

À rendre le vendredi 27 septembre.

Obligatoires : exos 1 et 3 (au moins un début de recherche sur ce dernier).

Exercice 1. Une somme.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{\pi}{2^k}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{2^k}\right)$.

Que vaut la limite quand $n \rightarrow +\infty$?

Exercice 2. Une équation.

1. Factoriser $a^3 + b^3$ lorsque $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

2. Résoudre l'équation $\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{5}{8}$.

Indication : ne pas oublier que $\cos^2 + \sin^2 = 1$.

Exercice 3. Un peu de nombres complexes.

Pour tout z appartenant à $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$, on note

$$f(z) = \frac{1-z}{1-iz}.$$

1. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que $f(z)$ est réel.
2. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que $f(z)$ est imaginaire pur.