## **Problème**. Déterminants circulants

Soient $a, b, c$ trois nombres complexes. On définit les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix},$$

où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, racine 3ème de l'unité.

On introduit aussi le polynôme $P = a + bX + cX^2$.

1. Rappels : représenter les nombres $1, j$ et $j^2$ dans le plan complexe.
   Que valent $\frac{1}{j}$, $j^3$, $j^4$, $j^5$ ?
2. Montrer que
   $$AM = \begin{pmatrix} P(1) & P(j) & P(j^2) \\ P(1) & jP(j) & j^2P(j^2) \\ ? & ? & ? \end{pmatrix} \qquad \text{(on complètera).}$$
   Calculer $\det(AM)$ et en déduire que $\det(A) = P(1)P(j)P(j^2)$.
3. Donner à l'aide de $P$ une condition nécessaire et suffisante pour que $A$ soit inversible.
4. (*) Généralisons, avec $n \geq 3$ et désormais
   $$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix},$$
   où $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. On définit $P = \sum_{k=1}^{n} a_k X^{k-1}$.
   En utilisant $P$ et $\omega$, calculer $\det(AM)$ puis en déduire une expression factorisée de $\det(A)$.

T SVP...

## **Problème**. Résultant de deux polynômes.

Soient $p$ et $q$ deux entiers naturels non nuls,

$$P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \text{ et } Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$$

deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ avec $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$.

Le résultant des polynômes $P$ et $Q$ est le nombre complexe noté $\mathrm{Res}(P,Q)$ :

$$\mathrm{Res}(P,Q) = \begin{vmatrix} a_0 & & & b_0 & & \\ a_1 & \ddots & & b_1 & \ddots & \\ \vdots & & a_0 & \vdots & & b_0 \\ a_p & & a_1 & a_0 \;\vdots & & b_1 \\ & \ddots & \vdots & a_1 \; b_q & & \vdots \\ & & a_p & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & a_p & & b_q \end{vmatrix}.$$

C'est un déterminant $q+p$ colonnes, dont les $q$ premières colonnes représentent les coefficients du polynôme $P$ et les $p$ suivantes représentent les coefficients du polynôme $Q$ ; les positions non remplies étant des zéros.

Par exemple, si $P = 1 + 2X + 3X^2$ et $Q = 4 + 5X + 6X^2 + 7X^3$,

$$\mathrm{Res}(P,Q) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$$

La matrice servant à définir $\mathrm{Res}(P,Q)$ pourra être notée $M_{P,Q}$ :

$$\mathrm{Res}(P,Q) = \det M_{P,Q}.$$

On note $E = \mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X]$ et $F = \mathbb{C}_{p+q-1}[X]$.

Soit $u$ l'application de $E$ dans $F$ définie pour $(A,B) \in E$ par :

$$u(A,B) = PA + QB$$

1. **Cas où $u$ est bijective**

   (a) Démontrer que $u$ est une application linéaire.

   (b) Si on suppose que $u$ est bijective, démontrer que $P$ et $Q$ sont premiers entre eux.

   (c) Si on suppose que $P$ et $Q$ sont premiers entre eux, déterminer $\mathrm{Ker}(u)$ et en déduire que $u$ est bijective.

2. **Matrice de $u$**

   On note $\mathcal{B} = ((1,0),(X,0),\ldots,(X^{q-1},0)(0,1),(0,X),\ldots,(0,X^{p-1}))$ une base de $E$ et $\mathcal{B}' = (1, X, \cdots, X^{p+q-1})$ la base canonique de $F$.

   (a) Déterminer la matrice de $u$ par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

   (b) Démontrer que $\mathrm{Res}(P,Q) \neq 0$ si et seulement si $P$ et $Q$ sont premiers entre eux (donc $\mathrm{Res}(P,Q) = 0$ si et seulement si $P$ et $Q$ ont au moins une racine commune complexe).

3. **Racine multiple**

   (a) Démontrer qu'un polynôme $P$ de $\mathbb{C}[X]$ admet une racine multiple dans $\mathbb{C}$ si et seulement si $\mathrm{Res}(P,P') = 0$.

   (b) *Application* : déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(a,b)$ pour que le polynôme $X^3 + aX + b$ admette une racine multiple.