Dérivabilité

Dans tout le cours, I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

1 Dérivabilité.

1.1 Définition et exemples.

Définition 1 (Dérivabilité en un point)**.**

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ et $a \in I$. La fonction f est dite **dérivable en** a si le taux d'accroissement

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

admet une limite finie quand x tend vers a.

Lorsqu'elle existe, cette limite est appelée **nombre dérivé** en a et notée $f'(a)$.

Une autre écriture du taux d'accroissement de f au point a est

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

(on se demande alors si une limite finie existe lorsque h tend vers 0, pour h différent de 0).

Figure. Dans le cas réel : fonction dérivable en un point, pentes des cordes, pente de la tangente.

Définition 2 (Dérivabilité sur un intervalle)**.**

On dit que $f : I \to \mathbb{K}$ est **dérivable sur** I si elle est dérivable en tout point de I.
On appelle alors **dérivée** de f la fonction $f' : \left\{ \begin{array}{lcl} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array} \right.$.
L'ensemble des fonctions dérivables sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ sera noté $\mathcal{D}(I, \mathbb{K})$.

On peut étendre la définition précédente à une réunion disjointe d'intervalles ouverts : une fonction étant déclarée dérivable sur cet ensemble si sa restriction à chacun des intervalles y est dérivable.

Proposition 3.

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ et $a \in I$.

1. Si f est dérivable en a, alors elle est continue en a.
2. Si f est dérivable sur I, alors elle est continue sur I. Ceci s'écrit aussi : $\mathcal{D}(I, \mathbb{K}) \subset \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$.

La réciproque de la proposition précédente est fausse : on trouvera ci-dessous des exemples qui le montrent.

Exemple 4.

1. La fonction $x \mapsto |x|$ est continue en 0. Elle n'y est pas dérivable.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto x^a$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Rappelez pour quelles valeurs de a la fonction f est prolongeable par continuité.
   Pour lesquelles de ces valeurs la fonction ainsi prolongée est-elle dérivable en 0 ?
3. Soient $f : x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et $g : x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ définies sur $\mathbb{R}^*$.
   Après avoir montré qu'on pouvait les prolonger par continuité en 0, établir si ces prolongements sont dérivables en 0.
   Représenter le graphe de ces fonctions au voisinage de 0.

On propose une caractérisation de la dérivabilité pour les fonctions à valeurs complexes.

Proposition 5.

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ et $a \in I$. On note $\alpha : x \mapsto \mathrm{Re}\,(f(x))$ et $\beta : x \mapsto \mathrm{Im}\,(f(x))$.

$$f \text{ est dérivable en } a \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha \text{ et } \beta \text{ sont dérivables en } a$$

Dans le cas où f est dérivable en a, on a

$$f'(a) = \alpha'(a) + i\beta'(a).$$

Exemple. Vérifier que $t \mapsto e^{it}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et préciser sa dérivée.

Définition 6.

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ et $a \in I$. On dit que f est
- **dérivable à gauche** en a si le taux d'accroissement en a admet une limite à gauche (finie).
- **dérivable à droite** en a si le taux d'accroissement en a admet une limite à droite (finie).

Lorsque ces limites existent, on note

$$f'_g(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{et} \quad f'_d(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Figure. Dans le cas réel : demi-tangentes d'une fonction dérivable à gauche et à droite.

Proposition 7 (Caractérisation de la dérivabilité en a)**.**

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ et a un élément de I qui n'est pas une borne de I.

$$f \text{ est dérivable en } a \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} f \text{ est dérivable à gauche en } a \\ f \text{ est dérivable à droite en } a \\ f'_g(a) = f'_d(a) \end{cases}$$

Dans le cas où f est dérivable en a, on a $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.

On termine avec la définition suivante, qui décrit des fonctions « un peu mieux que dérivable ».

Définition 8.

Une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ est dite **de classe $\mathcal{C}^1$** sur I si
- elle est dérivable sur I
- sa dérivée f' est continue sur I

Certains auteurs parlent aussi de fonctions « continûment dérivables ».
L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ sera noté $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$.

Exemple 9 (Une fonction dérivable mais pas $\mathcal{C}^1$: un exemple en cinq étapes)**.**

1. Une définition sur $\mathbb{R}^*$: $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}; x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
2. Prolongement en 0. Pour $x \in \mathbb{R}^*$ $|g(x)| \leq x^2$ donc g a une limite nulle en 0.
   On prolonge g par continuité en posant $g(0) = 0$.
3. Dérivabilité de g sur $\mathbb{R}^*$? **Oui** : par produit et composée. On a
   $$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad g'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x).$$
4. Dérivabilité de g en 0 ? **Oui** : on l'a vu en début de cours : le taux d'accroissement en 0 tend vers 0 et on a $g'(0) = 0$.
5. g est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$? **Non** : g' est continue sur $\mathbb{R}^*$ par produit et composée mais à cause de $\cos(1/x)$, g' n'a pas de limite en 0 ! Elle ne saurait donc y être continue.

1.2 Dérivabilité en un point et développement limite à l'ordre 1.

Lemme 10.

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ et $a \in I$.
Si f est dérivable en a, il existe une fonction ε définie au voisinage de 0 telle que

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h) \quad \text{et} \quad \varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Plus précisément, l'égalité ci-dessus est vraie pour tout $h \in \{x - a \mid x \in I \setminus \{a\}\}$.

Définition 11.

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ et $a \in I$. On dit que f admet un **développement limité** en a **à l'ordre** 1 s'il existe deux nombres a_0 et a_1 dans $\mathbb{K}$ et une fonction ε définie au voisinage de 0 tels que

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + h\varepsilon(h) \quad \text{et} \quad \varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Lemme 12.

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ et $a \in I$.
On suppose que f admet un DL en a à l'ordre 1 : il existe deux nombres a_0 et a_1 dans $\mathbb{K}$ et une fonction ε définie au voisinage de 0 tels que

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + h\varepsilon(h) \quad \text{et} \quad \varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

La fonction f est dérivable en a et nécessairement,

$$a_0 = f(a) \quad \text{et} \quad a_1 = f'(a).$$

Les deux lemmes précédents sont les deux implications d'une caractérisation énoncée comme suit :

Théorème 13.

Une fonction est dérivable en un point ssi elle y admet un développement limité à l'ordre 1.

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ dérivable en a. On vient de comprendre qu'il existe une fonction ε qui tend vers 0 en a telle que pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, on a

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x).$$

Dans ce développement limité de f en a à l'ordre 1, les termes sont écrits du plus *grand* au plus *petit* (on rendra cela rigoureux). Le terme $(x-a)\varepsilon(x)$ peut être vu comme l'erreur d'approximation lorsqu'on écrit

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a).$$

Une fonction dérivable en a, c'est une fonction qui se comporte au voisinage de a comme une fonction affine. Sa courbe représentative y admet pour tangente la droite d'équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

1.3 Dérivabilité et opérations.

Proposition 14 (Somme, produit, quotient).

Soient $f, g : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions dérivables en $a \in I$. Alors,

- pour tous λ et μ dans $\mathbb{K}$, $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a et
$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a),$$
- fg est dérivable en a et
$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a),$$
- Si $g(a) \neq 0$, alors g ne s'annule pas au voisinage de a et f/g est dérivable en a : on a
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{g(a)f'(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Corollaire 15 (du local au global).

Soient $f, g \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$. Alors,

- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad \lambda f + \mu g \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ et $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$,
- $fg \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ et $(fg)' = f'g + fg'$,
- Si g ne s'annule pas sur I, alors $f/g \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ et $(f/g)' = (gf' - fg')/g^2$.

Théorème 16 (Composition).

Soit $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{K}$. Soit $a \in I$.
Si f est dérivable au point a et g dérivable au point $f(a)$, alors
$$g \circ f \text{ est dérivable en } a \quad \text{ et } \quad (g \circ f)'(a) = f'(a) \cdot g'(f(a)).$$

Corollaire 17 (du local au global).

Soit $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{K}$. Supposons que f est dérivable sur I et g dérivable sur J. Alors,
$$g \circ f \text{ est dérivable sur } I \quad \text{ et } \quad (g \circ f)' = f' \times g' \circ f.$$

Exemple 18 (jongler avec les théorèmes globaux et le point de vue local).

Établir la dérivabilité de $f : x \mapsto \sqrt{x \sin(x)}$ sur $[0, \pi[$ et préciser sa dérivée.

1.4 Dérivabilité d'une réciproque.

Théorème 19 (Dérivabilité d'une réciproque)**.**

Soit f une fonction continue réalisant une bijection de I dans J, de réciproque $f^{-1} : J \to I$. Supposons que f est dérivable en un point $a \in I$.

$$f^{-1} \text{ est dérivable au point } f(a) \quad \text{si et seulement si} \quad f'(a) \neq 0.$$

Lorsqu'il y a dérivabilité en $f(a)$, on a $\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

Corollaire 20 (du local au global)**.**

Soit f une fonction réalisant une bijection de I dans J, de réciproque $f^{-1} : J \to I$.
Si f est dérivable sur I et que f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J et

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Exemple 21.

Justifier brièvement que sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Notons argsh sa réciproque.
Sans chercher à l'expliciter, montrer que argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

1.5 Extremum local et point critique.

Définition 22.

On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ admet un **extremum local** en $a \in I$ si $f(a)$ est un extremum de f au voisinage de a. Plus précisément, on dit que f admet un maximum local en a si

$$\exists \eta > 0 \quad \forall x \in I \cap [a-\eta, a+\eta] \quad f(x) \leq f(a)$$

Proposition 23 (Extremum local et dérivabilité)**.**

Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert et $c \in]a, b[$.
Si f admet un extremum local en c et y est dérivable, alors $f'(c) = 0$.
Un point c où la dérivée de f s'annule est appelé un **point critique** de f.

Exemple 24 (la réciproque est fausse et toutes les hypothèses comptent)**.**

1. $x \mapsto x^3$ a un point critique en 0 qui n'est pas un extremum local.
2. $x \mapsto |x|$ a un minimum global en 0 : elle n'y est pas dérivable.
3. Montrer qu'il est essentiel que c soit à l'*intérieur* de l'intervalle.

2 Fonctions dérivables sur un intervalle et à valeurs réelles.

Dans tout ce qui suit, a et b sont deux réels tels que $a < b$.

2.1 Théorème de Rolle.

Théorème 25 (de Rolle)**.**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$, alors

$$\exists c \in]a, b[\quad f'(c) = 0.$$

Exemple 26.

Soit $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$. Montrer que si f s'annule n fois ($n \in \mathbb{N}^*$), alors f' s'annule (au moins) $n-1$ fois.

2.2 Egalité des accroissements finis.

Théorème 27 (Égalité des accroissements finis)**.**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors,

$$\exists c \in]a, b[\quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Remarque. Idée de preuve à retenir : on pose une fonction auxiliaire $\Phi : x \mapsto f(x) - A(x - a)$, en choisissant la constante A de manière à "compenser la pente" et ainsi pouvoir appliquer le théorème de Rolle à Φ.

Remarque. Notons que le théorème ci-dessus concerne des accroissements où b ne tend pas vers a ! C'est en ce sens que les accroissements sont **finis**, là où dans la partie 1, le passage à la limite les rendait *infinitésimaux*. On pourrait donc renommer ce résultat : théorème des accroissements **macroscopiques**.

En guise de première application des accroissements finis, on propose (enfin !) la démonstration d'un théorème bien connu des lycéens.

Théorème 28 (Caractérisation des fonctions monotones parmi les fonctions dérivables)**.**

Soit I un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.

- f est croissante sur I si et seulement si f' est positive sur I.
- f est décroissante sur I si et seulement si f' est négative sur I.
- f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I.

- Si f' est strictement positive sur I, alors f y est strictement croissante. Réciproque fausse.
- Si f' est strictement négative sur I, alors f y est strictement décroissante. Réciproque fausse.

2.3 Inégalité des accroissements finis.

Théorème 29 (Inégalité des accroissements finis)**.**

Soit $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$. Si $|f'|$ est majorée par un réel K, alors f est K-lipschitzienne.

Exemple 30.

(Re)-démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |\sin x| \leq |x|.$$

Exemple 31.

Démontrer

$$\forall x, y \in [1, +\infty[\quad \left| \frac{\sin x}{x} - \frac{\sin y}{y} \right| \leq 2|x - y|.$$

Exemple 32.

Montrer qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment y est lipschitzienne.

Application. Fonction contractante et convergence linéaire vers le point fixe.

Soit $f : I \to I$ une application k-lipschitzienne, avec $0 \leq k < 1$: elle est dite *contractante*.
On suppose de surcroît que f admet un point fixe $\alpha \in I$: $f(\alpha) = \alpha$.
Ce point fixe est alors unique (on le montre).

Soit (u_n) une suite définie par $\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$

On montre que $\underline{(u_n) \text{ converge vers } \alpha}$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leq k|u_n - \alpha|.$$

Une récurrence amène immédiatement

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \alpha| \leq k^n |u_0 - \alpha|.$$

La convergence de u vers α est linéaire, en échelle logarithmique : $-\ln|u_n - \alpha|$ est majorée par une fonction linéaire de n. Si on regarde u_n comme une approximation de α, le nombre de *décimales exactes* dans l'approximation croît comme une fonction linéaire de n.
Voir le TD pour un exemple de convergence linéaire vers le point fixe.

Une méthode offrant de meilleurs résultats numériques : la **méthode de Newton**, pour laquelle la vitesse de convergence est quadratique, avec une majoration de l'erreur de la forme

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \alpha| \leq k^{2^n} |u_0 - \alpha|,$$

où $0 \leq k < 1$. Cette fois, le nombre de décimales exactes double à chaque itération !

2.4 Théorème de la limite de la dérivée.

Théorème 33 (de la limite de la dérivée).

Soit $a \in I$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et continue en a. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

$$\text{Si} \quad f'(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \neq a}}{\longrightarrow} \ell \quad \text{alors} \quad \underline{f \text{ est dérivable en } a} \text{ de dérivée } f'(a) = \ell.$$

Automatiquement f' est continue en a.
Si de surcroît la fonction f' est continue sur $I \setminus \{a\}$, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

La réciproque est fausse, on le constate sur l'exemple de $g : x \mapsto x^2 \sin(\frac{1}{x})$: cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, et en particulier en 0, alors que sa dérivée sur $\mathbb{R}^*$ n'a pas de limite en 0.

Proposition 34 (limite $\pm\infty$ pour la dérivée).

Soit $a \in I$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et continue en a.

$$\text{Si} \quad f'(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \neq a}}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{alors} \quad \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{\substack{x \to a \\ x \neq a}}{\longrightarrow} +\infty.$$

Exemple 35 (Un prolongement $\mathcal{C}^1$).

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$ telle que $f'(0) = 0$.
Démontrer que $g : x \mapsto f\left(\sqrt{x}\right)$ est sur $\mathbb{R}_+$ et que sa dérivée y est continue.

2.5 Le cas des fonctions à valeurs complexes.

Exemple 36 (Pas de théorème de Rolle lorsque les images sont complexes).

Soit $f : t \mapsto e^{it}$, $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$.
Vérifier que f est continue sur $[0, 2\pi]$, dérivable sur $]0, 2\pi[$ et que $f(0) = f(2\pi)$.
Montrer ensuite que f' ne s'annule pas sur $]0, 2\pi[$.

Puisque le théorème de Rolle peut être vu comme un cas particulier de l'égalité des accroissements finis, on comprend que ce théorème ne s'étend pas aux fonctions à valeurs complexes. L'inégalité des accroissements finis, elle, demeure vraie comme on le voit ci-dessous.

Proposition 37 (Inégalité des accroissements finis pour des images complexes).

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, telle que le module de la dérivée est majoré sur I par une constante $K \geq 0$. Alors f est K-lipschitzienne sur I, on a cette inégalité pour les modules :

$$\forall (x, y) \in I^2 \quad |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|,$$

3 Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$.

3.1 Définition de la classe $\mathcal{C}^n$.

Définition 38.

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble des fonctions n **fois dérivables** sur I, noté $\mathcal{D}^n(I, \mathbb{K})$, et pour f dans cet ensemble, sa **dérivée** n**ème** $f^{(n)}$, ou dérivée à l'ordre n.

- On pose $\mathcal{D}^0(I, \mathbb{K}) = \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$: toutes les fonctions définies sur I sont 0 fois dérivables, et pour $f : I \to \mathbb{K}$, on pose $f^{(0)} := f$.
- Supposons $\mathcal{D}^n(I, \mathbb{K})$ bien défini pour $n \in \mathbb{N}$, ainsi que $f^{(n)}$ pour $f \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{K})$.
  Alors, $\mathcal{D}^{n+1}(I, \mathbb{K})$ est l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{K})$ telle que $f^{(n)}$ est dérivable sur I ; on pose alors
$$f^{(n+1)} := \left(f^{(n)}\right)'.$$

Remarques. $\mathcal{D}^1(I, \mathbb{K}) = \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ et la dérivée à l'ordre 1 est la dérivée... tout court.
Si $f \in \mathcal{D}^2(I, \mathbb{K})$, elle est dérivable et sa dérivée f' est elle-même dérivable, f a une dérivée d'ordre 2, dite aussi dérivée seconde : $f^{(2)} = (f')'$ souvent notée f''.

Lemme 39.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f est n fois dérivable sur I et si $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$ vérifie $k + l \leq n$, alors
$$f^{(k+\ell)} = \left(f^{(k)}\right)^{(\ell)}.$$

En particulier, si f est dérivable $n+1$ fois sur I, on a : $\quad f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$ et $f^{(n+1)} = \left(f'\right)^{(n)}$.

Définition 40.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que $f : I \to \mathbb{K}$ est **de classe** $\mathcal{C}^n$ sur I si
— elle est dérivable n fois sur I
— sa dérivée $n$ème $f^{(n)}$ est continue sur I.
Notamment, les fonctions de classe $\mathcal{C}^0$ sur I sont les fonctions qui y sont continues.
L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I sera noté $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.

$$\boxed{\mathcal{D}^{n+1}(I, \mathbb{K}) \subset \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K}) \subset \mathcal{D}^n(I, \mathbb{K}) \ \dots \subset \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}) \subset \mathcal{D}^1(I, \mathbb{K}) \subset \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}).}$$

Proposition 41.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \to \mathbb{K}$.
$$f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K}) \iff (f \text{ est dérivable sur } I \text{ et } f' \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})).$$

Définition 42.

On appelle fonction **de classe** $\mathcal{C}^\infty$ sur I une fonction qui est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{K}) := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K}).$$

Exemples.

- Les fonctions exp, ln, cos, sin, tan, ch, sh, ainsi que les fonction polynomiales et leurs quotients sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur domaine de définition, et cela peut être affirmé sans démonstration.
- Les fonctions $x \mapsto x^a$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Les fonction arcsin et arccos, définies sur $[-1, 1]$, sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$.

3.2 Stabilité par opérations de la classe $\mathcal{C}^n$.

Dans ce qui suit, $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Proposition 43 ($\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ est stable par combinaison linéaire.)**.**

Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, alors pour tous λ et μ réels, $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.
Dans le cas où n est fini,

$$(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}.$$

Proposition 44 ($\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ est stable par produit/Formule de Leibniz)**.**

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, Alors, la fonction fg est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.
Dans le cas où n est fini,

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Exemple 45.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : x \mapsto x^n \cos(x)$.
Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $f^{(k)}(0)$ pour $k \in [\![0, n]\!]$.

Proposition 46.

- Si f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, avec g ne s'annulant pas sur I, alors (f/g) est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.
- Soient $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$. Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et g est de classe $\mathcal{C}^n$ sur J alors, $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.
- Soit $f : I \to J$ bijective et de classe $\mathcal{C}^n$ sur I $(n \geq 1)$.
  Si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^n$ sur J.

Exercices

$\boxed{\textbf{23.1}}$ **[♦◇◇]** Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel a et dérivable en a. Montrer que la limite suivante existe et la calculer :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}.$$

$\boxed{\textbf{23.2}}$ **[♦♦◇]** Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(x) - f(y) \leq (x-y)^2$.

$\boxed{\textbf{23.3}}$ **[♦♦♦]** Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ dérivable telle que $f' = f \circ f$.

$\boxed{\textbf{23.4}}$ **[♦♦◇]** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable et tendant vers une même limite finie en $+\infty$ et $-\infty$.
Montrer que la dérivée de f s'annule sur $\mathbb{R}$.
Indication : on pourra s'intéresser à la fonction $g : \left\{ \begin{array}{ccc}]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(\tan(x)) \end{array} \right.$.

$\boxed{\textbf{23.5}}$ **[♦♦◇]** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$ telle que $f(a) = 0$ et $\forall k \in [\![0, n-1]\!] \ f^{(k)}(b) = 0$.
Démontrer que les fonctions $f', f^{(2)}, \ldots$ et $f^{(n)}$ s'annulent sur $]a,b[$.

$\boxed{\textbf{23.6}}$ **[♦♦♦]** Soit f une fonction dérivable sur $[0,1]$ telle que $f(0) = f(1) = f'(0) = 0$.
Montrer que la tangente à la courbe de f en un certain point de $]0,1[$ est une droite qui passe par l'origine.

$\boxed{\textbf{23.7}}$ **[♦♦◇]** En appliquant le théorème des accroissements finis entre k et $k+1$ à la fonction $x \mapsto \ln|\ln(x)|$, démontrer que la suite de terme général $\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$ diverge.

$\boxed{\textbf{23.8}}$ **[♦♦◇]** La fonction $x \mapsto x^x$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ (on rappelle que $0^0 = 1$).
Démontrer qu'elle est continue en 0 mais qu'elle n'y est pas dérivable.

$\boxed{\textbf{23.9}}$ **[♦♦◇]** Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$

1. Démontrer que f possède un unique point fixe ℓ sur $\mathbb{R}_+^*$ que l'on exprimera à l'aide de a.
   Justifier que $[\ell, +\infty[$ est stable par f.
2. Démontrer que f est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur $[\ell, +\infty[$.
3. Soit u la suite définie par $u_0 \in [\ell, +\infty[$ et par $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$.
   Démontrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \ell| \leq C \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

$\boxed{\textbf{23.10}}$ **[♦♦◇]** Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[\quad \tan^{(n)}(x) \geq 0.$$

$\boxed{\textbf{23.11}}$ **[♦♦◇]** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x > 0$,

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\Big(x^{n-1}\ln(x)\Big) = \frac{(n-1)!}{x}$$

$\boxed{\textbf{23.12}}$ **[♦♦♦]** Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)$$
