Corrigé du DM 22

Exercice 0. Je connais mon cours.

On sait que

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} \underset{0}{=} 1+\sum_{k=1}^{n} a_k x^k + o(x^n) \quad \text{avec} \quad a_k = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-(k-1)\right)}{k!}$$

Pour $k \geq 1$, on calcule

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{2^k k!} \cdot 1 \cdot (1-2) \cdot (1-2\cdot 2) \cdots (1-2\cdot(k-1)) \\
&= \frac{(-1)^{k-1}}{2^k k!} \cdot (2-1) \cdot (2\cdot 2-1) \cdots (2\cdot(k-1)-1) \\
&= \frac{(-1)^{k-1}}{2^k k!} \prod_{i=1}^{k-1} (2i-1) \\
&= \frac{(-1)^{k-1}}{2^k k!} \frac{\prod_{i=1}^{k-1}(2i-1) \prod_{i=1}^{k-1}(2i)}{\prod_{i=1}^{k-1}(2i)} \\
&= \frac{(-1)^{k-1}}{2^k k!} \cdot \frac{(2k-2)!}{2^{k-1}(k-1)!} \\
&= \frac{(-1)^{k-1}}{2^k k!} \cdot \frac{(2k-2)!(2k-1)(2k)}{(2k-1)2^k k!} \\
&\boxed{= \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k}(2k-1)} \cdot \frac{(2k)!}{(k!)^2}} \\
&= \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k}(2k-1)} \cdot \binom{2k}{k}.
\end{aligned}$$

Exercice 1. Le retour des nombres de Bernoulli.

1. (a) On sait que $e^t \underset{0}{=} 1+t+\frac{t^2}{2!}+o(t^2)$. Pour $t \neq 0$, on a donc

$$f(t) = \frac{t}{t+\frac{t^2}{2}+o(t^2)} = \frac{1}{1+\frac{t}{2}+o(t)}$$

Nous savons aussi que $\frac{1}{1+u} \underset{0}{==} 1-u+o(u)$. Ainsi, par substitution avec une fonction qui tend vers 0, on a bien

$$\boxed{f(t) = 1-\frac{t}{2}+o(t)}$$

(b) Le développement à l'ordre 0 donne que $f(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 1$.

On peut donc prolonger f par continuité en 0 en posant $\boxed{f(0)=1}$.
L'existence d'un DL en 0 l'ordre 1 est équivalente à la dérivabilité en 0.
On a donc que f est dérivable en 0 et que $\boxed{f'(0) = -\frac{1}{2}}$.

2. (a) Il est évident que $g(-0) = g(0)$. Pour tout $t \in \mathbb{R}^\star$:

$$g(-t) = \frac{t}{1-e^{-t}} - \frac{1}{2}t = \frac{te^t}{e^t-1} - \frac{t\left(e^t-1\right)}{2\left(e^t-1\right)} = \frac{t\left(e^t+1\right)}{2\left(e^t-1\right)} = \frac{t\left(e^t-1\right)}{2\left(e^t-1\right)} + \frac{2t}{2\left(e^t-1\right)}.$$

La dernière expression vaut $\frac{1}{2}t+f(t)$, ce qui achève de prouver que $g(-t) = g(t)$: la fonction g est $\boxed{\text{paire}}$.

(b) La fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Elle admet donc un développement limité à tout ordre en 0 (Taylor-Young). Pour $n \geq 0$,

$$g(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} t^k + o(t^n).$$

Or pour $k \geq 2$: $g^{(k)} = f^{(k)}$, et donc $g^{(k)}(0) = b_k$. On a donc

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \sum_{k=2}^{n} \frac{b_k}{k!} t^k + o(t^n).$$

Puisque g est une fonction paire, on sait les coefficients d'ordre impair de son développement limité en 0 sont nuls : pour $k \geq 1$, $\boxed{b_{2k+1} = 0}$.

3. (a) La formule de Taylor-Young donne les développements limités en 0 :

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k!} t^k + o(t^n) \qquad \text{et} \qquad e^t - 1 = \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{l!} t^l + o(t^n).$$

Posons $P = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$ avec pour tout $i \in [\![0, n]\!]$ $\alpha_k = \frac{b_k}{k!}$.
Posons $Q = \sum\limits_{i=0}^{n} \beta_k X^k$, avec $\beta_0 = 0$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\beta_k = \frac{1}{k!}$. On a

$$f(t)(e^t - 1) = P(t)Q(t) + \underbrace{P(t)o(t^n) + Q(t)o(t^n) + o(t^n)o(t^n)}_{=o(t^n)}$$

Le coefficient γ_n de X^n dans le produit des polynômes P et Q vaut

$$\gamma_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k} \underset{\beta_0=0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b_k.$$

Puisque $f(t)\left(e^t - 1\right) = t$, il vient a fortiori

$$\sum_{k=0}^{n} \gamma_k t^k + o(t^n) = t + o(t^n).$$

Par unicité des coefficients d'un développement limité :

$$\forall n \geq 2 \quad : \quad \gamma_n = \boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b_k = 0}.$$

(b) On sait que $b_0 = f(0)$ donc $\boxed{b_0 = 1}$.
Par la question 1-(b) : $b_1 = f'(0)$ donc $\boxed{b_1 = -\frac{1}{2}}$. Par la question 2-(b) : $\boxed{b_3 = 0}$. Par la question précédente avec $n = 3$:

$$\binom{3}{0} b_0 + \binom{3}{1} b_1 + \binom{3}{2} b_2 = 0,$$

d'où on déduit

$$\boxed{b_2 = \frac{1}{6}}.$$

Exercice 2. Des calculs d'équivalent.

1. La suite u est récurrente linéaire d'ordre 2 (homogène). Elle appartient donc à un plan vectoriel de l'espace des suites, dont nous savons trouver une base. L'équation caractéristique associée est $x^2 - 4x + 4 = 0$, c'est-à-dire $(x-2)^2 = 0$. Puisque la suite possède une racine double, l'ensemble des suites satisfaisant cette relation de récurrence est

$$\mathrm{Vect}\left((2^n)_{n\in\mathbb{N}}, (n2^n)_{n\in\mathbb{N}}\right).$$

Autrement dit, il existe deux constantes réelles λ et μ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \lambda 2^n + \mu n 2^n.$$

L'évaluation en $n = 0$ donne $u_0 = \lambda$, soit $\lambda = -2$.
L'évaluation en $n = 1$ donne $u_1 = 2\lambda + 2\mu$, soit $\mu = 3$.
Puisque $2^n = o(n2^n)$, on a

$$\boxed{u_n \sim 3n2^n}$$

2. En revenant à la forme exponentielle, on a

$$\begin{aligned} u_n &= \exp\left(n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \exp\left(n^2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(n - \frac{1}{2} + o(1)\right) \\ &= e^{-1/2} e^n \cdot e^{o(1)} \end{aligned}$$

Puisque $e^{(o(1)}$ tend vers 1, on a $\boxed{u_n \sim e^{-1/2} e^n}$

3.

$$\begin{aligned}
u_n &= \exp\left(n\ln(n)\ln\left(\frac{n}{n+a}\right)\right)\\
&= \exp\left(-n\ln(n)\ln\left(\frac{n+a}{n}\right)\right)\\
&= \exp\left(-n\ln(n)\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)\right)\\
&= \exp\left(-n\ln(n)\left(\frac{a}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)\\
&= \exp\left(-a\ln(n)+O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)\\
&= \frac{1}{n^a}\times\exp\left(O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)
\end{aligned}$$

Puisque $\frac{\ln(n)}{n}\to 0$, on a

$$\exp\left(O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$$

il vient,

$$\boxed{u_n\sim\frac{1}{n^a}}$$

4. On a $(n+1)^\alpha = n^\alpha\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha$. Or, $(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1+\alpha x+o(x)$ et $\frac{1}{n}\to 0$, donc

$$(n+1)^\alpha = n^\alpha\left(1+\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = n^\alpha+\alpha n^{1-\alpha}+o\left(n^{1-\alpha}\right)$$

Ainsi,

$$(n+1)^\alpha - n^\alpha = \alpha n^{1-\alpha}+o\left(n^{1-\alpha}\right)\qquad\text{donc}\qquad\boxed{u_n\sim\alpha n^{1-\alpha}}$$

5. En factorisant par le terme prépondérant sous les racines, on obtient

$$\begin{aligned}
u_n &= \sqrt{n}+a\sqrt{n+1}+b\sqrt{n+2}\\
&= \sqrt{n}\times\left(1+a\sqrt{1+\frac{1}{n}}+b\sqrt{1+\frac{2}{n}}\right)
\end{aligned}$$

À partir de

$$\sqrt{1+x} = 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+O\left(x^3\right)$$

on obtient,

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+\frac{1}{n}} &= 1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\\
\sqrt{1+\frac{2}{n}} &= 1+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)
\end{aligned}$$

donc

$$u_n = (1+a+b)\sqrt{n}+\left(\frac{a+2b}{2}\right)\times\frac{1}{\sqrt{n}}-\left(\frac{a+4b}{8}\right)\times\frac{1}{n\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

(a) si $1+a+b\neq 0$ alors

$$\boxed{u_n\sim(1+a+b)\sqrt{n}}$$

(b) si $1+a+b=0$ et $a+2b\neq 0$ alors

$$\boxed{u_n\sim\left(\frac{a+2b}{2}\right)\times\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

(c) si $1+a+b=0$ et $a+2b=0$ alors $b=1$ et $a=-2$ et

$$\boxed{u_n\sim\frac{1}{4n^{3/2}}}$$

6. Une comparaison somme intégrale fonctionnera bien ici : on sait primitive $x\mapsto\frac{\ln(x)}{x}$. La fonction $f : x\mapsto\frac{\ln(x)}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et de dérivée $f'(x)=\frac{1-\ln(x)}{x^2}$. En particulier, la dérivée de f est négative sur $[e,+\infty[$, ce qui donne que f est décroissante sur $[3,+\infty[$. Pour $k\geq 4$, on a (on fera le dessin avec les deux rectangles d'aire $f(k)$)

$$\int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t\leq\frac{\ln(k)}{k}\leq\int_{k-1}^k f(t)\mathrm{d}t$$

Sommons entre 4 et $n\geq 4$:

$$\int_4^{n+1}\frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t\leq\sum_{k=4}^n\frac{\ln(k)}{k}\leq\int_3^n\frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t.$$

On a
$$\int_3^n \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}(\ln(t))^2\right]_3^n \sim \frac{1}{2}(\ln(n))^2.$$
Classiquement, $\ln(n+1) \sim \ln(n)$ donc
$$\int_4^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}(\ln(t))^2\right]_4^{n+1} \sim \frac{1}{2}(\ln(n))^2.$$
Par encadrement, et sachant que les termes $k = 1, 2, 3$ manquants sont des constantes négligeables par rapport à $\ln^2(n)$, on obtient
$$\boxed{u_n \sim \frac{1}{2}(\ln(n))^2.}$$

7. La formule de Stirling permet d'écrire
$$\binom{3n}{n} = \frac{(3n)!}{n!(2n)!} \sim \frac{\sqrt{3}\sqrt{2\pi n}\left(\frac{3n}{e}\right)^{3n}}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2}\sqrt{2\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}} \sim \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi n}}\frac{3^{3n}}{2^{2n}},$$
(on a simplifié par $\left(\frac{n}{e}\right)^n$). On en déduit que
$$\begin{aligned}\ln\left[\binom{3n}{n}\right] &= \ln\left[\frac{3^{3n}}{2^{2n}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi n}}(1+o(1))\right]\\ &= 3n\ln(3) - 2n\ln(2) \underbrace{-\frac{1}{2}\ln(n) + \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi n}}\right) + \ln(1+o(1))}_{=o(n)}\end{aligned}$$
d'où on conclut que
$$\boxed{\ln\left[\binom{3n}{n}\right] \sim cn} \qquad \text{avec} \quad c = 3\ln(3) - 2\ln(2).$$

Exercice 3. (*) Suite définie implicitement et calcul d'équivalent.

1. Notons $f\ :\ x \mapsto x\ln(x) - \lambda x$. g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et
$$\forall x > 0,\ f'(x) = 1 + \ln(x) - \lambda$$
f est donc décroissante sur $]0, e^{\lambda-1}]$ puis croissante ensuite (et même strictement). Comme f est de limite nulle en 0 (croissances comparées), elle est strictement négative sur le premier intervalle. Par théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $[e^{\lambda-1}, +\infty[$ dans $[f(e^{\lambda-1}), +\infty[$ qui contient $\mathbb{R}^+$ (puisque $f(e^{\lambda-1}) < 0$).
Finalement, tout élement de $\mathbb{R}_+$ admet un unique antécédent par f dans $\mathbb{R}_+^*$ et en particulier,
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists! x_n > 0 /\ x_n\ln(x_n) - \lambda x_n = \ln(n)}$$

2. Avec les notations précédentes, $x_n = gf^{-1}(\ln(n))$ (en identifiant f et sa restriction à $[e^{\lambda-1}, +\infty[$). Comme f est de limite infinie en $+\infty$, il en est de même de f^{-1} et ainsi $\boxed{x_n \to +\infty}$.
En particulier, $\lambda x_n = o(x_n\ln(x_n))$ et avec la relation vérifiée par x_n,
$$x_n\ln(x_n) \sim \ln(n) \ \text{ c'est-à-dire } x_n\ln(x_n) = \ln(n) + o(\ln(n)).$$
On a alors
$$\ln(x_n\ln(x_n)) = \ln(\ln(n)) + \ln(1 + o(1)) \sim \ln(\ln(n))$$
Comme $\ln(x_n\ln(x_n)) = \ln(x_n) + \ln(\ln(x_n)) \sim \ln(x_n)$ (car $x_n \to +\infty$), on conclut que $\ln(x_n) \sim \ln(\ln(n))$. En utilisant les deux équivalents trouvés,
$$\boxed{x_n \sim \frac{\ln(n)}{\ln(\ln(n))}}$$

Exercice 4. (**)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons la suite $(a_{n,p})_{p\geq 1}$ définie par récurrence par

$$\begin{cases} a_{n,1} = \sqrt{n} \\ \forall\, p \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n,p+1} = \sqrt{n + a_{n,p}} \end{cases}$$

• Montrons que pour tout $p \geq 1$, $a_{n,p} \leq \sqrt{np}$.

La démonstration se fait par récurrence via l'inégalité

$$a_{n,p+1}^2 = n + a_{n,p} \leq n + \sqrt{np} \leq n + np = n(p+1)$$

• Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_{n,n-p}^2 = n + \sqrt{n + a_{n,n-p-2}}$$

Mais

$$a_{n,n-p-2} \leq \sqrt{n(n-p-2)} = O(n)$$

donc

$$a_{n,n-p}^2 = n + \sqrt{n + O(n)} = n\left(1 + \sqrt{\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right)}\right)$$

donc

$$a_{n,n-p}^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$$

donc (*)

$$a_{n,n-p} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$$

En particulier,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$$

Quelques détails sur (*), puisqu'on ne peut pas composer dans un équivalent. Il s'agit d'écrire ici que $a_{n,n-p}^2/n \to 1$ et puisque la racine carrée est continue en 1, que $a_{n,n-p}/\sqrt{n} \to 1$.

•

$$\begin{aligned} u_n = a_{n,n} &= \sqrt{n + \sqrt{n + a_{n,n-2}}} \\ &= \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n} + o(\sqrt{n})}} \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \sqrt{n + \sqrt{n} + o(\sqrt{n})} &= \sqrt{n} \times \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} \\ &= \sqrt{n} \times \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \\ &= \sqrt{n} + \frac{1}{2} + o(1) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} u_n u_n &= \sqrt{n + \sqrt{n} + \frac{1}{2} + o(1)} \\ u_n &= \sqrt{n} \times \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} \\ u_n &= \sqrt{n} \times \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{n}} + \frac{1}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ u_n &= \sqrt{n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$