DS 6 version B

Exercice 1.

Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine multiple (de multiplicité au moins égale à 2) du polynôme

$$P = X^5 + aX^2 + bX.$$

Factoriser alors ce polynôme en produit d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2.

Nous considérons dans cet exercice un entier naturel n et un polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\forall k \in [\![0, n]\!] \quad P(k) = \frac{1}{k+1}.$$

Nous souhaitons calculer $P(n+1)$.

1. Première méthode.
   (a) Justifier qu'il existe une constante λ telle que
   $$(X+1)P(X) - 1 = \lambda \prod_{k=0}^{n} (X-k).$$
   (b) En évaluant en un point bien choisi, calculer λ.
   (c) Conclure.

2. Seconde méthode.
   Retrouver le résultat en utilisant l'interpolation de Lagrange.

Exercice 3.

Soit le polynôme

$$P = 2X^{13} - 4X^{12} + 666.$$

Ce polynôme possède 13 racines dans $\mathbb{C}$ (comptées avec multiplicité).

Sans chercher à calculer ces nombres, donner leur somme et leur produit.

Exercice 4.

On considère dans cet exercice le polynôme

$$P = X^{2n} + 1.$$

Pour k dans $[\![0, 2n-1]\!]$, on note $\varphi_k = \dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n}$ et $\omega_k = \mathrm{e}^{i\varphi_k}$.

1. Montrer que
   $$P = \prod_{k=0}^{2n-1} (X - \omega_k).$$

2. Prouver, pour tout $k \in [\![0, 2n-1]\!]$, l'égalité $\overline{\omega_k} = \omega_{2n-k-1}$.
   Écrire la décomposition de P en produit d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Problème. Polynômes de Tchebychev.

———

On définit par récurrence une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$:

$$T_0 = 1 \quad T_1 = X$$
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

1. *Premières propriétés.* Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Calculer T_2, T_3 et T_4.
   (b) Montrer que T_n est un polynôme de degré n.
   (c) Déterminer (en justifiant) le coefficient dominant de T_n.
   (d) Montrer que $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$.

2. *La relation fondamentale*
   (a) Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que
   $$T_n\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right).$$
   (b) En déduire que
   $$\forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad T_n(\cos\alpha) = \cos(n\alpha) \qquad ❤$$
   (c) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on ait $P(\cos\alpha) = \cos(n\alpha)$. Montrer que $P = T_n$.

3. *Factorisation de T_n*
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) En utilisant ❤ , déterminer les $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $\cos(\alpha)$ est racine de T_n.
   (b) Factoriser T_n en produit d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

4. *Calcul des bornes* $\sup_{x\in[-1,1]} |T_n(x)|$ *et* $\sup_{x\in[-1,1]} |T_n'(x)|$
   (a) En utilisant la relation ❤, justifier que
   $$\sup_{x\in[-1,1]} |T_n(x)| = 1.$$
   (b) En utilisant la relation ❤, établir que
   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \alpha \in]0,\pi[\quad T_n'(\cos\alpha) = n\frac{\sin(n\alpha)}{\sin\alpha}.$$
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n'(1) = n^2$.
   (d) En raisonnant par récurrence, montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad |\sin(n\alpha)| \leq n\,|\sin(\alpha)|.$$
   (e) Conclure que
   $$\sup_{x\in[-1,1]} \left|T_n'(x)\right| = n^2.$$

5. *Un théorème de Tchebychev.*
   Soit P un polynôme unitaire de degré $n \in \mathbb{N}^*$. On souhaite démontrer que
   $$\sup_{x\in[-1,1]} |P(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}.$$
   On raisonne par l'absurde et on suppose que $\sup\limits_{x\in[-1,1]} |P(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}$.
   On pose $Q := P - \frac{1}{2^{n-1}}T_n$, où T_n est le polynôme de Tchebychev d'ordre n, ainsi que $x_k = \cos\frac{k\pi}{n}$ pour $0 \leq k \leq n$.
   (a) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Calculer $T_n(x_k)$.
   Pour $0 \leq k \leq n-1$, justifier que $Q(x_k)$ et $Q(x_{k+1})$ ne sont pas de même signe, et sont non nuls.
   (b) En déduire que le polynôme Q possède n racines deux à deux distinctes.
   (c) Exhiber une contradiction.