Problème. Nombres et polynômes de Bernoulli.

On définit la suite $(b_n)_{n\geq 0}$ des nombres de Bernoulli par récurrence en posant :

$$b_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1 \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} b_k = 0.$$

On définit la famille (B_n) des polynômes du même nom en posant

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} X^k.$$

1. *Prise de contact.*
   (a) Calculer b_1, b_2, b_3 et b_4.
   (b) Calculer B_0, B_1, B_2, B_3 et B_4. Factoriser B_3 (il est scindé sur $\mathbb{R}$).
   (c) Justifier que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de rationnels.
   (d) Pour n donné, quel est le degré de B_n ? son coefficient dominant ?
2. *Une relation de récurrence.*
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que si n est supérieur à 2, $b_n = B_n(0) = B_n(1)$.
   (b) Montrer que $B_n' = nB_{n-1}$.
   (c) En déduire que $\forall k \in [\![0, n]\!] \quad B_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} B_{n-k}$.
3. *Identité de translation.*
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   On veut montrer que $B_n(X+1) - B_n(X) = nX^{n-1}$.
   On pose $D(X) = B_n(X+1) - B_n(X)$.
   (a) Pour $0 \leq p \leq n$ calculer $D^{(p)}(X)$ en fonction de B_{n-p}.
   (b) Montrer que $D^{(p)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq n-1 \\ n! & \text{si } p = n-1. \end{cases}$
   (c) Justifier que $\deg D \leq n$ et conclure que $D(X) = nX^{n-1}$.
4. *Formule de Faulhaber.*
   (a) Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que
   $$\sum_{k=0}^{n} k^p = \frac{1}{p+1} \left(B_{p+1}(n+1) - B_{p+1}(0) \right).$$
   (b) Retrouver la factorisation connue pour $\sum_{k=0}^{n} k$, $\sum_{k=0}^{n} k^2$ et $\sum_{k=0}^{n} k^3$.
5. *La relation de récurrence de 2 caractérise (B_n).*

   Considérons (P_n), une suite de polynômes satisfaisant

   i) $P_0 = 1_{\mathbb{K}[X]}$ *ii)* $\forall n \geq 2$ $P_n(0) = P_n(1)$ *iii)* $\forall n \geq 1$ $P_n' = nP_{n-1}$.

   Nous souhaitons prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = B_n$.
   (a) Supposons que $P_n = B_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   Montrer qu'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P_{n+1} = B_{n+1} + \lambda$.
   (b) Montrer qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ telle que $P_{n+2} = B_{n+2} + \lambda(n+2)X + \mu$.
   (c) En évaluant en 0 et en 1, démontrer que λ vaut 0. Conclure.
6. *Identités découlant de la question précédente.*
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $(-1)^n B_n(1-X) = B_n$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$2^{n-1} \left(B_n\left(\frac{X}{2}\right) + B_n\left(\frac{X+1}{2}\right) \right) = B_n$$
7. *Les indices impairs.*
   (a) Prouver que $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $b_{2k+1} = 0$.
   (b) Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, B_{2k+1} a pour racines 0, 1 et $\frac{1}{2}$.
   (c) Démontrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que 0, 1 et $\frac{1}{2}$ sont les seules racines de B_{2k+1} qui appartiennent à $[0, 1]$.

8. *Les indices pairs (partie facultative)*

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

(a) Démontrer que le polynôme B_{2k} possède une unique racine dans $]0, \frac{1}{2}[$ et une unique racine dans $]\frac{1}{2}, 1[$.

(b) Prouver que $B_{2k}(0)$, $B_{2k}(\frac{1}{2})$ et $B_{2k}(1)$ sont tous les trois non nuls et établir que $|B_{2k}(\frac{1}{2})| < |b_{2k}|$.

(c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Justifier que $\max\limits_{x\in[0,1]} |B_{2k}(x)| = |b_{2k}|$.