Corrigé du DM 15

Correction par pair

$\boxed{\text{A}}$ Exo 1. Avoir appliqué le TBA sur $[0, T]$ et avoir écrit les deux hypothèses pour f : continue sur un segment.

$\boxed{\text{B}}$ Exo 1 : Avoir écrit clairement une égalité du type $x = qT + r$ avec $r \in [0, T]$ pour justifier que les bornes sur $[0, T]$ seront des bornes sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{C}}$ Exo 2. Avoir raisonné par l'absurde pour écarter le cas où f n'est pas constante.

$\boxed{\text{D}}$ Dans le cadre du raisonnement par l'absurde précédente, avoir bien appliqué le TVI : il faut mentionner la continuité de f bien sûr ! mais aussi le fait que 0 est une "valeur intermédiaire" (on peut aussi dire que "f change de signe").

Exercice 1.

La fonction f est continue sur le segment $[0, T]$: elle y est bornée et y atteint ses bornes. Notons donc $m = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ et $M = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$. On va prouver que f est minorée par m et majorée par M (ce qui paraît déjà clair par T périodicité).

Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $q = \lfloor \frac{x}{T} \rfloor$ et $r = x - qT$. On a

$$q \leq \frac{x}{T} < q + 1 \quad \text{donc} \quad qT \leq x < qT + 1.$$

Ceci amène $0 \leq r < T$. Par T-périodicité de f,

$$f(x) = f\left(qT + r\right) = f(r) \in [m, M].$$

Ceci démontre bien que m est un minorant de f et M un majorant sur $\mathbb{R}$.
Puisque m et M sont atteints sur $[0, T]$ (et donc sur les segments $[pT, (P+1)T]$ avec $p \in \mathbb{Z}$), ce sont respectivement le minimum et le maximum de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2.

Analyse. Soit une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x)^2 = 1$.
Pour un réel x, l'égalité $f(x)^2 = 1$ donne que $f(x) = \pm 1$.
Bien sûr, le fait que $f(x)$ vaut 1 ou -1 dépend *a priori* de x.

Supposons qu'il existe deux réels x et x' tels que $f(x) \neq f(x')$. Alors f prend à la fois la valeur 1 et la valeur -1. On peut dire ceci de plusieurs façon : dire que 0 est entre $f(x)$ et $f(x')$, ou encore dire que f change de signe. Puisque de surcroît f est continue sur $\mathbb{R}$, le TVI dit qu'elle s'annule entre x et x', ce qui est exclu (puisque f ne peut prendre que les valeurs -1 et 1). Ceci démontre que f est constante, égale à 1 ou à -1.

Synthèse. Les fonctions constantes égales à 1 ou -1 sont continues et leur carré vaut 1.

Conclusion. Le problème a deux solutions : la fonction constante égale à 1 et la fonction constante égale à -1.

Petit problème.

On cherche les fonctions f et g solutions continues sur $\mathbb{R}$ de :

$$(E) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad f(x+y)+f(x-y) = 2\,(f(x)+f(y))$$
$$(F) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad g(x+y)g(x-y) = (g(x)g(y))^2\,.$$

1. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue solution de (E).

   (a) $x=y=0$ donne $f(0)+f(0) = 2(f(0)+f(0))$, d'où $\boxed{f(0)=0}$.
   Avec $x=0$ on obtient, pour tout $y \in \mathbb{R}$:
   $$f(y)+f(-y) = 2(f(0)+f(y)) = 2f(y),$$
   soit $f(-y)=f(y)$. La fonction $\boxed{f \text{ est paire}}$.

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On montre par récurrence à 2 termes sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété
   $$\mathcal{P}(n) : « \; f(nx) = n^2 f(x) \; ».$$
   • Pour $n=0$: $f(0x) = f(0) = 0 = 0^2 f(x)$; d'où $\mathcal{P}(0)$.
   • Pour $n=1$: $f(1x) = f(x) = 1^2 f(x)$; d'où $\mathcal{P}(1)$.
   • Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n-1)$ et $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.
   Par (E) : $f(nx+x)+f(nx-x) = 2(f(nx)+f(x))$.
   D'où $f((n+1)x) = 2f(nx) - f((n-1)x) + 2f(x)$.
   Par $\mathcal{P}(n)$: $f(nx) = n^2 f(x)$. Par $\mathcal{P}(n-1)$: $f((n-1)x) = (n-1)^2 f(x)$.
   Donc $f((n+1)x) = 2n^2 f(x) - (n-1)^2 f(x) + 2f(x) = (n+1)^2 f(x)$.
   Cela prouve $\mathcal{P}(n+1)$ et termine cette récurrence.
   $$\boxed{\forall (x,n) \in \mathbb{R}\times\mathbb{N} \quad f(nx) = n^2 f(x)}$$

   (c) Soit $(k,x) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{R}$. Puisque f est paire : $f(kx) = f(\pm|k|\,x) = f(|k|\,x)$.
   On applique la question précédente à $|k| \in \mathbb{N}$: $f(kx) = |k|^2 f(x) = k^2 f(x)$.
   $$\boxed{\forall (k,x) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{R} \quad f(kx) = k^2 f(x)}$$

   (d) Soit $r \in \mathbb{Q}$. Notons $r = \frac{a}{b}$ avec $(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$.
   On a donc $f(a) = f(br)$. D'après la question précédente $f(br) = b^2 f(r)$ et $f(a) = f(a\times 1) = a^2 f(1)$. Il reste donc $a^2 f(1) = b^2 f(r)$, d'où on déduit $f(r) = a^2 f(1)/b^2 = r^2 f(1)$.
   $$\boxed{\forall r \in \mathbb{Q} \quad f(r) = r^2 f(1)}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on peut considérer une suite (r_n) de rationnels telle que $r_n \to x$. Par 1-d on sait que $\forall n \in \mathbb{N}\; f(r_n) = r_n^2 f(1)$.
De la continuité de f en x on déduit que $f(r_n) \to f(x)$.
Un passage à la limite montre donc que $f(x) = x^2 f(1)$.
En posant $a = f(1)$, on obtient
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = ax^2}.$$

3. (a) On constate que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:
   $$e^{a(x+y)^2}e^{a(x-y)^2} = e^{a(x^2+2xy+y^2+x^2-2xy+y^2)} = e^{2ax^2}e^{2ay^2} = \left(e^{ax^2}e^{ay^2}\right)^2.$$
   $$\boxed{\text{Pour tout } a \in \mathbb{R},\; x \mapsto e^{ax^2} \text{ est solution de } (F).}$$

   (b) Il est clair que $g = 0 \implies g(0) = 0$.
   Réciproquement, supposons $g(0)=0$. En choisissant $y=0$, (F) conduit à $g(x)^2 = (g(x)g(0))^2 = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'où $g=0$.
   $$\boxed{g = 0 \iff g(0) = 0}$$

   (c) On suppose que g est une solution de (F), continue et non identiquement nulle.

   (i) Puisque $g \neq 0$, on a $g(0) \neq 0$ (question précédente). Avec $x=y=0$, il découle de (F) que $g(0)^2 = g(0)^4$, ce qui donne $g(0)=0$ ou $g(0)^2 = 1$. La possibilité $g(0)=0$ étant écartée, il reste
   $$\boxed{g(0) = \pm 1}.$$

(ii) Soit $x \in \mathbb{R}$. En prenant "$x = y$" on obtient $g(2x)g(0) = g(x)^4$.
On a donc aussi $g(t)g(0) = g(t/2)^4$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (prendre $x = t/2$).
Raisonnons par l'absurde en supposant que g s'annule en $a \in \mathbb{R}$.
La relation précédente ($t = a$) montre alors que $g(a/2) = 0$, puis ($t = a/2$) que $g(a/4) = 0$ et par une récurrence rapide que $g(a/2^n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On passe à la limite pour $n \to +\infty$: $g(0) = 0$; (la continuité de g en 0 justifie que $\lim_{n\to+\infty} g(a/2^n) = g(0)$).
D'après la question (b) cela contredit $g \neq 0$.

$$\boxed{g \text{ ne s'annule pas.}}$$

(iii) D'abord, du fait que g ne s'annule pas, f est bien définie sur $\mathbb{R}$. Ensuite, par composition, f est continue sur $\mathbb{R}$.
Enfin pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} f(x+y) + f(x-y) &= \ln|g(x+y)| + \ln|g(x-y)| \\ &= \ln|g(x+y)g(x-y)| \\ &= \ln\left|(g(x)g(y))^2\right| \\ &= 2\ln|g(x)| + 2\ln|g(y)| \\ &= 2f(x) + 2f(y). \end{aligned}$$

$$\boxed{f \text{ est une solution continue de } (E).}$$

(d) — On constate que la fonction nulle est solution.
— Soit $g \neq 0$ une solution continue de (F). D'après la question précédente et la question 2, on sait que g ne s'annule pas et qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\ln|g(x)| = ax^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui laisse $|g(x)| = e^{ax^2}$. Puisque g est continue et ne s'annule pas, elle garde un signe constant (conséquence du théorème des valeurs intermédiaires). Si $g > 0$ alors $g(x) = e^{ax^2}$ et si $g < 0$ alors $g(x) = -e^{ax^2}$ (pour tout $x \in \mathbb{R}$, bien sûr).
— Réciproquement, $x \mapsto e^{ax^2}$ est solution continue de (F) pour tout $a \in \mathbb{R}$ (question 3-(a)). On vérifie aisément qu'il en est de même pour $x \mapsto -e^{ax^2}$.
— Conclusion :

$$\boxed{\text{Solutions continues de } (F) \ : \ x \mapsto \lambda e^{ax^2} \text{ où } (\lambda, a) \in \{-1; 0; 1\} \times \mathbb{R}}.$$