Problème. Une preuve de l'irrationalité de π.

Partie A. Préliminaires techniques.

1. Un calcul de limite. Soit un réel x. On souhaite prouver que $\frac{x^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   (a) Prouver qu'il existe un entier naturel non nul n_0 tel que $\frac{|x|}{n_0} < 1$.

   (b) Prouver pour tout n supérieur à n_0 l'inégalité
   $$\left|\frac{x^n}{n!}\right| \leq \left(\prod_{k=1}^{n_0-1} \frac{|x|}{k}\right) \cdot \left(\frac{|x|}{n_0}\right)^{n-n_0+1}.$$

   (c) Conclure.

2. Fonctions polynomiales à coefficients entiers.

   Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note E_n l'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur à n et à coefficients entiers.
   Plus précisément, une fonction P appartient à E_n si
   $$\exists (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

   Soit $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Démontrer que E_n est stable par combinaisons linéaires à scalaires entiers, c'est-à-dire :
   $$\forall (P, Q) \in E_n^2 \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{Z}^2 \quad \lambda P + \mu Q \in E_n.$$

   (b) Soit $P \in E_n$ et $Q : x \mapsto x P_n(x)$. Justifier que $P \in E_{n+1}$ et $Q \in E_{n+1}$.

Partie B. Preuve de Cartwright.

Mary Cartwright a proposé cette preuve, simplifiant celle de Hermite, à un examen d'analyse à l'Université de Cambridge en 1945. Elle figure actuellement dans la feuille d'exercices numéro 4 du cours Analysis I de cette même université.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note
$$I_n(x) = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \cos(xt)\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad J_n(x) = x^{2n+1} I_n(x).$$

3. Soit $n \geq 2$ et $x \in \mathbb{R}$.

   (a) À l'aide d'une double intégration par parties, démontrer que :
   $$x^2 I_n(x) = 2n(2n-1) I_{n-1}(x) - 4n(n-1) I_{n-2}(x).$$

   (b) En déduire que
   $$J_n(x) = 2n(2n-1) J_{n-1}(x) - 4n(n-1) x^2 J_{n-2}(x).$$

4. Démontrer que pour tout entier naturel n, il existe deux polynômes P_n et Q_n de degré inférieur à n et à coefficients entiers tels que
   $$\forall x \in \mathbb{R} \quad J_n(x) = n!\big(P_n(x)\sin(x) + Q_n(x)\cos(x)\big)$$

5. Supposons que π est rationnel. Soient deux entiers a et b tels que $\frac{\pi}{2} = \frac{a}{b}$.

   (a) Démontrer que $\frac{a^{2n+1}}{n!} I_n\left(\frac{\pi}{2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   (b) Montrer que pour tout n, l'intégrale $I_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est non nulle.
   Une interprétation en termes d'aire suffira, on disposera d'un argument rigoureux en fin d'année.

   (c) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b^{2n+1} P_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est un entier.

   (d) Conclure, en examinant $J_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$.