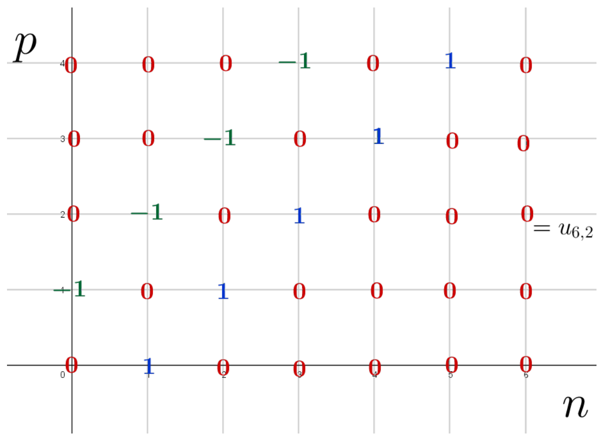
Familles sommables

Introduction.

Exemple 1 (Pour poser le problème).

Soit la famille $(u_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ définie pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ par $u_{n,p} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = p+1 \\ -1 & \text{si } p = n+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.



Calculer : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p}$, $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}$, $\displaystyle\sum_{N=0}^{+\infty}\sum_{n+p=N} u_{n,p}$. Commenter.

1 Sommer des réels positifs.

1.0 Travailler dans $[0,+\infty]$.

On note $\boxed{[0,+\infty] = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}}$. On étend la relation d'ordre sur $\mathbb{R}_+$ à $[0,+\infty]$ en posant

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad x \leq +\infty, \quad \text{et on convient que} \quad +\infty \leq +\infty.$$

Ainsi, $+\infty$ est un majorant de toute partie de $[0,+\infty]$.

Pour ce qui concerne le produit et la somme, convenons que

$\forall x \in \mathbb{R}_+ \ \ x+(+\infty) = (+\infty)+x = +\infty \ \mid \ \forall y \in \mathbb{R}_+^* \ \ y\times(+\infty) = (+\infty)\times y = +\infty, \mid \ 0\times(+\infty) = (+\infty)\times 0 = 0.$

On étend enfin la notion de borne supérieure.

Définition 2.

On appelle **borne supérieure** d'une partie A de $[0,+\infty]$ le plus petit des majorants de A dans $[0,+\infty]$. Cet élément de $[0,+\infty]$ est noté $\sup(A)$.

Il est clair que toute partie non vide de $[0,+\infty]$ possède une borne supérieure dans $[0,+\infty]$. Par exemple

$$\sup([0,1[) = 1, \qquad \sup(\ ]0,+\infty[\ ) = +\infty, \qquad \sup(\mathbb{N}) = +\infty.$$

Méthode (Passage au sup : l'argument clé du cours)**.**

Soient $M \in [0,+\infty]$ un réel et A une partie de $[0,+\infty]$. Pour démontrer l'inégalité $\sup(A) \leq M$, il suffira de montrer que M est un majorant de A. Autrement dit

$$(\forall x \in A \quad x \leq M) \quad \Longrightarrow \quad \sup(A) \leq M.$$

La caractérisation séquentielle de la borne supérieure s'étend aussi.

1.1 Somme d'une famille de réels positifs.

Définition 3.

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels <u>positifs</u>. On appelle **somme** de cette famille, notée $\sum\limits_{i\in I} u_i$ le nombre

$$\sum_{i\in I} u_i = \sup\left\{\sum_{i\in F} u_i,\ F \subset I,\ F \text{ finie}\right\} \quad (\in [0,+\infty]).$$

Proposition 4.

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs et $I' \subset I$. On a $\sum\limits_{i\in I'} u_i \leq \sum\limits_{i\in I} u_i$.

Proposition 5.

Soit $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles de réels positifs telles que $\forall i \in I\ u_i \leq v_i$. On a $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i \leq \sum_{i\in I} v_i$.

Proposition 6 (Lien avec les sommes finies, les sommes de séries)**.**

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs.

1. Si I est finie le nombre $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i$ est à la fois la somme (finie) des nombres de la famille, et la somme de la famille (au sens de la définition précédente).
2. Si $I = \mathbb{N}$, alors $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$, le nombre à droite étant la somme de la série $\sum u_n$ (avec la convention que cette somme vaut $+\infty$ si cette série à termes positifs diverge).

Proposition 7 (Invariance de la somme par permutation, cas positif)**.**

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels positifs et σ une bijection de I dans I. On a

$$\sum_{i\in I} u_{\sigma(i)} = \sum_{i\in I} u_i.$$

1.2 Familles sommables de réels positifs.

Définition 8.

Une famille de réels <u>positifs</u> $(u_i)_{i\in I}$ est dite **sommable** si sa somme est finie, ce qui se note

$$\sum_{i\in I} u_i < +\infty.$$

Proposition 9 (Opérations)**.**

Soit $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles de réels positifs (indexées par le même ensemble) et $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

- La famille $(u_i + v_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si la famille $(u_i)_{i\in I}$ <u>et</u> la famille $(v_i)_{i\in I}$ le sont. Dans tous les cas,

$$\sum_{i\in I}(u_i + v_i) = \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i.$$

- Si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable alors $(\lambda u_i)_{i\in I}$ l'est aussi. Dans tous les cas, $\displaystyle\sum_{i\in I} \lambda u_i = \lambda \sum_{i\in I} u_i$.

1.3 Sommation par paquets.

Théorème 10 (de sommation par paquets, cas positif)**.**

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs.
On suppose que I s'écrit comme une réunion disjointe $I = \bigcup_{j\in J} I_j$. Alors

$$\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right) = \sum_{i\in I} u_i.$$

Corollaire 11 (si cette somme est finie, alors c'est sommable)**.**

Une famille $(u_i)_{i\in I}$ de nombres positifs est sommable si et seulement si

1. pour tout $j \in J$, $(u_i)_{i\in I_j}$ est sommable,
2. la famille $\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right)_{j\in J}$ est sommable.

Remarque. Un calcul de somme comme celle du théorème 10 est toujours justifié, par la seule positivité quitte à avoir un résultat infini. Le corollaire nous dit que faire les calculs permet de prouver la sommabilité.

Considérons en particulier le cas où les indices appartiennent à un produit cartésien, et où les « paquets » sont faits *sur les lignes ou sur les colonnes*.

Théorème 12 (de Fubini positif)**.**

Soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de réels positifs indexée par un produit cartésien $I \times J$. On a

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} u_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} u_{i,j}.$$

Exemple 13 (Sommes triangulaires, cas positif)**.**

Soit $(u_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de nombres réels positifs indexée par $\mathbb{N}^2$. On a

$$\sum_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} u_{n,p} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} u_{k,n-k}.$$

Exemple 14.

Calculer la somme de la famille $\left(\dfrac{1}{p^2q^2}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$.

Montrer que la famille $\left(\dfrac{1}{(p+q)^2}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ n'est pas sommable.

Exemple 15.

Démontrer l'identité $\sum_{p=2}^{+\infty}(\zeta(p)-1)=1$.

Exemple 16.

Soit $a \in [0,1[$. En considérant la famille $(a^{pq})_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$, démontrer l'identité

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n}{1-a^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}d(n)a^n,$$

où pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $d(n)$ est le nombre de diviseurs positifs de n.

2 Sommer des nombres complexes.

2.1 Familles sommables de nombres complexes : l'espace $\ell^1(I)$.

Définition 17.

Une famille $(u_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{K}^I$ est dite **sommable** si $\sum_{i\in I}|u_i|<+\infty$.

L'ensemble des familles sommables de $\mathbb{K}^I$ est noté $\ell^1(I)$.

Proposition 18.

Si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille sommable, alors toute sous-famille $(u_i)_{i\in I'}$ (avec $I' \subset I$) l'est aussi.

Proposition 19.

Soit $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ et $(v_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels positifs telles que

$$\forall i \in I \quad |u_i| \leq v_i.$$

Si la famille $(v_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $(u_i)_{i\in I} \in \ell^1(I)$.

Proposition 20.

L'ensemble $\ell^1(I)$ des familles sommables de $\mathbb{K}^I$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$.

2.2 Somme d'une famille sommable de nombres complexes.

Définition 21 (Somme d'une famille sommable : le cas réel).

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille <u>sommable</u> de nombres réels. On pose

$$I_+ = \{i \in I \mid u_i \geq 0\} \quad \text{et} \quad I_- = \{i \in I \mid u_i < 0\}.$$

Les familles $(u_i)_{i\in I_+}$ et $(-u_i)_{i\in I_-}$ sont des familles sommables de réels positifs.

On appelle **somme** de la famille $(u_i)_{i\in I}$ et on note $\sum\limits_{i\in I} u_i$ le nombre réel défini par

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I_+} u_i - \sum_{i\in I_-}(-u_i).$$

Définition 22 (Somme d'une famille sommable : le cas complexe).

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille <u>sommable</u> de nombres complexes.
Les familles $(\mathrm{Re}(u_i))_{i\in I}$ et $(\mathrm{Im}(u_i))_{i\in I}$ sont des familles réelles sommables.

On appelle **somme** de la famille $(u_i)_{i\in I}$ et on note $\sum\limits_{i\in I} u_i$ le nombre complexe défini par

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} \mathrm{Re}(u_i) + i \sum_{i\in I} \mathrm{Im}(u_i).$$

Par définition, la partie réelle de la somme c'est la somme des parties réelles, idem pour les parties imaginaires.

Proposition 23 (Lien avec les séries).

Une famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série $\sum u_n$ est absolument convergente.
Si c'est le cas,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n,$$

le membre de gauche étant la somme de la famille, et celui de droite la somme de la série.

Proposition 24 (Approcher la somme par une somme finie).

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie F finie de I telle que

$$\left| \sum_{i\in I} u_i - \sum_{i\in F} u_i \right| \leq \varepsilon.$$

Théorème 25 (Linéarité de la somme).

$$(u_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} u_i \text{ est une forme linéaire sur } \ell^1(I).$$

Proposition 26 (Croissance de la somme).

Si $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ sont deux familles sommables telles que $\forall i \in I\ u_i \leq v_i$, alors

$$\sum_{i\in I} u_i \leq \sum_{i\in I} v_i.$$

Corollaire 27 (Inégalité triangulaire).

$$\forall (u_i)_{i\in I} \in \ell^1(I) \qquad \left|\sum_{i\in I} u_i\right| \leq \sum_{i\in I} |u_i|.$$

Théorème 28 (Permutation des termes de la somme d'une famille sommable).

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de nombres complexes et σ une bijection de I dans I. On a

$$\sum_{i\in I} u_{\sigma(i)} = \sum_{i\in I} u_i.$$

En particulier, on peut permuter les termes de la somme d'une série absolument convergente.

2.3 Sommation par paquets.

Théorème 29 (de sommation par paquets).

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes
On suppose que I s'écrit comme une réunion disjointe $I = \bigcup_{j\in J} I_j$.

Si u est sommable,

$$\boxed{\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right) = \sum_{i\in I} u_i.}$$

Rappel d'une condition nécessaire et suffisante pour que u soit sommable

$$u \in \ell^1(I) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{c} \text{pour tout } j \in J,\ \displaystyle\sum_{i\in I_j} |u_i| < +\infty \\ \text{la famille } \Big(\sum_{i\in I_j} |u_i|\Big)_{j\in J} \text{ est sommable} \end{array} \right\}.$$

Théorème 30 (de Fubini)**.**

Soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de nombres complexes indexée par un produit cartésien $I\times J$.

Si u est <u>sommable</u>, $$\boxed{\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} u_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} u_{i,j}.}$$

Rappel de deux conditions nécessaires et suffisantes pour que u soit sommable

$$u\in\ell^1(I) \iff \left\{\begin{array}{l} \text{pour tout } j\in J,\ \sum\limits_{i\in I}|u_{i,j}|<+\infty \\ \text{et } \big(\sum\limits_{i\in I}|u_{i,j}|\big)_{j\in J} \text{ est sommable}\end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} \text{pour tout } i\in I,\ \sum\limits_{j\in J}|u_{i,j}|<+\infty \\ \text{et } \big(\sum\limits_{j\in J}|u_{i,j}|\big)_{i\in I} \text{ est sommable}\end{array}\right\}.$$

Exemple 31 (Sommes triangulaires)**.**

Soit $(u_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ une famille sommable de nombres complexes. On a

$$\sum_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} u_{n,p} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} u_{k,n-k}.$$

Méthode (Le calcul d'abord, la justification ensuite)**.**

En pratique, on pourra écrire une sommation par paquets ou un échange de somme "sous réserve de sommabilité", le temps de voir si on aboutit ainsi à un résultat intéressant.

Le cas échéant, il est encore temps de prouver la sommabilité en sommant les modules.
On insiste sur le fait que les calculs de somme sur les modules sont justifiés par la seule positivité !

Exemple 32 (Retour sur un exemple)**.**

Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<1$. Démontrer que la famille $(z^{pq})_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.

Expliquer pourquoi on peut déduire du travail fait à l'exemple 16 que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)z^n,$$

où pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, $d(n)$ est le nombre de diviseurs positifs de n.

Exemple 33.

Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<1$. Démontrer les identités

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^{2n-1}}{1-z^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{1-z^{2n}}, \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} = \frac{z}{1-z}.$$

2.4 Produits.

Proposition 34.

Si $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ sont deux familles sommables, alors la famille $(a_ib_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable et

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_ib_j = \left(\sum_{i\in I} a_i\right)\left(\sum_{j\in J} b_j\right).$$

Ce résultat s'étend à un produit fini de familles sommables.

Théorème 35 (Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes)**.**

Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries de nombres complexes toutes deux absolument convergentes.

La série de terme général

$$\sum_{p+q=n} a_pb_q,$$

est absolument convergente. On l'appelle **produit de Cauchy** de $\sum a_n$ et $\sum b_n$.

On a

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p+q=n} a_pb_q\right).$$

Exemple 36.

Démontrer que pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<1$,

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n.$$

Exemple 37 (Propriété de morphisme de l'exponentielle, et retour sur le début de l'année)**.**

Pour tout $z\in\mathbb{C}$ on <u>définit</u> le nombre $\exp(z)$ par

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!};$$

(on avait prouvé qu'il s'agit bien d'une série absolument convergente).

Démontrer que

$$\forall (z,\widetilde{z})\in\mathbb{C}^2 \quad \exp(z+\widetilde{z}) = \exp(z)\exp(\widetilde{z}).$$

Démontrer que $\exp : x\mapsto \exp(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est sa propre dérivée.

Exercices

On rappelle que, d'après le critère de convergence des séries de Riemann, la fonction $\zeta : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est bien définie sur $]1, +\infty[$.

$\boxed{\textbf{43.1}}$ **[♦♦◇]** Calculer la somme de $\left(\dfrac{1}{(i+j^2)(i+j^2+1)}\right)_{i\geq 0, j\geq 1}$ (on suppose $\zeta(2)$ connu). En déduire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n(n+1)}.$$

$\boxed{\textbf{43.2}}$ **[♦♦◇]** Montrer que $\left(\dfrac{1}{(|p|+|q|)^s}\right)_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}}$ est une famille sommable si et seulement si $s > 2$.

Exprimer alors sa somme à l'aide de la fonction ζ.

$\boxed{\textbf{43.3}}$ **[♦♦◇]** [Mines MP 2019]

Calculer $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)\left(2^n(\zeta(n)-1)-1\right)$.

$\boxed{\textbf{43.4}}$ **[♦♦♦]** [Produit eulérien pour la fonction ζ]

Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. L'objectif de cet exercice est de démontrer que pour tout $x > 1$, on a

$$\boxed{\zeta(x) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^{-x}}\right)},$$

en expliquant en particulier le sens du produit. Cette identité due à Euler permet d'entrevoir l'importance de la fonction ζ en arithmétique.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n le n-ème nombre premier et $u_n(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-p_k^{-x}}$.

1. Justifier pour $x > 1$ l'égalité $u_n(x) = \displaystyle\sum_{(j_1,\dots,j_n)\in\mathbb{N}^n} p_1^{-j_1 x} \cdots p_n^{-j_n x}$.
2. En déduire l'inégalité
$$|\zeta(x) - u_n(x)| \leq \sum_{m \geq p_{n+1}} \frac{1}{m^x}.$$
3. Conclure.

Remarque : la divergence en 1 de ζ témoigne de l'infinité de l'ensemble des nombres premiers : si $\mathcal{P}$ était fini, le produit le serait, et ζ aurait en 1 une limite finie.
