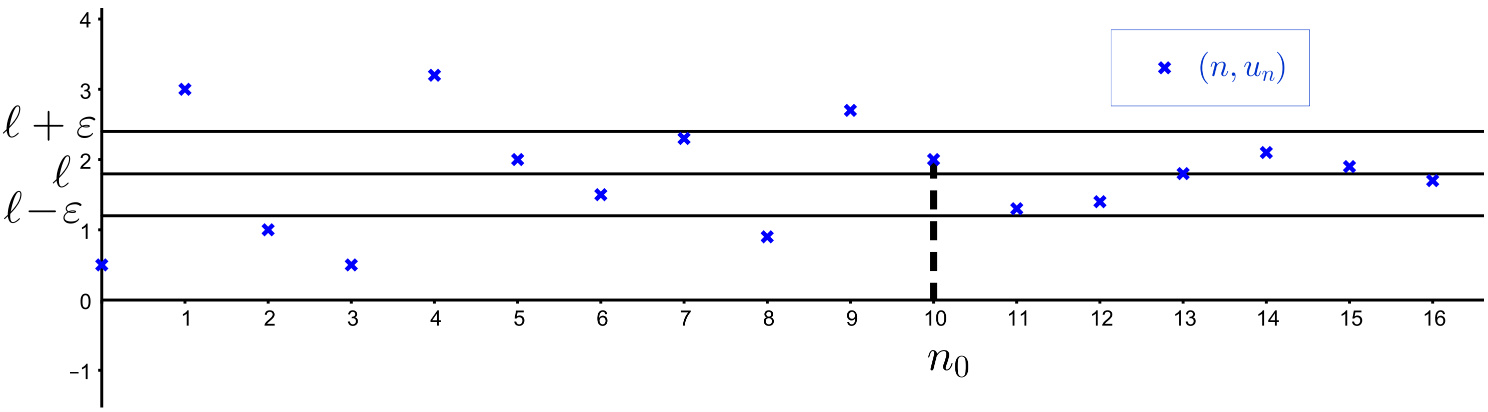
1 Limite d'une suite.

Définition 1 (Convergence vers $\ell \in \mathbb{R}$).

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que (u_n) **converge** vers ℓ (ou qu'elle **tend** vers ℓ), et on note $u_n \to \ell$ si
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Une autre écriture de « $u_n \to \ell$ », avec une utilisation plus rigoureuse du quantificateur $\forall$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$



Cette définition est écrite sous cette forme par Cauchy en 1821. Elle avait été donnée par d'Alembert dans l'Encyclopédie (1767) : « *On dit qu'une grandeur est la limite d'une autre grandeur quand la seconde peut approcher de la première plus près que d'une grandeur donnée si petite qu'on la puisse supposer...* »

Proposition 2.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On a

$$u_n \longrightarrow \ell \quad \Longleftrightarrow \quad |u_n - \ell| \longrightarrow 0.$$

Méthode (la théorie et la pratique).

Prouver une convergence du type $u_n \to \ell$, c'est montrer que la **distance** $|u_n - \ell|$ peut être rendue « aussi petite que l'on veut ». On cherchera donc

- dans un contexte théorique, à majorer $|u_n - \ell|$ par un réel ε quelconque *à partir d'un certain rang* n_0 qui dépend de ε. C'est ce que nous ferons dans les preuves de ce cours mais dans les exercices, on dégainera rarement ε !
- dans un contexte pratique, à majorer $|u_n - \ell|$ par une suite convergeant notoirement vers 0. On pourra alors conclure grâce au théorème d'encadrement.

Exemple 3.

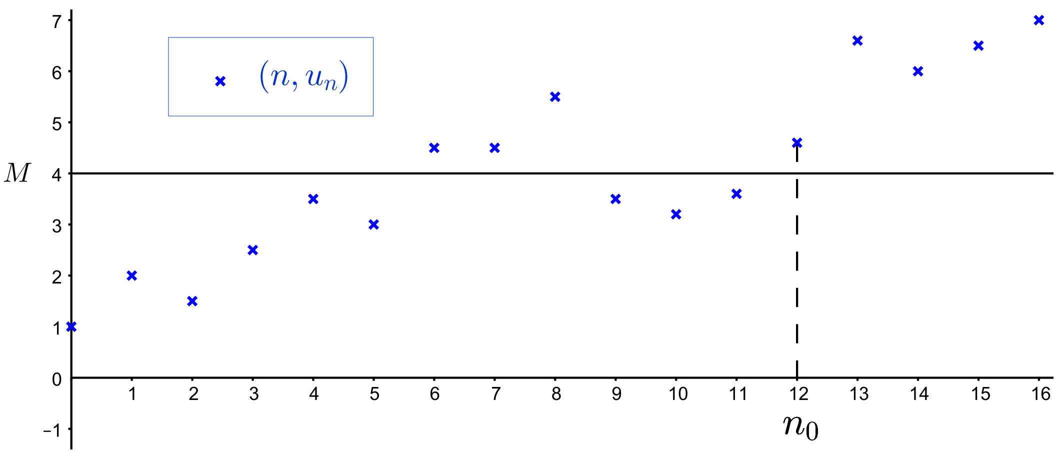
- Soit (u_n) une suite constante égale à $a \in \mathbb{R}$. Démontrer en revenant à la définition que $u_n \to a$.

- Soit la suite (u_n) de terme général $u_n = \frac{n+1}{n}$.
Démontrer en revenant à la définition que $u_n \to \ell$ où ℓ est un réel à deviner.

Définition 4 (Tendre vers $+\infty$).

Soit (u_n) une suite réelle. On dit qu'elle **tend vers** $+\infty$ et on note $u_n \to +\infty$ si

$$\forall M > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad u_n \geq M.$$



Exemple 5.

Pour $n \geq 2$, posons $u_n = \ln(\ln(n))$. En revenant à la définition, démontrer que $u_n \to +\infty$.

Proposition-Définition 6 (Tendre vers $-\infty$)**.**

Soit (u_n) une suite réelle. On dit qu'elle **tend vers** $-\infty$ et on note $u_n \to -\infty$ si

$$\forall M < 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad u_n \leq M.$$

On a l'équivalence

$$u_n \to -\infty \quad \Longleftrightarrow \quad -u_n \to +\infty.$$

Proposition-Définition 7 (Unicité de la limite)**.**

Soit (u_n) une suite réelle et $L, L' \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $u_n \to L$ et $u_n \to L'$, alors $L = L'$.

Le nombre L est alors appelé **limite** de la suite (u_n) et noté $\lim u_n$.

Définition 8.

On dit d'une suite (u_n) qu'elle est **convergente** si elle converge vers une limite finie.

Si une suite n'est pas convergente, elle est dite **divergente**.

Ainsi, on pourra dire d'une suite qui tend vers $+\infty$ qu'elle *diverge vers* $+\infty$.

Exemple 9.

On démontre (par l'absurde) que la suite de terme général $(-1)^n$ est divergente.

Proposition 10.

Toute suite convergente est bornée.

La réciproque est fausse : la suite de terme général $(-1)^n$ est bornée et divergente.

2 Limites et opérations : preuves des résultats.

On démontre ici une partie seulement de tous les résultats ayant donnés sous forme de tableaux de cas dans le cours Suites réelles : la pratique.

Proposition 11 (Somme de deux suites ayant une limite)**.**

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles, et ℓ, ℓ' deux nombres réels.

$$\text{Si } u_n \to \ell \text{ et } v_n \to \ell', \qquad \text{alors } u_n + v_n \to \ell + \ell'$$

$$\text{Si } u_n \to \ell \text{ et } v_n \to +\infty, \quad \text{alors } u_n + v_n \to +\infty$$

Lemme 12.

Le produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle est une suite de limite nulle.

Lemme 13.

Si (u_n) converge vers ℓ et $\ell > a$, alors alors $u_n > a$ à partir d'un certain rang.

Proposition 14 (Produit de deux suites ayant une limite)**.**

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles, et ℓ, ℓ' deux nombres réels.

$$\text{Si } u_n \to \ell \text{ et } v_n \to \ell', \quad \text{alors } u_n v_n \to \ell\ell'$$

$\underline{\text{Supposons } \ell > 0}$ $\quad$ $\text{Si } u_n \to \ell \text{ et } v_n \to +\infty, \quad \text{alors } u_n v_n \to +\infty$

Proposition 15 (Inverse, quotient de deux suites ayant une limite)**.**

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles, et ℓ, ℓ' deux nombres réels, avec $\ell' \neq 0$.

$$\text{Si } u_n \to 0+ \;\text{ alors } \frac{1}{u_n} \to +\infty. \qquad\qquad \text{Si } u_n \to \ell \text{ et } v_n \to \ell', \quad \text{alors } \tfrac{u_n}{v_n} \to \tfrac{\ell}{\ell'}$$

Proposition 16 (Lemme de Cesàro (hors-programme mais très classique))**.**

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note c_n la moyenne arithmétique des n premiers termes de u : $c_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$.

$$\text{Si } u_n \to \ell \quad \text{alors } c_n \to \ell.$$

Quel contre exemple permet de voir que la réciproque de l'implication ci-dessus est fausse ?

3 Existence d'une limite : preuves des théorèmes.

On se concentre ici sur les preuves de résultats qui ont été abondamment utilisés dans le cours **Suites réelles : la pratique**. On y renvoie le lecteur pour les illustrations, les exemples, les corollaires...

On rappelle qu'établir un encadrement ou exploiter une monotonie sont les deux stratégies principales face à un problème de convergence de suites.

Encadrement

Théorème 17 (d'encadrement, ou des gendarmes)**.**

Soient trois suites réelles (g_n), (u_n), (d_n) telles que $\forall n \in \mathbb{N} \quad g_n \leq u_n \leq d_n$.
Si de surcroît, (g_n) et (d_n) convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$, alors

$$(u_n) \text{ est convergente} \quad \text{et} \quad \lim u_n = \ell.$$

Proposition 18 (de minoration, de majoration)**.**

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.
- Si $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \leq v_n$ et $u_n \to +\infty$, alors $v_n \to +\infty$.
- Si $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \leq v_n$ et $v_n \to -\infty$, alors $u_n \to -\infty$.

Monotonie

Théorème 19 (de la limite monotone)**.**

Toute suite croissante et majorée converge vers une limite finie.
Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.

Remarque. Le théorème de la limite monotone établit ainsi une dichotomie qui n'existe pas pour les suites quelconques : une suite croissante a toujours une limite, finie ou infinie selon que la suite est majorée ou pas.

On rappelle que deux suites (u_n) et (v_n) sont dites **adjacentes** lorsqu'elles sont monotones, de monotonie contraire, et que leur différence tend vers 0.

Théorème 20 (Convergence des suites adjacentes)**.**

Deux suites adjacentes convergent vers une même limite finie.

Plus précisément, si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes (u croissante et v décroissante), alors elles convergent vers une même limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \leq \ell \leq v_n$.

4 Passer à la limite ?

Proposition 21 (Passage à la limite d'une inégalité large)**.**

Soient u et v deux suites réelles convergentes, de limites respectives ℓ et ℓ'.

$$\text{Si } u_n \leq v_n \text{ àpdcr} \quad \text{alors } \ell \leq \ell'.$$

En particulier,
- si une suite u convergente est majorée par un réel M, alors $\lim u_n \leq M$.
- si une suite u convergente est minorée par un réel m, alors $\lim u_n \geq m$.

⚠ Les inégalités strictes ne sont **pas** conservées : $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \frac{1}{n} > 0$ et $\lim \frac{1}{n} = 0$.

Proposition 22 (La limite comme point fixe)**.**

Soit $X \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $f : X \to X$ et u une suite satisfaisant $u_0 \in X$ et $\forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} = f(u_n)$.
Si (u_n) converge vers une limite ℓ, que $\ell \in X$ et que f est continue en ℓ, alors $\boxed{f(\ell) = \ell}$

Exemple 23.

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2. \end{cases}$

1. Que dire de la monotonie de u ?
2. Supposons que $u_0 \in [0, 1]$. Montrer que (u_n) est convergente déterminer $\lim u_n$.
3. Supposons que $u_0 < 0$. Montrer que $u_n \to -\infty$. Que dire si $u_0 > 1$?

Exemple 24.

Soit (u_n) une suite réelle telle que $\forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} = \mathrm{ch}(u_n)$. Démontrer que (u_n) diverge.

Exemple 25.

Pour bien insister sur l'importance de l'hypothèse de **continuité** dans la proposition 22, exhiber un triplet (u, ℓ, f) tel que

$$u_n \to \ell \qquad \text{et} \qquad f(u_n) \not\longrightarrow f(\ell).$$

Exemple 26.

Écrire une fausse preuve du théorème des gendarmes en utilisant le passage à la limite.

5 Suites extraites.

Définition 27.

Soit (u_n) une suite. Une **suite extraite** de (u_n) est une suite (v_n) dont le terme général est de la forme

$$v_n = u_{\varphi(n)},$$

où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

Exemple. Soit (u_n) une suite réelle.

- Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont des suites extraites de (u_n).
- D'autres exemples : (u_{n+1}), (u_{n^2}), (u_{2^n})...

Lemme 28.

Si φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ alors, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\varphi(n) \geq n$.

Proposition 29.

Soit (u_n) une suite convergente.
Toute suite extraite de (u_n) converge vers la limite de (u_n).

Méthode (Prouver la divergence d'une suite avec deux suites extraites)**.**

Si une suite a deux suites extraites ne convergeant pas vers la même limite, alors elle diverge.

Exemple 30.

Montrer (à nouveau) que la suite de terme général $(-1)^n$ diverge.

Proposition 31.

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$

$$\text{Si } u_{2n} \to \ell \text{ et } u_{2n+1} \to \ell, \text{ alors } u_n \to \ell.$$

Théorème 32 (de Bolzano-Weierstrass)**.**

Toute suite bornée possède une suite extraite convergente.

6 Traduction séquentielle de certaines propriétés.

Définition 33.

Soit X une partie de $\mathbb{R}$. On dit que X est **dense** dans $\mathbb{R}$ si elle rencontre tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Plus précisément, si

$$\forall a < b \in \mathbb{R} \quad X \cap]a, b[\neq \emptyset.$$

Exemple. Dans le cours Nombres réels, on a démontré que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.
Expérience de pensée : sur le segment $[0, 1]$, mettons une goutte d'encre bleue sur les rationnels et une goutte d'encre jaune sur les irrationnels. Que se passe-t-il ?

Proposition 34 (Caractérisation séquentielle de la densité)**.**

Soit X une partie de $\mathbb{R}$. Il y a équivalence entre les assertions

1. X est dense dans $\mathbb{R}$.
2. Pour tout réel α, il existe une suite d'éléments de X qui tend vers α.

Preuve. Au tableau, comme d'habitude. On retiendra l'idée de travailler avec « $\varepsilon = \frac{1}{n}$ » pour créer une suite dans le sens direct. □

Corollaire 35.

Tout réel est la limite d'une suite de nombres rationnels.

Retour sur la notion de borne supérieure.

Proposition 36 (Caractérisation séquentielle de la borne supérieure)**.**

Soit A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée et $M \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence

$$\sup A = M \quad \iff \quad \begin{cases} M \text{ est un majorant de } A \\ \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}} \quad a_n \to M \end{cases}$$

Preuve. Celle-ci est laissée au lecteur : on s'appuiera sur la caractérisation séquentielle de la borne supérieure, avec « $\varepsilon = \frac{1}{n}$ » pour créer une suite dans le sens direct. □

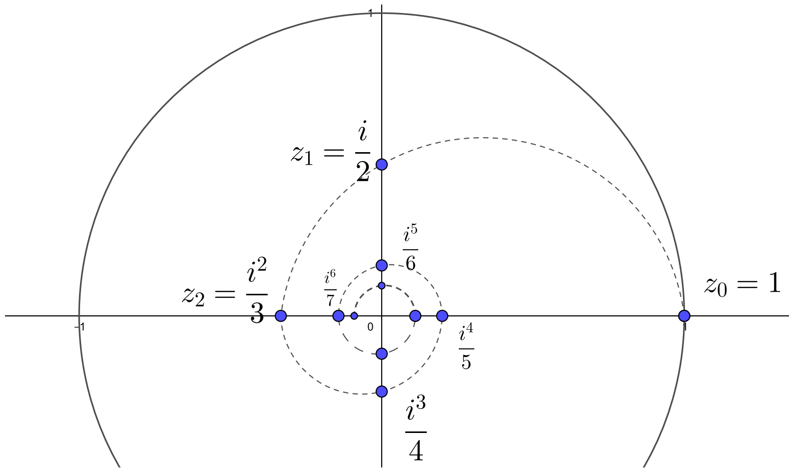
Proposition 37 (Caractérisation séquentielle des parties non majorées)**.**

Soit A est une partie de $\mathbb{R}$. On a l'équivalence

$$A \text{ est non majorée} \quad \text{ssi} \quad \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}} \;\; a_n \to +\infty.$$

7 Suites complexes.

Une suite complexe est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$. Ci-dessous, en confondant un point du plan et son affixe, une représentation de $z : n \mapsto \frac{i^n}{n+1}$. La spirale, décorative, permet de mieux percevoir la dynamique, le temps discret n étant "caché" dans cette représentation.



Définition 38 (Le module remplace la valeur absolue)**.**

Soit $(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que (u_n) **converge** vers ℓ et on note $u_n \to \ell$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Rappelons que la distance entre deux nombres complexes est donnée par le module de leur différence.
Ainsi, pour $z, \ell \in \mathbb{C}$ et $\varepsilon > 0$, on rappelle qu'écrire $|z - \ell| \leq \varepsilon$ équivaut à écrire que z appartient au *disque* de centre ℓ et de rayon ε.

Proposition 39.

$$\forall u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \quad \forall \ell \in \mathbb{C} \qquad u_n \to \ell \iff \begin{cases} \mathrm{Re}(u_n) \to \mathrm{Re}(\ell) \\ \mathrm{Im}(u_n) \to \mathrm{Im}(\ell) \end{cases}$$

Reste vrai avec des suites à valeurs complexes :
- Les résultats sur la limite d'une somme, d'un produit.
- Une limite usuelle : si $z \in \mathbb{C}$ est tel que $|z| < 1$, alors $z^n \to 0$.
- L'idée que pour prouver qu'une suite de nombres complexes tend vers 0, on peut écraser son module par une suite qui tend vers 0.
- Toute suite de nombres complexes qui converge vers une limite finie est bornée (c'est-à-dire que la suite des modules est majorée).
- Bolzano-Weierstrass : de toute suite de nombres complexes bornée (majorée en valeur absolue), on peut extraire une suite convergente (preuve instructive : « double-extraction »).

À oublier en revanche : tous les arguments à base d'encadrement ou de monotonie : on rappelle que dans $\mathbb{C}$, on ne dispose pas d'une relation d'ordre.

Preuves

Preuve de la proposition 16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Commençons par écrire ℓ comme une moyenne : $\ell = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ell$.
On a alors,

$$c_n - \ell = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ell = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (u_k - \ell).$$

Prenons la valeur absolue :

$$|c_n - \ell| = \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{n} (u_k - \ell) \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |u_k - \ell| \qquad \text{(inégalité triangulaire)}$$

Puisque $u_n \to \ell$ et que $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, la définition de la convergence de la suite u donne l'existence de $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall k \geq n_0 \quad |u_k - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Reprenons la majoration ci-dessus avec en supposant que $n \geq n_0$. La relation de Chasles donne

$$|c_n - \ell| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0 - 1} |u_k - \ell| + \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n} |u_k - \ell|.$$

On sait que pour tout $k \geq n_0$, $|u_k - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Sommons ces inégalités :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n} |u_k - \ell| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n} \frac{\varepsilon}{2} = (n - n_0 + 1) \cdot \frac{\varepsilon}{2}.$$

On obtient bien

$$|c_n - \ell| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0 - 1} |u_k - \ell| + \frac{n - n_0 + 1}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2}.$$

La somme $\sum_{k=1}^{n_0 - 1} |u_k - \ell|$ est une *constante* indépendante de n, qu'on peut noter C.
Remarquons aussi que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n - n_0 + 1}{n} \leq 1$. On obtient donc que pour tout $n \geq n_0$, $|c_n - \ell| \leq \frac{C}{n} + \frac{\varepsilon}{2}$.
Puisque $\frac{C}{n} \to 0$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{C}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Posons alors $N = \max(n_0, n_1)$. On a

$$\forall n \geq N \quad |c_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ceci achève de prouver que $c_n \longrightarrow \ell$. □

Proposition 40 (des segments emboîtés, bonus hors-programme).

Soit $(I_n)_{n\geq 1}$ une suite de segments de $\mathbb{R}$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $I_n = [a_n, b_n]$.
On suppose que ces segments sont emboités, c'est-à-dire que pour tout entier $n \geq 1$, $I_{n+1} \subset I_n$.
Alors il existe au moins un réel qui appartient à tous les segments :

$$\bigcap_{n\geq 1} I_n \neq \emptyset.$$

De plus, si la suite $(b_n - a_n)$ tend vers 0, l'intersection $\bigcap_{n\geq 1} I_n$ est un singleton.

Preuve de la proposition 40.
• Soit (I_n) une suite de segments emboîtés, et les suites (a_n) et (b_n) telles que $\forall n \in \mathbb{N}$ $I_n = [a_n, b_n]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, l'inclusion $I_{n+1} \subset I_n$ amène $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$. La suite (a_n) est croissante, majorée par b_0 donc converge vers un réel α. La suite (b_n) est décroissante, minorée par a_0 donc converge vers un réel β. *[On retrouve les arguments utilisés dans la preuve du théorème de convergence des suites adjacentes. C'est encore plus facile ici puisque le fait que (a_n) reste inférieure à (b_n) nous est donné par l'énoncé.]* Par stabilité des inégalités larges, $\alpha \leq \beta$ et même, $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \leq \alpha \leq \beta \leq b_n$ d'où $[\alpha, \beta] \subset I_n$. Puisque $[\alpha, \beta]$ est inclus dans tous les I_n, il est inclus dans leur intersection (la convexité est une propriété stable par intersection)

$$[\alpha, \beta] \subset \bigcap_{n=0}^{+\infty} I_n.$$

Ainsi, l'intersection est bien non vide.

• Supposons maintenant que $(b_n - a_n)$ tend vers 0. Par unicité de la limite, $\beta - \alpha = 0$. Notons x la valeur commune de α et β. On sait déjà que $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} I_n$. Soit réciproquement un élément y dans $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} I_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y \in I_n$ donc $a_n \leq y \leq b_n$. En passant à la limite, $x \leq y \leq x$ d'où $y = x$. On vient bien de montrer que l'intersection des segments I_n était réduite à $\{x\}$. □

Proposition 41 (bonus hors-programme).

$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Plus précisément, $\mathbb{R}$ ne saurait s'écrire comme l'ensemble des termes d'une suite réelle.

Preuve de la proposition 41. La preuve classique par procédé diagonal de Cantor repose sur l'existence d'un développement décimal pour tout réel (fin d'année : cours sur les séries). La preuve suivante s'appuie sur le théorème des segments emboîtés.
Raisonnons par l'absurde et supposons que $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme l'ensemble des termes d'une suite (x_n) :

$$\mathbb{R} = \{x_0, x_1, x_2 \dots\}.$$

Considérons le segment $[0, 1]$ que l'on découpe en trois sous-segments $[0, \frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ et $[\frac{2}{3}, 1]$. Prenons x_0 : il ne peut pas se trouver dans les trois segments à la fois *[Si on avait coupé en deux seulement, il pouvait encore se trouver dans les deux à la fois... au milieu !]* L'un des trois segments (au moins) ne contient x_0 ; notons I_0 un tel segment. Coupons-le en trois : l'une des trois parties ne contient pas x_1 : notons I_1 une telle partie. On a donc $I_1 \subset I_0$ et I_1 ne contient ni x_0, ni x_1. En itérant le procédé, on construit une suite de segments emboîtés (I_n) tels que pour n fixé, I_n ne contient aucun des nombres. $x_0, x_1, \dots, x_n$. Pour n donné, $x_n \notin I_n$ donc $x_n \notin \bigcap_{n\geq 1} I_n$. Ainsi, $\bigcap_{n\geq 1} I_n$ ne contient aucun des x_n donc par hypothèse ne contient aucun nombre réel : l'intersection de nos segments emboîtés est vide ! Ceci est en contradiction avec le théorème des segments emboîtés : on tient notre absurdité. □

Exercices

On rappelle que de nombreux exercices ont été proposés dans le chapitre *Suites, la pratique.*

Encadrement et monotonie : deux exercices de plus

$\boxed{\textbf{17.1}}$ **[♦♦◊]** Soit (u_n) une suite de réels non nuls telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to 0$.
Montrer que (u_n) converge et préciser sa limite.

$\boxed{\textbf{17.2}}$ **[♦♦◊]** Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies par $u_0 > v_0 > 0$ et

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}; \quad v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}.$$

Montrer que ces deux suites convergent vers une limite commune.
En examinant la suite $(u_n v_n)$, exprimer cette limite en fonction de u_0 et v_0.

Exercices *avec epsilon.*

$\boxed{\textbf{17.3}}$ **[♦◊◊]** Montrer qu'une suite d'entiers qui converge est stationnaire.

$\boxed{\textbf{17.4}}$ **[♦♦◊]** Soit (u_n) une suite réelle. Prouver l'équivalence

$$u_n \to 0 \iff \frac{u_n}{1 + |u_n|} \to 0.$$

$\boxed{\textbf{17.5}}$ **[♦♦♦]** <u>Cesáro généralisé</u>
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels et $\ell \in \mathbb{R}$.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels strictement positifs telle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Montrer que

$$\text{Si } u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \qquad \text{alors } \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k u_k}{\sum_{k=1}^{n} a_k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

Suites extraites.

$\boxed{\textbf{17.6}}$ **[♦♦◊]** Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Montrer que $(|u_n|)$ ne tend pas vers $+\infty$ si et seulement si u admet une suite extraite convergente.

$\boxed{\textbf{17.7}}$ **[♦♦◊]** Soit (u_n) une suite telle que (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) sont convergentes.
Montrer que (u_n) est convergente.

$\boxed{\textbf{17.8}}$ **[♦♦♦]** Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'entiers telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}\ b_n > 0 \qquad \frac{a_n}{b_n} \to \ell \quad \text{et} \quad \ell \notin \mathbb{Q}.$$

Montrer que $b_n \to +\infty$.

$\boxed{\textbf{17.9}}$ **[♦♦♦]** On veut montrer que la suite de terme général $\sin(n)$ diverge.
On note $u_n = \sin(n)$. On raisonne par l'absurde en supposant que (u_n) est convergente, de limite ℓ.

1. En considérant $\sin(n+1) - \sin(n-1)$, montrer que $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
2. En déduire une contradiction.

$\boxed{\textbf{17.10}}$ **[♦♦♦]** Démontrer la divergence de la suite de terme général $\sin(\ln(n))$.
