Corrigé du DM 9

Exercice 1 : correction par pair

$\boxed{\text{A}}$ Mettre la lettre A dans la marge chaque fois qu'une injectivité est bien démontrée.

$\boxed{\text{B}}$ Mettre la lettre B dans la marge chaque fois qu'une non-injectivité est bien démontrée.

$\boxed{\text{C}}$ Mettre la lettre C dans la marge chaque fois qu'une surjectivité est bien démontrée.

$\boxed{\text{D}}$ Mettre la lettre D dans la marge chaque fois qu'une non-surjectivité est bien démontrée.

Exercice 2 : le prof s'en charge
les correcteurs rapportent les copies lundi 25.

Exercice 1. Exemples d'applications. I : injective. S : surjective.

- $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array} \right.$ $\boxed{I : \text{non} ; S : \text{oui}}$.

  L'application f est surjective : tout réel y s'écrit $y = y + 0 = f((y,0))$.
  Mais elle n'est pas injective : 1 a pour antécédents $(1,0)$, $(0,1)$, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$...

- $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (y,x) \end{array} \right.$. $\boxed{I : \text{oui} ; S : \text{oui}}$.

  L'application g est surjective : tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$ admet (y,x) comme antécédent. Si on trouve cela plus clair, on peut écrire : tout couple (a,b) de $\mathbb{R}^2$ admet (b,a) comme antécédent (mais c'est la même phrase ! les variables sont muettes).
  L'application g est aussi injective : si (x,y) et (x',y') sont deux couples tels que $g(x,y) = g(x',y')$, alors $(y,x) = (y',x')$ et donc $(x,y) = (x',y')$.
  Écrivons une preuve plus courte : on a $g \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$; par caractérisation des bijections, g est bijective et $g^{-1} = g$.

- $h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x,x) \end{array} \right.$. $\boxed{I : \text{non} ; S : \text{non}}$

  La fonction h n'est pas injective puisque les couples $(1,2)$ et $(1,666)$ ont la même image par h.
  Elle n'est pas surjective puisque les images par h ont forcément deux coordonnées identiques, ce qui n'est pas le cas de tout élément de $\mathbb{R}^2$!
  Par exemple, le couple $(1,2)$ ne saurait avoir d'antécédent par h.

- $i : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & (x^2,x^3) \end{array} \right.$. $\boxed{I : \text{oui} ; S : \text{non}}$

  Les images par i ont une première coordonnée positive, ce qui n'est pas le cas de tous les éléments de $\mathbb{R}^2$. Par exemple, $(-1,0)$ ne saurait avoir d'antécédent par i, qui n'est donc pas surjective.
  L'application i est injective : montrons-le. Soient deux réels a et b. Supposons $i(a) = i(b)$, c'est-à-dire $(a^2,a^3) = (b^2,b^3)$. En particulier, $a^3 = b^3$ et donc $a = b$ par injectivité de la fonction $x \mapsto x^3$, qui est injective car strictement croissante.

- $j : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{C}^* \\ (r,\theta) & \mapsto & re^{i\theta} \end{array} \right.$. $\boxed{I : \text{non} ; S : \text{oui}}$

  Les couples $(1,0)$ et $(1,2\pi)$ ont la même image : j n'est pas injective.
  En revanche, nous savons que tout nombre complexe z non nul s'écrit $z = re^{i\theta} = j(r,\theta)$, où r est le module de z et θ un argument : j est surjective.

- $k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \to & \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\ (n,p) & \mapsto & [\![n,p]\!] \end{array} \right.$. $\boxed{I : \text{non} ; S : \text{non}}$

  La fonction k n'est pas injective : $k(2,1) = \emptyset = k(3,1)$.
  Elle n'est pas surjective non plus. En effet, l'image d'un couple par k est soit vide, soit un intervalle d'entiers consécutifs. Par exemple, $\{1,3\}$ est une partie de $\mathbb{N}$ qui ne saurait avoir d'antécédent par k, qui n'est pas surjective.

- $L : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ u & \mapsto & \left(x \mapsto \displaystyle\int_0^x u(t)\mathrm{d}t \right) \end{array} \right.$. $\boxed{I : \text{oui} ; S : \text{non}}$

  Si u est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, alors $L(u)$ est une fonction qui s'annule en 0. Toutes les fonctions ne sont pas dans ce cas ! Par exemple, la fonction exp est appartient à l'ensemble d'arrivée. Puisqu'elle ne s'annule pas en 0, elle ne saurait avoir d'antécédent par L : l'application L n'est pas surjective.
  Montrons que L est injective. Soient u et v deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Supposons $L(u) = L(v)$. Le théorème fondamental de l'analyse nous apprend que $L(u)$ est une primitive de u sur $\mathbb{R}$ et que $L(v)$ est une primitive de v sur $\mathbb{R}$. En dérivant l'égalité $L(u) = L(v)$, on obtient donc $u = v$.

Exercice 2

1. Un nombre complexe non nul et son inverse ont la même image par f.
   Par exemple, on a
   $$f(2) = \frac{5}{2} = f(1/2)$$
   $\boxed{\text{L'application } f \text{ n'est pas injective.}}$

2. Afin d'examiner la surjectivité, on considère $\omega \in \mathbb{C}$; il nous faut déterminer si ω a au moins un antécédent par f dans $\mathbb{C}^*$.
   L'équation $f(z) = \omega$, sur $\mathbb{C}^*$, est équivalente à $z^2 - \omega z + 1 = 0$.
   On sait que cette équation du second degré à coefficients complexes a toujours au moins une solution (une "racine" du trinôme).
   $\boxed{\text{L'application } f \text{ est surjective.}}$

3. On montre l'égalité $f(\mathbb{U}) = [-2, 2]$ par <u>double inclusion</u>.

   • Soit $y \in f(\mathbb{U})$. Il existe $u \in \mathbb{U}$ (un complexe de module 1) tel que $y = f(u)$. On a $f(u) = u + \frac{1}{u} = u + \overline{u} = 2\mathrm{Re}(u)$. Il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $u = e^{i\theta}$, d'où $y = 2\cos(\theta) \in [-2, 2]$.
   • Soit $y \in [-2, 2]$. Or, il existe $\theta \in [0, \pi]$ tel que $y = 2\cos(\theta)$ [on peut même préciser en posant $\theta = \arccos(x/2)$]. On a donc $y = f(e^{i\theta}) \in f(\mathbb{U})$.

4. On montre l'égalité $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^* \cup \mathbb{U}$ par <u>double inclusion</u>.

   • Soit $z \in \mathbb{R}^* \cup \mathbb{U}$.
   Dans le cas où $z \in \mathbb{R}^*$, on a clairement $f(z) = z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}$.
   Dans le cas où $z \in \mathbb{U}$, on a $z^{-1} = \overline{z}$ et $f(z) = z + \frac{1}{z} = z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R}$.
   Dans les deux cas, $f(z) \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire $z \in f^{-1}(\mathbb{R})$.
   • Soit $z \in f^{-1}(\mathbb{R})$. Alors, $z \in \mathbb{C}^*$ et $f(z) = z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}$. On a donc $f(z) = \overline{f(z)}$, soit $z + \frac{1}{z} = \overline{z} + \frac{1}{\overline{z}}$. En multipliant par $z\overline{z}$ on obtient
   $$z^2\overline{z} + \overline{z} = \overline{z}^2 + z \quad \text{soit} \quad (z - \overline{z})\left(|z|^2 - 1\right) = 0.$$
   On obtient donc que $z = \overline{z}$ ou que $|z| = 1$.
   Finalement, on a bien prouvé que $z \in \mathbb{R}^* \cup \mathbb{U}$.

Exercice 3

1. Supposons que f est injective. Montrons que $f_{|A}$ est injective.
   Soit $(x, x') \in A^2$.
   Supposons que $f_{|A}(x) = f_{|A}(x')$, c'est-à-dire $f(x) = f(x')$.
   Puisque f est injective, on a $x = x'$.
2. Supposons que $f_{|A}$ est surjective. Montrons que f est surjective.
   Soit $y \in F$. Il possède un antécédent par $f_{|A}$ dans A, notons-le x.
   L'élément x est a fortiori un antécédent de y par f dans E !
3. • Soit $f : x \mapsto x^2$, définie sur $\mathbb{R}$. Sa restriction de f à $\mathbb{R}_+$ est injective alors que f, bien entendu, ne l'est pas (elle est paire !)
   • L'identité sur $\mathbb{R}$ est surjective. Sa restriction à $\mathbb{R}_+$ n'est pas surjective si on continue de considérer $\mathbb{R}$ comme ensemble d'arrivée : les réels négatifs n'ont pas d'antécédent.

Exercice 4

• Supposons que f, g et h sont bijectives. Alors les fonctions $g \circ f$ et $h \circ g$ sont <u>bijectives</u> comme composées de fonctions bijectives.

• Supposons que $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives.
— L'injectivité de $h \circ g$ donne celle de g (d'après une proposition du cours).
— La surjectivité de $g \circ f$ donne celle de g (idem).
La fonction g est injective et surjective : $\boxed{g \text{ est bijective}}$.

Sa réciproque g^{-1} existe ! Elle permet d'écrire
$$f = g^{-1} \circ (g \circ f) \qquad \text{et} \qquad h = (h \circ g) \circ g^{-1}.$$
Puisque g^{-1} et $g \circ f$ sont des bijections, par composition $\boxed{f \text{ est bijective}}$.
Puisque $h \circ g$ et g^{-1} sont des bijections, par composition $\boxed{h \text{ est bijective}}$.