39

Espaces probabilisés finis et variables aléatoires

Lançons une pièce de monnaie. Cela constitue une **expérience**. Il y a deux **issues** possibles à celle-ci : on va obtenir Pile ou Face. Le **résultat** effectivement obtenu dépend de bien des facteurs : position initiale de la pièce, force imprimée par le pouce, conditions météo... Le processus mécanique mis en jeu dans l'expérience est si complexe que l'on abandonne bien vite l'idée de le mettre en équations pour déterminer son résultat. La situation est inconfortable : on a besoin, au moins du point de vue du langage, que le résultat de l'expérience dépende de *quelque-chose*. On résout ce problème en disant que ce résultat dépend du *hasard*. Un même mot va servir pour des expériences bien différentes : le tirage du Loto du soir, le nombre de clients se présentant à un guichet un jour donné, ou encore le sexe d'un enfant à naître. Une expérience dépendant du hasard est qualifiée d'**aléatoire**, alea signifiant jeu de dés en latin.

Si notre pièce est équilibrée et qu'elle est lancée sans tricher, on entend souvent qu'on a « une chance sur deux » d'obtenir Pile. Le lien entre le nombre $\frac{1}{2}$, et l'expérience est un peu flou. Le résultat est binaire : Pile ou bien Face, alors que signifie cette fraction ? On peut chercher une réponse dans la notion de **fréquence empirique**. Cette pièce de monnaie, lançons-la 50 fois. On obtient 28 fois Pile (et donc 22 fois Face). Lançons-la 1000 fois : on obtient 493 fois Pile. Lançons-la 50000 fois , on obtient 25062 fois Pile. Les fréquences empiriques obtenues pour Pile sont donc tour à tour

$$\frac{28}{50} = 0,56 \qquad \frac{493}{1000} = 0,493 \qquad \frac{25062}{50000} = 0,50124.$$

Il semble donc, au moins sur cet exemple, que plus on répète l'expérience, plus la fréquence empirique de l'issue Pile se rapproche de $\frac{1}{2}$. C'est une façon de retrouver le « une chance sur deux », qui est une **fréquence théorique** (ou a priori) à laquelle on donnera bientôt le nom de probabilité.

La convergence de la fréquence empirique d'un événement est un phénomène physique appelé Loi des grands nombres. On pourra estimer que la théorie que l'on va construire ici est un bon **modèle** de la réalité si elle permet de retrouver mathématiquement (de *modéliser*) le phénomène de la Loi des grands nombres.

Signalons que critiquer, comparer et améliorer des modèles probabilistes en les confrontant à l'expérience est le travail d'une branche des mathématiques appelée **statistique**. Aucun résultat de statistiques n'est au programme des CPGE mais nombreux sont ceux parmi vous qui les découvriront dans leur poursuite d'études.

1 Univers fini et variables aléatoires.

1.1 Univers et événements.

Rien de nouveau ici : seulement un nouveau vocabulaire sur les ensembles finis, ainsi que des notations spécifiques aux probabilités.

Notation.

On appelle **univers** un ensemble non vide. Dans ce cours et conformément au programme de première année, tous les univers considérés seront supposés finis.
L'idée : un univers modélise l'ensemble des issues (ou résultats possibles) d'une expérience.
Cet ensemble est noté traditionnellement Ω en probabilités.

On appelle **événement** toute partie A d'un univers Ω (on note $A \subset \Omega$ ou $A \in \mathcal{P}(\Omega)$).

Les singletons de Ω sont parfois appelés *événements élémentaires.*

Si Ω est un univers, Ω en est un événement, qui pourra être appelé *événement certain.*
$\emptyset$ est aussi un événement, qui pourra être appelé *événement impossible.*

Se restreindre en première année à des univers finis implique qu'on ne pourra modéliser que des expériences ayant un nombre fini d'issues. On sait déjà que sur un univers Ω de n éléments, le nombre total d'événements pouvant être considérés est fini et vaut $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^n$. En seconde année, on définira un cadre moins contraignant, mais certains résultats, faciles à démontrer dans le contexte d'un univers fini, devront alors être admis.

Exemples 1 (Événements : de la phrase à l'ensemble)**.**

1. On jette une fois un dé.
   - Proposer un univers modélisant cette expérience.
   - Donner alors l'événement A : « le résultat obtenu est pair ».
2. On lance deux fois de suite une pièce de monnaie.
   - Proposer un univers modélisant cette expérience.
   - Donner alors l'événement B : « on obtient deux fois la même chose. ».

Notation.

Soit Ω un univers, et deux événements $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$.

- Le complémentaire de A, noté $\overline{A}$ est parfois appelé **événement contraire** de A.
- L'intersection $A \cap B$ est parfois notée **« A et B ».**
- La réunion $A \cup B$ est parfois notée « A **ou** B ».
- Si A et B sont disjoints ($A \cap B = \emptyset$), ils sont dits **incompatibles**.

Deux événements incompatibles n'ont pas d'éléments (issues) en commun : ils ne peuvent *pas être réalisés en même temps*.

Exemple 2.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On joue n parties d'un jeu auquel on peut gagner ou perdre. On suppose la situation correctement modélisée par un univers qu'on ne cherchera pas à déterminer.

$$\text{Notons , pour } i \in [\![1, n]\!] \quad A_i \text{ l'événement « on gagne la partie } i \text{ ».}$$

Écrire à l'aide des A_i les événements suivants :

B : « on gagne toutes les parties »	C : « on perd toutes les parties »
D : « on gagne au moins une partie »	E : « on gagne exactement une partie »

Définition 3.

En probabilités, un recouvrement disjoint de l'univers est appelé **système complet d'événements**.

Plus précisément, si Ω est un univers (fini), un système complet d'événements est une famille d'événements $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$, deux à deux incompatibles, et dont la réunion vaut Ω :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!] \quad i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset \qquad \text{et} \qquad \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega.$$

Proposition 4 (Un s.c.e. souvent utilisé)**.**

Si A est un événement d'un univers Ω, alors la famille $(A, \overline{A})$ est un système complet d'événements.

Exemple 5.

Dessiner un univers et un système complet d'événements

La famille $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ de l'exemple 2 est-elle un système complet d'événements ?

1.2 Variables aléatoires.

Notation.

Soit un univers Ω et un ensemble E. On appelle **variable aléatoire** à valeurs dans E une application de Ω vers E. Plutôt que f, la lettre traditionnellement utilisée en probabilités est X.

Notations 6.

Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire sur un univers fini Ω.

1. On note $X(\Omega)$ l'image (directe) de Ω par X, c'est-à-dire
$$X(\Omega) = \{X(\omega),\ \omega \in \Omega\}\,.$$
C'est l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable aléatoire X. $\Big(\underline{X(\Omega) \subset E}\Big)$.
2. Soit A une partie de E. On note $\{X \in A\}$ ou $(X \in A)$ l'image réciproque de A par X :
$$\{X \in A\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}\,.$$
Cet ensemble, noté $X^{-1}(A)$ dans un contexte non probabiliste, est <u>une partie de Ω</u> : c'est un événement.

Pour une variable aléatoire $X : \Omega \to E$, si $x \in E$, on note
$$(X = x) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}.$$
Si X est une variable aléatoire <u>à valeurs réelles</u>, on pourra aussi noter
$$(X \leq x) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}.$$

Exemple 7.

Représenter une variable aléatoire X entre deux ensembles Ω et E, une partie A de E, et enfin représenter l'événement $(X \in A)$.

Remarque. Rien d'*aléatoire* dans la définition de variable aléatoire c'est simplement une fonction.
Le mot variable vient du fait que dans la pratique, l'univers Ω ne nous intéresse pas vraiment ou bien est hors de portée : la fonction X n'est connue qu'à travers la manière dont ses images *varient* dans E.

Proposition 8 (Le s.c.e. associé à une variable aléatoire)**.**

Si X est une variable aléatoire définie sur un univers fini Ω, alors la famille
$$(X = x)_{x \in X(\Omega)}$$
est un système complet d'événements.

2 Probabilités sur un univers fini.

2.1 Définition et propriétés additives.

On répète une expérience N fois. On note Ω l'ensemble des issues de l'expérience et pour A un événement, on note N_A le nombre de fois que A s'est produit lors des N expériences. L'événement A a pour **fréquence**

$$f(A) := \frac{N_A}{N}.$$

- La fréquence d'un événement est clairement un nombre de $[0,1]$.
- La fréquence de Ω, événement certain, est bien sûr $f(\Omega) = \frac{N}{N} = 1$.
- Si A et B sont deux événements $\boxed{\text{incompatibles}}$, le nombre de fois que « A ou B » se produit est $N_{A\cup B} = N_A + N_B$. La fréquence de $A \cup B$ est donc

$$f(A \cup B) = \frac{N_{A\cup B}}{N} = \frac{N_A + N_B}{N} = \frac{N_A}{N} + \frac{N_B}{N} = f(A) + f(B).$$

Les propriétés observées ci-dessus sur les fréquences *a posteriori* inspirent la définition ci-dessous ; la probabilité d'un événement pourra être vue comme sa fréquence *a priori*.

Définition 9.

On appelle **probabilité** sur un univers fini Ω une application $P : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & P(A) \end{array} \right.$, telle que

- $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \quad P(A) \in [0,1]$,
- $P(\Omega) = 1$,
- $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega), \quad A \cap B = \emptyset \implies P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Le couple (Ω, P) est alors appelé **espace probabilisé** fini.

Proposition 10.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et A et B deux événements. On a

1. $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$. En particulier $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ et $P(\emptyset) = 0$.
2. Si $B \subset A$ alors $P(B) \leq P(A)$ (croissance).
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (probabilité d'une union quelconque).

Proposition 11 (Additivité pour n événements deux à deux disjoints)**.**

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $A_1, \ldots, A_n$ n événements deux à deux incompatibles. Alors,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

En particulier, si $(A_1, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements, alors $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$.

Proposition 12 (Sous-additivité dans le cas général)**.**

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $A_1, \ldots, A_n$ n événements. Alors,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Ci-dessous, un exemple de probabilité. Elle sera très souvent utilisée en modélisation.

Proposition-Définition 13.

Soit Ω un univers <u>fini</u> et non vide. L'application

$$P : \begin{cases} \mathcal{P}(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & \dfrac{|A|}{|\Omega|} \end{cases}.$$

est une probabilité sur Ω. On l'appelle **equiprobabilité** sur Ω.

2.2 Distribution de probabilités sur un ensemble fini.

Définition 14.

Soit E un ensemble fini et non vide. Une famille de nombres $(p_x, x \in E)$ est appelée **distribution de probabilités** sur E si elle est constituée de réels positifs tels que $\sum\limits_{x \in E} p_x = 1$.

Exemple élémentaire. Soit p_1, p_2, p_3 des nombres définis par

i	1	2	3
p_i	2/6	1/6	3/6

.
La famille (p_1, p_2, p_3) est une distribution de probabilités sur $\{1, 2, 3\}$.

Les singletons de Ω forment clairement un système complet d'événements. D'après la proposition 11, on a $\sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = 1$, et les termes de la somme sont tous positifs. La famille $(P(\{\omega\}))_{\omega \in \Omega}$ est donc une distribution de probabilités sur Ω. On va prouver que réciproquement, une distribution de probabilités sur un univers fini permet de définir une (unique) probabilité sur cet univers.

Proposition 15 (Probabilité définie par une distribution de probabilités)**.**

Soit Ω un univers fini et $(p_\omega, \omega \in \Omega)$ une distribution de probabilités sur Ω.
Il existe une unique probabilité P sur Ω telle que $\forall \omega \in \Omega \ P(\{\omega\}) = p_\omega$; cette probabilité vérifie

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \quad P(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega.$$

La preuve de la proposition 15 est donnée en annexe. On vient d'énoncer un résultat important d'un point de vue théorique : pour définir une probabilité sur un univers fini, il est suffisant de se donner une distribution de probabilités sur cet univers. Signalons que définir rigoureusement une probabilité sur un univers infini est une autre paire de manches ! (le problème sera évoqué en seconde année).

Exemple 16 (Un autre regard sur l'équiprobabilité)**.**

Si Ω est un univers de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(p_\omega, \omega \in \Omega)$ où tous les p_ω valent $\frac{1}{n}$ est une distribution de probabilités sur Ω. L'unique probabilité qu'elle définit est l'équiprobabilité sur Ω.

Exemple 17 (Une expérience, deux modèles)**.**

On lance un dé équilibré. On se donne l'univers $\Omega = [\![1,6]\!]$.
Proposer deux espaces probabilisés (Ω, P) et $(\Omega, \widetilde{P})$ modélisant l'expérience.
On souhaite que (Ω, P) soit *bon* et $(\Omega, \widetilde{P})$ *mauvais* du point de vue du statisticien (ou du physicien).

3 Loi d'une variable aléatoire.

3.1 Loi d'une variable aléatoire.

Proposition-Définition 18.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire définie Ω. L'application

$$P_X : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X(\Omega)) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & P(X \in A) \end{array} \right. .$$

est une probabilité sur l'univers fini $X(\Omega)$. On l'appelle **loi** de la variable aléatoire X.

Méthode.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et X une variable aléatoire définie sur Ω. La loi de X est entièrement déterminée par la distribution de probabilités

$$(P(X = x))_{x \in X(\Omega)} .$$

Pour décrire la loi de X, on va donc

1. Préciser $X(\Omega)$, l'ensemble des valeurs que peut prendre X,
2. Pour chaque valeur $x \in X(\Omega)$, calculer $P(X = x)$. On peut éventuellement rassembler ces nombres dans un tableau

x
$P(X = x)$

   Possible aussi : un diagramme en bâtons : le bâton centré sur x est de hauteur $P(X = x)$.

Exemple 19 (Un chouette jeu)**.**

On jette un dé équilibré. Si le résultat est $1, 2$ ou 3, on ne gagne rien. Si le résultat est 4 ou 5, on gagne dix euros. Si le résultat est 6, on empoche 100 euros.
On note X le gain à ce jeu. Proposer un espace probabilisé sur lequel X est une variable aléatoire. Donner alors la loi de X.
On représentera cette loi par un tableau, ainsi que par un diagramme en bâtons.

Notation.

Soient deux variables aléatoires X et Y, à valeurs dans un même ensemble E (mais pas forcément définies sur le même univers). Si elles ont même loi, on écrira $X \sim Y$.

3.2 Lois usuelles.

Dans les trois définitions de ce paragraphe, X désigne une variable aléatoire définie sur un univers Ω, sur lequel est définie une probabilité P.

Définition 20.

Soit E un ensemble fini non vide. On dit que X suit la loi **uniforme** sur E si la loi de X est l'équiprobabilité sur E ; on note alors $X \sim \mathscr{U}(E)$.

$$X(\Omega) = E \quad \text{et} \quad \forall x \in E \quad P(X = x) = \frac{1}{|E|}.$$

Interprétation.

Une variable X uniforme sur E modélise le tirage "au hasard" d'un élément de E avec, pour tous les éléments de E, une même chance d'être choisi.

Définition 21.

Soit $p \in [0, 1]$. On dit que X suit la loi de **Bernoulli** de paramètre p (on peut noter $X \sim \mathscr{B}(p)$) si sa loi est associée à la distribution de probabilités donnée par

$$X(\Omega) = \{0, 1\} \quad \text{et} \quad P(X = 1) = p \quad P(X = 0) = 1 - p.$$

Interprétation.

On appelle expérience de Bernoulli une épreuve aléatoire dont l'issue est un succès (avec probabilité p) ou un échec (avec probabilité $1 - p$).
Si X est une v.a. qui vaut 1 lorsque l'expérience est un succès, et 0 sinon, alors $X \sim \mathscr{B}(p)$.

Par exemple, le lancer d'une pièce équilibrée peut être modélisé par une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$, en convenant par exemple que 1 correspond à Pile, et 0 à Face. C'est aussi la loi uniforme sur $\{0, 1\}$.

Proposition 22.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et un événement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.
La fonction indicatrice de A, que l'on note $\mathbf{1}_A$, suit la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$, où $p = P(A)$

Définition 23.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$. On dit que X suit la loi **binomiale** de paramètres n et p (on peut noter $X \sim \mathscr{B}(n, p)$) si sa loi est associée à la distribution de probabilités donnée par

$$X(\Omega) = [\![0, n]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![0, n]\!] \quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Remarques.

— On remarque que la loi binomiale $\mathscr{B}(1, p)$ est identique à la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$.

— On vérifie grâce au binôme que la famille $\left(\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, k \in [\![0, n]\!]\right)$ est bien une distribution de probabilités : ces nombres sont positifs et leur somme vaut $(p + 1 - p)^n = 1$.

Interprétation.

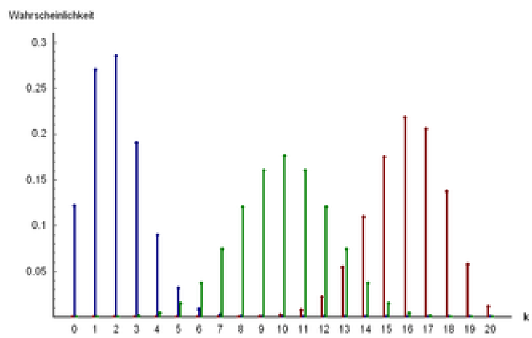
On réalise n expériences de Bernoulli aléatoires *indépendantes*. L'issue de chacune est donc un succès (avec probabilité p) ou un échec (avec probabilité $1-p$). On prouvera dans la proposition 57 que si X est le **nombre total de succès** obtenus dans ce contexte, alors $X \sim \mathscr{B}(n, p)$

Exemple 24.

Mes voisins ont cinq enfants. Quelle est la probabilité qu'ils aient trois filles ?

Les diagrammes en bâtons ci-dessous (pris sur la page Wikipedia consacrée à la loi binomiale) représentent

· en bleu, les probabilités associées à la loi $\mathscr{B}(20, \frac{1}{10})$,
· en vert, les probabilités associées à la loi $\mathscr{B}(20, \frac{1}{2})$,
· en rouge, les probabilités associées à la loi $\mathscr{B}(20, \frac{8}{10})$.



On remarque qu'une variable binomiale a "plus de chances" d'être proche de sa *moyenne* que de prendre des valeurs extrêmes. Ce n'est pas le cas pour une loi uniforme : par exemple pour $\mathscr{U}([\![0, 20]\!])$, tous les bâtons auraient même hauteur $(\frac{1}{21})$.

3.3 Loi de l'image.

Si X est une variable aléatoire sur Ω à valeurs dans E, et $f : E \to F$ une application, alors on note $f(X)$ la variable aléatoire :

$$f(X) : \begin{cases} \Omega & \to & F \\ \omega & \mapsto & f(X(\omega)) \end{cases} .$$

Exemple 25 (L'exemple avant le résultat général)**.**

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{-1, 0, 1, 2\}$ dont la loi est donnée par

x	-1	0	1	2
$P(X = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$

Donner la loi de $Y = X^2$.

Proposition 26 (Loi de l'image d'une v.a.)**.**

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini.
Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire et $f : E \to F$ une application. On note $Y = f(X)$. Alors,

$$Y(\Omega) = \{f(x), x \in X(\Omega)\} \qquad \text{et} \qquad \forall y \in Y(\Omega) \quad P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega) : f(x) = y} P(X = x).$$

Exemple 27.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[\![1, 2n]\!]$. Soit $Y = \dfrac{1 + (-1)^X}{2}$.
Déterminer la loi de Y.

Proposition 28.

Soit deux espaces probabilisés (Ω, P) et (Ω', P'), et deux ensembles E et F.
Soient $X : \Omega \to E$ et $X' : \Omega' \to E$ deux variables aléatoires, et $f : E \to F$ une application.
Si X et X' ont même loi, alors $f(X)$ et $f(X')$ aussi. Ce qui s'écrit

$$X \sim X' \quad \Longrightarrow \quad f(X) \sim f(X').$$

3.4 Loi d'un couple, loi d'une famille.

Considérons $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$, deux variables aléatoires sur un même univers fini Ω.
Le couple de variables aléatoires (X, Y) peut être vu comme une variable aléatoire

$$(X,Y) : \left\{ \begin{array}{lcl} \Omega & \to & E \times F \\ \omega & \mapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array} \right. .$$

Notation.

Si (X, Y) est un couple de variables aléatoires défini sur un espace probabilisé (Ω, P), alors pour tous $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$,

$$P(X = x, Y = y) \quad \text{plutôt que} \quad P((X, Y) = (x, y)).$$

Définition 29.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et $(X, Y) : \Omega \to E \times F$ un couple de variables aléatoires.
On appelle **loi conjointe** de X et Y la loi du couple (X, Y). Cette loi est déterminée par la distribution de probabilités

$$(P(X = x, Y = y))_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}.$$

Les lois de X et Y sont dans ce contexte appelées **lois marginales**.

Exemple. Soit $(X, Y) : \Omega \to \{0, 1\}^2$ un couple de variables sur Ω, dont la loi conjointe est donnée à travers les nombres $P(X=x, Y=y)$ du tableau

$P(X=x, Y=y)$:

$x \backslash y$	0	1
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

Donner les lois marginales de X et Y :

x	0	1
$P(X = x)$		

et

y	0	1
$P(Y = y)$		

Proposition 30.

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires défini sur (Ω, P). La loi de X, première loi marginale, est donnée par

$$\forall x \in X(\Omega) \quad P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X=x, Y=y).$$

Remarque. La proposition précédente montre que si on a la loi (conjointe) du couple (X, Y), on peut en déduire les lois (marginales) de X et de Y. La réciproque est fausse en général, comme on le prouve dans l'exemple ci-dessous.

Exemple 31 (Les lois conjointes sont différentes mais les lois marginales sont les mêmes)**.**

Soit $(X, Y) : \Omega \to \{0, 1\}^2$ un couple de variables sur Ω, dont la loi conjointe est donnée à travers les nombres $P(X = x, Y = y)$ du tableau

$P(X = x, Y = y)$:

$x \backslash y$	0	1
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Vérifier que (X, Y) et (X, X) ont les mêmes lois marginales, puis justifier que les deux couples n'ont pas la même loi conjointe.

Somme de deux variables aléatoires. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs réelles, définies sur un univers Ω. On note $X + Y$ la variable aléatoire

$$X + Y : \left\{ \begin{array}{lcl} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & X(\omega) + Y(\omega) \end{array} \right. .$$

La variable $X + Y$ peut être vue comme l'image par $f : (x, y) \mapsto x + y$ du couple (X, Y). La proposition 26 permet alors de déduire calculer la loi de la somme $X + Y$ à l'aide de la loi conjointe de (X, Y).

Proposition 32 (Loi d'une somme)**.**

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs réelles défini sur (Ω, P).

$$\forall z \in (X + Y)(\Omega) \quad P(X + Y = z) = \sum_{x \in X(\Omega)} P\left(X = x, Y = z - x\right).$$

Exemple 33 (Les lois conjointes sont différentes mais les lois marginales sont les mêmes)**.**

Calculer la loi de la somme pour les couples (X, Y) puis (X, X) de l'exemple 31

On généralise à des n-uplets de variables aléatoires.

Définition 34.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires définies sur Ω et à valeurs respectivement dans des ensembles $E_1, \ldots, E_n$.
Le n-uplet $(X_1, \ldots, X_n)$ est une variable aléatoire définie sur Ω et à valeurs dans le produit cartésien $E_1 \times \cdots \times E_n$. Sa loi est appelée **loi conjointe** du n-uplet.

Cette loi est déterminée par la distribution de probabilités

$$\left(P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n), \quad x_1 \in X_1(\Omega), \ldots, x_n \in X_n(\Omega)\right).$$

4 Conditionnement.

4.1 Probabilités conditionnelles.

Considérons une expérience aléatoire, modélisée par un espace probabilisé (Ω, P) et un événement A. La probabilité $P(A)$ est la fréquence théorique de réalisation de l'événement A. Supposons que l'on réalise un grand nombre de fois (noté N) l'expérience, les réalisations étant indépendantes entre elles. On note N_A le nombre de fois où A a été réalisé. Si notre espace probabilisé modélise bien la situation, on s'attend à ce que la fréquence de l'événement soit proche de sa probabilité (sa *fréquence a priori*).

$$\frac{N_A}{N} \approx P(A).$$

Considérons maintenant un événement B et notons $N_{A\cap B}$ le nombre de fois que les événements A et B ont été réalisés *en même temps*, lors des N réalisations de l'expérience. Diviser ce nombre par N_B revient à examiner la fréquence de l'événement A *sachant que B est réalisé*. On a

$$\frac{N_{A\cap B}}{N_B} = \frac{N_{A\cap B}/N}{N_B/N} \approx \frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

Ceci motive la définition suivante.

Pour une approche fréquentiste de la question des probabilités conditionnelles, il sera plus clair, en classe, de considérer un *exemple*.
Tous les matins, il est possible que se réalise l'événement A : « le professeur est en retard ».
Approche probabiliste : on suppose que la situation est correctement modélisée par un espace probabilisé (Ω, P) et que $A \subset \Omega$. On attribue alors à l'événement A sa probabilité $P(A)$.
Approche fréquentiste. On observe le phénomène sur un nombre N de matins consécutifs et on note N_A le nombre de fois où le professeur a été en retard. La fréquence du retard est N_A/N.

Si ce qui se passe un matin donné n'a pas trop d'influence sur les autres retards (le professeur n'a pas trop honte d'être en retard), que N est assez grand, N_A pas trop petit, et le modèle (Ω, P) pas trop mauvais, on s'attend à ce que

$$\frac{N_A}{N} \approx P(A).$$

Soit maintenant l'événement B « il pleut ce matin ». On veut calculer la fréquence des retards *sachant* qu'il pleut. Notons $N_{A\cap B}$ le nombre de matins où le professeur était en retard et où il pleuvait i.e. A et B réalisés *en même temps*, lors des N réalisations de l'expérience. Diviser ce nombre par N_B, nombre de jours de pluie revient bien à examiner fréquence du retard *sachant qu'il pleut.* On a

$$\frac{N_{A\cap B}}{N_B} = \frac{N_{A\cap B}/N}{N_B/N} \approx \frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

Ceci motive la définition suivante.

Proposition-Définition 35.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé, et un événement B tel que $P(B) > 0$. L'application

$$P_B : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \end{array} \right.$$

est une probabilité sur Ω.
Pour A un événement, $P_B(A)$ est appelé **probabilité conditionnelle de A sachant B**.
Ce nombre peut aussi être noté $P(A \mid B)$.

Remarques.

1. La définition de $P_B(A)$ n'a de sens que si B n'est pas de probabilité nulle : on dira alors que B est **non négligeable**. En toute rigueur, il faudrait écrire que B est « non P-négligeable ».
2. Si A et B sont deux événements non négligeables d'un espace probabilisé, on peut écrire les deux égalités
$$P(A \cap B) = P_B(A)P(B) \quad \text{et} \quad P(A \cap B) = P_A(B)P(A).$$

Définition 36.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et B un événement tel que $P(B) > 0$. Soit X une variable aléatoire définie sur Ω et à valeurs dans un ensemble E. La distribution de probabilités

$$(P_B(X = x))_{x \in X(\Omega)}$$

définit une unique probabilité sur $X(\Omega)$ appelée **loi de X conditionnellement à B**.

4.2 Trois formules de décomposition.

Convention. Dans les formules suivantes interviennent des quantités de la forme $P(B \mid A)P(A)$. Cette écriture n'a de sens, normalement, que si $P(A) > 0$. Pour ne pas avoir à discuter ce point, on conviendra que

$$P(A \cap B) = P(B \mid A)P(A) \text{ lorsque } P(A) = 0.$$

Proposition 37 (Formule des probabilités composées)**.**

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $A_1, \ldots A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$. Alors,

$$\boxed{P\left(A_1 \cap \ldots \cap A_n\right) = P(A_1)P_{A_1}\left(A_2\right)P_{A_1 \cap A_2}\left(A_3\right) \cdots P_{A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}}\left(A_n\right)}$$

Exemple 38 (Tirages sans remise)**.**

Une urne contient n boules noires et n boules blanches. On tire successivement, et sans remise n boules dans l'urne. Calculer la probabilité de ne tirer que des boules blanches :

1. à l'aide de la formule des probabilités composées ;
2. en modélisant rigoureusement la situation.

Proposition 39 (Formule des probabilités totales)**.**

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ un système complet d'événements.
Pour tout $B \in \mathcal{P}(\Omega)$,

$$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P\left(B \cap A_i\right)} \quad \text{ou encore} \quad P(B) = \sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(B)\, P(A_i).$$

Corollaire 40 (Cas particulier d'un s.c.e. à deux événements)**.**

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et A un événement. Pour tout $B \in \mathcal{P}(\Omega)$,

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}) = P_A(B)P(A) + P_{\overline{A}}(B)P(\overline{A}).$$

Exemple 41 (Urne de Polya)**.**

On considère une urne contenant initialement une boule blanche et une boule noire.
On répète l'expérience suivante : on tire une boule dans l'urne et on remet cette boule dans l'urne en ajoutant aussi une boule de la même couleur.
Notons, pour $n \geq 1$, X_n le nombre de boules blanches dans l'urne après n tirages.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi uniforme sur $\{1, \ldots, n+1\}$.

Proposition 42 (Formules de Bayes)**.**

Soit (Ω, P) un espace probabilisé. Si A et B sont deux événements non négligeables, alors

$$\boxed{P\left(A \mid B\right) = \frac{P\left(B \mid A\right) P(A)}{P(B)}}$$

Exemple 43 (Un test positif)**.**

Un virus est porté par une personne sur mille dans la population. Un test permet de le dépister.
Fiable à 99% sur les personnes porteuses du virus, il rend un faux positif dans $0,2\%$ des cas.
On choisit une personne au hasard dans la population et on lui fait faire un test, qui s'avère positif.
Quelle est la probabilité que cette personne soit effectivement porteuse du virus ?

5 Indépendance.

5.1 Événements indépendants.

Commençons par définir l'indépendance de deux événements.

Définition 44.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé. On dit que deux événements A et B sont **indépendants** si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Proposition 45 (Triviale, mais elle permet de comprendre le concept)**.**

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et (A, B) un couple d'événements tel que B est non négligeable.

$$A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \quad \text{si et seulement si} \quad P_B(A) = P(A).$$

Savoir que B est réalisé ne modifie pas la "fréquence a priori" de A.

Proposition 46.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et deux événements A et B indépendants. Alors,

1. A et $\overline{B}$ sont indépendants.
2. $\overline{A}$ et B sont indépendants.
3. $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Exemple 47 (Un exemple explicite)**.**

Lançons deux dés équilibrés (un rouge, un vert). Modéliser à l'aide d'un espace probabilisé (Ω, P).
On considère les événements

A : « le résultat rouge est pair », $\quad B$: « le résultat vert est pair »,

C : « la somme des deux résultats est impaire » $\quad D$: « la somme des deux résultats vaut 8 ».

Vérifier que A et B sont indépendants. Pourquoi était-ce attendu ?
Vérifier que A et C sont indépendants. Est-ce aussi intuitif que précédemment ?
Vérifier que A et D ne sont pas indépendants. Comparer $P(D)$ et $P_A(D)$.

Définition 48.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé, et $(A_i)_{i\in I}$ une famille finie d'événements.
Les événements de cette famille sont dits **indépendants** si

$$\forall J \in \mathcal{P}(I) \setminus \{\emptyset\} \qquad P\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} P(A_j).$$

Soit n un entier supérieur à 2 et $(A_1, \ldots, A_n)$ une famille finie d'événements indépendants (l'ensemble d'indices de la définition précédente est ici $I = [\![1, n]\!]$). En prenant $J = I$ dans la définition précédente, on obtient

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i).$$

On peut aussi choisir $J = \{k, l\}$ où k et l sont deux entiers distincts de $[\![1, n]\!]$. On obtient alors que

$$P(A_k \cap A_l) = P(A_k)P(A_l).$$

Proposition 49.

Si des événements sont indépendants, ils le sont deux à deux.
La réciproque est fausse : l'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance.

Proposition 50.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé. On considère $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $(B_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ deux familles d'événements telles que

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad B_i \in \{A_i, \overline{A_i}\}.$$

Si les événements de la famille $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont indépendants, alors ceux de la famille $(B_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ le sont aussi.

En particulier, $\overline{A_1}, \ldots, \overline{A_n}$ sont indépendants.

5.2 Variables aléatoires indépendantes.

Définition 51.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω.
On dit que les variables X et Y sont **indépendantes** (et on note $X \perp\!\!\!\perp Y$) si

$$\forall A \in \mathcal{P}(X(\Omega)) \quad \forall B \in \mathcal{P}(Y(\Omega)) \qquad (X \in A) \text{ et } (Y \in B) \text{ sont indépendants.}$$

Proposition 52.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω.
Elles sont indépendantes si et seulement si

$$\forall x \in X(\Omega) \quad \forall y \in Y(\Omega) \qquad P\left(X=x, Y=y\right) = P(X=x)P(Y=y).$$

Preuve. Voir celle de la proposition 55, qui généralise ce résultat.

Remarque. Pour un couple de variables aléatoires indépendantes, les lois marginales suffisent à calculer la loi conjointe.

Proposition 53 (Images de v.a. indépendantes)**.**

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et quatre ensembles $E, \widetilde{E}, F$ et $\widetilde{F}$.
Soient $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to \widetilde{E}$ deux variables aléatoires et $f : E \to F$ et $g : \widetilde{E} \to \widetilde{F}$ deux applications.

Si X et Y sont indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ le sont aussi.

Définition 54 (extension à n variables)**.**

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires toutes définies sur Ω (chacune avec son propre ensemble d'arrivée). Elles sont dites **indépendantes** si pour toute famille d'ensembles $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \in \prod_{i=1}^{n} \mathcal{P}\left(X_i(\Omega)\right)$, les événements de $(X_i \in A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ sont indépendants.

Proposition 55.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires toutes définies sur Ω (chacune avant son propre ensemble d'arrivée). Elles sont indépendantes si et seulement si

$$\forall (x_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \in \prod_{i=1}^{n} X_i(\Omega) \qquad P\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i = x_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i).$$

La preuve de la proposition 55 est donnée en annexe.

Remarque. Pour vérifier que des variables aléatoires sont indépendantes, on passera toujours par la caractérisation donnée par la proposition 55. En, effet, travailler avec la définition 54 nous obligerait à manipuler la définition 48 de l'indépendance d'une famille d'événements, peu commode à cause du « $\forall J \in \mathcal{P}([\![1,n]\!]) \setminus \{\emptyset\}$ ».

Exemple 56.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et X et Y deux variables aléatoires indépendantes, toutes deux suivant la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. On pose $Z = |X - Y|$. Loi de Z ?
Vérifier que X, Y et Z sont indépendantes deux à deux mais ne sont pas indépendantes.

Proposition 57 (Somme de variables de Bernoulli indépendantes)**.**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$.
Si $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes, toutes de loi $\mathscr{B}(p)$, alors la variable $X_1 + \cdots X_n$ suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.

Proposition 58 (Lemme des coalitions)**.**

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires définies sur Ω et respectivement à valeurs dans des ensembles $E_1, \ldots, E_n$. Soit un entier $m \in [\![1,n]\!]$.
Soient deux applications f_1, définie sur $E_1 \times \cdots \times E_m$, et f_2, définie sur $E_{m+1} \times \cdots E_n$. On pose

$$Y_1 = f_1(X_1, \ldots, X_m) \quad \text{et} \quad Y_2 = f_2(X_{m+1}, \ldots, X_n).$$

$\boxed{\text{Si les } n \text{ variables } X_1, \ldots, X_n \text{ sont indépendantes, alors les deux variables } Y_1 \text{ et } Y_2 \text{ aussi.}}$

Proposition 59 (extension à p coalitions)**.**

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $(X_i)_{i \in I}$ une famille de variables aléatoires indexée par un ensemble fini et non vide I. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $(J_k)_{k \in [\![1,p]\!]}$ une partition de l'ensemble I. On pose

$$\forall k \in [\![1,p]\!] \quad Y_k = f_k\left((X_j)_{j \in J_k}\right),$$

où les p fonctions f_k sont définies telles que les composées aient un sens.

Si les n variables $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, alors les p variables $Y_1, \ldots, Y_p$ le sont aussi.

Pour terminer, un résultat d'existence, prouvé en annexe .

Théorème 60 (Existence de n variables aléatoires indépendantes, de lois prescrites)**.**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\Omega_1, P_1), \ldots, (\Omega_n, P_n)$ des espaces probabilisés finis. Alors, il existe un espace probabilisé fini (Ω, P) et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires définies sur Ω telles que

$$X_1, \ldots, X_n \text{ sont indépendantes} \quad \text{et} \quad \text{pour tout } i \in [\![1,n]\!] \ X_i \text{ est de loi } P_i.$$

Annexe : quelques preuves.

Preuve de la proposition 15. Soit Ω un univers fini et $(p_\omega, \omega \in \Omega)$ une distribution de probabilités sur Ω.

Analyse. Supposons qu'il existe une probabilité P définie sur Ω telle que $\forall \omega \in \Omega \quad P(\{\omega\}) = p_\omega$.
Soit A un événement. On peut l'écrire comme la réunion de ses singletons :

$$A = \bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}.$$

Passons aux probabilités :

$$P(A) = P\left(\bigcup_{\omega\in A}\{\omega\}\right) = \sum_{\omega\in A} P\left(\{\omega\}\right) = \sum_{\omega\in A} p_\omega.$$

Ceci implique l'unicité de la probabilité P si elle existe.

<u>Synthèse</u>. Posons $P : \left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & \sum\limits_{\omega\in A} p_\omega \end{array}\right.$, et vérifions que P est une probabilité.

- Vérifions d'abord que P prend ses valeurs dans $[0,1]$.
  Si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a, pour tout $\omega \in \Omega$, $0 \leq \mathbf{1}_A(\omega) \leq 1$, donc $0 \leq p_\omega \mathbf{1}_A(\omega) \leq p_\omega$. Sommons :

$$\underbrace{\sum_{\omega\in\Omega} p_k \cdot 0}_{0} \ \leq \ \underbrace{\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega \mathbf{1}_A(\omega)}_{P(A)} \ \leq \ \underbrace{\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega \cdot 1}_{1}.$$

- $P(\Omega) = \sum\limits_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1.$
- Soient A et B deux événements incompatibles : $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$: $A \cap B = \emptyset$.

$$P(A\cup B) = \sum_{\omega\in A\cup B} p_\omega \underset{A\cap B=\emptyset}{=} \sum_{\omega\in A} p_\omega + \sum_{\omega\in B} p_\omega = P(A) + P(B).$$

<u>Conclusion</u>. Il existe bien une unique probabilité P sur Ω telle que $\forall\omega \in \Omega\ P\left(\{\omega\}\right) = p_\omega$. $\square$

Preuve de la proposition 55.

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé (Ω, P).

• Supposons que $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes. Soit $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \prod_{i=1}^n X_i(\Omega)$. De la définition, il vient que les événements $(X_1 = x_1), \ldots, (X_n = x_n)$ sont indépendants, de sorte qu'on a bien

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n (X_i = x_i)\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i).$$

• Réciproquement, supposons l'égalité précédente vraie pour toute famille $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \prod_{i=1}^n X_i(\Omega)$.
Soit J une partie de $[\![1,n]\!]$, non vide, et une famille d'événements $A_j \in \prod_{j\in J} \mathcal{P}\left(X_j(\Omega)\right)$.
On va vérifier que $P\left(\bigcap\limits_{i\in J} (X_j \in A_j)\right) = \prod\limits_{j\in J} P(X_j \in A_j)$. Commençons par "compléter" l'intersection :

$$\bigcap_{i\in J}(X_j \in A_j) = \bigcap_{i=1}^n (X_i \in A_i^*) \qquad \text{où} \quad \forall i \in [\![1,n]\!] \;\; A_i^* = \begin{cases} A_i & \text{si } i \in J \\ X_i(\Omega) & \text{si } i \notin J \end{cases}$$

Ainsi,

$$\bigcap_{i\in J}(X_j \in A_j) = \bigcap_{i=1}^n \bigcup_{x_i\in A_i^*} (X_i = x_i) = \bigcup_{x_1\in A_1^*} \bigcup_{x_2\in A_2^*} \cdots \bigcup_{x_n\in A_n^*} \bigcap_{i=1}^n (X_i = x_i).$$

On a donc

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i\in J}(X_j \in A_j)\right) &\underset{union\ disjointe}{=} \sum_{x_1\in A_1^*} \sum_{x_2\in A_2^*} \cdots \sum_{x_n\in A_n^*} P\left(\bigcap_{i=1}^n P(X_i = x_i)\right) \\ &\underset{hypotèse}{=} \sum_{x_1\in A_1^*} \sum_{x_2\in A_2^*} \cdots \sum_{x_n\in A_n^*} \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i) \\ &= \left(\sum_{x_1\in A_1^*} P(X_1 = x_1)\right) \cdots \left(\sum_{x_n\in A_n^*} P(X_n = x_n)\right) \end{aligned}$$

Or, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,

$$\sum_{x_i\in A_i^*} P(X_i = x_i) = \begin{cases} \sum\limits_{x_i\in A_i} P(X_i = x_i) = P(A_i) & \text{si } i \in J \\ \sum\limits_{x_i\in X_i(\Omega)} P(X_i = x_i) = 1 & \text{si } i \notin J \end{cases}$$

On a bien

$$P\left(\bigcap_{i\in J}(X_j \in A_j)\right) = \prod_{j\in J} P(X_j \in A_j).$$

Les variables $X_1, \ldots, X_n$ sont bien indépendantes. $\square$

Preuve du théorème 60.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\Omega_1, P_1), \ldots, (\Omega_n, P_n)$ des espaces probabilisés finis. Posons $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$. On définit alors $X_1, \ldots, X_n$ par

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad X_i : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \Omega_i \\ (\omega_1, \ldots, \omega_n) & \mapsto & \omega_i \end{array} \right. .$$

On va définir sur Ω une probabilité qui fait de $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de lois respectives $P_1, \ldots, P_n$. Pour cela, posons

$$\forall \omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega \qquad p_\omega := \prod_{i=1}^{n} P_i\left(\{\omega_i\}\right).$$

La famille $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ est une distribution de probabilités. En effet, il s'agit d'une famille de réels positifs tels que

$$\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = \sum_{\omega_1 \in \Omega_1} \cdots \sum_{\omega_n \in \Omega_n} \prod_{i=1}^{n} P_i\left(\{\omega_i\}\right) = \prod_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{\omega_i \in \Omega_i} P_i\left(\{\omega_i\}\right) \right)}_{=1} = 1.$$

Notons P l'unique probabilité « sur Ω » (en fait sur $\mathcal{P}(\Omega)$) déterminée par cette distribution de probabilités.

• Fixons d'abord un entier $i \in [\![1, n]\!]$ et un élément $x \in \Omega_i$. On a

$$(X_i = x) = \Omega_1 \times \cdots \Omega_{i-1} \times \{x\} \times \Omega_i \cdots \times \Omega_n$$

D'autre part, $(X_i = x) = \bigcup\limits_{\omega \in (X_i = x)} \{\omega\}$. D'où

$$\begin{aligned}
P(X_i = x) &= \sum_{\omega \in (X_i = x)} \underbrace{P\left(\{\omega\}\right)}_{=p_\omega} \\
&= \sum_{(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in (X_i = x)} P_1\left(\{\omega_1\}\right) \cdots P_i\left(\{x\}\right) \cdots P_n\left(\{\omega_n\}\right) \\
&= \left(\sum_{\omega_1 \in \Omega_1} P(\{\omega_1\}) \right) \cdots \left(\sum_{\omega_{i-1} \in \Omega_{i-1}} P(\{\omega_{i-1}\}) \right) \cdot P_i(\{x\}) \cdot \left(\sum_{\omega_{i+1} \in \Omega_{i+1}} P(\{\omega_{i+1}\}) \right) \cdots \left(\sum_{\omega_n \in \Omega_n} P(\{\omega_n\}) \right) \\
&= P_i(\{x\}), \quad \text{les autres facteurs étant des sommes égales à 1.}
\end{aligned}$$

On a donc vérifié que X_i avait pour loi P_i.

• Soit $(x_i)_{i \in [\![1, n]\!]}$. La définition de Ω et des X_i étant ce qu'elle est, l'événement $\bigcap\limits_{i=1}^{n} (X_i = x_i)$ est simplement le singleton $\{(x_1, \ldots, x_n)\}$. Ainsi,

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i = x_i) \right) = P\left(\{(x_1, \ldots, x_n)\}\right) = \prod_{i=1}^{n} P_i\left(\{x_i\}\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i).$$

Ceci démontre que les variables $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, ce qui achève la preuve du théorème. $\square$

Exercices.

Expériences aléatoires et leur modélisation.
Dans les exercices de ce paragraphe, une *modélisation* de la situation est attendue : à nous de proposer un espace probabilisé (Ω, P) adéquat.

$\boxed{\textbf{39.1}}$ **[♦◇◇]** (Facile !) Une urne contient cinq boules blanches et cinq boules noires.
On tire simultanément trois boules dans l'urne. Quelle est la probabilité de tirer trois boules noires ?

$\boxed{\textbf{39.2}}$ **[♦♦◇]** Soit n un entier supérieur à 3. On place aléatoirement n boules dans n urnes.
Quelle est la probabilité qu'une urne exactement demeure vide ?

$\boxed{\textbf{39.3}}$ **[♦♦◇]** On mélange un jeu de $2n$ cartes numérotées de 1 à $2n$.
Quelle est la probabilité pour que les cartes de numéro impair soient correctement ordonnées ?

$\boxed{\textbf{39.4}}$ **[♦♦◇]** Paradoxe des anniversaires.
48 MP2I jeunes et fringants arriveront à PV en septembre 2025. Quelle est la probabilité pour que deux d'entre eux aient la même date d'anniversaire ?

$\boxed{\textbf{39.5}}$ **[♦♦♦]** Inspirons.
Démontrer qu'il y a plus d'une chance sur cent que dans la bouffée d'air qui entre dans nos poumons, se trouve une des molécules de dioxygène expirée par Jules César en disant « *Tu quoque fili* ».
Données physiques : l'atmosphère contient environ 10^{44} molécules de dioxygène et chacune de nos inspirations en contient $2 \cdot 10^{22}$.

Calculs de probabilités
Dans les exercices ci-dessous, on travaille avec un espace probabilisé (Ω, P) qu'on n'aura pas besoin d'expliciter. Lorsqu'il est question de situation concrète, on considérera que la modélisation de l'expérience aléatoire a été faite correctement.

$\boxed{\textbf{39.6}}$ **[♦◇◇]** (Facile !) Soit (Ω, P) un espace probabilisé et X une variable aléatoire définie sur Ω, telle que $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ telle que $P(X = 0) = P(X = 1)$, $P(X \leq 1) = \frac{1}{4}$ et $P(X \leq 2) = \frac{2}{3}$. Donner la loi de X.

$\boxed{\textbf{39.7}}$ **[♦◇◇]** Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$ et soit M la *matrice aléatoire*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & X \end{pmatrix}$$

Donner la loi du rang de X.

$\boxed{\textbf{39.8}}$ **[♦♦◇]** Une urne contient n boules noires et n boules blanches. On tire les boules de l'urne deux par deux. Calculer p_n, la probabilité d'avoir à chaque tirage une boule blanche et une boule noire.
Calculer un équivalent de p_n.

39.9 **[♦◇◇]** Soient $(n+1)$ urnes $U_0, U_1, \ldots, U_n$. L'urne U_k contient k boules rouges et $n-k$ noires. On choisit une urne au hasard et on tire une boule de l'urne. On suppose la situation correctement modélisée par un espace probabilisé (Ω, P) qu'on ne cherchera pas à connaître.

1. Quelle est la probabilité que la boule tirée soit rouge ? Commenter.
2. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Quelle est la probabilité d'avoir choisi l'urne U_k sachant que la boule tirée est rouge ?

39.10 **[♦◇◇]** On considère un dé pipé, truqué de manière à ce que la fréquence d'apparition de chaque face soit proportionnelle au numéro de la face. Plus précisément, il existe un réel α telle que la fréquence d'apparition de $k \in \{1, \ldots, 6\}$ vaut $\alpha \cdot k$.

1. Que vaut α ?
2. On lance ce dé plusieurs fois. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on s'intéresse à l'événement

   A_n l'événement « la somme des n premiers lancers est paire ».

   Supposons que la situation est correctement modélisée par un espace probabilisé (Ω, P) que l'on ne cherchera pas à connaître. On note $p_n = P(A_n)$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer p_{n+1} à l'aide de p_n.
   (b) Donner le terme général de la suite (p_n) ainsi que sa limite si elle existe.

39.11 **[♦♦◇]** À Gotham City, il y a 80% de taxis jaunes, les autres sont verts. Il y a trois mois un homme est mort, renversé par un taxi qui a pris la fuite (Batman télétravaillait). Un témoin déclare avoir vu un taxi vert. Mais c'était la nuit, et le témoin a pu se tromper sur la couleur. Des tests visuels sont organisés et on découvre que le témoin se trompe sur la couleur du taxi dans 20% des cas.
Un chauffeur de taxi vert est sur le banc des accusés, et vous êtes son avocat.
Écrire une plaidoirie dont le but sera d'écarter le témoignage gênant.

Probabilité sur un univers fini

39.12 Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'événements d'un espace probabilisé (Ω, P). Démontrer que

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \leq P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) + n - 1.$$

Indépendance

39.13 **[♦◇◇]** Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $A_1, \ldots, A_n$ des événements indépendants. Montrer que

$$A_1 \cup \ldots \cup A_n = \Omega \implies \quad (\exists i \in [\![1, n]\!] \ P(A_i) = 1)$$

39.14 **[♦◇◇]** Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé (Ω, P). On suppose qu'elles sont indépendantes et suivent toutes deux la loi uniforme sur $[\![-n, n]\!]$.

1. Calculer $P(X = Y)$.
2. Calculer $P(X^2 = Y^2)$.

39.15 **[♦♦◇]** Soit n un entier supérieur à 3. Sur un même espace probabilisé (Ω, P), on considère A et B deux variables indépendantes et de loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Calculer $P\left(A^B \leq B^A\right)$.

39.16 **[♦♦◇]** Soient $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1/2)$.
Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on note $A_k = \{X_k \neq X_{k+1}\}$.

1. Montrer que les événements (A_k) sont deux à deux indépendants.
2. *Plus difficile* : montrer que les événements (A_k) sont indépendants.

$\boxed{\textbf{39.17}}$ **[♦♦♢]** Somme de binomiales indépendantes
Soient $n, n' \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$.
On considère X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé (Ω, P) telles que $X \sim \mathscr{B}(n,p)$, que $Y \sim \mathscr{B}(n',p)$ et telles que X et Y sont indépendantes. Montrer que $X+Y \sim \mathscr{B}(n+n',p)$.

$\boxed{\textbf{39.18}}$ **[♦♦♢]** Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé (Ω, P), indépendantes et suivant toutes deux la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.

1. Calculer la loi de $U = \min(X,Y)$ et de $V = \max(X,Y)$.
   Idée à retenir : commencer par le calcul des probabilités de la forme $P(V \leq k)$.
2. Justifier que U et V ne sont pas indépendantes.

$\boxed{\textbf{39.19}}$ **[♦♦♢]** Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi. Justifier que $X-Y$ et $Y-X$ ont même loi.

$\boxed{\textbf{39.20}}$ **[♦♦♦]** Dans cet exercice, n est un entier naturel supérieur à 2.
Soit (Ω, P) un espace probabilisé et n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes, toutes de loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. On note

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad Y_i = \text{Card}\{j \in [\![1,n]\!] \ / \ X_j = i\}$$

1. Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Quelle est la loi de Y_i ?
   idée (à retenir) : écrire Y_i comme une somme de variables aléatoires.
2. Soient $(i,j,k) \in [\![1,n]\!]^3$ tel que $i \neq j$.
   Déterminer la loi de Y_j conditionnellement à $(Y_i = k)$.

$\boxed{\textbf{39.21}}$ **[♦♦♦]** Oral Mines-Ponts MP 2023
Soit (J_n) une suite de joueurs. Le joueur J_0 affronte le joueur J_1 ; le gagnant affronte J_2, puis le gagnant de ce nouveau match affronte J_3 et ainsi de suite.
Lors d'un match, le joueur entrant a une probabilité $p \in]0,1[$ de remporter le match. Le jeu termine lorsqu'un même joueur remporte trois victoires.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement « le n-ième match est joué ».
Déterminer la limite de $P(A_n)$ quand $n \to +\infty$.
On admettra l'existence d'un espace probabilisé (Ω, P) sur lequel sont bien définis tous les événements de l'exercice. Cet espace ne saurait être fini, mais on fait comme si (en attendant le cours de spé).
