V = \{0\}$.
   • Soit $M \in \mathcal{M} \cap S$. Il est facile d'écrire M comme la somme d'une matrice de trace nulle et d'un multiple scalaire de J :

$$M = \left(M - \frac{1}{3}\operatorname{Tr}(M)J \right) + \frac{1}{3}\operatorname{Tr}(M)J.$$

La matrice $M - \frac{1}{3}\operatorname{Tr}(M)J$ est magique, puisque M l'est et J aussi, et $\mathcal{M}$ est stable par combinaisons linéaires. Elle est de trace nulle : (on a tout fait pour ;).
Ceci prouve bien que $\mathcal{M} \cap S = (\mathcal{M} \cap S \cap H) + V$.
   • Par caractérisation, $\mathcal{M} \cap S = (\mathcal{M} \cap S \cap H) \oplus V$.

3. Description des matrices magiques.
   (a) L'application $s : M \mapsto M^T$ est un endomorphisme de $M_3(\mathbb{R})$.
   De plus, si M est magique, il est clair que $s(M) = M^T$ l'est aussi.
   Notons s' la restriction de s à $\mathcal{M}$. Elle est linéaire et va de $\mathcal{M}$ vers lui-même : c'est un endomorphisme de $\mathcal{M}$. De plus, $s' \circ s' = \mathrm{id}_{\mathcal{M}}$.
   L'involutivité caractérisant les symétries parmi les endomorphisme d'un espace vectoriel, s' est une symétrie de $\mathcal{M}$, ce qui permet d'écrire

$$\mathcal{M} = \operatorname{Ker}(s' - \mathrm{id}_{\mathcal{M}}) \oplus \operatorname{Ker}(s' + \mathrm{id}_{\mathcal{M}}) = (\mathcal{M} \cap S) \oplus (\mathcal{M} \cap A).$$

Évidemment, vous n'aviez pas les symétries cette semaine et... il fallait le faire "à la main".
   (b) On va se donner une base de $\mathcal{M} \cap S$ et une base de $\mathcal{M} \cap A$ et les concaténer pour obtenir une base adaptée à ces supplémentaires.
   On a déjà une base de la droite $\mathcal{M} \cap A$: la famille (Y).
   Pour en obtenir une pour $\mathcal{M} \cap S$, on prend une base adaptée à $(\mathcal{M} \cap S \cap H) \oplus V$: (X, J).
   Bilan : (X, J, Y) est une base de $\mathcal{M}$.
   On apprend au passage que $\dim \mathcal{M} = 3$.
   (c) D'après la question précédente, une matrice magique s'écrit de manière unique sous la forme $xX + zJ + yY$. Si on impose que les trois coefficients du haut valent $3, 4, 5$, cela impose $x = -1$, $y = 4$ et $z = -1$, ce qui donne la matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. Une base de $\mathcal{M} \cap H$.
   (a) C'est la matrice $-Y$. On s'est arrangé pour que la matrice A soit celle qui est Antisymétrique : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (b) C'est la matrice X : $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
   (c) Tout est vrai (calcul).
   (d) Commençons par dire que A et B sont des matrices de $\mathcal{M} \cap H$.
   De plus, $\mathcal{M} \cap H$ est un sous-espace strict de $\mathcal{M}$ car toutes les matrices magiques ne sont pas de trace nulle (voir J par exemple). On a donc $\dim \mathcal{M} \cap H < \dim \mathcal{M}$,

soit $\dim \mathcal{M} \cap H \leq 2$.
La dimension de $\mathcal{M} \cap H$ est supérieure à 2 car la famille (A, B) est libre.
On a donc que $\dim \mathcal{M} \cap H = 2$. Par caractérisation des bases en dimension finie, (A, B) est une base de $\mathcal{M} \cap H$.

(e) En bref : la somme est directe, on le sait déjà, et

$$\dim \mathcal{M} \cap H + \dim V = 2 + 1 = 3 = \dim \mathcal{M}.$$

(on a bien que $V = \mathrm{Vect}(J)$ est une droite puisque J est non nul).

5. Une curiosité des matrices magiques de taille 3.

(a) $M_0^3 = 3(\beta^2 - \alpha^2)M_0$ s'obtient par un calcul qui utilise les identités prouvées à la question 4 (c). Pour les puissances impaires suivantes, une récurrence fait le job.

(b) D'après la question 4(e), une matrice magique quelconque M s'écrit $M = M_0 + \lambda J$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et M_0 une matrice magique de trace nulle. On vérifie (c'est *magique*!) que $JM_0 = M_0 J = \alpha J$, où α est la somme des coefficients de M_0 sur une ligne (et donc sur toutes les lignes). Le binôme de Newton permet de calculer, pour $p \in \mathbb{N}$,

$$M^{2p+1} = (M_0 + \lambda J)^{2p+1} = M_0^{2p+1} + \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p+1}{k} M_0^k \lambda^{2p+1-k} J^{2p+1-k}.$$

On a, par récurrence facile et classique, que $J^{2p+1-k} = 3^{2p-k} J$. Et puisque $M_0 J = \alpha J$, on obtient rapidement que pour $k \geq 0$, $M_0^k J = \alpha^k J$. Ainsi,

$$M^{2p+1} = (M_0 + \lambda J)^{2p+1} = M_0^{2p+1} + \left(\sum_{k=0}^{2p} \binom{2p+1}{k} (3\lambda)^{2p-k} \alpha^k \right) J,$$

$$\text{soit} \quad M^{2p+1} = M_0^{2p+1} + \frac{1}{3} \left((3\lambda + \alpha)^{2p+1} - \alpha^{2p+1} \right) J.$$

D'après la question précédente, $M_0^{2p+1} \in \mathcal{M}$. On a aussi $J \in \mathcal{M}$. Puisque $\mathcal{M}$ est stable par combinaisons linéaires, on obtient bien que $M^{2p+1} \in \mathcal{M}$.