Problème. Nombres parfaits pairs.

1. Pour $n \geq 2$, on pose $a_n = 2^n - 1$.
   (a) Montrer que si a_n est premier, alors n est premier.
   (b) Prouver que la réciproque est fausse en posant la division euclidienne a_{11} par 23.

2. Somme des diviseurs.
   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S(n)$ la somme des diviseurs positifs de n.
   (a) Que vaut $S(1)$?
   (b) Soit un entier $n \geq 2$.
   Il existe donc r nombres premiers $p_1, \ldots, p_r$ deux à deux distincts et r entiers naturels non nuls $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ tels que $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$.
   Démontrer que $S(n) = \displaystyle\prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}$.
   (c) Montrer que si m et n sont des entiers naturels non nuls et premiers entre eux, alors
   $$S(mn) = S(m)S(n).$$
   (d) (*)
   Montrer que si m et n sont des entiers naturels, on a $S(mn) \geq mS(n)$.
   Montrer que si de surcroît $m \geq 2$, alors $S(mn) \geq mS(n) + 1$.

3. Un entier naturel non nul est dit
   — **déficient** si $S(n) < 2n$,
   — **parfait** si $S(n) = 2n$,
   — et **abondant** si $S(n) > 2n$.

   (a) Vérifier que 6 est parfait.
   (b) Soit p un nombre premier et $\alpha \in \mathbb{N}^*$.
   Le nombre p^α est-il parfait, déficient, ou abondant ?

4. Soit x un entier parfait pair.
   (a) Montrer que x possède au moins un facteur premier impair.
   Justifier alors l'existence d'un entier α non nul et d'un entier k impair et supérieur à 3 tel que $x = 2^\alpha k$.
   (b) Montrer que $2^{\alpha+1} - 1$ divise k.
   Il existe donc k' dans $\mathbb{N}$ tel que $k = (2^{\alpha+1} - 1)k'$.
   (c) Démontrer que $k' = 1$ puis que $2^{\alpha+1} - 1$ est premier.

5. Quel est l'ensemble des entiers parfaits pairs ?