Trigonométrie

1 Cosinus et sinus d'un réel, via le cercle.

On munit le plan d'un repère orthonormé (O, I, J).

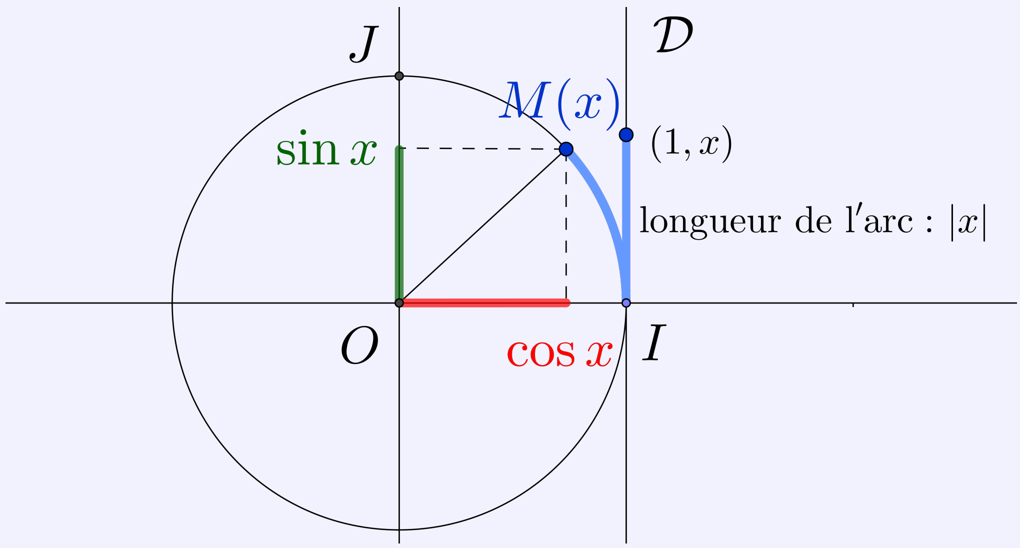
Le cercle de centre O et de rayon 1 est appelé **cercle trigonométrique**.

Soit $\mathcal{D}$ la droite parallèle à l'axe des ordonnées et passant par le point I. À tout un réel x, on associe le point $(1, x)$ sur $\mathcal{D}$. Notamment, le réel 0 est identifié à $I \in \mathcal{D}$.

On « enroule » alors la droite $\mathcal{D}$ sur le cercle : les réels positifs vont l'être dans le sens direct (antihoraire), et les réels négatifs dans le sens indirect. Pour un réel x, on notera $M(x)$ le point du cercle sur lequel a été enroulé le point $(1, x)$. Le cercle étant de périmètre 2π et la droite infinie, il va falloir faire plusieurs tours...

Définition 1.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $M(x)$ le point correspondant sur le cercle trigonométrique, obtenu par enroulement. On appelle **cosinus** de x son abscisse et **sinus** de x son ordonnée, notés $\cos x$ et $\sin x$.



Par définition, on a $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \begin{array}{l} -1 \leq \cos x \leq 1 \\ -1 \leq \sin x \leq 1 \end{array}}$ c'est-à-dire $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \begin{array}{l} |\cos x| \leq 1 \\ |\sin x| \leq 1 \end{array}}$

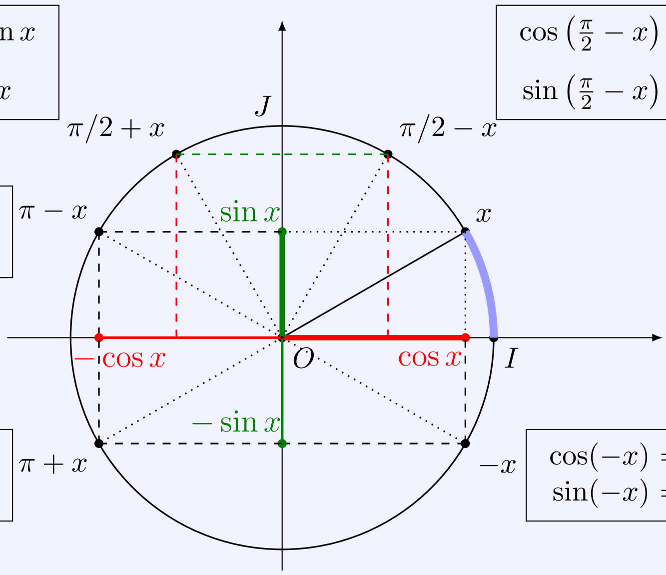
2 Formulaire de trigonométrie.

Proposition 2 (Les symétries de cos et sin)**.**

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$
$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

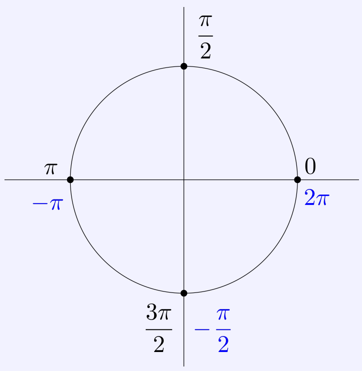


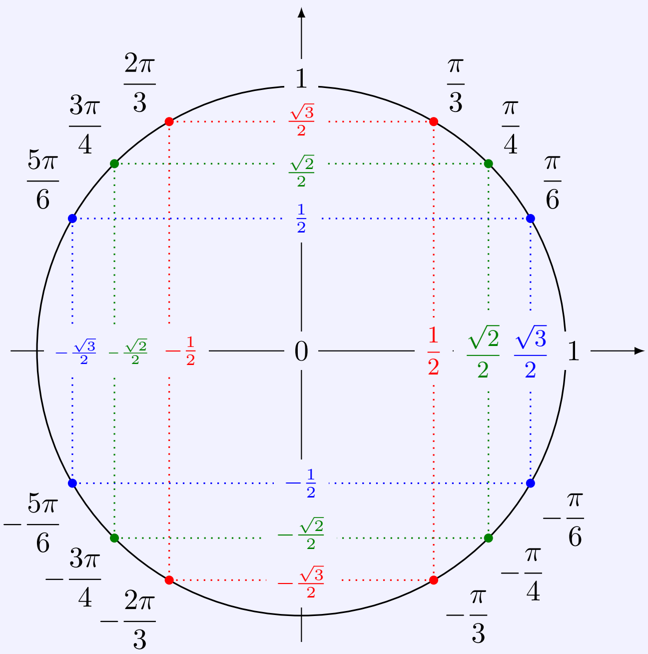
$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$
$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$
$$\sin(-x) = -\sin x$$

Proposition 3 (Valeurs notables)**.**

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\cos x$	1	0	-1	0
$\sin x$	0	1	0	-1





Proposition 4 (Une conséquence du théorème de Pythagore).

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Proposition 5 (Formules d'addition).

Pour tous réels $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b & \qquad \sin(a-b) &= \sin a \cos b - \sin b \cos a \\ \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b & \qquad \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a \end{aligned}$$

Corollaire 6 (Formules de duplication).

Pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a \quad \text{et} \quad \sin 2a = 2\cos a \sin a.$$

La première identité donne les *linéarisations* $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$ et $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$.

Exemple 7.

- Calculer $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.
- Étant donné un entier $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)$.

Corollaire 8 (Produit de deux cosinus, de deux sinus).

Pour tous réels a, b, $\left\{\begin{aligned} \cos a \cos b &= \tfrac{1}{2}\left(\cos(a-b) + \cos(a+b)\right) \\ \sin a \sin b &= \tfrac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right) \\ \sin a \cos b &= \tfrac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right) \end{aligned}\right.$

Proposition 9 (Somme et différence de deux cosinus, de deux sinus).

Pour tous réels p, q,

$$\begin{aligned} \cos p + \cos q &= 2\cos\left(\tfrac{p-q}{2}\right)\cos\left(\tfrac{p+q}{2}\right) & \qquad \sin(p) + \sin(q) &= 2\cos\left(\tfrac{p-q}{2}\right)\sin\left(\tfrac{p+q}{2}\right) \\ \cos p - \cos q &= -2\sin\left(\tfrac{p-q}{2}\right)\sin\left(\tfrac{p+q}{2}\right) & \qquad \sin(p) - \sin(q) &= 2\sin\left(\tfrac{p-q}{2}\right)\cos\left(\tfrac{p+q}{2}\right) \end{aligned}$$

Remarque. Dans le cours sur les nombres complexes, on apprendra comment retrouver simplement ces formules en utilisant les nombres e^{ip} et e^{iq}.

3 Égalité de deux cosinus, de deux sinus.

Définition 10 (Congruence modulo α)**.**

On dit que deux réels a et b sont **congrus** (ou plus simplement égaux) modulo α, et on note

$$a \equiv b \; [\alpha]$$

si a et b diffèrent d'un multiple entier de α. Cette définition se récrit

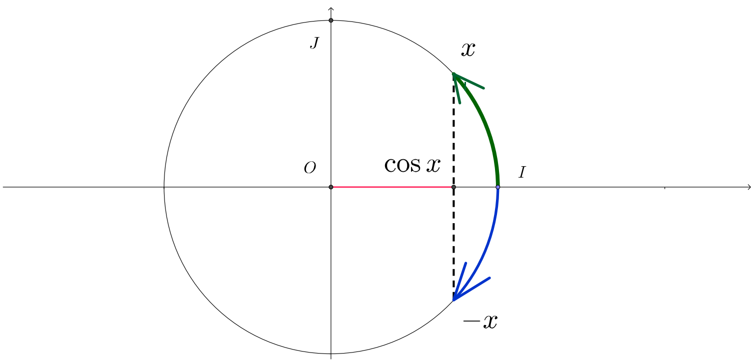
$$a \equiv b \; [\alpha] \iff \exists k \in \mathbb{Z} : a = b + k\alpha.$$

Remarque. Deux réels égaux modulo 2π seront *enroulés* sur le même point : ils représentent le même *angle*.

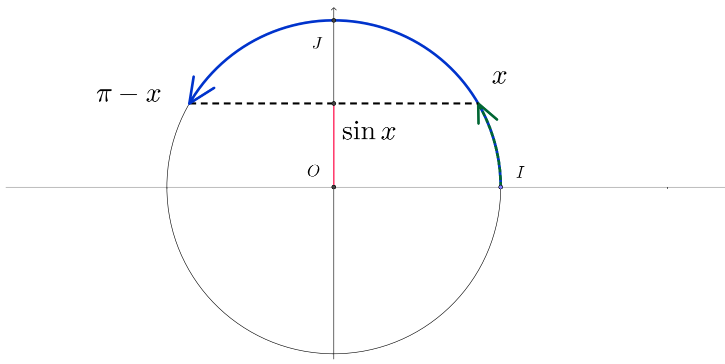
Proposition 11.

Soient x et y deux nombres réels. On a

$$\cos x = \cos y \iff \begin{cases} x \equiv y \; [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv -y \; [2\pi] \end{cases} \quad \text{et} \quad \sin x = \sin y \iff \begin{cases} x \equiv y \; [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv \pi - y \; [2\pi] \end{cases}$$



Égalité de deux cosinus.



Égalité de deux sinus.

Exemple 12.

Résoudre les équations ci-dessous. Représenter les solutions sur un cercle.

$$\sin(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \cos(3x) = \sin x \qquad \cos x + \sqrt{3} \sin x = 1.$$

Exemple 13.

Résoudre l'inéquation $\sin x \geq \dfrac{1}{2}$.

Exercices

$\boxed{4.1}$ **[♦◇◇]** Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$. Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

$$\text{a) } \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}; \qquad \text{b) } \sin^2(x) = \frac{3}{2}\cos x \qquad \text{c) } \cos x + \sin x = 1$$

$\boxed{4.2}$ **[♦◇◇]** Résoudre

$$\cos(2x) + \sin(x) > 1.$$

$\boxed{4.3}$ **[♦♦◇]** Trouver tous les couples (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tels que

$$\begin{cases} \sin x \cos y & = & \frac{3}{4} \\ \cos x \sin y & = & \frac{1}{4} \end{cases}$$

$\boxed{4.4}$ **[♦♦◇]** Soit n un entier naturel non nul. On pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right).$$

1. À l'aide du changement d'indice $j = n - k$, donner une autre expression de la somme S_n, faisant intervenir la fonction sin.
2. Calculer $S_n + S_n$ et en déduire S_n.

$\boxed{4.5}$ **[♦♦◇]** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots \sqrt{2}}} \qquad (n \text{ fois le symbole } \sqrt{\cdot})$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_n = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$.
2. En déduire $\lim u_n$.

$\boxed{4.6}$ **[♦♦◇]** Soient α, β et γ les angles au sommet d'un triangle ABC. On suppose que

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Démontrer que ABC est un triangle rectangle.

$\boxed{4.7}$ **[♦♦♦]** Calculer $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$.

$\boxed{4.8}$ **[♦♦♦]**

1. Soit un réel θ et un entier $n \in \mathbb{N}$. Calculer à l'aide d'un télescopage le nombre

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta).$$

2. Factoriser la somme $\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)$ (on distinguera selon les valeurs de θ).
