—

Problème. Équations du second degré dans $\mathscr{L}(E)$.

Dans ce problème, E désignera un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, dont le neutre est noté 0.

On note $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E. On rappelle que $\mathscr{L}(E)$ a été muni d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec une addition $+$ et une loi de composition externe $\cdot$. On rappelle aussi que $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$ est un anneau. En particulier, l'écriture f^2 désigne l'endomorphisme $f \circ f$. Parmi les endomorphismes de E, distinguons l'identité, notée id, et l'endomorphisme nul noté 0.

Le groupe des inversibles de $\mathscr{L}(E)$ est noté $\mathrm{GL}(E)$: c'est l'ensemble des automorphismes de E, c'est-à-dire celui des endomorphismes bijectifs.

Nous rappelons que si F est un sous-espace vectoriel de E et $f \in \mathscr{L}(E)$, on dit que F est stable par f si

$$\forall x \in F \quad f(x) \in F.$$

Nous allons considérer dans ce problème des endomorphismes f dans $\mathscr{L}(E)$ annulés par un polynôme

$$P = X^2 + \alpha X + \beta,$$

où α et β sont des scalaires de $\mathbb{K}$.
Plus précisément, on supposera que

$$f^2 + \alpha f + \beta \mathrm{id} = 0.$$

—

Partie 1. Le cas où P est scindé à racines simples : lemme des noyaux.

Dans cette partie, nous supposons que P possède deux racines distinctes λ et μ dans $\mathbb{K}$: $P = (X-\lambda)(X-\mu)$. On note

$$E_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}) \quad \text{et} \quad E_\mu = \mathrm{Ker}(f - \mu \mathrm{id}).$$

0. Soit $x \in E_\lambda$. Que vaut $f(x)$?
1. Vérifier que
$$(f - \mu \mathrm{id}) \circ (f - \lambda \mathrm{id}) = 0 = (f - \lambda \mathrm{id}) \circ (f - \mu \mathrm{id}).$$
2. Vérifier que
$$\mathrm{Im}(f - \lambda \mathrm{id}) \subset \mathrm{Ker}(f - \mu \mathrm{id}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(f - \mu \mathrm{id}) \subset \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}).$$
3. Lemme des noyaux (1) : une preuve en dimension finie.
Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie égale à n.
   (a) En utilisant le théorème du rang, démontrer que
   $$n \leq \dim E_\lambda + \dim E_\mu.$$
   (b) Démontrer que E_λ et E_μ sont en somme directe, et en déduire
   $$n \geq \dim E_\lambda + \dim E_\mu.$$
   (c) Justifier que
   $$E = E_\lambda \oplus E_\mu$$
   (d) *Le temps du dessin*
   On considère $E = \mathbb{R}^3$, $\lambda = 2$, $\mu = 1$, $\dim E_\lambda = 2$, $\dim E_\mu = 1$.
   Faire un dessin représentant E_λ et E_μ.
   Représenter aussi un un vecteur x n'appartenant ni à E_λ ni à E_μ.
   Enfin, représenter $f(x)$.
   Un peu de couleur sera appréciée.

4. Lemme des noyaux (2) : une preuve en dimension quelconque.
   On ne fait plus d'hypothèse de dimension finie pour E.
   Démontrer à nouveau que $E = E_\lambda \oplus E_\mu$.

Partie 2. Cas où $P = X^2 - \lambda X$.

Dans cette partie λ est un réel non nul et f un endomorphisme de E tel que

$$f^2 = \lambda f.$$

5. Comment appelle-t-on l'endomorphisme f dans le cas particulier où $\lambda = 1$?
6. Que dire de f si on suppose qu'il s'agit d'un automorphisme de E ?
7. Justifier que
$$E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}).$$
8. Montrer qu'il existe une homothétie h et un projecteur p tels que $f = h \circ p$.
9. Un exemple.
   (a) Résoudre l'équation différentielle $y'' - \lambda y' = 0$.
   On précisera une base et la dimension de cet espace vectoriel.
   (b) Donner un exemple d'espace vectoriel E et un exemple d'endomorphisme f tel que $f^2 = \lambda f$ et tel que f ne soit pas une homothétie.

Partie 3. Cas où $P = X^2 - \gamma$.

Dans cette partie γ est un réel non nul et f un endomorphisme de E tel que

$$f^2 = \gamma \mathrm{id}.$$

10. Comment appelle-t-on l'endomorphisme f dans le cas particulier où $\gamma = 1$?
11. Montrer que f est un automorphisme de E et préciser f^{-1}.
12. Supposons que γ possède une racine carrée ρ dans $\mathbb{K}$. Justifier que
$$E = \mathrm{Ker}(f - \rho \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(f + \rho \mathrm{id}).$$
   Montrer qu'il existe une homothétie h et une symétrie s tels que $f = h \circ s$.
13. Un exemple. Dans cette question, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
   (a) Résoudre l'équation différentielle $y'' - \gamma y = 0$.
   On discutera suivant le signe de γ, on précisera une base et la dimension.
   (b) Donner un exemple d'espace vectoriel E et un exemple d'endomorphisme f tel que $f^2 = \gamma \mathrm{id}$ et tel que f ne soit pas une homothétie.

Partie 4. Cas où $P = X^2 + 1$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et en dimension finie.

Dans cette partie du problème, on suppose que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et non réduit à $\{0\}$.

On suppose qu'il existe un endomorphisme f dans $\mathscr{L}(E)$ tel que

$$f^2 = -\mathrm{id}.$$

Pour faire le lien avec la partie 3, on fait remarquer que ce problème correspond au cas où $\alpha = -1$, mais ici, α n'a pas de racine carrée dans $\mathbb{R}$.

14. Soit $u \in E$ un vecteur non nul. Montrer que $(u, f(u))$ est libre.
15. On note $V_u = \mathrm{Vect}(u, f(u))$.
   Montrer que V_u est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant u et stable par f.
16. Soit $a \in V_u$ un vecteur non nul. Montrer que $V_u = V_a$.
17. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f et ne contenant pas u.
   Montrer que V_u et F sont en somme directe et que $V_u \oplus F$ est stable par f.
18. En déduire qu'il existe des vecteurs $u_1, \ldots, u_p$ tels que
$$(u_1, f(u_1), u_2, f(u_2), \cdots, u_p, f(u_p))$$
   soit une base de E. En déduire que la dimension de E est paire.
19. Soit $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $g^2 = -\mathrm{id}$.
   Montrer qu'il existe un automorphisme $\theta \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $g = \theta^{-1} \circ f \circ \theta$.
20. Réciproquement, on suppose que E est de dimension paire.
   Montrer qu'il existe un endomorphisme f dans $\mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 = -\mathrm{id}$.

Petit problème supplémentaire. Quelques résultats de dualité.

On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et on notera n sa dimension.

L'espace vectoriel $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ des formes linéaires sur E est appelé dual de E et note E^*. On l'appelle **dual** de E, noté E^*.

On rappelle que si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, alors pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note e_i^* la forme linéaire qui à un vecteur x de E associe sa coordonnée sur e_i.

Si $A \subset E$, on note

$$A^\perp = \{\varphi \in E^* \mid \forall x \in A \quad \varphi(x) = 0.\},$$

appelé **orthogonal** de A dans E^*.

Si $B \subset E^*$, on note

$$B^\circ = \{x \in E \mid \forall \varphi \in B \quad \varphi(x) = 0.\},$$

appelé **orthogonal** de B dans E.

1. *Base duale.*
   Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Montrer que $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est une base de E^*.

2. *Base antéduale.*
   Soit $(f_1, \ldots, f_n)$ une base de E^*.
   Montrer qu'il existe une unique base $(e_1, \ldots, e_n)$ telle

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad e_i^* = f_i.$$

3. Soit $A \subset E$. Montrer que $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E^*.

4. Soit $B \subset E^*$. Montrer que B° est un sous-espace vectoriel de E.

5. (*) Soit F un sous-espace vectoriel de E. Démontrer que

$$\dim F + \dim F^\perp = \dim E \quad \text{et} \quad \left(F^\perp\right)^\circ = F.$$

6. (*) Soit G un sous-espace vectoriel de E^*. Démontrer que

$$\dim G + \dim F^\circ = \dim E \quad \text{et} \quad \left(G^\circ\right)^\perp = G.$$

7. Soient p formes linéaires $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ de E^* telles que $\mathrm{rg}(\varphi_1, \ldots, \varphi_p) = r$.
   On considère le sous-espace

$$F = \{x \in E \mid \forall i \in [\![1, p]\!] \quad \varphi_i(x) = 0\}$$

   Démontrer que sa dimension est $n - r$.