12 Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

1 Ensemble des solutions d'une ED linéaire d'ordre 2. **2**

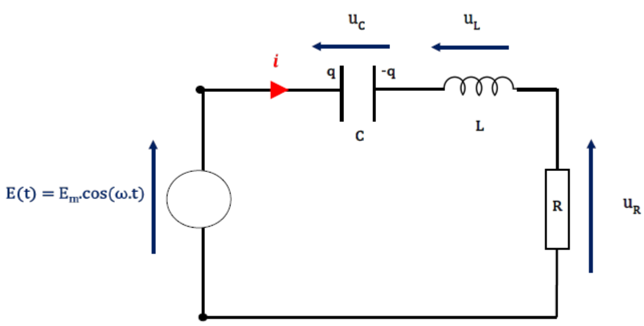
2 Résolution de l'équation homogène. **3**

3 Équation générale : obtenir une solution particulière. **6**
3.1 Trouver une solution à vue. 6
3.2 Principe de superposition. 6
3.3 Obtenir une solution pour des seconds membres particuliers. 7

4 Synthèse. **8**

Exercices **9**

Introduction



Oscillateur harmonique amorti, soumis à une excitation périodique.

On considère, branchés en série, une résistance R, un condensateur de capacité C, une bobine d'inductance L, et un générateur de tension sinusoïdale. Soit q la charge aux bornes du condensateur ; on a $i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$. Exprimons toutes les tensions en fonction de q : $u_R = Ri = R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$, $u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}$ et $u_C = \frac{q}{C}$. En appliquant la loi des mailles, on obtient $\frac{q}{C} + R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} = E_m\cos(\omega t)$, que l'on récrit

$$\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + 2\lambda\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 q = \frac{E_m}{L}\cos(\omega t) \qquad (\varphi)$$

où $\lambda = \frac{R}{2L}$ et $\omega_0 = (\sqrt{LC})^{-1}$. Le paramètre λ, on le verra, est un facteur d'*amortissement*, homogène à l'inverse d'un temps. Le paramètre ω_0 est appelé *pulsation propre* de l'oscillateur dans le cas d'un amortissement négligeable ($\lambda = 0$) et en l'absence d'excitation ($U_0 = 0$), q sera sinusoïdal de pulsation ω_0. L'équation (φ) modélise aussi bien des oscillateurs mécaniques, et elle sera étudiée et utilisée en physique et en SII.

Dans ce cours, on s'intéresse aux équations différentielles linéaires d'ordre 2 de la forme

$$y'' + ay' + by = f(x) \qquad (E),$$

où $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ (les coefficients sont *constants*, ce ne sont pas des fonctions) et où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ appartient à une classe de fonctions utile pour les applications.

1 Ensemble des solutions d'une ED linéaire d'ordre 2.

Définition 1.

Soient $a, b \in \mathbb{K}$ deux constantes et $f : I \to \mathbb{K}$. On considère l'équation différentielle

$$y'' + ay' + by = f(x) \qquad (E)$$

On appelle **solution** de (E) sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$ toute fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$, deux fois dérivable, et telle que $\forall x \in \mathbb{R}\ y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x)$.

On appelle **équation homogène** associée à (E) l'équation différentielle

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad (E_0).$$

Ci-dessous, S et S_0 désignent respectivement les ensembles de solutions de (E) et (E_0).

Proposition 2 (Structure de S_0)**.**

S_0 contient la fonction nulle et est stable par combinaisons linéaires.

Preuve. Soient y_1 et y_2 deux solutions de (E_0) et λ et μ deux scalaires de $\mathbb{K}$. Par définition, y_1 et y_2 sont donc deux fois dérivables et il en va de même de $\lambda y_1 + \mu y_2$. On a donc

$$\begin{aligned}
&(\lambda y_1 + \mu y_2)'' + a(\lambda y_1 + \mu y_2)' + b(\lambda y_1 + \mu y_2) \\
&\quad = (\lambda y_1'' + \mu y_2'') + a(\lambda y_1' + \mu y_2') + b(\lambda y_1 + \mu y_2) \\
&\quad = \lambda\underbrace{(y_1'' + ay_1' + by_1)}_{=0 \text{ car } y_1 \in S_0} \ + \ \mu\underbrace{(y_2'' + ay_2' + by_2)}_{=0 \text{ car } y_2 \in S_0} \\
&\quad = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

On a donc montré que $(\lambda y_1 + \mu y_2) \in S_0$. $\square$

Proposition 3 (Lien entre S et S_0)**.**

Si S est non vide, alors, en considérant $z_p \in S$ (une « solution particulière » de l'équation), on a

$$S = \{z_p + y, \quad y \in S_0\}.$$

Preuve. Soit z une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
z \in S \quad &\iff \quad z'' + az' + bz = f \\
&\iff \quad z'' + az' + bz = z_p'' + az_p' + bz_p \\
&\iff \quad (z - z_p)'' + a(z - z_p)' + b(z - z_p) = 0 \\
&\iff \quad z - z_p \in S_0 \\
&\iff \quad \exists y \in S_0 \ \ z - z_p = y. \qquad \square
\end{aligned}$$

Remarque. Tout ce qui précède reste valable, sans changer la preuve, lorsque a et b sont des fonctions.

Pour connaître *toutes* les solutions de (E), il suffit donc de

- connaître *toutes* les solutions de (E_0) $\longrightarrow$ partie 2 du cours
- connaître *une* solution de (E) $\longrightarrow$ partie 3 (dans des cas particuliers)

2 Résolution de l'équation homogène.

Dans ce paragraphe, on souhaite déterminer S_0, ensemble des solutions de l'équation homogène

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad (E_0)$$

Commençons par chercher des solutions à l'équation, de la forme $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & e^{rx} \end{array} \right.$, où $r \in \mathbb{C}$.

La fonction u est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$: $u' = ru$ et $u'' = r^2 u$. On a donc

$$u'' + au' + bu = (r^2 + ar + b)u \qquad \text{et donc} \qquad u \in S_0 \iff r^2 + ar + b = 0.$$

Ceci motive la définition suivante.

Définition 4.

On appelle **équation caractéristique** associée à (E_0) l'équation

$$x^2 + ax + b = 0,$$

où a et b sont les coefficients constants de (E_0).

Remarque. On rappelle qu'une telle équation a deux racines r_1 et r_2, avec $r_1 + r_2 = -a$.
On a $r_1 = r_2$ (racine « double ») si et seulement si elles valent toutes les deux $-a/2$.

Lemme 5 (Des solutions de E_0)**.**

Soit l'équation caractéristique $x^2 + ax + b = 0$ associée à (E_0) et r une racine de cette équation.

- la fonction $x \mapsto e^{rx}$ est solution de (E_0).
- Si r est une racine double, $x \mapsto xe^{rx}$ est solution de (E_0).

Théorème 6 (Solutions complexes de l'équation homogène)**.**

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et (E_0) l'équation $y'' + ay' + by = 0$.
Soit Δ le discriminant de l'équation caractéristique $x^2 + ax + b = 0$.
On note $S_0^{\mathbb{C}}$ l'ensemble des solutions de (E_0) à valeurs complexes.

- Si $\Delta \neq 0$, l'équation caractéristique a deux racines distinctes dans $\mathbb{C}$, disons r_1 et r_2, et

$$S_0^{\mathbb{C}} = \left\{ x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique a une racine double dans $\mathbb{C}$, disons r, et

$$S_0^{\mathbb{C}} = \left\{ x \mapsto \lambda x e^{rx} + \mu e^{rx},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

Preuve. Pour $r_1, r_2, r \in \mathbb{C}$, on note

$$\Gamma^{\mathbb{C}}(r_1, r_2) = \left\{x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\right\} \qquad \text{et} \qquad \widetilde{\Gamma}^{\mathbb{C}}(r) = \left\{x \mapsto (\lambda x + \mu) e^{rx},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\right\}.$$

Partie 1. "Les inclusions $\supset$".
- Si $\Delta \neq 0$, alors, l'équation caractéristique a deux racines distinctes que l'on note r_1 et r_2. D'après le Lemme 5, les fonctions $y_1 : x \mapsto e^{r_1 x}$ et $y_2 : x \mapsto e^{r_2 x}$ sont solutions de (E_0). D'après la proposition **??** toutes les combinaisons linéaires de la forme $\lambda y_1 + \mu y_2$ sont encore des solutions de (E_0). Ceci montre que $S_0^{\mathbb{C}} \supset \Gamma^{\mathbb{C}}(r_1, r_2)$.
- Si $\Delta = 0$. Alors, l'équation caractéristique a une racine double que l'on note r. D'après le Lemme 5, les fonctions $y_1 : x \mapsto xe^{rx}$ et $y_2 : x \mapsto e^{rx}$ sont solutions de (E_0). D'après la proposition **??** toutes les combinaisons linéaires de la forme $(\lambda y_1 + \mu y_2) : x \mapsto \lambda x e^{rx} + \mu e^{rx}$ sont encore des solutions de (E_0). Ceci montre que $S_0^{\mathbb{C}} \supset \widetilde{\Gamma}^{\mathbb{C}}(r)$.

Partie 2. "Les inclusions $\subset$".
Soit $y \in S_0^{\mathbb{C}}$ une solution de (E_0) à coefficients complexes. Soit r une solution complexe de l'équation caractéristique ; on définit la fonction $z : x \mapsto e^{-rx} y(x)$. La fonction z est deux fois dérivable par produit. Notons $u : x \mapsto e^{rx}$. On a

$$\begin{aligned} y &= uz, \\ y' &= u'z + uz', \\ y'' &= u''z + u'z' + u'z' + uz''. \end{aligned}$$

Dans ce qui suit, les équivalences sont inutiles, et seules les implications directes nous servent. On a tout de même conservé les équivalences car si on cherchait à écrire une preuve plus courte, on pourrait les utiliser pour se dispenser de la partie 1.

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (E_0) \quad &\iff \quad y'' + ay' + by = 0 \\ &\iff \quad (u''z + u'z' + u'z' + uz'') + a(u'z + uz') + buz = 0 \\ &\iff \quad uz'' + (2\underbrace{u'}_{=ru} + au)z' + (\underbrace{u'' + au' + bu}_{=0 \text{ car } u \in S_0^{\mathbb{C}}})z = 0 \\ &\iff \quad uz'' + u(2r + a)z' = 0 \end{aligned}$$

Rappelons que pour tout x réel, $u(x) = e^{rx} \neq 0$ (ce nombre complexe étant de module non nul...) On peut alors diviser par u pour obtenir

$$y \text{ est solution de } (E_0) \quad \iff \quad z' \text{ est solution de } \ Y' + (2r + a)Y \overset{(*)}{=} 0.$$

On a supposé y est solution de (E_0). En résolvant $(*)$, on en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad z'(x) = \lambda e^{-(2r+a)x}.$$

- Si $\Delta = 0$, alors r est racine double et $2r + a = 0$. On a donc que z' est constante égale à λ donc il existe μ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad z(x) = \lambda x + \mu,$$

d'où

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad y(x) = e^{rx} z(x) = (\lambda x + \mu) e^{rx}.$$

On a bien montré ici que $y \in \widetilde{\Gamma}^{\mathbb{C}}(r)$.
- Si $\Delta \neq 0$, alors, l'équation caractéristique a deux racines distinctes r_1 et r_2. Mettons que $r = r_2$. Alors, $r_1 = -r - a$, et comme $r_1 \neq r_2$, on a $2r + a \neq 0$. Connaissant z', on connait z : il existe une constante μ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad z(x) = -\frac{\lambda}{2r + a} e^{-(2r+a)x} + \mu,$$

d'où

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad y(x) = e^{rx} z(x) = \underbrace{-\frac{\lambda}{2r + a}}_{:=\tilde{\lambda}} e^{(-\cancel{2}r - a + \cancel{r})x} + \mu e^{rx} = \tilde{\lambda} e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}.$$

On a bien montré ici que $y \in \Gamma^{\mathbb{C}}(r_1, r_2)$.

$\square$

Théorème 7 (Solutions réelles de l'équation homogène)**.**

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et (E_0) l'équation $y'' + ay' + by = 0$. Soit Δ le discriminant de l'équation caractéristique $x^2 + ax + b = 0$. Notons $S_0^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des solutions de (E_0) à valeurs réelles.

- Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique a deux racines *réelles* distinctes, disons r_1 et r_2 et
$$S_0^{\mathbb{R}} = \left\{t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$
- Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique a une racine double dans $\mathbb{R}$, disons r et
$$S_0^{\mathbb{R}} = \left\{t \mapsto \lambda t e^{rt} + \mu e^{rt},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$
- Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique a deux racines *complexes conjuguées.*
On les note $r_1 = \gamma + i\omega$ et $r_2 = \gamma - i\omega$, avec $(\gamma,\omega) \in \mathbb{R}^2$. On a alors
$$S_0^{\mathbb{R}} = \left\{t \mapsto e^{\gamma t}\left(\alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)\right),\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$
On peut aussi écrire $S_0^{\mathbb{R}} = \left\{t \mapsto Ae^{\gamma t}\cos(\omega t + \varphi),\ (A,\varphi) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

Remarque. Une idée clé : toute solution à valeurs réelles de (E_0) est a fortiori une solution à valeurs complexes de cette même équation. Ceci peut s'énoncer à l'aide de l'inclusion :
$$S_0^{\mathbb{R}} \subset S_0^{\mathbb{C}}.$$

Preuve. du cas $\Delta < 0$. L'équation caractéristique a deux racines complexes conjuguées $r_1 = \gamma + i\omega$ et $r_2 = \gamma - i\omega$, avec $(\gamma,\omega) \in \mathbb{R}^2$. Soit $y \in S_0^{\mathbb{R}}$. A fortiori, $y \in S_0^{\mathbb{C}}$. D'après le théorème 6, il existe donc deux nombres **complexes** λ et μ tels que
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \qquad (*)$$
On laisse ici les calculs au lecteur : puisque y est à valeurs réelles on a en particulier $\overline{y(0)} = y(0)$ et $\overline{y'(0)} = y'(0)$. En se rappelant que $r_2 = \overline{r_1}$, ceci conduit au système $\begin{cases} (\lambda - \overline{\mu}) + (\mu - \overline{\lambda}) & = & 0 & (L_1) \\ r_1(\lambda - \overline{\mu}) + \overline{r_1}(\mu - \overline{\lambda}) & = & 0 & (L_2) \end{cases}$

L'opération $L_2 \leftarrow L_2 - r_1 L_1$ amène que $\boxed{\mu = \overline{\lambda}}$. On a donc, en revenant à $(*)$,
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y(t) = e^{\gamma t}\left(\overline{\lambda}e^{i\omega t} + \overline{\lambda}e^{-i\omega t}\right) = e^{\gamma t} \cdot 2\mathrm{Re}\left(\lambda e^{i\omega t}\right).$$
Écrivons λ sous forme géométrique : $\lambda = re^{i\varphi}$. On a donc
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y(t) = 2e^{\gamma t}\mathrm{Re}\left(e^{i\varphi}e^{i\omega t}\right) = 2re^{\gamma t}\cos\left(\omega t + \varphi\right),$$
ce qui est bien de la forme donnée par le théorème, en posant $A = 2r$. On vient de montrer l'inclusion
$$S_0^{\mathbb{R}} \subset \left\{t \mapsto Ae^{\gamma t}\cos(\omega t + \varphi),\ (A,\varphi) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$
On peut aussi écrire
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y(t) = 2re^{\gamma t}\left(\cos(\varphi)\cos(\omega t) - \sin(\varphi)\sin(\omega t)\right),$$
ce qui montre l'inclusion
$$S_0^{\mathbb{R}} \subset \left\{t \mapsto e^{\gamma t}\left(\alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)\right),\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$
Les inclusions réciproques sont plus simples. $\square$

Exemple 8.

Pour chacune des équations ci-dessous, on écrit l'ensemble des solutions réelles :

1) $y'' - 2y' - 3y = 0$; 2) $y'' - 6y' + 9y = 0$; 3) $y'' + y' + y = 0$.

Exemple (L'équation $y'' + \omega^2 y = 0$: oscillateur harmonique non amorti)**.**

Soit, pour $\omega \in \mathbb{R}_+^*$ l'équation $y'' + \omega^2 y = 0$.

L'équation caractéristique est $x^2 + \omega^2 = 0$, qui a pour racines $i\omega$ et $-i\omega$ (partie réelle nulle : pas d'amortissement).

L'ensemble des solutions est $\boxed{S_0 = \{t \mapsto \alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}}$

3 Équation générale : obtenir une solution particulière.

Il s'agit ici de trouver *une* solution de l'équation

$$y'' + ay' + by = f(x) \qquad (E)$$

3.1 Trouver une solution à vue.

Lorsque le second membre f est une fonction constante, l'équation a une solution constante (cas particulier courant en physique). Plus précisément, si $a, b, c \in \mathbb{K}$ avec $b \neq 0$,

$$\boxed{\text{L'équation } y'' + ay' + by = c \text{ a pour solution particulière la fonction constante } z_p : x \mapsto \tfrac{c}{b}.}$$

Plus généralement, lorsque b sera une fonction polynomiale de degré n, on pourra chercher une solution polynomiale de degré n.

3.2 Principe de superposition.

Comme pour les ED linéaires d'ordre 1, on a un principe de superposition lorsque le second membre se présente comme somme de deux fonctions.

Proposition 9 (Principe de superposition)**.**

Soient $a, b \in \mathbb{K}$. Si

- y_1 est solution sur $\mathbb{R}$ de $y'' + ay' + by = f_1(x) \quad (E_1)$,
- y_2 est solution sur $\mathbb{R}$ de $y'' + ay' + by = f_2(x) \quad (E_2)$,

alors $y_1 + y_2$ est solution sur I de l'équation $y'' + ay' + by = f_1(x) + f_2(x) \quad (E_3)$.

Preuve. Soient y_1 et y_2 deux solutions, respectivement de (E_1) et (E_2). Elles sont par définition deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$. La fonction $y_1 + y_2$ l'est donc aussi. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(y_1+y_2)''(x) + a(y_1+y_2)'(x) + b(y_1+y_2)(x) &= (\underbrace{y_1'' + ay_1' + by_1}_{=f_1(x) \text{ car } y_1 \text{ sol. de } E_1}) + (\underbrace{y_2'' + ay_2' + by_2}_{=f_2(x) \text{ car } y_2 \text{ sol. de } E_2}) \\ &= f_1(x) + f_2(x).\end{aligned}$$

Les deux « paquets », l'un dépendant de y_1, l'autre de y_2 ont pu être formés en tirant parti de la linéarité de l'équation.

□

3.3 Obtenir une solution pour des seconds membres particuliers.

En première année, on limite l'étude des équations non-homogènes à des exemples importants pour les applications : on considère dans ce qui suit des seconds membres de la forme

$$x \mapsto Ae^{\alpha x}, \text{ avec } (A, \alpha) \in \mathbb{C}^2 \quad \text{et} \quad t \mapsto A\cos(\omega t) \quad \text{ou} \quad t \mapsto A\sin(\omega t), \text{ avec } (A, \omega) \in \mathbb{R}^2.$$

Proposition 10.

Soient $a, b, A, \alpha \in \mathbb{K}$. L'équation

$$y'' + ay' + by = Ae^{\alpha x}$$

admet une solution particulière de la forme

- $x \mapsto Be^{\alpha x}$ si α n'est pas racine de l'équation caractéristique,
- $x \mapsto Bxe^{\alpha x}$ si α est une racine simple de l'équation caractéristique,
- $x \mapsto Bx^2e^{\alpha x}$ si α est racine double de l'équation caractéristique,

où B est une constante (de $\mathbb{K}$) à déterminer.

Preuve. On va chercher une solution particulière de la forme

$$y : x \mapsto z(x)e^{\alpha x},$$

où z est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ à déterminer. Notons $u : x \mapsto e^{\alpha x}$. La fonction u est deux fois dérivable : on a $u' = \alpha u$ et $u'' = \alpha^2 u$. La fonction y est deux fois dérivable comme produit :

$$\begin{aligned} y &= zu, \\ y' &= zu' + z'u = (\alpha z + z')u, \\ y'' &= zu'' + z'u' + z'u' + z''u = (\alpha^2 z + 2\alpha z' + z'')u \end{aligned}$$

On a, u ne s'annulant pas,

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (E_0) \quad &\iff \quad y'' + ay' + by = Au \\ &\iff \quad (\alpha^2 z + 2\alpha z' + z'')\cancel{u} + a(\alpha z + z')\cancel{u} + bz\cancel{u} = A\cancel{u} \\ &\iff \quad z'' + (2\alpha + a)z' + (\alpha^2 + a\alpha + b)z \underset{(*)}{=} A \end{aligned}$$

• Si α n'est pas racine de l'équation caractéristique, il suffit de prendre z constante égale à $B := A/(\alpha^2 + a\alpha + b)$ pour satisfaire $(*)$. Cela donne bien une solution particulière du type $y : x \mapsto z(x)e^{\alpha x} = Be^{\alpha x}$.
• Si α est racine simple de l'équation caractéristique, on a $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$ et $2\alpha + a \neq 0$. Il faut donc choisir z telle que

$$z'' + (2\alpha + a)z' \underset{(*)}{=} A.$$

On prend z' constante égale à $B := A/(2\alpha + a)$ et pour cela on choisit $z : x \mapsto Bx$. Cela donne bien une solution particulière du type $y : x \mapsto z(x)e^{\alpha x} = Bxe^{\alpha x}$.
• Si α est racine double de l'équation caractéristique, on a $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$ et $2\alpha + a = 0$. Il faut donc choisir z telle que

$$z'' \underset{(*)}{=} A,$$

ce que l'on fait en prenant $z : x \mapsto \frac{A}{2}x^2$. Cela donne bien une solution particulière du type $y : x \mapsto z(x)e^{\alpha x} = Bx^2e^{\alpha x}$ (en posant $B = A/2$). On remarque que si a, b, α et A sont des nombres réels, dans les trois cas, B est réel. $\square$

Cas particulier important pour les applications : celui où le second membre est de la forme $t \mapsto A\cos(\omega t)$, ou $t \mapsto A\sin(\omega t)$. Physiquement, il s'agit de l'équation d'un oscillateur harmonique excité périodiquement. On va voir que l'on peut se ramener à une équation du type de celles de la proposition 10.

Méthode.

Soient $a, b, A \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{R}_+^*$. Soit (E) une équation du type

$$y'' + ay' + by = A\cos(\omega t) \quad \text{ou} \quad y'' + ay' + by = A\sin(\omega t).$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\cos(\omega t) = \mathrm{Re}\left(e^{i\omega t}\right) \quad \text{et} \quad \sin(\omega t) = \mathrm{Im}\left(e^{i\omega t}\right).$$

On sait trouver une solution particulière de l'équation auxiliaire complexe

$$y'' + ay' + by = Ae^{i\omega t} \quad (E_{\mathbb{C}}).$$

Reste à sélectionner la partie réelle ou la partie imaginaire pour obtenir une solution de (E).

- Si $i\omega$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, on obtiendra une solution particulière de $(E_{\mathbb{C}})$ de la forme $t \mapsto Be^{i\omega t}$ avec $B \in \mathbb{C}$. En sélectionnant la partie réelle/imaginaire, on obtient une solution du type
$$z : t \mapsto \alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t), \qquad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$
- Si $i\omega$ est racine de l'équation caractéristique, alors son conjugué aussi et l'équation caractéristique est $(x + i\omega)(x - i\omega) = x^2 + \omega^2$. L'équation complexe associée à (E) est de la forme
$$y'' + \omega^2 y = Ae^{i\omega t}$$
C'est celle d'un oscillateur harmonique non amorti excité à sa pulsation propre. On obtiendra une solution particulière de $(E_{\mathbb{C}})$ de la forme $t \mapsto Bte^{i\omega t}$ avec $B \in \mathbb{C}$.
En sélectionnant la partie réelle/imaginaire, on obtient une solution du type
$$z : t \mapsto t\left(\alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)\right), \qquad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$
Le facteur t dans traduit que le système entre en *résonance* (vidéo). Voir l'exercice 8.4.

4 Synthèse.

Méthode (Conseils pour la résolution des EDL2 à coefficients constants)**.**

- Résoudre l'équation homogène (E_0) associée. Pour cela, commencer par poser l'équation caractéristique.
- Rechercher une solution particulière de (E) avec second membre. Le cours nous apprend à le faire lorsque ce dernier est de la forme $Ae^{\alpha x}$. Il va falloir discuter selon que α est racine ou pas de l'EC.
- Si le second membre est de la forme $A\cos(\omega t)$ ou $A\sin(\omega t)$, on se ramène à un second membre exponentiel en posant une équation auxiliaire complexe.
- Exprimer l'ensemble des solutions de (E) à l'aide de la solution particulière et des solutions de (E_0).
- Conditions initiales. La notion de problème de Cauchy n'a pas été définie pour des EDL2. On vérifiera dans la pratique que pour une équation (E) donnée, il existe une unique solution de (E) satisfaisant une condition initiale du type $(y(t_0) = y_0 \;\text{ et }\; y'(t_0) = v_0)$.

Exercices

12.1 Résoudre :

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 10y = 5 \\ y(0) = 1 \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

12.2 Résoudre :

$$y'' - y' - 2y = 2\mathrm{ch}(x).$$

12.3 Résoudre :

$$y'' + 2y' + y = \cos(2t) \quad (E).$$

12.4 Résonance... ou pas

1. Excitation à une pulsation quelconque. Résoudre

$$y'' + 4y = \cos t.$$

2. Excitation à la pulsation propre : résonance. Résoudre

$$y'' + 4y = \cos(2t).$$

12.5 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle

$$2y'' + \alpha y' + \alpha y = 0.$$

On discutera la réponse en fonction du paramètre α, bien entendu.

12.6 Soit $a \in \mathbb{R}$. En discutant selon la valeur de a, résoudre

$$y'' - 2ay' + (1 + a^2)y = \sin x.$$

12.7 On considère l'équation différentielle à coefficients *non constants* ci-dessous :

$$(E) \qquad t^2y'' + 4ty' + (2 + t^2)y = 1 \quad \text{sur } \mathbb{R}_+^*.$$

Soient y une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et $z : t \mapsto t^2y(t)$.

1. Justifier que y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Démontrer que y est solution de l'équation si et seulement si z est solution d'une équation différentielle très simple que l'on précisera.
3. Donner l'ensemble des solutions de (E).

12.8 Trouver toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = f(\pi - x).$$