Exercice 1. Exemples d'applications.

1. Pour chacune des applications ci-dessous, dire si elle est injective et si elle est surjective, en justifiant votre réponse.

- $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array} \right.$.

- $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (y,x) \end{array} \right.$.

- $h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x,x) \end{array} \right.$.

- $i : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & (x^2,x^3) \end{array} \right.$.

- $j : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{C}^* \\ (r,\theta) & \mapsto & re^{i\theta} \end{array} \right.$.

- $k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \to & \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\ (n,p) & \mapsto & [\![n,p]\!] \end{array} \right.$.

- $L : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ u & \mapsto & \left(x \mapsto \displaystyle\int_0^x u(t)\mathrm{d}t\right) \end{array} \right.$,

  où on note
  - $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles,
  - $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.

Exercice 2. Application, image directe, image réciproque.

Soit l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z+\frac{1}{z} \end{array} \right. .$$

1. L'application f est-elle injective ?
2. L'application f est-elle surjective ?
3. Montrer l'égalité $f(\mathbb{U}) = [-2,2]$.
4. Démontrer que $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^* \cup \mathbb{U}$.

Exercice 3. Injectivité, surjectivité et restriction.

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.
Pour une partie A de E, on rappelle la définition de la restriction de f à A :

$$f_{|A} : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right. .$$

1. Démontrer que si f est injective, $f_{|A}$ est injective.
2. Démontrer que si $f_{|A}$ est surjective, alors f l'est.
3. Montrer que les réciproques sont fausses en général.

Exercice 4. Bijectivité.

Soient quatre ensembles E, F, G, H et trois applications

$$f \in \mathcal{F}(E,F), \quad g \in \mathcal{F}(F,G), \quad h \in \mathcal{F}(G,H).$$

Démontrer l'équivalence

$$(f,\ g,\ \text{et } h \text{ sont bijectives}) \iff (g \circ f \text{ et } h \circ g \text{ sont bijectives}).$$