Rappels et conseils.

1. Tout document interdit. Calculatrice interdite. Téléphone interdit.
2. Les réponses doivent être justifiées et les résultats encadrés.
3. Votre copie est un livret (au moins une copie double, pas de feuilles simples volantes).
4. Numéroter chaque copie en indiquant à la fin le nombre total de pages.
   Le faire au fur et à mesure, pour ne pas faire d'erreur à la fin du devoir.
5. Les problèmes de concours sont (trop) longs.
   Les sujets de DS le sont moins mais il ne faut pas chercher forcément à tout faire : gare à la précipitation !
6. Les fins de sujets sont toujours plus difficiles que les débuts.
7. *À toutes fins utiles, on rappelle au lecteur que s'il ne parvient pas à traiter une question dans un problème, il peut parfois admettre le résultat pour essayer de traiter les suivantes !*

Exercice 1. Calculs de sommes.

L'exercice consiste à calculer des sommes et des produits. Par *calculer*, on entend : exprimer sans utiliser le symbole $\sum$ ou $\prod$ et en utilisant seulement les variables fixées par l'énoncé. On visera la forme la plus factorisée possible.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(n-k)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{k/2}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=n}^{3n} \min(k, 2n)$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\prod_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} ij$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n} \frac{2j-1}{k}$.
6. Soit p un entier supérieur à 3. Calculer $\displaystyle\sum_{k=3}^{p} \ln\left(\frac{k^2}{(k+1)(k-2)}\right)$.
7. Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer
$$\sum_{k=0}^{2p} (-1)^{k^2}.$$

Exercice 2. Logique et ensembles.

1. Démontrer l'assertion ci-dessous.
$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad [(\forall x \in \mathbb{R}\ a\cos x + b\sin x = 0) \Longrightarrow (a=b=0)]\,.$$
2. Démontrer l'assertion ci-dessous.
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad [x \neq y \Longrightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)].$$
3. Considérons les deux ensembles A et B définis ci-dessous :
$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 3x - 2y = 1\right\} \qquad \text{et} \qquad B = \{(1+2\lambda, 1+3\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}\}\,.$$
Démontrer que $A = B$.
4. Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E telles que
$$A \cap B = A \cup C \qquad \text{et} \qquad A \cup B = A \cap C.$$
Montrer que $A = B = C$

Problème 1. Un calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Dans cet exercice, on note $\theta = \dfrac{2\pi}{5}$.

1. Démontrer que $\cos\theta + \cos(3\theta) = \dfrac{\sin(2\theta)\cos(2\theta)}{\sin\theta}$.
2. En déduire que $\cos\theta + \cos(3\theta) = -\frac{1}{2}$.
3. Montrer que $\cos\theta\cos(3\theta) = -\frac{1}{4}$.
4. En déduire une équation satisfaite par $\cos(3\theta)$ et en déduire sa valeur.
5. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.
6. Expliquer alors pourquoi le pentagone régulier est constructible à la règle et au compas.

Problème 2. Formule de Vandermonde et applications.

Dans tout ce problème, n désignera un entier naturel.

1. Démontrer la relation de Pascal : pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$,
$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$
2. Démontrer par récurrence <u>sur n</u> la formule de Vandermonde :
$$\forall\,(p,m) \in \mathbb{N}^2, \qquad \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p}$$
3. En déduire la valeur de
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$
4. On note $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2$.
À l'aide du changement d'indice $k = n - i$, exprimer T_n en fonction de n.
5. En déduire que si n est supérieur à 1, alors $\dbinom{2n}{n}$ est pair.
6. Proposer une autre preuve de la parité de $\dbinom{2n}{n}$ pour n supérieur à 1, cette fois en vous appuyant sur le binôme de Newton.