Intégrales sur un segment

Dans le chapitre précédent, nous avons *construit* l'intégrale de Riemann pour les fonctions continues par morceaux sur un segment $[a, b]$ (avec $a < b$) et à valeurs réelles. Ainsi, lorsque $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$, son intégrale sur $[a, b]$ a été notée

$$\int_{[a,b]} f.$$

Ce chapitre-ci se donne des objectifs plus pratiques. On s'appuie sur les calculs de primitive déjà faits au premier semestre, en cherchant cette fois à mettre en valeur les applications des propriétés théoriques de l'intégrale de Riemann.

Dans la partie 1 de ce cours, nous nous débarrassons de la contrainte sur l'ordre des bornes pour la définition, que nous étendons aux fonctions à valeurs complexes. Nous (re)donnons les **propriétés de l'intégrale** montrées dans le chapitre de construction et appliquons ces propriétés dans une selection d'exercices de cours.

La partie 2 du cours est consacrée au **théorème fondamental de l'analyse**. Une preuve de ce théorème est donnée, même si elle se trouve déjà, en réalité, dans notre construction (et au coeur de celle-ci). Parmi les conséquences du théorème se trouvent la formule de calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive, et celles d'**intégration par parties** et de **changement de variable**, dont on redonne les énoncés.

Les parties 3 et 4 sont consacrées à des nouveautés : la **formule de Taylor avec reste intégral**, et les **sommes de Riemann**. Ces dernières permettent un calcul approché d'une intégrale : c'est la *méthode des rectangles* et c'est l'occasion de parler un peu d'analyse numérique.

1 Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment.

1.1 Ensemble $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$.

Pour une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{C}$, la définition de « f est continue par morceaux sur $[a, b]$ » peut être reprise du chapitre précédent, sans modification.

Définition 1 (Fonction c.p.m sur un intervalle)**.**

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{K}$. On dit que f est **continue par morceaux** sur I si pour tout segment $[a, b]$ inclus dans I, la restriction $f_{|[a,b]}$ est continue par morceaux sur $[a, b]$.
On note $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I.

On se convaincra que $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}(I, \mathbb{K}), +, \cdot)$ et un sous-anneau de $(\mathcal{F}(I, \mathbb{K}), +, \times)$.
Il est clair que $\mathcal{C}(I, \mathbb{K}) \subset \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$.

Exemple 2.

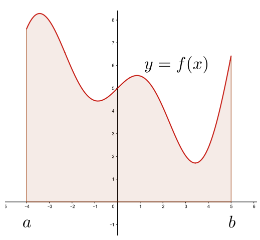
La fonction $x \mapsto \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$. Expliquer.

1.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux entre deux bornes.

Dans le chapitre de construction, nous avons démontré que les fonctions continues par morceaux sur un segment (et à valeurs réelles) y sont intégrables au sens de Riemann. Plus concrètement, si $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ (où $a < b$), on a donné un sens au nombre

$$\int_{[a,b]} f.$$

Lorsque f prend des valeurs positives, on a interprété le nombre ci-dessus comme *l'aire sous la courbe* de f :



Un cas particulier : si f est constante égale à C sur $[a, b]$, nous avons vu que $\displaystyle\int_{[a,b]} f = C(b - a)$.

Définition 3.

Soit $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$ et $a, b \in I$. On note $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, ou plus simplement $\int_a^b f$ le nombre réel défini par

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x := \int_{[a,b]} f \text{ si } a < b, \qquad \int_a^a f(x)\mathrm{d}x := 0, \quad \text{et} \quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x := -\int_{[b,a]} f \text{ si } a > b.$$

Proposition-Définition 4.

Soit $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{C})$.
Les fonctions $x \mapsto \mathrm{Re}(f(x))$ et $x \mapsto \mathrm{Im}(f(x))$ sont continues par morceaux sur I.
Pour $a, b \in I$, on pose

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x := \int_a^b \mathrm{Re}\left(f(x)\right)\mathrm{d}x + i\int_a^b \mathrm{Im}\left(f(x)\right)\mathrm{d}x.$$

Ainsi, la partie réelle de l'intégrale est l'intégrale de la partie réelle, idem pour la partie imaginaire.

Preuve. Pour prouver la continuité par morceaux de $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ à partir de celle de f, on introduit une subdivision adaptée à f $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ et on prouve qu'elle est adaptée à sa partie réelle et à sa partie imaginaire. On peut utiliser pour cela les relations

$$\forall x \in I \quad \mathrm{Re}(f(x)) = \frac{1}{2}\left(f(x) + \overline{f(x)}\right) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(f(x)) = \frac{1}{2i}\left(f(x) - \overline{f(x)}\right).$$

En effet, ces relations donnent que pour un i fixé dans $[\![0, n-1]\!]$, les restrictions de $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ à $]a_i, a_{i+1}[$ y sont continues, et prolongeables par continuité sur les bords. □

1.3 Relation de Chasles.

Proposition 5 (Relation de Chasles)**.**

Soient $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$, et $(a, b, c) \in I^3$.

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Preuve. La relation a été établie dans le cours de construction pour une fonction à valeurs réelles dans le cas où $a < c < b$. On laisse au lecteur le soin de prouver que la relation demeure vraie pour une fonction à valeur complexes, et surtout qu'elle est vraie quel que soit l'ordre sur a, b, c en utilisant la définition 3. □

1.4 Linéarité.

Proposition 6 (Linéarité de l'intégrale)**.**

Soient $f, g \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$, et $(a, b) \in I^2$. Pour tous scalaires $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda\int_a^b f + \mu\int_a^b g.$$

Preuve. La relation a été établie dans le cours de construction pour une fonction à valeurs réelles et des scalaires réels. On laisse au lecteur le soin de prouver que la relation demeure vraie pour une fonction à valeur complexes, en utilisant la définition 4. □

1.5 Intégrales et inégalités.

Évidemment, puisque nous parlons ici d'inégalités, les fonctions considérées seront seulement à valeurs **réelles**, sauf pour l'inégalité triangulaire. Nous soulignons aussi que les propriétés qui suivent réclament toujours que les intégrales examinées soient écrites avec des bornes « bien rangées ». Cette hypothèse essentielle a été encadrée à chaque fois.

Proposition 7 (Positivité).

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$ où le segment $[a,b]$ est tel que $\boxed{a \leq b}$.

Si f est positive sur $[a,b]$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est un nombre positif.
Si f est négative sur $[a,b]$, cette intégrale est un nombre négatif.

Proposition 8 (Intégrale nulle d'une fonction positive et continue).

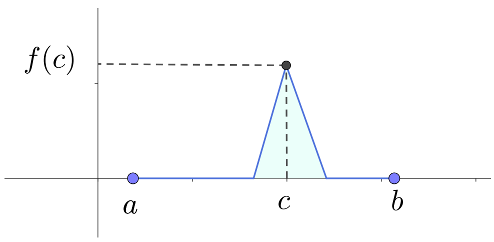
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, avec $\boxed{a < b}$.

$$\text{Si} \left\{ \begin{array}{c} f \text{ est } \underline{\text{continue}} \text{ sur}[a,b] \\ f \text{ est } \underline{\text{positive}} \text{ sur}[a,b] \\ \displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0 \end{array} \right\} \quad \text{alors } f \text{ est nulle sur } [a,b].$$

On a aussi par contraposée la propriété de *stricte positivité de l'intégrale*

$$\text{Si} \left\{ \begin{array}{c} f \text{ est } \underline{\text{continue}} \text{ sur}[a,b] \\ f \text{ est } \underline{\text{positive}} \text{ sur}[a,b] \\ \exists c \in [a,b] \ f(c) > 0 \end{array} \right\} \quad \text{alors } \int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0.$$

Remarque. Dans la première implication, *positive* peut être remplacé par *de signe constant.*



Proposition 9 (Croissance).

Soient $f, g \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$, avec $\boxed{a \leq b}$.

$$f \leq g \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Proposition 10 (Inégalité de la moyenne).

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$, avec $\boxed{a \leq b}$.

Si f est minorée par un réel m et majorée par un réel M sur $[a,b]$, alors,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a), \quad \text{Lorsque } a<b, \text{ on a } \ m \leq \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M.$$

Notamment, si f est constante, égale à C sur $[a,b]$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = C(b-a)$.

Remarque. Lorsque $a<b$, le nombre $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ représente la *valeur moyenne* prise par f sur $[a,b]$.

Proposition 11 (Inégalité triangulaire).

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$, avec $\boxed{a \leq b}$.

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

Preuve.
L'inégalité se prouve facilement pour une fonction f continue par morceaux et à valeurs réelles sur $[a,b]$: pour une telle fonction f, les fonctions $|f|-f$ et $|f|+f$ sont c.p.m et positives sur $[a,b]$. Par positivité, $\int_a^b (|f|-f) \geq 0$ et $\int_a^b (|f|+f) \geq 0$. Par linéarité, on obtient

$$\int_a^b f \leq \int_a^b |f| \quad \text{et} \quad -\int_a^b f \leq \int_a^b |f|.$$

Le passage au maximum donne l'inégalité voulue.

Pour une preuve dans le cas complexe, il faut un peu ruser. Considérons $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{C})$. Écrivons l'intégrale de f sous forme exponentielle :

$$\exists \theta \in \mathbb{R} \quad \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = re^{i\theta}, \quad \text{avec } \ r = \left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right|.$$

Isolons r :

$$r = e^{-i\theta}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b e^{-i\theta} f(t)\mathrm{d}t.$$

La fonction $t \mapsto e^{-i\theta}f(t)$ n'a aucune raison d'être à valeurs réelles mais r, lui, l'est donc

$$r = \mathrm{Re}(r) = \mathrm{Re}\left[e^{-i\theta}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right] = \int_a^b \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}f(t)\right)\mathrm{d}t \leq \int_a^b \left|\mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}f(t)\right)\right|\mathrm{d}t \leq \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t,$$

où on a utilisée l'inégalité $\mathrm{Re}(z) \leq |\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ vraie pour tout nombre complexe z, ainsi que la croissance de l'intégrale. On a bien obtenu

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t.$$

□

2 Intégration et dérivation.

2.1 Théorème fondamental de l'analyse.

Théorème 12 (Théorème fondamental de l'analyse)**.**

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur I. Soit $a \in I$. La fonction

$$F : \left\{ \begin{array}{lll} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et de dérivée $F' = f$.

Corollaire 13.

Toute fonction continue sur un intervalle y admet des primitives.
Sur un intervalle, deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

Une conséquence : la primitive donnée par le TFA est l'*unique* primitive de f sur I qui s'annule en a.

Proposition 14.

Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ et F une primitive de f sur I. Alors, pour tous $a, b \in I$,

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Proposition 15.

Soit $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$. Alors, pour tous $a, b \in I$,

$$\int_a^b f'(t)\mathrm{d}t = f(b) - f(a).$$

2.2 Outils de calcul intégral.

Théorème 16 (Formule d'intégration par parties)**.**

Soient $u, v \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ et $a, b \in I$. Alors,

$$\int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t = [uv]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t.$$

Méthode (Suites dont le terme général est une intégrale).

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a,b]$ et la suite numérique $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad I_n := \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.$$

Expliciter directement le nombre I_n à l'aide d'un calcul de primitive n'est parfois pas possible mais dans certains cas, une IPP permettra d'obtenir une **relation de récurrence** sur la suite (I_n).

Exemple à connaître : la suite des intégrales de Wallis.

Théorème 17 (Formule de changement de variable).

Soit $\varphi\in\mathcal{C}^1(I,J)$, $f\in\mathcal{C}(J,\mathbb{K})$ et $(a,b)\in I^2$. On a

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

Le moyen mnémotechnique pour se souvenir de la formule : on pose $x=\varphi(t)$ et on écrit « $\mathrm{d}x=\varphi'(t)\mathrm{d}t$ ».

Corollaire 18 (Intégrale d'une fonction paire, d'une fonction impaire).

Soit $f\in\mathcal{CM}([-a,a],\mathbb{K})$.

$$\text{Si } f \text{ est paire, } \int_{-a}^a f(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\mathrm{d}t. \qquad \text{Si } f \text{ est impaire, } \int_{-a}^a f(t)\mathrm{d}t = 0.$$

Preuve. La preuve avait été écrite en début d'année pour une fonction continue et l'idée reste la même : le changement de variable $x=-t$. Considérons une subdivision σ de $[-a,a]$ et créons à partir de σ une nouvelle subdivision de ce segment cette fois *symétrique* par rapport à 0. Il suffit pour cela d'y mettre 0, tous les points de σ, et tous lesurs opposés. On obtient

$$\sigma' = (-b_p,\dots,-b_1,b_0,b_1,\dots,b_p), \quad \text{avec } b_0=0.$$

On a alors

$$\int_0^a f(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{p-1}\int_{b_i}^{b_{i+1}} f(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{p-1}\int_{b_i}^{b_{i+1}} \widetilde{f}_i(t)\mathrm{d}t,$$

où pour i fixé $\widetilde{f}_i$ désigne la restriction de f à $]b_i,b_{i+1}[$, prolongée par continuité (de sorte que $f_{|[b_i,b_{i+1}]}$) et $\widetilde{f}_i$ ne diffèrent qu'en b_i et en b_{i+1} éventuellement. Pour $i\in[\![0,p-1]\!]$, on obtient par changement de variable $t=-x$,

$$\int_{b_i}^{b_{i+1}} \widetilde{f}_i(t)\mathrm{d}t = -\int_{-b_i}^{-b_{i+1}} \widetilde{f}_i(-x)\mathrm{d}x = \int_{-b_{i+1}}^{-b_i} \widetilde{f}_i(-x)\mathrm{d}x.$$

En sommant, on obtient

$$\int_0^a f(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{p-1}\int_{b_i}^{b_{i+1}} \widetilde{f}_i(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{p-1}\int_{-b_{i+1}}^{-b_i} \widetilde{f}_i(-x)\mathrm{d}x = \int_{-b_p}^{b_0} f(-x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(-t)\mathrm{d}t.$$

On obtient bien que
— si f est paire, alors $\int_0^a f(t)\mathrm{d}t = \int_{-a}^0 f(t)\mathrm{d}t$;
— si f est impaire, $\int_0^a f(t)\mathrm{d}t = \int_{-a}^0 (-1)f(t)\mathrm{d}t = -\int_{-a}^0 f(t)\mathrm{d}t$.

□

Corollaire 19.

Soit $f \in \mathcal{CM}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, une fonction T périodique, où T est un réel strictement positif.

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \int_a^{a+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\mathrm{d}t.$$

Preuve. On laisse au lecteur le soin d'adapter la preuve donnée en début d'année pour une fonction continue, et ceci en utilisant la même idée : prouver que

$$\varphi : a \mapsto \int_a^{a+T} f(t)\mathrm{d}t$$

est constante en la dérivant. Cette fois, la fonction φ n'est plus dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier mais seulement en tout point où f est continue... □

2.3 Quelques exercices de cours.

Exemple 20.

Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $I_a = \displaystyle\int_a^{a^2} \ln^3(x)\mathrm{d}x$. Existence et signe de I_a.

Exemple 21 (La fonction s'annule)**.**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0$.
Justifier que f s'annule au moins une fois sur $[a, b]$:

1. Solution 1 : en utilisant la stricte positivité de l'intégrale ;
2. Solution 2 : en utilisant le théorème fondamental de l'analyse.

Exemple 22 (Un exercice : suite définie par une intégrale)**.**

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n := \displaystyle\int_1^e (\ln(x))^n \,\mathrm{d}x$.

1. Prouver que (I_n) est convergente.
2. Prouver que la limite vaut 0.
3. Donner un équivalent de I_n.

Exemple 23 (Lemme de Riemann-Lebesgue, sous l'hypothèse $\mathcal{C}^1$)**.**

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{C})$. Montrer que

$$\int_a^b f(t)e^{int}\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exemple 24.

Soit la fonction

$$F : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\mathrm{d}t.$$

1. Donner le domaine de définition de F.
2. Montrer que F est dérivable sur D et calculer sa dérivée. Donner les variations de f.
3. (*) Calculer les limites intéressantes.

Exemple 25 (Un changement de variable)**.**

Démontrer que $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{4+\sin x} = \frac{\pi}{\sqrt{15}}$ en posant le changement de variable $t = \tan\frac{x}{2}$.

3 Formule de Taylor avec reste intégral.

Théorème 26 (Formule de Taylor avec reste intégral)**.**

Soit I un intervalle et $a \in I$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I,\mathbb{K})$. Alors, pour tout $x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

- Dans le second membre de l'égalité ci-dessus, la première moitié est la fonction polynomiale
$$x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,$$
parfois appelée polynôme de Taylor à l'ordre n de f. On l'a déjà vu apparaître dans la formule de Taylor-Young : c'est la partie régulière du DL en a à l'ordre n. Pour les fonctions usuelles, et $a = 0$, on connait ses coefficients, car on connait nos développements limités sur le bout des doigts...
- La seconde moitié
$$\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t,$$
est appelée **reste intégral** à l'ordre n. C'est une expression semi-explicite de l'erreur d'approximation d'une fonction par son polynôme de Taylor à l'ordre n.

Exemple 27 (Comparer une fonction et son polynôme de Taylor)**.**

Montrer l'inégalité :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2!}.$$

Un corollaire : l'inégalité ci-dessous, qui généralise l'inégalité des accroissements finis.

Proposition 28 (Inégalité de Taylor Lagrange)**.**

Soit I un intervalle, $a \in I$, $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$.
On suppose que la fonction $|f^{(n+1)}|$ est majorée par une constante M_{n+1} sur I. Alors,

$$\forall x \in I \quad \left| f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leq M_{n+1} \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Exemple 29 (Une fonction qui est somme de sa série de Taylor)**.**

Prouver que

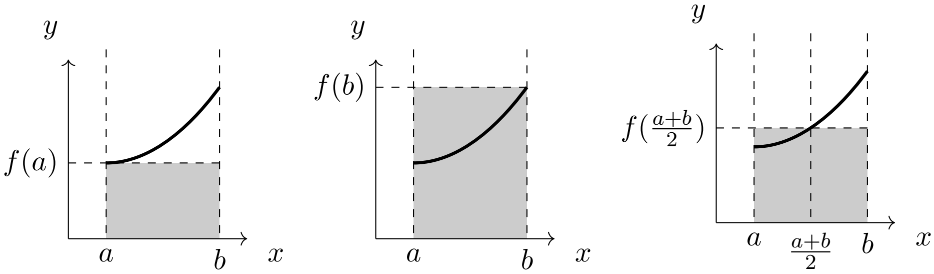
$$\forall x \in [0, 1] \quad \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = \ln(1+x).$$

4 Sommes de Riemann.

Dans cette partie du cours, les théorèmes sont établis pour des fonctions c.p.m. à valeurs complexes. Dès que l'on interprète les choses en termes d'« aire sous la courbe », ou d'« aire de rectangle », il faudra considérer que la fonction dont on parle à ce moment là est à valeurs *réelles positives*.

4.1 Convergence des sommes de Riemann.

Une première approximation du nombre $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est celle donnée par l'aire d'un rectangle de base $b-a$ et de hauteur $f(c)$ où c est un point de $[a, b]$. On fait donc l'approximation $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx (b-a)f(c)$.
Trois choix naturels pour le point c : $c = a$ ("rectangle à gauche"), $c = b$ (à droite), $c = \frac{a+b}{2}$ (point milieu).



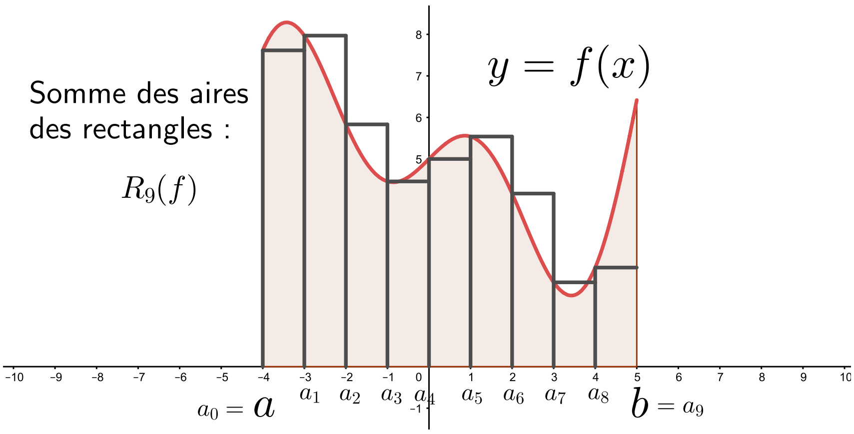
Définition 30.

Soit un segment $[a, b]$ avec $a < b$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$, on note $a_k = a + k\frac{b-a}{n}$.

La famille $(a_0, \ldots, a_n)$ est appelée **subdivision régulière** de $[a, b]$ à n segments. Chaque segment de la subdivision est de longueur $\frac{b-a}{n}$, et ce nombre est appelé **pas** de la subdivision.

Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$. On appelle $n$ème **somme de Riemann** de f le nombre

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k).$$



Théorème 31 (Convergence des sommes de Riemann)**.**

Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$, on note $a_k = a + k\frac{b-a}{n}$ et $R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)$. Alors,

$$R_n(f) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Remarques.

- Ajouter ou retrancher un nombre fini de rectangles ne change rien puisque, lorsque le pas de la subdivision tend vers 0, la contribution du rectangle en question aussi. Par exemple,

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = R_n(f) + \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \ + \ 0.$$

- Le programme officiel n'exige la preuve du résultat que dans le cas d'une fonction f lipschitzienne sur $[a, b]$. Nous écrivons cette preuve, qui démontre la proposition 35. L'hypothèse lipschitz permet de préciser la vitesse de convergence de la "méthode des rectangles".

- Nous prouvons aussi le résultat sous l'hypothèse que f est continue, c'est l'occasion d'utiliser la notion de *continuité uniforme*.

Corollaire 32 (Cas particulier important : $a = 0$ et $b = 1$)**.**

Soit $f \in \mathcal{CM}([0,1], \mathbb{K})$.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

Exemple 33 (Calculer)**.**

$$\lim \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}}; \qquad \text{et} \qquad \lim \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}.$$

Exemple 34 (Inégalité de Jensen pour les intégrales)**.**

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux à valeurs dans un intervalle I et φ une fonction convexe *et continue* sur I. Démontrer l'inégalité de Jensen pour les intégrales :

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi\left(f(t)\right)\mathrm{d}t.$$

4.2 Comparaison de la méthode des rectangles avec celle des trapèzes.

On rappelle que si M est un réel positif et $f : I \to \mathbb{K}$ est une fonction définie sur un intervalle I, on dit que f est M-lispschitzienne sur I, si

$$\forall (x,y) \in I \quad |f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$$

Cette hypothèse est plus forte que la continuité de f (l'une implique l'autre).

Proposition 35 (Erreur d'approximation avec la méthode des rectangles)**.**

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ une fonction M-lipschitzienne, (avec $M \in \mathbb{R}_+^*$).

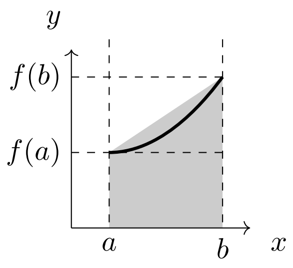
Notons $R_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$, ceci pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Ce nombre est une valeur approchée de l'intégrale $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

$$\text{Voici une majoration de l'erreur d'approximation} \quad \left|R_n(f) - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \frac{M(b-a)^2}{2n}.$$

$$\text{On a donc } \left|R_n(f) - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Peut-on faire mieux qu'une erreur d'approximation en $O(\frac{1}{n})$? La réponse est <u>oui</u> : en remplaçant le **rectangle** par un **trapèze** dans l'approximation élémentaire.



$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \;\approx\; \frac{1}{2}(b-a)\left(f(a)+f(b)\right).$$

On peut préciser la qualité de l'approximation ci-dessus : si f est de classe $\mathcal{C}^2$, on a

$$(*)\qquad \left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \;-\; \frac{1}{2}(b-a)\left(f(a)+f(b)\right)\right| \leq \frac{(b-a)^3}{12}M_2 \quad \text{où} \quad M_2 = \sup_{t\in[a,b]}|f''(t)|.$$

On propose ci-dessous une preuve à l'aide d'une double intégration par parties. Signalons qu'une autre démarche souvent rencontrée repose sur des arguments de type Rolle. On a (première IPP)

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \Big[(x-\tfrac{a+b}{2})f(x)\Big]_a^b - \int_a^b (x-\tfrac{a+b}{2})f'(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) - \int_a^b (x-\tfrac{a+b}{2})f'(x)\mathrm{d}x.$$

Pour la seconde IPP, nous dérivons f' et primitivons la fonction affine en $g : x \mapsto \frac{1}{2}(x-\frac{a+b}{2})+C$, où C est une constante choisie de sorte que notre trinôme g s'annule en a et en b. C'est possible car l'axe de symétrie de la parabole est la médiatrice de $[a,b]$! La valeur de C (poser l'équation) est $-\frac{(b-a)^2}{8}$. Ceci procure un crochet nul et amène

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}(b-a)\left(f(a)+f(b)\right) = 0 + \int_a^b g(t)f''(x)\mathrm{d}x$$

L'inégalité triangulaire amène

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \;-\; \frac{1}{2}(b-a)\left(f(a)+f(b)\right)\right| \leq \int_a^b |g(x)|\cdot|f''(x)|\mathrm{d}x \leq M_2\int_a^b |g(x)|\mathrm{d}x$$

Reste à calculer

$$\begin{aligned}
\int_a^b |g(x)|\mathrm{d}x &= \int_a^b \left|\frac{1}{2}(x-\tfrac{a+b}{2})^2 - \frac{(b-a)^2}{8}\right|\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} \left|\frac{1}{2}u^2 - \frac{(b-a)^2}{8}\right|\mathrm{d}u \qquad \Big(u = x-\tfrac{a+b}{2};\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}x\Big) \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{(b-a)^2}{8}|v^2-1|\frac{b-a}{2}\mathrm{d}v \qquad \left(v = \frac{2}{b-a}u;\ \mathrm{d}v = \frac{2}{b-a}\mathrm{d}u\right) \\
&= \frac{(b-a)^3}{16}\int_{-1}^{1}(1-u^2)\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

L'essentiel pour la suite est là : c'est le $(b-a)^3$. Il reste à calculer l'intégrale qui vaut $\frac{4}{3}$.
On obtient bien une intégrale égale à $\frac{(b-a)^3}{12}$, ce qui achève de prouver $(*)$.

Passons maintenant au découpage. Notons toujours $a_k = a + k\frac{b-a}{n}$, et sommons, pour définir $T_n(f)$, la somme des aires des n trapèzes associés à la subdivision régulière $(a_k)_{0\leq k\leq n}$.

$$T_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}\frac{b-a}{n}\left(f(a_k)+f(a_{k+1})\right)$$

Proposition 36 (Erreur d'approximation avec la méthode des trapèzes)**.**

Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{K})$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $T_n(f)$ comme ci-dessus. On a

$$\left|T_n(f) - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Preuve.

Comme dans la preuve de la proposition 35, on obtient, grâce à la relation de Chasles, que

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - T_n(f)\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\frac{b-a}{n}\left(f(a_k)+f(a_{k+1})\right)\right|.$$

Or, en utilisant l'inégalité (*) énoncée plus haut entre a_k et a_{k+1}, puis en sommant, on a

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - T_n(f)\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(a_{k+1}-a_k)^3}{12}\cdot M_2 = \frac{M_2(b-a)^3}{12}\times\frac{1}{n^3}\times \quad \square$$

L'approximation par les trapèzes est donc meilleure. Le calcul de $R_n(f)$ et de $T_n(f)$ « coûte » la même chose : $O(n)$ opérations mais la deuxième suite converge plus vite vers l'intégrale. Terminons en remarquant qu'il existe une relation simple entre les deux quantités :

$$T_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}\frac{b-a}{n}\left(f(a_k)+f(a_{k+1})\right) = \frac{1}{2}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(a_k) + \frac{1}{2}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n}f(a_k) + \frac{1}{2}\frac{b-a}{n}\left(f(a_n)-f(a_0)\right)$$

On obtient

$$T_n(f) = R_n(f) + \frac{b-a}{n}\cdot\frac{f(b)-f(a)}{2}.$$

Exercices

Propriétés générales des intégrales.

36.1 **[♦♦◇]** Trouver toutes les fonctions f de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ telles que

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = (b-a)\max_{t\in[a,b]}|f(t)|.$$

36.2 **[♦♦♦]** Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t = 0.$$

Justifier que f s'annule au moins deux fois sur $[0,1]$.

36.3 **[♦♦♦]** Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 |\sin nx|\mathrm{d}x$ existe et la calculer

---

Suites définies par des intégrales

$\boxed{\mathbf{36.4}}$ **[♦◇◇]** Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\mathrm{d}x$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nI_n$.

$\boxed{\mathbf{36.5}}$ **[♦◇◇]** Soit (u_n) la suite dont le terme général est défini pour tout entier naturel n par

$$u_n = \int_0^1 \sqrt{1+x^n}\mathrm{d}x.$$

Conjecturer que (u_n) tend vers un nombre réel à préciser. Démontrer votre conjecture.

$\boxed{\mathbf{36.6}}$ **[♦♦◇]** Soit (I_n) la suite dont le terme général est défini pour tout entier naturel n par

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2)\mathrm{d}x.$$

1. Démontrer que $I_n \to 0$.
2. Calculer un équivalent de I_n.

Intégration par parties et changement de variable.

$\boxed{\mathbf{36.7}}$ **[♦◇◇]** Soit f une fonction continue et strictement positive sur $[0,1]$. Calculer

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}\mathrm{d}x.$$

$\boxed{\mathbf{36.8}}$ **[♦♦◇]**

1. À l'aide d'une décomposition en éléments simples, calculer l'intégrale $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\mathrm{d}x$.
2. Calculer par récurrence l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^3)^n}\mathrm{d}x$.

$\boxed{\mathbf{36.9}}$ **[♦♦◇]** Calculer, pour tout entier naturel n le nombre $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\mathrm{d}x$.

$\boxed{\mathbf{36.10}}$ **[♦♦◇]** Soit $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$. En vous aidant du changement de variable $u = \tan\frac{x}{2}$, démontrer que

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos\alpha\cos x}\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{|\sin\alpha|}.$$

Théorème fondamental de l'analyse et applications.

$\boxed{\mathbf{36.11}}$ **[♦♦◇]** Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $g : x \mapsto f(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.
Montrer que si g est décroissante sur $\mathbb{R}$, alors f est la fonction nulle.

$\boxed{\mathbf{36.12}}$ **[♦♦♦]** Déterminer les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad f(2x) = 1 + \int_0^x (x-t)f(2t)\,dt$$

$\boxed{\mathbf{36.13}}$ **[♦♦◇]** Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$. On suppose $f(0)=0$ et que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ (f est donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $f(\mathbb{R}_+)$).

1. Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,dt = x\,f(x)$
2. Montrer que pour tout $a\in\mathbb{R}_+$ et $b \in f(\mathbb{R}_+)$, on a $\displaystyle\int_0^a f(t)\,dt + \int_0^b f^{-1}(t)\,dt \geq ab$

Formule de Taylor avec reste intégral.

$\boxed{\textbf{36.14}}$ **[♦♦◇]** Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$. On suppose que $f(a) = 0$.

1. Montrer que
$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \frac{(b-a)^2}{2} \times \sup_{t\in[a,b]} |f'(t)|$$
2. Étudier le cas d'égalité.

$\boxed{\textbf{36.15}}$ **[♦♦♦]** [Inégalité de Kolmogorov]
Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que f et f'' sont bornées.
On note $M_0 = \sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$ et $M_2 = \sup_{x\in\mathbb{R}}|f''(x)|$.
Nous allons prouver que f' est bornée et majorer $x \mapsto |f(x)|$.

1. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. Montrer que
$$\left|f(a+h) - f(a-h) - 2hf'(a)\right| \leq M_2h^2.$$
puis que $|f'(a)| \leq \frac{1}{h}M_0 + \frac{h}{2}M_2$.
2. Justifier l'existence de $M_1 = \sup_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)|$. Montrer que $M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}$.

Sommes de Riemann.

$\boxed{\textbf{36.16}}$ **[♦◇◇]** Montrer la convergence des suites u, v, w dont le terme général est donné ci-dessous, en précisant la limite :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2}, \qquad v_n \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \lfloor\sqrt{k}\rfloor, \qquad w_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{1/n}.$$

$\boxed{\textbf{36.17}}$ **[♦♦◇]** Prouver l'existence du nombre suivant et le calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^{1/n}.$$

$\boxed{\textbf{36.18}}$ **[♦♦♦]** Soit $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Limite de la suite de terme général $u_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n}f(\frac{k}{n})\right)$.

$\boxed{\textbf{36.19}}$ **[♦♦♦]** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note
$$u_n = \left(2^2 3^3 \cdots n^n\right)^{\frac{1}{n^2}}.$$
Démontrer que $u_n \sim c\sqrt{n}$ où vous expliciterez la constante c.

$\boxed{\textbf{36.20}}$ **[♦♦♦]** Soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$. Justifier que l'intégrale ci-dessous existe et la calculer :

$$I_\lambda = \int_0^\pi \ln(1 - 2\lambda\cos t + \lambda^2)\mathrm{d}t.$$
