Corrigé du DS 1

Exercice 1. Calculs de sommes.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(n-k) = n\sum_{k=0}^{n} k - \sum_{k=0}^{n} k^2 = n\cdot\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \boxed{\frac{(n-1)n(n+1)}{6}}.$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{k/2} = \sum_{k=0}^{n}\left(e^{1/2}\right)^k - 1 \underset{e^{1/2}\neq 1}{=} \frac{1-e^{\frac{1}{2}(n+1)}}{1-e^{\frac{1}{2}}} - 1 = \boxed{\sqrt{e}\frac{\sqrt{e}^n-1}{\sqrt{e}-1}}.$

3. $$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{3n}\min(k,2n) = \sum_{k=n}^{2n} k + \sum_{k=2n+1}^{3n} 2n &= \sum_{k=0}^{2n} k - \sum_{k=0}^{n} k + 2n\sum_{k=2n+1}^{3n} 1\\ &= \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} + 2n^2\\ &= \boxed{\frac{n(7n+3)}{2}}.\end{aligned}$$

4. $\displaystyle\prod_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} ij = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n} ij = \prod_{i=1}^{n} i^n \prod_{j=1}^{n} j = \prod_{i=1}^{n} i^n n! = (n!)^n \prod_{i=1}^{n} i^n = (n!)^n\left(\prod_{i=1}^{n} i\right)^n = \boxed{(n!)^{2n}}$

5. Il s'agit d'une somme triangulaire, qu'on récrit :
$\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n}\frac{2j-1}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}(2j-1) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(2\cdot\frac{k(k+1)}{2} - k\right) = \sum_{k=1}^{n} k = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}}.$

6. $$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{p}\ln\left(\frac{k^2}{(k+1)(k-2)}\right) &= 2\sum_{k=3}^{p}\ln(k) - \sum_{k=3}^{p}\ln(k+1) - \sum_{k=3}^{p}\ln(k-2)\\ &= 2\sum_{k=3}^{p}\ln(k) - \sum_{i=4}^{p+1}\ln(i) - \sum_{j=1}^{p-2}\ln(j)\\ &= \left(\sum_{k=3}^{p}\ln(k) - \sum_{k=4}^{p+1}\ln(k)\right) + \left(\sum_{k=3}^{p}\ln(k) - \sum_{k=1}^{p-2}\ln(k)\right)\\ &= (\ln(3) - \ln(p+1)) + (\ln(p) + \ln(p-1) - \ln(1) - \ln(2))\\ &= \boxed{\ln\left(\frac{3p(p-1)}{2(p+1)}\right)}.\end{aligned}$$

7. Puisque pour tout entier k, k et k^2 sont de même parité, on a $(-1)^k = (-1)^{k^2}$. Ainsi,
$\displaystyle\sum_{k=0}^{2p}(-1)^{k^2} = \sum_{k=0}^{2p}(-1)^k = \sum_{j=0}^{p}(-1)^{2j} + \sum_{j=1}^{p}(-1)^{2j-1} = (p+1)\times 1 + p\times(-1) = \boxed{1}.$

Exercice 2. Logique et ensembles.

1. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Supposons $\forall x\in\mathbb{R}\ a\cos x + b\sin x = 0$.
En particulier, $a\cos 0 + b\sin 0 = 0$, c'est-à-dire $a\cdot 1 + b\cdot 0 = 0$, qui donne $a = 0$.
En particulier, $a\cos\frac{\pi}{2} + b\sin\frac{\pi}{2} = 0$ c'est-à-dire $a\cdot 0 + b\cdot 1 = 0$, qui donne $b = 0$.

2. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. L'implication sera prouvée par contraposée.
Supposons que $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1)$ et montrons que $x = y$.
On a
$$xy - x + y - 1 = xy - y + x - 1.$$
Ceci donne $2y = 2x$ puis $x = y$.

3. $\boxed{\text{Preuve de } B\subset A}$ (c'est l'inclusion la plus "facile" ici).
Soit $\lambda\in\mathbb{R}$; on considère le couple $(1+2\lambda, 1+3\lambda)$, élément de B. On a
$$3(1+2\lambda) - 2(1+3\lambda) = 3 - 2 + 0\cdot\lambda = 1.$$
Ceci prouve que $(1+2\lambda, 1+3\lambda)\in A$.

• $\boxed{\text{Preuve de } A\subset B}$
Soit $(x,y)\in A$: (x,y) est un couple de réels tel que $3x - 2y = 1$ $(*)$.
Existe-t-il un réel λ tel que $\begin{cases} x = 1+2\lambda\\ y = 1+3\lambda\end{cases}$?
En faisant la différence des deux lignes, on voit que s'il existe, $\lambda = y - x$.
Vérifions que cette valeur convient.
$$1 + 2\lambda = 1 + 2(y-x) = \underbrace{1+2y}_{=3x\ (*)} - 2x = x.$$
$$1 + 3\lambda = 1 + 3(y-x) = \underbrace{1-3x}_{=-2x\ (*)} + 3y = y.$$
Ceci prouve que $(x,y)\in B$.

4. Par transitivité et antisymétrie, il suffit de prouver les inclusions $A\subset B\subset C\subset A$.
• Soit $x\in A$. Alors $x\in A\cup C$. Or, $A\cup C = A\cap B$. Ainsi, $x\in A\cap B$ donc $x\in B$.
On a montré $\underline{A\subset B}$.
• Les trois autres inclusions se montrent de la même façon.

Problème 1. Un calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

1. Comme je ne connais pas cette partie du formulaire de trigo par coeur, je passe par les nombres complexes.

   $$\cos\theta + \cos 3\theta = \mathrm{Re}\left(e^{i\theta} + e^{3i\theta}\right) = \mathrm{Re}\left[e^{2i\theta} 2\cos\theta\right] = 2\cos\theta \mathrm{Re}\left(e^{2i\theta}\right) = 2\cos\theta\cos(2\theta).$$

   En utilisant la formule de duplication pour le sinus, on obtient

   $$\boxed{\cos\theta + \cos 3\theta = \frac{\sin 2\theta \cos 2\theta}{\sin\theta}.}$$

2. En utilisant à nouveau la formule de duplication pour le sinus, on obtient à partir de la question précédente l'égalité

   $$\cos\theta + \cos 3\theta = \frac{\sin 4\theta}{2\sin\theta}.$$

   Or, $4\theta = \frac{8\pi}{5} = 2\pi - \frac{2\pi}{5} = 2\pi - \theta$ donc $\sin 4\theta = -\sin\theta$. Ceci laisse donc

   $$\boxed{\cos\theta + \cos 3\theta = -\frac{1}{2}}.$$

3. En utilisant l'identité $2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$, on obtient

   $$\cos\theta\cos 3\theta = \frac{1}{2}\left(\cos(4\theta) + \cos(2\theta)\right).$$

   Or, puisque $4\theta = 2\pi - \theta$, on a $\cos 4\theta = \cos\theta$. De plus, $3\theta = \frac{6\pi}{5} = 2\pi - \frac{4\pi}{5}$ donc $\cos(3\theta) = \cos(2\theta)$. On a donc

   $$\cos\theta\cos 3\theta = \frac{1}{2}\left(\cos(\theta) + \cos(3\theta)\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \boxed{-\frac{1}{4}}.$$

4. On a démontré en questions 2 et 3 les relations

   $$\begin{cases} \cos\theta + \cos(3\theta) & = -\frac{1}{2} \\ \cos\theta\cos(3\theta) & = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

   Le lien entre les coefficients et les racines d'une équation du second degré nous donne que $\cos\theta$ et $\cos(3\theta)$ sont racines de l'équation

   $$x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0.$$

   Cette équation, nous savons la résoudre ; notons Δ son discriminant. On a

   $$\Delta = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{5}{4}.$$

   Les racines de l'équation sont donc

   $$-\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

   On a

   $$0 \le \frac{\pi}{5} \le \frac{\pi}{2} \quad \text{donc} \quad \pi \le \frac{6\pi}{5} \le \pi + \frac{\pi}{2}.$$

   Cela nous permet de voir que $\cos 3\theta$ est un nombre négatif. Ainsi, $\cos(3\theta) = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

5. Il reste à remarquer que $3\theta = \pi + \frac{\pi}{5}$ et donc que $\cos 3\theta = -\cos\frac{\pi}{5}$. Ceci amène

   $$\boxed{\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}}.$$

6. Voici une construction :
   - Traçons une droite sur le papier puis deux points sur la droite. On sait tracer la médiatrice entre ces deux points : on a désormais deux droites orthogonales.
   - Traçons un cercle de centre l'intersection des deux droites. Son rayon sera l'unité.
   - Cette unité, reportons-la cinq fois sur une des droites pour obtenir la longueur 5. Puis, par un jeu de médiatrices, construisons un carré de côté 5. La diagonale du carré a pour longueur $\sqrt{5}$. On a donc construit ce nombre à la règle et au compas.
   - On reporte la longueur $\sqrt{5}$ sur la droite, on lui ajouter la longueur 1 (toujours au compas). Puis on divise cette longueur par 4 avec deux médiatrices : ça y est ! le nombre $\cos\frac{\pi}{5}$ est construit.
   - Ce nombre, on le reporte à partir du centre du cercle (notre cercle trigonométrique) et on va chercher le point du cercle $(\cos\frac{\pi}{5}, \sin\frac{\pi}{5})$ (disons $e^{i\frac{\pi}{5}}$) à l'aide d'une droite orthogonale (toujours construite au compas).
   - En reportant la distance entre 1 et $e^{i\frac{\pi}{5}}$ à partir de ce dernier point, on construit $e^{2i\frac{\pi}{5}}$ puis de même les trois autres racines cinquièmes de l'unité. Il n'y a plus qu'à tracer un beau pentagone !

Problème 2. Formule de Vandermonde et applications.

1. Cours.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons

$$\mathcal{P}_n : \text{« } \forall (p,m) \in \mathbb{N}^2 \qquad \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p} \text{ »}$$

• Soit $(p,m) \in \mathbb{N}^2$. Puisque $\binom{0}{k}$ est nul pour $k \geq 1$, on a

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{0}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{0}{0}\binom{m}{p-0} = \binom{0+m}{p}.$$

On a établi que $\mathcal{P}_0$ est vraie.
• Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie.
Nous allons démontrer $\mathcal{P}_{n+1}$. Soit $(p,m) \in \mathbb{N}^2$. On calcule

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{p} \binom{n+1}{k}\binom{m}{p-k} &= \sum_{k=0}^{p} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right]\binom{m}{p-k} \\ &= \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k} + \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k-1}\binom{m}{p-k}\end{aligned}$$

(on a bien sûr utilisé la formule de Pascal, inspiré par la question 1.)

(a) Regardons la première somme.
L'assertion $\mathcal{P}_n$, écrite pour le couple d'entiers (p,m) nous donne

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p}.$$

(b) Regardons la seconde somme. Un changement d'indice $j = k-1$ amène

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k-1}\binom{m}{p-k} = \sum_{j=-1}^{p-1} \binom{n}{j}\binom{m}{p-(j+1)} = \sum_{j=0}^{p-1} \binom{n}{j}\binom{m}{p-1-j},$$

(le terme $j=-1$ étant ici nul). On va donc appliquer $\mathcal{P}_n$, mais cette fois pour le couple d'entiers $(p-1,m) \in \mathbb{N}^2$ (*). On obtient

$$\sum_{j=0}^{p-1} \binom{n}{j}\binom{m}{p-1-j} = \binom{n+m}{p-1}.$$

(*) Soyons rigoureux jusqu'au bout : si $p=0$, le couple $(p-1,n)$ n'est pas dans $\mathbb{N}^2$ donc on ne peut pas appliquer $\mathcal{P}_n$. Mais on constate que l'égalité ci-dessous est vraie tout de même $(0=0)$.

Revenons maintenant au calcul initial :

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n+1}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p} + \binom{n+m}{p-1} = \binom{n+1+m}{p},$$

la dernière égalité étant écrite en écrivant une fois encore la formule de Pascal. On a prouvé que $\mathcal{P}n+1$ est vraie.
• D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

3. En prenant $n = m = p$ dans la formule de Vandermonde, on obtient que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{n+n}{n}.$$

En utilisant la symétrie des coefficients binomiaux, on obtient donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}}$$

4. Le changement d'indice $k = n-i$ amène

$$T_n = \sum_{i=0}^{n} (n-i)\binom{n}{n-i}^2 = n\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 - \sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i}^2 = n\binom{2n}{n} - T_n.$$

On vient de prouver l'égalité $T_n = n\binom{2n}{n}$. On a donc

$$\boxed{T_n = \frac{n}{2}\binom{2n}{n}}.$$

5. Supposons n est supérieur à 1. À partir de l'identité précédente, on calcule

$$\binom{2n}{n} = 2\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\binom{n}{k}^2 = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k} = 2\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k}.$$

On vient d'écrire $\binom{2n}{2}$ comme le produit de 2 et d'une somme d'entiers : cela démontre que <u>ce nombre est pair</u>.

6. On propose la preuve alternative suivante en écrivant le binôme :

$$(1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{k}.$$

On isole le terme $k = n$, qui nous intéresse :

$$\binom{2n}{n} = 2^{2n} - \sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n}\binom{2n}{k}.$$

Pour $k \in [\![n+1, 2n]\!]$, on a $\binom{2n}{k} = \binom{2n}{2n-k}$. Le changement d'indice $j = 2n-k$ amène :

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\binom{2n}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n}\binom{2n}{2n-k} = \sum_{j=0}^{n}\binom{2n}{j}.$$

Puisque les deux sommes écrites au-dessus sont égales, on peut écrire

$$\binom{2n}{n} = 2^{2n} - 2\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{k} = 2\left(2^{2n-1} - \sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{k}\right).$$

On est parvenu à écrire $\binom{2n}{n}$ comme le produit de 2 et d'un entier (c'est clair) : on a bien redémontré que

$$\boxed{\binom{2n}{n} \text{ est pair.}}$$

.