Une trigonalisation

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.
On notera $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Calculer $A - 2I_3$ et donner une base (u_1, u_2) de $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$.
2. Soit $u_3 = e_1 + e_2 + e_3$. Notons $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$.
   (a) Justifier que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Écrire $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
   (c) Calculer la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.
3. (a) Calculer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f(u_3)\right)$ puis $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\left(f(u_3)\right)$. Donner alors $T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$. *on vérifiera que T est triangulaire supérieure et que tous ses coefficients diagonaux sont égaux à 2.*
   (b) En écrivant T sous la forme $T = 2I_3 + N$, où N est une matrice à préciser, déterminer pour tout entier naturel n la matrice T^n comme combinaison linéaire de I_3 et N, puis de I_3 et T.
4. En utilisant la formule du changement de base, prouver que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = n2^{n-1}A - (n-1)2^n I_3.$$

Matrices équitables (E3A-E4A MPI 2024)

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit que A est **équitable** si :

$$\forall (i,j,k) \in [\![1,n]\!]^3, \quad a_{i,j} = a_{i,k}a_{k,j}$$

1. Donner deux exemples de matrices équitables pour $n = 3$.
2. Déterminer l'ensemble des matrices A pour lesquelles A et $-A$ sont équitables.
3. Démontrer que si A est équitable, alors sa transposée $A^\top$ est aussi équitable.
4. On suppose que A est équitable.
   Montrer que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,i} = a_{j,j}$.

On suppose désormais que A est une matrice équitable non nulle.

5. Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Calculer $a_{k,k}$.
6. Soit B une matrice équitable non nulle. Montrer que $A+B$ n'est pas équitable.
7. Montrer que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} \neq 0$.
8. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, exprimer $a_{i,j}$ à l'aide de $a_{i,1}$ et $a_{j,1}$.
9. **Diagonalisation de A.**
   (a) Montrer que A est de rang 1. Que vaut $\dim \mathrm{Ker} A$?
   (b) Donner une base de $\mathrm{Ker}(A)$.
   Indication : laissez tomber le système linéaire : exploitez les relations entre colonnes et travaillez avec l'endomorphisme canoniquement associé à A.
   (c) Calculer A^2.
   Pour C_1 la première colonne de A, vérifier notamment que $AC_1 = nC_1$.
   (d) Montrer que la matrice A est semblable à $\mathrm{Diag}(n, 0, \ldots, 0)$.
   Autre formulation : montrer qu'il existe une base de $\mathbb{K}^n$ dans laquelle la matrice de f, canoniquement associé à A est la matrice $Diag(n, 0, \ldots, 0)$.
   (e) Montrer que la matrice A est semblable à la matrice J dont tous les coefficients sont égaux à 1 .
10. Démontrer que A est symétrique si, et seulement si, A est à coefficients dans $\{-1, 1\}$.
11. Déterminer le cardinal de l'ensemble des matrices équitables symétriques non nulles.
12. Si G est un sous-groupe fini de $(\mathbb{K}^*, \times)$, déterminer le cardinal de l'ensemble des matrices équitables à coefficients dans G.
13. Déterminer toutes les matrices carrées équitables de taille 2 à coefficients dans le groupe $\mathbb{U}_2$.