Applications

2/2 : Images et antécédents

Les lettres E et F désigneront des ensembles.

1 Images par une application.

1.1 Image directe.

Définition 1.

Soit $f : E \to F$ une application et A une partie de E.
On appelle **image** (directe) de A par f, et on note $f(A)$ la partie de F ci-dessous

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in F \mid \exists x \in A \ y = f(x)\}.$$

Lorsque c'est l'image de E tout entier que l'on considère, on peut noter

$$\mathrm{Im}(f) = f(E).$$

Exemple 2.

1. Que vaut $\mathrm{Im}(\arctan)$?
2. Soit $\exp : z \mapsto e^z$; $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ l'exponentielle complexe. Que valent $\exp(\mathbb{R})$ et $\exp(i\mathbb{R})$?

Proposition 3.

Soit $f : E \to F$ une application. Soient A et B deux parties de E. On a

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \quad \text{et} \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

Exemple 4.

Soit $f : x \mapsto x^2$, définie sur $\mathbb{R}$. Considérons $A = [2, +\infty[$, et $B =]-\infty, -2]$. Montrer que

$$f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B).$$

1.2 Image réciproque.

Définition 5.

Soient E et F deux ensembles non vides et $f : E \to F$ une application. Soit A une partie de F. On appelle **image réciproque** de A par f, et on note $f^{-1}(A)$ la partie de E ci-dessous

$$f^{-1}(A) = \{x \in E \mid f(x) \in A\}.$$

En particulier, si $y_0 \in F$, $f^{-1}(\{y_0\})$ est l'ensemble des antécédents de y_0 par f dans E.

⚠ La notation $f^{-1}(A)$ peut prêter à confusion.
Si $f : E \to F$, n'est pas bijective, **l'application f^{-1} n'est pas définie**, contrairement à l'ensemble $f^{-1}(A)$.
Bref, sauf dans le cas où la réciproque existe, l'image réciproque n'est pas l'image par la réciproque...

Exemple 6.

1. La fonction tan étant définie sur l'ensemble que l'on sait, déterminer $\tan^{-1}(\mathbb{R}_+)$?
2. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{array} \right.$. Que valent $f^{-1}(\mathbb{R}_+)$ et $f^{-1}(\{0\})$?

Proposition 7.

Soit $f : E \to F$ une application. Soient A et B deux parties de F. On a

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \quad \text{et} \quad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

2 Applications injectives, surjectives, bijectives.

2.1 Injectivité

Définition 8.

Une application $f : E \to F$ est dite **injective** si tout élément de F a au plus un antécédent dans E, ce qui s'écrit :

$$\forall x, x' \in E \quad f(x) = f(x') \implies x = x'.$$

Méthode.

1. Pour démontrer qu'une application $f : E \to F$ **est** injective :
   - On considère deux éléments x et x' de E,
   - on suppose que $f(x) = f(x')$,
   - on démontre que $x = x'$.
2. Pour démontrer qu'une application $f : E \to F$ **n'est pas** injective, il suffit d'exhiber une paire $\{x, x'\}$ d'éléments de E tels que $x \neq x'$ et $f(x) = f(x')$.

D'une application $f : E \to F$ injective, on peut dire aussi que c'est une **injection** de E vers F.

Exemples 9.

1. La fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est-elle injective ? Comment la « rendre injective » ?
2. Soient
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (p,q) & \mapsto & p + \sqrt{2}q \end{array} \right. \quad \text{et} \quad g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{array} \right. .$$
Montrer que f est injective et que g ne l'est pas.

Exemple 10.

Soit $f : X \to \mathbb{R}$, où $X \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Montrer que si f est strictement monotone, alors elle est injective.

Proposition 11.

La composée de deux applications injectives est injective.

Proposition 12 (Une réciproque partielle)**.**

Soient deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$.
$$g \circ f \text{ est injective} \quad \Longrightarrow \quad f \text{ est injective.}$$

2.2 Surjectivité.

Définition 13.

Une application $f : E \to F$ est dite **surjective** si tout élément de F a au moins un antécédent dans E, ce qui s'écrit :
$$\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad y = f(x).$$

Méthode.

1. Pour démontrer qu'une application $f : E \to F$ **est** surjective :
   - On considère un élément y de F,
   - on trouve/prouve l'existence de $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
2. Pour démontrer qu'une application $f : E \to F$ **n'est pas** surjective, il suffit d'exhiber un élément de F n'ayant pas d'antécédent dans E par f.

D'une application $f : E \to F$ surjective, on peut dire aussi que c'est une **surjection** de E vers F.

Proposition 14 (Vision ensembliste de la surjectivité)**.**

Soit $f : E \to F$ une application. On a

$$f \text{ surjective} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Im}(f) = F.$$

Exemples 15.

1. La fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est-elle surjective ?
2. Soient
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (p,q) & \mapsto & p + \sqrt{2}q \end{array} \right. \quad \text{et} \quad g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{array} \right. .$$
Montrer que g est surjective et que f ne l'est pas.

Proposition 16.

La composée de deux applications surjectives est surjective.

Proposition 17 (Une réciproque partielle)**.**

Soient deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

$$g \circ f \text{ est surjective} \quad \Longrightarrow \quad g \text{ est surjective.}$$

2.3 Bijectivité et application réciproque.

Définition 18.

Soit une application $f : E \to F$. Elle est dite **bijective** si elle est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire si tout élément de F possède un unique antécédent dans E, ce qui s'écrit

$$\forall y \in F \quad \exists! x \in E \quad y = f(x).$$

D'une application $f : E \to F$ bijective, on peut dire aussi que c'est une **bijection** de E vers F.

Définition 19.

Soit une application bijective $f : E \to F$. Tout élément $y \in F$ possède un unique antécédent dans E par f ; notons-le $f^{-1}(y)$. Ceci définit la fonction **réciproque** de f.

$$f^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} F & \to & E \\ y & \mapsto & f^{-1}(y) \end{array} \right. .$$

Proposition 20 (La réciproque est un inverse pour la composition).

Soit $f : E \to F$ une bijection et $f^{-1} : F \to E$ sa réciproque. On a

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E, \qquad \text{et} \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F.$$

Méthode (Calcul de la réciproque d'une fonction).

Soit $f : E \to F$ une fonction bijective et $y \in F$. S'il est possible de résoudre l'équation

$$y = f(x),$$

c'est-à-dire d'exprimer x en fonction de y, on a une expression de $f^{-1}(y)$.

Si, pour tout élément $y \in F$, on sait prouver l'existence et l'unicité d'un antécédent dans E (une solution de l'équation $y = f(x)$), on a prouvé la bijectivité de f.

Exemple 21.

Justifier que ch réalise une bijection de $[0, +\infty[$ dans $[1, +\infty[$ et expliciter sa réciproque.

Théorème 22 (Caract. de la bijectivité par l'existence d'un *inverse* pour la composition).

Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$ une application. Alors,

$$f \text{ est bijective} \iff \left(\exists g \in \mathcal{F}(F, E) \ : \ g \circ f = \mathrm{id}_E \ \text{ et } f \circ g = \mathrm{id}_F\right)$$

Autrement dit, f est bijective si et seulement si elle admet un (même) « inverse » à gauche et à droite pour la composition. De plus, lorsque cet inverse g existe, $g = f^{-1}$.

Proposition 23 (Bijectivité de la réciproque).

Si $f : E \to F$ est une bijection, alors $f^{-1} : E \to F$ est une bijection et

$$\left(f^{-1}\right)^{-1} = f.$$

Proposition 24 (Composée de bijections).

Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux bijections, alors $g \circ f$ est une bijection de E vers G et

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Exercices

Images directes, images réciproques.

$\boxed{\textbf{14.1}}$ **[♦◇◇]** Soit $f : E \to F$ une application. Soient deux parties $A \subset E$ et $B \subset F$. Montrer l'égalité

$$f(A) \cap B = f\left(A \cap f^{-1}(B)\right).$$

$\boxed{\textbf{14.2}}$ **[♦♦◇]** Soit $f : E \to F$ une application. Soit A une partie de E et B une partie de F.

1. (a) Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$.
   (b) Démontrer que si f est injective, l'inclusion réciproque est vraie.
2. Soit B une partie de F.
   (a) Montrer que $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$.
   (b) Démontrer que si f est surjective, l'inclusion réciproque est vraie.
3. Montrer que $f(f^{-1}(f(A))) = f(A)$.
4. Montrer que $f^{-1}(f(f^{-1}(B))) = f^{-1}(B)$.

$\boxed{\textbf{14.3}}$ **[♦♦♦]** Soit $f : E \to F$ une application. Montrer que

$$f \text{ est injective} \quad \Longleftrightarrow \quad [\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)].$$

Applications injectives, surjectives.

$\boxed{\textbf{14.4}}$ **[♦◇◇]** Soient

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{Z} \\ (n,p) & \mapsto & (-1)^n p \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \frac{1+ix}{1-ix} \end{array} \right. .$$

Ces fonctions sont-elles injectives ? surjectives ?

$\boxed{\textbf{14.5}}$ **[♦◇◇]** Dans cet exercice, on admet que π est irrationnel.
Démontrer que $\cos_{|\mathbb{Q}}$ n'est pas injective et que $\sin_{|\mathbb{Q}}$ l'est.

$\boxed{\textbf{14.6}}$ **[♦♦◇]** Soit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ 2x^2 & \text{si } x < 0. \end{array} \right.$

1. Montrer que f n'est pas injective.
2. Montrer que $f_{|\mathbb{Q}}$ (restriction de f à $\mathbb{Q}$) est injective.

$\boxed{\textbf{14.7}}$ **[♦◇◇]** Soit $f : E \to E$. Montrer que

1. f est injective si et seulement si $f \circ f$ est injective.
2. f est surjective si et seulement si $f \circ f$ est surjective.

$\boxed{\textbf{14.8}}$ **[♦♦◇]** Soit E un ensemble et $f : E \to E$ une application.
On suppose que $f \circ f = f$ et que f est injective ou surjective. Montrer que $f = \mathrm{id}_E$.

$\boxed{\textbf{14.9}}$ **[♦♦◇]** Soit E un ensemble e et $f : E \to E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$.
Montrer que

$$f \text{ est surjective} \iff f \text{ est injective.}$$

$\boxed{\textbf{14.10}}$ **[♦◇◇]** Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n + (-1)^n \end{array} \right.$.
Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{N}$ dans lui-même et donner sa réciproque.

$\boxed{\textbf{14.11}}$ **[♦♦◇]** Définir une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$.

$\boxed{\textbf{14.12}}$ **[♦♦◇]** Soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications.
On suppose $f \circ g \circ f$ bijective. Montrer que f et g le sont aussi.

$\boxed{\textbf{14.13}}$ **[♦♦◇]** Soit l'application

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \\ f & \mapsto & (f', f(1)) \end{array} \right. .$$

1. Prouver que Φ est injective.
2. Prouver que Φ est surjective.
3. Donner une expression explicite de Φ^{-1}.

$\boxed{\textbf{14.14}}$ **[♦♦♦]** Soient E un ensemble et $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$. On définit

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \mapsto & (X \cap A, X \cap B). \end{array} \right.$$

1. Calculer $\Phi(\emptyset)$ et $\Phi\big(E \setminus (A \cup B)\big)$. Que dire de A et B si $(A, \emptyset)$ admet un antécédent par Φ ?
2. Montrer que : Φ injective $\iff$ $A \cup B = E$.
3. Montrer que : Φ surjective $\iff$ $A \cap B = \emptyset$.

$\boxed{\textbf{14.15}}$ **[♦♦♦]**
On souhaite que cet exercice éclaire la caractérisation de la bijectivité par existence d'un inverse

Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

1. Démontrer que f est injective si et seulement si elle est inversible à gauche.
   Plus précisément, prouver l'assertion
   $$f \text{ est injective} \iff \exists g \in \mathcal{F}(F, E) \quad g \circ f = \mathrm{id}_E.$$
2. Démontrer que f est surjective si et seulement si elle est inversible à gauche.
   Plus précisément, prouver l'assertion
   $$f \text{ est injective} \iff \exists g \in \mathcal{F}(F, E) \quad f \circ g = \mathrm{id}_F.$$

$\boxed{\textbf{14.16}}$ **[♦♦♦]** [Théorème de Cantor]
Soit $f \in \mathcal{F}(E, \mathcal{P}(E))$. Montrer que f n'est pas surjective.
Indication : on pourra considérer $A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$.
