Problème. Équations de Bernoulli et de Ricatti.

Préliminaires. Résoudre les deux équations différentielles ci-dessous :

1. $y' + \dfrac{x}{1+x^2}y = \dfrac{x}{1+x^2}$, sur $\mathbb{R}$.
2. $y' + \dfrac{1}{x}y = \dfrac{\ln(x)}{x}$, sur $\mathbb{R}_+^*$.

Partie A. Équations de Bernoulli.

On appelle équation de Bernoulli toute équation différentielle non linéaire de la forme

$$y' = a(x)y + b(x)y^p \qquad (B)$$

où p est un réel différent de 1, et a et b deux fonctions continues sur un intervalle I.

On va donner une méthode pour en déterminer les solutions strictement positives.
Soit une fonction $y : I \to \mathbb{R}_+^*$ dérivable sur I et $z = y^{1-p}$.

1. Justifier que z est dérivable sur I et calculer z'.
2. Démontrer que y est solution de (B) si et seulement si z est solution de l'équation linéaire

$$z' = (1-p)a(x)z + (1-p)b(x) \quad (LB).$$

   (LB) *équation Linéaire associée à une équation de Bernoulli.*

3. (a) Écrire l'équation (LB_1) associée à l'équation de Bernoulli

$$y' = -\frac{2x}{1+x^2}y + \frac{2x}{1+x^2}\sqrt{y} \qquad (B_1).$$

   (b) Quelles sont les solutions l'équation (LB_1) sur $\mathbb{R}$?

   (c) Parmi ces solutions, préciser quelles sont celles qui prennent des valeurs strictement positives sur tout $\mathbb{R}$.

   (d) Donner alors les solutions de (B_1) strictement positives sur $\mathbb{R}$.

4. (a) Écrire l'équation (LB_2) associée à l'équation de Bernoulli

$$y' = \frac{1}{x}y - \frac{\ln(x)}{x}y^2 \qquad (B_2).$$

   (b) Quelles sont les solutions l'équation (LB_2) sur $\mathbb{R}_+^*$?

   (c) Parmi ces solutions, préciser quelles sont celles qui prennent des valeurs strictement positives sur tout $\mathbb{R}_+^*$.

   (d) Donner alors les solutions de (B_2) strictement positives sur $\mathbb{R}_+^*$.

Partie B. Équations de Ricatti.

On appelle équation de Ricatti toute équation différentielle non linéaire de la forme

$$y' = a(x) + b(x)y + c(x)y^2, \qquad (R)$$

où a, b, c sont des fonctions continues sur un intervalle I.

1. Supposons que l'on dispose d'une solution particulière de l'équation (R) et notons-la y_0. Posons $z = y - y_0$, où y est une fonction dérivable sur I. Démontrer que y est solution de (R) si et seulement si z est solution d'une équation de Bernoulli de la forme

$$z' = \alpha(x)z(x) + c(x)z^2, \quad (BR)$$

   où la fonction α sera exprimée à l'aide de b, c et y_0.

2. Trouver une solution particulière de l'équation de Ricatti ci-dessous :

$$y' = -x\ln(x) + \left(2\ln(x) + \frac{1}{x}\right)y - \frac{\ln(x)}{x}y^2 \qquad (R_3).$$

   Quelle est l'équation de Bernoulli (BR_3) associée ?
   Écrire un ensemble contenant une infinité de solutions de (R_3).