Applications
1/2 : Notion d'application

Dans ce cours, les lettres E, F, G et H désigneront des ensembles.

1 Vocabulaire.

1.1 Définitions.

Définition 1.

Une **application** f de E dans F est un procédé qui à tout élément x de E associe un unique élément dans F, que l'on note $f(x)$. Cet objet est aussi appelé **fonction**, et décrit à l'aide de la notation

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right. .$$

L'ensemble E est alors appelé **ensemble de départ** F **ensemble d'arrivée**.

Soient $x \in E$ et $y \in F$ tels que

$$y = f(x);$$

On dit que y est l'**image** de x par f et que x est <u>un</u> **antécédent** de y par f.

Figure : deux patates et des flèches (important !)

Une application sert à faire un lien entre deux ensembles (éventuellement égaux). On a beaucoup manipulé au lycée les fonctions de la variable réelle, telles que la fonction logarithme népérien :

$$\ln : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) \end{array} \right. .$$

Mais les applications ne seront pas définies seulement entre des ensembles de nombres : elles vont nous permettre de donner une existence mathématique à certaines opérations. Prenons l'exemple du passage au complémentaire dans un ensemble E donné : il peut être vu comme une application :

$$\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ A & \mapsto & \overline{A} \end{array} \right. .$$

Définition 2 (Des applications simples à définir)**.**

On appelle application **identité** sur E et on note id_E l'application

$$\mathrm{id}_E : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array} \right. .$$

Soit $a \in F$; on appelle **application constante** égale à a la fonction

$$: \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & a \end{array} \right. .$$

Notation.

L'ensemble des applications de E dans F est noté F^E ou bien $\mathcal{F}(E,F)$.

Proposition 3 (Égalité de deux fonctions)**.**

Deux applications sont égales si et seulement si elles sont *égales en tout point* :

$$\forall (f,g) \in (\mathcal{F}(E,F))^2 \qquad f = g \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in E \quad f(x) = g(x).$$

Définissons l'ensemble des images par une application : cela nous permettra de bien comprendre la différence avec l'ensemble d'arrivée.

Définition 4.

Soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$ une application. On appelle **image** de f (ou plus précisément ensemble des images par f) et on note $\mathrm{Im}(f)$ ou encore $f(E)$ l'ensemble

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x) \ \mid \ x \in E\}.$$

On peut écrire aussi

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in F \ \mid \ \exists x \in E \quad y = f(x)\}.$$

Considérons l'application

$$\exp : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \exp(x) \end{array} \right. .$$

Nous savons que son (ensemble des) images est $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_+^*$. Il est différent de l'ensemble $\mathbb{R}$, qui a été déclaré comme ensemble d'arrivée. On peut d'ailleurs changer l'ensemble d'arrivée sans vraiment changer la fonction et écrire

$$\exp : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & \exp(x) \end{array} \right. .$$

1.2 Fonctions indicatrices.

Définition 5.

Soit A une partie de E. La **fonction indicatrice** de A est l'application notée $\mathbf{1}_A$, définie par

$$\mathbf{1}_A : \left\{ \begin{array}{ccl} E & \to & \{0,1\} \\ x & \mapsto & \mathbf{1}_A(x) := \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Par exemple, $\mathbb{Q}$ étant une partie de $\mathbb{R}$, on considère $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$, fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$, définie sur $\mathbb{R}$.

$$\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}\left(\frac{2}{3}\right) = 1 \qquad \text{et} \qquad \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}\left(\sqrt{2}\right) = 0.$$

Proposition 6 (Une partie est caractérisée par sa fonction indicatrice)**.**

$$\forall (A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2 \quad A = B \iff \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B.$$

Proposition 7.

Soit E un ensemble et $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Les égalités qui suivent sont des égalités entre applications.

Si A et B sont <u>disjoints</u> ($A \cap B = \emptyset$) alors $\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$.

Plus généralement,

$$\mathbf{1}_{A\setminus B} = \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_{A\cap B}, \qquad \mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B \qquad \mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{A\cap B}.$$

1.3 Restriction, prolongement.

Définition 8.

Soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$ et $A \in \mathcal{P}(E)$. On appelle **restriction** de f à A, et on note $f_{|A}$ l'application

$$f_{|A} : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right. .$$

Définition 9.

Soit A une partie de E et $g \in \mathcal{F}(A,F)$.
On appelle **prolongement** de g sur E toute application $f \in \mathcal{F}(E,F)$ telle que $f_{|A} = g$.

Exemple 10.

Soit g la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}^*$. Définir deux prolongements différents de g sur $\mathbb{R}$.

2 Composition.

Définition 11.

Soient E, F, G trois ensembles. Soient deux applications

$$f : E \to F \quad \text{et} \quad g : F \to G.$$

La **composée** de f par g, notée $g \circ f$ est l'application

$$g \circ f : \left\{ \begin{array}{lll} E & \to & G \\ x & \mapsto & g \circ f(x) := g(f(x)) \end{array} \right. .$$

Aussi important que la définition : le dessin avec les trois patates.

Exemple 12.

Soient

$$f : x \mapsto \ln(x-3), \qquad g : x \mapsto \sqrt{x^2-4}, \qquad h : x \mapsto \sqrt{\ln(x)}.$$

Écrire chacune comme la composée de deux fonctions "simples" (en précisant bien sûr chaque fois les ensembles de départ et d'arrivée).

Exemple 13 (Pour des fonctions de la variable réelle, à valeurs réelles)**.**

La composée de deux fonctions décroissantes est croissante.

Proposition 14 (L'identité est neutre pour la composition)**.**

Pour tout application $f \in \mathcal{F}(E, F)$, on a

$$\mathrm{id}_F \circ f = f \quad \text{et} \quad f \circ \mathrm{id}_E = f.$$

Proposition 15 (Associativité de la composition)**.**

Si $f : E \to F$, $g : F \to G$, $h : G \to H$, alors,

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)\,.$$

Définition 16 (extension)**.**

Soient E, F, E' et F' quatre ensembles. Soient deux applications

$$f : E \to F \quad \text{et} \quad g : E' \to F',$$

telles que $\underline{\mathrm{Im}(f) \subset E'}$. On appelle alors composée $g \circ f$ l'application $g \circ f = \left(g_{|\mathrm{Im}(f)}\right) \circ f$.

3 Bijections (premier contact).

Définition 17.

On dit qu'une application $f : E \to F$ est une **bijection** de E vers F si tout élément de F possède un unique antécédent dans E par f, ce qui s'écrit

$$\forall y \in F \quad \exists! x \in E \quad y = f(x).$$

Définition 18.

Soit $f : E \to F$ une bijection. Tout élément $y \in F$ possède un unique antécédent dans E par f ; notons-le $f^{-1}(y)$. Ceci définit la fonction **réciproque** de f.

$$f^{-1} : \begin{cases} F & \to & E \\ y & \mapsto & f^{-1}(y) \end{cases} .$$

Exemple. $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est une bijection et $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est sa réciproque.

Proposition 19 (découle de la définition de f^{-1})**.**

Soit $f : E \to F$ une bijection et $f^{-1} : F \to E$ sa réciproque. On a

$$\forall x \in E \quad f^{-1}(f(x)) = x \qquad \text{et} \qquad \forall y \in F \quad f\left(f^{-1}(y)\right) = y.$$

Ceci se récrit

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E, \qquad \text{et} \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F.$$

Dans le second cours sur les applications, le concept de bijectivité sera décomposé en deux sous-concepts : l'injectivité et la surjectivité.

Complément : Famille d'éléments d'un ensemble.

Définition 20.

Soient E et I deux ensembles (le second étant celui des indices).

Une **famille d'éléments de** E **indexée par** I est une fonction $a \colon I \to E$.

Pour $i \in I$, on note $a_i = a(i)$. La famille a est alors notée $a = (a_i)_{i \in I}$.

L'ensemble des familles d'éléments de E indexées par I sera notée E^I.

L'idée : a_i est un élément de E « étiqueté » à l'aide d'une étiquette i prise dans l'ensemble des indices I.

Définition 21.

On appelle **suite** d'éléments de E une famille d'éléments de E indexée par $\mathbb{N}$.

L'ensemble des suites à termes dans E est donc $E^{\mathbb{N}}$. Une suite $u \in E^{\mathbb{N}}$ est donc notée $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 22 (admis)**.**

Soit $f : E \to E$ et $a \in E$. Alors il existe une unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

Exercices

$\boxed{\textbf{6.1}}$ **[♦♦◇]** À l'aide de notions croisées dans les cours précédents, donner des exemples d'applications *involutives*, c'est-à-dire des applications du type

$$f : E \to E \quad | \quad f \circ f = \mathrm{id}_E.$$

$\boxed{\textbf{6.2}}$ **[♦♦◇]** À l'aide de notions croisées dans les cours précédents, donner des exemples d'applications *idempotentes*, c'est-à-dire des applications du type

$$f : E \to E \quad | \quad f \circ f = f.$$

où E est un ensemble que vous préciserez.

$\boxed{\textbf{6.3}}$ **[♦♦◇]** Exhibez deux applications $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que

$$g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad f \circ g \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}.$$

$\boxed{\textbf{6.4}}$ **[♦♦◇]** On veut démontrer qu'il n'existe aucune fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(f(n)) = n + 1.$$

On va raisonner par l'absurde. On suppose donc qu'il existe une telle fonction f.

1. Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $f(n+1) - f(n) = 1$.
   Indication : on pourra considérer $f \circ f \circ f$.
2. Démontrer alors que pour tout entier naturel n, on a $f(n) = n + f(0)$.
3. Conclure.

$\boxed{\textbf{6.5}}$ **[♦♦◇]** Associativité de la différence symétrique.
Soit E un ensemble. Pour X et Y deux parties de E, on note $X\Delta Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$.
Soient A, B, C trois parties de E. Développer $1_{(A\Delta B)\Delta C}$. En déduire que $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.
