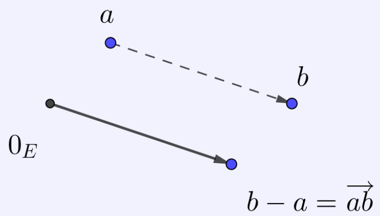
Sous-espaces affines d'un espace vectoriel

Dans tout ce qui suit, $(E, +, \cdot)$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Dans un contexte affine, les éléments de E peuvent être notés comme des vecteurs (on écrira alors la "flèche") mais aussi comme des **points**. Dans ce dernier cas, ils sont alors notés avec une lettre sans flèche. Le vecteur nul est noté $\overrightarrow{0}$ comme vecteur et 0_E comme point. On peut aussi noter ce point O et le voir comme un point de référence, une *origine*.

Définition 1.

Soient a et b deux points de E. On note $\overrightarrow{ab}$ le vecteur $b - a$.



Exemple 2 (Propriétés élémentaires).

Soient a, b, c, d quatre points de E. On a

1. Opposé d'un vecteur.
$$\overrightarrow{ba} = -\overrightarrow{ab}.$$
2. Vecteur nul.
$$\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{0} \iff a = b.$$
3. Relation de Chasles.
$$\overrightarrow{ac} = \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc}.$$
4. Règle du parallélogramme.
$$\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{cd} \iff \overrightarrow{ac} = \overrightarrow{bd}.$$

Proposition 3 (Deux écritures équivalentes).

Soient a et b deux points de E et $\overrightarrow{u}$ un vecteur de E. On a
$$\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{u} \iff b = a + \overrightarrow{u}.$$

En particulier, on passe facilement de la notation point à la notation vecteur en s'appuyant sur le vecteur nul : par définition, si M est un point de E et O le zéro de E, alors
$$M = \overrightarrow{OM}.$$

Définition 4.

Soit $a \in E$. On appelle **translation** de vecteur a , notée T_a l'application

$$T_a : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x+a \end{array} \right. .$$

Proposition 5 (Propriétés des translations)**.**

1. $T_{0_E} = \mathrm{id}_E$.
2. La composée de deux translations est une translation :

$$\forall (a,b) \in E^2 \quad T_a \circ T_b = T_{a+b}$$

3. Pour tout $a \in E$, T_a est une bijection et

$$T_a^{-1} = T_{-a}$$

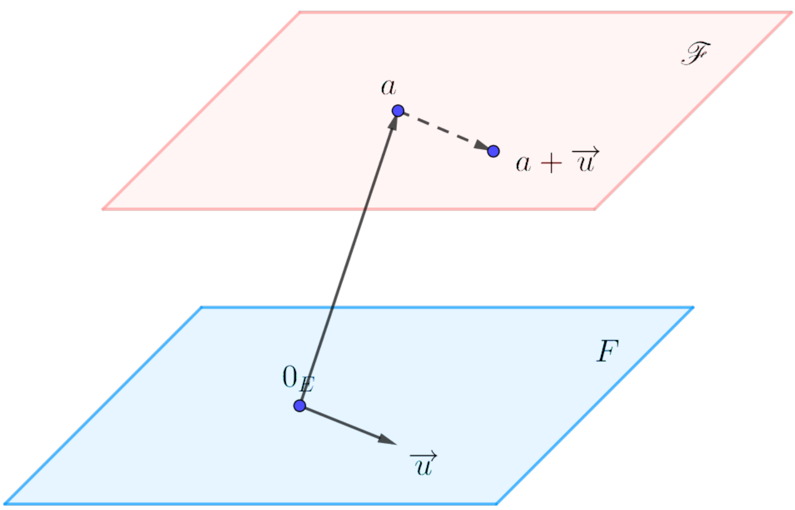
4. L'ensemble des translations sur E, noté $\mathcal{T}(E)$ est, muni de la loi $\circ$, un groupe abélien.
5. L'application $a \mapsto T_a$ est un morphisme de groupes entre $(E,+)$ et $(\mathcal{T}(E), \circ)$.

Définition 6.

D'une partie $\mathscr{F}$ de E, on dit que c'est un **sous-espace affine** de E si c'est le translaté d'un sous-espace vectoriel de E, c'est-à-dire s'il existe un point $a \in E$ un sous-espace vectoriel F de E tels que

$$\mathscr{F} = T_a(F) = a + F = \{a + \overrightarrow{u} \ \mid \ \overrightarrow{u} \in F\}.$$

On parle alors de $\mathscr{F}$ comme du sous-espace affine passant par le point a et dirigé par F.



Proposition-Définition 7.

Soit $a \in E$, F un s.e.v. de E et $\mathscr{F}$ le sous-espace affine passant par le point a et dirigé par F. Alors
$$\forall b \in \mathscr{F} \quad \mathscr{F} = b + F \quad \text{et} \quad F = \left\{ \overrightarrow{cd},\ (c, d) \in \mathscr{F}^2 \right\}.$$
Le sous-espace vectoriel F associé à $\mathscr{F}$ est donc unique et appelé **direction** du sous-espace affine $\mathscr{F}$.

Remarques.

1. Tout sous-espace vectoriel F est un sous-espace affine de E puisque $F = 0_E + F$ mais, sauf dans le cas où E est trivial, il existe des sous-espace affines de E qui ne contiennent par 0_E.
2. Un sous-espace affine est non vide par définition. Il peut être réduit à un point lorsque sa direction est le sous-espace vectoriel nul.

Preuve.
• Soit $(c, d) \in \mathscr{F}^2$. Par définition, il existe $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in F^2$ tel que $c = a + \overrightarrow{u}$ et $d = a + \overrightarrow{v}$. On a bien
$$\overrightarrow{cd} = d - c = (a + \overrightarrow{v}) - (a + \overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{u} \in F.$$
Réciproquement, si $\overrightarrow{u} \in F$, on peut l'écrire $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{cd}$ avec $c = a \in \mathscr{F}$ et $d = a + \overrightarrow{u}\mathscr{F}$. Ceci achève de démontrer l'égalité
$$F = \left\{ \overrightarrow{cd},\ (c, d) \in \mathscr{F}^2 \right\}.$$
En exprimant la direction de $\mathscr{F}$ en fonction de cet espace affine, on prouve son unicité.

• Soit $b \in \mathscr{F}$. On prouve facilement l'égalité $a + F = b + F$ par double inclusion. Un élément de l'ensemble de droite s'écrit $b + \overrightarrow{u}$, avec $\overrightarrow{u} \in F$. Et s'écrit donc $a + (b - a) + \overrightarrow{u} = a + \overrightarrow{ba} + \overrightarrow{u}$. Puisque a et b sont dans $\mathscr{F}$, alors $\overrightarrow{ba}$ est dans F puis $\overrightarrow{ba} + \overrightarrow{u}$ aussi. L'autre inclusion est démontrée de la même façon. $\square$

Définition 8.

On appelle
- **Droite affine** de E tout sous-espace affine dont la direction est une droite.
- **Plan affine** de E tout sous-espace affine dont la direction est un plan.
- **Hyperplan affine** de E tout sous-espace affine dont la direction est un hyperplan.

Un singleton de E est un sous-espace affine de E dont la direction est $\{0_E\}$.

Exemple 9 (Sous-espaces affines de $\mathbb{R}^2$).

En discutant selon la dimension de leur direction, on voit que les sous-espaces affines de $\mathbb{R}^2$ sont réduits à un point, ou une droite affine, ou $\mathbb{R}^2$.

Exemple 10 (Sous-espaces affines de $\mathbb{R}^3$)**.**

En discutant selon la dimension de leur direction, on voit que les sous-espaces affines de $\mathbb{R}^3$ sont réduits à un point, ou une droite affine, ou un plan affine, ou $\mathbb{R}^3$.

Un exemple de droite affine de $\mathbb{R}^3$:

$$\{(1+2x, 2-x, 3+4x), x \in \mathbb{R}\} = a + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}) \quad \text{avec} \quad a = (1,2,3) \;\text{ et }\; \overrightarrow{u} = (2,-1,4).$$

Un exemple de plan affine de $\mathbb{R}^3$:

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 1\right\} = a + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$$

$$\text{avec} \quad a = (1,0,0) \;\text{ et }\; \overrightarrow{u} = (-1,1,0), \overrightarrow{v} = (-1,0,1).$$

Ce sont des cas particuliers de solutions d'un système linéaire. On rappelle le résultat suivant.

Proposition 11 (Ensemble des solutions d'un système linéaire)**.**

Soit $AX = B$ un système linéaire compatible et $X_{pa} \in M_{p,1}(\mathbb{K})$ une solution particulière du système. L'ensemble des solutions S s'écrit

$$S = \{X_{pa} + Y,\ Y \in S_0\},$$

où S_0 est l'ensemble des solutions de $AX = 0_{n,1}$, système homogène associé.

L'ensemble S est un sous-espace affine de $\mathbb{K}^p$ passant par X_{pa} et de direction le s.e.v. S_0.

Ci-dessous des exemples de sous-espaces affines dans des espaces vectoriels différents de $\mathbb{K}^p$.

Proposition 12 (Équations différentielles linéaires d'ordre 1)**.**

Soient $a : I \to \mathbb{K}$ et $b : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions continues. L'équation

$$y' + a(x)y = b(x) \quad (E)$$

a des solutions. Si z_p est une telle solution (« particulière ») et A une primitive de a sur I, alors l'ensemble des solutions de (E) est

$$\mathscr{S} = \left\{x \mapsto z_p(x) + \lambda e^{-A(x)}, \lambda \in \mathbb{K}\right\}.$$

L'ensemble $\mathscr{S}$ est une droite affine de $\mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ passant par z_p et dirigée par la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(e^{-A})$.

On a aussi résolu certaines équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants. Lorsqu'elles ont une solution, on a observé que l'ensemble des solutions a une structure de plan affine.

Proposition 13 (Suites arithmético-géométrique)**.**

Soit $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ tel que $a \neq 1$. Notons S l'ensemble des suites u telles que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = au_n + b.$$

L'équation au point fixe $x = ax + b$ possède une unique solution dans $\mathbb{K}$, notons-la α. Alors,

$$\mathscr{D} = \{n \mapsto \alpha + \lambda a^n, \lambda \in \mathbb{K}\}$$

L'ensemble $\mathscr{D}$ est une droite affine de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ passant par la suite constante égale à α et dirigée par la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(g)$ où g est la suite géométrique de raison a et de premier terme 1.

Proposition 14 (L'ensemble des polynômes interpolateurs)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ (scalaires deux à deux distincts) et $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$.
Soit P l'unique polynôme de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $\forall i \in [\![1,n]\!]\ P(x_i) = y_i$.

L'ensemble $\mathscr{I}$ des polynômes $Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $\forall i \in [\![1,n]\!]\ Q(x_i) = y_i$

$$\mathscr{I} = \left\{ P + A \cdot \prod_{i=1}^{n} (X - x_i), \quad \text{où } A \in \mathbb{K}[X]. \right\}$$

L'ensemble $\mathscr{I}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{K}[X]$ passant par l'unique polynôme interpolateur de degré inférieur à $n-1$ et dirigé par le sous-espace vectoriel des multiples de $\prod_{i=1}^{n}(X - x_i)$.

Il est temps de proposer un cadre unificateur.

Théorème 15.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E,F)$ une application linéaire et $b \in F$. L'équation

$$f(x) = b$$

d'inconnue $x \in E$ est appelée **équation linéaire**.

Supposons qu'elle possède une solution $a \in E$. Alors l'ensemble de ses solutions est

$$\{a + \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{u} \in \mathrm{Ker} f\}.$$

C'est le sous-espace affine passant par a et de direction $\mathrm{Ker} f$.

Preuve.
Soit $x \in E$. On a

$$f(x) = b \iff f(x) = f(a) \iff f(x-a) = 0_F \iff \overrightarrow{ax} \in \mathrm{Ker} f.$$

$\square$

Exercices

$\boxed{\mathbf{30.1}}$ **[♦◇◇]** Soit $(\mathscr{F}_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces affines affines de E.
Pour tout $i \in I$, on note F_i la direction de $\mathscr{F}_i$.
Montrer que si $\bigcap_{i\in I} \mathscr{F}_i \neq \emptyset$, alors $\bigcap_{i\in I} \mathscr{F}_i$ est un sous-espace affine de direction $\bigcap_{i\in I} F_i$.

$\boxed{\mathbf{30.2}}$ **[♦◇◇]** Soient $\mathscr{F} = a + F$ et $\mathscr{G} = b + G$ deux sous-espaces affines de E.

1. Montrer que : $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} \neq \emptyset \iff \overrightarrow{ab} \in F + G$.
2. On suppose que $F + G = E$. Montrer que $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} \neq \emptyset$.
3. On suppose que $F \oplus G = E$. Montrer que $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ est réduit à un point.
