Exercice 1. Calculs de primitives et d'intégrales.

---

a) Donner une primitive pour chacune des fonctions ci-dessous, en précisant chaque fois son intervalle de définition.

$$a : x \mapsto \mathrm{th}(x); \quad b : x \mapsto \frac{1}{x\ln^2(x)}; \quad c : x \mapsto x\sqrt{1-x^2}; \quad d : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

---

b) Calculer les deux intégrales ci-dessous :

$$I = \int_{\ln(2)}^{\ln(3)} \mathrm{ch}(x)\mathrm{d}x; \qquad J = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t+1}}\mathrm{d}t;$$

---

c) On considère les deux intégrales ci-dessous :

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad J = \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x.$$

1. Calculer I à l'aide du changement de variable $x = \tan(t)$.
2. En déduire la valeur de J.

---

d) Calculer $\displaystyle\int_0^1 x\arctan^2(x)\mathrm{d}x$.

---

e) Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t+\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ (en posant $x = \sqrt{t}$).

---

f) Soit $a > 0$. Calculer $\displaystyle I_a = \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\arctan(x)}{x}\mathrm{d}x$, en posant $u = \frac{1}{x}$.

---

g) (*) Soit $x \in]-1, 1[$. À l'aide de $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$, montrer que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1 + x\cos(t)} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \times \arctan\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)$$

Exercice 2..

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n \,\mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Démontrer que la suite (I_n) est décroissante puis prouver qu'elle est convergente (on utilisera un théorème sur les suites vu au lycée).
3. Démontrer que pour tout entier naturel n, $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$.
4. En déduire $\lim I_n$.
5. Prouver que
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (-1)^n I_{2n} = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k-1} \quad \text{et} \quad (-1)^n I_{2n+1} = \frac{\ln(2)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k}.$$
6. En déduire la valeur des nombres
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k-1}.$$