# Matrices magiques

Dans ce problème, on travaille dans l'espace vectoriel des matrices de taille 3, à coefficients réels, c'est à-dire de la forme

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

À une telle matrice, on associe les huit nombres

$$s_1 = a+b+c; \qquad s_2 = d+e+f \qquad s_3 = g+h+i;$$

$$s_4 = a+d+g; \qquad s_5 = b+e+h \qquad s_6 = c+f+i;$$

$$s_7 = a+e+i; \qquad s_8 = c+e+g.$$

On dit qu'une matrice est **magique** si les huit nombres $s_1, \dots, s_8$ sont égaux.
L'ensemble des matrices magiques est noté $\mathcal{M}$.

On note

$S$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de taille 3 ;

$A$ le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques de taille 3 ;

$H$ l'ensemble des matrices de trace nulle ;

$J$ la matrice de taille 3 dont tous les coefficients sont égaux à 1 ;

$V$ le sous-espace vectoriel engendré par $J$.

1. Préliminaires.
   (a) Justifier brièvement que $H$ est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que $\mathcal{M}$ est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.

2. Matrices magiques symétriques.
   (a) Justifier que $\mathcal{M} \cap S \cap H$ et $\mathcal{M} \cap A$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}$. Trouver pour chacun d'eux une base et la dimension.
   (b) Montrer que $\mathcal{M} \cap S = (\mathcal{M} \cap S \cap H) \oplus V$.

3. Description des matrices magiques.
   (a) Montrer que $\mathcal{M} = (\mathcal{M} \cap S) \oplus (\mathcal{M} \cap A)$.
   (b) En déduire une base de $\mathcal{M}$ et donner sa dimension.
   (c) Montrer qu'il existe une unique matrice magique (que vous expliciterez) vérifiant $(a, b, c) = (3, 4, 5)$.

4. Une base de $\mathcal{M} \cap H$.
   (a) Donner l'unique matrice magique vérifiant $(a, b, c) = (0, -1, 1)$.
   On l'appelle $A$ dans la suite.
   (b) Donner l'unique matrice magique vérifiant $(a, b, c) = (1, -1, 0)$.
   On l'appelle $B$ dans la suite.
   (c) Vérifier les identités $A^2 = -B^2$, $AB + BA = 0$, $A^3 = -3A$ et $B^3 = 3B$.
   (d) Justifier que $(A, B)$ est une base de $\mathcal{M} \cap H$.
   (e) Justifier que $V$ est un supplémentaire de $\mathcal{M} \cap H$ dans $\mathcal{M}$.

5. Une curiosité des matrices magiques de taille 3.
   (a) Soit $M_0 \in \mathcal{M} \cap H$.
   On décompose $M_0$ sur la base de $\mathcal{M} \cap H$ donnée plus haut : il existe un unique couple de réels $(\alpha, \beta)$ tels que $M_0 = \alpha A + \beta B$.
   Démontrer que $M_0^3 = 3(\beta^2 - \alpha^2)M_0$.
   Prouver alors que toutes les puissances impaires de $M_0$ sont magiques.
   (b) En vous appuyant pour commencer sur la question 4)e), prouver que si $M$ est une matrice magique quelconque, toutes ses puissances impaires sont magiques.