41 Espérance et variance

1 Espérance. **1**
1.1 Définition et exemples. 1
1.2 Propriétés de l'espérance. 3
1.3 Espérance d'un produit et indépendance. 4

2 Variance. **5**
2.1 Définition et exemples. 5
2.2 Variance d'une somme, et covariance. 6
2.3 Inégalités probabilistes. 8

Exercices **9**

1 Espérance.

1.1 Définition et exemples.

Définition 1.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{K}$ définie sur Ω. On appelle **espérance** de X et on note $E(X)$ le nombre

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x)x.$$

Interprétation.

On réalise un certain nombre de fois une expérience conduisant à un résultat numérique : un nombre dans l'ensemble $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$ notons f_i la fréquence à laquelle on a obtenu x_i. La valeur moyenne obtenue lors de cette série d'expériences vaut

$$\sum_{i \in [\![1,n]\!]} f_i x_i.$$

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\{x_1, \ldots, x_n\}$ et qu'on note $p_i := P(X = x_i)$, l'espérance de X s'écrit

$$\sum_{i \in [\![1,n]\!]} p_i x_i.$$

Dans cette moyenne pondérée, les probabilités ont remplacé les fréquences. Or, on se souvient que le nombre $P(X = x_i)$ est interprété comme la *fréquence a priori* de l'événement $(X = x_i)$.
Ainsi, le nombre $E(X)$ peut être interprété comme la **valeur moyenne** prise par X a priori.
Si X est comme dans l'exemple un gain à un jeu, $E(X)$ représente le gain moyen a priori, ce que l'on peut *espérer* gagner en jouant au jeu. On dira aussi que c'est un indicateur de position : $E(X)$ est la position moyenne de la variable X.

Exemple 2 (Le retour du chouette jeu).

On jette un dé équilibré. Si le résultat est $1, 2$ ou 3, on ne gagne rien. Si le résultat est 4 ou 5, on gagne dix euros. Si le résultat est 6, on empoche 100 euros. On note X le gain à ce jeu. Considérons que X est une variable aléatoire sur un espace probabilisé (Ω, P). Calculer $E(X)$.

Proposition 3 (Une évidence qui mérite d'être dite).

Si deux variables aléatoires ont la même loi, alors elles ont la même espérance.

Proposition 4 (Espérance des lois usuelles).

Soit X, Y et Z des variables aléatoires définies sur un espace probabilisé (Ω, P), $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0, 1]$.

1. Variable constante. Si X est la variable aléatoire constante égale à $a \in \mathbb{K}$, alors $\boxed{E(X) = a}$.
2. Loi de Bernoulli. Si $Y \sim \mathcal{B}(p)$, $\boxed{E(Y) = p}$. En particulier, $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$ $\boxed{E(\mathbf{1}_A) = P(A)}$.
3. Loi binomiale. Si $Z \sim \mathcal{B}(n, p)$, $\boxed{E(Z) = np}$.

Exemple 5 (Le pari de Pascal).

Dans son texte célèbre dit du "pari", (*Pensées, fragment 397*) Pascal met en scène un dialogue avec un athée, qu'il veut convaincre de croire en Dieu. Celui qui croit *gage* son énergie, son temps, parfois sa vie entière, et au-dessus de lui *se joue un jeu [...] où il arrivera croix ou pile*, c'est-à-dire qu'à la fin, *Dieu est, ou il n'est pas.* S'il est, celui qui a cru sortira gagnant mais... il sera perdant si Dieu n'existe pas ! Et c'est bien ce qui inquiète l'interlocuteur fictif de Pascal, qui a peur de *gager trop*, de ne pas récupérer sa mise... Savoir si l'on gagnera ou pas à ce jeu revient à savoir si Dieu existe ou pas, et Pascal nous dit que *la raison n'y peut rien déterminer* : pour celui qui croit, il y a *pareil hasard de gain et de perte.*

L'argument de Pascal en faveur de la croyance est le suivant : si on gagne, on gagne l'infini, si on perd, on perd peut-être beaucoup mais on perd une quantité finie (finitude de l'homme...) En moyenne, on gagne l'infini : son raisonnement est un calcul d'espérance ! N'oublions pas que Pascal était mathématicien en plus d'être philosophe, et qu'il s'intéressait notamment au hasard.
Posons le calcul de Pascal, en notant X ce que gagne le croyant. Le gain X vaut $+\infty$ si Dieu existe, la perte est finie s'il n'existe pas : disons qu'alors $X = -a$, où a est une quantité finie. Voici ce que le croyant gagne en moyenne :

$$E(X) = \frac{1}{2}(+\infty) + \frac{1}{2}(-a) = +\infty.$$

Notez que le choix de $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ comme distribution de probabilités n'a aucune importance, tant que l'on évite une probabilité nulle. Dans *Ma nuit chez Maud*, d'Éric Rohmer, Antoine Vitez (Vidal dans le film) en choisit une autre lorsqu'il fait le pari que l'Histoire a un sens. Jean-Louis Trintignant (Jean-Louis dans le film) lui parle alors d'espérance mathématique. L'extrait est disponible sur Youtube, mais on n'hésitera pas à regarder tout le film !

1.2 Propriétés de l'espérance.

Dans tout ce paragraphe, (Ω, P) sera un espace probabilisé fini.

Lemme 6.

Soit X une variable aléatoire définie sur (Ω, P) et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Alors,

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\})\, X(\omega).$$

Les deux propositions suivantes montrent qu'espérance et intégrale partagent de nombreuses propriétés.

Proposition 7 (Espérance et inégalités)**.**

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs *réelles* sur (Ω, P). Alors,

1. Si $\forall \omega \in \Omega\ X(\omega) \geq 0$, alors $E(X) \geq 0$ (positivité).
2. Si $\forall \omega \in \Omega\ X(\omega) \geq 0$ et $E(X) = 0$, alors $P(X = 0) = 1$ (cas d'égalité).
3. Si $\forall \omega \in \Omega\ X(\omega) \leq Y(\omega)$, alors $E(X) \leq E(Y)$ (croissance).
4. $|E(X)| \leq E(|X|)$ (inégalité triangulaire)
5. $|E(XY)| \leq \sqrt{E(X^2)}\sqrt{E(Y^2)}$.

Remarque. On remarque qu'une variable aléatoire positive, d'espérance nulle n'est pas forcément nulle... mais qu'elle l'est avec probabilité 1 ! On dit qu'elle est *presque sûrement* nulle.

Proposition 8 (L'espérance est linéaire)**.**

Soient X et Y deux variables aléatoires sur (Ω, P) et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Alors,

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y).$$

Notamment, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}\ \ E(\lambda X + \mu) = \lambda E(X) + \mu$.

Dans le cas de n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ et n scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$,

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E(X_i).$$

Exemple 9.

Redémontrer en utilisant la linéarité de l'espérance que si $Z \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors $E(Z) = np$.

Proposition-Définition 10.

Soit X une variable aléatoire définie sur (Ω, P) et à valeurs dans $\mathbb{K}$. La variable

$$X - E(X)$$

est d'espérance nulle. On dit que c'est une variable aléatoire **centrée**.

Le résultat ci-dessous est simple et important : il s'agit de calculer l'espérance de l'image $f(X)$ d'une variable aléatoire X en utilisant la loi de X plutôt que celle de $f(X)$.

Théorème 11 (Formule du transfert)**.**

Soit une v.a. $X : \Omega \to E$ où E est un ensemble sur lequel est défini une application $f : E \to \mathbb{K}$. Alors,

$$E\left(f(X)\right) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) f(x).$$

Exemple 12.

Calcul de $E\left(X^2\right)$ où X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

1.3 Espérance d'un produit et indépendance.

Théorème 13.

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé fini (Ω, P), et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si X et Y sont <u>indépendantes</u>, alors

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Plus généralement, si $(X_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une famille de variables aléatoires <u>indépendantes</u>,

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i).$$

Exemple 14.

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires sur (Ω, P), i.i.d. de loi de Rademacher, donnée par

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \quad X_k(\Omega) = \{-1, 1\} \quad \text{et} \quad P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

Notons $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Pour $t \in \mathbb{R}$, démontrer que $E\left(\cos(tS_n)\right) = \cos^n(t)$.

2 Variance.

2.1 Définition et exemples.

Définition 15.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire *réelle* sur Ω.
On appelle **variance** de X et on note $V(X)$ le réel

$$V(X) = E\left[(X - E(X))^2\right].$$

On appelle **écart type**, parfois noté $\sigma(X)$ le réel $\sqrt{V(X)}$.

Interprétation.

L'expression de $V(X)$ donne **l'écart quadratique moyen** de la variable X, par rapport à sa moyenne.

$\boxed{\text{Plus la variance est grande, plus les valeurs prises par } X \text{ sont « loin » (en moyenne) de } E(X).}$

La variance et l'écart-type sont des indicateurs de *dispersion*. Il aurait pu sembler plus naturel de considérer la quantité $E(|X - E(X)|)$, mais on verra que le *carré* qui se trouve dans la définition est bien mieux adapté à la linéarité de l'espérance (voir plus loin le travail sur les sommes de v.a.).

Proposition 16 (La variance est quadratique)**.**

Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé fini. On a, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

Proposition-Définition 17.

Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé fini telle que $\sigma(X) > 0$.
La variable aléatoire $\frac{1}{\sigma(X)}X$ est de variance 1 : elle est dite **réduite**.

La variable aléatoire $\dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

Proposition 18 (Lien avec le moment d'ordre 2)**.**

Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé fini. On a

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Le nombre $E(X^2)$ est appelé **moment** d'ordre 2 de la variable X.

Proposition 19 (Une évidence qui mérite d'être dite).

Si deux variables aléatoires ont la même loi, alors elles ont la même variance.

Proposition 20 (Variance des lois usuelles).

Soit X, Y et Z des variables aléatoires définies sur un espace probabilisé (Ω, P), $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0,1]$.

1. Variable constante. Si X est la variable aléatoire constante égale à $a \in \mathbb{K}$, alors $\boxed{V(X) = 0}$.
2. Loi de Bernoulli. Si $Y \sim \mathcal{B}(p)$, $\boxed{V(Y) = p(1-p)}$.
3. Loi binomiale. Si $Z \sim \mathcal{B}(n,p)$, $\boxed{V(Z) = np(1-p)}$.

Remarque. Que dire d'une réciproque pour le premier point ? Si la variance de X est nulle, alors $(X - E(X))$ est nulle... presque sûrement ! (voir proposition 7). On a donc $P(X = E(X)) = 1$.

2.2 Variance d'une somme, et covariance.

Ci-dessous, les variables aléatoires considérées sont réelles, et définies sur un espace probabilisé fini (Ω, P).

Pour comprendre d'où vient la définition suivante, calculons d'abord $V(X+Y)$, pour X et Y deux variables aléatoires définie sur un même espace probabilisé.

Définition 21.

On appelle **covariance** de deux variables aléatoires X et Y, et on note $\text{cov}(X,Y)$ le nombre

$$\text{cov}(X,Y) = E\left[(X - E(X))\,(Y - E(Y))\right].$$

Lorsque ce nombre est nul, on dit qu'elles sont **décorrélées**.

Interprétation (Interpréter le signe d'une covariance).

Lorsque X et Y ont une covariance positive, alors le produit $(X - E(X))(Y - E(Y))$ est positif... en moyenne ! Cela signifie que lorsque X est supérieure à sa moyenne, Y a tendance à l'être aussi.

Lorsque X et Y ont une covariance négative, alors le produit $(X - E(X))(Y - E(Y))$ est négatif... en moyenne ! Cela signifie que lorsque X est supérieure à sa moyenne, Y a tendance à être inférieure à la sienne, et réciproquement.

Proposition 22.

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles, leur covariance s'exprime comme

$$\text{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Proposition 23.

Si X et Y sont indépendantes, alors elles sont décorrélées.

Exemple 24 (Deux variables décorrélées mais pas indépendantes)**.**

Soient X et Y deux v.a. définies sur un espace probabilisé, indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On note $U = X + Y$ et $V = X - Y$.
Vérifier que U et V sont décorrélées puis justifier qu'elles ne sont pas indépendantes.

Proposition 25 (La covariance est presque un produit scalaire)**.**

Soient $X, \widetilde{X}, Y$ trois variables aléatoires sur (Ω, P).

1. $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathrm{cov}(Y,X)$.
2. Pour $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{cov}(\lambda X + \mu\widetilde{X}, Y) = \lambda \mathrm{cov}(X,Y) + \mu \mathrm{cov}(\widetilde{X}, Y)$.
3. $\mathrm{cov}(X,X) = V(X) \geq 0$.
4. $|\mathrm{cov}(X,Y)| \leq \sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}$.

Remarque. La covariance est donc un produit scalaire imparfait pour lequel la variance serait le carré de la norme... Que manque-t-il à cov pour être un produit scalaire ? La propriété de définition : si $\mathrm{cov}(X,X) = 0$, alors X n'est pas forcément nulle : elle est constante et égale à son espérance... *presque sûrement.*

Proposition 26 (Variance d'une somme de deux variables aléatoires)**.**

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur (Ω, P). Alors,

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\,\mathrm{cov}(X,Y).$$

Dans le cas où X et Y sont décorrélées (et en particulier si elles sont indépendantes) on a

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y).$$

Proposition 27 (cas de n variables)**.**

Soit $(X_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille de n variables aléatoires réelles sur (Ω, P). On a

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{cov}(X_i, X_j).$$

Si les variables ci-dessus sont deux à deux décorrélées, alors

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i).$$

Cette égalité est notamment vraie lorsque $X_1, \ldots, X_n$ sont deux à deux indépendantes.

2.3 Inégalités probabilistes.

Les variables aléatoires considérées dans ce qui suit sont supposées définies sur un espace probabilisé (Ω, P).

Proposition 28 (Inégalité de Markov)**.**

Soit une variable aléatoire *réelle positive* $X : \Omega \to \mathbb{R}_+$, et $a \in \mathbb{R}_+^*$. Alors,

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

L'inégalité suivante permet de majorer la probabilité qu'une variable aléatoire soit « loin » de sa moyenne.

Proposition 29 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)**.**

Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω et $a \in \mathbb{R}_+^*$. Alors,

$$P\left(|X - E(X)| \geq a\right) \leq \frac{V(X)}{a^2}.$$

Exemple 30 (Des inégalités pas si bonnes dans la pratique)**.**

Soit X une v.a. sur (Ω, P) de loi binomiale $\mathcal{B}(10^3, \frac{1}{2})$. Majorer la probabilité de l'événement $(X \geq 600)$ d'abord avec l'inégalité de Markov, ensuite avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. L'utilisation d'une machine nous donne que cette probabilité est de l'ordre de 10^{-10}. Commenter.

Exemple 31 (Inégalité de concentration : distance entre moyennes empiriques et théoriques)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sur (Ω, P).
On les suppose « i.i.d. »(*indépendantes et identiquement distribuées*, c'est-à-dire indépendantes et de même loi). Notons $m = E(X_1)$ et $\sigma^2 = V(X_1)$. On a

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

La majoration par un $O\left(\frac{1}{n}\right)$ montre que la probabilité que la moyenne empirique $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ des n variables aléatoires soit éloignée de sa moyenne théorique m est petite lorsque n est grand.

On observe donc un phénomène de **concentration** : plus n devient grand, plus la variable aléatoire $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ prend des valeurs concentrées autour de m. Cette convergence est une loi de la nature observée dans le monde physique. L'observer mathématiquement nous conduit à penser que le modèle probabiliste qui a été développé jusqu'ici n'est pas trop mauvais...

On retrouvera cette description de la concentration en spé avec la *Loi faible des grands nombres.*

Exercices

$\boxed{41.1}$ **[♦♦◇]**
Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé (Ω, P) et à valeurs dans $[\![1, n]\!]$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. Montrer que

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} P(X \geq k).$$

Défi : écrire une preuve utilisant la linéarité de l'espérance.

$\boxed{41.2}$ **[♦♦◇]**
Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et telle que

$$E(X) = a \quad \text{et} \quad E(X^2) = E(X^4) = 1.$$

1. Démontrer que nécessairement, a est compris entre -1 et 1.
2. Donner la loi de X.

$\boxed{41.3}$ **[♦♦◇]** Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, de même loi, et strictement positives. Démontrer que $E\left(X/Y\right) \geq 1$.

$\boxed{41.4}$ **[♦♦♦]** Soit n un entier naturel non nul.
Sur un espace probabilisé (Ω, P), on considère n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes, toutes de loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$. Calculer

$$E\left[\text{Card}\{X_1, \ldots, X_n\}\right].$$

En donner un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$.
Écrire le cardinal comme une somme.

$\boxed{41.5}$ **[♦♦◇]** Mélange de sérums.
Soit une certaine maladie M. On considère une population dans laquelle la probabilité qu'une personne prise au hasard soit malade de M vaut 0.1. On dispose d'un test (infaillible) pour dépister M. On choisit 100 personnes au hasard, que l'on répartit, toujours au hasard en 10 groupes de 10 personnes. Au lieu de tester les sérums des 100 personnes, on mélange les sérums par groupe et on teste chaque mélange. Si le test d'un mélange est négatif, alors aucune des 10 personnes du groupe n'est malade. Si le test est positif, c'est qu'il y a au moins un malade dans le groupe et on dépiste alors chaque membre du groupe individuellement.

1. Soit Y le nombre de personnes malades dans un groupe donné. Quelle est la loi de Y ? Calculer les probabilités que
   (a) personne ne soit malade dans le groupe.
   (b) il y ait exactement une personne malade dans le groupe
   (c) au moins une personne soit malade dans le groupe
2. Soit N le nombre total de test que l'on doit effectuer selon cette méthode. Soit X le nombre de groupe dont le mélange est testé positivement.
   (a) Exprimer N en fonction de X.
   (b) Quelle est la loi de X ?
   (c) Calculer $P(N = 110)$ et $P(N = 100)$.
   (d) Calculer $E(N)$, $V(N)$ et σ_N. Interpréter.
3. Au lieu de faire des groupes de 10 personnes, on fait des groupes de n personnes.
   Quelle est la valeur de n qui minimise en moyenne le nombre de tests effectué ?

$\boxed{41.6}$ **[♦♦♢]** ♡♡♡
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sur un espace probabilisé (Ω, P), on considère une famille $(X_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.

1. On pose $Y_k = X_k + X_{k+1}$.
   (a) Déterminer la loi de Y_k.
   (b) Calculer l'espérance et la variance de Y_k.
   (c) Calculer la covariance de Y_i et Y_j pour $i \neq j$.
2. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$. Calculer l'espérance et la variance de S_n.
3. Soit $\varepsilon > 0$. Majorer $P\left(|\frac{1}{n}S_n - 2p| \geq \varepsilon\right)$ par une expression tendant vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

$\boxed{41.7}$ **[♦♦♦]** Sommation d'un nombre aléatoire de variables aléatoires.
Soient $(X_1, \ldots, X_n, N)$ une famille de variables aléatoires réelles sur un espace probabilisé fini (Ω, P).
On suppose que ces variables sont indépendantes, que $X_1, \ldots, X_n$ ont même loi, et que N prend des valeurs entières entre 1 et n. Soit $S_N = X_1 + \ldots X_N$ la variable aléatoire définie par

$$S_N : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega) \end{array} \right. .$$

Calculer l'espérance de S_N en fonction de celles de X_1 et de N.

$\boxed{41.8}$ **[♦♦♦]** Massacre !
On considère n couples mariés, donc $2n$ personnes, qui assistent à un banquet. Un fou furieux débarque et abat m personnes au hasard. En moyenne, combien de couples survivent (à deux) à l'hécatombe ?

$\boxed{41.9}$ **[♦♦♦]** On se donne $n \geq 2$ variables aléatoires indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ de loi $\mathcal{B}(p)$ avec $p \in]0,1[$.
On pose $U = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ et $M = UU^T$.

1. Donner la loi de $\mathrm{rg}(M)$ et de $\mathrm{tr}(M)$.
2. Avec quelle probabilité la matrice M est-elle une matrice de projection ?
3. On suppose $n = 2$. Soit $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $S = V^T M V$. Déterminer $E(S)$ et $V(S)$.

$\boxed{41.10}$ **[♦♦♦]** Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{Z}$, et définies sur un espace probabilisé dont la probabilité est noté P.
C'est une petite entorse au programme de sup, cette suite (infinie) de variables aléatoires, mais bon...
On note $S_0 = 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ et

$$N_n = \mathrm{Card}\left\{S_k, k \in [\![0, n]\!]\right\}.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$P\left(S_{n+1} \notin \{S_0, \ldots, S_n\}\right) = P\left(S_0 \neq 0, \ldots, S_n \neq 0\right).$$

2. Démontrer la convergence de la suite $\left(\frac{1}{n}E(N_n)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
