7 Outils pour l'étude des fonctions

Ce cours se donne pour but de définir un vocabulaire rigoureux pour l'étude des fonctions de la variable réelle. On souhaite aussi présenter (sans preuve) un certain nombre de résultats que nous utiliserons dès maintenant, et qui seront établis dans le (vrai) cours d'analyse.

Dans tout ce cours, la lettre $\mathbb{K}$ pourra être remplacée par $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Les lettres I et J désigneront des intervalles de $\mathbb{R}$ non vides et non réduits à un point.

La lettre X désignera quant à elle une partie quelconque de $\mathbb{R}$. Dans la pratique, il s'agira souvent d'un intervalle, mais cela pourra être aussi une réunion d'intervalles. La lettre Y sera une partie quelconque de $\mathbb{K}$.

1 Propriétés de $\mathbb{R}$.

1.1 Relation $\leq$.

Rappel ($\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$)**.**

- $\forall x \in \mathbb{R} \quad x \leq x.$ (Réflexivité)
- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad (x \leq y \text{ et } y \leq x) \Longrightarrow x = y.$ (Antisymétrie)
- $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad (x \leq y \text{ et } y \leq z) \Longrightarrow x \leq z.$ (Transitivité)

Rappel (C'est une relation d'ordre totale)**.**

On peut toujours comparer deux réels : pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$, on a $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Rappel (Élémentaire mais fondamental)**.**

On peut comparer deux réels en examinant le signe de leur différence :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad x \leq y \iff y - x \geq 0.$$

Exemple 1 (Inégalité arithmético-géométrique .)**.**

Établir l'inégalité $\sqrt{xy} \leq \dfrac{x+y}{2}$ pour deux réels x et y positifs. Dans quel cas a-t-on égalité ?

Rappel ($\leq$ et somme)**.**

On peut *sommer des inégalités*. Pour tous réels x, x', y, y',

$$\left\{\begin{array}{ccc} x & \leq & y \\ & \text{et} & \\ x' & \leq & y' \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad x + x' \leq y + y'.$$

Si $(x_i)_{i \in I}$ et $(y_i)_{i \in I}$ sont des familles finies de nombres réels,

$$(\forall i \in I \quad x_i \leq y_i) \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i \in I} x_i \leq \sum_{i \in I} y_i.$$

Proposition 2 (Somme nulle de termes positifs)**.**

Soient $x_1, \ldots, x_n$ des réels $\boxed{\text{positifs}}$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \quad \Longrightarrow \quad \forall i \in [\![1,n]\!] \quad x_i = 0.$$

Rappel ($\leq$ et produit)**.**

Soient x et y deux réels tels que $x \leq y$.
- Si a est un réel positif alors $ax \leq ay$.
- Si a est un réel négatif alors $ax \geq ay$.

On peut *multiplier des inégalités* dont les membres sont positifs. Pour tous réels x, x', y, y',

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq y \\ \text{et} \\ 0 \leq x' \leq y' \end{cases} \implies x \times x' \leq y \times y'.$$

Rappel ($\leq$ et quotient)**.**

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad 0 < x \leq y \implies 0 \leq \frac{1}{y} < \frac{1}{x}.$$

1.2 Intervalles.

Définition 3 (Les deux infinis)**.**

On ajoute à l'ensemble $\mathbb{R}$ les deux éléments $+\infty$ et $-\infty$ pour former l'ensemble

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\},$$

en prenant la convention que pour tout x réel, $x \leq +\infty$ et $-\infty \leq x$.

Définition 4.

On appelle **intervalle** de $\mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$ ayant l'une des formes décrites ci-dessous :

- Segment $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \text{ et } x \leq b\}$ où $a, b \in \mathbb{R}$.
- Intervalles ouverts $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x \text{ et } x < b\}$ où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
- Intervalles semi-ouverts $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \text{ et } x \leq b\}$ où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, b \in \mathbb{R}$, ou bien $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \text{ et } x < b\}$ où $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Remarque. Les parties décrites ci-dessus peuvent être vides. Par exemple, $]5, 3] = \emptyset$.

Figures. Représentation des intervalles $[1, 2[$ et $]5, +\infty[$.

Exemple 5.

Les intervalles sont des parties « convexes » de $\mathbb{R}$: si I est un intervalle,

$$\forall (x,y) \in I^2 \quad [x,y] \subset I.$$

L'ensemble des réels non nuls $\mathbb{R}^*$ n'est **pas** un intervalle (il n'est pas convexe).
C'est néanmoins une réunion d'intervalles :

$$\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[.$$

1.3 Partie entière.

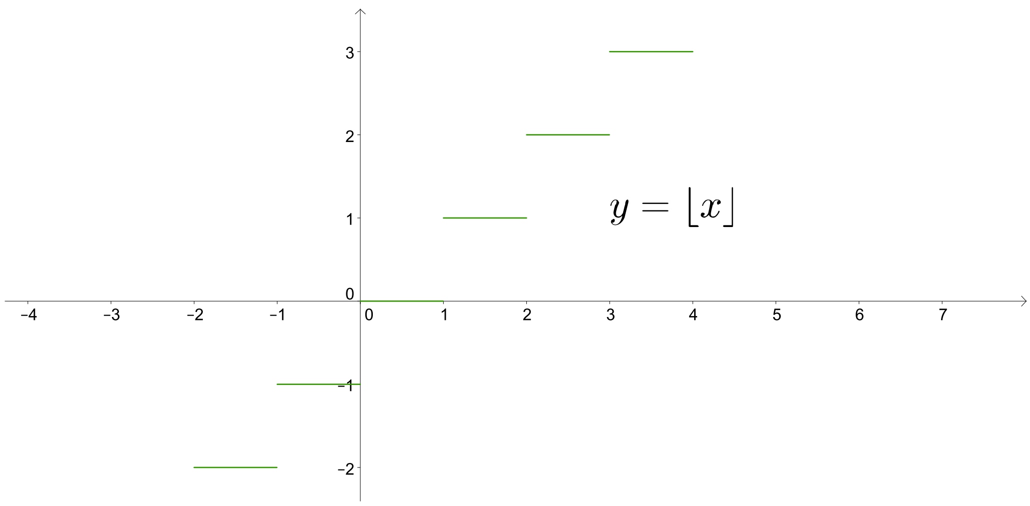
Définition 6.

Pour tout nombre réel x, on appelle **partie entière** de x, et on note $\lfloor x \rfloor$ le plus grand entier relatif inférieur à x :

$$\lfloor x \rfloor = \max \{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}.$$

Remarque. La définition ci-dessus a un sens en admettant que toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ possède un plus grand élément.

Exemple. $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$.



Proposition 7 (Partie entière et encadrements)**.**

Pour tout nombre réel x,

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

En « croisant » les inégalités, ceci implique notamment que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x.$$

1.4 Valeur absolue.

Définition 8.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle **valeur absolue** de x et on note $|x|$ le nombre réel *positif* donné par

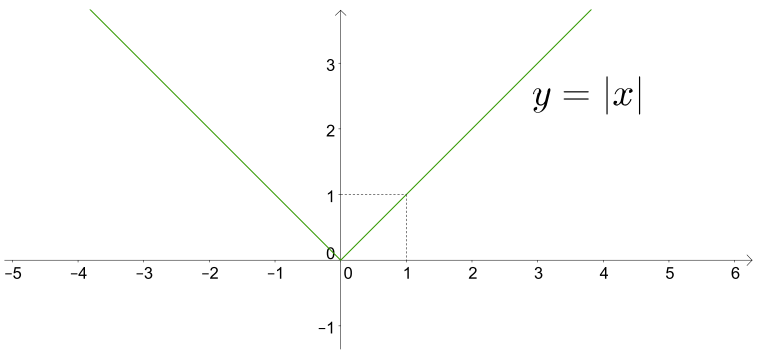
$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

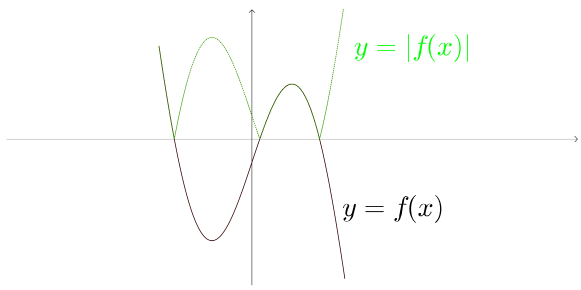
Proposition 9 (Propriétés élémentaires)**.**

Pour tout x réel,

$$|x| = \max(x, -x) \qquad x \leq |x|, \quad -x \leq |x| \quad \text{et} \quad -|x| \leq x \leq |x|$$

$$|-x| = |x| \qquad |x| = 0 \iff x = 0$$





Proposition 10 (Valeurs absolues et produits)**.**

1. $\forall x \in \mathbb{R} \quad |x|^2 = x^2$ et $|x| = \sqrt{x^2}$.
2. La valeur absolue du produit, c'est le produit des valeurs absolues

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|.$$

3. $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}^* \quad \left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.

Comme nous l'avons montré dans le cas plus général du module, la valeur absolue de la somme n'est **pas** la somme des valeurs absolues. Dans $\mathbb{C}$, on pouvait dessiner le triangle.

Proposition 11 (Inégalité triangulaire)**.**

Pour tous nombres réels x et y, on a

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Corollaire 12.

1. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad |x-y| \leq |x|+|y|$.
2. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad ||x|-|y|| \leq |x-y|$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tous nombres réels $x_1, \ldots, x_n$, on a l'inégalité $\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|$.

⚠ On notera que dans la première inégalité, on a écrit un $-$ à gauche mais il y toujours un $+$ à droite !

Une notion de distance sur $\mathbb{R}$. On l'a déjà compris avec le module : pour x et y deux réels,

$$\boxed{|x-y| \text{ est la } \textbf{distance} \text{ entre } x \text{ et } y.}$$

Proposition 13.

$$\forall x, a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R}_+ \qquad \begin{array}{lcl} |x-a| \leq b & \iff & x \in [a-b, a+b] \\ |x-a| \geq b & \iff & x \geq a+b \ \text{ ou } \ x \leq a-b. \end{array}$$

En particulier, $\qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \forall b \in \mathbb{R}_+ \quad |x| \leq b \iff -b \leq x \leq b.$

2 Description des fonctions.

Soit X une partie de $\mathbb{R}$ (quelconque) et Y une partie de $\mathbb{K}$. On rappelle qu'une fonction (ou application)

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} X & \to & Y \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right. .$$

est un procédé qui a tout élément x de X associe un unique élément $f(x)$ appartenant à Y.

Si $x \in X$ et $y = f(x)$, on rappelle que y est l'**image** de x et que x est *un* **antécédent** de y.

Puisqu'ici la variable x est un nombre réel, on dit que la fonction est de la **variable réelle**.

Lorsque toutes les images par la fonction f sont des nombres réels, alors f est dite **à valeurs réelles** (dans la pratique, ce sera le cas dans l'immense majorité des cas considérés).

Rappel.

« La fonction $f(x)$ » ou « La fonction f » ?

La bonne réponse, c'est la deuxième !

Pour $f : X \to \mathbb{K}$, l'objet $f(x)$ est un <u>nombre</u> (de $\mathbb{K}$), bien défini si x est un élément de l'ensemble X.

Prenons les bonnes habitudes dès maintenant si on veut être capable de comprendre un jour la différence entre convergence simple et convergence uniforme d'une suite de fonctions...

2.1 Ensemble de définition.

L'**ensemble de définition** d'une fonction f est l'ensemble des réels x tel que $f(x)$ a un sens.

Exemple 14.

Donner l'ensemble de définition de

$$f : x \mapsto \sqrt{x(x-2)}, \qquad g : x \mapsto \ln\left(x(x-2)\right), \qquad h : x \mapsto \ln(x) + \ln(x-2).$$

2.2 Représentation graphique d'une fonction à valeurs réelles.

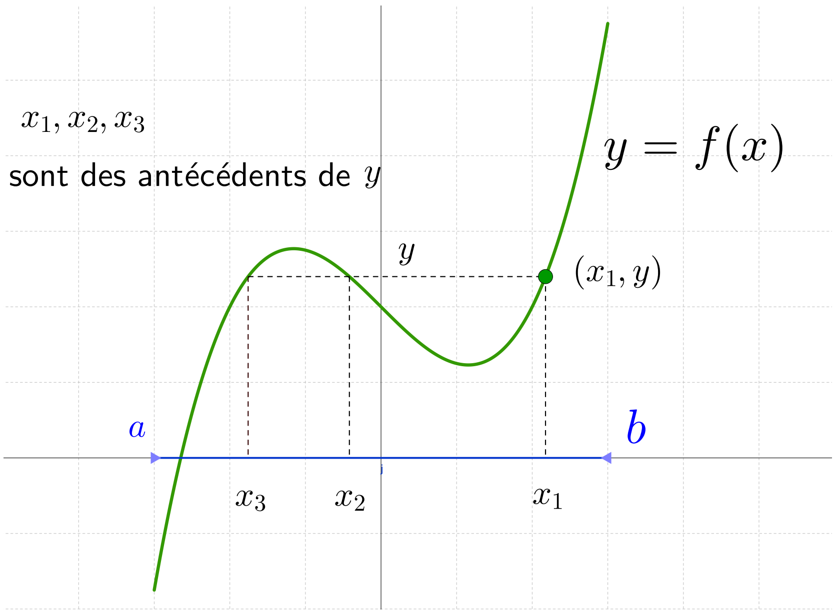
Définition 15.

Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction réelle de la variable réelle et à valeurs réelles.
On appelle **graphe** de f la partie de $\mathbb{R}^2$ suivante :

$$\{(x, f(x)), \quad x \in X\}$$

$$\text{qui peut aussi s'écrire} \qquad \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in X \text{ et } y = f(x)\right\}.$$

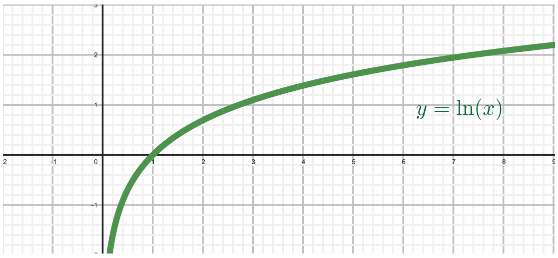
Supposons le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. À chaque élément du graphe correspond alors un point du plan. Déposons une goutte d'encre sur chacun de ces points (ou noircissons le pixel correspondant). Le résultat est appelé **courbe représentative** de la fonction. Dans la pratique, on confond graphe et courbe représentative.

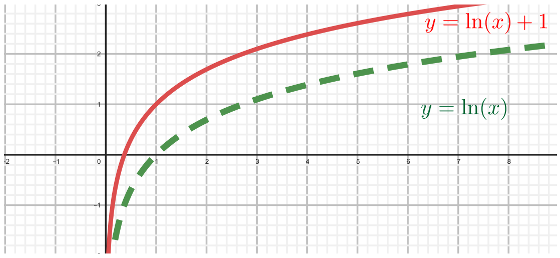


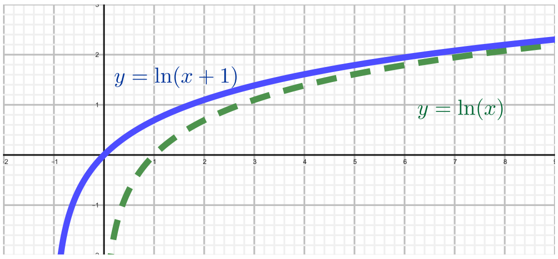
Graphe d'une fonction définie sur un segment $[a, b]$.

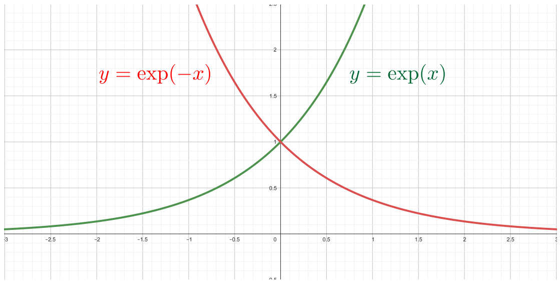
Remarque. Chaque fois qu'on représentera un graphe de fonctions dans la suite, il faudra bien sûr comprendre qu'il s'agit d'une fonction à valeurs réelles.

• Quelques graphes déduits de graphes de fonctions usuelles.

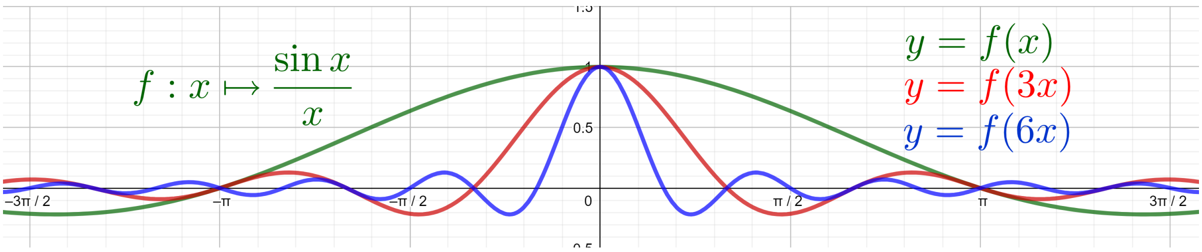








• Quel lien entre le graphe de f et celui de $x \mapsto f(ax)$, avec $a > 0$?

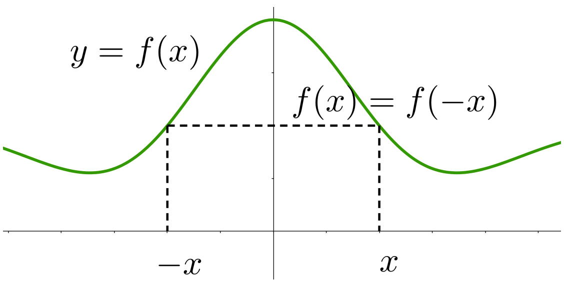


2.3 Parité, imparité.

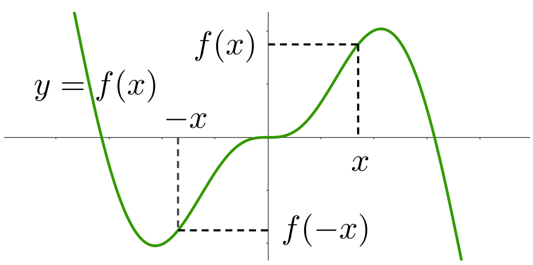
Définition 16.

Soit X une partie de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : X \to \mathbb{K}$ est dite

• **paire** si $\forall x \in X \begin{cases} -x \in X \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$ • **impaire** si $\forall x \in X \begin{cases} -x \in X \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$



Graphe d'une fonction paire.



Graphe d'une fonction impaire.

2.4 Périodicité.

Définition 17.

Soit $T > 0$ et X une partie de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : X \to \mathbb{K}$ est dite T-**périodique** si

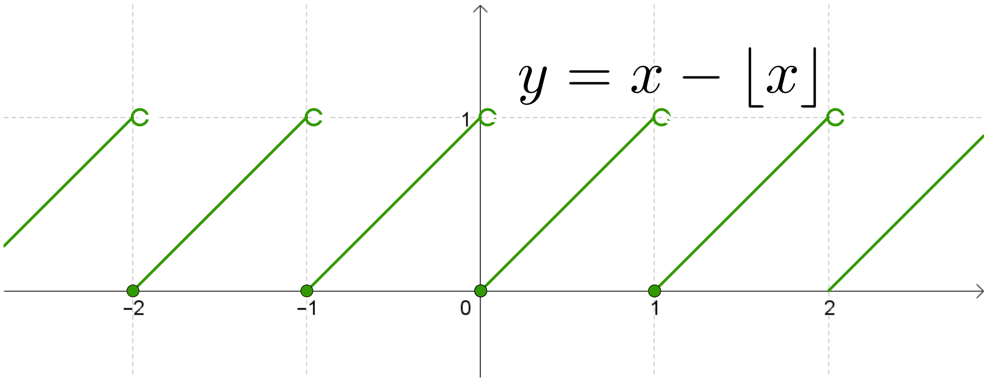
$$\forall x \in X \begin{cases} x + T \in X \\ f(x+T) = f(x) \end{cases}$$

On peut aussi dire que f « admet T pour période ».

Une fonction sera dite périodique si elle admet une certaine période $T \in \mathbb{R}_+^*$.

Exemples. cos et sin sont 2π-périodiques. La fonction tan est π-périodique sur son ensemble de définition. Un exemple de fonction à valeurs complexes : $t \mapsto e^{it}$, 2π-périodique.

Ci-dessous, le graphe de $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$, qui est 1-périodique.



Exemple 18.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ une fonction T-périodique, où T est un réel strictement positif.

Montrer que $g : x \mapsto f(-x)$ est T-périodique.

Soit $a > 0$. Prouver que $h : x \mapsto f(ax)$ est T'-périodique, en précisant T'.

Méthode (Réduction de l'intervalle d'étude).

Soit $f : X \to \mathbb{R}$.

- Si f est T périodique, son graphe est laissé invariant par la translation de vecteur $T\vec{i}$. Il suffit donc d'étudier une fonction T-périodique sur un intervalle de longueur T, le plus souvent $[0, T]$ ou $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. On obtient le reste du graphe par translations.
- Si f est paire, son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
  Si f est impaire, il est invariant par la symétrie centrale de centre O.
  Il suffit alors d'étudier f sur $X \cap \mathbb{R}_+$. L'étude sur $X \cap \mathbb{R}_-$ vient par symétrie.

2.5 Monotonie.

Définition 19.

Soit $f : X \to \mathbb{R}$. Elle est dite

- **croissante** si $\quad \forall x \in X \ \forall x' \in X \quad x \leq x' \Longrightarrow f(x) \leq f(x')$.
- **décroissante** si $\quad \forall x \in X \ \forall x' \in X \quad x \leq x' \Longrightarrow f(x) \geq f(x')$.
- **strictement croissante** si $\quad \forall x \in X \ \forall x' \in X \quad x < x' \Longrightarrow f(x) < f(x')$.
- **strictement décroissante** si $\quad \forall x \in X \ \forall x' \in X \quad x < x' \Longrightarrow f(x) > f(x')$.

Lorsqu'une fonction a l'une des propriétés ci-dessus, elle est dite **monotone** (strictement monotone dans les deux derniers cas).

En bref et en français : une fonction est croissante si elle conserve les inégalités larges, strictement croissante si elle conserve les inégalités strictes.

Si $f : X \to \mathbb{R}$ et que $A \subset X$, on dira que f est **monotone** « sur A » si la restriction $f_{|A}$ est monotone.

Exemple 20.

Soit f une fonction paire sur $\mathbb{R}$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

Proposition 21.

La fonction partie entière est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exemple 22 (Un peu de logique)**.**

Soit f une fonction strictement croissante sur un intervalle I et $x, y \in I$. Démontrer l'équivalence

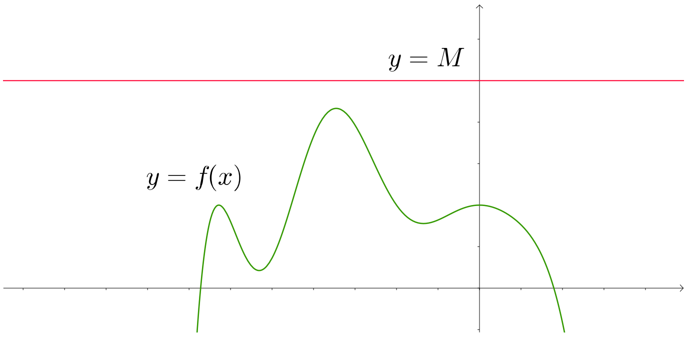
$$x < y \Longleftrightarrow f(x) < f(y).$$

2.6 Fonctions bornées.

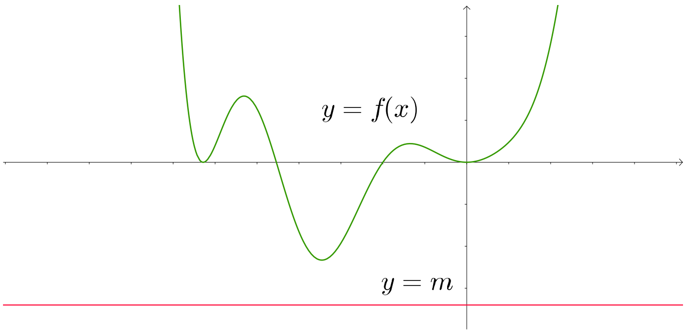
Définition 23.

Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est dite

- **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\quad \forall x \in X \ f(x) \leq M$,
  (M étant alors appelé un **majorant** de f)
- **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\quad \forall x \in X \ f(x) \geq m$,
  (m étant alors appelé un **minorant** de f)
- **bornée** si elle est majorée et minorée.



Une fonction f majorée par un réel M.



Une fonction f minorée par un réel m.

Proposition 24 (Caractérisation des fonctions bornées)**.**

Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction.

$$f \text{ est bornée} \quad \iff \quad \exists \mu \in \mathbb{R}_+ \; \forall x \in X \quad |f(x)| \leq \mu.$$

Un slogan : « être borné, c'est être majoré en valeur absolue ».

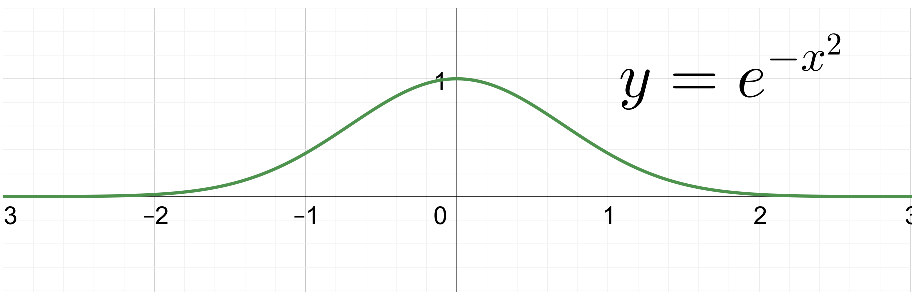
Définition 25.

Soit une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ et $a \in X$. On dit que

- f admet (ou atteint) un **maximum** en a si $\forall x \in X \; f(x) \leq f(a)$,
- f admet (ou atteint) un **minimum** en a si $\forall x \in X \; f(x) \geq f(a)$,
- un **extremum** est un minimum ou un maximum.

Dans la définition précédente, $f(a)$ est le maximum de la partie de $\mathbb{R}$ $\{f(x), x \in X\}$, qui est l'ensemble de toutes les images par f. Il y a unicité de ce maximum, comme on l'a montré dans le cours de logique.

En revanche, ce maximum unique peut être atteint en plusieurs points ! Par exemple, la fonction cos admet un maximum (qui vaut 1) et ce maximum est atteint en tous les multiples de 2π.



La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ possède un maximum en 0, qui vaut 1. La fonction est minorée (par 0) mais ne possède pas de minimum. En effet, puisque la fonction est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, aucun minimum ne peut être atteint sur cet intervalle, idem pour $\mathbb{R}_-$.

2.7 Somme et produit de fonctions.

Définition 26.

Soient f et g définies sur un même ensemble $X \subset \mathbb{R}$, à valeurs réelles.
La **somme** de f et g est la fonction définie par

$$f+g : \left\{ \begin{array}{ccl} X & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & (f+g)(x) := f(x)+g(x) \end{array} \right. .$$

Définition 27.

Soient f et g définies sur un même ensemble $X \subset \mathbb{R}$, à valeurs réelles.
Le **produit** et le **quotient** de f et g sont les fonctions définies par

$$f \cdot g : \left\{ \begin{array}{ccl} X & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & (f \cdot g)(x) := f(x)g(x) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad f/g : \left\{ \begin{array}{ccl} X & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & (f/g)(x) := \dfrac{f(x)}{g(x)} \end{array} \right. .$$

(pour que la définition du quotient ait un sens, il est nécessaire que g ne s'annule pas sur X).

Notation.

Si $f : X \mapsto \mathbb{K}$, la notation f^2 désignera la fonction $f \times f$. Ainsi,

$$\forall x \in X \quad f^2(x) = (f(x))^2 .$$

Exemple 28.

Montrer que le produit de deux fonctions impaires est une fonction paire.

Exemple 29.

Soient deux fonctions bornées f et g définies sur un même ensemble X.
Montrer que leur somme $f+g$ et leur produit fg sont des fonctions bornées.

Exemple 30 (Une preuve par analyse-synthèse)**.**

Démontrer le résultat ci-dessous.

Toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme somme
d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Solution dans la partie 3 chapitre 0.

2.8 Bijections.

On rappelle la définition d'une bijection (donnée dans le cours sur les applications).

Rappel.

On dit qu'une fonction $f : I \to J$ est une **bijection** de I vers J si tout élément de J possède un unique antécédent dans I par f, ce qui s'écrit

$$\forall y \in J \quad \exists! x \in I \quad y = f(x).$$

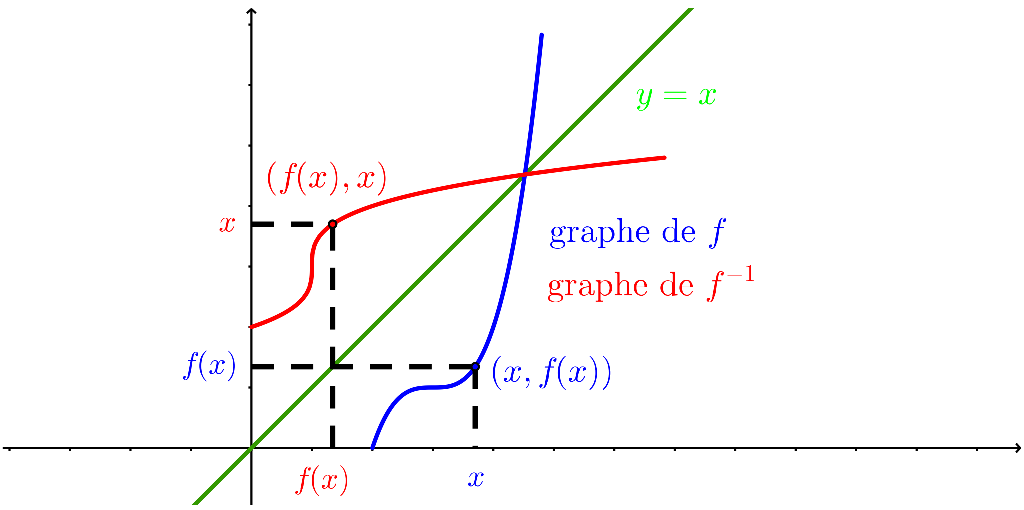
Si f est une bijection de I vers J, pour tout élément $y \in J$, on note $f^{-1}(y)$ son unique antécédent dans I par f. Ceci définit la **réciproque** de f :

$$f^{-1} : \left\{ \begin{array}{lll} J & \to & I \\ y & \mapsto & f^{-1}(y) \end{array} \right. .$$

Exemple. $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est une bijection et $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est sa réciproque.

Proposition 31.

Soit $f : I \to J$ une bijection de I vers J.
Le graphe de $f^{-1} : J \to I$ est le symétrique de celui de f par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Proposition 32.

Soit $f : I \to J$ une bijection.

1. Si f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I, alors f^{-1} est strictement croissante (resp. strictement décroissante sur J).
2. Si f est impaire, alors $f^{-1} : J \to I$ l'est aussi.

3 Continuité et applications.

Un cours sera consacré à la continuité, une fois définie rigoureusement la notion de limite. On se contente ici de quelques définitions et de résultats importants dont la preuve est différée.

3.1 Définition.

Définition 33.

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ et $a \in I$. La fonction f est **continue en** a si

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a).$$

Si f est continue en tout point de I, elle est dite **continue sur** I.

Exemple 34.

La plupart des fonctions usuelles sont continues sur leur intervalle de définition.
La fonction partie entière est continue (constante !) sur tous les intervalles de forme $]p, p+1[$ avec $p \in \mathbb{Z}$. Elle n'est continue en aucun point $p \in \mathbb{Z}$.

3.2 Continuité et opérations.

Proposition 35.

Si f et g sont continues sur I, alors leur somme et leur produit sont continus sur I.
Si f et g sont continues sur I et que g ne s'annule pas sur I, leur quotient est continu sur I.

Proposition 36.

Soient deux fonctions $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{K}$.
Si f est continue sur I et g est continue sur J, alors la composée $g \circ f$ est continue sur I.

3.3 Théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème 37 (des valeurs intermédiaires)**.**

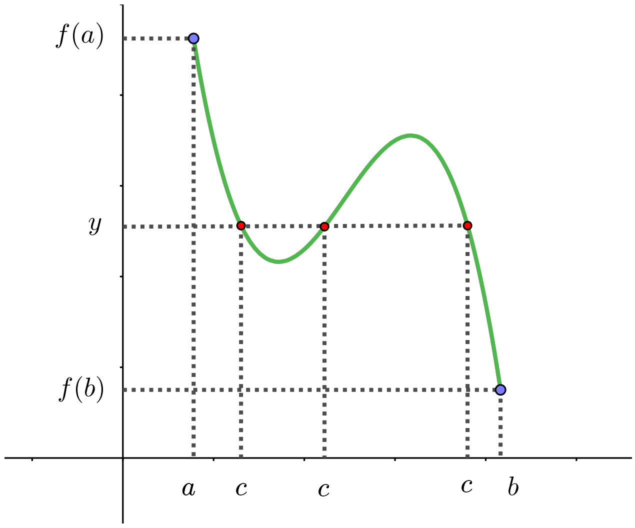
Soient deux réels $a \leq b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors, pour tout réel y entre $f(a)$ et $f(b)$,

$$\exists c \in [a, b] \quad y = f(c).$$

Corollaire 38 (Changement de signe d'une fonction continue)**.**

Si une fonction continue sur un intervalle y change de signe, alors elle s'annule sur cet intervalle.

Autrement dit, toute *valeur intermédiaire* entre $f(a)$ et $f(b)$ possède (au moins) un antécédent par f. Comme on le voit dans l'illustration ci-dessous, il n'y a pas forcément unicité de l'antécédent.



Le TVI pourra donc être utilisé pour prouver l'existence d'une solution à une équation. Ceci est illustré par le corollaire suivant, qui revient à prouver l'existence d'une solution à une équation de forme $f(x) = 0$.
Voici maintenant un corollaire où l'hypothèse de stricte monotonie est ajoutée. Il pourra être utilisé pour prouver l'existence <u>et</u> l'unicité d'une solution à une équation.

Corollaire 39 (TVI strictement monotone)**.**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et strictement monotone sur $[a, b]$. Pour tout réel y entre $f(a)$ et $f(b)$,

$$\exists! c \in [a, b] \quad y = f(c).$$

Théorème 40 (Théorème de la bijection continue)**.**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

Si f est <u>strictement monotone</u> et <u>continue</u> sur I, alors elle réalise une bijection de I dans $f(I)$.

On rappelle que la notation $f(I)$ désigne l'ensemble de toutes les images par f des éléments de I :

$$f(I) = \{f(x), x \in I\} = \{y \in J \mid \exists x \in I : y = f(x)\}.$$

Dans le cours sur la continuité, on démontrera de surcroît que

- L'ensemble $f(I)$ est un intervalle.
- Sur cet intervalle, f^{-1} est strictement monotone, de même monotonie que f.
- Sur cet intervalle, la réciproque f^{-1} est continue.

Dans la pratique, l'intervalle $f(I)$ est déterminé à partir de la forme de I et des limites aux bornes de f :

$f(I)$ dans les huit cas :

I	$[a, b]$	$]a, b]$	$[a, b[$	$]a, b[$
$f \nearrow$	$[f(a), f(b)]$	$]\lim_a f, f(b)]$	$[f(a), \lim_b f[$	$]\lim_a f, \lim_b f[$
$f \searrow$	$[f(b), f(a)]$	$[f(b), \lim_a f[$	$]\lim_b f, f(a)]$	$]\lim_b f, \lim_a f[$

4 Dérivabilité et applications.

4.1 Définitions.

Un cours sera consacré à la dérivabilité, une fois définie rigoureusement la notion de limite. On se contente ici de quelques définitions et de résultats importants dont la preuve est différée.

Définition 41.

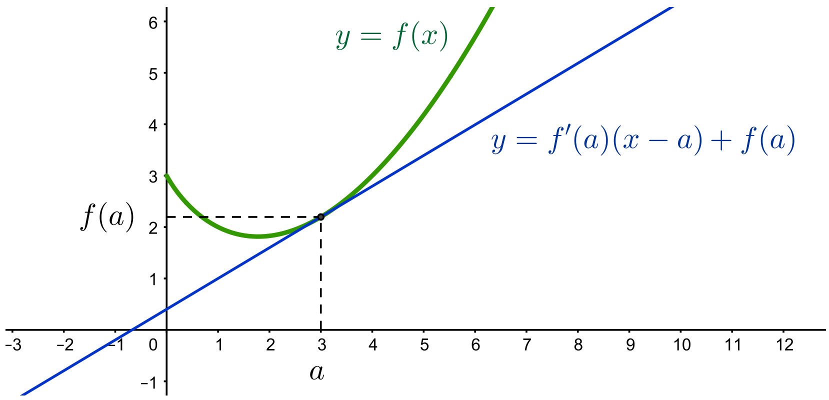
Soit $f : I \to \mathbb{K}$ et $a \in I$. La fonction f est **dérivable en** a si

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad (x \neq a)$$

a une limite finie lorsque x tend vers a. On note alors $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Si f est dérivable en tout point de I, elle est dite **dérivable sur** I.

La fonction $f' : \left\{ \begin{array}{lcl} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array} \right.$, est alors appelée **dérivée** de f.



Tangente en un point au graphe de f.

Figure. Par les points $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$ passe une droite appelée corde, de pente $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Lorsque x se rapproche de a, cette corde "tend" vers une droite qui effleure la courbe de f en a : c'est la tangente. La pente de la corde tend vers celle de la tangente : $f'(a)$.

L'équation de la tangente est $\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a).}$

Exemple 42.

Continuité et dérivabilité de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.

Proposition 43.

Si une fonction est dérivable, alors elle est continue. La réciproque est fausse.

Tableau des dérivées usuelles : (X est l'ensemble où la fonction f est dérivable)

$f(x)$	$f'(x)$	X
$x^n (n \in \mathbb{N})$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$x^p (p \in \mathbb{Z})$	px^{p-1}	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$x^a (a \in \mathbb{R})$	ax^{a-1}	$\mathbb{R}_+^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$

$f(x)$	$f'(x)$	X
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{th} x$	$\begin{cases} 1 - \mathrm{th}^2 x \\ \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x} \end{cases}$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\begin{cases} 1 + \tan^2 x \\ \frac{1}{\cos^2 x} \end{cases}$	$D_{\tan}$

4.2 Dérivabilité et opérations.

Proposition 44 (Dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient)**.**

Soient deux fonctions $f, g : I \to \mathbb{K}$, dérivables sur l'intervalle I. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- La fonction $f + g$ est dérivable sur I et $(f+g)' = f' + g'$.
- La fonction λf est dérivable sur I et $(\lambda f)' = \lambda f'$.
- La fonction fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$.
- Si g ne s'annule pas sur I, la fonction fonction f/g est dérivable sur I et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$.

Théorème 45 (Dérivée d'une composée)**.**

Soient deux fonctions $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{K}$.
Si f est dérivable sur I, et si g est dérivable sur J, alors la composée $g \circ f$, est dérivable sur I et

$$\boxed{(g \circ f)' = f' \cdot (g' \circ f)} \qquad \text{i.e.} \qquad \forall x \in I \quad (g \circ f)'(x) = f'(x) \cdot g'(f(x)).$$

Méthode (Justifier qu'une composée est dérivable)**.**

« La fonction f est dérivable sur I et $\forall x \in I \ f(x) \in J$. De plus, la fonction g est dérivable sur J. D'après le théorème de dérivation des composées, $g \circ f$ est dérivable sur I. »

Noter qu'on a vérifié les trois hypothèses du théorème :

1. la dérivabilité de f sur l'intervalle I considéré,
2. la dérivabilité de g sur l'intervalle J considéré,
3. le fait que les images par f des éléments de I sont des éléments de J.

Un premier cas particulier : si g est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, alors pour tous a et b réels, puisque $x \mapsto ax+b$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction composée $x \mapsto g(ax+b)$ l'est aussi par théorème. On a

$$\frac{\mathrm{d}}{dx}g(ax+b) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(ax+b) \cdot g'(ax+b) \qquad \text{soit } \boxed{\frac{\mathrm{d}}{dx}g(ax+b) = a \cdot g'(ax+b).}$$

Par exemple,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(3x) = 3\cos(3x) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{7x+1} = \frac{7}{2\sqrt{7x+1}}.$$

Corollaire 46 (Cas particuliers courants)**.**

Soit $u : I \to \mathbb{R}$, dérivable sur I, alors

- la fonction e^u est dérivable sur I et $\boxed{(e^u)' = u'e^u}$.
- u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.

Si de surcroît,

- $u : I \to \mathbb{R}^*$, alors la fonction $1/u$ est dérivable sur I et $\boxed{\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}}$.
- $u : I \to \mathbb{R}_+^*$, alors pour tout réel a, u^a est dérivable sur I, et $\boxed{(u^a)' = au'u^{a-1}}$.

  Notamment, $\boxed{(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}}$.
- $u : I \to \mathbb{R}_+^*$, la fonction $\ln(u)$ est dérivable sur I et $\boxed{(\ln(u))' = \frac{u'}{u}}$.

Remarque. À quoi sert de regarder des cas particuliers puisqu'on a une formule simple dans le cas général ? La réponse est à chercher du côté du calcul de primitives : nous aurons besoin de savoir « dériver à l'envers » : il est donc utile de bien connaître la forme des dérivées de composées dans les cas courants.

4.3 Dérivée d'une réciproque.

Théorème 47 (Dérivée d'une réciproque)**.**

Soit une bijection $f : I \to J$, dérivable sur I.
Sa réciproque f^{-1} est dérivable sur J si et seulement si f' ne s'annule pas sur I. On a alors

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}} \qquad \text{i.e.} \qquad \forall y \in J \quad \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

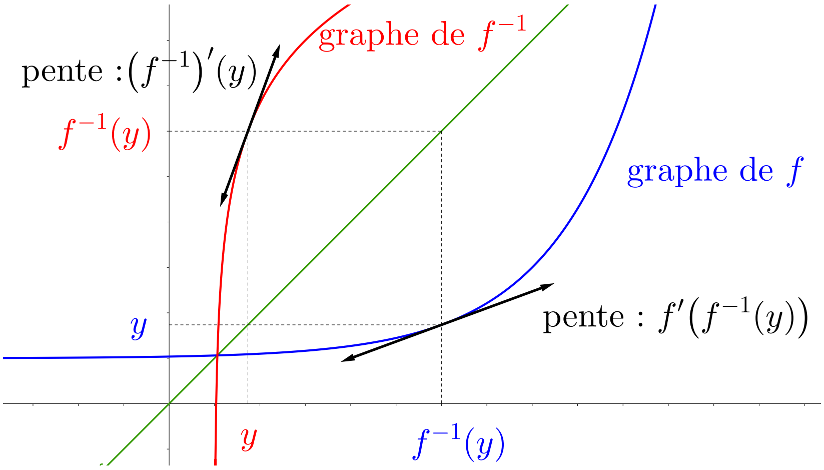
Exemple 48.

Donner un exemple de bijection entre deux intervalles I et J, dérivable sur I et dont la réciproque n'est pas dérivable sur J. Illustrer.

Exemple 49.

Appliquer le théorème pour retrouver le résultat connu sur la dérivée de ln.

Les nombres $f'\left(f^{-1}(y)\right)$ et $\left(f^{-1}\right)'(y)$ sont les pentes respectivement d'une tangente à la courbe de f et d'une tangente à la courbe de f^{-1}. Symétriques par rapport à $y = x$, leurs pentes sont inverses l'une de l'autre.



Ceci n'est pas une preuve.

4.4 Variations des fonctions dérivables.

Théorème 50 (Caractérisation des fonctions monotones parmi les fonctions dérivables)**.**

Soit I un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.

- f est croissante sur I si et seulement si f' est positive sur I.
- f est décroissante sur I si et seulement si f' est négative sur I.
- f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I.

Proposition 51 (Caract. des fonctions strict. monotones parmi les fonctions dérivables)**.**

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$, dérivable sur I.
La fonction f est strictement croissante sur I si et seulement si f' est positive (ou nulle) sur I et n'est identiquement nulle sur aucun intervalle $[a, b]$ inclus dans I avec $a < b$.

Corollaire 52 (Dans la pratique)**.**

Soit I un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.

- Si f' est strictement positive sur I, alors f y est strictement croissante. Réciproque fausse.
- Si f' est strictement négative sur I, alors f y est strictement décroissante. Réciproque fausse.

L'implication demeure vraie si f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points de I.

Méthode (Conseils pour l'étude d'une fonction).

- Déterminer son ensemble de définition.
- Détecter une éventuelle parité/imparité/périodicité et réduire en conséquence le domaine d'étude.
- Pour l'étude des variations, on ne se rue pas sur la dérivation si la fonction est une somme ou une composée de fonctions croissantes, par exemple !
- Dans le cas où on dérive, on justifie sur quel ensemble et pourquoi on peut le faire, soigneusement.
- Calcul de la dérivée. Puisque c'est son signe qui nous intéressera, on cherche à la **factoriser** le plus possible !
- Étude du signe de la dérivée : il suffira la plupart du temps de résoudre l'**inéquation** $f'(x) \geq 0$.
- Tableau de signe pour la dérivée, de variations pour la fonction.
- Calcul des limites aux bords. Si on détecte une incohérence, il est encore temps de se relire !
- Esquisser un graphe résumant l'étude. Ne pas hésiter à y souligner des valeurs, ou des tangentes notables.

4.5 Dériver une fonction à valeurs complexes.

Définition 53.

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction. On dit que f est **dérivable** sur I si les fonctions $\mathrm{Re}(f) : x \mapsto \mathrm{Re}(f(x))$ et $\mathrm{Im}(f) : x \mapsto \mathrm{Im}(f(x))$ sont toutes deux dérivables sur I.

La **dérivée** de f est alors définie comme la fonction $f' : \begin{cases} I & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \mathrm{Re}(f)'(x) + i\mathrm{Im}(f)'(x) \end{cases}$.

Remarque. Par définition même de f', les égalités ci-dessous sont vraies dès qu'elles ont un sens

$$(\mathrm{Re}(f))'(x) = \mathrm{Re}\left(f'(x)\right) \quad \text{et} \quad (\mathrm{Im}(f))'(x) = \mathrm{Im}\left(f'(x)\right)$$

Proposition 54.

Soit $\varphi : I \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable sur I. Soit $f : t \mapsto e^{\varphi(t)}$.
La fonction f est dérivable sur I et

$$\forall t \in I \quad f'(t) = \varphi'(t)e^{\varphi(t)}.$$

Preuve. Notons $a : t \mapsto \mathrm{Re}(\varphi(t))$ et $b : t \mapsto \mathrm{Im}(\varphi(t))$, définies sur I. On a,

$$\forall t \in I \quad f(t) = e^{a(t)}e^{ib(t)} = e^{a(t)}\left(\cos(b(t)) + i\sin(b(t))\right).$$

On a donc que $\mathrm{Re}(f) = e^a \cos b$ et $\mathrm{Im}(f) = e^a \sin b$. La fonction a est dérivable sur I, exp l'est sur $\mathbb{R}$ donc la composée $e^a : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I. De même, les deux fonction à valeurs réelles $\cos b$ et $\sin b$ sont des composées dérivables sur I. Par produit, on obtient que $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont dérivables sur I. On peut donc dire, conformément à la dernière définition, que f est dérivable sur I. On a

$$\begin{aligned} f' = \mathrm{Re}(f)' + i\mathrm{Im}(f)' &= (a'e^a \cos b - b'e^a \sin b) + i\left(a'e^a \sin b + b'e^a \cos b\right) \\ &= e^a\left[a'\left(\cos b + i\sin b\right) + ib'\left(\cos b + i\sin b\right)\right] \\ &= (a' + ib')e^a e^{ib} = \varphi' e^{\varphi} \end{aligned}$$

□

Solutions des exercices donnés comme exemples.

Exemple 1. Inégalité arithmético-géométrique.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ un réel.

$$\begin{aligned}\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} &= \frac{1}{2}\left((x+y) - 2\sqrt{xy}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left((\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 - 2\sqrt{x}\sqrt{y}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left((\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\right)\end{aligned}$$

Cette différence est positive, ceci prouve l'inégalité.

$$\boxed{\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}}$$

Il y a égalité si et seulement si la différence est nulle, ce qui arrive si et seulement si $x = y$.

Exemple 14. Ensembles de définition.

— Pour x réel, l'expression définissant $f(x)$ a un sens si et seulement si $x(x-2)$ est positif, c'est-à-dire si x appartient à $\boxed{]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[}$.

— Pour x réel, l'expression définissant $g(x)$ a un sens, si et seulement si $x(x-2)$ est strictement positif, c'est-à-dire si x appartient à $\boxed{]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[}$.

— Pour x réel, l'expression définissant $h(x)$ a un sens, si et seulement si x et $(x-2)$ sont strictement positifs, c'est-à-dire si x appartient à $\boxed{]2, +\infty[}$.

Exemple 18. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ est T-périodique.

— Montrons que $g : x \mapsto f(-x)$ est T-périodique.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Bien sûr, $x + T \in \mathbb{R}$. On a

$$g(x+T) = f(-(x+T)) = f(-x+T) \underset{(*)}{=} f(-x-T+T) = f(-x) = g(x),$$

où on utilise la T-périodicité de f pour écrire $(*)$.

— Montrons que $h : x \mapsto f(ax)$ est $\frac{T}{a}$-périodique. Soit $x \in \mathbb{R}$. Bien sûr $x + \frac{T}{a} \in \mathbb{R}$. On a

$$h\left(x + \frac{T}{a}\right) = f\left(a(x + \frac{T}{a})\right) = f(ax+T) \underset{(*)}{=} f(x).$$

Exemple 20. f est une fonction paire et croissante sur $\mathbb{R}_+$. Il s'agit de montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}_-)^2$. On suppose que $x \leq y$.
Ramenons-nous sur $\mathbb{R}_+$ en multipliant par -1. On avait $x \leq y \leq 0$, on a $0 \leq -y \leq -x$. Par croissance de f sur $\mathbb{R}_+$, on a $f(-y) \leq f(-x)$. Par parité de f, on obtient $f(y) \leq f(x)$.

Exemple 21. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ strictement croissante, $(x, y) \in I$.

— L'implication $x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$ est vraie par définition de la stricte croissance de f.
— Montrons que $f(x) < f(y) \Longrightarrow x < y$ par contraposée. Supposons que l'inégalité $x < y$ est fausse, c'est-à-dire supposons que $x \geq y$. Puisque f est croissante, on a $f(x) \geq f(y)$. L'inégalité $f(x) < f(y)$ est donc fausse.

Exemple 28. Produit de deux fonctions impaires.
Soient deux fonctions impaires définies sur une même partie X de $\mathbb{R}$. Soit $x \in X$. Par hypothèse sur f, $-x \in X$. De plus,

$$(f \cdot g)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = (-f(x))(-g(x)) = (-1)^2 f(x)g(x) = (f \cdot g)(x).$$

La fonction $f \cdot g$ est bien paire.

Exemple 29. Soient deux fonctions bornées f et g définies sur un même ensemble X.

— Montrons que leur somme $f + g$ est bornée sur X. Notons m et M respectivement un minorant et un majorant de f, et m' et M' respectivement un minorant et un majorant de g.
Soit $x \in X$. On a
$$\begin{cases} m \leq f(x) \leq M \\ m' \leq g(x) \leq M' \end{cases}$$
Sommons ces inégalités ! On obtient
$$m + m' \leq (f + g)(x) \leq M + M'.$$
Ceci démontre que $f + g$ est bornée : elle est minorée par $m + m'$ et majorée par $M + M'$.
— Montrons que leur somme $f + g$ est borné sur X. On ne peut pas faire le produit des inégalités écrites plus haut pour la somme car on ne sait pas quel est le signe des réels comparés. On va donc utiliser la caractérisation des fonctions bornées utilisant une valeur absolue. Puisque f et g sont bornées, elles sont majorées en valeurs absolue. Notons μ et μ' deux majorants respectifs de $|f|$ et $|g|$. Soit $x \in X$. On a
$$\begin{cases} 0 \leq |f(x)| \leq \mu \\ 0 \leq |g(x)| \leq \mu' \end{cases}$$
On peut faire le produit de ces inégalités dont les membres sont positifs :
$$|f(x)| \cdot |g(x)| \leq \mu \cdot \mu' \quad \text{soit} \quad |(fg)(x)| \leq \mu\mu'.$$
La fonction fg est majorée en valeur absolue : elle est bien bornée.

Exercices

Partie entière, valeur absolue.

$\boxed{7.1}$ **[♦♦◇]** Démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor.$$

$\boxed{7.2}$ **[♦♦♦]** Démontrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1.$$

$\boxed{7.3}$ **[♦◇◇]** Résoudre l'équation

$$\ln|x| + \ln|x+1| = 0.$$

$\boxed{7.4}$ **[♦♦◇]** Résoudre l'inéquation

$$|2x+1| < |x+2|.$$

$\boxed{7.5}$ **[♦♦◇]** Résoudre l'inéquation

$$|2x+1| < x+2.$$

$\boxed{7.6}$ **[♦◇◇]** Soit x un réel. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |\sin(nx)| \leq n|\sin x|.$$

$\boxed{7.7}$ **[♦♦◇]**

1. Étudier les variations de $f : x \mapsto \dfrac{x}{1+x}$ sur $[0, +\infty[$.
2. Prouver que

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}.$$

Vocabulaire sur les fonctions

$\boxed{7.8}$ **[♦◇◇]** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2 périodique et 3-périodique. Montrer que f est 1-périodique.

$\boxed{7.9}$ **[♦♦◇]** Soit $f : X \to \mathbb{R}$. Démontrer que si f est bornée sur X, alors $x \mapsto \lfloor f(x) \rfloor$ l'est aussi.

$\boxed{7.10}$ **[♦♦♦]** Déterminer toutes les fonctions croissantes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(f(x)) = x.$$

$\boxed{7.11}$ **[♦◇◇]** Considérons la fonction $f : \begin{cases}]1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \exp\left(-\frac{1}{\ln(x)}\right) \end{cases}$

1. Démontrer que f réalise une bijection de $]1, +\infty[$ dans un intervalle que l'on précisera.
2. Expliciter la réciproque de f. Peut-on écrire en conclusion que $f^{-1} = f$?

Étude de fonctions.

$\boxed{7.12}$ **[♦◇◇]** [S'entraîner tout seul à dériver.]
Pour chacune des fonctions ci-dessous, donner un ou plusieurs intervalles sur lesquels la fonction est dérivable, et préciser sa dérivée (réponses ci-dessous).

$$A : x \mapsto x^{\pi}, \quad B : x \mapsto \pi^{x}, \quad C : x \mapsto \cos(5x), \quad D : x \mapsto \ln(1+x^3),$$

$$E : x \mapsto \cos\left(\sqrt{\ln(x)}\right), \quad F : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3x-1}}, \quad G : x \mapsto \sin|x+1|,$$

Réponses pour le premier exercice.

- La fonction A est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (cours : fonction usuelle).
On a $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $A'(x) = \pi x^{\pi-1}$.
- Par définition : $B : x \mapsto e^{x\ln(\pi)}$. Cette fonction est clairement dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ $B'(x) = \ln(\pi)e^{x\ln(\pi)} = \ln(\pi)\pi^x$.
- C est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ $C'(x) = -5\sin(5x)$.
- D est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, c'est-à-dire sur $]-\infty,-1[$ et sur $]-1,+\infty[$.
$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ $D'(x) = \frac{3x^2}{1+x^3}$.
- E est dérivable sur $]1,+\infty[$ et $\forall x \in]1,+\infty[$ $E'(x) = -\frac{\sin(\sqrt{\ln(x)})}{2x\sqrt{\ln(x)}}$.
- On a $F : x \mapsto (3x-1)^{-1/2}$. Sur $]\frac{1}{3},+\infty[$, $F'(x) = -\frac{3}{2}(3x-1)^{-3/2}$.
- Sur $]-1,+\infty[$, $G(x) = \sin(x+1)$ et $G'(x) = \cos(x+1)$.
Sur $]-\infty,-1[$, $G(x) = \sin(-x-1)$ et $G'(x) = -\cos(-x-1)$.

$\boxed{7.13}$ **[♦♦◇]**

1. Démontrer que
$$\forall x \in]-1,+\infty[\quad \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x.$$
2. À l'aide du théorème des gendarmes, calculer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.
3. Retrouver ce résultat en faisant apparaître un taux d'accroissement.

$\boxed{7.14}$ **[♦♦◇]** Démontrer l'inégalité

$$\forall x \in]0,1[\quad x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}.$$

$\boxed{7.15}$ **[♦♦◇]** Soit la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est impaire.
3. Étudier ses variations et donner le tableau correspondant.

$\boxed{7.16}$ **[♦♦◇]** Notons a le nombre $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.

1. Montrer que $a^3 = 6a + 40$.
2. En déduire la valeur de a.

$\boxed{7.17}$ **[♦♦♦]** Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $b \geq a > 0$.

1. Étudier sur $\mathbb{R}_+^*$ les variations de la fonction $f : x \longmapsto \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$.
Indication : le signe de la dérivée n'est pas évident... ne pas hésiter à refaire une étude de fonction !
2. En déduire que
$$\ln\left(1+\frac{a}{b}\right) \times \ln\left(1+\frac{b}{a}\right) \leq \ln^2(2).$$
