Fractions rationnelles

1 Fractions rationnelles.

1.1 Le corps $\mathbb{K}(X)$.

L'énoncé suivant (admis) a été donné à la fin du cours Structures algébriques.

Pour tout anneau intègre A, il existe un unique corps (commutatif) K contenant A et vérifiant

$$\forall x \in K \quad \exists a \in A \; \exists b \in A \setminus \{0_A\} \; x = ab^{-1}.$$

Le corps K est appelé **corps des fractions** de l'anneau A.

Par exemple, le corps $\mathbb{Q}$ est le corps des fractions de l'anneau $\mathbb{Z}$.

Définition 1.

On note $\mathbb{K}(X)$ le corps des fractions de l'anneau $\mathbb{K}[X]$.
Ses éléments, appelés **fractions rationnelles** sont de la forme

$$F = AB^{-1} \quad \left(\text{soit en notation fractionnaire } F = \frac{A}{B}\right),$$

où A et B appartiennent à $\mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$. Le couple (A, B) est appelé un **représentant** de F.

Remarque. Le théorème d'existence du corps des fractions dit que le corps $\mathbb{K}(X)$ *contient* l'anneau $\mathbb{K}[X]$.
Cela signifie que la somme et le produit sur $\mathbb{K}(X)$ prolongent la somme et le produit de $\mathbb{K}[X]$.
Autrement dit, $\mathbb{K}[X]$ est un sous-anneau de $\mathbb{K}(X)$.

Remarque. L'écriture B^{-1} désigne l'inverse de B dans le corps $\mathbb{K}(X)$. On verra que, sauf dans le cas où B est un polynôme constant non nul, B^{-1} n'est pas un polynôme.

Comme pour les polynômes, à la place de $F = \dfrac{A}{B}$, on pourra écrire $F(X) = \dfrac{A(X)}{B(X)}$.

Calculs dans $\mathbb{K}(X)$ Soient $A_1, B_1, A_2, B_2 \in \mathbb{K}(X)$ telles que $B_1 \neq 0$ et $B_2 \neq 0$.

1. Cas d'égalité
$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} \iff A_1 B_2 = A_2 B_1.$$

2. Produit et inverse.
$$\frac{A_1}{B_1} \cdot \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_1 A_2}{B_1 B_2} \qquad \text{Si } A_1 \neq 0 \text{ alors } \left(\frac{A_1}{B_1}\right)^{-1} = \frac{B_1}{A_1}.$$

3. Somme
$$\frac{A_1}{B_1} + \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_1 B_2 + A_2 B_1}{B_1 B_2}.$$

Proposition 2.

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Il existe un unique $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que
$$B \text{ est unitaire (et non nul)}, \quad A \wedge B = 1 \quad \text{et} \quad F = \frac{A}{B}.$$
C'est la **forme irréductible** de la fraction F.

Si P est un polynôme, alors P est a fortiori une fraction rationnelle. Sa forme irréductible est $P = \frac{P}{1}$.

1.2 Fonction rationnelle associée, composée, dérivation.

Définition 3 (Fonction rationnelle associée à une fraction rationnelle)**.**

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ de forme irréductible $F = \frac{A}{B}$. On pose $D_F = \mathbb{K} \setminus \{\alpha \in \mathbb{K} \mid B(\alpha) = 0\}$.

On appelle **fonction rationnelle** associée à F l'application $\widetilde{F} : \begin{cases} D_F & \to \mathbb{K} \\ x & \mapsto \frac{A(x)}{B(x)} \end{cases}$.

Il faudrait peut-être définir de manière formelle la composée de deux fractions rationnelles, ou encore sa dérivée. Pour alléger l'exposé, on se contentera d'exploiter les réflexes qu'on a sur les fonctions rationnelles.

Exemple 4.

Soit $F = \dfrac{X^4+1}{X^4+X^2+1}$. Montrer que $F(-X) = F(X)$ et $F\left(\frac{1}{X}\right) = F(X)$.

Exemple 5.

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, non nul, de degré d. Justifier que $X^d P(\frac{1}{X})$ est un polynôme. Pourquoi l'appelle-t-on parfois polynôme symétrique de P ?

1.3 Degré et partie entière d'une fraction rationnelle.

Définition-Proposition 6.

Soit $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$. On définit le **degré** de F comme

$$\deg(F) = \deg(A) - \deg(B).$$

(ce nombre étant indépendant du représentant (A, B)). On a donc $\deg(F) \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$.

Remarque. Si $P \in \mathbb{K}[X]$, sa forme irréductible en tant que fraction rationnelle est $P = \dfrac{P}{1}$. Les degrés de P dans l'anneau $\mathbb{K}[X]$ et dans le corps $\mathbb{K}(X)$ sont donc égaux.

Proposition 7 (Degré et opérations)**.**

Soient $F, G \in \mathbb{K}(X)$.

1. $\deg(F + G) \leq \max(\deg(F), \deg(G))$ avec égalité si $\deg(F) \neq \deg(G)$;
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}\ \ \deg(\lambda F) \leq \deg(F)$, avec égalité si $\lambda \neq 0$;
3. $\deg(FG) = \deg(F) + \deg(G)$.
4. Si $G \neq 0$, $\deg\left(\dfrac{F}{G}\right) = \deg(F) - \deg(G)$.

Exemple 8.

$$\deg\left(\frac{X^4}{X^2+1}\right) = 4 - 2 = 2 \,; \quad \deg\left(\frac{X-1}{X^3+1}\right) = 1 - 3 = -2 \,; \quad \deg\left(\frac{X^2+1}{X^2-1}\right) = 2 - 2 = 0.$$

Proposition-Définition 9.

Soit $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$. On note E le quotient dans la division euclidienne de A par B.

Il existe une unique fraction rationnelle $G \in \mathbb{K}(X)$ tels que

$$F = E + G \quad \text{et} \quad \deg(G) < 0.$$

Le polynôme E est appelé **partie entière** de F. Elle est nulle ssi $\deg(F) < 0$.

Exemple 10.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la partie entière de $\dfrac{X^n}{X-1}$?

1.4 Zéros et pôles d'une fraction rationnelle.

Définition 11.

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ de forme irréductible $F(X) = \frac{A(X)}{B(X)}$. Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}$.

1. α est un **zéro** (de multiplicité m) de F si α est racine de A (de multiplicité m).
2. α est un **pôle** (de multiplicité m) de F si α est racine de B (de multiplicité m).

On parlera de **pôle simple** au sujet d'un pôle de multiplicité 1.

Exemple 12.

Déterminer les pôles de $\dfrac{1}{X^2+1}$ dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$.

Exemple 13.

Justifier qu'une fraction rationnelle de $\mathbb{C}(X)$ sans pôle ne peut être qu'un polynôme.

Proposition 14.

Soit $F \in \mathbb{R}(X)$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.
Alors α est pôle de F de multiplicité m si et seulement si $\overline{\alpha}$ est pôle de F de multiplicité m.

2 Décomposition en éléments simples.

2.1 Les deux théorèmes.

Théorème 15 (Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$)**.**

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ que l'on écrit sous forme irréductible, le dénominateur étant décomposé en facteurs irréductibles :

$$F(X) = \frac{A(X)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{r}(X-\alpha_k)^{m_k}}.$$

(les complexes α_k sont distincts deux à deux, les m_k sont des entiers naturels non nuls.) Alors il existe

— un unique polynôme $E \in \mathbb{C}[X]$ (la partie entière de F) ;
— une unique famille $(a_{k,j})_{\substack{1\leq k\leq r\\ 1\leq j\leq m_k}}$ de complexes

tels que

$$F(X) = E(X) + \sum_{k=1}^{r} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{m_k} \frac{a_{k,j}}{(X-\alpha_k)^j}\right)}_{\text{relatif à } (X-\alpha_k)^{m_k}}.$$

Théorème 16 (Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$).

Soit $F \in \mathbb{R}(X)$ que l'on écrit sous forme irréductible, le dénominateur étant décomposé en facteurs irréductibles :

$$F(X) = \frac{A(X)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{r}(X-\alpha_k)^{m_k}\prod_{\ell=1}^{s}(X^2+p_\ell X+q_\ell)^{n_\ell}}.$$

(les réels α_k sont distincts deux à deux ; les irréductibles de degré 2 $X^2+p_\ell X+q_\ell$ sont distincts deux à deux, les m_k et les n_ℓ sont dans $\mathbb{N}^*$).

Alors il existe

- un unique polynôme $E \in \mathbb{R}[X]$ (la partie entière de F) ;
- une unique famille $(a_{k,j})_{\substack{1\leq k\leq r\\ 1\leq j\leq m_k}}$ de réels ;
- une unique famille $(b_{\ell,j}X+c_{\ell,j})_{\substack{1\leq \ell\leq s\\ 1\leq j\leq n_\ell}}$ de polynômes de $\mathbb{R}_1[X]$

tels que

$$F(X) = E(X) + \sum_{k=1}^{r}\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n_k}\frac{a_{k,j}}{(X-\alpha_k)^j}\right)}_{\text{relatif à } (X-\alpha_k)^{m_k}} + \sum_{\ell=1}^{s}\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n_\ell}\frac{b_{\ell,j}X+c_{\ell,j}}{(X^2+p_\ell X+q_\ell)^j}\right)}_{\text{relatif à } (X^2+p_\ell X+q_\ell)^{n_\ell}}.$$

Exemple 17 (Forme d'une décomposition en éléments simples (sans calculer les coefficients)).

1. Donner la forme de la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ de

$$F(X) = \frac{X}{(X+1)^3(X^2+X+1)}.$$

2. Donner la forme de la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de

$$F(X) = \frac{X^2+2}{(X-1)^2(X+2)(X^2+X+1)}.$$

2.2 Coefficient relatif à un pôle simple

Proposition 18 (Calcul du coefficient relatif à un pôle simple).

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ un **pôle simple** de F.
La décomposition en éléments simples de F s'écrit donc

$$F = \frac{c}{X-\alpha} + G \quad \text{où } \alpha \text{ n'est pas un pôle de } G.$$

1. Formule du cache (utilisation pour des calculs explicites) : $\boxed{c = [(X-\alpha)F(X)]\,(\alpha)}$.
2. Formule théorique : si $F = \dfrac{A}{B}$ et $B'(\alpha) \neq 0$, alors $\boxed{c = \dfrac{A(\alpha)}{B'(\alpha)}}$.

Exemple 19.

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$:

$$F = \frac{2X-1}{X^3+3X^2+2X}$$

$$G = \frac{n!}{X(X-1)\dots(X-n)} \ (n \in \mathbb{N}^*)$$

Exemple 20 (Utilisation d'une décomposition en éléments simples)**.**

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \geq 1$ admettant n racines distinctes non nulles $z_1, \dots, z_n$.

1. Décomposer en éléments simples la fraction $\dfrac{1}{P}$.
2. En déduire la valeur de
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z_k P'(z_k)}.$$

2.3 Une décomposition importante : celle de $\dfrac{P'}{P}$.

Lemme 21 (Dérivée logarithmique d'un produit)**.**

Soient $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$. Alors

$$\frac{\left(\prod_{k=1}^{r} P_k\right)'}{\prod_{k=1}^{r} P_k} = \sum_{k=1}^{r} \frac{P_k'}{P_k}.$$

Théorème 22 (Décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$)**.**

Soit P un polynôme scindé sur $\mathbb{K}$:

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X-\alpha_k)^{m_k}.$$

Alors

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{r} \frac{m_k}{X-\alpha_k}.$$

Exemple 23 (Utilisation d'une décomposition en éléments simples)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Déterminer la forme irréductible de

$$F = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}}.$$

En déduire la valeur de

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}}.$$

2.4 Pratique de la décomposition en éléments simples

Méthode (comment aborder un calcul de décomposition en éléments simples)**.**

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ dont on cherche la décomposition en éléments simples.

i) On écrit F sous forme irréductible.
On décompose le dénominateur en facteurs irréductibles.

ii) On cherche la partie entière de F (si $\deg F < 0$, la partie entière est nulle).

iii) On écrit *a priori* la décomposition en éléments simples de F.
Elle fait intervenir des coefficients qu'il reste à calculer.

iv) On calcule les coefficients relatifs aux pôles simples (formule du cache).

v) On calcule les autres coefficients comme on peut.
Pour cela on peut s'aider de la parité, de la conjugaison complexe, de l'évaluation en quelques valeurs, des limites en $\pm\infty$...

Exemple 24.

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$.

$$F = \frac{X^2+2}{X^2(X^2+1)} \quad \text{et} \quad G = \frac{1}{X^n - 1} \ (n \in \mathbb{N}^*)$$

Exemple 25.

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

$$F = \frac{1}{X^3+1} \quad \text{et} \quad G = \frac{4X^2}{X^4+1}.$$

Exercices

26.1 **[♦◇◇]** Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}[X]$ la fraction rationnelle

$$\frac{X}{(X^2+X+1)^2}.$$

26.2 **[♦◇◇]** Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ la fraction rationnelle

$$\frac{X^2-2X-1}{(X^2+1)^2}.$$

26.3 **[♦◇◇]**

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X(X+1)(X+2)}$.
2. Calculer la limite quand n tend vers $+\infty$ de

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$

26.4 **[♦♦◇]** Soit P un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$ et à racines simples $x_1, \ldots, x_n$ avec $n > 1$. Démontrer que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{P'(x_i)} = 0.$$

26.5 **[♦♦◇]**
Pour chacune des fonctions ci-dessous, proposer une primitive sur un intervalle que vous préciserez :

$$f : x \mapsto \frac{1}{1-x^4} \qquad \text{et} \qquad g : x \mapsto \frac{x^2}{x^3-1}.$$

26.6 **[♦♦♦]** Racines multiples de P'
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non constant.

1. On suppose que P est scindé sur $\mathbb{R}$.
   (a) Donner la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$.
   (b) En déduire que
   $$\forall x \in \mathbb{R} \quad P'(x)^2 \geq P(x)P''(x),$$
   avec égalité si et seulement si x est une racine multiple de P.
   (c) Rappeler pourquoi P' est scindé sur $\mathbb{R}$, puis montrer que toute racine multiple de P' est racine de P.
2. (a) Est-il vrai en général que toute racine multiple de P' est racine de P.
   (b) Est-il vrai, sous l'hypothèse que P est scindé sur $\mathbb{R}$, que toute racine de P' est racine de P ?

26.7 **[♦♦♦]** Calculer la limite lorsque x tend vers $\frac{\pi}{2}$ par valeurs inférieures de

$$\int_0^x \sqrt{\tan(t)}\,\mathrm{d}t.$$
