15 Relations binaires

1 Relations binaires et leurs éventuelles propriétés.

Soit E un ensemble.

Définition 1.

On appelle **relation binaire** sur E un prédicat $\mathscr{R}(x, y)$ sur $E \times E$, c'est-à-dire une propriété dépendant de $(x, y) \in E \times E$ et pouvant être vérifiée ou pas par chaque couple (x, y) de $E \times E$.

Soit $(x, y) \in E^2$. Si la propriété $\mathscr{R}(x, y)$ est vérifiée, on dit que x et y sont **en relation**, et on note

$$x \mathscr{R} y.$$

Remarque. On peut aussi définir plus rigoureusement (mais moins clairement) une relation binaire $\mathscr{R}$ comme une partie de $E \times E$. Pour $(x, y) \in E \times E$, on dit alors que x est en relation avec y si $(x, y) \in \mathscr{R}$.

Définition 2 (Propriétés que possède *éventuellement* une relation binaire)**.**

On dit qu'une relation binaire $\mathscr{R}$ sur E est

- **réflexive** si
$$\forall x \in E \quad x \mathscr{R} x,$$
- **symétrique** si
$$\forall (x, y) \in E^2 \quad x \mathscr{R} y \Longrightarrow y \mathscr{R} x,$$
- **antisymétrique** si
$$\forall (x, y) \in E^2 \quad (x \mathscr{R} y \ \text{ et } \ y \mathscr{R} x) \Longrightarrow x = y,$$
- **transitive** si
$$\forall (x, y, z) \in E^3 \quad (x \mathscr{R} y \ \text{ et } \ y \mathscr{R} z) \Longrightarrow x \mathscr{R} z.$$

Exemples 3.

Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des droites du plan, et E un ensemble quelconque.

Relation	réflexive ?	symétrique ?	antisymétrique ?	transitive ?
$=$ sur E				
$<$ sur $\mathbb{R}$				
$\perp$ sur $\mathcal{D}$				
$\parallel$ sur $\mathcal{D}$				

2 Relations d'équivalence.

Définition 4.

Sur un ensemble E, une **relation d'équivalence** est une relation binaire $\sim$ qui est réflexive, symétrique et transitive.

Deux éléments x et y qui sont en relation (i.e. tels que $x \sim y$) sont dits **équivalents**.

Pour $x \in E$, on appelle **classe d'équivalence de** x l'ensemble des éléments qui sont équivalents à x ; on notera ici cet ensemble $[x]$:

$$[x] := \{y \in E \mid y \sim x\}.$$

Exemple Sur E, l'égalité est une relation d'équivalence (triviale). Que dire des classes d'équivalence ?

Exemple 5 (Relation d'équivalence associée à une fonction)**.**

Soit $f : E \to F$ une application. Pour $x, y \in E$, on pose $x \sim y$ si $f(x) = f(y)$.
La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur E. Décrire les classes d'équivalence.

Définition 6.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Sur $\mathbb{R}$, la relation de **congruence** modulo α est définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad x \equiv y[\alpha] \iff \exists k \in \mathbb{Z} \ x = y + k\alpha.$$

2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Sur $\mathbb{Z}$, la relation de **congruence** modulo n est définie par

$$\forall (p, q) \in \mathbb{Z}^2 \quad p \equiv q[n] \iff \exists k \in \mathbb{Z} \ p = q + kn.$$

Proposition 7.

Les relations de congruence sont des relations d'équivalence.

Proposition 8.

Soit E un ensemble et $\sim$ une relation d'équivalence sur E. Pour $x, x' \in E$,

$$x \sim x' \iff x' \in [x] \iff [x] = [x'].$$

Théorème 9.

Les classes d'équivalence pour une relation d'équivalence sur un ensemble E forment une partition de cet ensemble.

3 Relations d'ordre.

Définition 10.

Sur un ensemble E, une **relation d'ordre** est une relation binaire $\preceq$ qui est réflexive, antisymétrique et transitive. Au sujet du couple $(E, \preceq)$, on peut alors parler d'*ensemble ordonné*.

Définition 11.

Une relation d'ordre sur un ensemble E est dite **totale** si on peut toujours comparer deux éléments de E, c'est-à-dire que

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad x \preceq y \;\text{ ou }\; y \preceq x.$$

Dans le cas contraire, on peut parler d'ordre **partiel**.

Remarque. Logique : prouver qu'un ordre $\preceq$ n'est pas total sur un ensemble E, c'est être en mesure d'exhiber deux éléments x et y de E pour lesquels les assertions $(x \preceq y)$ et $(y \preceq x)$ sont fausses.

Exemple 12 (Inégalités dans $\mathbb{R}$)**.**

La relation $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. Il s'agit d'un ordre total.
Cette relation d'ordre est celle que nous connaissons le mieux : elle sera privilégiée pour les exemples élémentaires.

La relation $<$ n'est pas une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ (elle n'est pas réflexive).

Exemple 13 (Inclusion)**.**

Soit E un ensemble. La relation d'inclusion $\subset$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$.
Dès que E possède plus de deux éléments, il s'agit d'un ordre partiel.

Exemple 14 (Divisibilité sur les entiers positifs)**.**

Soient p et q deux entiers naturels. On dit que p divise q si il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $q = kp$; on note alors $p \mid q$. La relation $\mid$ est une relation d'ordre (partielle) sur $\mathbb{N}$.

Exemple 15 (L'ordre du dictionnaire)**.**

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. L'ordre lexicographique est une relation d'ordre totale sur $\mathbb{N}^p$ ou bien $\mathbb{R}^p$.
Deux p-uplets $(x_1, \ldots, x_p)$ et $(y_1, \ldots, y_p)$ sont comparés d'abord selon leur première coordonnée, puis selon la deuxième en cas d'égalité, etc...
Les p-uplets sont alors ordonnés comme dans un dictionnaire.
Pour cet ordre sur $\mathbb{N}^3$, $(1, 2, 4)$ est plus petit que $(1, 3, 2)$, qui est lui-même plus petit que $(1, 3, 4)$.

Définition 16.

Considérons deux ensembles, chacun muni d'une relation d'ordre : $(E, \underset{E}{\preceq})$ et $(F, \underset{F}{\preceq})$.
D'une application $f : E \to F$, on dit qu'elle est

- **croissante** si
$$\forall (x, x') \in E^2 \quad x \underset{E}{\preceq} x' \implies f(x) \underset{F}{\preceq} f(x').$$
- **décroissante** si
$$\forall (x, x') \in E^2 \quad x \underset{E}{\preceq} x' \implies f(x') \underset{F}{\preceq} f(x).$$
- **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

Exemple 17.

Connaissons-nous des fonctions monotones (au sens de l'inclusion) de $\mathcal{P}(E)$ dans lui-même ?

Définition 18 (Majorant, minorant)**.**

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

- On dit que A est **majorée** dans E si il existe un élément M de E tel que
$$\forall x \in A \quad x \preceq M.$$
Dans ce contexte, M est appelé un **majorant** de A.
- On dit que A est **minorée** dans E si il existe un élément m de E tel que
$$\forall x \in A \quad m \preceq x.$$
Dans ce contexte, m est appelé un **minorant** de A.
- On dit que A est **bornée** si elle est majorée et minorée.

Exemple 19 (Dans $(\mathbb{R}, \leq)$)**.**

Soit $A =]-\infty, 1[$.
La partie A est elle majorée, minorée ? Justifier.

Remarques. Comme on vient de le comprendre,

1. l'existence d'un majorant ou d'un minorant pour une partie A d'un ensemble E n'est pas garantie,
2. un majorant ou un minorant de A n'appartient pas nécessairement à A ;
3. un majorant ou un minorant n'est pas nécessairement unique.

Proposition-Définition 20 (Maximum, minimum).

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

- S'il existe un majorant de A qui appartient à A, alors cet élément est unique.
  Il est appelé plus grand élément de A ou encore **maximum** de A et noté $\max(A)$.

- S'il existe un minorant de A qui appartient à A, alors cet élément est unique.
  Il est appelé plus petit élément de A ou encore **minimum** de A et noté $\min(A)$.

Exemple 21.

Soit $B = [-1, 1[$.
Démontrer que B possède un minimum et ne possède pas de maximum.

Remarques.

1. On vient de le voir, l'existence d'un maximum ou d'un minimum n'est pas garantie.
2. Insistons sur le fait que par définition, un maximum ou un minimum appartient nécessairement à A.

Exemple 22.

Soit E un ensemble. Alors $(\mathcal{P}(E), \subset)$ est un ensemble ordonné.
$\mathcal{P}(E)$ possède-t-il un plus petit élément ? Un plus grand élément ?
Proposez une partie de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ n'ayant pas de plus grand élément.

Définition 23 (Borne supérieure, inférieure).

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

- Si l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément, alors cet élément est unique.
  Il est appelé **borne supérieure** de A et noté $\sup(A)$.

- Si l'ensemble des minorants de A admet un plus grand élément, alors cet élément est unique.
  Il est appelé **borne inférieure** de A et noté $\inf(A)$.

Remarque. Comme pour le maximum, l'existence d'une borne supérieure dans E n'est pas garantie.

Exemple 24 ((*) laissé en exercice, une fois apprivoisée la notion pour les parties de $\mathbb{R}$).

Soit E un ensemble. Dans l'ensemble ordonné $(\mathcal{P}(E), \subset)$, toute partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(E)$ possède une borne supérieure ainsi qu'une borne inférieure : on a

$$\sup(\mathcal{A}) = \bigcup_{X \in \mathcal{A}} X \quad \text{et} \quad \inf(\mathcal{A}) = \bigcap_{X \in \mathcal{A}} X.$$

Exercices

$\boxed{\textbf{15.1}}$ **[♦♦♢]** Soit $\mathscr{R}$ la relation définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \mathscr{R} y \iff xe^y = ye^x.$$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
2. Préciser le cardinal de la classe d'équivalence d'un réel x.

$\boxed{\textbf{15.2}}$ **[♦♦♢]** On considère la relation $\mathscr{R}$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$p \mathscr{R} q \iff \exists n \in \mathbb{N}^* : p^n = q.$$

Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{N}^*$.

$\boxed{\textbf{15.3}}$ **[♦♦♢]** Soient $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \ldots y_n) \in \mathbb{R}^n$. On note $x \preceq y$ si

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \quad : \quad \sum_{i=1}^{k} x_i \leq \sum_{i=1}^{k} y_i.$$

1. Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^n$.
2. Si $n \geq 2$, montrer qu'il s'agit d'un ordre partiel.

$\boxed{\textbf{15.4}}$ **[♦♦♢]** Sur $\mathbb{R}_+^*$, on définit une relation binaire en posant que deux réels strictement positifs sont en relation, ce qu'on note $x\mathcal{R}y$ si et seulement si

$$\exists (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \quad px = qy.$$

1. Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Démontrer que pour cette relation, deux classes d'équivalences sont nécessairement en bijection.

$\boxed{\textbf{15.5}}$ **[♦♦♢]** Sur $\mathbb{R}$, on définit la relation $\mathcal{R}$ par

$$x\mathcal{R}y \iff x^2 + 2y = y^2 + 2x.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la classe d'équivalence d'un réel a.

$\boxed{\textbf{15.6}}$ **[♦♦♢]** Soit $\mathcal{R}$ une relation sur un ensemble E.
Pour $(x, y) \in E$, on note $x \sim y$ s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0, \ldots, x_n \in E$ tels que

$$x_0 = x, \quad x_0\mathcal{R}x_1, \quad x_1\mathcal{R}x_2, \quad x_{n-1}\mathcal{R}x_n, \quad x_n = y.$$

1. Montrer que $\sim$ est une relation transitive sur E.
2. On suppose que $\mathcal{R}$ est réflexive et symétrique. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur E.

$\boxed{\textbf{15.7}}$ **[♦♦♦]** Soit E un ensemble et A une partie de E. Pour deux parties X et Y de E, on note $X \sim Y$ lorsque $X \cap A = Y \cap A$, ce qui définit sur $\mathcal{P}(E)$ une relation binaire.

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
2. On note $\mathcal{P}(E)/\sim$ l'ensemble des classes d'équivalences pour $\sim$.
   Démontrer qu'il existe une bijection de $\mathcal{P}(A)$ dans $\mathcal{P}(E)/\sim$.
