Problème. Commutant d'une matrice.

Dans le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n un entier naturel non nul.

On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

La base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est notée $\left(E_{i,j}, (i,j) \in [\![1,n]\!]^2\right)$.

Pour une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle **commutant** de A l'ensemble noté $\mathrm{C}(A)$ des matrices qui commutent avec A :

$$\mathrm{C}(A) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid AM = MA\}$$

I. Propriétés générales du commutant

1. Préciser $\mathrm{C}(I_n)$ et $\mathrm{C}(0_n)$.
2. (a) Montrer que $\mathrm{C}(A)$ est stable par combinaisons linéaires.
   (b) Montrer que $\mathrm{C}(A)$ est stable pour le produit matriciel.
   (c) Justifier que $\mathrm{C}(A)$ est un sous-anneau de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
3. Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Montrer que : $M \in \mathrm{C}(A) \iff M^{-1} \in \mathrm{C}(A)$.
4. Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
   (a) Montrer que pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,
   $$M \in \mathrm{C}(A) \iff P^{-1}MP \in \mathrm{C}(P^{-1}AP).$$
   (b) Montrer que l'application $\varphi : M \longmapsto P^{-1}MP$ est un isomorphisme d'anneaux de $\mathrm{C}(A)$ dans $\mathrm{C}\left(P^{-1}AP\right)$.

II. Commutant d'une matrice diagonale

Soient n scalaires $d_1, d_2, \ldots, d_n$ deux à deux distincts.
On note D la matrice diagonale

$$D = \mathrm{Diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$$

6. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.
   Préciser le coefficient d'indice (i,j) des matrices MD et DM.
7. Montrer que $\mathrm{C}(D)$ est l'ensemble des matrices diagonales.

III. Commutant d'une matrice diagonalisable

Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

8. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
9. Calculer la matrice $\Delta = P^{-1}AP$.
10. Donner $\mathrm{C}(\Delta)$ et en déduire $\mathrm{C}(A)$.

IV. Commutant d'une matrice élémentaire et applications

11. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Déterminer $\mathrm{C}\left(E_{i,j}\right)$.
12. *Application :*
    Déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec toutes les matrices.
13. (a) Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Calculer $(I_n + E_{i,j})(I_n - E_{i,j})$.
    (b) Montrer que pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $I_n + E_{i,j}$ est inversible.
14. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Montrer que $\mathrm{C}\left(E_{i,j}\right) = \mathrm{C}\left(I_n + E_{i,j}\right)$.
15. *Application :*
    Déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec toutes les matrices inversibles.