Corrigé du DM 7

$\boxed{\text{A}}$ Préliminaires : résolution correcte de l'équation 1
(avec simplification de $\exp\left(-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)$ dans la résolution de l'équation homogène).

$\boxed{\text{B}}$ Préliminaires : résolution correcte de l'équation 1
(notez entre 0 et 3 la clarté de la rédaction pour la variation de la constate).

$\boxed{\text{C}}$ A1 : les hypothèses du théorème de dérivation des composées :
on doit lire « y dérivable sur I et $x \mapsto x^{1-p}$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ »

$\boxed{\text{D}}$ A3-(c) : l'étude de f_λ avec la disjonction de cas sur λ et les deux tableaux de variations.

Problème. Équations de Bernoulli et de Ricatti. (Corrigé succint).

Les deux équations posées dans la partie Préliminaires ont pour ensembles de solutions

$$S_1 = \left\{ x \mapsto 1 + \frac{\lambda}{\sqrt{1+x^2}} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{et} \quad S_2 = \left\{ x \mapsto \ln(x) - 1 + \frac{\lambda}{x} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

J'espère que pour la première équation, vous vous êtes épargné une variation de la constante pour la recherche de la solution particulière !

Partie A. Équations de Bernoulli.

1. La fonction $y : I \to \mathbb{R}_+^*$ est dérivable sur I.
   La fonction $x \mapsto x^{1-p} (= e^{(1-p)\ln(x)})$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
   La fonction $z = y^{1-p}$ est donc dérivable sur I comme composée et
   $$z' = (1-p)y'y^{-p}.$$
2. En divisant dans l'équation par y^p, on obtient $y'y^{-p} = a(x)y^{1-p} + b(x)$:
   y est solution de (B) ssi z est solution de (LB).
3. (a) Pour cet exemple, $p = \frac{1}{2}$ et $1 - p = \frac{1}{2}$.
   L'équation (LB_1) est la première équation des préliminaires.

   (b) Ses solutions : les fonctions $x \mapsto 1 + \frac{\lambda}{\sqrt{1+x^2}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

   (c) Fixons λ réel et étudions $f_\lambda : x \mapsto 1 + \frac{\lambda}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + \lambda(1+x^2)^{-1/2}$.
   La fonction f_λ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
   $$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_\lambda'(x) = -\lambda x(1+x^2)^{-3/2}.$$

$$\begin{array}{|c|ccccc|}
\hline
x & -\infty & & 0 & & +\infty \\
\hline
 & & & 1+\lambda & & \\
f_\lambda & & \nearrow & & \searrow & \\
 & 1 & & & & 1 \\
\hline
\end{array}$$

Cas $\lambda > 0$

$$\begin{array}{|c|ccccc|}
\hline
x & -\infty & & 0 & & +\infty \\
\hline
 & 1 & & & & 1 \\
f_\lambda & & \searrow & & \nearrow & \\
 & & & 1+\lambda & & \\
\hline
\end{array}$$

Cas $\lambda \leq 0$.

Dans le cas où $\lambda > 0$, la fonction f_λ prend toujours des valeurs strictement positives. En revanche, si $\lambda \leq 0$, il faut et il suffit que $1 + \lambda$ soit strictement positif pour que f_λ prenne des valeurs strictement positives. Bilan : les solutions strictement positives de $(LB1)$ sont les fonctions $x \mapsto 1 + \frac{\lambda}{\sqrt{1+x^2}}$ avec $\lambda > -1$.

(d) Si $z = y^{1/2}$ est de la forme ci-dessus, alors on sait donner $y = z^2$.
Les solutions sont les fonctions de la forme $x \mapsto \left(1 + \frac{\lambda}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2$, avec $\lambda > -1$.

4. (a) Pour cet exemple, $p = 2$ et $1 - p = -1$.
L'équation (LB_2) est la première équation des préliminaires.

(b) Ses solutions : les fonctions $x \mapsto \ln(x) - 1 + \frac{\lambda}{x},\ \lambda \in \mathbb{R}$.

(c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On se donne la fonction $g_\lambda : x \mapsto \ln(x) - 1 + \frac{\lambda}{x}$. Dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et de dérivée $g_\lambda' : x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{\lambda}{x^2} = \frac{x-\lambda}{x^2}$. Une telle fonction a pour tableau de variations

x	0		λ		$+\infty$
g_λ	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$\ln(\lambda)$	$\nearrow$	$+\infty$

Pour avoir des fonctions strictement positives sur $\mathbb{R}_+^*$, une condition nécessaire et suffisante est d'avoir $\lambda > 1$.

(d) Si $z = y^{-1}$ est de la forme ci-dessus, alors on sait donner $y = z^{-1}$.
Les solutions sont les fonctions de la forme $x \mapsto \left(\ln(x) - 1 + \frac{\lambda}{x}\right)^{-1}$, avec $\lambda > 1$.

Partie B. Équations de Ricatti.

1. On a posé $z = y - y_0$ où y est une fonction dérivable sur I et y_0 une solution particulière de (R).

$$\begin{aligned}
y \text{ est solution} &\iff y' = a + by + cy^2 \\
&\iff (z + y_0)' = a + b(z + y_0) + c(z + y_0)^2 \\
&\iff z' + y_0' = a + bz + by_0 + cz^2 + 2cy_0 z + cy_0^2 \\
&\iff z' + \underbrace{y_0' - a - by_0 - cy_0^2}_{=0} = (b + 2cy_0)z + cz^2 \\
&\iff z' = \alpha z + cz^2,
\end{aligned}$$

en posant $\alpha = b + 2cy_0$.

2. On vérifie que $y_0 : x \mapsto x$ est une solution particulière de (R_3).
L'équation de Bernoulli associée n'est autre que (B_2), dont on a déterminé les solutions strictement positives sur $\mathbb{R}_+^*$. D'après l'énoncé, si z est solution de (B_2), $z + y_0$ est solution de (R_3).
Voici donc un ensemble de solutions de (R_3) :

$$\left\{ x \mapsto x + (\ln(x) - 1 + \lambda/x)^{-1},\ \lambda > 1 \right\}.$$