Corrigé du DS 8

Exercice 1. Équivalents et séries à termes positifs.

1. (a) On a $\mathrm{ch}(n) = \frac{1}{2}e^n + \frac{1}{2}e^{-n} = \frac{1}{2}e^n + o(e^n)$ donc $\boxed{\mathrm{ch}(n) \sim \frac{1}{2}e^n}$.

   (b) On a $\dfrac{1}{\mathrm{ch}(n)} \sim 2e^{-n}$.
   Or, la série $\sum e^{-n}$ est une série géométrique convergente (puisque $|e^{-1}| < 1$).
   Par comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\sum \frac{1}{\mathrm{ch}(n)} \text{ converge}}$.

2. (a) La formule de Stirling donne $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$. Par quotient, on calcule

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{\sqrt{2\pi 2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2\pi n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} \sim \boxed{2^{2n}\frac{1}{\sqrt{\pi n}}}$$

   (b) On $2^{-2n}\dbinom{2n}{n} \sim \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$.
   La série $\sum \frac{1}{n^{1/2}}$ est une série de Riemann divergente ($1/2 \leq 1$).
   Par comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\sum 2^{-2n}\binom{2n}{n} \text{ converge}}$.

3. (a) C'est la factorisation par n, terme prépondérant dans les sommes, qui va permettre de se ramener au voisinage de 0, où faire un DL est possible.
   Pour $n \geq 1$,

$$u_n = \sqrt{n}\left(2 - \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right).$$

   Or,

$$\sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2).$$

   On substitue par $\frac{1}{n}$ et $-\frac{1}{n}$ qui tendent vers 0 :

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n}\left(2 - \left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2}\right) - \left(1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\ &= \sqrt{n}\left(\frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{4n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \qquad \text{soit} \quad \boxed{u_n \sim \frac{1}{4n^{3/2}}} \end{aligned}$$

   (b) La série $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ est une série de Riemann convergente ($3/2 > 1$).
   Par comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$.

4. (a) La fonction $f : x \mapsto x\ln(x)$ est croissante sur $[1, +\infty[$ (c'est le produit de deux fonctions croissantes et positives). On peut donc écrire la comparaison élémentaire

$$\forall k \geq 2 \quad \int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t \leq f(k) \leq \int_{k}^{k+1} f(t)\mathrm{d}t.$$

   Sommons ! Pour $n \geq 2$,

$$\int_1^n f(t)\mathrm{d}t \leq \sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_2^{n+1} f(t)\mathrm{d}t.$$

   Puisque $1\ln(1) = 0$, on vient d'obtenir un encadrement de S_n. Les intégrales se calculent à l'aide d'une IPP :

$$\int_1^n t\ln(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}t^2\ln(t)\right]_1^n - \int_1^n \frac{1}{2}t^2\frac{1}{t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}n^2\ln(n) - \frac{1}{4}(n^2 - 1).$$

   On a donc

$$\int_1^n f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}n^2\ln(n) + o\left(n^2\ln(n)\right) \sim \frac{1}{2}n^2\ln(n)$$

   On obtient le même équivalent pour l'intégrale à droite.
   Par comparaison $\boxed{S_n \sim \frac{1}{2}n^2\ln(n)}$.

   (b) Le travail fait en question a donne $\frac{1}{S_n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
   La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente ($2 > 1$).
   Par comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\sum \frac{1}{S_n} \text{ converge}}$.

5. (*) On récrit $u_n = \exp\left(n\ln(n) \times \ln\left(\dfrac{\ln(n+a)}{\ln(n+b)}\right)\right)$ et on pose $v_n = \dfrac{\ln(n+a)}{\ln(n+b)}$.
   On réalise un développement asymptotique de v_n, en utilisant

$$\begin{aligned} \ln(n+b) = \ln(n) + \ln(1 + b/n) &= \ln(n) + \frac{b}{n} - \frac{b^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \ln(n)\left(1 + \frac{b}{n\ln(n)} - \frac{b^2}{2n^2\ln(n)} + o\left(\frac{1}{n^2\ln(n)}\right)\right) \end{aligned}$$

et pareil en remplaçant b par a. D'où

$$\begin{aligned}
v_n &= \left(1+\frac{a}{n\ln(n)}-\frac{a^2}{2n^2\ln(n)}+o\left(\frac{1}{n^2\ln(n)}\right)\right)\left(1+\frac{b}{n\ln(n)}-\frac{b^2}{2n^2\ln(n)}+o\left(\frac{1}{n^2\ln(n)}\right)\right)^{-1}\\
&= \left(1+\frac{a}{n\ln(n)}-\frac{a^2}{2n^2\ln(n)}+o\left(\frac{1}{n^2\ln(n)}\right)\right)\left(1-\frac{b}{n\ln(n)}+\frac{b^2}{2n^2\ln(n)}+o\left(\frac{1}{n^2\ln(n)}\right)\right)\\
&= 1+\frac{a-b}{n\ln(n)}+\frac{b^2-a^2}{2n^2\ln(n)}+o\left(\frac{1}{n^2\ln(n)}\right)
\end{aligned}$$

où, à chaque fois, on a éliminé les termes en $\dfrac{1}{n^2(\ln n)^2}$ car ils sont négligeables devant $\dfrac{1}{n^2(\ln n)}$.

Ainsi

$$\begin{aligned}
\ln v_n &= \ln\left(1+\frac{a-b}{n\ln(n)}+\frac{b^2-a^2}{2n^2\ln(n)}+o\left(\frac{1}{n^2\ln(n)}\right)\right)\\
&= \frac{a-b}{n\ln(n)}+\frac{b^2-a^2}{2n^2\ln(n)}+o\left(\frac{1}{n^2\ln(n)}\right).
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
u_n &= \exp\left((n\ln n)\ln v_n\right)\\
&= \exp\left(a-b+\frac{b^2-a^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&= e^{a-b}\exp\left(\frac{b^2-a^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = e^{a-b}\left(1+\frac{b^2-a^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)
\end{aligned}$$

Donc, (puisque $a>b$, l'équivalent suivant est acceptable car non nul)

$$\boxed{\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n = e^{a-b} \quad \text{et} \quad u_n-\ell \underset{+\infty}{\sim} \frac{(b^2-a^2)e^{a-b}}{2n}}$$

La série $\sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente (la bien connue série harmonique).

Par comparaison des séries à termes positifs $\boxed{\sum(u_n-\ell)}$ diverge

(bon ici l'équivalent est négatif mais l'important, c'est que cela reste de signe constant).

Exercice 2. Trois applications des développements limités.

1. On a

$$\frac{1}{\ln(1+x)} = \frac{1}{x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}+o(x)} = \frac{1}{x}\left(1+\frac{x}{2}+o(x)\right) = \frac{1}{x}+\frac{1}{2}+o(1).$$

Ainsi,

$$\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x} = \frac{1}{2}+o(1) \quad \text{donc} \quad \boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}}$$

2. (a) Pour répondre à cette question, on donne de f un DL d'ordre 1 :

$$f(x) = \frac{x+o(x^2)}{x} = 1+o(x).$$

Ceci donne que $\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et que } f'(0)=0}$.

(b) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient

$$\forall x\in\mathbb{R}^* \quad f'(x) = \frac{x\cos x-\sin x}{x^2}.$$

Cette dérivée est-elle continue en 0 ? Puisqu'il s'agit de déterminer sa limite, calculons un DL à l'ordre 0 de f' :

$$f'(x) = \frac{x(1+o(x))-(x+o(x^2))}{x^2} = \frac{o(x^2)}{x^2} = o(1).$$

On a donc $f'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 = f'(0)$. Ceci prouve que $\boxed{f' \text{ est continue en } 0}$.

3. Soit $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{k=1}^n \lambda_k f_k = 0$.
Pour $k\in[\![1,n]\!]$, on a $f_k(x) = 1-\frac{1}{2!}x^{2k}+o(x^{2k})$.
Un DL à l'ordre 1 : $\sum_{k=1}^n \lambda_k + o(1) = 0$, donc la somme est nulle (bof...)
Un DL à l'ordre 2 : $\sum_{k=1}^n \lambda_k - \frac{\lambda_1}{2!}x^2+o(x^2) = 0$.
Par unicité du DL, on obtient que $\boxed{\lambda_1 = 0}$.
Le DL à l'ordre 4 : $\sum_{k=1}^n \lambda_k - \frac{\lambda_1}{2!}x^2 + \left(\frac{\lambda_1}{4!}-\frac{\lambda_1}{2!}\right)x^4+o(x^4) = 0$.
On en déduit que amène que $\frac{\lambda_1}{4!}-\frac{\lambda_1}{2!} = 0$ et donc $\boxed{\lambda_2 = 0}$.
On itère...

Exercice 3. Deux séries alternées.

1. Pour tout $n \geq 1$, on note $a_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+(-1)^n}$.

   (a) Soit $n \geq 1$.

$$\begin{aligned} |a_{2n+1}| - |a_{2n}| &= \frac{1}{4n+2-1} - \frac{1}{4n+1} = 0 \\ |a_{2n+2}| - |a_{2n+1}| &= \frac{1}{4n+5} - \frac{1}{4n+1} \leq 0 \end{aligned}$$

   (b) La question précédente montre que pour tout entier n, quelle que soit sa parité, on a $|a_{n+1}| - |a_n| \leq 0$. Ainsi la suite $(|a_n|)$ est décroissante. De plus, elle tend vers 0 (clair). D'après le théorème des séries alternées,

$$\boxed{\text{la série } \sum a_n \text{ est convergente.}}$$

   (c) On a remarqué que lorsqu'on somme un terme d'indice impair avec le suivant, on obtient 0. Pour $n \geq 1$, notons $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. On a

$$A_{2n+1} = a_1 + \underbrace{a_2 + a_3}_{=0} + \underbrace{a_4 + a_5}_{=0} + \cdots \underbrace{a_{2n} + a_{2n+1}}_{=0} = a_1 + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(a_{2k} + a_{2k+1})}_{0} = a_1.$$

   La suite (A_{2n+1}) est constante égale à a_1, qui vaut -1.

   Pour $n \geq 1$, $A_{2n} = A_{2n+1} - \dfrac{(-1)^{n+1}}{2(2n+1)+(-1)^n} = -1 + o(1)$.

   La suite (A_{2n}) tend donc elle aussi vers -1.

   Puisque (A_{2n}) et (A_{2n+1}) tendent toutes les deux vers -1, (A_n) tend vers -1.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -1}.$$

2. Pour tout $n \geq 2$, on note $b_n = \dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$.

   (a) Soit $n \geq 1$.

$$\begin{aligned} |b_{2n+1}| - |b_{2n}| &= \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} \geq 0 \\ |b_{2n+2}| - |b_{2n+1}| &= \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n} \leq 0 \end{aligned}$$

   (b) Cette fois, on ne peut pas appliquer le théorème des séries alternées car la suite $(|b_n|)$ n'est pas décroissante.

   (c) Pour $n \geq 1$, on a $b_n = \frac{(-1)^n}{n}\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{-1}$.
   En utilisant $(1+x)^{-1} = 1 + O(x)$, on obtient

$$b_n = \frac{(-1)^n}{n} + c_n, \quad \text{avec } c_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

   Puisque $(\frac{1}{n})$ tend vers 0 en décroissant, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est une série alternée convergente.
   Puisque $\sum \frac{1}{n^2}$, la série $\sum c_n$ converge absolument.
   Par somme, $\boxed{\sum b_n \text{ est convergente}}$.

   (d) Pour $n \geq 2$, notons $B_n = \sum\limits_{k=2}^{n} b_k$. On a

$$B_{2n+1} = \sum_{k=1}^{n} b_{2k} + \sum_{k=1}^{n} b_{2k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}.$$

   Pour $n \geq 1$, on note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On a donc

$$B_{2n+1} = H_{2n+1} - H_n = \ln(2n+1) + \gamma + o(1) - (\ln(n) + \gamma + o(1)) = \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right) + o(1).$$

   Ceci montre que $B_{2n+1} \to \ln(2)$. On a aussi $B_{2n} = B_{2n+1} - b_{2n+1} \to \ln(2)$.

   Puisque (B_{2n}) et (B_{2n+1}) tendent toutes les deux vers $-\ln(2)$, la suite des sommes partielles (B_n) tend vers $-\ln(2) - 0$.

$$\boxed{\sum_{n=2}^{\infty} b_n = -\ln(2)}.$$

Problème. Étude de la fonction ζ.

Partie 1. La constante γ d'Euler.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) + \ln(n)) \\
&= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad \boxed{v_{n+1} - v_n \sim -\frac{1}{2n^2}}
\end{aligned}$$

2. $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente (car $2 > 1$) donc par comparaison des séries à termes ~~positifs~~ de signe constant.
   Par comparaison, la série $\sum (v_{n+1} - v_n)$ converge.
   On en déduit que (v_n) converge (c'est le lien suite-série, fait par télescopage).

Partie 2. Propriétés élémentaires de ζ.

3. C'est le théorème de convergence des séries de Riemann.
4. On sait (et on a prouvé !) que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.
5. Soient x et y deux réels tels que $1 < x \leq y$. On a

$$\zeta(x) - \zeta(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^y} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{n^y}\right).$$

   Ce nombre est une somme (au sens de limite) de termes tous positifs car pour $n \geq 1$, $\frac{1}{n^x} \geq \frac{1}{n^y}$. On a donc $\zeta(x) \geq \zeta(y)$: $\boxed{\zeta \text{ est décroissante}}$.

6. (a) Soit N un entier supérieur à 2, et $x \in]1, +\infty[$.
   La fonction $t \mapsto t^{-x}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$. On a donc (faire le dessin)

$$\forall n \geq 2 \quad \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} \mathrm{d}t \leq \frac{1}{n^x} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^x} \mathrm{d}t.$$

   En sommant,

$$\int_2^{N+1} \frac{1}{t^x} \mathrm{d}t \leq \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^x} \leq \int_1^N \frac{1}{t^x} \mathrm{d}t.$$

   (b) Soit $x > 1$. La fonction $t \mapsto t^{-x}$ a pour primitive $t \mapsto \frac{t^{1-x}}{1-x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   L'encadrement obtenu à la question précédente se récrit donc

$$\left[\frac{t^{1-x}}{1-x}\right]_2^{N+1} \leq \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^x} \leq \left[\frac{t^{1-x}}{1-x}\right]_1^N.$$

   Passons à la limite, en remarquant que puisque $1 - x < 0$, on a $t^{1-x} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$.
   On obtient

$$0 - \frac{2^{1-x}}{1-x} \leq \zeta(x) - 1 \leq 0 - \frac{1}{1-x} \quad \text{soit} \quad \boxed{1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}}$$

   (c) Puisque $2^{x-1} = e^{(x-1)\ln(2)} \xrightarrow[t \to 1+]{} 1$ et que $\frac{1}{x-1} \xrightarrow[t \to 1+]{} +\infty$, on obtient par minoration que

$$\boxed{\zeta(x) \xrightarrow[x \to 1+]{} +\infty}$$

   Puisque les deux membres de l'encadrement de la question précédente sont équivalents à $\frac{1}{x-1}$, on a

$$\boxed{\zeta(x) \underset{x \to 1+}{\sim} \frac{1}{x-1}}$$

   (d) Dans l'encadrement de la question (b), les deux « gendarmes » tendent vers 1 en $+\infty$:

$$\boxed{\zeta(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1}$$

   On peut même écrire

$$\frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leq \zeta(x) - 1 \leq \frac{1}{x-1}$$

   Puisque les membres extérieurs sont équivalents à $\frac{1}{x}$ en $+\infty$; on a

$$\boxed{\zeta(x) - 1 \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x}}$$

Partie 3. Continuité de ζ sur $]1,+\infty[$.

7. Soit $b \in]1, a[$. On a $\dfrac{\ln(n)}{n^a} = o\left(\dfrac{1}{n^b}\right)$ car $n^{b-a}\ln(n) \to 0$ par croissances comparées.
   Puisque $\sum \dfrac{1}{n^b}$ est une série de Riemann convergente ($b>1$), par comparaison :
   $$\boxed{\sum \frac{\ln(n)}{n^a} \text{ converge.}}$$

8. Posons $u_\ell : x \mapsto e^{-x\ell}$. Elle est dérivable sur $[a,+\infty[$ de dérivée $u_\ell' : x \mapsto -\ell e^{-x\ell}$.
   On donc par décroissance de $x \mapsto e^{-x\ell}$:
   $$\forall x \in [a,+\infty[\quad |u_\ell'(x)| \leq \ell e^{-a\ell}.$$
   Si on note $c_a = \ell e^{-a\ell}$, l'inégalité des accroissements finis donne que la fonction u_ℓ est c_a-lipschitzienne sur $[a,+\infty[$, soit
   $$\forall (x,y) \in [a,+\infty[^2 \quad |e^{-x\ell} - e^{-y\ell}| \leq \ell e^{-a\ell}|x-y|.$$

9. Soient x et y deux réels de $[a,+\infty[$. En écrivant l'inégalité triangulaire pour les sommes de séries convergentes,
   $$|\zeta(x)-\zeta(y)| = \left|\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{n^y}\right)\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{1}{n^x} - \frac{1}{n^y}\right|.$$
   Pour $n \geq 2$, $\ln(n) > 0$ et d'après la question précédente,
   $$\left|e^{-x\ln(n)} - e^{-y\ln(n)}\right| \leq \ln(n)e^{-a\ln(n)}|x-y|,$$
   soit $$\left|\frac{1}{n^x} - \frac{1}{n^y}\right| \leq \frac{\ln(n)}{n^a}|x-y| \quad \text{encore vrai pour} n=1.$$
   Sommons : on obtient $|\zeta(x)-\zeta(y)| \leq |x-y| \cdot \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln(n)}{n^a}$,
   ce qui prouve bien que $\boxed{\text{sur } [a,+\infty[\text{, } \zeta \text{ est } K_a\text{-lipschitzienne, avec } K_a = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln(n)}{n^a}}$.

10. D'après la question précédente, ζ est continue (car lipschitzienne) sur $[a,+\infty[$ et donc en tout point de $]a,+\infty[$. Puisque a peut être choisi aussi proche de 1 que nécessaire, ζ est continue en tout point de $]1,+\infty[$.

Partie 4. Développement asymptotique au voisinage de 1.

11. (a) On a
   $$\begin{aligned} n\left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}\right) &= n\left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{n^x}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-x}\right) \\ &= n\left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{n^x}\left(1-\frac{x}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\ &= \frac{x}{n^x} + o\left(\frac{1}{n^x}\right) \end{aligned}$$
   On sait que la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^x}$ est convergente ($x>1$) donc par comparaison des séries à termes positifs, $\boxed{\sum n\left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}\right) \text{ converge.}}$

   (b) Soit $N \geq 1$. On calcule la somme partielle :
   $$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} n\left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}\right) &= \sum_{n=1}^{N}\frac{n}{n^x} - \sum_{n=1}^{N}\frac{n}{(n+1)^x} \\ &= \sum_{n=1}^{N}\frac{n}{n^x} - \sum_{n=2}^{N+1}\frac{n-1}{n^x} \\ &= \frac{1}{1^x} - \frac{N}{(N+1)^x} + \sum_{n=2}^{N}\frac{n-(n-1)}{n^x} \\ &= -\frac{N}{(N+1)^x} + \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^x} \end{aligned}$$
   Puisque $\frac{N}{(N+1)^x} \underset{N\to+\infty}{\sim} N^{1-x}$, et que $x>1$, on a $\frac{N}{(N+1)^x} \underset{N\to+\infty}{\to} 0$.
   Quant à la somme La somme tend vers $\zeta(x)$ par définition. Ceci prouve bien que
   $$\boxed{\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}\right)}$$
   *Le calcul de somme ci-dessus nous fait passer d'une somme du type $\sum a_k(b_k - b_{k+1})$ à une somme du type $\sum(a_{k+1}-a_k)b_k$ (avec deux termes de différence). On appelle parfois ceci une **transformation d'Abel**, sorte d'intégration par parties discrète).*

(c) Ici, il suffit de remarquer que pour $n \geq 1$, on a

$$\int_n^{n+1} \frac{\lfloor t \rfloor}{t^{x+1}} \mathrm{d}t = n \int_n^{n+1} \frac{1}{t^{x+1}} \mathrm{d}t = n \left[-\frac{1}{x} t^{-x} \right]_n^{n+1} = \frac{n}{x} \left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \right),$$

et il ne reste plus qu'à injecter pour obtenir $\boxed{\zeta(x) = x \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{\lfloor t \rfloor}{t^{x+1}} \mathrm{d}t}$

12. (a) Pour $n \geq 1$, on a

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{1-x} t^{1-x} \right]_n^{n+1} = \frac{1}{x-1} \left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \right)$$

Sommons ($N \geq 1$) : par télescopage,

$$\sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} \mathrm{d}t = \frac{1}{x-1} \left(1 - \frac{1}{(N+1)^x} \right)$$

Le membre de droite tend vers $\frac{1}{x-1}$: la somme converge et

$$\boxed{\frac{1}{x-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} \mathrm{d}t}$$

(b) En faisant la différence des expressions obtenues en 11-(c) et 12-(a) (et en utilisant la linéarité de la somme pour les séries convergentes, ainsi que la linéarité de l'intégrale) on obtient

$$\boxed{\zeta(x) - \frac{x}{x-1} = x \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{\lfloor t \rfloor - t}{t^{x+1}} \mathrm{d}t}$$

13. (a) Soit $x > 0$. On a, par inégalité triangulaire

$$\left| \int_n^{n+1} \frac{\lfloor t \rfloor - t}{t^{x+1}} \mathrm{d}t \right| \leq \int_n^{n+1} \frac{|\lfloor t \rfloor - t|}{t^{x+1}} \mathrm{d}t \leq \frac{1}{n^{x+1}} (n+1-n),$$

La distance entre le nombre t et sa partie entière étant majorée par 1.

On a bien démontré la comparaison $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\lfloor t \rfloor - t}{t^{x+1}} \mathrm{d}t = O\left(\frac{1}{n^{x+1}} \right)$.

F est donc bien définie sur $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$ car pour $x > 0$, $\sum \frac{1}{n^{x+1}}$ est une série de Riemann convergente ($x + 1 > 0$) et donc la série dont $F(x)$ est la somme est absolument convergente.

(b) Soit $N \geq 2$. On a $\int_1^N \frac{\lfloor t \rfloor - t}{t^2} \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} \frac{\lfloor t \rfloor - t}{t^2} \mathrm{d}t$. Or, pour n fixé,

$$\begin{aligned} \int_n^{n+1} \frac{\lfloor t \rfloor - t}{t^2} \mathrm{d}t &= n \int_n^{n+1} \frac{1}{t^2} \mathrm{d}t - \int_n^{n+1} \frac{1}{t} \mathrm{d}t \\ &= n \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) - (\ln(n+1) - \ln(n)) \\ &= \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n)) \end{aligned}$$

Sommons : $$\int_1^N \frac{\lfloor t \rfloor - t}{t^2} \mathrm{d}t = \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} - (\ln(N) - 0) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \ln(N) - 1.$$

Le membre de gauche tend vers $F(1)$ et celui de droite vers $\gamma - 1$ d'après la partie 1 : on obtient $\boxed{F(1) = \gamma - 1}$.

(c) Soient x et y dans $]0, +\infty[$. Les inégalités triangulaires permettent d'écrire

$$|F(x) - F(y)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \underbrace{|\lfloor t \rfloor - t|}_{\leq 1} \cdot \left| \frac{1}{t^{x+1}} - \frac{1}{t^{y+1}} \right|$$

Sans perte de généralité, supposons $x < y$. On a, en utilisant 12-(a) :

$$|F(x) - F(y)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{t^{x+1}} \mathrm{d}t - \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{t^{y+1}} \mathrm{d}t = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$$

On obtient bien $|F(x) - F(y)| \leq \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|$.

Ceci implique notamment que $F(x) \underset{x \to 1}{\to} F(1)$: $\boxed{F \text{ est continue en } 1}$.

14. En repartant de l'expression démontrée en 12-(b), on obtient

$$\zeta(x) = \frac{x}{x-1} + xF(x) \underset{1}{=} \frac{1}{x-1} + 1 + (1 + o(1))(F(1) + o(1)) = \frac{1}{x-1} + 1 + \gamma - 1 + o(1).$$

Par conséquent

$$\boxed{\boxed{\zeta(x) \underset{1}{=} \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1).}}$$