Corrigé du DM 19

Correction par pair

$\boxed{\text{A}}$ Exo 1, question 1. La rédaction de la preuve du fait qu'une famille est libre : scalaire bien introduits, combinaison linéaire nulle posée correctement.

$\boxed{\text{B}}$ Même question : avoir vu qu'une évaluation en $-n$ permettait d'obtenir $\lambda_0 = 0$.

$\boxed{\text{C}}$ Même question sur l'itération : être convaincant en précisant quelle est la deuxième évaluation (en $-(n+1)$).

$\boxed{\text{D}}$ Exo 2, question 1-(a) : la caractérisation classique des s.e.v. est-elle bien rédigée ?

$\boxed{\text{E}}$ Exo 2, question 2-(a) : G a-t-il été correctement écrit comme un sev engendré par deux fonctions dont l'une est l'identité ? Si les fonctions sont mal écrites (par exemple écrire « x » à la place de l'identité) signalez-le à votre camarade.

$\boxed{\text{F}}$ Exo 2, question 3 : contrôlez la rédaction logique de l'analyse-synthèse.
On commence par fixer une fonction dans E.
Dans l'analyse, on <u>suppose</u> que deux fonctions existent.
Dans la synthèse, on les <u>définit</u>.

$\boxed{\text{G}}$ Exo 3, question 1. Montrer qu'une application est linéaire : une méthode de base.

$\boxed{\text{H}}$ Exo 3, question 3. Même si on n'a pas réussi la question 2, on pouvait admettre le résultat et prouver que le noyau est trivial.

Exercice 1. Sur la notion de famille libre.

1. Soient $(\lambda_0, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Supposons $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i = 0$. Observons :

$$\begin{aligned} P_0 &= X(X+1)\cdots(X+n-1) \\ P_1 &= (X+1)\cdots(X+n) \\ &\cdots \\ P_n &= (X+n)\cdots(X+2n-1) \end{aligned}$$

On remarque que $-n$ est racine de $P_1, \ldots, P_n$ et pas de P_0 : évaluons la combinaison linéaire nulle en $-n$:

$$\lambda_0 \prod_{k=0}^{n-1}(-n+k) + 0 = 0,$$

ce qui amène $\boxed{\lambda_0 = 0}$ puisque le produit est non nul. On évalue en $-(n+1)$ pour obtenir $\boxed{\lambda_1 = 0}$ et on itère. Tous les scalaires sont nuls et <u>la famille est libre</u>.

2. (a) <u>Cas $a = 0$.</u> $I_0 = \dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_{-T}^{T} 1\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2T}2T = 1.$
Dans ce cas, bien sûr, $I_a(T)$ tend vers 1 quand $T \to +\infty$. <u>Cas $a \neq 0$.</u> On calcule

$$I_a(T) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{iat}\mathrm{d}t = \frac{1}{2T}\left[\frac{e^{iat}}{ia}\right]_{-T}^{T} = \frac{e^{iaT} - e^{-iaT}}{2iaT} = \frac{\sin(aT)}{aT}.$$

Dans ce cas, nous avons $|I_a(T)| \leq \frac{1}{T}$ et $I_a(T)$ tend vers 0 quand $T \to +\infty$.

On a bien $\boxed{I_a(T) \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} \delta_{a,0}}$.

(b) Soient p scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ dans $\mathbb{C}$. On suppose que

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_k f_k = 0.$$

Isolons un des scalaires : fixons un indice j entre 1 et p. Puisque f_j est une fonction qui ne s'annule pas, on peut diviser par f_j et obtenir

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \lambda_j + \sum_{k\neq j} \lambda_k e^{i(a_k - a_j)t} = 0.$$

On intègre entre $-T$ et T (et on renormalise)

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(\lambda_j + \sum_{k\neq j}\lambda_k e^{i(a_k-a_j)t}\right)\mathrm{d}t = 0.$$

Par linéarité de l'intégrale, on obtient

$$\lambda_j I_0(T) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_k I_{a_k - a_j}(T) = 0.$$

On fait tendre T vers $+\infty$. D'après la question (a), cela laisse

$$\lambda_j + 0 = 0.$$

Ceci étant vrai pour tout j, on a bien montré que $\boxed{(f_1, \ldots, f_p) \text{ est libre}}$.

3. Nous allons considérer une combinaison linéaire nulle de la famille. Puisqu'elle doit être à support fini, donnons-nous directement un nombre fini $p_1, \ldots, p_r \in \mathcal{P}$, ainsi que $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{Q}$ et supposons que

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \ln(p_i) = 0.$$

Quitte à multiplier cette combinaison linéaire par le PPCM des dénominateurs des λ_i (préalablement écrits sous la forme de quotients d'entiers), nous pouvons (et nous allons !) dorénavant supposer que les λ_i sont des entiers relatifs. Notons

$$P = \{i \in [\![1,r]\!] \quad \lambda_i \geq 0\} \qquad \text{et} \qquad N = \{i \in [\![1,r]\!] \quad \lambda_i < 0\}.$$

On a

$$\sum_{i\in P} \lambda_i \ln(p_i) = \sum_{j\in N} (-\lambda_j)\ln(p_j).$$

Passons à l'exponentielle : on obtient

$$\prod_{i\in P} p_i^{\lambda_i} = \prod_{j\in N} p_j^{-\lambda_j}.$$

On obtient deux décompositions d'un entier naturel comme produit de nombres premiers. Les nombres premiers écrits de part et d'autre de l'égalité étant distincts, l'unicité de la décomposition dans le théorème fondamental de l'arithmétique donne que tous les λ_i doivent être nuls (N est donc vide), ce qu'il fallait démontrer.

En dimension finie, le cardinal des famille libres est majoré (par la dimension de l'espace) Étant face à une famille libre infinie du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$, nous constatons que $\mathbb{R}$, sur le corps $\mathbb{Q}$, est un espace vectoriel de dimension infinie !

Exercice 2 Supplémentaires.

1. Preuve du fait que F est un sous-espace vectoriel de E.
   (a) Avec la caractérisation classique.
   • La fonction nulle est dans F : si on la note ici n, on a $n(0) = n'(0) = 0$.
   • Vérifions que F est stable par combinaison linéaire. Pour cela considérons deux fonctions f et g dans F, et deux scalaires réels λ et μ. On a
   $$(\lambda f + \mu g)(0) = \lambda f(0) + \mu g(0) = 0 \quad \text{et} \quad (\lambda f + \mu g)'(0) = \lambda f'(0) + \mu g'(0) = 0.$$
   Ceci montre que $\lambda f + \mu g \in F$.
   (b) En utilisant des noyaux.
   On peut redémontrer que F est un sous-espace vectoriel de E en remarquant que
   $$F = \mathrm{Ker}\varphi \cap \mathrm{Ker}\psi,$$
   où on pose $\varphi : f \mapsto f(0)$ et $\psi : f \mapsto f'(0)$ et dont on vérifie qu'il s'agit d'applications linéaires de E vers $\mathbb{R}$ (des *formes linéaires*).

   Faisons-le pour φ : on considère $(f, g) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et on calcule
   $$\varphi(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)(0) = \lambda f(0) + \mu g(0) = \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g).$$
2. (a) On a $G = \mathrm{Vect}(\mathbf{1}, \mathrm{id})$ où $\mathbf{1}$ est la fonction constante égale à 1 et id l'identité sur $\mathbb{R}$. Ceci prouve donc que G est un sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $(\mathbf{1}, \mathrm{id})$.
   (b) Cette famille génératrice est libre ($\mathbf{1}$ n'est pas nulle et si id était colinéaire à $\mathbf{1}$, elle serait constante). C'est donc une base de G, qui est donc de dimension 2.
3. Soit $u \in E$.
   Analyse. Supposons l'existence d'un couple $(f, g) \in F \times G$ tel que $u = f + g$.
   On cherche à exprimer f et g à l'aide de u.
   Puisque $g \in G$, c'est une fonction affine : il existe deux réels a et b tels que $g : x \mapsto ax + b$. On a
   $$u(0) = f(0) + g(0) = 0 + b \qquad \text{et} \qquad u'(0) = f'(0) + g'(0) = 0 + a.$$
   On obtient donc $g : x \mapsto u'(0)x + u(0)$, puis $f : x \mapsto u(x) - (u'(0)x + u(0))$.
   Ceci prouve l'unicité du couple (f, g).
   Synthèse. Posons $g : x \mapsto u'(0)x + u(0)$ et $f : x \mapsto u(x) - (u'(0)x + u(0))$.
   Il est clair que $f + g = u$, que $g \in G$ et on vérifie sans peine que $f \in F$ en vérifiant que $f(0) = f'(0) = 0$.
   Conclusion. Le vecteur u se décompose de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. Ceci prouve bien que $\boxed{E = F \oplus G}$.

Exercice 3. Une application linéaire.

1. Soient f et g deux fonctions de E et λ et μ deux réels. On calcule

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda f+\mu g) &= \int_0^1 |x-t|(\lambda f(t)+\mu g(t))\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda\int_0^1 |x-t|f(t)\mathrm{d}t+\mu\int_0^1 |x-t|g(t)\mathrm{d}t \\ &= \lambda\Phi(f)+\mu\Phi(g).\end{aligned}$$

L'ingrédient principal : la linéarité de Φ.
Ceci démontre que $\boxed{\Phi \text{ est une application linéaire}}$.
Remarque : on verra en question 2 que pour f continue sur $[0,1]$, $\Phi(f)$ est aussi une fonction continue et montrer ainsi que Φ est un endomorphisme de E.

2. Pour $x\in[0,1]$, on va se débarrasser de la valeur absolue à l'aide de la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\Phi(f)(x) &= \int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t+\int_x^1 (t-x)f(t)\mathrm{d}t \\ &= x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^t f(t)\mathrm{d}t-\int_1^t f(t)\mathrm{d}t+x\int_1^x f(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

On rappelle que si u est continue sur un intervalle I, et que $a\in I$, la fonction $x\leftarrow\int_a^x u(t)\mathrm{d}t$ est une primitive de u sur I. On va utiliser ce théorème fondamental avec $u=f$ et aussi $u:t\mapsto tf(t)$, et avec $a=0$ et $a=1$: on obtient que $\Phi(f)$ est dérivable sur $[0,1]$, ainsi que

$$\begin{aligned}\Phi(f)'(x) &= \int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\cancel{xf(x)}-\cancel{xf(x)}-\cancel{xf(x)}+\cancel{xf(x)}+\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_1^x f(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

En utilisant à nouveau le théorème fondamental, on voit que $\Phi(f)'$ est dérivable et que

$$\Phi(f)''(x)=f(x)+f(x)=2f(x).$$

Cette dérivée seconde est continue.
On a bien prouvé que $\Phi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ et que $\boxed{(\Phi(f))''=2f}$.

3. Soit $f\in\mathrm{Ker}(\Phi)$. Alors $\Phi(f)$ est la fonction nulle, et sa dérivée seconde est aussi la fonction nulle. Or, on a aussi $(\Phi(f))''=2f$. Ceci laisse $f=0$.
$\boxed{\text{Le noyau de } \Phi \text{ est réduit à } \{0\} : \Phi \text{ est injective.}}$