Corrigé du DM 4

$\boxed{\text{A}}$ Ex 1 Q 2 (a) Avoir écrit clairement sur la copie les trois hypothèses du théorème de dérivation des composées : $x \mapsto 2x-1$ est dérivable sur $]0,1[$ elle est à valeurs dans $]-1,1[$, et arcsin est dérivable sur $]-1,1[$.

$\boxed{\text{B}}$ Ex 1 Q 2 (b) Avoir obtenu une dérivée nulle.

$\boxed{\text{C}}$ Ex 1 Q 2 (c) Avoir conclu que la fonction est constante sur $]0,1[$ et avoir donné un argument pour étendre ce résultat sur les bords de l'intervalle.

$\boxed{\text{D}}$ Ex 2 Q 1 : Réduction de l'intervalle de définition : avoir remarqué et exploité l'imparité et la π-périodicité.

$\boxed{\text{E}}$ Ex 2 : Q 2 : Avoir calculé la dérivée de f sans se tromper.

$\boxed{\text{F}}$ Ex 2 : Q 2 : Avoir factorisé l'expression de f' (nécessaire pour étudier son signe !)

$\boxed{\text{G}}$ .Ex 2 : Q 2 : Être parvenu à un tableau de variations correct.

Exercice 1. Une fonction constante : $f : x \mapsto \arcsin(2x-1) - 2\arcsin(\sqrt{x})$.

1. Soit x un réel. La présence de l'écriture $\sqrt{x}$ dans la définition de $f(x)$ impose de prendre x positif. De plus, la fonction arcsin est définie sur $[-1,1]$. Il faut donc que assurer que $2x-1 \in [-1,1]$ et $\sqrt{x} \in [-1,1]$. On a
$$-1 \leq 2x-1 \leq 1 \iff 0 \leq 2x \leq 2 \iff 0 \leq x \leq 1.$$
On a aussi que $\sqrt{x} \in [-1,1]$ si et seulement si $x \in [0,1]$.
$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est définie sur } [0,1].}$

2. (a) Attention ! les fonctions $\sqrt{\cdot}$ et arcsin ont en commun de ne *pas* être dérivables sur tout leur intervalle de définition : la première est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ mais dérivable seulement sur $\mathbb{R}_+^*$ et la seconde est définie sur $[-1,1]$ mais dérivable seulement sur $]-1,1[$.
   • La fonction $x \mapsto \arcsin(2x-1)$ est dérivable sur $]0,1[$ comme composée :
$$]0,1[\xrightarrow{x\mapsto 2x-1}]-1,1[\xrightarrow{x\mapsto \arcsin} \mathbb{R},$$
   $x \mapsto 2x-1$ étant dérivable sur $]0,1[$ et arcsin étant dérivable sur $]-1,1[$.
   • La fonction $x \mapsto \arcsin(\sqrt{x})$ est dérivable sur $]0,1[$ comme composée :
$$]0,1[\xrightarrow{x\mapsto \sqrt{x}}]-1,1[\xrightarrow{x\mapsto \arcsin} \mathbb{R},$$
   $x \mapsto \sqrt{x}$ étant dérivable sur $]0,1[$ et arcsin étant dérivable sur $]-1,1[$.
   • Comme somme, f est dérivable sur $]0,1[$.

   (b) Pour $x \in]0,1[$, on calcule
$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} - 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}^2}}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{(2-2x)\cdot 2x}} - \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = 0.$$
   La fonction f est donc constante sur l'<u>intervalle</u> $]0,1[$.
   Notons c cette constante. On peut évaluer par exemple en $\frac{1}{4}$:
$$c = f\left(\frac{1}{4}\right) = \arcsin(-1/2) - 2\arcsin(1/2) = -3\arcsin(1/2) = -3 \cdot \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}.$$

   (c) Occupons-nous des bornes de $[0,1]$: on vérifie facilement que $f(0) = f(1) = -\frac{\pi}{2}$, ce qui permet de conclure que $\boxed{f \text{ est bel et bien constante sur } [0,1], \text{ et que la constante vaut } -\frac{\pi}{2}}$.

3. (a)
$$\begin{aligned} f\left(\sin^2 t\right) &= \arcsin\left(2\sin^2 t - 1\right) - 2\arcsin\left(\sqrt{\sin^2 t}\right) \\ &= -\arcsin\left(1 - 2\sin^2 t\right) - 2\arcsin\left(|\sin t|\right) \\ &= -\arcsin\left(\cos(2t)\right) - 2\arcsin\left(\sin t\right) \\ &= -\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2t\right)\right) - 2t \\ &= -\left(\frac{\pi}{2} - 2t\right) - 2t \\ &= -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$
   Dans les calculs ci-dessus, on utilise que $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ pour écrire que $\sin t$ est positif (et ôter une valeur absolue) et pour simplifier $\arcsin(\sin t)$ et on utilise que $\frac{\pi}{2} - 2t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ pour simplifier $\arcsin\left(\sin(\frac{\pi}{2} - a)\right)$.

   (b) Soit $x \in [0,1]$. Il existe un réel t dans $[0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $x = \sin^2 t$: il suffit de prendre $t = \arcsin(\sqrt{x})$ (qui est bien dans $[0, \frac{\pi}{2}]$ puisque $\sqrt{x} \in [0,1]$). On obtient que
$$f(x) = f\left(\sin^2 t\right) = -\frac{\pi}{2}.$$
   On a retrouvé que f est constante, égale à -$\frac{\pi}{2}$.

Exercice 2. Une fonction pas constante.

1. La fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, est π-périodique (le vérifier). On peut donc restreindre son étude à un intervalle de longueur π.
   En remarquant par ailleurs que f est impaire (facile), on en conclut qu'on peut restreindre l'étude à $[0, \frac{\pi}{2}]$.
   Sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, cette dérivée est positive sur $[0, \frac{\pi}{3}]$ puis négative sur $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$. On obtient le tableau de variations

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (et donc en particulier sur $[0, \frac{\pi}{2}]$) comme produit composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\cos x \sin x \sin(2x) + \sin^2 x \cdot 2\cos(2x) \\ &= 2\sin x\,(\cos x \sin(2x) + \sin x \cos(2x)) \\ &= 2\sin x \sin(x + 2x) \\ &= 2\sin x \sin(3x). \end{aligned}$$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
u	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$	$\searrow$	0

En complétant le tableau de variations par imparité et π-périodicité, on s'aperçoit que le f a pour maximum

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

L'opposé de ce nombre est le minimum de f.

3. On calcule

$$\begin{aligned} \left|\prod_{k=0}^{n} \sin(2^k x)\right|^3 &= \left|(\sin x)^3\,(\sin(2x))^3\,(\sin(4x))^3 \cdots (\sin(2^n x))^3\right| \\ &= \left|(\sin x)^2(\sin x)\sin^2(2x) \times \sin(2x)\sin^2(4x) \times \cdots \times \sin(2^{n-1}x)\sin^2(2^n x) \times \sin(2^n \right. \\ &= \left|(\sin x)^2 f(x) f(2x) \times \cdots \times f(2^{n-1}x)\sin(2^n x)\right| \\ &\leq 1 \times \prod_{k=0}^{n-1} |f(2^k x)| \times 1 \end{aligned}$$

En majorant les sinus sur les "bords" par 1 en valeur absolue.
D'après la question 1, quelle que soit la valeur de x et de k, on a

$$|f(2^k x)| \leq \frac{3\sqrt{3}}{8} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3.$$

En faisant un produit d'inégalités avec membres positifs,

$$\left|\prod_{k=0}^{n} \sin(2^k x)\right|^3 \leq \prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3n}.$$

En passant à la racine cubique, (fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$), on obtient

$$\left|\prod_{k=0}^{n} \sin(2^k x)\right| \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$$