

1	Convexité d'une fonction.	1
2	Inégalité des pentes.	2
3	Fonctions convexes dérivables.	3
4	Inégalité de Jensen.	4
	Exercices	5

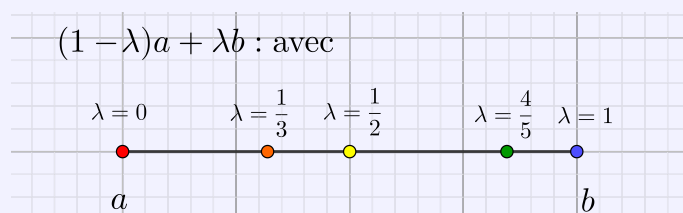
I est un intervalle de \mathbb{R} . Rappelons que c'est une partie *convexe* de \mathbb{R} : si $a, b \in I$ avec $a \leq b$, alors $[a, b] \subset I$.

1 Convexité d'une fonction.

Lemme 1.

Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$. On a

$$[a, b] = \{(1 - \lambda)a + \lambda b \mid \lambda \in [0, 1]\}.$$

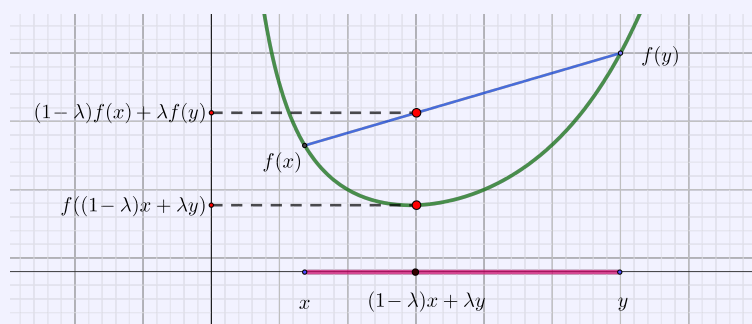


Définition 2.

Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite **convexe** sur I si pour tout $(x, y) \in I^2$ et tout $\lambda \in [0, 1]$,

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

L'opposé d'une fonction convexe est dite **concave**.



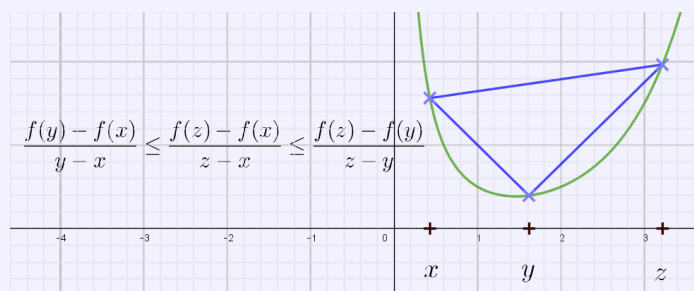
Exemple 3.

1. Les fonctions affines sont convexes sur \mathbb{R} ... et concaves !
2. La fonction $x \mapsto |x|$ est convexe sur \mathbb{R} .

2 Inégalité des pentes.**Proposition 4** (Inégalité des pentes).

Si f est une fonction convexe sur I , alors

$$\forall (x, y, z) \in I^3 \quad (x < y < z) \implies \left(\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y} \right).$$

**Proposition 5** (Caractérisation de la convexité par la croissance des pentes des sécantes).

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Il y a équivalence entre

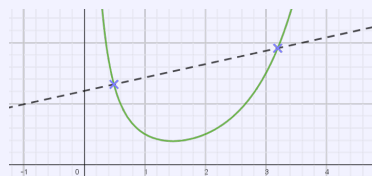
1. f est convexe sur I .
2. Pour tout $a \in I$, la fonction $T_a : x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

Remarque : Si a est un point à l'intérieur de I (c'est-à-dire un élément de I qui n'est pas une borne de I), on peut appliquer le théorème de la limite monotone au taux d'accroissement de f en a et prouver qu'il admet une limite finie à gauche et à droite de a (exercice). Ceci permet de prouver qu'une fonction convexe est dérivable à gauche et à droite (et partant continue) en tout point intérieur de son intervalle de définition.

Proposition 6 (Position du graphe par rapport aux sécantes).

Soit f une fonction convexe sur I et $a, b \in I$ tels que $a < b$.

Considérons l'unique droite affine passant par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$, **sécante** de f . Le graphe de f est en dessous de cette sécante sur $[a, b]$ et au dessus à l'extérieur de $[a, b]$.



3 Fonctions convexes dérivables.

Proposition 7 (Caractérisation des fonctions convexes parmi les fonctions dérivables).

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I . Il y a équivalence entre

1. f est convexe sur I .
2. f' est croissante sur I .

Notamment, si f est une fonction deux fois dérivable sur I , f est convexe sur I ssi $f'' \geq 0$ sur I .

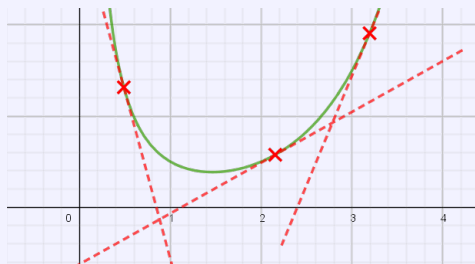
Exemple 8.

- \exp , \ln , et les puissances paires $x \mapsto x^{2p}$ ($p \in \mathbb{N}$) sont convexes sur \mathbb{R} .
Les fonctions $x \mapsto x^a$ avec $a \geq 1$ et $a \leq 0$ sont convexes sur \mathbb{R}_+^* .
- \ln est concave sur \mathbb{R}_+^* . Les fonctions $x \mapsto x^a$ avec $0 \leq a \leq 1$ sont concaves sur \mathbb{R}_+^* .
- Les puissances impaires $x \mapsto x^{2p+1}$ ($p \in \mathbb{N}$) sont concaves sur \mathbb{R}_- et convexes sur \mathbb{R}_+ : on observe en 0 un *point d'inflexion*.

Proposition 9 (Position du graphe par rapport aux tangentes).

Le graphe d'une fonction $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ convexe est au-dessus de toutes ses tangentes : si $a \in I$,

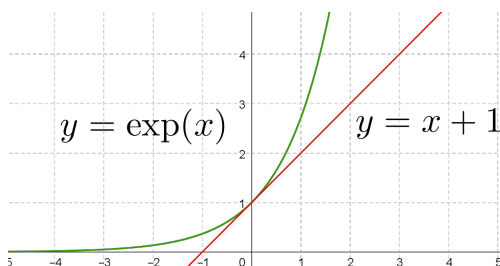
$$\forall x \in I \quad f(x) \geq f'(a)(x - a) + f(a).$$



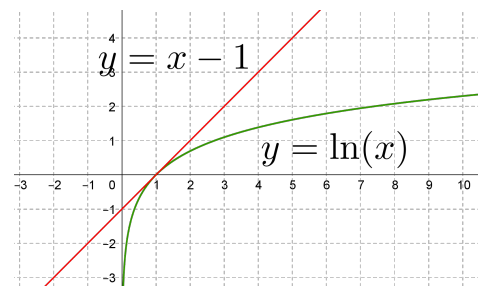
Exemple 10.

Les fonctions \exp et \ln sont respectivement convexe et concave.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x \geq x + 1$$

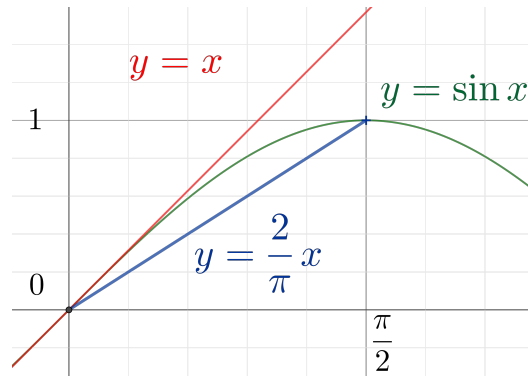


$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln(x) \leq x - 1$$



Exemple 11.

La fonction \sin est concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$: on a l'encadrement $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$.



4 Inégalité de Jensen.

Lemme 12.

Soient x_1, \dots, x_n n éléments d'un intervalle I et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$.

Alors tous les λ_i sont inférieurs à 1 et le nombre $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ est encore un élément de I .

Remarque. On peut voir le nombre $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ comme une *moyenne pondérée* des x_i .

On peut aussi emprunter son vocabulaire à la géométrie et parler de cette somme comme d'un *barycentre* des x_i . Un exemple important : celui où les n scalaires λ_i sont égaux (à $\frac{1}{n}$, donc)

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Alors tous les x_i ont le *même poids dans la moyenne* : on parlera d'*isobarycentre* en géométrie.

Théorème 13 (Inégalité de Jensen).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si f est une fonction convexe sur un intervalle I , l'inégalité

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i),$$

est vraie pour tous x_1, \dots, x_n dans I et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ positifs de somme égale à 1.

Remarque : on retrouve l'inégalité définissant la convexité dans le cas $n = 2$.

L'inégalité de Jensen sera souvent écrite pour des scalaires λ_i tous égaux. Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}^*$, f convexe sur I , et $x_1, \dots, x_n \in I$, on a

$$f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) \leq \frac{1}{n} f\left(\sum_{i=1}^n x_i\right).$$

Exemple 14 (Inégalité arithmético-géométrique).

En utilisant la concavité de \ln sur \mathbb{R}_+^* , on démontre que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^* \quad (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Le membre de droite est appelé moyenne arithmétique des x_i : pour le grand public, c'est « la » moyenne. Le membre de gauche est appelé **moyenne géométrique** des x_i .

L'inégalité arithmético-géométrique montre que si l'on remplaçait la moyenne arithmétique par la géométrique sur les bulletins de notes des étudiants, cela se ferait toujours à leur désavantage !

Exercices

24.1 [◆◆◆]

1. Démontrer que la fonction $x \mapsto \ln(\ln(x))$ est concave sur $]1, +\infty[$.
2. Montrer que

$$\forall a, b > 1 \quad \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(a) \ln(b)}.$$

24.2 [◆◆◆] Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

En discutant selon les valeurs de α , comparer

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^\alpha \quad \text{et} \quad n^{\alpha-1} \sum_{i=1}^n x_i^\alpha.$$

24.3 [◆◆◆] Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1. Montrer que $f : x \mapsto \ln(1 + e^x)$ est convexe sur \mathbb{R} .
2. Montrer que

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n \quad 1 + \left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\prod_{k=1}^n (1 + x_k)\right)^{\frac{1}{n}}$$

3. Montrer que

$$\forall (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{2n} \quad \left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\prod_{k=1}^n (a_k + b_k)\right)^{\frac{1}{n}}.$$

24.4 [◆◆◇]

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{e^x + 1}$ est convexe sur \mathbb{R}_+ .
2. En déduire que pour tout $x_1, \dots, x_n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+x_k} \geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1 \dots x_n}}.$$

24.5 [◆◆◇] Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable et telle que $\forall x \in [0, 1] \ f''(x) \geq 1$.
Montrer que $f(0) - 2f(\frac{1}{2}) + f(1) \geq \frac{1}{4}$.

24.6 [◆◆◇] avec les propriétés de l'intégrale

Soit f une fonction convexe et de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$. Prouver que

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(t)dt \leq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

24.7 [◆◆◇] Montrer que toute fonction convexe sur \mathbb{R} et majorée, est constante.

24.8 [◆◆◇] Soient deux réels $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction convexe.

1. Montrer que f est continue sur $]a, b[$.
2. Donner le graphe d'une fonction convexe sur $[a, b]$ et discontinue en a et b .

24.9 [◆◆◇] Soit f une fonction convexe sur un intervalle I et admettant sur I un minimum.
Démontrer que l'ensemble des points pour lesquels ce minimum est atteint est un intervalle.

24.10 [◆◆◆] [Inégalités de Hölder et de Minkowski]

Soit $(p, q) \in]0, +\infty[^2$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. À l'aide de \ln , montrer que $\forall (\alpha, \beta) \in]0, \infty[^2 \ \alpha\beta \leq \frac{1}{p}\alpha^p + \frac{1}{q}\beta^q$.
2. Montrer l'inégalité de Hölder

$$\forall (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{2n} \quad \sum_{i=1}^n |a_i||b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

On pourra poser $A = \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ et $B = \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$, traiter le cas où $A = 0$ ou $B = 0$ puis appliquer 1) avec $\alpha = \frac{|a_i|}{A}$ et $\beta = \frac{|b_i|}{B}$.

3. Montrer l'inégalité de Minkowski :

$$\forall p \in]1, +\infty[\quad \forall (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{2n} \quad \left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Indication : on pourra remarquer que $|a_i + b_i|^p \leq |a_i + b_i|^{p-1}(|a_i| + |b_i|)$ et appliquer l'inégalité de Hölder.