DM 2

À rendre le vendredi 20 septembre.
Obligatoires : exercice 1 + questions 1 et 2-(a) du problème.

Exercice 1. Un produit.

Démontrer (trois fois) que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \prod_{k=1}^{2n} (-1)^k = (-1)^n,$$

- en écrivant une récurrence,
- en vous ramenant à $\sum k$,
- en triant les facteurs selon leur parité.

Exercice 2. Un calcul de $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3$.

Dans cet exercice, n est un entier naturel non nul.

Pour $p \in \{1,2,3\}$, on note $s_p = \sum\limits_{k=1}^{n} k^p$. On note aussi

$$\sigma = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij \quad \text{et} \quad \sigma' = \sum_{1 \leq j \leq i \leq n} ij.$$

1. Rappeler les factorisations de s_1 et s_2 données en cours.
   dans cet exerice, on souhaite retrouver celle de s_3.
2. Justifier que $\sigma = \sigma'$.
3. Montrer que $\sigma = \frac{1}{2}(s_3 + s_2)$.
4. Montrer que $\sigma + \sigma' - s_2 = s_1^2$.
5. À l'aide de ce qui précède, retrouver (cela a été prouvé en cours) que $s_3 = s_1^2$.

Problème. Un encadrement de $\binom{2n}{n}$.

1. Une majoration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   À l'aide du binôme de Newton, prouver que $\binom{2n}{n} \leq 2^{2n}$.
2. Une minoration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Prouver que $\binom{2n}{n} = \frac{2^n}{n!} \prod\limits_{k=1}^{n} (2k-1)$.
   (b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Démontrer l'inégalité
   $$\frac{2k-1}{k} \geq 2\sqrt{\frac{k-1}{k}}.$$
   (c) En faisant un produit d'inégalités (possible ?), démontrer que
   $$\binom{2n}{n} \geq \frac{2^{2n-1}}{\sqrt{n}}.$$
3. En utilisant l'encadrement établi par les deux questions précédentes, calculer
   $$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \ln\left(\binom{2n}{n}\right).$$