Déterminants

1 La théorie.

Dans toute cette partie, n est un entier naturel non nul et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

1.1 Formes n-linéaires alternées.

Définition 1.

On appelle **forme n-linéaire** sur E toute application $f : E^n \to \mathbb{K}$ vérifiant

$$\forall j \in [\![1, n]\!] \;\; \forall (a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n) \in E^{n-1} \quad x \mapsto f(a_1, \dots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \dots, a_n) \text{ est linéaire.}$$

On dira aussi que f est linéaire « par rapport à chacune de ses variables ».
Autrement dit, pour $j \in [\![1, n]\!]$ et $(a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n)$ fixé, l'application $f(a_1, \dots, a_{j-1}, \bullet, a_{j+1}, \dots, a_n)$ est une forme linéaire.

Proposition 2.

Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire.

1. $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n \quad f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^n f(x_1, \dots, x_n)$.
2. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. Si l'un des x_i vaut 0_E, alors $f(x_1, \dots, x_n) = 0_{\mathbb{K}}$.

Définition 3.

Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire ($n \geq 2$). Elle est dite **alternée** si et seulement si $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ pour tout n-uplet $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ dont au moins deux vecteurs sont égaux.

Proposition 4.

Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire alternée ($n \geq 2$) et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$.

1. On ne change pas la valeur prise par f sur $(x_1, \dots, x_n)$ en ajoutant à l'un des vecteurs de la famille une combinaison linéaire des autres.
2. Si $(x_1, \dots, x_n)$ est liée, alors $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.
3. Effet d'une transposition. Soit une paire d'indices $\{i, j\}$ avec $i < j$.

$$f\left(\dots, x_{i-1}, \boxed{x_j}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, \boxed{x_i}, x_{j+1}, \dots\right) = -f\left(\dots, x_{i-1}, \boxed{x_i}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, \boxed{x_j}, x_{j+1}, \dots\right).$$

   Cette dernière propriété est aussi appelée propriété d'**antisymétrie**.

4. Effet d'une permutation. Pour tout $\sigma \in S_n$,

$$f\left(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}\right) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \dots, x_n).$$

1.2 Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base.

Théorème 5 (fondamental)**.**

L'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E est une droite vectorielle.

Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, il existe une unique forme n-linéaire alternée qui prend la valeur 1 sur $\mathcal{B}$. On l'appelle **déterminant dans la base** $\mathcal{B}$ et on la note $\det_{\mathcal{B}}$. On a

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n \quad \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} e^*_{\sigma(j)}(x_j).$$

Corollaire 6 (c'est ça, une droite vectorielle)**.**

Si f est une forme n-linéaire alternée sur E et $\mathcal{B}$ une base de E, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda \det_{\mathcal{B}}$.

Définition 7.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$.
Le nombre $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$ est appelé **déterminant dans la base** $\mathcal{B}$ de $(x_1, \dots, x_n)$.

Théorème 8 (Caractérisation des bases)**.**

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$.

$$(x_1, \dots, x_n) \text{ est une base de } E \quad \Longleftrightarrow \quad \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \neq 0.$$

Exemple 9 (Interprétation géométrique).

• Si $E = \mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$, pour $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ un couple de vecteurs, le nombre $\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ peut être vu comme *l'aire orientée* du parallélogramme engendré par $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$.

• Si $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$, pour $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ un triplet de vecteurs, le nombre $\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ peut être vu comme *le volume orienté* du parallélépipède engendré par $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$.

1.3 Déterminant d'un endomorphisme en dimension finie.

On rappelle que E est dans toute cette première partie un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Lemme 10 (*).

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.
Le nombre $\det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ ne <u>dépend pas</u> de la base $\mathcal{B} = (e_1 \ldots, e_n)$ considérée.

Définition 11.

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On appelle **déterminant** de u et on note $\det(u)$ le nombre

$$\det(u) = \det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \ldots, u(e_n)),$$

où $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base quelconque de E.

Proposition 12.

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, $\mathcal{B}$ une base de E et $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$. On a

$$\det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \ldots, u(x_n)) = \det(u) \times \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n).$$

Proposition 13.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

1. $\det(\mathrm{id}_E) = 1$.
2. $\forall u \in \mathscr{L}(E)\ \forall \lambda \in \mathbb{K}\ \ \det(\lambda u) = \lambda^n \det(u)$.
3. $\forall (u, v) \in \mathscr{L}(E)^2 \quad \det(u \circ v) = \det(u)\det(v)$.
4. Pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$, u est un automorphisme si et seulement si $\det(u) \neq 0$.
   Si c'est le cas,
$$\det(u^{-1}) = (\det(u))^{-1}.$$

Attention, on n'a aucune relation intéressante à proposer concernant $\det(u + v)$.

Corollaire 14.

Si E est de dimension finie, det induit un morphisme de groupes entre $GL(E)$ et $\mathbb{K}^*$.

Exemple 15 (Déterminant d'une symétrie vectorielle)**.**

Que dire de $\det(s)$ si s est une symétrie vectorielle de E ?

1.4 Déterminant d'une matrice carrée.

Définition 16.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On appelle **déterminant** de A, et on note $\det(A)$ le nombre

$$\det(A) = \det_{\mathcal{B}_c}(C_1, \ldots, C_n),$$

où $\mathcal{B}_c$ est la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ et $C_1, \ldots, C_n$ les n colonnes de la matrice A.

Autrement dit, $\det(A)$ est le déterminant de l'endomorphisme canoniquement associé à A.

Notation.

Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ le déterminant de A est aussi noté

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Théorème 17.

1. $\det(I_n) = 1$.
2. $\forall A \in M_n(\mathbb{K})\ \forall \lambda \in \mathbb{K}\ \ \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
3. $\boxed{\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{K})^2\ \ \det(AB) = \det(A)\det(B)}$.
4. Pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$, A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.
   Si c'est le cas,
$$\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}.$$

Corollaire 18.

L'application det induit un morphisme de groupes entre $GL_n(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^*$.

Proposition 19.

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice carrée d'ordre $n \geq 1$.

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}.$$

Exemple 20 (Cohérence avec la définition en taille 2)**.**

Retrouver à l'aide de la formule précédente l'expression connue pour le déterminant d'une matrice de taille 2 :

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Exemple 21 (Une application simple)**.**

On peut noter $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices carrées à coefficients entiers relatifs.
Montrer que si $A \in M_n(\mathbb{Z})$, alors $\det A \in \mathbb{Z}$.

Théorème 22.

$$\forall A \in M_n(\mathbb{K}) \quad \det(A^T) = \det(A).$$

Corollaire 23.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ de lignes $L_1, \ldots, L_n$.

$$\det(A) = \det_{\mathcal{B}_c}(L_1, \ldots, L_n),$$

où $\mathcal{B}_c$ est la base canonique de $M_{1,n}(\mathbb{K})$.

Proposition 24 (peu importe la base, à nouveau)**.**

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E. On a

$$\det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)) = \det(u).$$

Corollaire 25.

Deux matrices semblables ont même déterminant.

2 La pratique.

2.1 Échelonner.

Proposition 26 (Effet des opérations de pivot sur les colonnes)**.**

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On note $(C_j, j \in [\![1, n]\!])$ ses colonnes. Soit $\mathcal{O}$ une opération élémentaire sur les colonnes, transformant A en B :

$$A \underset{\mathcal{O}}{\sim} B.$$

1. Si $\mathcal{O}$ est du type $C_i \leftrightarrow C_j$, alors $\det(B) = -\det(A)$,
2. Si $\mathcal{O}$ est du type $C_j \leftarrow \lambda C_j$, avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$, alors $\det(B) = \lambda \det(A)$,
3. Si $\mathcal{O}$ est du type $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\det(B) = \det(A)$.

Le déterminant étant invariant par transposition, tout reste vrai pour des opérations élémentaires sur les lignes.

Proposition 27 (Déterminant d'une matrice triangulaire)**.**

Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.
Par exemple, pour une matrice triangulaire supérieure,

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & * & \dots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n \end{vmatrix} = \prod_{j=1}^{n} \alpha_j.$$

Exemples 28.

Calculer $\begin{vmatrix} 5 & 6 & -2 \\ 10 & 6 & -4 \\ 15 & 6 & -2 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

Exemple 29.

Soit $a \in \mathbb{C}$. Calculer le déterminant de taille n ci-dessous.

$$\begin{vmatrix} a & 1 & & (1) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (1) & & 1 & a \end{vmatrix}.$$

<u>Indication</u> : la somme des éléments de chaque colonne (ou de chaque ligne) est toujours la même...

2.2 Développer selon une colonne ou une ligne.

Remarque. Puisque la nullité d'un déterminant caractérise l'inversibilité de la matrice, c'est sous forme factorisée que l'on cherche à écrire les déterminants. Mais comme on va le voir dans les quelques exemples donnés plus bas, *développer* est parfois nécessaire pour mettre en évidence certaines propriétés.

Soit $A = (a_{k,l})_{1 \leq k,l \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Dans le théorème qui suit, on notera $\Delta_{i,j}$ déterminant de la matrice $(a_{k,l})_{\substack{k \neq i \\ l \neq j}}$ extraite de A en ôtant la $i$ème ligne et la $j$ème colonne. On parle parfois de ce déterminant comme du *mineur* à la position (i,j).

$$\text{Exemple : } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 9 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{Son mineur de position } (1,2) : \Delta_{1,2} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Lemme 30.

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $a_2, \dots, a_n$ dans $\mathbb{K}$ Alors,

$$\forall A \in M_{n-1}(\mathbb{K}) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & & & \\ \vdots & & A & \\ a_n & & & \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} & A & \end{vmatrix}_{n-1}$$

Preuve. Posons

$$\Psi : \left\{ \begin{array}{ccc} M_{n-1}(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ A & \mapsto & \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & & & \\ \vdots & & A & \\ a_n & & & \end{vmatrix}_n \end{array} \right. .$$

Notons $E = M_{n-1,1}(\mathbb{K})$; Ψ peut être vue comme une application définie sur E^{n-1} et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

• Multilinéarité. Soit $A \in M_{n-1}(\mathbb{K})$. Supposons que pour j fixé dans $[\![1, n-1]\!]$, la $j$ème colonne de A soit égale à $\lambda X + \mu Y$, avec $X, Y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \lambda 0 + \mu 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & & & & & \\ \vdots & & & \lambda X + \mu Y & & \\ a_n & & & & & \end{vmatrix}_n = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & & & & & \\ \vdots & & & X & & \\ a_n & & & & & \end{vmatrix}_n + \mu \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & & & & & \\ \vdots & & & Y & & \\ a_n & & & & & \end{vmatrix}_n$$

en utilisant la linéarité du déterminant sur $M_n(\mathbb{K})$ par rapport à la $(j+1)$ème colonne. Ceci prouve que Ψ est une forme $(n-1)$-linéaire sur E^{n-1}.

• Soit $A \in M_{n-1}(\mathbb{K})$ une matrice ayant deux colonnes égales. Alors $\Psi(A)$ est le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales : il est nul. Ceci montre que Ψ est une forme $(n-1)$-linéaire alternée.

• Image de la base canonique de E. Cela revient à calculer $\Psi(I_{n-1}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_n & & & 1 \end{vmatrix}_n = 1.$

En remplissant les trois conditions plus haut, l'application Ψ doit être le déterminant sur la base canonique de E^{n-1}, ce qui achève de prouver le résultat. □

Théorème 31 (Développement selon une ligne ou une colonne)**.**

Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$. Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $\Delta_{i,j}$ le déterminant de la matrice extraite de a en supprimant la ligne i et la colonne j. On a les développements suivants :

Développement selon la $i$ème ligne
$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}.$$

Développement selon la $j$ème colonne
$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}.$$

Remarque. On remarque l'alternance de signe. Lorsque le développement commence en haut à gauche, le premier signe est $+$ à cause du facteur $(-1)^{1+1}$.

Application 1 Le développement de déterminants de taille 3.

Selon C_1 :
$$\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & h \\ f & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & g \\ f & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & g \\ e & h \end{vmatrix}$$

Selon L_2 :
$$\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = -b \begin{vmatrix} d & g \\ f & i \end{vmatrix} + e \begin{vmatrix} a & g \\ c & i \end{vmatrix} - h \begin{vmatrix} a & d \\ c & f \end{vmatrix}.$$

Application 2 Tirer parti des propriétés particulières d'une ligne/colonne.

Exemple 32.

Soit x un réel. On note $D(x) = \begin{vmatrix} (1+x)^2 & (2+x)^2 & (3+x)^2 & (4+x)^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{vmatrix}$

a) Justifier que $D : x \mapsto D(x)$ est une fonction polynomiale de degré au plus 2.

b) En déduire la valeur de $D(x)$ pour tout x.

Application 3 Obtenir une relation de récurrence.

Exemple 33.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et a et b deux nombre complexes. Soit la matrice "bidiagonale"

$$\begin{pmatrix} a & & & b \\ & \ddots & \iddots & \\ & \iddots & \ddots & \\ b & & & a \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{C}).$$

Calculer son déterminant D_n en établissant une relation de récurrence satisfaite par (D_n).

Théorème 34 (Déterminant de Vandermonde)**.**

Soient $a_1, \ldots, a_n$ n nombres réels ou complexes.

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \ldots & a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)\,.$$

Exemple 35.

Deux exemples de problèmes se ramenant à des systèmes linéaires de Vandermonde :

1. L'interpolation de Lagrange.
2. Le problème des moments pour des variables aléatoires d'image finie.

2.3 Complément théorique : la comatrice.

Définition 36.

Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.
On note $\Delta_{i,j}$ le déterminant de la matrice extraite de A en supprimant la ligne i et la colonne j.
Le réel $A_{i,j} = (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$ est alors appelé **cofacteur** de $a_{i,j}$ dans A.
La matrice $(A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est appelée **comatrice** de A et notée $\mathrm{Com}(A)$.

Proposition 37.

$$\forall A \in M_n(\mathbb{K}) \quad A \cdot (\mathrm{Com}(A))^T = (\mathrm{Com}(A))^T \cdot A = \det(A) I_n.$$

En particulier, si A est inversible, alors $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}(\mathrm{Com}(A))^T$.

Exemple 38.

Si $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, on retrouve que $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$

Exemple 39 (Inverse à coefficients entiers)**.**

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R}) \cap M_n(\mathbb{Z})$. Montrer que

$$A^{-1} \in M_n(\mathbb{Z}) \iff \det A = \pm 1.$$

Annexe : Preuves.

Preuve de la proposition 10.
On note $\Lambda_n(E)$ l'ensemble des formes n-linéaires alternées qui est, rappelons-le, une droite.
Pour f une telle forme, considérons la fonction

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(u(x_1), \dots, u(x_n)).$$

Grâce à la n-linéarité de f et à la linéarité de u, on se convainc facilement qu'elle est n-linéaire. Elle est aussi alternée : cela découle du caractère alterné de f. Notons $\varphi_u(f)$ cette fonction de $\Lambda_n(E)$, ceci définit l'application

$$\varphi_u : \left\{ \begin{array}{ccc} \Lambda_n(E) & \to & \Lambda_n(E) \\ f & \mapsto & \varphi_u(f) \end{array} \right. .$$

Que dire, maintenant, de l'application φ_u ? Elle est linéaire, c'est assez clair ! Et une application linéaire définie sur une droite... est une homothétie ! Laissons cet exercice facile au lecteur et terminons cette preuve.

Nous venons de prouver l'existence d'une constante $\lambda_u \in \mathbb{K}$, dépendant seulement de u, telle que

$$\forall f \in \Lambda_n(E) \quad \varphi_u(f) = \lambda_u f.$$

Considérons maintenant une base de E notée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Puisque $\det_{\mathcal{B}}$ est un élément de $\Lambda_n(E)$, on a

$$\varphi_u(\det_{\mathcal{B}}) = \lambda_u \det_{\mathcal{B}}.$$

Évaluons l'égalité précédente en $(e_1 \dots, e_n)$: on obtient

$$\det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n)) = \lambda_u \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = \lambda_u.$$

Ceci démontre que le nombre $\det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n))$ ne dépend pas de $\mathcal{B}$. □

Exercices

38.1 **[♦◇◇]** Soit $n \geq 2$. Calculer le déterminant de taille n suivant.

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix}.$$

38.2 **[♦◇◇]** Soit $n \geq 2$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note $S_k = \sum\limits_{i=k}^{n} i$. Calculer

$$\begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \cdots & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \cdots & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_n \end{vmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{38.3}}$ **[♦◇◇]** Soient a et b deux nombres complexes. Calculer le déterminant de la matrice ci-dessous sous forme factorisée. La réponse s'écrit en huit signes.

$$\begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix},$$

$\boxed{\textbf{38.4}}$ **[♦◇◇]** Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Factoriser $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin a & \sin b & \sin c \\ \cos a & \cos b & \cos c \end{vmatrix}$.

$\boxed{\textbf{38.5}}$ **[♦◇◇]** Calculer $\begin{vmatrix} & & & a_n \\ & & & \\ & a_2 & & \\ a_1 & & & \end{vmatrix}$

$\boxed{\textbf{38.6}}$ **[♦♦◇]** Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$ le déterminant ci-dessous :

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & a & 0 & \cdots & 0 \\ b & a+b & a & \ddots & \vdots \\ 0 & b & a+b & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & 0 & b & a+b \end{vmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{38.7}}$ **[♦♦◇]** Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, on note

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & & & & n \\ & 1 & & & n-1 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & 2 \\ n & n-1 & \ldots & 2 & 1 \end{vmatrix}_{[n]}$$

1. Calculer D_2 et D_3.
2. Pour $n \geq 2$, déterminer une relation entre D_{n+1} et D_n.
3. En déduire D_n pour $n \geq 2$.

$\boxed{\textbf{38.8}}$ **[♦♦◇]** Soit, pour $a, b, c \in \mathbb{R}$ le déterminant D et la fonction f :

$$D = \begin{vmatrix} a & c & \cdots & c \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c \\ b & \cdots & b & a \end{vmatrix}, \qquad f : x \mapsto \begin{vmatrix} a+x & c+x & \cdots & c+x \\ b+x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c+x \\ b+x & \cdots & b+x & a+x \end{vmatrix}.$$

1. Justifier que f est une fonction polynomiale. de degré inférieur à 1.
2. Calculer D dans le cas $b \neq c$.
3. Calculer D dans le cas $b = c$.

38.9 **[♦♦◊]** Le retour du Vandermonde
On note

$$V(a_1,\dots,a_n)=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1}\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1}\\ 1 & a_3 & a_3^2 & \dots & a_3^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1}\end{vmatrix} \quad\text{et}\quad f : x\mapsto \begin{vmatrix}1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1}\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1}\\ 1 & a_3 & a_3^2 & \dots & a_3^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}.$$

1. Justifier que f est une fonction polynomiale, de degré inférieur à $n-1$.
2. En considérant ses racines, prouver sans calcul que

$$V(a_1,a_2\dots,a_n)=\left(\prod_{j=2}^{n}(a_j-a_1)\right)V(a_2,\dots,a_n).$$

3. En déduire une expression de $V(a_1,\dots,a_n)$ sous forme factorisée.

38.10 **[♦♦◊]** [Matrice compagnon d'un polynôme] Soit $P=X^n-\sum_{k=0}^{n-1}a_kX^k\in\mathbb{C}[X]$. Soit la matrice

$$C=\begin{pmatrix}0 & 0 & \dots & 0 & a_0\\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_1\\ 0 & \ddots & & \vdots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1}\end{pmatrix}$$

Montrer que pour tout $\lambda\in\mathbb{C}$, $\det(\lambda I_n-C)=P(\lambda)$.
Application : donner le rang de λI_n-C (on discutera selon les valeurs de λ).

38.11 **[♦♦◊]** Soient $a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

On veut calculer $D=\begin{vmatrix}1 & a & a^2 & a^4\\ 1 & b & b^2 & b^4\\ 1 & c & c^2 & c^4\\ 1 & d & d^2 & d^4\end{vmatrix}$. On introduit, pour $x\in\mathbb{R}$, $P(x)=\begin{vmatrix}1 & a & a^2 & a^3 & a^4\\ 1 & b & b^2 & b^3 & b^4\\ 1 & c & c^2 & c^3 & c^4\\ 1 & d & d^2 & d^3 & d^4\\ 1 & x & x^2 & x^3 & x^4\end{vmatrix}$.

On note $\alpha=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$.

1. Montrer que $P\in\mathbb{R}[X]$.
2. À quelle condition nécessaire et suffisante sur les coefficients a,b,c,d le polynôme P est-il de degré 4 ?
3. Trouver une relation entre P et D, puis en déduire une expression factorisée de D à l'aide de α.

38.12 **[♦♦♦]** Sur un espace probabilisé (Ω,P), on se donne n^2 variables de Rademacher indépendantes

$$(X_{i,j},1\le i,j\le n)\quad\text{telles que } \forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2\ P(X_{1,1}=1)=P(X_{1,1}=-1)=\frac{1}{2}.$$

et on note M la matrice de coefficients $X_{i,j}$.

1. Calculer l'espérance de $\det(M)$.
2. Montrer que sa variance vaut $n!$

38.13 **[♦♦♦]** Soit n un entier supérieur à 2 et $A\in M_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall M\in M_n(\mathbb{K})\quad \det(A+M)=\det(A)+\det(M).$$

Démontrer que A est nulle.
