

Problème.

On définit l'application

$$D : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \rightarrow \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto P' \end{cases}$$

On rappelle que pour un endomorphisme u d'un espace vectoriel E

$$u^0 = \text{id}_E \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u^{n+1} = u \circ u^n.$$

Les parties **II** à **IV** sont indépendantes.

Partie I - Préliminaires

1. Justifier que D est un endomorphisme surjectif de $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $n = \deg P$. On suppose que $n \geq 0$.
 - (a) Montrer que $\mathcal{B}_P = (P, P', \dots, P^{(n)})$ est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.
 - (b) Conclure que \mathcal{B}_P est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie II - Sous-espaces stables par D

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ stable par D , c'est-à-dire :

$$\forall P \in F \quad D(P) \in F.$$

3. si les degrés des polynômes de F sont bornés

On suppose que $F \neq \{0\}$ et qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$F \subset \mathbb{R}_N[X].$$

- (a) Justifier que l'on peut définir un entier naturel n par

$$n = \max \{ \deg P \mid P \in F, P \neq 0 \}.$$

On se donne $P \in F$ tel que $\deg(P) = n$.

Justifier que \mathcal{B}_P est une famille de vecteurs de F .

La famille \mathcal{B}_P a été définie à la question 2.

- (b) Montrer que

$$F = \mathbb{R}_n[X].$$

On pourra considérer le sous-espace vectoriel engendré par \mathcal{B}_P .

4. si les degrés des polynômes de F ne sont pas bornés

On suppose que pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $P \in F$ tel que $\deg P > N$.

Montrer que $\mathbb{R}_N[X] \subset F$ pour tout $N \in \mathbb{N}$. Que vaut F ?

5. conclusion

Quels sont tous les sous-espaces vectoriels stables par D ?

Partie III - Une condition suffisante pour que D^m admette une racine k^e

On se donne deux entiers naturels non nuls m et k tels que k divise m .

6. Montrer qu'il existe un endomorphisme g de $\mathbb{R}[X]$ tel que $g^k = D^m$.

Partie IV - Cette condition suffisante est nécessaire

On se donne deux entiers naturels non nuls m et k .

On suppose qu'il existe un endomorphisme g de $\mathbb{R}[X]$ tel que

$$g^k = D^m.$$

7. Montrer que $\text{Ker}(g^k) = \mathbb{R}_{m-1}[X]$.

8. Montrer que g est surjective.

9. Pour $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$, justifier que $\text{Ker}(g^i)$ est de dimension finie.
On pourra comparer $\text{Ker}(g^i)$ et $\text{Ker}(g^k)$.

10. Soit $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$. On définit l'application ϕ_i par

$$\phi_i : \begin{cases} \text{Ker}(g^i) & \rightarrow \text{Ker}(g^{i-1}) \\ P & \mapsto g(P). \end{cases}$$

- (a) Justifier que ϕ_i est bien définie et que ϕ_i est une application linéaire.
- (b) Montrer que $\text{Ker} \phi_i = \text{Ker} g$.
- (c) Montrer que ϕ_i est surjective.
- (d) Dédire de ce qui précède une relation entre $\dim \text{Ker}(g^i)$, $\dim \text{Ker}(g^{i-1})$ et $\dim \text{Ker}(g)$.
11. Montrer que pour tout $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$, $\dim \text{Ker}(g^i) = i \dim \text{Ker}(g)$.
Conclure que k divise m .

Exercice. (*)

1. Soient E, F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie et V un sous-espace de E . On note $n = \dim E$, $p = \dim F$ et $q = \dim V$. On définit

$$\mathcal{L}_V(E, F) = \{u \in \mathcal{L}(E, F) \mid V \subset \text{Ker}(u)\}.$$

- (a) Démontrer que $\mathcal{L}_V(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$.
(b) À l'aide de $\Phi : u \mapsto u|_V$, démontrer que $\dim \mathcal{L}_V(E, F) = p(n - q)$.
2. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit

$$G_1 = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid u \circ f = 0\}$$

$$G_2 = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ u = 0\}$$

$$G_3 = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ u \circ f = 0\}$$

Démontrer que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$ et exprimer leur dimension à l'aide de n et de $\text{rg}(f)$.