

## Problème.

### Partie I - Préliminaires

1.  $D$  est une application de  $\mathbb{R}[X]$  vers lui-même.

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2 \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad D(\lambda P + \mu Q) = \lambda P' + \mu Q' = \lambda D(P) + \mu D(Q).$$

$$D \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$$

Par ailleurs, si  $Q = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ , en posant  $P = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1} X^{k+1} \in \mathbb{R}[X]$  on obtient  $D(P) = Q$ .

$$D \text{ est surjectif.}$$

2. (a) Puisque  $\deg P = n$ , on sait que  $\deg P^{(k)} = n - k$  pour  $0 \leq k \leq n$ . La famille considérée est donc une famille de polynômes non nuls, à degrés deux à deux distincts : elle est libre.  
(b) Pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\deg(P^{(k)}) = n - k \leq n$ . Donc  $\mathcal{B}_P$  est une famille de vecteurs de  $\mathbb{R}_n[X]$ .  
Par conséquent,  $\mathcal{B}_P$  est une famille libre de  $n + 1$  vecteurs de  $\mathbb{R}_n[X]$  et  $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1$ . Par caractérisation des bases d'un espace vectoriel de dimension finie :

$$\mathcal{B}_P \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].$$

### Partie II - Sous-espaces stables par $D$

3. si les degrés des polynômes de  $F$  sont bornés

On suppose que  $F \neq \{0\}$  et qu'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$F \subset \mathbb{R}_N[X].$$

- (a) • L'ensemble  $\{\deg P \mid P \in F, P \neq 0\}$  est une partie non vide ( $F \neq \{0\}$ ) et majorée (par  $N$ ) de  $\mathbb{N}$ . Elle admet donc un plus grand élément que l'on note  $n$ .  
• Soit  $P \in F$  tel que  $\deg P = n$  (il en existe par définition de  $n$ ).  
Puisque  $P \in F$  et  $F$  est stable par  $D$ , on sait que  $P' = D(P) \in F$ ,  $P'' = D(P') \in F$ , ...,  $P^{(n)} \in F$ . La famille  $\mathcal{B}_P$  est bien une famille de vecteurs de  $F$ .

- (b) • Par définition de  $n$  :  $F \subset \mathbb{R}_n[X]$ .

• On sait que  $\mathcal{B}_P$  est une famille de vecteurs de  $F$ . Donc  $\text{Vect} \mathcal{B}_P \subset F$ .  
Or  $\mathcal{B}_P$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ , d'après 1. En particulier  $\text{Vect} \mathcal{B}_P = \mathbb{R}_n[X]$ .

Il reste  $\mathbb{R}_n[X] \subset F$ .

4. si les degrés des polynômes de  $F$  ne sont pas bornés

On suppose que pour tout  $N \in \mathbb{N}$  il existe  $P \in F$  tel que  $\deg P > N$ .

Soit  $N \in \mathbb{N}$  et  $P \in F$  tel que  $\deg P = n > N$ .

Comme à la question précédente :  $\text{Vect} \mathcal{B}_P = \mathbb{R}_n[X] \subset F$ . Puisque  $\mathbb{R}_N[X] \subset \mathbb{R}_n[X]$  il vient

$$\mathbb{R}_N[X] \subset F.$$

Par conséquent

$$\mathbb{R}[X] = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \mathbb{R}_N[X] \subset F.$$

L'inclusion réciproque est connue.

$$F = \mathbb{R}[X]$$

5. conclusion

D'après les deux questions précédentes, si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}[X]$  stable par  $D$  alors

— ou bien  $F = \{0\}$  ;

— ou bien il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $F = \mathbb{R}_n[X]$  ;

— ou bien  $F = \mathbb{R}[X]$ .

Réciproquement, ces sous-espaces sont bien stables par  $D$ .

### Partie III - Une condition suffisante pour que $D^m$ admette une racine $k^e$ .

On se donne deux entiers naturels non nuls  $m$  et  $k$  tels que  $k$  divise  $m$ .

6. Soit  $\ell \in \mathbb{N}^*$  tel que  $m = k\ell$ . On pose

$$g = D^\ell.$$

On a bien  $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$  et  $g^k = D^{\ell k} = D^m$ .

#### Partie IV - Cette condition suffisante est nécessaire

On se donne deux entiers naturels non nuls  $m$  et  $k$ .

On suppose qu'il existe un endomorphisme  $g$  de  $\mathbb{R}[X]$  tel que

$$g^k = D^m.$$

$$7. \text{ Ker}(g^k) = \text{Ker} D^m = \{P \in \mathbb{R}[X] : P^{(m)} = 0\} = \boxed{\mathbb{R}_{m-1}[X]}.$$

8.  $D$  étant surjective,  $D^m$  aussi par composition. Par conséquent,  $g^k$  est surjective. Pour tout  $Q \in \mathbb{R}[X]$ , il existe  $R \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $Q = g^k(R) = g(g^{k-1}(R))$ . En posant  $P = g^{k-1}(R)$  :

$$\forall Q \in \mathbb{R}[X] \quad \exists P \in \mathbb{R}[X] \quad : \quad Q = g(P).$$

$\boxed{g \text{ est surjective}}$

9. Soit  $P \in \text{Ker}(g^i)$ . Alors  $g^k(x) = g^{k-i}(g^i(x)) = g^{k-i}(0) = 0$  (c'est possible car  $k - i \geq 0$ ). Ainsi  $P \in \text{Ker}(g^k)$ . Cela montre que

$$\text{Ker}(g^i) \subset \text{Ker}(g^k) = \mathbb{R}_{m-1}[X].$$

Puisque  $\mathbb{R}_{m-1}[X]$  est de dimension finie, on sait que

$\boxed{\text{Ker}(g^i) \text{ est de dimension finie}}.$

10. (a) • Soit  $P \in \text{Ker}(g^i)$ . De  $g^{i-1}(g(x)) = 0$  on déduit que  $g(x) \in \text{Ker}(g^{i-1})$ . Cela justifie que la fonction

$\boxed{\phi_i \text{ est bien définie}}.$

• La linéarité de  $\phi_i$  découle de la linéarité de  $g$ .

(b)

$$\begin{aligned} P \in \text{Ker} \phi_i &\iff (P \in \text{Ker}(g^i) \text{ et } g(P) = 0) \\ &\iff P \in \text{Ker}(g^i) \cap \text{Ker} g \\ &\iff P \in \text{Ker} g \quad \text{car } \text{Ker} g \subset \text{Ker}(g^i) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ker} \phi_i = \text{Ker} g}$$

(c) Soit  $Q \in \text{Ker}(g^{i-1})$ . Puisque  $g$  est surjective, il existe  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $Q = g(P)$ . De  $g^{i-1}(Q) = 0$  on déduit  $g^{i-1}(g(P)) = 0$ , c'est-à-dire  $g^i(P) = 0$ . Autrement dit  $P \in \text{Ker}(g^i)$  et  $Q = g(P) = \phi_i(P)$  :

$$\forall Q \in \text{Ker}(g^{i-1}) \quad \exists P \in \text{Ker}(g^i) \quad : \quad Q = \phi_i(P).$$

Cela montre que

$\boxed{\phi_i \text{ est surjective}}.$

(d) L'espace vectoriel  $\text{Ker}(g^i)$  est de dimension finie. On applique le théorème du rang à l'application linéaire  $\phi_i$  :

$$\dim \text{Ker}(g^i) = \dim \text{Ker} \phi_i + \text{rg} \phi_i = \dim \text{Ker} g + \dim \text{Im} \phi_i.$$

Or  $\text{Im} \phi_i = \text{Ker}(g^{i-1})$  car  $\phi_i$  est surjective.

$$\boxed{\dim \text{Ker}(g^i) = \dim \text{Ker} g + \dim \text{Ker}(g^{i-1})}$$

11. • Notons  $d = \dim \text{Ker} g$ . On vient de montrer que

$$\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket \quad : \quad \dim \text{Ker}(g^i) = \dim \text{Ker}(g^{i-1}) + d.$$

On reconnaît une suite arithmétique de premier terme  $\dim \text{Ker}(g^0) = 0$  et de raison  $d = \dim \text{Ker} g$ . On obtient

$$\boxed{\forall i \in \llbracket 0, k \rrbracket \quad \dim \text{Ker} g^i = i \dim \text{Ker} g}.$$

• On sait donc que

$$m = \dim \mathbb{R}_{m-1}[X] = \dim \text{Ker}(g^k) = k \dim \text{Ker} g.$$

Puisque  $\dim \text{Ker} g$  est un entier :

$$\boxed{k \mid m}.$$

**Exercice. (\*)**

1. Soit  $V$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . On note  $q$  sa dimension et on définit

$$\mathcal{L}_V(E, F) = \{u \in \mathcal{L}(E, F) \mid V \subset \text{Ker}(u)\}.$$

- (a) On considère  $u$  et  $v$  dans  $\mathcal{L}_V(E, F)$  et  $\lambda$  et  $\mu$  deux scalaires.  
 Montrons que  $\lambda u + \mu v \in \mathcal{L}_V(E, F)$ , c'est-à-dire que  $V \subset \text{Ker}(\lambda u + \mu v)$ .  
 Soit  $x \in V$ . On a  $(\lambda u + \mu v)(x) = \lambda u(x) + \mu v(x)$ .  
 Or,  $u(x) = 0_F$  car  $V \subset \text{Ker}(u)$  et  $v(x) = 0_F$  car  $V \subset \text{Ker}(v)$ .  
 On a donc  $(\lambda u + \mu v)(x) = 0_F$ , ce qui donne  $x \in \text{Ker}(\lambda u + \mu v)$ , CQFD.

- (b) L'énoncé suggère de s'intéresser à  $\Phi : \begin{cases} \mathcal{L}(E, F) & \rightarrow & \mathcal{L}(V, F) \\ u & \mapsto & u|_V \end{cases}$ .

Il est facile de vérifier que  $\Phi$  est une application linéaire.

Puisque  $\mathcal{L}(E, F)$  est de dimension finie (égale à  $np$ ), on peut appliquer le théorème du rang, qui donne

$$\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim \text{Ker} \Phi + \dim \text{Im} \Phi. \quad (*)$$

- Le noyau de  $\Phi$  est l'ensemble des applications nulles sur  $V$  : c'est  $\mathcal{L}_V(E, F)$ .
- L'application  $\Phi$  est clairement surjective.  
 Pour le montrer, fixons  $W$  un supplémentaire de  $V$  dans  $E$  et considérons une application  $v \in \mathcal{L}(V, F)$ , il existe une (unique mais peu importe ici) application linéaire  $u$  telle que  $u|_V = v$  et  $u|_W = 0$  (définition d'une application linéaire sur deux supplémentaires) :  $u$  est un antécédent de  $v$  par  $\Phi$ .  
*Remarque : on aurait aussi pu définir  $u$  en fixant  $u|_W = \text{id}_W$  par exemple, ce qui aurait défini un antécédent différent.*  
 La surjectivité de  $\Phi$  amène

$$\dim \text{Im}(\Phi) = \dim \mathcal{L}(V, F) = \dim(V) \times \dim(F) = qp.$$

L'égalité (\*) amène alors

$$\dim \mathcal{L}_V(E, F) = \dim \text{Ker} \Phi = \dim \mathcal{L}(E, F) - \dim \text{Im} \Phi = np - qp = \boxed{p(n - q)}.$$

2. • On peut récrire

$$G_1 = \{u \in \mathcal{L}(E) : \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(u)\} = \mathcal{L}_{\text{Im} f}(E, E).$$

En appliquant la question 1 avec  $V = \text{Im}(f)$  qui est de dimension  $\text{rg}(f)$ , et avec  $F = E$  de dimension  $p = n$ , on obtient que l'ensemble  $G_1$  est donc un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E)$  et que  $\boxed{\dim G_1 = n(n - \text{rg}(f))}$ .

• On peut récrire

$$G_2 = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid \text{Im}(u) \subset \text{Ker}(f)\} = \mathcal{L}(E, \text{Ker}(f)).$$

Ceci prouve que  $G_2$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E)$ .

D'après le théorème du rang,  $\dim \text{Ker}(f) = n - \text{rg}(f)$ , d'où

$$\dim G_2 = \dim \mathcal{L}(E, \text{Ker}(f)) = \dim(E) \times \dim(\text{Ker} f) : \boxed{\dim G_2 = n(n - \text{rg}(f))}.$$

• On peut récrire

$$G_3 = \{u \in \mathcal{L}(E, \text{Ker}(f)) : \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(u)\} = \mathcal{L}_{\text{Im} f}(E, \text{Ker} f).$$

En appliquant la question 1 avec  $V = \text{Im}(f)$  qui est de dimension  $\text{rg}(f)$ , et avec  $F = \text{Ker}(f)$  qui est de dimension  $n - \text{rg}(f)$ , on obtient que l'ensemble  $G_3$  est donc un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E)$  et que  $\boxed{\dim G_3 = (n - \text{rg}(f))^2}$ .