Corrigé du DM 8

$\boxed{\text{A}}$ Q1 : la récurrence est-elle rédigée de façon impeccable ?

$\boxed{\text{B}}$ Q1 : lors du produit d'inégalités dans l'hérédité, avoir pensé à dire que les membres sont positifs.

$\boxed{\text{C}}$ Q2 : avoir écrit $x_{n+1} - x_n$ comme un produit de nombres strictement positifs.

$\boxed{\text{D}}$ Q2 : avoir écrit $y_{n+1} - y_n$ comme une somme de nombres strictement positifs.

$\boxed{\text{E}}$ Q4 : avoir écrit sur la copie

- « (u_n) croissante »
- « (v_n) est décroissante »
- « $v_n - u_n \to 0$

ainsi que « u et v sont adjacentes » avant de conclure.

Problème. Des suites de rationnels.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$\mathcal{P}_n : \text{« } a_n \geq n+1 \text{ »}.$$

• On a $a_1 \geq 2 = 1+1$ donc $\mathcal{P}_1$ est vraie

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathcal{P}_n$ vraie.

Comme $a_n \geq n+1$, il vient $a_n - 1 \geq n$.
Tous les membres de ces inégalités sont positifs donc, par produit,

$$a_n^2 - a_n = a_n(a_n - 1) \geq n(n+1) = n^2 + n$$

mais comme $n \geq 1$, on a

$$a_{n+1} \geq n^2 + n + 1 \geq 1 + n + 1 = n + 2$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

• Le principe de récurrence nous donne que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n \geq n+1}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$x_{n+1} - x_n = a_{n+1}x_n - x_n = \underbrace{x_n}_{>0} \times \underbrace{(a_{n+1} - 1)}_{>0}$$

En effet, la question 1 nous donne que $a_k > 0$ pour tout $k \geq 1$, et donc

$$x_n = \underbrace{a_1}_{>0} \times \underbrace{a_2}_{>0} \times \ldots \times \underbrace{a_n}_{>0} > 0.$$

De plus, $a_{n+1} \geq n+2 > 1$. On a bien prouvé que $x_{n+1} - x_n > 0$.

$$\boxed{(x_n) \text{ est strictement croissante.}}$$

Notons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$. Alors

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= x_{n+1}A_{n+1} - x_nA_n \\ &= x_{n+1}\left(A_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) - x_nA_n \\ &= x_{n+1}A_n + \frac{x_{n+1}}{a_{n+1}} - x_nA_n \\ &= \underbrace{A_n}_{>0}\underbrace{(x_{n+1} - x_n)}_{>0} + \underbrace{\frac{x_{n+1}}{a_{n+1}}}_{>0} \end{aligned}$$

Ceci montre que $y_{n+1} - y_n > 0$, et on a bien prouvé que

$$\boxed{(y_n) \text{ est strictement croissante.}}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le nombre x_n est un entier naturel comme produit des entiers naturels $a_1, \ldots, a_n$. De plus

$$y_n = x_n \times \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_n}{a_k}$$

mais

$$\frac{x_n}{a_k} = \frac{\prod_{k=1}^{n} a_i}{a_k} = \frac{a_1 \times \ldots \times a_n}{a_k} = a_1 \times \ldots \times a_{k-1} \times a_{k+1} \times \ldots \times a_n = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} a_i \in \mathbb{N}^*$$

Le nombre y_n est donc une somme d'entiers : c'est un entier.

$$\boxed{(x_n) \text{ et } (y_n) \text{ sont des suites d'entiers naturels.}}$$

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Comme $x_{n+1} - x_n = x_n(a_{n+1} - 1)$, il vient,

$$\begin{aligned}
\frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} - \frac{y_n}{x_n} &= \frac{y_{n+1} - y_n}{x_n(a_{n+1} - 1)} - \frac{y_n}{x_n} \\
&= \frac{y_{n+1} - a_{n+1}y_n}{x_n(a_{n+1} - 1)} \\
&= \frac{1}{a_{n+1} - 1} \times \frac{y_{n+1} - a_{n+1}y_n}{x_n} \\
&= \frac{1}{a_{n+1} - 1} \times \left(\frac{y_{n+1}}{x_n} - \frac{a_{n+1}y_n}{x_n}\right) \\
&= \frac{a_{n+1}}{a_{n+1} - 1} \times \left(\frac{y_{n+1}}{a_{n+1}x_n} - \frac{y_n}{x_n}\right) \\
&= \frac{a_{n+1}}{a_{n+1} - 1} \times \left(\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} - \frac{y_n}{x_n}\right) \\
&= \frac{a_{n+1}}{a_{n+1} - 1} \times \frac{1}{a_{n+1}} \\
&= \frac{1}{a_{n+1} - 1}
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{v_n - u_n = \frac{1}{a_{n+1} - 1}.}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= (v_{n+1} - u_{n+1}) + (u_{n+1} - u_n) + (u_n - v_n) \\
&= \frac{1}{a_{n+2} - 1} + \left(\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} - \frac{y_n}{x_n}\right) + \left(-\frac{1}{a_{n+1} - 1}\right) \\
&\boxed{= \frac{1}{a_{n+2} - 1} + \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_{n+1} - 1}}
\end{aligned}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} - \frac{y_n}{x_n} = \frac{1}{a_{n+1}} > 0$$

donc (u_n) est croissante.

De plus,

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{a_{n+2} - 1} + \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_{n+1} - 1} \\
&= \frac{1}{a_{n+2} - 1} - \frac{1}{a_{n+1}(a_{n+1} - 1)}
\end{aligned}$$

Comme $a_{n+1}(a_{n+1} - 1) = a_{n+1}^2 - a_n \leq a_{n+2} - 1$ (par hypothèse de départ sur la suite (a_n)) il vient

$$\frac{1}{a_{n+1}(a_{n+1} - 1)} \geq \frac{1}{a_{n+2} - 1}$$

et ainsi,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{a_{n+2} - 1} - \frac{1}{a_{n+1}(a_{n+1} - 1)} \leq \frac{1}{a_{n+2} - 1} - \frac{1}{a_{n+2} - 1} = 0$$

donc (v_n) est décroissante.

De plus, comme $a_n \longrightarrow +\infty$, il vient

$$v_n - u_n = \frac{1}{a_{n+1} - 1} \longrightarrow 0$$

Nous avons démontré que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Par théorème,

$$\boxed{(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ convergent, vers une limite commune.}}$$

5. (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $px_n - qy_n$ est un entier relatif par produit et différence de deux entiers (nous savons que p, q, x_n et y_n sont des entiers naturels).

Comme (u_n) est croissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{y_n}{x_n} \leq \ell \quad \text{soit} \quad \frac{y_n}{x_n} \leq \frac{p}{q}$$

donc $qy_n \leq px_n$ donc $\boxed{px_n - qy_n \in \mathbb{N}}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Comme (v_n) est décroissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} \geq \frac{p}{q}$$

donc

$$q(y_{n+1} - y_n) \geq p(x_{n+1} - x_n)$$

donc

$$px_n - qy_n \geq px_{n+1} - qy_{n+1}$$

Ainsi, $\boxed{(px_n - qy_n) \text{ est décroissante}}$.

(c) Soit (k_n) une suite d'entiers naturels décroissante.
Posons $E = \{k_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble de ses termes. Cette partie de $\mathbb{N}$ non vide admet un minimum : notons le m. Puisque m est un terme de la suite, il existe un rang n_0 tel que $m = k_{n_0}$. Pour tout $n \geq n_0$, on a $k_n \leq k_{n_0}$ par décroissance de la suite, c'est-à-dire $k_n \leq m$. Or, on a $k_n \geq m$ pour tout entier naturel n. Par antisymétrie,

$$\forall n \geq n_0 \quad k_n = m.$$

$$\boxed{\text{La suite } (k_n) \text{est bien stationnaire.}}$$

(d) La suite (v_n) est une suite décroissante d'entiers naturels d'après les questions (a) et (b). La question (c) amène que (v_n) est stationnaire. Notons n_0 un rang à partir duquel la suite $(v_{n+1} - v_n)$ est nulle : pour tout $n \geq n_0$,

$$\frac{1}{a_{n+2} - 1} + \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_{n+1} - 1} = 0$$

donc pour tout $n \geq n_0$,

$$\frac{1}{a_{n+2} - 1} - \frac{1}{a_{n+1}(a_{n+1} - 1)} = 0$$

donc pour tout $n \geq n_0$,

$$a_{n+2} = a_{n+1}(a_{n+1} - 1) + 1$$

6. Notons $a_n = p^{2^n}$. Alors

$$a_{n+1} - \left(a_n^2 - a_n + 1\right) = p^{2^{n+1}} - \left(p^{2^{n+1}} - p^{2^n} + 1\right) = p^{2^n} - 1 > 0$$

On a donc $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} > a_n^2 - a_n + 1$$

D'après la question 4-(c), la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ $\boxed{\text{converge}}$ vers une limite ℓ (cette suite est notée u dans cette question).

Et comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} > a_n^2 - a_n + 1$, la question 5 nous donne que la limite ℓ ne peut pas être un rationnel.

$$\boxed{\text{La limite de la suite } \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p^{2^k}}\right) \text{ est un irrationnel.}}$$