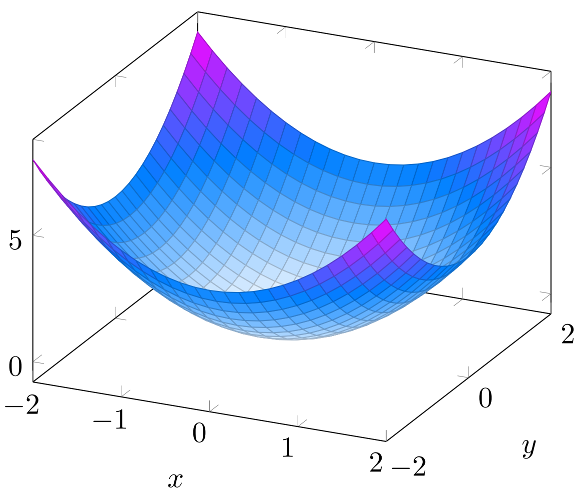
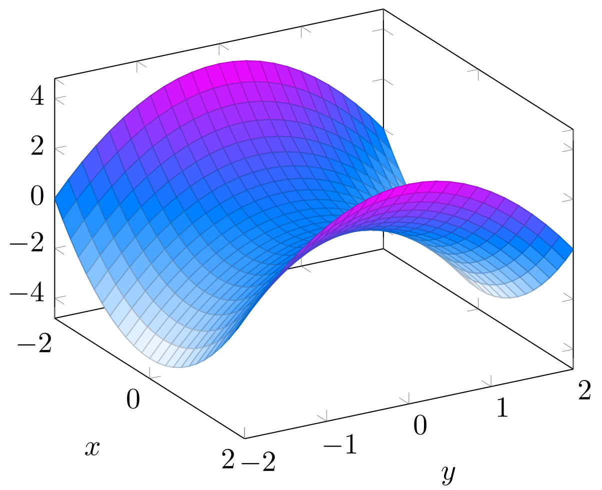
42 Fonctions de deux variables

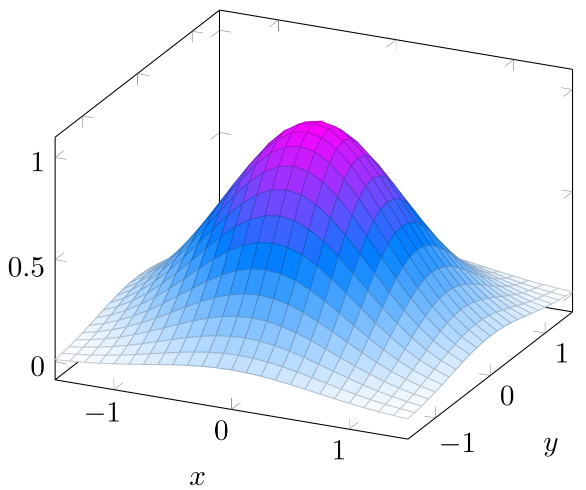
$z = x^2 + y^2$



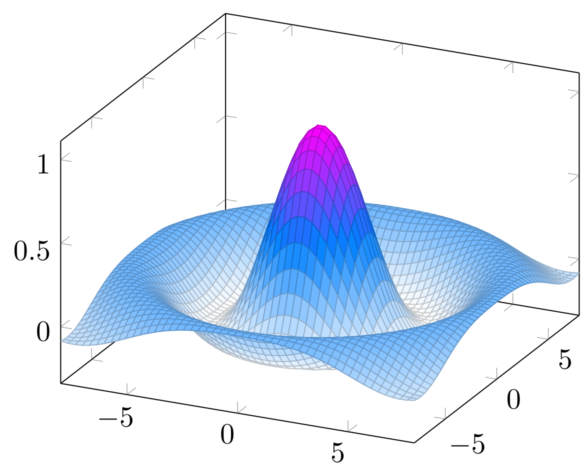
$z = x^2 - y^2$



$z = e^{-(x^2+y^2)}$



$z = \frac{\sin(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}$



Dans ce cours, on s'intéresse aux fonctions du type

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array} \right. , \quad \text{où } D \subset \mathbb{R}^2$$

L'ensemble des points (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ tels que $(x,y) \in D$ et $z = f(x,y)$ est une **nappe** ou **surface**, appelée représentation graphique de f.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est muni de son produit scalaire usuel, et $\|\cdot\|$ désignera la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R} \quad \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}.$$

1 Fonctions définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs réelles.

1.1 Ouverts de $\mathbb{R}^2$

Définition 1.

Soit $a \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$.

- On appelle **boule ouverte** de centre a et de rayon r l'ensemble

$$\mathcal{B}(a,r) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \quad \|x-a\| < r \right\}.$$

- On appelle **boule fermée** de centre a et de rayon r l'ensemble

$$\overline{\mathcal{B}}(a,r) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \quad \|x-a\| \leq r \right\}.$$

On pourrait bien entendu utiliser le mot *disque* ici, mais la notion de boule a vocation à être généralisée à $\mathbb{R}^n$ et même à des espaces vectoriels normés quelconques.

Exemple 2.

Représenter $\overline{\mathcal{B}}\left(0_{\mathbb{R}^2}, \frac{1}{2}\right)$. Représenter la boule ouverte de centre $(2,1)$ et de rayon 1.

Définition 3.

On dit qu'une partie X de $\mathbb{R}^2$ est un **ouvert** si

$$\forall x \in X \quad \exists r > 0 \quad \mathcal{B}(x,r) \subset X.$$

Exemple 4.

Dessiner un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Montrer qu'une boule ouverte de $\mathbb{R}^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Montrer qu'une intersection finie d'ouverts de $\mathbb{R}^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

1.2 Limite et continuité d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Définition 5.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$, $a \in U$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

On dit que f **tend vers** ℓ en a, noté $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \eta > 0 \qquad \forall x \in U \qquad \|x - a\| \leq \eta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

Il y a unicité de la limite, de sorte qu'on peut en parler, et noter ce nombre (éventuellement infini) $\lim_{x \to a} f(x)$. Toute fonction ayant une limite finie en a est bornée au voisinage de a.

Définition 6.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$, et $a \in U$ ainsi que $\ell \in \mathbb{R}$.

- On dit que f est **continue en** a si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$.
- On dit que f est **continue sur** U si f est continue en tout $a \in U$.

On pourrait donner une caractérisation séquentielle, puis prouver que l'ensemble des fonctions continues en a est stable par somme, produit... Il faudrait aussi s'occuper de composition. Cela attendra la spé !

2 Dérivées partielles.

2.1 Dérivées partielles, gradient.

Définition 7.

Soient U ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ et $a = (x_0, y_0) \in U$.

- On dit que f admet une **première dérivée partielle** en a si $x \mapsto f(x, y_0)$ est dérivable en x_0. Dans ce cas, on note $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ sa limite :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$
- On dit que f admet une **deuxième dérivée partielle** en a si $y \mapsto f(x_0, y)$ est dérivable en y_0. Dans ce cas, on note $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ sa limite :
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Regarder $x \mapsto f(x, y_0)$ pour y_0 fixé, ou $y \mapsto f(x_0, y)$ pour x_0 fixé, c'est privilégier deux directions dans l'approche de (x_0, y_0) celles des deux vecteurs de la base canonique : on verra en spé la notion de dérivée selon un vecteur quelconque.

Ces dérivées définissent des fonctions définies sur U :

$$\frac{\partial f}{\partial x} : (x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} : (x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y).$$

On pourra aussi noter $\partial_1 f$ la première dérivée partielle de f et $\partial_2 f$ sa seconde dérivée partielle.

Les règles de calcul des dérivées pour les fonctions d'une variable s'étendent, notamment la linéarité :

$$\partial_i (\lambda f + \mu g) = \lambda \partial_i f + \mu \partial_i g.$$

Définition 8.

Si $f : U \to \mathbb{R}$ admet des dérivées partielles en $a \in U$, on définit son **gradient** en a noté $\nabla f(a)$ ou parfois $\overrightarrow{\text{grad}} f(a)$ par

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) \end{pmatrix}$$

Méthode.

Calculer la première dérivée partielle, c'est par définition dériver $x \mapsto f(x, y)$ pour y *fixé* : on dérive en traitant y comme une constante.
Pour le calcul de la seconde dérivée partielle, c'est x qui est traité comme une constante.

Exemples 9.

1. $f : (x, y) \mapsto x^2 + x^2 y - 2y^2$. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ puis $\nabla f(1, 2)$.
2. Si g est dérivable sur $\mathbb{R}$, on pose $F(x, y) = g\left(\dfrac{y}{x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.
   Calculer $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y)$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y)$ et $\nabla F(x, y)$.

Exemple 10 (⚠).

Contrairement au cas d'une fonction d'une variable réelle, l'existence des dérivées partielles en a n'implique pas la continuité en a. On le constatera sur l'exemple ci-dessous :

f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\begin{cases} f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$ admet des dérivées partielles en $(0, 0)$ mais n'est pas continue en $(0, 0)$.

2.2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Définition 11.

Soit U ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$.
On dit que f est **de classe** $\mathcal{C}^1$ sur U si f possède deux dérivées partielles en tout point de U **et** que ces dérivées partielles sont continues sur U.
On note $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

Exemples 12.

1. Si I, J sont deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, $\psi \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R})$ alors la fonction $(x, y) \mapsto \varphi(x)\psi(y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \times J$ (qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$: exercice).
2. $(x, y) \mapsto \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
3. $(x, y) \mapsto \|(x, y)\|$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Proposition 13 (DL à l'ordre 1)**.**

Toute fonction $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ admet le DL à l'ordre 1 suivant en tout point $a = (x_0, y_0) \in U$

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \underset{(h,k)\to(0,0)}{=} f(x_0, y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o\left(\|(h, k)\|\right).$$

Ou encore

$$f(a + H) \underset{H\to(0,0)}{=} f(a) + \langle \nabla f(a), H\rangle + o\left(\|H\|\right).$$

Le gradient de f en a définit la direction dans laquelle f croît le plus vite au voisinage de a.

Corollaire 14 (non non, cela n'est pas si évident)**.**

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U y est continue.

Définition 15 (Plan tangent à la surface en un point)**.**

Soit f une fonction de $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. On considère un point $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ appartenant à la surface d'équation $z = f(x, y)$, c'est-à-dire tel que $(x_0, y_0) \in U$ et $z_0 = f(x_0, y_0)$.
Le plan d'équation

$$z - z_0 = (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

est appelé **plan tangent** en (x_0, y_0) à la surface $z = f(x, y)$.

Revenons à une courbe d'équation $y = f(x)$. En un point (x_0, y_0) de la courbe, la tangente offre la meilleure approximation par une droite affine, d'équation $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$. Ce que l'on donne ici, c'est la meilleure approximation de la surface par un plan affine.

3 Deux questions naturelles.

3.1 Comment dériver une composée ?

Théorème 16 (Règle de la chaîne (1)).

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soient $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathcal{C}^1(I, U)$.
Alors $F : t \mapsto f(x(t), y(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I avec

$$\forall t \in I \qquad F'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x(t), y(t)) = x'(t)\, \frac{\partial f}{\partial x}\, (x(t), y(t)) + y'(t)\, \frac{\partial f}{\partial y}\, (x(t), y(t)) \, .$$

$$\text{soit} \qquad \forall t \in I \quad (f \circ \gamma)'(t) = \langle \gamma'(t), \nabla f(\gamma(t)) \rangle.$$

On dit qu'on a calculé la dérivée de f suivant l'arc paramétré γ.

Exemple 17.

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Calculer la dérivée de $\varphi : t \mapsto f\left(t^3, \cos t\right)$.

Théorème 18 (Règle de la chaîne (2)).

Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$, φ_1 et φ_2 dans $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u, v) & \mapsto & (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v)) \end{array} \right.$.
Si $f \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R})$ et $\varphi(U) \subset V$, alors $f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et

$$\forall (u, v) \in U \qquad \begin{aligned} \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial u}(u, v) &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial f}{\partial x}\, (\varphi(u, v)) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial f}{\partial y}\, (\varphi(u, v)) \, . \\ \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial v}(u, v) &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u, v) \times \frac{\partial f}{\partial x}\, (\varphi(u, v)) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u, v) \times \frac{\partial f}{\partial y}\, (\varphi(u, v)) \, . \end{aligned}$$

Méthode (À la physicienne).

En notant $x(u, v) = \varphi_1(u, v)$ et $y(u, v) = \varphi_2(u, v)$,

$$\frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Exemple 19 (Changement de variable affine).

Soient a, b, c, d, e, f six réels et $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Calculer les dérivées partielles de

$$h : (x, y) \mapsto g(ax + by + c, dx + ey + f).$$

3.2 Que peut-on dire au sujet des extrema ?

Définition 20.

Soit $A \subset \mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}$ et $a \in A$. On dit que

- f admet un **maximum local** en a si $f(a)$ majore $f(A)$ au voisinage de a, soit
$$\exists r > 0 \qquad \forall x \in A \qquad \|x - a\| \leq r \Longrightarrow f(x) \leq f(a).$$
- f admet un **minimum local** en a si $f(a)$ minore $f(A)$ au voisinage de a, soit
$$\exists r > 0 \qquad \forall x \in A \qquad \|x - a\| \leq r \Longrightarrow f(x) \geq f(a).$$
- f présente un **extremum local** en a si elle y admet un maximum ou un minimum local.
- **Extremum global** : un maximum (resp. minimum) global est une valeur de f qui majore f (resp. minore f) sur toute la partie A.

Exemple 21.

$f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ présente un minimum global en $(0, 0)$.

Proposition 22.

Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $a \in U$.

Si f admet un extremum local en a, alors
$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0 \qquad \text{autrement dit} \qquad \nabla f(a) = (0, 0).$$
On dit alors que a est un **point critique**.

Exemple 23 (La réciproque est fausse !)**.**

Comme d'ailleurs pour les fonctions d'une seule variable, la réciproque est fausse.

Vérifier ainsi que $(0, 0)$ est un point critique de $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$ mais n'est pas un extremum. Observer ce point sur la première page de ce poly.

Exemples 24.

1. $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 2x - 4y$ admet un minimum global en un point de $\mathbb{R}^2$ à préciser.
2. La fonction $f : (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 6(x^2 - y^2)$ présente un minimum local en $(4, 0)$, un maximum local en $(0, -4)$. Les autres points critiques ne sont pas des extrema.

Exercices

$\boxed{42.1}$ **[♦◇◇]** Étudier l'existence des dérivées partielles pour les fonctions suivantes :

1. $(x,y) \mapsto \max(|x|,|y|)$
2. $(x,y) \mapsto |x|+|y|$
3. $(x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\boxed{42.2}$ **[♦◇◇]** Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. Calculer les dérivées (partielles éventuellement) des fonctions définies par

$g(x,y) = f(y,x)$ $\qquad h(x,y) = f(x,x)$ $\qquad j(x,y) = f(y,f(x,x))$ $\qquad k(x) = f(x,f(x,x))$

$\boxed{42.3}$ **[♦♦◇]** Soit h une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
Résoudre l'équation aux dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = h(x) \quad \text{sur } \mathbb{R}^2.$

$\boxed{42.4}$ **[♦♦◇]** Résoudre l'équation aux dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$, en utilisant le changement de variable $u = x+y$, $v = x-y$.

$\boxed{42.5}$ **[♦♦◇]** Résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},$$

en utilisant les coordonnées polaires.

$\boxed{42.6}$ **[♦♦◇]** Soit $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On définit la fonction associée en coordonnées polaires :

$$g : (r,\theta) \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta), \quad \text{définie sur } \mathbb{R}_+^* \times]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}[.$$

Pour $\theta \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, on définit la **base polaire** $(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta})$ par

$$\overrightarrow{u_r} = (\cos\theta,\sin\theta) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{u_\theta} = (-\sin\theta,\cos\theta)$$

Démontrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ puis que

$$\nabla f = \frac{\partial g}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta}.$$

$\boxed{42.7}$ **[♦♦◇]** Étudier les extrema locaux des fonctions suivantes :

1. $f : (x,y) \mapsto x^3+y^3$ sur $\mathbb{R}^2$
2. $f : (x,y) \mapsto x^2+y^2+\sin(x^2+y^2)$ sur $[-1,1]^2$
3. $f : (x,y) \mapsto x^2+3y^2+2xy-2x-10y+6$ sur $\mathbb{R}^2$
4. $f : (x,y) \mapsto e^{x\cos y}$ sur $\mathbb{R}^2$.
5. $f : (x,y) \mapsto x^3+5y^3+3x^2y+3xy^2-3y^2$ sur $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq y \leq 1\}$.
