Correction ciblée.

Exercice 1.

$\boxed{\text{A}}$ Rédaction impeccable de la récurrence : vérifier

— la rédaction logique de l'hérédité : on introduit un entier n et on suppose que l'assertion est vraie au rang n.

— le "pour tout n" se trouve dans la conclusion (et certainement pas dans l'hérédité !)

$\boxed{\text{B}}$ Dans la preuve de $\mathcal{P}_{n+1}$, avoir écrit un produit de $2n\underline{+2}$ facteurs (car $2(n+1) = 2n+2$...)

$\boxed{\text{C}}$ preuve 2 : avoir fait apparaître $\sum\limits_{k=1}^{2n} k$.

$\boxed{\text{D}}$ preuve 3 : avoir correctement écrit le tri pair/impair des facteurs

Problème.

$\boxed{\text{E}}$ 1 : Avoir comparé $\binom{2n}{n}$ à $\sum\limits_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}$ en écrivant que les termes en plus sont des nombres positifs.

$\boxed{\text{F}}$ 1 : Avoir écrit clairement que $\sum\limits_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k} = 2^{2n}$ et l'avoir justifié en faisant apparaître la formule du binôme « $1^k 1^{2n-k}$... ».

$\boxed{\text{G}}$ 2-(a) : Avoir clairement complété le produit des facteurs impairs par celui des facteurs pairs, pour faire apparaître $(2n)!$

$\boxed{\text{H}}$ 2-(a) : Avoir écrit clairement sur la copie la définition de $\binom{2n}{n}$.

Exercice 1.

Preuve 1 : par récurrence.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$\mathcal{P}_n : « \prod_{k=1}^{2n} (-1)^k = (-1)^n ».$$

• *Initialisation.* On a $\prod\limits_{k=1}^{2} (-1)^k = (-1)^1 \cdot (-1)^2 = (-1)^1$.
$\mathcal{P}_1$ est vraie.

• *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que l'égalité $\mathcal{P}_n$ est vraie.
Montrons $\mathcal{P}_{n+1}$.

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{2(n+1)} (-1)^k &= \prod_{k=1}^{2n+2} (-1)^k \\
&= \prod_{k=1}^{2n} (-1)^k \prod_{k=2n+1}^{2n+2} (-1)^k \\
&= (-1)^n \prod_{k=2n+1}^{2n+2} (-1)^k \qquad \text{d'après } \mathcal{P}_n \\
&= (-1)^n \underbrace{(-1)^{2n+1}}_{=-1} \underbrace{(-1)^{2n+2}}_{=1} \\
&= (-1)^{n+1},
\end{aligned}$$

ce qui montre $\mathcal{P}_{n+1}$.

• *Conclusion.*
D'après le principe de récurrence,

$$\boxed{\text{l'égalité } \mathcal{P}_n \text{ est vraie pour tout entier } n \in \mathbb{N}^*.}$$

Preuve 2 : en se ramenant à $\sum k$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on calcule

$$\prod_{k=1}^{2n} (-1)^k = (-1)^{\sum\limits_{k=1}^{2n} k} = (-1)^{\frac{2n(2n+1)}{2}} = (-1)^{n(2n+1)} = \left((-1)^{2n+1}\right)^n = (-1)^n.$$

On a utilisé les propriétés élémentaires des puissances, ainsi que le fait que $(-1)^{2n+1} = -1$ (l'entier $2n+1$ étant impair).

Preuve 3 : en triant les facteurs selon leur parité.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On écrit

$$\prod_{k=1}^{2n} (-1)^k = \left(\prod_{j=1}^{n} (-1)^{2j}\right)\left(\prod_{j=1}^{n} (-1)^{2j-1}\right) = \left(\prod_{j=1}^{n} 1\right)\left(\prod_{j=1}^{n} (-1)\right) = 1^n (-1)^n = (-1)^n.$$

Remarque : Les preuves 2 et 3 commencent par "Soit $n \in \mathbb{N}^*$".
C'est un point de rédaction important : pour prouver une assertion commençant par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, dans un raisonnement direct (pas par récurrence), on commence par introduire une variable n.

Exercice 2.

1. On sait que $s_1 = \sum_{k=1}^{n} k = \boxed{\dfrac{n(n+1)}{2}}$ et $s_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \boxed{\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$.

2. La variable (i,j), qui appartient à $[\![1,n]\!]$ est muette ! On fait le changement d'indice $(i,j) \to (j,i)$:

$$\sigma = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} ij = \sum_{1\leq j\leq i\leq n} ji = \sum_{1\leq j\leq i\leq n} ij = \sigma'. \text{ On obtient bien } \boxed{\sigma = \sigma'}.$$

De plus, en écrivant une double somme,

$$\sigma = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} ij = \sum_{j=1}^{n}\left(j\cdot\sum_{i=1}^{j} i\right) = \sum_{j=1}^{n} j\cdot\frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j^3 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j^2.$$

On obtient bien $\boxed{\sigma = \dfrac{1}{2}\left(s_3+s_2\right)}$.

3. Calculons :

$$\begin{aligned}
\sigma+\sigma'-s_2 &= \sum_{1\leq i\leq j\leq n} ij + \sum_{1\leq j\leq i\leq n} ij - \sum_{1\leq i\leq n} i^2 \\
&= \left(\sum_{1\leq i<j\leq n} ij + \cancel{s_2}\right) + \left(\sum_{1\leq j<i\leq n} ij + s_2\right) - \cancel{s_2} \\
&= \sum_{1\leq i<j\leq n} ij + \sum_{1\leq j<i\leq n} ij + \sum_{1\leq i\leq n} i^2 \\
&= \sum_{1\leq i,j\leq n} ij \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} j\right) \\
&= s_1^2. \quad \text{On obtient bien } \boxed{\sigma+\sigma'-s_2 = s_1^2}
\end{aligned}$$

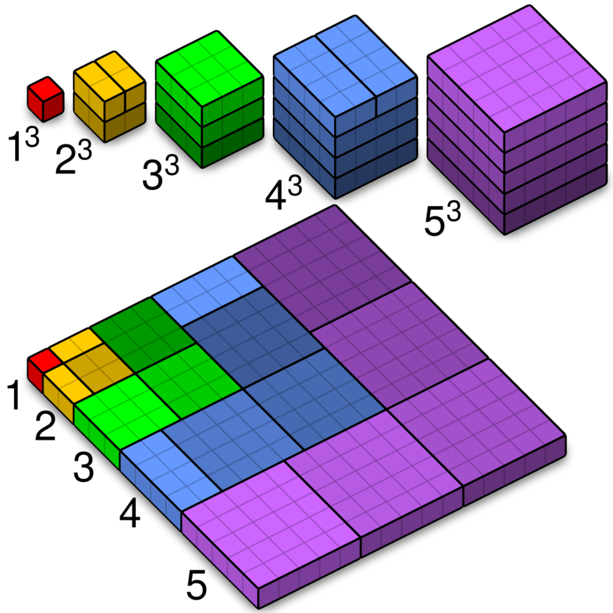
4. En utilisant les questions précédentes, nous prouvons :

$$\begin{aligned}
s_3 &= 2\sigma - s_2 && \text{(question 3)} \\
&= \sigma+\sigma'-s_2 && \text{(question 2)} \\
&= s_1^2 && \text{(question 4).}
\end{aligned}$$

On vient de redémontrer que $s_3 = s_1^2$, soit

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2}.$$

Voici une autre preuve, *graphique* celle-là, de l'identité :



Source : `https://en.wikipedia.org/wiki/Squared_triangular_number`
La page en anglais est plus complète que celle correspondante en français.

Problème. Un encadrement de $\binom{2n}{n}$.

1. Puisque les coefficients binomiaux sont des nombres positifs, on a

$$\binom{2n}{n} \leq \binom{2n}{n} + \sum_{\substack{0\leq k\leq 2n \\ k\neq n}}^{2n} \binom{2n}{k}.$$

Ainsi,
$$\binom{2n}{n} \leq \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} 1^k 1^{2n-k} = (1+1)^{2n} = 2^{2n}, \quad \text{d'où } \boxed{\binom{2n}{n} \leq 2^{2n}}.$$

2. (a) Dans le calcul ci-dessous, on écrit la factorielle de $2n$ comme un produit de nombres pairs, multiplié par un produit de nombres impairs :

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} = \frac{\prod_{j=1}^{2n} j}{n!n!} = \frac{\prod_{k=1}^{n}(2k) \cdot \prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{n!n!} = \frac{2^n \cancel{\prod_{k=1}^{n} k} \cdot \prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{n!\, \cancel{n!}}.$$

(b) Les nombres $\frac{2k-1}{k}$ et $2\sqrt{\frac{k-1}{k}}$ sont positifs, donc rangés dans le même ordre que leurs carrés. Intéressons-nous à la différence des carrés :

$$\left(\frac{2k-1}{k}\right)^2 - 4\frac{k-1}{k} = \frac{4k^2-4k+1}{k^2} - \frac{4k(k-1)}{k^2} = \frac{1}{k^2} \geq 0.$$

On a donc $\left(\frac{2k-1}{k}\right)^2 \geq \frac{4k(k-1)}{k^2}$, et en appliquant la fonction racine carrée, croissante sur $\mathbb{R}_+$, on obtient l'inégalité demandée.

(c) D'après ce qui précède, on a $\forall k \in [\![2,n]\!]$ $\frac{2k-1}{k} \geq 2\sqrt{\frac{k-1}{k}}$. Puisque ces inégalités ont des membres positifs, on peut les multiplier et obtenir

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{2k-1}{k} \geq \prod_{k=2}^{n} 2\sqrt{\frac{k-1}{k}}.$$

On a choisi de multiplier les inégalités à partir de $k=2$ afin que le produit à droite ne contienne pas un facteur égal à 0...

Le membre de gauche vaut

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{2k-1}{k} = \frac{\prod_{k=\cancel{2}1}^{n}(2k-1)}{\prod_{k=\cancel{2}1}^{n} k} = \frac{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{n!} = 2^{-n}\binom{2n}{n},$$

en utilisant la question 2 (a). On peut faire commencer les deux produits à 1 car les facteurs ajoutés valent 1.
Le membre de droite est télescopique :

$$\prod_{k=2}^{n} 2\sqrt{\frac{k-1}{k}} = 2^{n-1}\prod_{k=2}^{n}\frac{\sqrt{k-1}}{\sqrt{k}} = 2^{n-1}\cdot\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{n}}.$$

On obtient donc

$$2^{-n}\binom{2n}{n} \geq \frac{2^{n-1}}{\sqrt{n}} \qquad \text{d'où } \boxed{\binom{2n}{n} \geq \frac{2^{2n-1}}{\sqrt{n}}}.$$

3. Stratégie : Les questions 1 et 2 nous ont fait *encadrer* $\binom{2n}{n}$: utilisons le théorème d'encadrement (ou théorème des gendarmes). Pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{2^{2n-1}}{\sqrt{n}} \leq \binom{2n}{n} \leq 2^{2n}.$$

On applique la fonction ln, croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$(2n-1)\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(n) \leq \ln\left(\binom{2n}{n}\right) \leq 2n\ln(2).$$

On multiplie par $1/n$, (nombre positif...)

$$2\ln(2) - \frac{\ln(2)}{n} - \frac{\ln(n)}{2n} \leq \frac{1}{n}\ln\left(\binom{2n}{n}\right) \leq 2\ln(2).$$

Grâce notamment aux croissances comparées, on voit que les deux "gendarmes" tendent vers $2\ln(2)$. On peut donc conclure que

$$\boxed{\frac{1}{n}\ln\left(\binom{2n}{n}\right) \to 2\ln(2)}.$$