Corrigé du DS 6B

Exercice 1.

• On calcule $P' = 5X^4 + 2aX + b$.
Par caractérisation, α est racine multiple (de multiplicité supérieure à 2) si et seulement si $P(1) = P'(1) = 0$. On obtient donc le système

$$\begin{cases} 1 + a + b &= 0 \\ 5 + 2a + b &= 0 \end{cases}$$

dont l'unique solution est $(a, b) = (-4, 3)$.

• On cherche donc à factoriser $X^5 - 4X^2 + 3X = X(X^4 - 4X + 3)$.
Nous savons déjà que $(X-1)^2$ divise $X^5 - 4X^2 + 3X$ et donc $X^4 - 4X + 3$ puisqu'il est premier avec X. En posant la division euclidienne de $X^4 - 4X + 3$ par $X^2 - 2X + 1$, on obtient un quotient $X^2 + 2X + 3$. On a donc

$$\boxed{X^5 - 4X^2 + 3X = X(X-1)^2(X^2 + 2X + 3)}.$$

• Les facteurs ci-dessus sont bien des irréductibles de $\mathbb{R}[X]$: des polynômes de degré 1 et un polynôme de degré 2 sans racines réelles (son discriminant est strictement négatif).

Exercice 2.

1. Premier calcul.
   (a) Notons $Q(X) = (X+1)P(X) - 1$.
   Par hypothèse de l'énoncé,

   $$\forall k \in [\![0, n]\!] \quad (k+1)P(k) - 1 = 1 - 1 = 0.$$

   Puisque $\deg(P) \leq n$, le polynôme Q est de degré inférieur à $n+1$.
   Puisqu'il a $n+1$ racines distinctes $0, 1, \ldots, n$, il est scindé sur $\mathbb{R}$:

   $$Q(X) = \lambda \prod_{k=0}^{n} (X - k),$$

   où λ est le coefficient dominant de Q (et aussi celui de P).

   (b) On évalue l'égalité précédente en -1 :

   $$0 - 1 = \lambda \prod_{k=0}^{n} (-1)(k+1) \quad \text{soit} \quad -1 = \lambda(-1)^{n+1}(n+1)! \quad \text{soit} \quad \boxed{\lambda = \frac{(-1)^n}{(n+1)!}}$$

   (c) Il reste à évaluer l'égalité de la question 1 en $n+1$:

   $$(n+2)P(n+1) - 1 = \lambda \prod_{k=0}^{n} (n+1-k).$$

   Or, $\lambda \prod_{k=0}^{n} (n+1-k) = \frac{(-1)^n}{(n+1)!}(n+1)! = (-1)^n$. Ceci laisse

   $$\boxed{P(n+1) = \frac{1}{n+2}\left(1 + (-1)^n\right)}$$

2. Second calcul.

   Le polynôme d'interpolation de Lagrange vaut $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \frac{\prod_{i \neq k} (X - i)}{\prod_{i \neq k} (k - i)}$.

   On évalue en $n+1$:

   $$\begin{aligned} P(n+1) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \frac{(n+1)!/(n+1-k)}{(-1)^k k!(n-k)!} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k \\ &= \frac{1}{n+2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+2}{k+1} (-1)^k \\ &= \frac{1}{n+2} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+2}{j} (-1)^{j-1} \\ &= \frac{1}{n+2} \left(\underbrace{\sum_{j=0}^{n+2} \binom{n+2}{j} (-1)^{j-1}}_{=0} - (-1)^{0-1} - (-1)^{n+2-1} \right) \\ &= \frac{1}{n+2} \left(1 + (-1)^n\right) \end{aligned}$$

Exercice 3.

Notons $z_1, \ldots, z_{13}$ les 13 racines de P, (non forcément distinctes). On sait que

$$P = 2\prod_{k=1}^{13}(X - z_k) = 2\left(X^{13} - \sigma_1 X^{12} + \cdots + (-1)^{13}\sigma\right),$$

où

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{13} z_k \quad \text{et} \quad \sigma_{13} = \prod_{k=1}^{13} z_k.$$

En identifiant les coefficients devant X^{12} et devant X^0, on obtient $-2\sigma_1 = -4$ et $2(-1)^{13}\sigma_{13} = 666$. Ceci permet de conclure :

$$\boxed{\sigma_1 = 2} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\sigma_{13} = -333}.$$

Exercice 4.

Énoncé : $P(X) = X^{2n} + 1$. Pour k dans $[\![0, 2n-1]\!]$, on note $\varphi_k = \dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n}$ et $\omega_k = \mathrm{e}^{i\varphi_k}$.

1. On remarque d'abord que pour $k \in [\![0, 2n-1]\!]$, on a $P(\omega_k) = e^{2in\varphi_k} + 1 = -1 + 1 = 0$. Ceci prouve que $\omega_0, \ldots, \omega_{2n-1}$ sont racines de P. De plus, pour $k, \ell \in [\![0, 2n-1]\!]$

$$\varphi_k - \varphi_\ell = (k - \ell)\frac{\pi}{n}$$

Puisque $-2n < k - \ell < 2n$ et donc $\varphi_k - \varphi_\ell \in]-2\pi, 2\pi[$ n'est nul que si $k = \ell$. On a ainsi $2n$ racines deux à deux distinctes pour P unitaire de degré $2n$ et donc

$$\boxed{P(X) = \prod_{k=0}^{2n-1}(X - \omega_k)}$$

2. Soit $k \in [\![0, 2n-1]\!]$. On calcule

$$\overline{\omega_k} = e^{-i\frac{\pi}{2n} - i\frac{k\pi}{n}} = e^{i\frac{\pi}{2n} - i\frac{2\pi}{2n} - i\frac{k\pi}{n} + i\frac{2\pi}{2n}} = e^{i\frac{\pi}{2n} + i\frac{(2n-(k+1))\pi}{n}} = \omega_{2n-(k+1)}.$$

En partant de la factorisation obtenue en question 1, on a donc

$$P(X) = \prod_{k=0}^{2n-1}(X - \omega_k) = \prod_{k=0}^{n-1}(X - \omega_k)\prod_{k=n}^{2n-1}(X - \omega_k).$$

Or, d'après le calcul précédent,

$$\prod_{k=n}^{2n-1}(X - \omega_k) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - \omega_{2n-(j+1)}\right) = \prod_{k=0}^{n-1}(X - \overline{\omega_k}).$$

Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$(X - \omega_k)(X - \overline{\omega_k}) = X^2 - 2\mathrm{Re}(\omega_k)X + |\omega_k|^2 = X^2 - 2\cos(\varphi_k)X + 1.$$

Puisque ce polynôme du second degré est à racines non réelles, c'est un irréductible de $\mathbb{R}[X]$. La décomposition de $X^{2n} + 1$ en produit d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ est donc

$$\boxed{P(X) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X^2 - 2\cos(\varphi_k)X + 1\right)}$$

Problème. Polynômes de Tchebychev.

$\boxed{\textbf{Partie A}}$ Étude des polynômes de Tchebychev.

La suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $T_0 = 1 \quad T_1 = X$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.

1. *Premières propriétés*

   (a) $\boxed{T_2(X) = 2X^2 - 1}$, $\boxed{T_3(X) = 4X^3 - 3X}$ et $\boxed{T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1}$.

   (b) On procède par récurrence "double", la relation de récurrence définissant la suite (T_n) étant d'ordre 2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

   $$\mathcal{P}(n) : \quad \text{« } \deg T_n = n \text{ »}.$$

   $\star$ $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.
   $\star$ On suppose que pour un entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies.
   On sait que $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.
   On constate que $\deg(2XT_{n+1}) = n + 2 > n = \deg T_n$.
   Le cours nous assure que $\deg T_{n+2} = \deg(2XT_{n+1}) = n + 2$.
   On a bien vérifié $\mathcal{P}(n+2)$.

   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \deg T_n = n}$$

   (c) • On constate que T_0 est de coefficient dominant égal à 1.
   • On montre par récurrence sur n que T_n est de coefficient dominant égal à 2^{n-1} si $n \geq 1$.

   $\star$ Le polynôme T_1 est bien de coefficient dominant égal à 2^0.
   $\star$ Supposons que T_n est de coefficient dominant égal à 2^{n-1} pour un $n \in \mathbb{N}^\star$. Connaissant les degrés de T_n et T_{n-1}, on observe que

   $$\deg(T_{n-1}) < n$$
   $$T_n = 2^{n-1}X^n + R_n \quad \text{avec } \deg(R_n) < n.$$

   On en déduit que

   $$T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1} = 2^nX^{n+1} + 2XR_n - T_{n-1}$$

   Puisque $\deg(2XR_n - T_{n-1}) < n+1$, cela montre que T_{n+1} est de coefficient dominant 2^{n+1}.

   $\boxed{\text{Pour tout } n \text{ supérieur à 1, } T_n \text{est de coefficient dominant } 2^{n-1}}$

   (d) Montrons par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ que $T_n(-X) = (-1)^nT_n(X)$.
   $\star$ C'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$.
   $\star$ On suppose que pour un entier n,

   $$T_n(-X) = (-1)^nT_n(X) \quad \text{et} \quad T_{n+1}(-X) = (-1)^{n+1}T_{n+1(X)}.$$

   L'égalité $T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)$ donne alors

   $$\begin{aligned} T_{n+2}(-X) &= 2 \cdot (-X) \cdot T_{n+1}(-X) - T_n(-X) \\ &= (-1)^{n+2}\left(2XT_{n+1}(X) - T_n(X)\right) \\ &= (-1)^{n+2}T_{n+2}(X). \end{aligned}$$

   terminant ainsi la récurrence.

   $$\boxed{T_n \text{ et } n \text{ sont de même parité.}}$$

2. *La relation fondamentale*

   (a) Montrons le résultat par récurrence à deux termes sur $n \in \mathbb{N}$.
   $\star$ C'est clair pour $n = 0$ et $n = 1$.
   $\star$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons le résultat vrai aux rangs n et $n + 1$.
   L'égalité $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ permet d'obtenir

   $$\begin{aligned} T_{n+2}\left(\frac{1}{2}(z + z^{-1})\right) &= (z + z^{-1})T_{n+1}\left(\frac{1}{2}(z + z^{-1})\right) - T_n\left(\frac{1}{2}(z + z^{-1})\right) \\ &= (z + z^{-1})\frac{1}{2}(z^{n+1} + z^{-n-1}) - \frac{1}{2}(z^n + z^{-n}) \\ &= \frac{1}{2}(z^{n+2} + z^{-(n+2)}), \end{aligned}$$

   terminant ainsi la récurrence.

   $$\boxed{\forall (z, n) \in \mathbb{C}^\star \times \mathbb{N} \quad T_n\left(\frac{1}{2}(z + 1/z)\right) = \frac{1}{2}(z^n + 1/z^n)}$$

   (b) Soit un réel α. Il suffit d'appliquer la question précédente à $z = e^{i\alpha}$ (qui est bien non nul) et d'utiliser une formule d'Euler :

   $$T_n(\cos\alpha) = T_n\left(\frac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})\right) = \frac{1}{2}(e^{in\alpha} + e^{-in\alpha}) = \cos n\alpha.$$

   $$\boxed{\forall (n, \alpha) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \quad T_n(\cos\alpha) = \cos(n\alpha)}$$

(c) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$: $P(\cos\alpha) = \cos(n\alpha)$.
Soit $Q = P - T_n$. On observe que $Q(\cos\alpha) = 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.
La fonction $\cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$ étant surjective, Q s'annule sur $[-1,1]$. Ce polynôme Q a donc une infinité de racines ; on sait alors que $Q = 0$, *i.e.*

$$\boxed{P = T_n}.$$

3. *Factorisation de T_n*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Le réel $\cos\alpha$ est racine de T_n si et seulement si $T_n(\cos\alpha) = \cos(n\alpha) = 0$ et donc si et seulement si

$$\exists k \in \mathbb{Z} \quad : \quad \alpha = \frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n} = \boxed{\frac{(2k+1)\pi}{2n}}.$$

(b) Pour $0 \leq k \leq n-1$, posons $x_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}$. Puisque les réels $\frac{(2k+1)\pi}{2n}$ sont dans $[0,\pi]$, les x_k sont n nombres réels distincts de $[-1,1]$ (sur $[0,\pi]$, cos est strictement décroissante donc injective). D'après la question précédente, $x_0, \dots, x_{n-1}$ sont n racines réelles distinctes de T_n. Or T_n est de degré n. Les x_k sont donc exactement toutes les racines de T_n et elles sont nécessairement simples. Ainsi T_n est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$. Connaissant son coefficient dominant, on conclut que

$$\boxed{T_n(X) = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}\left(X - \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}.$$

Les facteurs sont de degré 1 : ce sont bien des irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

4. *Calcul des bornes* $\sup_{x\in[-1,1]}|T_n(x)|$ *et* $\sup_{x\in[-1,1]}|T_n'(x)|$

(a) Soit un réel x dans $[-1,1]$. Il existe un (une infinité...) réel α tel que $x = \cos(\alpha)$, de sorte que

$$|T_n(x)| = |T_n(\cos\alpha)| = |\cos(n\alpha)| \leq 1.$$

En prenant $x = 1 = \cos(0)$, on obtient que $|T_n(1)| = 1$. Le majorant 1 est donc atteint : c'est un maximum ; on a

$$\boxed{\sup_{x\in[-1,1]}|T_n(x)| = 1}$$

(b) Les fonctions $\alpha \mapsto T_n(\cos\alpha)$ et $\alpha \mapsto \cos(n\alpha)$ sont dérivables par composition. En utilisant ❤ et en dérivant on trouve

$$\forall\alpha \in \mathbb{R} \quad : \quad -(\sin\alpha)T_n'(\cos\alpha) = -n\sin(n\alpha).$$

Si de plus $\alpha \in]0,\pi[$ alors $\sin(\alpha) \neq 0$ et on a bien $\boxed{T_n'(\cos\alpha) = n\frac{\sin(n\alpha)}{\sin\alpha}}$.

(c) On va passer à la limite quand $\alpha \to 0$ dans l'égalité de la question précédente.
Par continuité : $T_n'(\cos\alpha) \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} T_n'(1)$.
Par ailleurs, on sait que $\frac{\sin x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$. On peut donc écrire

$$n\frac{\sin(n\alpha)}{\sin\alpha} = n^2 \cdot \frac{\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}}{\frac{\sin\alpha}{\alpha}} \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} n^2 \cdot \frac{1}{1}$$

Un passage à la limite dans le résultat de la question précédente donne

$$\boxed{T_n'(1) = n^2}.$$

(d) Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $\mathcal{P}(n)$: « $\forall\alpha \in \mathbb{R},\ |\sin(n\alpha)| \leq n|\sin\alpha|$ ».
- $\mathcal{P}(0)$ est évidente (« $0 \leq 0$ »).
- On suppose $\mathcal{P}(n)$ pour un entier $n \in \mathbb{N}$ donné. Alors

$$\begin{aligned}|\sin((n+1)\alpha)| &= |\sin(n\alpha)\cos\alpha + \cos(n\alpha)\sin\alpha| \\ &\leq |\sin(n\alpha)||\cos\alpha| + |\cos(n\alpha)||\sin\alpha| \\ &\leq |\sin(n\alpha)| + |\sin\alpha| \\ &\leq n|\sin\alpha| + |\sin\alpha| \\ &\leq (n+1)|\sin\alpha|.\end{aligned}$$

- Le principe de récurrence conclut.

(e) D'après les questions 4-(a) et 4-(c), on a

$$\forall\alpha \in]0,\pi[\quad |T_n'(\cos\alpha)| \leq n^2,$$

de sorte que

$$\forall x \in]-1,1[\qquad |T_n'(x)| \leq n^2.$$

De $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$ on déduit $T_n'(-X) = (-1)^{n+1}T_n'(X)$, si bien que $|T_n'(-1)| = |T_n'(1)| = n^2$. On a montré que

$$\forall x \in [-1,1] \quad |T_n'(x)| \leq n^2$$

et qu'il y a égalité si $x = \pm 1$.

Cela achève de prouver que

$$\boxed{\sup_{x\in[-1,1]} |T_n'(x)| = n^2}$$

5. *Un théorème de Tchebychev.*

   (a) Grâce à ❤, on calcule $T_n(x_k) = \cos\left(n\frac{k\pi}{n}\right) = \cos(k\pi) = (-1)^k$.

   $$\boxed{T_n(x_k) = (-1)^k}$$

   On sait que $x_k \in [-1,1]$, donc $-1 < P(x_k) < 1$ (par hypothèse faite sur P). Ainsi $Q(x_k) = P(x_k) - (-1)^k$ est strictement positif si k est impair et strictement négatif si k est pair. Par conséquent

   $$\boxed{Q(x_k) \text{ et } Q(x_{k+1}) \text{ sont de signes opposés, et non nuls.}}.$$

   (b) On sait que $Q(x_k)$ et $Q(x_{k+1})$ sont non nuls et de signes opposés. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $y_k \in]x_{k+1}, x_k[$ tel que $Q(y_k) = 0$. Les inégalités

   $$x_n < y_{n-1} < x_{n-1} < \ldots < x_1 < y_0 < x_0$$

   justifient que $y_0, \ldots, y_{n-1}$ sont $\boxed{n \text{ racines distinctes de } Q}$.

   (c) Les polynômes P et T_n ont même degré n et même coefficient dominant 2^{n-1}. Dans $P - T_n$, les termes en X^n se simplifient. Donc $\deg Q = \deg(P - T_n) < n$. On a vu précédemment que Q admet au moins n racines distinctes. Ceci amène $Q = 0$ puis $P = \frac{1}{2^{n-1}} T_n$. Or, d'après 4-(a), on a

   $$\sup_{x\in[-1,1]} \frac{1}{2^{n-1}} |T_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

   Ceci contredit l'hypothèse initialement faite sur P. On a donc démontré que pour ce polynôme unitaire P quelconque de $\mathbb{R}_n[X]$,

   $$\boxed{\sup_{x\in[-1,1]} |P(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}.}$$

   Remarque : on peut démontrer que $\frac{1}{2^{n-1}} T_n$ est le seul polynôme unitaire de $\mathbb{R}_n[X]$ pour lequel l'inégalité ci-dessus est une égalité, mais c'est assez technique.