Exercice 1. Sur la notion de famille libre.

Les questions de cet exercice sont indépendantes et classées par ordre de difficulté.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on définit
$$P_i = \prod_{k=0}^{n-1} (X + i + k).$$
Démontrer que la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $T \in \mathbb{R}_+^*$. On définit $I_a(T) = \dfrac{1}{2T} \displaystyle\int_{-T}^{T} e^{iat} \mathrm{d}t$.
   (a) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $T \in \mathbb{R}_+^*$. On définit $I_a(T) = \dfrac{1}{2T} \displaystyle\int_{-T}^{T} e^{iat} \mathrm{d}t$.
   Calculer $I_a(T)$ lorsque $a = 0$. Exprimer $I_a(T)$ pour $a \neq 0$.
   Vérifier que $I_a(T) \underset{T \to +\infty}{\longrightarrow} \delta_{a,0}$.
   (b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soient $a_1, \ldots, a_p$ des réels deux à deux distincts. On pose :
   $$\forall k \in [\![1, p]\!] \quad f_k : x \mapsto e^{i a_k x}.$$
   Démontrer que $(f_1, \ldots, f_p)$ est libre dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

3. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.
Montrer que la famille $(\ln(p))_{p \in \mathcal{P}}$ est libre dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$.
Qu'apprend-on au passage sur le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$?

Exercice 2. Supplémentaires.

Soit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose
$$F = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\} \quad \text{et} \quad G = \left\{x \mapsto ax + b \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

1. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E...
   (a) en utilisant la caractérisation des sous-espaces vectoriels ;
   (b) en faisant intervenir la notion de noyau.
2. (a) En utilisant la notion de Vect, prouver que G est un sous-espace vectoriel de E et en donner une faille génératrice.
   (b) *Justifier que G est de dimension finie. Que vaut* $\dim(G)$ *?*
3. Démontrer que $E = F \oplus G$.

Exercice 3. Une application linéaire.

Pour tout $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, on définit la fonction $\Phi(f)$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ comme suit :
$$\forall x \in [0, 1], \quad \Phi(f)(x) = \int_0^1 |x - t| f(t)\, dt$$

1. Montrer que Φ est linéaire.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Montrer que $\Phi(f) \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$ et que $(\Phi(f))'' = 2f$.
3. Déterminer $\mathrm{Ker}(\Phi)$. Qu'en déduire sur Φ ?