# Corrigé du DM 18



**Correction par pair**

$\boxed{\text{A}}$ Question 2-(a). Degré/coefficient dominant : avoir isolé clairement le terme « qui compte » dans le développement de $U_n$.

$\boxed{\text{B}}$ Question 2-(a). Calcul de $U_n^{(2n)}$ fait clairement : on doit bien voir que l'on obtient un polynôme constant et comprendre l'apparition de la factorielle.

$\boxed{\text{C}}$ Question 2-(b). Calcul de $U_n^{(n)}$ : là encore, on doit voir clairement que le terme qui compte, c'est le terme de plus haut degré de $U_n$, dérivé $n$ fois.

$\boxed{\text{D}}$ Question 3-(c) : avoir pensé supposer que les $\alpha_i$ sont ordonnés (ce qui pouvait se faire sans perte de généralité).

$\boxed{\text{E}}$ Toujours 3-(c). Avoir clairement appliqué le théorème de Rolle le bon nombre de fois $(k+1)$ : entre deux $\alpha_i$ consécutifs, ainsi que sur $]-1,\alpha_1[$ et $]\alpha_k,1[$.

$\boxed{\text{F}}$ Question 4 : Vérifier que la formule de Leibniz a bien été utilisée et au passage, vérifier l'évaluation à la question 5.

$\boxed{\text{G}}$ Question 6-(a) : Dans l'IPP, votre camarade a-t-il correctement justifié que le crochet valait 0 en s'appuyant sur l'ordre de multiplicité de 1 et $-1$ ?

$\boxed{\text{H}}$ Question 7 : avoir compris que le cas $n>m$ est simple car alors $U_m^{n+m}$ est nul. Avoir traité l'autre cas par symétrie.

$\boxed{\text{I}}$ Question 8-(b) : la relation entre $J_k$ et $J_{k-1}$ a-t-elle été trouvée ? Si ce n'est pas le cas, c'est sans doute que votre camarade n'a pas vu qu'il pouvait déguiser un $t^2$ en $t^2-1+1$ : indiquez-le lui !

$\boxed{\text{J}}$ Question 8-(c) : un grand classique : détricoter la relation de récurrence précédente pour obtenir le produit des pairs et celui des impairs. Dessinez un beau coeur à cet endroit si votre camarade a bien fait ça.

## **Problème.** Polynômes de Legendre.

**Partie A**. Une famille de polynômes scindés. (CCP PC 2018)

1. $L_0 = 1$.
   $L_1 = \frac{1}{2}(X^2-1)' = X$.

2. (a) $U_n$ est un polynôme de degré $2n$, unitaire, donc $U_n^{(2n)}$ est un polynôme de degré $\deg U_n - 2n = 0$ : c'est un polynôme constant :
$$U_{2n}^{(2n)} = \left(X^{2n}\right)^{(2n)} = (2n)(2n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1.$$
On a
$$U_n^{(2n)} = (2n)! \qquad \text{et} \qquad \forall k > 2n,\ U_n^{(k)} = 0.$$
   (b) Le polynôme $U_n$ s'écrit
$$U_n = X^{2n} + V_n, \quad \text{avec } \deg V_n < 2n.$$
$$U_n^{(n)} = (2n)(2n-1)\cdots(2n-(n-1))X^n + V_n^{(n)} = \frac{(2n)!}{n!}X^n + V_n^{(n)}, \quad \text{avec } \deg V_n^{(n)} < n.$$
Puisque $L_n = \frac{1}{2^n n!}U_n^{(n)}$, on a $\boxed{\deg(L_n) = n}$ le coefficient dominant de $L_n$ est est $\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$.
Or $\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \binom{2n}{n}$. Donc, $\boxed{\text{le coefficient dominant de } L_n \text{ est : } \frac{\binom{2n}{n}}{2^n}}$.

3. (a) Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $a<b$. Soit $f$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a)=f(b)$, alors il existe $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.
   (b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$,
$$U_n = (X^2-1)^n = \big((X-1)(X+1)\big)^n = (X-1)^n(X+1)^n.$$
On pouvait dériver ça directement, mais je vais utiliser le théorème de Rolle.
La polynôme $U_n$ a deux racines, $(-1)$ et 1, toutes deux de multiplicité $n$.
Donc $(-1)$ et 1 sont deux racines de multiplicité $(n-1)$ de $U_n'$.
En outre, la fonction polynômiale associée à $U_n$ est continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$, et $U_n(-1) = U_n(1) = 0$, donc il existe $\alpha\in]-1,1[$ tel que $U_n'(\alpha)=0$. Les nombres $-1$ et 1 sont des racines de multiplicité $n-1$ et $\alpha\in]-1,1[$ a une multiplicité au moins 1. En comptant les multiplicités on obtient donc au moins $2(n-1)+1 = 2n-1$ racines. Or, $\deg U_n' = 2n-1$ donc $U_n'$ est scindé :
$$U_n' = \lambda(X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}(X-\alpha).$$
où $\lambda$ est le coefficient dominant de $U_n'$, (qui vaut donc donc $2n$).

(c) Soit $n \geq 2$. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose qu'il existe des réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel $\mu$ tels que

$$U_n^{(k)} = \mu(X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_k).$$

Tout d'abord, comme $(-1)$ et 1 sont des racines de multiplicité $n$ de $U_n$, ce sont des racines de multiplicité $n-(k+1)$ de $U_n^{(k+1)}$.

Quitte à réordonner, on peut supposer que $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k$.
Soit $l \in [\![1, k-1]\!]$, la fonction $U_n^{(k)}$ est continue sur $[\alpha_l, \alpha_{l+1}]$ et dérivable sur $]\alpha_l, \alpha_{l+1}[$. En outre, $U_n^{(k)}(\alpha_l) = U_n^{(k)}(\alpha_{l+1})$, donc il existe $\beta_{l+1} \in ]\alpha_l, \alpha_{l+1}[$ tel que $U_n^{(k+1)}(\beta_l) = 0$.

De même, la fonction $U_n^{(k)}$ est continue sur $[-1, \alpha_1]$ et dérivable sur $]-1, \alpha_1[$. En outre, $U_n^{(k)}(-1) = U_n^{(k)}(\alpha_1)$, donc il existe $\beta_1 \in ]-1, \alpha_1[$ tel que $U_n^{(k+1)}(\beta_1) = 0$.

on peut faire le même raisonnement sur $[\alpha_k, 1]$ pour montrer qu'il existe $\beta_{k+1} \in ]\alpha_k, 1[$ tel que $U_n^{(k+1)}(\beta_{k+1}) = 0$.

Enfin, on a $\beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \alpha_2 < \ldots < \beta_k < \alpha_k < \beta_{k+1}$ donc les réels $\beta_1$,...,$\beta_{k+1}$ sont distincts deux à deux.
Ainsi, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$U_n^{(k+1)} = (X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-\beta_1)\cdots(X-\beta_{k+1})Q.$$

Or, les degrés de $U_n^{(k+1)}$ d'une part, et de $(X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-\beta_1)\cdots(X-\beta_{k+1})$ d'autre part sont tous les deux égaux à $2n-(k+1)$, donc $\deg(Q) = 0$.
Il existe donc $\nu \in \mathbb{R}^*$ tel que :

$$U_n^{(k+1)} = \nu(X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-\beta_1)\cdots(X-\beta_{k+1}).$$

(d) D'après le principe de récurrence, il existe $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ dans $]-1,1[$ deux à deux distincts et $\mu$ dans $\mathbb{R}^*$ tels que :

$$L_n = \mu(X-\gamma_1)\cdots(X-\gamma_n).$$

$$\boxed{\text{Le polynôme } L_n \text{ est scindé à racines simples, toutes dans } ]-1,1[.}$$

**Partie B**. Évaluation de $L_n$ en 1 et en $-1$.

4. On a $\forall k \in [\![0, n]\!] \quad ((X+1)^n)^{(k)} = \dfrac{n!}{(n-k)!}(X+1)^{n-k}$.
La formule de Leibniz amène

$$\begin{aligned} L_n = \frac{1}{2^n n!}\left((X+1)^n(X-1)^n\right)^n &= \frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}((X+1)^n)^{(k)}((X-1)^n)^{(n-k)} \\ &= \frac{1}{2^n \cancel{n!}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n!}{(n-k)!}(X+1)^{n-k}\frac{\cancel{n!}}{k!}(X-1)^k \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2(X+1)^{n-k}(X-1)^k. \end{aligned}$$

5. $L_n(1) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{0}^2(1+1)^n = 1$ et $L_n(-1) = (-1)^n$.

**Partie C**. Calcul des nombres $\langle L_n, L_m\rangle$.

6. (a) (*) Soit $n$ non nul, et $k \in [\![0, n-1]\!]$ . Supposons $\mathcal{P}(k)$. Alors :

$$\langle U_n^{(n)}, U_m^{(m)}\rangle = \langle U_n^{(n-k)}, U_m^{(m+k)}\rangle$$

Par intégration par parties, en dérivant $U_m^{(m+k)}$ et en intégrant $U_n^{(n-k)}$ on obtient :

$$\langle U_n^{(n)}, U_m^{(m)}\rangle = (-1)^k\left[U_m^{(m+k)}U_n^{(n-k-1)}\right]_{-1}^{1} - (-1)^k\int_{-1}^{1}U_n^{(n-k-1)}(t)U_m^{(m+k+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

Or, si $k \in [\![0, n-1]\!]$, $n-k-1 \in [\![0, n-1]\!]$, donc $U_n^{(n-k-1)}(-1) = 0 = U_n^{(n-k-1)}(1)$, (rappelons que $-1$ et 1 sont racines de $U_n$ de multiplicité $n$ chacune) donc :

$$\langle U_n^{(n)}, U_m^{(m)}\rangle = (-1)^{k+1}\int_{-1}^{1}U_n^{(n-k-1)}(t)U_m^{(m+k+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

(b) Par linéarité de l'intégrale, $\langle L_n, L_m\rangle = \frac{1}{2^{n+m}n!m!}\langle U_n^{(n)}, U_m^{(m)}\rangle$.
En appliquant la question précédente pour $k = n$, on obtient le résultat demandé.

7. Supposons $n > m$, alors :

$$\langle L_n, L_m\rangle = \frac{(-1)^n}{2^{n+m} n! m!} \langle U_n, U_m^{(n+m)}\rangle.$$

Or, comme $n > m$, on a $n + m > 2m$ et donc $U_m^{(n+m)} = 0$. Ainsi,

$$\langle U_n, U_m^{(n+m)}\rangle = \int_{-1}^{1} 0 \mathrm{d}t = 0, \quad \text{donc} \quad \langle L_n, L_m\rangle = 0.$$

Si $n < m$, alors en utilisant une symétrie claire, $\langle L_n, L_m\rangle = \langle L_m, L_n\rangle = 0$

8. (a) On a démontré en question 2 que $U_n^{(2n)}$ est un polynôme constant égal à $(2n)!$.

$$\langle L_n, L_n\rangle = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\langle U_n, U_n^{(2n)}\rangle = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\langle U_n, (2n)!\rangle = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(-1)^n(t^2-1)^n \mathrm{d}t.$$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}$, on veut calculer : $J_k = \int_{-1}^{1}(1-t^2)^k \mathrm{d}t$.
Une IPP avec $u(t) = (1-t^2)$, $u'(t) = -2tk(1-t^2)^{k-1}$, $v'(t) = 1$, $v(t) = t$.

$$\begin{aligned} J_k &= \left[(1-t^2)^k\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} 2kt^2(1-t^2)^{k-1}\mathrm{d}t \\ &= 0 + 2k\int_{-1}^{1}(t^2-1+1)(1-t^2)^{k-1}\mathrm{d}t \\ &= 2k\int_{-1}^{1}(t^2-1)(1-t^2)^{k-1}\mathrm{d}t + 2k\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{k-1}\mathrm{d}t \\ &= -2kJ_k + 2kJ_{k-1}. \end{aligned}$$

Donc : $\boxed{J_k = \frac{2k}{2k+1}J_{k-1}}$.

(c) Ainsi :

$$J_n = \frac{\prod_{k=1}^{n} 2k}{\prod_{k=1}^{n}(2k+1)}J_0 = \frac{2^n \prod_{k=1}^{n} k \prod_{k=1}^{n} 2k}{\prod_{k=1}^{n} k}J_0 = \frac{2^n n! 2^n n!}{(2n+1)!}J_0.$$

Or $J_0 = 2$, donc

$$J_n = \frac{2}{2n+1}\frac{\left(2^n(n!)\right)^2}{(2n)!} \quad \text{puis} \quad \langle L_n, L_n\rangle = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}(2n!)J_n : \boxed{\langle L_n, L_n\rangle = \frac{2}{2n+1}}.$$

## Problème 2. Exemples de nombres algébriques et de nombres transcendants.

**Partie A**. Exemples de nombres algébriques.

1. Soit $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ($p$ et $q$ étant deux entiers relatifs, et $q$ étant non nul).
Ce nombre rationnel est racine du polynôme $qX - p$, qui appartient à $\mathbb{Z}[X]$ est n'est pas nul puisque $q$ ne l'est pas : $\boxed{\frac{p}{q} \in \overline{\mathbb{Q}}}$.

2. Le nombre $\sqrt{2}$ est racine de $X^2 - 2 \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$ : $\boxed{\sqrt{2} \in \overline{\mathbb{Q}}}$.

3. On a $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6}$. Ainsi,

$$\left((\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 - 5\right)^2 = 4 \times 6.$$

Ceci prouve que $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ est racine de $\left(X^2-5\right)^2 - 24$, polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ non nul (degré 4). Ceci prouve bien que $\sqrt{a}+\sqrt{b} \in \overline{\mathbb{Q}}$.
On généralise facilement, en prouvant que

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} \text{ est racine de } \left(X^2-(a+b)\right)^2 - 4ab : \quad \boxed{\sqrt{a}+\sqrt{b} \in \overline{\mathbb{Q}}}.$$

4. Commençons par écrire $r$ sous la forme $\frac{p}{q}$, avec $(p,q) \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}^*$ et notons $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la famille des polynômes de Tchebychev.
Nous savons (c'est la propriété fondamentale des polynômes de cette famille) que

$$T_q(\cos \pi r) = \cos q\pi r = \cos p\pi = (-1)^p.$$

Nos savons aussi que la famille $(T_n)$ est telle que $T_0 = 1$, $T_1 = X$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$. Il est donc facile de prouver par récurrence (double) que ces polynômes sont à coefficients entiers.
Le nombre $\cos \pi r$ est donc racine du polynôme $T_q - (-1)^p$ qui appartient à $\mathbb{Z}[X]$.
De plus, $\deg T_q = q \in \mathbb{N}^*$ donc $\deg(T_q - (-1)^p) = q$. Ainsi, $\boxed{\cos \pi r \in \overline{\mathbb{Q}}}$.

5. (a) $\boxed{-x \in \overline{\mathbb{Q}}}$ car $-x$ est racine de $P(-X)$, qui est à coefficients entiers et non nul.
En effet, si $P = \sum a_k X^k$ a ses coefficients dans $\mathbb{Z}$, alors c'est aussi le cas de $P(-X) = \sum (-1)^k a_k X^k$.

(b) Dans cette question, on suppose $x \neq 0$. Notons $d = \deg P$, et $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$.
Notons alors $Q$ le polynôme

$$X^d P\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^{d-k}.$$

Puisque les $a_k$ sont des entiers, il est clair que $Q$ est un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$.
Le polynôme $P$ n'étant pas nul, l'un au moins des $a_k$ est non nul, ce qui interdit à $Q$ d'être nul. Enfin $Q(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x^d}P(x) = 0$. On a donc bien montré que $\boxed{\frac{1}{x} \in \overline{\mathbb{Q}}}$.

**Partie B**. Polynôme minimal d'un nombre algébrique.

6. (a) L'ensemble $\{\deg(P) \mid P \in \mathcal{I}_x \setminus \{0\}\}$ est non vide puisque $\mathcal{I}_x \neq \{0\}$ ($x$ étant algébrique). Cette partie de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément $d$ et il existe un polynôme de $\mathcal{I}_x$ de degré égal à $d$. On divise ce polynôme par son coefficient dominant, un rationnel non nul : le polynôme obtenu est toujours unitaire, a toujours des coefficients rationnels, et annule toujours $x$ : $\boxed{\text{notons-le } \Pi_x}$.

   Supposons que $\Pi_x$ s'écrit $Q_1Q_2$, où $Q_1$ et $Q_2$ ne sont pas des diviseurs triviaux (ni un associé de $\Pi_x$, ni constant). On a $\Pi_x(x) = 0 = Q_1(x)Q_2(x)$, ce qui donne $Q_1(x) = 0$ ou $Q_2(x) = 0$. Ceci amène que $Q_1$ ou $Q_2$ appartient à $\mathcal{I}_x \setminus \{0\}$. Comme ils ont un degré strictement inférieur à celui de $\Pi_x$, cela contredit la minimalité de $d$. On a démontré par l'absurde l'irréductibilité de $\Pi_x$ sur $\mathbb{Q}$.

   (b) Soit $P \in \mathcal{I}$. Puisque $\Pi_x$ est non nul, le théorème de la division euclidienne donne l'existence d'un (unique) couple $(Q, R)$ de $\mathbb{Q}[X]$ tel que
$$P = \Pi_x Q + R \quad \text{et} \quad \deg(R) < \deg(\Pi_x).$$
   Évaluons en $x$ : on obtient que $0 = 0 \cdot Q(x) + R(x)$ : ce qui donne que $R \in \mathcal{I}$. Si $R$ est non nul, l'inégalité $\deg(R) < d$ contredirait la minimalité de $d$. Ceci prouve que $R = 0$ puis que $\boxed{\Pi_x \text{ divise } P}$.

   (c) Soient $P$ et $Q$ deux polynômes unitaires de $\mathcal{I}$ minimaux en degré. D'après la question précédentes, $P \mid Q$ et $Q \mid P$, et donc $P$ et $Q$ sont tous deux associés. Puisque $P$ et $Q$ sont unitaires, $P = Q$. Ceci démontre l'$\boxed{\text{unicité de } \Pi_x}$.

7. (a) L'inclusion $\mathbb{Q}[x] \supset \mathbb{Q}_{d-1}[x]$ est triviale.
   Soit $y \in \mathbb{Q}[x]$. Il existe $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $y = P(x)$. On réalise la division euclidienne de $P$ par $\Pi_x$ : il existe un (unique) couple $(Q,R) \in (\mathbb{Q}[X])^2$ tel que $P = \Pi_x Q + R$ et $\deg(R) < d$. On a
$$y = P(x) = \Pi_x(x)Q(x) + R(x) = 0 + R(x) \in \mathbb{Q}_{d-1}[x] \quad \text{puisque } R \in \mathbb{Q}_{d-1}[X].$$
   Ceci démontre l'inclusion non triviale. On a $\boxed{\mathbb{Q}[x] = \mathbb{Q}_{d-1}[x]}$.

   (b) Il est assez facile de prouver que $\mathbb{Q}[x]$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$, on laisse cela au lecteur. Ceci donne que $\mathbb{Q}_{d-1}[x]$ est un anneau commutatif.
   Nous allons prouver que tout élément non nul de $\mathbb{Q}_{d-1}[x]$ est inversible. Soit $y = P(x)$, avec $P \in \mathbb{Q}[X]$. Puisque $y \neq 0$, $\Pi_x$ ne divise pas $P$ (sinon...) Le PGCD de $\Pi_x$ et $P$ divise $\Pi_x$, qui est irréductible. Puisqu'il ne vaut pas $\Pi_x$, il vaut 1. D'après le théorème de Bézout, il existe $(U,V) \in (\mathbb{Q}[X])^2$ tel que
$$\Pi_x U + PV = 1.$$
   On évalue en $x$ : on obtient
$$0 + yV(x) = 1.$$
   Le nombre $V(x)$ est dans $\mathbb{Q}[x]$ (donc dans $\mathbb{Q}_{d-1}[x]$) : c'est un $\boxed{\text{inverse}}$ de $y$.

**Partie C**. Un théorème de Liouville.

8. Le polynôme $P$ étant non constant, il a un nombre fini de racines (leur nombre est majoré par son degré). Quitte à prendre $\eta$ suffisamment petit (strictement inférieur à la distance minimale entre deux racines), on est sûr que $[x-\eta, x+\eta]$ ne contient aucune racine de $P$ autre que $x$.
9. Notons $\widetilde{P}$ la fonction polynomiale associée à $P$. Elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc en particulier de classe $\mathcal{C}^1$. Sa dérivée étant continue sur le segment $[x-\eta, x+\eta]$, elle y est bornée (et y atteint ses bornes) d'après le théorème des bornes atteintes. Posons alors
$$K = \max\{|\widetilde{P}'(t)|, t \in [x-\eta, x+\eta]\}.$$
   D'après l'inégalité des accroissements finis, $\widetilde{P}$ est $K$-lipschitzienne sur $[x-\eta, x+\eta]$ :
$$\forall (a,b) \in [x-\eta, x+\eta] \qquad |P(a) - P(b)| \leq K|a-b|.$$
10. Dans cette question, on considère un rationnel $\frac{p}{q} \in [x-\eta, x+\eta] \setminus \{x\}$ ($p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$). D'après la question précédente,
$$\left|P(x) - P(\tfrac{p}{q})\right| \leq K \left|x - \frac{p}{q}\right|.$$
   Par définition, $P(x) = 0$. Mais puisque $x$ est la seule racine de $P$ dans $[x-\eta, x+\eta]$ et que $\frac{p}{q} \neq x$, on a $P(\frac{p}{q}) \neq 0$. En notant $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$, on a
$$q^d P(\tfrac{p}{q}) = \sum_{k=0}^d a_k p^k q^{d-k} \in \mathbb{Z}^* \quad \text{donc} \quad \left|q^d P(\tfrac{p}{q})\right| \geq 1.$$

Ainsi,
$$\left|x-\frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{K}\left|0-P(\tfrac{p}{q})\right| \geq \frac{1}{Kq^d}.$$

11. Soit $(p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ tel que $\frac{p}{q} \neq x$

— Si $|x-\frac{p}{q}| \leq \eta$, alors d'après la question précédente, $|x-\frac{p}{q}| \geq \frac{1}{Kq^d}$.
— Si $|x-\frac{p}{q}| > \eta$, alors $|x-\frac{p}{q}| \geq \frac{\eta}{q^d}$, puisque $q^d \geq 1$.

Posons $A = \min(\eta, \frac{1}{K})$. On a bien
$$\boxed{\forall (p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^* \qquad \frac{p}{q}\neq x \implies \left|x-\frac{p}{q}\right| \geq \frac{A}{q^d}.}$$

**Partie D**. La constante de Liouville $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{10^{k!}}$ : premier exemple de nombre transcendant.

12. Soit $n\in\mathbb{N}$.
• $u_{n+1}-u_n = \frac{1}{10^{n!}} \geq 0$. La suite $u$ est croissante.
• On peut majorer $u_n$ par exemple par
$$u_n \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{10^k} \leq \frac{1-\frac{1}{10^{n+1}}}{1-\frac{1}{10}} \leq \frac{10}{9}.$$
La suite $u$ est majorée.
D'après le théorème de la limite monotone, $u$ est convergente.

13. Soit $p$ un entier supérieur à $n$. On a
$$|u_p-u_n| = \sum_{k=n+1}^{p}\frac{1}{10^{k!}}.$$
Or, pour $k\geq n+1$, on a $k! = n!(n+1)\cdots k$ donc $k!\geq n!k$. Ainsi,
$$\forall k\geq n+1 \quad \frac{1}{10^{k!}} \leq \left(\frac{1}{10^{n!}}\right)^k$$
Ainsi,
$$|u_p-u_n| \leq \sum_{k=n+1}^{p}\left(\frac{1}{10^{n!}}\right)^k \leq \frac{1}{10^{n!(n+1)}}\sum_{k=0}^{p-n-1}\left(\frac{1}{10^{n!}}\right)^k \leq \frac{1}{10^{n!(n+1)}}\cdot\frac{1-\frac{1}{10^{n!(p-n)}}}{1-\frac{1}{10^{n!}}}.$$
En majorant le quotient par $\frac{10^{n!}}{10^{n!}-1}$ puis par $10^{n!}$, on obtient que $|u_p-u_n| \leq \frac{1}{10^{nn!}}$. En faisant tendre $p$ vers l'infini (et donc $u_p$ vers $\ell$) on obtient par stabilité des inégalités larges que
$$\forall n\in\mathbb{N} \quad |\ell-u_n| \leq \frac{1}{10^{nn!}}.$$

14. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\ell$ est un nombre algébrique. Ce nombre est donc une racine d'un polynôme $P$ de $\mathbb{Z}[X]$, non nul. D'après le théorème de Liouville établi en partie C, il existe une constante $A>0$ telle que
$$\forall (p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^* \qquad \frac{p}{q}\neq x \implies \left|x-\frac{p}{q}\right| \geq \frac{A}{q^d}.$$
Or, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\in\mathbb{Q}$ (somme de rationnels). On peut écrire
$$\exists p_n\in\mathbb{Z} \quad u_n = \frac{p_n}{10^{n!}},$$
en choisissant $10^{n!}$ comme dénominateur commun. Puisque $u$ est strictement croissante, $u_n\neq\ell$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. On a donc, d'après le théorème de Liouville,
$$\forall n\in\mathbb{N} \quad |\ell-u_n| \geq \frac{A}{10^{n!}}.$$
Or, d'après la question 2,
$$\forall n\in\mathbb{N} \quad |\ell-u_n| \leq \frac{1}{10^{nn!}}.$$
Par transitivité,
$$\forall n\in\mathbb{N} \quad \frac{A}{10^{n!}} \leq \frac{1}{10^{nn!}}, \quad \text{soit} \quad A \leq \frac{1}{10^{(n-1)n!}}.$$
En passant à la limite, on obtient $A\leq 0$, ce qui est absurde. Notre hypothèse de départ est fausse : le nombre $\ell$ n'est donc pas algébrique, mais transcendant.