DM 1

À rendre le vendredi 13 septembre. Obligatoires : questions 1, 2-(a), 2-(b), 3.

Problème. π-systèmes.

Soit E un ensemble et $\mathcal{A}$ un ensemble de parties de E.
On dit que $\mathcal{A}$ est un **π-système de** E si

$$\forall (A, A') \in \mathcal{A}^2 \quad A \cap A' \in \mathcal{A}.$$

0. Un exemple trivial.
   Soit E un ensemble et $A \in \mathcal{P}(E)$. On pose $\mathcal{S} = \{A\}$.
   Justifier que $\mathcal{S}$ est un π-système de E.

1. Un exemple.
   On rappelle que si a est un réel, on a $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$.
   Montrer que $\mathcal{A} = \{[a, +\infty[, a \in \mathbb{R}\}$ est un π-système de $\mathbb{R}$.

2. Des contre-exemples.
   Pour un réel a, on note
   $$\mathbb{Z}_a = \{a + k \mid k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{et} \quad \mathbb{Q}_a = \{a + r \mid r \in \mathbb{Q}\}.$$
   (a) Montrer que si a est un entier relatif, $\mathbb{Z}_a = \mathbb{Z}$.
   L'ensemble de parties $\mathcal{B} = \{\mathbb{Z}_a \mid a \in \mathbb{Z}\}$ est-il un π-système de $\mathbb{R}$?
   (b) Montrer que $\mathbb{Z} \cap \mathbb{Z}_{1/2} = \emptyset$.
   L'ensemble de parties $\mathcal{C} = \{\mathbb{Z}_a \mid a \in \mathbb{R}\}$ est-il un π-système de $\mathbb{R}$?
   (c) En utilisant l'irrationalité de $\sqrt{2}$, montrer que $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}_{\sqrt{2}} = \emptyset$.
   L'ensemble de parties $\mathcal{D} = \{\mathbb{Q}_a \mid a \in \mathbb{R}\}$ est-il un π-système de $\mathbb{R}$?

3. Stabilité par intersection.
   Soit E un ensemble et $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux π-systèmes de E.
   Notons $\mathcal{C} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. Montrer que $\mathcal{C}$ est un π-système de E.

4. Et avec l'union ?
   Soit E un ensemble et $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux π-systèmes de E.
   On fait l'hypothèse suivante :
   $$\forall (A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B} \quad A \cap B = \emptyset.$$
   On pose
   $$\mathcal{D} = \{A \cup B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}.$$
   Montrer que $\mathcal{D}$ est un π-système de E.

5. Et avec le produit cartésien ?
   Soit E un ensemble et $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux π-systèmes de E.
   On pose
   $$\mathcal{E} = \{A \times B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}.$$
   Montrer que $\mathcal{E}$ est un π-système de $E \times E$.