

---

<b>1</b>	<b>Applications linéaires et opérations.</b>	<b>2</b>
1.1	Définition et premières propriétés. . . . .	2
1.2	Exemples. . . . .	3
1.3	Noyau et image d'une application linéaire. . . . .	4
1.4	Structure de $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$ . . . . .	5
1.5	Composition des applications linéaires. . . . .	6
1.6	Isomorphismes. . . . .	6
1.7	Deux modes de définition d'une application linéaire. . . . .	7
<b>2</b>	<b>Endomorphismes.</b>	<b>8</b>
2.1	L'anneau $\mathcal{L}(E)$ . . . . .	8
2.2	Groupe linéaire. . . . .	9
2.3	Homothéties . . . . .	9
2.4	Projecteurs. . . . .	10
2.5	Symétries. . . . .	12
<b>3</b>	<b>Applications linéaires et dimension finie.</b>	<b>13</b>
3.1	Image d'une base. . . . .	13
3.2	Isomorphismes et dimension finie. . . . .	13
3.3	Rang d'une application linéaire. . . . .	15
3.4	Théorème du rang. . . . .	16
<b>4</b>	<b>Hyperplans.</b>	<b>17</b>
4.1	Formes linéaires et hyperplans. . . . .	17
4.2	Intersection d'hyperplans. . . . .	19
	<b>Exercices</b>	<b>20</b>

---

On a déjà défini dans le cours *Espaces vectoriels* les notions d'application linéaire, d'image et de noyau. Les énoncés correspondants sont répétés ici, afin d'obtenir un chapitre autonome.

# 1 Applications linéaires et opérations.

On se donne  $E, F$  et  $G$  trois  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

## 1.1 Définition et premières propriétés.

### Définition 1.

On appelle **application linéaire** entre  $E$  et  $F$  une application  $u : E \rightarrow F$  telle que

$$\forall x, y \in E \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y).$$

(l'image de la combinaison linéaire, c'est la combinaison linéaire des images)

Une application linéaire de  $E$  dans  $E$  est appelée **endomorphisme** de  $E$ .

Une application linéaire de  $E$  dans  $\mathbb{K}$  (vu comme  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel) est une **forme linéaire**.

**Remarque.** Il est équivalent de définir la linéarité d'une application  $u : E \rightarrow F$  à l'aide des propriétés

1.  $\forall x, y \in E \quad u(x + y) = u(x) + u(y)$  (propriété de morphisme de groupes additifs)
2.  $\forall x \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad u(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot u(x)$  (propriété d'homogénéité).

Certains auteurs préfèrent n'utiliser qu'un scalaire dans leur définition de la linéarité. Il est assez clair en effet que si  $u : E \rightarrow F$  est une application entre deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels,

$$u : E \rightarrow F \text{ est linéaire} \quad \text{si et seulement si} \quad \forall x, y \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y).$$

**Remarque.** S'il nous faut justifier qu'une certaine application  $u$  définie sur  $E$  est un endomorphisme de  $E$ , on commencera par vérifier sa linéarité puis, si ce n'est pas clair, on expliquera pourquoi l'image par  $u$  d'un élément de  $E$  est bien un élément de  $E$ .

### Notation.

L'ensemble des applications linéaires de  $E$  vers  $F$  est noté

$$\mathcal{L}(E, F)$$

Plutôt que  $\mathcal{L}(E, E)$ , l'ensemble des endomorphismes de  $E$  est noté  $\mathcal{L}(E)$ .

### Proposition 2.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors,

1.  $u(0_E) = 0_F$ .
2.  $\forall x \in E, \quad u(-x) = -u(x)$ .
3. Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , toute famille  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$  et toute famille  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ ,

$$u \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i u(x_i).$$

**Proposition 3** (Image directe/réciproque d'un s.e.v. par une application linéaire).

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ .

1. Si  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , alors  $u(G)$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ .
2. Si  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ , alors  $u^{-1}(H)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

Soient deux applications  $u : E \rightarrow F$  et  $v : E \rightarrow F$  (non forcément linéaires). On rappelle que

$$u = v \quad \text{signifie :} \quad \forall x \in E \quad u(x) = v(x).$$

**Proposition 4** (Conditions nécessaires pour l'égalité).

Soient  $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$ .

1. Si  $u$  et  $v$  coïncident sur une famille génératrice de  $E$ , alors  $u = v$ .
2. Si  $u$  et  $v$  coïncident sur deux sous-espaces supplémentaires dans  $E$ , alors  $u = v$ .

**Lemme 5.**

La restriction d'une application linéaire à un sev est linéaire.

## 1.2 Exemples.

- Exemples explicites.

Dans le cours *Espaces vectoriels*, on a donné les exemples ci-dessous.

$$u : \begin{cases} M_{n,p}(\mathbb{K}) & \rightarrow & M_{p,n}(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & M^\top \end{cases}, \quad D : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \rightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{cases}$$

sont des applications linéaires ( $D$  est même un endomorphisme de  $\mathbb{K}[X]$ ).

Voici quelques exemples de formes linéaires ( $a$  et  $b$  deux réels) :

$$\text{tr} : \begin{cases} M_n(\mathbb{K}) & \rightarrow & \mathbb{K} \\ M & \mapsto & \text{tr}(M) \end{cases}, \quad \varphi : \begin{cases} \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_a^b f(x) dx \end{cases}, \quad \Phi_a : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \rightarrow & \mathbb{K} \\ P & \mapsto & P(a) \end{cases}.$$

L'exemple ci-dessous sera sur le devant de la scène dans le cours consacré au lien entre les applications linéaires en dimension finie et les matrices.

**Exemple 6** (Application linéaire canoniquement associée à une matrice).

Soit  $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ . On lui associe l'application ci-dessous, qui est linéaire, et qui sera appelée **application linéaire canoniquement associée à  $A$**  :

$$f : \begin{cases} M_{p,1}(\mathbb{K}) & \rightarrow & M_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & AX \end{cases}$$

• Exemples plus abstraits.

Pour tout espace vectoriel  $E$ ,  $\text{Id}_E$  est un endomorphisme de  $E$ .

Pour tous  $E$  et  $F$  espaces vectoriels, l'application nulle  $N : \begin{cases} E & \rightarrow F \\ x & \mapsto 0_F \end{cases}$  est linéaire

On ajoute un exemple important de forme linéaire.

**Proposition 7** (Forme coordonnée).

Soit  $(e_i)_{i \in I}$  une base d'un  $\mathbb{K}$  espace vectoriel  $E$ .

Fixons  $i \in I$ . Pour tout  $x \in E$ , on note  $e_i^*(x)$  la coordonnée de  $x$  sur  $e_i$ .

L'application  $e_i^* : \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{K} \\ x & \mapsto e_i^*(x) \end{cases}$  est une forme linéaire, et  $\forall (i, j) \in I^2 \ e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$ .

### 1.3 Noyau et image d'une application linéaire.

**Définition 8.**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . L'image et le noyau de  $u$  sont définis par

$$\text{Im } u = \{u(x), x \in E\} = \{y \in F \mid \exists x \in E \ y = u(x)\}.$$

$$\text{Ker } u = \{x \in E \mid u(x) = 0_F\}.$$

**Proposition 9.**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ .

1.  $\text{Ker } u$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $u$  est injective si et seulement si  $\text{Ker } u = \{0_E\}$ .
2.  $\text{Im } u$  est un sous-espace vectoriel de  $F$  et  $u$  est surjective si et seulement si  $\text{Im } u = F$ .

**Proposition 10** (Image d'une famille génératrice).

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ , où on suppose que  $E$  est engendré par une famille  $(x_i)_{i \in I}$ .

La famille  $(u(x_i))_{i \in I}$  est une famille génératrice de  $\text{Im}(u)$  :

$$\text{Im}(u) = \text{Vect}(u(x_i))_{i \in I}.$$

**Exemple 11.**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Noyau et image de  $f : P(X) \mapsto P(2X) - P(X)$ , endomorphisme de  $\mathbb{K}_n[X]$ .

## 1.4 Structure de $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$ .

### Définition 12.

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Soient  $u, v \in F^E$  deux applications, et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On définit la **somme** de  $u$  et  $v$ , notée  $u + v$  et le **produit par un scalaire**  $\lambda \cdot u$  comme les applications

$$u + v : \begin{cases} E & \rightarrow & F \\ x & \mapsto & (u + v)(x) := u(x) + v(x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \lambda \cdot u : \begin{cases} E & \rightarrow & F \\ x & \mapsto & (\lambda \cdot u)(x) := \lambda u(x) \end{cases} .$$

**Remarque.** La structure d'espace vectoriel de  $E$  n'intervient nullement : on pourrait poser les mêmes définitions sur  $F^\Omega$ , pour tout ensemble non vide  $\Omega$ .

### Théorème 13.

Muni des lois  $+$  et  $\cdot$  qui viennent d'être définies,  $F^E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

L'ensemble  $\mathcal{L}(E, F)$  est un sous-espace vectoriel de  $F^E$ . C'est donc un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

### Preuve.

On laisse au lecteur la tâche ingrate de vérifier que la structure  $(F^E, +, \cdot)$  satisfait les huit axiomes de notre définition de  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Contentons-nous de préciser que le zéro de cet espace vectoriel est l'application constante

$$0_{F^E} : \begin{cases} E & \rightarrow & F \\ x & \mapsto & 0_F \end{cases} .$$

Nous allons prouver soigneusement, en revanche, que  $\mathcal{L}(E, F)$  est un sous-espace vectoriel de  $F^E$ .

- Le zéro de  $F^E$ , c'est-à-dire l'application nulle, est bien linéaire (cf exemple plus haut) :  $0_{F^E} \in \mathcal{L}(E, F)$ .
- Montrons que  $\mathcal{L}(E, F)$  est stable par combinaison linéaire.

Pour cela, considérons deux applications linéaires  $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ . Montrons que  $\alpha u + \beta v$  est linéaire. Pour cela, considérons  $x$  et  $y$  dans  $E$ ,  $\lambda$  et  $\mu$  dans  $\mathbb{K}$ . On a

$$\begin{aligned} (\alpha u + \beta v)(\lambda x + \mu y) &= \alpha u(\lambda x + \mu y) + \beta v(\lambda x + \mu y) && (\text{def } + \text{ et } \cdot \text{ dans } F^E) \\ &= \alpha(\lambda u(x) + \mu u(y)) + \beta(\lambda v(x) + \mu v(y)) && (\text{linéarité de } u \text{ et } v) \\ &= \lambda(\alpha u(x) + \beta v(x)) + \mu(\alpha u(y) + \beta v(y)) \\ &= \lambda(\alpha u + \beta v)(x) + \mu(\alpha u + \beta v)(y). \end{aligned}$$

□

## 1.5 Composition des applications linéaires.

**Proposition 14** (Une composée d'applications linéaires est linéaire).

Si  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $v \in \mathcal{L}(F, G)$ , alors  $v \circ u \in \mathcal{L}(E, G)$ .

**Exemple 15** (Classique et important).

Soient  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ .

1. Montrer que  $\text{Ker} f \subset \text{Ker}(g \circ f)$  et  $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im} g$ .
2. Montrer que  $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E, G)} \iff \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$ .

**Proposition 16** (Bilinéarité de la composition).

La composée des applications linéaires est bilinéaire :

1.  $\forall u, v \in \mathcal{L}(E, F), \forall w \in \mathcal{L}(F, G), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad w \circ (\lambda \cdot u + \mu \cdot v) = \lambda \cdot w \circ u + \mu \cdot w \circ v.$
2.  $\forall u, v \in \mathcal{L}(F, G), \forall w \in \mathcal{L}(E, F), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad (\lambda \cdot u + \mu \cdot v) \circ w = \lambda \cdot u \circ w + \mu \cdot v \circ w.$

## 1.6 Isomorphismes.

**Définition 17.**

On appelle **isomorphisme** toute application linéaire et bijective entre deux espaces vectoriels.  
On dit de deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels qu'ils sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme entre eux.

**Proposition 18** (Réciproque d'un isomorphisme).

Si  $u : E \rightarrow F$  est un isomorphisme, alors  $u^{-1} : F \rightarrow E$  est un isomorphisme.

**Proposition 19** (Composée d'isomorphismes).

Si  $u : E \rightarrow F$  et  $v : F \rightarrow G$  sont deux isomorphismes, alors  $v \circ u : E \rightarrow G$  est un isomorphisme, et

$$(v \circ u)^{-1} = u^{-1} \circ v^{-1}.$$

## 1.7 Deux modes de définition d'une application linéaire.

**Proposition 20** (Définition d'une AL par l'image d'une base).

Soient  $(e_i)_{i \in I}$  une base de  $E$  et  $(f_i)_{i \in I}$  une famille quelconque de vecteurs de  $F$ .

$$\exists! u \in \mathcal{L}(E, F) \quad \forall i \in I \quad u(e_i) = f_i.$$

**Preuve.**

Analyse. Supposons l'existence d'une application linéaire  $u$  telle que

$$\forall i \in I \quad u(e_i) = f_i.$$

Soit  $x \in E$  et  $(x_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$  les coordonnées de  $x$  sur la base  $(e_i)_{i \in I}$  (famille de scalaires presque nulle). On a

$$u(x) = u\left(\sum_{i \in I} x_i e_i\right) = \sum_{i \in I} x_i u(e_i) = \sum_{i \in I} x_i f_i = \sum_{i \in I} e_i^*(x) f_i$$

Ainsi,  $u$  est nécessairement l'application  $x \mapsto \sum_{i \in I} e_i^*(x) f_i$  (voir le paragraphe 1.2 pour la définition des  $e_i^*$ ).

Synthèse. On vérifie que  $u : x \mapsto \sum_{i \in I} e_i^*(x) f_i$  est linéaire et qu'elle envoie bien les  $e_i$  sur les  $f_i$ .

Conclusion. Il existe bien une unique application linéaire envoyant les  $e_i$  sur les  $f_i$ . □

**Proposition 21** (Définition d'une AL par les restrictions à deux supplémentaires).

Soient  $E_1$  et  $E_2$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ , supplémentaires dans  $E$  ( $E = E_1 \oplus E_2$ ). Soient deux applications linéaires  $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$ , et  $u_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$ .

$$\exists! u \in \mathcal{L}(E, F) \quad u|_{E_1} = u_1 \quad \text{et} \quad u|_{E_2} = u_2.$$

**Preuve.** Tout vecteur  $x$  de  $E$  se décompose de manière unique comme la somme d'un vecteur  $x_1 \in E_1$  et d'un vecteur  $x_2 \in E_2$ ; notons pour ce vecteur  $x$  :

$$p_1(x) = x_1 \quad \text{et} \quad p_2(x) = x_2.$$

Ceci définit correctement deux applications

$$p_1 : E \rightarrow E_1 \quad \text{et} \quad p_2 : E \rightarrow E_2.$$

Nous étudierons ce genre d'applications dans le paragraphe consacré aux *projecteurs* où nous démontrerons notamment que  $p_1$  et  $p_2$  sont des applications linéaires (cela ne serait pas difficile à prouver ici).

Analyse. Supposons l'existence d'une application linéaire  $u$  telle que  $u|_{E_1} = u_1$  et  $u|_{E_2} = u_2$ .

Soit  $x \in E$  et  $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$  ses composantes sur  $E_1$  et  $E_2$ .

$$\begin{aligned} u(x) &= u(x_1 + x_2) \\ &= u(x_1) + u(x_2) \quad (u \text{ est linéaire}) \\ &= u_1(x_1) + u_2(x_2) \quad (u|_{E_1} = u_1 \text{ et } u|_{E_2} = u_2) \\ &= u_1(p_1(x)) + u_2(p_2(x)) \end{aligned}$$

On obtient donc que nécessairement,  $u = u_1 \circ p_1 + u_2 \circ p_2$ .

Synthèse. Posons  $u = u_1 \circ p_1 + u_2 \circ p_2$ . C'est une application linéaire, comme somme et composée d'applications linéaires. On vérifie facilement que pour  $x_1 \in E_1$ ,  $u(x_1) = u_1(x_1)$  et pour  $x_2 \in E_2$ ,  $u(x_2) = u_2(x_2)$ .

Conclusion. Il existe bien une unique application linéaire coïncidant avec  $u_1$  sur  $E_1$  et avec  $u_2$  sur  $E_2$ . □

## 2 Endomorphismes.

Dans toute cette partie,  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

### 2.1 L'anneau $\mathcal{L}(E)$ .

#### Proposition 22.

$(\mathcal{L}(E), +, \circ)$  est un anneau, non commutatif en général.

Le neutre pour  $\circ$  est l'identité sur  $E$ , notée  $\text{id}_E$ .

**Exemple.** Les endomorphismes de  $\mathbb{K}[X]$  définis par  $u : P \mapsto P'$  et  $v : P \mapsto XP$  ne commutent pas.

#### Notation.

Si  $u$  et  $v$  sont deux endomorphismes de  $E$ , leur composée  $v \circ u$  pourra être notée  $vu$ .

Pour tout entier  $k \in \mathbb{N}$ , le  $k$ ème itéré de  $u$  sera noté  $u^k$ . Notamment,  $u^2 = u \circ u$  et  $u^0 = \text{id}_E$ .

On ne va pas refaire ici le cours sur les anneaux. On se contentera de rappeler que

1. Si  $uv = vu$ , alors  $\forall n \in \mathbb{N} \quad (u + v)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^k v^{n-k}$ .

2. Si  $uv = vu$ , alors  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u^n - v^n = (u - v) \sum_{k=0}^{n-1} u^k v^{n-1-k}$ .

En particulier :  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \text{id}_E - u^n = (\text{id}_E - u) \sum_{k=0}^{n-1} u^k$ .

#### Exemple 23.

Soient  $u$  et  $v$  deux endomorphismes de  $E$  qui commutent ( $u \circ v = v \circ u$ ).

Montrer que  $\text{Ker}(u)$  et  $\text{Im}(u)$  sont stables par  $v$ .

#### Exemple 24.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme nilpotent. On note  $p$  son indice de nilpotence, c'est à dire

$$p = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid u^k = 0\}.$$

On se donne  $x \in E \setminus \text{Ker}(u^{p-1})$ .

1. Justifier l'existence d'un tel vecteur  $x$ .
2. Montrer que  $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$  est libre.
3. Supposons dans cette question que  $E$  est de dimension finie  $n$ . Montrer que  $u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .



## 2.2 Groupe linéaire.

### Définition 25.

Un endomorphisme bijectif d'un espace vectoriel  $E$  sera appelé **automorphisme** de  $E$ . L'ensemble des automorphismes de  $E$  sera noté  $\text{GL}(E)$ .

### Proposition 26.

$(\text{GL}(E), \circ)$  est un groupe, appelé **groupe linéaire** de  $E$ .

Si  $E$  est de dimension supérieure à 2, il n'est pas abélien.

Si  $u \in \text{GL}(E)$ , alors  $u^{-1}$  sera désigné tantôt comme la réciproque de  $u$ , tantôt comme son inverse.

### Notation.

Si  $u \in \text{GL}(E)$  et  $k \in \mathbb{Z}$ , on rappelle que la notation  $u^k$  désigne le  $k$  ème itéré de  $u$  si  $k$  est positif, et dans le cas où  $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ , alors  $u^k = (u^{-1})^{|k|}$ .

### Exemple 27 (Un inverse classique).

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ . Montrer que  $\text{id}_E - u$  est un automorphisme de  $E$ .

## 2.3 Homothéties

### Définition 28.

Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On appelle **homothétie** de rapport  $\lambda$  l'endomorphisme

$$\lambda \text{id}_E : \begin{cases} E & \rightarrow E \\ x & \mapsto \lambda \cdot x \end{cases}.$$

### Exemple 29 (*Sous-espaces propres*).

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

1. Justifier que pour tout  $x \in E$ ,  $x \in \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E) \iff f(x) = \lambda x$ .
2. En particulier, comment décrire les vecteurs de  $\text{Ker}(f - \text{id}_E)$ ? de  $\text{Ker}(f + \text{id}_E)$ ?
3. Notons  $E_\lambda = \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E)$ . Que dire de  $f|_{E_\lambda}$ ?  
Supposons que  $E = \text{Ker}(f - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{id}_E)$ . Représenter un vecteur et son image par  $u$ .

L'exercice suivant sera connu d'un étudiant de MPI\*.

**Exemple 30** (Une caractérisation classique des homothéties (\*)).

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que

$$\forall x \in E \quad \exists \lambda_x \in \mathbb{K} \quad f(x) = \lambda_x \cdot x.$$

Montrer que  $f$  est une homothétie.

**Solution.** Commençons par remarquer que le problème consiste à échanger l'ordre des quantificateurs dans une phrase : on travaille sous l'hypothèse

$$\forall x \in E \quad \exists \lambda \in \mathbb{K} \quad f(x) = \lambda x,$$

et on doit montrer

$$\exists \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall x \in E \quad f(x) = \lambda x.$$

Le vecteur nul est un peu à part. En effet, pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $f(0_E) = 0_E = \mu \cdot 0_E$ .

Ainsi, si  $E$  est réduit à ce vecteur,  $f$  est une homothétie de rapport 0,  $\pi$ , ou 666 au choix.

En revanche, si  $E$  n'est pas réduit à  $\{0_E\}$  et si  $x$  est un vecteur non nul de  $E$ , il est facile de voir que le scalaire  $\lambda_x$  tel que  $f(x) = \lambda_x x$  est *unique*. Ainsi, pour répondre à la question, il suffit de montrer :

$$\forall x, y \in E \setminus \{0_E\} \quad \lambda_x = \lambda_y. \quad (*)$$

Montrons (\*) et pour cela, considérons  $x$  et  $y$  dans  $E$ , non nuls. Il existe  $(\lambda_x, \lambda_y) \in \mathbb{K}^2$  tel que  $f(x) = \lambda_x x$  et  $f(y) = \lambda_y y$ . On a donc, par linéarité,  $f(x) + f(y) = f(x + y) = \lambda_x x + \lambda_y y$ . Mais le vecteur  $x + y$  est dans  $E$ , donc il existe un scalaire  $\lambda_{x+y}$  tel que  $f(x + y) = \lambda_{x+y}(x + y) = \lambda_{x+y}x + \lambda_{x+y}y$ . En égalant les deux expressions de  $f(x + y)$ , on a

$$(\lambda_x - \lambda_{x+y})x + (\lambda_y - \lambda_{x+y})y = 0_E.$$

Deux cas se présentent.

- Dans le cas où  $(x, y)$  est libre, alors, on a  $\lambda_x - \lambda_{x+y} = 0$  et  $\lambda_y - \lambda_{x+y} = 0$  et donc  $\lambda_x = \lambda_y$ .
- Dans le cas où  $(x, y)$  est liée,  $x$  étant non nul, il existe  $\mu \in \mathbb{K}$  tel que  $y = \mu x$ . On a

$$f(y) = f(\mu x) = \mu f(x) = \mu(\lambda_x x) = \lambda_x(\mu x) = \lambda_x y.$$

Or,  $f(y) = \lambda_y y$ . On a donc  $\lambda_y y$ , et,  $y$  étant non nul,  $\lambda_x = \lambda_y$ .

## 2.4 Projecteurs.

**Définition 31.**

Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces supplémentaires dans  $E$  ( $E = F \oplus G$ ).

Pour tout  $x \in E$ , il existe un unique couple  $(x_F, x_G) \in F \times G$  tel que

$$x = x_F + x_G.$$

Ceci permet de définir l'application qui à un vecteur  $x$  associe sa composante sur  $F$  :

$$p : \begin{cases} E & \rightarrow E \\ x & \mapsto p(x) := x_F \end{cases},$$

appelée **projection sur  $F$  parallèlement à  $G$** . On parle aussi de  $p$  comme un **projecteur**.

**Proposition 32** (Propriétés des projecteurs).

Soit  $(F, G)$  un couple de s.e.v. supplémentaires dans  $E$  et  $p$  la projection sur  $F$  parallèlement à  $G$ .

1.  $p$  est un endomorphisme de  $E$ .

2.  $p \circ p = p$  (on dit que  $p$  est **idempotent**).

3.  $F$  est l'image de  $p$  :  $F = \text{Im}(p)$ .

C'est aussi l'ensemble des vecteurs invariants par  $p$  :  $F = \text{Im}(p) = \text{Ker}(p - \text{id}_E)$ .

4.  $G$  est l'ensemble des vecteurs d'image nulle par  $p$  :  $G = \text{Ker}(p)$ .

5. Ainsi,  $p$  est la projection sur  $\text{Im}(p)$  parallèlement à  $\text{Ker}(p)$ . En particulier,

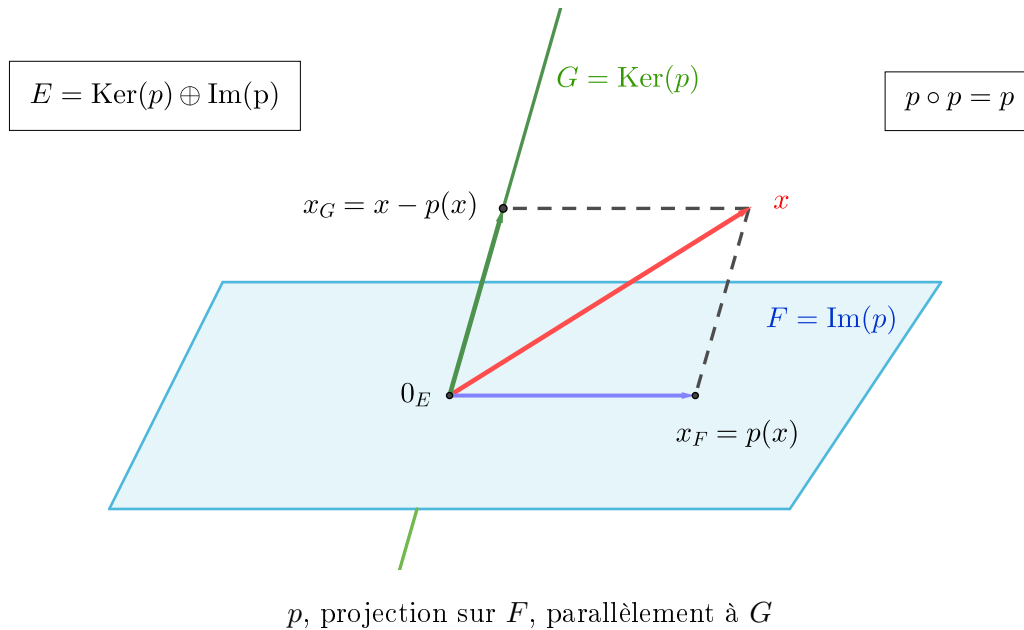
$$E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p), \quad \text{c'est-à-dire} \quad E = \text{Ker}(p - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(p).$$

La décomposition d'un vecteur de  $E$  s'écrit

$$\forall x \in E \quad x = \underbrace{p(x)}_{\in \text{Im}(p)} + \underbrace{x - p(x)}_{\in \text{Ker}(p)}.$$

6.  $\text{id}_E - p$  est la projection sur  $G$  parallèlement à  $F$ .

7.  $p$  peut être vu comme l'unique endomorphisme tel que  $p|_F = \text{id}_F$  et  $p|_G = 0_{\mathcal{L}(G)}$ .



**Proposition 33** (L'idempotence caractérise les projecteurs parmi les endomorphismes).

Soit  $p$  un endomorphisme de  $E$ .

$$p \text{ est un projecteur} \quad \text{ssi} \quad p \circ p = p.$$

La définition d'une projection était *géométrique* ; la caractérisation qu'on vient de donner est *algébrique*

## 2.5 Symétries.

### Définition 34.

Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces supplémentaires dans  $E$  ( $E = F \oplus G$ ).  
Pour tout  $x \in E$ , il existe un unique couple  $(x_F, x_G) \in F \times G$  tel que

$$x = x_F + x_G.$$

Ceci permet de définir l'application

$$s : \begin{cases} E & \rightarrow E \\ x & \mapsto s(x) := x_F - x_G \end{cases},$$

appelée **symétrie par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$** .

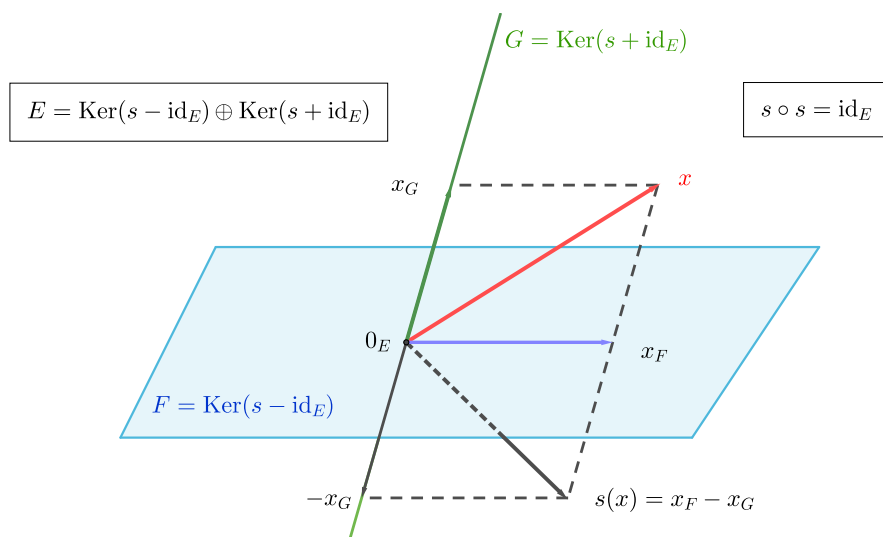
### Proposition 35 (Propriétés des symétries).

Soit  $(F, G)$  un couple de s.e.v. supplémentaires dans  $E$  et  $s$  la symétrie par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$ .

1.  $s$  est un endomorphisme de  $E$ .
2.  $s \circ s = \text{id}_E$  (on dit que  $s$  est **involutive**).
3.  $F$  est l'ensemble des vecteurs invariants par  $s$  :  $F = \text{Ker}(s - \text{id}_E)$ .
4.  $G$  est l'ensemble des vecteurs transformés par  $s$  en leur opposé :  $G = \text{Ker}(s + \text{id}_E)$ .
5. Ainsi,  $s$  est la symétrie par rapport à  $\text{Ker}(s - \text{id}_E)$  parallèlement à  $\text{Ker}(s + \text{id}_E)$ . En particulier

$$E = \text{Ker}(s - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{id}_E).$$

6.  $s$  peut être vue comme l'unique endomorphisme de  $E$  tel que  $s|_F = \text{id}_F$  et  $s|_G = -\text{id}_G$ .



$s$ , symétrie par rapport à  $F$ , parallèlement à  $G$

**Proposition 36** (L'involutivité caractérise les symétries parmi les endomorphismes).

Soit  $s$  un endomorphisme de  $E$ .

$$s \text{ est une symétrie} \iff s \circ s = \text{id}_E.$$

**Exemple 37.**

À l'aide d'une symétrie, redémontrer que  $S_n(\mathbb{K})$  et  $A_n(\mathbb{K})$  sont supplémentaires dans  $M_n(\mathbb{K})$ .

**Remarque.** Il n'est pas inutile de retenir la décomposition d'un vecteur sur les deux supplémentaires associés à une symétrie sur un espace  $E$  : on a

$$\forall x \in E \quad x = \underbrace{\frac{1}{2}(x + s(x))}_{\in \text{Ker}(s - \text{id})} + \underbrace{\frac{1}{2}(x - s(x))}_{\in \text{Ker}(s + \text{id})}.$$

### 3 Applications linéaires et dimension finie.

#### 3.1 Image d'une base.

**Théorème 38** (Caractérisation des isomorphismes par l'image d'une base).

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ , où  $E$  est de dimension finie  $n$ . On considère  $(x_1, \dots, x_n)$  une base de  $E$ .

1.  $u$  est surjective ssi  $(u(x_1), \dots, u(x_n))$  engendre  $F$ .
2.  $u$  est injective ssi  $(u(x_1), \dots, u(x_n))$  est libre.
3.  $u$  est bijective ssi  $(u(x_1), \dots, u(x_n))$  est une base de  $F$ .

**Corollaire 39.**

Une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie est un isomorphisme si et seulement si elle transforme une base en une base.

#### 3.2 Isomorphismes et dimension finie.

**Proposition 40.**

Soient deux espaces vectoriels  $E$  et  $F$  isomorphes.

Si l'un des deux est de dimension finie, alors l'autre l'est aussi et  $\dim E = \dim F$ .

Ce résultat donne une nouvelle méthode pour calculer la dimension d'un espace vectoriel. Il suffira d'exhiber un isomorphisme entre cet espace et un espace dont on connaît la dimension. Ci-dessous, deux applications de ce principe.

**Proposition 41.**

Tout  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$  est isomorphe à  $\mathbb{K}^n$

**Corollaire 42** (Classification des espaces de dimension finie).

Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes ssi ils ont même dimension.

**Proposition 43.**

Soient  $E, F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie. Alors  $\mathcal{L}(E, F)$  est de dimension finie et

$$\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \dim F.$$

**Corollaire 44.**

L'ensemble des formes linéaires sur  $E$ , noté  $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$  ou parfois  $E^*$  a la même dimension que  $E$  lorsque ce dernier est de dimension finie.

*$E^*$  est appelé dual de  $E$ . L'étude de ses liens avec  $E$  est appelée dualité et est hors-programme.*

On vient de voir comment un isomorphisme peut nous aider à calculer une dimension. Voyons maintenant comment la dimension finie peut nous aider à prouver qu'une application linéaire est bijective.

**Théorème 45** (Caractérisation des isomorphismes entre deux e.v. de dimension finie).

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . On a

$$u \text{ est bijective} \iff \begin{cases} u \text{ est injective} \\ \dim E = \dim F \end{cases} \quad \text{et} \quad u \text{ est bijective} \iff \begin{cases} u \text{ est surjective} \\ \dim E = \dim F \end{cases}$$

**Corollaire 46** (Caractérisation des automorphismes en dimension finie).

Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace de dimension finie.

$$u \text{ est bijectif} \iff u \text{ est injectif} \iff u \text{ est surjectif.}$$

**Corollaire 47** (L'inversibilité à gauche ou à droite suffit en dimension finie).

Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace de dimension finie.

$$u \text{ est inversible} \iff u \text{ est inversible à gauche} \iff u \text{ est inversible à droite.}$$

Si  $u$  est inversible à gauche ou à droite, l'inverse à gauche ou à droite, c'est la réciproque de  $u$ .

**Exemple 48** (Retour sur l'interpolation de Lagrange).

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$  (scalaires deux à deux distincts) et  $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ .  
 À l'aide de l'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{K}_{n-1}[X] & \rightarrow \mathbb{K}^n \\ P & \mapsto (P(x_1), \dots, P(x_n)) \end{cases} ,$$

redémontrer que

$$\exists ! P \in \mathbb{K}_{n-1}[X] \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad P(x_i) = y_i.$$

**3.3 Rang d'une application linéaire.****Définition 49.**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . On dit que  $u$  est de **rang fini** si son image  $\text{Im}(u)$  est de dimension finie.  
 On appelle alors **rang** de l'application  $u$  et on note  $\text{rg}(u)$  l'entier

$$\text{rg}(u) = \dim(\text{Im}(u)).$$

**Exemple 50** (Rang nul).

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . On a

$$\text{rg}(u) = 0 \iff \dim \text{Im}(u) = 0 \iff \text{Im}(u) = \{0_F\} \iff u = 0_{\mathcal{L}(E, F)}.$$

**Proposition 51** (Rang et dimension finie au départ ou à l'arrivée).

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ .

1. Si  $F$  est de dimension finie, alors  $u$  est de rang fini et  $\text{rg}(u) \leq \dim(F)$ .
2. Si  $E$  est de dimension finie, alors  $u$  est de rang fini et  $\text{rg}(u) \leq \dim(E)$ .

**Remarque.** Dans la preuve, on comprend que si  $E$  est de dimension finie et que  $(x_1, \dots, x_n)$  est une base de  $E$ , alors  $u$  est de rang fini égal au rang de la famille  $(u(x_1), \dots, u(x_n))$ .

Lorsqu'on compose, le rang ne peut que diminuer, comme nous l'apprend la proposition ci-dessous.

**Proposition 52.**

Soient  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $v \in \mathcal{L}(F, G)$  deux applications linéaires.  
 Si  $u$  ou  $v$  est de rang fini, alors,  $v \circ u$  est de rang fini et

$$\text{rg}(v \circ u) \leq \min(\text{rg}(u), \text{rg}(v)).$$

Le rang d'une application linéaire est invariant par composition avec un isomorphisme.

**Proposition 53.**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  de rang fini et soient deux isomorphismes  $f \in \mathcal{L}(F, G)$  et  $g \in \mathcal{L}(H, E)$ . Alors  $f \circ u$  et  $u \circ g$  sont de rang fini et

$$\text{rg}(f \circ u) = \text{rg}(u) \quad \text{et} \quad \text{rg}(u \circ g) = \text{rg}(u).$$

### 3.4 Théorème du rang.

**Proposition 54** (Forme géométrique du théorème du rang).

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . Si  $\text{Ker}(u)$  admet un supplémentaire  $S$  dans  $E$ , alors

$$u|_S : \begin{cases} S & \rightarrow \text{Im}(u) \\ x & \mapsto u(x) \end{cases}$$

est un isomorphisme de  $S$  dans  $\text{Im}(u)$ .

La grande idée : pour rendre une application injective, il faut *se débarrasser* de son noyau...

**Théorème 55** (Théorème du rang).

Soit  $E$  un espace de dimension finie,  $F$  un espace vectoriel et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors,  $u$  est de rang fini et

$$\dim E = \text{rg}(u) + \dim \text{Ker} u.$$

Attention, une confusion classique consiste à croire que le noyau et l'image d'une application linéaire sont supplémentaires... Ce n'est **pas ce que dit le théorème** ! Remarquons déjà que cela n'a aucun sens si les espaces de départ et d'arrivée  $E$  et  $F$  ne sont pas les mêmes, puisque  $\text{Ker} f \subset E$  et  $\text{Im} f \subset F$ . Et même quand  $E = F$ , c'est faux.



## 4 Hyperplans.

Dans cette partie,  $E$  désigne un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (pas nécessairement de dimension finie).

### 4.1 Formes linéaires et hyperplans.

On rappelle qu'une forme linéaire sur un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  est une application linéaire d'un espace vectoriel  $E$  dans  $\mathbb{K}$ . On redit aussi que  $\mathbb{K}$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie égale à 1.

#### Définition 56.

On appelle **hyperplan** de  $E$  le noyau d'une forme linéaire non nulle sur  $E$ .

**Remarque.** Dire qu'une forme linéaire  $\varphi$  n'est pas nulle, c'est dire que  $\varphi$  n'est pas la fonction nulle, autrement dit qu'il existe au moins un vecteur  $x_0$  dans  $E$  tel que  $\varphi(x_0) \neq 0$ .

**Exemples.**

- Soit  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\}$ . C'est un plan de  $\mathbb{R}^3$ , on le sait. On peut aussi dire que c'est un hyperplan de  $\mathbb{R}^3$  puisque c'est le noyau de la forme linéaire non nulle

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto x + 2y + 3z \end{cases} ;$$

(la forme linéaire  $\phi$  est non nulle car, par exemple  $\varphi((1, 0, 0)) = 1 \neq 0$ ).

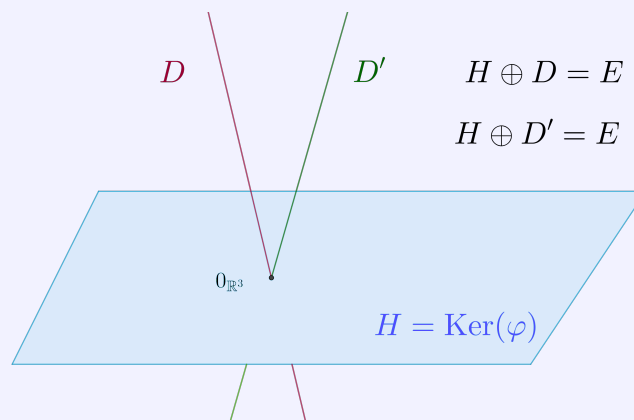
- L'ensemble  $G = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(2) = 0\}$  est un hyperplan de  $\mathbb{K}[X]$  puisque  $G = \text{Ker}(\psi)$  : c'est le noyau de la forme linéaire non nulle

$$\psi : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \rightarrow \mathbb{K} \\ P & \mapsto P(2) \end{cases} ;$$

(la forme linéaire  $\psi$  est non nulle car, par exemple  $\psi(X) \neq 0$ ).

#### Proposition 57.

Soit  $H$  un hyperplan de  $E$  et  $D$  une droite vectorielle de  $E$  non incluse dans  $H$ . Alors  $H \oplus D = E$ .



**Théorème 58.**

Soit  $H$  un sous-espace vectoriel d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ .

$$H \text{ est un hyperplan de } E \iff H \text{ est supplémentaire d'une droite de } E.$$

Si  $E$  est de dimension finie  $n \geq 1$ , ses hyperplans sont donc les sous-espaces de dimension  $n - 1$ .

Les hyperplans d'un espace de dimension 3 sont ses plans vectoriels.

Les hyperplans d'un espace de dimension 2 sont ses droites vectorielles.

**Exemple 59.**

L'ensemble  $H = \{M \in M_n(\mathbb{K}) \mid \text{Tr}(M) = 0\}$  est un hyperplan de  $M_n(\mathbb{K})$  : c'est le noyau de la trace, forme linéaire non nulle (puisque  $\text{Tr}(I_n) \neq 0$  par exemple). Sa dimension est  $n^2 - 1$ .

Un hyperplan est le noyau d'une infinité de formes linéaires : quels sont les liens entre ces applications ?

**Proposition 60** (Équations d'un hyperplan).

Soit  $\varphi$  et  $\psi$  deux formes linéaires non nulles sur  $E$ .

$$\text{Ker}\varphi = \text{Ker}\psi \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^* \quad \psi = \lambda\varphi.$$

L'égalité  $\varphi(x) = 0$  caractérisant l'appartenance d'un vecteur  $x \in E$  à l'hyperplan  $\text{Ker}(\varphi)$  est appelée une **équation** de l'hyperplan.

**Preuve.** L'implication réciproque est facile. Supposons que  $\text{Ker}\varphi = \text{Ker}\psi$ .

Considérons un vecteur  $x$  non nul tel que  $x \notin \text{Ker}\varphi$ . La droite  $\text{Vect}(x)$  est donc un supplémentaire de  $\text{Ker}\varphi$ .

On a  $\varphi(x) \neq 0$ . Posons  $\lambda = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ , de sorte que  $\psi$  et  $\lambda\varphi$  coïncident sur  $x$  puis sur  $\text{Vect}(x)$ .

Puisqu'elles coïncident aussi sur  $\text{Ker}(\varphi)$  (où elles sont nulles!), les applications  $\psi$  et  $\varphi$  sont égales sur deux supplémentaires donc égales.  $\square$

**Proposition 61** (Lien entre hyperplan et équation linéaire).

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie égale à  $n$  et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

Soit  $\varphi$  une forme linéaire non nulle. On a

$$x \in \text{Ker}\varphi \iff \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) e_i^*(x) = 0.$$

L'équation écrite ci-dessus est appelée une **équation** de l'hyperplan  $\text{Ker}(\varphi)$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

**Preuve.** On décompose  $x$  sur la base et on applique  $\varphi$ ...  $\square$

Pour mieux comprendre la notion précédente d'équation d'un hyperplan, on peut se donner des notations plus habituelles : notons  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  la décomposition de  $x$  sur la base  $\mathcal{B}$  et, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , notons  $a_i = \varphi(e_i)$ . On a alors

$$x \in \text{Ker} \varphi \iff a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = 0.$$

En particulier, on retrouve qu'une équation

$$ax + by = 0,$$

dans le cas où  $(a, b) \neq 0$ , est l'équation d'une droite vectorielle de  $\mathbb{R}^2$ . C'est l'équation dans la base canonique  $(e_1, e_2)$  de l'hyperplan de  $\mathbb{R}^2$  associé à  $\varphi : (x, y) \mapsto ax + by$ . On a  $a = \varphi(e_1)$  et  $b = \varphi(e_2)$ .

On retrouve, de la même façon, que

$$ax + by + cz = 0$$

est l'équation d'un plan vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ , lorsque  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$  : c'est l'équation dans la base canonique de l'hyperplan associé à la forme linéaire  $\varphi : (x, y, z) \mapsto ax + by + cz$ .

## 4.2 Intersection d'hyperplans.

### Proposition 62.

Soient  $m$  et  $n$  deux entiers naturels non nuls, avec  $m \leq n$  et  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ .

1. L'intersection de  $m$  hyperplans de  $E$  est au moins de dimension  $n - m$ .
2. Réciproquement, tout sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension  $n - m$  est l'intersection de  $m$  hyperplans.

En particulier, considérons le système linéaire sur  $\mathbb{K}^n$

$$\begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = 0 \\ a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + \cdots + a'_n x_n = 0 \end{cases} \quad \text{Il se récrit} \quad \begin{cases} \varphi(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \psi(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est donc  $\text{Ker} \varphi \cap \text{Ker} \psi$ . Si ces deux formes linéaires sont non nulles, il s'agit d'une intersection d'hyperplans. Si  $(\varphi, \psi)$  est libre, les deux hyperplans ne sont pas confondus. On montre alors facilement que  $\text{Ker}(\varphi) + \text{Ker}(\psi) = \mathbb{K}^n$  puis, grâce à la formule de Grassmann, que

$$\dim \text{Ker}(\varphi) \cap \text{Ker}(\psi) = n - 2.$$

Dans le cas  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  et  $n = 3$ , on retrouve bien sûr que l'intersection de deux plans vectoriels non confondus est une droite vectorielle.

### Corollaire 63.

Un système de  $m$  équations linéaires non nulles sur  $\mathbb{K}^n$ , où  $m \geq 1$  a pour ensemble de solutions un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^n$  ayant une dimension supérieure à  $n - m$ .

## Exercices

### Images et noyau.

**29.1** [◆◆◆] Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$ . Montrer

$$\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2) \iff \text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u) = \{0_E\}.$$

---

**29.2** [◆◆◆] Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$ . Montrer

$$\text{Im}(u) = \text{Im}(u^2) \iff E = \text{Ker}(u) + \text{Im}(u).$$

---

**29.3** [◆◆◆] Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Notons

$$\mathcal{K}_F = \{f \in \mathcal{L}(E) : F \subset \text{Ker}(f)\}.$$

1. Démontrer soigneusement que  $\mathcal{K}_F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E)$ .
  2. Prouver que si  $f \in \mathcal{K}_F$  et  $g \in \mathcal{L}(E)$ , alors  $g \circ f \in \mathcal{K}_F$ .
- 

**29.4** [◆◆◆] Noyaux itérés

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , où  $E$  est un espace vectoriel.

1. Montrer que pour tout  $k \geq 0$ , on a  $\text{Ker}(u^k) \subset \text{Ker}(u^{k+1})$ .
2. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \text{Ker}(u^k) = \text{Ker}(u^{k+1}) \Rightarrow \text{Ker}(u^{k+1}) = \text{Ker}(u^{k+2}).$$

---

**29.5** [◆◆◆] Polynôme annulateur et applications

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $u$  un endomorphisme de  $E$ .

On suppose que  $u^2 - 3u + 2\text{Id}_E = 0$ .

1. Montrer que  $u$  est inversible et calculer  $u^{-1}$ .
  2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ .
    - (a) Calculer le reste dans la division euclidienne de  $X^n$  par  $X^2 - 3X + 2$ .
    - (b) En déduire une expression de  $u^n$ .
    - (c) Que dire de  $\text{Vect}(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$  ?
  3. Démontrer que  $E = \text{Ker}(u - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(u - 2\text{id}_E)$ .
- 

**29.6** [◆◆◆] Soient  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $v \in \mathcal{L}(F, E)$ . Démontrer que

$$\text{Id}_E - v \circ u \text{ injective} \iff \text{Id}_F - u \circ v \text{ injective}.$$

$$\text{Id}_E - v \circ u \text{ surjective} \iff \text{Id}_F - u \circ v \text{ surjective}.$$

---

**29.7** [◆◆◆] Soient  $E, F, G$  trois espaces vectoriels,  $E$  étant de dimension finie. On considère

$$f : E \rightarrow F \in \mathcal{L}(E, F) \quad \text{et} \quad g : E \rightarrow G \in \mathcal{L}(E, G).$$

Montrer l'équivalence

$$\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g) \iff \exists \Phi \in \mathcal{L}(F, G) : g = \Phi \circ f.$$

---

## Projecteurs, symétries.

**29.8** [◆◆◆] Soit  $p$  est un projecteur et  $f$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$ .  
Montrer que  $p \circ f = f \circ p$  si et seulement si  $\text{Ker}(p)$  et  $\text{Im}(p)$  sont stables par  $f$ .

---

**29.9** [◆◆◆] Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes d'un espace vectoriel  $E$  tels que  $f \circ g = \text{Id}_E$ .

1. Montrer que  $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im}(g)$  et  $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker}(f)$ .
  2. Montrer que  $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(g)$ .
- 

**29.10** [◆◆◆] En utilisant une symétrie, retrouver que toute fonction de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  se décompose de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

---

**29.11** [◆◆◆] Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $p$  et  $q$  deux projecteurs.

1. Montrer que  $p + q$  est un projecteur si et seulement si  $p \circ q = q \circ p = 0$ .
2. Supposons que  $p + q$  est un projecteur. Montrer que

$$\text{Im}(p + q) = \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q) \quad \text{et} \quad \text{Ker}(p + q) = \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q).$$

---

**29.12** [◆◆◆] Pour une fois, on calcule vraiment !

Soit  $E = \mathbb{R}^3$ ,  $e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $e_2 = (1, 1, 0)$  et  $e_3 = (1, 2, 3)$ ,  $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$  et  $G = \text{Vect}(e_3)$ .

1. Montrer que  $F$  et  $G$  sont deux espaces supplémentaires de  $E$ .
  2. Donner l'expression de la projection sur  $F$  parallèlement à  $G$  (calculer l'image d'un vecteur  $(x, y, z)$ ).
  3. Donner l'expression de la symétrie par rapport à  $G$  parallèlement à  $F$ .
- 

## Application linéaires et dimension finie.

**29.13** [◆◆◆] 1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Justifier que l'application  $f_n : P \mapsto P + P'$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

2. Démontrer que  $f : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \rightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P + P' \end{cases}$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}[X]$ .

---

**29.14** [◆◆◆] Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour  $P \in \mathbb{K}_n[X]$ , on pose  $f(P) = P(X + 1) - P(X)$ .

1. Justifier que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{K}_n[X]$ .
  2. Montrer que  $\text{Ker} f$  est l'ensemble des polynômes constants.
  3. Justifier que  $\text{Im}(f) = \mathbb{K}_{n-1}[X]$ .
  4. Le noyau et l'image de  $f$  sont-ils supplémentaires dans  $\mathbb{K}_n[X]$ . ?
- 

**29.15** [◆◆◆] Soit  $E$  un espace vectoriel et  $u$  un endomorphisme de  $E$ . On dit que  $u$  est *pseudo-nilpotent* si

$$\forall x \in E \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad u^p(x) = 0_E.$$

1. Montrer que si  $E$  est de dimension finie, tout endomorphisme pseudo-nilpotent est nilpotent.
  2. Posons  $E = \mathbb{K}[X]$ . Proposer un endomorphisme pseudo-nilpotent qui n'est pas nilpotent.
-

**29.16** [◆◆◆] Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$ .

1. Montrer que  $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) \implies \text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$ .
  2. (a) Démontrer que  $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2) \iff \text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$   
(b) Démontrer que  $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2) \implies E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$ .
- 

**29.17** [◆◆◆] Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Démontrer :

$$\text{Ker}(u) = \text{Im}(u) \iff u^2 = 0_{\mathcal{L}(E)} \text{ et } 2\text{rg}(u) = n.$$

---

**29.18** [◆◆◆] Un peu plus dur que l'exercice précédent]

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie.

Démontrer qu'il existe  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $\text{Ker}(u) = \text{Im}(u)$  si et seulement si la dimension de  $E$  est paire.

---

**29.19** [◆◆◆] Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $u$  et  $v$  deux endomorphismes de  $E$  de rang fini. Montrer que

$$\text{rg}(u \circ v) = \text{rg}v - \dim \text{Ker}u \cap \text{Im}v.$$

---

**En vrac.**

**29.20** [◆◆◆] Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f^{n-1} \neq 0$  et  $f^n = 0$ .

On définit le *commutant* de  $f$  par  $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) : g \circ f = f \circ g\}$ .

1. Montrer qu'il existe  $a \in E$  tel que  $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$  soit une base de  $E$ .
  2. Montrer que  $(\text{id}_E, f, \dots, f^{n-1})$  est une base de  $\mathcal{C}(f)$ . Quelle est la dimension de  $\mathcal{C}(f)$  ?
- 

**29.21** [◆◆◆] Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soient  $a_1, \dots, a_n$   $n$  réels deux à deux distincts.

Soient  $b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n$  d'autres réels. Montrer qu'il existe un unique polynôme  $P$  dans  $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$  tel que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad P(a_i) = b_i \quad \text{et} \quad P'(a_i) = c_i.$$

---

**29.22** [◆◆◆] Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de dimension finie.

À l'aide de l'application ci-dessous, retrouver la formule de Grassmann.

$$\varphi : \begin{cases} F \times G & \rightarrow F + G \\ (x, y) & \mapsto x + y \end{cases}.$$

---

**29.23** [◆◆◆] Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ .

On note  $E^*$  l'espace vectoriel des formes linéaires sur  $E$ .

Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Montrer que  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  est une base de  $E^*$ .

---

**29.24** [◆◆◆] Soient  $x_1, \dots, x_n$   $n$  réels deux à deux distincts, et

$$F = \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad f(x_k) = 0 \right\}.$$

1. Démontrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ .
  2. Exhiber un supplémentaire de  $F$  dans  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ .
-