Petit problème. Méthode de Cardan, sur un exemple.

0. (a) Développer $(2+i)^3$ et $(2-i)^3$.
   (b) En déduire les solutions de l'équation $z^3 = 2+11i$ et celles de l'équation $z^3 = 2-11i$. *On utilisera le nombre* $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

On cherche à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(E): \quad x^3 + 3x^2 - 12x - 18 = 0.$$

1. Montrer que x est solution de (E) ssi $X = x+1$ est solution de

$$(E'): \quad X^3 - 15X - 4 = 0.$$

   On cherche les solutions de (E') sous la forme $X = u+v$ où u et v sont des nombres complexes.

2. Montrer que $X = u+v$ est solution de (E') si et seulement si

$$u^3 + v^3 + (u+v)(3uv - 15) = 4.$$

   $\boxed{\textbf{On impose la condition } uv = 5}$

3. On pose $a = u^3$ et $b = v^3$.
   Justifier que a et b sont solutions de l'équation $z^2 - 4z + 125 = 0$.
4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation du second degré de la question précédente, et en déduire u^3 et v^3 à l'ordre près.
5. Résoudre enfin (E') puis (E).

On appelle équation algébrique de degré 3 toute équation de la forme

$$x^3 + ax^2 + bx + c = d.$$

La méthode de Cardan, mise en œuvre dans ce problème, permet une résolution par radicaux de cette équation, c'est-à-dire qu'elle permet d'en trouver les solutions, en les exprimant à l'aide des radicaux $\sqrt{\ }$ *et* $\sqrt[3]{\ }$.
On pourra consulter l'article consacré à la méthode sur l'encyclopédie Wikipedia.

Exercice .

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(z + e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^n = n(z^n + 1)$$

2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cos^n\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$$

3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cos^n\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) = 0$$