Problème 1. Fonction $x \mapsto \dfrac{\arcsin x}{x^2}$ et suite récurrente associée.

1. On considère la fonction g définie sur $[0,1[$ par

$$\forall x \in [0,1[\quad g(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - 2\arcsin x.$$

   (a) Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$ et calculer $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$.

   (b) Calculer $g'(x)$ pour $x \in [0,1[$ et donner le tableau de variations de g.

   (c) En déduire qu'il existe un unique $\alpha \in]0,1[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
   Justifier que $\dfrac{\sqrt{2}}{2} < \alpha < 1$.

   (d) Donner, suivant les valeurs de x, le signe de $g(x)$.

2. Soit f la fonction à valeurs réelles définie par

$$f(x) = \frac{\arcsin x}{x^2}.$$

   (a) Déterminer le domaine de définition de f.
   Étudier la parité et la continuité de f. Que valent $f(1)$ et $f(-1)$?

   (b) Justifier que $\dfrac{\arcsin x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$.
   Déterminer les limites à gauche et à droite de f en 0.
   Peut-on prolonger f par continuité en 0 ?

   (c) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,0[\cup]0,1[$.
   Pour $x \in]0,1[$, exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$.

   Justifier que la fonction f n'est pas dérivable en 1 et en -1.

   (d) Dresser le tableau de variations de f.

3. On rappelle que α est l'unique réel de $\left]\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
   On pose $\beta = \arcsin \alpha$.

   (a) Montrer que $\dfrac{\pi}{4} < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ et $f(\alpha) = \dfrac{1}{\sin 2\beta}$.

   (b) Montrer que $\tan\beta = 2\beta$ puis que $\beta = \arctan 2\beta$.

4. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad u_{n+1} = \arctan(2u_n). \end{cases}$$

   On définit la fonction h sur $[\beta, +\infty[$ par $h : x \mapsto \arctan(2x)$.
   Enfin, on pose

$$k = \frac{2}{1+4\beta^2}.$$

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \geq \beta$.

   (b) Montrer que h est k-lipschitzienne sur $[\beta, +\infty[$.

   (c) Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad |u_{n+1} - \beta| \leq k|u_n - \beta|.$$

   (d) On admet qu'une première approximation donne $\beta > 1$.
   Déduire de ce qui précède que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |u_n - \beta| \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n.$$

   Donner un rang n_0 à partir duquel on est certain d'avoir les mille premières décimales de β.

5. On donne les valeurs approchées à 10^{-1} près : $\sin\beta \approx 0,9$ et $\dfrac{1}{\sin(2\beta)} \approx 1,4$. Tracer dans un repère orthonormé le graphe de f.

Exercice 1. Une preuve du théorème de Darboux.

Soient deux réels a et b tels que $a < b$ et une fonction f dérivable sur $[a, b]$.

On considère un réel y entre $f'(a)$ et $f'(b)$. On souhaite prouver que y possède un antécédent par f' :

$$\exists c \in [a, b] \quad y = f'(c).$$

On aura alors établi le *théorème de Darboux*, qui énonce qu'une fonction dérivée possède la propriété des valeurs intermédiaires.

Considérons les fonctions

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc}]a, b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array} \right. \qquad \psi : \left\{ \begin{array}{ccc} [a, b[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{f(b)-f(x)}{b-x} \end{array} \right. .$$

1. Pourquoi le résultat est-il facile à établir si on fait l'hypothèse (plus forte) que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$?
2. Justifier que φ est prolongeable par continuité en a et que et ψ est prolongeable par continuité en b.
   On continue de noter φ et ψ leurs prolongements.
3. On suppose dans cette question que y est entre $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$.
   (a) Justifier que y possède un antécédent par φ dans $[a, b]$.
   Soit γ un tel nombre.
   (b) Conclure dans le cas $\gamma = a$.
   (c) Conclure dans le cas $\gamma > a$.
4. On suppose dans cette question que y n'est pas entre $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$.
   Prouver qu'alors y est entre $\psi(a)$ et $\psi(b)$ et conclure (sans tout détailler).
5. Application : trouver toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \lfloor f(x) \rfloor.$$

Exercice 2.

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

On admet que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on a

$$xf^{(n+1)}(x) + (n+1)f^{(n)}(x) = \sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

   On pourra appliquer la formule de Leibniz à $x \mapsto xf(x)$.
2. Calculer $\left|f^{(n)}(0)\right|$ en fonction de n.
3. Montrer par récurrence sur n que $f^{(n)}(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $\pm\infty$.
   L'entier n est désormais fixé pour la suite.
4. Montrer que $f^{(n)}$ prend des valeurs strictement positives et des valeurs strictement négatives.
5. Déduire de 3 et 4 que $f^{(n)}$ est bornée et atteint ses bornes.
6. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \left|f^{(n)}(x)\right| \leq \frac{1}{n+1}$.
7. Il vous reste du temps ? Démontrer que f est bien $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.