22 Limites et continuité d'une fonction

Notations.

Les lettres I et J désigneront dans ce chapitre des intervalles de $\mathbb{R}$ non vides et non réduits à un point.
La notation $\overline{\mathbb{R}}$ désigne ici l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$.

Les fonctions considérées dans ce chapitre seront définies sur une partie de $\mathbb{R}$ qui sera notée D.
Cette partie est un intervalle I ou un intervalle privé d'un point $I \setminus \{a\}$ avec $a \in I$.

Ces fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K}$ désigne au choix le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Pour certains résultats nécessitant l'utilisation d'un ordre, il faudra prendre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
Le choix $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ est obligatoire aussi lorsqu'on veut donner la courbe représentative d'une fonction.

Autoriser l'ensemble de définition D à valoir $I \setminus \{a\}$ nous permettra notamment de traiter la convergence d'un taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, bien défini sur $I \setminus \{a\}$ lorsque $f : I \to \mathbb{K}$ et $a \in I$.

Définition 1.

Soit I un intervalle, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un élément ou une borne de I et $f : D \to \mathbb{K}$ avec $D = I$ ou $D = I \setminus \{a\}$.
On dit qu'une propriété portant sur f est vraie **au voisinage de** a si

- [$a \in \mathbb{R}$, a *fini*] il existe $\eta > 0$ tel que la propriété est vraie sur $D \cap [a-\eta, a+\eta]$,
- [cas $a = +\infty$] il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que la propriété est vraie sur $D \cap [A, +\infty[$,
- [cas $a = -\infty$] il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que la propriété est vraie sur $D \cap]-\infty, A]$.

1 Limites et continuité d'une fonction en un point.

1.1 Limite d'une fonction en un point.

Définition 2 (Cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

Soit I un intervalle, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un élément ou une borne de I. Soit $D = I$ ou $D = I \setminus \{a\}$.
Soit $f : D \to \mathbb{K}$ et $L \in \overline{\mathbb{R}}$.
Les équivalences ci-dessous définissent l'assertion f **admet** L **pour limite en** a, ce qui sera notée

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} L.$$

I Cas a fini, $L = \ell$, finie :

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in D \cap [a-\eta, a+\eta] \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

II Cas $a = +\infty$, $L = \ell$, finie :

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \cap [A, +\infty[\quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

III Cas $a = -\infty$, $L = \ell$, finie :

$$f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} \ell \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \cap]-\infty, A] \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

IV Cas a fini, $L = +\infty$:

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall B \in \mathbb{R} \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in D \cap [a-\eta, a+\eta] \quad f(x) \geq B.$$

V Cas $a = +\infty$, $L = +\infty$:

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall B \in \mathbb{R} \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \cap [A, +\infty[\quad f(x) \geq B.$$

VI Cas $a = -\infty$, $L = +\infty$:

$$f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall B \in \mathbb{R} \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \cap]-\infty, A] \quad f(x) \geq B.$$

VII Cas a fini, $L = -\infty$:

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall B \in \mathbb{R} \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in D \cap [a-\eta, a+\eta] \quad f(x) \leq B.$$

VIII Cas $a = +\infty$, $L = -\infty$:

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall B \in \mathbb{R} \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \cap [A, +\infty[\quad f(x) \leq B.$$

IX Cas $a = -\infty$, $L = -\infty$:

$$f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall B \in \mathbb{R} \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \cap]-\infty, A] \quad f(x) \leq B.$$

Version commune pour I, II, et III : dire que la fonction f admet le nombre réel ℓ pour limite en a (qui est fini, ou pas selon les cas), c'est dire que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $f(x) \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ *au voisinage de* a.

Voici d'abord une réécriture du cas a fini, $L = \ell$ finie :

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in D \quad |x-a| \leq \eta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Dans les énoncés suivants, I est un intervalle, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un élément ou une borne de I, $D = I$ ou $D = I \setminus \{a\}$. La fonction f est définie sur D et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Définition 3 (Cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)**.**

Soit $\ell \in \mathbb{C}$. En remplaçant la valeur absolue par le module dans les cas I, II et III de 2, on définit

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell.$$

Proposition 4.

Soit $\ell \in \mathbb{C}$.

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \iff \begin{cases} \mathrm{Re}(f(x)) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \mathrm{Re}(\ell) \\ \mathrm{Im}(f(x)) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \mathrm{Im}(\ell) \end{cases}$$

Remarque. On ne définit pas "tendre vers l'infini" pour une fonction f à valeurs complexes. Si besoin, on peut décider que pour une telle fonction, "tendre vers l'infini", c'est finir par quitter tout disque du plan complexe centré en 0, soit $|f(x)| \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$.

Proposition 5 (Unicité de la limite)**.**

Si f admet une limite en a, celle-ci est unique.
Plus précisément, pour L, L' dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou dans $\mathbb{C}$, si f admet L et L' pour limite en a, alors $L = L'$.
On pourra donc parler, lorsqu'elle existe, de **la** limite de la fonction en a, que l'on notera $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Une nuance (la même que pour les suites) :

$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} L$ signifie « f admet une limite en a **et** celle-ci vaut L ».

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ signifie « la limite de f en a vaut L ».

Écrire la seconde phrase réclame de savoir que la limite de f en a existe.

Proposition 6 (Quand la limite est finie)**.**

- Si f admet une limite finie en a, alors elle est bornée au voisinage de a.
- Si de surcroît f est <u>définie</u> en a (qui est forcément fini, dans ce cas) alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Remarque. On rappelle qu'être "bornée" pour une fonction à valeurs réelles, c'est être majorée et minorée, ce qui est équivalent à être majorée en valeur absolue. Pour une fonction à valeurs complexes, être bornée c'est être majorée en module.

Lemme 7 (Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)**.**

Soit $(\ell, m) \in \mathbb{R}^2$.

$$\text{Si } f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \text{ et } \ell > m \text{ alors l'inégalité } f(x) > m \text{ est vraie au voisinage de } a.$$

Proposition 8 (Conservation des inégalités larges par passage à la limite)**.**

Soit I un intervalle, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un élément ou une borne de I. Soit $D = I$ ou $D = I \setminus \{a\}$.
Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ et $(\ell, \ell') \in \mathbb{R}^2$.

$$\text{Si } \begin{cases} \forall x \in D \quad f(x) \leq g(x) \\ f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell' \end{cases} \qquad \text{alors } \ell \leq \ell'.$$

1.2 Continuité d'une fonction en un point.

Considérons d'abord le cas d'une limite finie en un point où la fonction *est définie*.

Définition 9.

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ et $a \in I$. On dit que f est **continue en** a si

$$f(x) \underset{x \to a}{\to} f(a).$$

Remarque. La définition ci-dessus est un peu redondante. En effet, d'après P6 si f admet une limite en a *et* est définie en a, alors nécessairement, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Considérons maintenant le cas d'une limite finie en un point où la fonction *n'est <u>pas</u> définie*.

Proposition-Définition 10.

Soit I un intervalle et $a \in I$. Soit une fonction $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{K}$ qui admet une limite finie ℓ en a. On dit alors que f est **prolongeable par continuité** en a, et on définit ce prolongement en posant

$$\widetilde{f} : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \setminus \{a\} \\ \ell & \text{si } x = a. \end{cases}$$

La fonction $\widetilde{f}$ ainsi définie sur I est continue en a et appelée le **prolongement de** f **par continuité** en a. On pourra aussi noter simplement f ce prolongement.

Remarque. On ne parle pas de prolongement par continuité en a si f est déjà définie en a !
Dans ce cas où f est définie en a, alors f est continue en a... ou pas continue en a.

Exemple. La fonction $f : x \mapsto x^x$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
Si oui, définir ce prolongement.

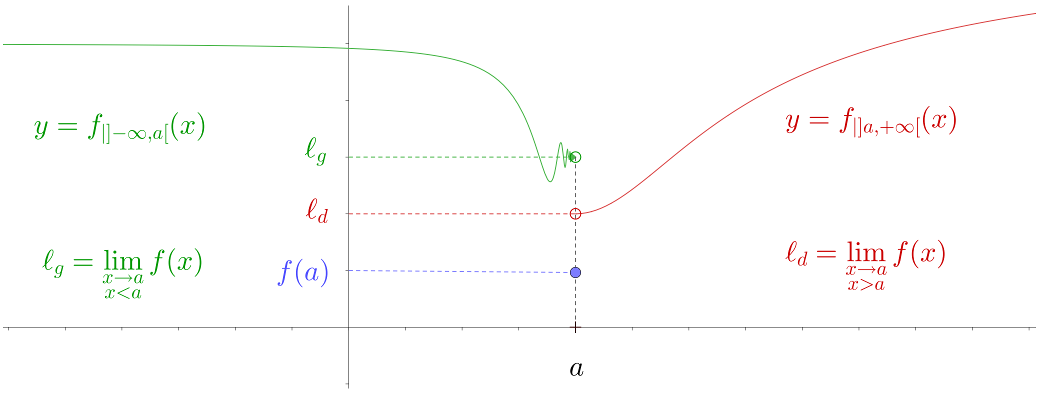
1.3 Limite et continuité à gauche et à droite.

Définition 11.

Soit I un intervalle, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un élément ou une borne de I. Soit $D = I$ ou $D = I \setminus \{a\}$.
Soit $f : D \to \mathbb{K}$ et $L \in \overline{\mathbb{R}}$ ou $L \in \mathbb{C}$. On dit que

- L est la **limite à gauche** de f en a si $a \neq \inf(I)$ et si $f_{|\,]-\infty,a[\cap I}$ admet L pour limite en a.
  On note alors
  $$f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x < a}}{\to} L \quad \text{et} \quad L = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x).$$
- L est la **limite à droite** de f en a si $a \neq \sup(I)$ et si $f_{|\,]a,+\infty[\cap I}$ admet L pour limite en a.
  On note alors
  $$f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x > a}}{\to} L \quad \text{et} \quad L = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x).$$

Autre notation pour les limites à gauche ou à droite : $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$.



Proposition 12.

Soit I un intervalle et a un élément de I qui n'est pas une borne de I. Soit $D = I$ ou $D = I \setminus \{a\}$.
Soit $f : D \to \mathbb{K}$.

1. <u>Cas $a \in D$.</u>

   La fonction f est continue en a si et seulement si $\begin{cases} f \text{ a une limite à gauche en } a \\ f \text{ a une limite à droite en } a \\ \lim\limits_{x \to a-} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a). \end{cases}$

2. <u>Cas $a \notin D$.</u>

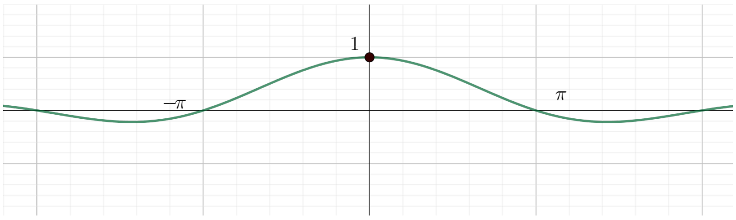
   La fonction f a une limite en a a si et seulement si $\begin{cases} f \text{ a une limite à gauche en } a \\ f \text{ a une limite à droite en } a \\ \lim\limits_{x \to a-} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} f(x). \end{cases}$

   La limite de f en a est alors la valeur commune des limites à gauche et à droite.

Remarque. Si une fonction a des limites à gauche et à droite en a qui sont différentes, alors cette fonction n'a pas de limite en a.

Exemple 13 (quand les limites à gauche et à droite coïncident)**.**

$$\frac{\sin x}{x} \underset{x\to 0}{\to} 1$$



La fonction **sinus cardinal**

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\sin x}{x} \end{cases}$$

a une limite à droite en 0 qui vaut 1 (preuve géométrique à la fin du chapitre de trigonométrie).
Par parité, elle admet aussi 1 pour limite à gauche en 0.
Elle a donc 1 pour limite en 0 : elle est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.

Définition 14.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On dit que

— f est **continue à gauche en** a si $f(x) \underset{x\to a-}{\to} f(a)$.

— f est **continue à droite en** a si $f(x) \underset{x\to a+}{\to} f(a)$.

Exemple 15.

La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est-elle continue à gauche en 2 ? continue à droite en 2 ?

Le premier résultat de la proposition 12 se récrit de la manière suivante.

Proposition 16.

Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.

f est continue en a si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en a.

1.4 Caractérisation séquentielle de la limite, de la continuité.

Théorème 17 (Caractérisation séquentielle de la limite)**.**

Soit I un intervalle, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un élément ou une borne de I. Soit $D = I$ ou $D = I \setminus \{a\}$.
Soit $f : D \to \mathbb{K}$ et $L \in \overline{\mathbb{R}}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $L \in \mathbb{C}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} L \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Big(\forall (u_n) \in D^{\mathbb{N}} \quad u_n \to a \implies f(u_n) \to L \Big)$$

Corollaire 18.

Soit une fonction f telle que considérée dans le théorème précédent.
S'il existe deux suites (u_n) et (v_n) d'éléments de D telles que :

$$\begin{cases} u_n \to a \\ v_n \to a \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{array}{c} (f(u_n)) \text{ et } (f(v_n)) \\ \text{ne convergent pas vers la même limite.} \end{array}$$

alors f n'admet pas de limite en a.

Exemple. Montrer que cos et sin n'ont pas de limite en $+\infty$.

Corollaire 19 (Caractérisation séquentielle de la continuité en un point)**.**

Soit une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ et $a \in I$. Il y a équivalence entre les deux assertions

1) f est continue en a.
2) Pour toute suite $u \in I^{\mathbb{N}}$ tendant vers a, $(f(u_n))$ tend vers $f(a)$.

Applications. On donne deux applications de 1) $\Longrightarrow$ 2). La première est le "théorème du point fixe" pour une suite définie par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$. La seconde application est détermine les morphismes continus de $\mathbb{R}$ dans lui-même. Pour les applications de 2) $\Longrightarrow$ 1), on attendra le prochain paragraphe.

Proposition 20.

Soit $f : I \to I$ (l'intervalle I est stable par f), et (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$
Si u converge vers une limite ℓ, que $\ell \in I$ et que f est continue en ℓ, alors $f(\ell) = \ell$

Exemple 21 ((*) Une équation fonctionnelle classique)**.**

Trouver toutes les fonctions f continues en tout point de $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

1.5 Limites et opérations.

Proposition 22 (opérations sur les limites finies)**.**

Soit I un intervalle, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un élément ou une borne de I. Soit $D = I$ ou $D = I \setminus \{a\}$.
Soit $f : D \to \mathbb{K}$ et $g : D \to \mathbb{K}$. Soient ℓ et ℓ' dans $\mathbb{K}$. Soient λ et μ dans $\mathbb{K}$.

1. La fonction $\lambda f + \mu g$ admet $\lambda \ell + \mu \ell'$ pour limite en a.
2. La fonction fg admet $\ell \ell'$ pour limite en a.
3. Si $\ell \neq 0$, alors $1/f$ est bien définie au voisinage de a et admet pour limite $1/\ell$ en a.

Pour les résultats sur les limites infinies, on fait confiance au lecteur, qui a déjà eu un cours sur la limite d'une suite.

Exemple 23 (Cas d'une limite infinie : débrouillez-vous)**.**

La limite $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{1}{x \ln(x)}$ existe-t-elle ? Que vaut-elle ?

Corollaire 24 (opérations sur les fonctions continues en un point)**.**

Soient $f : I \to \mathbb{K}$, $g : I \to \mathbb{K}$ et $a \in I$. Soient λ et μ dans $\mathbb{K}$.
Si f et g sont continues en a alors

- la fonction $\lambda f + \mu g$ est continue en a,
- la fonction fg est continue en a,
- si $f(a) \neq 0$, alors $1/f$ est bien définie au voisinage de a et y est continue.

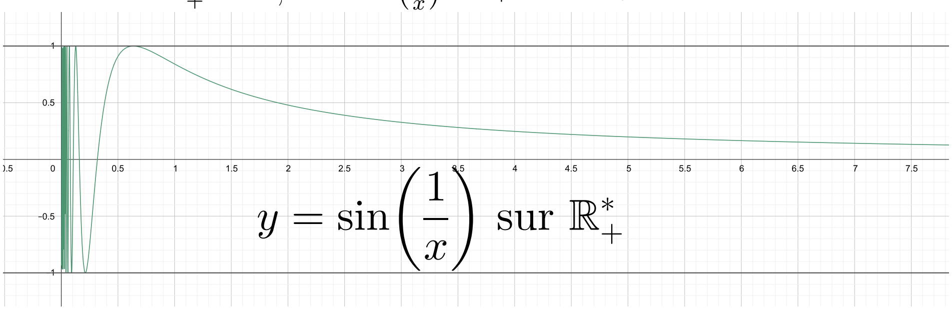
Proposition 25 (Composition des limites : deux fonctions)**.**

Soient I et J deux intervalles.
Soient $a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}$, a étant un élément ou une borne de I et b un élément ou une borne de J.
On note D l'ensemble I ou $I \setminus \{a\}$ et D' l'ensemble J ou $J \setminus \{b\}$. Soient $f : D \to D'$ et $g : D' \to \mathbb{K}$

$$\text{Si} \quad \begin{cases} f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b \\ g(y) \underset{y \to b}{\longrightarrow} c \end{cases} \qquad \text{alors} \quad g \circ f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} c.$$

Exemple 26.

Que dire de la fonction $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}\,;\, x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en $+\infty$? En 0 ?



Corollaire 27 (Composition de fonctions continues en un point)**.**

Soit $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{K}$, où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$.

Si f est continue en a et g continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a.

1.6 Théorèmes d'existence de limite.

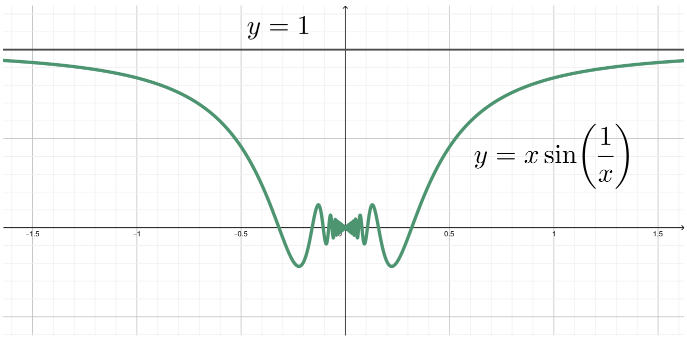
Théorème 28 (des gendarmes, pour les fonctions)**.**

Soit I un intervalle, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un élément ou une borne de I. Soit $D = I$ ou $D = I \setminus \{a\}$.
Soient f, g, h définies sur D et à valeurs réelles et $\ell \in \mathbb{R}$.

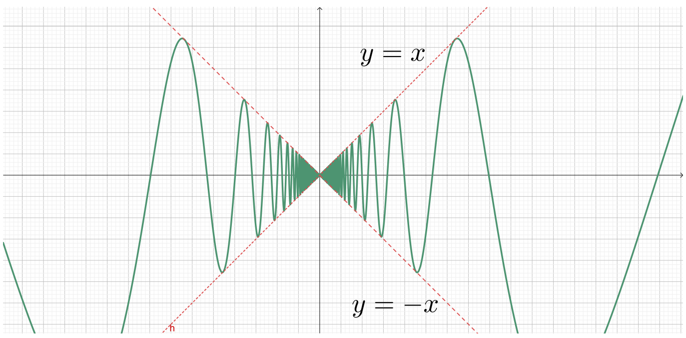
$$\text{Si} \quad \begin{cases} \forall x \in D \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x), \\ f(x) \underset{x \to a}{\to} \ell \ \text{ et } h(x) \underset{x \to a}{\to} \ell \end{cases} \quad \text{alors} \quad g(x) \underset{x \to a}{\to} \ell.$$

Exemple 29.

Étudier les limite en 0 et en $+\infty$ de $f : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \end{cases}$.



La fonction $x \mapsto x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, sur $\mathbb{R}^*$.



La fonction $x \mapsto x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, zoom en 0.

Proposition 30 (de minoration, de majoration)**.**

Mêmes notations qu'au-dessus.

- Si $\forall x \in I \ f(x) \leq g(x)$ et $f(x) \underset{x \to a}{\to} +\infty$, alors $g(x) \underset{x \to a}{\to} +\infty$.
- Si $\forall x \in I \ f(x) \leq g(x)$ et $g(x) \underset{x \to a}{\to} -\infty$, alors $f(x) \underset{x \to a}{\to} -\infty$.

Théorème 31 (de la limite monotone pour les fonctions)**.**

Soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert, où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction croissante sur I.

- En tout point c de $]a, b[$, f admet une limite finie à gauche et à droite. De plus,

$$\forall c \in]a, b[\quad \lim_{x \to c-} f(x) \leq f(c) \leq \lim_{x \to c+} f(x).$$

- En b, la fonction f admet une limite à gauche qui
  — est finie si f est majorée sur I,
  — vaut $+\infty$ sinon.

2 Fonctions continues sur un intervalle et à valeurs réelles.

2.1 Continuité sur un intervalle.

Définition 32.

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite **continue sur** I si elle est continue en tout point de I.
L'ensemble des fonctions continues sur I est noté $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, ou seulement $\mathcal{C}^0(I)$.

Remarque. Si f est définie sur une réunion d'intervalles ouverts deux à deux disjoints $D = \cup_{j \in J} I_j$ (c'est le cas par exemple si elle est définie sur un intervalle privé d'un point), on dira que f est continue sur D si sa restriction à chacun des intervalles I_i est continue sur I_i.

Exemple 33.

Les fonctions usuelles, à l'exception de la partie entière sont continues sur leur ensemble de définition :

— Les fonctions polynomiales $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ ($n \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$) sont continues sur $\mathbb{R}$;

— les fractions rationnelles $\frac{P}{Q}$ de deux fonctions polynomiales P et Q, sont continues sur la réunion disjointe d'intervalles $\mathbb{R} \setminus Z_Q$, où Z_Q est l'ensemble fini des racines réelles de Q.

— Les fonctions exp, ch, sh, cos, sin, arctan et $x \mapsto |x|$ sont continues sur $\mathbb{R}$

— ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$;

— Pour $a \in \mathbb{R}$, $x \mapsto x^a$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et prolongeable par continuité en 0 ssi $a \geq 0$;

— tan est continue sur la réunion disjointe des intervalles $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$;

— arccos et arcsin sont continues sur $[-1, 1]$.

Proposition 34.

$\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ est stable par combinaisons linéaires et par produit.
Soit $(f, g) \in (\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}))$. Si g ne s'annule pas sur I alors $f/g \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.

Proposition 35.

Soit $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$.

Si f est continue sur I et g continue sur J, alors $g \circ f$ est continue sur I.

Exemple 36 (jongler avec les théorèmes globaux et le point de vue local)**.**

Démontrer la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

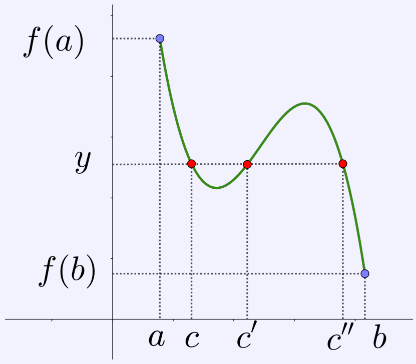
$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = \frac{\arctan(x)}{x}.$$

2.2 Théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème 37 (des valeurs intermédiaires)**.**

Soient deux réels $a \leq b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors, pour tout réel y entre $f(a)$ et $f(b)$,

$$\exists c \in [a,b] \quad y = f(c).$$



Corollaire 38.

Si une fonction continue sur un intervalle y change de signe, alors elle s'annule sur cet intervalle.
Si une fonction continue sur un intervalle ne s'y annule pas, alors $f > 0$ ou $f < 0$ sur I.

Exemple 39.

Soit $f : [a,b] \to [a,b]$, continue sur $[a,b]$.
Montrer l'existence d'un point fixe pour f (i.e. $\exists x_0 \in [a,b] : f(x_0) = x_0$).

Exemple 40.

Montrer qu'une fonction polynomiale de degré impair s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Corollaire 41.

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Corollaire 42 (TVI strictement monotone)**.**

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et strictement monotone sur $[a,b]$. Pour tout réel y entre $f(a)$ et $f(b)$,

$$\exists! c \in [a,b] \quad y = f(c).$$

2.3 Bijections continues.

Théorème 43 (Théorème de la bijection continue)**.**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur I.

- Elle réalise une bijection de I dans $f(I)$, qui est un intervalle.
- Sa réciproque f^{-1} est strictement monotone sur $f(I)$, de même monotonie que f, et elle est continue sur $f(I)$.

Exemple 44.

Soit f la restriction de ch à $I = [0, +\infty[$. La fonction f est continue sur I et elle y est strictement croissante. La fonction f réalise donc une bijection de I vers $f(I)$. Ici $f(I)$ est l'intervalle $[1, +\infty[$.

Proposition 45 (preuve non exigible)**.**

Une fonction continue sur un intervalle est injective si et seulement si elle est strictement monotone.

2.4 Théorème des bornes atteintes.

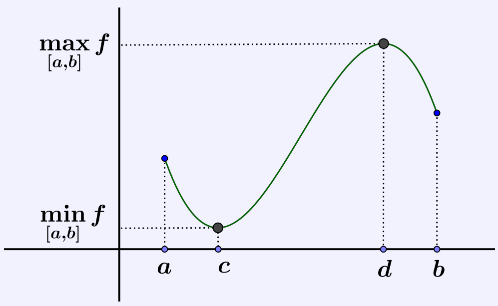
Théorème 46.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur le segment $[a, b]$.

Alors f est bornée et atteint ses bornes sur $[a, b]$:

$$\exists c \in [a, b] \quad : \quad f(c) = \min_{[a,b]} f$$

$$\exists d \in [a, b] \quad : \quad f(d) = \max_{[a,b]} f.$$



Corollaire 47 (Image d'un segment.)**.**

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

2.5 Uniforme continuité.

Définition 48.

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est **uniformément continue** sur I si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall (x, x') \in I^2 \quad |x - x'| \leq \eta \implies |f(x) - f(x')| \leq \varepsilon.$$

Exemple 49.

Toute fonction uniformément continue sur un intervalle y est continue.
La réciproque n'est pas vraie : la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'y est pas uniformément continue.

Théorème 50 (de Heine)**.**

Une fonction continue sur un segment y est uniformément continue.

On donne ci-dessous une propriété qui impliquera l'uniforme continuité.

Définition 51.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $K \geq 0$. On dit que f est **K-lipschitzienne** sur I si

$$\forall (x, y) \in I^2 \qquad |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

On dira que f est **lipschitzienne** sur I s'il existe $K \geq 0$ tel que f est K-lipschitzienne.

Exemples 52.

- Toute fonction affine est lipschitzienne sur son intervalle de définition.
- Sur $[0, 1]$, $f : x \mapsto x^2$ est lipschitzienne et $g : x \mapsto \sqrt{x}$ ne l'est pas.

Proposition 53.

Une fonction lipschitzienne sur un intervalle y est uniformément continue. La réciproque est fausse.

Reste à savoir établir qu'une fonction est lipschitzienne. Le théorème des accroissements finis, dans le cours sur la dérivabilité, sera un bon outil pour ça.

2.6 Le cas des fonctions à valeurs complexes.

Une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est dite continue sur I si elle est continue en tout point de I ; on note alors $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$. Les résultats sur la somme, le produit, le quotient, la composée s'étendent.

Si $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$, alors $\overline{f} : x \mapsto \overline{f(x)}$ est continue sur I.

- Par somme et différence, on obtient que $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des fonctions à valeurs réelles continues sur I. La réciproque est vraie, de sorte qu'une fonction est continue sur I ssi sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont.
- Par produit de f et de son conjugué, on obtient que $x \mapsto |f(x)|^2$ est continue sur I, ainsi que $x \mapsto |f(x)|$ par composition avec la racine carrée.

Pas question d'étendre le TVI ou le théorème de la bijection continue pour des fonctions à valeurs complexes, faute d'ordre sur $\mathbb{C}$.

En revanche, une fonction à valeurs complexes continue sur un segment, y est bornée, au sens de majorée en module : il suffit d'appliquer le TBA à $x \mapsto |f(x)|$.

Les définitions de fonction uniformément continues, ou de fonction lipschitzienne s'étendent en remplaçant la valeur absolue par le module et on retrouve le théorème de Heine et le fait que les fonctions lipschitziennes sur un intervalle sont uniformément continues.

Preuves

Preuve du théorème de la limite monotone pour les fonctions (31)
On détaille seulement la preuve du premier point, le second est facile.

Soit une fonction définie et croissante sur un intervalle $]a, b[$, où on considère un point c. On va démontrer l'existence d'une limite à gauche en c pour f. Nous avons un candidat, que l'on définit par

$$s_g = \sup \{f(x) \; x \in]a, c[\} .$$

Cette définition a un sens : la partie dont on prend la borne supérieure est non vide (elle contient $f\left(\frac{a+c}{2}\right)$ par exemple) et majorée par $f(c)$, f étant croissante.
Soit $\varepsilon > 0$. D'après la caractérisation de la borne supérieure,

$$\exists x_0 \in]a, c[\quad s_g - \varepsilon < f(x_0) \leq s_g.$$

Par croissance de f, pour tout $x \in [x_0, c[$, $f(x) \geq f(x_0) \geq s_g - \varepsilon$ et puisque $f(c)$ majore f sur $]a, c[$ on a aussi $f(x) \leq s_g$. Posons $\eta = c - x_0$ on a bien

$$\forall x \in [c - \eta, c[\quad s_g - \varepsilon \leq f(x) \leq s_g,$$

ce qui montre $f(x) \underset{x \to c-}{\to} s_g$.
De manière analogue, on peut démontrer que

$$f(x) \underset{x \to c-}{\to} i_d, \qquad \text{où} \qquad i_d = \inf \{f(x) \; x \in]c, b[\} .$$

$\square$

Deuxième preuve (courte !) du TVI. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Fixons y entre $f(a)$ et $f(b)$. Soit la partie

$$A = \{x \in [a, b] : f(x) \leq y\}.$$

Cette partie est non vide : puisque y est entre $f(a)$ et $f(b)$, on a $f(a) \leq y$ ou $f(b) \leq y$, donc $a \in A$ ou $b \in A$. La partie A est aussi majorée (par b). Posons donc $s = \sup(A)$.

• Pour $\varepsilon > 0$, $s + \varepsilon \notin A$. Ainsi, $f(s+\varepsilon) > y$. Or par continuité (à droite) de f en s, $f(s+\varepsilon) \underset{x \to s+}{\to} f(s)$. La stabilité des inégalités larges donne $f(s) \geq y$.

• On sait trouver une suite d'éléments de A tendant vers s : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists x_n \in A \quad s - \frac{1}{n} < x_n \leq s$. Notamment, pour tout n entier, $f(x_n) \leq y$. En passant à la limite, par continuité (à gauche) de f en s, $f(s) \leq y$.
• Les deux inégalités donnent que $f(s) = y$: on a trouvé un antécédent de y par f. $\square$

Preuve du théorème de la bijection continue (Th 43)
Pour fixer les idées, supposons f continue et strictement croissante sur I et notons $J = f(I)$.

• On a vu que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle : c'est vrai en particulier pour $J = f(I)$. C'est par définition même de $J = f(I)$ que $f : I \to J$ est surjective. L'injectivité provient de la stricte monotonie (voir cours sur les applications). Ceci prouve la bijectivité de $f : I \to J$.

• Soit y et y' deux éléments de $J = f(I)$ tels que $y < y'$. Supposons $f^{-1}(y) \geq f^{-1}(y')$. En appliquant f qui est croissante, on obtient $y \geq y'$, ce qui n'est pas. On a donc $f^{-1}(y) < f^{-1}(y')$, ce qui montre la stricte monotonie de f^{-1}.

• Prouvons la continuité de f^{-1} sur J (démo non exigible). Si $b \in J$, d'après le théorème de la limite monotone, f^{-1} admet en b une limite à gauche et à droite que l'on note G et D (on suppose ici que b est à l'*intérieur* de J en laissant au lecteur le soin d'adapter si b est un bord) : $G \leq f^{-1}(b) \leq D$. Les limites à gauche et à droite G et D sont des éléments de I. Détaillons pour G : si y_0 est élément de J strictement inférieur à b, alors par passage à la limite, $f^{-1}(y_0) \leq G \leq f^{-1}(b)$. Encadré par deux éléments de l'intervalle I, G est encore un élément de I. Par continuité de f en G puis en D, on a

$$f(G) = \lim_{y \to b-} f(f^{-1}(y)) = b \qquad \text{et} \qquad f(D) = \lim_{y \to b-} f(f^{-1}(y)) = b.$$

Ainsi, $f(G) = f(D)$ et par injectivité de f, $G = D$. On obtient $G = f^{-1}(b) = D$, ce qui démontre la continuité de f^{-1} en b. $\square$

Preuve de la proposition 45

L'implication réciproque est claire : la stricte monotonie implique l'injectivité (pas besoin d'être continue, ni définie sur un intervalle).

On suppose que f est continue sur I et injective. Si f est strictement monotone alors,

$$\forall (a, b, c) \in I^3, \quad a < b < c \Longrightarrow \begin{cases} f(a) < f(b) < f(c) \\ \text{ou} \\ f(a) > f(b) > f(c) \end{cases}$$

Autrement dit,

$$\forall (a,b,c) \in I^3, \quad a < b < c \Longrightarrow f(b) \in [\min(f(a), f(c)), \max(f(a), f(c))]$$

Raisonnons par contraposée et supposons qu'il existe $(a,b,c) \in I^3$ tel que

$$a < b < c \text{ et } \; f(b) \notin [\min(f(a), f(c)), \max(f(a), f(c))]$$

1^{er} cas : on suppose $f(a) < f(c)$.

$\boxed{\text{a}}$ On suppose $f(b) < f(a) < f(c)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $(\alpha, \beta) \in I^2$ tel que

$$a < \alpha < b < \beta < c \text{ et } \; f(\alpha) = f(\beta) = \frac{f(a) - f(b)}{2}$$

ce qui contredit l'injectivité.

$\boxed{\text{b}}$ On suppose $f(a) < f(c) < f(b)$. Même démonstration.

2^d cas : on suppose $f(a) > f(c)$. Même démonstration.

□

Exercices

Limites.

22.1 **[♦◇◇]** Calculer (en montrant qu'elles existent) : $\lim\limits_{x \to 0+} x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$

22.2 **[♦◇◇]** Soient $f : [0,1] \to [0,1]$ et $g : [0,1] \to [0,1]$. On suppose que fg admet 1 pour limite en 0. Montrer que f et g admettent 1 pour limite en 0.

22.3 **[♦◇◇]** Dire si les fonctions

$$f : x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{x}\right) \qquad \text{et} \qquad g : x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right),$$

définies sur $\mathbb{R}^*$, sont prolongeables par continuité en 0.

22.4 **[♦♦◇]** Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{x^x}{\lfloor x \rfloor^{\lfloor x \rfloor}}$ n'a pas de limite en $+\infty$.

Continuité, en un point, sur un intervalle.

22.5 **[♦◇◇]** Montrer que la fonction $f : x \mapsto \ln(x)\ln(1-x)$ est prolongeable par continuité sur les bords de son intervalle de définition.
Indication : on pourra se convaincre que $x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{x}$ possède une limite finie en 0.

22.6 **[♦◇◇]** Soit f une fonction continue sur I et à valeurs réelles.
Montrer qu'alors $x \mapsto |f(x)|$ est continue sur I. Prouver que la réciproque est fausse.

$\boxed{\textbf{22.7}}$ **[♦♦◇]** Soient f et g deux fonctions continues un intervalle I.
Montrer que $\max(f,g) : x \mapsto \max(f(x), g(x))$ et $\min(f,g) : x \mapsto \max(f(x), g(x))$ sont continues sur I.

$\boxed{\textbf{22.8}}$ **[♦♦◇]** Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, croissante, et telle que $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est décroissante.
Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\boxed{\textbf{22.9}}$ **[♦◇◇]** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, à la fois 1-périodique et $\sqrt{2}$-périodique, et continue en 0.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(\sqrt{2}-1)^n$ est une période de f.
2. Montrer que f est constante.

$\boxed{\textbf{22.10}}$ **[♦♦◇]** Montrer que la fonction $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.

$\boxed{\textbf{22.11}}$ **[♦♦◇]** [CC-INP MPI 43]
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \operatorname{Arctan}(u_n)$.

1. (a) Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0, le sens de variation de (u_n).
   (b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions h, continues sur $\mathbb{R}$, telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\operatorname{Arctan} x)$.

$\boxed{\textbf{22.12}}$ **[♦♦♦]** Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 0 telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(2x) - f(x) = x.$$

Propriétés des fonctions continues sur un intervalle.

$\boxed{\textbf{22.13}}$ **[♦◇◇]** Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} < 1$. Montrer que f possède un point fixe.

$\boxed{\textbf{22.14}}$ **[♦♦◇]** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction décroissante et continue.
Prouver que f possède un unique point fixe, c'est-à-dire qu'il existe une unique solution à l'équation $f(x) = x$.

$\boxed{\textbf{22.15}}$ **[♦♦◇]** Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et admettant des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$.
Montrer que f est bornée.

$\boxed{\textbf{22.16}}$ **[♦◇◇]** Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si f est continue et que g est bornée, alors $g \circ f$ est $f \circ g$ sont bornées.

$\boxed{\textbf{22.17}}$ **[♦♦◇]** Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad |f(x)| < |x|$.

1. Prouver que 0 est un point fixe de f et que c'est le seul.
2. Prouver que pour tout segment $[a,b]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, il existe $k \in [0,1[$ tel que $\forall x \in [a,b]$ $|f(x)| \leq k|x|$.

$\boxed{\textbf{22.18}}$ **[♦♦♦]** Soit $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$, continue, telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'équation

$$f\left(x + \frac{1}{p}\right) = f(x)$$

admet au moins une solution.
