Corrigé du DM 24

Mini-problème.
Les fonctions absolument monotones sont sommes de leur série de Taylor.

1. (a) La fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ et pour tout entier naturel n, on a $\exp^{(n)} = \exp$.
$\boxed{\text{La fonction exponentielle est une fonction AM sur tout intervalle de } \mathbb{R}.}$

   (b) La fonction $x \mapsto 1-x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1[$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et $-\ln$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Par composition $u : x \mapsto -\ln(1-x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1[$.
Pour $x \in [0,1[$, on a $u'(x) = (1-x)^{-1}$, $u''(x) = (1-x)^{-2}$, $u^{(3)}(x) = 2(1-x)^{-3}$.
On conjecture que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1[$ $u^{(n)}(x) = (n-1)!(1-x)^{-n}$.
Ceci se prouve facilement par récurrence. Et puisqu'on trouve des dérivées successives strictement positives sur $[0,1[$ (c'est aussi le cas pour celle d'ordre 0) on a prouvé que $\boxed{x \mapsto -\ln(1-x) \text{ est AM sur } [0,1[}$.

2. (a) Puisque f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I, la formule de Taylor avec reste intégrale donne pour $x \in [0,b[$

$$\boxed{R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t}.$$

   (b) Pour $x \in [0,b[$ fixé, puisque f est AM sur $[0,b[$, $f^{(n+1)}$ y est positive, et la fonction $t \mapsto \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)$ est continue et positive sur $[0,x]$ (avec $0 \leq x$). Par positivité de l'intégrale, $\boxed{\text{le nombre } R_n(x) \text{ est positif}}$.

   (c) Montrer que $x \mapsto \dfrac{R_n(x)}{x^n}$ est croissante sur $[0,b[$ et préciser $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{R_n(x)}{x^n}$.

Soient x et y tels que $0 < x \leq y < b$. Pour $t \in [0,x]$, on a

$$\frac{(1-\frac{t}{x})^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \leq \frac{(1-\frac{t}{y})^n}{n!} f^{(n+1)}(t).$$

Par croissance de l'intégrale ($0 \leq x$)

$$\frac{R_n(x)}{x^n} = \int_0^x \frac{(1-\frac{t}{x})^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t \leq \int_0^x \frac{(1-\frac{t}{y})^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

Or, par relation de Chasles,

$$\int_0^x \frac{(1-\frac{t}{y})^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t = \underbrace{\int_0^y \frac{(1-\frac{t}{y})^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t}_{=\frac{R_n(y)}{y^n}} - \underbrace{\int_x^y \frac{(1-\frac{t}{y})^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t}_{\geq 0}$$

Par transitivité, on en déduit que $\boxed{\dfrac{R_n(x)}{x^n} \leq \dfrac{R_n(y)}{y^n}}$.

Pour la limite de $\frac{R_n(x)}{x^n}$ en 0, on peut revenir à la définition de $R_n(x)$. En effet, puisque c'est la différence d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[0,b[$, la formule de Taylor-Young nous assure que $R_n(x) \underset{0}{=} o(x^n)$. On a donc

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{R_n(x)}{x^n} = 0}.$$

   (d) Le réel x a été fixé dans $[0,b[$.
Puisque la fonction f est AM sur $[0,b[$, la série $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ est à termes positifs.
La positivité du reste établie en 2-(a) nous donne que pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \leq f(x).$$

Puisque la somme partielle de la série à terme positifs est majorée,

$$\boxed{\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \text{ converge}}$$

   (e) En utilisant 2-(c), on obtient pour $0 < x < y < b$

$$0 \leq R_n(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^n R_n(y) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^n f(y).$$

Puisque $|\frac{x}{y}| < 1$, ceci donne que $R_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et prouve que

$$\boxed{S(x) = f(x) \text{ pour tout } x \in [0,b[.}$$

Exercice facultatif(*)

• Analyse.
Notons f la permutation (123)(456) et considérons $\sigma \in S_6$ telle que $\sigma \circ f = f \circ \sigma$.
On a donc

$$\sigma \circ f \circ \sigma^{-1} = f$$

soit

$$\sigma \circ (123) \circ (456) \circ \sigma^{-1} = (123) \circ (456)$$

ou encore

$$\left(\sigma \circ (123) \circ \sigma^{-1}\right) \left(\sigma \circ (456) \circ \sigma^{-1}\right) = (123) \circ (456)$$

Nous savons calculer le "conjugué" d'un cycle. En l'espèce,

$$\sigma \circ (123) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(1)\ \sigma(2)\ \sigma(3)) \quad \text{et} \quad \sigma \circ (455) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(4)\ \sigma(5)\ \sigma(6))$$

On a donc

$$(\sigma(1)\ \sigma(2)\ \sigma(3)) \circ (\sigma(4)\ \sigma(5)\ \sigma(6)) = (123) \circ (456)$$

L'unicité de la décomposition de f en produit de cycles amène que

$$(\sigma(1)\ \sigma(2)\ \sigma(3)) = (123) \quad \text{ou bien} \quad (\sigma(1)\ \sigma(2)\ \sigma(3)) = (456),$$

même chose pour $(\sigma(4)\ \sigma(5)\ \sigma(6))$.

• Synthèse. On souhaite construire une permutation σ telle que

$$(\sigma(1)\ \sigma(2)\ \sigma(3)) = (123) \quad \text{et} \quad (\sigma(4)\ \sigma(5)\ \sigma(6)) = (456),$$

ou bien

$$(\sigma(1)\ \sigma(2)\ \sigma(3)) = (456) \quad \text{et} \quad (\sigma(4)\ \sigma(5)\ \sigma(6)) = (123).$$

Dans le premier cas, il suffit de choisir $\sigma(1)$ et $\sigma(4)$ pour fixer la permutation (3×3 choix).
Dans le second cas, on a 9 choix aussi.
Bien sûr, si σ est ainsi choisie, elle commute avec f car on a alors $\sigma \circ f \circ \sigma^{-1} = f$.

• Conclusion. Il y a $\boxed{\text{18 permutations qui commutent avec ce produit de 3-cycles}}$.