Exercice 1. Applications, relations.

1. Soit l'application
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n+1 \end{array} \right. .$$
Est-elle injective ? Surjective ?

2. Soit l'application
$$F : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^2 \\ u & \mapsto & (u_0, u_1) \end{array} \right. .$$
Est-elle injective ? Surjective ?

3. Pour deux réels strictement positifs x et y, on écrit $x \sim y$ si $\dfrac{x}{y} \in \mathbb{Q}$.
Démontrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. Soit E un ensemble et $f : E \to \mathbb{R}$ une application injective.
On définit une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E en posant
$$\forall (x,y) \in E^2 \quad x\mathcal{R}y \iff f(x) \leq f(y).$$
Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E. Est-elle totale ?

5. Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur un ensemble E.
Pour $x \in E$, on note $[x]$ sa classe d'équivalence.
Pour toute partie A de E on pose $s(A) = \bigcup\limits_{x \in A} [x]$.
Soit A une partie de E.
   a) Comparer A et $s(A)$.
   b) Simplifier $s\left(s(A)\right)$.

Problème. Autour de la série harmonique et de sa version alternée.

Dans tout ce problème, nous notons, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:
$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Partie A. Un développement asymptotique de (H_n).

1. Montrer que pour tout $x > 0$,
$$\ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$$
2. En déduire que pour tout $x > 0$,
$$\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x)$$
3. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $k \geq 2$,
$$\ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)$$
4. En déduire un encadrement de H_n pour $n \geq 2$. Montrer alors que
$$H_n \longrightarrow +\infty \qquad \text{puis que} \qquad \frac{H_n}{\ln(n)} \longrightarrow 1.$$
5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $d_n = H_n - \ln(n)$.
Prouver que d est décroissante et minorée.
6. En déduire l'existence d'une constante (que nous noterons γ) et d'une suite $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ telle que
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad H_n = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_n \to 0.}$$

La constante γ définie ci-dessus est appelée constante d'Euler et vaut environ $0,577$. Elle intervient dans de nombreux problèmes de mathématiques. Les mathématiciens pensent que ce nombre est irrationnel mais ne savent pas le prouver.

Partie B. Une somme alternée.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $a_k = \dfrac{(-1)^k}{k}$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

7. Démontrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad A_{2n} = H_n - H_{2n}.$$
8. En déduire que (A_n) converge, et préciser $\lim A_n$.

Partie C. Un réarrangement de la somme alternée.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose

$$\sigma(3p+1) = 2p+1, \qquad \sigma(3p+2) = 4p+2, \qquad \sigma(3p+3) = 4p+4 \qquad (\star)$$

On note toujours $a_k = \dfrac{(-1)^k}{k}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}.$$

9. Démontrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad B_{3n} = \frac{1}{2} A_{2n}.$$
10. En déduire que (B_n) converge et préciser $\lim B_n$.
11. Démontrer que $(\star)$ définit une bijection σ de $\mathbb{N}^*$ vers $\mathbb{N}^*$.
12. Expliquer comment le travail précédent permet de donner un sens à l'écriture
$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\sigma(n)} \neq \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$
Pourquoi ce résultat peut-il surprendre ?

Exercice 2. *Plus difficile, à ne traiter que si vous avez fait le reste.*

On cherche à étudier la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \sqrt{n + \ldots \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}}} \quad (n \text{ écrit } n \text{ fois}).$$

Par exemple $u_1 = \sqrt{1}$, $u_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ et $u_3 = \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3}}}$.)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, On définit par récurrence la suite $a^{[n]} = \left(a_p^{[n]}\right)_{p \in \mathbb{N}^*}$ en posant
$$\begin{cases} a_1^{[n]} = \sqrt{n} \\ a_{p+1}^{[n]} = \sqrt{n + a_p^{[n]}} \quad \text{pour tout } p \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$
Montrer que pour tout $p \geq 1$, $a_p^{[n]} \leq \sqrt{p \times n}$.
2. (*) Démontrer que $\dfrac{u_n}{\sqrt{n}} \to 1$.
3. (*) En démontrant qu'elle existe, calculer $\lim(u_n - \sqrt{n})$.
Indication : on pourra calculer $u_n^2 - n$.
