# Ensembles



## 1 Notations.

**Définition 1** (Naïve)**.**

- Un **ensemble** non vide $E$ est une collection d'objets $x$ appelés **éléments**.
- On dit d'un élément $x$ de $E$ qu'il **appartient** à $E$, ce qui se note $x \in E$.
  Si l'objet $x$ n'est pas un élément de l'ensemble $E$, on peut noter $x \notin E$.
- On pose qu'il existe un ensemble n'ayant pas d'éléments et que cet ensemble est unique.
  On l'appelle **ensemble vide** et on note $\emptyset$. Pour tout objet $x$, l'assertion "$x \in \emptyset$" est fausse.
- Signe « $=$ ». Si $x$ et $y$ deux éléments d'un ensemble $E$, on notera $x = y$ si on veut exprimer que $x$ et $y$ sont un seul et même élément de $E$.

**Notation.**

Le signe $=$ entre deux ensembles $E$ et $F$ peut être utilisé : en écrivant $E = F$, on veut signifier que les éléments de $E$ sont exactement les éléments de $F$.

**Remarque.** *Ne la lisez surtout pas !*

La définition précédente est naïve car la description d'une collection peut conduire à des paradoxes, des non-sens. Dans un exercice de la feuille de TD, consacré au paradoxe de Russell, on comprend que parler d'*ensemble de tous les ensembles* n'a pas de sens.
Donnons une version pédagogique de ce paradoxe (mais est-ce bien pédagogique de commencer par là ?...)
Dans un village, on demande à un barbier de raser tous les villageois qui ne se rasent pas eux-même. Pourquoi est-il impossible à ce barbier d'accomplir sa mission ?

**Exemple 2** (Ensembles de nombres).

1. $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \cdots\}$ ; $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs.
2. $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*\right\}$.
3. $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels. $\mathbb{R}_+^*$ celui des réels strictement positifs. On a $\mathbb{R}_+^* = ]0, +\infty[$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble des entiers compris entre 1 et $n$ s'écrit

$$\{1, 2, \cdots, n\},$$

ou bien $\{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq n\}$. Cet intervalle d'entiers pourra aussi être noté $[\![1, n]\!]$.

Comment décrire un ensemble non vide ?

On utilise des accolades, ainsi qu'une description de ses éléments, qui peut prendre deux formes.

- En **extension** : les éléments sont présentés sous forme de liste, par exemple $\{1, 2, 3\}$. Signalons que l'ordre dans notre liste n'a pas d'importance : $\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$. L'ensemble

$$\{2k, k \in \mathbb{N}\}$$

est l'ensemble des entiers naturels pairs, qu'il faut lire $\{0, 2, 4, 6, \ldots\}$ en comprenant le sens des points de suspension.

- En **compréhension** : on sélectionne dans un autre ensemble, des éléments possédant une certaine propriété. Par exemple, l'ensemble des entiers pairs se note, en compréhension

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \exists p \in \mathbb{N} : n = 2p\}.$$

Dans la notation en compréhension

$$\{x \in E \mid \mathscr{P}(x) \text{ est vraie}\}$$

on écrit, dans l'ordre et entre accolades

$x$ : l'élément typique, $E$ : l'ensemble de sélection, $\mid$ : tel que $\mathscr{P}(x)$ : condition de sélection.

**Exemple 3.**

Écrire de deux façons l'ensemble des couples de réels opposés.

Que dire de l'ensemble vide ? Si on imagine les ensembles comme des boîtes, il n'est pas difficile d'imaginer l'ensemble vide : c'est une boîte qui ne contient rien. On conviendra que l'assertion

$$\forall x \in \emptyset \quad \mathcal{P}(x)$$

est vraie, quelle que soit l'assertion $\mathcal{P}(x)$ énoncée à l'aide de $x$. Puisqu'il n'y a pas d'éléments dans l'ensemble vide, on peut dire que tous les éléments de l'ensemble vide sont verts. Ils sont aussi bleus à poils durs.

**Méthode** (Démontrer qu'un ensemble est vide).

Le raisonnement par l'absurde peut être utile : on suppose que l'ensemble n'est pas vide, on prend un élément de l'ensemble, et on cherche une contradiction.

## 2 Inclusion.

**Définition 4.**

Soit $A$ et $B$ deux ensembles. On dit que $A$ est **inclus** dans $B$, ce que l'on note $A \subset B$, si tout élément de $A$ est un élément de $B$ :

$$\forall x \in A \quad x \in B.$$

On peut faire un lien entre inclusion et implication en écrivant que $A$ est inclus dans $B$ signifie :

$$\forall x \in E \quad x \in A \implies x \in B,$$

où $E$ est un ensemble contenant les éléments de $A$ et de $B$.

**Méthode.**

Pour prouver une inclusion $A \subset B$,

1. On considère un élément de $A$ ("Soit $x \in A$")
2. puis on prouve qu'il est dans $B$ (on devra conclure avec "donc $x \in B$").

**Exemple 5.**

Justifier que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ puis que $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{Z}$.

**Proposition 6** (Transitivité de l'inclusion)**.**

Soient $A, B, C$ trois ensembles.

$$(A \subset B \;\text{ et }\; B \subset C) \implies A \subset C.$$

**Théorème 7** (Double-inclusion)**.**

Soient $A$ et $B$ deux ensembles. On a

$$A = B \quad \iff \quad A \subset B \;\text{ et }\; B \subset A.$$

**Exemple 8** (Prouver une égalité par double-inclusion)**.**

Soient les ensembles

$$A = \mathbb{R}_- \qquad \text{et} \qquad B = \{x \in \mathbb{R} : \quad \forall y \in \mathbb{R}_+ \quad y \geq x\}$$

Montrer que $A = B$.

## 3 Parties d'un ensemble et opérations.

**Définition 9.**

On appelle **partie** d'un ensemble $E$ tout ensemble $A$ tel que $A \subset E$.
Alternativement, on pourra dire que $A$ est un *sous-ensemble* de $E$.

**Remarque.** Pour tout ensemble $E$, les ensembles $E$ et $\emptyset$ sont des parties de $E$.

**Définition 10.**

Soient $A$ et $B$ deux parties d'un ensemble $E$.
On définit l'**intersection** de $A$ et $B$, notée $A \cap B$ et leur **réunion** $A \cup B$ par

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\} \qquad \text{et} \qquad A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

On appelle **différence** de $A$ et de $B$, (« $A$ privé de $B$ ») la partie

$$A \setminus B := \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}.$$

On appelle **complémentaire** de $A$ la partie $E \setminus A$. Cet ensemble pourra aussi être noté $\overline{A}$ ou $A^c$.

Dans le reste du paragraphe, on allège les énoncés en fixant une fois pour toutes un ensemble $E$ et trois parties $A, B, C$ de cet ensemble.

**Proposition 11** (Évidences).

$$\begin{array}{c} A \cup A = A \cap A = A \\ A \cup E = E \cup A = E \\ A \cap E = E \cap A = A \\ A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A \\ A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset \\ A \setminus A = \emptyset \\ A \setminus \emptyset = A \end{array} \qquad \begin{array}{c} \overline{\overline{A}} = A \\ A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \\ A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \\ A \cap B \subset A \subset A \cup B \end{array}$$

**Proposition 12** (Distributivité).

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{et} \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

**Proposition 13** (Lien entre différence et complémentaire).

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}.$$

**Proposition 14** (Formules de Morgan).

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

**Exemple 15.**

Soient $A, B, C$ trois parties d'un ensemble $E$. Montrer que $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

**Proposition 16** (*Décroissance* du passage au complémentaire).

$$A \subset B \implies \overline{B} \subset \overline{A}.$$

Comprendre le mot *décroissance* nécessite ici d'apercevoir l'analogie entre $\leq$ et $\subset$. Nous formaliserons cette idée plus loin dans le paragraphe consacré aux *relations d'ordre*.

**Définition 17** (Généralisation : Intersection et union d'une famille de parties.).

Soit $E$ un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de $E$, indexée par un ensemble $I$.

- On appelle intersection des $A_i$, pour $i$ parcourant $I$ l'ensemble ci-dessous :

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E : \ \forall i \in I \ x \in A_i\}.$$

  C'est l'ensemble des éléments de $E$ qui appartiennent à *tous* les $A_i$.

- On appelle réunion des $A_i$, pour $i$ parcourant $I$ l'ensemble ci-dessous :

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E : \ \exists i \in I \ x \in A_i\}.$$

  C'est l'ensemble des éléments de $E$ qui appartiennent à (au moins) l'un des $A_i$.

Les propriétés vues pour l'intersection/réunion de deux ensembles se généralisent : pour un ensemble $E$, une partie $A$ de $E$ et une famille $(B_i)_{i \in I}$ de parties de $E$, on a les propriétés de distributivité ci-dessous :

$$A \cap \left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i) \qquad \text{et} \qquad A \cup \left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i).$$

Voici les formules de Morgan pour une famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties de $E$ :

$$\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i} \qquad \text{et} \qquad \overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}.$$

**Exemple 18.**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = [\frac{1}{n}, 1]$. Que valent $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$ et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$ ?

## 4 Parties disjointes.

**Définition 19.**

Soient $A$ et $B$ deux parties d'un ensemble $E$. Lorsque $A \cap B = \emptyset$, c'est à dire qu'il n'existe pas d'élément commun à $A$ et $B$, on dit que $A$ et $B$ sont **disjointes**.

**Exemple 20.**

Pour chacune des situations ci-dessous, donner l'exemple de deux ensembles $A$ et $B$ tels que

1. $A$ et $B$ sont distincts mais non disjoints.
2. $A$ et $B$ sont disjoints mais non distincts.
3. $A$ et $B$ sont disjoints et distincts.
4. $A$ et $B$ sont non disjoints et non distincts.

**Définition 21.**

Soit $E$ un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de $E$, indexée par un ensemble $I$. On dit que cette famille est constituée de parties **deux à deux disjointes** si

$$\forall (i,j) \in I^2 \quad i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset.$$

**Exemple 22** (Il ne suffit pas à l'intersection d'être vide !)**.**

Considérons :

$$A = \{1,2\}, \quad B = \{2,3\}, \quad C = \{1,3\}.$$

Aucune partie n'est disjointe d'une autre, et pourtant $A \cap B \cap C = \emptyset$.
On notera que pour prouver que $A, B$ et $C$ ne sont *pas* deux à deux disjointes, il suffit de constater que $A$ et $B$ ne le sont pas (par exemple).

**Définition 23.**

Un **recouvrement disjoint** d'un ensemble $E$ est une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de $E$ telle que

- $E = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ (l'ensemble $E$ est réunion des parties).
- $\forall i,j \in I \quad i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$ (les parties sont deux à deux disjointes).

Si de surcroît tous les $A_i$ sont non vides, on dit que $(A_i)_{i\in I}$ est une **partition** de $E$.

**Exemple 24.**

Proposer une partition de $]0,+\infty[$ en trois parties puis en une infinité de parties.

## 5 Cardinal d'un ensemble fini.

On effleure seulement le sujet ici : un chapitre *Dénombrement* y sera consacré.

**Définition 25** (point de vue naïf).

Soit $E$ un ensemble non vide. Il est dit fini s'il a un nombre fini d'éléments.
Ce nombre est appelé **cardinal** de $E$ et noté $|E|$, ou $\#E$, ou $\text{Card}(E)$. On pose que l'ensemble vide est fini et que son cardinal est 0.
Un ensemble constitué d'un unique élément est appelé **singleton**.
Un ensemble constitué d'exactement deux éléments est appelé une **paire**.

Par exemple, $\text{Card}\left(\{\bigstar, \blacktriangledown, \square\}\right) = 3$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\text{Card}([\![1, n]\!]) = n$ et $\text{Card}([\![0, n]\!]) = n + 1$.

Si $a$ et $b$ sont deux entiers relatifs avec $a \leq b$, $\text{Card}([\![a, b]\!]) =$ .

**Proposition 26** (La partie et le tout).

Soit $E$ un ensemble <u>fini</u> et $A$ une partie de $E$.

- Tout partie $A$ de $E$ est un ensemble fini et $|A| \leq |E|$.
- Si $A$ et $B$ sont des parties de $E$, alors

$$A = B \iff \begin{cases} A \subset B \\ |A| = |B| \end{cases}$$

Ce résultat est admis, faute de définition suffisamment solide pour les ensembles finis et leurs cardinaux. Le slogan derrière l'implication $\Longleftarrow$ : *si la partie est aussi grande que le tout, alors elle est égale au tout.*

**Proposition 27** (Réunion de parties disjointes).

Soit $E$ un ensemble fini et $A$ et $B$ deux parties de $E$ <u>disjointes</u> ($A \cap B = \emptyset$) ; alors la partie $A \cup B$ est finie et a pour cardinal

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Plus généralement, pour $n \in \mathbb{N}^*$, si $A_1, \dots A_n$ $n$ parties d'un ensemble fini $E$, <u>deux à deux disjointes</u>, alors, leur réunion est un ensemble fini de cardinal

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |A_k|.$$

## 6 Produit cartésien.

**Définition 28.**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles. On appelle **produit cartésien** de $E$ et $F$ et on note $E \times F$ l'ensemble

$$\{(x, y) \mid \; x \in E, y \in F\}.$$

Les éléments de $E \times F$ sont appelés **couples**.

**Notation.**

On note $E^2 = E \times E$. Par exemple, $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$.

**Exemple 29.**

1. *Élémentaire.* Expliciter $E \times F$ lorsque $E = \{1, 2, 3\}$, et $F = \{\diamondsuit, \heartsuit\}$.
2. *Couple vs paire.* Écrire un couple de paires puis une paire de couples.

**Définition 30.**

Soient $E_1, E_2, \ldots E_n$, $n$ ensembles. On appelle produit cartésien de $E_1, E_2, \ldots, E_n$ et on note $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ l'ensemble

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \;\mid\; x_1 \in E_1,\; x_2 \in E_2, \cdots,\; x_n \in E_n\}.$$

Les éléments de $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ sont appelés **n-uplets**.

**Proposition 31** (Égalité de deux $n$-uplets)**.**

Soient $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ deux $n$-uplets d'un produit cartésien $E_1 \times \cdots E_n$.

$$(x_1, \ldots, x_n) = (y_1 \ldots, y_n) \quad \iff \quad [\forall i \in [\![1, n]\!] \quad x_i = y_i].$$

Le résultat suivant sera montré dans le cours de dénombrement (il est déjà facile de se convaincre qu'il est vrai). Il montre que le choix de la notation produit est naturelle pour ces ensembles de couples : pour des ensembles de $n$-uplets, le cardinal du produit, c'est le produit des cardinaux.

**Proposition 32.**

Soient $n$ ensembles <u>finis</u> $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Alors le produit cartésien $E_1 \times \cdots \times E_n$ est fini et

$$|E_1 \times \cdots \times E_n| = \prod_{i=1}^{n} |E_i|.$$

## 7 Ensemble des parties d'un ensemble.

**Notation.**

L'**ensemble des parties** d'un ensemble $E$ est noté $\mathcal{P}(E)$.

**Remarque.** Si $E$ est un ensemble, l'assertion « $A$ est une partie de $E$ » peut s'écrire au choix

$$\text{« } A \in \mathcal{P}(E) \text{ »} \qquad \text{ou} \qquad \text{« } A \subset E \text{ »}.$$

**Exemple 33.**

Expliciter $\qquad \mathcal{P}(\{1,2,3\}), \qquad \mathcal{P}(\{1\}), \qquad \mathcal{P}(\emptyset), \qquad \mathcal{P}\left(\mathcal{P}(\{1\})\right).$

**Proposition 34** (admis pour le moment)**.**

Si $E$ est un ensemble fini à $n$ éléments, $\mathcal{P}(E)$ est fini et a $2^n$ éléments.
Autrement dit, il y a $2^n$ parties dans un ensemble à $n$ éléments.
Si $p \in [\![0,n]\!]$, le nombre de ces parties ayant exactement $p$ éléments est $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

## Exercices

**1.1** **[♦◇◇]** Soient $A, B$ deux parties d'un ensemble $E$. Établir que

$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B \quad \text{et} \quad A \setminus (A \cap B) = A \setminus B = (A \cup B) \setminus B.$$

---

**1.2** **[♦◇◇]** Soient $A, B, C, D$ quatre parties d'un ensemble $E$, telles que

$$E = A \cup B \cup C, \qquad A \cap D \subset B, \qquad B \cap D \subset C, \qquad C \cap D \subset A.$$

Montrer que $D \subset A \cap B \cap C$.

---

**1.3** **[♦◇◇]** Soient $A, B, C$ trois parties d'un ensemble $E$. Montrer

$$A \cap B = A \cap C \iff A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}.$$

---

**1.4** **[♦◇◇]** Soient $A, B, C$ trois parties d'un ensemble $E$.
Démontrer que les trois assertions ci-dessous sont deux à deux équivalentes

1. $A \setminus B \subset C$. 2. $A \setminus C \subset B$. 3. $A \subset B \cup C$.

---

$\boxed{1.5}$ **[♦♦◊]** Soit $E$ un ensemble et $A, B$ deux parties de $E$. Démontrer que

$$B \subset A \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall X \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap X) \cup B = A \cap (X \cup B)).$$

---

$\boxed{1.6}$ **[♦◊◊]** Démontrer que

$$\mathbb{R} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in \mathbb{R}_+^* \ \exists b \in \mathbb{R}_-^* : x = a + b \right\}.$$

---

$\boxed{1.7}$ **[♦◊◊]** Prouver que les ensembles $A$ et $B$ définis ci-dessous : sont égaux :

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ 3x - 2y = 1 \right\} \quad \text{et} \quad B = \{(1 + 2\lambda, 1 + 3\lambda), \ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

---

$\boxed{1.8}$ **[♦◊◊]** Soient $A$ et $B$ deux ensembles. Prouver que

1. $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
2. $\mathcal{P}(A \cup B) \supset \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.
   Donner l'exemple de deux ensembles $A$ et $B$ telles que l'inclusion réciproque est fausse.

---

$\boxed{1.9}$ **[♦◊◊]** Soit $E$ un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ un recouvrement disjoint de $E$.
On considère une partie $F$ de $E$ et on pose, pour tout $i \in I$, $B_i := A_i \cap F$.
Vérifier que la famille $(B_i)_{i \in I}$ est un recouvrement disjoint de $F$.

---

$\boxed{1.10}$ **[♦♦♦]** Expliciter les ensembles $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} [\tfrac{1}{n+1}, \tfrac{1}{n}]$ et $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [\tfrac{1}{n+1}, \tfrac{1}{n}]$.

---

$\boxed{1.11}$ **[♦♦♦]** (Différence symétrique)
Soit $E$ un ensemble. Pour toutes parties $A$ et $B$ de $E$, on appelle différence symétrique de $A$ et $B$ et on note $A \Delta B$ l'ensemble

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

1. Représenter deux parties $A$ et $B$ de $E$ ainsi que $A \Delta B$ sur un dessin.
   Compléter : « un élément $x$ de $E$ est dans $A \Delta B$ si et seulement si $x \in A$ ... $x \in B$. »
2. Montrer que pour tout couple de parties $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$,
   $$A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B).$$
3. Soient $A, B$ et $C$ trois parties de $E$.
   (a) Démontrer que
   $$(A \Delta B) \Delta C = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C).$$
   (b) En déduire une description (phrase en français) de l'ensemble $(A \Delta B) \Delta C$ qui mette en évidence que les rôles de $A, B, C$ sont ici interchangeables.
   (c) En déduire sans aucun calcul supplémentaire que
   $$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C).$$

---

$\boxed{1.12}$ **[♦♦◊]** Paradoxe de Russell.
Supposons qu'il existe un *ensemble de tous les ensembles* et notons-le $\mathcal{E}$.
Considérons alors l'ensemble des ensembles n'appartenant pas à eux-mêmes :

$$y = \{x \in \mathcal{E} | x \notin x\}.$$

Démontrer que $y \in y \Longleftrightarrow y \notin y$.

---