Correction par pair

$\boxed{\text{A}}$ Question 1-(a) : avoir raisonné par contraposée.

$\boxed{\text{B}}$ Avoir traduit la "non primalité" de n et factorisé $2^n - 1$.

$\boxed{\text{C}}$ Avoir écrit l'ensemble des diviseurs de n en s'appuyant sur la décomposition primaire, puis avoir sommé !

$\boxed{\text{D}}$ Avoir écrit l'ensemble des diviseurs de n en s'appuyant sur la décomposition primaire, puis avoir sommé !

$\boxed{\text{E}}$ A utilisé 2-(a) pour calculer $S(p^\alpha)$.

$\boxed{\text{F}}$ A fait une référence explicite à 2-(a) (en citant le numéro de la question).

$\boxed{\text{G}}$ A comparé clairement $S(p^\alpha)$ et $2p^\alpha$.

Problème 2. Nombres parfaits.

1. Pour $n \geq 2$, on pose $a_n = 2^n - 1$.
   (a) Par contraposée. Supposons que n n'est pas premier et écrivons $n = ab$, avec a et b deux diviseurs de n non triviaux ($1 < a < n$ et $1 < b < n$).
   $$a_n = 2^n - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^a - 1) \cdot \sum_{k=0}^{b-1} 2^{ak}.$$
   Puisque $1 < a < n$, on a $1 < 2^a - 1 < 2^n - 1$ et $2^a - 1$ est un diviseur non trivial de a_n, qui n'est pas premier.
   (b) Un matheux connaît les puissances de 2, un informaticien les vénère. Choisissez votre camp (ou pas) mais écrivez que que $2^{11} = 2048$ et que $a_{11} = 2047 = 23 * 89$ (en posant la division euclidienne).
   On remarque que 11 est premier, sans que a_{11} le soit.

2. <u>Somme des diviseurs</u>.
   (a) $S(1) = 1$.
   (b) Nous savons alors que les diviseurs positifs de n sont exactement les entiers de l'ensemble
   $$\left\{ p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_r^{\beta_r} \;\middle|\; \text{avec } \forall i \in [\![1, r]\!] \ \beta_i \in [\![0, \alpha_i]\!] \right\},$$
   de sorte que la somme des diviseurs positifs de n vaut
   $$S(n) = \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \cdots \sum_{\beta_r=0}^{\alpha_r} p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_r^{\beta_r} = \left(\sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} p_1^{\beta_1} \right) \cdots \left(\sum_{\beta_i=0}^{\alpha_i} p_i^{\beta_i} \right) \cdots \left(\sum_{\beta_r=0}^{\alpha_r} p_r^{\beta_r} \right).$$
   Reste à écrire r fois la formule de la progression géométrique pour obtenir
   $$S(n) = \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}.$$

(c) Supposons $m \wedge n = 1$. Notons les décompositions primaires de m et de n

$$m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r} \quad \text{et} \quad n = q_1^{\beta_1} \cdots q_s^{\beta_s}.$$

On a

$$mn = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r} q_1^{\beta_1} \cdots q_s^{\beta_s},$$

et puisque m et n sont premiers entre eux, les ensembles $\{p_1, \ldots, p_r\}$ et $\{q_1, \ldots, q_r\}$ sont disjoints (pas de facteur premier commun). D'après la question précédente, on a donc

$$S(mn) = \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1} \prod_{j=1}^{s} \frac{q_j^{\beta_j+1} - 1}{q_i - 1} = S(m)S(n).$$

(d) Soit $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
Notons $d_1, \ldots, d_p$ les diviseurs positifs deux à deux distincts de n, de sorte que $S(n) = d_1 + \cdots + d_p$. Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $d_i \mid n$ et donc $md_i \mid mn$. Les d_i étant distincts deux à deux, les md_i le sont aussi donc

$$S(mn) \geq md_1 + \cdots md_p = m\,(d_1 + \cdots d_p) = mS(n).$$

Supposons de surcroît que $m \geq 2$. Alors tous les md_i sont des diviseurs de mn supérieur à 2, et 1 en est un autre. On a donc

$$S(mn) \geq md_1 + \cdots md_n + 1 = mS(n) + 1.$$

3. (a) $S(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12 = 2 \times 6$.

(b) D'après la question 2(a), on a $S(p^\alpha) = \frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}$, qu'on va comparer à $2p^\alpha$:

$$S(p^\alpha) - 2p^\alpha = \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1} - 2p^\alpha = \frac{p^\alpha(2-p) - 1}{p - 1}.$$

Or, $p \geq 2$, donc $S(p^\alpha) - 2p^\alpha < 0$, c'est-à-dire $S(p^\alpha) < 2p^\alpha$.
$\boxed{\text{Le nombre } p^\alpha \text{ est défaillant}}$.

4. Soit x un entier parfait pair.

(a) Supposons que x n'a pas de facteur premier impair. Alors, d'après le théorème fondamental, il s'écrit comme une puissance de 2, ce qui est absurde car un tel nombre est défaillant d'après la question précédente. Il existe donc $q_1, \ldots q_s$ s entiers premiers impairs (avec $s \geq 1$) et $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_s$ des entiers dans $\mathbb{N}^*$ tels que

$$x = 2^\alpha q_1^\beta \cdots q_s^{\beta_s}.$$

Posons $k = q_1^\beta \cdots q_s^{\beta_s}$: c'est un entier impair comme produit d'entiers impairs, et étant strictement supérieur à 1, il est supérieur à 3.

(b) L'entier x étant parfait, on a $S(x) = 2x = 2^{\alpha+1}k$. D'autre part, 2^α et k étant premiers entre eux, $S(x) = S(2^\alpha)S(k) = (2^{\alpha+1} - 1)S(k)$. On a donc

$$2^{\alpha+1}k = (2^{\alpha+1} - 1)S(k) \qquad (*)$$

On voit que $2^{\alpha+1} - 1$ divise $2^{\alpha+1}k$. De plus, $2^{\alpha+1} - 1$ est premier avec $2^{\alpha+1}$ (on obtient la relation de Bezout adéquate en faisant leur différence). D'après le lemme de Gauss, $2^{\alpha+1} - 1$ divise k.
Il existe donc k' dans $\mathbb{N}$ tel que $k = (2^{\alpha+1} - 1)k'$.

(c) On a

$$2^{\alpha+1}(2^{\alpha+1} - 1)k' = (2^{\alpha+1} - 1)S((2^{\alpha+1} - 1)k'),$$

soit

$$2^{\alpha+1}k' = S((2^{\alpha+1} - 1)k').$$

Supposons que $k' \geq 2$.
Alors, d'après la question 2)d), on a $S((2^{\alpha+1} - 1)k') \geq k'S(2^{\alpha+1} - 1) + 1$.
On obtient

$$2^{\alpha+1}k' \geq k'S(2^{\alpha+1} - 1) + 1.$$

Or, $2^{\alpha+1} - 1$ étant dans la liste de ses propres diviseurs, on obtient $S(2^{\alpha+1} - 1) \geq 2^{\alpha+1} - 1$. Ceci amène $2^{\alpha+1}k' \geq 2^{\alpha+1}k' + 1$ puis $0 \geq 1$. L'hypothèse $k' \geq 2$ est contredite : on a $k' = 1$.
Nous venons de prouver que $k = 2^{\alpha+1} - 1$. En récrivant l'égalité (*) de la question b, on obtient

$$2^{\alpha+1} = S(2^{\alpha+1} - 1) \qquad \text{i.e.} \quad S(k) = k + 1.$$

Les deux seuls diviseurs de k sont 1 et k : k est premier.

5. On a établi en question 4 que les nombres parfaits pairs s'écrivent sous la forme $2^\alpha(2^\alpha - 1)$ avec $(2^\alpha - 1)$ premier. Réciproquement, considérons un tel nombre $x = 2^\alpha(2^\alpha - 1)$ avec $(2^\alpha - 1)$ premier. Puisque les deux facteurs sont premiers entre eux, on a

$$S(x) = S\left(2^\alpha(2^\alpha - 1)\right) = S(2^\alpha)S(2^\alpha - 1).$$

De plus, d'après la question 2)b), $S(2^\alpha) = 2^{\alpha+1} - 1$. Et comme $2^\alpha - 1$ est premier, ses deux seuls diviseurs sont 1 et $2^\alpha - 1$, de sorte que $S(2^\alpha - 1) = 1 + 2^\alpha - 1 = 2^{\alpha+1}$. On a donc

$$S(x) = 2^{\alpha+1}(2^{\alpha+1} - 1) = 2x \quad : x \text{ est parfait.}$$

Conclusion : les nombres parfaits pairs sont les nombres $2^\alpha(2^{\alpha+1} - 1)$, où $\alpha \geq 2$ et $2^{\alpha+1} - 1$ premier.