DS 8

Exercice 1. Équivalents et séries à termes positifs.

1. (a) Calculer un équivalent de $\mathrm{ch}(n)$.
   (b) Quelle est la nature de la série $\sum \frac{1}{\mathrm{ch}(n)}$?

2. (a) À l'aide de la formule de Stirling, calculer un équivalent de $\binom{2n}{n}$.
   (b) Quelle est la nature de la série $\sum 2^{-2n}\binom{2n}{n}$?

3. (a) Calculer un équivalent de $u_n = 2\sqrt{n} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$.
   (b) Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

4. (a) Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} k\ln(k)$.
   En comparant avec une intégrale, montrer que $S_n \sim \frac{1}{2}n^2\ln(n)$.
   (b) Quelle est la nature de la série $\sum \frac{1}{S_n}$?

5. (*) Soit $a > b > 0$. Déterminer la limite de la suite de terme général
$$u_n = \left(\frac{\ln(n+a)}{\ln(n+b)}\right)^{n\ln(n)}.$$
   puis un équivalent de $u_n - \ell$ où ℓ est cette limite.
   Quelle est la nature de $\sum(u_n - \ell)$?

Exercice 2. Trois applications des développements limités.

1. Calculer $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}\right)$.

2. Soit $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$.
   (a) À l'aide d'un développement limité, démontrer que f est prolongeable en 0 en une fonction dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.
   (b) La fonction f est aussi dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par théorèmes généraux ; calculer cette dérivée et prouver qu'elle est continue en 0.

3. (*) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $f_k : x \mapsto \cos(x^k)$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 3. Deux séries alternées.

1. Pour tout $n \geq 1$, on note $a_n = \frac{(-1)^n}{2n + (-1)^n}$.
   (a) Pour $n \geq 1$, calculer $|a_{2n+1}| - |a_{2n}|$ ainsi que $|a_{2n+2}| - |a_{2n+1}|$.
   (b) Justifier que $\sum a_n$ est une série convergente.
   (c) En travaillant sur les sommes partielles, calculer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
   Indication : on pourra exploiter quelque-chose remarqué en 1-(a).

2. Pour tout $n \geq 2$, on note $b_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$.
   (a) Pour $n \geq 1$, calculer $|b_{2n+1}| - |b_{2n}|$ ainsi que $|b_{2n+2}| - |b_{2n+1}|$.
   (b) Pourquoi ne peut-on pas appliquer cette fois le théorème des séries alternées ?
   (c) En utilisant un développement limité, justifier que $\sum b_n$ est convergente.
   (d) En travaillant sur les sommes partielles, calculer $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$.
   Indication : on pourra faire un tri pair/impair et utiliser sans démonstration le développement $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$, où γ est la constante d'Euler.

Problème. Étude de la fonction ζ.

Pour $x > 1$, on note

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Ceci définit sur l'intervalle $]1, +\infty[$ une fonction ζ (se prononce « dzêta ») qui a une grande importance en mathématiques (notamment en arithmétique).

Partie 1. La constante γ d'Euler.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

1. Montrer que $v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^2}$.
2. En déduire que la série $\sum(v_{n+1} - v_n)$ converge , puis que la suite (v_n) converge. **On notera γ sa limite**. Cette constante est appelée constante d'Euler.

Partie 2. Propriétés élémentaires de ζ.

3. Quel résultat du cours permet de justifier que $\zeta(x)$ est bien défini pour $x > 1$?
4. Que vaut $\zeta(2)$? (on ne demande pas de preuve, ce serait long !)
5. Démontrer que ζ est décroissante sur $]1, +\infty[$.
6. <u>Un encadrement</u>.
   (a) Pour N un entier supérieur à 2, et $x \in]1, +\infty[$, établir l'encadrement
   $$\int_2^{N+1} \frac{1}{t^x}\mathrm{d}t \leq \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^x} \leq \int_1^N \frac{1}{t^x}\mathrm{d}t.$$
   (b) En déduire l'inégalité
   $$\forall x > 1 \quad 1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}.$$
   (c) Montrer que $\zeta(x) \underset{x\to1_+}{\longrightarrow} +\infty$ et donner un équivalent de $\zeta(x)$ en 1_+.
   (d) Montrer que $\zeta(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et donner un équivalent de $\zeta(x) - 1$ en $+\infty$.

Partie 3. Continuité de ζ sur $]1, +\infty[$.

On fixe dans cette partie un réel a de $]1, +\infty[$.

7. Justifier que $\sum \dfrac{\ln(n)}{n^a}$ est une série convergente.
8. Soit $\ell > 0$. Établir que
   $$\forall (x, y) \in [a, +\infty[^2 \quad |e^{-x\ell} - e^{-y\ell}| \leq \ell e^{-a\ell}|x - y|.$$
9. Démontrer que ζ est K_a-lipschitzienne sur $[a, +\infty[$, où vous exprimerez K_a.
10. En déduire que ζ est continue sur $]1, +\infty[$.

Partie 4. Développement asymptotique au voisinage de 1.

11. Soit $x > 1$.
    (a) Montrer que la série $\sum n \left(\dfrac{1}{n^x} - \dfrac{1}{(n+1)^x}\right)$ converge.
    (b) En évaluant ses sommes partielles, montrer que sa somme vaut $\zeta(x)$.
    (c) En déduire l'expression $\zeta(x) = x \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{\lfloor t \rfloor}{t^{x+1}}\mathrm{d}t$.
12. Soit $x > 1$.
    (a) Vérifier l'égalité $\dfrac{1}{x-1} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\mathrm{d}t$.
    (b) En déduire que $\zeta(x) - \dfrac{x}{x-1} = x \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{\lfloor t \rfloor - t}{t^{x+1}}\mathrm{d}t$.
13. Dans cette question, nous nous intéressons à $F : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{\lfloor t \rfloor - t}{t^{x+1}}\mathrm{d}t$.
    (a) Soit $x > 0$; vérifier que $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\lfloor t \rfloor - t}{t^{x+1}}\mathrm{d}t = O\left(\frac{1}{n^{x+1}}\right)$.
    En déduire que la fonction F est bien définie sur $]0, +\infty[$.
    (b) Pour $N \geq 2$, justifier que $\displaystyle\int_1^N \frac{\lfloor t \rfloor - t}{t^2}\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \ln(N) - 1$. En déduire $F(1)$.
    (c) Montrer que pour x et y dans $]0, +\infty[$, on a $|F(x) - F(y)| \leq |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}|$.
    En déduire que F est continue en 1.
14. Démontrer enfin le développement $\boxed{\zeta(x) \underset{1}{=} \dfrac{1}{x-1} + \gamma + o(1).}$