31 Comparaison locale

Dans ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, dont a est un élément ou une borne (a peut valoir $+\infty$ ou $-\infty$). Les fonctions considérées sont définies sur I ou sur $I \setminus \{a\}$ et sont à valeurs réelles (même si des images complexes seraient possibles, après tout).

On supposera que les fonctions considérées, généralement notées f, g et h dans les définitions et propositions, ne s'annulent pas au voisinage de a sauf peut-être en a, ce qui donne un sens au quotient f/g au voisinage de a. Autoriser les fonctions à s'annuler en a permet d'écrire notamment des taux d'accroissements en a. Pour alléger les énoncés, ces hypothèses ne seront pas répétées chaque fois.

Pour ce qui concerne les suites, notées (u_n), (v_n), (w_n) dans les définitions et propositions, elles sont supposées ne plus s'annuler à partir d'un certain rang, ce qui donne un sens au quotient u/v àpdcr.

1 Trois relations de comparaison locale pour les fonctions.

1.1 Négligeabilité.

Définition 1 (Négligeabilité : fonctions)**.**

On dit que f est **négligeable** devant g **en** a si la fonction $\frac{f}{g}$ tend vers 0 en a. On note alors

$$f \underset{a}{=} o(g) \qquad \text{ou} \qquad f(x) \underset{a}{=} o(g(x)).$$

On peut dire « $f(x)$ est un petit o de $g(x)$ » en a.

Remarque. L'écriture

$$f(x) \underset{a}{=} g(x) + o(h(x))$$

s'interprète de la manière suivante : la fonction f s'écrit comme une somme de fonctions $g+\widetilde{g}$ et l'information dont on dispose sur $\widetilde{g}$, c'est que cette fonction est négligeable devant la fonction h en a.

Exemple 2.

Les exemples ci-dessous, très élémentaires pour apprivoiser la notation, sont généralisés ensuite.

$$x^2 \underset{0}{=} o(x) \qquad x \underset{+\infty}{=} o(x^2) \qquad e^x \underset{+\infty}{=} o(e^{2x}) \qquad e^{2x} \underset{-\infty}{=} o(e^x)$$

$$\ln(x) \underset{+\infty}{=} o(x) \qquad \ln(x) \underset{0_+}{=} o\left(\frac{1}{x}\right) \qquad x \underset{+\infty}{=} o(e^x) \qquad e^x \underset{-\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Proposition 3 (Puissances au voisinage de $+\infty$ et de $0+$)**.**

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \qquad \alpha < \beta \quad \Longrightarrow \quad x^\alpha \underset{+\infty}{=} o(x^\beta) \quad \text{et} \quad x^\beta \underset{0+}{=} o(x^\alpha).$$

Retenons en vue des développements limités que $x^2 \underset{0}{=} o(x)$, $x^3 \underset{0}{=} o(x^2)$, $x^4 \underset{0}{=} o(x^3)$...

Proposition 4 (Fonctions exponentielles)**.**

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad a < b \quad \Longrightarrow \quad e^{ax} \underset{+\infty}{=} o(e^{bx}) \quad \text{et} \quad e^{bx} \underset{-\infty}{=} o(e^{ax}).$$

Proposition 5 (Croissances comparées)**.**

Pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in]0, +\infty[$, on a

$$\ln^\beta(x) \underset{+\infty}{=} o(x^\alpha) \qquad x^\alpha \underset{+\infty}{=} o(e^{\gamma x}) \qquad |\ln(x)|^\beta \underset{0}{=} o(x^{-\alpha}) \qquad e^{\gamma x} \underset{-\infty}{=} o\left(|x|^{-\alpha}\right).$$

La notation $o(1)$ sera bien pratique pour désigner une quantité qui tend vers 0 :

Proposition 6 (Une nouvelle façon d'exprimer qu'une fonction tend vers 0)**.**

$$f(x) \underset{a}{=} o(1) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0.$$

Exemple 7 (on négligera souvent des constantes)**.**

Si C est une constante et $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$, alors $C \underset{a}{=} o\left(f(x)\right)$.

1.2 Domination.

Définition 8 (Domination : fonctions)**.**

On dit que f est **dominée** par g en a si la fonction $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a. On note alors

$$f \underset{a}{=} O\left(g\right) \qquad \text{ou} \qquad f(x) \underset{a}{=} O\left(g(x)\right).$$

On peut dire « $f(x)$ est un grand O de $g(x)$ » en a.

On se souvient qu'être bornée, c'est être majorée en valeur absolue... on a donc

$$f(x) = O(g(x)) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists C > 0 \;\; \exists \eta > 0 \;\; \forall x \in I \setminus \{a\} \;\; |x-a| \leq \eta \Longrightarrow |f(x)| \leq C|g(x)|.$$

Exemple 9.

$$x^2 \sin(x) \underset{+\infty}{=} O(x^2) \qquad\qquad x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{0}{=} O(x^2).$$

Proposition 10 (Un petit o est un grand O)**.**

$$f(x) \underset{a}{=} o(g(x)) \quad \Longrightarrow \quad f(x) \underset{a}{=} O(g(x))$$

Proposition 11 (Une nouvelle façon d'exprimer qu'une fonction est bornée localement)**.**

$$f(x) \underset{a}{=} O(1) \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ bornée au voisinage de } a$$

1.3 Équivalence.

Définition 12 (Équivalence de fonctions)**.**

On dit que f est **équivalente à** g **en** a si la fonction $\frac{f}{g}$ tend vers 1 en a. On note alors

$$f(x) \underset{a}{\sim} g(x).$$

Remarque. Si $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$, on dit que $g(x)$ est un **équivalent** de $f(x)$ au voisinage de a. Lorsqu'on cherche « un équivalent » de $f(x)$, on veut une fonction équivalente à f qui soit *plus simple* que f.

Théorème 13 (Lien entre $\sim$ et $=$)**.**

$$f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \iff f(x) \underset{a}{=} g(x) + o(g(x))$$

Remarque. Il sera important de savoir traduire l'équivalence à l'aide d'une égalité, notamment pour travailler avec des sommes (on ne pourra pas sommer des équivalents).

Exemple 14 (Obtenir un équivalent)**.**

Donner un équivalent en $+\infty$ ainsi qu'en 0 de la fonction $x \mapsto x^2 + \ln(x) + 1$.

Donner un équivalent en $+\infty$ ainsi qu'en 0 et $-\infty$ de de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x} + x + e^x + e^{2x}$.

Deux rédactions possibles :
- factoriser par le terme prépondérant et faire apparaître un facteur tendant vers 1,
- négliger le négligeable.

Exemple 15 (Équivalent de la différence)**.**

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ et telle que

$$f(x) = \underset{+\infty}{=} x + 2\ln(x) + 3\ln(\ln(x)) + o\left(\ln(\ln(x))\right).$$

On a

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} x \qquad f(x) - x \underset{+\infty}{\sim} 2\ln(x) \qquad f(x) - x - 2\ln(x) \underset{+\infty}{\sim} 3\ln(\ln(x))$$

Proposition 16.

L'équivalence en a est une relation d'équivalence sur l'ensemble des fonctions ne s'annulant pas au voisinage de a sauf peut-être en a.

Proposition 17 (Limite finie <u>non nulle</u>).

Soit $\ell \in \mathbb{R}^*$.

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \quad \text{si et seulement si} \quad f(x) \underset{a}{\sim} \ell$$

Exemple 18 (Un premier tabou).

Tendre vers 0, ce n'est pas *être équivalent à zéro* : ce qui est écrit en italique n'a aucun sens.

⚠ **Pas d'équivalent à** 0. ⚠

Proposition 19 (Fonctions polynomiales et fractions rationnelles).

Soient $(a_0, \ldots, a_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ et $(b_0, \ldots, b_q) \in \mathbb{R}^{q+1}$ tels que $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$.

$$a_p x^p + \ldots + a_1 x + a_0 \underset{x\to\pm\infty}{\sim} a_p x^p \quad \text{(terme de plus haut degré)}$$

$$\frac{a_p x^p + \ldots + a_1 x + a_0}{b_q x^q + \ldots + b_1 x + b_0} \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \frac{a_p x^p}{b_q x^q} \quad \text{(termes de plus haut degré)}$$

Proposition 20 (Obtenir un équivalent à l'aide d'un encadrement).

Si on a l'encadrement $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ au voisinage de a et si $f(x) \underset{a}{\sim} h(x)$, alors

$$f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \underset{a}{\sim} h(x).$$

Exemple 21.

$$\lfloor x \rfloor \underset{+\infty}{\sim} x.$$

Proposition 22 (L'équivalence préserve le signe).

Si deux fonctions sont équivalentes en a, alors elles ont le même signe au voisinage de a.

Proposition 23 (L'équivalence préserve la limite).

$$f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \ \text{ et } \ f(x) \underset{a}{\to} L \in \overline{\mathbb{R}} \quad \Longrightarrow \quad g(x) \underset{a}{\to} L.$$

2 Règles de calcul.

2.1 Jongler avec les o et les O.

Tous les résultats ci-dessous demeurent vrais lorsque o est remplacé par O.

Proposition 24 (Multiplication d'un négligeable par une constante, une suite, une fonction)**.**

1. Les constantes multiplicatives sont absorbées et digérées par o : si $\lambda \in \mathbb{R}$,
$$\lambda \cdot o(f) \underset{a}{=} o(f).$$
2. Les fonctions sont absorbées (mais *pas* digérées) par o : si g est une fonction,
$$g \cdot o(f) \underset{a}{=} o(gf).$$

Proposition 25 (Somme de deux négligeables)**.**

$$o(f) + o(f) \underset{a}{=} o(f).$$

Proposition 26 (Transitivité de la négligeabilité)**.**

$$f \underset{a}{=} o(g) \quad \text{et} \quad g \underset{a}{=} o(h) \quad \Longrightarrow \quad f = o(h).$$

Notamment $o\left(o(f)\right) \underset{a}{=} o(f)$.

Proposition 27 (On est négligeable par rapport à toutes les fonctions équivalentes)**.**

$$f = o(g) \quad \text{et} \quad g \sim h \quad \Longrightarrow \quad f = o(h).$$

Proposition 28 (Substitution dans un négligeable)**.**

Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ et $u : J \to I$, ainsi que a élément ou borne de I, b élément ou borne de J.

$$\left(f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x)) \quad \text{et} \quad u(t) \underset{t \to b}{\to} a \right) \quad \Longrightarrow \quad f\left(u(t)\right) \underset{t \to b}{=} o\left(g\left(u(t)\right)\right).$$

Exemple 29.

$$\ln(x) \underset{x \to +\infty}{=} o(x) \quad \text{donc} \quad \ln(\ln(x)) \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\ln(x)\right)$$

2.2 Ce qu'on peut faire avec $\sim$, et ce qu'on ne peut pas faire.

Proposition 30 (Produit d'équivalents, quotient d'équivalents)**.**

$$f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \ \text{ et } \ f^*(x) \underset{a}{\sim} g^*(x) \quad \Longrightarrow \quad f(x)f^*(x) \underset{a}{\sim} g(x)g^*(x) \ \text{ et } \ \frac{f(x)}{f^*(x)} \underset{a}{\sim} \frac{g(x)}{g^*(x)}.$$

Exemple 31 (Donner un exemple justifiant chaque tabou)**.**

⚠ **On ne somme pas des équivalents.** ⚠

⚠ **On ne compose pas par une fonction dans un équivalent.** ⚠

Il est possible, en revanche, de *substituer*, c'est-à-dire de composer « à droite ».

Proposition 32 (Substitution dans un équivalent)**.**

Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ et $u : J \to I$, ainsi que a élément ou borne de I, b élément ou borne de J.

$$\left(f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \ \text{ et } \ u(t) \underset{t \to b}{\to} a \right) \quad \Longrightarrow \quad f\left(u(t)\right) \underset{t \to b}{\sim} g\left(u(t)\right).$$

3 Le cas des suites.

On adapte rapidement pour les suites le vocabulaire et les principes dégagés pour les fonctions. On rappelle que dans ce qui suit, u et v seront des suites qui ne s'annulent pas à partir d'un certain rang.

Définition 33 (Négligeabilité et domination : suites)**.**

On dit que (u_n) est **négligeable** devant (v_n) si $\frac{u_n}{v_n} \to 0$. On note alors $u_n = o(v_n)$

On dit que (u_n) est **dominée** par (v_n) si $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée. On note alors $u_n = O(v_n)$.

On dit que (u_n) est **équivalente** à (v_n) si $\dfrac{u_n}{v_n} \to 1$. On note alors $u_n \sim v_n$.

Pour les suites, rien besoin d'écrire sous le symbole $=$ ou le symbole $\sim$: l'horizon, c'est forcément $n \to +\infty$.

Les principes établis pour les fonctions se généralisent aux suites. En particulier, les produits et quotients d'équivalents sont possibles, mais pas les sommes. Pour travailler avec ces dernières, on rappelle que

$$\boxed{u_n \sim v_n \quad \Longleftrightarrow \quad u_n = v_n + o(v_n).}$$

Plutôt que de récrire les théorèmes dans le cas des suites, on va se concentrer sur une collection d'exemples.

Énonçons tout de même quelques résultats relatifs aux suites géométriques et un résultat de substitution.

Proposition 34 (Suites géométriques).

$$\forall (p,q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \qquad |p| < |q| \quad \Longrightarrow \quad p^n = o\left(q^n\right).$$

Proposition 35 (Croissances comparées).

Soient $a \in \mathbb{R}$, $p > 1$ et $q \in]-1, 1[$.

$$n^a = o\left(p^n\right) \quad \text{et} \quad q^n = o(n^a).$$

Proposition 36 (Substitution dans un équivalent (valable avec un o ou un O)).

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et a un élément de I ou une borne de I. Soit $(u_n) \in I^{\mathbb{N}}$.

$$\left(f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \;\text{ et }\; u_n \to a \right) \quad \Longrightarrow \quad f\left(u_n\right) \sim g\left(u_n\right).$$

Exemple 37.

$$n + 1 \sim n \qquad \text{et plus généralement } (n+1)^\alpha \sim n^\alpha \text{ pour tout réel } \alpha$$

Exemple 38.

$$\ln(n+1) \sim \ln(n) \quad \text{et} \quad e^{n+1} \not\sim e^n.$$

Exemple 39.

Donner un équivalent pour

$$\sum_{k=1}^{n} k \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3.$$

Exemple 40 (Négliger le négligeable).

Donner un équivalent simple pour les termes généraux de suites ci-dessous :

$$\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \quad 2^n + n^2 \quad \frac{\sqrt{n}}{\ln(n)} + \ln(n).$$

$$\ln(n+1) + \ln(\ln(n)), \quad 2^{-n} + 3^{-n} + 4^{-n}, \quad 2^n + \mathrm{ch}(n), \quad e^{\sqrt{n}} + n^6.$$

4 Techniques de calculs d'équivalents.

4.1 Approximation du premier ordre et équivalents usuels.

Dans le cours sur la dérivabilité, on a démontré que si f est une fonction dérivable en a, alors il existe une fonction ε qui tend vers 0 en a telle que

$$f(a+h) \underset{0}{=} f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h),$$

ce que l'on peut désormais écrire

$$f(a+h) \underset{0}{=} f(a) + hf'(a) + o(h).$$

On appelle cette écriture un développement limité au voisinage de a à l'ordre 1. Nous le récrivons

$$f(a+h) - f(a) \underset{0}{=} f'(a)h + o(h).$$

Ainsi, si $f'(a) \neq 0$, on peut écrire

$$f(a+h) - f(a) \underset{0}{\sim} f'(a)h.$$

Ceci nous permet d'écrire une petite collection de développements limités à l'ordre 1 en 0, puis la même collection exprimée à l'aide d'équivalents en 0 pour des fonctions usuelles dérivables en ce point. Pour la fonction cos, on donne exceptionnellement (et en avant-première !) le DL à l'ordre 2.

Corollaire 41 (Développements limités usuels à l'ordre 1 en 0)**.**

$$\sin x \underset{0}{=} x + o(x) \qquad \tan x \underset{0}{=} x + o(x) \qquad \cos x \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$e^x \underset{0}{=} 1 + x + o(x) \qquad \ln(1+x) \underset{0}{=} x + o(x)$$

$$\arcsin x \underset{0}{=} x + o(x) \qquad \arctan x \underset{0}{=} x + o(x) \qquad (1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \alpha x + o(x) \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

Corollaire 42 (Équivalents usuels en 0)**.**

$$\sin x \underset{0}{\sim} x \qquad \tan x \underset{0}{\sim} x \qquad 1 - \cos x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

$$e^x - 1 \underset{0}{\sim} x \qquad \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$$

$$\arcsin x \underset{0}{\sim} x \qquad \arctan x \underset{0}{\sim} x \qquad (1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

Exemple 43.

Pourquoi l'écriture ci-dessous est-elle vraie et inintéressante ?

$$\sqrt{1+x} \underset{0}{\sim} 1 + \frac{1}{2}x.$$

Exemple 44.

Donner un équivalent en 0 de
$$f : x \mapsto \frac{e^{3x} - 1}{\ln(1 + x^2)}.$$

Exemple 45.

Calculer
$$\lim_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}.$$

Exemple 46 (Un exemple ailleurs qu'en 0)**.**

Justifier que
$$\ln(1 + \cos(t)) \underset{\frac{\pi}{2}}{\sim} \frac{\pi}{2} - t.$$

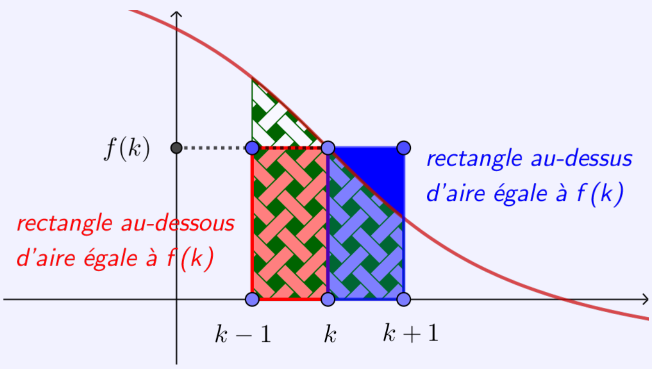
Exemple 47 (Comme un besoin de développement limité)**.**

Donner un équivalent au voisinage de 0 pour $f : x \mapsto e^x - (1 + x)^{\frac{1}{3}}$.
Pourquoi est-on incapable de faire pareil pour $g : x \mapsto e^x - (1 + x)$? De quoi avons-nous besoin ?

4.2 Comparaisons somme/intégrale.

Lemme 48 (Comparer une somme partielle à des intégrales)**.**

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante. Alors,
$$\forall k \geq n_0 + 1 \qquad \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t.$$



Un encadrement analogue est possible pour une fonction croissante, on saura l'écrire si besoin.

Méthode (Encadrer une somme).

Soit $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ décroissante. On sait que pour $k \geq n_0$:

$$\text{pour tout} k \geq n_0 : \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \leq f(k) \qquad \text{pour tout } k \geq n_0 + 1 : f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t.$$

En sommant ces inégalités on obtient pour $n \geq n_0$

$$\sum_{k=n_0}^{n} \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n_0}^{n} f(k) \leq f(n_0) + \sum_{k=n_0+1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t.$$

Par la relation de Chasles :

$$\int_{n_0}^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n_0}^{n} f(k) \leq f(n_0) + \int_{n_0}^{n} f(t)\mathrm{d}t.$$

Si les deux membres encadrant la somme sont équivalents, on obtient un équivalent de la somme. Cette méthode sera particulièrement utile lorsqu'on connaît une primitive de la fonction f !

Exemple 49.

Démontrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n) \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \sim \frac{2}{3} n\sqrt{n}.$$

5 Équivalents classiques et exemples de développements asymptotiques.

On appelle **développement asymptotique** à $p+1$ termes d'une fonction f au voisinage d'un point a une écriture du type

$$f(x) \underset{a}{=} \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots + \varphi_p(x) + o\left(\varphi_p(x)\right),$$

où p est un entier naturel $\varphi_0, \ldots, \varphi_p$ des fonctions telles que

$$\forall k \in [\![0, p-1]\!] \quad \varphi_k(x) \underset{x \to a}{=} o\left(\varphi_{k+1}(x)\right)$$

Les développements limités, qu'on étudiera au prochain chapitre, sont des exemples de développement asymptotique.

On appelle développement asymptotique à $p+1$ termes d'une suite (u_n) (au voisinage de l'infini nécessairement) une écriture du type

$$u_n = \varphi_n^{(0)} + \varphi_n^{(1)} + \varphi_n^{(2)} + \cdots + \varphi_n^{(p)} + o\left(\varphi_n^{(p)}\right),$$

où p est un entier naturel et $\varphi^{(0)}, \cdots, \varphi^{(p)}$ des suites telles que

$$\forall k \in [\![0, p-1]\!] \quad \varphi_n^{(k)} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\varphi_n^{(k+1)}\right)$$

Exemple 50 (Un développement asymptotique).

Soit $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 4x + 1}$. Déterminer trois réels a, b et c tels que

$$f(x) \underset{+\infty}{=} ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

5.1 Somme de termes d'une suite convergente.

Le résultat ci-dessous découle directement du théorème de Cesaro, démontré dans notre cours sur les suites.

Corollaire 51 (du lemme de Cesaro).

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite qui converge vers un un nombre réel ℓ <u>non nul</u>. Alors

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \sim n\ell.$$

Exemple 52.

Soit u la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} = u_n \, e^{-u_n} \end{cases}$$

1. Montrer que u converge. Préciser la limite de u.
2. Déterminer la limite de $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$ puis un équivalent de u_n.

5.2 Série harmonique et constante d'Euler.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Nous avons démontré plus haut que

$$H_n \sim \ln(n) \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad H_n = \ln(n) + o\left(\ln(n)\right).$$

Le résultat qui vient est plus précis.

Théorème 53 (Série harmonique et constante d'Euler).

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
Il existe une constante strictement positive appelée **constante d'Euler** et notée γ telle que

$$H_n = \ln(n) + \gamma + o(1).$$

La constante d'Euler a pour valeur approchée $0,577215$. On ignore si ce nombre est rationnel ou irrationnel.

Avec un peu plus de travail (et le cours sur les séries) on peut établir le résultat plus fin suivant (un développement asymptotique)à quatre termes :

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

5.3 Équivalent des intégrales de Wallis.

Exemple 54.

On définit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ le nombre

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\mathrm{d}x.$$

1. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$

2. Montrer que la suite (W_n) est décroissante, et n'a pas de terme nul.
   À l'aide d'un encadrement, montrer que $W_{n+1} \sim W_n$.
3. Démontrer les égalités suivantes pour $n \in \mathbb{N}$:

$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

4. En donnant une expression explicite du quotient $\frac{W_{2n}}{W_{2n+1}}$, montrer la *formule de Wallis* :

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}.$$

5. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $w_n = (n+1)W_{n+1}W_n$ est constante et en déduire

$$W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

5.4 Formule de Stirling.

Étape 1. L'équivalent sans la constante multiplicative.

Lemme 55.

Il existe une constante C dans $]0, +\infty[$ telle que

$$n! \sim C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Principales étapes de la démonstration.

- On considère la suite u définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \ln\left(\frac{n^n\sqrt{n}}{e^n n!}\right).$$

- Grâce au développement limité $\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ (admis ici) on obtient

$$u_{n+1} - u_n \sim \frac{1}{12n^2},$$

ce qui donne

$$0 \leq u_{k+1} - u_k \leq \frac{1}{k(k+1)} \qquad \text{à.p.d.c.r.}$$

- Notons n_0 un rang à partir duquel l'inégalité ci-dessus est vraie. Grâce au théorème de la limite monotone, on établit la convergence de

$$\left(\sum_{k=n_0}^{n}(u_{k+1}-u_k)\right)_{n\geq n_0}$$

- Par télescopage, on en déduit que u est convergente.

- La suite de terme général e^{-u_n} converge vers une constante strictement positive, CQFD.

Étape 2. Calcul de la constante à l'aide des intégrales de Wallis.

Lemme 56.

La constante C de la proposition 55 vaut $\sqrt{2\pi}$.

Principales étapes de la démonstration.

- Pour $n \in \mathbb{N}$, rappelons que

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

- Or, par quotient d'équivalents, en utilisant le lemme 55,

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{\sqrt{2}}{C\sqrt{n}}2^{2n}.$$

- En confrontant les deux équivalents obtenus pour $\binom{2n}{n}$, on obtient $\boxed{C = \sqrt{2\pi}}$.

Théorème 57 (Formule de Stirling)**.**

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Corollaire 58 (La formule de Stirling écrite comme un développement asymptotique).

$$\ln(n!) = n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(n) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + o(1).$$

5.5 Suites définies par récurrence.

Exemple 59.

Soit (u_n) une suite définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \ln(n + u_n)$.

1. Montrer que $u_n \to +\infty$.
2. Montrer que $\forall n \geq 1\ u_n \leq \ln(2n)$. En déduire que $u_n \sim \ln(n)$.
3. Donner un développement asymptotique à deux termes de (u_n).

5.6 Suites définies implicitement.

Exemple 60.

On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x + \ln(x) - n = 0$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation possède une unique solution, notée x_n.
2. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge
3. Donner un équivalent de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.
4. Donner enfin un développement asymptotique à trois termes.

Exercices

31.1 **[♦◇◇]** Soient deux fonctions f et g définies au voisinage d'un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et telles que

$$f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \quad \text{et} \quad f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty.$$

Démontrer que $\ln(f(x)) \underset{a}{\sim} \ln(g(x))$.

31.2 **[♦◇◇]** On fixe un entier $p \in \mathbb{N}$. Donner un équivalent quand $n \to +\infty$ de $\binom{n}{p}$.

31.3 **[♦◇◇]** Prouver que $\sum_{k=1}^{n} \ln(k) \sim n\ln(n)$ et que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \sim \ln(\ln(n))$.

31.4 **[♦♦◇]** Prouver que $\sum_{k=1}^{n} e^{k^2} \sim e^{n^2}$.

$\boxed{31.5}$ **[♦♦◇]** Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_2^x \ln(\ln(t))\mathrm{d}t$.

1. Justifier que la fonction F est bien définie sur $]1, +\infty[$.
2. Donner un équivalent de F en $+\infty$.

$\boxed{31.6}$ **[♦♦◇]** Soient a et b dans $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

$\boxed{31.7}$ **[♦♦◇]** Donner un équivalent simple en $+\infty$ de $\tan\left(\frac{\pi x}{2x+1}\right)$.

$\boxed{31.8}$ **[♦◇◇]** Soit $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{1-x^2}$, définie sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

1. Donner un équivalent de f en 0.
2. Donner un équivalent de f en $+\infty$. Prouver que $f(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$.
3. Donner un équivalent de f en 1.

$\boxed{31.9}$ **[♦♦◇]** Équivalent d'une suite d'intégrales

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)\mathrm{d}x$.

1. Calculer $I_n + I_{n+2}$ pour un entier naturel n donné.
2. Montrer que (I_n) est décroissante. En déduire l'inégalité $I_{n+2} + I_{n+2} \leq I_n + I_{n+2} \leq I_n + I_n$, valable pour tout n.
3. En déduire un équivalent de I_n.

$\boxed{31.10}$ **[♦♦◇]** [Développement asymptotique d'une suite définie par récurrence]

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\lim u_n = +\infty$.
2. Montrer que $n - 1 \leqslant u_n \leqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis en déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
3. En déduire que $u_n = n - \frac{1}{2} + o(1)$.

$\boxed{31.11}$ **[♦♦♦]** Équivalent d'une suite définies implicitement]

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que l'équation $x - 1 - \ln(x + n) = 0$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$, qu'on notera x_n.
2. Démontrer que $x_n \sim \ln(n)$.

$\boxed{31.12}$ **[♦♦♦]** Équivalents pour deux suites définie implicitement

1. Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = x - \ln(x)$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un couple unique $(u_n, v_n) \in]0, 1] \times [1, +\infty[$ tel que $f(u_n) = f(v_n) = n$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 et que $u_n \sim e^{-n}$.
4. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$ et que $v_n \sim n$.
