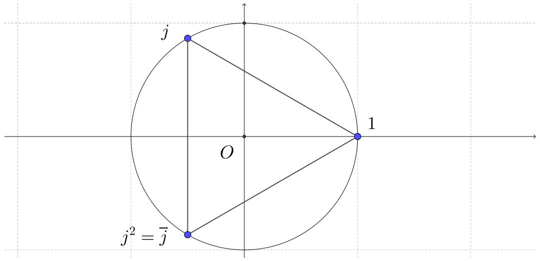
Corrigé du DM 25

1. Ci-dessous, les trois racines 3èmes de l'unité. On a $j^3 = 1$ donc $j^4 = j$ et $j^5 = j^2$. Puisque $j \cdot j^2 = 1$, on a $\frac{1}{j} = j^2$.



2.

$$AM = \begin{pmatrix} P(1) & P(j) & P(j^2) \\ P(1) & jP(j) & j^2P(j^2) \\ P(1) & j^2P(j) & jP(j^2) \end{pmatrix}$$

Par linéarité par rapport à C_1, C_2 et C_3, on a

$$\det(AM) = P(1)P(j)P(j^2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{vmatrix}.$$

$$\text{d'où} \quad \det(A)\det(M) = P(1)P(j)P(j^2)\det(M),$$

(on a utilisé bien sûr que $\det(AM) = \det(A)\det(M)$. Or $\det(M)$ est un déterminant de Vandermonde : nous savons que $\det(M) = (j-1)(j^2-1)(j^2-j)$. Ce déterminant étant non nul, on obtient donc

$$\boxed{\det(A) = P(1)P(j)P(j^2)}.$$

3. La matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul, ce qui est vrai si et seulement si aucune racine 3ème de l'unité n'est racine de P.

4. On calcule d'abord AM

$$AM = \begin{pmatrix} P(1) & P(\omega) & P(\omega^2) & \cdots & P(\omega^{n-1}) \\ P(1) & \omega P(\omega) & \omega^2 P(\omega^2) & \cdots & \omega^{n-1}P(\omega^{n-1}) \\ \vdots & \omega^2 P(\omega) & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ P(1) & \omega^{n-1}P(\omega) & \omega^{2(n-1)}P(\omega^2) & \cdots & \omega^{(n-1)(n-1)}P(\omega^{n-1}) \end{pmatrix},$$

où $P := \sum_{k=1}^{n} a_k X^{k-1}$.

Passons au déterminant et utilisons la multilinéarité pour factoriser constantes sur chaque colonne.

$$\det(AM) = \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega^k)\det(M).$$

Or, $\det(AM) = \det(A)\det(M)$, de sorte qu'il faut diviser par $\det(M)$ si on veut conclure. C'est un brave déterminant de Vandermonde : $\det(M) = \prod_{0 \le i < j \le n-1} (\omega^j - \omega^i)$. On obtient

$$\det(A) = \boxed{\prod_{k=0}^{n-1} P(\omega^k)}.$$