Correction par pair

$\boxed{\text{A}}$ Question B-1 : Compréhension de la définition : avoir donné le bon graphe.

$\boxed{\text{B}}$ Question B-2 : Inversibilité de P : avoir échelonné correctement et s'être ramené à une triangulaire supérieure à coefficients diagonaux non nuls.

$\boxed{\text{C}}$ Question B-3 : Avoir prouvé que $\text{tr}(A^\ell) = \text{tr}(D^l)$ sans arnaquer (bien regarder comment la propriété $\text{tr}(XY) = \text{tr}(YX)$ a été utilisée.

Problème. Matrice d'adjacence d'un graphe et dénombrement de chemins.

Partie A. Nombre de chemins et puissances de la matrice d'adjacence.

1. Pour x et y deux sommets et ℓ un entier naturel non nul, notons $C_{x,y}^{(\ell)}$ l'ensemble des chemins de longueur ℓ qui vont de x à y.

   Soit $\ell \geq 2$ et $(i,j) \in S^2$. Un chemin de longueur ℓ allant de i vers j est de la forme
   $$(i, k, i_2, \ldots, i_\ell) \quad \text{avec} \quad i_\ell = j \quad \text{et} \quad (i,k) \in \mathcal{A}.$$
   Pour faire plus simple encore, un chemin de longueur ℓ allant de i à j commence par un arc (i,k) du graphe (chemin de longueur 1) et se poursuit avec un chemin de longueur $\ell-1$. On a donc
   $$C_{i,j}^{(\ell)} = \bigcup_{(i,k)\in\mathcal{A}} \left\{(i, k, i_2, \ldots, i_\ell) \mid (i_2, \ldots, i_\ell) \in C_{k,j}^{(\ell-1)}\right\}.$$
   Passons au cardinal : on obtient
   $$c_{i,j}^{(\ell)} = \sum_{(i,k)\in\mathcal{A}} c_{k,j}^{(\ell-1)}.$$
   Notons $\Delta_{i,k}$ le nombre qui vaut 1 si (i,k) est un arc et 0 sinon. On a
   $$c_{i,j}^{(\ell)} = \sum_{k\in S} \Delta_{i,k} \cdot c_{k,j}^{(\ell-1)}.$$
   Or, pour tout couple (i,k), le nombre $\Delta_{i,k}$ est par définition le coefficient d'indice (i,k) dans la matrice d'adjacence. on a donc bien
   $$c_{i,j}^{(\ell)} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{i,k} \cdot c_{k,j}^{(\ell-1)}.$$

2. Soit $(i,j) \in S^2$. Le nombre de chemins de longueur 1 allant de i à j vaut 1 si (i,j) est un arc, 0 sinon : on a $c_{i,j}^{(1)} = [A]_{i,j}$.

On a reconnu un produit matriciel dans la question 1 : pour les chemins de longueur 2,

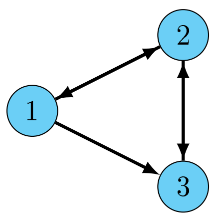
$$c_{i,j}^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{i,k} \cdot c_{k,j}^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{i,k} \cdot [A]_{k,j} = [A^2]_{i,k}.$$

On itère pour les chemins de longueur ℓ... (récurrence).

3. D'après la question précédente, le nombre de cycles d'un sommet i vers lui-même est donné par le coefficient diagonal $[A^\ell]_{i,i}$. Sommons pour avoir le nombre de cycles total : $\mathrm{Tr}(A^\ell)$.

Partie B. Un exemple en taille 3 avec diagonalisation.

1. Voici le graphe dont A est la matrice d'adjacence.



2. La méthode de la "membrane" permet de prouver que P est inversible et que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \frac{\varphi-1}{\varphi-\psi} & \frac{\varphi}{\varphi-\psi} & \frac{\varphi}{\varphi-\psi} \\ \frac{1+\psi}{\varphi-\psi} & -\frac{\psi}{\varphi-\psi} & -\frac{\psi}{\varphi-\psi} \end{pmatrix}.$$

3. Le calcul amène $A = PDP^{-1}$.
Une récurrence facile (et classique) amène que pour tout entier ℓ (on en fixe un pour la suite),

$$A^\ell = PD^\ell P^{-1}.$$

(c'est d'ailleurs vrai pour $\ell = 0$ aussi). On a donc

$$\mathrm{Tr}(A^\ell) = \mathrm{Tr}(PD^\ell P^{-1}) \underset{*}{=} \mathrm{Tr}(P^{-1}PD^\ell) = \mathrm{Tr}(D^\ell)$$

Pour l'égalité $(*)$, on a utilisé la propriété $\mathrm{Tr}(XY) = \mathrm{Tr}(YX)$ (vraie pour toutes matrices X et Y), avec $X = PD^\ell$ et $Y = P^{-1}$.
Ainsi, on sait exprimer le nombre de cycles de longueur ℓ pour ce graphe :

$$\mathrm{Tr}(A^\ell) = \mathrm{Tr}(D^\ell) = (-1)^\ell + \varphi^\ell + \psi^\ell.$$

Heureusement que nous savons à l'avance qu'il s'agit d'un entier car cela ne saute pas aux yeux dans l'expression trouvée !

Partie C. Compter des choses dans un graphe *non orienté*.

1. Le sommet i a été fixé. Il y a autant de paires $\{i, j\}$ avec (i, j) (et donc (j, i) !) dans $\mathcal{A}$ que de cycles de longueur 2 de forme (i, j, i) dans le graphe. D'après la question A-2, ce nombre d_i vaut $[A^2]_{i,i}$.
2. Une arête étant une paire de sommets, la somme de tous les degrés donne deux fois le nombre d'arêtes. Le nombre d'arêtes est donc donné par

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} [A^2]_{i,i} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(A^2).$$

3. On sait compter le nombre de cycles de longueur 3 : ce nombre vaut $\mathrm{Tr}(A^3)$. Un triangle est un ensemble de trois sommets. On peut créer 3! cycles avec trois sommets fixés (un cycle étant un 4-uplet commençant par un 3-arrangement des trois sommets, et se terminant par le premier). Le principe du berger donne qu'il y a donc six fois plus de cycles de triangles ! Le nombre de triangles dans le graphe vaut bien

$$\frac{1}{6}\mathrm{Tr}(A^3).$$

4. (*facultatif*) Tous les cycles de longueur 4 ne correspondent pas à un carré : il y a certaines configurations à éviter. On lira l'article initial pour une solution à cette question.

Partie D. L'exemple du graphe complet.

1. $A = J - I_n$.
2. Puisque I_n et J commutent, la formule du binôme donne, pour un entier ℓ donné,

$$A^\ell = \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} (-1)^{\ell-k} J^k.$$

Or, il est classique que pour tout $k \geq 1$, $J^k = n^{k-1} J$, de sorte que

$$\begin{aligned} A^\ell &= (-1)^\ell I_n + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{\ell}{k} n^{k-1} (-1)^{\ell-k} \right) J \\ &= (-1)^\ell I_n + \frac{1}{n} \left[(n-1)^n - (-1)^\ell \right] J \end{aligned}$$

3. Le nombre de cycles de longueur ℓ dans le graphe complet s'obtient en passant à la trace :

$$\mathrm{Tr}(A^\ell) = (-1)^\ell \mathrm{Tr}(I_n) + \frac{1}{n} \left[(n-1)^n - (-1)^\ell \right] \mathrm{Tr}(J) = (n-1)^n + (-1)^\ell (n-1).$$

4. Le nombre de triangles dans le graphe complet est donné par

$$\frac{1}{6} \mathrm{Tr}(A^3) = \frac{1}{6} \left[(n-1)^3 - (n-1) \right] = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

Ce résultat est naturel : se donner un triangle dans le graphe complet revient à y choisir trois sommets (on a l'assurance, le graphe étant complet, que ces sommets seront reliés). Le nombre de parties à 3 éléments de l'ensemble des sommets a pour cardinal $\binom{n}{3}$ ce qui redonne le résultat ci-dessus.