

Exercice 1. Une fonction constante.

Dans cet exercice, on travaille avec la fonction

$$f : x \mapsto \arcsin(2x - 1) - 2 \arcsin(\sqrt{x}).$$

1. Justifier que f est définie sur $[0, 1]$.
2. f est constante sur $[0, 1]$: première preuve.
 - (a) Justifier soigneusement que f est dérivable sur $]0, 1[$.
 - (b) Calculer $f'(x)$ pour $x \in]0, 1[$.
 - (c) Conclure.
3. f est constante sur $[0, 1]$: seconde preuve.
 - (a) Soit $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Calculer $f(\sin^2(t))$.
 - (b) Conclure.

Exercice 2. Une fonction pas constante.

Dans cet exercice, on travaille avec la fonction

$$f : x \mapsto \sin^2(x) \sin(2x).$$

1. Sur quel intervalle peut-on réduire l'étude de la fonction précédente ?
2. Déterminer le minimum et le maximum de f sur l'intervalle précédent.
3. *Plus difficile.* Démontrer pour tout réel x et tout entier $n \geq 1$, on a

$$\left| \prod_{k=0}^n \sin(2^k x) \right| \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n.$$