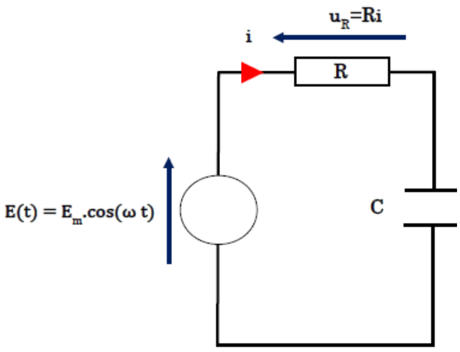
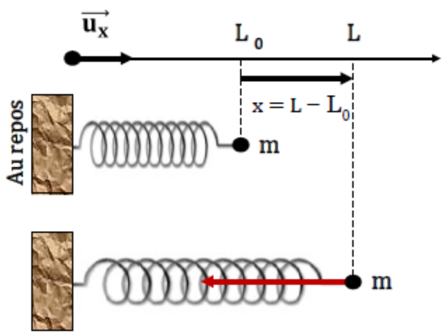
11 Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Dans ce cours, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

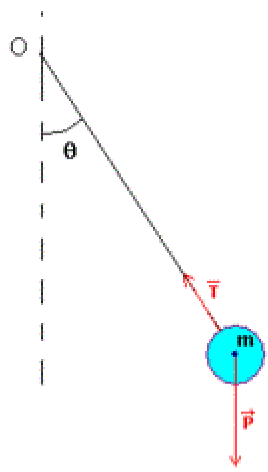
0 Notion d'équation différentielle.



Circuit RC série.



Ressort



Pendule

En physique, en chimie, en économie... on étudie parfois l'évolution, au sein d'un système, d'une quantité d'intérêt Q, dépendant d'un paramètre t (par exemple le temps). On va donc être amené à s'interroger sur la *fonction* $Q : t \mapsto Q(t)$. Les contraintes s'exerçant sur le système sont traduites à travers des équations, qui peuvent faire intervenir Q mais aussi ses dérivées successives.

Considérons trois exemples issus de la physique.

Exemple 1. Circuit RC série.

Soient une résistance R et un condensateur de capacité C branchés en série à un générateur de tension sinusoïdal imposant à ses bornes une tension $E(t) = E_m \cos(\omega t)$. On étudie la tension u aux bornes du condensateur. Si on note i le courant traversant le circuit, la loi des mailles amène $E = u + Ri$. Or, on a $i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$. D'où, pour $t \geq 0$,

$$RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) + u(t) = E_m \cos(\omega t) \tag{1}$$

Exemple 2. Masse attachée à un ressort.
Soit une masse m, attachée à un ressort ayant un coefficient de rappel k. La masse se déplace sur une surface plane, avec un coefficient de frottement fluide λ. On étudie la position x de la masse au cours du temps. Notons $\overrightarrow{a}$ son accélération. Le principe fondamental de la dynamique donne

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{N} + \overrightarrow{F}_{rappel} + \overrightarrow{F}_{frott}.$$

En dehors du poids $\overrightarrow{P}$ et de la réaction normale du support $\overrightarrow{N}$, la masse est soumise à la force de rappel $\overrightarrow{F}_{rappel} = -kx(t)\overrightarrow{u_x}$, et à une force de frottement fluide $\overrightarrow{F}_{frott} = -\lambda\overrightarrow{v} = -\lambda\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_x}$. Son accélération est $\overrightarrow{a} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\overrightarrow{u_x}$. Ainsi, en projetant l'égalité vectorielle sur $\overrightarrow{e_1}$, on obtient pour tout $t \geq 0$:

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + \lambda\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + kx(t) = 0. \tag{2}$$

Exemple 3. Pendule simple, sans frottement.
Une masse attachée à un fil non élastique, et non pesant, de longueur ℓ. La force de tension $\overrightarrow{T}$, orthogonale au vecteur vitesse, ne travaille pas, contrairement au poids $\overrightarrow{P}$. On étudie l'angle $\theta(t)$ entre la position à l'instant t et celle de repos. En dérivant une expression de l'énergie mécanique, constante ici, on peut obtenir la relation suivante, pour $t \geq 0$.

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{g}{\ell}\sin(\theta(t)) = 0, \tag{3}$$

où g est l'accélération de la pesanteur.

Les relations (1), (2) et (3) sont des **équations différentielles**. Le plus haut degré de dérivation mis en jeu dans l'équation est appelé **ordre** de l'équation. L'équation (1) est d'ordre 1 car seule la première dérivée y figure. Les équations (2) et (3) sont, elles, d'ordre 2.

On dit d'une équation différentielle qu'elle est **linéaire** si elle se présente sous la forme

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = b,$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ et b sont des fonctions. Les équations (1) et (2) sont linéaires, ce qui n'est pas le cas pour (3) à cause du sinus.

La forme générale d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 est donc

$$a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = b(t).$$

Quitte à diviser par a_1 et résoudre l'équation sur des intervalles où elle ne s'annule pas, on peut se ramener à une équation pour laquelle la fonction devant y' est constante égale à 1. C'est ainsi que dans ce cours on résoudra les équations de la forme

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t),$$

où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle de $\mathbb{R}$. On se restreint donc à l'étude de (certaines) équations différentielles linéaires d'ordre 1.

1 Ensemble des solutions d'une ED linéaire d'ordre 1.

Définition 1.

Soient $a, b : I \to \mathbb{K}$ deux applications continues sur I. On considère l'équation différentielle

$$y' + a(x)y = b(x) \qquad (E)$$

- On dit que $y : I \to \mathbb{K}$ est **solution** de (E) sur I si elle est dérivable sur I et si elle est telle que $\forall x \in I \; y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$.
- La fonction b est souvent appelée **second membre** de l'équation.
- L'**équation homogène** associée à (E) (ou équation "sans second membre") est

$$y' + a(x)y = 0 \qquad (E_0)$$

Ci-dessous, S et S_0 désignent respectivement les ensembles de solutions de (E) et (E_0).

Proposition 2 (Lien entre S et S_0)**.**

Si S est non vide, alors, en considérant $z_p \in S$ (une « solution particulière » de l'équation), on a

$$S = \{z_p + y, \quad y \in S_0\}.$$

Pour connaître *toutes* les solutions de (E), il suffit donc de

- connaître *toutes* les solutions de (E_0) $\longrightarrow$ partie 2 du cours.
- connaître *une* solution de (E) $\longrightarrow$ partie 3 du cours.

2 Résolution de l'équation homogène.

On va donner $\boxed{\text{toutes}}$ les solutions de

$$y' + a(x)y = 0 \qquad (E_0)$$

Cas particulier (Terminale) : le cas où a est une fonction constante (égale à $a \in \mathbb{K}$). On a vu que les solutions de $y' + ay = 0$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{-ax}$, où λ est une constante quelconque de $\mathbb{K}$.

Ci-dessous, on traite le cas général pour une fonction $a : I \to \mathbb{K}$.

Théorème 3.

Soit (E_0) l'équation $y' + a(x)y = 0$, où $a : I \to \mathbb{K}$ est une fonction continue sur l'intervalle I.
Soit A une primitive de a sur I. L'ensemble S_0 des solutions de (E_0) sur I est

$$S_0 = \left\{ x \mapsto \lambda e^{-A(x)} \;\mid \lambda \in \mathbb{K} \right\}.$$

On dit aussi que $x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$, où $\lambda \in \mathbb{K}$, est la *solution générale* de (E_0).

Exemple 4.

Résoudre sur $]0,1[$ l'équation $t(1-t)y' + y = 0$.

Lemme 5 (Une remarque intéressante)**.**

Si a est continue sur I, la seule solution de $y'+a(x)y=0$ qui s'annule sur I, c'est la fonction nulle.

3 Équation générale : obtenir une solution particulière.

Il s'agit ici de trouver $\boxed{\text{une}}$ solution de l'équation

$$y' + a(x)y = b(x) \qquad (E)$$

3.1 Trouver une solution à vue.

Lorsque a et b sont des <u>fonctions constantes</u> (a non nulle), notre équation a une solution constante. On a déjà croisé ce genre de situation en physique en regardant un circuit RC soumis à un échelon de tension.

Plus précisément,

$$\boxed{\text{L'équation } y' + ay = b \text{ a pour solution particulière la fonction constante } z_p : x \mapsto \frac{b}{a}.}$$

Plus généralement, lorsque b sera une fonction polynomiale de degré n, on pourra chercher une solution polynomiale de degré n.

Exemple 6.

Deviner une solution pour les équations ci-dessous

$$(1)\ y' + 2y = 1 \qquad (2)\ y' + 2y = e^x \qquad (3)\ y' + y = x.$$

3.2 Principe de superposition.

Pratique lorsque le second membre se présente comme somme de deux fonctions.

Proposition 7 (Principe de superposition)**.**

Soient a, b_1, b_2 trois fonctions continues sur I. Si
- y_1 est solution sur I de $y' + a(x)y = b_1(x) \quad (E_1)$,
- y_2 est solution sur I de $y' + a(x)y = b_2(x) \quad (E_2)$,

alors $y_1 + y_2$ est solution sur I de l'équation $y' + a(x)y = b_1(x) + b_2(x) \quad (E_3)$.

Exemple 8.

Trouver une solution de l'équation $y' + 2y = 1 + e^x$.

3.3 Méthode générale : variation de la constante.

Proposition 9 (Variation de la constante).

Si a et b sont continues sur I, l'équation $y' + a(x)y = b(x)$ possède une solution z de la forme $z = \lambda u$ où u est une solution non nulle de l'équation homogène, et λ une fonction dérivable sur I.

Preuve. (a valeur de méthode en pratique).

On cherche une solution de (E) de la forme $z : x \mapsto \lambda(x)u(x)$, où u est une solution (non nulle) de l'équation homogène (E_0) et λ une fonction dérivable sur I à choisir.

La fonction z étant dérivable sur I comme produit, on a

$$\begin{aligned} z' + az &= (\lambda u)' + a(\lambda u) \\ &= \lambda' u + \lambda u' + \lambda a u \\ &= \lambda' u + \underbrace{\lambda\,(u' + au)}_{=0}, \end{aligned}$$

où on a utilisé à la dernière ligne que u est solution de (E_0). Ainsi,

$$\begin{aligned} z \text{ est solution de } (E) \quad &\iff \quad z' + az = b \quad \text{sur } I \\ &\iff \quad \lambda' u = b \quad \text{sur } I. \end{aligned}$$

Nous avons vu plus haut que, puisque u est une solution de (E_0) qui n'est pas la fonction nulle, elle ne s'annule nulle part sur I. On peut donc écrire

$$z \text{ est solution de } (E) \quad \iff \quad \lambda' = b/u \quad \text{sur } I.$$

Notre fonction z sera donc solution si et seulement si λ est choisie parmi les primitives de b/u.

□

Exemple 10.

Résolution de $x^4 y' + 3x^3 y = 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

4 Synthèse.

Théorème 11 (de synthèse).

Soient $a : I \to \mathbb{K}$ et $b : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions continues. L'équation

$$y' + a(x)y = b(x) \quad (E)$$

a des solutions. Si z_p est une telle solution (« particulière ») et A une primitive de a sur I, alors l'ensemble des solutions de (E) est

$$S = \left\{ x \mapsto z_p(x) + \lambda e^{-A(x)}, \lambda \in \mathbb{K} \right\}.$$

Définition 12.

Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. On appelle **problème de Cauchy** la donnée d'une équation différentielle et d'une condition initiale (valeur imposée en un point)

$$\left\{\begin{array}{rcl} y' + a(x)y & = & b(x) \\ y(x_0) & = & y_0 \end{array}\right. .$$

Théorème 13 (de Cauchy-Lipschitz, cas linéaire)**.**

Soient $a, b : I \to \mathbb{K}$ continues, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$.

Le problème de Cauchy $\left\{\begin{array}{rcl} y' + a(x)y & = & b(x) \\ y(x_0) & = & y_0 \end{array}\right.$ admet une unique solution sur I.

Preuve. D'après le théorème précédent, l'équation différentielle admet des solutions. On en fixe une que l'on note z_p. Si A une primitive fixée de a sur I, alors les solutions sont les fonctions de la forme

$$y : x \mapsto z_p(x) + \lambda e^{-A(x)}.$$

Parmi ces fonctions, on veut distinguer celles qui satisfont la condition initiale. On écrit donc

$$\begin{aligned} y(x_0) = y_0 &\iff z_p(x_0) + \lambda e^{-A(x_0)} = y_0 \\ &\iff \lambda = e^{A(x_0)} \left(y_0 - z_p(x_0)\right). \end{aligned}$$

Il existe donc une unique valeur pour λ pour laquelle $y(x_0) = y_0$; notons-la λ_0.
Le problème de Cauchy possède une unique solution : la fonction $y = z_p + \lambda_0 e^{-A}$. □

Exercices

$\boxed{\textbf{11.1}}$ **[♦◇◇]** Résoudre les équations différentielles ci-dessous

1. $y' - 2y = 2$ sur $\mathbb{R}$
2. $(x^2+1)y' + xy = x$
3. $y' + \tan(x)y = \sin(2x)$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
4. $y' - \ln(x)y = x^x$ sur $\mathbb{R}_+^*$
5. $(1-x)y' - y = \dfrac{1}{1-x}$ sur $]-\infty, 1[$

$\boxed{\textbf{11.2}}$ **[♦◇◇]** Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ le problème de Cauchy $\left\{\begin{array}{rcl} y' - \dfrac{2}{x}y & = & x^2 \cos x \\ y(\pi) & = & 0 \end{array}\right.$

$\boxed{\textbf{11.3}}$ **[♦♦◇]** Trouver toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) + f(x) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

$\boxed{\textbf{11.4}}$ **[♦♦♦]** [« Recollement »]
Soit l'équation différentielle $x^2y' - y = 0$.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
2. Trouver toutes les solutions définies sur $\mathbb{R}$.
