Calcul matriciel

Dans tout ce qui suit, n et p et q désigneront des entiers naturels non nuls, et $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Matrices rectangulaires et opérations.

1.1 Combinaisons linéaires de matrices de $M_{n,p}(\mathbb{K})$.

Définition 1.

- On appelle **matrice** de type (n,p) à coefficients dans $\mathbb{K}$ un tableau d'éléments de $\mathbb{K}$ ayant n lignes et p colonnes.
- L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes, à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $M_{n,p}(\mathbb{K})$.
- L'ensemble $M_{n,n}(\mathbb{K})$ est noté $M_n(\mathbb{K})$. Les matrices de cet ensemble sont qualifiées de *carrées*.
- Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. Les **coefficients** de A sont écrits à l'aide d'un double indice : $a_{i,j}$ désigne le coefficient qui est sur la *ligne* i et sur la *colonne* j. Ainsi, on note

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}.$$

- La matrice A écrite ci-dessus se représente entre parenthèses.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Remarque. Ayant $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, on a l'inclusion $M_{n,p}(\mathbb{R}) \subset M_{n,p}(\mathbb{C})$.

Définition 2.

Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ deux matrices de même type.
On dit que A et B sont **égales** et on note $A = B$ si

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \ \forall j \in [\![1, p]\!] \quad a_{i,j} = b_{i,j}.$$

On va munir $M_{n,p}(\mathbb{K})$ d'une structure de groupe additif.

Définition 3 (Somme de deux matrices)**.**

Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices de $M_{n,p}(\mathbb{K})$.
On appelle **somme** de A et B, et on note $A + B$ la matrice de $M_{n,p}(\mathbb{K})$

$$A + B = (c_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} \quad \text{où} \quad \forall i \in [\![1, n]\!] \ \forall j \in [\![1, p]\!] \quad c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}.$$

Proposition 4.

Le couple $(M_{n,p}(\mathbb{K}), +)$ est un groupe abélien. Plus précisément,

1. $+$ est une loi de composition interne sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$;
2. $+$ est associative ;
3. $+$ est commutative ;
4. il existe une matrice dans $M_{n,p}(\mathbb{K})$ qui est neutre pour l'addition : c'est la matrice nulle, dont tous les coefficients sont nuls et elle est notée $0_{n,p}$;
5. toute matrice A de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ possède un symétrique $-A$ dans $M_{n,p}(\mathbb{K})$.
   Si $A = (a_{i,j})$, la matrice $-A$ est la matrice $(-a_{i,j})$ et on a $-A + A = A + (-A) = 0_{n,p}$.

Définition 5 (Multiplication par un scalaire)**.**

Soient $A = (a_{i,j})$ une matrice de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ et λ un élément du corps $\mathbb{K}$. On appelle multiple de A par le *scalaire* λ, et on note $\lambda \cdot A$ ou plus simplement λA la matrice

$$\lambda A = (\lambda a_{i,j}).$$

Si A et B sont deux matrices de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ et λ, μ deux éléments de $\mathbb{K}$, la matrice $\lambda A + \mu B$ est appelée une **combinaison linéaire** de A et B.

Remarque.
Ce qui précède définit une application $\cdot : \left\{ \begin{array}{ccc} M_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathbb{K} & \to & M_{n,p}(\mathbb{K}) \\ (A, \lambda) & \mapsto & \lambda \cdot A \end{array} \right.$, appelée loi de composition *externe* (on prend une matrice A et on va chercher un scalaire λ à l'extérieur de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ pour construire λA).

Proposition 6 (Propriétés de la multiplication par un scalaire)**.**

- $\forall A \in M_{n,p}(\mathbb{K}) \quad 1_{\mathbb{K}} \cdot A = A$;
- $\cdot$ est distributive par rapport à l'addition dans $M_{n,p}(\mathbb{K})$:
$$\forall A, B \in M_{n,p}(\mathbb{K}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda \cdot (A+B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B;$$
- $\cdot$ est distributive par rapport à l'addition dans $\mathbb{K}$:
$$\forall A \in M_{n,p}(\mathbb{K}) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad (\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A;$$
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad \forall A \in M_{n,p}(\mathbb{K}) \quad \lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda\mu) \cdot A.$

Remarque. Le triplet $(M_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ a une structure de $\mathbb{K}$-**espace vectoriel** ($\rightarrow$ algèbre linéaire).

Proposition 7 (Autour du zéro et du symétrique)**.**

- $\forall A \in M_{n,p}(\mathbb{K}) \quad 0_{\mathbb{K}} \cdot A = 0_{n,p}$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda \cdot 0_{n,p} = 0_{n,p}$.
- $\forall A \in M_{n,p}(\mathbb{K}) \quad -A = (-1) \cdot A$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall A \in M_{n,p}(\mathbb{K}) \quad \lambda \cdot A = 0_{n,p} \implies (\lambda = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } A = 0_{n,p})$.

Définition 8.

Dans $M_{n,p}(\mathbb{K})$, pour $i \in [\![1, n]\!]$, $j \in [\![1, p]\!]$, on note $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui à la position (i, j), qui vaut 1. Une telle matrice est parfois dite **élémentaire**.

$$E_{i,j} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} & & & & \vdots & & \\ & & (0) & & \vdots & (0) & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots \\ & & & & \vdots & & \\ & & (0) & & \vdots & (0) & \\ & & & & \vdots & & \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & & & \uparrow & & \\ & & & & j & & \end{array} & \end{array} .$$

Proposition 9 (Décomposition sur la base canonique)**.**

Toute matrice de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire des matrices de la famille $(E_{i,j}, i \in [\![1, n]\!], j \in [\![1, p]\!])$, qui sera appelée **base canonique** de $M_{n,p}(\mathbb{K})$.
Plus précisément
$$\forall M = (m_{i,j}) \in M_{n,p}(\mathbb{K}) \quad M = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} m_{i,j} E_{i,j}.$$

1.2 Produit matriciel.

Définir le produit de deux matrices en multipliant coefficient par coefficient, n'a pas d'intérêt. Même si la définition qui suit peut sembler étrange au premier abord, nous verrons que le produit matriciel :

$\longrightarrow$ a un lien avec la résolution des systèmes linéaires (partie 3),

$\longrightarrow$ a un lien avec la composition des applications linéaires (second semestre).

Définition 10.

Soient deux matrices $A = (a_{i,j}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j}) \in M_{p,q}(\mathbb{K})$.
On appelle **produit** de A et B, et on note AB la matrice de $M_{n,q}(\mathbb{K})$ définie par

$$AB = (c_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q}} \quad \text{où} \quad \forall i \in [\![1, n]\!] \ \forall j \in [\![1, q]\!] \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}.$$

Exemples 11.

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix}$, avec x, y, z des réels.
Calculer AA, AB, AC, BA, BB, BC, CA, CB, CC, lorsque le produit <u>a un sens</u>.

Proposition 12 (Propriétés du produit matriciel)**.**

Soient A, B, C trois matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
Lorsque les produits écrits ci-dessous ont un sens, ces égalités sont vraies :

1. $A(B + C) = AB + AC$ (distributivité du produit à gauche)
2. $(A + B)C = AC + BC$ (distributivité du produit à droite)
3. $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$ et ainsi $(\lambda A)(\mu B) = (\lambda\mu)AB$ (la balade des scalaires)
4. $(AB)C = A(BC)$ (associativité du produit)

Proposition 13 (Produit par la matrice nulle)**.**

$$\forall A \in M_{n,p}(\mathbb{K}) \qquad A \cdot 0_{p,q} = 0_{n,q} \quad \text{et} \quad 0_{q,n} \cdot A = 0_{q,p}.$$

Exemple 14 (Deux propriétés que le produit matriciel NE possède PAS)**.**

Considérons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $AB = 0_{2,2}$ et $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi,

1. Même lorsque les deux produits AB et BA ont un sens, et ont même type, l'égalité $AB = BA$ n'est pas toujours vraie : A et B ne commutent pas toujours.
2. Le produit AB peut être nul sans que ni A ni B ne soit la matrice nulle.

Définition 15.

On appelle matrice **diagonale** d'ordre n toute matrice $D = (d_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall\ 1 \leq i,j \leq n \quad i \neq j \Longrightarrow d_{i,j} = 0.$$

Pas de contrainte sur les coefficients $d_{i,i}$ dits coefficients *diagonaux*.

On note parfois, pour $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{K}$,

$$\mathrm{Diag}(d_1, \ldots, d_n) := \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}.$$

Exemples. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est diagonale, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ aussi.

Proposition 16 (Effet de la multiplication par une matrice diagonale)**.**

Soit une matrice $M \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et deux matrices diagonales

$$D = \mathrm{Diag}(d_1, \ldots, d_n) \in M_n(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad D' = \mathrm{Diag}(d'_1, \ldots, d'_p) \in M_p(\mathbb{K}).$$

- Produit à gauche.
  La matrice DM s'obtient en multipliant la ligne i de M par d_i, et ce pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
- Produit à droite.
  La matrice MD' s'obtient en multipliant la colonne j de M par d'_j, et ce pour tout $j \in [\![1, p]\!]$.

Exemple.
Soient $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. On a $DM = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 3a'' & 3b'' & 3c'' \end{pmatrix}$ et $MD = \begin{pmatrix} a & 0 & 3c \\ a' & 0 & 3c' \\ a'' & 0 & 3c'' \end{pmatrix}$.

Définition 17.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **matrice identité** d'ordre n, et on note I_n la matrice diagonale de $M_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1 :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 18.

La matrice identité est neutre pour la multiplication matricielle :

$$\forall A \in M_{n,p}(\mathbb{K}) \quad I_n A = A \ \text{ et } \ AI_p = A.$$

En particulier pour les matrices carrées,

$$\forall M \in M_n(\mathbb{K}) \quad MI_n = I_n M = M.$$

On appelle parfois **matrice scalaire** une matrice de la forme λI_n, avec $\lambda \in \mathbb{K}$. Lorsqu'il a un sens, le produit d'une matrice M par λI_n donne λM.

1.3 Transposition

Définition 19.

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} \in M_{n,p}(\mathbb{K})$.
On appelle **transposée** de la matrice A, et on note $A^\top$ (ancienne notation : ${}^tA$) la matrice de $M_{p,n}(\mathbb{K})$ définie par

$$A^\top = (a'_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq p \\ 1\leq j\leq n}} \quad \text{où} \quad \forall i \in [\![1,p]\!] \ \forall j \in [\![1,n]\!] \quad a'_{i,j} = a_{j,i}$$

Exemples.

- La transposée de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ est $A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.
- La transposée de la matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est $B^\top = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.
- Une matrice diagonale (donc carrée...) est sa propre transposée.
- Soit $(i,j) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$.
  La transposée de la matrice élémentaire $E_{i,j}$ de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice élémentaire $E_{j,i}$ de $M_{p,n}(\mathbb{K})$.

Proposition 20 (Transposée de la transposée)**.**

$$\forall A \in M_{n,p}(\mathbb{K}) \qquad \left(A^\top\right)^\top = A.$$

Proposition 21 (Transposée d'une combinaison linéaire)**.**

$$\forall (A,B) \in (M_{n,p}(\mathbb{K}))^2 \quad \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2 \qquad (\lambda A + \mu B)^\top = \lambda A^\top + \mu B^\top.$$

Proposition 22 (Transposée d'un produit)**.**

$$\forall A \in M_{n,p}(\mathbb{K}) \quad \forall B \in M_{p,q}(\mathbb{K}) \qquad (AB)^\top = B^\top A^\top.$$

2 Matrices carrées.

On rappelle que $M_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes.
Pour $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$, on appellera **coefficients diagonaux** les n coefficients $a_{i,i}$, avec $i \in [\![1, n]\!]$.

2.1 Structure d'anneau de $M_n(\mathbb{K})$.

Proposition 23.

$(M_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau.
La matrice nulle 0_n est l'élément neutre du groupe additif et la matrice I_n le neutre pour la loi $\times$.
Dès que $n \geq 2$, $M_n(\mathbb{K})$ n'est pas commutatif et possède des diviseurs de zéro.

On appellera puissances d'une matrice ses itérés pour la loi produit. On redonne ci-dessous une définition.

Définition 24.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. La suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ des **puissances** de A est définie par

$$A^0 = I_n \qquad \text{et} \qquad \forall p \in \mathbb{N} \quad A^{p+1} = A^p \cdot A.$$

Proposition 25.

$$\forall A \in M_n(\mathbb{K}) \quad \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad A^p A^q = A^{p+q} = A^q A^p, \quad (A^p)^q = A^{pq}, \quad (\lambda A)^p = \lambda^p A^p.$$

Proposition 26.

$$\forall A \in M_n(\mathbb{K}) \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \left(A^\top\right)^p = (A^p)^\top.$$

Proposition 27 (si ça commute, d'accord).

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ deux matrices $\boxed{\text{qui commutent}}$ (i.e. $AB = BA$). Alors,

1. $\forall (p, q) \in \mathbb{N} \quad A^p B^q = B^q A^p$,
2. $\forall p \in \mathbb{N} \quad (AB)^p = A^p B^p$,
3. $\forall p \in \mathbb{N} \quad A^p - B^p = (A - B) \sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k} \quad$ et $\quad (A + B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$.

Exemple 28.

Calculer les puissances de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exemple 29.

Soit $a \in \mathbb{K}$. On considère les matrices

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad M_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que N est nilpotente puis calculer les puissances de M_a.

Exemple 30 (Puissance de la *matrice Attila*)**.**

Soit J la matrice de $M_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Déterminer ses puissances.

Proposition 31 (Produit de deux matrices élémentaires de $M_n(\mathbb{K})$)**.**

Soit $(E_{i,j}, 1 \leq i, j \leq n)$ la base canonique de $M_n(\mathbb{K})$. On a

$$\forall i, j, k, l \in [\![1, n]\!] \quad E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}.$$

où pour tout couple $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, on définit le **symbole de Kronecker** par $\delta_{i,j} = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & \text{si} & i = j \\ 0 & \text{si} & i \neq j \end{array} \right.$

Preuve. Considérons quatre entiers i, j, k, l entre 1 et n. Remarquons d'abord que le symbole de Kronecker permet d'exprimer les coefficients des matrices de la base canonique : pour r, s dans $[\![1, n]\!]$, on a par définition de la matrice $E_{i,j}$,

$$[E_{i,j}]_{r,s} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } r = i \text{ et } s = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

Un tel nombre peut être obtenu en multipliant deux coefficients de Kronecker : $\delta_{r,i}\delta_{s,j}$ vaut lui aussi 1 si $(r, s) = (i, j)$ et 0 sinon. On a donc

$$\forall r, s \in [\![1, n]\!] \quad [E_{i,j}]_{r,s} = \delta_{r,i}\delta_{s,j}.$$

Calculons le coefficient d'indice (r, s) du produit $E_{i,j}E_{k,l}$:

$$[E_{i,j}E_{k,l}]_{r,s} = \sum_{t=1}^{n} [E_{i,j}]_{r,t}[E_{k,l}]_{t,s} = \sum_{t=1}^{n} \delta_{r,i}\delta_{t,j}\delta_{t,k}\delta_{s,l} = \delta_{r,i}\delta_{s,l} \sum_{t=1}^{n} \delta_{t,j}\delta_{t,k}.$$

Pour t entre 1 et n, le produit $\delta_{t,j}\delta_{t,k}$ est nul, sauf si $t = j = k$, auquel cas il vaut 1. La somme $\sum_{t=1}^{n} \delta_{t,j}\delta_{t,k}$ est donc nulle si $j \neq k$. Si $j = k$, elle ne contient qu'un terme non nul qui vaut $\delta_{j,j}\delta_{k,k} = 1$. Ainsi, on a

$$\sum_{t=1}^{n} \delta_{t,j}\delta_{t,k} = \delta_{j,k},$$

d'où

$$[E_{i,j}E_{k,l}]_{r,s} = \delta_{j,k}(\delta_{r,i}\delta_{s,l}) = \delta_{j,k}[E_{i,l}]_{r,s}.$$

Ceci achève de prouver que les matrices $E_{i,j}E_{k,l}$ et $\delta_{j,k}E_{i,l}$ ont même coefficients. $\square$

2.2 Trace d'une matrice carrée.

Définition 32.

Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$. On appelle **trace** de la matrice A et on note $\mathrm{tr}(A)$ la somme de ses coefficients diagonaux :
$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Proposition 33 (Trace et opérations)**.**

Pour toutes matrices A et B carrées d'ordre n, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,
$$\mathrm{tr}(A^\top) = \mathrm{tr}(A), \qquad \mathrm{tr}\left(\lambda A + \mu B\right) = \lambda \mathrm{tr}(A) + \mu \mathrm{tr}(B), \qquad \boxed{\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)}.$$

2.3 Parties remarquables de $M_n(\mathbb{K})$.

- **Matrices diagonales**.

Proposition 34.

Notons ici $D_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1. $D_n(\mathbb{K})$ contient la matrice nulle et c'est un ensemble stable par combinaison linéaire.
2. $D_n(\mathbb{K})$ est stable par produit matriciel.

- **Matrices triangulaires**.

Définition 35.

Soit $T = (t_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$. On dit qu'elle est **triangulaire supérieure** si tous ses coefficients sous la diagonale sont nuls, c'est-à-dire
$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2 \quad i > j \Longrightarrow t_{i,j} = 0.$$

On dira que T est **triangulaire inférieure** si sa transposée est triangulaire supérieure.

Exemple. $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure. $T' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure.

Proposition 36.

Notons ici $T_n^+(\mathbb{K})$ (resp. $T_n^-(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) de taille n, à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1. $T_n^+(\mathbb{K})$ et $T_n^-(\mathbb{K})$ contiennent la matrice nulle et sont stables par combinaison linéaire.
2. $T_n^+(\mathbb{K})$ et $T_n^-(\mathbb{K})$ sont stables par produit matriciel.

• **Matrices symétriques, antisymétriques.**

Définition 37.

On dit d'une matrice carrée A qu'elle est **symétrique** si $A^\top = A$, **antisymétrique** si $A^\top = -A$.
L'ensemble des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{K})$ est noté $S_n(\mathbb{K})$.
L'ensemble des matrices antisymétriques de $M_n(\mathbb{K})$ est noté $A_n(\mathbb{K})$.

Exemple. $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ est symétrique et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -\pi \\ 0 & \pi & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.

Exemple 38.

Montrer que $S_n(\mathbb{K})$ contient 0_n, est stable par combinaison linéaire, mais *pas* par produit.

Exemple 39.

Démontrer que toute matrice de $M_n(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

2.4 Groupe des matrices inversibles.

Définition 40.

Le groupe des inversibles de l'anneau $(M_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est appelé **groupe linéaire** et noté $GL_n(\mathbb{K})$.

Ainsi, une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est **inversible** (c'est-à-dire appartient à $GL_n(\mathbb{K})$) si

$$\exists B \in M_n(\mathbb{K}) \quad AB = I_n \quad \text{et} \quad BA = I_n.$$

Lorsque A est inversible, une telle matrice B est unique : on l'appelle **inverse** de A, notée A^{-1}.

Exemples élémentaires.
I_n et 0_n sont-elles inversibles ? Quid de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$?

Proposition 41 (Propriétés de groupe de $GL_n(\mathbb{K})$)**.**

1. $I_n \in GL_n(\mathbb{K})$,
2. $\forall (A, B) \in (GL_n(\mathbb{K}))^2 \quad AB \in GL_n(\mathbb{K}) \text{ et } (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
3. $\forall A \in GL_n(\mathbb{K}) \quad A^{-1} \in GL_n(\mathbb{K}) \text{ et } (A^{-1})^{-1} = A$.
4. $\forall A \in GL_n(\mathbb{K}) \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad A^p \in GL_n(\mathbb{K}) \text{ et } (A^p)^{-1} = (A^{-1})^p$.

Remarque. Il est tout à fait clair que $GL_n(\mathbb{K})$ n'est pas stable par somme : prenons l'exemple de I_n et $-I_n$, toutes deux inversibles ; leur somme vaut $0_{n,n}$ qui ne l'est pas.

Proposition 42 ($GL_n(\mathbb{K})$ est stable par transposition)**.**

Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ est une matrice inversible, alors

$$A^T \text{ est inversible} \quad \text{et} \quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

On va maintenant donner un critère d'inversibilité pour des matrices simples : les diagonales de taille quelconque, et les matrices quelconques de taille 2.

Proposition 43 (Inversibilité des matrices diagonales)**.**

Soit $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$ une matrice diagonale de $M_n(\mathbb{K})$.

Elle est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls. Dans ce cas, on a

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} d_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & d_n^{-1} \end{pmatrix}.$$

Proposition 44 (Inversibilité et inverse d'une matrice de taille 2)**.**

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$. On appelle déterminant de A le réel $\det(A) = ad - bc$. On a

$$A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0.$$

La matrice A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Si c'est le cas, on a

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Remarque. On définira la notion de déterminant d'une matrice carrée de taille quelconque en fin d'année, mais ce n'est pas une mince affaire...

Exemple 45 (Une diagonalisation)**.**

Soient
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. Il existe une matrice diagonale $D \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $\underline{A = PDP^{-1}}$. Le prouver et expliciter D.
3. En utilisant la relation de la question 2, calculer les puissances de A.
4. En utilisant la relation de la question 2, prouver que A est inversible et calculer son inverse.

3 Systèmes linéaires et matrices.

3.1 Écriture matricielle des systèmes linéaires. Structure des ensembles de solutions.

Définition 46.

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

L'équation $AX = B$, d'inconnue $X \in M_{p,1}(\mathbb{K})$ est appelée **système linéaire** de n équations linéaires sur $\mathbb{K}^p$, de **second membre** B. Il s'écrit aussi

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{i.e.} \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}\, x_1 & + & a_{1,2}\, x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}\, x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}\, x_1 & + & a_{2,2}\, x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}\, x_p & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_{n,1}\, x_1 & + & a_{n,2}\, x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}\, x_p & = & b_n \end{array} \right.$$

On appelle **solution** du système toute matrice colonne $X \in M_{p,1}(\mathbb{K})$ vérifiant $AX = B$, ou encore tout p-uplet $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ qui soit solution de chacune des n équations.

Ainsi, l'ensemble des solutions d'un système linéaire est une partie de $M_{p,1}(\mathbb{K})$ ou de $\mathbb{K}^p$, les notions de p-uplet et de matrice colonne à p lignes étant délibérément confondues.

Remarque. Insistons : même si, rigoureusement parlant, $M_{3,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^3$ ne sont pas le même ensemble, il sera très courant de confondre par exemple la matrice $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et le triplet $(1, 2, 3)$.

Dans les énoncés ci-dessous, on fixe $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$.

Proposition 47.

Un système linéaire de la forme $AX = 0_{n,1}$ est dit **homogène**.
L'ensemble S_0 de ses solutions contient le p-uplet nul et il est stable par combinaisons linéaires.

Définition 48.

Le système linéaire $AX = B$ est dit **compatible** s'il possède une solution.

Exemples.

- Le système $\left\{ \begin{array}{l} x + y = 0 \\ x - y = 2 \end{array} \right.$ est compatible. Il admet $(1, -1)$ comme unique solution.
- Le système $\left\{ \begin{array}{l} x + y = 0 \\ x + y = 2 \end{array} \right.$ est incompatible.
- Un système linéaire homogène sur $\mathbb{K}^p$ est toujours compatible : le p-uplet $(0, \ldots, 0)$ est solution.

Proposition 49.

Le système linéaire $AX = B$ est compatible s.s.i. B est une combinaison linéaire des colonnes de A.

Proposition 50.

Soit $AX = B$ un système linéaire compatible et $X_{pa} \in M_{p,1}(\mathbb{K})$ une solution particulière du système. L'ensemble des solutions S s'écrit

$$S = \{X_{pa} + Y,\ Y \in S_0\},$$

où S_0 est l'ensemble des solutions de $AX = 0_{n,1}$, système homogène associé.

3.2 Méthode du pivot et résolution des systèmes linéaires.

Exemple 51 (Révisons la méthode du pivot)**.**

On résout à l'aide de l'algorithme du pivot le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 3x & + & 4y & + & 9z & = 8 \\ 20x & + & 30y & + & 70z & = 60 \\ x & + & y & + & 2z & = 2 \end{array}\right.$$

Définition 52.

On appelle **opération élémentaire** sur les lignes d'un système ou d'une matrice l'une des opérations suivantes :

1. Échange des $i$èmes et $j$èmes lignes. On note $L_i \leftrightarrow L_j$.
2. Multiplication d'une ligne par un scalaire λ <u>non nul</u>. On note $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
3. Ajout à la ligne L_i d'une ligne L_j $(i \neq j)$ multipliée par un scalaire μ. On note $L_i \leftarrow L_i + \mu L_j$.

Définition 53 (Un peu de vocabulaire sur les systèmes linéaires)**.**

Dans un système ou dans une matrice, on appelle **ligne nulle**, une ligne où tous les coefficients sont nuls ; elle correspond alors à l'équation linéaire $0 = 0$.
On appelle **pivot** d'une ligne non nulle le premier coefficient non nul.

On dit d'un système linéaire qu'il est **échelonné** s'il a une structure (strictement) *en escalier*. Plus précisément, si les lignes sous une ligne nulle sont toutes nulles et qu'à chaque ligne (non nulle), le pivot de la ligne se trouve strictement à droite du pivot de la ligne au-dessus.

Dans un système échelonné, on dit qu'une **inconnue** est **principale** si sur une des lignes du système, son coefficient est un pivot. Elle est dite **secondaire** sinon.

Exemple 54.

$$(\mathscr{S}_1)\begin{cases} \boxed{1}x + y + z = 0 \\ \boxed{2}y + z = 2 \\ \boxed{4}y - z = -1 \\ 0 = \boxed{5} \end{cases} \qquad (\mathscr{S}_2)\begin{cases} \boxed{1}x - y + z + t = 0 \\ \boxed{2}z - t = 2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

- Dans les systèmes linéaires ci-dessus, on a encadré les $\boxed{\text{pivots}}$.
- Le système $(\mathscr{S}_2)$ est échelonné, contrairement au système $(\mathscr{S}_1)$ qui ne l'est pas.
- Dans le système $(\mathscr{S}_2)$, x et z sont des inconnues principales, et y et t des inconnues secondaires.

Méthode (Écriture paramétrique de l'ensemble des solutions d'un système échelonné)**.**

Lorsqu'un système échelonné a des inconnues secondaires, on peut donner une représentation paramétrique de l'ensemble des solutions :

- en prenant les inconnues secondaires comme des paramètres prenant des valeurs quelconques dans $\mathbb{K}$,
- et en exprimant les inconnues principales en fonction des ces paramètres.

Proposition 55 (Existence et unicité de solutions pour un système échelonné)**.**

1. Un système linéaire échelonné est compatible si et seulement si il ne comporte pas de pivot sur la colonne des seconds membres.
2. Un système échelonné compatible a une unique solution si et seulement si il n'a que des inconnues principales, ce qui n'arrive que pour une matrice carrée.
   Son ensemble de solutions est alors un singleton.
   Un tel système est dit **de Cramer**.
3. Si le système échelonné possède au moins une inconnue secondaire, alors il possède une infinité de solutions. On sait donner une écriture paramétrique de cet ensemble de solutions.

Théorème 56 (admis)**.**

L' algorithme du pivot transforme un système linéaire quelconque en un système linéaire échelonné, ayant le même ensemble de solutions que le système de départ.

Remarque. Pour que ce *théorème* en fut vraiment un, il aurait fallu donner une présentation de l'algorithme du pivot plus formelle que celle que nous avons fournie.

Ainsi, pour résoudre un système linéaire, on l'échelonnera à l'aide de l'algorithme du pivot. Une fois échelonné, on applique la méthode ci-dessus pour écrire son ensemble de solutions.

3.3 Systèmes linéaires et inversibilité des matrices.

Théorème 57 (Caractérisation de l'inversibilité d'une matrice en termes de systèmes linéaires)**.**

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Les trois assertions ci-dessous sont équivalentes.

1. A est inversible.
2. Le système linéaire homogène $AX = 0_{n,1}$ a pour unique solution la colonne nulle $0_{n,1}$.
3. Pour tout $Y \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, le système linéaire $AX = Y$, d'inconnue $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, possède une unique solution.

Preuve. On va montrer la chaîne $1 \Longrightarrow 2 \Longrightarrow 3 \Longrightarrow 1$.

• Supposons 1. La colonne nulle $0_{n,1}$ est solution du système linéaire homogène. Montrons que c'est la seule.

Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = 0$. Puisqu'on a supposé A inversible, on peut multiplier par A^{-1} à gauche et obtenir $X = 0$.

• Supposons 2. Soit $Y \in M_{n,1}(\mathbb{K})$. Posons le système linéaire $AX = Y$, d'inconnue $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$.

On échelonne le système linéaire : on obtient un système équivalent de la forme $TX = Y'$ où T est une matrice carrée échelonnée (donc triangulaire). Bien sûr, on aurait pu obtenir T en échelonnant le système homogène $AX = 0$. Comme on a supposé que ce système n'avait qu'une solution, on sait que $TX = 0$ (et donc $TX = Y'$!) n'a que des inconnues principales. Ainsi, le système $TX = Y'$, équivalent à $AX = Y$, possède une unique solution.

• Supposons 3, c'est-à-dire que pour tout Y, le système $AX = Y$ possède une unique solution.

Notons $C_1, \ldots, C_n$ les n colonnes de la matrice I_n. Par hypothèse,

$$\forall j \in [\![1, n]\!] \quad \exists X_j \in M_{n,1}(\mathbb{K}) \quad AX_j = C_j.$$

Posons B la matrice dont les colonnes sont les X_j :

$$AB = (AX_1 \mid \cdots \mid AX_n) = (C_1 \mid \cdots \mid C_n) = I_n.$$

On a $AB = I_n$: on a trouvé un "inverse à droite" pour A. <u>A-t-on $BA = I_n$?</u> On a

$$A\,(BA - I_n) = \underbrace{(AB)}_{=I_n} A - A = I_n A - A = 0_n.$$

Si on note C'_j la $j$ème colonne de $BA - I_n$. Ce qui précède se récrit

$$A\left(C'_1 \mid \cdots \mid C'_n\right) = \left(AC'_1 \mid \cdots \mid AC'_n\right) = 0_n.$$

Ainsi

$$\forall j \in [\![1, n]\!] \quad AC'_j = 0_{n,1}.$$

Or, le système linéaire $AX = 0$ a par hypothèse pour seule solution $0_{n,1}$. Ceci donne que tous les C'_j sont nuls et donc que $BA - I_n$.

On dispose bel et bien d'une matrice B telle que $AB = BA = I_n$, donc A est inversible et $A^{-1} = B$.

□

Corollaire 58 (*un côté suffit*)**.**

Pour une matrice carrée, l'existence d'un inverse à gauche (resp. à droite) suffit pour que cette matrice soit inversible. Alors, son inverse n'est autre que l'inverse à gauche (resp. à droite).

Plus précisément, pour $A \in M_n(\mathbb{K})$,

$$(\exists B \in M_n(\mathbb{K}) \quad BA = I_n) \quad \Longrightarrow \quad \left(A \in GL_n(\mathbb{K}) \;\text{ et }\; A^{-1} = B\right).$$

$$(\exists B \in M_n(\mathbb{K}) \quad AB = I_n) \quad \Longrightarrow \quad \left(A \in GL_n(\mathbb{K}) \;\text{ et }\; A^{-1} = B\right).$$

Corollaire 59 (vers une méthode de calcul effectif de l'inverse)**.**

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. S'il existe une matrice $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall (X,Y) \in M_{n,1}(\mathbb{K}) \quad AX = Y \Longleftrightarrow X = BY,$$

alors A est inversible et $A^{-1} = B$.

Méthode (calcul de l'inverse : en posant le système)**.**

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Pour calculer l'inverse de A (s'il existe) :

1. on pose le système linéaire $AX = Y$, avec $X, Y \in M_{n,1}(\mathbb{K})$;
2. on échelonne le système : s'il n'y a que des inconnues principales, le système est de Cramer (une unique solution) et la matrice A est <u>inversible</u> ;
3. on peut alors réaliser des opérations élémentaires supplémentaires sur les lignes, pour éliminer les coefficients au-dessus de la diagonale : on obtient une égalité du type $X = BY$ et

$$\boxed{A^{-1} = B}.$$

Exemple 60.

Inversibilité et inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et de $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition 61 (CNS d'inversibilité d'une matrice triangulaire)**.**

Une matrice triangulaire est inversible s.s.i. ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.

Admis en attendant l'algèbre linéaire : (ou alors réfléchissez bien au pivot) :

$$\text{si } T \text{ est de la forme } T = \begin{pmatrix} d_1 & * & * \\ & \ddots & * \\ & & d_n \end{pmatrix} \text{ son inverse est de la forme } T^{-1} = \begin{pmatrix} d_1^{-1} & * & * \\ & \ddots & * \\ & & d_n^{-1} \end{pmatrix}.$$

3.4 Méthode du pivot et calcul de l'inverse.

Définition 62.

Dans $M_n(\mathbb{K})$, pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on appelle **matrice de transposition**, et on note $P_{i,j}$ la matrice $P_{i,j} = I_n + E_{i,j} + E_{j,i} - E_{i,i} - E_{j,j}$.

$$P_{i,j} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & i & & j & & \end{array} \end{array} .$$

Proposition 63.

Soit $M \in M_{n,p}(\mathbb{K})$.
Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ et $P_{i,j} \in M_n(\mathbb{K})$ la matrice de transposition associée.
Soit $(k,l) \in [\![1,p]\!]^2$ et $P'_{k,l} \in M_p(\mathbb{K})$ la matrice de transposition associée.

- Faire l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ sur la matrice M revient à calculer le produit $P_{i,j}M$.
- Faire l'opération $C_k \leftrightarrow C_l$ sur la matrice M revient à calculer le produit $MP'_{k,l}$.
- La matrice $P_{i,j}$ est inversible et elle est son propre inverse.

Preuve. Soit $M \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!]$.
On va calculer le coefficient $[P_{i,j}M]_{r,s}$, avec $1 \leq r \leq n$ et $1 \leq s \leq p$:

$$[P_{i,j}M]_{r,s} = \sum_{k=1}^{n} [P_{i,j}]_{r,k} M_{k,s}.$$

- Si $r \neq i$ et $r \neq j$, tout se passe comme si on multipliait à gauche par l'identité : $[P_{i,j}]_{r,k}$ est nul sauf pour $k = r$ où il vaut 1.
- Si $r = i$, on a $[P_{i,j}]_{i,k}$ est nul sauf pour $k = j$ où il vaut 1, d'où

$$[P_{i,j}M]_{i,s} = [P_{i,j}]_{i,j}[M]_{j,s} = [M]_{j,s}.$$

  Sur la ligne i de $P_{i,j}M$, on retrouve la ligne j de M.
- De même, on a

$$[P_{i,j}M]_{j,s} = [M]_{i,s}.$$

  Sur la ligne i de $P_{i,j}M$, on retrouve la ligne j de M.

D'après ce qui précède, calculer $P_{i,j}^2$, c'est échanger les lignes i et j de $P_{i,j}$: on a bien $P_{i,j}^2 = I_n$.

$\square$

Définition 64.

Dans $M_n(\mathbb{K})$, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, on appelle **matrice de dilatation**, et on note $D_i(\lambda)$ la matrice $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$.

$$D_i(\lambda) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 &&&& \\ &&& \lambda &&& \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} &&& \uparrow & && \\ &&& i &&& \end{array} & \end{array} .$$

Proposition 65.

Soit $M \in M_{n,p}(\mathbb{K})$.
Soit $i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $D_i(\lambda) \in M_n(\mathbb{K})$ la matrice de dilatation associée dans $M_n(\mathbb{K})$.
Soit $j \in [\![1,p]\!]$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $D'_j(\lambda)$ la matrice de dilatation associée dans $M_p(\mathbb{K})$.

- Faire l'opération $L_i \leftarrow \lambda L_i$ sur la matrice M revient à calculer le produit $D_i(\lambda)M$.
- Faire l'opération $C_j \leftarrow \lambda C_j$ sur la matrice M revient à calculer le produit $MD'_j(\lambda)$.
- La matrice $D_i(\lambda)$ est inversible d'inverse $D_i\left(\frac{1}{\lambda}\right)$.

Définition 66.

Dans $M_n(\mathbb{K})$, pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \neq j$ et tout $\mu \in \mathbb{K}$, on appelle **matrice de transvection**, et on note $T_{i,j}(\mu)$ la matrice $T_{i,j}(\mu) = I_n + \mu E_{i,j}$.

$$T_{i,j}(\lambda) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 &&&& \vdots && \\ & \ddots &&& \vdots && \\ \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \mu & \cdots & \cdots \\ &&& \ddots & \vdots && \\ &&&& 1 && \\ &&&& \vdots & \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} &&&& \uparrow && \\ &&&& j && \end{array} & \end{array} .$$

Proposition 67.

Soit $M \in M_{n,p}(\mathbb{K})$.
Soient $1 \leq i \neq j \leq n$, $\mu \in \mathbb{K}$ et $T_{i,j}(\mu)$ la matrice de transvection associée dans $M_n(\mathbb{K})$.
Soient $1 \leq i \neq j \leq n$ $\mu \in \mathbb{K}$ et $T'_{k,l}(\mu)$ la matrice de transvection associée dans $M_p(\mathbb{K})$.

- Faire l'opération $L_i \leftarrow L_i + \mu L_j$ sur la matrice M revient à calculer le produit $T_{i,j}(\mu)M$.
- Faire l'opération $C_k \leftarrow C_k + \mu C_l$ sur la matrice M revient à calculer le produit $MT'_{i,j}(\mu)$.
- La matrice $T_{i,j}(\mu)$ est inversible, d'inverse $T_{i,j}(-\mu)$.

Proposition 68.

Les opérations élémentaires préservent l'inversibilité.

Méthode (calcul de l'inverse : en opérant sur l'identité en parallèle)**.**

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On va travailler par opérations élémentaires sur la matrice $(A \mid I_n) \in M_{n,2n}(\mathbb{K})$.

- On échelonne A, en faisant les opérations élémentaires sur $(A \mid I_n)$.

$$\left(\begin{array}{c|c} A & I_n \end{array}\right) \underset{\text{pivot}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{c|c} T & * \end{array}\right).$$

  La matrice A est inversible si et seulement si la matrice T l'est, c'est-à-dire si cette dernière n'a que des coefficients diagonaux non nuls.

- Dans le dernier cas, à l'aide d'opérations élémentaires, on transforme T en la matrice I_n. La matrice à droite de la membrane n'est autre que A^{-1}

$$\left(\begin{array}{c|c} T & * \end{array}\right) \underset{\text{pivot}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{c|c} I_n & A^{-1} \end{array}\right).$$

Explications. Transformer A en I_n en faisant des opérations élémentaires sur les lignes revient à multiplier A à *gauche* par des matrices de permutation, de dilatation, ou de transvection $E_1, \dots, E_N$, où $N \in \mathbb{N}$. On a

$$E_N E_{N-1} \dots E_1 A = I_n.$$

La matrice $E_N E_{N-1} \dots E_1$ est un inverse à gauche (et donc l'inverse tout court) de A. En travaillant sur la "double-matrice" $(A \mid I_n)$, on calcule ce produit au fur et à mesure, en réalisant toutes les opérations faites sur A, simultanément sur la matrice à droite de la "membrane". Schématiquement, voici la matrice avant, et après les N opérations élémentaires.

$$\left(\begin{array}{c|c} A & I_n \end{array}\right) \underset{\text{pivot}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{c|c} E_N E_{N-1} \dots E_1 A & E_N E_{N-1} \dots E_1 I_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_n & A^{-1} \end{array}\right).$$

Exemple 69.

Inversibilité et inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et de $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exemple 70.

Cet algorithme d'inversion d'une matrice de taille n a une complexité en $O(n^3)$.

Exercices

Combinaisons linéaires de matrices. Produit de matrices.

$\boxed{\textbf{20.1}}$ **[♦◇◇]** Soit θ un réel. Calculer les puissances des trois matrices définies ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin\theta \\ -1 & 0 & \cos\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0. \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sin\theta \\ -1 & 1 & \cos\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta & 1. \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1. \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{20.2}}$ **[♦♦◇]** Soient a, b deux scalaires de $\mathbb{K}$. Calculer les puissances de la matrice $\begin{pmatrix} a+b & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & a+b \end{pmatrix}$.

$\boxed{\textbf{20.3}}$ **[♦♦◇]** Soit $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$$

1. Exprimer A à l'aide d'une matrice colonne et de sa transposée.
2. Calculer les puissances de A.

$\boxed{\textbf{20.4}}$ **[♦◇◇]** Soient A et B deux matrices symétriques. Démontrer que AB est symétrique ssi $AB = BA$.

$\boxed{\textbf{20.5}}$ **[♦◇◇]** Soit A une matrice carrée de $M_n(\mathbb{C})$ et $\sigma(A)$ la somme de ses coefficients.
Notons J la matrice de $M_n(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Montrer que $JAJ = \sigma(A)J$.

$\boxed{\textbf{20.6}}$ **[♦♦◇]** Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice carrée de $M_n(\mathbb{K})$. Elle est dite centro-symétrique si

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!] \quad a_{n+1-i,n+1-j} = a_{i,j}.$$

On note $C_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices centro-symétriques de taille n.

1. Donner un exemple de matrice de $C_2(\mathbb{R})$ et de $C_3(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $C_n(\mathbb{K})$ est stable par combinaison linéaire.
3. Montrer que $C_n(\mathbb{K})$ est stable par produit.

$\boxed{\textbf{20.7}}$ **[♦◇◇]** Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$. Démontrer que $AB - BA \neq I_n$.

$\boxed{\textbf{20.8}}$ **[♦◇◇]** Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$. Justifier l'équivalence $\mathrm{tr}(A^T A) = 0 \iff A = 0_{n,n}$.

$\boxed{\textbf{20.9}}$ **[♦♦♦]** Soit un couple de matrices $(A, B) \in M_n(\mathbb{K})$ tel que

$$\forall X \in M_n(\mathbb{K}) \qquad AXB = 0.$$

Montrer que $A = 0$ ou $B = 0$.

Matrices inversibles et leurs inverses.

$\boxed{\textbf{20.10}}$ **[♦◇◇]** Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

1. Pour $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, calculer $A(\theta)A(\theta')$.
2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Justifier que $A(\theta)$ est inversible et calculer $A(\theta)^{-1}$.
3. Expliciter le morphisme de groupes qui a été croisé dans cet exercice.

$\boxed{\textbf{20.11}}$ **[♦♦◇]**

1. Soit N une matrice nilpotente, c'est à dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $N^p = 0$.
   En considérant $I_n - N^p$, montrer que $I_n - N$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de N.
2. En utilisant ce qui précède, calculer l'inverse de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Vérifier en recalculant l'inverse à l'aide du pivot.

$\boxed{\textbf{20.12}}$ **[♦♦◇]** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

On considère $M = (m_{i,j}) \in M_n(\mathbb{C})$, définie par :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!] \quad m_{i,j} = \omega^{(i-1)(j-1)}.$$

On pose $\overline{M} = (\overline{m_{i,j}})$.

1. Calculer $M\overline{M}$.
2. Justifier que M est inversible et donner M^{-1}.

$\boxed{\textbf{20.13}}$ **[♦♦◇]** Soit A une matrice inversible telle que la somme des coefficients de chaque ligne vaut s.
Démontrer que $s \neq 0$ puis que la somme des coefficients sur chaque ligne de A^{-1} vaut s^{-1}.

$\boxed{\textbf{20.14}}$ **[♦♦◇]** Dans tout l'exercice, n est un entier supérieur à 2.

1. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$ tels que

   $$M^2 + aM + bI_n = 0.$$

   Montrer que M est inversible et exprimer son inverse en fonction de M.
2. Soit $J \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.
   Calculer J^2. Montrer que $J - I_n$ est inversible et calculer son inverse.

$\boxed{\textbf{20.15}}$ **[♦♦♦]** Matrice à diagonale dominante.
Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \qquad |a_{i,i}| > \sum_{i \neq j} |a_{i,j}| \qquad \text{(diagonale dominante).}$$

Montrer que A est inversible.

$\boxed{\textbf{20.16}}$ **[♦♦♦]** Soient A et B dans $M_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = A + B$.
Montrer que A et B commutent.
