Exercice. Quelques calculs de distances dans $M_n(\mathbb{R})$.

L'énoncé rappelle la définition du produit scalaire canonique sur $M_n(\mathbb{R})$ en utilisant la forme compacte avec la trace. Rappelons l'expression plus explicite ci-dessous : pour $A=(a_{i,j})$ et $B=(b_{i,j})$ deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$, on a

$$\langle A,B\rangle=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}b_{i,j}.$$

1. On a $d(T,I_n)=\|T-I_n\|$. Calculons cette norme. La matrice $T-I_n$ a ses coefficients égaux à 1 strictement sur la diagonale, égaux sur la diagonale et en dessous. On a

$$\|T-I_n\|^2=\sum_{i<j}1^2=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1}1=\sum_{j=1}^{n}(j-1)=\frac{(n-1)n}{2}.$$

On a donc a $\boxed{d(T,I_n)=\sqrt{\frac{(n-1)n}{2}}}$.

2. La matrice T... est triangulaire supérieure ! Ainsi, T coïncide avec son projeté orthogonal sur le sous-espace des matrices triangulaires supérieures, et la distance de T à ce sous-espace est nulle.

3. (a) L'application $s: M\mapsto M^T$ est une involution linéaire et donc une symétrie vectorielle sur $M_n(\mathbb{R})$. On a donc

$$M_n(\mathbb{R})=\mathrm{Ker}(s-\mathrm{id})\oplus\mathrm{Ker}(s+\mathrm{id})\quad\text{soit}\quad\boxed{M_n(\mathbb{R})=S_n(\mathbb{R})\oplus A_n(\mathbb{R})}.$$

Pour toute matrice M dans $M_n(\mathbb{R})$, on se souvient

$$M=\underbrace{\frac{1}{2}(M+M^T)}_{\in S_n(\mathbb{R})}+\underbrace{\frac{1}{2}(M-M^T)}_{\in A_n(\mathbb{R})}.$$

(*si on ne s'en souvient pas, il faut revenir à la preuve de la supplémentarité par analyse-synthèse*)

(b) Soit $S\in S_n(\mathbb{R})$ et $A\in A_n(\mathbb{R})$. On a

$$\langle S,A\rangle=\mathrm{tr}(S^TA)=\mathrm{tr}(SA).$$

Mais on a aussi par symétrie

$$\langle S,A\rangle=\langle A,S\rangle=\mathrm{tr}(A^TS)=-\mathrm{tr}(AS)=-\mathrm{tr}(SA),$$

(en utilisant que $A^T=-A$ puis une propriété de la trace pour la dernière égalité). Ceci démontre que $\langle S,A\rangle=-\langle S,A\rangle$, ce qui amène $\underline{\langle S,A\rangle=0}$. On déduit de ce qui précède que $S_n(\mathbb{R})\subset A_n(\mathbb{R})^{\perp}$.
De plus, $\dim A_n(\mathbb{R})^{\perp}=n^2-\dim A_n(\mathbb{R})=\dim S_n(\mathbb{R})$.
Avec une inclusion et l'égalité des dimensions, on conclut que

$$\boxed{A_n(\mathbb{R})^{\perp}=S_n(\mathbb{R})}.$$

(c) La décomposition de T sur $S_n(\mathbb{R})\oplus A_n(\mathbb{R})$ s'écrit $T=S+A$, où $S=\frac{1}{2}(M+M^T)$ et $A=\frac{1}{2}(M-M^T)$. D'après la question précédente, la matrice S n'est autre que le projeté orthogonal de T sur $S_n(\mathbb{R})$. On a donc

$$d(T,S_n(\mathbb{R}))=\|T-S\|=\|A\|.$$

$$\text{Or, } A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&\cdots&1\\-1&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&1\\-1&\cdots&-1&0\end{pmatrix},\quad\text{d'où}\quad\|A\|^2=\frac{1}{4}(n^2-n).$$

On en déduit que $\boxed{d(T,S_n(\mathbb{R}))=\sqrt{\frac{(n-1)n}{4}}}$.

Puisque $I_n\in S_n(\mathbb{R})$, il est cohérent d'avoir $d(T,I_n)\geq d(T,S_n(\mathbb{R}))$.

4. (a) On remarque que

$$H=\left\{M\in M_n(\mathbb{R})\ \mid\ \mathrm{tr}(I_n^TM)=0\right\}=\{I_n\}^{\perp}=\mathrm{Vect}(I_n)^{\perp}.$$

On a donc $H^{\perp}=(\mathrm{Vect}(I_n)^{\perp})^{\perp}$.
Puisque l'espace est de dimension finie, $\boxed{H^{\perp}=\mathrm{Vect}(I_n)}$.
Le sous-espace H est bien un hyperplan : c'est le supplémentaire d'une droite.

(b) Il est plus facile de projeter sur $H^{\perp}$ que sur l'hyperplan H.
En effet, $H^{\perp}$ est une droite dont $(\frac{I_n}{\|I_n\|})$ est une base orthonormée. On a donc

$$p_{H^{\perp}}(T)=\langle T,\tfrac{I_n}{\|I_n\|}\rangle\tfrac{I_n}{\|I_n\|}=\frac{\langle T,I_n\rangle}{\|I_n\|^2}I_n.$$

$$d(T,H)=\|p_{H^{\perp}}(T)\|=\frac{|\mathrm{tr}(T)|}{\|I_n\|}=\frac{n}{\sqrt{n}}\quad\text{soit}\quad\boxed{d(T,H)=\sqrt{n}}.$$

Exercice 2. Marche aléatoire et distance à l'origine.

1. Pour tout $\omega \in \Omega$, $S_{2n+1}(\omega)$ est un nombre impair (somme d'un nombre impair de 1 et de -1. On a donc $P(S_{2n+1} = 0) = 0$.

2. (a) On a
$$\frac{S_n + n}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_i + 1}{2}.$$
Pour $i \in [\![1, n]\!]$, la variable $\frac{X_i+1}{2}$ suit $\underline{\text{une loi } \mathcal{B}(\frac{1}{2})}$.
De plus, les variables $(\frac{X_i+1}{2})_{1\leq i\leq n}$ sont $\underline{\text{indépendantes}}$ car les X_i le sont.
On en déduit que la somme $\frac{S_n+n}{2}$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$.

(b) On a (espérance usuelle)
$$E\left(\frac{S_n + n}{2}\right) = n \cdot \tfrac{1}{2}.$$
Or, par linéarité de l'espérance $E\left(\frac{S_n+n}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(E(S_n) + n\right)$.
On en déduit que $\boxed{E(S_n) = 0}$.
On a aussi (variance usuelle),
$$V\left(\frac{S_n + n}{2}\right) = n \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = \frac{n}{4}.$$
Or, par propriété de la variance, $V\left(\frac{S_n+n}{2}\right) = \frac{1}{4}V(S_n)$.
On en déduit que $\boxed{V(S_n) = n}$.

(c) On a, en utilisant la loi binomiale,
$$P(S_{2n} = 0) = P\left(\frac{S_{2n} + 2n}{2} = n\right) = \binom{2n}{n} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-n} = \frac{1}{2^{2n}} \cdot \binom{2n}{n}.$$
On a donc
$$P(S_{2n} = 0) = \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{(2n)!}{n!n!} \sim \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{\sqrt{2\pi 2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2\pi n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

3. (a) Pour $k \geq 1$, on a
$$|k+1| + |k-1| = 2|k| + 2\delta_{k,0} = k + 1 + k - 1 = 2|k| + 2 \cdot 0.$$
Pour $k \leq -1$, on a
$$|k+1| + |k-1| = 2|k| + 2\delta_{k,0} = -k - 1 - (k-1) = -2k = 2|k| + 2 \cdot 0.$$
Enfin pour $k = 0$, on vérifie que
$$|0+1| + |0-1| = 2 \cdot |0| + 2 \cdot 1.$$

(b) On va appliquer la formule du transfert à (S_n, X_{n+1}). Notons que S_n et X_{n+1} sont indépendantes, d'après le lemme des coalitions. On calcule
$$\begin{aligned}
E\left(|S_{n+1}|\right) &= E\left(|S_n + X_{n+1}|\right) \\
&= \sum_{i\in S_n(\Omega)} \sum_{j\in X_{n+1}(\Omega)} P(S_n = i, X_{n+1} = j)|i+j| \\
&= \sum_{i\in S_n(\Omega)} P(S_n = i) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(|i+1| + |i-1|\right) \\
&\underset{3.(a)}{=} \sum_{i\in S_n(\Omega)} P(S_n = i) \cdot \left(|i| + \delta_{i,0}\right) \\
&= \sum_{i\in S_n(\Omega)} P(S_n = i)|i| + \sum_{i\in S_n(\Omega)} P(S_n = i)\delta_{i,0} \\
&= E\left(|S_n|\right) + P(S_n = 0).
\end{aligned}$$

(c) Facile en utilisant l'expression avec les factorielles de la question 2(c).

(d) Récurrence.

(e) L'équivalent pour $E(|S_{2n}|)$ est celui pour $E(|S_{2n+1}|)$ (ces deux espérances sont égales...) On en déduit ce (beau !) résultat sur la distance moyenne du marcheur à l'origine :
$$\boxed{E\left(|S_n|\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2n}{\pi}}}.$$