Problème. Polynômes de Tchebychev et inégalité de Bernstein.

....

Partie A Étude des polynômes de Tchebychev.

On définit par récurrence une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$:

$$T_0 = 1 \quad T_1 = X$$
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

1. *Premières propriétés.* Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Calculer T_2, T_3 et T_4.
   (b) Montrer que T_n est un polynôme de degré n.
   (c) Déterminer (en justifiant) le coefficient dominant de T_n.
   (d) Montrer que $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$.
   (e) Démontrer que tout polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ s'écrit comme une combinaison linéaire des polynômes $(T_0, \ldots, T_n)$.

2. *La relation fondamentale*
   (a) Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que
   $$T_n\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right).$$
   (b) En déduire que
   $$\forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad T_n(\cos\alpha) = \cos(n\alpha) \qquad ❤$$
   (c) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on ait $P(\cos\alpha) = \cos(n\alpha)$. Montrer que $P = T_n$.

3. *Factorisation de T_n*
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) En utilisant ❤ , déterminer les $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $\cos(\alpha)$ est racine de T_n.
   (b) Factoriser T_n en produit d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

4. *Calcul des bornes* $\sup_{x\in[-1,1]} |T_n(x)|$ *et* $\sup_{x\in[-1,1]} |T_n'(x)|$
   (a) En utilisant la relation ❤, justifier que
   $$\sup_{x\in[-1,1]} |T_n(x)| = 1.$$
   (b) En utilisant la relation ❤, établir que
   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \alpha \in]0,\pi[\quad T_n'(\cos\alpha) = n\frac{\sin(n\alpha)}{\sin\alpha}.$$
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n'(1) = n^2$.
   (d) En raisonnant par récurrence, montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad |\sin(n\alpha)| \leq n\,|\sin(\alpha)|\,.$$
   (e) Conclure que
   $$\sup_{x\in[-1,1]} \left|T_n'(x)\right| = n^2.$$

5. *Un théorème de Tchebychev.*
   Soit P un polynôme unitaire de degré $n \in \mathbb{N}^*$. On souhaite démontrer que
   $$\sup_{x\in[-1,1]} |P(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}.$$
   On raisonne par l'absurde et on suppose que $\sup\limits_{x\in[-1,1]} |P(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}$.
   On pose $Q := P - \frac{1}{2^{n-1}}T_n$, où T_n est le polynôme de Tchebychev d'ordre n, ainsi que $x_k = \cos\frac{k\pi}{n}$ pour $0 \leq k \leq n$.

   (a) Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Calculer $T_n(x_k)$.
   Pour $0 \leq k \leq n-1$, justifier que $Q(x_k)$ et $Q(x_{k+1})$ ne sont pas de même signe, et sont non nuls.
   (b) En déduire que le polynôme Q possède n racines deux à deux distinctes.
   (c) Exhiber une contradiction.

Intermède Polynômes trigonométriques.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\exists\,(a_0,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n) \in \mathbb{R}^{2n+1} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\right).$$

Il s'agit de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ et bornées. L'objectif de la partie B sera de démontrer une inégalité concernant les bornes $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)|$ et $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$.

6. Vérifier que si $f \in \mathcal{S}_n$, alors $f' \in \mathcal{S}_n$.

7. Démontrer que pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, la fonction $f : t \mapsto P(\cos t)$ appartient à $\mathcal{S}_n$.
Indication : on pourra utiliser 1-(e)

8. Soit $f \in \mathcal{S}_n$. Montrer qu'il existe $U \in \mathbb{C}_{2n}[X]$ tel que,

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f(t) = \mathrm{e}^{-int} U\left(\mathrm{e}^{it}\right).$$

Partie B Inégalité de Bernstein.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
L'objectif de cette partie B est de prouver l'inégalité de Berstein :

$$\forall f \in \mathcal{S}_n \quad \sup_{t\in\mathbb{R}} \left|f'(t)\right| \leq n \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|.$$

9. Soit $A \in \mathbb{C}_{2n}[X]$, scindé à racines simples, et $(\alpha_1,\dots,\alpha_{2n})$ ses racines. Montrer que

$$\forall B \in \mathbb{C}_{2n-1}[X], \quad B(X) = \sum_{k=1}^{2n} B(\alpha_k) \frac{A(X)}{(X-\alpha_k)\,A'(\alpha_k)} \qquad \clubsuit$$

Soit P dans $\mathbb{C}_{2n}[X]$, et, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}, P_\lambda(X) = P(\lambda X) - P(\lambda)$.

10. Si $\lambda \in \mathbb{C}$, vérifier que $X-1$ divise P_λ.

Pour tout λ dans $\mathbb{C}$, on note Q_λ le quotient de P_λ par $X-1$:

$$Q_\lambda(X) = \frac{P(\lambda X) - P(\lambda)}{X-1} \in \mathbb{C}_{2n-1}[X]$$

11. Montrer que, pour tout λ dans $\mathbb{C}, Q_\lambda(1) = \lambda P'(\lambda)$.

On considère le polynôme $R(X) = X^{2n} + 1$.
Pour k dans $[\![1,2n]\!]$, on note $\varphi_k = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$ et $\omega_k = \mathrm{e}^{i\varphi_k}$.

12. Montrer que

$$R(X) = \prod_{k=1}^{2n} (X - \omega_k).$$

13. À l'aide de la formule ♣, montrer que

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad Q_\lambda(X) = -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} \frac{P(\lambda\omega_k) - P(\lambda)}{\omega_k - 1}\frac{X^{2n}+1}{X-\omega_k}\omega_k$$

puis en déduire que

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda P'(\lambda) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} P(\lambda\omega_k)\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} - \frac{P(\lambda)}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} \qquad \bigstar$$

14. Montrer que

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda P'(\lambda) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} P(\lambda\omega_k)\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} + nP(\lambda).$$

On pourra appliquer l'égalité ★ au polynôme X^{2n}.

15. Vérifier que

$$\forall k \in [\![1, 2n]\!] \quad \frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} = \frac{-1}{2\sin(\varphi_k/2)^2}$$

En utilisant la question 14, prouver que

$$\frac{1}{4n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{\sin^2(\varphi_k/2)} = n.$$

Soit une fonction f dans $\mathcal{S}_n$.
On a démontré dans l'intermède qu'il existe un polynôme $U \in \mathbb{C}_{2n}[X]$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}, f(t) = \mathrm{e}^{-int}U(\mathrm{e}^{it})$.

16. En utilisant à nouveau la question 14, démontrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = \frac{1}{4n}\sum_{k=1}^{2n} f(t+\varphi_k)\frac{(-1)^k}{\sin^2(\varphi_k/2)}.$$

17. Conclure.

Partie C Quelques conséquences.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

18. À l'aide de la question 7 et de l'inégalité de Bernstein, démontrer que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \forall x \in [-1,1], \quad \left|P'(x)\sqrt{1-x^2}\right| \leq n \sup_{x\in[-1,1]} |P(x)|$$

19. Montrer que

$$\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad |Q(1)| \leqslant n \sup_{x\in[-1,1]} \left|Q(x)\sqrt{1-x^2}\right|$$

On pourra considérer $f : \theta \mapsto Q(\cos\theta)\sin\theta$ et vérifier que $f \in \mathcal{S}_n$.

20. Soit $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $u \in [-1,1]$. Montrer que

$$|R(u)| \leq n \sup_{-1\leqslant x\leqslant 1} \left|R(x)\sqrt{1-x^2}\right|.$$

On pourra considérer le polynôme $S_u(X) = R(uX)$.

21. En déduire :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad \sup_{x\in[-1,1]} \left|P'(x)\right| \leq n^2 \sup_{x\in[-1,1]} |P(x)|.$$

22. Peut-il y avoir égalité dans l'inégalité précédente ?