**Exercice.** Un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

On définit sur $E$ l'application $f : P \mapsto P(2X) - P(X)$.

1. Démontrer que $f$ est un endomorphisme de $E$.
2. Donner une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ puis en donner une base.
3. Que vaut $\dim \mathrm{Ker}(f)$ ? Donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
4. Le noyau et l'image de $f$ sont-ils supplémentaires ?

---

**Problème.** Équations du second degré dans $\mathscr{L}(E)$.

Dans ce problème, $E$ désignera un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, dont le neutre est noté 0.

On note $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de $E$. On rappelle que $\mathscr{L}(E)$ a été muni d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec une addition $+$ et une loi de composition externe $\cdot$. On rappelle aussi que $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$ est un anneau. En particulier, l'écriture $f^2$ désigne l'endomorphisme $f \circ f$. Parmi les endomorphismes de $E$, distinguons l'identité, notée id, et l'endomorphisme nul noté 0.

Le groupe des inversibles de $\mathscr{L}(E)$ est noté $\mathrm{GL}(E)$ : c'est l'ensemble des automorphismes de $E$, c'est-à-dire celui des endomorphismes bijectifs.

Nous rappelons que si $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$ et $f \in \mathscr{L}(E)$, on dit que $F$ est stable par $f$ si

$$\forall x \in F \quad f(x) \in F.$$

Nous allons considérer dans ce problème des endomorphismes $f$ dans $\mathscr{L}(E)$ annulés par un polynôme

$$P = X^2 + \alpha X + \beta,$$

où $\alpha$ et $\beta$ sont des scalaires de $\mathbb{K}$.
Plus précisément, on supposera que

$$f^2 + \alpha f + \beta \mathrm{id} = 0.$$

**Partie 1.** Le cas où $P$ est scindé à racines simples : lemme des noyaux.

Dans cette partie, nous supposons que $P$ possède deux racines distinctes $\lambda$ et $\mu$ dans $\mathbb{K}$ : $P = (X - \lambda)(X - \mu)$. On note

$$E_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}) \quad \text{et} \quad E_\mu = \mathrm{Ker}(f - \mu \mathrm{id}).$$

0. Soit $x \in E_\lambda$. Que vaut $f(x)$ ?
1. Vérifier que
$$(f - \mu \mathrm{id}) \circ (f - \lambda \mathrm{id}) = 0 = (f - \lambda \mathrm{id}) \circ (f - \mu \mathrm{id}).$$
2. Vérifier que
$$\mathrm{Im}(f - \lambda \mathrm{id}) \subset \mathrm{Ker}(f - \mu \mathrm{id}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(f - \mu \mathrm{id}) \subset \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}).$$
3. <u>Lemme des noyaux</u> (1) : une preuve en dimension finie.
Dans cette question, on suppose que $E$ est de dimension finie égale à $n$.
   (a) En utilisant le théorème du rang, démontrer que
   $$n \leq \dim E_\lambda + \dim E_\mu.$$
   (b) Démontrer que $E_\lambda$ et $E_\mu$ sont en somme directe, et en déduire
   $$n \geq \dim E_\lambda + \dim E_\mu.$$
   (c) Justifier que
   $$E = E_\lambda \oplus E_\mu$$
   (d) *Le temps du dessin*
   On considère $E = \mathbb{R}^3$, $\lambda = 2$, $\mu = 1$, $\dim E_\lambda = 2$, $\dim E_\mu = 1$.
   Faire un dessin représentant $E_\lambda$ et $E_\mu$.
   Représenter aussi un un vecteur $x$ n'appartenant ni à $E_\lambda$ ni à $E_\mu$.
   Enfin, représenter $f(x)$.
   Un peu de couleur sera appréciée.

4. Lemme des noyaux (2) : une preuve en dimension quelconque.
   On ne fait plus d'hypothèse de dimension finie pour $E$.
   Démontrer à nouveau que $E = E_\lambda \oplus E_\mu$.

**Partie 2.** Cas où $P = X^2 - \lambda X$.

Dans cette partie $\lambda$ est un réel non nul et $f$ un endomorphisme de $E$ tel que

$$f^2 = \lambda f.$$

5. Comment appelle-t-on l'endomorphisme $f$ dans le cas particulier où $\lambda = 1$ ?
6. Que dire de $f$ si on suppose qu'il s'agit d'un automorphisme de $E$ ?
7. Justifier que
$$E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}).$$
8. Montrer qu'il existe une homothétie $h$ et un projecteur $p$ tels que $f = h \circ p$.
9. Un exemple.
   (a) Résoudre l'équation différentielle $y'' - \lambda y' = 0$.
   On précisera une base et la dimension de cet espace vectoriel.
   (b) Donner un exemple d'espace vectoriel $E$ et un exemple d'endomorphisme de $E$ tel que $f^2 = \lambda f$ et qui ne soit pas une homothétie.

**Partie 3.** Cas où $P = X^2 - \gamma$.

Dans cette partie $\gamma$ est un réel non nul et $f$ un endomorphisme de $E$ tel que

$$f^2 = \gamma \mathrm{id}.$$

10. Comment appelle-t-on l'endomorphisme $f$ dans le cas particulier où $\gamma = 1$ ?
11. Montrer que $f$ est un automorphisme de $E$ et préciser $f^{-1}$.
12. Supposons que $\gamma$ possède une racine carrée $\rho$ dans $\mathbb{K}$. Justifier que
$$E = \mathrm{Ker}(f - \rho \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(f + \rho \mathrm{id}).$$
    Montrer qu'il existe une homothétie $h$ et une symétrie $s$ tels que $f = h \circ s$.
13. Un exemple. Dans cette question, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
    (a) Résoudre l'équation différentielle $y'' - \gamma y = 0$.
    *On discutera suivant le signe de $\gamma$, on précisera une base et la dimension.*
    (b) Donner un exemple d'espace vectoriel $E$ et un exemple d'endomorphisme $f$ tel que $f^2 = \gamma \mathrm{id}$ et tel que $f$ ne soit pas une homothétie.

**Partie 4.** Cas où $P = X^2 + 1$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et en dimension finie.

Dans cette partie du problème, on suppose que $E$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et non réduit à $\{0\}$.

On suppose qu'il existe un endomorphisme $f$ dans $\mathscr{L}(E)$ tel que

$$f^2 = -\mathrm{id}.$$

*Pour faire le lien avec la partie 3, on fait remarquer que ce problème correspond au cas où $\alpha = -1$, mais ici, $\alpha$ n'a pas de racine carrée dans $\mathbb{R}$.*

14. Soit $u \in E$ un vecteur non nul. Montrer que $(u, f(u))$ est libre.
15. On note $V_u = \mathrm{Vect}(u, f(u))$.
    Montrer que $V_u$ est le plus petit sous-espace vectoriel de $E$ contenant $u$ et stable par $f$.
16. Soit $a \in V_u$ un vecteur non nul. Montrer que $V_u = V_a$.
17. Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ stable par $f$ et ne contenant pas $u$.
    Montrer que $V_u$ et $F$ sont en somme directe et que $V_u \oplus F$ est stable par $f$.
18. En déduire qu'il existe des vecteurs $u_1, \ldots, u_p$ tels que
$$(u_1, f(u_1), u_2, f(u_2), \cdots, u_p, f(u_p))$$
    soit une base de $E$. En déduire que la dimension de $E$ est paire.
19. Soit $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $g^2 = -\mathrm{id}$.
    Montrer qu'il existe un automorphisme $\theta \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $g = \theta^{-1} \circ f \circ \theta$.
20. Réciproquement, on suppose que $E$ est de dimension paire.
    Montrer qu'il existe un endomorphisme $f$ dans $\mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 = -\mathrm{id}$.