
1	Espaces et sous-espaces vectoriels.	2
1.0	Avant-propos : combinaisons linéaires dans \mathbb{K}^n .	2
1.1	Structure de \mathbb{K} -espace vectoriel.	3
1.2	Combinaisons linéaires.	6
1.3	Sous-espaces vectoriels.	7
1.4	Application linéaire entre deux espaces vectoriels.	10
1.5	Sous-espace vectoriel engendré par une partie.	12
1.6	Somme de deux sous-espaces vectoriels.	14
2	Familles de vecteurs.	18
2.1	Familles génératrices.	18
2.2	Familles libres, liées.	19
2.3	Bases.	22
	Exercices	24

Mis à part le calcul booléen, on peut dire qu'il n'y a sans doute pas de théorie plus universellement utilisée en Mathématique que l'Algèbre linéaire ; il n'y en a presque pas non plus qui soit plus élémentaire, bien que des générations de professeurs et de faiseurs de manuels se soient ingéniés à la compliquer à plaisir par de ridicules calculs de matrices.

Jean Dieudonné,
Éléments d'Algèbre linéaire,
Annexe aux Éléments d'Analyse.

Dans ce cours, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} , et sauf indication contraire, n et p sont des entiers naturels non nuls.

1 Espaces et sous-espaces vectoriels.

1.0 Avant-propos : combinaisons linéaires dans \mathbb{K}^n .

Définition 1 (Somme de n -uplets, multiplication d'un n -uplet par un scalaire).

Pour tous $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose

$$x + y := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \quad \text{et} \quad \lambda \cdot x := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

Proposition 2 ($(\mathbb{K}^n, +)$ est un groupe abélien).

Le neutre de ce groupe est le n -uplet $(0, \dots, 0)$.

Le symétrique d'un n -uplet (x_1, \dots, x_n) est le n -uplet $(-x_1, \dots, -x_n)$.

Un calcul dans \mathbb{R}^3 :

$$3(0, 1, 2) - (0, 2, 1) = (0, 3, 6) - (0, 2, 1) = (0, 1, 5).$$

Définition 3 (Base canonique de \mathbb{K}^n).

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note

$$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0),$$

où le 1 est écrit sur la i ème coordonnée.

La famille (e_1, \dots, e_n) est appelée **base canonique** de \mathbb{K}^n .

La base canonique de \mathbb{R}^3 est (e_1, e_2, e_3) où

$$e_1 = (1, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0), \quad e_3 = (0, 0, 1).$$

Proposition 4.

Tout vecteur de \mathbb{K}^n s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs de (e_1, \dots, e_n) , base canonique de \mathbb{K}^n :

$$\forall x \in \mathbb{K}^n, \exists! (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \quad x = \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

Par exemple, voici l'unique décomposition de $(1, 2, 3)$ sur la base canonique de \mathbb{R}^3 :

$$(1, 2, 3) = e_1 + 2e_2 + 3e_3.$$

1.1 Structure de \mathbb{K} -espace vectoriel.

On appelle **loi de composition externe** sur un ensemble E à scalaires dans \mathbb{K} une application

$$\cdot : \begin{cases} E \times \mathbb{K} & \rightarrow E \\ (x, \lambda) & \mapsto \lambda \cdot x \end{cases}.$$

L'idée est que si x est un *bidule* et λ un scalaire, alors $\lambda \cdot x$ est un *bidule*.

Définition 5.

On appelle **\mathbb{K} -espace vectoriel** un triplet $(E, +, \cdot)$, où E est un ensemble, $+$ une loi de composition interne, et \cdot une loi de composition externe, avec scalaires dans \mathbb{K} vérifiant

1. $(E, +)$ est un groupe abélien, c'est-à-dire

(a) $+$ est associative : $\forall x, y, z \in E \quad (x + y) + z = x + (y + z)$;

(b) $+$ est commutative : $\forall x, y \in E \quad x + y = y + x$;

(c) Il existe dans E un unique élément neutre pour $+$, appelé "zéro" de E et noté 0_E :

$$\forall x \in E \quad x + 0_E = 0_E + x = x;$$

(d) Tout élément x de E admet un (unique) symétrique dans E , noté $(-x)$, tel que

$$x + (-x) = -x + x = 0_E.$$

2. Propriétés de \cdot

(a) $\forall x \in E \quad 1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$;

(b) \cdot est distributive par rapport à l'addition dans E :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y;$$

(c) \cdot est distributive par rapport à l'addition dans \mathbb{K} :

$$\forall x \in E \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x;$$

(d) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall x \in E \quad \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$.

Les éléments de E sont appelés des **vecteurs**.

Un abus fréquent consiste à parler de "l'espace vectoriel E " en omettant de mentionner les lois $+$ et \cdot .

Attention : dans un espace vectoriel, le produit de deux vecteurs n'a pas de sens a priori.

Proposition 6 (Autour de zéro et du symétrique).

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

(i) $\forall x \in E \quad 0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E$.

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda \cdot 0_E = 0_E$.

(iii) $\forall x \in E \quad (-x) = (-1) \cdot x$.

(iv) $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall x \in E \quad \lambda \cdot x = 0_E \implies (\lambda = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } x = 0_E)$.

Preuve. Dans ce qui suit, lorsqu'on utilise une propriété de la définition 5, on signale son numéro.

(i) Soit $x \in E$. On peut écrire

$$0_{\mathbb{K}} \cdot x = (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}) \cdot x \stackrel{2.(c)}{=} 0_{\mathbb{K}} \cdot x + 0_{\mathbb{K}} \cdot x.$$

La propriété 1.(d) nous rappelle que le vecteur $0_{\mathbb{K}} \cdot x$ admet un symétrique dans le groupe $(E, +)$ noté $-0_{\mathbb{K}} \cdot x$. On ajoute ce symétrique à l'égalité précédente :

$$\underbrace{0_{\mathbb{K}} \cdot x + (-0_{\mathbb{K}} \cdot x)}_{=0_E} = (0_{\mathbb{K}} \cdot x + 0_{\mathbb{K}} \cdot x) + (-0_{\mathbb{K}} \cdot x) \stackrel{1.(a)}{=} 0_{\mathbb{K}} \cdot x + \underbrace{(0_{\mathbb{K}} \cdot x + (-0_{\mathbb{K}} \cdot x))}_{=0_E} \stackrel{1.(c)}{=} 0_{\mathbb{K}} \cdot x,$$

ce qui montre bien $0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E$.

(ii) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a

$$\lambda \cdot 0_E \stackrel{(i)}{=} \lambda \cdot (0_{\mathbb{K}} \cdot 0_E) \stackrel{2.(d)}{=} (\lambda \cdot 0_{\mathbb{K}}) \cdot 0_E = 0_{\mathbb{K}} \cdot 0_E = 0_E.$$

(iii) Soit $x \in E$. On a

$$x + (-1) \cdot x \stackrel{2.(c)}{=} (1 + (-1)) \cdot x = 0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E.$$

On a montré que $(-1) \cdot x$ est un symétrique de x , donc le symétrique : $(-1) \cdot x = -x$.

(iv) Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$ tels que $\lambda \cdot x = 0_E$. Supposons que $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$. Alors λ possède un inverse λ^{-1} . En multipliant par ce scalaire,

$$\lambda^{-1}(\lambda \cdot x) = \lambda^{-1} \cdot 0_E \quad \text{d'où} \quad (\lambda^{-1}\lambda) \cdot x = 0_E \quad \text{d'où} \quad 1_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E.$$

D'après 2.(a), $1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$, ce qui montre bien que $x = 0_E$.

□

Exemple 7 (L'espace vectoriel \mathbb{K}^n).

Muni des lois $+$ et \cdot définies dans l'avant-propos, $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Le zéro de cet espace vectoriel est le n -uplet $(0, \dots, 0)$.

Le symétrique du vecteur (x_1, \dots, x_n) est le vecteur $(-x_1, \dots, -x_n)$.

Exemples :

1. Le cas $n = 2$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

L'espace vectoriel \mathbb{R}^2 est le premier espace vectoriel dans lequel on a travaillé. Par définition, un vecteur u de \mathbb{R}^2 s'écrit $u = (x, y)$, où x et y sont deux réels.

Les nostalgiques pourront écrire \vec{u} cet élément de \mathbb{R}^2 . L'ensemble \mathbb{R}^2 peut être identifié au plan en se donnant un repère orthonormé : \vec{u} est alors associé au point de coordonnées x et y .

2. Le cas $n = 3$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

L'espace \mathbb{R}^3 est celui de la mécanique newtonienne : il modélise l'espace en trois dimensions dans lequel nous vivons.

3. Le cas $n = 1$.

\mathbb{R} est un \mathbb{R} -espace vectoriel. \mathbb{C} est un \mathbb{C} -espace vectoriel.

Exemple 8 (\mathbb{C} vu comme \mathbb{R} -espace vectoriel).

Si \mathbb{C} est un \mathbb{C} -espace vectoriel, comme on vient de le dire, c'est aussi un \mathbb{R} -espace vectoriel.

On sait déjà identifier \mathbb{C} et \mathbb{R}^2 en associant à un nombre complexe $a + ib$ son affixe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Exemple 9 (L'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$).

$(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Les lois $+$ et \cdot sont l'addition et la multiplication par un scalaire pour les polynômes.

Le zéro de cet espace est le polynôme nul.

Exemple 10 (L'espace vectoriel $M_{n,p}(\mathbb{K})$).

$(M_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$, où $n, p \in \mathbb{N}^*$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Les lois $+$ et \cdot sont l'addition et la multiplication par un scalaire pour les matrices de taille $n \times p$.

Le zéro de cet espace est la matrice nulle $0_{n,p}$.

Exemple 11 (Espace vectoriel des applications à valeurs dans \mathbb{K}).

Soit Ω un ensemble non vide. L'ensemble \mathbb{K}^Ω des fonctions de Ω dans \mathbb{K} peut être muni des lois $+$ et \cdot définies comme suit : pour toutes fonctions f et g de Ω vers \mathbb{K} et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$

$$f + g : \begin{cases} \Omega & \rightarrow & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & (f + g)(x) = f(x) + g(x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \lambda \cdot f : \begin{cases} \Omega & \rightarrow & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x) \end{cases} .$$

$(\mathbb{K}^\Omega, +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel de neutre la fonction nulle sur Ω .

Exemples :

1. Espaces de fonctions à valeurs réelles.

Soit I un intervalle. L'ensemble \mathbb{R}^I , plutôt noté $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

2. Espaces de suites.

L'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans \mathbb{K} est un \mathbb{K} -espace vectoriel. Son zéro est la suite nulle.

Proposition 12 (Produit d'un nombre fini de \mathbb{K} -espaces vectoriels).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et n \mathbb{K} espaces vectoriels E_1, \dots, E_n .

Pour tous $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ dans $E_1 \times \dots \times E_n$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose

$$x + y := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \quad \text{et} \quad \lambda \cdot x := (\lambda \cdot x_1, \dots, \lambda \cdot x_n).$$

lire $x_k + y_k$ comme une somme dans l'espace E_k et $\lambda \cdot x_k$ comme une multiplication par λ dans E_k

Muni des lois $+$ et \cdot définies ci-dessus, $E_1 \times \dots \times E_n$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel de zéro $(0_{E_1}, \dots, 0_{E_n})$.

En particulier, pour E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $n \in \mathbb{N}^*$, nous venons de munir E^n d'une structure de \mathbb{K} -espace vectoriel.

1.2 Combinaisons linéaires.

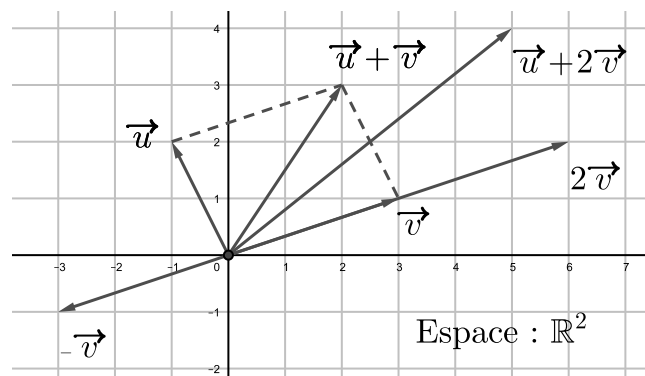
Définition 13 (Combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs).

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$, où $p \in \mathbb{N}^*$.
On appelle **combinaison linéaire** de x_1, \dots, x_p tout vecteur de la forme

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_p,$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des scalaires de \mathbb{K} .

Une illustration dans \mathbb{R}^2 : pour $\vec{u} = (-1, 2)$, $\vec{v} = (3, 1)$, on représente $-\vec{v}$, $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} + 2\vec{v}$.



Exemple 14 (dans \mathbb{R}^3).

Soient

$$x = (1, 1, 1) \quad \vec{u}_1 = (0, 1, 1) \quad \vec{u}_2 = (1, 0, 1) \quad \vec{u}_3 = (1, 1, 0).$$

Montrer que x est une combinaison linéaire de u_1, u_2 et u_3 .

Définition 15 (Généralisation de la notion de combinaison linéaire).

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E , indexée par un ensemble I non vide.
On appelle **combinaison linéaire** des vecteurs de la famille $(x_i)_{i \in I}$ tout vecteur de la forme

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k x_{i_k} = \lambda_1 x_{i_1} + \dots + \lambda_n x_{i_n},$$

avec $n \in \mathbb{N}^*$, $i_1, \dots, i_n \in I$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.

Définition 16.

Soit I un ensemble non vide et $(\lambda_i)_{i \in I}$ une famille de scalaires de \mathbb{K} indexée par I . Elle est dite **presque nulle** (ou à support fini) si λ_i n'est différent de 0 que pour un nombre fini de scalaires.

Autrement dit, $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ est presque nulle si l'ensemble $J = \{i \in I : \lambda_i \neq 0\}$ est fini. Une telle famille est aussi dite à *support fini* et l'ensemble de ces familles peut être noté $\mathbb{K}^{(I)}$.

On peut donc aussi définir une combinaison linéaire de la famille $(x_i)_{i \in I}$ comme un vecteur de la somme

$$\sum_{i \in I} \lambda_i x_i,$$

où $(\lambda_i)_{i \in I}$ est une famille presque nulle de \mathbb{K}^I . Même si l'ensemble d'indices est infini, la somme est à lire comme une somme finie puisque seul un nombre fini de termes sont non nuls.

La définition 15, équivalente, reste meilleure car plus concrète.

1.3 Sous-espaces vectoriels.

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel et F une partie de E . On rappelle que F est **stable** par la loi $+$ si

$$\forall (x, y) \in F^2 \quad x + y \in F.$$

On dira que F est **stable par \cdot** si

$$\forall x \in F \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda \cdot x \in F.$$

On peut alors considérer les restrictions des lois $+$ et \cdot à l'ensemble F : ce sont bien respectivement une loi de composition interne et une loi de composition externe à scalaires dans \mathbb{K} . Notons-les encore $+$ et \cdot :

$$+ : \begin{cases} F \times F & \rightarrow F \\ (x, y) & \mapsto x + y \end{cases} \quad \text{et} \quad \cdot : \begin{cases} F \times \mathbb{K} & \rightarrow F \\ (x, \lambda) & \mapsto \lambda \cdot x \end{cases}.$$

On les appelle **lois induites** sur F par les lois $+$ et \cdot sur E .

Définition 17.

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel et F une partie de E .

On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E si

- F est stable par $+$ et \cdot .
- $(F, +, \cdot)$ est un espace vectoriel (ou $+$ et \cdot sont les lois induites sur F par celles de E).

Exemple 18 (Sous-espaces triviaux).

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

- E est un sous-espace vectoriel de E .
- Le singleton $\{0_E\}$ est un sous-espace vectoriel de E : clairement stable par $+$ et \cdot , il est, muni des lois induites, un espace vectoriel. On l'appellera **sous-espace vectoriel nul**.

Méthode.

Pour montrer qu'un ensemble $(E, +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel, il suffira souvent de prouver que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.

Et pour faire cela, on utilisera, plutôt que la définition, la caractérisation ci-après.

Proposition 19 (Caractérisation des sous-espaces vectoriels parmi les parties de E).

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel et $F \subset E$. Il y a équivalence des deux assertions suivantes.

1. F est un sous-espace vectoriel de E .
2. F satisfait les deux propriétés suivantes :
 - $0_E \in F$,
 - F est stable par combinaison linéaire de deux vecteurs, c'est à dire

$$\forall x, y \in F \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad \lambda x + \mu y \in F.$$

Proposition 20.




Un sous-espace vectoriel est stable par combinaison linéaire quelconque de vecteurs.

Exemple 21 (Des sous-espaces vectoriels de \mathbb{K}^p).

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. Notons S_0 l'ensemble des solutions du système linéaire homogène

$AX = 0_{n,1}$, d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in M_{p,1}(\mathbb{K})$ ou $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ (on confond $M_{p,1}(\mathbb{K})$ et \mathbb{K}^p).

On a prouvé dans le cours sur les matrices que S_0 est un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^p .

- **Cas particulier 1.** $n = 1, p = 2$: équation du type $ax + by = 0$.
Dans le cas non dégénéré $(a, b) \neq (0, 0)$, l'ensemble des solutions est une droite vectorielle de \mathbb{R}^2 . 
- **Cas particulier 2.** $n = 1, p = 3$: équation du type $ax + by + cz = 0$.
Dans le cas non dégénéré $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, l'ensemble des solutions est un plan vectoriel de \mathbb{R}^3 . 
- **Cas particulier 3.** Le cas $n = 2, p = 3$: deux équations de plans vectoriels dans \mathbb{R}^3 . Dans le cas non dégénéré (deux plans, non confondus) les solutions sont les vecteurs d'une droite vectorielle de \mathbb{R}^3 . 

Contre-exemple. Une droite affine de \mathbb{R}^2 ne passant pas par $(0, 0)$ n'est pas un s.e.v. de \mathbb{R}^2 .

Contre-exemple. Un demi-plan : $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - y \geq 0\}$ n'est pas un s.e.v. de \mathbb{R}^2 : il contient $(0, 0)$ mais n'est pas stable par combinaison linéaire. En effet, $(1, 2)$ est dans le demi-plan mais pas son opposé.

Exemple 22 (Des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}[X]$).

On rappelle que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ est celui des polynômes de degré inférieur à n , à coefficients dans \mathbb{K} . C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ (donc un espace vectoriel).

Pour tous entiers $n, p \in \mathbb{N}$ avec $p \leq n$, $\mathbb{K}_p[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_n[X]$.

L'ensemble des polynômes de degré égal à n n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Exemple 23 (Un autre exemple de s.e.v. de $\mathbb{K}[X]$).

Soit $a \in \mathbb{K}$. Démontrer que l'ensemble

$$F_a = \{P \in \mathbb{K}[X] : P(a) = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Exemple 24 (Des sous-espaces de $M_n(\mathbb{K})$).

Les ensembles $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $M_n(\mathbb{K})$.

L'ensemble des matrices diagonales, celui des triangulaires supérieures et celui des triangulaires inférieures sont aussi des sous-espaces vectoriels de $M_n(\mathbb{K})$.

$GL_n(\mathbb{K})$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$.

Exemple 25 (Des sous-espaces de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$).

L'ensemble $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ des fonctions continues sur I est un s.e.v. de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

L'ensemble $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ des fonctions dérivables sur I est un s.e.v. de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

C'est donc un espace vectoriel, inclus dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$: c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.

Pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

Pour tous $n, p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ avec $p \geq n$, $\mathcal{C}^p(I, \mathbb{R})$ est un s.e.v. de $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.

L'ensemble des fonctions monotones n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

Proposition 26 (Intersection de s.e.v.).

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E . Alors

$$\bigcap_{i \in I} F_i \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.$$

La réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est pas, en général, un sous-espace vectoriel.

On peut montrer (TD) le résultat suivant pour deux sous-espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel E :

$$F \cup G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \iff F \subset G \text{ ou } G \subset F.$$

1.4 Application linéaire entre deux espaces vectoriels.

Définition 27.

Soient $(E, +, \cdot)$ et $(F, +, \cdot)$ deux \mathbb{K} -espaces vectoriels.

On appelle **application linéaire** entre E et F une application $u : E \rightarrow F$ telle que

$$\forall x, y \in E \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y).$$

(l'image de la combinaison linéaire, c'est la combinaison linéaire des images)

Une application linéaire de E dans E est appelée **endomorphisme** de E .

Une application linéaire de E dans \mathbb{K} (vu comme \mathbb{K} -espace vectoriel) est une **forme linéaire**.

Remarque. Il est équivalent de définir la linéarité d'une application $u : E \rightarrow F$ à l'aide des propriétés

1. $\forall x, y \in E \quad u(x + y) = u(x) + u(y)$ (propriété de morphisme de groupes additifs)
2. $\forall x \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad u(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot u(x)$ (propriété d'homogénéité).

Exemples.

1. La transposition :

$$u : \begin{cases} M_{n,p}(\mathbb{K}) & \rightarrow M_{p,n}(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto M^T \end{cases},$$

est une application linéaire.

2. La dérivation sur $\mathbb{K}[X]$

$$D : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \rightarrow \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto P' \end{cases}$$

est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

On peut de même définir une application de dérivation définie sur $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$:

$$\tilde{D} : \begin{cases} \mathcal{D}(I, \mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{F}(I, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto f' \end{cases}$$

\tilde{D} n'est pas un endomorphisme : une dérivée n'est pas toujours dérivable elle-même !

3. La trace est une forme linéaire :

$$\text{tr} : \begin{cases} M_n(\mathbb{K}) & \rightarrow \mathbb{K} \\ M & \mapsto \text{tr}(M) \end{cases}.$$

4. L'évaluation des polynômes (ou des fonctions) est linéaire.

Plus précisément, Φ_a et Ψ_b , définies ci-dessous à l'aide de $a \in \mathbb{K}$ et $b \in \Omega$ fixés, sont des formes linéaires.

$$\Phi_a : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \rightarrow \mathbb{K} \\ P & \mapsto P(a) \end{cases} \quad \text{et} \quad \Psi_b : \begin{cases} \mathbb{K}^\Omega & \rightarrow \mathbb{K} \\ f & \mapsto f(b) \end{cases}.$$

5. Soit I un intervalle et $a, b \in I$. L'application $\varphi : f \mapsto \int_a^b f(x)dx$ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.

6. Pour tout espace vectoriel E , Id_E est un endomorphisme de E .
7. Pour tous E et F espaces vectoriels, l'application nulle ci-dessous est linéaire.

$$N : \begin{cases} E & \rightarrow & F \\ x & \mapsto & 0_F \end{cases} ,$$

Lemme 28.

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et $u : E \rightarrow F$ une application linéaire. On a

$$u(0_E) = 0_F.$$

Proposition 29 (Image directe/réciproque d'un s.e.v. par une application linéaire).

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et $u : E \rightarrow F$ une application linéaire.

1. Si G est un sous-espace vectoriel de E , alors $u(G)$ est un sous-espace vectoriel de F .
2. Si H est un sous-espace vectoriel de F , alors $u^{-1}(H)$ est un sous-espace vectoriel de E .

Définition 30.

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et $u : E \rightarrow F$ une application linéaire.

1. On appelle **image** de u , et on note $\text{Im } u$ la partie de F définie par :

$$\text{Im } u = \{u(x), x \in E\} = \{y \in F : \exists x \in E \ y = u(x)\}.$$

2. On appelle **noyau** de u et on note $\text{Ker } u$ la partie de E définie par :

$$\text{Ker } u = \{x \in E : u(x) = 0_F\}.$$

Proposition 31.

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et $u : E \rightarrow F$ une application linéaire.

1. $\text{Ker } u$ est un sous-espace vectoriel de E et

$$u \text{ est injective} \iff \text{Ker } u = \{0_E\}.$$

2. $\text{Im } u$ est un sous-espace vectoriel de F et

$$u \text{ est surjective} \iff \text{Im } u = F.$$

Exemple 32 (Reconnaître un Ker).

Soit $a \in \mathbb{K}$. À l'aide de la notion de noyau, retrouver que l'ensemble F_a est un s.e.v. de $\mathbb{K}[X]$:

$$F_a \stackrel{\text{def}}{=} \{P \in \mathbb{K}[X] : P(a) = 0\}$$

1.5 Sous-espace vectoriel engendré par une partie.

Proposition-Définition 33 (S.e.v. engendré par une famille finie de vecteurs).

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, $p \in \mathbb{N}$ et $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$.

On note $\text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$ l'ensemble des combinaisons linéaires de x_1, \dots, x_p .


$$\text{Vect}(x_1, \dots, x_p) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \sum_{k=1}^p \lambda_k x_k \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \right\}.$$

Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de E .

On l'appelle **sous-espace vectoriel engendré** par (x_1, \dots, x_p) (ou par l'ensemble $\{x_1, \dots, x_p\}$).

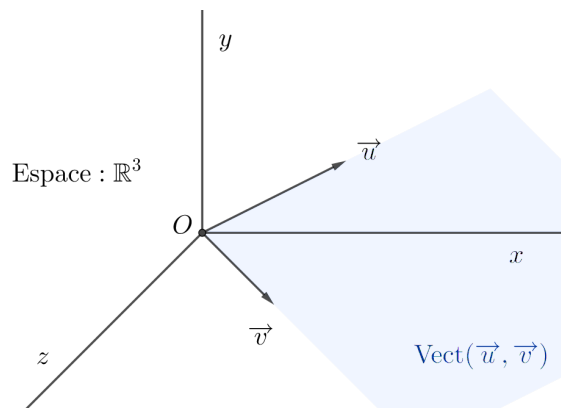
En particulier, pour x, y deux vecteurs d'un espace vectoriel E ,

$$\text{Vect}(x) = \{\lambda x, \lambda \in \mathbb{K}\}, \quad \text{et} \quad \text{Vect}(x, y) = \{\lambda x + \mu y, \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}.$$

Exemple 34 (et image mentale .

$E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x, y, z) : x - 2y - z = 0\}$.

On prouve que $F = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$, où $\vec{u} = (2, 1, 0)$ et $\vec{v} = (1, 0, 1)$.



Exemple 35.

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\text{Vect}(1, X, X^2, \dots, X^n) = \mathbb{K}_n[X].$$

Exemple 36 (Ensemble des solutions d'une EDL2 homogène).

Écrire à l'aide d'un Vect l'ensemble des solutions de $y'' + y = 0$.

On montre ainsi qu'il s'agit d'un sous-espace de l'espace des fonctions deux fois dérivables.

Proposition-Définition 37 (Sous-espace vectoriel engendré par une partie/famille quelconque).

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et A une partie de E non vide.

On note $\text{Vect}(A)$ l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de A :

$$\text{Vect}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mid n \in \mathbb{N}^*, (x_1, \dots, x_n) \in A^n, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\}.$$

Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de E . On l'appelle **sous-espace vectoriel engendré** par A .

On conviendra en outre que $\text{Vect}(\emptyset) = \{0_E\}$.

En particulier, si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille de vecteurs de E , on note $\text{Vect}(x_i)_{i \in I}$ le sous-espace vectoriel engendré par l'ensemble $\{x_i, i \in I\}$:

$$\text{Vect}(x_i)_{i \in I} = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k x_{i_k} \mid n \in \mathbb{N}^*, (i_1, \dots, i_n) \in I^n, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\}.$$

Remarque. On insiste sur le fait que le sous-espace vectoriel engendré par une partie ou une famille, c'est toujours l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de la partie/famille. Et que même si la partie contient une infinité de vecteurs, les combinaisons linéaires sont des sommes finies !

Exemple 38.

$$\text{Vect}(X^k)_{k \in \mathbb{N}} = \mathbb{K}[X].$$

Théorème 39 (Une autre vision du Vect).

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et A une partie de E .

$\text{Vect}(A)$ est le plus petit sous-espace vectoriel qui contient A (plus petit au sens de l'inclusion) :

$$\forall F \in \mathcal{P}(E) \quad \left\{ \begin{array}{l} F \text{ s.e.v. de } E \\ A \subset F \end{array} \right\} \implies \text{Vect}(A) \subset F.$$

Corollaire 40.

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et A une partie de E .

$$\text{Vect}(A) = \bigcap_{\substack{F \text{ s.e.v. de } E \\ A \subset F}} F.$$

En particulier, pour tout partie F de E , on se convaincra que

$$F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \quad \text{ssi} \quad F = \text{Vect}(F).$$

Proposition 41 (Propriétés du Vect).

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, et A, A', B trois parties de E , et $x, y \in E$.

1. Croissance du Vect :

$$A \subset B \implies \text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B).$$

2. Ajout ou élimination de vecteurs superflus :

$$A' \subset \text{Vect}(A) \implies \text{Vect}(A \cup A') = \text{Vect}(A).$$

En particulier,

$$x \in \text{Vect}(A) \implies \text{Vect}(A \cup \{x\}) = \text{Vect}(A).$$

3. Remplacement d'un vecteur : Si $y \in \text{Vect}(A \cup \{x\})$ avec un scalaire non nul sur x , alors

$$\text{Vect}(A \cup \{x\}) = \text{Vect}(A \cup \{y\}).$$

Corollaire 42 (Cas d'une famille finie : invariance du Vect par opérations élémentaires).

Soit E un espace vectoriel et $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ une famille de vecteurs.

Les trois opérations élémentaires standard ne modifient pas le s.e.v. engendré par (x_1, \dots, x_p) .

- Échange de x_i avec x_j , où $1 \leq i < j \leq p$:

$$\text{Vect}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) = \text{Vect}(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_p).$$

- Dilatation : remplacement de x_i par λx_i , avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$:

$$\text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_p) = \text{Vect}(x_1, x_2, \dots, \lambda x_i, \dots, x_p).$$

- Transvection : pour i et j distincts dans $\llbracket 1, p \rrbracket$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, remplacement de x_i par $x_i := x_i + \lambda x_j$

$$\text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_p) = \text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_i + \lambda x_j, \dots, x_p).$$

1.6 Somme de deux sous-espaces vectoriels.**Proposition-Définition 43** (Somme des deux s.e.v.).

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

On appelle **somme** de F et de G , et on note $F + G$ l'ensemble

$$F + G = \{x_F + x_G \mid x_F \in F, x_G \in G\} = \{x \in E \mid \exists x_F \in F \exists x_G \in G \quad x = x_F + x_G\},$$

Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de E .

Proposition 44 (Évidences).

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels.

1. $F + G = G + F$.
2. $F \subset F + G$ et $G \subset F + G$.
3. $F + \{0_E\} = F$ et $\{0_E\} + G = G$.
4. $E + E = E$.

Exemple 45.

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Démontrer que

$$F + G = \text{Vect}(F \cup G).$$

L'écriture d'un vecteur sur une somme n'est pas unique a priori. Prenons l'exemple trivial d'un espace vectoriel non réduit à $\{0_E\}$ et d'un vecteur x non nul de cet espace. Voici deux écritures distinctes d'un même vecteur x sur $E + E$:

$$x = \underbrace{x}_{\in E} + \underbrace{0_E}_{\in E} \quad \text{et} \quad x = \underbrace{\frac{1}{2}x}_{\in E} + \underbrace{\frac{1}{2}x}_{\in E}.$$

Définition 46 (Somme directe).

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

On dit que F et G sont en **somme directe** si pour tout élément de $F + G$, son écriture comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique :

$$\forall x \in F + G \quad \exists!(x_F, x_G) \in F \times G \quad x = x_F + x_G.$$

On pourra dire que x_F est la **composante** de x sur F et x_G la composante de x sur G .

Notation : lorsque F et G sont en somme directe, on note $F + G = F \oplus G$.

Proposition 47 (Caractérisation d'une somme directe).

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Alors

$$F + G = F \oplus G \iff F \cap G = \{0_E\}.$$

Condition pour que deux droites vectorielles de \mathbb{R}^2 soient en somme directe ?

Deux plans vectoriels de \mathbb{R}^3 peuvent-ils être en somme directe ?

Définition 48 (Supplémentaires).

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

On dit que F et G sont **supplémentaires** dans E , et on note $E = F \oplus G$, si tout élément de E s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G :

$$\forall x \in E \quad \exists!(x_F, x_G) \in F \times G \quad x = x_F + x_G.$$

Exemple 49 ($S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires).


Dans le cours sur les matrices, on a prouvé que toute matrice de $M_n(\mathbb{K})$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique. On a donc

$$M_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K}).$$

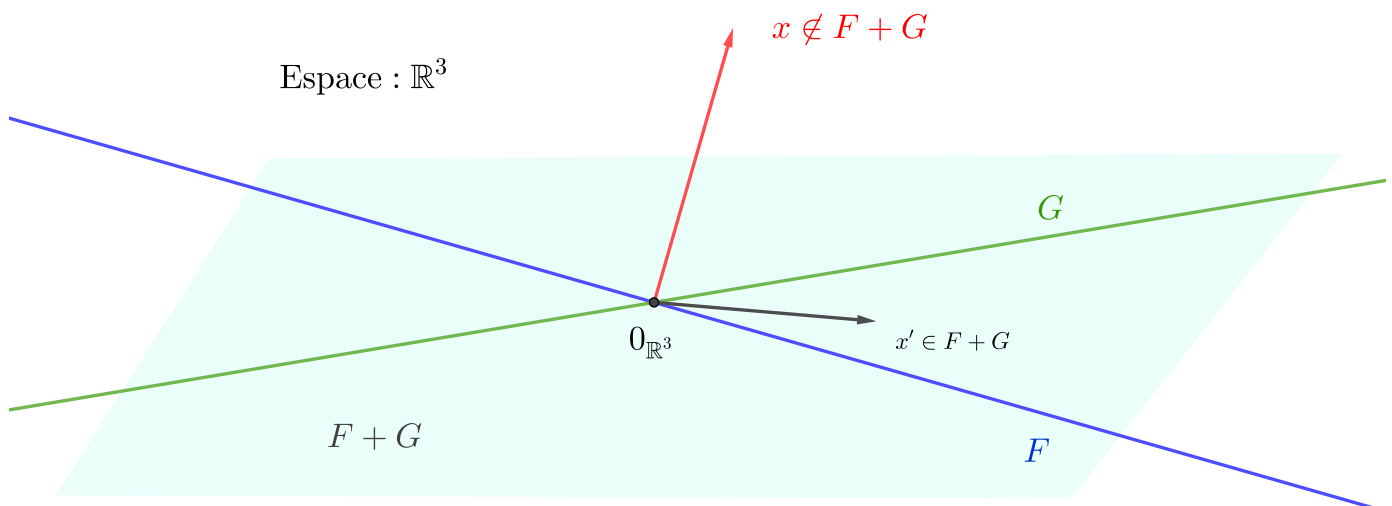
Proposition 50 (Caractérisation des supplémentaires).

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

$$E = F \oplus G \iff \begin{cases} E &= F + G \\ F \cap G &= \{0_E\}. \end{cases}$$

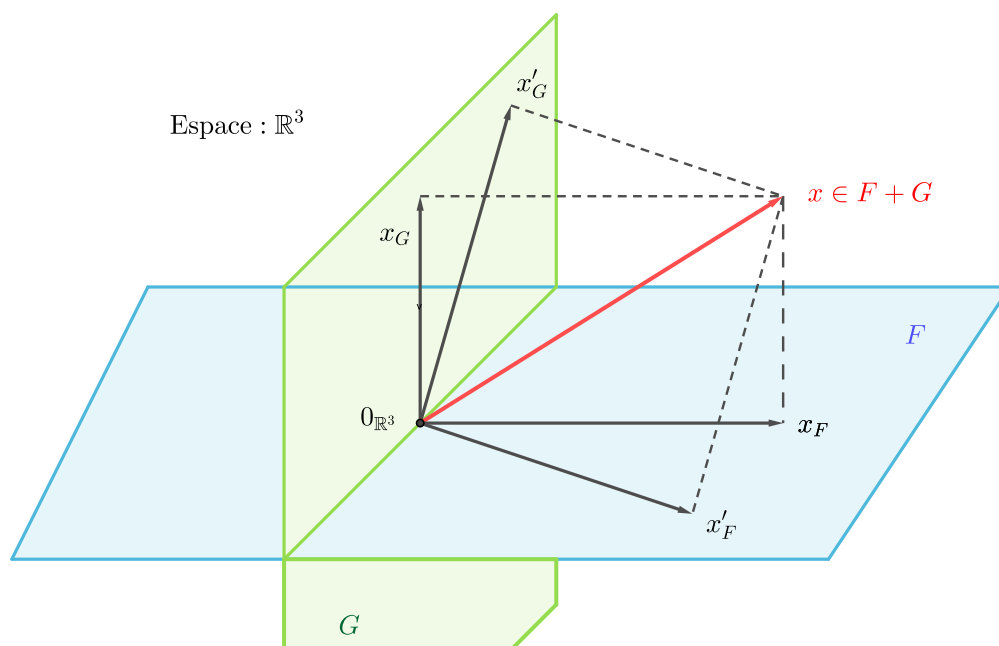
Somme, somme directe, supplémentaires... pour s'y retrouver, rien de tel que quelques  dans \mathbb{R}^3 :

Voici d'abord deux droites vectorielles F et G de \mathbb{R}^3 (non confondues)



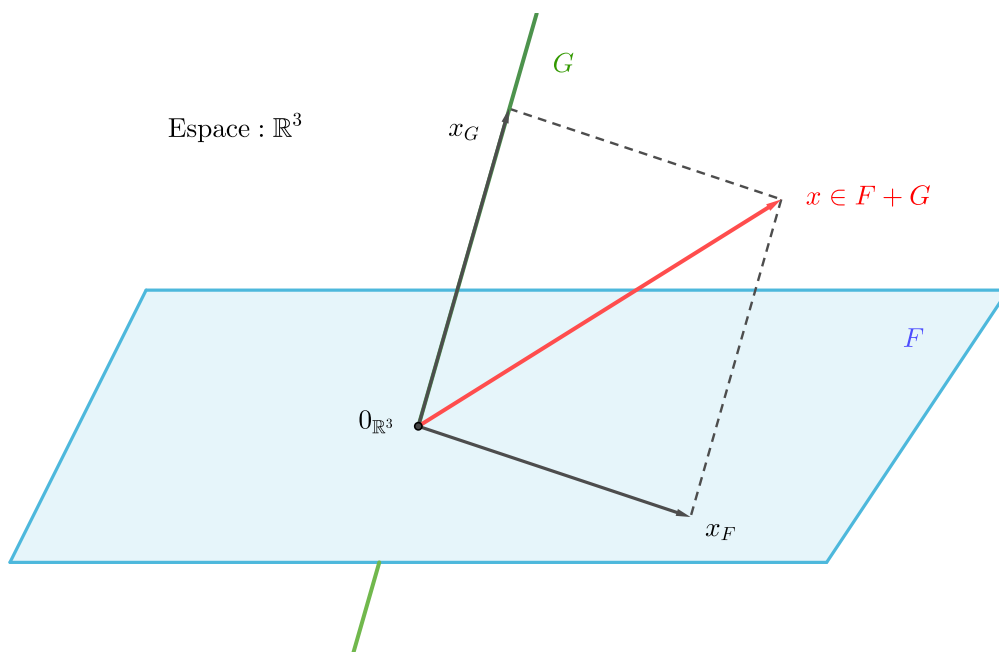
leur somme est directe mais $F + G \neq \mathbb{R}^3$.

Regardons ensuite deux plans vectoriels F et G de \mathbb{R}^3 (non confondus)



$\mathbb{R}^3 = F + G$ mais la somme n'est pas directe

Enfin, considérons dans \mathbb{R}^3 un plan vectoriel F et une droite vectorielle G non incluse dans F :



F et G sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 : $\boxed{\mathbb{R}^3 = F \oplus G}$ (*)

(*) Cela reste à prouver ! On attendra pour ça d'avoir les outils en lien avec la dimension.

Méthode (Montrer que deux s.e.v. F et G sont supplémentaires par analyse synthèse).

- On considère un vecteur $x \in E$.
- Analyse.
On suppose l'existence d'un couple de vecteurs $(x_F, x_G) \in F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$.
On tâche d'exprimer x_F et x_G à l'aide de x . On trouve un *unique* couple candidat (x_F, x_G) .
L'unicité de la décomposition est alors prouvée : on sait en fin d'analyse que F et G sont en somme directe.
- Synthèse. On définit le couple (x_F, x_G) conformément à l'analyse et on vérifie qu'il convient.
Plus précisément, on vérifie que $x_F \in F$, que $x_G \in G$, et enfin que $x = x_F + x_G$.

Exemple 51.

Soit $E = \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. On note $F_a = \{P \in E \mid P(a) = 0\}$. Montrer que

$$E = F_a \oplus \text{Vect}(1).$$

2 Familles de vecteurs.

2.1 Familles génératrices.

Définition 52 (Famille génératrice (cas d'une famille finie)).

On dit qu'une famille $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ **engendre** \mathbb{K} -espace vectoriel E (ou encore qu'elle est **génératrice**) si tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille :

$$\forall y \in E \quad \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \quad y = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i.$$

De façon équivalente, $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ engendre E si $E = \text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$.

Remarque. Si F est un s.e.v. d'un espace vectoriel E , parler de famille génératrice de F , c'est bien sûr parler d'une famille de vecteurs de F qui engendre l'espace vectoriel F .

Exemple 53 (Écrire un Vect, c'est trouver une famille génératrice).

Donner une famille génératrice de $S_2(\mathbb{R})$. Et pour $S_n(\mathbb{R})$?

Exemple 54 (Un espace, deux familles génératrices).

Dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{D}^2(\mathbb{R})$, on considère l'ensemble $F = \{y \in E \mid y'' - y = 0\}$.

1. Prouver que F est un sous-espace vectoriel de E et donner une famille génératrice de F .
2. Justifier que la famille (ch, sh) est aussi une famille génératrice de F .

Définition 55 (Partie/famille génératrice quelconque).

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

1. Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E . Elle engendre E si $E = \text{Vect}(x_i)_{i \in I}$, c'est à dire si

$$\forall y \in E \quad \exists n \in \mathbb{N}^* \quad \exists (i_1, \dots, i_n) \in I^n \quad \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad y = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_{i_k}.$$

2. Soit A une partie de E . Elle engendre E si $E = \text{Vect}(A)$, c'est-à-dire si

$$\forall y \in E \quad \exists n \in \mathbb{N}^* \quad \exists (x_1, \dots, x_n) \in A^n \quad \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad y = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k.$$

On a bien sûr que la famille $(x_i)_{i \in I}$ engendre E ssi la partie $\{x_i, i \in I\}$ engendre E .

Proposition 56 (Sur-famille d'une famille génératrice).

Toute *sur-famille* d'une famille génératrice est une famille génératrice.

Par exemple, $(\text{ch}, \text{sh}, \text{exp})$ est aussi une famille génératrice du sous-espace $F = \{y \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}) : y'' - y = 0\}$. Sur cette famille génératrice, il n'y a pas unicité de l'écriture d'un vecteur de F . Par exemple,

$$\text{exp} = 1 \cdot \text{ch} + 1 \cdot \text{sh} + 0 \cdot \text{exp} \quad \text{et} \quad \text{exp} = 0 \cdot \text{ch} + 0 \cdot \text{sh} + 1 \cdot \text{exp}.$$

La question de l'unicité de la décomposition d'un vecteur va être au coeur du paragraphe suivant.

2.2 Familles libres, liées.**Définition 57** (Famille libre, famille liée (cas d'une famille finie)).

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $p \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une famille $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ est **libre** si

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \quad \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i = 0_E \quad \implies \quad \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad \lambda_i = 0.$$

Une famille qui n'est pas libre est dite **liée**.

En français : (x_1, \dots, x_p) est libre si la seule combinaison linéaire nulle des vecteurs x_1, \dots, x_p est celle avec scalaires nuls. On dit aussi parfois des vecteurs d'une famille libre qu'ils sont **linéairement indépendants**.

Proposition 58 (Unicité de la décomposition sur une famille libre/Identifier les coefficients).

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et (x_1, \dots, x_p) une famille libre de E . Alors

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \quad \forall (\mu_1, \dots, \mu_p) \in \mathbb{K}^p \quad \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^p \mu_i x_i \quad \implies \quad \begin{cases} \lambda_1 = \mu_1 \\ \lambda_2 = \mu_2 \\ \dots \\ \lambda_p = \mu_p \end{cases}$$

Exemples 59 (Familles libres).

1. Dans l'espace $E = \mathcal{D}^2(\mathbb{R})$, montrer que (ch, sh) est libre, et que $(\text{ch}, \text{sh}, \exp)$ est liée.
2. On considère dans \mathbb{R}^3 les vecteurs

$$\vec{u}_1 = (0, 1, 1) \quad \vec{u}_2 = (1, 0, 1) \quad \vec{u}_3 = (1, 1, 0)$$

Montrer que $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une famille libre de \mathbb{R}^3 .

3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On se donne $(a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $a_1 < a_2, \dots < a_p$, et on définit p fonctions f_1, \dots, f_p par

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad f_i : x \mapsto e^{a_i x}.$$

Montrer que (f_1, \dots, f_p) est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Proposition 60 (Caractérisation des familles liées).

Une famille de vecteurs est liée ssi l'un des vecteurs s'écrit comme combinaison linéaire des autres.

Proposition 61 (Deux cas particuliers simples et courants).

1. Une famille composée d'un seul élément non nul est toujours libre.
2. Une famille contenant le vecteur nul est toujours liée.

Proposition 62.

Toute *sous-famille* d'une famille libre est une famille libre.

Toute *sur-famille* d'une famille liée est liée.

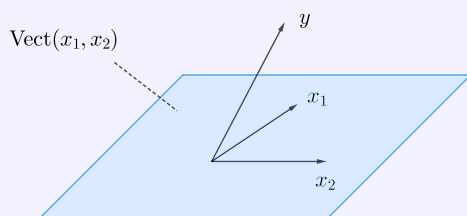
En ôtant des vecteurs à une famille libre, on garde donc une famille libre. Et lorsqu'on en ajoute ?

Proposition 63 (Ajout d'un vecteur à une famille libre).

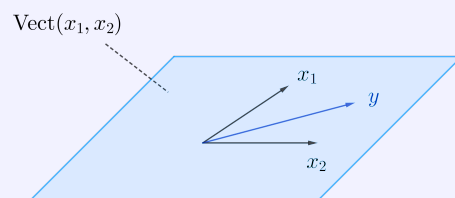
Soit (x_1, \dots, x_p) est une famille libre dans un \mathbb{K} -espace vectoriel E , et y un vecteur de E .

$$(x_1, \dots, x_p, y) \text{ est liée} \iff y \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_p).$$

$$(x_1, \dots, x_p, y) \text{ est libre} \iff y \notin \text{Vect}(x_1, \dots, x_p).$$



(x_1, x_2, y) libre

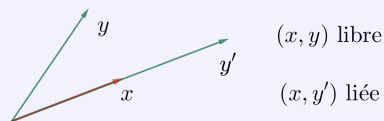


(x_1, x_2, y) liée

Corollaire 64 (Cas particulier de deux vecteurs).

Dans un \mathbb{K} -espace vectoriel E , une famille de deux vecteurs est liée si et seulement si ces vecteurs sont *colinéaires*. Plus précisément, si $(x, y) \in E^2$,

$$(x, y) \text{ est liée} \iff (x = 0_E \text{ ou } \exists \alpha \in \mathbb{K} \ y = \alpha x).$$

**Définition 65** (Famille libre, liée (cas d'une famille quelconque)).

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. On dit qu'une famille $(x_i)_{i \in I} \in E^I$ est **libre** si

$$\forall (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I \text{ presque nulle} \quad \sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0_E \implies \forall i \in I \quad \lambda_i = 0.$$

Une famille qui n'est pas libre est dite **liée**. Par convention la *famille vide* est libre.

Soit A une partie de E . Il est facile de créer une famille de vecteurs où l'on met tous les vecteurs de A : c'est la famille $(x_a)_{a \in A}$, où on note $x_a = a$ pour tout $a \in A$. On dit que la partie A est **libre** si $(x_a)_{a \in A}$ l'est.

Méthode (Montrer qu'une famille de vecteurs *quelconque* est libre (rare !)).

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs quelconque d'un espace vectoriel E .

Manipuler des familles de scalaires presque nulles revient à regarder des sous-familles **finies**. Ainsi, pour prouver que $(x_i)_{i \in I}$ est libre,

- on se donne n indices deux à deux distincts i_1, \dots, i_n dans I , où $n \in \mathbb{N}^*$,
- on prouve que $(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$ est libre.

La proposition suivante sert d'exemple.

Proposition 66 (Condition suffisante pour qu'une famille de polynômes soit libre).

Une famille de polynômes non nuls et de degrés deux à deux distincts est une famille libre.

Bien entendu, il existe des familles libres de polynômes où les degrés ne sont pas deux à deux distincts. Par exemple il est facile de voir que la famille $(X, X + 1)$ est libre.

Les résultats démontrés pour les familles libres finies se généralisent à des parties/familles quelconques de vecteurs.

- On peut « identifier » les scalaires face à l'égalité de deux combinaisons linéaires, pour une famille libre quelconque.
- Toute sous-famille d'une famille libre est libre. Toute sur-famille d'une famille liée est liée.
- Si A est libre et alors $A \cup \{x\}$ est libre ssi $x \notin \text{Vect}(A)$.

2.3 Bases.

Définition 67 (Base (cas d'une famille finie)).

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. On dit qu'une famille $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ est une **base** de E si tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille :

$$\forall y \in E \quad \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \quad y = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i.$$

On dit alors que $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ est le p -uplet de **coordonnées** de y dans la base (x_1, \dots, x_p) .

Exemple 68 (Base canonique de \mathbb{K}^n).

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, où le 1 est écrit sur la i ème coordonnée. Tout n -uplet (x_1, \dots, x_n) s'écrit

$$(x_1, \dots, x_n) = x_1(1, 0, \dots, 0) + x_2(0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + x_n(0, \dots, 0, 1) = \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

et cette décomposition est unique. La famille (e_1, \dots, e_n) est appelée **base canonique** de \mathbb{K}^n . Les coordonnées d'un n -uplet dans cette base sont tout simplement les coordonnées du n -uplet.

Exemple 69 (Base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$, de $\mathbb{K}[X]$).

Tout polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ s'écrit de manière unique $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, avec $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$.

La famille de monômes $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est appelée **base canonique** de $\mathbb{K}_n[X]$.

Les coordonnées d'un polynôme dans cette base sont tout simplement ses coefficients.

Exemple 70 (Base canonique de $M_{n,p}(\mathbb{K})$).

Pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui à la ligne i et à la colonne j qui vaut 1. La famille $(E_{i,j}, i \in \llbracket 1, n \rrbracket, j \in \llbracket 1, p \rrbracket)$ est une base de $M_{n,p}(\mathbb{K})$, dite **base canonique** de cet espace.

Les coordonnées d'une matrice dans cette base sont tout simplement ses coefficients.

Exemple 71.

La famille $(1, i)$ est une base du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} .

Quant au \mathbb{C} -espace vectoriel \mathbb{C} , la famille (1) en est une base.

Proposition 72 (Caractérisation des bases).

Dans un e.v., une famille de vecteurs est une base si et seulement si elle est libre et génératrice.

Exemple 73.

On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathcal{D}^2(\mathbb{R})$ ci-dessous :

$$F = \{y \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}) \mid y'' + y = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{y \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}) \mid y'' - y = 0\}$$

Donner une base de F et deux bases de G .

Le lien fait ci-dessous entre bases et supplémentaires servira dans le cours sur la dimension finie.

Lemme 74 (Construction de deux supplémentaires à partir d'une base).

Soit E un espace vectoriel admettant une base (e_1, \dots, e_n) , avec $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors

$$E = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p) \oplus \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n).$$

Définition 75 (Base (cas d'une famille quelconque)).

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. On dit qu'une famille $(x_i)_{i \in I} \in E^I$ est une **base** de E si

$$\forall y \in E \quad \exists! (\lambda_i) \in \mathbb{K}^I \text{ presque nulle} \quad y = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i.$$

Exemple 76 (Base canonique de $\mathbb{K}[X]$).

La famille $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$, appelée **base canonique**.

Exemple 77 (Base de).

Soit $a \in \mathbb{K}$. Justifier que la famille $((X - a)^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base de l'espace $\mathbb{K}[X]$.

Exemple 78 (Ceci n'est pas une base).

On définit $(e^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de suites réelles par

$$\forall (n, k) \in \mathbb{N}^2 \quad e_k^{(n)} = \delta_{n,k}.$$

La famille $(e^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mais n'est pas une base de cet espace : par exemple, la suite constante égale à 1 ne saurait s'écrire comme combinaison linéaire de ces vecteurs.

Exercices

Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels.

27.1 [◆◆◆] Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles.

Notons F l'ensemble des suites bornées et G l'ensemble des suites qui tendent vers 0.

1. Démontrer que G est un sous-espace vectoriel de E .
2. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E .
3. Pourquoi peut-on dire que G est un s.e.v. de F ?

27.2 [◆◆◆] Être ou ne pas être un sous-espace vectoriel.

Dans chacun des cas suivants, justifier que l'ensemble F_i donné est un s.e.v. de l'espace vectoriel E_i donné.

1. $E_1 = \mathbb{R}^3$ et $F_1 = \{(x, y, x + y), x, y \in \mathbb{R}\}$.
2. $E_2 = M_n(\mathbb{R})$ et $F_2 = \{M \in E_2 : \text{Tr}(M) = 0\}$.
3. $E_3 = M_n(\mathbb{R})$. On fixe $A \in M_n(\mathbb{R})$ et on définit $F_3 = \{M \in M_n(\mathbb{R}) : AM = MA\}$ (l'ensemble des matrices commutant avec la matrice A).

27.3 [◆◆◆] Fonctions à variations bornées.

Soit $E = \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} et

$$V = \{f - g, \quad f \text{ et } g \text{ croissantes sur } I\}.$$

Montrer que V est un sous-espace vectoriel de E .

27.4 [◆◆◆] Soit $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. On définit les trois vecteurs de \mathbb{C}^3

$$u = (1, j, j^2), \quad v = (1, j^2, j), \quad w = (j, j^2, 1).$$

Démontrer que

$$\text{Vect}(u, v, w) = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x + y + z = 0\}.$$

27.5 [◆◆◆] Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, et F et G deux s.e.v. de E . Montrer :

$$F \cup G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \iff F \subset G \text{ ou } G \subset F.$$

27.6 [◆◆◆] Soit $B \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul.

On considère $\rho : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \rightarrow \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto R \end{cases}$, où R est le reste dans la division euclidienne de P par B .

1. Prouver que ρ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.
2. Exprimer $\text{Im } \rho$ à l'aide de $b = \deg B$.
3. Décrire $\text{Ker } \rho$.

Sommes.

27.7 [◆◆◆] Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Notons P l'ensemble des fonctions paires sur \mathbb{R} et I celui des fonctions impaires.

1. Justifier que P et I sont deux sous-espaces vectoriels de E .
2. Par analyse-synthèse, démontrer que $E = P \oplus I$.

27.8 [◆◆◆] Soit E l'ensemble des suites réelles convergentes et F celui des suites réelles de limite nulle.

1. Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On admettra que de la même façon, F est un sous-espace vectoriel de E .
2. Soit c la suite constante égale à 1. Prouver que

$$E = F \oplus \text{Vect}(c).$$

27.9 [◆◆◆]

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}$. On note $P\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ divisibles par P .

1. Justifier que $P\mathbb{K}[X]$ est un sous-espace vectoriel de E .
2. Démontrer que $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}_{n-1}[X] \oplus P\mathbb{K}[X]$.

27.10 [◆◆◆] Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et F, G, H trois sous-espaces vectoriels de E tels que

$$\begin{cases} F + G = F + H = F + (G \cap H) \\ F \cap G = F \cap H \end{cases}$$

Montrer que $G = H$.

Familles de vecteurs.**27.11** [◆◆◆] Montrer les vecteurs $(1, 0, 1, 0)$, $(0, 1, 0, 1)$ et $(1, 2, 3, 4)$ forment une famille libre de \mathbb{R}^4 .**27.12** [◆◆◆] Montrer que les suites $u = (1)_{n \in \mathbb{N}}$, $v = (n)_{n \in \mathbb{N}}$, $w = (2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.**27.13** [◆◆◆] Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $q_1 < q_2 < \dots < q_p$ p réels strictement positifs.

Pour $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on note $a^{(k)}$ la suite géométrique de raison q_k et de premier terme 1.

Montrer que $(a^{(1)}, \dots, a^{(p)})$ est libre.

27.14 [◆◆◆] Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\text{Im}(f)$ est un ensemble infini.

Démontrer que $(f^i, i \in \mathbb{N})$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

27.15 [◆◆◆] Déterminer les fonctions $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ telles que :

1. f est dérivable et (f, f') est une famille liée ;
2. f est deux fois dérivable et (f, f', f'') est une famille liée.

27.16 [◆◆◆] Soit $u : E \rightarrow F$ une application linéaire et $(e_i)_{i \in I} \in E^I$.

1. Montrer que si u est injective et si $(e_i)_{i \in I}$ est libre, la famille $(u(e_i))_{i \in I}$ est libre.
2. Montrer que si u est surjective et si $(e_i)_{i \in I}$ engendre E , la famille $(u(e_i))_{i \in I}$ engendre F .

27.17 [◆◆◆] Pour chacun des ensembles ci-dessous, prouver qu'il s'agit d'un espace vectoriel et en donner une base.

$$F = \{\alpha X^3 + \beta X + \alpha + \beta, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}.$$

$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y + z - t = 0 \quad \text{et} \quad 2x + 4y + z + 3t = 0\}.$$

On pourra commencer par écrire chacun des ensembles comme un Vect.

27.18 [◆◆◆] Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P_k = \sum_{i=0}^k X^i$.

Démontrer que $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Quelles sont les coordonnées de $1_{\mathbb{R}[X]}$ dans cette base ? et celles de X^n ?

27.19 [◆◆◆] Interpolation de Lagrange

Soit (x_1, \dots, x_n) un n -uplet de réels deux à deux distincts et (L_1, \dots, L_n) la famille des polynômes de Lagrange associés.

Montrer que cette famille est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Donner les coordonnées d'un polynôme P sur cette base.