Correction par pair

$\boxed{\text{A}}$ Question 2-(a) : avoir introduit deux matrices dans le commutant de A et deux scalaires.

$\boxed{\text{B}}$ Question 2-(a) : avoir fait le bon calcul, clairement.

$\boxed{\text{C}}$ 4-(b) : la partie "morphisme" : avoir vérifié correctement que φ est un morphisme d'anneaux.

$\boxed{\text{D}}$ 4-(b) : la partie "iso" : avoir vérifié correctement que φ est une bijection.

$\boxed{\text{E}}$ 7 : s'être servi clairement du fait que les d_i sont deux à deux distincts.

$\boxed{\text{F}}$ Pour $\mathrm{C}(\Delta)$: avoir dit que Δ est diagonale, de coefficients diagonaux distincts et fait référence à la question 7.

Problème. Commutant d'une matrice.

1. Toutes les matrices commutent avec I_n ou avec 0_n :
$$\boxed{\mathrm{C}(I_n) = \mathrm{C}(0_n) = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})}.$$
2. (a) Soient M et N deux matrices de $\mathrm{C}(A)$, λ et μ deux scalaires de $\mathbb{K}$.
$$A(\lambda M + \mu N) = \lambda AM + \mu AN = \lambda MA + \mu NA = (\lambda M + \mu N)A.$$
Ceci montre que $\lambda M + \mu N \in \mathrm{C}(A)$: $\mathrm{C}(A)$ est stable par combinaisons linéaires.

   (b) Soient M et N deux matrices de $\mathrm{C}(A)$. On a
$$A(MN) = (AM)N = (MA)N = M(AN) = M(NA) = (MN)A.$$
Ceci prouve que $MN \in \mathrm{C}(A)$. Nous avons utilisé l'associativité du produit matriciel et le fait que M et N commutent avec A.

   (c) · La matrice I_n commute avec A : $I_n \in \mathrm{C}(A)$.
   · Puisque $\mathrm{C}(A)$ est stable par combinaisons linéaires (prouvé en a), il est stable par différence.
   · Enfin, $\mathrm{C}(A)$ est stable par produit (prouvé en b).
   Ceci démontre que $\boxed{\mathrm{C}(A) \text{ est un sous-anneau de } \mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$.
3. On raisonne par équivalence. Puisque M est inversible, M^{-1} l'est également :
$$\begin{aligned} MA = AM &\iff M^{-1}(MA)M^{-1} = M^{-1}(AM)M^{-1} \quad (M^{-1} \text{ est inversible}) \\ &\iff \left(M^{-1}M\right)AM^{-1} = M^{-1}A\left(M^{-1}M\right) \quad (\text{assoc. du produit}) \\ &\iff AM^{-1} = M^{-1}A \end{aligned}$$
Ceci démontre que $\boxed{M \in \mathrm{C}(A) \iff M^{-1} \in \mathrm{C}(A)}$.
4. (a) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
$$\begin{aligned} MA = AM &\iff APP^{-1}M = MPP^{-1}A \quad (PP^{-1} = I_n) \\ &\iff P^{-1}(APP^{-1}M)P = P^{-1}(MPP^{-1}A)P \quad (P, P^{-1}\text{inv.}) \\ &\iff (P^{-1}AP)(P^{-1}MP) = (P^{-1}MP)(P^{-1}AP) \quad (\text{assoc.}) \end{aligned}$$
Ceci démontre que $\boxed{M \in \mathrm{C}(A) \iff P^{-1}MP \in \mathrm{C}(P^{-1}AP)}$.

(b) Tout d'abord, remarquons que φ va bien de $\mathrm{C}(A)$ vers $\mathrm{C}(P^{-1}AP)$ d'après la question (a). On vérifie que φ est un morphisme d'anneaux. Pour M et N dans $\mathrm{C}(A)$, on a

$$\varphi(M+N) = P^{-1}(M+N)P = P^{-1}MP + P^{-1}NP = \varphi(M) + \varphi(N),$$

$$\varphi(MN) = P^{-1}(MN)P = P^{-1}MPP^{-1}NP = \varphi(M)\varphi(N),$$

et enfin $\varphi(I_n) = P^{-1}I_nP = I_n$.
La bijectivité de φ se prouve (par exemple) en posant $\psi : M \mapsto PMP^{-1}$. On vérifie que ψ va de $\mathrm{C}(P^{-1}AP)$ vers $\mathrm{C}(A)$, que $\psi \circ \varphi$ est l'identité sur $\mathrm{C}(A)$ et $\varphi \circ \psi$ est l'identité sur $\mathrm{C}(P^{-1}AP)$. Ceci donne que φ est bijective, de réciproque ψ.
$\boxed{\varphi \text{ est un isomorphisme d'anneaux de } \mathrm{C}(A) \text{ dans } \mathrm{C}\left(P^{-1}AP\right).}$

5. Oups, pas de question 5. L'important est que la numérotation soit injective...

6. $[DM]_{i,j} = d_i[M]_{i,j}$ et $[MD]_{i,j} = d_j[M]_{i,j}$.

7. Supposons que M appartient à $\mathrm{C}(D)$ et considérons (i,j) avec $i \neq j$. Puisque $DM = MD$, on a en particulier $[DM]_{i,j} = [MD]_{i,j}$, soit $d_i[M]_{i,j} = d_j[M]_{i,j}$, et enfin $(d_i - d_j)[M]_{i,j} = 0$. Par hypothèse, $d_i \neq d_j$, ce qui amène $[M]_{i,j} = 0$. Ceci prouve que M est diagonale.
Réciproquement, si M est diagonale, il est clair qu'elle commute avec la matrice diagonale D.
Nous venons de démontrer que $\boxed{\mathrm{C}(D) \text{ est l'ensemble des matrices diagonales.}}$

8. On calcule $\det(P) = -5$. Puisque $\det(P) \neq 0$, la matrice P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

9. Un calcul donne $\Delta = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

10. Puisque Δ est diagonale à coefficients diagonaux distincts, $\mathrm{C}(\Delta)$ est l'ensemble des matrices diagonales.
En utilisant 4-(a), pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\begin{aligned} M \in \mathrm{C}(A) &\iff P^{-1}MP \in \mathrm{C}(P^{-1}AP) \\ &\iff P^{-1}MP \in \mathrm{C}(\Delta) \\ &\iff \exists (a,b) \in \mathbb{K}^2 \quad P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \\ &\iff \exists (a,b) \in \mathbb{K}^2 \quad P^{-1}MP = aE_{1,1} + bE_{2,2} \\ &\iff \exists (a,b) \in \mathbb{K}^2 \quad M = aPE_{1,1}P^{-1} + bPE_{2,2}P^{-1} \end{aligned}$$

Ceci démontre que $\mathrm{C}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des deux matrices $PE_{1,1}P^{-1}$ et $PE_{2,2}P^{-1}$ (qu'on saurait calculer).
Avec un peu plus d'algèbre linéaire, on se convaincra que ce *plan vectoriel* est aussi l'ensemble des combinaisons linéaires des matrices I_2 et A.

11. Soit $M = (m_{k,\ell})_{1 \le k,\ell \le n}$. Alors $M = \sum_{1 \le k,\ell \le n} m_{k,\ell}E_{k,\ell}$ et

$$ME_{i,j} = \sum_{1 \le k,\ell \le n} m_{k,\ell}E_{k,\ell}E_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} m_{k,i}E_{k,i}E_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} m_{k,i}E_{k,j} = m_{i,i}E_{i,j} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} m_{k,i}E_{k,j}$$

puis

$$E_{i,j}M = \sum_{1 \le k,\ell \le n} m_{k,\ell}E_{i,j}E_{k,\ell} = \sum_{\ell=1}^{n} m_{j,\ell}E_{i,j}E_{j,\ell} = \sum_{\ell=1}^{n} m_{j,\ell}E_{i,\ell} = m_{j,j}E_{i,j} + \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^{n} m_{j,\ell}E_{i,\ell}$$

Ainsi

$$ME_{i,j} = E_{i,j}M \iff (m_{i,i} - m_{j,j})E_{i,j} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} m_{k,i}E_{k,j} - \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^{n} m_{j,\ell}E_{i,\ell} = 0$$

Or une matrice est nulle si, et seulement si, tous ses coefficients sont nuls, autrement dit,

$$M = \sum_{1 \le k,\ell \le n} m_{k,\ell}E_{k,\ell} = 0 \iff \forall\, k,\ell \in [\![1,n]\!],\ m_{k,\ell} = 0$$

donc

$$ME_{i,j} = E_{i,j}M \iff \begin{cases} m_{i,i} = m_{j,j} \\ \forall\, k, \neq i,\ m_{k,i} = 0 \\ \forall\, \ell, \neq j,\ m_{j,\ell} = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Conclusion}}$:
les matrices de $\mathrm{C}(E_{i,j})$ sont exactement les matrices $M = (m_{k,\ell})_{1\leq k,\ell\leq n}$ vérifiant :

— la j^e ligne est nulle sauf $m_{j,j}$,

— la i^e colonne est nulle sauf $m_{i,i}$,

— $m_{j,j} = m_{i,i}$.

12. On raisonne par analyse-synthèse :

•*analyse :* Soit $M = (m_{k,\ell})_{1\leq k,\ell\leq n}$. On suppose que M commute avec toutes les matrices donc en particulier toutes les $E_{i,j}$.
On en déduit que pour tout i, j :

— la j^e ligne est nulle sauf $m_{j,j}$,

— la i^e colonne est nulle sauf $m_{i,i}$,

— $m_{j,j} = m_{i,i}$.

Autrement dit, tous les coefficients hors diagonale sont nuls et ceux de la diagonale sont tous égaux : $M = \lambda I_n$ où $\lambda \in \mathbb{K}$.

•*synthèse :* Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. La matrice λI_n commute avec toutes les matrices.

Finalement,

$$\boxed{\bigcap_{M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})} \mathrm{C}(M) = \{\lambda I_n,\ \lambda \in \mathbb{K}\}}$$

13. (a) Puisque I_n et $E_{i,j}$ commutent, on ne se prive pas d'une identité remarquable :

$$(I_n + E_{i,j})(I_n - E_{i,j}) = I_n^2 - E_{i,j}^2 = I_n - \delta_{j,i}E_{i,j}.$$

Le résultat du calcul vaut I_n si $i \neq j$ et $I_n - E_{i,i}$ si $i = j$.

(b) Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.
• Supposons $i \neq j$. D'après (a), on a $(I_n + E_{i,j})(I_n - E_{i,j}) = I_n$. De même, $(I_n - E_{i,j})(I_n + E_{i,j}) = I_n$. Ceci prouve que

$$I_n + E_{i,j} \text{ est inversible (et d'inverse } I_n - E_{i,j}).$$

• Supposons $i = j$. Alors, $I_n + E_{i,i}$ est diagonale à coefficients diagonaux non nuls (ils valent 1 ou 2). Elle est donc inversible.

14. La matrice I_n commute avec toutes les matrices. L'égalité $\mathrm{C}(E_{i,j}) = \mathrm{C}(I_n + E_{i,j})$ se démontre donc tranquillement par double inclusion.

15. On raisonne par analyse-synthèse :

•*analyse :* Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que M commute avec toutes les matrices inversibles. Elle commute donc en particulier avec toutes les matrices $I_n + E_{i,j}$ et donc avec toutes les matrices $E_{i,j}$ d'après la question précédente. En reprenant la question 12, on obtient que M est une matrice scalaire : il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $M = \lambda I_n$.

•*synthèse :* Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. La matrice λI_n commute avec toutes les matrices.

Finalement,

$$\boxed{\bigcap_{M\in GL_n(\mathbb{K})} \mathrm{C}(M) = \{\lambda I_n,\ \lambda \in \mathbb{K}\}}$$