Corrigé du DS 2

Exercice 1. Calculs d'intégrales.

1) On dispose chaque fois d'une primitive "usuelle".

$$A=\int_e^{e^2}\ln(x)\mathrm{d}x=[x\ln(x)-x]_e^{e^2}=(e^2\ln(e^2)-e^2)-(e\ln(e)-e)=\boxed{e^2}$$

$$B=\int_0^{1/2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=[\arcsin(x)]_0^{1/2}=\arcsin(1/2)-\arcsin(0)=\boxed{\frac{\pi}{6}}$$

$$C=\int_0^{1}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=[\arctan(x)]_0^{1}=\arctan(1)-\arctan(0)=\boxed{\frac{\pi}{4}}$$

2)

$$D_1=\int_0^{\pi/4}\tan(x)\mathrm{d}x=-\int_0^{\pi/4}\frac{-\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x=[-\ln(|\cos x|)]_0^{\frac{\pi}{4}}=\boxed{\frac{1}{2}\ln(2)}$$

$$D_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\tan^2 x)\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{4}}1\mathrm{d}x=[\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{\pi}{4}=\boxed{1-\frac{\pi}{4}}$$

$$D_3=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^3(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\tan^2 x)\tan x\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}\tan^2(x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-D_1=\boxed{\frac{1-\ln(2)}{2}}.$$

3) Voici une décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{t(t+1)}=\frac{(t+1)-t}{t(t+1)}=\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}.$$

On calcule donc

$$E=\int_1^2\frac{1}{t(t+1)}\mathrm{d}t=[\ln|t|-\ln|1+t|]_1^2=\boxed{2\ln(2)-\ln(3)}.$$

Une intégration par parties amène

$$F=\int_1^2\frac{\ln(1+t)}{t^2}\mathrm{d}t=\left[-\frac{\ln(1+t)}{t}\right]_1^2-\int_1^2-\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{t+1}\mathrm{d}t=\ln(2)-\frac{1}{2}\ln(3)+E.$$

On obtient donc

$$F=\boxed{\frac{3}{2}(2\ln(2)-\ln(3))}.$$

4) On pose $u(t)=t$ et $v(t)=\arcsin(t)$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$.

$$\begin{aligned}G&=[t\arcsin(t)]_0^{1/2}-\int_0^{1/2}\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t\\&=\tfrac{1}{2}\arcsin(\tfrac{1}{2})+\int_0^{1/2}\frac{(-2t)}{2\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t\\&=\frac{\pi}{12}+\left[\sqrt{1-t^2}\right]_0^{1/2}\\&=\boxed{\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1}\end{aligned}$$

5)

a) On fait deux intégrations par parties successives, en choisissant de primitiver exp et de dériver les fonctions circulaires. Les fonctions mises en jeu sont de classe $\mathcal{C}^1$.

$$\begin{aligned}H=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin(2x)e^x\mathrm{d}x&=[\sin(2x)e^x]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\cos(2x)e^x\mathrm{d}x\\&=(e^{\frac{\pi}{4}}-0)-\left([2\cos(2x)e^x]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(-4\sin(2x)e^x\mathrm{d}x\right)\\&=e^{\frac{\pi}{4}}+2-4H\end{aligned}$$

On a donc $5H=e^{\frac{\pi}{4}}+2$ et on obtient $\boxed{H=\frac{e^{\frac{\pi}{4}}+2}{5}}$.

b) On a $\sin(2x)e^x=e^x\mathrm{Im}\left(e^{2ix}\right)=\mathrm{Im}\left(e^{(1+2i)x}\right)$. Une primitive de $u:x\mapsto\sin(2x)e^x$ est donc $U:x\mapsto\mathrm{Im}\left(\frac{1}{1+2i}e^{(1+2i)x}\right)$. Calculons, pour x réel,

$$\begin{aligned}U(x)=\frac{1-2i}{|1-2i|^2}e^xe^{2ix}&=\mathrm{Im}\left(\frac{e^x}{5}(1-2i)\left(\cos(2x)+i\sin(2x)\right)\right)\\&=\frac{e^x}{5}\left(\sin(2x)-2\cos(2x)\right)\end{aligned}$$

On a donc

$$H=U\left(\frac{\pi}{4}\right)-U(0)=\frac{e^{\frac{\pi}{4}}+2}{5}.$$

On retrouve bien le résultat précédent.

6) On pose

x	$\sqrt{2t+1}$
$\mathrm{d}x$	$\frac{1}{\sqrt{2t+1}}\mathrm{d}t$
$x=1$	$t=0$
$x=\sqrt{3}$	$t=1$

On calcule alors

$$I=\int_0^1 e^{\sqrt{2t+1}}\mathrm{d}t=\int_0^1 \sqrt{2t+1}e^{\sqrt{2t+1}}\frac{1}{\sqrt{2t+1}}\mathrm{d}t=\int_1^{\sqrt{3}} xe^x\mathrm{d}x.$$

Cette dernière intégrale se calcule par intégration par parties :

$$I=[xe^x]_1^{\sqrt{3}}-\int_1^{\sqrt{3}} e^x\mathrm{d}x=\sqrt{3}e^{\sqrt{3}}-e-\left(e^{\sqrt{3}}-e\right)=\boxed{\left(\sqrt{3}-1\right)e^{\sqrt{3}}}$$

Exercice 2. Une étude de fonction.

1. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient et $\forall x\in\mathbb{R}\quad u'(x)=2\dfrac{(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	0	$+$			0	$-$	
u	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$			1	$\searrow$	0

La fonction u prend ses valeurs dans $[-1,1]$, intervalle de définition de arcsin.
La fonction f est donc bien définie, comme composée $\arcsin\circ u$.

2. Soit $k\in\{1,2,3\}$. D'après le tableau de variation précédent, u va de I_k dans $]-1,1[$ et est dérivable sur I_k. Comme arcsin est dérivable sur $]-1,1[$, le théorème de dérivation des composées permet de justifier que f est dérivable sur I_k.

3. Soit $x\in I_1\cup I_2\cup I_3$.

$$f'(x)=u'(x)\arcsin'(u(x))=2\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}}=\frac{1-x^2}{|1-x^2|}\cdot\frac{2}{1+x^2}.$$

Ainsi,

$$\forall x\in]-1,1[\quad f'(x)=\frac{2}{1+x^2}\quad\text{et}\quad\forall x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\quad f'(x)=-\frac{2}{1+x^2}.$$

4. Il existe trois constantes C_1,C_2 et C_3 telles que

$$\forall x\in I_1\quad f(x)=C_1-2\arctan(x)$$
$$\forall x\in I_2\quad f(x)=C_2+2\arctan(x)$$
$$\forall x\in I_3\quad f(x)=C_3-2\arctan(x)$$

Évaluons en 0 : on a $f(0)=2\arctan(0)+C_2$ ce qui donne $C_2=0$:

$$\forall x\in]-1,1[\quad f(x)=2\arctan(x).$$

Passons à la limite en $+\infty$: on obtient $0=-2\cdot\frac{\pi}{2}+C_3$ d'où $C_3=\pi$:

$$\forall x\in]1,+\infty[\quad f(x)=\pi-2\arctan(x).$$

Passons à la limite en $-\infty$: on obtient $0=-2\cdot(-\frac{\pi}{2})+C_1$ d'où $C_1=-\pi$:

$$\forall x\in]-\infty,-1[\quad f(x)=\pi-2\arctan(x).$$

5. a)

$$\begin{aligned}f(\tan(u))&=\arcsin\left(\frac{2\tan u}{1+\tan^2 u}\right)\\&=\arcsin\left(2\cos^2(u)\cdot\frac{\sin u}{\cos u}\right)\\&=\arcsin(2\cos u\sin u)\\&=\arcsin(\sin 2u)\\&=2u,\end{aligned}$$

la dernière égalité étant vraie parce-que $2u\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

b) Soit $x\in]-1,1[$. On a $\arctan(x)\in]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}[$. En appliquant le résultat de la question a avec $u=\arctan(x)$, on obtient

$$f(\tan(\arctan(x)))=2\arctan(x)\qquad\text{soit}\qquad f(x)=2\arctan(x).$$

On retrouve donc bien le résultat de la question 4.

Exercice 3. Une intégrale du DM, calculée d'une autre façon.

On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_{1/x}^{x} \frac{\arctan(t)}{t} \mathrm{d}t$.

1. La fonction $t \mapsto \frac{\arctan(t)}{t}$ est $\boxed{\text{continue}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (comme quotient de fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant pas). Elle admet donc une primitive A sur cet intervalle (le théorème fondamental de l'analyse le garantit).

2. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = A(x) - A\left(\frac{1}{x}\right).$$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$. La composée $x \mapsto A\left(\frac{1}{x}\right)$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$f'(x) = A'(x) - \left(-\frac{1}{x^2}\right) A'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\arctan(x)}{x} + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\arctan(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \frac{\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})}{x}.$$

Une propriété du cours nous donne que le numérateur de la dernière fraction vaut $\frac{\pi}{2}$ pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$. On a donc bien établi que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \frac{\pi}{2x}}$$

3. La fonction f et la fonction $\frac{\pi}{2}\ln$ ont la même dérivée sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$. Elle coïncident sur cet intervalle à une constante additive près :

$$\exists c \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = \frac{\pi}{2}\ln(x) + c.$$

Pour calculer c, on évalue en 1. D'une part,

$$f(1) = \int_1^1 \frac{\arctan(t)}{t} \mathrm{d}t = 0.$$

D'autre part $\frac{\pi}{2}\ln(1) + c = c$. Ceci impose $c = 1$. On a démontré

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = \frac{\pi}{2}\ln(x)}$$

Problème. Les nombres ne sont pas réels, la somme et le produit si.

1. Si $z_1 \in \mathbb{U}$ et $z_1 \in \mathbb{R}$ alors $z_1 = \pm 1$. Donc $\boxed{\mathcal{A}_1 \text{ est fausse}}$.
2. (a) Une possibilité parmi d'autres : $\boxed{z_1 = i \quad ; \quad z_2 = -i}$.

   (b) Généralisons ce qui précède : si n est pair, notons $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}^\star$.
   On choisit $z_1 = \cdots = z_p = i$ et $z_{p+1} = \cdots = z_n = -i$.
   D'une part $z_1 + \cdots + z_n = (z_1 + \cdots + z_p) + (z_{p+1} + \cdots + z_{2p}) = pi - pi = 0 \in \mathbb{R}$
   et d'autre part $z_1 \ldots z_n = (z_1 \ldots z_p)(z_{p+1} \ldots z_{2p}) = i^p(-i)^p = (-i^2)^p = 1 \in \mathbb{R}$.
   Puisque ces nombres z_k (pour $1 \leq k \leq n$) sont de module 1 et différents de ± 1, ceci montre que $\boxed{\mathcal{A}_1 \text{ est vraie}}$.
3. (a) On rappelle que

$$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\sin p - \sin q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

   (b) $\mathrm{Im}(z_1 + z_2 + z_3) = \boxed{\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \sin\theta_3 = 0}$ puisque $z_1 + z_2 + z_3 \in \mathbb{R}$.
   $\mathrm{Im}(z_1z_2z_3) = \mathrm{Im}\left(e^{i(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}\right) = \boxed{\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = 0}$ puisque $z_1z_2z_3 \in \mathbb{R}$.

   (c) On calcule :

$$\begin{aligned}
&\sin(a+b+c) - (\sin a + \sin b + \sin c) \\
&= (\sin(a+b+c) - \sin a) - (\sin b + \sin c) \\
&= 2\cos\left(a + \frac{b+c}{2}\right)\sin\frac{b+c}{2} - 2\sin\frac{b+c}{2}\cos\frac{b-c}{2} \\
&= 2\sin\left(\frac{b+c}{2}\right)\left(\cos\left(a + \frac{b+c}{2}\right) - \cos\left(\frac{b-c}{2}\right)\right) \\
&= \boxed{-4\sin\frac{b+c}{2}\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a+c}{2}}.
\end{aligned}$$

   (d) D'après la question b) : $\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = 0$ et $\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \sin\theta_3 = 0$.
   En appliquant la question précédente on obtient

$$\sin\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta_2+\theta_3}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta_3+\theta_1}{2}\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)=0 \quad \text{ou} \quad \sin\left(\frac{\theta_2+\theta_3}{2}\right)=0 \quad \text{ou} \quad \sin\left(\frac{\theta_3+\theta_1}{2}\right)=0.$$

Plaçons nous par exemple dans le cas où $\sin\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)=0$. Alors $\frac{\theta_1+\theta_2}{2}=0\ [\pi]$ *i.e.* $\theta_1+\theta_2=0\ [2\pi]$. Par conséquent $\theta_1+\theta_2+\theta_3=\theta_3\ [2\pi]$.
Il s'en suit que $\sin(\theta_3)=\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3)=0$.
On obtient $\theta_3=0\ [\pi]$ et donc $z_3=e^{i\theta_3}=\pm 1$.
Les deux autres cas mènent à $z_1=\pm 1$ et $z_2=\pm 1$.

$$\boxed{z_1=\pm 1 \text{ ou } z_2=\pm 1 \text{ ou } z_3=\pm 1}$$

(e) Ce qui précède démontre que $\mathcal{A}_3$ est fausse.

4. (a) $z_1z_2z_3=-j^3=-1$ donc : $z_1z_2z_3z_4z_5\in\mathbb{R} \iff z_4z_5\in\mathbb{R}$.
Puisque $|z_4z_5|=1$ il reste $z_1z_2z_3z_4z_5\in\mathbb{R} \iff z_4z_5=\pm 1$.
Enfin $|z_4|=1$ donne $\frac{1}{z_4}=\overline{z_4}$ ce qui permet de conclure que

$$\boxed{z_1z_2z_3z_4z_5\in\mathbb{R} \iff z_5=\pm\overline{z_4}}.$$

(b) Si $z_5=\overline{z_4}$ alors $z_1+z_2+z_3+z_4+z_5=j+z_4+\overline{z_4}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+2\mathrm{Re}(z_4)$. Ainsi

$$\mathrm{Im}(z_1+z_2+z_3+z_4+z_5)=\frac{\sqrt{3}}{2}\neq 0$$

$$\boxed{z_1+z_2+z_3+z_4+z_5\notin\mathbb{R}}.$$

(c) Si $z_5=-\overline{z_4}$ alors $z_1+z_2+z_3+z_4+z_5=j+z_4-\overline{z_4}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+2i\,\mathrm{Im}z_4$. Ainsi

$$\mathrm{Im}(z_1+z_2+z_3+z_4)=\frac{\sqrt{3}}{2}+2\,\mathrm{Im}z_4.$$

Il vient alors :

$$z_1+z_2+z_3+z_4+z_5\in\mathbb{R} \iff \frac{\sqrt{3}}{2}+2\,\mathrm{Im}z_4=0 \iff \boxed{\mathrm{Im}z_4=-\frac{\sqrt{3}}{4}}.$$

(d) • Supposons que z_4 et z_5 conviennent. Par la question a) on a $z_5=\overline{z_4}$ ou $z_5=-\overline{z_4}$.
Le cas $z_5=\overline{z_4}$ est à exclure d'après la question b).
Il reste donc $z_5=-\overline{z_4}$ et d'après la question c) $\mathrm{Im}z_4=-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Notons $z_4=x+iy \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$. On doit avoir $y=-\frac{\sqrt{3}}{4}$ mais aussi

$$x^2+y^2=|z_4|^2=1,$$

d'où

$$x=\pm\frac{\sqrt{13}}{4}.$$

On obtient donc

$$\boxed{\begin{cases} z_4=\frac{1}{4}(\sqrt{13}-i\sqrt{3}) \\ z_5=\frac{1}{4}(-\sqrt{13}-i\sqrt{3}) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} z_4=\frac{1}{4}(-\sqrt{13}-i\sqrt{3}) \\ z_5=\frac{1}{4}(\sqrt{13}-i\sqrt{3}). \end{cases}}$$

• En prenant $z_4=\frac{1}{4}(\sqrt{13}-i\sqrt{3})$ et $z_5=\frac{1}{4}(-\sqrt{13}-i\sqrt{3})$, on vient de voir que $z_1+\cdots+z_5\in\mathbb{R}$ et $z_1\ldots z_5\in\mathbb{R}$. De plus, les z_k sont tous de module 1 et distincts de ± 1.

$$\boxed{\mathcal{A}_5 \text{ est vraie.}}$$

5. • On a vu que $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_3$ sont fausses.
• On sait aussi que $\mathcal{A}_n$ est vraie n est pair.
• On sait enfin que $\mathcal{A}_5$ est vraie.
• Soit à présent un entier n impair tel que $n\geq 7$. On écrit $n=5+2k$ avec $k\in\mathbb{N}^\star$.
Puisque $2k$ est pair, $\mathcal{A}_{2k}$ est vraie et donc

$$\exists(z_6,\ldots,z_{2k+5})\in(\mathbb{U}\setminus\{-1;1\})^{2k} \quad : \quad z_6+\cdots+z_{2k+5}\in\mathbb{R} \quad \text{et} \quad z_6\times\cdots\times z_{2k+5}\in\mathbb{R}.$$

Puisque $\mathcal{A}_5$ est vraie,

$$\exists(z_1,\ldots,z_5)\in(\mathbb{U}\setminus\{-1;1\})^5 \quad : \quad z_1+\cdots+z_5\in\mathbb{R} \quad \text{et} \quad z_1\times\cdots\times z_5\in\mathbb{R}.$$

On a alors

$$(z_1,\ldots,z_{2k+5})\in(\mathbb{U}\setminus\{-1;1\})^{2k+5}$$

et

$$z_1+\cdots+z_{2k+5}=\underbrace{(z_1+\cdots+z_5)}_{\in\mathbb{R}}+\underbrace{(z_6+\cdots+z_{2k+5})}_{\in\mathbb{R}}\in\mathbb{R}$$

$$z_1\times\cdots\times z_{2k+5}=\underbrace{(z_1\times\cdots\times z_5)}_{\in\mathbb{R}}\times\underbrace{(z_6\times\cdots\times z_{2k+5})}_{\in\mathbb{R}}\in\mathbb{R}.$$

Cela montre que $\mathcal{A}_{2k+5}$, c'est-à-dire $\mathcal{A}_n$ est vraie.
• Conclusion :

$$\boxed{\text{Les entiers } n \text{ tels que } \mathcal{A}_n \text{ est vraie sont ceux de } \mathbb{N}^*\setminus\{1,3\}.}$$