Correction ciblée.

$\boxed{\text{A}}$ Ex 1 : Avoir linéarisé le produit de sin.

$\boxed{\text{B}}$ Ex 1 : Avoir vu le télescopage.

$\boxed{\text{C}}$ Ex 3 : Avoir proposé une caractérisation de $f(z)$ est réel (c'est-à-dire avoir écrit une équivalence).

Exercice 1. Une somme.

En utilisant l'identité

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right),$$

et la parité de cos, on calcule

$$\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{\pi}{2^k}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2^k}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{2^k}\right) - \cos\left(\frac{4\pi}{2^k}\right)\right).$$

Cela donne par télescopage,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{\pi}{2^k}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2^k}\right) &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{2^k}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{2^{k-1}}\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{2^n}\right) - \cos(2\pi)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{2^n}\right) - 1\right)\end{aligned}$$

En passant à la limite, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{\pi}{2^k}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2^k}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos(0) - 1\right) = 0.$$

Exercice 2. Une équation.

1. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. On a
$$a^3+b^3 = a^3-(-b)^3 = (a-(-b))(a^2+a(-b)+(-b)^2) = (a+b)(a^2-ab+b^2).$$

2. Soit x un réel.

$$\begin{aligned}
& x \text{ est solution}\\
\iff\ & \cos^6(x)+\sin^6(x) = \frac{5}{8}\\
\iff\ & \left(\cos^2(x)\right)^3 + \left(\sin^2(x)\right)^3 = \frac{5}{8}\\
\underset{(1)}{\iff}\ & \left[\cos^2(x)+\sin^2(x)\right]\times\left[\cos^4(x)-\cos^2(x)\sin^2(x)+\sin^4(x)\right] = \frac{5}{8}\\
\iff\ & \cos^4(x)-\cos^2(x)\sin^2(x)+\sin^4(x) = \frac{5}{8}\\
\iff\ & \left[\cos^4(x)+2\cos^2(x)\sin^2(x)+\sin^4(x)\right] - 3\cos^2(x)\sin^2(x) = \frac{5}{8}\\
\iff\ & \left[\cos^2(x)+\sin^2(x)\right]^2 - 3\cos^2(x)\sin^2(x) = \frac{5}{8}\\
\iff\ & 1-3\cos^2(x)\sin^2(x) = \frac{5}{8}\\
\iff\ & 8\cos^2(x)\sin^2(x) = 1\\
\iff\ & 4\sin^2(2x) = 1\\
\iff\ & \sin(2x) = \frac{1}{2} \quad\text{ou}\quad \sin(2x) = -\frac{1}{2}\\
\iff\ & 2x \equiv \frac{\pi}{6}\ [\pi] \quad\text{ou}\quad 2x \equiv \frac{5\pi}{6}\ [\pi]\\
\iff\ & x \equiv \frac{\pi}{12}\ \left[\frac{k\pi}{2}\right] \quad\text{ou}\quad x \equiv \frac{5\pi}{12}\ \left[\frac{k\pi}{2}\right]
\end{aligned}$$

L'ensemble S des solutions de (E) est

$$\boxed{S = \left\{\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}}$$

Exercice 3. Un peu de nombres complexes.

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$, on calcule

$$\overline{f(z)} = \overline{\frac{1-z}{1-iz}} = \frac{1-\overline{z}}{1+i\overline{z}}.$$

1. On a

$$\begin{aligned} f(z) \in \mathbb{R} &\iff f(z) = \overline{f(z)} \\ &\iff \frac{1-z}{1-iz} = \frac{1-\overline{z}}{1+i\overline{z}} \\ &\iff (1-z)(1+i\overline{z}) = (1-iz)(1+i\overline{z}) \\ &\iff 1-z+i\overline{z}-iz\overline{z} = 1-\overline{z}-iz+iz\overline{z} \\ &\iff z-\overline{z}-i(z+\overline{z})+2i|z|^2 = 0 \\ &\iff 2i\mathrm{Im}(z)-2i\mathrm{Re}(z)+2i|z|^2 = 0 \\ &\iff \mathrm{Im}(z)-\mathrm{Re}(z)+|z|^2 = 0 \end{aligned}$$

Pour continuer, notons $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$. On a

$$\begin{aligned} f(z) \in \mathbb{R} &\iff y-x+x^2+y^2 = 0 \\ &\iff \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 - 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0 \\ &\iff \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Si on note $u = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ et $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$, on peut écrire

$$f(z) \in \mathbb{R} \iff |z-u|^2 = r^2 \iff |z-u| = r.$$

Conclusion. Les nombres cherchés sont ceux qui appartiennent au

$$\boxed{\text{cercle de centre } u \text{ et de rayon } r.}$$

2. On a

$$\begin{aligned} f(z) \in i\mathbb{R} &\iff f(z) = -\overline{f(z)} \\ &\iff \frac{1-z}{1-iz} = -\frac{1-\overline{z}}{1+i\overline{z}} \\ &\iff (1-z)(1+i\overline{z}) = -(1-iz)(1+i\overline{z}) \\ &\iff 1-z+i\overline{z}-iz\overline{z} = -1+\overline{z}+iz-iz\overline{z} \\ &\iff z+\overline{z}+i(z-\overline{z})-2 = 0 \\ &\iff 2\mathrm{Re}(z)+i\cdot 2i\mathrm{Im}(z)-2 = 0 \\ &\iff \mathrm{Re}(z)-\mathrm{Im}(z)-1 = 0 \end{aligned}$$

Pour continuer, notons $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$. On a

$$f(z) \in \mathbb{R} \iff x-y = 1$$

Conclusion. Les nombres cherchés sont ceux qui appartiennent à la

$$\boxed{\text{droite d'équation } y = x-1.}$$