Nombres réels

1 Ensembles de nombres inclus dans $\mathbb{R}$.

1.1 Nombres entiers.

Définition 1.

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ et $\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, \ldots\} \cup \{-1, -2, \ldots\}$ l'ensemble des entiers relatifs.

On admet les deux propositions suivantes :

Proposition 2.

L'ensemble des entiers relatifs est stable par somme, différence, et produit.

Proposition 3.

Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ ou de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément.
Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus petit élément.
En particulier, toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Définition 4.

Pour tout nombre réel x, on appelle **partie entière** de x, et on note $\lfloor x \rfloor$ le plus grand entier relatif inférieur à x :

$$\lfloor x \rfloor = \max \{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}.$$

Proposition 5.

Pour tout nombre réel x,
$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$
En « croisant » les inégalités, ceci implique notamment que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x.$$

On connaît le graphe de la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$. On avait démontré dans le cours sur les fonctions de la variable réelle que cette fonction est croissante (bon exercice).

Corollaire 6.

L'ensemble $\mathbb{R}$ possède la propriété dite d'Archimède : pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout réel positif $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n\varepsilon > x$.

1.2 Nombres décimaux.

Définition 7.

On appelle **nombre décimal** un nombre réel qui s'écrit sous la forme $\dfrac{p}{10^k}$, où $p \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$.
L'ensemble des nombres décimaux, est noté $\mathbb{D}$.

Définition 8 (généralisation)**.**

Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On appelle **fraction p-adique** un nombre réel qui s'écrit sous la forme $\dfrac{q}{p^k}$ où $q \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$.

Les fractions 2-adiques sont dites dyadiques. Les nombres "flottants" en info sont des dyadiques.

L'encadrement donné par la partie entière est à la précision 1. Ce qui suit généralise le principe et permet d'obtenir une précision arbitraire.

Proposition 9.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Le nombre $d_n(x) := \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ satisfait l'encadrement
$$d_n(x) \leq x < d_n(x) + 10^{-n}.$$
Les nombres $d_n(x)$ et $d_n(x) + 10^{-n}$ sont appelés respectivement **valeur décimale** par défaut (resp. par excès) de x à la précision 10^{-n}.

Exemple. Voici les valeurs décimales par défaut et par excès à la précision 10^{-3} de certaines constantes.

	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	π	e	$\ln(2)$
par défaut à 10^{-3} près	$1,000$	$1,414$	$1,732$	$3,141$	$2,718$	0.693
par excès à 10^{-3} près	$1,001$	$1,415$	$1,733$	$3,142$	$2,719$	0.694

Corollaire 10 ($\mathbb{D}$ est *dense* dans $\mathbb{R}$)**.**

Entre deux réels distincts, il existe toujours un nombre décimal :

$$\forall a < b \in \mathbb{R} \quad \mathbb{D} \cap]a, b[\neq \emptyset.$$

1.3 Nombres rationnels.

Définition 11.

Un nombre **rationnel** est un nombre réel qui s'écrit sous la forme d'un quotient d'entiers $\frac{p}{q}$, où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels.
On dit d'un nombre de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ qu'il est **irrationnel**.

Les nombres décimaux sont des nombres rationnels, et on peut écrire les inclusions

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

La dernière inclusion est stricte car il existe des nombres irrationnels. On a prouvé que $\sqrt{2}$ est irrationnel. Les nombres e et π sont aussi irrationnels (ce sera prouvé dans des exercices). On pense que la constante d'Euler γ est irrationnelle mais il s'agit toujours d'une conjecture.

Proposition 12.

L'ensemble des rationnels est stable par somme, produit, et passage à l'inverse.

Exemple 13.

Justifier que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ n'est PAS stable par somme, ni par produit.

Théorème 14 ($\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont *denses* dans $\mathbb{R}$)**.**

Entre deux réels distincts, il existe toujours un nombre rationnel et un irrationnel.
Autrement dit, pour tous a, b réels avec $a < b$,

$$]a, b[\cap \mathbb{Q} \neq \emptyset \quad \text{et} \quad]a, b[\cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset.$$

Autrement dit, tout intervalle ouvert non vide rencontre $\mathbb{Q}$:

2 Bornes d'une partie de $\mathbb{R}$.

2.1 Majorants, minorant, maximum, minimum.

Les quatre notions figurant dans le titre du paragraphe ont été définies pour une relation d'ordre quelconque.

On rappelle que si A est une partie de $\mathbb{R}$, un réel M est un **majorant** de A si tous les éléments de A sont inférieurs à M. Lorsqu'un tel réel existe, la partie A est dite **majorée**. Il n'y a pas unicité du majorant, bien sûr : si M est un majorant de A, alors M' en est un autre dès que $M \leq M'$.

Si A est un ensemble de réels, on parle de **maximum** de A au sujet d'un majorant qui appartient à A.
On sait que le maximum est unique lorsqu'il existe, mais certaines parties majorées n'ont pas de maximum.

Proposition 15 (Caractérisation des parties bornées de $\mathbb{R}$)**.**

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

$$A \text{ est bornée} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \mu \in \mathbb{R}_+ \ \forall x \in A \quad |x| \leq \mu.$$

2.2 Borne supérieure, borne inférieure.

Définition 16.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- On appelle **borne supérieure** de A et on note $\sup A$, le plus petit des majorants de A, lorsque ce nombre existe.
- On appelle **borne inférieure** de A et on note $\inf A$, le plus grand des minorants de A, lorsque ce nombre existe.

Implicite dans cette définition : l'*unicité* de la borne supérieure. On peut la montrer comme on avait prouvé celle d'un maximum. Pour ce qui concerne l'*existence*, commençons par examiner un cas simple.

Proposition 17.

Si une partie de $\mathbb{R}$ possède un maximum M, alors elle a une borne supérieure, qui vaut M.

Le théorème ci-dessous, admis, est une propriété fondamentale de $\mathbb{R}$.

Théorème 18 (Propriété de la borne supérieure/inférieure)**.**

Toute partie de $\mathbb{R}$ non-vide et majorée admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.
Toute partie de $\mathbb{R}$ non-vide et minorée admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$.

Remplacez $\mathbb{R}$ par $\mathbb{Q}$ dans les phrases précédentes et elles deviennent fausses : voir l'exercice 7

Proposition 19 (Caractérisation de la borne supérieure.)**.**

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence

$$\sup A = M \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} M \text{ est un majorant de } A \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : M - \varepsilon < x \leq M \end{cases}$$

Interprétons l'assertion commençant par $\forall \varepsilon\ \exists x \in A : M - \varepsilon < x \leq M$ dans ce qui précède : il est dit que l'on peut trouver un élément de A *aussi proche que l'on veut* de M.

Si on a compris pour la borne supérieure, on sait adapter pour la borne inférieure : pour A une partie non vide et minorée et α un réel,

$$\inf A = m \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} m \text{ est un minorant de } A \\ \dots \end{cases}$$

Exemple 20.

Soit $A = [0,1[$. Justifier l'existence de $\sup A$ puis la calculer.

Soit $B = \left\{ r \in \mathbb{Q} : r < \sqrt{2} \right\}$. Justifier l'existence de $\sup B$ puis la calculer.

Soit $C = \{1/n - 1/p,\ n, p \in \mathbb{N}^*\}$. Calculer $\sup C$ et $\inf C$, après avoir justifié qu'elles existent.

Méthode (Majorer une borne supérieure/"Passage au sup")**.**

Soient M un réel et A une partie de $\mathbb{R}$ possédant une borne supérieure. Pour démontrer l'inégalité

$$\sup A \leq M,$$

il suffira de montrer que M est un majorant de A ($\sup A$ étant le *plus petit* des majorants de A).

Exemple 21 (Calculs de bornes supérieures)**.**

Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$.
Justifier que $\sup A \leq \sup B$.

Remarque : Pour montrer que deux bornes supérieures sont égales, on pourra utiliser l'équivalence

$$\sup A = \sup B \quad \Longleftrightarrow \quad \sup A \leq \sup B \quad \text{et} \quad \sup B \leq \sup A.$$

Exemple 22 (Homogénéité du sup)**.**

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée et $\lambda \in \mathbb{R}_+$. On définit la partie $\lambda A := \{\lambda x \mid x \in A\}$.
Montrer l'égalité

$$\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A).$$

2.3 Retour sur la notion d'intervalle.

Définition 23.

On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est **convexe** si pour tout $a, b \in A$ avec $a < b$, on a $[a, b] \subset A$.

Proposition 24 (Caractérisation des intervalles)**.**

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont exactement les parties convexes de $\mathbb{R}$.

Preuve. Soit X une partie de $\mathbb{R}$.

• Supposons que X est un intervalle. Il est donc de l'un des trois types suivants.
  - un segment $[g, d] = \{x \in \mathbb{R} : g \leq x \text{ et } x \leq d\}$ où $g, d \in \mathbb{R}$.
  - un intervalle ouvert $]g, d[= \{x \in \mathbb{R} : g < x \text{ et } x < d\}$ où $g \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, d \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$,
  - un intervalle semi-ouvert, par exemple du type $]g, d] = \{x \in \mathbb{R} : g < x \text{ et } x \leq d\}$ où $g \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, d \in \mathbb{R}$

Dans les trois cas, on peut vérifier facilement que ces parties sont convexes.

• Supposons que X est convexe, c'est-à-dire satisfait : $\forall a, b \in X \quad [a, b] \subset X$.

⋆ Cas où X est vide. Alors X est un intervalle : l'intervalle $[0, -5]$ par exemple !

⋆ Cas où X est non vide, majorée et minorée. La partie X admet alors une borne supérieure, que l'on note d et une borne inférieure, que l'on note g. Ce sont respectivement un majorant, et un minorant de X, de sorte que
$$X \subset [g, d].$$
Soit $\varepsilon > 0$. D'après la caractérisation de la borne supérieure (et inférieure), il existe $\alpha \in X$ tel que $g \leq \alpha < g+\varepsilon$. Il existe $\beta \in X$ tel que $d-\varepsilon < \beta \leq d$. Si on a supposé de surcroît que $\varepsilon < \frac{d-g}{2}$, on a
$$g \leq \alpha < g + \varepsilon < d-\varepsilon < \beta \leq d.$$
Or, d'après l'hypothèse, le segment $[\alpha, \beta]$ est tout entier inclus dans X. Puisqu'il contient $[g + \varepsilon, d-\varepsilon]$, on a
$$[g + \varepsilon, d-\varepsilon] \subset X \subset [g, d].$$
Dans ce qui précède, le nombre ε, peut être pris arbitrairement petit, ce qui conduit à
$$]g, d[\subset X \subset [g, d],$$
$$\text{et donc} \qquad X =]g, d[\quad \text{ou} \quad X = [g, d[\quad \text{ou} \quad X =]g, d] \quad \text{ou} \quad X = [g, d].$$
On a bien montré que X est un intervalle.

⋆ Cas où X est non vide, majorée et non minorée. En adaptant les idées ci-dessus, le lecteur montrera que qu'il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que
$$X =]-\infty, d[\quad \text{ou} \quad X =]-\infty, d].$$

⋆ Cas où X est non vide, non majorée, et minorée. En adaptant les idées ci-dessus, le lecteur montrera que qu'il existe $g \in \mathbb{R}$ tel que
$$X =]g, +\infty[\quad \text{ou} \quad X = [g, +\infty[.$$

⋆ Cas où X est non vide, non majorée et non minorée. On peut alors montrer que $X =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

□

Exemple 25.

Démontrer qu'une intersection d'intervalles est un intervalle.

Exercices

$\boxed{\textbf{16.1}}$ **[♦◇◇]** Prouver que $\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est un nombre irrationnel.

$\boxed{\textbf{16.2}}$ **[♦♦◇]** Soient x et y deux rationnels positifs tels que que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ sont irrationnels.
Montrer que $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ est irrationnel.

$\boxed{\textbf{16.3}}$ **[♦◇◇]**

1. Montrer que
$$\forall (a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2 \quad : \quad \frac{a^2}{a+b}\geq\frac{3a-b}{4}.$$
Étudier le cas d'égalité.
2. En déduire que l'ensemble
$$E=\left\{\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a} \mid (a,b,c)\in(\mathbb{R}_+^*)^3 \text{ et } a+b+c\geq 2\right\}$$
admet un minimum et le calculer.

$\boxed{\textbf{16.4}}$ **[♦♦◇]** Calculer les bornes supérieures et inférieures des parties, après en avoir prouvé l'existence.

$$A=\left\{\frac{1}{n}+(-1)^n \mid n\in\mathbb{N}^*\right\},\quad B=\left\{\frac{m}{nm+1} \mid m\in\mathbb{N}^*, n\in\mathbb{N}^*\right\},\quad C=\left\{x^2+y^2 \mid (x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ et } xy=1\right\}.$$

$\boxed{\textbf{16.5}}$ **[♦♦◇]** Soit u une suite bornée et v la suite définie par
$$\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n=\sup\left\{u_k \mid k\in[\![n,+\infty[\![\right\}.$$
Justifier que v est bien définie et qu'elle est convergente.

$\boxed{\textbf{16.6}}$ **[♦♦♦]** Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On note $A+B:=\{x+y \mid x\in A, y\in B\}$.
Prouver l'égalité :
$$\sup(A+B)=\sup(A)+\sup(B)$$

$\boxed{\textbf{16.7}}$ **[♦♦♦]** [$\mathbb{Q}$ ne possède pas la propriété de la borne supérieure]
Justifier que $\left\{r\in\mathbb{Q} \mid r<\sqrt{2}\right\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{Q}$.
Démontrer qu'elle n'a pas de plus petit majorant dans $\mathbb{Q}$

$\boxed{\textbf{16.8}}$ **[♦♦♦]** Soit $f:[0,1]\longrightarrow[0,1]$ une application croissante. On pose
$$E=\{x\in[0,1]/f(x)\geq x\}$$

1. Montrer que E admet une borne supérieure notée a.
2. Montrer que E est stable par f.
3. Montrer que $f(a)=a$.
