Corrigé du DM 17

MP2I PV

On définit la suite $(b_n)_{n\geq 0}$ des nombres de Bernoulli par récurrence en posant :

$$b_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1 \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} b_k = 0.$$

On définit la famille (B_n) des polynômes du même nom en posant

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} X^k.$$

---

1. *Prise de contact.*

   (a) En écrivant la relation de récurrence donnée pour $n = 1$, on obtient

   $$\binom{2}{0} b_0 + \binom{2}{1} b_1 = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{b_1 = -\tfrac{1}{2}}.$$

   En écrivant soigneusement les relations pour $n = 2$, $n = 3$ et $n = 4$, on obtient

   $$\boxed{b_2 = \tfrac{1}{6}} \quad \boxed{b_3 = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{b_4 = -\tfrac{1}{30}}.$$

   (b) Le calcul amène

   $$\boxed{B_0 = 1}, \quad \boxed{B_1 = X - \frac{1}{2}}, \quad \boxed{B_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}},$$

   $$\boxed{B_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X} \quad \text{et} \quad \boxed{B_4 = X^4 - 2X^3 + X^2 - \frac{1}{30}}.$$

   On factorise $B_3 = X(X^2 - \frac{3}{2}X + \frac{1}{2})$. Le trinôme apparu dans la factorisation a 1 pour racine "évidente", l'autre vaut donc $\frac{1}{2}$: on a

   $$\boxed{B_3 = X(X-1)(X-\tfrac{1}{2})}.$$

   (c) On procède ici par récurrence "forte". Le nombre b_0 vaut 1 : il est rationnel. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ sont tous rationnels. D'après la relation définissant les nombres de Bernoulli, on a

   $$\binom{n+1}{n} b_n = -\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} b_k.$$

   L'hypothèse de récurrence (et le fait que $\mathbb{Q}$ soit stable par somme et produit) donne que le membre de droite est rationnel. Il n'y a plus qu'à diviser par $n+1$ pour voir que b_n est rationnel. Le principe de récurrence donne alors que tous les termes de (b_n) sont des nombres rationnels.

   (d) Pour n donné, on peut écrire

   $$B_n = \binom{n}{n} b_0 X^n + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b_{n-k} X^k = X^n + R,$$

   avec $\deg(R) < n$. Ainsi, le polynôme B_n est de degré n et unitaire.

2. *Une relation de récurrence.*
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   (a) En évaluant B_n en 0, on obtient

   $$B_n(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} 0^k = \binom{n}{0} b_{n-0} = b_n.$$

   Évaluons en 1 :

   $$B_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} 1^k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} + b_n.$$

   En posant le changement de variable $k' = n-k$ et en utilisant la symétrie sur les coefficients binomiaux,

   $$B_n(1) - b_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{n-k} b_k = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b_k.$$

Cette dernière somme est nulle lorsque $n \geq 2$ (c'est la relation de récurrence sur (b_n)). On a bien montré

$$\boxed{\forall n \geq 2 \quad b_n = B_n(0) = B_n(1)}.$$

(b) On dérive B_n,

$$B_n' = \sum_{k=\cancel{0}1}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} k X^{k-1}.$$

Pour $k \geq 1$, la formule sans nom permet d'écrire $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.
En faisant le changement de variable $j = k-1$,

$$B_n' = \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} b_{n-k} X^{k-1} = n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} b_{n-1-j} X^j = nB_{n-1}.$$

Ceci montre bien $\boxed{B_n' = nB_{n-1}}$.

(c) On procède par récurrence sur k. L'identité est claire pour $k = 0$.
Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Supposons que $B_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)}B_{n-k}$. On dérive :

$$B_n^{(k+1)} = \frac{n!}{(n-k)!} B_{n-k}' = \frac{n!}{(n-k)!}(n-k) B_{n-k-1} = \frac{n!}{(n-(k+1))!} B_{n-(k+1)}.$$

Ceci amène bien que $\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!] \quad B_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} B_{n-k}}$.

3. *Identité de translation.*

(a) On a $D^{(p)}(X) = B_n^{(p)}(X+1) - B_n^{(p)}(X)$, de sorte que par la question précédente :

$$\boxed{D^{(p)}(X) = \frac{n!}{(n-p)!}\big(B_{n-p}(X+1) - B_{n-p}(X)\big)}.$$

(b) Évaluons l'identité ci-dessus en 0 : on obtient

$$D^{(p)}(1) = \frac{n!}{(n-p)!}\big(B_{n-p}(1) - B_{n-p}(0)\big).$$

— Si $n - p \geq 2$, nous savons que $B_{n-p}(0) = B_{n-p}(1)$ et ceci amène la nullité de $D^{(p)}(0)$.

— Si $n - p = 1$, alors $B_{n-p}(1) - B_{n-p}(0) = B_1(1) - B_1(0) = 1$ (on rappelle que $B_1 = X - \frac{1}{2}$. Ceci amène $D^{(p)}(0) = n!$

— Si $n - p = 0$, alors $B_{n-p}(1) - B_{n-p}(0) = B_0(1) - B_0(0) = 0$, ce qui conduit à la nullité de $D^{(p)}(0)$.

$$\boxed{D^{(p)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq n-1 \\ n! & \text{si } p = n-1. \end{cases}}$$

(c) $\deg D \leq \max\big(\deg B_n(X+1), B_n(X)\big) \leq n$.
D'après la formule de Taylor et la question précédente :

$$D = \sum_{k=0}^{n} \frac{D^{(k)}(0)}{k!} X^k = \underbrace{0}_{0 \leq k < n-1} + \underbrace{\frac{n!}{(n-1)!} X^{n-1}}_{k=n-1} + \underbrace{0}_{k=n}$$

$$\boxed{B_n(X+1) - B_n(X) = nX^{n-1}}.$$

4. *Formule de Faulhaber.*

(a) Puisque $p+1 \geq 1$, on peut utiliser l'identité précédente et un télescopage pour écrire :

$$\begin{aligned}(p+1)\sum_{k=0}^{n} k^p &= \sum_{k=0}^{n} \left(B_{p+1}(k+1) - B_{p+1}(k)\right) \\ &= B_{p+1}(n+1) - B_{p+1}(0).\end{aligned}$$

(b) Il suffit d'écrire l'identité ci-dessus pour $p = 1, 2, 3$:

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{1}{2}\left(B_2(n+1) - B_2(0)\right) = \frac{1}{2}\big((n+1)^2 - (n+1)\big) = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k^2 &= \frac{1}{3}\left(B_3(n+1) - B_3(0)\right)\\ &= \frac{1}{3}\left((n+1)^3 - \frac{3}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{2}(n+1)\right)\\ &= \frac{(n+1)}{6}\left((n+1)^2 - 3(n+1) + 1\right)\\ &= \boxed{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k^3 &= \frac{1}{4}\left(B_4(n+1) - B_4(0)\right)\\ &= \frac{1}{4}\left((n+1)^4 - 2(n+1)^3 + (n+1)^2\right)\\ &= \frac{(n+1)^2}{4}\left((n+1)^2 - 2(n+1) + 1\right)\\ &= \boxed{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}\end{aligned}$$

5. *La relation de récurrence de 2 caractérise* (B_n).

(a) Supposons que $P_n = B_n$. On a alors, en utilisant la question 2)b)

$$P'_{n+1} - B'_{n+1} = (n+1)(P_n - B_n) = 0.$$

Le polynôme dérivé de $P_{n+1} - B_{n+1}$ est nul ; celui-ci est donc constant et il existe bien $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$P_{n+1} = B_{n+1} + \lambda.$$

(b) On a

$$P'_{n+2} = (n+2)P_{n+1} = (n+2)\left(B_{n+1} + \lambda\right) = B'_{n+2} + \lambda(n+2).$$

On a donc

$$(P_{n+2} - B_{n+2})' = \lambda(n+2).$$

On sait "primitiver" :

$$\exists \mu \in \mathbb{R} \quad P_{n+2} = B_{n+2} + \lambda(n+2)X + \mu.$$

Pour l'écrire rigoureusement, c'est comme au-dessus : on dérive la différence, la dérivée est nulle, donc le polynôme est constant.

(c) Comme suggéré par l'énoncé, on évalue en 0 et en 1 :

$$\begin{aligned}P_{n+2}(0) &= B_{n+2}(0) + \mu\\ P_{n+2}(0) &= B_{n+2}(1) + \lambda(n+2) + \mu\end{aligned}$$

Ici, $n+2 \geq 2$, donc on a, d'après la question 3, $B_{n+2}(0) = B_{n+2}(1)$. De plus, par hypothèse, $P_{n+2}(0) = P_{n+2}(1)$. En faisant la différence des deux lignes, on obtient $\lambda(n+2) = 0$, soit $\lambda = 0$. Ainsi, $P_{n+1} = B_{n+1}$. Puisque $P_0 = B_0$ et que l'on vient de montrer que l'égalité $P_n = B_n$ est une propriété héréditaire, le principe de récurrence permet de montrer que les suites (P_n) et (B_n) sont égales. On a montré l'unité de la suite de polynômes satisfaisant les conditions *i*, *ii* et *iii*.

6. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\widetilde{B}_n = (-1)^n B_n(1-X)$.
On va s'appuyer sur la question précédente et montrer que la suite $(\widetilde{B}_n)$ satisfait les conditions *i*, *ii* et *iii*. Cela suffit pour démontrer que $\widetilde{B}_n = B_n$ pour tout n entier naturel.

i) $\widetilde{B}_0 = (-1)^0 B_0(1-X) = 1_{\mathbb{K}[X]}$.

ii) Pour $n \geq 2$,

$$\widetilde{B}_n(0) = (-1)^n B_n(1-0) = (-1)^n B_n(0) = (-1)^n B_n(1-1) = \widetilde{B}_n(1).$$

iii) Soit $n \geq 1$.

$$\begin{aligned}\widetilde{B}'_n = (-1)^n\left(B_n(1-X)\right)' &= (-1)^n \cdot (-1) B'_n(1-X)\\ &= (-1)^{n-1} n B_{n-1}(1-X)\\ &= n\widetilde{B}_{n-1}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\quad (-1)^n B_n(1-X)=B_n}.$$

(b) On va faire... pareil qu'à la question précédente précédente. Cette fois, on note

$$\widetilde{B}_n=2^{n-1}\left(B_n\left(\frac{X}{2}\right)+B_n\left(\frac{X+1}{2}\right)\right).$$

i) $\widetilde{B}_0=2^{-1}\left(B_0\left(\frac{X}{2}\right)+B_0\left(\frac{X+1}{2}\right)\right)=2^{-1}\left(1_{\mathbb{K}[X]}+1_{\mathbb{K}[X]}\right)=1_{\mathbb{K}[X]}$.

ii) Pour $n\geq 2$,

$$\widetilde{B}_n(0)=2^{n-1}\left(B_n\left(0\right)+B_n\left(\tfrac{1}{2}\right)\right)\ \text{ et }\ \widetilde{B}_n(0)=2^{n-1}\left(B_n\left(\tfrac{1}{2}\right)+B_n\left(1\right)\right).$$

Or, puisque $n\geq 2$, on a $B_n\left(0\right)=B_n\left(1\right)$ d'après 2-(a).
Ceci laisse $\widetilde{B}_n(0)=\widetilde{B}_n(1)$.
iii) Soit $n\geq 1$.

$$\begin{aligned}\widetilde{B}_n&=2^{n-1}\left(\frac{1}{2}B_n'\left(\tfrac{X}{2}\right)+B_n'\left(\tfrac{X+1}{2}\right)\right)\\&=2^{n-1}\left(\frac{1}{2}nB_{n-1}\left(\tfrac{X}{2}\right)+nB_{n-1}\left(\tfrac{X+1}{2}\right)\right)\\&=n\widetilde{B}_{n-1}.\end{aligned}$$

Les propriétés i, ii et iii caractérisent la suite (B_n) donc $(\widetilde{B}_n)=(B_n)$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\quad 2^{n-1}\left(B_n\left(\frac{X}{2}\right)+B_n\left(\frac{X+1}{2}\right)\right)=B_n}$$

7. (a) Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Puisque $2k+1\geq 2$, on a, d'après 2-(a)

$$b_{2k+1}=B_{2k+1}(0)=B_{2k+1}(1).$$

Or, d'après la question 6 a),

$$\widetilde{B}_{2k+1}(0)=B_{2k+1}(0)=b_{2k+1}=(-1)^{2k+1}B_{2k+1}(1)=-b_{2k+1}.$$

On a donc $2b_{2k+1}=0$, ce qui donne bien $2b_{2k+1}=0$ donc $\boxed{b_{2k+1}=0}$.

(b) Pour $k\in\mathbb{N}^*$, on vient de montrer que b_{2k+1} est nul, ce qui amène

$$B_{2k+1}(0)=B_{2k+1}(1)=0.$$

$$\boxed{0 \text{ et } 1 \text{ sont racines de } B_{2k+1}.}$$

L'égalité démontrée en 6 a) se récrit

$$B_{2k+1}=-B_{2k+1}(1-X).$$

Évaluons en $\frac{1}{2}$:

$$B_{2k+1}(\tfrac{1}{2})=-B_{2k+1}(\tfrac{1}{2}).$$

$$\boxed{\tfrac{1}{2} \text{ est racine de } B_{2k+1}}.$$

(c) On va prouver par récurrence sur $k\in\mathbb{N}^*$ que les seules racines de B_{2k+1} sont 0, 1 et $\frac{1}{2}$.

Pour $k=1$, c'est vrai : il suffit de regarder la factorisation de B_3 donnée à la question 1-(b).

Supposons que c'est vrai pour un certain $k\in\mathbb{N}^*$. On raisonne par l'absurde en supposant que le polynôme B_{2k+3} possède une racine α dans $[0,1]$ qui n'est ni 0, ni 1, ni 1/2. Nous savons d'après la question (b) que 0, 1/2 et 1 sont des racines. On dispose donc pour B_{2k+3} de quatre racines dans $[0,1]$.
Pour fixer les idées, on va supposer que $0<\alpha<\frac{1}{2}<1$. La fonction polynomiale $x\mapsto B_{2k+3}(x)$ est continue sur $[0,\alpha]$, dérivable sur $]0,\alpha[$ et $B_{2k+3}(0)=B_{2k+3}(\alpha)$. Le théorème de Rolle nous donne que B_{2k+3}' s'annule sur $]0,\alpha[$. Et puisque $B_{2k+3}'=(2k+3)B_{2k+2}$, ceci nous donne que B_{2k+2} possède une racine β_1 dans $]0,\alpha[$. En raisonnant de la même façon, on peut prouver l'existence d'une deuxième et d'une troisième racine pour B_{2k+2} respectivement dans $]\alpha,1/2[$ et dans $]1/2,1[$. Notons β_2 la racine dans $]\alpha,1/2[$. En appliquant le théorème de Rolle entre β_1 et β_2, on obtient une racine $\gamma\in]\beta_1,\beta_2[\subset]0,1/2[$ pour B_{2k+2}'. Or, $B_{2k+2}=(2k+2)B_{2k+1}'$ et donc γ est une racine de B_{2k+1} qui n'est ni 0,

ni $1/2$, ni 1. Ceci contredit l'hypothèse faite au rang k. Il est clair qu'on peut raisonner de la même manière dans le cas où $0 < \frac{1}{2} < \alpha < 1$. On a démontré que B_{2k+3} n'avait pour racines que 0, $1/2$ et 1.

Ce qui précède établit par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ B_{2k+1} \text{ n'a pour racines dans } [0,1] \text{ que } 0,\ 1/2 \text{ et } 1}$$

8. (a) La fonction polynomiale B_{2k+1} est continue sur $[0, 1/2]$, dérivable sur $]0, 1/2[$. De plus, d'après la question 7, $B_{2k+1}(0) = 0 = B_{2k+1}(1/2)$. Le théorème de Rolle garantit alors l'existence d'un point critique c pour B_{2k+1} dans $]0, 1/2[$. Or, $B'_{2k+1} = (2k+1)B_{2k}$. Ceci amène $B_{2k}(c) = 0$. On peut raisonner de la même façon entre $1/2$ et 1 et trouver une racine pour B_{2k} dans $]1/2, 1[$.

   Si B_{2k} avait deux racines distinctes dans $]0, 1/2[$, on pourrait appliquer à nouveau le théorème de Rolle entre ces deux racines et trouver un point critique pour B_{2k} et donc une racine pour B_{2k-1}. Ceci est impossible car on a prouvé à la question précédente que si $n \geq 3$, B_n n'a pas de racines dans $]0, 1/2[$, et c'est aussi vrai pour $B_1 = X - \frac{1}{2}$.

   Le polynôme B_{2k} a donc exactement une racine dans $]0, 1/2[$ et exactement une dans $]1/2, 1[$ (en raisonnant de façon analogue ou en utilisant que $B_{2k}(1 - X) = B_{2k}(X)$.

   (b) En évaluant en 0 l'identité de la question 6-(b) on obtient

$$(2^{2k-1} - 1)B_{2k}(0) = -2^{2k-1}B_{2k}(1/2).$$

   Puisque $2^{2k-1} \geq 2$, on voit que si l'un des deux nombres $B_{2k}(0)$ ou $B_{2k}(1/2)$ est nul, alors ils le sont tous les deux. Et le théorème de Rolle (encore lui !) donne une racine de B_{2k-1} dans $]0, 1/2[$, ce qui est impossible. Ceci prouve que $B_{2k}(0)$ et $B_{2k}(1/2)$ sont non nuls. Rappelons que d'après 2-(a) on a $B_{2k}(0) = B_{2k}(1)$.

$$\boxed{B_{2k}(0),\ B_{2k}(1/2) \text{ et } B_{2k}(1) \text{ sont tous les trois non nuls.}}$$

   En passant aux valeurs absolues dans l'égalité ci-dessus, on obtient

$$|B_{2k}(\tfrac{1}{2})| = \frac{2^{2k-1} - 1}{2^{2k-1}}|B_{2k}(0)|.$$

   Puisque $\frac{2^{2k-1}-1}{2^{2k-1}} < 1$ et que $|b_{2k}| = |B_{2k}(0)| > 0$, on obtient bien

$$\boxed{|B_{2k}(\tfrac{1}{2})| < |b_{2k}|}$$

   (c) Le nombre $\max\limits_{x\in[0,1]} |B_{2k}(x)| = |b_{2k}|$ existe bien car la fonction polynomiale B_{2k} est continue sur le segment $[0, 1]$. Il est atteint en un point où B_{2k} atteint un minimum ou un maximum.

   Si la fonction polynomiale B_{2k} admet un extremum local sur $]0, 1[$, puisque la fonction est dérivable en ce point de l'ouvert, elle y admet un point critique. Puisque $B_{2k} = 2kB_{2k-1}$, ce point critique pour B_{2k} est aussi une racine pour B_{2k-1} et vaut donc nécessairement $1/2$ d'après la question 7.

   Ce qui précède démontre que $x \mapsto |B_{2k}(x)|$ atteint son maximum en 0 (ou 1 par symétrie) ou en $1/2$. Or, d'après la question précédente, la valeur prise par $|B_{2k}|$ en $1/2$ est strictement inférieure à celle prise en 0. Ceci achève de prouver que

$$\boxed{\max_{x\in[0,1]} |B_{2k}(x)| = |b_{2k}|}$$