35 # Une construction de l'intégrale de Riemann

1 Continuité par morceaux sur un segment. **2**
1.1 Subdivision d'un segment. 2
1.2 Fonctions continues par morceaux sur un segment. 3

2 Intégrales de Darboux d'une fonction bornée. **5**
2.1 Sommes de Darboux. 5
2.2 Intégrales de Darboux. 7

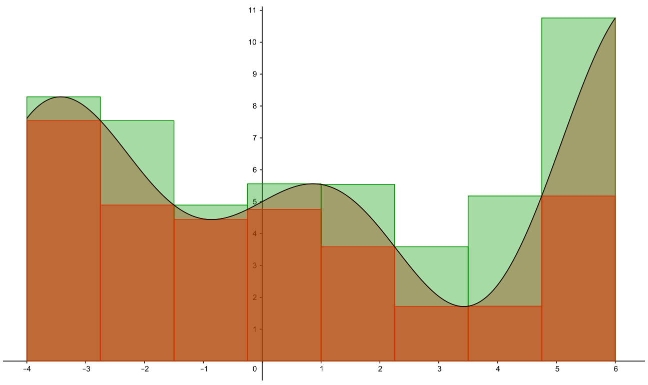
3 Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment. **13**
3.1 Fonctions intégrables au sens de Riemann. 13
3.2 Continuité et intégrabilité au sens de Riemann. 14
3.3 Propriétés de l'intégrale d'une fonction c.p.m. sur un segment. 15

Démarche.

La construction de l'intégrale de Riemann la plus courante repose sur une définition de l'intégrale des fonctions en escalier, ce travail étant étendu ensuite par densité à toutes les fonctions continues par morceaux via la notion d'uniforme continuité et le théorème de Heine. À cette approche par *extension*, on préfère ici une approche par *restriction* en définissant d'abord les intégrales de Darboux inférieures et supérieures d'une fonction bornée.

Le point délicat demeure l'intégrabilité au sens de Riemann des fonctions continues. Pour la démontrer, on utilise une idée de Michael Spivak [a] : le théorème fondamental de l'analyse (qui énonce que sous certaines conditions, dériver et intégrer sont deux opérations réciproques) est déjà vrai pour les intégrales de Darboux...

a. M. Spivak, *Calculus*. Fourth edition. Publish or perish, Houston, TX, 2002. 295-296.



Ceci n'est pas une aire

Les fonctions dans ce cours sont à valeurs réelles et définies sur segment $[a, b]$, avec $\boxed{a < b}$.

1 Continuité par morceaux sur un segment.

1.1 Subdivision d'un segment.

Définition 1.

On appelle **subdivision** d'un segment $[a, b]$ toute famille $\sigma = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$, où $n \in \mathbb{N}^*$, telle que

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b.$$

L'ensemble de toutes les subdivisions d'un segment $[a, b]$ sera noté $\Sigma_{[a,b]}$.

On appelle **pas** de la subdivision σ le réel $\delta_\sigma := \min\left(a_{i+1} - a_i,\ i \in [\![0, n-1]\!]\right)$.

Soit un segment $[a, b]$ et deux subdivisions $\sigma, \sigma' \in \Sigma_{[a,b]}$.

— σ' est dite **plus fine** que σ si elle contient tous les points de σ.
  Par exemple, $(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1)$ est une subdivision de $[0, 1]$ plus fine que $(0, \frac{1}{2}, 1)$.

— On notera $\sigma \cup \sigma'$ la subdivision obtenue en réunissant et en réordonnant les points des deux subdivisions. Par exemple, si $\sigma = (0, e^{-1}, \frac{1}{2}, 1)$ et $\sigma' = (0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1)$, alors $\sigma \cup \sigma' = (0, e^{-1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1)$.

Exemple 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $i \in [\![0, n]\!]$, on note

$$a_i = \frac{i}{n}.$$

La famille $\sigma_n = (a_0, \ldots, a_n)$ est une subdivision de $[0, 1]$ de pas $\frac{1}{n}$.

Exemple 2. Généralisons à un segment $[a, b]$. Pour $i \in [\![0, n]\!]$, on note

$$a_i = a + i\frac{b-a}{n}.$$

La famille $\sigma_n = (a_0, \ldots, a_n)$ est une subdivision de $[a, b]$ dite régulière, de pas $\frac{b-a}{n}$.

Exemple 3. Pour $i \in [\![0, 2^n]\!]$, on note

$$a_i^{(n)} = a + i\frac{b-a}{2^n}.$$

La famille $\theta_n = (a_0^{(n)}, \ldots, a_n^{(n)})$ est une subdivision de $[a, b]$, de pas $\frac{b-a}{2^n}$.

Les subdivisions $(\theta_n, n \in \mathbb{N})$ sont "emboîtées" : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\forall i \in [\![0, 2^n]\!] \qquad a_{2i}^{(n+1)} = a + (b-a)\frac{2i}{2^{n+1}} = a + (b-a)\frac{i}{2^n} = a_i^{(n)},$$

ce qui montre que θ_{n+1} est plus fine que θ_n.

1.2 Fonctions continues par morceaux sur un segment.

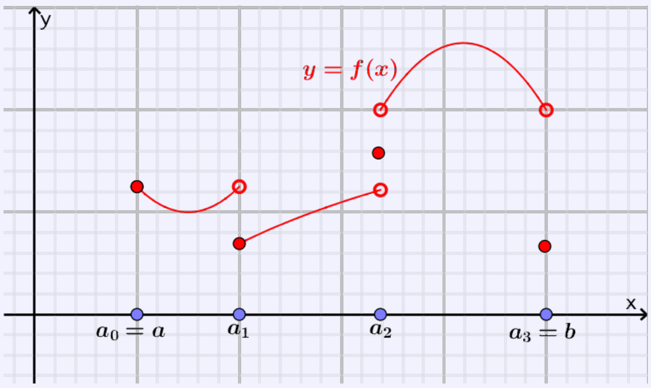
Définition 2.

Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dit **continue par morceaux** sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, \cdots, a_n)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ telle que

— pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, la fonction $f_{|]a_i, a_{i+1}[}$ est continue ;

— pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, la fonction $f_{|]a_i, a_{i+1}[}$ prolongeable par continuité en a_i et a_{i+1}.

On dit alors que σ est une subdivision **adaptée** à f.



L'ensemble de ces fonctions sera noté $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ (ou plus simplement $\mathcal{CM}([a, b])$).

Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, elle y est continue par morceaux : il suffit de prendre comme subdivision adaptée à f la famille (a, b).

Exemple 3.

Soient les trois fonctions

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{cc} x\ln(x) & \text{si } x \in]0,1] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad ; \quad g : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{cc} \ln(x) & \text{si } x \in]0,1] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\mathbf{1}_{\mathbb{Q}} : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{cc} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Justifier que f est continue par morceaux sur $[0, 1]$ et que g et $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ ne le sont pas.

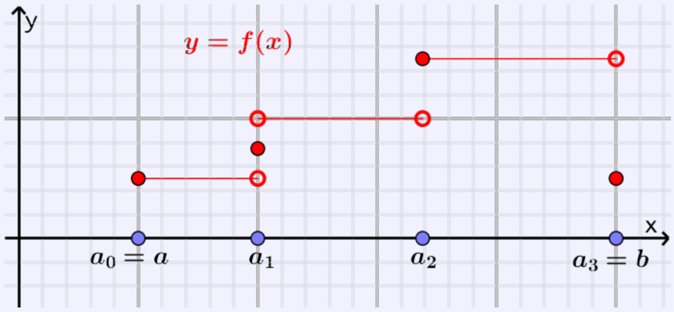
• Considérons $(0, 1)$ comme subdivision de $[0, 1]$. Puisque f a pour limite 0 en 0_+, sa restriction à $]0, 1[$ (notons-la $\widetilde{f}$) peut être prolongée par continuité en 0 en posant $\widetilde{f}(0) = 0$. La fonction f est donc continue par morceaux sur $[0, 1]$. On notera que puisque $f(0) = 1$, elle n'est pas continue sur $[0, 1]$.
• La restriction de g à $]0, 1]$ a une limite infinie en 0 : elle n'y est pas prolongeable par continuité. Ce n'est pas une fonction continue par morceaux sur $[0, 1]$.
• L'ensemble des rationnels et celui des irrationnels étant denses dans $\mathbb{R}$, la fonction $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ a une infinité de discontinuités sur $[0, 1]$ (cf cours sur la continuité). Elle ne saurait y être continue par morceaux.

Définition 4.

Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ est dit **en escalier** sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, \cdots, a_n)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ telle que

$$\text{pour tout } i \in [\![0, n-1]\!], \text{ la fonction } f_{|]a_i, a_{i+1}[} \text{ est constante.}$$

On dit alors que σ est une subdivision **adaptée** à f.



Les fonctions en escalier sont donc *constantes par morceaux.* Ce sont des exemples simples de fonctions continues par morceaux. L'ensemble des fonctions en escalier est important dans la construction classique de l'intégrale de Riemann, mais pas tant que ça pour la présentation que nous avons choisie ici.

Proposition 5.

$\mathcal{CM}([a, b])$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions définies sur $[a, b]$.
$\mathcal{CM}([a, b])$ est un sous-anneau de l'anneau des fonctions définies sur $[a, b]$.

Preuve.
Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{CM}([a, b])$ et σ et σ' deux subdivisions adaptées respectivement à f et g. Une combinaison linéaire de f et g, ou encore leur produit est bien une fonction continue par morceaux, avec comme subdivision adaptée la subdivision $\sigma \cup \sigma'$. $\square$

Proposition 6.

Si une fonction f est continue par morceaux sur un segment $[a, b]$, elle y est bornée.

Preuve. On considère d'abord une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ à valeurs réelles et une subdivision $(a_0, \ldots, a_n)$ adaptée. Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, la fonction $f_{]a_i, a_{i+1}[}$ se prolonge sur $[a_i, a_{i+1}]$ en une fonction continue $\widetilde{f_i}$. On peut alors appliquer le théorème des bornes atteintes à $\widetilde{f_i}$, fonction continue sur un segment. Notons M_i et m_i respectivement les maximum et minimum de $\widetilde{f_i}$. On peut alors poser

$$M = \max\left(\{f(a_0), f(a_1), \ldots, f(a_n)\} \cup \{M_i, i \in [\![0, n-1]\!]\}\right)$$

$$m = \min\left(\{f(a_0), f(a_1), \ldots, f(a_n)\} \cup \{m_i, i \in [\![0, n-1]\!]\}\right)$$

On vérifie alors que M et m sont respectivement un majorant et un minorant de f sur $[a, b]$.

$\square$

2 Intégrales de Darboux d'une fonction bornée.

2.1 Sommes de Darboux.

On rappelle que l'assertion suivante fait partie de nos axiomes en analyse.

Toute partie non vide et majorée A de $\mathbb{R}$ admet un plus petit majorant que l'on appelle borne supérieure et que l'on note $\sup(A)$.

Définition 7.

Soit f une fonction bornée sur un intervalle $[a,b]$. Soit $\sigma = (a_0, \ldots, a_n) \in \Sigma_{[a,b]}$.
Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, on note

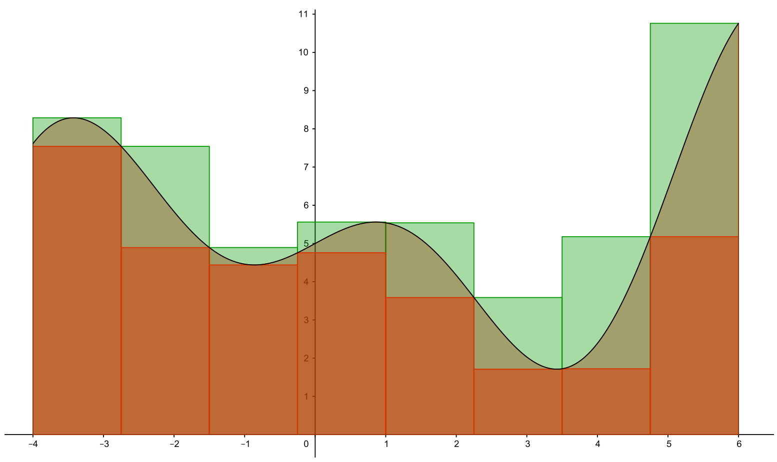
$$m_i := \inf\{f(x), x \in]a_i, a_{i+1}[\} \quad \text{et} \quad M_i := \sup\{f(x), x \in]a_i, a_{i+1}[\}.$$

On appelle **sommes de Darboux** inférieure et supérieure, associées à f et σ les nombres

$$s_{[a,b]}(f,\sigma) := \sum_{i=0}^{n-1} m_i(a_{i+1}-a_i) \quad \text{et} \quad S_{[a,b]}(f,\sigma) := \sum_{i=0}^{n-1} M_i(a_{i+1}-a_i).$$

Figure. Les réels $s_{[a,b]}(f,\sigma)$ et $S_{[a,b]}(f,\sigma)$ peuvent être vus comme des sommes d'aires de rectangles.

Voici le graphe d'une fonction positive (et continue, même si les définitions précédentes ne réclament pas cette hypothèse). Des rectangles s'appuient sur une subdivision régulière de $[a,b]$.



La somme des aires des rectangles foncés, c'est $s_{[a,b]}(f,\sigma)$, celle des rectangles clairs, c'est $S_{[a,b]}(f,\sigma)$.

On remarque que ces deux aires encadrent *l'aire sous la courbe* de f, que ce cours veut définir rigoureusement.

Exemple 0. Les fonctions constantes.
Soit f une fonction constante égale à C sur $[a,b]$. On vérifie facilement que pour toute subdivision $\sigma \in \Sigma_{[a,b]}$, on a

$$s_{[a,b]}(f,\sigma) = S_{[a,b]}(f,\sigma) = C(b-a).$$

Exemple 1. Sommes de Darboux d'une fonction croissante.
Soit f une fonction croissante sur $[a,b]$. Soit $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ une subdivision de $[a,b]$. En reprenant les notations m_i et M_i de la définition précédente, par croissance de f,

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!] \qquad m_i = f(a_i^+) \quad \text{et } M_i = f(a_{i+1}^-),$$

où on note $f(a_i^+)$ et $f(a_{i+1}^-)$ respectivement les limites à droite et à gauche en a_i et a_{i+1} (ces limites existent par monotonie de f, on laisse se convaincre que ce sont bien les bornes de la fonction croissante f sur $]a_i, a_{i+1}[$). On a

$$s_{[a,b]}(f,\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} f(a_i^+)(a_{i+1} - a_i) \quad \text{et} \quad S_{[a,b]}(f,\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} f(a_{i+1}^-)(a_{i+1} - a_i).$$

Exemple 2. Sommes de Darboux pour l'indicatrice de $\mathbb{Q}$.
Soit $\sigma_n = (a_0, \ldots, a_n)$ une subdivision de $[0,1]$. Soit $i \in [\![0, n-1]\!]$; dans le segment $]a_i, a_{i+1}[$ se trouve au moins un rationnel (densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$), de sorte que le supremum de $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ sur $]a_i, a_{i+1}[$ est atteint et vaut $M_i = 1$. De la même façon, $]a_i, a_{i+1}[$ contient au moins un irrationnel, d'où $m_i = 0$. On a donc

$$s_{[0,1]}(\mathbf{1}_{\mathbb{Q}},\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} 0 \cdot (a_{i+1} - a_i) = 0 \qquad \text{et} \qquad S_{[0,1]}(\mathbf{1}_{\mathbb{Q}},\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} 1 \cdot (a_{i+1} - a_i) = a_n - a_0 = 1.$$

et ceci est valable pour toute subdivision σ de $[0,1]$.

Les bornes de f servent à encadrer les sommes de Darboux.

Proposition 8.

Soit f une fonction minorée sur $[a,b]$ par un réel m et majorée par un réel M. Alors,

$$\forall \sigma \in \Sigma_{[a,b]} \qquad m(b-a) \leq s_{[a,b]}(f,\sigma) \leq S_{[a,b]}(f,\sigma) \leq M(b-a).$$

Preuve.
Notons $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$, ainsi que m_i et M_i respectivement l'infimum et le supremum de f sur $]a_i, a_{i+1}[$, où $i \in [\![0, n-1]\!]$. Si m et M sont respectivement un minorant et un majorant de f sur $[a,b]$, on a clairement

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!] \quad m \leq m_i \leq M_i \leq M.$$

En effet, m est un minorant de f sur $]a_i, a_{i+1}[$, et m_i le plus grand des minorants sur ce segment.
On a donc, en sommant,

$$\underbrace{m\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1} - a_i)}_{m(b-a)} \leq \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} m_i(a_{i+1} - a_i)}_{s_{[a,b]}(f,\sigma)} \leq \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} M_i(a_{i+1} - a_i)}_{S_{[a,b]}(f,\sigma)} \leq \underbrace{M\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1} - a_i)}_{M(b-a)}.$$

□

Proposition 9.

Soit f une fonction bornée sur $[a,b]$. Soient σ et σ' dans $\Sigma_{[a,b]}$. Si σ' est plus fine que σ, alors,

$$s_{[a,b]}(f,\sigma) \leq s_{[a,b]}(f,\sigma') \quad \text{et} \quad S_{[a,b]}(f,\sigma) \geq S_{[a,b]}(f,\sigma').$$

Preuve. Il suffit, quitte à itérer ensuite, de montrer que cette chose est vraie si σ' possède *un* point de plus que σ. On note donc $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ et on considère le cas où $\sigma' = \sigma \cup \{c\}$, où $c \notin \sigma$.

$$\exists k \in [\![0, n-1]\!] \qquad a_k < c < a_{k+1},$$

d'où $\sigma' = (a_0, \dots, a_k, c, a_{k+1}, \dots, a_n)$. Notons, pour $i \in [\![0, n-1]\!]$, $m_i = \inf\{f(x), x \in]a_i, a_{i+1}[\}$. On calcule :

$$\begin{aligned} s_{[a,b]}(f, \sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(a_{i+1} - a_i) &= \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n-1} m_i(a_{i+1} - a_i) + m_k(a_{k+1} - a_k) \\ &= \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n-1} m_i(a_{i+1} - a_i) + m_k(c - a_k) + m_k(a_{k+1} - c). \end{aligned}$$

Notons $m_k' = \inf\{f(x), x \in]a_k, c[\}$ et $m_k'' = \inf\{f(x), x \in]c, a_{k+1}[\}$. Or, m_k étant *un* minorant de f sur $]a_k, c[$, on a $m_k \leq m_k'$. Pour les mêmes raisons, $m_k \leq m_k''$. On en déduit la majoration

$$s_{[a,b]}(f, \sigma) \leq \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n-1} m_i(a_{i+1} - a_i) + m_k'(c - a_k) + m_k''(a_{k+1} - c) = s_{[a,b]}(f, \sigma').$$

On montrerait de même, cette fois en manipulant des bornes supérieures, que $S_{[a,b]}(f, \sigma) \geq S_{[a,b]}(f, \sigma')$. □

2.2 Intégrales de Darboux.

Définition 10.

Soit f une fonction bornée sur un segment $[a, b]$. On appelle **intégrales de Darboux** inférieure et supérieure de f sur $[a, b]$ les réels

$$\underline{\int}_{[a,b]} f := \sup\left\{s_{[a,b]}(f, \sigma),\ \sigma \in \Sigma_{[a,b]}\right\} \quad \text{et} \quad \overline{\int}_{[a,b]} f := \inf\left\{S_{[a,b]}(f, \sigma),\ \sigma \in \Sigma_{[a,b]}\right\}.$$

Remarque. D'après la proposition 8, si f est majorée par M sur $[a, b]$ l'ensemble $\left\{s_{[a,b]}(f, \sigma),\ \sigma \in \Sigma_{[a,b]}\right\}$ est majoré par $M(b - a)$. Clairement non vide, il admet bien une borne supérieure. De même, l'ensemble $\left\{S_{[a,b]}(f, \sigma),\ \sigma \in \Sigma_{[a,b]}\right\}$ est non vide et minoré par $m(b - a)$.

Exemple. Fonctions constantes.
Pour une fonction f constante sur $[a, b]$ égale à C, les sommes de Darboux inférieures et supérieures ne dépendent pas de la subdivision choisie et valent $C(b - a)$. On a donc

$$\underline{\int}_{[a,b]} f = \overline{\int}_{[a,b]} f = C(b - a).$$

Exemple. Indicatrice de $\mathbb{Q}$.
On a a montré que

$$\forall \sigma \in \Sigma_{[0,1]} \qquad s_{[0,1]}(\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}, \sigma) = 0 \quad \text{et} \quad S_{[0,1]}(\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}, \sigma) = 1.$$

En passant à la borne supérieure sur toutes les subdivisions pour s (inférieure pour S), on obtient

$$\underline{\int}_{[0,1]} \mathbf{1}_{\mathbb{Q}} = 0 \quad \text{et} \quad \overline{\int}_{[0,1]} \mathbf{1}_{\mathbb{Q}} = 1.$$

Proposition 11 (Inégalité de la moyenne pour les intégrales de Darboux)**.**

Soit f une fonction définie sur un segment $[a,b]$, minorée par un réel m et majorée par un réel M. On a

$$m(b-a) \leq \underline{\int}_{[a,b]} f \leq \overline{\int}_{[a,b]} f \leq M(b-a).$$

Preuve. Soit σ une subdivision de $[a,b]$. D'après la proposition 8, on a

$$m(b-a) \leq s_{[a,b]}(f,\sigma) \leq S_{[a,b]}(f,\sigma) \leq M(b-a)$$

Le réel $m(b-a)$ est un minorant de l'ensemble $\left\{s_{[a,b]}(f,\sigma),\ \sigma \in \Sigma_{[a,b]}\right\}$ et l'intégrale de Darboux inférieure est le plus grand des minorants de cet ensemble. On peut écrire le même genre d'argument pour les sommes supérieures et obtenir :

$$m(b-a) \ \leq \ \underline{\int}_{[a,b]} f \qquad \text{et} \qquad \overline{\int}_{[a,b]} f \ \leq \ M(b-a).$$

Reste à comparer les deux intégrales de Darboux. Pour cela on introduit σ_1 et σ_2 deux subdivisions de $[a,b]$. Puisque $\sigma_1 \cup \sigma_2$ est plus fine que σ_1 et que σ_2, on a

$$s_{[a,b]}(f,\sigma_1) \leq s_{[a,b]}(f,\sigma_1 \cup \sigma_2) \leq S_{[a,b]}(f,\sigma_1 \cup \sigma_2) \leq S_{[a,b]}(f,\sigma_2) \quad \text{en particulier } s_{[a,b]}(f,\sigma_1) \leq S_{[a,b]}(f,\sigma_2).$$

On passe d'abord passage au sup (en σ_1) : $\underline{\int}_{[a,b]} f \leq S_{[a,b]}(f,\sigma_2)$. Puis à l'inf (en σ_2) : $\underline{\int}_{[a,b]} f \leq \overline{\int}_{[a,b]} f$. □

On retrouve le résultat montré plus haut pour les fonctions constantes.

Corollaire 12 (Intégrales de Darboux d'une fonction constante)**.**

Si f est une fonction constante, égale à $C \in \mathbb{R}$ entre deux points a et b, alors

$$\underline{\int}_{[a,b]} f = \overline{\int}_{[a,b]} f = C(b-a).$$

Preuve. On applique la proposition 11 avec $m = C = M$. □

Proposition 13 (Relation de Chasles pour les intégrales de Darboux)**.**

Soit f une fonction bornée sur un intervalle $[a,b]$ non réduit à un point, et $c \in]a,b[$. Alors,

$$\underline{\int}_{[a,b]} f = \underline{\int}_{[a,c]} f + \underline{\int}_{[c,b]} f.$$

La relation est aussi vraie pour les intégrales de Darboux supérieures.

Preuve. • Soient deux subdivisions $\sigma_1 \in \Sigma_{[a,c]}$ et $\sigma_2 \in \Sigma_{[c,b]}$. On note σ la subdivision de $[a,b]$ obtenue en concaténant σ_1 et σ_2. Plus précisément, si $\sigma_1 = (a_0, \dots, a_{n-1}, c)$ et $\sigma_2 = (c, a'_1, \dots, a'_p)$, alors $\sigma = (a_0, \dots, a_{n-1}, c, a'_1, \dots, a'_p)$. On peut alors écrire

$$s_{[a,c]}(f, \sigma_1) \;+\; s_{[c,b]}(f, \sigma_2) \;=\; s_{[a,b]}(f, \sigma) \;\leq\; \underline{\int}_{[a,b]} f$$

(l'égalité ci-dessus est immédiate en revenant aux définitions, et l'inégalité vient de ce que $\underline{\int}_{[a,b]} f$ est une borne supérieure sur toutes les subdivisions). *Fixons* σ_2. On a

$$s_{[a,c]}(f, \sigma_1) \leq \underline{\int}_{[a,b]} f \;-\; s_{[c,b]}(f, \sigma_2) \qquad \text{soit en passant au sup sur } \sigma_1 \qquad \underline{\int}_{[a,c]} f \leq \underline{\int}_{[a,b]} f \;-\; s_{[c,b]}(f, \sigma_2).$$

$$\text{soit} \qquad s_{[c,b]}(f, \sigma_2) \leq \underline{\int}_{[a,b]} f - \underline{\int}_{[a,c]} f.$$

En passant au sup sur σ_2, on obtient

$$\underline{\int}_{[c,b]} f \leq \underline{\int}_{[a,b]} f - \underline{\int}_{[a,c]} f \qquad \text{soit} \qquad \underline{\int}_{[a,c]} f + \underline{\int}_{[c,b]} f \leq \underline{\int}_{[a,b]} f.$$

• Soit une subdivision $\sigma \in \Sigma_{[a,b]}$. Il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $c \in [a_k, a_{k+1}]$. Notons $\sigma_1 = (a_0, \dots, a_k, c)$ (en confondant a_k et c s'ils sont égaux) puis $\sigma_2 = (c, a_{k+1}, \dots, a_n)$ (en confondant c et a_{k+1} s'ils sont égaux). On note σ' la concaténation de σ_1 et de σ_2 (voir-ci-dessus). La subdivision σ' est plus fine que σ, ce qui entraîne d'après la Proposition 9 la première des inégalités suivantes :

$$s_{[a,b]}(f, \sigma) \leq s_{[a,b]}(f, \sigma') = s_{[a,c]}(f, \sigma_1) + s_{[c,b]}(f, \sigma_2) \leq \underline{\int}_{[a,c]} f + \underline{\int}_{[c,b]} f.$$

Il reste à passer à la borne supérieure (sur σ) pour obtenir $\displaystyle \underline{\int}_{[a,b]} f \leq \underline{\int}_{[a,c]} f + \underline{\int}_{[c,b]} f.$

On conclut en combinant les deux inégalités obtenues. □

Voici le résultat sur lequel repose la preuve de l'intégrabilité des fonctions continues dans ce cours.
C'est ici qu'intervient l'idée de Spivak (voir première page).

Théorème 14 (Théorème fondamental de l'analyse pour les intégrales de Darboux)**.**

Soit un segment $[a,b]$ avec $a < b$ et f une fonction *bornée* sur $[a,b]$. Alors, la fonction

$$F : \left\{ \begin{array}{ccc}]a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle \underline{\int}_{[a,x]} f \end{array} \right.$$

est une fonction <u>continue</u> sur $]a,b]$ et telle que $F(x) \underset{x \to a+}{\longrightarrow} 0$.

De surcroît, la fonction F est <u>dérivable</u> en tout point $x_0 \in]a,b]$ où f est continue, de dérivée

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Le résultat reste vrai avec une intégrale de Darboux supérieure.

Preuve. On se concentre sur la continuité puis la dérivabilité à droite, sans vraie perte de généralité.

Soit $x_0 \in]a,b[$ et $x \in]x_0,b]$. En appliquant la relation de Chasles (Prop. 13) sur $[a,x]$ avec $x_0 \in]a,x[$, on obtient

$$F(x) - F(x_0) = \underline{\int}_{[a,x]} f - \underline{\int}_{[a,x_0]} f = \underline{\int}_{[x_0,x]} f.$$

Notons m un minorant et M un majorant de f sur $[a,b]$. Appliquons l'inégalité de la moyenne (proposition 11) sur $[x_0,x]$: on obtient

$$m(x-x_0) \leq F(x) - F(x_0) \leq M(x-x_0).$$

Par encadrement, on obtient que F est continue à droite en x_0. On montrerait de façon analogue que F est continue à gauche. Pour la limite nulle en a_+, il suffit à nouveau d'écrire, pour $x \in]a,b]$, l'encadrement

$$m(x-a) \leq \underline{\int}_{[a,x]} f \leq M(x-a).$$

Supposons dorénavant que x_0 est un point où f est continue. Pour un réel $\varepsilon > 0$ fixé, on a l'existence d'un réel $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in [x_0, x_0+\eta[\quad f(x_0) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon.$$

Supposons que $x \in [x_0, x_0+\eta[$. en appliquant nouveau 11 sur $[x_0,x]$, on obtient

$$(f(x_0) - \varepsilon)\cdot(x-x_0) \leq \underline{\int}_{[x_0,x]} f \leq (f(x_0)+\varepsilon)\cdot(x-x_0)$$

$$\text{soit} \quad f(x_0) - \varepsilon \leq \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \leq f(x_0) + \varepsilon.$$

Ceci montre que F est dérivable à droite en x_0, de dérivée $f(x_0)$.
On montrerait de façon analogue que F est dérivable à gauche, de dérivée $f(x_0)$. □

On pourrait croire que le travail est fini et que l'intégrale de Darboux, inférieure ou supérieure, est une "bonne" définition de l'intégrale. Comme on va le voir ci-dessous, elles ont un défaut...

Exemple 15 (Défaut de linéarité des intégrales de Darboux)**.**

Considérons les fonctions $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ et $\mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$. En remarquant que $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}} + \mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = \mathbf{1}_{\mathbb{R}}$, on peut écrire

$$\underbrace{\underline{\int}_{[0,1]} \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}}_{0} + \underbrace{\underline{\int}_{[0,1]} \mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}}_{0} < \underbrace{\underline{\int}_{[0,1]} \left(\mathbf{1}_{\mathbb{Q}} + \mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}\right)}_{1},$$

$$\underbrace{\overline{\int}_{[0,1]} \left(\mathbf{1}_{\mathbb{Q}} + \mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}\right)}_{1} < \underbrace{\overline{\int}_{[0,1]} \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}}_{1} + \underbrace{\overline{\int}_{[0,1]} \mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}}_{1}.$$

On a cependant des inégalités, données dans les deux lemmes ci-dessous.

Lemme 16 (Presque linéarité des intégrales de Darboux (1))**.**

Soient f et g deux fonctions bornées sur $[a,b]$. Alors

$$\underline{\int}_{[a,b]}(f+g) \;\geq\; \underline{\int}_{[a,b]} f + \underline{\int}_{[a,b]} g \quad \text{et} \quad \overline{\int}_{[a,b]}(f+g) \;\leq\; \overline{\int}_{[a,b]} f + \overline{\int}_{[a,b]} g.$$

Preuve.

On prouve l'inégalité pour les intégrales de Darboux supérieures. On va d'abord montrer pour toute subdivision θ de $[a,b]$ l'inégalité

$$S_{[a,b]}(f+g,\theta) \leq S_{[a,b]}(f,\theta) + S_{[a,b]}(g,\theta) \qquad (*).$$

Pour cela considérons $\theta = (a_0,\dots,a_n) \in \Sigma_{[a,b]}$. Notons, pour $i \in [\![0,n-1]\!]$

$$M_i = \sup\{f(x)+g(x), x \in]a_i,a_{i+1}[\}, \quad M_i' = \sup\{f(x), x \in]a_i,a_{i+1}[\}, \quad M_i'' = \sup\{g(x), x \in]a_i,a_{i+1}[\}.$$

Le nombre $M_i' + M_i''$ est un majorant de $f+g$ sur $]a_i,a_{i+1}[$; m_i étant le plus petit des majorants, on a $M_i \leq M_i' + M_i''$. On a donc bien

$$S_{[a,b]}(f+g,\theta) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(a_{i+1}-a_i) \leq \sum_{i=0}^{n-1} M_i'(a_{i+1}-a_i) + \sum_{i=0}^{n-1} M_i''(a_{i+1}-a_i) = S_{[a,b]}(f,\theta) + S_{[a,b]}(g,\theta),$$

ce qui montre $(*)$.

Soient σ et σ' deux subdivisions de $[a,b]$. On peut écrire

$$\begin{aligned} S_{[a,b]}(f,\sigma) + S_{[a,b]}(g,\sigma') &\geq S_{[a,b]}(f,\sigma\cup\sigma') + S_{[a,b]}(g,\sigma\cup\sigma') \\ &\geq S_{[a,b]}(f+g,\sigma\cup\sigma') \\ &\geq \overline{\int}_{[a,b]}(f+g). \end{aligned}$$

La première inégalité est obtenue en utilisant la proposition 9, $\sigma\cup\sigma'$ étant plus fine que σ et plus fine que σ'. La seconde est obtenue en écrivant $(*)$ pour $\theta = \sigma\cup\sigma'$, et la dernière en utilisant que l'intégrale est une borne inférieure et donc minore les sommes de Darboux pour toute subdivision.

Fixons σ'. En passant à l'inf en σ, on obtient

$$\overline{\int}_{[a,b]} f + S_{[a,b]}(g,\sigma') \geq \overline{\int}_{[a,b]}(f+g).$$

Il reste à prendre la borne inférieure sur toutes les subdivisions σ' pour obtenir

$$\overline{\int}_{[a,b]} f + \overline{\int}_{[a,b]} f \geq \overline{\int}_{[a,b]}(f+g).$$

□

Lemme 17 (Presque linéarité des intégrales de Darboux (2)).

Soit f une fonction bornée sur $[a,b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

1. Si $\lambda \geq 0$,
$$\underline{\int}_{[a,b]}(\lambda f) = \lambda \underline{\int}_{[a,b]} f \quad \text{et} \quad \overline{\int}_{[a,b]}(\lambda f) = \lambda \overline{\int}_{[a,b]} f.$$
2. Si $\lambda < 0$,
$$\underline{\int}_{[a,b]}(\lambda f) = \lambda \overline{\int}_{[a,b]} f \quad \text{et} \quad \overline{\int}_{[a,b]}(\lambda f) = \lambda \underline{\int}_{[a,b]} f.$$

Preuve.

Soit $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. En revenant aux définitions on montre facilement que

- Si $\lambda \geq 0$, $\quad \inf\limits_{x\in[\alpha,\beta]}(\lambda f(x)) = \lambda \inf\limits_{x\in[\alpha,\beta]}(f(x))$ et $\sup\limits_{x\in[\alpha,\beta]}(\lambda f(x)) = \lambda \sup\limits_{x\in[\alpha,\beta]}(f(x))$.
- Si $\lambda < 0$, $\quad \inf\limits_{x\in[\alpha,\beta]}(\lambda f(x)) = \lambda \sup\limits_{x\in[\alpha,\beta]}(f(x))$ et $\sup\limits_{x\in[\alpha,\beta]}(\lambda f(x)) = \lambda \inf\limits_{x\in[\alpha,\beta]}(f(x))$.

Détaillons la preuve dans le cas $\lambda < 0$, pour l'intégrale de Darboux inférieure (les autres cas se traitent de façon analogue). Soit $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ une subdivision de $[a,b]$.

$$s_{[a,b]}(\lambda f, \sigma) = \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1} - a_i) \cdot \inf_{x\in]a_i,a_{i+1}[}(\lambda f(x)) = \lambda \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1} - a_i) \cdot \sup_{x\in]a_i,a_{i+1}[}(f(x)) = \lambda S_{[a,b]}(f,\sigma).$$

Par définition de l'intégrale de Darboux supérieure, $S_{[a,b]}(f,\sigma) \geq \overline{\int}_{[a,b]} f$, soit ($\lambda$ étant négatif)

$$s_{[a,b]}(\lambda f, \sigma) = \lambda S_{[a,b]}(f,\sigma) \leq \lambda \overline{\int}_{[a,b]} f.$$

En passant au sup sur toutes les subdivisions σ, on obtient

$$\underline{\int}_{[a,b]}(\lambda f) \leq \lambda \overline{\int}_{[a,b]} f \qquad (1)$$

De plus, par définition de l'intégrale de Darboux inférieure, $s_{[a,b]}(\lambda f, \sigma) \leq \underline{\int}_{[a,b]} \lambda f$, soit ($\lambda$ étant strictement négatif),

$$S_{[a,b]}(f,\sigma) = \frac{1}{\lambda} s_{[a,b]}(\lambda f, \sigma) \geq \frac{1}{\lambda}\underline{\int}_{[a,b]}(\lambda f).$$

En passant à l'inf sur toutes les subdivisions σ, on obtient

$$\overline{\int}_{[a,b]} f \geq \frac{1}{\lambda}\underline{\int}_{[a,b]}(\lambda f), \quad \text{soit} \quad \lambda \overline{\int}_{[a,b]} f \leq \underline{\int}_{[a,b]}(\lambda f) \qquad (2)$$

En combinant (1) et (2), on achève de prouver que

$$\lambda \overline{\int}_{[a,b]} f = \underline{\int}_{[a,b]}(\lambda f).$$

$\square$

3 Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment.

3.1 Fonctions intégrables au sens de Riemann.

Définition 18.

On dira d'une fonction f bornée sur un segment $[a, b]$ qu'elle est **Riemann-intégrable** sur $[a, b]$ si ses intégrales de Darboux inférieures et supérieures sont égales.

On appelle alors **intégrale** de f sur $[a, b]$ leur valeur commune, notée

$$\int_{[a,b]} f.$$

Exemple. Les fonctions constantes sont Riemann-intégrables. En effet, si f est constante sur $[a, b]$, égale à $C \in \mathbb{R}$, alors, d'après le corollaire 12, les intégrales de Darboux inférieures et supérieures valent toutes deux $C(b-a)$. La fonction f est donc bien intégrable et

$$\int_{[a,b]} f = C(b-a).$$

Exemple. La fonction $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est *pas* Riemann-intégrable sur $[0, 1]$: on a vu que ses intégrales de Darboux inférieures et supérieures valent respectivement 0 et 1.

Proposition 19 (HP)**.**

Une fonction croissante sur un segment y est Riemann-intégrable.

Preuve.
Considérons f, croissante sur $[a, b]$. On considère $\sigma_n = (a_0, \dots, a_n)$ la subdivision régulière de $[a, b]$: on note $\delta_n = \frac{b-a}{n}$; pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $a_i = a + i\delta_n$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$s_{[a,b]}(f, \sigma_n) \leq \underline{\int}_{[a,b]} f \leq \overline{\int}_{[a,b]} f \leq S_{[a,b]}(f, \sigma_n) \qquad (*).$$

On a déjà examiné les sommes de Darboux dans le cas particulier d'une fonction croissante :

$$s_{[a,b]}(f, \sigma_n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(a_i^+)(a_{i+1}-a_i) = \delta_n \sum_{i=0}^{n-1} f(a_i^+) \quad \text{et} \quad S_{[a,b]}(f, \sigma_n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(a_{i+1}^-)(a_{i+1}-a_i) = \delta_n \sum_{i=0}^{n-1} f(a_{i+1}^-).$$

On a donc

$$S_{[a,b]}(f, \sigma_n) - s_{[a,b]} = \delta_n \sum_{i=0}^{n-1} \left(f(a_{i+1}^-) - f(a_i^+) \right).$$

Or, par croissance de f, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, on a $f(a_{i+1}^-) - f(a_i^+) \leq f(a_{i+1}) - f(a_i)$.
On peut donc majorer par une somme qui télescope *vraiment* :

$$S_{[a,b]}(f, \sigma_n) - s_{[a,b]}(f, \sigma_n) \leq \delta_n \sum_{i=0}^{n-1} (f(a_{i+1}) - f(a_i)) \leq \delta_n (f(b) - f(a)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

L'encadrement $(*)$ donne alors l'égalité $\underline{\int}_{[a,b]} f = \overline{\int}_{[a,b]} f$, ce qu'il fallait démontrer. □

3.2 Continuité et intégrabilité au sens de Riemann.

Théorème 20.

Les fonctions continues par morceaux sur un segment y sont Riemann-intégrables.

Preuve. Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b])$ et $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ une subdivision adaptée. La fonction f étant continue par morceaux sur $[a,b]$, elle y est bornée, ce qui donne un sens aux fonctions

$$I : \begin{cases}]a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\underline{\int}_{[a,x]} f \end{cases} \quad \text{et} \quad S : \begin{cases}]a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\overline{\int}_{[a,x]} f \end{cases}$$

D'après le théorème 14, puisque f est continue sur les intervalles $]a_i, a_{i+1}[$, les fonctions I et S y sont dérivables et chacune a pour dérivée f. La différence $S - I$ est donc dérivable en tout point de $[a,b] \setminus \{a_0, \dots, a_n\}$ et sa dérivée y est nulle. La fonction $S - I$ est donc constante sur tout intervalle de la forme $]a_i, a_{i+1}[$ (cela vient des accroissements finis...) De plus, le théorème 14 donne que $S - I$ est continue sur $]a,b]$, ce qui amène qu'elle est constante sur $]a,b]$. Puisqu'elle a pour limite 0 en a_+, la fonction $S - I$ est nulle sur $]a,b]$. En particulier,

$$I(b) = S(b) \qquad \text{i.e.} \qquad \underline{\int}_{[a,b]} f = \overline{\int}_{[a,b]} f.$$

Les deux intégrales de Darboux coïncident pour la fonction f, qui est donc bien intégrable au sens de Riemann sur le segment $[a,b]$. □

Proposition 21 (Nombre fini de différences)**.**

Si f et $\widetilde{f}$ sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ et qu'elles ne diffèrent qu'en un nombre fini de points, alors

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \widetilde{f}.$$

Preuve. Soit f et $\widetilde{f}$ deux fonctions de $\mathcal{CM}([a,b])$ et σ et $\widetilde{\sigma}$ deux subdivisions adaptées respectivement à f à $\widetilde{f}$. On suppose que l'ensemble des points $x \in [a,b]$ tels que $f(x) \neq \widetilde{f}(x)$ est fini et on l'insère dans la subdivision $\sigma \cup \widetilde{\sigma}$ pour créer une subdivision de $[a,b]$ qu'on notera $s = (s_0, \cdots, s_n)$. Notons

$$F : x \mapsto \int_{[a,x]} f \quad \text{et} \quad \widetilde{F} : x \mapsto \int_{[a,x]} \widetilde{f}.$$

Le théorème précédent donne que les fonctions F et $\widetilde{F}$ sont continues sur $]a,b]$ et dérivables sur $[a,b] \setminus \{s_0, \cdots, s_n\}$ (puisque les points de discontinuité se trouvent dans s). De plus,

$$\forall x \in [a,b] \setminus \{s_0, \cdots, s_n\} \quad F'(x) - \widetilde{F}'(x) = f(x) - \widetilde{f}(x) = 0,$$

(puisque les points où f et $\widetilde{f}$ diffèrent se trouvent dans s). Ceci prouve que $F - \widetilde{F}$ est constante par morceaux (ou en escalier) ; plus précisément elle est constante sur chaque intervalle $]s_i, s_{i+1}[$. Puisque $F - \widetilde{F}$ est continue, elle est constante sur $]a,b]$, et donc nulle puisque sa limite en a_+ est nulle (toujours le thoérème précédent). En particulier, $F(b) = \widetilde{F}(b)$, soit

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \widetilde{f}.$$

□

3.3 Propriétés de l'intégrale d'une fonction c.p.m. sur un segment.

Commençons par la propriété qui faisait défaut pour les intégrales de Darboux d'une fonction bornée.

Proposition 22 (Linéarité de l'intégrale).

Soient f et g dans $\mathcal{CM}([a,b])$ et deux réels λ, μ. On a

$$\int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g.$$

Remarque. On peut écrire alternativement que l'application $f \mapsto \int_{[a,b]} f$, définie sur l'espace vectoriel des fonctions c.p.m sur $[a,b]$, est une forme linéaire.

Preuve. La fonction f, continue par morceaux sur $[a,b]$, y est Riemann-intégrable, d'après le théorème 20 ce qui signifie que

$$\int_{[a,b]} f = \underline{\int}_{[a,b]} f = \overline{\int}_{[a,b]} f.$$

Ceci est bien sûr vrai pour les fonctions c.p.m. g et $f+g$. D'après le Lemme 16, on a :

$$\underline{\int}_{[a,b]} f + \underline{\int}_{[a,b]} g \leq \underline{\int}_{[a,b]} (f+g) \leq \overline{\int}_{[a,b]} (f+g) \ \leq \ \overline{\int}_{[a,b]} f + \overline{\int}_{[a,b]} g.$$

Or, aux deux extrémités de l'inégalité, les membres valent tous deux $\int_{[a,b]} f + \int_{[a,b]} g$, quand ceux du milieu valent $\int_{[a,b]}(f+g)$. Ceci montre l'égalité

$$\int_{[a,b]} (f+g) = \int_{[a,b]} f + \int_{[a,b]} g \qquad (1).$$

De plus, dans le Lemme 17, la Riemann-intégrabilité de f et de λf permet de remplacer les intégrales de Darboux supérieures et inférieures par de « vraies » intégrales. On obtient alors

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \int_{[a,b]} (\lambda f) = \lambda \int_{[a,b]} f \qquad (2).$$

La linéarité cherchée est obtenue en combinant (1) et (2). □

Proposition 23 (Positivité de l'intégrale).

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b])$ une fonction telle que $\forall x \in [a,b], f(x) \geq 0$. Alors,

$$\int_{[a,b]} f \geq 0.$$

Preuve. La fonction f, c.p.m. sur $[a,b]$, y est Riemann-intégrable. On a donc $\int_{[a,b]} f = \underline{\int}_{[a,b]} f$. Il suffit alors d'appliquer l'inégalité de la moyenne pour les intégrales de Darboux inférieures (Prop. 11 avec $m=0$) pour obtenir $\int_{[a,b]} f \geq 0$. □

Proposition 24 (Croissance de l'intégrale)**.**

Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{CM}([a,b])$ telle que $\forall x \in [a,b], f(x) \leq g(x)$. Alors,

$$\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g.$$

Preuve. Sous les hypothèses de la proposition, la différence $g - f$ est une fonction c.p.m. et positive. D'après la proposition 23, on a $\int_{[a,b]}(g-f) \geq 0$. Par linéarité (proposition 22),

$$\int_{[a,b]} g - \int_{[a,b]} f \geq 0. \qquad \square$$

Proposition 25 (Inégalité triangulaire pour les intégrales)**.**

Pour toute fonction $f \in \mathcal{CM}([a,b])$,

$$\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f|.$$

Preuve. On a $\forall x \in [a,b],\ f(x) \leq |f(x)|$ et $-f(x) \leq |f(x)|$. D'après la proposition 24

$$\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} |f| \qquad \text{et} \qquad \int_{[a,b]} (-f) \leq \int_{[a,b]} |f|, \text{ i.e. } -\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} |f|.$$

En rappelant que $\forall x \in \mathbb{R}\ |x| = \max(x, -x)$, on obtient bien l'inégalité voulue. $\square$

Proposition 26 (Stricte positivité de l'intégrale)**.**

Soit f une fonction <u>continue</u> sur $[a,b]$ telle que $\forall x \in [a,b]\ f(x) \geq 0$.
Si l'intégrale de f est nulle, alors, f est la fonction nulle sur $[a,b]$, i.e.

$$\int_{[a,b]} f = 0 \quad \Longrightarrow \quad f = 0.$$

Preuve. Montrons la contraposée et supposons que f n'est pas la fonction nulle sur $[a,b]$. Cela signifie qu'il existe dans $[a,b]$ un élément x_0 tel que $f(x_0) > 0$. On peut supposer de plus que $x_0 \in]a,b[$ car si f est nulle sur $]a,b[$, elle l'est aux extrémités par continuité. Posons $\varepsilon = \frac{1}{2}f(x_0)$. La fonction f étant continue en x_0, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\quad |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon, \text{ i.e. } f(x) \in [\tfrac{1}{2}f(x_0), \tfrac{3}{2}f(x_0)].$$

Comme $x_0 \in]a,b[$, quitte à réduire η, on peut supposer que $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\subset]a,b[$. Posons alors

$$a_0 = a, \quad a_1 = x_0 - \eta \quad, a_2 = x_0 + \eta, \quad a_3 = b \qquad \text{et} \qquad \sigma = (a_0, a_1, a_2, a_3).$$

Sur $[a_1, a_2]$, f est minorée par $\frac{1}{2}f(x_0)$, ce qui amène

$$\int_{[a,b]} f \ \geq \ s_{[a,b]}(f, \sigma) \ \geq \ \frac{1}{2} f(x_0)(a_2 - a_1) = f(x_0)\eta > 0.$$

On a donc que $\int_{[a,b]} f \neq 0$, ce qui achève la preuve de la contraposée. $\square$