Corrigé du DM 16

Problème. Une fonction et une suite.

Partie A : Variations de f.

La fonction ln est définie sur $]0,+\infty[$ et s'annule en 1.
La fonction f est définie sur

$$D=]0,1[\cup]1,+\infty[.$$

La fonction f est dérivable sur $]0,1[$ comme quotient de fonctions dérivables sur cet intervalle. On a

$$\forall x\in]0,1[\quad f'(x)=\frac{\ln(x)-1}{\ln^2(x)}=\frac{1}{\ln(x)}\left(1-\frac{1}{\ln(x)}\right).$$

On obtient le tableau de variations suivant.

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln(x)-1$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ 0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

On a utilisé les croissances comparées pour obtenir la limite en $+\infty$.

Partie B : Étude de la régularité de f en 0.

1. Par quotient de limites (pas de croissances comparées ici), on a $f(x)\underset{x\to0+}{\longrightarrow}0$.
   Ceci donne que $\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en posant } f(0)=0}$.

2. On a déjà dit en partie A que f est dérivable sur $]0,1[$ et que

   $$\forall x\in]0,1[\quad f'(x)=\frac{1}{\ln(x)}\left(1-\frac{1}{\ln(x)}\right).$$

   On a $\lim\limits_{x\to0+}\frac{1}{\ln(x)}=0$ donc

   $$f'(x)\underset{x\to0+}{\longrightarrow}0\times1=0.$$

   La fonction f, définie sur $[0,1[$, est continue en 0 et dérivable sur $[0,1[\setminus\{0\}$. Sa dérivée a une limite finie en 0 (qui est 0). D'après le théorème de la limite de la dérivée, f est dérivable en 0, de dérivée $\boxed{f'(0)=0}$.
   La fonction f' est continue en 0 (c'est toujours le cas lorsque la dérivabilité en un point est établie via le théorème la limite de la dérivée). Elle est aussi clairement continue sur $]0,1[$.
   Ce qui précède montre donc que $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,1[}$.

3. Soit $x\in]0,1[$. On a

   $$\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\frac{\ln(x)-1}{x\ln(x)^2}=\frac{1}{x\ln(x)}\left(1-\frac{1}{\ln(x)}\right)\underset{x\to0+}{\longrightarrow}-\infty.$$

   En effet, par croissances comparées, $x\ln(x)\underset{x\to0+}{\longrightarrow}0-$.

   Ceci montre que $\boxed{f' \text{ n'est pas dérivable en } 0}$.

Partie C : Suite récurrente associée à f.

1. Pour $n\in\mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(n)$ la proposition « $v_n\geq e$ ».
   • L'approximation $e\approx2,7$ nous donne que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   • Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n\in\mathbb{N}$, c'est-à-dire $v_n\geq e$.
   On sait (voir tableau de variations) que f est croissante sur $[e,+\infty[$.
   Par conséquent, $v_{n+1}=f(v_n)\geq f(e)=e$, et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   • D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$, ce qu'il fallait démontrer.

2. Existence de la limite. Pour $n\in\mathbb{N}$, on a $v_n\geq e$ donc $\ln(v_n)\geq1$ et $v_{n+1}=\frac{v_n}{\ln(v_n)}\leq v_n$. La suite (v_n) est strictement positive, et on a $v_{n+1}/v_n\leq1$ pour tout n ; on en déduit que (v_n) est décroissante. Elle est aussi minorée par e (démontré en B.1). D'après le théorème de la limite

monotone, $\boxed{(v_n) \text{ est convergente}}$. On note ℓ sa limite ; elle est telle que $\ell \geq e$.

Valeur de la limite. La fonction f est continue sur $[e,+\infty[$, notamment continue en ℓ donc $f(v_n) \to f(\ell)$. En passant à la limite dans $v_{n+1} = f(v_n)$, on obtient $\ell = f(\ell)$ d'où $\ln(\ell) = 1$ et enfin $\ell = e$: $\boxed{\lim v_n = e}$.

3. Une brève étude du trinôme $u \mapsto u(1-u)$ montre que la parabole atteint son maximum en $\frac{1}{2}$ [entre les deux racines 0 et 1, symétrie oblige !] On obtient donc facilement l'inégalité demandée.

   Soit $x \geq e$. On a $f'(x) = \frac{1}{\ln(x)}(1 - \frac{1}{\ln(x)})$. Or, $\frac{1}{\ln(x)} \in [0,1]$. En appliquant l'inégalité précédente avec $u = \ln(x)$, on obtient l'encadrement demandé.

4. On vient de montrer que f, fonction dérivable sur $[e,+\infty[$ vérifie $\forall x \geq e \quad 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}$.
   D'après l'inégalité des accroissements finis, f est $\frac{1}{4}$-lipschitzienne sur $[e,+\infty[$.
   Rappelons que pour tout n entier, $v_n \in [e,+\infty[$.

$$\forall n \geq 0 \qquad |v_{n+1} - e| = |f(v_n) - f(e)| \leq \frac{1}{4}|v_n - e|.$$

   Soit n un entier naturel.

$$|v_n - e| \leq \frac{1}{4}|v_{n-1} - e| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^2 |v_{n-2} - e| \leq \underset{\text{en itérant}}{\cdots} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |v_{n-n} - e|.$$

   Les maniaques écriront une récurrence. Or, $|v_0 - e| = |3 - e| \approx 0,3 \leq 1$, ce qui permet de conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad |v_n - e| \leq \frac{1}{4^n}.}$$

5. On a

$$|v_{20} - e| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{20} \leq \left(\frac{1}{2^{10}}\right)^4 \leq \left(\frac{1}{10^3}\right)^4 = 10^{-12}.$$

   On a utilisé que $2^{10} = 1024 \geq 10^3$.
   L'entier $\boxed{n = 20}$ (ainsi que tout entier supérieur) convient.

Exercice. Calcul des nombres $\left[\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \arcsin^2\right](0)$.

Dans cet exercice, on note $f : x \mapsto \arcsin^2(x)$. Elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.

1. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ comme produit de fonctions $\mathcal{C}^\infty$.
   Pour x un élément de $]-1,1[$, on a

$$f'(x) = 2\left(1-x^2\right)^{-1/2} \arcsin(x)$$
$$f''(x) = 2(-1/2)(-2x)\left(1-x^2\right)^{-3/2} \arcsin(x) + 2\left(1-x^2\right)^{-1}$$

   Ceci donne bien

$$\boxed{(1-x^2)f''(x) - xf'(x) = 2}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dérive n fois l'égalité établie à la question précédente.
   Puisque $n \geq 1$, on a $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[2] = 0$ (dérivée d'une constante).
   Soit $x \in]-1,1[$. Par linéarité de la dérivée $n$ème, on a

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[(1-x^2)f''(x)\right] - \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[xf'(x)\right] = 0.$$

   Le terme de gauche.
   Notons $u : x \mapsto 1 - x^2 =$ et $v = f''$, deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc $\mathcal{C}^n$.
   La formule de Leibniz donne

$$(u \times v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

   Or, pour tout $k \geq 3$, la fonction $u^{(k)}$ est nulle. Ceci laisse trois termes dans la somme précédente :

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[(1-x^2)f''(x)\right] \\
&= \binom{n}{0}(1-x^2)v^{(n)}(x) + \binom{n}{1}(-2x)v^{(n-1)}(x) + \binom{n}{2}(-2)v^{(n-2)}(x) \\
&= (1-x^2)f^{(n+2)}(x) - 2nxf^{(n+1)}(x) - n(n-1)f^{(n)}(x).
\end{aligned}$$

Le terme de droite.
On calcule, de même

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[xf'(x)\right] &= \binom{n}{0}xf^{(n+1)}(x) + \binom{n}{1}\cdot 1\cdot f^{(n)}(x)\\ &= xf^{(n+1)}(x) + nf^{(n)}(x)\end{aligned}$$

La différence des deux dérivées $n$èmes ci-dessus laisse comme attendu

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n+1)xf^{(n+1)}(x) - n^2f^{(n)}(x) = 0.$$

3. Il suffit d'évaluer en 0 l'identité écrite à la question précédente : on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f^{(n+2)}(0) = n^2 f^{(n)}(0).$$

4. Puisque $f'(0) = 0$, la question précédente nous donne $f^{(3)}(0) = 1^2 f'(0) = 0$. Une récurrence facile amène

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad f^{(2n+1)}(0) = 0}.$$

Pour un entier n supérieur à 2, on calcule

$$\begin{aligned}f^{(2n)}(0) &= (2n-2)^2 f^{(2n-2)}(0)\\ &= (2n-2)^2(2n-4)^2 f^{(2n-4)}(0)\\ &= \cdots\\ &= (2n-2)^2(2n-4)^2\cdots 2^2\,\underbrace{f^{(2)}(0)}_{=1}\\ &= \left(\prod_{k=1}^{n-1}(2n-2k)\right)^2\\ &= 2^{2n-2}\left(\prod_{k=1}^{n-1}(n-k)\right)^2\\ &= 2^{2n-2}\left[(n-1)!\right]^2\end{aligned}$$

L'expression trouvée est valable pour $n = 1$. Maintenant qu'on a déterminé une expression compacte, on peut proposer une preuve en bonne et due forme par récurrence (ou estimer, et c'est ce que je vais faire, que le calcul ci-dessus est suffisamment clair). On conclut par

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f^{(2n)}(0) = 2^{2n-2}\left[(n-1)!\right]^2}.$$