DS 2

Exercice 1. Calculs d'intégrales.

---

1) Calculer les trois intégrales ci-dessous :

$$A = \int_e^{e^2} \ln(x)\mathrm{d}x \qquad B = \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \qquad C = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

---

2) Calculer les trois intégrales ci-dessous :

$$D_1 = \int_0^{\pi/4} \tan(x)\mathrm{d}x; \qquad D_2 = \int_0^{\pi/4} \tan^2(x)\mathrm{d}x; \quad D_3 = \int_0^{\pi/4} \tan^3(x)\mathrm{d}x.$$

---

3) Calculer $E = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t(t+1)}\mathrm{d}t$. En déduire la valeur de $F = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(t+1)}{t^2}\mathrm{d}t$.

---

4) À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale

$$G = \int_0^{1/2} \arcsin(t)\mathrm{d}t.$$

---

5) On considère l'intégrale $H = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x)e^x\mathrm{d}x$.

a) Calculer l'intégrale H en faisant deux intégrations par parties successives.

b) Recalculer H en utilisant des nombres complexes.

---

6) Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 e^{\sqrt{2t+1}}\mathrm{d}t$ en posant $x = \sqrt{2t+1}$.

Exercice 2. Une étude de fonction.

Dans cet exercice, on étudie la fonction $f : x \mapsto \arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$.

1. Dresser le tableau de variations de $u : x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$.
   Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Notons $I_1 =]-\infty, -1[$, $I_2 =]-1, 1[$ et $I_3 =]1, +\infty[$.
   Démontrer que f est dérivable sur chacun de ces intervalles.
3. Démontrer que
   $$\forall x \in I_1 \cup I_2 \cup I_3 \qquad f'(x) = \pm\frac{2}{1+x^2}.$$
   On précisera le signe en discutant selon l'intervalle où se trouve x.
4. Proposer une simplification de l'expression $f(x)$ pour x dans I_1, puis dans I_2, puis dans I_3.
5. On veut retrouver l'expression donnée pour $f(x)$ lorsque $x \in]-1, 1[$.
   (a) Soit $u \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$. Montrer que $f(\tan(u)) = 2u$.
   (b) Conclure.

Exercice 3. Une intégrale du DM, calculée d'une autre façon.

On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_{1/x}^{x} \frac{\arctan(t)}{t}\mathrm{d}t$.

1. Justifier l'existence sur $\mathbb{R}_+^*$ d'une primitive A pour la fonction $t \mapsto \frac{\arctan(t)}{t}$.
2. En utilisant la fonction A, justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et démontrer que
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \frac{\pi}{2x}.$$
3. En déduire une expression simple de f.

Problème. Les nombres ne sont pas réels, la somme et le produit si.

Notations.

On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, nous considérons l'assertion

$\mathcal{A}_n$: « $\exists (z_1, \ldots, z_n) \in (\mathbb{U} \backslash \{-1, 1\})^n : z_1 + \cdots + z_n \in \mathbb{R}$ et $z_1 \times \cdots \times z_n \in \mathbb{R}$. »

On rappelle que

$$z \in \mathbb{U} \setminus \{-1; 1\} \iff (|z| = 1 \text{ et } z \neq \pm 1).$$

1. Est-ce que $\mathcal{A}_1$ est vraie ?

2. **Le cas n pair**

   (a) Donner un exemple de deux nombres complexes z_1 et z_2 tels que :

   $$z_1 \in \mathbb{U}, \quad z_2 \in \mathbb{U}, \quad z_1 + z_2 \in \mathbb{R}, \quad z_1 z_2 \in \mathbb{R}, \quad z_1 \neq \pm 1 \quad \text{et} \quad z_2 \neq \pm 1.$$

   (b) Montrer que si $n \in \mathbb{N}^*$ et n est pair alors $\mathcal{A}_n$ est vraie.

3. **Le cas $n = 3$**
   Soit $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \mathbb{R}$. On note

   $$z_1 = e^{i\theta_1}, \quad z_2 = e^{i\theta_2} \quad \text{et} \quad z_3 = e^{i\theta_3}.$$

   On suppose que
   $$z_1 + z_2 + z_3 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad z_1 z_2 z_3 \in \mathbb{R}.$$

   (a) Pour p et q deux réels, donner les factorisations de

   $$\sin p + \sin q \qquad \sin p - \sin q \qquad \cos p - \cos q.$$

   (b) Exprimer les parties imaginaires de $z_1 + z_2 + z_3$ et de $z_1 z_2 z_3$ en fonction de θ_1, θ_2 et θ_3.
   En déduire que

   $$\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = 0 \quad \text{et} \quad \sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \sin \theta_3 = 0.$$

   (c) Montrer que pour tous réels a, b et c :

   $$\sin(a+b+c) - (\sin a + \sin b + \sin c) = -4 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{b+c}{2}\right) \sin\left(\frac{c+a}{2}\right).$$

   (d) Conclure qu'il existe $k \in \{1, 2, 3\}$ tel que $z_k = \pm 1$.

   (e) Qu'a-t-on démontré relativement à $\mathcal{A}_3$?

4. **Le cas $n = 5$**
   On pose dans toute cette question

   $$j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

   $$z_1 = j, \quad z_2 = j \quad \text{et} \quad z_3 = -j.$$

   Soient z_4 et z_5 deux nombres complexes de module 1.

   (a) Montrer que $z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 \in \mathbb{R} \iff z_5 = \pm \overline{z_4}$.

   (b) Montrer que si $z_5 = \overline{z_4}$ alors $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 \notin \mathbb{R}$.

   (c) On suppose que $z_5 = -\overline{z_4}$. Montrer que

   $$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}(z_4) = -\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

   (d) Trouver tous les nombres complexes z_4 et z_5 de modules 1 tels que :

   $$z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 \in \mathbb{R}.$$

   (On donnera les solutions sous forme algébrique.)
   En déduire que $\mathcal{A}_5$ est vraie.

5. **Conclusion**
   Pour quels entiers dans $\mathbb{N}^*$ l'assertion $\mathcal{A}_n$ est-elle vraie ?