Exercice 1. Calculs de primitives et d'intégrales.

---

a) • On a $\text{th} = \frac{\text{sh}}{\text{ch}} = \frac{\text{ch}'}{\text{ch}}$. Une primitive est donc donnée par $A : x \mapsto \ln(\text{ch}(x))$.

• On a, pour $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, $b(x) = \frac{1}{x}\ln^{-2}(x)$ (forme $u'u^{-2}$, dérivée de $-u^{-1}$). Une primitive est donc $B : x \mapsto -\frac{1}{\ln(x)}$.

• Pour tout x dans $[-1,1]$, on a $c(x) = -\frac{1}{2}(-2x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$
(on a fait apparaître la forme $u'u^{1/2}$, dérivée de $\frac{2}{3}u^{3/2}$).
Une primitive est donc $C : x \mapsto -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1-x^2)^{3/2} = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}$.
Remarque : la dérivabilité de $x \mapsto x^{3/2}$ est claire sur $\mathbb{R}_+^*$ (cours). Il y a aussi dérivabilité en 0, on peut le montrer en revenant au taux d'accroissements.

• Pour tout x dans $]-1,1[$, on a $d(x) = -\frac{1}{2}(-2x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$
(on a fait apparaître la forme $u'u^{-1/2}$, dérivée de $2u^{1/2}$).
Une primitive est donc $D : x \mapsto -\frac{1}{2}\cdot 2(1-x^2)^{1/2} = -(1-x^2)^{1/2}$.

---

b) Pour la première intégrale, c'est facile (primitive usuelle !)

$$I = \int_{\ln(2)}^{\ln(3)} \text{ch}(x)\text{d}x = [\text{sh}(x)]_{\ln(2)}^{\ln(3)} = \text{sh}(\ln(3)) - \text{sh}(\ln(2)) = \frac{3-\frac{1}{3}}{2} - \frac{2-\frac{1}{2}}{2} = \frac{7}{12}.$$

Pour J on fait un petit coup de $+1-1$:

$$J = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t+1}}\text{d}t = \int_0^1 \frac{t+1-1}{\sqrt{t+1}}\text{d}t = \int_0^1 \left(\sqrt{t+1} - \frac{1}{\sqrt{t+1}}\right)\text{d}t$$

d'où

$$J = \left[\frac{2}{3}(t+1)^{3/2} - 2(t+1)^{1/2}\right]_0^1 = 2 - \frac{2}{3}(\sqrt{2}+1) = \boxed{\frac{2}{3}(2-\sqrt{2})}.$$

---

c) 1) On pose

x	$\tan t$
$\text{d}x$	$(1+\tan^2(t))\text{d}t$
$x=1$	$t=\frac{\pi}{4}$
$x=-1$	$t=-\frac{\pi}{4}$

.

On calcule alors

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1+\tan^2(t))^2}(1+\tan^2(t))\text{d}t = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2(t)}\text{d}t = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(t)\text{d}t.$$

On linéarise $\cos^2$ à l'aide d'une formule de duplication : $\cos^2(a) = \frac{1}{2}(1+\cos(2a))$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(t)\text{d}t = \frac{1}{2}\left[\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 1\text{d}t + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(2t)\text{d}t\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \left[-\frac{1}{2}\sin(2t)\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\right).$$

Ceci amène $\boxed{I = \frac{\pi+2}{4}}$

2) On a, par linéarité,

$$I+J = \int_{-1}^{1} \frac{1}{(1+x^2)^2}\text{d}x + \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\text{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2}\text{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\text{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

On en déduit que $J = \frac{\pi}{2} - I$, ce qui laisse $\boxed{J = \frac{\pi-2}{4}}$.

---

d) On intègre par parties, en posant $u'(x) = x$ et $v(x) = (\arctan x)^2$.
On a $v'(x) = \frac{2\arctan(x)}{x^2+1}$, et ceci nous incite à considérer comme primitive de u' la fonction $u(x) = \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)$, ce qui va simplifier les calculs. On obtient alors

$$J = \frac{1}{2}\left[\left(x^2+1\right)(\arctan x)^2\right]_0^1 - \int_0^1 \arctan x \mathrm{d}x$$

On calcule la dernière intégrale en réalisant à nouveau une intégration par parties :

$$J = \frac{\pi^2}{16} - [x\arctan x]_0^1 + \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^1 = \boxed{\frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln(2)}$$

---

e)

x	$\sqrt{t}$
$\mathrm{d}x$	$\frac{1}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t$
$x=1$	$t=1$
$x=\sqrt{2}$	$t=2$

$t \mapsto \sqrt{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,2]$.

$$\int_1^2 \frac{1}{t+\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{2}{\sqrt{t}+1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2}{x+1}\mathrm{d}x = [2\ln|x+1|]_1^{\sqrt{2}} = \boxed{2\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)}$$

---

f)

x	$\frac{1}{u}$
$\mathrm{d}x$	$-\frac{1}{u^2}\mathrm{d}u$
$x=a$	$u=\frac{1}{a}$
$x=\frac{1}{a}$	$u=a$

$$I_a = \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{\arctan(x)}{x}\mathrm{d}x = \int_a^{\frac{1}{a}} \frac{\arctan(\frac{1}{u})}{\frac{1}{u}}\left(\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u = \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{\arctan(\frac{1}{u})}{u}\mathrm{d}u.$$

Or, pour $u \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\arctan(\frac{1}{u}) = \frac{\pi}{2} - \arctan(u)$. On a donc

$$I_a = \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(u)}{u}\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}\left[\ln(u)\right]_{\frac{1}{a}}^a - I_a.$$

Ainsi $\quad 2I_a = \frac{\pi}{2}\left(\ln(a) - \ln\left(\frac{1}{a}\right)\right) = \frac{\pi}{2}\cdot 2\ln(a)$, soit $\boxed{I_a = \frac{\pi\ln(a)}{2}}$.

---

g) On fait le changement de variable $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$. On a

u	$\tan\left(\frac{t}{2}\right)$
$\frac{1-u^2}{1+u^2}$	$\cos(t)$
$2\arctan(u)$	t
$\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$	$\mathrm{d}t$
$u=0$	$t=0$
$u=1$	$t=\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1+x\cos(t)} &= \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{x(1-u^2)}{1+u^2}} \times \frac{2\,\mathrm{d}u}{1+u^2} \\
&= \int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}u}{1+u^2+x(1-u^2)} \\
&= \int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}u}{u^2(1-x)+1+x} \\
&= \frac{1}{1-x} \times \int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}u}{u^2+\frac{1+x}{1-x}}
\end{aligned}$$

Or $\frac{1+x}{1-x} > 0$ est positif. On récrit $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1+x\cos(t)} = \frac{2}{1-x} \times \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{u^2+\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}^2}$.

Comme $x \longmapsto \frac{1}{a} \times \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$ est une primitive de $x \longmapsto \frac{1}{x^2+a^2}$, il vient,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+x\cos(t)} &= \frac{2}{1-x} \times \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \times \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}\right)\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{1-x} \times \left[\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \times \arctan\left(u \times \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{1-x} \times \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \times \left[\arctan\left(u \times \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} \times \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \times \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)
\end{aligned}$$

Exercice 2..

1. On a $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{4}$ et

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = [-\ln(\cos x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 0 = \frac{\ln(2)}{2}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par linéarité de l'intégrale, on a

$$\begin{aligned} I_n + I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan^2 x)\tan^n x\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan' x \cdot \tan^n x\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{n+1}(\tan x)^{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x - 1)\tan^n(x)\mathrm{d}x.$$

Sur $[0, \frac{\pi}{4}]$, tan est positive et $\tan x \leq \tan \frac{\pi}{4} = 1$, d'où $1 - \tan x \leq 0$.
On est donc en train d'intégrer une fonction continue et négative, et $0 \leq \frac{\pi}{4}$.
Cela assure que $I_{n+1} - I_n \leq 0$; la suite $\boxed{(I_n) \text{ est décroissante}}$.
La même propriété permet aussi de prouver que pour tout entier n, $I_n \geq 0$.
La suite (I_n) est décroissante et minorée (par 0).
D'après le théorème de la limite monotone, (I_n) est convergente. Notons $\ell = \lim u_n$.
Passons à la limite dans l'égalité $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$: on a $\ell + \ell = 0$: $\boxed{\lim I_n = 0}$.

4. Procédons par récurrence en notant, pour un entier naturel n :

$$\mathcal{P}_n : \quad « (-1)^n I_{2n} = \tfrac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n} \tfrac{(-1)^k}{2k-1} \quad \text{et} \quad (-1)^n I_{2n+1} = \tfrac{\ln(2)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \tfrac{(-1)^k}{2k}. »$$

• $(-1)^0 I_{2\cdot 0} = I_0 = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{0} \frac{(-1)^k}{2k-1}$ d'après la question 1.
De plus $(-1)^0 I_{2\cdot 0+1} = I_1 = \frac{\ln(2)}{2} + \sum_{k=1}^{0} \frac{(-1)^k}{2k}$.
La proposition $\mathcal{P}_0$ est donc vraie.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$. Montrons $\mathcal{P}_{n+1}$.
Dans les calculs qui suivent, on utilise la question précédente en écrivant $I_{2n} + I_{2n+2} = \frac{1}{2n+1}$ et $I_{2n+1} + I_{2n+3} = \frac{1}{2n+2}$.

$$\begin{aligned} &(-1)^{n+1} I_{2(n+1)} \\ &= (-1)^{n+1} I_{2n+2} \\ &= (-1)^n \cdot (-1) \cdot \left(\frac{1}{2n+1} - I_{2n}\right) \\ &= (-1)^n I_{2n} - (-1)^n \frac{1}{2n+1} \\ &\underset{\mathcal{P}_n}{=} \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k-1} + \frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)-1} \\ &= \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k}{2k-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(-1)^{n+1} I_{2(n+1)+1} \\ &= (-1)^{n+1} I_{2n+3} \\ &= (-1)^{n+1} \cdot (-1) \cdot \left(\frac{1}{2n+2} - I_{2n+1}\right) \\ &= (-1)^n I_{2n+1} - (-1)^n \frac{1}{2n+2} \\ &\underset{\mathcal{P}_n}{=} \frac{\ln(2)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k} + \frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)} \\ &= \frac{\ln(2)}{2} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k}{2k}. \end{aligned}$$

On a prouvé que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

• D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, $(-1)^n I_{2n+1} = \frac{\ln(2)}{2} + \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$, d'où

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} = -2 \cdot \frac{\ln(2)}{2} + 2 \cdot (-1)^n \cdot I_{2n+1}.$$

On a prouvé en question 3 que $I_n \to 0$. On a donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln(2)}$.

De la même façon, on a $(-1)^n I_{2n} = \frac{\pi}{4} + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k-1}$, donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k-1} = -\frac{\pi}{4} - (-1)^n I_{2n} \quad \text{Puisque } I_n \to 0, \text{ on a}$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k-1} = -\frac{\pi}{4}}.$$