Problème. Une fonction et une suite.

Dans ce problème, on travaillera avec la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{\ln(x)}$.

Les parties B et C du problème sont indépendantes.

Partie A : Variations de f.

Étudier soigneusement les variations de f sur son ensemble de définition.

Partie B : Étude de la régularité de f en 0.

Dans cette partie, la fonction f est considérée sur l'intervalle $]0,1[$.

1. Justifier que f est prolongeable par continuité en 0. Définir ce prolongement.
   Notre prolongement, défini sur $[0,1[$ *est toujours noté* f *dans la suite.*
2. Justifier que le nombre $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x)$ existe et donner sa valeur.
   Justifier alors que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$ et préciser $f'(0)$.
3. Démontrer que f' n'est pas dérivable en 0.

Partie C : Suite récurrente associée à f.

On considère la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par $\begin{cases} v_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \;\; v_n \geq e$.
2. Justifier que la suite (v_n) est convergente et déterminer sa limite.
3. Montrer que pour tout $u \in [0,1]$, on a $0 \leq u(1-u) \leq \frac{1}{4}$.
   Montrer ensuite que $\forall x \geq e,\; 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}$.
4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|v_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4}|v_n - e|$. En déduire :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |v_n - e| \leq \frac{1}{4^n}.$$
5. Déterminer n pour lequel v_n est une valeur approchée de e à 10^{-12} près.

Exercice. Calcul des nombres $\left[\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\arcsin^2\right](0)$.

Dans cet exercice, on note $f : x \mapsto \arcsin^2(x)$. Elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.

1. Démontrer que
   $$\forall x \in]-1,1[\quad (1-x^2)f''(x) - xf'(x) = 2.$$
2. Démontrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in]-1,1[\quad (1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n+1)xf^{(n+1)}(x) - n^2 f^{(n)}(x) = 0.$$
3. En déduire que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f^{(n+2)}(0) = n^2 f^{(n)}(0).$$
4. Exprimer alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ les nombres $f^{(2n)}(0)$ et $f^{(2n+1)}(0)$

   (on utilisera les factorielles lorsque cela s'y prête).