Problème 1. Polynômes de Legendre.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$U_n = (X^2-1)^n \quad \text{et} \quad L_n = \frac{1}{2^n n!} U_n^{(n)}.$$

Les polynômes L_n sont appelés **polynômes de Legendre**.

Dans tout ce problème enfin, m et n désigneront des entiers naturels.

Partie A. Une famille de polynômes scindés simples sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer L_0 et L_1 et vérifier que $L_2 = \frac{1}{2}\left(3X^2-1\right)$.

2. (a) Quel est le degré de U_n ? Son coefficient dominant ?
   Calculer $U_n^{(2n)}$. Que vaut $U_n^{(k)}$ lorsque $k > 2n$?
   (b) Justifier que L_n est de degré n et préciser la valeur de son coefficient dominant.

3. (a) Énoncer le théorème de Rolle.
   (b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les racines de U_n, en précisant leur ordre de multiplicité, puis justifier qu'il existe un réel $\alpha \in]-1,1[$ et un réel λ que l'on ne cherchera pas à déterminer, tels que :

   $$U_n' = \lambda(X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}(X-\alpha).$$

   (c) Dans cette question seulement, $n \geq 2$. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose qu'il existe des réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel μ tels que
   $$U_n^{(k)} = \mu(X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_k).$$
   Justifier qu'il existe des réels $\beta_1, \ldots, \beta_{k+1}$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel ν tels que

   $$U_n^{(k+1)} = \nu(X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-\beta_1)\cdots(X-\beta_{k+1}).$$

   (d) En déduire que si n est non nul, L_n admet n racines simples, toutes dans l'intervalle $]-1,1[$.

Partie B. Évaluation de L_n en 1 et en -1.

4. À l'aide de la formule de Leibniz, démontrer :
   $$L_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 (X+1)^{n-k}(X-1)^k.$$

5. Calculer $L_n(1)$ et $L_n(-1)$.

Partie C. Calcul des nombres $\langle L_n, L_m\rangle$.

Dans cette partie, pour deux polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$, on notera $\langle P, Q\rangle$ l'intégrale
$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t.$$

Ceci définit un "produit scalaire" sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ (fin d'année).
Ci-dessous, nous prouvons que les L_i sont des polynômes deux à deux "orthogonaux".

6. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on note
   $$\mathcal{P}(k) : « \langle U_n^{(n)}, U_m^{(m)}\rangle = (-1)^k \langle U_n^{(n-k)}, U_m^{(m+k)}\rangle ».$$
   (a) (*) En supposant n non nul, à l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ $\mathcal{P}(k) \Longrightarrow \mathcal{P}(k+1)$.
   (b) Justifier l'égalité
   $$\langle L_n, L_m\rangle = \frac{(-1)^n}{2^{n+m}n!m!}\langle U_n, U_m^{(m+n)}\rangle.$$

7. À l'aide de ce qui précède, démontrer que
   $$n \neq m \Longrightarrow \langle L_n, L_m\rangle = 0.$$

8. (a) Toujours à l'aide de la question 6 (b), démontrer que
   $$\langle L_n, L_n\rangle = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!^2}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n\mathrm{d}t.$$
   (b) Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $J_k = \int_{-1}^{1}(1-t^2)^k\mathrm{d}t$.
   Intégrer J_k par parties et obtenir une relation entre J_k et J_{k-1} lorsque $k \geq 1$.
   (c) En déduire une expression de J_n, puis que
   $$\langle L_n, L_n\rangle = \frac{2}{2n+1}.$$

Problème 2. Exemples de nombres algébriques et de nombres transcendants.

On dit qu'un nombre réel est **algébrique** s'il est racine d'un polynôme non nul et à coefficients entiers. Dans le cas contraire, on dira que ce nombre est **transcendant**.

Dans ce problème, on notera $\overline{\mathbb{Q}}$ l'ensemble des nombres algébriques :

$$\overline{\mathbb{Q}} = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists P \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\} : P(x) = 0\}.$$

Partie A. Exemples de nombres algébriques.

1. Démontrer que $\mathbb{Q} \subset \overline{\mathbb{Q}}$.
2. Démontrer que $\sqrt{2} \in \overline{\mathbb{Q}}$.
3. Démontrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \overline{\mathbb{Q}}$.
   Généraliser et prouver que si a et b sont deux entiers naturels, alors $\sqrt{a} + \sqrt{b} \in \overline{\mathbb{Q}}$.
4. Soit r un rationnel. Montrer que $\cos(\pi r) \in \overline{\mathbb{Q}}$.
   On pourra faire intervenir un membre d'une famille de polynômes célèbres.
5. Soit $x \in \overline{\mathbb{Q}}$.
   (a) Montrer que $-x \in \overline{\mathbb{Q}}$.
   (b) Supposons que $x \neq 0$. Montrer que $\frac{1}{x} \in \overline{\mathbb{Q}}$.

Partie B. Polynôme minimal d'un nombre algébrique.

On admet que les résultats d'arithmétique de $\mathbb{K}[X]$ exposés dans le cours sont vrais lorsque $\mathbb{K}$ est sous-corps quelconque de $\mathbb{C}$, ici $\mathbb{Q}$.
On dit qu'un polynôme de $\mathbb{Q}[X]$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$ si ses seuls diviseurs dans $\mathbb{Q}[X]$ sont ses associés et les polynômes constants non nuls.

Soit $x \in \overline{\mathbb{Q}}$, un nombre algébrique. On note $\mathcal{I}_x = \{P \in \mathbb{Q}[X] \mid P(x) = 0\}$.
Soit Π_x l'unique polynôme unitaire de $\mathcal{I}_x$ minimal en degré.

6. (a) Justifier que Π_x existe et est irréductible sur $\mathbb{Q}$.
   (b) Montrer que Π_x divise tous les polynômes de $\mathcal{I}_x$.
   (c) Justifier que Π_x est unique.
7. On note d le degré de Π.
   On pose $\mathbb{Q}_{d-1}[x] = \{P(x) \mid P \in \mathbb{Q}_{d-1}[X]\}$ et $\mathbb{Q}[x] = \{P(x) \mid P \in \mathbb{Q}[X]\}$.
   (a) Montrer que $\mathbb{Q}[x] = \mathbb{Q}_{d-1}[x]$.
   (b) Montrer que $\mathbb{Q}_{d-1}[x]$ est un corps.

Les parties C et D sont indépendantes des parties A et B.

Partie C. Un théorème de Liouville.

Soit $x \in \overline{\mathbb{Q}}$ un nombre algébrique.

On considère P un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ non constant dont x est une racine.
On note d le degré de P.

Soit un réel $\eta > 0$ tel que $[x-\eta, x+\eta]$ ne contient aucune racine de P autre que x.

8. Justifier l'existence de η.
9. Prouver l'existence d'une constante $K > 0$ telle que
$$\forall (a,b) \in [x-\eta, x+\eta] \qquad |P(a) - P(b)| \leq K|a-b|.$$
10. Soit $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
$$\text{si} \quad \frac{p}{q} \in [x-\eta, x+\eta] \setminus \{x\} \quad \text{alors} \quad \left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{Kq^d}.$$
11. Prouver qu'il existe une constante $A > 0$ (qu'on explicitera en fonction de K et η) telle que
$$\forall (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \qquad \frac{p}{q} \neq x \quad \Longrightarrow \quad \left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{A}{q^d}.$$

Liouville s'est servi de son résultat pour créer un exemple de nombre transcendant : il lui a suffit d'exhiber un nombre qui prend en défaut l'inégalité démontrée dans la dernière question. Ce travail est fait en partie D.

Partie D. La constante de Liouville $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{10^{k!}}$: premier exemple de nombre transcendant.

12. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{10^{k!}}$. Montrer que (u_n) converge.
13. Notons ℓ la limite de u. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |\ell - u_n| \leq \frac{1}{10^{nn!}}.$$
    Indication : on pourra majorer d'abord $|u_p - u_n|$ où $p \geq n$.
14. En utilisant le théorème de Liouville, prouver que ℓ est un nombre transcendant.