Corrigé du DM 12

Problème. Automorphismes intérieurs d'un groupe.

0. On montre que $\mathbb{U}_n$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$, et donc un groupe.
   - Le neutre de $\mathbb{C}^*$ est 1. Puisque $1^n = 1$, $\boxed{1 \in \mathbb{U}_n}$.
   - Soit $(\omega, \widetilde{\omega}) \in \mathbb{U}_n^2$. On a $(\omega\widetilde{\omega})^n = \omega^n \widetilde{\omega}^n = 1 \times 1 = 1$ donc $\boxed{\omega\widetilde{\omega} \in \mathbb{U}_n}$.
   - Soit $\omega \in \mathbb{U}_n$. On a $(\omega^{-1})^n = (\overline{\omega})^n = \overline{\omega^n} = \overline{1} = 1$: $\boxed{\omega^{-1} \in \mathbb{U}_n}$.

1. On montre que $\mathrm{Aut}(G)$ est un sous-groupe de $(S_G, \circ)$, groupe des permutations de G, et donc un groupe.
   - Le neutre de S_G est l'identité id_G.
   C'est trivialement un endomorphisme de G puisque pour tout couple (x, y) de G^2 on a $\mathrm{id}_G(xy) = xy = \mathrm{id}_G(x)\mathrm{id}_G(y)$. De surcroît, id_G est bijective, ce qui donne que $\boxed{\mathrm{id}_G \in \mathrm{Aut}(G)}$.
   - Soit $(f, g) \in (\mathrm{Aut}(G))^2$. L'application $f \circ g$ est un morphisme de groupes (c'est une composée de morphismes, détails plus bas) et il est bijectif (comme composée de bijections) : $\boxed{f \circ g \in \mathrm{Aut}(G)}$.
   Détails : vérifions que $f \circ g$ est un morphisme de groupes. Soit $(x, y) \in G^2$.
   $$f \circ g(xy) = f\left(g\left(xy\right)\right) = f\left(g(x)g(y)\right) = f\left(g(x)\right) f\left(g(y)\right) = f \circ g(x) f \circ g(y).$$
   - Soit $f \in \mathrm{Aut}(G)$. L'inverse de f dans S_G est sa réciproque et nous savons qu'il s'agit d'un isomorphisme de G dans lui-même, comme réciproque d'un isomorphisme : $\boxed{f^{-1} \in \mathrm{Aut}(G)}$.

2. (a) On vérifie que $\tau_a \circ \tau_b = \tau_{ab}$ en montrant l'égalité en tout point.
   Soit $x \in G$.
   $$\tau_a \circ \tau_b(x) = \tau_a\left(\tau_b(x)\right) = \tau_a\left(bxb^{-1}\right) = a\left(bxb^{-1}\right)a^{-1} = abx(ab)^{-1} = \tau_{ab}(x).$$
   (b) Puisque G est un groupe a admet bien inverse a^{-1} et $\tau_{a^{-1}}$ est bien définie. En utilisant l'identité prouvée à la question précédente, on a
   $$\tau_a \circ \tau_{a^{-1}} = \tau_{aa^{-1}} = \tau_e = \mathrm{id}_G.$$
   En effet : $\forall x \in G\ \tau_e(x) = exe^{-1} = x$. On a aussi $\tau_{a^{-1}} \circ \tau_a = \mathrm{id}_G$.
   Par caractérisation de la bijectivité,
   $$\boxed{\tau_a \text{ est bijective de réciproque } (\tau_a)^{-1} = \tau_{a^{-1}}.}$$
   (c) On a prouvé à la question précédente la bijectivité de τ_a.
   Vérifions qu'il s'agit d'un endomorphisme de G. Soit $(x, y) \in G^2$.
   $$\tau_a(xy) = axya^{-1} = (axa^{-1})(ayxa^{-1}) = \tau_a(x)\tau_a(y).$$
   On a bien que $\boxed{\tau_a \in \mathrm{Aut}(G)}$.

3. (a) Supposons que G est abélien. Considérons alors $a \in G$ et l'automorphisme intérieur τ_a associé. On a
   $$\forall x \in G \quad \tau_a(x) = axa^{-1} \underset{(*)}{=} xaa^{-1} = xe = x.$$
   En utilisant la commutativité de G en $(*)$, on a prouvé que $\tau_a = \mathrm{id}_G$. Le seul automorphisme intérieur de G est l'identité : on dira que $\mathrm{Int}(G)$ est trivial.
   (b) • Le neutre de $\mathrm{Aut}(G)$ est id_G et $\mathrm{id}_G = \tau_e$: $\mathrm{id}_G \in \mathrm{Int}(G)$.
   • Soient τ_a et τ_b deux automorphismes intérieurs de G (où a et b sont dans G). On a prouvé en question 2 que $\tau_a \circ \tau_b = \tau_{ab}$ ce qui montre que $\tau_a \circ \tau_b \in \mathrm{Int}(G)$.
   • Soit τ_a un automorphisme intérieur de G (où a est dans G).
   On a prouvé en question 2 que $(\tau_a)^{-1} = \tau_{a^{-1}}$, d'où $(\tau_a)^{-1} \in \mathrm{Int}(G)$.

4. (a) Pour $(a, b) \in G^2$, on a
   $$T(ab) = \tau_{ab} = \tau_a \circ \tau_b = T(a) \circ T(b),$$
   ce qui établit que <u>T est un morphisme de groupes</u>.
   (b) Il suffit de regarder $\mathrm{Int}(G)$ comme $T(G)$, l'image directe de G par T : c'est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(G)$ comme image d'un sous-groupe de G par le morphisme de groupes T.
   (c) Montrons que $\boxed{\mathrm{Ker} T = Z(G)}$, où $Z(G)$ est le centre de G, ensemble des éléments qui commutent avec tous les éléments de G.
   • Soit $a \in Z(G)$. On a $T(a) = \tau_a = \mathrm{id}_G$ car pour tout $x \in G$, $\tau_a(x) =$

$axa^{-1} = xaa^{-1} = x$, puisque a commute avec tous les éléments de G. Puisque $T(a)$ est égal au neutre de $\mathrm{Aut}(G)$, $a \in \mathrm{Ker}T$.
• Soit $a \in \mathrm{Ker}T$. On a $T(a) = \mathrm{id}_G$, soit $\tau_a = \mathrm{id}_G$. Ainsi, pour $x \in G$, $axa^{-1} = x$, ce qui donne $ax = xa$ en composant à droite par a. On vient de prouver que a commute avec tous les éléments de G : $a \in Z(G)$.

5. (a) Il est très clair que f est une bijection de G dans lui-même, de réciproque elle-même (on remarque en effet que $f \circ f = \mathrm{id}$).
C'est bien un morphisme de groupes : on le vérifie facilement car pour tout $\omega \in \mathbb{U}_3$, on a $f(1 \times \omega) == f(1) \times f(\omega)$ puisque $f(1) = 1$. Il reste alors à vérifier que

$$f(j)f(j^2) = j^2 j = 1 = f(1) = f(jj^2),$$

$$f(j)f(j) = j^2 j^2 = j = f(j^2) = f(jj),$$

$$f(j^2)f(j^2) = jj = j^2 = f(j) = f(j^2 j^2).$$

(b) Puisque $\mathbb{U}_3$ est abélien, $\mathrm{Int}(\mathbb{U}_3)$ est trivial comme on l'a expliqué en question 3-(a). Nous venons de définir un automorphisme f de $\mathbb{U}_3$ qui n'est pas l'identité. Cet endomorphisme ne saurait donc être intérieur.

Exercice.

Si vous ne connaissez pas encore Bibmaths, c'est peut-être l'occasion de découvrir ce très bon site d'exercices corrigés. L'exercice de ce cette semaine est le cinquième de la feuille ci-dessous :

`https://www.bibmath.net/ressources/index.php?action=affiche&quoi=mpsi/feuillesexo/groupeanneaucorps&type=fexo`