Une trigonalisation

1. $A-2I_3=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$. En notant C_1, C_2, C_3 les colonnes de cette matrice, on a

$$\mathrm{rg}(A)=\dim\left(\mathrm{Vect}(C_1,C_2,C_3)\right)=\dim\left(\mathrm{Vect}(C_1)\right)=1,$$

C_1 étant non nulle. D'après le théorème du rang,

$$3=\dim(\mathrm{Ker}(A-2I_3))+\mathrm{rg}(A-2I_3) \quad \text{d'où} \quad \dim\left(\mathrm{Ker}(f-2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\right)=2.$$

La matrice $A-I_3$ est la matrice dans la base canonique de $f-2\mathrm{id}$, que nous allons ici noter g.

$$C_1+C_2=0_{3,1} \quad \text{donc} \quad g(e_1)+g(e_2)=0_{\mathbb{R}^3} \quad \text{donc} \quad g(e_1+e_2)=0_{\mathbb{R}^3}$$

$$C_2+C_3=0_{3,1} \quad \text{donc} \quad g(e_2)+g(e_3)=0_{\mathbb{R}^3} \quad \text{donc} \quad g(e_2+e_3)=0_{\mathbb{R}^3}$$

Posons $u_1=e_1+e_2$ et $u_2=e_2+e_3$.
Ce sont deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathrm{Ker}(g)$:

$$\boxed{(u_1,u_2) \text{ est une base du noyau } \mathrm{Ker}(f-2\mathrm{id})}.$$

Bien sûr, il n'y a pas unicité de la base de ce plan ! Vous avez peut-être fait un autre choix, et vos réponses dans les questions qui suivent seront différentes (et ce n'est pas grave, tant qu'elles sont correctes).

2. Soit $u_3=e_1+e_2+e_3$. Notons $\mathcal{B}'=(u_1,u_2,u_3)$.

   (a) C'est une famille de trois vecteurs en dimension 3 : il lui suffit d'être libre pour être une base de $\mathbb{R}^3$. Et on sait démontrer cela.

   (b) On a $P=P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

   (c) On a $e_3=u_3-u_1$ et $e_1=u_3-u_2$, puis $e_2=u_1+u_2-u_3$. On en déduit que

$$P^{-1}=P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

3. (a) On a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f(u_3)\right)=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f\right)\cdot\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(u_3\right)=A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}.$$

On peut alors calculer

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\left(f(u_3)\right)=P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\left(f(u_3)\right)=P^{-1}\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}.$$

De plus, u_1 et u_2 sont dans $\mathrm{Ker}(f-2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$, ce qui garantit que $f(u_1)=2u_1$ et $f(u_2)=2u_2$. On a donc

$$T=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=2I_3+N, \quad \text{où} \quad N=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

   (b) On a $N^2=0_{3,3}$, et donc toutes les puissances de N au-delà de 2 sont nulles. De plus, $2I_3$ et N commutent, ce qui permet d'écrire la formule du binôme : pour $n\in\mathbb{N}$,

$$T^n=(2I_3+N)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2I_3)^{n-k}N^k=2^nI_3+n2^{n-1}N.$$

En écrivant $N=T-2I_3$, on a

$$\boxed{T^n=n2^{n-1}T-(n-1)2^nI_3}.$$

4. La formule du changement de base s'écrit ici

$$T=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)=P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}=P^{-1}AP,$$

d'où $A=PTP^{-1}$.
Passons à la puissance n, nous avons fait le calcul suivant plusieurs fois.

$$\begin{aligned}A^n&=(PT\cancel{P^{-1}})(\cancel{P}T\cancel{P^{-1}})\cdots(\cancel{P}TP^{-1}) \quad (n \text{ fois})\\ &=PT^nP^{-1}\\ &=P\left(n2^{n-1}T-2^n(n-1)I_3\right)P^{-1}\\ &=n2^{n-1}PTP^{-1}-(n-1)2^nPI_3P^{-1}\end{aligned}$$

$$\boxed{A^n=n2^{n-1}A-(n-1)2^nI_3}$$

Matrices équitables (E3A-E4A MPI 2024), éléments de correction

J'ai reproduit une grande partie des éléments de correction diffusé par le concours, en retravaillant la question 9, que j'avais modifié pour que ça se passe bien juste avec le programme de sup.

L'occasion peut-être d'aller lire un rapport d'épreuve ?

`www.e3a-polytech.fr/wp-content/uploads/2024/07/Rapport_MPI_2024.pdf`

Voir notamment les commentaires généraux, page 14.

1. Pour $n = 3$,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Si $A = (a_{ij})$ et $-A = (-a_{ij})$ sont équitables, alors pour tout $(i, j, k) \in [\![1, n]\!]^3$, on a

$$-a_{ij} = (-a_{ik})(-a_{kj}) = a_{ik}a_{kj} = a_{i,j} \quad \text{donc } A = 0_n.$$

Réciproquement, la matrice nulle (et donc son opposé) sont équitables.

$$\boxed{\text{La seule solution est la matrice nulle}}.$$

3. Soit $A = (a_{ij})$ équitable. Si $A^T = (b_{ij})$ avec $b_{ij} = a_{ji}$, on a :

$$b_{ij} = a_{ji} = a_{jk}a_{ki} = b_{ik}b_{kj}.$$

Ainsi, $\boxed{A^T \text{ est également équitable}}$

4. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, alors $a_{ii} = a_{ij}a_{ji} = a_{ji}a_{ij} = a_{jj}$.

5. La matrice A est non nulle, donc il existe (i, j) tel que $a_{ij} \neq 0$.
On a alors $a_{ij} = a_{ii}a_{ij}$, donc, comme $a_{ij} \neq 0$, $a_{ii} = 1$.
On en déduit que $\boxed{a_{kk} = 1 \text{ pour tout } k}$.

6. Les coefficients diagonaux d'une matrice équitable non nulle sont égaux à 1. Donc les coefficients diagonaux de $A + B$ sont égaux à 2 : la matrice $A + B$ est non nulle et non équitable.

7. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, alors $1 = a_{ii} = a_{ij}a_{ji}$. On en déduit que $\boxed{a_{ij} \neq 0}$.

8. Avec la question précédente, $a_{1j} = \frac{1}{a_{j1}}$, donc $a_{ij} = a_{i1}a_{1j} = \frac{a_{i1}}{a_{j1}}$. On peut aussi appliquer directement la définition à $a_{i1} = a_{ij}a_{j1}$ donc $\boxed{a_{ij} = \dfrac{a_{i1}}{a_{j1}}}$.

9. **Diagonalisation de** A.

   (a) Notons $(C_1, \dots, C_n)$ les colonnes de A.
   La j-ième colonne de A est $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})^\top$. D'après la question précédente :

$$\forall j \in [\![2, n]\!] \quad \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{j1}} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad C_j = \frac{1}{a_{j1}} C_1$$

   Toutes les colonnes sont colinéaires. Donc $\boxed{\mathrm{rg}(A) = 1}$.
   En appliquant le théorème du rang à l'endomorphisme canoniquement associé à A (qui est défini sur $\mathbb{R}^n$, pas sur $M_n(\mathbb{R})$!) on obtient

$$\boxed{\dim \mathrm{Ker}(A) = n - 1}.$$

   (b) Notons $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ l'endomorphisme canoniquement associé à $\mathbb{R}^n$
   Notons $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
   Pour $j \in [\![2, n]\!]$, la relation $a_{j,1}C_j - C_1 = 0$ obtenue à la question précédente donne

$$a_{j,1}e_j - e_1 \in \mathrm{Ker}(f) \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ a_{j,1} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A)$$

   Les coefficients $a_{j,1}$ étant non nuls, il est facile de démontrer que la famille $\boxed{(a_{j,1}e_j - e_1)_{2 \le j \le n}}$ est libre. Puisqu'elle est de cardinal $n - 1$ (la dimension de $\mathrm{Ker}(A)$) c'est une base de $\mathrm{Ker}(A)$.

   (c) Soit $A^2 = (c_{ij})$, alors $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}$. Comme A est équitable, $a_{ik}a_{kj} = a_{ij}$, donc $c_{ij} = na_{ij}$, et donc $\boxed{A^2 = nA}$. En particulier, on a $\boxed{AC_1 = nC_1}$.

(d) Notons $u_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{i,1} e_i$ (le vecteur correspondant dans $\mathbb{R}^n$ à la colonne C_1).

Soit la famille $(u_1, k_2, \ldots, k_n)$ où $k_j = a_{j,1} e_j - e_1$ pour $j \in [\![2, n]\!]$. Nous savons déjà que $(k_2, \ldots, k_n)$ est libre. On a $u_1 \notin \mathrm{Vect}(k_2 \ldots, k_n) = \mathrm{Ker}(f)$ puisque d'après la question précédente, $f(u_1) = nu_1$, et $n \neq 0$. Ceci garantit que la famille de n vecteurs $(u_1, k_2, \ldots, k_n)$ est libre, et donc une base de $\mathbb{R}^n$.

$$\boxed{\text{Dans cette base, la matrice de } f \text{ est } \mathrm{Diag}(n, 0, \ldots, 0).}$$

(e) Pour la matrice J, on a aussi un noyau de dimension $n-1$ et $JC_1 = C_1$, de sorte que J est elle aussi semblable à $\mathrm{Diag}(n, 0, \ldots, 0)$, et donc à la matrice A par transitivité.

10. Avec la question 8, on a $a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}}$. Donc A est symétrique si et seulement si $a_{ij} = \frac{1}{a_{ij}} \Rightarrow a_{ij}^2 = 1$. Les coefficients sont dans $\{-1, 1\}$.

11. Le coefficient $a_{11} = 1$. On fixe la première colonne : chaque coefficient a deux choix, donc 2^{n-1} choix. Une fois la première colonne fixée, les autres sont des multiples. On a donc 2^{n-1} matrices.

12. Même raisonnement : il y a $\#G^{n-1}$ matrices équitables à coefficients dans G.

13. D'après la question précédente, il y a deux matrices possibles (puisque $U_2 = \{-1, 1\}$) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$