Corrigé du DM 4

$\boxed{\text{A}}$ Q : 0-(b) : avoir remplacé $2+11i$ par $(2+i)^3$ et s'être ramené en divisant à une équation du type $Z^3 = 1$.

$\boxed{\text{B}}$ Q : 0-(b) Avoir utilisé les nombres $1, j, j^2$ dans l'écriture de l'ensemble des solutions.

$\boxed{\text{C}}$ Q 1 : Avoir répondu à cette question avec un ssi en écrivant des <u>équivalences</u>.

$\boxed{\text{D}}$ Q 3 : Avoir déduit l'équation du second degré à partir des relations coefficients/racines (on avait la somme et le produit de a et b).

$\boxed{\text{E}}$ Q 4 : Résolution correcte de l'équation du second degré.

$\boxed{\text{F}}$ Q 5 : Avoir fait le lien <u>explicitement</u> avec la question 0.

Petit problème.

0. (a) On développe, puisqu'on nous le demande :

$$(2+i)^3 = 2^3 + 3\cdot 2^2 \cdot i + 3\cdot 2 \cdot i^2 + i^3 = 8 + 12i - 6 - i = 2 + 11i$$

$$(2-i)^3 = \left(\overline{(2+i)}\right)^3 = \overline{(2+i)^3} = 2 - 11i$$

(b) L'équation $z^3 = 2+11i$ se récrit $z^3 = (2+i)^3$ ou encore $\left(\frac{z}{2+i}\right)^3 = 1$. Ainsi, z est solution si et seulement si $\frac{z}{2+i} \in \mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$. L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$\boxed{\{(2+i), (2+i)j, (2+i)j^2\}.}$$

De la même façon, l'ensemble des solutions de l'équation $z^3 = 2-11i$ est
$\{(2-i), (2-i)j, (2-i)j^2\}$

1. On calcule $(x+h)^3 = x^3 + 3hx^2 + 3h^2x + h^3$ donc si $X = x+h$

$$X^3 - 15X - 4 = x^3 + 3hx^2 + (3h^2 - 15)x + h^3 - 15h - 4$$

L'équation (E) suggère d'avoir $3h = 3$ soit $h = 1$. Posons donc $X = x+1$. Le calcul précédent montre alors que $X^3 - 15X - 4 = x^3 + 3x^2 - 12x - 18$ et ainsi

$$x \text{ est solution de } (E) \text{ si et seulement si } X = x+1 \text{ est solution de } (E').$$

2. Calculons pour tous réels u, v

$$\begin{aligned}(u+v)^3 - 15(u+v) - 4 &= u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 - 15(u+v) - 4\\ &= u^3 + v^3 + 3uv(u+v) - 15(u+v) - 4\\ &= u^3 + v^3 + (u+v)(3uv - 15) - 4\end{aligned}$$

Ainsi $X^3 - 15X - 4 = 0 \iff u^3 + v^3 + (u+v)(3uv - 15) - 4 = 0$, c'est-à-dire $X = u+v$ solution de (E') si et seulement si $u^3 + v^3 + (u+v)(3uv - 15) = 4$.

3. Avec la condition $uv = 5$, on est ramené à l'équation $u^3 + v^3 = 4$. De plus on a alors

$$u^3v^3 = (uv)^3 = 5^3 = 125$$

En posant $a = u^3$ et $b = v^3$ on a donc

$$\begin{aligned} a + b &= 4 \qquad \text{(somme)}\\ ab &= 125 \qquad \text{(produit)}\end{aligned}$$

donc on sait que a, b sont les solutions de l'équation $z^2 - (a+b)z + ab = 0$ soit $z^2 - 4z + 125 = 0$.

4. On calcule le discriminant

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 125 = 16 - 500 = -484 = -4 * 121 = (22i)^2$$

donc les solutions de $z^2 - 4z + 125 = 0$ sont $\frac{4 \pm 22i}{2} = 2 \pm 11i$, qui sont donc u^3 et v^3 à l'ordre près, soit pour fixer les idées

$$\begin{cases} u^3 &= 2 + 11i\\ v^3 &= 2 - 11i\end{cases}$$

5. On a résolu en question 0 l'équation $z^3 = 2 + 11i$. On obtient donc que

$$u \in \left\{2+i, (2+i)j\,;(2+i)j^2\right\} \quad \text{et} \quad v \in \left\{2-i, (2-i)j\,;(2-i)j^2\right\}.$$

La condition sur u, v est $uv = 5$. On calcule alors $(2-i)(2+i) = 5$ et vu $j^3 = 1$ et $j^2 \notin \mathbb{R}$, les couples (u, v) sont parmi

$$(2+i, 2-i) \quad ((2+i)j, (2-i)j^2) \quad \text{ou} \quad ((2+i)j^2, (2-i)j)$$

Les solutions de (E') s'obtiennent comme $X = u+v$ avec les solutions précédentes. Ayant $2-i = \overline{2+i}$ et $j^2 = \overline{j}$, on remarque que les couples trouvés sont des couples de nombres conjugués. Les solutions de (E') valent donc $2\mathrm{Re}(u)$: on a donc les trois solutions ci-dessous pour (E').

— $X = 2\mathrm{Re}(2+i) = 4$

— $X = 2\mathrm{Re}((2+i)j) = 2\mathrm{Re}\left[(2+i)(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})\right] = 2\left(2\cdot\frac{-1}{2} - 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2-\sqrt{3}$

— $X = 2\mathrm{Re}\left((2+i)j^2\right) = 2\mathrm{Re}\left[(2+i)(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})\right] = 2\left(2\cdot\frac{-1}{2} - 1\cdot\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = -2+\sqrt{3}$

À l'aide de la question 1, on soustrait 1 pour trouver les solutions de (E) $(x = X-1)$, soit

Les solutions de (E) sont : $\boxed{x = 3, \quad x = -3+\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad x = -3-\sqrt{3}.}$

Exercice.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$. D'après la formule du binôme,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\left(z+e^{i\frac{2ik\pi}{n}}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n-1}\left[\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}z^{n-p}\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^p\right]\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{p=0}^{n}\left[\binom{n}{p}z^{n-p}\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^p\right]\end{aligned}$$

En échangeant les symboles sommes,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\left(z+e^{i\frac{2ik\pi}{n}}\right)^n &= \sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\binom{n}{p}z^{n-p}\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^p\right]\\ &= \sum_{p=0}^{n}\left[\binom{n}{p}z^{n-p}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^p\right]\end{aligned}$$

Or

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^p = \sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{\frac{2ip\pi}{n}}\right)^k = \begin{cases} n & \text{si } p = 0 \text{ ou si } p = n\\ 0 & \text{si } p \in [\![1, n-1]\!]\end{cases}$$

D'où

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(z+e^{i\frac{2ik\pi}{n}}\right)^n = \binom{n}{0}z^{n-0}n + \binom{n}{n}z^{n-n}n = n(z^n+1)$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1}\left(z+e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^n = n(z^n+1)}$$

2. Pour $z = 1$, il vient,

$$\begin{aligned}2n &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(1+e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^n\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(2e^{\frac{ik\pi}{n}}\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)^n \qquad \text{(angle moitié)}\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}2^n e^{ik\pi}\cos^n\left(\frac{k\pi}{n}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}2^n (e^{i\pi})^k\cos^n\left(\frac{k\pi}{n}\right)\\ &= 2^n \times \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\cos^n\left(\frac{k\pi}{n}\right)\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\cos^n\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}}$$

3. Pour $z = e^{\frac{i\pi}{n}}$, on a, d'une part,

$$n\left(\left(e^{\frac{i\pi}{n}}\right)^n + 1\right) = n\left(e^{i\pi} + 1\right) = n(-1+1) = 0$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned}
n\left((e^{\frac{i\pi}{n}})^n + 1\right) &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{\frac{i\pi}{n}} + e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{\frac{i\pi}{n}}\right)^n\left(1 + e^{\frac{i(2k-1)\pi}{n}}\right)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\pi}\left(1 + e^{\frac{i(2k-1)\pi}{n}}\right)^n \\
&= -\sum_{k=0}^{n-1}\left(1 + e^{\frac{i(2k-1)\pi}{n}}\right)^n \\
&= -\sum_{k=0}^{n-1}\left(2e^{\frac{i(2k-1)\pi}{2n}}\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)\right)^n \\
&= -\sum_{k=0}^{n-1} 2^n e^{\frac{i(2k-1)\pi}{2}}\cos^n\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) \\
&= -\sum_{k=0}^{n-1} 2^n e^{ik\pi} e^{\frac{-i\pi}{2}}\cos^n\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) \\
&= -2^n e^{\frac{-i\pi}{2}}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\cos^n\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\cos^n\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) = 0}$$