Problème. Automorphismes intérieurs d'un groupe.

On se donne $(G,\cdot)$ un groupe (en notation multiplicative), de neutre e.

On note $\mathrm{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes de G.

0. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.
   (Re)démontrer que $(\mathbb{U}_n, \times)$ est un groupe.
   Indication : On pourra vérifier que c'est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$.

1. Démontrer que $(\mathrm{Aut}(G), \circ)$ est un groupe.
   Indication : on pourra prouver qu'il s'agit d'un sous-groupe de S_G, le groupe des permutations de G.

2. Pour $a \in G$, on définit $\tau_a : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ x & \mapsto & axa^{-1} \end{array} \right.$.
   (a) Que vaut τ_e ?
   (b) Soit $(a,b) \in G^2$. Montrez que $\tau_a \circ \tau_b = \tau_{ab}$.
   (c) Soit $a \in G$. Justifiez que τ_a est inversible et montrer que $(\tau_a)^{-1} = \tau_{a^{-1}}$.
   (d) Soit $a \in G$. Justifier que $\tau_a \in \mathrm{Aut}(G)$.

3. Les automorphismes τ_a sont appelés automorphismes intérieurs de G.
   On note :
   $$\mathrm{Int}(G) = \{\tau_a \mid a \in G\}.$$
   (a) Montrer que $\mathrm{Int}(G)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(G)$.
   (b) « $\mathrm{Int}(G)$ est trivial lorsque G est abélien. » Expliquez.

4. Soit $T : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \to & \mathrm{Aut}(G) \\ a & \mapsto & \tau_a \end{array} \right.$.
   (a) Prouver que T est un morphisme de groupes.
   (b) Ce qui précède permet de retrouver que $\mathrm{Int}(G)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(G)$. Pourquoi ?
   (c) Le noyau de T est un sous-groupe de G croisé dans le cours : lequel ?

5. Dans cette question, on veut montrer que T n'est pas toujours surjectif, c'est-à-dire qu'il existe un groupe G tel que $\mathrm{Int}(G) \subsetneq \mathrm{Aut}(G)$.
   (a) On considère $G = \mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$.
   On pose $f : \begin{cases} 1 \mapsto 1 \\ j \mapsto j^2 \\ j^2 \mapsto j \end{cases}$ Montrez que $f \in \mathrm{Aut}(G)$.
   (b) Conclure.

Exercice.

Soit
$$H = \left\{ x + y\sqrt{3} \mid n \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{Z}, x^2 - 3y^2 = 1 \right\}.$$
Démontrer que H est un sous-groupe de $\mathbb{R}_+^*$.
